GEORGES MALTSINIOTIS

Privilège numérique uniforme

Astérisque, tome 194-195 (1991)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__194-195__1_0>

194-195 ASTÉRISQUE

1991

PRIVILÈGE NUMÉRIQUE UNIFORME

Georges MALTSINIOTIS

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subject Classification :
Primary 14E15, 14F20, 32-02, 32B05, 32C42, 32C45
Secondary 06F05, 06F20, 32A05, 32A10, 32C10, 32C15, 52A99

À la mémoire de Jean-Louis Verdier

Table des matières

	pages
Table des matières	1
Préface	3
Introduction	5
Chapitre 0 - Préliminaires	17
Chapitre I - Relations d'ordre et filtres associés	21
§ 1- Relations d'ordre sur $\mathbb{N}^p$	24
§ 2- Relations d'ordre sur un espace vectoriel	26
§ 3- Drapeaux orientés	29
§ 4- Filtre associé à un drapeau orienté	42
§ 5- Filtre associé à une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^p$	59
Chapitre II - Variation des exposants privilégiés	67
§ 1- Exposants privilégiés d'un idéal	69
§ 2- Le foncteur P_α	73
§ 3- Variation des exposants privilégiés d'un idéal	84
Chapitre III - Théorème de division numérique uniforme par un idéal	93
§ 1- Scissions	97
§ 2- Opérateurs élémentaires	106
§ 3- Théorème de division conditionnel	126
§ 4- Inversibilité de $v_{f;a;d;K;x}$	141
§ 5- Théorème de division numérique en un point	157
§ 6- Théorème de division numérique uniforme	171
§ 7- Théorème de privilège numérique uniforme pour un idéal	189

pages

Chapitre IV - Théorème de privilège numérique uniforme 211

§ 1- Opérateurs élémentaires et exposants privilégiés d'un sous-module 212

§ 2- Division par un sous-module en un point 227

§ 3- Théorème de division numérique uniforme par un sous-module 236

§ 4- Théorème de privilège numérique uniforme (cas général) 250

Appendice I - Fonctions modérées 271

§ 1- Propriétés élémentaires de fonctions modérées 272

§ 2- Fonctions modérées sur un ouvert de $\mathbb{C}^p$ 290

Appendice II - Théorème de privilège numérique uniforme pour un morphisme de modules cohérents 297

§ 1- Compléments sur les scissions 298

§ 2- Polycylindres privilégiés 302

§ 3- Théorème de privilège numérique uniforme pour un morphisme 307

§ 4- Théorème de privilège numérique uniforme le long d'un "diviseur à l'infini" 318

Appendice III - Cohomologie modérée et "GAGA" non propre 333

Index des notations 353

Index terminologique 359

Bibliographie 361

Postface 365

Abstract 367

PRÉFACE

Ce livre est consacré à l'étude de majorations uniformes de solutions particulières de systèmes d'équations linéaires à coefficients holomorphes, qui sont présentés en détail dans la première page de l'introduction. Bien qu'il s'agisse d'une question élémentaire et fondamentale, on ne disposait, jusqu'à ce jour, d'aucune étude complète de ce problème. J'espére que cet ouvrage servira à combler cette lacune. Le champ d'applications directes est vaste. En appendice III, on en esquisse une plus indirecte. On y explique comment on pourrait procéder pour fonder une théorie de cohomologie modérée permettant de généraliser le "GAGA" de J. P. Serre [50] dans le cas non propre.

L'outil mathématique qui est au centre de ce travail est le théorème de division de Hironaka avec ses diverses variantes. Les idées de base sont la semi-continuité du polygone de Newton, la stratification qui la manifeste et le "comportement modéré" de la division de Hironaka sur chaque strate. Des méthodes analogues ont été utilisées dans le passé (par Hironaka entre autres !) et plus récemment par E. Bierstone et P. D. Milman [57], dans un contexte différent. Dans une postface, j'expliquerai le rapport qui existe entre leur travail et le mien. Au chapitre IV, une "astuce" permet de ramener toute division par un sous-module à une division par un idéal (sur un autre espace), ce qui s'avère crucial pour la démonstration de certains résultats. Je pense d'ailleurs que le cadre naturel du théorème de division est celui des idéaux, le chapitre IV étant une illustration de cette affirmation (mais cela n'est peut être qu'une question de goût). Ce point de vue permet, en tout cas, de démontrer une version plus générale de ce théorème.

Toutes les démonstrations dans ce travail sont détaillées et aussi complètes que possible. C'est un pari volontaire, même si cela est aux dépens de la concision du texte. Cette règle ne s'applique évidemment pas à l'appendice III qui n'est que le plan d'un travail qui fera l'objet d'une publication ultérieure.

La démonstration des énoncés de cet appendice nécessite, en plus des résultats du présent travail, une version très fine de la théorie de la voûte étoilée de Hironaka. Par ailleurs, les définitions qui y figurent ont été volontairement "simplifiées" pour éviter d'introduire la notion d'éclatements permis.

Les références internes sont données suivant le système décimal. Par exemple, dans III, 4.3.2, le chifre III indique le chapitre, le chiffre 4 le paragraphe et le chiffre 3 la section du paragraphe. À l'intérieur du même chapitre, on supprimera la mention du chapitre. On se réfère aux appendices selon le même principe en ajoutant le préfixe App. Les chiffres entre crochets correspondent aux ouvrages cités dans la bibliographie.

Je remercie Adrien Douady qui m'a initié à la géométrie analytique, ainsi que Jean Giraud qui m'a guidé dans les "forêts" et autres "jardins", "bosquets" et "polybosquets" de Hironaka. Je remercie Chantal Postadjian qui a assumé courageusement la tâche ingrate et particulièrement difficile de la frappe de ce texte rempli de formules et de symboles.

Ce livre est dédié à la mémoire de Jean-Louis Verdier. Au cours des années, ses encouragements, ses conseils, sa rigueur et son perfectionnisme, aussi bien sur le fond que sur la forme, m'ont aidé à achever cet ouvrage. Sans lui, ce travail n'aurait sans doute jamais eu sa forme actuelle et serait resté au stade des versions préliminaires et incomplètes.

INTRODUCTION

1. L'axe principal de ce travail est l'étude du problème suivant. On considère un ouvert U de $\mathbb{C}^p$ et un système d'équations linéaires à coefficients dans $\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$, c'est-à-dire une matrice $(f_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$, où $f_{ij} \in \Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$, ou encore, ce qui est équivalent, un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules

$$f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U^n \quad .$$

Pour tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$ $(K = K_1\times\ldots\times K_p$, où pour tout i , $1 \leq i \leq p$, K_i est un compact convexe d'intérieur non vide de $\mathbb{C}$) contenu dans U , si l'on désigne par $B(K)$ l'algèbre de Banach normée des fonctions continues sur K et analytiques sur $\mathring{K}$, munie de la norme $\|\cdot\|_K$, définie par

$$\|g\|_K = \sup_{x\in K}|g(x)| \quad , \text{ pour } \quad g \in B(K) \quad ,$$

le morphisme f définit, par restriction des f_{ij} sur K, une application $B(K)$-linéaire continue

$$B(K;f) : B(K)^m \longrightarrow B(K)^n$$

qu'on peut aussi considérer comme un système de n équations linéaires à m inconnues à coefficients dans $B(K)$. On cherche un procédé permettant d'associer $\mathbb{C}$-linéairement à tout élément g de $B(K)^n$, c'est-à-dire à tout second membre de notre système d'équations, un élément h de $B(K)^m$ qui en soit une solution, si $g \in \mathrm{Im}(B(K;f))$, et cela d'une façon continue. Cela équivaut à définir une application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\sigma : B(K)^n \longrightarrow B(K)^m$$

telle que

$$B(K;f) \circ \sigma \circ B(K;f) = B(K;f) \quad .$$

On dit alors que σ est une scission de $B(K;f)$. Cela n'est pas toujours possible. Si l'on désigne par $\mathcal{Q}$ le $\mathcal{O}_U$-module cohérent conoyau du morphisme f , l'existence d'un tel σ équivaut à affirmer que le polycylindre K est privilégié pour $\mathcal{Q}$, au sens de Douady [7]. Le but de ce travail est de définir des scissions $\mathbb{C}$-linéaires continues σ_K de $B(K;f)$, de telle sorte qu'on puisse "contrôler" la croissance de la norme de σ_K en fonction du polycylindre privilégié K , du moins pour K "assez petit". En termes de système d'équations linéaires, il s'agit de trouver un procédé $\mathbb{C}$-linéaire continu de détermination d'une solution particulière, avec "contrôle" de sa norme, en fonction de celle du second membre et cela d'une façon "uniforme" en fonction du compact privilégié

K .

Il existe un cas simple. C'est le cas où le conoyau $\mathcal{Q}$ de f est un $\mathcal{O}_U$-module localement libre. Dans ce cas, tout polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U est privilégié pour $\mathcal{Q}$, et comme f possède localement des scissions $\mathcal{O}_U$-linéaires, il est facile de voir qu'il existe une fonction continue

$$\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

et un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de U tel que pour tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$, contenu dans au moins un des U_i , il existe une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue σ_K de B(K;f) (qui peut même être, dans ce cas, choisie B(K)-linéaire) telle que

$$\|\sigma_K\| \leq \sup_{x\in K} \psi(x) \quad .$$

Le cas général est beaucoup plus difficile. Le résultat le plus fin obtenu dans cette direction, avant ce travail, est dû à J.L. Verdier qui s'inspirant des méthodes de B. Malgrange [56] et A. Douady [7] démontre, dans un texte inédit, le théorème suivant :

<u>THÉORÈME</u> (J.L. Verdier).- *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$ *et* $f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U^n$ *un morphisme de* $\mathcal{O}_U$*-modules. Alors pour tout point* x *de* U *il existe des nombres réels* ε, δ *et* A , $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\delta \in \mathbb{R}_+$, $A \in \mathbb{R}_+$ *et un élément* $d = (d_1,\dots,d_p)$ *de* $\mathbb{N}^p$ *tels que pour tout polydisque fermé* K *de centre* x *et de polyrayon* $\rho = (\rho_1,\dots,\rho_p)$, $\rho \in (\mathbb{R}_+^*)^p$, *les inégalités*

$$\rho_1 < \varepsilon \,, \quad \rho_2 < \rho_1^\delta, \dots, \rho_p < \rho_{p-1}^\delta$$

impliquent que K *soit contenu dans* U *et qu'il existe une scission* $\mathbb{C}$*-linéaire continue* σ_K *de* B(K;f) *telle que*

$$\|\sigma_K\|_K \leq A/\rho^d$$

(où $\rho^d = \prod_{i=1}^{p} \rho_i^{d_i}$ *)* .

Le but principal de cet ouvrage est d'étudier la variation de ε , δ , A et d en fonction du point x de U . On obtient le théorème suivant :

<u>THÉORÈME</u>.- *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$ *et* $f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U^n$ *un morphisme de* $\mathcal{O}_U$*-modules. Il existe une stratification* $\mathbb{C}$*-analytique* $(X_j)_{j\in J}$ *de* U *et pour tout* j , $j \in J$, *un élément* d_j *de* $\mathbb{N}^p$, *un nombre réel* δ_j , $\delta_j \in \mathbb{R}_+^*$, *et deux fonctions continues*

$$\varphi_j : X_j \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad et \quad \psi_j : X_j \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad ,$$

modérées (à croissance polynomiale) le long de $\overline{X}_j - X_j$ *, où* $\overline{X}_j$ *désigne l'adhérence de* X_j *dans* U *, tels que pour tout point* x *de* X_j *et tout polydisque fermé* K *de centre* x *et de polyrayon* $\rho = (\rho_1,\dots,\rho_p)$, $\rho \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ *, les inégalités*

$$\text{(I)} \qquad \rho_1 < 1/\varphi_j(x) \ , \quad \rho_2 < \rho_1^{\delta_j}, \dots, \rho_p < \rho_{p-1}^{\delta_j}$$

impliquent que K *soit contenu dans* U *et qu'il existe une scission* $\mathbb{C}$*-linéaire continue* σ_K *de* $B(K;f)$ *telle que*

$$\|\sigma_K\|_K \leq \psi_j(x)/\rho^{d_j} \ .$$

On remarque que les inégalités ci-dessus impliquent, en particulier, que le polydisque compact K est privilégié pour le conoyau de f . C'est pour cette raison qu'on appellera ce théorème, théorème de "privilège numérique uniforme".

En fait, on obtient un énoncé plus précis et plus général. Plus précis, car on donne des formules explicites de d_j et δ_j en fonction des exposants privilégiés minimaux du sous-module $\mathrm{Im}(f)$ de $\mathcal{O}_U^n$ (définis dans le chapitre IV) et on exprime φ_j et ψ_j en fonction des dérivées partielles des coefficients de la matrice définissant le morphisme f , la stratification $(X_j)_{j\in J}$ étant construite canoniquement et ne dépendant que du sous-module $\mathrm{Im}(f)$ de $\mathcal{O}_U^n$. D'autre part, on remplace les inégalités (I) par des conditions plus générales (dépendant du choix d'une relation de bon ordre sur $\mathbb{N}^p$), conditions qu'on étend aux polycylindres (tandis que dans l'énoncé précédent on se limite aux polydisques). La version précise du théorème est nouvelle même dans le cas "ponctuel", et peut être utile à la majoration uniforme des normes des scissions des morphismes appartenant à une famille infinie.

L'approche de J.L. Verdier ne peut pas être adaptée pour démontrer le théorème de privilège numérique uniforme. En effet, elle repose sur un dévissage du conoyau de f qui dépend du point x et se prête fort mal à une étude uniforme. La stratégie adoptée ici est basée sur le théorème de division par un idéal de Hironaka ([24] et [1]) et Grauert [55] . On en démontre une forme plus précise (numérique uniforme) généralisant la version Hironaka du théorème.

Le théorème de privilège numérique uniforme peut s'appliquer à l'étude de nombreux problèmes en rapport avec la majoration uniforme de solutions de systèmes d'équations linéaires à coefficients $\mathbb{C}$-analytiques. La principale application esquissée dans ce travail concerne l'établissement de théories cohomologiques "avec conditions de croissance". Pour cela, on étend le théorème de privilège numérique uniforme aux morphismes de modules cohérents (pas forcément libres), en suivant d'assez près des idées de J.L. Verdier, et ensuite on en déduit une variante utile à l'étude de la variation de la norme des scissions construites dans ce théorème quand "on s'approche" d'un fermé analytique. On utilise ce résultat pour démontrer l'exactitude à gauche d'un foncteur "sections modérées", ce qui permet de définir une cohomologie "modérée". On en déduit une généralisation du théorème de "GAGA" de J.-P. Serre [50] pour les variétés algébriques non nécessairement propres.

Pour résumer, les deux théories qui ont le plus influencé ce travail sont la théorie du "privilège" et la théorie de "division". Les premiers "théorèmes des voisinages privilégiés" sont dus à H. Cartan [54] et H. Grauert [22] . La notion de compact privilégié qui est implicite tout le long de cet ouvrage (bien qu'elle ne soit explicitement mentionnée qu'à partir de l'appendice II) a été introduite par A. Douady [7] à qui l'on doit l'utilisation systématique des techniques des espaces de Banach en géométrie analytique. Une caractérisation particulièrement élégante des polycylindres privilégiés a été obtenue par G. Pourcin [48] . Le théorème de division de Hironaka ([24] et [1]) et Grauert [55] , descendant lointain du théorème de préparation de Weierstrass [53] , a été amélioré et simplifié par A. Galligo ([16] et [18]). Le lien entre ces deux théories est la notion de scission continue introduite par B. Malgrange [56] dont la contribution est grande aussi bien dans la théorie du privilège que dans le développement de versions différentiables du théorème de division. La notion de scission a été exploitée dans l'étude numérique du privilège par J.L. Verdier.

Le concept de fonction modérée a été introduit par P. Deligne [6] , et son intérêt découle des inégalités de Łojasiewicz [38]. Les travaux de Deligne, en vue d'une généralisation du fameux "GAGA" de J.-P. Serre [50], ainsi que la théorie de la voûte étoilée de Hironaka [27], inspirent largement les idées développées dans l'appendice III.

Les techniques utilisées dans ce travail sont celles de la géométrie analytique. Ce sont Henri Cartan et ses élèves qui en ont posé les fondements dans le célèbre séminaire à l'Ecole Normale Supérieure. Des théorèmes devenus classiques comme les théorèmes A et B de Cartan ou le théorème de cohérence de Oka sont utilisés sans référence. Les contributions ultérieures de Grauert et de Hironaka sont capitales. Les théorèmes de l'image directe de Grauert et de désingularisation de Hironaka sont implicitement utilisés dans l'appendice III.

Dans la suite de cette introduction, on exposera sommairement les notions et les méthodes utilisées pour démontrer le théorème de privilège numérique uniforme, ainsi que les résultats intermédiaires présentant un intérêt indépendant.

2. Pour toute relation de bon ordre $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$ (il en existe et on en donnera une classification complète au chapitre I, §3, l'exemple le plus simple étant celui de l'ordre antilexicographique $\leqq_L$, défini par

$$d \leqq_L d' \Longleftrightarrow (d=d') \text{ ou } [\exists i_o,\ 1\leqq i_o \leqq p : [(d_{i_o} < d'_{i_o}) \text{ et } (\forall i,\ i_o < i \leqq p : d_i = d'_i)]]$$

pour $d=(d_1,\dots,d_p)$, $d'=(d'_1,\dots,d'_p)$, $d\in\mathbb{N}^p$, $d'\in\mathbb{N}^p$) et toute série convergente à p variables f , $f\neq 0$, $f=\sum_{d\in\mathbb{N}^p} a_d X^d$,
(où $X^d = X_1^{d_1}\bullet\dots\bullet X_p^{d_p}$ si $d=(d_1,\dots,d_p)$) , on définit l'exposant privilégié de f pour $\leqq_\alpha$ comme étant le plus petit élément de l'ensemble

$$E(f) = \{d\in\mathbb{N}^p : a_d \neq 0\}$$

pour la relation de bon ordre $\leqq_\alpha$, noté $v_\alpha(f)$. Pour tout ε , $\varepsilon\in\mathbb{R}^*_+$, et tout d et d' , $d=(d_1,\dots,d_p)$, $d'=(d'_1,\dots,d'_p)$, $d\in\mathbb{N}^p$, $d'\in\mathbb{N}^p$, on pose

$$V_{d'-d;\varepsilon} = \{(\rho_1,\dots,\rho_p)\in(\mathbb{R}^*_+)^p : \prod_{i=1}^{p} \rho_i^{d'_i-d_i} < \varepsilon\} .$$

Au chapitre I, §4, on démontre que la famille

$$(V_{d'-d;\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}^p,\ d'\in\mathbb{N}^p,\ d<_\alpha d',\ \varepsilon\in\mathbb{R}^*_+}$$

est un système de générateurs d'un filtre sur $(\mathbb{R}^*_+)^p$, noté $\mathcal{F}_\alpha$, plus fin que la trace sur $(\mathbb{R}^*_+)^p$ du filtre des voisinages de zéro dans $\mathbb{R}^p$.

Si l'on désigne par N l'application de $(\mathbb{C}^*)^p$ dans $(\mathbb{R}^*_+)^p$, définie par

$$N(x_1,\dots,x_p) = (|x_1|,\dots,|x_p|) \text{ , pour } (x_1,\dots,x_p)\in(\mathbb{C}^*)^p ,$$

on vérifie aisément que la famille

$$(N^{-1}(A))_{A\in\mathcal{F}}$$

est une base d'un filtre sur $(\mathbb{C}^*)^p$, noté $\mathcal{F}'_\alpha$, tel que pour toute série convergente f , $f\neq 0$, $f=\sum_{d\in\mathbb{N}^p} a_d X^d$, on ait

$$\lim_{\mathcal{F}'_\alpha} (f/a_{d_o} X^{d_o}) = 1 ,$$

où $d_o = v_\alpha(f)$. En plus, le filtre $\mathcal{F}'_\alpha$ est la trace sur $(\mathbb{C}^*)^p$ d'un filtre plus fin que le filtre des voisinages de zéro, possédant une base formée de parties ouvertes de $\mathbb{C}^p$.

Dans ce travail on s'intéresse davantage au filtre $\mathcal{F}_\alpha$ qu'au filtre $\mathcal{F}'_\alpha$ et on a besoin d'une description parfaitement explicite d'une base de ce filtre. Ce sera le but principal du chapitre I. On signale simplement ici que dans le cas où la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ est la relation d'ordre antilexicographique $\leqq_L$, le filtre $\mathcal{F}_\alpha$ est le filtre engendré par la base de filtre $(E_{\delta;\varepsilon})_{\delta\in\mathbb{R}_+;\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*}$, où pour tout δ et ε , $\delta\in\mathbb{R}_+$, $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$,

$$E_{\delta;\varepsilon} = \{(\rho_1,\dots,\rho_p)\in(\mathbb{R}_+^*)^p : \rho_1<\varepsilon,\ \rho_2<\rho_1^\delta,\dots,\rho_p<\rho_{p-1}^\delta\} \quad .$$

3. Dans le chapitre II, §1, on introduit la notion de l'ensemble des exposants privilégiés d'un idéal. Etant donné un idéal I de l'anneau des séries convergentes à p variables $\mathbb{C}\{X\} = \mathbb{C}\{X_1,\dots,X_p\}$, on dit que d , $d\in\mathbb{N}^p$, est un exposant privilégié de I pour $\leqq_\alpha$ s'il existe une série convergente f , $f\neq 0$, $f\in I$, telle que $d=v_\alpha(f)$ et on désigne par $P_{\alpha;I}$ l'ensemble de ces exposants privilégiés. Si I est un idéal principal engendré par la série convergente f , $f\neq 0$, alors il est facile de voir que

$$P_{\alpha;I} = d+\mathbb{N}^p$$

où $d=v_\alpha(f)$. Dans le cas général, si l'on désigne par $M_{\alpha;I}$ l'ensemble des éléments minimaux de $P_{\alpha;I}$ pour la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$ (qui est un ensemble fini (I,1.1)), on vérifie tout aussi facilement que

$$P_{\alpha;I} = \bigcup_{d\in M_{\alpha;I}} (d+\mathbb{N}^p) \quad .$$

Mais alors il n'est pas toujours vrai que si $(f_i)_{1\leqq i\leqq m}$ désigne un système de générateurs de l'idéal I , on ait

$$M_{\alpha;I}\subset\{d_1,\dots,d_m\} \quad ,$$

où pour tout i , $1\leqq i\leqq m$, $d_i=v_\alpha(f_i)$. En revanche, on démontre (III,5.4.3) que si $(f_i)_{1\leqq i\leqq m}$ désigne une famille d'éléments de I telle que

$$M_{\alpha;I}\subset\{d_1,\dots,d_m\}$$

où pour tout i , $1\leqq i\leqq m$, $d_i=v_\alpha(f_i)$, alors la famille $(f_i)_{1\leqq i\leqq m}$ engendre l'idéal I .

4. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^p$. Pour tout point x de U et toute fonction analytique f , $f\in\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$, on désigne par f_x la série de Taylor de f au point x

$$f_x = \sum_{d\in\mathbb{N}^p} \frac{1}{d!}\frac{\partial^{|d|}f}{\partial X^d}(x)\, X^d$$

(où $d! = \prod_{i=1}^p d_i!$ et $\dfrac{\partial^{|d|}f}{\partial X^d} = \dfrac{\partial^{d_1+\dots+d_p}f}{\partial X_1^{d_1}\dots\partial X_p^{d_p}}$, si $d=(d_1,\dots,d_p)$) et pour tout idéal cohérent $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_U$, on désigne par $\mathcal{J}_x$ l'idéal de $\mathbb{C}\{X\}$ engendré par les séries convergentes f_x pour $f \in \Gamma(U',\mathcal{J})$, où U' est un ouvert de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U et contenant x (ces notations sont conformes aux notations classiques modulo l'identification de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p,x}$ à $\mathbb{C}\{X\}$ moyennant les coordonnées $X_1,\dots,X_p$ de $\mathbb{C}^p$) . L'objet du chapitre II est l'étude de la variation de $P_{\alpha;\mathcal{J}_x}$ ou, ce qui revient au même, de $M_{\alpha;\mathcal{J}_x}$ quand x varie dans U .

Dans le cas où $\mathcal{J}$ est un idéal principal (qu'on supposera, pour simplifier, nul sur aucune composante connexe de U) , c'est-à-dire où il existe f , $f \in \Gamma(U,\mathcal{J})$, (identiquement nul sur aucune composante connexe de U) qui engendre $\mathcal{J}$ au-dessus de U , cette étude est simple. En effet dans ce cas, comme pour tout x , $x \in U$, $M_{\alpha;\mathcal{J}_x} = \{d\}$ et $P_{\alpha,\mathcal{J}_x} = d + \mathbb{N}^p$, où $d = v_\alpha(f_x)$, il suffit d'étudier la variation de $v_\alpha(f_x)$. Or, si pour tout d , $d \in \mathbb{N}^p$, on désigne par $\mathcal{J}_d$ l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_U$ engendré par la famille

$$\left(\frac{\partial^{|d'|}f}{\partial X^{d'}}\right)_{d' \in \mathbb{N}^p\,,\; d' <_\alpha d}$$

et par Y_d le sous-espace analytique fermé de U défini par l'idéal $\mathcal{J}_d$, alors la famille $(Y_d)_{d\in\mathbb{N}^p}$, indexée par l'ensemble bien ordonné $\mathbb{N}^p$ par $\leqq_\alpha$, est une famille décroissante pour la relation d'inclusion, on a $Y_0 = U$, $\bigcap_{d\in\mathbb{N}^p} Y_d = \emptyset$; et si pour tout d , $d \in \mathbb{N}^p$, on pose

$$Z_d = Y_d - Y_{s_\alpha(d)}$$

où $s_\alpha(d)$ désigne le successeur de d pour la relation de bon ordre $\leqq_\alpha$, la famille $(Z_d)_{d\in\mathbb{N}^p}$ est localement finie, et pour tout x , $x \in U$, on a $x \in Z_d$, si et seulement si $v_\alpha(f_x) = d$. On en déduit d'une part, qu'il existe une stratification $\mathbb{C}$-analytique $(Z'_j)_{j\in J}$, telle que pour tout j , $j \in J$, et tout x et x' , $x \in Z'_j$, $x' \in Z'_j$, on ait $v_\alpha(f_x) = v_\alpha(f_{x'})$ et d'autre part, que pout tout point x_0 , $x_0 \in U$, il existe un ouvert U'de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U et contenant x_0 , et une famille finie $(d_i)_{1\leqq i\leqq m}$ d'éléments de $\mathbb{N}^p$ tels que pour tout i , $1 \leqq i \leqq m$, on ait $d_i <_\alpha d_0$, où $d_0 = v_\alpha(f_{x_0})$, et tels que pour tout x , $x \in U'$, il existe i , $0 \leqq i \leqq m$, tel que $v_\alpha(f_x) = d_i$.

Dans le cas général, l'étude de la variation de $M_{\alpha;\mathcal{J}_x}$ (ou de $P_{\alpha;\mathcal{J}_x}$) est beaucoup plus difficile. On est amené à introduire un bifoncteur covariant de la catégorie des $\mathcal{O}_U$-modules cohérents dans celle des modules gradués sur la $\mathcal{O}_U$-algèbre des polynômes à p indéterminées $\mathcal{O}_U[T_1,\dots,T_p]$, graduée par $\mathbb{N}^p$.
En démontrant un théorème de commutativité de ce foncteur au produit tensoriel, sous des hypothèses de transversalité, par un argument délicat de passage à la limite par récurrence transfinie et platitude supérieure (II,2.6.3), on établit

dans le cas général aussi, l'existence d'une stratification $\mathbb{C}$-analytique $(Z_j)_{j\in J}$ de U telle que pour tout j, $j\in J$, et tout x et x', $x\in Z_j$, $x'\in Z_j$ on ait $M_{\alpha;J_x} = M_{\alpha;J_{x'}}$ (donc aussi $P_{\alpha;J_x} = P_{\alpha;J_{x'}}$) (II, 3.5). C'est le premier résultat important de ce travail. En fait c'est un résultat beaucoup plus précis que l'on démontre (II, 3.6).

PROPOSITION.- *Pour tout fermé analytique irréductible* Y *de* U, *il existe un fermé analytique* S *de* Y *d'intérieur vide (dans* Y*) et une famille finie* $(d_j)_{1\leq j\leq m}$ *d'éléments deux à deux distincts de* $\mathbb{N}^p$ *tels que pour tout* x, $x\in Y-S$, *on ait* $M_{\alpha;J_x} = \{d_1,\ldots,d_m\}$, *et pour tout ouvert de Stein* U' *relativement compact dans* U *rencontrant* Y, *il existe un ensemble fini* I, *une famille* $(S_i)_{i\in I}$ *de fermés analytiques d'intérieur vide de* $Y\cap U'$ *et une famille* $(F_{ij})_{i\in I,1\leq j\leq m}$ *d'éléments de* $\Gamma(U'\times U',\mathcal{O}_{U\times U})$ *tels que :*

i) $\bigcap_{i\in I} S_i \subset S\cap U'$;

ii) *pour tout* i *et* j, $i\in I$, $1\leq j\leq m$, *et tout* x_o, $x_o\in Y\cap U'$, *si l'on désigne par* f_{ij} *l'élément de* $\Gamma(U',\mathcal{O}_U)$ *défini par* $f_{ij}(x) = F_{ij}(x_o,x)$, *pour* $x\in U'$, *on a :*

a) $f_{ij}\in\Gamma(U',J)$;

b) $v_\alpha(f_{ijx_o}) \geq_\alpha d_j$ *et* $v_\alpha(f_{ijx_o}) = d_j$, *si* $x_o\in Y\cap U'-S_i$.

5. Les chapitres III et IV sont consacrés à la démonstration du théorème énoncé au paragraphe 1, sous une forme un peu plus générale. Pour ne pas trop charger cet exposé préliminaire, on se limitera au cas des polycylindres particuliers que sont les polydisques fermés. On rappelle qu'un polydisque fermé de centre x et de polyrayon ρ, où $x=(x_1,\ldots,x_p)$, $x\in\mathbb{C}^p$ et $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_p)$, $\rho\in(\mathbb{R}_+^*)^p$, est la partie $\bar{D}(x;\rho)$ de $\mathbb{C}^p$ définie par

$$\bar{D}(x;\rho) = \{(y_1,\ldots,y_p)\in\mathbb{C}^p : \forall i,\ 1\leq i\leq p : |y_i-x_i|\leq\rho_i\} .$$

Etant donné une relation de bon ordre $\leq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit $\leq$ sur $\mathbb{N}^p$ et un point x de $\mathbb{C}^p$, on dira qu'une propriété est satisfaite pour tout polydisque fermé de centre x et de polyrayon suffisamment effilé pour $\leq_\alpha$, si l'ensemble des polyrayons ρ, $\rho\in(\mathbb{R}_+^*)^p$, pour lesquels le polydisque $\bar{D}(x;\rho)$ satisfait à cette propriété, appartient au filtre F_α défini précédemment. Au chapitre IV on démontre le théorème suivant (IV, 4.4.2).

THÉORÈME.- *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$ *et* $f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U^n$ *un morphisme de* $\mathcal{O}_U$*-modules. Il existe une stratification* $\mathbb{C}$*-analytique* $(X_j)_{j\in J}$ *de* U *et pour tout* j , $j \in J$, *un élément* d_j *de* $\mathbb{N}^p$ *et une fonction continue* $\psi_j : X_j \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, *modérée le long de* $\overline{X}_j - X_j$, *tels que pour tout point* x *de* X_j *et tout polydisque fermé* K *de centre* x *et de polyrayon* ρ *suffisamment effilé pour* $\leqq_\alpha$, K *soit contenu dans* U *et qu'il existe une scission* $\mathbb{C}$*-linéaire continue* σ_K *de* $B(K;f)$ *telle que*

$$\|\sigma_K\|_K \leqq \psi_j(x)/\rho^{d_j} .$$

En fait, on démontre un résultat beaucoup plus précis en donnant explicitement, en fonction du point x , un ensemble appartenant au filtre F_α , tel que si le polyrayon ρ appartient a cet ensemble, le polydisque fermé $\overline{D}(x;\rho)$ satisfasse à la conclusion du théorème, et en explicitant d_j et ψ_j - résultat qui est d'ailleurs essentiel dans les applications. L'énoncé du théorème donné au paragraphe 1 est le cas particulier du théorème dans le cas de la relation d'ordre antilexicographique.

Dans le chapitre III, on étudie le cas où $n = 1$. Alors la matrice du morphisme

$$f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U$$

est une matrice ligne $(f_1,\ldots,f_m)$ et son image un idéal cohérent $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_U$. Dans ce chapitre on établit une forme extrêmement précise du théorème de division par un idéal (théorème de "division numérique uniforme" par un idéal (III,6.4.2)). Pour tout point x de U , tel que pour tout i , $1 \leqq i \leqq m$, $f_{ix} \neq 0$, et pour tout polydisque fermé K , de centre x et de polyrayon $\rho = (\rho_1,\ldots,\rho_p)$ suffisamment effilé pour $\leqq_\alpha$, on construit une application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\sigma_{f;K} : B(K) \longrightarrow B(K)^m$$

(absolument explicite) telle que

$$\|\sigma_{f;K}\|_K \leqq 2^{|d_1|+\ldots+|d_m|+m} . \sup_{1\leq i\leq m} (1/|a_i|).1/\rho^{d_o} ,$$

où pour tout i , $1 \leqq i \leqq m$, $d_i = v_\alpha(f_{ix})$, $d_i = (d_{i1},\ldots,d_{ip})$, $|d_i| = \sum_{j=1}^{p} d_{ij}$,

$a_i = \dfrac{\partial^{|d_i|} f_i}{\partial X^{d_i}}(x)$ et $d_o = (d_{o1},\ldots,d_{op})$, où pour tout j , $1 \leqq j \leqq p$,

$d_{oj} = \sup_{1\leq i\leq m} d_{ij}$ ($d_o = \sup_{1\leq i\leq m} d_i$ pour la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$)

et telle que

$$\sigma_{f;K} \circ B(K;f) \circ \sigma_{f;K} = \sigma_{f;K}$$

(c'est-à-dire telle que $B(K;f)$ soit une scission de $\sigma_{f;K}$) . La difficulté réside dans le fait que généralement $\sigma_{f;K}$ n'est pas une scission de $B(K;f)$. On démontre que les conditions suivantes sont équivalentes

i) $\sigma_{f;K}$ est une scission de $B(K;f)$;

ii) $M_{\alpha;J_x} \subset \{d_1,\ldots,d_m\}$.

Or, on l'a déjà signalé, la condition (ii) n'est pas en général satisfaite par un système de générateurs quelconque de l'idéal J , et l'application $\sigma_{f;K}$ ne satisfait donc pas en général à la conclusion du théorème. Pour contourner cette difficulté on procède de la façon suivante. On considère une stratification $\mathbb{C}$-analytique $(X_j)_{j\in J}$ de U telle que pour tout j , $J \in J$, et tout x et x' , $x \in X_j$, $x' \in X_j$, on ait $M_{\alpha;J_x} = M_{\alpha;J_{x'}}$, dont l'existence est démontrée au chapitre II. Pour tout point x , $x \in X_j$, on peut choisir un système de générateurs $(g_i)_{1\leq i\leq m'}$ de J au voisinage de x tel que

$$M_{\alpha;J_x} = \{d'_1,\ldots,d'_{m'}\} \ ,$$

où pour tout i , $1 \leq i \leq m'$, $d'_i = v_\alpha(g_{ix})$. Si l'on désigne par g le morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules

$$g : \mathcal{O}_U^{m'} \longrightarrow \mathcal{O}_U$$

défini par la matrice ligne $(g_1,\ldots,g_{m'})$ au voisinage de x , pour tout polydisque fermé K de centre x et de polyrayon suffisamment effilé pour $\leq_\alpha$, $\sigma_{g;K}$ est une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue de $B(K;g)$, et par une méthode standard on peut en déduire une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue de $B(K;f)$. Mais si l'on choisit la famille de générateurs $(g_i)_{1\leq i\leq m'}$ arbitrairement, comme la majoration de la norme de $\sigma_{g;K}$ dépend des dérivées $\dfrac{\partial^{|d'_i|} g_i(x)}{\partial X^{d'_i}}$, on n'obtient aucun résultat uniforme. C'est là qu'intervient la proposition 3.6 du chapitre II, énoncée ci-dessus, et en surmontant de nombreuses difficultés techniques (d'autant plus que l'on cherche à expliciter un ensemble appartenant au filtre F_α qui précise le "suffisamment effilé"), on arrive à en déduire le théorème pour le cas $n = 1$. On serait tenté d'en déduire le cas général par dévissage du $\mathcal{O}_U$-module cohérent $\mathrm{Im}(f)$. Mais en procédant ainsi on ne parviendrait à définir la stratification que localement, stratification qui serait d'ailleurs dépourvue de toute signification intrinsèque. On procède donc autrement et cela est développé au chapitre IV. On y définit la notion des exposants privilégiés d'un sous-$\mathcal{O}_U$-module cohérent de $\mathcal{O}_U^n$ et on y démontre un théorème de "division numérique uniforme" par un tel sous-module, en se ramenant au cas d'un idéal comme suit.

Soient

$$f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U^n$$

un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules, $M = \mathrm{Im}(f)$ et $Q = \mathrm{coker}(f)$. La surjection

$$\mathcal{O}_U^n \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

définit une surjection

$$S(\mathcal{O}_U^n) \longrightarrow S(Q) \longrightarrow 0$$

où $S(\mathcal{O}_U^n)$ (resp. $S(Q)$) désigne l'algèbre symétrique de $\mathcal{O}_U^n$ (resp. de Q).
On en déduit une immersion fermée

$$\mathrm{Specan}(S(Q)) \hookrightarrow \mathrm{Specan}(S(\mathcal{O}_U^n)) \quad .$$

Or, $\mathrm{Specan}(S(\mathcal{O}_U^n))$ est canoniquement isomorphe à $U \times \mathbb{C}^n$ et $\mathrm{Specan}(S(Q))$ s'identifie par cette immersion à un sous-espace analytique fermé Y de $U \times \mathbb{C}^n$.
Si l'on désigne par $J(M)$ l'idéal de définition de Y dans $U \times \mathbb{C}^n$, $J(M)$ est un idéal cohérent de $\mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}^n}$ et on ramène la "division" par le sous-module M de $\mathcal{O}_U^n$ à la "division" par l'idéal $J(M)$ de $\mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}^n}$. On en déduit le théorème dans le cas général, d'une façon analogue à celle décrite ci-dessus dans le cas où $n = 1$.

6. Dans l'appendice I, on démontre les propriétés des fonctions modérées (à croissance polynomiale) utilisées dans ce travail. Dans l'appendice II, on généralise le théorème principal au cas d'un morphisme de faisceaux cohérents et on en donne une formulation non-stratifiée. Dans l'appendice III, on esquisse une application en vue d'établir des théories de cohomologie avec des conditions de croissance à "l'infini" et on obtient unc généralisation de "GAGA" de J.-P. Serre pour les variétés algébriques non nécessairement propres.

CHAPITRE 0
PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre on rassemble quelques notations, conventions et définitions utilisées tout le long de ce travail.

Soit p un entier, $p \in \mathbb{N}$. Pour tout élément d, $d = (d_1,\ldots,d_p)$, de $\mathbb{N}^p$ on pose

$$|d| = \sum_{i=1}^{p} d_i \quad , \quad d! = \prod_{i=1}^{p} d_i! \quad ,$$

pour tout a, $a = (a_1,\ldots,a_p)$, où $a_1,\ldots,a_p$ sont des éléments d'un monoïde noté multiplicativement, on pose

$$a^d = a_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot a_p^{d_p}$$

et pour toute fonction $\mathbb{C}$-analytique de p variables $X_1,\ldots,X_p$ on note $\dfrac{\partial^{|d|} f}{\partial X^d}$ la dérivée partielle

$$\frac{\partial^{|d|} f}{\partial X^d} = \frac{\partial^{d_1+\ldots+d_p} f}{\partial X_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot \partial X_p^{d_p}} \quad .$$

Pour tout ensemble A, si $\leqq_\alpha$ désigne une relation d'ordre, on désignera par $<_\alpha$, $\geqq_\alpha$, $>_\alpha$, $\inf_\alpha$, $\sup_\alpha$, $\max_\alpha$, $\min_\alpha$ les notions correspondant à cette relation d'ordre. Si $\leqq_\alpha$ est une relation de bon ordre, pour tout d, $d \in A$, on désignera par $s_\alpha(d)$ le successeur de d pour cette relation de bon ordre. Si $A = \mathbb{N}^p$, $A = \mathbb{Z}^p$, $A = \mathbb{Q}^p$ ou $A = \mathbb{R}^p$ on désignera par $\leqq$ la relation d'ordre produit sur A définie par

$$(d_1,\ldots,d_p) \leqq (d'_1,\ldots,d'_p) \Leftrightarrow \forall\, i,\ 1 \leqq i \leqq p : \ d \leqq d'_i$$

pour $(d_1,\ldots,d_p) \in A$ et $(d'_1,\ldots,d'_p) \in A$. La relation d'ordre $\leqq$ est une relation d'ordre partiel et l'ensemble ordonné $(A,\leqq)$ est un treillis, c'est-à-dire, toute partie finie non vide de A possède une borne inférieure et une borne supérieure. On réservera les notations inf et sup pour cette relation d'ordre.

Pour tout espace de Banach normé E, muni d'une norme notée $\|\cdot\|_K$, on désignera par E^p l'espace de Banach normé, muni de la norme notée également $\|\cdot\|_K$, définie par

$$\|(f_1,\ldots,f_p)\|_K = \sup_{1 \leqq i \leqq p} \|f_i\|_K \quad , \text{ pour } (f_1,\ldots,f_p) \in E^p \quad .$$

En particulier, on considèrera toujours $\mathbb{C}^p$ muni de la norme $\|\cdot\|$, définie par

$$\|(x_1,\ldots,x_p)\| = \sup_{1 \leqq i \leqq p} |x_i| \quad , \text{ pour } (x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{C}^p \quad ,$$

(et jamais de la norme euclidienne) et on désignera par $d(.,.)$ la distance sur $\mathbb{C}^p$ définie par cette norme

$$d(x,y) = \|x-y\| \quad , \text{ pour } \ x\in\mathbb{C}^p \ , \quad y\in\mathbb{C}^p \ .$$

On dira qu'une partie K de $\mathbb{C}^p$ est un polycylindre compact si $K=K_1\times\ldots\times K_p$, où pour tout i , $1\leq i\leq p$, K_i est une partie compacte, convexe, d'intérieur non vide de $\mathbb{C}$, et on désignera par $B(K)$ l'algèbre de Banach normée des fonctions continues sur K et analytiques sur $\mathring{K}$ munie de la norme $\|\cdot\|_K$ définie par

$$\|f\|_K = \sup_{x\in K} |f(x)| \quad , \text{ pour } \ f\in B(K) \ .$$

Pour tout ouvert U de $\mathbb{C}^p$, si f désigne une matrice $(f_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ à coefficients dans $\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$ ou un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules

$$f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U^n$$

et K un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U on désignera par $B(K;f)$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$B(K;f) \ : \ B(K)^m \longrightarrow B(K)^n$$

définie par la matrice $(f_{ij}|K)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$. En particulier, si f désigne une famille finie $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ d'éléments de $\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$ ou une matrice ligne $(f_1,\ldots,f_m)$ à coefficients dans $(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$ ou un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules

$$f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U$$

on désignera par $B(K;f)$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue définie par

$$B(K;f)(g_1,\ldots,g_m) = \sum_{i=1}^{m} (f_i|K)g_i \ , \text{ pour } \ (g_1,\ldots,g_m)\in B(K)^m \ .$$

Si M désigne un sous-$\mathcal{O}_U$-module cohérent de $\mathcal{O}_U^n$, on désignera par M_K le sous-$B(K)$-module de $B(K)^n$ (non nécessairement fermé) image de $\Gamma(K,M)\otimes_{\Gamma(K,\mathcal{O}_U)}B(K)$ dans $B(K)^n$ et s'il existe un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules

$$f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U^n$$

tel que $M=\mathrm{Im}(f)$, on a $M_K = \mathrm{Im}(B(K;f))$. En particulier si J désigne un idéal cohérent de $\mathcal{O}_U$, J_K est un idéal de l'algèbre $B(K)$ et si $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ est un système de générateurs de l'idéal J au voisinage de K , alors la famille $(f_i|K)_{1\leq i\leq m}$ engendre l'idéal J_K .

Si X désigne un espace analytique, Y un sous-espace analytique fermé de X , $i : Y \hookrightarrow Y$ l'immersion canonique et M un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, on dira que M est porté par Y , si le morphisme canonique $M \longrightarrow i_*i^*(M)$ est un isomorphisme. Cela équivaut à l'existence d'un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent M' tel que M soit isomorphe à $i_*(\mathcal{M}')$, ou encore à $\mathcal{J}\mathcal{M}= 0$, où $\mathcal{J}$ désigne l'idéal de définition de Y dans X . Si $\mathcal{M}$ est porté par Y , alors tout quotient de $\mathcal{M}$ l'est aussi ainsi que tout produit tensoriel $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ par un $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{N}$. Si $\mathcal{M}$ est porté par Y , on a l'inclusion ensembliste $\mathrm{supp}(\mathcal{M}) \subset Y$, la réciproque étant évidemment fausse.

CHAPITRE I

RELATIONS D'ORDRE ET FILTRES ASSOCIÉS

On connaît l'importance de la notion de degré dans l'étude des polynômes, ou de la notion de l'ordre d'une série convergente à une variable dans l'étude locale des fonctions analytiques d'une variable. On rappelle que l'ordre d'une série convergente à une variable est égal à l'ordre de multiplicité du zéro à l'origine de la fonction analytique définie par cette série au voisinage de zéro, ou encore au degré du monôme dominant de cette série au voisinage de zéro (qui n'est autre que le monôme non nul de plus petit degré) ; de même que le degré d'un polynôme à une variable est égal à l'ordre de multiplicité du pôle à l'infini de la fonction méromorphe sur la droite projective définie par ce polynôme, ou encore au degré du monôme dominant de ce polynôme au voisinage de l'infini (qui n'est autre que le monôme non nul de plus grand degré). Si l'on veut généraliser la notion de l'ordre d'une série convergente aux séries convergentes à plusieurs variables, on obtient deux notions différentes selon qu'on généralise la première ou la deuxième définition. Dans le premier cas, on obtient l'ordre de multiplicité de la singularité à l'origine du diviseur des zéros de la fontion analytique définie au voisinage de zéro par la série convergente (ordre égal à zéro si le support de ce diviseur ne passe pas par l'origine) qui est un nombre entier supérieur ou égal à zéro, qu'on appelle ordre de la série convergente, et qui correspond à la notion du degré total d'un polynôme à plusieurs variables. Dans le deuxième cas, si l'on cherche le monôme dominant d'une série à plusieurs variables au voisinage de zéro, on s'aperçoit aussitôt que cela dépend de "la façon" dont on tend vers zéro. On cherchera donc des filtres plus fins que le filtre des voisinages de zéro tels que, pour toute série convergente (non nulle), il existe un monôme dominant de cette série quand on tend vers zéro suivant ce filtre. Plus précisément, soient p un entier , $p \in \mathbb{N}$, et $\mathbb{C}\{X\} = \mathbb{C}\{X_1,\dots,X_p\}$ l'anneau des séries convergentes à p variables. Pour toute série convergente f , $f = \sum_{d\in\mathbb{N}^p} a_d X^d$ (où $X^d = X_1^{d_1}\cdot\ldots\cdot X_p^{d_p}$ si $d = (d_1,\dots,d_p)$) , on désigne par $E(f)$ la partie de $\mathbb{N}^p$ définie par

$$E(f) = \{d \in \mathbb{N}^p : a_d \neq 0\} .$$

Alors on cherche des filtres $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{C}^p$, plus fins que le filtre des voisinages de zéro, possédant une base formée de parties ouvertes de $\mathbb{C}^p$ et tels que pour toute série convergente f , $f = \sum_{d\in\mathbb{N}^p} a_d X^d$, $f \neq 0$, il existe d , $d \in E(f)$, tel que

$$\lim_{F_{(\mathbb{C}^*)^p}}(f/a_d X^d) = 1$$

où $F_{(\mathbb{C}^*)^p}$ désigne la trace du filtre F sur $(\mathbb{C}^*)^p$ (qui est un filtre, car F possédant une base formée d'ouverts de $\mathbb{C}^p$ pour tout A , $A \in F$, il existe un ouvert non vide U de $\mathbb{C}^p$ tel que $U \subset A$, et alors comme $U \cap (\mathbb{C}^*)^p \neq \emptyset$, on a $A \cap (\mathbb{C}^*)^p \neq 0$) . Supposons qu'un tel filtre F existe (on verra que c'est bien le cas), et soient d et d' deux éléments distincts de $\mathbb{N}^p$. Considérons la série convergente $g = X^d + X^{d'}$. Alors

$$E(g) = \{d,d'\}$$

et on a donc

$$\lim_{F_{(\mathbb{C}^*)^p}}(g/X^d) = 1 \quad \text{ou} \quad \lim_{F_{(\mathbb{C}^*)^p}}(g/X^{d'}) = 1 \quad ,$$

ce qui implique que

$$\lim_{F_{(\mathbb{C}^*)^p}}(X^{d'}/X^d) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{F_{(\mathbb{C}^*)^p}}(X^d/X^{d'}) = 0 \quad . \tag{2.1}$$

On en déduit que pour toute série convergente f , $f = \sum_{d \in \mathbb{N}^p} a_d X^d$, $f \neq 0$, l'élément d de $E(f)$ tel que

$$\lim_{F_{(\mathbb{C}^*)^p}}(f/a_d X^d) = 1$$

est unique, car si $d' \in E(f)$, il résulte de (2.1) qu'on ne peut avoir

$$\lim_{F_{(\mathbb{C}^*)^p}}(a_d X^d/a_{d'} X^{d'}) = 1$$

que si $d = d'$. On appelle cet élément de $\mathbb{N}^p$ exposant privilégié de f suivant le filtre F et on le note $v_F(f)$. C'est la notion de l'exposant privilégié d'une série convergente à plusieurs variables qui constitue la deuxième généralisation de la notion de l'ordre d'une série convergente à une variable (la terminologie établie d'exposant privilégié n'est pas très heureuse mais il est sans doute trop tard pour y remédier). Ensuite, on définit une relation $\leq_F$ dans $\mathbb{N}^p$ par

$$d \leq_F d' \Longleftrightarrow [(d = d') \quad \text{ou} \quad \lim_{F_{(\mathbb{C}^*)^p}}(X^{d'}/X^d) = 0] \ .$$

On vérifie aussitôt que la relation $\leq_F$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde et il résulte de (2.1) que cette relation d'ordre est une relation d'ordre total, et du fait que le filtre F est plus fin que le filtre des voisinages de zéro dans $\mathbb{C}^p$, qu'elle est moins fine que la relation d'ordre produit $\leq$ sur $\mathbb{N}^p$. On démontrera (I,1.5) qu'une telle relation d'ordre sur $\mathbb{N}^p$ est une relation de bon ordre et alors pour toute série convergente f , $f = \sum_{d \in \mathbb{N}^p} a_d X^d$, $f \neq 0$, si d_0 désigne le plus petit élément de $E(f)$ pour la relation de bon ordre $\leqq_{\mathcal{F}}$, on a $v_{\mathcal{F}}(f) = d_o$. En effet, on démontre (III,4.2.1) qu'il existe un nombre fini d'éléments $d_1,\dots,d_m$ de $\mathbb{N}^p$ tels que pour tout i, $1 \leqq i \leqq m$, $d_o <_{\mathcal{F}} d_i$ et des séries convergentes $f_1,\dots,f_m$ telles que

$$f = a_{d_o} X^{d_o} + \sum_{i=1}^{m} f_i X^{d_i} ,$$

et comme pour tout i, $1 \leqq i \leqq m$,

$$\lim_{\mathcal{F}_{(\mathbb{C}^*)^p}} (X^{d_i}/X^{d_o}) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\mathcal{F}_{(\mathbb{C}^*)^p}} (f_i) = f_i(0) ,$$

on a

$$\lim_{\mathcal{F}_{(\mathbb{C}^*)^p}} (f/a_{d_o} X^{d_o}) = 1 ,$$

d'où $v_{\mathcal{F}}(f) = d_o$. On remarque que si f et g sont deux séries convergentes non nulles, on a

$$v_{\mathcal{F}}(f.g) = v_{\mathcal{F}}(f) + v_{\mathcal{F}}(g)$$

et si $f + g \neq 0$

$$v_{\mathcal{F}}(f+g) \geqq_{\mathcal{F}} \min_{\leqq_{\mathcal{F}}} \{v_{\mathcal{F}}(f), v_{\mathcal{F}}(g)\}$$

et

$$v_{\mathcal{F}}(f+g) = \min_{\leqq_{\mathcal{F}}} \{v_{\mathcal{F}}(f), v_{\mathcal{F}}(g)\} \quad \text{si} \quad v_{\mathcal{F}}(g) \neq v_{\mathcal{F}}(g) .$$

Enfin, pour tout ε, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, et tout d et d', $d = (d_1,\dots,d_p)$, $d' = (d_1',\dots,d_p')$, $d \in \mathbb{N}^p$, $d' \in \mathbb{N}^p$, $d <_{\mathcal{F}} d'$, si l'on désigne par $W_{d'-d;\varepsilon}$ la partie de $(\mathbb{C}^*)^p$ définie par

$$W_{d'-d;\varepsilon} = \{(z_1,\dots,z_p) \in (\mathbb{C}^*)^p : \prod_{i=1}^{p} |z_i|^{d_i'-d_i} < \varepsilon\} ,$$

on a $W_{d'-d;\varepsilon} \in \mathcal{F}_{(\mathbb{C}^*)^p}$. En effet, comme

$$\lim_{\mathcal{F}_{(\mathbb{C}^*)^p}} (X^{d'}/X^{d}) = 0 ,$$

il existe A, $A \in \mathcal{F}$, tel que pour tout $(z_1,\dots,z_p) \in A \cap (\mathbb{C}^*)^p$ on ait $\prod_{i=1}^{p} |z_i|^{d_i'-d_i} < \varepsilon$, d'où $A \cap (\mathbb{C}^*)^p \subset W_{d'-d;\varepsilon}$. On en déduit que la famille

$$(W_{d'-d;\varepsilon})_{d \in \mathbb{N}^p, d' \in \mathbb{N}^p,\ d <_{\mathcal{F}} d',\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$$

est un système de générateurs d'un filtre moins fin que $\mathcal{F}_{(\mathbb{C}^*)^p}$ et il est facile de voir que si l'on désigne par $\mathcal{F}'$ le filtre sur $\mathbb{C}^p$ engendré par ce système de générateurs, alors ce filtre $\mathcal{F}'$ vérifie les mêmes conditions que $\mathcal{F}$; pour toute série convergente f, $f \neq 0$, on a $v_{\mathcal{F}'}(f) = v_{\mathcal{F}}(f)$ et la relation d'ordre $\leqq_{\mathcal{F}'}$ n'est autre que $\leqq_{\mathcal{F}}$.

Pour démontrer l'existence des filtres F sur $\mathbb{C}^p$ possédant les propriétés requises ci-dessus, on procède en sens inverse comme on l'a exposé au §2 de l'introduction générale et comme on le détaille dans ce chapitre.

Le chapitre I est consacré à l'étude des relations d'ordre sur $\mathbb{N}^p$, compatibles avec sa structure de monoïde, et des filtres sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$ qu'on y associe. Au §1 on rappelle quelques résultats élémentaires sur les relations d'ordre sur $\mathbb{N}^p$. Au §2 on rappelle quelques propriétés élémentaires des relations d'ordre sur un espace vectoriel sur un corps ordonné, compatibles avec sa structure d'espace vectoriel. Ces deux paragraphes ne sont inclus dans ce travail que par souci d'être complet. Au §3 on donne une classification complète des relations d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$ (resp. $\mathbb{R}^p$), compatibles avec sa structure de monoïde (resp. d'espace vectoriel), en introduisant la notion de drapeau orienté. Aux §4 et §5 on étudie, de façon détaillée, le filtre sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$ associé à une telle relation d'ordre, notion qui devrait, à mon avis, occuper une place centrale dans toute introduction à l'étude locale des fonctions analytiques de plusieurs variables. Les résultats de ce paragraphe, élémentaires mais très techniques sont constamment utilisés à partir du §4 du chapitre III. Jusqu'au §3 du chapitre III inclus, seuls les résultats du §1 sont nécessaires.

§1.- Relations d'ordre sur $\mathbb{N}^p$

(1.0) Dans ce paragraphe on se fixe une fois pour toute un entier p, $p \in \mathbb{N}$. On rappelle qu'on dit qu'une relation d'ordre $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$ est compatible avec sa structure de monoïde si pour tout d, d' et d'', $d \in \mathbb{N}^p$, $d' \in \mathbb{N}^p$, $d'' \in \mathbb{N}^p$, $d' \leqq_\alpha d''$ implique $d'+d \leqq_\alpha d''+d$, et une telle relation d'ordre est dite régulière si en plus chacune des conditions $d'+d \leqq_\alpha d''+d$ ou $nd' \leqq_\alpha nd''$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) implique que $d' \leqq_\alpha d''$. Une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$ compatible avec sa structure de monoïde est régulière. La relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$ est compatible avec sa structure de monoïde et régulière, et une relation d'ordre $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$ compatible avec sa structure de monoïde est moins fine que $\leqq$ si et seulement si pour tout d, $d \in \mathbb{N}^p$, on a $0 \leqq_\alpha d$.

PROPOSITION 1.1.- *Soit* Δ *une partie de* $\mathbb{N}^p$. *L'ensemble d'éléments minimaux de* Δ *pour* $\leqq$ *est fini.*

Démonstration. Considérons $\mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_p]$ l'anneau des polynômes à p indéterminées à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et I l'idéal de $\mathbb{Z}[X]$ engendré par la famille $(X^d)_{d\in\Delta}$. L'anneau $\mathbb{Z}[X]$ étant noethérien, il existe une famille finie $(P_i)_{1\leqq i\leqq r}$ d'éléments de $\mathbb{Z}[X]$ qui engendrent I. Pour tout i, $1 \leqq i \leqq r$, $P_i = \sum_{d\in\Delta_i} a_{i_d} X^d$, où $a_{id} \in \mathbb{Z}$, et Δ_i est une partie finie de $\Delta + \mathbb{N}^p$ (car

$P_i \in I)$. Soit $\Delta' = \bigcup_{i=1}^{r} \Delta_i$. On a $\Delta' \subset \Delta + \mathbb{N}^p$. Pour tout d , $d \in \Delta$, il existe $Q_1,\dots,Q_r \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $X^d = \sum_{i=1}^{r} Q_i P_i$ donc $d \in \Delta' + \mathbb{N}^p$. On en déduit que $\Delta \subset \Delta' + \mathbb{N}^p$, donc $\Delta' + \mathbb{N}^p = \Delta + \mathbb{N}^p$. Or, les éléments minimaux de Δ sont les mêmes que ceux de $\Delta + \mathbb{N}^p$, c'est-à-dire, ceux de $\Delta' + \mathbb{N}^p$ qui sont les mêmes que ceux de Δ' . L'ensemble Δ' étant fini on en déduit la proposition.

PROPOSITION 1.2.- *Soient* Δ *une partie non vide de* $\mathbb{N}^p$ *et* d *un élément de* Δ . *Il existe un élément minimal* d' *de* Δ *pour* $\leqq$ *tel que* $d' \leqq d$.

Démonstration . L'ensemble $\{d'' \in \mathbb{N}^p : d'' \leqq d\}$ étant fini la proposition est évidente.

(1.3) Pour toute partie Δ de $\mathbb{N}^p$, on notera $M(\Delta)$ l'ensemble des éléments minimaux de Δ pour $\leqq$. L'ensemble $M(\Delta)$ est fini et tout élément de Δ est minoré par un élément de $M(\Delta)$ (Prop. 1.1 et Prop. 1.2). En particulier, si $\Delta \neq \emptyset$ alors $M(\Delta) \neq \emptyset$ et si $\Delta + \mathbb{N}^p \subset \Delta$ (ou ce qui est équivalent $\Delta + \mathbb{N}^p = \Delta)$, on a

$$\Delta = \bigcup_{d \in M(\Delta)} (d + \mathbb{N}^p) = M(\Delta) + \mathbb{N}^p \quad .$$

COROLLAIRE 1.4.- *Soient* $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}^p$, *moins fine que* $\leqq$, *et* Δ *une partie de* $\mathbb{N}^p$. *L'ensemble des éléments minimaux* $M_\alpha(\Delta)$ *de* Δ *pour* $\leqq_\alpha$ *est fini et pour tout élément* d *de* Δ , *il existe* d', $d' \in M_\alpha(\Delta)$, *tel que* $d' \leqq_\alpha d$.

Démonstration . Il est clair que $M_\alpha(\Delta) \subset M(\Delta)$, donc $M_\alpha(\Delta)$ est un ensemble fini. Soit $d \in \Delta$ et démontrons qu'il existe d' , $d' \in M_\alpha(\Delta)$, tel que $d' \leqq_\alpha d$. Soit

$$\Delta' = \{d'' \in \Delta : d'' \leqq_\alpha d\} .$$

L'ensemble $M(\Delta')$ est fini et non vide (1.3). Il existe donc un élément minimal d' de $M(\Delta')$ pour $\leqq_\alpha$. On a $d' \leqq_\alpha d$. Démontrons que $d' \in M_\alpha(\Delta)$. En effet, soit $d'' \in \Delta$, tel que $d'' \leqq_\alpha d'$. Alors $d'' \leqq_\alpha d$, donc $d'' \in \Delta'$. On en déduit qu'il existe $d''' \in M(\Delta')$, tel que $d''' \leqq d''$ (Prop. 1.2). On a alors $d''' \leqq_\alpha d''$, donc $d''' \leqq_\alpha d'$, d'où $d''' = d'$ (d' étant un élément minimal de $M(\Delta)$ pour $\leqq_\alpha$). On en déduit que $d'' = d'$, ce qui prouve que $d' \in M_\alpha(\Delta)$.

COROLLAIRE 1.5.- *Soit* $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^p$ *moins fine que* $\leqq$. *Alors* $\leqq_\alpha$ *est une relation de bon ordre.*

Démonstration . Le corollaire 1.4 implique que toute partie non vide de $\mathbb{N}^p$ possède un élément minimal pour $\leqq_\alpha$, qui est un minimum puisque $\leqq_\alpha$ est une relation d'ordre total.

COROLLAIRE 1.6.- *Soit* $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^p$ *, compatible avec sa structure de monoïde. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\geqq_\alpha$ *est moins fine que* $\leqq$ *;*

ii) $\leqq_\alpha$ *est une relation de bon ordre ;*

iii) $\mathbb{N}^p$ *possède un plus petit élément pour* $\leqq_\alpha$ *;*

iv) 0 *est le plus petit élément de* $\mathbb{N}^p$ *pour* $\leqq_\alpha$.

Démonstration . L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte du corollaire 1.5, l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est évidente et l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i) résulte du fait que $\leqq_\alpha$ est une relation d'ordre compatible avec la structure de monoïde de $\mathbb{N}^p$. Il reste à démontrer que (iii) $\Rightarrow$ (iv) . Soit ω le plus petit élément de $\mathbb{N}^p$ pour $\leqq_\alpha$. On a alors $\omega \leqq_\alpha 0$, donc $\omega + \omega \leqq_\alpha \omega$ (compatibilité de $\leqq_\alpha$ avec la structure de monoïde de $\mathbb{N}^p$) , d'où $\omega + \omega = \omega$, donc $\omega = 0$, ce qui démontre le corollaire.

§2.- Relations d'ordre sur un espace vectoriel

(2.0) Soient $(K,\leqq_K)$ un corps (commutatif) totalement ordonné (on dira simplement corps ordonné) et E un K-espace vectoriel, muni d'une relation d'ordre $\leqq_E$. On dit que la relation d'ordre $\leqq_E$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E sur le corps ordonné K (ou plus simplement compatible avec sa structure d'espace vectoriel) si la relation $\leqq_E$ satisfait aux deux conditions suivantes :

a) pour tout x, x' et x'' , $x \in E$, $x' \in E$, $x'' \in E$, $x' \leqq_E x''$ implique $x' + x \leqq_E x'' + x$;

b) pour tout x' et x'' , $x' \in E$, $x'' \in E$ et tout ρ , $\rho \in K$ si $\rho >_K 0$ et $x' \leqq_E x''$ alors $\rho x' \leqq_E \rho x''$.

Si l'on pose $K_+ = \{\rho \in K : \rho \geqq_K 0\}$ et $E_+ = \{x \in E : x \geqq_E 0\}$, on a alors

i) $E_+ + E_+ \subset E_+$,

ii) $K_+ E_+ \subset E_+$

iii) $E_+ \cap (-E_+) = \{0\}$,

et $x \leqq_E y$ équivaut à $y - x \in E_+$, la relation $\leqq_E$ étant une relation d'ordre total si et seulement si on a en plus

iv) $E_+ \cup (-E_+) = E$.

Réciproquement, si une partie E_+ de E satisfait aux conditions (i), (ii) et (iii), la relation définie par

$$x \leqq_E y \Leftrightarrow y - x \in E_+ \text{ , pour } x \in E \text{ , } y \in E$$

est une relation d'ordre sur E , compatible avec sa structure d'espace vectoriel, et $E_+ = \{x \in E : x \geqq_E 0\}$.

On définit ainsi une bijection entre l'ensemble des parties de E satisfaisant aux conditions (i), (ii) et (iii) et l'ensemble des relations d'ordre sur E, compatibles avec sa structure d'espace vectoriel, les relations d'ordre total correspondant aux parties de E qui satisfont en plus à la condition (iv).

PROPOSITION 2.1.- *Soit* $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}^p$ *, compatible avec sa structure de monoïde et régulière* (cf.(1.0)). *Il existe une relation d'ordre* $\leqq_{\mathbb{Q},\alpha}$ *sur* $\mathbb{Q}^p$ *compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné* $\mathbb{Q}$ *, et une seule, induisant* $\leqq_\alpha$ *sur* $\mathbb{N}^p$ *, et la relation* $\leqq_{\mathbb{Q},\alpha}$ *est une relation d'ordre total si et seulement si* $\leqq_\alpha$ *l'est.*

Démonstration . Démontrons d'abord l'unicité. Soient q' et q'' deux éléments de $\mathbb{Q}^p$. Il existe n , $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $nq' \in \mathbb{Z}^p$ et $nq'' \in \mathbb{Z}^p$, et d , $d \in \mathbb{N}^p$, tel que $nq' + d \in \mathbb{N}^p$ et $nq'' + d \in \mathbb{N}^p$. Si $\leqq_{\mathbb{Q},\alpha}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{Q}^p$ compatible avec sa structure d'espace vectoriel, induisant $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$, on a $q' \leqq_{\mathbb{Q},\alpha} q''$ si et seulement si $nq' + d \leqq_\alpha nq'' + d$, ce qui prouve l'unicité. Pour démontrer l'existence on définit la relation $\leqq_{\mathbb{Q},\alpha}$ dans $\mathbb{Q}^p$ par

$$(q' \leqq_{\mathbb{Q},\alpha} q'') \Longleftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}^* \ \exists d \in \mathbb{N}^p : nq' + d \in \mathbb{N}^p \ , nq'' + d \in \mathbb{N}^p \text{ et } nq' + d \leqq_\alpha nq'' + d)$$

pour $q' \in \mathbb{Q}^p$, $q'' \in \mathbb{Q}^p$ et on vérifie que $\leqq_{\mathbb{Q},\alpha}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{Q}^p$ compatible avec sa structure d'espace vectoriel, induisant $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$, et que cet ordre est total si et seulement si $\leqq_\alpha$ l'est.

(2.2) Soient K un corps ordonné, E un K-espace vectoriel et A une partie de E telle que $A + A \subset A$, $K_+ A \subset A$ et $A \cap (-A) = \{0\}$.

LEMME 2.2.1.- *Si* x *est un élément de* E *n'appartenant pas à* $-A$ *et si l'on pose* $A' = A + K_+ x$ *, on a* $A \subset A'$, $A' + A' \subset A'$, $K_+ A' \subset A$ *et* $A' \cap (-A') = \{0\}$.

Démonstration . Il est clair que $A \subset A'$, $A' + A' \subset A'$ et $K_+ A' \subset A'$. Démontrons que $A' \cap (-A') = \{0\}$. Soit y , $y \in A' \cap (-A')$. Il existe a et a' appartenant à K_+ et t et t' appartenant à A tels que $y = t + ax$ et $y = -(t' + a'x)$. On a donc $t + t' + (a + a')x = 0$. Si $a + a' \neq 0$, on en déduit que $x \in (-A)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc $a = -a'$ et, comme a et a' appartiennent à K_+ , on a $a = a' = 0$. On en déduit que $t = -t'$ et, comme $A \cap (-A) = \{0\}$, que $t = t' = 0$, d'où $y = 0$, ce qui prouve le lemme.

LEMME 2.2.2.- *Il existe une partie* B *de* E *contenant* A *et telle que* $B + B \subset B$, $K_+ B \subset B$, $B \cap (-B) = \{0\}$ et $B \cup (-B) = E$.

Démonstration . Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties A' de E telles que $A \subset A'$, $A' + A' \subset A'$, $K_+ A' \subset A'$ et $A' \cap (-A') = \{0\}$, ordonné par inclusion. L'ensemble

$\mathcal{A}$ est non vide, car $A \in \mathcal{A}$, et si $\mathcal{A}'$ est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ possède un majorant dans $\mathcal{A}$. En effet, si l'on pose $A'' = \bigcup_{A' \in \mathcal{A}'} A'$, on vérifie aussitôt que $A'' \in \mathcal{A}$. On en déduit que $\mathcal{A}$ possède au moins un élément maximal B (lemme de Zorn). Démontrons que $B \cup (-B) = E$. En effet, supposons que $B \cup (-B) \neq E$ et soit x , $x \in E$ et $x \notin B \cup (-B)$. Si l'on pose $B' = B + K_+ x$, on a $B' \in \mathcal{A}$ (lemme 2.2.1) et $B \subsetneqq B'$, ce qui est absurde et prouve que $B \cup (-B) = E$, ce qui démontre le lemme.

LEMME 2.2.3.- *Soit* $\mathcal{E}$ *l'ensemble des parties* B *de* E *telles que* $A \subset B$, $B + B \subset B$, $K_+ B \subset B$, $B \cap (-B) = \{0\}$ *et* $B \cup (-B) = E$. *On a*

$$A = \bigcap_{B \in \mathcal{E}} B \quad .$$

Démonstration . Il est clair que $A \subset \bigcap_{B \in \mathcal{E}} B$. Soit $x \in \bigcup_{B \in \mathcal{E}} B$ et supposons que $x \notin A$. On a $-x \notin (-A)$ et si l'on pose $x' = -x$ et $A' = A + K_+ x'$, il résulte des lemmes (2.2.1) et (2.2.2) qu'il existe une partie B' de E telle que $A' \subset B'$, $B' + B' \subset B'$, $K_+ B' \subset B'$, $B' \cap (-B') = \{0\}$ et $B' \cup (-B') = E$. Alors on a $-x \in B'$ et $B' \in \mathcal{E}$, donc $x \in B'$, d'où $x = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $x \notin A$ et démontre le lemme.

PROPOSITION 2.3.- *Soient* K *un corps ordonné,* E *un* K*-espace vectoriel et* $\leqq_E$ *une relation d'ordre sur* E *compatible avec sa structure d'espace vectoriel. Alors :*

i) *il existe une relation d'ordre total* $\leqq'_E$ *sur* E *compatible avec sa structure d'espace vectoriel et moins fine que* $\leqq_E$;

ii) *pour tout* x' *et* x'' , $x' \in E$, $x'' \in E$, *on a* $x' \leqq_E x''$ *si et seulement si pour toute relation d'ordre total* $\leqq'_E$ *sur* E *compatible avec sa structure d'espace vectoriel et moins fine que* $\leqq_E$ *on a* $x' \leqq'_E x''$.

Démonstration . C'est une conséquence immédiate des lemmes (2.2.2) et (2.2.3).

§3.- Drapeaux orientés

Dans ce paragraphe, on introduit la notion de drapeau orienté d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et on démontre qu'il y a une bijection entre l'ensemble des drapeaux orientés d'un tel espace et l'ensemble des relations d'ordre total sur cet espace, compatibles avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné $\mathbb{R}$. D'autre part, on démontre que toute relation d'ordre sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde et régulière se prolonge en une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel, ce prolongement n'étant pas unique en général, même si on se limite au cas des relations d'ordre total. Dans ce dernier cas, on obtient une classification complète de ces relations d'ordre.

(3.1) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle drapeau orienté de E la donnée :

i) d'une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E, $E_o \subset E_1 \subset \dots \subset E_p$, telle que $E_o = \{0\}$, $E_p = E$ et telle que pour tout i, $1 \leqq i \leqq p$, E_{i-1} soit un hyperplan de E_i ;

ii) pour tout i, $1 \leqq i \leqq p$, d'une orientation de E_i/E_{i-1} (qui est une droite).

Pour tout i, $1 \leqq i \leqq p$, on notera E_i^+ l'image réciproque par la surjection canonique de E_i sur E_i/E_{i-1} de la demi-droite fermée positive pour l'orientation donnée. On remarque que la donnée de l'orientation de la droite E_i/E_{i-1} équivaut à la donnée de E_i^+, qui est l'un des deux demi-espaces fermés de E_i, définis par l'hyperplan E_{i-1} ou encore à la donnée d'un élément de $\pi_o(E_i - E_{i-1})$.

(3.2) Etant donné un drapeau orienté α de E

$$\alpha : E_o \subset E_1 \subset \dots \subset E_p ,$$

on pose

$$D_\alpha = \bigcup_{1 \leqq i \leqq p} (E_i^+ - E_{i-1}) \cup E_o$$

et on définit une relation $\leqq_\alpha$ dans E par

$$x \leqq_\alpha y \iff y - x \in D_\alpha \quad .$$

On vérifie facilement qu'on a :

i) $D_\alpha + D_\alpha \subset D_\alpha$;

ii) $\mathbb{R}_+ D_\alpha \subset D_\alpha$;

iii) $D_\alpha \cap (-D_\alpha) = \{0\}$;

iv) $D_\alpha \cup (-D_\alpha) = E$.

On a donc

PROPOSITION 3.2.1.- *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie et* α *un drapeau orienté de* E . *Alors* $\leqq_\alpha$ *est une relation d'ordre total sur* E *compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné* $\mathbb{R}$.

(3.3) Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ p formes $\mathbb{R}$-linéaires sur E formant une base du dual du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E . Posons $E_i = \bigcap_{i<j\leq p} \mathrm{Ker}(\alpha_j)$, pour $0 \leq i \leq p$. On a $E_0 = \{0\}$, $E_p = E$ et pour tout i , $1 \leq i \leq p$, E_{i-1} est un hyperplan de E_i . D'autre part, pour tout i , $1 \leq i \leq p$, $\alpha_i|E_i$ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire de E_i dont le noyau est E_{i-1} . Elle définit donc un isomorphisme de E_i/E_{i-1} sur $\mathbb{R}$ et en particulier une orientation de E_i/E_{i-1} . On associe ainsi à une base du dual de E un drapeau orienté de E et il est clair que tout drapeau orienté de E peut être obtenu ainsi. D'autre part, on vérifie facilement que si $\alpha'_1,\dots,\alpha'_p$ sont p formes $\mathbb{R}$-linéaires sur E , elles forment une base du dual de E et déterminent le même drapeau orienté de E , si et seulement si pour tout i , $1 \leq i \leq p$, il existe une famille $(b_{ij})_{1\leq j\leq p}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ telle que pour tout j , $1 \leq j < i$, $b_{ij} = 0$, $b_{ii} > 0$, et $\alpha'_i = \sum_{j=1}^{p} b_{ij}\,\alpha_j$.
Enfin, si l'on désigne par α le drapeau orienté de E associé à $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ on a

$$x \leqq_\alpha y \Leftrightarrow (x=y) \text{ ou } [\exists i,\ 1 \leq i \leq p :\ [(\alpha_i(x) < \alpha_i(y)) \text{ et } (\forall i',\ i<i'\leq p :\ \alpha_{i'}(x) = \alpha_{i'}(y))]]$$

pour $x \in E$ et $y \in E$.

(3.3.1) Soient E' un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de E et $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ une base du dual E* de E . On dit que la base $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ de E* est adaptée au sous-espace E' , s'il existe une partie I de [1,p], telle que pour tout i , $i \in I$, α_i appartienne à l'orthogonal $E'^{\perp}$ de E' dans E* et $(\alpha_i)_{i\in I}$ soit une base de $E'^{\perp}$. On remarque qu'alors $(\alpha_i|E')_{i\in[1,p]-I}$ est une base du dual E'* de E' qui détermine un drapeau orienté α' de E' tel que la relation d'ordre $\leqq_{\alpha'}$ sur E' soit induite par la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ sur E , où α désigne le drapeau orienté de E déterminé par la base $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ de E* .

PROPOSITION 3.3.2.- *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie,* E' *un sous-*$\mathbb{R}$*-espace vectoriel de* E *et* α *un drapeau orienté de* E . *Alors il existe une base* $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ *de* E* *déterminant le drapeau orienté* α *et adaptée au sous-espace* E' .

Démonstration. Soient $\alpha'_1,\dots,\alpha'_p$ une base de E* déterminant le drapeau α , n la dimension de $E'^{\perp}$, $0 \leq n \leq p$, et $I' = \{i,\ 1 \leq i \leq p : \alpha'_i \in E'^{\perp}\}$. Alors card(I') $\leq$ n et si card(I') = n , la base $\alpha'_1,\dots,\alpha'_p$ de E* est adaptée au sous-espace E' . Supposons que $\mathrm{card}(I') < n$. Alors le système $(\alpha_i' | E')_{i \in [1,p]-I'}$ n'est pas libre et il existe i_o , $i_o \in [1,p] - I'$, tel que $(\alpha_i' | E')_{i \in]i_o,p]-I'}$ soit un système libre et tel qu'il existe une famille $(b_i)_{i \in]i_o,p]-I'}$ d'éléments de $\mathbb{R}$, telle que

$$\alpha_{i_o}' | E' = \sum_{i \in]i_o,p]-I'} b_i (\alpha_i' | E') \ .$$

On pose

$$\alpha_{i_o}'' = \alpha_{i_o}' - \sum_{i \in]i_o,p]-I'} b_i \alpha_i' \ ,$$

pour tout i , $1 \leq i \leq p$, $i \neq i_o$, $\alpha_i'' = \alpha_i'$ et $I'' = \{i, 1 \leq i \leq p : \alpha_i'' \in E'^{\perp}\}$. Alors $\alpha_1'', \ldots, \alpha_p''$ est une base de E^* qui détermine le même drapeau orienté α de E (3.3) et $I'' = I' \cup \{i_o\}$, donc $\mathrm{card}(I'') = \mathrm{card}(I) + 1$ ce qui démontre de proche en proche la proposition.

(3.4) Soient α un drapeau orienté de E ,

$$\alpha : E_o \subset E_1 \subset \ldots \subset E_p \ ,$$

et u un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E . Si pour tout i , $0 \leq i \leq p$, on pose $E_i' = u(E_i)$, on a $E_o' = \{0\}$, $E_p' = E$, pour tout i , $1 \leq i \leq p$, E_{i-1}' est un hyperplan de E_i' , et u induit un isomorphisme de E_i/E_{i-1} sur E_i'/E_{i-1}' qui définit une orientation de E_i'/E_{i-1}' , déduite de celle de E_i/E_{i-1}. On définit ainsi un drapeau orienté α' de E

$$\alpha' : E_o' \subset E_1' \subset \ldots \subset E_p' \ ,$$

noté $u(\alpha)$, et alors on a $u(D_\alpha) = D_{u(\alpha)}$ et

$$x \leq_\alpha y \Longleftrightarrow u(x) \leq_{u(\alpha)} u(y) \ , \text{ pour } x \in E \text{ et } y \in E \ .$$

Si v est un autre automorphisme de E , on a $v(u(\alpha)) = (v \circ u)(\alpha)$. Le groupe linéaire $GL(E)$ opère ainsi à gauche sur l'ensemble des drapeaux orientés de E , et il résulte de (3.3) qu'il opère transitivement.

(3.5) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p}$ une matrice inversible à coefficients dans $\mathbb{R}$. Chaque ligne $(a_{ij})_{1 \leq j \leq p}$ de la matrice A définit une forme linéaire α_i sur $\mathbb{R}^p$, les formes linéaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ forment une base du dual de $\mathbb{R}^p$ qui détermine un drapeau orienté de $\mathbb{R}^p$, et tout drapeau orienté de $\mathbb{R}^p$ peut être obtenu ainsi. Si $A' = (a_{ij}')_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p}$ est une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$, A' est inversible et détermine le même drapeau orienté, si et seulement si, il existe une matrice triangulaire supérieure B à coefficients dans $\mathbb{R}$ et dont les coefficients de la diagonale principale sont strictement positifs, telle que $A' = BA$. Si l'on désigne par α le drapeau orienté de $\mathbb{R}^p$ associé ainsi à la matrice A , on dit que la matrice A est une matrice de définition de la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{R}^p$ ou que A définit la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ et on a :

$$x \leqq_\alpha y \Longleftrightarrow (x=y) \text{ ou } [\exists i, 1\leqq i\leqq p : [(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j < \sum_{j=1}^{p} a_{ij}y_j) \text{ et } (\forall i', i<i'\leqq p : \sum_{j=1}^{p} a_{i'j}x_j = \sum_{j=1}^{p} a_{i'j}y_j)]] ,$$

pour $x = (x_1,\dots,x_p)$, $y = (y_1,\dots,y_p)$, $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^p$. Si p' est un entier, $0 \leqq p' \leqq p$, on dit que la matrice A est adaptée au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^{p'} = \mathbb{R}^{p'} \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^p$, si les formes linéaires $\alpha_1,\dots,\alpha_p$, définies par les lignes de la matrice A , forment une base du dual de $\mathbb{R}^p$ adaptée au sous-espace $\mathbb{R}^{p'}$, c'est-à-dire, s'il existe une partie I de $[1,p]$ telle que $\mathrm{card}(I) = p-p'$ et telle que pour tout i et j , $i \in I$, $1 \leqq j \leqq p'$, on ait $a_{ij} = 0$, et alors la matrice $A' = (a_{ij})_{i\in[1,p]-I, 1\leqq j\leqq p'}$ est inversible et définit la relation d'ordre sur $\mathbb{R}^{p'}$ induite par $\leqq_\alpha$.

PROPOSITION 3.5.1.- *Soit α un drapeau orienté de $\mathbb{R}^p$ tel que la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ soit moins fine que la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{R}^p$. Alors il existe une matrice de définition de la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ à coefficients dans $\mathbb{R}_+$.*

Démonstration. Soient $e_1,\dots,e_p$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $A = (a_{ij})_{1\leqq i\leqq p, 1\leqq j\leqq p}$ une matrice de définition de la relation d'ordre $\leqq_\alpha$. Pour tout j , $1 \leqq j \leqq p$, on a $e_j > 0$, donc $e_j >_\alpha 0$, ce qui implique qu'il existe i_j , $1 \leqq i_j \leqq p$, tel que $a_{i_j j} > 0$ et tel que pour tout i , $i_j < i \leqq p$, on ait $a_{ij} = 0$. En particulier, pour tout j , $1 \leqq j \leqq p$, on a $a_{pj} \geqq 0$. Posons $i_o = \inf\{i, 1\leqq i\leqq p : \forall j, 1\leqq j\leqq p, a_{ij} \geqq 0\}$. On a $1 \leqq i_o \leqq p$ et si $i_o = 1$, la matrice A est à coefficients dans $\mathbb{R}_+$. Supposons donc que $i_o > 1$ et soit $J = \{j, 1\leqq j\leqq p : a_{i_o-1,j} < 0\}$. Pour tout j , $j \in J$, on a $i_j \geqq i_o$ et il existe b_j , $b_j \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $a_{i_o-1,j} + b_j a_{i_j j} > 0$. Pour tout j , $1 \leqq j \leqq p$, on pose

$$a'_{i_o-1,j} = a_{i_o-1,j} + \sum_{j'\in J} b_{j'} a_{i_{j'},j}$$

et pour tout i , $1 \leqq i \leqq p$, $i \neq i_o - 1$, $a'_{ij} = a_{ij}$. Alors pour tout j , $1 \leqq j \leqq p$, $a'_{i_o-1,j} \geqq 0$, la matrice $A' = (a'_{ij})_{1\leqq i\leqq p, 1\leqq j\leqq p}$ est une matrice de définition de la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ (3.5) et si l'on pose

$i'_o = \inf\{i, 1 \leq i \leq p : \forall j, 1 \leq j \leq p, a'_{ij} \geq 0\}$, on a $i'_o < i_o$, ce qui démontre de proche en proche la proposition.

Remarque 3.5.2. Inversement, il est clair que la relation d'ordre sur $\mathbb{R}^p$ définie par une matrice inversible à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ est moins fine que la relation d'ordre produit $\leq$ sur $\mathbb{R}^p$.

Exemple 3.5.3. La matrice unité à p lignes et p colonnes définit une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel et moins fine que la relation d'ordre produit $\leq$ sur $\mathbb{R}^p$, appelée relation d'ordre antilexicographique sur $\mathbb{R}^p$ et notée $\leq_L$. Pour tout x et y , $x = (x_1,\ldots,x_p)$ $y = (y_1,\ldots,y_p)$, $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^p$, on a

$$x \leq_L y \Leftrightarrow (x=y) \text{ ou } [\exists i, 1 \leq i \leq p : [(x_i < y_i) \text{ et } (\forall i', i < i' \leq p : x_{i'} = y_{i'})]]$$

La relation d'ordre antilexicographique $\leq_L$ n'est autre que la relation d'ordre $\leq_{e^*}$, où e^* désigne le drapeau orienté de $\mathbb{R}^p$ déterminé par la base duale $e^*_1,\ldots,e^*_p$ de la base canonique $e_1,\ldots,e_p$ de $\mathbb{R}^p$. Si E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension p, $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ une base du dual de E et α le drapeau orienté de E déterminé par cette base, pour tout x et y , $x \in E$, $y \in E$, on a

$$x \leq_\alpha y \Longleftrightarrow (\alpha_1(x),\ldots,\alpha_p(x)) \leq_L (\alpha_1(y),\ldots,\alpha_p(y)) .$$

Pour toute matrice inversible $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq p}$, à coefficients dans $\mathbb{R}$, si $\leq_\alpha$ désigne la relation d'ordre sur $\mathbb{R}^p$ définie par cette matrice, pour tout x et y , $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^p$, on a

$$x \leq_\alpha y \Leftrightarrow Ax \leq_L Ay .$$

(3.6) Soient K un sous-corps de $\mathbb{R}$ qu'on considèrera ordonné par la relation d'ordre induite par celle de $\mathbb{R}$, $K_+ = \{\rho \in K : \rho \geq 0\}$, F un K-espace vectoriel de dimension finie, qu'on identifiera à son image dans $E = F \otimes_K \mathbb{R}$ par l'injection canonique, et D une partie de F telle que

i) $D + D \subset D$;

ii) $K_+ D \subset D$;

iii) $D \cap (-D) = \{0\}$;

iv) $D \cup (-D) = F$.

On attire l'attention du lecteur sur le fait que dans la suite le signe "-" sera utilisé dans deux sens différents, même éventuellement à l'intérieur d'une même formule, à savoir si A et B sont deux parties de F (ou de E)

$$-B = \{b \in F : -b \in B\} \quad \text{(sens vectoriel)}$$

et

$$A - B = \{a \in A \ : \ a \notin B\} \qquad \text{(sens ensembliste)}.$$

Le lecteur rétablira facilement la signification de chaque occurence de "-" (formellement le signe "-" aura la première signification s'il est en début de formule, ou s'il est immédiatement précédé par un signe relationnel ou par l'ouverture d'une parenthèse, la deuxième signification dans les autres cas).

LEMME 3.6.1.- *Si* $F \neq \{0\}$ *et si* $\bar{D}$ *désigne l'adhérence de* D *dans* E *(pour sa topologie naturelle d'espace vectoriel de dimension finie sur* $\mathbb{R}$ *), alors* $\bar{D} \cap (-\bar{D})$ *est un hyperplan de* E *, et* $\bar{D}$ *est l'un des deux demi-espaces fermés de* E *définis par cet hyperplan.*

Démonstration. La condition (i) implique que $\bar{D} + \bar{D} \subset \bar{D}$ et la condition (ii) que $\mathbb{R}_+ \bar{D} \subset \bar{D}$ (car K_+ est dense dans $\mathbb{R}_+$) . On en déduit que si l'on pose $E' = \bar{D} \cap (-\bar{D})$, alors E' est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de E . D'autre part, comme $-\bar{D} = (\overline{-D})$, la condition (iv) implique que $\bar{D} \cup (-\bar{D}) = E$ (car F est dense dans E). Démontrons que $\bar{D} - E' \neq \emptyset$. Soit $e_1, \dots, e_p$ une base de F sur K . La condition (iv) implique que pour tout i , $1 \leq i \leq p$, on a $e_i \in D$ ou $-e_i \in D$. On peut donc supposer (quitte à remplacer certains vecteurs de la base par leur opposé) que pout tout i , $1 \leq i \leq p$, on a $e_i \in D$. Soit

$$V = \mathbb{R}_+^* e_1 + \dots + \mathbb{R}_+^* e_p \quad .$$

L'ensemble V est un ouvert non vide de E , contenu dans $\bar{D}$. Démontrons que $V \cap (-D) = \emptyset$. En effet, si $x \in V \cap (-D)$, alors $x = \sum_{i=1}^{p} \rho_i e_i$, où $(\rho_1, \dots, \rho_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$, et comme $x \in F$, on a $(\rho_1, \dots, \rho_p) \in K^p$, donc $(\rho_1, \dots, \rho_p) \in (K_+)^p$, d'où $x \in D$ et la condition (iii) implique que $x = 0$, ce qui est absurde. On en déduit que $V \cap (\overline{-D}) = \emptyset$ et par conséquent $V \subset \bar{D} - E'$, ce qui démontre que $\bar{D} - E' \neq \emptyset$. De même, $(-\bar{D}) - E' \neq \emptyset$ (car $(-\bar{D}) - E' = -(\bar{D} - E')$). En conclusion, $\bar{D} - E'$ et $(-\bar{D}) - E'$ sont deux fermés non vides disjoints de $E - E'$ dont la réunion est $E - E'$. On en déduit que $E - E'$ n'est pas connexe ce qui prouve que E' est un hyperplan de E , et que $\bar{D}$ est l'un des deux demi-espaces fermés de E définis par cet hyperplan.

LEMME 3.6.2.- *Il existe un drapeau orienté* α *de* E *tel que* $D = F \cap D_\alpha$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la dimension de F . Si $F = \{0\}$, le lemme est évident. Supposons donc que $\dim_K(F) = p$, $p \geq 1$, et que le lemme soit établi pour tout p' , $0 \leq p' < p$. Comme $\dim_K(F) \geq 1$, $\bar{D} \cap (-\bar{D})$ est un hyperplan de E (3.6.1). Si l'on pose $F' = F \cap [\bar{D} \cap (-\bar{D})]$, F' est un sous-K-espace vectoriel de F de dimension strictement inférieure à p (pas nécessairement un hyperplan, car en général $\bar{D} \cap (-\bar{D})$ n'est pas rationnel sur K) . Si l'on pose $D' = F' \cap D$, on voit facilement que D' vérifie les conditions (i), (ii), (iii), (iv) en tant que partie de F' . L'hypothèse de récurrence implique donc l'existence d'un drapeau orienté α' de $E' = F' \otimes_K \mathbb{R}$,

$$\alpha' : E_o \subset E_1 \subset \ldots \subset E_{p'} = E' \quad ,$$

tel que $D' = F' \cap D_{\alpha'}$. En identifiant E' à son image par l'injection canonique dans E , on a $E' \subset \bar{D} \cap (-\bar{D})$ (car E' est le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de E engendré par $F' = F \cap \bar{D} \cap (-\bar{D})$) . Il existe donc une suite croissante de sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\bar{D} \cap (-\bar{D})$ contenant E'

$$E_{p'+1} \subset \ldots \subset E_{p-1}$$

telle que $E_{p-1} = \bar{D} \cap (-\bar{D})$ et telle que pour tout i , $p'+1 \leqq i \leqq p-1$, E_{i-1} soit un hyperplan de E_i . On pose $E_p = E$. On définit ainsi un drapeau orienté α de E

$$\alpha : E_o \subset E_1 \subset \ldots \subset E_{p'} \subset E_{p'+1} \subset \ldots \subset E_{p-1} \subset E_p \quad ,$$

l'orientation de E_i/E_{i-1} étant la même que pour le drapeau orienté α' pour $1 \leqq i \leqq p'$, arbitraire pour $p'+1 \leqq i \leqq p-1$, et celle qui correspond à $E_p^+ = \bar{D}$ pour $i = p$ (cf.(3.6.1)et (3.1)). Démontrons que $D = F \cap D_\alpha$. En effet, on a

$$F \cap D_\alpha = F \cap [\bigcup_{1 \leq i \leq p} (E_i^+ - E_{i-1}) \cup E_o] =$$

$$= (F \cap D_{\alpha'}) \cup [F \cap (\bigcup_{p'+1 \leq i \leq p-1} (E_i^+ - E_{i-1}))] \cup [F \cap (E_p^+ - E_{p-1})] \quad .$$

Or, comme $D_{\alpha'} \subset E'$ et $F \cap E' = F'$, on a

$$F \cap D_{\alpha'} = F' \cap D_{\alpha'} = D' = F' \cap D = D \cap [\bar{D} \cap (-\bar{D})] = D \cap E_{p-1} \quad .$$

D'autre part, pour tout i , $p' \leqq i \leqq p-1$, on a $E' \subset E_i \subset \bar{D} \cap (-\bar{D})$, et comme $F \cap E' = F' = F \cap [\bar{D} \cap (-\bar{D})]$, on a $F \cap E_i = F'$. On en déduit que pour tout i , $p'+1 \leqq i \leqq p-1$, $F \cap (E_i^+ - E_{i-1}) = \emptyset$. Enfin, la condition (iv) implique que

$$F \cap (E_p^+ - E_{p-1}) = [D \cup (-D)] \cap [\bar{D} - (\bar{D} \cap (-\bar{D}))] = D \cap (E - E_{p-1}) \quad ,$$

ce qui démontre le lemme.

LEMME 3.6.3.- *Soient* α *et* α' *deux drapeaux orientés de* E ,

$$\alpha : E_o \subset E_1 \subset \ldots \subset E_p \quad ,$$

$$\alpha' : E'_o \subset E'_1 \subset \ldots \subset E'_p \quad ,$$

tels que $F \cap D_\alpha = F \cap D_{\alpha'}$. *Alors on a* $E_p^+ = E_p'^+$ *et* $E_{p-1} = E'_{p-1}$.

Démonstration. Comme E_p^+ (resp. $E_p'^+$) est l'un des deux demi-espaces fermés de E définis par l'hyperplan E_{p-1} (resp. E'_{p-1}) (cf.(3.1)), il suffit de démontrer que $E_p^+ = E_p'^+$. L'égalité $F \cap D_\alpha = F \cap D_{\alpha'}$ implique que $F \cap (E_p^+ - E_{p-1}) = F \cap (E_p'^+ - E'_{p-1})$. Or, F étant dense dans E , $E_p^+ - E_{p-1}$ étant un ouvert de E et $E_p'^+$ un fermé, on en déduit que

$$E_p^+ - E_{p-1} \subset \overline{F \cap (E_p'^+ - E'_{p-1})} \subset E_p'^+$$

d'où $E_p^+ \subset E_p'^+$. De même on a $E_p'^+ \subset E_p^+$, ce qui démontre le lemme.

LEMME 3.6.4.- *Soit* α ,

$$\alpha : E_o \subset E_1 \subset \ldots \subset E_p$$

un drapeau orienté de E *, rationnel sur* K *(c'est-à-dire tel que pour tout* i , $1 \leq i \leq p-1$, E_i *soit un sous-* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de* E *engendré par des éléments de* F *). Alors pour tout drapeau orienté* α' *de* E ,

$$\alpha' : E'_o \subset E'_1 \subset \ldots \subset E'_p \ ,$$

l'égalité $F \cap D_{\alpha'} = F \cap D_\alpha$ *implique que le drapeau orienté* α' *n'est autre que* α .

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la dimension p de F . L'égalité $F \cap D_{\alpha'} = F \cap D_\alpha$ implique que $E_{p-1} = E'_{p-1}$ et que $E_p^+ = E_p'^+$ (3.6.3), ce qui prouve que l'orientation de E_p/E_{p-1} est la même que celle de E'_p/E'_{p-1} (cf.(3.1)). Or, le drapeau α étant rationnel sur K , si l'on pose $F' = F \cap E_{p-1}$ et $E' = F' \otimes_K \mathbb{R}$, F' est un hyperplan de F et en identifiant E' à son image par l'injection canonique dans E , on a $E' = E_{p-1}$. Soit α_1 (resp. α'_1) le drapeau orienté de E'

$$\alpha_1 : E_o \subset E_1 \subset \ldots \subset E_{p-1}$$

$$(\text{resp. } \alpha'_1 : E'_o \subset E'_1 \subset \ldots \subset E'_{p-1}) \ ,$$

les orientations étant les mêmes que pour α (resp. α'). Le drapeau α_1 est un drapeau rationnel sur K , l'égalité $F \cap D_{\alpha'} = F \cap D_\alpha$ implique que $F' \cap D_{\alpha'_1} = F' \cap D_{\alpha_1}$ et l'hypothèse de récurrence que $\alpha'_1 = \alpha_1$, d'où $\alpha' = \alpha$, ce qui prouve le lemme.

LEMME 3.6.5.- *Si* $K = \mathbb{R}$ *(ce qui implique en particulier que* $F = E$ *), il existe un drapeau orienté* α *de* E *et un seul tel que* $D = D_\alpha$.

Démonstration. C'est une conséquence directe des lemmes 3.6.2 et 3.6.4 appliqués à $K = \mathbb{R}$.

Remarque 3.6.6.- Si $K \neq \mathbb{R}$, le drapeau orienté α de E tel que $D = F \cap D_\alpha$ n'est pas nécessairement unique. Par exemple, si $K = \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{Q}^p$ et

$$D = \{(q_1,\ldots,q_p) \in \mathbb{Q}^p \ : \ \sum_{i=1}^{p} a_i q_i \geq 0\} \quad ,$$

où $(a_1,\ldots,a_p)$ est un système de p nombres réels linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, on voit facilement que l'ensemble D vérifie les conditions (i), (ii), (iii) et (iv). Alors pour tout drapeau orienté

$$\alpha \ : \ E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_p$$

de $\mathbb{R}^p$ tel que

$$E_{p-1} = \{(x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^p \ : \ \sum_{i=1}^{p} a_i x_i = 0\}$$

et tel que l'orientation de E_p/E_{p-1} soit celle qui correspond à

$$E_p^+ = \{(x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^p \ : \ \sum_{i=1}^{p} a_i x_i \geq 0\}$$

on a $D = F \cap D_\alpha$.

PROPOSITION 3.7.- *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie. L'application qui associe à un drapeau orienté* α *de* E *la relation* $\leqq_\alpha$ *est une bijection de l'ensemble des drapeaux orientés de* E *sur l'ensemble des relations d'ordre total sur* E *compatibles avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné* $\mathbb{R}$.

Démonstration. La proposition résulte de la proposition 3.2.1 et du lemme 3.6.5.

PROPOSITION 3.8.- *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie et* A *une partie convexe de* E *telle que* $0 \notin A$. *Alors il existe un drapeau orienté* α *de* E *tel que* $A \subset D_\alpha$.

Démonstration. La partie A étant convexe, pour tout ρ_1 et ρ_2 , $\rho_1 \in \mathbb{R}_+$, $\rho_2 \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\rho_1 A + \rho_2 A \subset (\rho_1 + \rho_2) A \quad ,$$

et comme $0 \notin A$, on en déduit que si $\rho_1 + \rho_2 \neq 0$, $\rho_1 A \cap (-\rho_2 A) = \emptyset$ (car si $\rho_1 A \cap (-\rho_2 A) \neq \emptyset$, on a $0 \in \rho_1 A + \rho_2 A \subset (\rho_1 + \rho_2) A$, d'où $\rho_1 + \rho_2 = 0$) . Si l'on pose

$$B = \bigcup_{\rho \in \mathbb{R}_+} \rho A \quad ,$$

on a donc $B + B \subset B$, $\mathbb{R}_+ B \subset B$ et $B \cap (-B) = \{0\}$. On en déduit qu'il existe une partie D de E telle que $B \subset D$, $D + D \subset D$, $\mathbb{R}_+ D \subset D$, $D \cap (-D) = \{0\}$

et $D+(-D)=E$ (2.2.2). Il existe donc un drapeau orienté α de E tel que $D=D_\alpha$ (3.6.5), et on a $A\subset B\subset D_\alpha$, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE 3.8.1.- *En gardant les notations de la proposition* 3.8, *il existe* p *formes* $\mathbb{R}$*-linéaires* $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ *sur* E , *telles que pour tout* x , $x\in A$, *l'ensemble* $\{i,\ 1\leq i\leq p : \alpha_i(x)\neq 0\}$ *soit non vide, et si l'on pose*

$$i_x=\sup\{i,\ 1\leq i\leq p\ :\ \alpha_i(x)\neq 0\}\quad ,$$

on ait

$$\alpha_{i_x}(x)>0\quad .$$

Démonstration. Le corollaire est une conséquence directe de la proposition 3.8 et de 3.3.

COROLLAIRE 3.8.2.- *En gardant les notations de la proposition* 3.8, *si* A *est ouvert dans* E , *il existe une forme* $\mathbb{R}$*-linéaire* α *sur* E , *telle que pour tout* x , $x\in A$, *on ait*

$$\alpha(x)>0\quad .$$

Démonstration. Si $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ désignent p formes $\mathbb{R}$-linéaires sur E vérifiant les conditions du corollaire 3.8.1, pour tout x , $x\in A$, on a $\alpha_p(x)\geq 0$. L'ensemble A étant ouvert, $\alpha_p(A)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenu dans $\mathbb{R}_+$, donc $0\notin\alpha_p(A)$ ce qui démontre le corollaire.

Remarque 3.8.3.- Le corollaire 3.8.2 est un cas particulier du théorème de Hahn-Banach. On peut donc considérer la proposition 3.8 (ou le corollaire 3.8.1) comme une forme plus précise du théorème de Hahn-Banach en dimension finie.

PROPOSITION 3.9.- *Soit* F *un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel de dimension finie. Toute relation d'ordre total sur* F , *compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné* $\mathbb{Q}$, *se prolonge en une relation d'ordre total sur* $E=F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$, *compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné* $\mathbb{R}$, F *étant identifié à son image par l'injection canonique dans* E .

Démonstration. La proposition résulte du lemme 3.6.2 et de la proposition 3.2.1.

Remarque 3.9.1.- Conformément à la remarque 3.6.6, ce prolongement n'est pas nécessairement unique ; à moins qu'il n'existe un drapeau orienté α de E , rationnel sur $\mathbb{Q}$, tel que l'ensemble des éléments de F supérieurs ou égaux à zéro pour la relation d'ordre donnée, soit égal à $F\cap D_\alpha$ (on dit alors que cette relation d'ordre est rationnelle), dans quel cas, conformément au lemme 3.6.4, ce prolongement est unique.

COROLLAIRE 3.9.2.- *Soit F un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie. Toute relation d'ordre sur F, compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné $\mathbb{Q}$, se prolonge en une relation d'ordre sur $E = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné $\mathbb{R}$, F étant identifié à son image par l'injection canonique dans E.*

Démonstration. Soient $\leqq_F$ une telle relation d'ordre sur F et $(\leqq_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}}$ l'ensemble des relations d'ordre total sur E, compatibles avec la structure d'espace vectoriel de E sur le corps ordonné $\mathbb{R}$, et induisant une relation moins fine que $\leqq_F$ sur F. On définit une relation $\leqq_E$ dans E par

$$x \leqq_E y \Longleftrightarrow (\forall \beta, \beta \in \mathcal{B} : x \leqq_\beta y) \ , \text{ pour } \ x \in E \ , \ y \in E \ .$$

Il résulte de (2.3,i) et de (3.9) que l'ensemble $\mathcal{B}$ est non vide, et par suite que $\leqq_E$ est une relation d'ordre sur E compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et de (2.3,ii) et de (3.9) que $\leqq_E$ induit $\leqq_F$ sur F, ce qui démontre le corollaire.

COROLLAIRE 3.9.3.- *Toute relation d'ordre sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde et régulière* (cf.(1.0)), *se prolonge en une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Le corollaire résulte de la proposition 2.1 et du corollaire 3.9.2.

Exemple 3.9.4.- La relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$, qui est une relation d'ordre compatible avec sa structure de monoïde et régulière, se prolonge sur $\mathbb{R}^p$ par la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{R}^p$, et il est facile de vérifier que, dans ce cas, ce prolongement est le seul prolongement en une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné $\mathbb{R}$. En plus si $\leqq'$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde, régulière et moins fine que $\leqq$, toute relation d'ordre sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné $\mathbb{R}$, qui prolonge $\leqq'$ est moins fine que la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{R}^p$. En effet, une relation d'ordre $\leqq''$ sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné $\mathbb{R}$, est moins fine que la relation $\leqq$ si et seulement si, pour tout i, $1 \leqq i \leqq p$, $e_i \geqq'' 0$, où $e_1, \ldots, e_p$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^p$, et comme pour tout i, $1 \leqq i \leqq p$, $e_i \in \mathbb{N}^p$ cette condition ne dépend que de la restriction de $\leqq''$ sur $\mathbb{N}^p$.

PROPOSITION 3.10.- *Toute relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$ compatible avec sa structure de monoïde est induite par une relation d'ordre $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{R}^p$, où α désigne un drapeau orienté de $\mathbb{R}^p$.*

Démonstration. La proposition résulte des propositions 2.1, 3.9 et 3.7.

Remarque 3.10.1.- Inversement il est clair que pour tout drapeau orienté α de $\mathbb{R}^p$, la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{R}^p$ induit une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde.

Définition 3.11.- *Soit* $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^p$, *compatible avec sa structure de monoïde. On dit qu'une matrice* A, $A=(a_{ij})_{1\leqq i\leqq p,1\leqq j\leqq p}$, *à coefficients dans* $\mathbb{R}$, *est une matrice de définition de la relation d'ordre* $\leqq_\alpha$ *sur* $\mathbb{N}^p$, *ou que la matrice* A *définit la relation d'ordre* $\leqq_\alpha$ *sur* $\mathbb{N}^p$, *si la matrice* A *est inversible et si pour tout* d *et* d', $d=(d_1,\dots,d_p)$, $d'=(d'_1,\dots,d'_p)$, $d\in\mathbb{N}^p$, $d'\in\mathbb{N}^p$, *on a*

$$d \leqq_\alpha d' \Leftrightarrow (d=d') \text{ ou } [\exists i,\ 1\leqq i\leqq p : [(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}d_j < \sum_{j=1}^{p} a_{ij}d'_j) \quad \text{et}$$

$$(\forall i', i<i'\leqq p : \sum_{j=1}^{p} a_{i'j}d_j = \sum_{j=1}^{p} a_{i'j}d'_j)]] .$$

Si p' est un entier, $0\leqq p'\leqq p$, on dit que la matrice A est adaptée au sous-monoïde $\mathbb{N}^{p'}=\mathbb{N}^{p'}\times\{0\}$ de $\mathbb{N}^p$, s'il existe une partie I de $[1,p]$ telle que $\mathrm{card}(I)=p-p'$ et telle que pour tout i et j, $i\in I$, $1\leqq j\leqq p'$, on ait $a_{ij}=0$. On dit que la relation d'ordre total $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$ est rationnelle, si $\leqq_\alpha$ possède une matrice de définition à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

PROPOSITION 3.12.-

i) *Toute relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^p$, *compatible avec sa structure de monoïde, possède une matrice de définition.*

ii) *Toute relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^p$, *compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$, *possède une matrice de définition à coefficients dans* $\mathbb{R}_+$.

iii) *Soit* p' *un entier,* $0\leqq p'\leqq p$. *Toute relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^p$ *compatible avec sa structure de monoïde, possède une matrice de définition adaptée au sous-monoïde* $\mathbb{N}^{p'}$ *de* $\mathbb{N}^p$.

iv) *Toute relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^p$, *compatible avec sa structure de monoïde et rationnelle, possède un prolongement unique en une relation d'ordre total sur* $\mathbb{R}^p$, *compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné* $\mathbb{R}$.

Démonstration. La partie (i) de la proposition résulte de 3.10 et 3.5, la partie (ii) de 3.10, 3.9.4 et 3.5.1, la partie (iii) de 3.10, 3.3.2 et 3.5, et la partie (iv) de 2.1, 3.9 et 3.9.1.

Exemple 3.12.1.- On appelle relation d'ordre antilexicographique sur $\mathbb{N}^p$ et on désigne par $\leqq_L$ la relation définie par

$$d \leqq_L d' \Longleftrightarrow (d = d') \text{ ou } [\exists i,\ 1 \leqq i \leqq p : [(d_i < d'_i) \text{et} (\forall i', i < i' \leqq p : d_{i'} = d'_{i'})]] \ ,$$

pour $d = (d_1, \ldots, d_p)$, $d' = (d'_1, \ldots, d'_p)$, $d \in \mathbb{N}^p$, $d' \in \mathbb{N}^p$. La relation $\leqq_L$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde, moins fine que la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$ et rationnelle. La matrice unité à p lignes et p colonnes en est une matrice de définition, et la relation d'ordre antilexicographique sur $\mathbb{R}^p$ (3.5.3) en est le seul prolongement en une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel.

§4.- Filtre associé à un drapeau orienté

Dans ce paragraphe, on associe à tout drapeau orienté de $\mathbb{R}^p$ (ou ce qui revient au même, à toute relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel) un filtre sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$, et on décrit explicitement une base de ce filtre. Au §5, on associe à toute relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde, un filtre sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$. Plus précisément, pour tout x, $x \in \mathbb{R}^p$, $x = (x_1,\dots,x_p)$, et pour tout ε, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on désigne par $V_{x;\varepsilon}$ la partie de $(\mathbb{R}_+^*)^p$ définie par

$$V_{x;\varepsilon} = \{(\rho_1,\dots,\rho_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p \ : \ \prod_{i=1}^{p} \rho_i^{x_i} < \varepsilon\} .$$

Si l'on désigne par $e_{\mathbb{R}^p}$ l'application

$$e_{\mathbb{R}^p} : \mathbb{R}^p \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^p$$

définie par

$$e_{\mathbb{R}^p}(a_1,\dots,a_p) = (e^{a_1},\dots,e^{a_p}) \quad , \text{ pour } \quad (a_1,\dots,a_p) \in \mathbb{R}^p \quad ,$$

on remarque que $e_{\mathbb{R}^p}$ est bijective et que

$$e_{\mathbb{R}^p}^{-1}(V_{x;\varepsilon}) = W_{x;\mathrm{Log}\,\varepsilon} \quad ,$$

où pour tout c, $c \in \mathbb{R}$, $W_{x;c}$ désigne la partie de $\mathbb{R}^p$ définie par

$$W_{x;c} = \{(a_1,\dots,a_p) \in \mathbb{R}^p : \sum_{i=1}^{p} a_i x_i < c\} \quad .$$

Pour toute partie A de $\mathbb{R}^p$ dont l'enveloppe convexe ne contient pas 0, il résulte du théorème de Hahn-Banach que la famille

$$(W_{x;c})_{x \in A, c \in \mathbb{R}}$$

est un système de générateurs d'un filtre sur $\mathbb{R}^p$. La famille

$$(V_{x;\varepsilon})_{x \in A, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$$

est donc un système de générateurs d'un filtre sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$. Si $\leq_{\mathbb{R}^p}$ désigne une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel, l'ensemble des éléments x de $\mathbb{R}^p$ tels que $x >_{\mathbb{R}^p} 0$ étant convexe, on en déduit que la famille

$$(V_{x;\varepsilon})_{x >_{\mathbb{R}^p} 0, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$$

est un système de générateurs d'un filtre sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$. Ce paragraphe est consacré à l'étude de ces filtres dont le rôle dans ce travail a été longuement développé dans l'introduction générale. En remarquant que $(\mathbb{R}_+^*)^p$ s'identifie canoniquement au groupe des caractères réels sur $\mathbb{R}^p$, on associe plus généralement à toute partie A d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E , dont l'enveloppe convexe ne contient pas 0, (de même qu'à toute relation d'ordre sur E, compatible avec sa structure d'espace vectoriel) un filtre sur le groupe des caractères réels de E , ce qui permet d'obtenir une définition plus intrinsèque de ces filtres.

(4.1) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On rappelle qu'un caractère réel sur E (on dira plus simplement caractère sur E) est une application continue

$$\chi : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que

i) pour tout x et y , $x \in E$, $y \in E$,

$$\chi(x+y) = \chi(x).\chi(y) \quad ;$$

ii) $\chi \neq 0$.

On remarque que si χ désigne un caractère sur E , pour tout x , $x \in E$, on a

$$\chi(x) = \chi(x/2 + x/2) = (\chi(x/2))^2 \quad ,$$

donc $\chi(x) \geqq 0$, et $\chi(x) \neq 0$, car s'il existait x_0 , $x_0 \in E$, tel que $\chi(x_0) = 0$, on aurait pour tout x $x \in E$,

$$\chi(x) = \chi(x_0 + (x - x_0)) = \chi(x_0).\chi(x - x_0) = 0 \quad .$$

Un caractère sur E est donc un homomorphisme continu du groupe additif de E dans le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$, et l'ensemble des caractères sur E forme un groupe multiplicatif, noté Ξ_E . Si α désigne une forme linéaire sur E , $\alpha \in E^*$, et si l'on pose

$$\chi(x) = e^{\alpha(x)} \quad , \text{ pour } x \in E \quad ,$$

χ est un caractère sur E , et réciproquement si χ désigne un caractère sur E , $\chi \in \Xi_E$, et si l'on pose

$$\alpha(x) = \mathrm{Log}(\chi(x)) \quad , \text{ pour } x \in E \quad ,$$

α est un homomorphisme continu du groupe additif de E dans le groupe additif de $\mathbb{R}$, donc une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur E . On établit ainsi un isomorphisme

$$e_E : E^* \longrightarrow \Xi_E$$

du groupe additif de E^* sur le groupe multiplicatif Ξ_E , qu'on munit de la topologie qui rend e_E un homéomorphisme.

Si F désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u : E \longrightarrow F$ une application $\mathbb{R}$-linéaire, pour tout caractère χ sur F on désigne par χ^u le caractère sur E défini par

$$\chi^u = \chi \circ u \quad ,$$

et on désigne par r_u l'homomorphisme de groupes

$$r_u : \Xi_F \longrightarrow \Xi_E$$

défini par

$$r_u(\chi) = \chi^u \quad , \text{ pour } \chi \in \Xi_F \quad ,$$

et on a

$$r_u \circ e_F = e_E \circ {}^t u$$

(ce qui implique en particulier que r_u est continu), et

$$r_{\mathrm{id}_E} = \mathrm{id}_{\Xi_E} \quad .$$

Si G désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $v : F \longrightarrow G$ une application $\mathbb{R}$-linéaire, on a

$$r_{v \circ u} = r_u \circ r_v$$

et pour tout caractère χ sur G , on a

$$\chi^{(v \circ u)} = (\chi^v)^u \quad .$$

En particulier, si $E = F = G$ et si u désigne un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E , r_u est un automorphisme du groupe Ξ_E et

$$r_{u^{-1}} = (r_u)^{-1} \quad .$$

Il résulte aussi que si l'application $\mathbb{R}$-linéaire $u : E \longrightarrow F$ est injective (resp. surjective), l'application $r_u : \Xi_F \longrightarrow \Xi_E$ est surjective (resp. injective).

(4.2) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, x un élément de E , et ε un élément de $\mathbb{R}_+^*$ (resp. c un élément de $\mathbb{R}$) . On désigne par $V_{x;\varepsilon}$ (resp. $W_{x;c}$) l'ouvert de Ξ_E (resp. E^*) défini par

$$V_{x;\varepsilon} = \{\chi \in \Xi_E : \chi(x) < \varepsilon\}$$

$$(\text{resp. } W_{x;c} = \{\alpha \in E^* : \alpha(x) < c\}) \quad .$$

Alors on a :

(4.2.1) $$e_E^{-1}(V_{x;\varepsilon}) = W_{x;\mathrm{Log}\,\varepsilon}$$

et

(4.2.2) $$e_E(W_{x;c}) = V_{x;e^c} \quad ,$$

et pour tout x_1 et x_2 , $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, tout ρ_1 et ρ_2 , $(\rho_1,\rho_2) \in (\mathbb{R}_+)^2 - \{0\}$, tout ε_1 et ε_2 , $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et tout c_1 et c_2 , $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \in \mathbb{R}$, on a

(4.2.3) $$W_{x_1;c_1} \cap W_{x_2;c_2} \subset W_{\rho_1 x_1+\rho_2 x_2;\rho_1 c_1+\rho_2 c_2}$$

et

(4.2.4) $$V_{x_1;\varepsilon_1} \cap V_{x_2;\varepsilon_2} \subset V_{\rho_1 x_1+\rho_2 x_2;\varepsilon_1^{\rho_1}\varepsilon_2^{\rho_2}} \quad .$$

Soit A une partie de E . On rappelle que l'enveloppe convexe de A est l'intersection de toutes les parties convexes de E contenant A , et c'est la plus petite partie convexe de E contenant A . L'enveloppe convexe de A est formé de l'ensemble des éléments x de E tels qu'il existe une famille finie $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de A et une famille $(\rho_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telles que $\rho_1+\ldots+\rho_n = 1$ et

$$x = \rho_1 x_1 +\ldots+ \rho_n x_n \quad .$$

PROPOSITION 4.3.- *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et A une partie de E . Les conditions suivantes sont équivalentes*

i) *l'enveloppe convexe de A ne contient pas 0 ;*

ii) *il existe un drapeau orienté α de E tel que $A\subset D_\alpha - \{0\}$;*

iii) *la famille $(V_{x;\varepsilon})_{x\in A,\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*}$ est un système de générateurs d'un filtre sur Ξ_E ;*

iv) *la famille $(W_{x;c})_{x\in A,c\in\mathbb{R}}$ est un système de générateurs d'un filtre sur E^* .*

Démonstration. Pour tout drapeau orienté α de E , $D_\alpha - \{0\}$ étant convexe, l'équivalence de (i) et (ii) résulte de la proposition (3.8). L'application

$$e_E : E^* \longrightarrow \Xi_E$$

étant bijective, l'équivalence de (iii) et (iv) résulte de (4.2.1). Démontrons que (iv) implique (i). Supposons que 0 appartienne à l'enveloppe convexe de A . Alors il existe une famile finie $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de A et une famille

$(\rho_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telles que $\rho_1+\ldots+\rho_n=1$ et $\rho_1x_1+\ldots+\rho_nx_n=0$. On en déduit que pour tout c , $c\in\mathbb{R}$,

$$W_{x_1;c}\cap\ldots\cap W_{x_n;c}\subset W_{0;c} \quad .$$

(4.2.3), et comme pour tout c , $c\in\mathbb{R}$, $c\leq 0$, on a $W_{0;c}=\emptyset$, ceci est en contradiction avec la condition (iv). Réciproquement, démontrons que (i) implique (iv). Il suffit de démontrer que si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille finie d'éléments de A et $(c_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}$, $\bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i;c_i}\neq\emptyset$. Soit $B=\{x_1,\ldots,x_n\}$, et soit B' l'enveloppe convexe de B . La condition (i) implique que $0\notin B'$, et comme l'ensemble B est fini, B' est un fermé de E . Il existe donc un ouvert convexe U de E tel que $B'\subset U$ et $0\notin U$ (si $\|.\|$ désigne une norme quelconque sur E et $d(.,.)$ la distance déduite de cette norme, B' étant fermé dans E , $d(0,B')>0$ et alors on peut prendre $U=\{x\in E\ :\ d(x,B')<b\}$, où $b=d(0,B')$) . Il existe une forme linéaire α sur E telle que pour tout x , $x\in U$, $\alpha(x)>0$ (3.8.2), et en particulier, si pour tout i , $1\leq i\leq n$, on pose $a_i=\alpha(x_i)$, on a $a_i>0$. Posons $a=\inf_{1\leq i\leq n} a_i$ et $c=\sup_{1\leq i\leq n}|c_i|$. On a $a>0$, et si l'on pose $\alpha'=-((c/a)+1)\alpha$ on vérifie aussitôt que $\alpha'\in\bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i;c_i}$, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE 4.3.1.- *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $\leq_E$ *une relation d'ordre sur* E *, compatible avec sa structure d'espace vectoriel. Alors la famille* $(V_{x;\varepsilon})_{x>_E 0,\varepsilon\in\mathbb{R}^*_+}$ *est un système de générateurs d'un filtre sur* Ξ_E .

Démonstration. Si l'on désigne par A la partie de E définie par

$$A=\{x\in E\ :\ x>_E 0\} \quad ,$$

on vérifie facilement que A est convexe et le corollaire résulte aussitôt de la proposition 4.3.

DÉFINITION 4.4.- *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie. Pour toute partie* A *de* E *dont l'enveloppe convexe ne contient pas* 0 *, on désigne par* F_A (resp. G_A) *le filtre sur* Ξ_E (resp. E^*) *engendré par la famille* $(V_{x;\varepsilon})_{x\in A,\varepsilon\in\mathbb{R}^*_+}$ (resp. $(W_{x;c})_{x\in A,c\in\mathbb{R}}$) . *On dit qu'un filtre* F *sur* Ξ_E (resp. *un filtre* G *sur* E^*) *est un filtre de Hahn-Banach, s'il existe une partie* A *de* E *dont l'enveloppe convexe ne contient pas* 0 *, et telle que* $F=F_A$ (resp. $G=G_A$) *. Pour toute relation d'ordre* $\leq_E$ *sur* E *, compatible avec sa structure d'espace vectoriel,* *on désigne par* $\mathcal{F}_{\leqq_E}$ (resp. $\mathcal{G}_{\leqq_E}$) *le filtre de Hahn-Banach* $\mathcal{F}_{E^+-\{0\}}$ (resp. $\mathcal{G}_{E^+-\{0\}}$) *où* $E^+ = \{x \in E : x \geqq_E 0\}$, *et on dit que* $\mathcal{F}_{\leqq_E}$ (resp. $\mathcal{G}_{\leqq_E}$) *est le filtre de Hahn-Banach sur* Ξ_E (resp. E^*) *défini par la relation d'ordre* $\leqq_E$. *Pour tout drapeau orienté* α *de* E , *on désigne par* $\mathcal{F}_\alpha$ (resp. $\mathcal{G}_\alpha$) *le filtre* $\mathcal{F}_{\leqq_\alpha}$ (resp. $\mathcal{G}_{\leqq_\alpha}$) , *et on dit que* $\mathcal{F}_\alpha$ (resp. $\mathcal{G}_\alpha$) *est le filtre de Hahn-Banach sur* Ξ_E (resp. E^*) *défini par le drapeau orienté* α .

Remarque 4.4.1. En gardant les notations de la définition, il résulte de (4.2.2) que $\mathcal{F}_A$ est l'image du filtre $\mathcal{G}_A$ par la bijection e_E . Si A' désigne une partie de E dont l'enveloppe convexe ne contient pas 0 et si $A \subset A'$, le filtre $\mathcal{F}_{A'}$ (resp. $\mathcal{G}_{A'}$) est plus fin que $\mathcal{F}_A$ (resp. $\mathcal{G}_A$) . En particulier si $\leqq'_E$ désigne une relation d'ordre sur E , compatible avec sa structure d'espace vectoriel et moins fine que la relation $\leqq_E$, le filtre $\mathcal{F}_{\leqq'_E}$ (resp. $\mathcal{G}_{\leqq'_E}$) est plus fin que $\mathcal{F}_{\leqq_E}$ (resp. $\mathcal{G}_{\leqq_E}$) .

PROPOSITION 4.5.- *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie et* A *une partie de* E *dont l'enveloppe convexe ne contient pas* 0 . *Alors il existe une relation d'ordre unique sur* E , *compatible avec sa structure d'espace vectoriel, telle que* $\mathcal{F}_A$ *soit le filtre de Hahn-Banach sur* Ξ_E *défini par cette relation d'ordre (ou ce qui est équivalent,* $\mathcal{G}_A$ *soit le filtre de Hahn-Banach sur* E^* *défini par cette relation d'ordre), et si l'on désigne par* $\leqq_A$ *cette relation d'ordre, pour tout* x , $x \in E$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $x >_A 0$;

ii) $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{(\rho_1,\dots,\rho_n) \in (\mathbb{R}_+)^n - \{0\}} (\rho_1 A + \dots + \rho_n A)$;

iii) *pour tout drapeau orienté* α *de* E *tel que* $A \subset D_\alpha$, *on a* $x \in D_\alpha - \{0\}$;

iv) *pour tout* ε , $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, *on a* $V_{x;\varepsilon} \in \mathcal{F}_A$;

v) *pour tout* c , $c \in \mathbb{R}$, *on a* $W_{x;c} \in \mathcal{G}_A$;

vi) $x \neq 0$, *et il existe* ε , $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, *tel que* $V_{x,\varepsilon} \in \mathcal{F}_A$;

vii) $x \neq 0$, *et il existe* c , $c \in \mathbb{R}$, *tel que* $W_{x;c} \in \mathcal{G}_A$.

Démonstration. L'équivalence de (iv) et (v) ainsi que celle de (vi) et (vii) résulte de (4.2.1) et (4.1), la condition (ii) implique la condition (v) (4.2.3) et la condition (v) implique la condition (vii) (car $W_{x;0} \neq \emptyset$ implique $x \neq 0$) .

Soit $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{(\rho_1,\dots,\rho_n) \in (\mathbb{R}_+)^n - \{0\}} (\rho_1 A + \dots + \rho_n A)$. On a $A \subset B$, $B + B \subset B$,

$\mathbb{R}_+^* B \subset B$ et l'enveloppe convexe de A ne contenant pas 0 , $0 \notin B$ et $B \cap (-B) = \emptyset$. Il existe donc une relation d'ordre $\leqq_A$ sur E , compatible avec sa structure d'espace vectoriel, telle que pour tout x , $x \in E$,

(4.5.1) $\qquad x >_A 0 \Leftrightarrow x \in B$,

et il résulte de (2.3) et (3.7) que si $\mathcal{D}$ désigne l'ensemble des drapeaux orientés α de E tels que $B \subset D_\alpha$ (ou ce qui est équivalent tels que $A \subset D_\alpha$) , on a $B = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{D}} D_\alpha - \{0\}$, ce qui démontre l'équivalence des conditions (ii) et (iii).

Démontrons que la condition (vii) implique la condition (iii). Soit donc x_o , $x_o \in E$, $x_o \neq 0$, tel qu'il existe c_o , $c_o \in \mathbb{R}$, tel que $W_{x_o;c_o} \in \mathcal{G}_A$ et supposons qu'il existe un drapeau orienté α de E , $\alpha \in \mathcal{D}$, tel que $x_o \notin D_\alpha$. Alors $-x_o \in D_\alpha - \{0\}$, et si l'on pose $A_1 = A \cup \{-x_o\}$, on a $A_1 \subset D_\alpha - \{0\}$, ce qui implique que la famille $(W_{x;c})_{x \in A_1, c \in \mathbb{R}}$ est un système de générateurs d'un filtre $\mathcal{G}_{A_1}$ sur E^* (4.3), plus fin que $\mathcal{G}_A$ (4.4.1) et en particulier, comme $W_{x_o;c_o} \in \mathcal{G}_A$, que pour tout c , $c \in \mathbb{R}$, $W_{x_o;c_o} \cap W_{-x_o;c} \neq \emptyset$, d'où $W_{0;c_o+c} \neq \emptyset$ (4.2.3), ce qui est impossible pour $c \leqq -c_o$. Ceci démontre l'équivalence des conditions (ii), (iii), (iv), (v), (vi) et (vii) et (4.5.1) implique donc que $\mathcal{G}_{\leqq_A} = \mathcal{G}_A$.

Il reste à démontrer que si $\leqq'_A$ est une relation d'ordre sur E , compatible avec sa structure d'espace vectoriel, telle que $\mathcal{G}_{\leqq'_A} = \mathcal{G}_A$, $\leqq'_A$ n'est autre que $\leqq_A$. Soit $A' = \{x \in E : x >'_A 0\}$. Alors A' est une partie convexe de E , $0 \notin A'$ et $A' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{(\rho_1,\dots,\rho_n) \in (\mathbb{R}_+)^n - \{0\}} (\rho_1 A' + \dots + \rho_n A')$. En appliquant donc l'équivalence des conditions (ii) et (v) à la partie A' de E , on déduit que pour tout x , $x \in E$, on a $x \in A'$, si et seulement si, pour tout c , $c \in \mathbb{R}$, $W_{x;c} \in \mathcal{G}_{A'}$, et comme $\mathcal{G}_{A'} = \mathcal{G}_A$, cela équivaut à $x \in B$, d'où $A' = B$, ce qui démontre la proposition.

<u>COROLLAIRE 4.5.2</u>.- *L'application qui associe à une relation d'ordre sur* E , *compatible avec sa structure d'espace vectoriel, le filtre de Hahn-Banach sur* Ξ_E (resp. E^*) , *défini par cette relation d'ordre, est un isomorphisme d'ensembles ordonnés, de l'ensemble des relations d'ordre sur* E , *compatibles avec sa structure d'espace vectoriel, ordonné par la relation " plus fine que", sur l'ensemble des filtres de Hahn-Banach sur* Ξ_E (resp. E^*) , *ordonné par la relation " moins fin que", les éléments maximaux de cet ensemble étant en bijection avec les relations d'ordre total sur* E , *compatibles avec sa structure d'espace vectoriel.*

Démonstration. Le corollaire est une conséquence directe de 4.5, de 4.4.1 et de 2.3.

(4.6) Soient E et E' deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et $u : E \to E'$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Pour tout point x, $x \in E$, et tout ε, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ (resp. tout c, $c \in \mathbb{R}$) on a

$$V_{u(x);\varepsilon} = r_u^{-1}(V_{x;\varepsilon})$$
$$(\text{resp. } W_{u(x);c} = {}^t u^{-1}(W_{x;c})) \quad .$$

On en déduit que si A (resp. A') est une partie de E (resp. E') dont l'enveloppe convexe ne contient pas 0 et si $u(A) \subset A'$, alors l'image du filtre $\mathcal{F}_{A'}$ (resp. $\mathcal{G}_{A'}$) par r_u (resp. ${}^t u$) engendre un filtre plus fin que $\mathcal{F}_A$ (resp. $\mathcal{G}_A$), ou ce qui est équivalent, l'image réciproque du filtre $\mathcal{F}_A$ (resp. $\mathcal{G}_A$) par r_u (resp. ${}^t u$) engendre un filtre moins fin que $\mathcal{F}_{A'}$ (resp. $\mathcal{G}_{A'}$). En particulier, si $E' = E$ et si u est un automorphisme de E, pour tout drapeau orienté α de E le filtre $\mathcal{F}_{u(\alpha)}$ (resp. $\mathcal{G}_{u(\alpha)}$) est l'image réciproque du filtre $\mathcal{F}_\alpha$ (resp. $\mathcal{G}_\alpha$) par la bijection r_u (resp. ${}^t u$) (3.4).

LEMME 4.6.1.- *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie,* H *un hyperplan de* E, A *une partie de* E, B *l'enveloppe convexe de* A *et*

$$A' = \{x \in H : \exists x_1, x_2 \in A \ , \ \exists \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}_+ : \ \rho_1 + \rho_2 = 1 \text{ et } x = \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2\} \quad .$$

Alors $B \cap H$ *est l'enveloppe convexe de* A'.

Démonstration. Soit B' l'enveloppe convexe de A'. On a $A' \subset B \cap H$, et comme $B \cap H$ est convexe, on en déduit que $B' \subset B \cap H$. Pour démontrer que $B \cap H \subset B'$, il suffit de démontrer que pour tout n, $n \in \mathbb{N}^*$, si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'éléments de A et $(\rho_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telle que $\rho_1 + \ldots + \rho_n = 1$, si l'on pose $x = \rho_1 x_1 + \ldots + \rho_n x_n$, l'hypothèse $x \in H$ implique que $x \in B'$ (4.2). On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$ ou $n = 2$, l'assertion est évidente, car alors $x \in A'$ par définition de A'. Supposons donc que $n > 2$ et que l'assertion soit établie pour $n - 1$, et démontrons la pour n. S'il existe i, $1 \leq i \leq n$, tel que $\rho_i = 0$, l'hypothèse de récurrence implique que $x \in B'$. On peut donc supposer que pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $\rho_i > 0$. Soit α une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur E telle que $\mathrm{Ker}(\alpha) = H$. L'hypothèse $x \in H$ implique que $\sum_{i=1}^{n} \rho_i \, \alpha(x_i) = 0$. Si pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $\alpha(x_i) = 0$, pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $x_i \in H$ donc $x_i \in A'$ et $x \in B'$. Supposons donc qu'il existe i_o , $1 \leq i_o \leq n$, tel que $\alpha(x_{i_o}) \neq 0$. Alors l'égalité $\sum_{i=1}^{n} \rho_i \alpha(x_i) = 0$ implique qu'il existe j_o , $1 \leq j_o \leq n$, tel que $\alpha(x_{j_o}) \neq 0$ et tel que $\alpha(x_{j_o})$ ait un signe opposé à celui de $\alpha(x_{i_o})$ (car pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $\rho_i > 0$) , ce qui implique que si l'on pose $r_{i_o} = \alpha(x_{j_o})/[\alpha(x_{j_o}) - \alpha(x_{i_o})]$ et $r_{j_o} = -\alpha(x_{i_o})/[\alpha(x_{j_o}) - \alpha(x_{i_o})]$, on a $r_{i_o} > 0$, $r_{j_o} > 0$ et $r_{i_o} + r_{j_o} = 1$. Soit $y = r_{i_o} x_{i_o} + r_{j_o} x_{j_o}$. On a $\alpha(y) = 0$, donc $y \in H$, d'où $y \in A'$. D'autre part, soit $s = \inf\{\rho_{i_o}/r_{i_o}, \rho_{j_o}/r_{j_o}\}$ et supposons par exemple que $s = \rho_{i_o}/r_{i_o}$. Alors si l'on pose $t = r_{j_o}(\rho_{j_o}/r_{j_o} - \rho_{i_o}/r_{i_o})$ on a $t \geq 0$, $s + t + \sum_{i\in[1,n]-\{i_o,j_o\}} \rho_i = 1$ et $x = sy + tx_{j_o} + \sum_{i\in[1,n]-\{i_o,j_o\}} \rho_i x_i$. Enfin, comme pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $\rho_i > 0$ et $n > 2$, on a $1 - s > 0$ et si l'on pose

$$y' = [t/(1-s)]x_{j_o} + \sum_{i\in[1,n]-\{i_o,j_o\}} [\rho_i/(1-s)]x_i ,$$

on a $y' \in H$ (car $y' = (x - sy)/(1 - s)$) et l'hypothèse de récurrence implique que $y' \in B'$ (car $t/(1-s) + \sum_{i\in[1,n]-\{i_o,j_o\}} \rho_i/(1-s) = 1$) , et comme $x = sy + (1-s)y'$, on en déduit que $x \in B'$, ce qui démontre le lemme.

<u>LEMME 4.6.2</u>.- *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie,* E' *un sous-* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel,* α' *une forme* $\mathbb{R}$*-linéaire sur* E', A *une partie finie de* E *dont l'enveloppe convexe ne rencontre pas* E' *, et* c *un élément de* $\mathbb{R}$ *. Alors il existe une forme* $\mathbb{R}$*-linéaire* α *sur* E *qui prolonge* α' *et telle que* $\alpha \in \bigcap_{x\in A} W_{x;c}$.

<u>Démonstration</u>. Soit α_o un prolongement quelconque de α' en une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur E . On pose $a = \sup_{x\in A} \alpha_o(x)$. Soient $E'' = E/E'$, $\pi : E \longrightarrow E''$ la surjection canonique et $B = \pi(A)$. Alors B est une partie finie de E'' dont l'enveloppe convexe ne contient pas 0 . Il existe donc une forme $\mathbb{R}$-linéaire β sur E'' telle que $\beta \in \bigcap_{y\in B} W_{y;c-a}$ (4.3). On pose $\alpha = \alpha_o + \beta \circ \pi$. Alors on a $\alpha|E' = \alpha'$, et pour tout x , $x \in A$, $\alpha(x) = \alpha_o(x) + \beta(\pi(x)) < c$, ce qui démontre le lemme.

PROPOSITION 4.6.3.- *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie,* E' *un sous-*$\mathbb{R}$*-espace vectoriel de* E *,* A *une partie de* E *dont l'enveloppe convexe* B *ne contient pas* 0 *et* $B' = B \cap E'$ *. Alors* B' *est une partie convexe de* E' *ne contenant pas* 0 *et le filtre de Hahn-Banach* $F_{B'}$ (resp. $G_{B'}$) *sur* $\Xi_{E'}$ (resp. E'^*) *est l'image du filtre de Hahn-Banach* F_A (resp. G_A) *par la surjection* r_u (resp. ${}^t u$) *, où* u *désigne l'injection canonique* $u : E' \longrightarrow E$ (cf. 4.1).

Démonstration. En raisonnant par récurrence sur la codimension de E' dans E, on peut supposer que E' est un hyperplan de E. D'autre part, l'image du filtre G_A par la surjection ${}^t u$ est un filtre plus fin que $G_{B'}$ (4.5 et 4.6). Il suffit donc de démontrer que si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille finie d'éléments de A et $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}$, il existe une famille finie $(y_j)_{1 \leq j \leq m}$ d'éléments de B' et une famille $(c_j')_{1 \leq j \leq m}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ telles que pour toute forme $\mathbb{R}$-linéaire α' sur E' telle que $\alpha' \in \bigcap_{j=1}^{m} W_{y_j;c_j'}$, il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire α sur E telle que $\alpha \in \bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i;c_i}$ et $\alpha|E' = \alpha'$.

Soient $A_o = \{x_1, \ldots, x_n\}$, B_o l'enveloppe convexe de A_o,

$$A_o' = \{x \in E' : \exists i_1, i_2,\ 1 \leq i_1 \leq n,\ 1 \leq i_2 \leq n,\ \exists \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}_+ : \rho_1 + \rho_2 = 1 \text{ et } x = \rho_1 x_{i_1} + \rho_2 x_{i_2}\},$$

B_o' l'enveloppe convexe de A_o' et $c = \inf_{1 \leq i \leq n} c_i$. Alors on a $B_o' = B_o \cap E'$ (4.6.1), l'ensemble A_o' est fini et $A_o' \subset B'$. Soit α' une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur E' telle que $\alpha' \in \bigcap_{y \in A_o'} W_{y;c}$. Nous allons démontrer qu'il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire α sur E telle que $\alpha \in \bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i;c_i}$ et $\alpha|E' = \alpha'$. On distingue deux cas :

1er cas : $A_o' = \emptyset$. Alors $B_o' = \emptyset$, donc $B_o \cap E' = \emptyset$, et il résulte du lemme 4.6.2 qu'il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire α sur E qui prolonge α' telle que $\alpha \in \bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i;c}$, ce qui implique que $\alpha \in \bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i;c_i}$.

2ème cas : $A_o' \neq \emptyset$. On peut alors qupposer que $\alpha' \neq 0$ (car si $\alpha' = 0$, comme $A_o' \neq \emptyset$, $\alpha' \in \bigcap_{y \in A_o'} W_{y;c}$ implique que $c \geq 0$, et on peut prendre $\alpha = 0$). Soit donc e_o, $e_o \in E'$, tel que $\alpha'(e_o) = c$. On pose $A_1 = -e_o + A_o$, $B_1 = -e_o + B_o$, $A_1' = -e_o + A_o'$ et $B_1' = -e_o + B_o'$. Alors B_1 (resp. B_1') est l'enveloppe convexe de A_1 (resp. A_1'), $B_1' = B_1 \cap E'$ et pour tout y, $y \in A_1'$, $\alpha'(y) < 0$, ce qui implique que pour tout y , $y \in B'_1$, $\alpha'(y) < 0$. Soit $H' = \mathrm{Ker}(\alpha')$. On a donc $B'_1 \cap H' = \emptyset$, d'où $B_1 \cap H' = \emptyset$ (car $H' \subset E'$ et $B_1 \cap E' = B'_1$) . On en déduit l'existence d'une forme $\mathbb{R}$-linéaire β sur E telle que $\beta|H' = 0$ et telle que $\beta \in \bigcap_{x \in A_1} W_{x;0}$ (4.6.2), ce qui implique que pour tout x , $x \in B_1$, $\beta(x) < 0$. Si l'on pose $H = \mathrm{Ker}(\beta)$ on a donc $H' \subset H \cap E'$, et comme $A'_0 \neq \emptyset$, il existe y , $y \in E'$, tel que $\alpha'(y) < 0$ et $\beta(y) < 0$. On en déduit que les hyperplans H et E' de E sont distincts, que l'hyperplan $H \cap E'$ de E' (noyau de $\beta|E'$) n'est autre que H' (noyau de α'), et que le demi-espace ouvert de E' où α' est strictement négative est le même que celui où $\beta|E'$ est strictement négative. Soit e_1 , $e_1 \in H$, $e_1 \notin E'$. On a $E = E' \oplus \mathbb{R}e_1$. Soit $\pi : E \longrightarrow E'$ la projection parallèlement à $\mathbb{R}e_1$. On pose $\alpha = \alpha' \circ \pi$. Pour tout x , $x \in A_1$, $\beta(\pi(x)) = \beta(x) < 0$, donc $\alpha'(\pi(x)) < 0$, d'où $\alpha(x) < 0$. On en déduit que pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $\alpha(-e_0 + x_i) < 0$ (car $-e_0 + x_i \in A_1$) , d'où $\alpha(x_i) < c \leq c_i$, ce qui démontre la proposition.

<u>COROLLAIRE 4.6.4</u>.- *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie,* $\leqq_E$ *une relation d'ordre sur* E *, compatible avec sa structure d'espace vectoriel,* E' *un sous-* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de* E *et* $\leqq_{E'}$ *la relation d'ordre sur* E' *, induite par* $\leqq_E$ *. Alors le filtre de Hahn-Banach* $F_{\leqq_{E'}}$ (resp. $G_{\leqq_{E'}}$) *sur* Ξ_E (resp. E^*) *est l'image du filtre de Hahn-Banach* $F_{\leqq_E}$ (resp. $G_{\leqq_E}$) *par la surjection* r_u (resp. ${}^t u$) *, où* u *désigne l'injection canonique* $u : E' \longrightarrow E$.

<u>Démonstration</u>. Le corollaire résulte directement de la proposition 4.6.3.

(<u>4.7</u>). Soit p un entier, $p \in \mathbb{N}$. Pour tout ρ , $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_p)$, $\rho \in (\mathbb{R}^*_+)^p$, si l'on désigne par χ_ρ l'application

$$\chi_\rho : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^*_+ \quad ,$$

définie par

$$\chi_\rho(x) = \prod_{i=1}^{p} \rho_i^{x_i} \quad , \text{ pour } x = (x_1, \ldots, x_p) \ , \ x \in \mathbb{R}^p \ ,$$

χ_ρ est un caractère sur $\mathbb{R}^p$, et si l'on désigne par ξ_p l'application

$$\xi_p : (\mathbb{R}^*_+)^p \longrightarrow \Xi_{\mathbb{R}^p} \quad ,$$

définie par

$$\xi_p(\rho) = \chi_\rho \quad , \quad \text{pour } \rho \in (\mathbb{R}^*_+)^p \quad ,$$

ξ_p est un isomorphisme du groupe multiplicatif produit $(\mathbb{R}^*_+)^p$ sur le groupe $\Xi_{\mathbb{R}^p}$. Pour toute forme $\mathbb{R}$-linéaire α sur $\mathbb{R}^p$, si $a_1, \ldots, a_p$ désignent ses coordonnées dans la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on a

$$e_{\mathbb{R}^p}(\alpha) = \xi_p(e^{a_1},\dots,e^{a_p}) ,$$

et en particulier, ξ_p est un homéomorphisme.

Soient q un entier, $q \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij})_{1\leqq i\leqq q, 1\leqq j\leqq p}$ une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\rho = (\rho_1,\dots,\rho_q)$, $\rho \in (\mathbb{R}_+^*)^q$. Si l'on désigne par ρ^A l'élément $\rho' = (\rho'_1,\dots,\rho'_p)$ de $(\mathbb{R}_+^*)^p$, défini par

$$\rho'_j = \prod_{i=1}^{q} \rho_i^{a_{ij}} , \text{ pour } 1 \leqq j \leqq p ,$$

on a

$$\chi_p^u = \chi_{\rho^A} ,$$

où u désigne l'application $\mathbb{R}$-linéaire , $u : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$, définie par la matrice A , et si l'on désigne par r_A l'application

$$r_A : (\mathbb{R}_+^*)^q \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^p ,$$

définie par

$$r_A(\rho) = \rho^A , \text{ pour } \rho \in (\mathbb{R}_+^*)^q ,$$

on a

$$\xi_p \circ r_A = r_u \circ \xi_q .$$

On identifiera désormais $\Xi_{\mathbb{R}^p}$ à $(\mathbb{R}_+^*)^p$, moyennant l'isomorphisme ξ_p , et le dual de $\mathbb{R}^p$ (considéré comme l'espace vectoriel des matrices colonnes à p lignes) à $\mathbb{R}^p$ (considéré comme l'espace vectoriel des matrices lignes à p colonnes). Modulo ces identifications, on a donc pour tout x , $x = (x_1,\dots,x_p)$, $x \in \mathbb{R}^p$, et tout ε , $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, (resp. tout c, $c \in \mathbb{R}$)

$$V_{x;\varepsilon} = \{(\rho_1,\dots,\rho_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p : \prod_{i=1}^{p} \rho_i^{x_i} < \varepsilon\}$$

$$(\text{resp. } W_{x;c} = \{(a_1,\dots,a_p) \in \mathbb{R}^p : \sum_{i=1}^{p} a_i x_i < c\}),$$

et pour toute partie B de $\mathbb{R}^p$ dont l'enveloppe convexe ne contient pas 0, toute relation d'ordre $\leqq_{\mathbb{R}^p}$ sur $\mathbb{R}^p$ compatible avec sa structure d'espace vectoriel et tout drapeau orienté α de $\mathbb{R}^p$, $\mathcal{F}_B$, $\mathcal{F}_{\leqq_{\mathbb{R}^p}}$ et $\mathcal{F}_\alpha$ (resp. $\mathcal{G}_B$, $\mathcal{G}_{\leqq_{\mathbb{R}^p}}$ et $\mathcal{G}_\alpha$) sont des filtres sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$ (resp. $\mathbb{R}^p$) .

Exemple 4.7.1.- Le filtre de Hahn-Banach $F_{\leqq}$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$, défini par la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{R}^p$, est la trace sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$ du filtre des voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^p$.

PROPOSITION 4.8.- *Soient* p *un entier,* $p \in \mathbb{N}$, α *un drapeau orienté de* $\mathbb{R}^p$ *et* A *une matrice inversible définissant la relation d'ordre* $\leqq_\alpha$ (cf. 3.5). *Alors le filtre de Hahn-Banach* F_α (resp. G_α) *sur* $(\mathbb{R}_+^*)^p$ (resp. $\mathbb{R}^p$) *est l'image du filtre de Hahn-Banach* $F_{\leqq_L}$ (resp. $G_{\leqq_L}$) , *défini par la relation d'ordre antilexicographique* $\leqq_L$ *sur* $\mathbb{R}^p$ (cf. 3.5.3), *par la bijection* r_A (*resp. par l'automorphisme de* $\mathbb{R}^p$ *défini par la matrice* ${}^tA$).

Démonstration. Si e^* désigne le drapeau orienté de $\mathbb{R}^p$ déterminé par la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, la relation d'ordre antilexicographique $\leqq_L$ n'est autre que la relation d'ordre $\leqq_{e^*}$ (3.5.3) et $e^* = u(\alpha)$, où u désigne l'automorphisme de $\mathbb{R}^p$ défini par la matrice inversible A , et la proposition résulte de 4.6.

(4.9).- Soient p un entier, $p \in \mathbb{N}$. Pour tout δ, $\delta \in \mathbb{R}_+$, et tout ε, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, (resp. tout c , $c \in \mathbb{R}$) on désigne par $E_{p;\delta;\varepsilon}$ (resp. $C_{p;\delta;c}$) la partie de $(\mathbb{R}_+^*)^p$ (resp. $\mathbb{R}^p$) définie par

$$E_{p;\delta;\varepsilon} = \{(\rho_1,\dots,\rho_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p \ : \ \rho_1 < \varepsilon,\ \rho_2 < \rho_1^\delta,\dots,\rho_p < \rho_{p-1}^\delta$$

$$(\text{resp. } C_{p;\delta;c} = \{(a_1,\dots,a_p) \in \mathbb{R}^p : a_1 < c,\ a_2 < \delta a_1,\dots,a_p < \delta a_{p-1}\} \ .$$

Alors on a

$$e_{\mathbb{R}^p}^{-1}(E_{p;\delta;\varepsilon}) = C_{p;\delta;\mathrm{Log}\,\varepsilon} \tag{4.9.1}$$

et

$$e_{\mathbb{R}^p}(C_{p;\delta;c}) = E_{p;\delta;e^c} \ . \tag{4.9.2}$$

LEMME 4.9.3.- *Soient* $(\delta_i)_{1\leqq i\leqq m}$ *une famille finie d'éléments de* $\mathbb{R}_+$ *et* $(\varepsilon_i)_{1\leqq i\leqq m}$ *une famille d'éléments de* $\mathbb{R}_+$ (resp. $(c_i)_{1\leqq i\leqq m}$ *une famille d'éléments de* $\mathbb{R}$) . *Si l'on pose*

$$\delta = \sup\{\delta_1,\dots,\delta_m\}$$

et

$$\varepsilon = \inf\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m,1\}$$

$$(\text{resp. } c = \inf\{c_1,\dots,c_m,0\})$$

on a

$$\mathcal{E}_{p;\delta;\varepsilon} \subset \bigcap_{1\leq i\leq m} \mathcal{E}_{p;\delta_i;\varepsilon_i}$$

$$(\text{resp. } \mathcal{C}_{p;\delta;c} \subset \bigcap_{1\leq i\leq m} \mathcal{C}_{p;\delta_i;c_i}) \ .$$

Démonstration. Le lemme découle d'une vérification directe.

LEMME 4.9.4.- *Soient* x *un élément de* $\mathbb{R}^p$, $x = (x_1,\ldots,x_p)$, *tel que* $x >_L 0$ (cf. 3.5.3) *et* ε *un élément de* $\mathbb{R}^*_+$ (resp. c *un élément de* $\mathbb{R}$). *On pose*

$$i_o = \sup\{i : 1 \leq i \leq p \ , \ x_i \neq o\} \ ,$$

$$I = \{i : 1 \leq i < i_o \ , \ x_i < 0\} \ ,$$

$$\delta = \sup_{i\in I}(|x_i|/x_{i_o}) + 1$$

(la borne supérieure ci-dessus étant, par convention nulle si $I = \emptyset$), *et*

$$\varepsilon' = \inf\{\varepsilon^{1/x_{i_o}}, 1\}$$

$$(\text{resp. } c' = \inf\{c/x_{i_o}, 0\}) \ .$$

Alors on a

$$\mathcal{E}_{p;\delta;\varepsilon'} \subset V_{x;\varepsilon}$$

$$(\text{resp. } \mathcal{C}_{p;\delta;c'} \subset W_{x;c}) \ .$$

Démonstration. Il résulte de (4.9.2) et (4.2.2) qu'il suffit de démontrer que

$$\mathcal{C}_{p;\delta;c'} \subset W_{x;c} \ .$$

Soit donc a , $a = (a_1,\ldots,a_p)$, $a \in \mathcal{C}_{p;\delta;c'}$. On a

$$a_1 < c' \ , \ a_2 < \delta a_1, \ldots, a_p < \delta a_{p-1} \ ,$$

ce qui implique que pour tout i , $1 \leq i \leq p$, $a_i < c'\delta^{i-1}$ (et en particulier que $a_i < 0$) et que pour tout i et i', $1 \leq i \leq i' \leq p$, $a_{i'} \leq a_i \delta^{i'-i}$. D'autre part, l'hypothèse $x >_L 0$ implique que $x_{i_o} > 0$. On a donc

$$\sum_{i=1}^{p} a_i x_i = \sum_{i=1}^{i_o} a_i x_i \leq a_{i_o} x_{i_o} - \sum_{i\in I} a_i |x_i| \leq$$

$$\leq a_{i_o} x_{i_o} - \sum_{i\in I} (a_{i_o}/\delta^{i_o - i}) |x_i| =$$

$$= a_{i_o} x_{i_o} (1 - \delta^{-i_o} \sum_{i\in I} \delta^i |x_i|/x_{i_o}) \leq$$

$$\leqq a_{i_o} x_{i_o} (1 - \delta^{-i_o}(\delta - 1) \sum_{i \in I} \delta^i) \leqq$$

$$\leqq a_{i_o} x_{i_o} (1 - \delta^{-i_o}(\delta - 1) \sum_{i=1}^{i_o - 1} \delta^i) =$$

$$= a_{i_o} x_{i_o} (1 - \delta^{-i_o}(\delta - 1)\delta(\delta^{i_o - 1} - 1)/(\delta - 1)) =$$

$$= a_{i_o} x_{i_o} \delta^{-(i_o - 1)} < c' x_{i_o} \leqq c \quad .$$

On en déduit que $a \in W_{x;c}$, ce qui démontre le lemme.

LEMME 4.9.5.- *La famille* $(E_{p;\delta;\varepsilon})_{\delta \in \mathbb{R}_+, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ (resp. $(C_{p;\delta;c})_{\delta \in \mathbb{R}_+, c \in \mathbb{R}}$) *est une base de filtre sur* $(\mathbb{R}_+^*)^p$ (resp. $\mathbb{R}^p$) *qui engendre le filtre de Hahn-Banach* $F_{\leqq_L}$ (resp. $G_{\leqq_L}$) , *défini par la relation d'ordre antilexicographique* $\leqq_L$ *sur* $\mathbb{R}^p$.

Démonstration. Il résulte du lemme 4.9.3 que la famille $(E_{p;\delta;\varepsilon})_{\delta \in \mathbb{R}_+, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ (resp. $(C_{p;\delta;c})_{\delta \in \mathbb{R}_+, c \in \mathbb{R}}$) est une base de filtre sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$ (resp. $\mathbb{R}^p$) , et du lemme 3.9.4 que le filtre engendré par cette base est plus fin que le filtre $F_{\leqq_L}$ (resp. $G_{\leqq_L}$) . Pour démontrer le lemme, il suffit donc de démontrer que pour tout δ , $\delta \in \mathbb{R}_+$, et tout c , $c \in \mathbb{R}$, $C_{p;\delta;c} \in G_{\leqq_L}$. Pour tout i , $1 \leqq i \leqq p$, on pose $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ip})$, $x_i \in \mathbb{R}^p$, où pour tout i et j , $1 \leqq i \leqq p$, $1 \leqq j \leqq p$,

$$x_{ij} = 1 \text{ , pour } i = j$$

$$x_{ij} = -\delta \text{ , pour } i = j + 1$$

et

$$x_{ij} = 0 \text{ , pour } i \neq j \text{ et } i \neq j + 1$$

et on pose $c_1 = c$ et $c_i = 0$, pour $2 \leqq i \leqq p$. Alors pour tout i , $1 \leqq i \leqq p$, $x_i >_L 0$, $c_i \in \mathbb{R}$ et $C_{p;\delta;c} = \bigcap_{1 \leqq i \leqq p} W_{x_i, c_i}$, ce qui démontre le lemme.

PROPOSITION 4.10.- *Soient* p *un entier,* $p \in \mathbb{N}$, α *un drapeau orienté de* $\mathbb{R}^p$ *et* A *une matrice inversible définissant la relation d'ordre* $\leqq_\alpha$ (cf. 3.5). *Alors la famille* $(r_A(E_{p;\delta;\varepsilon}))_{\delta \in \mathbb{R}_+, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ (resp. $({}^tA(C_{p;\delta;c}))_{\delta \in \mathbb{R}_+, c \in \mathbb{R}}$) *est* *une base de filtre sur* $(\mathbb{R}_+^*)^p$ (resp. $\mathbb{R}^p$) *qui engendre le filtre de Hahn-Banach* F_α (resp. G_α) .

Démonstration. La proposition est une conséquence directe de la proposition 4.8 et du lemme 4.9.5.

Le lemme suivant précise la proposition 4.10.

LEMME 4.10.1.- *Soient* p *un entier,* $p \in \mathbb{N}$, α *un drapeau orienté de* $\mathbb{R}^p$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p}$ *une matrice inversible à coefficients dans* $\mathbb{R}$, *définissant la relation d'ordre* $\leq_\alpha$ (cf. 3.5), $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ *une famille finie d'éléments de* $\mathbb{R}^p$, $x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kp})$ *et* $(\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ (resp. $(c_k)_{1 \leq k \leq n}$) *une famille d'éléments de* $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}$) . *On suppose que pour tout* k , $1 \leq k \leq n$, $x_k >_\alpha 0$, *et pour tout* k , $1 \leq k \leq n$, *on pose* $y_k = (y_{k1}, \ldots, y_{kp})$, *où pour tout* i , $1 \leq i \leq p$, $y_{ki} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_{kj}$ $(y_k = Ax_k)$,

$$i_k = \sup\{i : 1 \leq i \leq p , y_{ki} \neq 0\}$$

$$I_k = \{i : 1 \leq i < i_k , y_{ki} < 0\}$$

$$\delta = \sup_{1 \leq k \leq n} \sup_{i \in I_k} (|y_{ki}| / y_{ki_k}) + 1$$

(*la borne supérieure* $\sup_{i \in I_k}$ *étant par convention nulle si* $I_k = \emptyset$) , *et*

$$\varepsilon = \inf\{\varepsilon_1^{1/y_{1i_1}}, \ldots, \varepsilon_n^{1/y_{ni_n}}, 1\}$$

(resp. $c = \inf\{c_1/y_{1i_1}, \ldots, c_n/y_{ni_n}, 0\}$).

Alors on a

$$r_A(\mathcal{E}_{p;\delta;\varepsilon}) \subset \bigcap_{1 \leq k \leq n} V_{x_k;\varepsilon_k}$$

$$(\text{resp. } {}^tA(\mathcal{C}_{p;\delta;c}) \subset \bigcap_{1 \leq k \leq n} W_{x_k;c_k}) \ .$$

Démonstration. Comme $x_k >_\alpha 0$ équivaut à $y_k >_L 0$ (3.5.3), il résulte des lemmes 4.9.3 et 4.9.4 que

$$\mathcal{E}_{p;\delta;\varepsilon} \subset \bigcap_{1 \leq k \leq n} V_{y_k;\varepsilon_k}$$

$$(\text{resp. } \mathcal{C}_{p;\delta;c} \subset \bigcap_{1 \leq k \leq n} W_{y_k;c_k}) \ .$$

On a donc

$$\mathcal{E}_{p;\delta;\varepsilon} \subset \bigcap_{1\leq k\leq n} r_A^{-1}(V_{x_k;\varepsilon_k})$$

$$\text{(resp. } \mathcal{C}_{p;\delta;c} \subset \bigcap_{1\leq k\leq n} {}^tA^{-1}(W_{x_k;c_k}))$$

(4.6), ce qui démontre le lemme car A étant inversible r_A (resp. ${}^tA$) est bijective (4.1).

LEMME 4.11.- *Soient* p *un entier,* $p \in \mathbb{N}$, α *un drapeau orienté de* $\mathbb{R}^p$ *tel que la relation d'ordre* $\leq_\alpha$ *soit moins fine que la relation d'ordre produit* $\leq$ *sur* $\mathbb{R}^p$, $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq p}$ *une matrice inversible à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *définissant la relation d'ordre* $\leq_\alpha$ *et* R *un nombre réel,* $0 < R \leq 1$. *Pour tout* j $1 \leq j \leq p$, *on pose*

$$i_j = \sup\{i : 1 \leq i \leq p,\ a_{ij} \neq 0\} ,$$

$$I_j = \{i : 1 \leq i < i_j ,\ a_{ij} < 0\} ,$$

$$\delta = \sup_{1\leq j\leq p} \sup_{i\in I_j} (|a_{ij}|/a_{i_j j}) + 1$$

(*la borne supérieure* $\sup_{i\in I_j}$ *étant par convention nulle si* $I_j = \emptyset$, *et*

$$a = \inf_{1\leq j\leq p} a_{i_j j} .$$

Alors on a

$$r_A(\mathcal{E}_{p;\delta;R^{1/a}}) \subset \{(\rho_1,\ldots,\rho_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p : \forall j ,\ 1 \leq j \leq p ,\ \rho_j < R\} .$$

Démonstration. Si $e_1,\ldots,e_p$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^p$, pour tout j , $1 \leq j \leq p$, on a $e_j > 0$, donc $e_j >_\alpha 0$, et comme

$$\{(\rho_1,\ldots,\rho_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p : \forall j,\ 1 \leq j \leq p ,\ \rho_j < R\} = \bigcap_{1\leq j\leq p} V_{e_j;R}$$

le lemme résulte aussitôt du lemme 4.10.1.

Remarque 4.11.1.- En gardant les notations du lemme 4.11, il résulte de 4.4.1 et 4.7.1 que le filtre de Hahn-Banach $\mathcal{F}_\alpha$ est plus fin que la trace sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$ du filtre des voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^p$, et le lemme ci-dessus précise ce résultat. D'autre part, on remarque que si la matrice A est à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ (cf. 3.5.1) alors $\delta = 1$.

§5.- Filtre associé à une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^p$

Dans ce paragraphe, on étudie un cas particulier de filtres de Hahn-Banach, ceux définis par une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde.

LEMME 5.1.1.- *Soient* p *un entier*, $p \in \mathbb{N}$, $\leqq'$ *une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}^p$, *compatible avec sa structure de monoïde, et* A *la partie de* $\mathbb{R}^p$ *définie par*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^p : \exists d,\ d' \in \mathbb{N}^p,\ d <' d' \text{ et } x = d'-d\} .$$

Alors 0 *n'appartient pas à l'enveloppe convexe de* A .

Démonstration. Soient $\leqq''$ la relation dans $\mathbb{N}^p$ définie par

$$d' \leqq'' d'' \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists d \in \mathbb{N}^p,\ nd' + d \leqq' nd'' + d$$

et A' la partie de $\mathbb{R}^p$ définie par

$$A' = \{x \in \mathbb{R}^p - \{0\} : \exists d,\ d' \in \mathbb{N}^p,\ d \leqq'' d' \text{ et } x = d'-d\}$$

La relation $\leqq''$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde, régulière, moins fine que $\leqq'$, et en particulier, on a

$$A \subset A' .$$

En vertu de (3.9.3), il existe une relation d'ordre $\leqq'''$ sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné $\mathbb{R}$ et prolongeant $\leqq''$. Si l'on désigne par A'' la partie de $\mathbb{R}^p$ définie par

$$A'' = \{x \in \mathbb{R}^p : 0 <''' x\} ,$$

on a

$$A' \subset A'' ,$$

et comme A'' est convexe, on en déduit que 0 n'appartient pas à l'enveloppe convexe de A .

PROPOSITION 5.1.2.- *Soient* p *un entier*, $p \in \mathbb{N}$, *et* $\leqq'$ *une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}^p$, *compatible avec sa structure de monoïde. Alors la famille*

$$(V_{d'-d;\varepsilon})_{d<'d',\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$$

$$(\text{resp. } (W_{d'-d;c})_{d<'d',\ c \in \mathbb{R}})$$

est un système de générateurs d'un filtre de Hahn-Banach sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$ (resp. *sur* $\mathbb{R}^p$) .

Démonstration. La proposition résulte de 5.1.1 et de 4.3 (cf. (4.4)).

DÉFINITION 5.1.3.- *Soient* p *un entier,* $p \in \mathbb{N}$, *et* $\leq'$ *une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}^p$, *compatible avec sa structure de monoïde. On désigne par* $F^o_{\leq'}$ (resp. $G^o_{\leq'}$) *le filtre de Hahn-Banach* F_A (resp. G_A) , *où* A *désigne la partie de* $\mathbb{R}^p$ *définie par*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^p : \exists d,\ d' \in \mathbb{N}^p\ ,\ d <' d' \ \ \textit{et} \ \ x = d'-d\}$$

(cf. 5.1.1, 5.1.2 et 4.4), *et on dit que* $F^o_{\leq'}$ (resp. $G^o_{\leq'}$) *est le filtre de Hahn-Banach défini par la relation d'ordre* $\leq'$ *sur* $\mathbb{N}^p$.

Exemple 5.1.4.- Le filtre de Hahn-Banach $F^o_{\leq}$ défini par la relation d'ordre produit $\leq$ sur $\mathbb{N}^p$ n'est autre que la trace sur $(\mathbb{R}^*_+)^p$ du filtre des voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^p$. Si $\leq'$ désigne une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que $\leq$, alors le filtre de Hahn-Banach $F^o_{\leq'}$ défini par $\leq'$ est plus fin que la trace sur $(\mathbb{R}^*_+)^p$ du filtre des voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^p$ (4.4.1).

Remarque 5.1.5. Soient $\leq'$ une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde et $\leq''$ une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné $\mathbb{R}$. Si la relation d'ordre induite sur $\mathbb{N}^p$ par $\leq''$ est moins fine que la relation $\leq'$, alors le filtre de Hahn-Banach $F_{\leq''}$ (resp. $G_{\leq''}$) défini par $\leq''$ est plus fin que le filtre de Hahn-Banach $F^o_{\leq'}$ (resp. $G^o_{\leq'}$) défini par $\leq'$ (4.4.1). En général, même si la relation d'ordre $\leq'$ est induite par la relation $\leq''$, le filtre $F_{\leq''}$ (resp. $G_{\leq''}$) est strictement plus fin que le filtre $F^o_{\leq'}$ (resp. $G^o_{\leq'}$) (voir remarque 5.2.2 ci-dessous). Néanmoins,on a la proposition suivante :

PROPOSITION 5.2.1.- *Soient* p *un entier,* $p \in \mathbb{N}$, *et* $\leq'$ *une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}^p$, *compatible avec sa structure de monoïde. Il existe une relation d'ordre unique* $\leq''$ *sur* $\mathbb{R}^p$, *compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné* $\mathbb{R}$, *telle que* $F_{\leq''} = F^o_{\leq'}$ (*ou ce qui est équivalent, telle que* $G_{\leq''} = G^o_{\leq'}$). *En plus, on a les propriétés suivantes :*

i) *la relation d'ordre* $\leq''$ *induit une relation d'ordre moins fine que* $\leq'$ *sur* $\mathbb{N}^p$;

ii) *si la relation d'ordre* $\leq'$ *est régulière* (cf. (1.0)) , *alors la relation d'ordre* $\leq''$ *induit la relation* $\leq'$ *sur* $\mathbb{N}^p$;

iii) *si la relation* $\leq'$ *est une relation d'ordre total, rationnelle* (cf. (3.11)), *alors la relation* $\leq''$ *est une relation d'ordre total, qui n'est autre que l'unique prolongement de* $\leq'$ *en une relation d'ordre total sur* $\mathbb{R}^p$, *compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné* $\mathbb{R}$ (cf.(3.12), (ii)).

Démonstration. Soit A la partie de $\mathbb{R}^p$ définie par

$$A = \{x \in \mathbb{R}^p : \exists d, d' \in \mathbb{N}^p , d <' d' \text{ et } x = d'-d\} .$$

En vertu du lemme 5.1.1, 0 n'appartient pas à l'enveloppe convexe de A . L'existence et l'unicité de $\leqq''$ résulte alors de la proposition 4.5, appliquée à A (cf. 5.1.3). Posons

$$A' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{(\rho_1,\ldots,\rho_n)\in\mathbb{R}_+^n-\{0\}} (\rho_1 A+\ldots+\rho_n A) .$$

On a $A\subset A'$, et l'assertion (i) résulte de l'équivalence des conditions (i) et (ii) de la proposition 4.5. Si l'on suppose que la relation d'ordre $\leqq'$ est régulière, en vertu de (3.9.3), il existe une relation d'ordre $\leqq'''$ sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné $\mathbb{R}$, induisant $\leqq'$ sur $\mathbb{N}^p$. Si l'on désigne par A'' la partie de $\mathbb{R}^p$ définie par

$$A'' = \{x \in \mathbb{R}^p : x >''' 0\} ,$$

on a donc $A'\subset A''$. Soient d et d' , $d \in \mathbb{N}^p$, $d' \in \mathbb{N}^p$, tels que $d <'' d'$. L'équivalence des conditions (i) et (ii) de la proposition 4.5 implique que $d'-d \in A'$, d'où $d'-d \in A''$, autrement dit $d <''' d'$, et comme la relation d'ordre $\leqq'$ est induite par $\leqq'''$ sur $\mathbb{N}^p$, on en déduit que $d <' d'$, ce qui démontre l'assertion (ii). Pour démontrer l'assertion (iii), on remarque que si $\leqq'$ est une relation d'ordre total, pour tout drapeau orienté α de $\mathbb{R}^p$ la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ (cf. (3.2) et (3.2.1)) induit $\leqq'$ sur $\mathbb{N}^p$ si et seulement si $A\subset D_\alpha - \{0\}$. On en déduit que si en plus la relation d'ordre total $\leqq'$ est rationnelle, il existe un drapeau orienté α_0 de $\mathbb{R}^p$ et un seul tel que $A\subset D_{\alpha_0} - \{0\}$ ((3.12), (iv) et (3.7)), et alors $\leqq_{\alpha_0}$ est l'unique prolongement de $\leqq'$ en une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné $\mathbb{R}$. L'équivalence des conditions (i) et (iii) de la proposition 4.5 implique que la relation d'ordre $\leqq''$ n'est autre que $\leqq_{\alpha_0}$, ce qui démontre la proposition.

Remarque 5.2.2.- L'assertion (iii) de la proposition 5.2.1 possède une réciproque : pourvu que la relation $\leqq'$ soit une relation d'ordre régulière, si la relation $\leqq''$ est une relation d'ordre total, alors $\leqq'$ est une relation d'ordre total, rationnelle. En effet, en vertu de l'assertion (ii) de la proposition 5.2.1, la relation $\leqq'$ est alors induite par $\leqq''$, et en particulier, elle est une relation d'ordre total. Il suffit donc de démontrer que si $\leqq'$ désigne une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde, qui n'est pas rationnelle, et $\leqq''$ une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné $\mathbb{R}$, induisant $\leqq'$ sur $\mathbb{N}^p$, alors $F_{\leqq''} \neq F^{o}_{\leqq'}$ (ou ce qui est équivalent $G_{\leqq''} \neq G^{o}_{\leqq'}$) . Pour démontrer cette assertion, supposons que l'on ait $F_{\leqq''} = F^{o}_{\leqq'}$. En vertu de la proposition 3.7, il existe un drapeau orienté

$$\alpha : \{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_{p-1} \subset E_p = \mathbb{R}^p$$

de $\mathbb{R}^p$ tel que $\leqq''$ soit la relation d'ordre $\leqq_\alpha$. Alors il existe i_0 , $1 < i_0 < p$, tel que le sous-espace vectoriel E_{i_0} de $\mathbb{R}^p$ ne soit pas rationnel (on vérifie facilement que sinon $\leqq'$ serait rationnelle).

Soit F l'adhérence de $E_{i_0} \cap \mathbb{Q}^p$ dans E_{i_0} . L'ensemble F est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de E_{i_0} distinct de E_{i_0} . On en déduit que l'ensemble

$$I = \{i \ : \ 1 \leqq i \leqq i_0 \ , \ E_{i-1} \cap F = E_i \cap F\}$$

est non vide. On pose $i_1 = \max(I)$. Soit

$$\alpha' \ : \{0\} = E'_0 \subset E'_1 \subset \ldots \subset E'_{p-1} \subset E'_p = \mathbb{R}^p$$

le drapeau orienté de $\mathbb{R}^p$, tel que

i) pour tout i , $0 \leqq i \leqq p$, $E'_i = E_i$;

ii) pour tout i , $0 \leqq i \leqq p$, $i \neq i_1$, $E'^{+}_i = E^{+}_i$;

iii) $E'^{+}_{i_1} = -E^{+}_{i_1}$ $(E'^{+}_{i_1} = \{x \in \mathbb{R}^p : -x \in E^{+}_{i_1}\})$.

On vérifie facilement que la relation d'ordre $\leqq_{\alpha'}$ sur $\mathbb{R}^p$ induit $\leqq'$ sur $\mathbb{N}^p$. Soit x un élément de $E^{+}_{i_1}$ tel que $x \notin E_{i_1-1}$. On a $0 <'' x$ (cf. 3.2) et l'hypothèse $F_{\leqq''} = F^{o}_{\leqq'}$ implique que $V_{x;1} \in F^{o}_{\leqq'}$ (cf. (4.4), d'où $V_{x;1} \in F_{\leqq_{\alpha'}}$ (cf. 5.1.5). D'autre part, on a $-x \in E'^{+}_{i_1}$ et $-x \notin E'_{i_1-1}$, ce qui implique que $0 <_{\alpha'} -x$ (cf. 3.2), d'où $V_{-x;1} \in F_{\leqq_{\alpha'}}$ (cf. 4.4), et comme $F_{\leqq_{\alpha'}}$ est un filtre, on en déduit que

$$V_{x;1} \cap V_{-x;1} \in F_{\leqq_{\alpha'}} \quad .$$

Or, on a

$$V_{x;1} \cap V_{-x;1} \subset V_{0;1} = \emptyset$$

(4.2.4), ce qui est absurde.

<u>COROLLAIRE 5.2.3</u>.- *Soient $\leqq'$ une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde et rationnelle, et A une matrice inversible à coefficients dans $\mathbb{R}$ définissant cette relation* (cf. 3.11) . *Alors la famille*

$$(r_A(E_{p;\delta;\varepsilon}))_{\delta\in\mathbb{R}_+,\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*}$$

$$(\text{resp. } ({}^tA(C_{p;\delta;c}))_{\delta\in\mathbb{R}_+,c\in\mathbb{R}})$$

est une base du filtre $F^o_{\leqq'}$ (resp. $G^o_{\leqq'}$) .

Démonstration. Soit $\leqq''$ la relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné $\mathbb{R}$, définie par la matrice A (cf. 3.5). La relation $\leqq''$ induit la relation d'ordre $\leqq'$ sur $\mathbb{N}^p$ et l'assertion (iii) de la proposition 5.2.1 implique que $F^o_{\leqq'} = F_{\leqq''}$ (ou ce qui est équivalent que $G^o_{\leqq'} = G_{\leqq''}$) . Le corollaire résulte alors de la proposition 4.10.

Exemple 5.2.4.- Si $\leqq'$ est la relation d'ordre antilexicographique $\leqq_L$ sur $\mathbb{N}^p$, alors la famille

$$(E_{p;\delta;\varepsilon})_{\delta\in\mathbb{R}_+,\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*}$$

$$(\text{resp. } (C_{p;\delta;c})_{\delta\in\mathbb{R}_+,c\in\mathbb{R}})$$

est une base du filtre $F^o_{\leqq_L}$ (resp. $G^o_{\leqq_L}$) (cf. 3.12.1).

Remarque 5.2.5.- Si l'on ne suppose pas que la relation d'ordre total $\leqq'$ soit rationnelle, le corollaire 5.2.3 est faux. En effet, il résulte de 4.10, 5.1.5 et 5.2.2 que si $\leqq'$ n'est pas rationnelle, la famille

$$(r_A(E_{p;\delta;\varepsilon}))_{\delta\in\mathbb{R}_+,\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*}$$

$$(\text{resp. } ({}^tA(C_{p;\delta;\varepsilon}))_{\delta\in\mathbb{R}_+,c\in\mathbb{R}})$$

est une base d'un filtre de Hahn-Banach sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$ (resp. sur $\mathbb{R}^p$) strictement plus fin que $F^o_{\leqq'}$ (resp. $G^o_{\leqq'}$) .

COROLLAIRE 5.2.6.- *Soient* p *un entier,* $p\in\mathbb{N}$, $\leqq'$ *une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}^p$ *, compatible avec sa structure de monoïde et régulière,* $\leqq'_{\mathbb{Q}^p}$ *l'unique relation d'ordre sur* $\mathbb{Q}^p$ *, compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné* $\mathbb{Q}$ *, induisant* $\leqq'$ *sur* $\mathbb{N}^p$ (cf. (2.1)) *et*

$$A' = \{x\in\mathbb{Q}^p \ : \ 0 <'_{\mathbb{Q}^p} x\} \quad .$$

Alors 0 *n'appartient pas à l'enveloppe convexe de* A' *et on a*

$$F^o_{\leqq'} = F_{A'}$$

$$(\text{resp. } G^o_{\leqq'} = G_{A'}) \ .$$

Démonstration. Soit $\leqq'_{\mathbb{R}^p}$ l'unique relation d'ordre sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel sur le corps ordonné $\mathbb{R}$, telle que

$$F^o_{\leqq'} = F_{\leqq'_{\mathbb{R}^p}}$$

(cf. 5.2.1). En vertu de 5.2.1, (ii), $\leqq'$ étant régulière, la relation d'ordre $\leqq'_{\mathbb{R}^p}$ induit $\leqq'$ sur $\mathbb{N}^p$, ce qui implique que $\leqq'_{\mathbb{R}^p}$ induit $\leqq'_{\mathbb{Q}^p}$ sur $\mathbb{Q}^p$. Alors si l'on pose

$$A = \{x \in \mathbb{R}^p : \exists d\ ,\ d' \in \mathbb{N}^p\ ,\ d <' d \quad \text{et} \quad x = d' - d\}$$

et

$$A'' = \{x \in \mathbb{R}^p : 0 <'_{\mathbb{R}^p} x\}$$

on a

$$A \subset A' \subset A'' \quad ,$$

ce qui démontre le corollaire (cf.(4.4), (4.4.1) et (5.1.3)).

PROPOSITION 5.3.- *Soient* p *et* p' *des entiers,* $0 \leq p' \leq p$, $\leqq'$ *une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}^p$ *, compatible avec sa structure de monoïde et régulière,* $\leqq''$ *la relation d'ordre induite par* $\leqq'$ *sur* $\mathbb{N}^{p'}$ *(identifié à* $\mathbb{N}^{p'} \times \{0\}$ *). Alors le filtre de Hahn-Banach* $F^o_{\leqq''}$ (resp. $G^o_{\leqq''}$) *sur* $(\mathbb{R}^*_+)^{p'}$ (resp. sur $\mathbb{R}^{p'}$) *est l'image du filtre de Hahn-Banach* $F^o_{\leqq'}$ (resp. $G^o_{\leqq'}$) *par la première projection* $r : (\mathbb{R}^*_+)^p \longrightarrow (\mathbb{R}^*_+)^{p'}$ (resp. $\pi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^{p'}$).

Démonstration. En raisonnant par récurrence on peut supposer que $p' = p - 1$. Soit $\leqq'_{\mathbb{Q}^p}$ (resp. $\leqq''_{\mathbb{Q}^{p'}}$) l'unique relation d'ordre sur $\mathbb{Q}^p$ (resp. sur $\mathbb{Q}^{p'}$) compatible avec sa structure d'espace vectoriel et induisant $\leqq'$ (resp. $\leqq''$) sur $\mathbb{N}^p$ (resp. sur $\mathbb{N}^{p'}$) (cf. (2.1)). Alors la relation d'ordre $\leqq'_{\mathbb{Q}^p}$ induit $\leqq''_{\mathbb{Q}^{p'}}$ sur $\mathbb{Q}^{p'}$ et si l'on pose

$$A = \{x \in \mathbb{Q}^p : 0 <'_{\mathbb{Q}^p} x\}$$

et

$$A' = \{x \in \mathbb{Q}^{p'} : 0 <''_{\mathbb{Q}^{p'}} x\}$$

on a

$$A' = \mathbb{Q}^{p'} \cap A = \mathbb{R}^{p'} \cap A$$

et

$$F^o_{\leqq'} = F_A \quad , \quad F^o_{\leqq''} = F_{A'}$$

(5.2.6). Soit B (resp. B') l'enveloppe convexe de A (resp. A'). On a

$$B' \subset B \cap \mathbb{R}^{p'}$$

et

$$\mathcal{F}^{o}_{\leq'} = \mathcal{F}_{B} \quad , \quad \mathcal{F}^{o}_{\leq''} = \mathcal{F}_{B'}$$

(4.5). En vertu de (4.6.1), si l'on pose

$$A'' = \{x \in \mathbb{R}^{p'} : \exists x_1, x_2 \in A \ , \ \exists \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}_+ : \ \rho_1 + \rho_2 = 1 \text{ et } x = \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2\}$$

alors $B \cap \mathbb{R}^{p'}$ est l'enveloppe convexe de A''. Démontrons que $A'' \subset B'$. En effet soit x un point de $\mathbb{R}^{p'}$ tel qu'il existe x_1, x_2, $x_1 \in A$, $x_2 \in A$, et ρ_1, ρ_2 $\rho_1 \in \mathbb{R}_+$, $\rho_2 \in \mathbb{R}_+$, tels que

$$\rho_1 + \rho_2 = 1 \quad \text{et} \quad x = \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 \quad .$$

On peut supposer que $x_1 \neq x_2$ et que $\rho_1 > 0$ (car sinon $x = x_2 \in \mathbb{R}^{p'} \cap A = A'$). Soit D la droite définie par les points x_1 et x_2. Comme $x_1 \in \mathbb{Q}^p$ et $x_2 \in \mathbb{Q}^p$, la droite D est rationnelle. Si $D \subset \mathbb{R}^{p'}$, alors $x_1 \in A'$ et $x_2 \in A'$, d'où $x \in B'$. Si $D \not\subset \mathbb{R}^{p'}$, alors x est l'intersection de la droite rationnelle D avec l'hyperplan rationnel $\mathbb{R}^{p'}$ de $\mathbb{R}^p$, donc $x \in \mathbb{Q}^p$. On en déduit que $\rho_1 \in \mathbb{Q}$ et $\rho_2 \in \mathbb{Q}$. Or, $x_1 \in A$ et $x_2 \in A$ implique que

$$0 <'_{\mathbb{Q}^p} x_1 \quad \text{et} \quad 0 <'_{\mathbb{Q}^p} x_2 \quad ,$$

d'où

$$0 <'_{\mathbb{Q}^p} \rho_1 x_1 \quad \text{et} \quad 0 \leq'_{\mathbb{Q}^p} \rho_2 x_2 \quad ,$$

donc

$$0 <'_{\mathbb{Q}^p} x \quad ,$$

c'est-à-dire $x \in A$, d'où $x \in A'$ et à fortiori $x \in B'$. On en déduit que $B' = B \cap \mathbb{R}^p$ et la proposition résulte de (4.6.3).

Remarque 5.3.1.- En suivant de près la démonstration de la proposition 4.6.3, on remarquera qu'en fait on a un résultat un peu plus précis : pour toute famille finie $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ d'éléments de B, il existe une famille finie $(x'_{i'})_{1 \leq i' \leq m'}$ d'éléments de B' telle que pour toute famille $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq m}$ (resp. $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$) d'éléments de $\mathbb{R}^*_+$ (resp. de $\mathbb{R}$) si l'on pose

$$\varepsilon = \inf_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_i$$

$$(\text{resp.} \quad c = \inf_{1 \leq i \leq m} c_i \ ) \ ,$$

on a

$$\bigcap_{1 \leq i' \leq m'} V_{x'_{i'};\varepsilon} \subset r\Big(\bigcap_{1 \leq i \leq m} V_{x_i;\varepsilon_i}\Big)$$

$$(\text{resp.} \quad \bigcap_{1 \leq i' \leq m'} W_{x'_{i'};c} \subset \pi\Big(\bigcap_{1 \leq i \leq m} W_{x_{i'};c_i}\Big) \ ) \ .$$

CHAPITRE II

VARIATION DES EXPOSANTS PRIVILÉGIÉS

Dans ce chapitre, on définit la notion des exposants privilégiés minimaux d'un idéal cohérent, en un point, et on étudie leur variation en fonction de ce point, comme on l'a exposé aux paragraphes 4 et 5 de l'introduction générale. Dans le §1, on introduit la notion d'exposant privilégié et on en donne quelques propriétés élémentaires. Dans le §2, on définit un foncteur qui permet une étude plus fine de cette notion. Ce foncteur joue ici un rôle analogue au gradué associé des parties principales. Plus précisément, soit U un ouvert de $\mathbb{C}^p$. On définit un bifoncteur covariant $\mathcal{P}$ de la catégorie des $\mathcal{O}_U$-modules cohérents dans celle des $\mathcal{O}_U[T_1,\dots,T_p]$-modules gradués par $\mathbb{N}^p$, à composantes homogènes cohérentes, et des morphismes de degré zéro. Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ désignent deux $\mathcal{O}_U$-modules cohérents, on a donc

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M};\mathcal{N}} = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}^p} \mathcal{P}^d_{\mathcal{M};\mathcal{N}} \quad ,$$

où $\mathcal{P}^d_{\mathcal{M};\mathcal{N}}$ est un $\mathcal{O}_U$-module cohérent, et si $u : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$ et $v : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{N}$ désignent deux morphismes de $\mathcal{O}_U$-modules cohérents, on a

$$\mathcal{P}_{u;v} = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}^p} \mathcal{P}^d_{u;v} \quad ,$$

où

$$\mathcal{P}^d_{u;v} : \mathcal{P}^d_{\mathcal{M}';\mathcal{N}'} \longrightarrow \mathcal{P}^d_{\mathcal{M};\mathcal{N}}$$

est un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules. En plus, le foncteur $\mathcal{P}$ possède les propriétés suivantes :

i) si $u : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$ et $v : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{N}$ désignent des épimorphismes de $\mathcal{O}_U$-modules cohérents, alors $\mathcal{P}_{u;v} : \mathcal{P}_{\mathcal{M}';\mathcal{N}'} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{M};\mathcal{N}}$ est un épimorphisme ;

ii) si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ désignent des $\mathcal{O}_U$-modules cohérents et X un sous-espace analytique fermé de U tel que $\mathcal{M}$ soit porté par X (cf. chapitre 0), alors pour tout d , $d \in \mathbb{N}^p$, le $\mathcal{O}_U$-module cohérent $\mathcal{P}^d_{\mathcal{M};\mathcal{N}}$ est porté par X , et $\mathcal{P}_{\mathcal{M};\mathcal{N}}$ peut donc être considéré comme un $\mathcal{O}_X[T_1,\dots,T_p]$-module gradué ;

iii) $\mathcal{P}_{\mathcal{O}_U;\mathcal{O}_U} = \mathcal{O}_U[T_1,\dots,T_p]$.

En particulier, il résulte de (i) et (iii) que si X et Y désignent deux sous-espaces analytiques fermés de U , $\mathcal{P}_{\mathcal{O}_X;\mathcal{O}_Y}$ est un quotient de $\mathcal{O}_U[T_1,\dots,T_p]$; il est donc muni d'une structure de $\mathcal{O}_U$-algèbre graduée de type fini à composantes homogènes cohérentes. On en déduit que $P_{\mathcal{O}_X;\mathcal{O}_Y}$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée de présentation finie ([35], chapitre I, Proposition 1.4), et il résulte de (ii) que $P_{\mathcal{O}_X;\mathcal{O}_Y}$ peut être considérée comme une $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée de présentation finie. Si en plus X est réduit, il existe un fermé analytique S de X d'intérieur vide (dans X) tel que pour tout x , $x \in X - S$, $P_{\mathcal{O}_X;\mathcal{O}_Y}$ soit $\mathcal{O}_X$-plat en x ([35], chapitre I, théorème 8.1.3). D'autre part, on démontre que si J désigne un idéal cohérent de $\mathcal{O}_U$, Y le sous-espace analytique fermé de U défini par J , x un point de U et $\{x\}$ le sous-espace analytique réduit de U dont le support est formé par le seul point x , alors $P_{\mathcal{O}_{\{x\}};\mathcal{O}_Y}$, qui est donc une $\mathcal{O}_{\{x\}}$-algèbre graduée, c'est-à-dire une $\mathbb{C}$-algèbre graduée, est isomorphe à $\mathbb{C}[T]/((T^d)_{d \in M_x})$, où $T = (T_1, \ldots, T_p)$ désigne p indéterminées et M_x l'ensemble fini d'exposants privilégiés minimaux de J en x . Enfin, on démontre (et c'est de loin le résultat le plus difficile) que si $x \in X - S$, alors la $\mathcal{O}_{\{x\}}$-algèbre graduée $P_{\mathcal{O}_{\{x\}};\mathcal{O}_Y}$ est isomorphe à $P_{\mathcal{O}_X;\mathcal{O}_Y} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_{\{x\}}$.

Au §3, en combinant ces résultats, on en déduit que l'ensemble M_x est constant quand le point x varie dans $X - S$, et cela permet la construction d'une stratification $\mathbb{C}$-analytique de U telle que l'ensemble des exposants privilégiés minimaux M_x de J en x soit constant sur chaque strate.

§1.- Exposants privilégiés d'un idéal

(1.0) Dans ce paragraphe, on se fixe une fois pour toutes un entier p , $p \in \mathbb{N}$, et une relation d'ordre total $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$. On rappelle qu'une telle relation d'ordre est une relation de bon ordre (I, 1.5).

DÉFINITION 1.1.- *Soient* x *un point de* $\mathbb{C}^p$ *et* f *une fonction définie au voisinage de* x *et analytique au voisinage de* x *, ou un germe de fonction analytique au voisinage de* x (par exemple $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$, où U est un ouvert de $\mathbb{C}^p$ contenant x , ou $f \in B(K)$, où K est un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ tel que $x \in \mathring{K}$, ou $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p,x}$) . *On désigne par* $E_x(f)$ (ou plus simplement par $E(f)$ quand aucune confusion n'en résulte) *la partie de* $\mathbb{N}^p$ *définie par*

$$E_x(f) = \{d \in \mathbb{N}^p : \frac{\partial^{|d|} f}{\partial X^d}(x) \neq 0\}$$

(où $X = (X_1, \dots, X_p)$ désigne les coordonnées sur $\mathbb{C}^p$) . *L'ensemble* $E_x(f)$ *est non vide, si et seulement si, le germe de* f *en* x *est non nul et dans ce cas on désigne par* $v_{\alpha;x}(f)$ (ou plus simplement $v_\alpha(f)$, ou même $v(f)$, quand aucune confusion n'en résulte) *et on appelle exposant privilégié de* f *en* x *, relativement à la relation d'ordre* $\leqq_\alpha$ *, l'élément de* $\mathbb{N}^p$ *défini par*

$$v_{\alpha;x}(f) = \min_\alpha(E_x(f)) \quad .$$

Si g vérifie les mêmes hypothèses que f on a :

(1.1.1) $E(f.g) \subset E(f) + E(g)$,

(1.1.2) $E(f+g) \subset E(f) \cup E(g)$,

(1.1.3) $v(f.g) = v(f) + v(g)$

et si le germe de $f+g$ en x est non nul ,

(1.1.4) $v(f+g) \geqq_\alpha \min_\alpha\{v(f), v(g)\}$
et

(1.1.5) $v(f+g) = \min_\alpha\{v(f), v(g)\}$, si $v(f) \neq v(g)$.

DÉFINITION 1.2.- *Soient* $\mathcal{D}$ *une partie de* $\mathbb{N}^p$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, J *un idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$, x *un point de* U *et* K *un polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *tel que* $x \in \mathring{K}$ *et* $K \subset U$. *On appelle ensemble des* $\mathcal{D}$*-exposants privilégiés pour* $\leqq_\alpha$ *en* x *de* J (resp. *ensemble des* $\mathcal{D}$*-exposants privilégiés pour* $\leqq_\alpha$ *sur* K *en* x *de* J) *et on note* $P_{\alpha;\mathcal{D};J;x}$ (resp. $P_{\alpha;\mathcal{D};J;K;x}$) *la partie de* $\mathbb{N}^p$ *définie par*

$$P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};x} = \{d \in \mathbb{N}^p : \exists f \in \mathcal{J}_x \quad f \neq 0 \ , \ E_x(f) \subset \mathcal{D} \ \text{ et } \ v_{\alpha;x}(f) = d\}$$

$$(\text{resp. } P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};K;x} = \{d \in \mathbb{N}^p : \exists f \in \mathcal{J}_K : f \neq 0 \ , \ E_x(f) \subset \mathcal{D} \text{ et } \ v_{\alpha;x}(f) = d\}\ )^{(1)}.$$

Si $\mathcal{D} = \mathbb{N}^p$ *, on notera* $P_{\alpha;\mathcal{J};x}$ (resp. $P_{\alpha;\mathcal{J};K;x}$) *l'ensemble* $P_{\alpha;\mathbb{N}^p;\mathcal{J};x}$ (resp. $P_{\alpha;\mathbb{N}^p;\mathcal{J};K;x}$) *et on dira simplement exposant privilégié pour* $\mathbb{N}^p$*-exposant privilégié. Enfin, on note* $M_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};x}$ (resp. $M_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};K;x}$) *l'ensemble fini* $M(P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};x})$(resp. $M(P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};K;x})$) *d'éléments minimaux de* $P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};x}$ (resp. $P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};K;x}$) *pour la relation d'ordre produit* $\leq$ *sur* $\mathbb{N}^p$ (cf. I,1.3) *et on appellera les éléments de cet ensemble les* $\mathcal{D}$*-exposants privilégiés minimaux. Si* $\mathcal{D} = \mathbb{N}^p$ *, on notera* $M_{\alpha;\mathcal{J};x}$ (resp. $M_{\alpha;\mathcal{J};K;x}$) *l'ensemble* $M_{\alpha;\mathbb{N}^p;\mathcal{J};x}$ (resp. $M_{\alpha;\mathbb{N}^p;\mathcal{J};K;x}$) *et on dira simplement exposant privilégié minimal pour* $\mathbb{N}^p$*-exposant privilégié minimal.*

<u>Remarque 1.3</u>.- En gardant les notations de la définition 1.2, on a

$$P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};K;x} \subset P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};x} \subset \mathcal{D}$$

et si K' désigne un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ tel que $x \in \mathring{K}'$ et $K' \subset K$, on a

$$P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};K;x} \subset P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};K';x} \quad .$$

Si $\mathcal{D}'$ désigne une partie de $\mathbb{N}^p$ telle que $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$, on a

$$P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};x} \subset P_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J};x} \quad \text{et} \quad P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};K;x} \subset P_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J};K;x}$$

et en particulier,

$$P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};x} \subset P_{\alpha;\mathcal{J};x} \quad \text{et} \quad P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};K;x} \subset P_{\alpha;\mathcal{J};K;x} \quad .$$

Si $\mathcal{J}'$ désigne un idéal cohérent de $\mathcal{O}_U$ tel que $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}'$, on a

$$P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};x} \subset P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J}';x} \quad \text{et} \quad P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};K;x} \subset P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J}';K;x} \quad .$$

Enfin, il résulte de (I,1.3) que

$$P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};x} \subset M_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};x} + \mathbb{N}^p \quad \text{et} \quad P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};K;x} \subset M_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};K;x} + \mathbb{N}^p$$

et si l'on a $\mathcal{D} + \mathbb{N}^p \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{J}$ étant un idéal, on vérifie immédiatement que

$$P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};x} = M_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};x} + \mathbb{N}^p \quad \text{et} \quad P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};K;x} = M_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};K;x} + \mathbb{N}^p$$

---

(1) Pour la définition de $\mathcal{J}_K$ se reporter au chapitre 0.

et en particulier, on a

$$P_{\alpha;J;x} = M_{\alpha;J;x} + \mathbb{N}^p \quad \text{et} \quad P_{\alpha;J;K;x} = M_{\alpha;J;K;x} + \mathbb{N}^p \quad .$$

PROPOSITION 1.4.- *Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{N}^p$, U un ouvert de $\mathbb{C}^p$, J un idéal cohérent de $\mathcal{O}_U$ et x un point de U . S'il existe une famille $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ d'éléments de $\Gamma(U,J)$ telle que pour tout i , $1\leq i\leq m$, le germe de f_i en x soit non nul et $E_x(f_i)\subset\mathcal{D}$ et telle que*

$$M_{\alpha;\mathcal{D};J;x}\subset\{d_1,\ldots,d_m\} \quad ,$$

où pour tout i , $1\leq i\leq m$, $d_i = v_{\alpha;x}(f_i)$, alors pour tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$ tel que $K\subset U$ et $x\in\mathring{K}$ on a :

i) $M_{\alpha;\mathcal{D};J;K;x} = M_{\alpha;\mathcal{D};J;x}$;

ii) *si en plus* $[(\mathcal{D} + (-\mathcal{D}))\cap\mathbb{N}^p] + \mathcal{D}\subset\mathcal{D}$, *alors* $P_{\alpha;\mathcal{D};J;K;x} = P_{\alpha;\mathcal{D};J;x}$.

Démonstration . On a $P_{\alpha;\mathcal{D};J;K;x}\subset P_{\alpha;\mathcal{D};J;x}$ (1.3). Or, l'hypothèse que pour tout i , $1\leq i\leq m$, $E_x(f_i)\subset\mathcal{D}$ implique que $\{d_1,\ldots,d_m\}\subset P_{\alpha;\mathcal{D};J;K;x}$, et l'hypothèse $M_{\alpha;\mathcal{D};J;x}\subset\{d_1,\ldots,d_m\}$ que $M_{\alpha;\mathcal{D};J;x}\subset P_{\alpha;\mathcal{D};J;K;x}$. On en déduit que $M_{\alpha;\mathcal{D};J;K;x} = M_{\alpha;\mathcal{D};J;x}$, ce qui démontre l'assertion (i). Supposons maintenant qu'en plus $[(\mathcal{D} + (-\mathcal{D}))\cap\mathbb{N}^p] + \mathcal{D}\subset\mathcal{D}$, et soit d , $d\in P_{\alpha;\mathcal{D};J;x}$. Alors il existe d' , $d'\in M_{\alpha;\mathcal{D};J;x}$ tel que $d'\leq d$, et comme $M_{\alpha;\mathcal{D};J;x}\subset\{d_1,\ldots,d_m\}$, il existe i , $1\leq i\leq m$, tel que $d_i = d'$ et si l'on pose $d'' = d-d' = d-d_i$, on a $d''\in(\mathcal{D}+(-\mathcal{D}))\cap\mathbb{N}^p$. Soit g la fonction définie par $g(x') = f_i(x')(x'-x)^{d''}$, pour $x'\in U$. Alors $g\in\Gamma(U,J)$, $v_{\alpha;x}(g) = d_i + d'' = d$ et $E_x(g) = E_x(f_i) + d''$, et comme on a $E_x(f_i)\subset\mathcal{D}$, $d''\in(\mathcal{D}+(-\mathcal{D}))\cap\mathbb{N}^p$ et $[(\mathcal{D}+(-\mathcal{D}))\cap\mathbb{N}^p] + \mathcal{D}\subset\mathcal{D}$, on en déduit que $E_x(g)\subset\mathcal{D}$, d'où $d\in P_{\alpha;\mathcal{D};J;K;x}$, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE 1.5.- *Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{N}^p$, U un ouvert de $\mathbb{C}^p$, J un idéal cohérent de $\mathcal{O}_U$ et x un point de U . Alors il existe un ouvert U' de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U et contenant x tel que pour tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$ tel que $K\subset U'$ et $x\in\mathring{K}$ on ait :*

i) $M_{\alpha;\mathcal{D};J;K;x} = M_{\alpha;\mathcal{D};J;x}$

ii) *si* $[(\mathcal{D} + (-\mathcal{D}))\cap\mathbb{N}^p] + \mathcal{D}\subset\mathcal{D}$, *alors* $P_{\alpha;\mathcal{D};J;K;x} = P_{\alpha;\mathcal{D};J;x}$.

Démonstration. L'ensemble $M_{\alpha;\mathcal{D};J;x}$ étant fini, il existe un ouvert U' de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U et contenant x et une famille $f_1,\ldots,f_m$ d'éléments de

$\Gamma(U',\mathcal{J})$ telle que pour tout i , $1 \leqq i \leqq m$, $E_x(f_i) \subset \mathcal{D}$ et telle que pour tout d , $d \in M_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};x}$, il existe i , $1 \leqq i \leqq m$, tel que le germe de f_i en x soit non nul et $v_{\alpha;x}(f_i) = d$, et alors le corollaire résulte de la proposition 1.4.

§2.- Le foncteur $\mathcal{P}_\alpha$.

(2.0) Dans ce paragraphe, on se fixe une fois pour toutes un entier p , $p \in \mathbb{N}$, et une relation d'ordre total $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde, moins fine que la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$. La relation $\leqq_\alpha$ est donc une relation de bon ordre (I,1.5). On rappelle que si d est un élément de $\mathbb{N}^p$, on désigne par $s_\alpha(d)$ (ou plus simplement par $s(d)$ quand aucune confusion n'en résulte) le successeur de d pour la relation de bon ordre $\leqq_\alpha$

$$s_\alpha(d) = \min_\alpha\{d' \in \mathbb{N}^p : d <_\alpha d'\} \quad ,$$

et alors si d' est un élément de $\mathbb{N}^p$, on a

$$s(d+d') \leqq_\alpha d + s(d') \ .$$

On se fixe aussi un ouvert U de $\mathbb{C}^p$, on considère l'ouvert $U \times U$ de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p$, on désigne par p_1 (resp. p_2) la première (resp. deuxième) projection $p_1 : U \times U \longrightarrow U$ (resp. $p_2 : U \times U \longrightarrow U$) et par $(X'_1,\dots,X'_p, X''_1,\dots,X''_p)$ les coordonnées sur $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p$. Si d est un élément de $\mathbb{N}^p$, on désigne par J^d_α (ou plus simplement par J^d quand aucune confusion n'en résulte) l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_{U\times U}$ engendré par la famille $((X'-X'')^{d'})_{d' \geqq_\alpha d}$ (où $(X'-X'')^{d'} = (X'_1-X''_1)^{d'_1} \dots (X'_p-X''_p)^{d'_p}$, si $d' = (d'_1,\dots,d'_p)$) . On remarque que :

i) $J^0 = \mathcal{O}_{U\times U}$ (car la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ est moins fine que $\leqq$) ;

ii) pour tout d et d' , $d \in \mathbb{N}^p$, $d' \in \mathbb{N}^p$ si $d \leqq_\alpha d'$, on a $J^{d'} \subset J^d$;

iii) pour tout d et d' , $d \in \mathbb{N}^p$, $d' \in \mathbb{N}^p$ on a $J^d J^{d'} \subset J^{d+d'}$ (car la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ est compatible avec la structure de monoïde sur $\mathbb{N}^p$) .

Enfin, si M et N désignent deux $\mathcal{O}_U$-modules cohérents, on désigne par $M \boxtimes N$ le $\mathcal{O}_{U\times U}$-module cohérent $p_1^*(M) \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} p_2^*(N)$, et si $u : M' \longrightarrow M$ et $v : N' \longrightarrow N$ désignent deux morphismes de $\mathcal{O}_U$-modules cohérents, on désigne par $u \boxtimes v$ le morphisme de $\mathcal{O}_{U\times U}$-modules cohérents $p_1^*(u) \otimes p_2^*(v)$. On définit ainsi un bifoncteur covariant de la catégorie des $\mathcal{O}_U$-modules dans celle des $\mathcal{O}_{U\times U}$-modules, exact à droite et commutant aux sommes directes.

(2.1). Soit d un élément de $\mathbb{N}^p$. Comme $J^{s(d)} \subset J^d$, on a une surjection canonique

$$\pi_d : \mathcal{O}_{U\times U}/J^{s(d)} \longrightarrow \mathcal{O}_{U\times U}/J^d \quad .$$

Soient M et N deux $\mathcal{O}_U$-modules cohérents. On déduit par tensorisation une surjection

$$\pi_d \otimes \mathrm{id}_{M\boxtimes N} : \mathcal{O}_{U\times U}/J^{s(d)} \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} (M\boxtimes N) \longrightarrow \mathcal{O}_{U\times U}/J^d \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} (M\boxtimes N) \quad .$$

On désigne par $P^d_{\alpha;M;N}$ (ou plus simplement par $P^d_{M;N}$ quand aucune confusion n'en résulte) le $\mathcal{O}_U$-module défini par

$$P^d_{\alpha;M;N} = p_{1*}(\mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{M\boxtimes N})) \quad .$$

Soient $u : M' \longrightarrow M$ et $v : N' \longrightarrow N$ deux morphismes de $\mathcal{O}_U$-modules cohérents. Si l'on considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{M'\boxtimes N'}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{U\times U}/J^{s(d)} \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} (M'\boxtimes N') & \longrightarrow & \mathcal{O}_{U\times U}/J^d \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} (M'\boxtimes N') & \longrightarrow 0 \\
 & & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{U\times U}/J^{s(d)}} \otimes (u\boxtimes v)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{U\times U}/J^d} \otimes (u\boxtimes v)} & \\
0 \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{M\boxtimes N}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{U\times U}/J^{s(d)} \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} (M\boxtimes N) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{U\times U}/J^d \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} (M\boxtimes N) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes, on déduit que le morphisme $\mathrm{id}_{\mathcal{O}_{U\times U}/J^{s(d)}} \otimes (u\boxtimes v)$ induit un morphisme

$$\varphi_d : \mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{M'\boxtimes N'}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{M\boxtimes N}) \quad .$$

On désigne par $P^d_{\alpha;u;v}$ (ou plus simplement par $P^d_{u;v}$ quand aucune confusion n'en résulte) le morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules

$$P^d_{\alpha;u;v} : P^d_{\alpha;M';N'} \longrightarrow P^d_{\alpha;M;N}$$

défini par $P^d_{\alpha;u;v} = p_{1*}(\varphi_d)$.

Si $u' : M'' \longrightarrow M'$ et $v' : N'' \longrightarrow N'$ sont deux morphismes de $\mathcal{O}_U$-modules cohérents, on vérifie immédiatement que

$$P^d_{uu';vv'} = P^d_{u;v} \circ P^d_{u';v'} \quad .$$

On a ainsi défini un bifoncteur covariant de la catégorie de $\mathcal{O}_U$-modules cohérents dans celle de $\mathcal{O}_U$-modules. Enfin, il est aisé de vérifier que si M, M', N et N' désignent des $\mathcal{O}_U$-modules cohérents, on a

$$P^d_{M\oplus M';N} = P^d_{M;N} \oplus P^d_{M';N}$$

et

$$P^d_{M;N\oplus N'} = P^d_{M;N} \oplus P^d_{M;N'} \quad .$$

(2.2) Soient $\theta : U \longrightarrow U\times U$ l'immersion diagonale et I l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_{U\times U}$ qui la définit. L'idéal I est engendré par la famille $(X'_i - X''_i)_{1\leq i\leq p}$ et on a $I = J^{s(o)}$. Si d désigne un élément de $\mathbb{N}^p$ et M et N deux $\mathcal{O}_U$-modules cohérents, le $\mathcal{O}_{U\times U}$-module cohérent $\mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{M\boxtimes N})$ est porté par la diagonale (cf. Chapitre 0). En effet, considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow J^d/J^{s(d)} \longrightarrow \mathcal{O}_{U\times U}/J^{s(d)} \xrightarrow{\pi_d} \mathcal{O}_{U\times U}/J^d \longrightarrow 0 \quad .$$

On en déduit par tensorisation une suite exacte

$$J^d/J^{s(d)}\otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}}(M\boxtimes N) \longrightarrow \mathcal{O}_{U\times U}/J^{s(d)}\otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}}(M\boxtimes N) \xrightarrow{\pi_d\otimes \mathrm{id}_{M\boxtimes N}} \mathcal{O}_{U\times U}/J^d\otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}}(M\boxtimes N) \longrightarrow 0 \quad ,$$

d'où une surjection.

$$(2.2.1) \qquad J^d/J^{s(d)}\otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}}(M\boxtimes N) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{M\boxtimes N}) \longrightarrow 0 \quad .$$

Pour démontrer que $\mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{M\boxtimes N})$ est porté par la diagonale, il suffit de le démontrer pour $J^d/J^{s(d)} \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} (M\boxtimes N)$, ou encore pour $J^d/J^{s(d)}$; il suffit donc de démontrer que $IJ^d \subset J^{s(d)}$. Or, $IJ^d = J^{s(o)}J^d \subset J^{d+s(o)} \subset J^{s(d)}$ (2.0).

Il en résulte immédiatement les conséquences suivantes :

i) $P^d_{M;N}$ est un $\mathcal{O}_U$-module cohérent ;

ii) pour tout ouvert U' de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U on a $P^d_{M|U';N|U'} = P^d_{M;N}|U'$;

iii) si $u : M' \longrightarrow M$ et $v : N' \longrightarrow N$ sont deux morphismes surjectifs de $\mathcal{O}_U$-modules cohérents, le morphisme $P^d_{u;v}$ est surjectif ;

iv) $\mathrm{supp}(P^d_{M;N}) \subset \mathrm{supp}(M) \cap \mathrm{supp}(N)$;

v) si Y et Z sont deux sous-espaces analytiques fermés de U et si M et N sont portés par Y et Z respectivement, alors $P^d_{M;N}$ est porté par le sous-espace analytique intersection $Y \cap Z$;

vi) si x est un point de U on a

$$(P^d_{M;N})_x = \mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{p_1^*(M)} \otimes \mathrm{id}_{p_2^*(N)})(x,x) \quad ;$$

vii) $P^o_{M;N} = M \otimes_{\mathcal{O}_U} N$;

viii) $P^d_{M;N}$ est canoniquement isomorphe à $P^d_{N;M}$.

(2.3) Soient M et N deux $\mathcal{O}_U$-modules cohérents. On désigne par $P_{\alpha;M;N}$ (ou plus simplement par $P_{M;N}$ quand aucune confusion n'en résulte) le $\mathcal{O}_U$-module gradué (par $\mathbb{N}^p$)

$$P_{\alpha;M;N} = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}^p} P^d_{\alpha;M;N}$$

Si $u : M' \longrightarrow M$ et $v : N' \longrightarrow N$ sont deux morphismes de $\mathcal{O}_U$-modules cohérents, on désigne par $P_{\alpha;u;v}$ (ou plus simplement par $P_{u;v}$ quand aucune confusion n'en résulte) le morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules gradués défini par

$$P_{\alpha;u;v} = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}^p} P^d_{\alpha;u;v} \quad ,$$

et les propriétés fonctoriels de P^d impliquent les mêmes propriétés fonctoriels pour P .

(2.4) Etudions maintenant de plus près le cas où $M = N = \mathcal{O}_U$. Dans ce cas, on a

$$P_{\mathcal{O}_U;\mathcal{O}_U} = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}^p} p_{1*}(J^d/J^{s(d)}) \quad .$$

Soient d et d' deux éléments de $\mathbb{N}^p$ et W un ouvert de $U\times U$. On remarque que :

i) si $f \in \Gamma(W,J^d)$ et $g \in \Gamma(W,J^{d'})$, on a $fg \in \Gamma(W,J^{d+d'})$ car $J^dJ^{d'} \subset J^{d+d'}$ (2.0)) ;

ii) si $f \in \Gamma(W,J^{s(d)})$ et $g \in \Gamma(W,J^{d'})$, on a $fg \in \Gamma(W,J^{s(d+d')})$ (car $J^{s(d)}J^{d'} \subset J^{s(d)+d'} \subset J^{s(d+d')}$ (2.0)) ;

iii) si $f \in \Gamma(W,J^d)$ et $g \in \Gamma(W,J^{s(d')})$ on a $fg \in \Gamma(W,J^{s(d+d')})$.

On en déduit une application $\mathcal{O}_U$-bilinéaire

$$(J^d/J^{s(d)}) \times (J^{d'}/J^{s(d')}) \longrightarrow J^{d+d'}/J^{s(d+d')}$$

qui définit une structure de $\mathcal{O}_U$-algèbre graduée sur $P_{\mathcal{O}_U;\mathcal{O}_U}$.

PROPOSITION 2.4.1.- *La $\mathcal{O}_U$-algèbre graduée (par $\mathbb{N}^p$) $P_{\mathcal{O}_U;\mathcal{O}_U}$ est canoniquement isomorphe à la $\mathcal{O}_U$-algèbre graduée (par $\mathbb{N}^p$) $\mathcal{O}_U[T]$ des polynômes à p indéterminées (où $T = (T_1,\ldots,T_p)$ désigne p indéterminées)* .

Démonstration. Pour tout d , $d \in \mathbb{N}^p$, on définit un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules

$$\mathcal{O}_U \longrightarrow p_{1*}(J^d)$$

en associant à un élément f de $\Gamma(W,\mathcal{O}_U)$, où W désigne un ouvert de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U , l'élément g de $\Gamma(W\times U , J^d)$, défini par

(2.4.1.1) $$g(x'_1,\ldots,x'_p,x''_1,\ldots,x''_p) = f(x'_1,\ldots,x'_p)(x'-x'')^d$$

pour $x' = (x'_1,\ldots,x'_p) \in W$ et $x'' = (x''_1,\ldots,x''_p) \in U$. En composant ce morphisme avec le morphisme canonique

$$p_{1*}(J^d) \longrightarrow p_{1*}(J^d/J^{s(d)}) \quad ,$$

on en déduit un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules

$$\psi_d : \mathcal{O}_U \longrightarrow P^d_{\mathcal{O}_U;\mathcal{O}_U} \quad .$$

En identifiant $\mathcal{O}_U.T^d$ à $\mathcal{O}_U$ et $\mathcal{O}_U[T]$ à $\bigoplus_{d\in\mathbb{N}^p} \mathcal{O}_U.T^d$, on déduit un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules

$$\psi : \mathcal{O}_U[T] \longrightarrow P_{\mathcal{O}_U;\mathcal{O}_U} \;,\quad \psi = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}^p} \psi_d \;,$$

et on vérifie facilement qu'il s'agit d'un morphisme de $\mathcal{O}_U$-algèbres graduées. Pour démontrer que ψ est un isomorphisme, il suffit de démontrer que pour tout d , $d \in \mathbb{N}^p$, ψ_d est un isomorphisme de $\mathcal{O}_U$-modules, c'est-à-dire que pour tout x , $x \in U$,

$$\psi_{d,x} : \mathcal{O}_{U,x} \longrightarrow J^d_{(x,x)}/J^{s(d)}_{(x,x)}$$

est bijectif. Pour démontrer cela, on définit une application $\mathcal{O}_{U,x}$-linéaire

$$J^d_{(x,x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{U,x}$$

en associant à tout élément g de $\Gamma(W\times W, J^d)$, où W est un ouvert de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U et contenant x , l'élément f de $\Gamma(W,\mathcal{O}_U)$ défini par

(2.4.1.2) $$f(x'_1,\dots,x'_p) = (-1)^{|d|}\frac{1}{d!}\frac{\partial^{|d|}g}{\partial X''^d}(x'_1,\dots,x'_p,x'_1,\dots,x'_p) \quad ,$$

pour $(x'_1,\dots,x'_p) \in W$, on vérifie que l'image d'un élément de $J^{s(d)}_{(x,x)}$ par cette application est nulle, d'où une application $\mathcal{O}_{U,x}$-linéaire

$$\psi'_{d,x} : J^d_{(x,x)}/J^{s(d)}_{(x,x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{U,x} \quad ,$$

et alors on constate facilement que

$$\psi_{d,x}\circ\psi'_{d,x} = \mathrm{id}_{J^d_{(x,x)}/J^{s(d)}_{(x,x)}} \quad \text{et} \quad \psi'_{d,x}\circ\psi_{d,x} = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{U,x}} \quad ,$$

ce qui démontre la proposition.

(2.4.2) Soient M et N deux $\mathcal{O}_U$-modules cohérents. Il est facile de vérifier que $P_{M;N}$ est muni d'une structure de $P_{\mathcal{O}_U;\mathcal{O}_U}$-module gradué, ce qui fait de P un bifoncteur de la catégorie des $\mathcal{O}_U$-modules cohérents dans celle des $\mathcal{O}_U[T_1,\dots,T_p]$-modules gradués par $\mathbb{N}^p$ et des morphismes de degré zéro.

(2.4.3) Soient Y et Z deux sous-espaces analytiques fermés de U . Alors $P_{\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_Z}$ est une algèbre graduée quotient de $\mathcal{O}_U[T_1,\dots,T_p]$ (2.2,iii), donc une $\mathcal{O}_U$-algèbre graduée de type fini, et comme pour tout d , $d \in \mathbb{N}^p$, $P^d_{\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_Z}$ est un $\mathcal{O}_U$-module cohérent (2.2,i), $P_{\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_Z}$ est une $\mathcal{O}_U$-algèbre graduée de présentation finie ([35] , chapitre I, proposition 1.4). Si X désigne un sous-espace analytique fermé de U tel que pour tout d , $d \in \mathbb{N}^p$, $P^d_{\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_Z}$ soit porté par X (par exemple $X = Y \cap Z = Y \times_U Z$ (cf. (2.2,v))), on en déduit que $P_{\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_Z}$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée de présentation finie (une présentation finie de la $\mathcal{O}_U$-algèbre graduée $P_{\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_Z}$ induit par tensorisation une présentation finie de la $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée $P_{\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_Z}$) .

LEMME 2.5.- *Soient* d *un élément de* $\mathbb{N}^p$, J *un idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$, x *un point de* U *et* $\{x\}$ *le sous-espace analytique réduit de* U *dont le support est formé par le seul point* x . *Alors :*

i) $\dim_{\mathbb{C}}((P^d_{\mathcal{O}_{\{x\}};\mathcal{O}_U/J})_x) \leq 1$;

ii) $\dim_{\mathbb{C}}((P^d_{\mathcal{O}_{\{x\}};\mathcal{O}_U/J})_x) = 0$, *si et seulement si*, $d \in P_{\alpha,J;x}$.

Démonstration. Si pour tout d' , $d' \in \mathbb{N}^p$, on désigne par $M^{d'}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{U;x}$ engendré par $((X-x)^{d''})_{d'' \geq_\alpha d'}$, où $X = (X_1,\dots,X_p)$ désigne les coordonnées de $\mathbb{C}^p$, il est facile de vérifier que $(P^d_{\mathcal{O}_{\{x\}};\mathcal{O}_U/J})_x$ est isomorphe à $M^d + J_x/M^{s(d)} + J_x$. L'assertion (i) résulte du fait qu'il existe une surjection canonique

$$M^d/M^{s(d)} \longrightarrow M^d + J_x/M^{s(d)} + J_x$$

et que $\dim_{\mathbb{C}}(M^d/M^{s(d)}) = 1$. Pour démontrer l'assertion (ii) on remarque que $\dim_{\mathbb{C}}(M^d + J_x/M^{s(d)} + J_x) = 0$ équivaut à $(X-x)^d \in M^{s(d)} + J_x$, c'est-à-dire à l'existence d'un f , $f \in J_x$ tel que $f - (X-x)^d \in M^{s(d)}$, et il est facile de voir que cela équivaut à $d \in P_{\alpha;J;x}$.

PROPOSITION 2.5.1.- *Soient* J *un idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$, x *un point de* U *et* $\{x\}$ *le sous-espace analytique réduit de* U *dont le support est formé par le seul point* x . *Alors la* $\mathbb{C}$*-algèbre graduée (par* $\mathbb{N}^p$*)* $(P_{\mathcal{O}_{\{x\}};\mathcal{O}_U/J})_x$ *est canoniquement isomorphe à la* $\mathbb{C}$*-algèbre graduée (par* $\mathbb{N}^p$*)* $\mathbb{C}[T]/((T^d)_{d \in M_{\alpha;J;x}})$, *où* $T = (T_1,\dots,T_p)$ *désigne* p *indéterminées.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme 2.5, de la proposition 2.4.1, et de (2.2,iii).

LEMME 2.6.- *Soit* d *un élément de* $\mathbb{N}^p - \{0\}$ *tel que pour tout* d' , $d' \in \mathbb{N}^p$, $d \neq s(d')$. *Alors il existe une famille* $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathbb{N}^p$ *telle que*

i) *pour tout* k , $k \in \mathbb{N}$, $d_k <_\alpha d$;

ii) *pour tout* k , $k \in \mathbb{N}$,

$$J^{d_k} \subset J^d + I^k ,$$

où I *désigne l'idéal cohérent de* $\mathcal{O}_{U\times U}$ *engendré par la famille* $(X'_i - X''_i)_{1\leq i\leq p}$.

Démonstration. Pour tout k , $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$E_k = \{d' \in \mathbb{N}^p : d' <_\alpha d \text{ et } |d'| < k\} .$$

L'ensemble E_k est fini et si k est différent de 0 , E_k est non vide. On pose $d'_k = \max_\alpha(E_k)$, pour $k \neq 0$, et $d'_0 = 0$. Si l'on pose $d_k = s_\alpha(d'_k)$, pour $k \in \mathbb{N}$, on a $d_k \leq_\alpha d$, et comme pour tout d' , $d' \in \mathbb{N}^p$, $d \neq s_\alpha(d')$, on a $d_k <_\alpha d$. En plus, pour tout d' , $d' \in \mathbb{N}^p$, tel que $d_k \leq_\alpha d'$ on a $d' \notin E_k$, d'où $d \leq_\alpha d'$ ou $|d'| \geq k$. On en déduit que $J^{d_k} \subset J^d + I^k$, ce qui démontre le lemme.

LEMME 2.6.1.- *Soient* A *un anneau local noetherien,* J *un idéal de* A *contenu dans son idéal maximal,* M *et* N *deux A-modules de type fini,* M' *un sous-module de* M *et* $(M_i)_{i\in I}$ *une famille de sous-modules de* M *telle que pour tout* i , $i \in I$, $M' \subset M_i$ *et telle que pour tout* k , $k \in \mathbb{N}$, *il existe* i , $i \in I$, *tel que* $M_i \subset J^k M + M'$. *Si pour tout* i , $i \in I$, $\mathrm{Tor}_1^A(M/M_i, N) = 0$, *alors* $\mathrm{Tor}_1^A(M/M', N) = 0$.

Démonstration. Soit

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{u} L \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

une suite exacte, où L est un A-module libre de type fini. Alors N_1 est un A-module de type fini et pour tout A-module Q on a

$$\mathrm{Tor}_1^A(Q,N) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_Q \otimes u) .$$

Il s'agit donc de démontrer que $\mathrm{id}_{M/M'} \otimes u$ est injective. Soit donc $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{M/M'} \otimes u)$.

Pour tout k , $k \in \mathbb{N}$, il existe i , $i \in I$, tel que $M' \subset M_i \subset J^k M + M'$. Soient $p : M/M' \longrightarrow M/M_i$, $q : M/M_i \longrightarrow M/J^k M + M'$ et $r : M/M' \longrightarrow M/J^k M + M'$ les surjections canoniques. On a $r = q \circ p$. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
M/M' \otimes_A N_1 \arrow[r, "\mathrm{id}_{M/M'}\otimes u"] \arrow[d, "p\otimes \mathrm{id}_{N_1}"] & M/M' \otimes_A L \arrow[d, "p\otimes \mathrm{id}_L"] \\
M/M_i \otimes_A N_1 \arrow[r, "\mathrm{id}_{M/M_i}\otimes u"] \arrow[d, "q\otimes \mathrm{id}_{N_1}"] & M/M_i \otimes_A L \\
(M/\mathcal{J}^k M+M') \otimes_A N_1 &
\end{tikzcd}$$

Alors $(\mathrm{id}_{M/M'} \otimes u)(x) = 0$ implique que $(\mathrm{id}_{M/M_i} \otimes u) \circ (p \otimes \mathrm{id}_{N_1})(x) = 0$. Comme $\mathrm{Tor}_1^A(M/M_i, N) = 0$, $\mathrm{id}_{M/M_i} \otimes u$ est injective, donc $(p \otimes \mathrm{id}_{N_1})(x) = 0$, d'où $(r \otimes \mathrm{id}_{N_1})(x) = 0$. Or,

$$(M/\mathcal{J}^k M + M') \otimes_A N_1 = M/M' \otimes_A A/\mathcal{J}^k \otimes_A N_1 = (M/M' \otimes_A N_1)/\mathcal{J}^k(M/M' \otimes_A N_1) \quad ,$$

donc $x \in \mathcal{J}^k(M/M' \otimes_A N_1)$, et cela pour tout k . Le module $M/M' \otimes_A N_1$ étant de type fini, il est séparé pour la topologie $\mathcal{J}$-adique, donc $x = 0$, ce qui démontre le lemme.

(2.6.2) Soient d un élément de $\mathbb{N}^p$ et $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$, $\mathcal{N}$ des $\mathcal{O}_U$-modules cohérents. On a un morphisme canonique $\mathcal{M}' \longrightarrow p_{1_*}p_1^*(\mathcal{M}')$ et par tensorisation on en déduit un morphisme

$$\mathcal{P}^d_{\mathcal{M};\mathcal{N}} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{P}^d_{\mathcal{M};\mathcal{N}} \otimes_{\mathcal{O}_U} p_{1_*}p_1^*(\mathcal{M}') \quad ,$$

et comme

$$\mathcal{P}^d_{\mathcal{M};\mathcal{N}} = p_{1_*}(\mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N}})) \ ,$$

en composant avec le morphisme canonique

$$p_{1_*}(\mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N}})) \otimes_{\mathcal{O}_U} p_{1_*}p_1^*(\mathcal{M}') \longrightarrow p_{1_*}[\mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N}}) \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} p_1^*(\mathcal{M}')] \quad ,$$

on en déduit un morphisme

$$\mathcal{P}^d_{\mathcal{M};\mathcal{N}} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{M}' \longrightarrow p_{1_*}[\mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N}}) \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} p_1^*(\mathcal{M}')] \quad . \tag{2.6.2.1}$$

D'autre part, si l'on considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N}}) \longrightarrow \mathcal{O}_{U\times U}/J^{s(d)} \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} (\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N}) \longrightarrow \mathcal{O}_{U\times U}/J^d \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} (\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N}) \longrightarrow 0 \quad ,$$

on en déduit par tensorisation une suite exacte

$$\mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N}}) \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} p_1^*(\mathcal{M}') \to \mathcal{O}_{U\times U}/J^{s(d)} \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} ((\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{M}')\boxtimes \mathcal{N}) \to \mathcal{O}_{U\times U}/J^d \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} ((\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{M}')\boxtimes\mathcal{N}) \to 0 \ ,$$

d'où un morphisme

$$\mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{M \boxtimes N}) \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} p_1^*(M') \longrightarrow \mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{(M \otimes_{\mathcal{O}_U} M') \boxtimes N}) \quad ,$$

d'où un morphisme

$$p_{1*}[\mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{M\boxtimes N}) \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} p_1^*(M')] \longrightarrow P^d_{M \otimes_{\mathcal{O}_U} M' ; N}$$

et en composant avec le morphisme (2.6.2.1), on en déduit un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules

$$\varphi^d_{M;M';N} : P^d_{M;N} \otimes_{\mathcal{O}_U} M' \longrightarrow P^d_{M\otimes_{\mathcal{O}_U} M';N}$$

et un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules gradués, de degré zéro,

$$\varphi_{M;M';N} : P_{M;N} \otimes_{\mathcal{O}_U} M' \longrightarrow P_{M\otimes_{\mathcal{O}_U} M';N} \quad ,$$

où $\varphi_{M;M';N} = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}^p} \varphi^d_{M;M';N}$.

THÉORÈME 2.6.3.- *Soient* M , M' , N *des* $\mathcal{O}_U$*-modules cohérents. Alors*

i) *le morphisme* $\varphi_{M;M';N} : P_{M;N} \otimes_{\mathcal{O}_U} M' \longrightarrow P_{M\otimes_{\mathcal{O}_U} M';N}$ *est surjectif ;*

ii) *si* x *est un point de* U *tel qu'il existe un sous-espace analytique fermé* Y *de* U *tel que :*

a) $x \in Y$;

b) M *et* M' *soient portés par* Y ;

c) $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{Y,x}}((P_{M;N})_x, M'_x) = 0$;

alors l'application

$$(\varphi_{M;M';N})_x : (P_{M;N} \otimes_{\mathcal{O}_U} M')_x \longrightarrow (P_{M\otimes_{\mathcal{O}_U} M';N})_x$$

est bijective.

Démonstration. Soit x un point de U et posons $T = M\boxtimes N$, $\mathrm{T} = T_{(x,x)}$ et pour tout d , $d\in\mathbb{N}^p$, $T^d = J^dT$ et $\mathrm{T}^d = T^d_{(x,x)} = J^d_{(x,x)}\mathrm{T}$. Alors pour tout d , $d\in\mathbb{N}^p$, le $\mathcal{O}_{U\times U}$-module $\mathcal{O}_{U\times U}/J^d \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} T$ est isomorphe à T/T^d et en considérant la suite exacte

$$(2.6.3.1) \qquad 0 \longrightarrow T^d/T^{s(d)} \longrightarrow T/T^{s(d)} \longrightarrow T/T^d \longrightarrow 0 \quad ,$$

on déduit que

$$\mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{M\boxtimes N}) = T^d/T^{s(d)}$$

et que $(P^d_{M;N})_x = \mathrm{T}^d/\mathrm{T}^{s(d)}$ (2.2,vi). En tensorisant la suite exacte (2.6.3.1) par $p_1^*(M')$, on en déduit une suite exacte

$$(2.6.3.2)\qquad T^d/T^{s(d)}\otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} p_1^*(M') \longrightarrow T/T^{s(d)}\otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} p_1^*(M') \longrightarrow T/T^d\otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} p_1^*(M') \longrightarrow 0$$

et comme pour tout d , $d\in\mathbb{N}^p$, $T/T^d \otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} p_1^*(M')$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{U\times U}/J^d\otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}}((M\otimes_{\mathcal{O}_U} M')\boxtimes N)$, on en déduit une surjection

$$T^d/T^{s(d)}\otimes_{\mathcal{O}_{U\times U}} p_1^*(M') \longrightarrow \mathrm{Ker}(\pi_d \otimes \mathrm{id}_{(M\otimes_{\mathcal{O}_U} M')\boxtimes N}) \quad ,$$

d'où une surjection

$$(P^d_{M;N})_x \otimes_{\mathcal{O}_{U,x}} M'_x \longrightarrow (P^d_{M\otimes_{\mathcal{O}_U} M';N})_x$$

(2.2,vi) qui n'est autre que $(\varphi_{M;M';N})_x$, d'où l'assertion (i). Pour démontrer l'assertion (ii), supposons qu'il existe un sous-espace analytique fermé Y de U vérifiant les conditions (a), (b) et (c), et posons $A=\mathcal{O}_{Y\times U,(x,x)}$, $A'=\mathcal{O}_{Y,x}$ et $M'=M'_x$. Comme l'hypothèse (b) implique que les $\mathcal{O}_{U\times U}$-modules cohérents T et $p_1^*(M')$ sont portés par $Y\times U$, on en déduit que la suite exacte (2.6.3.2) n'est autre que

$$(2.6.3.3)\qquad T^d/T^{s(d)}\otimes_{\mathcal{O}_{Y\times U}} p_1^*(M') \longrightarrow T/T^{s(d)}\otimes_{\mathcal{O}_{Y\times U}} p_1^*(M') \longrightarrow T/T^d\otimes_{\mathcal{O}_{Y\times U}} p_1^*(M') \longrightarrow 0 \ ,$$

d'où une suite exacte

$$\mathrm{Tor}_1^A(T/T^d,\ A\otimes_{A'}M') \longrightarrow (P^d_{M;N})_x \otimes_{A'}M' \longrightarrow (P^d_{M\otimes_{\mathcal{O}_U} M';N})_x \longrightarrow 0 \quad ,$$

et cela pour tout d , $d\in\mathbb{N}^p$. Pour démontrer donc l'assertion (ii), il suffit de démontrer que pour tout d , $d\in\mathbb{N}^p$, on a $\mathrm{Tor}_1^A(T/T^d,\ A\otimes_{A'}M') = 0$. Or, l'hypothèse (c) implique que pour tout d , $d\in\mathbb{N}^p$, on a $\mathrm{Tor}_1^{A'}(T^d/T^{s(d)},M') = 0$, donc comme A est A'-plat, qu'on a

$$(2.6.3.4)\qquad \mathrm{Tor}_1^A(T^d/T^{s(d)},A\otimes_{A'}M') = 0 \ .$$

Démontrons par récurrence transfinie que cette hypothèse implique que pour tout d , $d\in\mathbb{N}^p$, on a $\mathrm{Tor}_1^A(T/T^d,\ A\otimes_{A'}M') = 0$. Pour $d=0$ on a $T^d = T$, donc l'assertion est évidente. Démontrons que si $d\in\mathbb{N}^p-\{0\}$ et si pour tout d' , $d'\in\mathbb{N}^p$, $d'<_\alpha d$ on a $\mathrm{Tor}_1^A(T/T^{d'},\ A\otimes_{A'}M') = 0$, alors $\mathrm{Tor}_1^A(T/T^d,\ A\otimes_{A'}M') = 0$. Nous allons distinguer deux cas :

i) il existe d' , $d'\in\mathbb{N}^p$, tel que $d=s(d')$.

Alors on a une suite exacte

$$0\longrightarrow T^{d'}/T^d \longrightarrow T/T^d \longrightarrow T/T^{d'} \longrightarrow 0 \quad ,$$

d'où une suite exacte

$$\mathrm{Tor}_1^A(T^{d'}/T^d,\ A\otimes_{A'}M') \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(T/T^d,\ A\otimes_{A'}M') \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(T/T^{d'},A\otimes_{A'}M') \ .$$

Or, comme $d = s(d')$, on a $\mathrm{Tor}_1^A(T^{d'}/T^d,A\otimes_{A'}M') = 0$ (2.6.3.4), et comme $d' <_\alpha d$, on a $\mathrm{Tor}_1^A(T/T^{d'},A\otimes_{A'}M') = 0$ (hypothèse de récurrence), d'où $\mathrm{Tor}_1^A(T/T^d,\ A\otimes_{A'}M') = 0$.

ii) Pour tout d' , $d' \in \mathbb{N}^p$, $d \neq s(d')$.

Alors il existe une famille $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{N}^p$, telle que pour tout k , $k\in\mathbb{N}$, $d_k <_\alpha d$ et $J^{d_k} \subset J^d + I^k$, où I désigne l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_{U\times U}$ engendré par la famille $(X_i' - X_i'')_{1\leq i\leq p}$ (lemme 2.6), ce qui implique que

$$T^{d_k} \subset I^k_{(x,x)}T + T^d \ .$$

Or, $I_{(x,x)}$ est contenu dans l'idéal maximal de A qui est un anneau local noetherien, T et $A\otimes_{A'}M'$ sont des A-modules de type fini, et comme pour tout k , $k\in\mathbb{N}$, $d_k <_\alpha d$, on a $T^d \subset T^{d_k}$ et $\mathrm{Tor}_1^A(T/T^{d_k},\ A\otimes_{A'}M') = 0$ (hypothèse de récurrence). On en déduit que $\mathrm{Tor}_1^A(T/T^d,\ A\otimes_{A'}M') = 0$ (lemme 2.6.1), ce qui démontre le théorème.

§3.- Variation des exposants privilégiés d'un idéal

Dans ce paragraphe, on démontre que si $\leqq_\alpha$ désigne une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde, moins fine que la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$, U un ouvert de $\mathbb{C}^p$ et J un idéal cohérent de $\mathcal{O}_U$, alors il existe une stratification $\mathbb{C}$-analytique $(X_i)_{i\in I}$ de U telle que pour tout i, $i \in I$, et tout x et x', $x \in X_i$, $x' \in X_i$, on ait $M_{\alpha;J;x} = M_{\alpha;J;x'}$ (ou ce qui est équivalent $P_{\alpha;J;x} = P_{\alpha;J;x'}$). On démontre aussi un résultat plus précis (3.6) cité dans l'introduction générale. On gardera les notations et conventions du paragraphe précédent.

Notation (3.1). Soient J un idéal cohérent de $\mathcal{O}_U$ et Y un fermé analytique de U. On désigne par $S_{\alpha;J;Y}$ (ou plus simplement par $S_{J;Y}$ quand aucune confusion n'en résulte) la partie de Y définie par

$$S_{\alpha;J;Y} = \{y \in Y : (P_{\alpha;\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_U/J})_y \text{ n'est pas } \mathcal{O}_{Y,y}\text{-plat}\} ,$$

où Y désigne aussi le sous-espace analytique fermé réduit de U dont le support est Y.

PROPOSITION 3.2.- *Soient J un idéal cohérent de $\mathcal{O}_U$ et Y un fermé analytique de U. Alors $S_{J;Y}$ est un fermé analytique de Y d'intérieur vide (dans Y).*

Démonstration. Si l'on désigne aussi par Y le sous-espace analytique fermé réduit de U dont le support est Y, pour tout d, $d \in \mathbb{N}^p$, $P^d_{\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_U/J}$ est porté par Y (2.2,v), donc $P_{\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_U/J}$ est une $\mathcal{O}_Y$-algèbre graduée de présentation finie (2.4.3), et la proposition résulte de [35], chapitre I, théorème 8.1.3.

PROPOSITION 3.3.- *Soient J un idéal cohérent de $\mathcal{O}_U$ et Y un fermé analytique irréductible de U. Alors si x et x' sont deux points de $Y - S_{J;Y}$, on a $P_{\alpha;J;x} = P_{\alpha;J;x'}$.*

Démonstration. Si l'on désigne aussi par Y le sous-espace analytique fermé réduit de U dont le support est Y et si l'on désigne par {x} (resp. {x'}) le sous-espace analytique réduit de U dont le support est formé par le seul point x (resp. x'), on a pour tout d, $d \in \mathbb{N}^p$,

$$\dim_{\mathbb{C}}((P^d_{\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_U/J} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_{\{x\}})_x) = \dim_{\mathbb{C}}((P^d_{\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_U/J} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_{\{x'\}})_{x'})$$

(car $P^d_{\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_U/J}$ est plat sur $Y - S_{J;Y}$ qui est irréductible). Or, $P_{\mathcal{O}_Y,\mathcal{O}_U/J}$ étant $\mathcal{O}_Y$-plat en x (resp. x'), il résulte du théorème 2.6.3 que $(P^d_{\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_U/J} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_{\{x\}})_x$

(resp. $(\mathcal{P}^d_{\mathcal{O}_Y};\mathcal{O}_U/\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_{\{x'\}})_{x'})$ est isomorphe à $(\mathcal{P}^d_{\mathcal{O}_{\{x\}}};\mathcal{O}_U/\mathcal{J})_x$ (resp. $(\mathcal{P}^d_{\mathcal{O}_{\{x'\}}};\mathcal{O}_U/\mathcal{J})_{x'})$, et comme $d \in P_{\alpha;\mathcal{J};x}$ (resp. $d \in P_{\alpha;\mathcal{J};x'}$) équivaut à $\dim_{\mathbb{C}}((\mathcal{P}^d_{\mathcal{O}_{\{x\}}};\mathcal{O}_U/\mathcal{J})_x) = 0$ (resp. $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{P}^d_{\mathcal{O}_{\{x'\}}};\mathcal{O}_U/\mathcal{J})_{x'} = 0)$ (2.5), on en déduit que $P_{\alpha;\mathcal{J};x} = P_{\alpha;\mathcal{J};x'}$.

Définition 3.4.- *Soit* X *un espace* $\mathbb{C}$*-analytique. On dit qu'une famille* $(X_i)_{i\in I}$ *de parties de* X *est une stratification* $\mathbb{C}$*-analytique de* X *si*

i) *pour tout* i , $i \in I$, X_i *est le support d'un sous-espace* $\mathbb{C}$*-analytique localement fermé, lisse, irréductible de* X *et* $\overline{X}_i$ *et* $\overline{X}_i - X_i$ *sont des fermés* $\mathbb{C}$*-analytiques de* X ;

ii) *pour tout* i *et* j , $i \in I$, $j \in I$, *si* $i \neq j$, *alors* $X_i \cap X_j = \emptyset$ *et* $X = \bigcup_{i\in I} X_i$;

iii) *la famille* $(X_i)_{i\in I}$ *est une famille localement finie* ;

iv) *pour tout* i *et* j , $i \in I$, $j \in I$, *si* $\overline{X}_i \cap X_j \neq \emptyset$, *alors* $X_j \subset \overline{X}_i$.

LEMME 3.4.1.- *Soient* X *un espace* $\mathbb{C}$*-analytique de dimension* p *et pour tout fermé analytique irréductible* Y *de* X , S_Y *un fermé analytique de* Y *d'intérieur vide (dans* Y *). Alors il existe une stratification* $\mathbb{C}$*-analytique* $(X_i)_{i\in I}$ *de* X *telle que pour tout* i , $i \in I$, $X_i \subset \overline{X}_i - S_{\overline{X}_i}$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur p . Supposons le lemme établi pour tout espace analytique X' de dimension strictement inférieure à p et démontrons-le pour X . Soient $(Y_i)_{i\in I'}$ la famille des composantes irréductibles de X et

$$S = \mathrm{Sing}(X_{red})$$

le lieu singulier de X_{red} . Pour tout i , $i \in I'$, on pose

$$X_i = Y_i - [S_{Y_i} \cup (Y_i \cap S)] \quad .$$

Alors $\overline{X}_i = Y_i$ et $\overline{X}_i - X_i = S_{Y_i} \cup (Y_i \cap S)$ est un fermé analytique d'intérieur vide de Y_i . Posons

$$X' = X - \bigcup_{i\in I'} X_i = (\bigcup_{i\in I'} S_{Y_i}) \cup S \quad .$$

Comme la famille $(Y_i)_{i\in I'}$ est localement finie, on en déduit que X' est un fermé analytique de X , et si l'on désigne aussi par X' le sous-espace analytique réduit de X dont le support est X' , que X' est un espace analytique de dimension strictement inférieure à p . Pour tout fermé analytique irréductible Y de X' on pose

$$I'_Y = \{i \in I' : Y \not\subset Y_i\} \quad \text{et} \quad S'_Y = S_Y \cup \big(\bigcup_{i \in I'_Y} (Y \cap Y_i)\big) \ .$$

Alors par hypothèse de récurrence on déduit l'existence d'une stratification $(X_i)_{i\in I''}$ (où I'' est un ensemble disjoint à I') de X' , telle que pour tout i , $i \in I''$, $X_i \subset \overline{X}_i - S'_{\overline{X}_i}$. On pose $I = I' \cup I''$ et alors pour tout i , $i \in I$, on a $X_i \subset \overline{X}_i - S_{\overline{X}_i}$. Démontrons que la famille $(X_i)_{i\in I}$ est une stratification de X . La vérification des conditions (i), (ii) et (iii) de la définition 3.4 est immédiate. Il reste à démontrer que pour tout i et j , $i \in I$, $j \in I$, si $\overline{X}_i \cap X_j \neq \emptyset$, alors $X_j \subset \overline{X}_i$. Supposons d'abord que $j \in I'$. Alors si $i \in I''$, on a $\overline{X}_i \subset X'$ et $X' \cap X_j = \emptyset$, donc l'hypothèse $\overline{X}_i \cap X_j \neq \emptyset$ est impossible ; si $i \in I'$, on a $\overline{X}_i = Y_i$, $X_j = Y_j - [S_{Y_j} \cup (Y_j \cap S)]$ et si $i \neq j$, $Y_i \cap Y_j \subset S$, donc $\overline{X}_i \cap X_j \neq \emptyset$ implique que $i = j$. Supposons maintenant que $j \in I''$. Alors si $i \in I''$, comme la famille $(X_k)_{k\in I''}$ est une stratification de X' , l'hypothèse $\overline{X}_i \cap X_j \neq \emptyset$ implique que $X_j \subset \overline{X}_i$; si $i \in I'$, on a $\overline{X}_i = Y_i$ et si $X_j \not\subset \overline{X}_i$, on a $\overline{X}_j \not\subset \overline{X}_i$, donc $\overline{X}_j \cap \overline{X}_i \subset S'_{\overline{X}_j}$, et comme $X_j \subset \overline{X}_j - S'_{\overline{X}_j}$, on a $X_j \cap \overline{X}_i = \emptyset$, ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 3.5.- *Soient* p *un entier,* $p \in \mathbb{N}$, $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^p$ *, compatible avec sa structure de monoïde, moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, X *un sous-espace analytique fermé de* U *et* J *un idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$. *Alors il existe une stratification* $\mathbb{C}$*-analytique* $(X_i)_{i\in I}$ de X *telle que pour tout* i , $i \in I$, *et tout* x *et* x' , $x \in X_i$, $x' \in X_i$, *on ait* $P_{\alpha;J;x} = P_{\alpha;J;x'}$.

Démonstration. Le théorème est une conséquence directe de 3.2, 3.3 et 3.4.1.

Remarque 3.5.1. Le théorème 3.5 est surtout intéressant appliqué à $X = U$ et on rappelle que la condition $P_{\alpha;J;x} = P_{\alpha;J;x'}$ est équivalente à la condition $M_{\alpha;J;x} = M_{\alpha,J;x'}$ (1.3).

PROPOSITION 3.6.- *Soient* m *un entier,* $m \in \mathbb{N}$, $f_1,\dots,f_m$ *des éléments de* $\Gamma(U,\mathcal{O}_U)$, J *l'idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *engendré par* $f_1,\dots,f_m$, Y *un fermé analytique irréductible de* U , U' *un ouvert de Stein connexe de* $\mathbb{C}^p$ *, relativement compact dans un ouvert de Stein* U'' *contenu dans* U *, tel que* $Y \cap U' \neq \emptyset$. *Alors il existe un entier* r , $r \in \mathbb{N}$ *, une famille* $(d_j)_{1\leqq j\leqq r}$ *d'éléments deux à deux distincts de* $\mathbb{N}^p$ *, une famille* $(F_{ij})_{i\in I,1\leqq j\leqq r}$ *, d'éléments de* $\Gamma(U' \times U', \mathcal{O}_{U\times U})$*, où* I *est un ensemble fini non vide, et une famille*

$(\beta_{ijk})_{i\in I, 1\leq j\leq r, 1\leq k\leq m}$ *d'éléments de* $\Gamma(U'\times U', \mathcal{O}_{U\times U})$ *tels que :*

i) *pour tout* x , $x\in Y-S_{J;Y}$ *on a* $M_{\alpha;J;x} = \{d_1,\dots,d_r\}$;

ii) *pour tout* i *et* j , $i\in I$, $1\leq j\leq r$, *et tout* x' , $x'\in U'$, *si l'on désigne par* $F_{ijx'}$ *l'élément de* $\Gamma(U',\mathcal{O}_U)$ *défini par* $F_{ijx'}(x'') = F_{ij}(x',x'')$, *pour* $x''\in U'$, *on a* $v_{\alpha;x'}(F_{ijx'}) \geq_\alpha d_j$;

iii) *pour tout* i *et* j , $i\in I$, $1\leq j\leq r$, *tout* x' , $x'\in Y\cap U'$ *et tout* x'' , $x''\in U'$, *on a*

$$F_{ij}(x',x'') = \sum_{k=1}^{m} \beta_{ijk}(x',x'')\, f_k(x'') \quad ;$$

iv) *si pour tout* i , $i\in I$, *on pose*

$$S_i = \{x'\in U' : \exists j \quad 1\leq j\leq r \quad , \quad \frac{\partial^{|d_j|}F_{ij}}{\partial x''^{d_j}}(x',x') = 0\}$$

et $U'_i = U'-S_i$, *alors* $(Y-S_{J;Y})\cap U' \subset \bigcup_{i\in I} U'_i$.

Démonstration. Il résulte de la proposition 3.3 que si x et x' sont deux points de $Y-S_{J;Y}$, on a $P_{\alpha;J;x} = P_{\alpha;J;x'}$. On en déduit l'existence d'une famille finie $(d_j)_{1\leq j\leq r}$ d'éléments deux à deux distincts de $\mathbb{N}^p$, telle que pour tout x , $x\in Y-S_{J;Y}$, $M_{\alpha;J;x} = \{d_1,\dots,d_r\}$.

On désignera aussi par Y le sous-espace analytique fermé, réduit de U dont le support est Y et on désignera par J' l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_U$ qui définit Y dans U , par Z le sous-espace analytique fermé de U défini par l'idéal cohérent J de $\mathcal{O}_U$, par J'' l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_{U\times U}$ qui définit $Y\times Z$ dans $U\times U$ et par u (resp. v) la surjection canonique $u:\mathcal{O}_U \longrightarrow \mathcal{O}_Y$ (resp. $v:\mathcal{O}_U\longrightarrow \mathcal{O}_Z$) . On en déduit une surjection

$$P_{u;v} : P_{\mathcal{O}_U,\mathcal{O}_U} \longrightarrow P_{\mathcal{O}_Y,\mathcal{O}_Z} \quad (2.2.,iii)$$

et on pose $J_{Y;Z} = \mathrm{Ker}(P_{u;v})$. Alors $J_{Y,Z}$ est un idéal homogène de $P_{\mathcal{O}_U,\mathcal{O}_U}$ ($J_{Y,Z} = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}^p} J^d_{Y,Z}$, où $J^d_{Y;Z}\subset P^d_{\mathcal{O}_U;\mathcal{O}_U}$) , de type fini (cf. (2.4.3)), et on a une suite exacte

$$(3.6.1) \qquad 0\longrightarrow J_{Y;Z}\longrightarrow P_{\mathcal{O}_U;\mathcal{O}_U}\longrightarrow P_{\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_Z}\longrightarrow 0 \quad .$$

Pour tout d , $d\in\mathbb{N}^p$, on en déduit une suite exacte

$$(3.6.2) \qquad 0\longrightarrow J^d_{Y,Z}\longrightarrow P^d_{\mathcal{O}_U;\mathcal{O}_U}\longrightarrow P^d_{\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_Z}\longrightarrow 0$$

qui n'est autre que la suite exacte

$$0 \longrightarrow p_{1*}(J^d \cap \mathcal{J}''/J^{s(d)} \cap \mathcal{J}'') \rightarrow p_{1*}(J^d/J^{s(d)}) \rightarrow p_{1*}(J^d + \mathcal{J}''/J^{s(d)} + \mathcal{J}'') \longrightarrow 0 \quad ,$$

ce qui est facile à vérifier. On a donc

(3.6.3) $$\mathcal{J}^d_{Y;Z} = p_{1*}(J^d \cap \mathcal{J}''/J^{s(d)} \cap \mathcal{J}'') \quad .$$

Comme U' est un ouvert de Stein relativement compact dans l'ouvert de Stein U'' qui est contenu dans U, il existe une famille finie $(g_j)_{1 \leq j \leq s}$ d'éléments de $\Gamma(U'',\mathcal{J}')$ qui engendre $\mathcal{J}'$ au-dessus de U'. Pour tout j, $1 \leq j \leq s$, on désigne par g'_j l'élément de $\Gamma(U'' \times U, \mathcal{O}_{U\times U})$ défini par $g'_j(x',x'') = g_j(x')$, pour $(x',x'') \in U'' \times U$, et pour tout k, $1 \leq k \leq m$, on désigne par f'_k l'élément de $\Gamma(U \times U, \mathcal{O}_{U\times U})$ défini par $f'_k(x',x'') = f_k(x'')$, pour $(x',x'') \in U\times U$, et alors l'idéal $\mathcal{J}''$ est engendré par $g'_1,\dots,g'_s$, $f'_1,\dots,f'_m$ au-dessus de $U' \times U$. De même, comme $J_{Y,Z}$ est un idéal homogène de type fini de $\mathcal{P}_{\mathcal{O}_U;\mathcal{O}_U}$, il existe une famille finie $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments homogènes de $\Gamma(U',J_{Y;Z})$ qui engendre $J_{Y;Z}$ comme idéal de $\mathcal{P}_{\mathcal{O}_U \cdot \mathcal{O}_U}$ au-dessus de U'. On peut supposer que pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $\xi_i \neq 0$, et alors il existe un élément δ_i et un seul de $\mathbb{N}^p$ tel que $\xi_i \in \Gamma(U',\mathcal{J}^{\delta_i}_{Y;Z})$. Or,
$\Gamma(U',\mathcal{J}^{\delta_i}_{Y;Z}) = \Gamma(U' \times U, J^{\delta_i} \cap \mathcal{J}''/J^{s(\delta_i)} \cap \mathcal{J}'')$ (3.6.3) et
$\Gamma(U' \times U, J^{\delta_i} \cap \mathcal{J}''/J^{s(\delta_i)} \cap \mathcal{J}'') = \Gamma(U' \times U', J^{\delta_i} \cap \mathcal{J}''/J^{s(\delta_i)} \cap \mathcal{J}'')$ (car
$J^{\delta_i}/J^{s(\delta_i)}$ et $J^{\delta_i} + \mathcal{J}''/J^{s(\delta_i)} + \mathcal{J}''$ étant portés par la diagonale de $U \times U$ (2.2), $J^{\delta_i} \cap \mathcal{J}''/J^{s(\delta_i)} \cap \mathcal{J}''$ l'est aussi), et comme $U' \times U'$ est un ouvert de Stein, il existe un élément F'_i de $\Gamma(U' \times U', J^{\delta_i} \cap \mathcal{J}'')$ dont l'image dans $\Gamma(U' \times U', J^{\delta_i} \cap \mathcal{J}''/J^{s(\delta_i)} \cap \mathcal{J}'')$ est ξ_i. D'autre part, pour tout i, $1 \leq i \leq n$, F'_i étant en particulier un élément de $\Gamma(U' \times U', \mathcal{J}'')$, $\mathcal{J}''$ étant engendré par $g'_1,\dots,g'_s$, $f'_1,\dots,f'_m$ au-dessus de $U' \times U'$ et $U' \times U'$ étant un ouvert de Stein, il existe des éléments $\alpha'_{i1},\dots,\alpha'_{is}$, $\beta'_{i1},\dots,\beta'_{im}$ de $\Gamma(U' \times U', \mathcal{O}_{U\times U})$ tels que

$$F'_i = \sum_{j=1}^{s} \alpha'_{ij}\, g'_j + \sum_{k=1}^{m} \beta'_{ik}\, f'_k \quad ;$$

on a donc pour tout x', $x' \in Y \cap U'$, et tout x'', $x'' \in U'$,

(3.6.4) $$F'_i(x',x'') = \sum_{k=1}^{m} \beta'_{ik}(x',x'') f_k(x'') \quad .$$

D'autre part, si pour tout i, $1 \leq i \leq n$, et tout x', $x' \in U'$, on désigne par $F'_{ix'}$ l'élément de $\Gamma(U',\mathcal{O}_U)$ défini par $F'_{ix'}(x'') = F'_i(x',x'')$, pour $x'' \in U'$, F'_i étant en particulier un élément de $\Gamma(U' \times U', J^{\delta_i})$, on a

(3.6.5) $\qquad v_{\alpha;x'}(F'_{ix'}) \geq_\alpha \delta_i$.

Soit maintenant x' un point de U . Si l'on désigne par $\{x'\}$ le sous-espace analytique réduit dont le support est formé par le seul point x' , on obtient par tensorisation de la suite exacte (3.6.1) une suite exacte

$$(\mathcal{J}_{Y,Z}\otimes_{\mathcal{O}_U}\mathcal{O}_{\{x'\}})_{x'} \longrightarrow (\mathcal{P}_{\mathcal{O}_U,\mathcal{O}_U}\otimes_{\mathcal{O}_U}\mathcal{O}_{\{x'\}})_{x'} \longrightarrow (\mathcal{P}_{\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_Z}\otimes_{\mathcal{O}_U}\mathcal{O}_{\{x'\}})_{x'} \longrightarrow 0 .$$

Or, il résulte de la proposition 2.4.1 que $(\mathcal{P}_{\mathcal{O}_U;\mathcal{O}_U}\otimes_{\mathcal{O}_U}\mathcal{O}_{\{x'\}})_{x'}$ s'identifie à $\mathbb{C}[T_1,\dots,T_p]$, où $\mathbb{C}[T_1,\dots,T_p]$ désigne l'anneau des polynômes à p indéterminées $T_1,\dots,T_p$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. Si $x'\in U'$, comme l'idéal gradué $J_{Y;Z}$ de $\mathcal{P}_{\mathcal{O}_U;\mathcal{O}_U}$ est engendré par $\xi_1,\dots,\xi_n$ au-dessus de U' , et comme pour tout i , $1\leq i\leq n$, ξ_i est l'image de F'_i , on déduit que l'image de $(\mathcal{J}_{Y,Z}\otimes_{\mathcal{O}_U}\mathcal{O}_{\{x'\}})_{x'}$ dans $(\mathcal{P}_{\mathcal{O}_U;\mathcal{O}_U}\otimes_{\mathcal{O}_U}\mathcal{O}_{\{x'\}})_{x'}$ s'identifie à l'idéal de $\mathbb{C}[T_1,\dots,T_p]$ engendré par $\left(\frac{\partial^{|\delta_i|}F'_i}{\partial X''^{\delta_i}}(x',x')T^{\delta_i}\right)_{1\leq i\leq n}$ (cf. (2.4.1.2)). Si en plus $x'\in Y-S_{J;Y}$, il résulte du théorème 2.6.3 que $(\mathcal{P}_{\mathcal{O}_Y;\mathcal{O}_Z}\otimes_{\mathcal{O}_U}\mathcal{O}_{\{x'\}})_{x'}$ est canoniquement isomorphe à $(\mathcal{P}_{\mathcal{O}_{\{x'\}};\mathcal{O}_Z})_{x'}$ qui s'identifie à $\mathbb{C}[T_1,\dots,T_p]/((T^{d_j})_{1\leq j\leq r})$ (proposition 2.5.1). On en déduit que l'idéal de $\mathbb{C}[T_1,\dots,T_p]$ engendré par par $(T^{d_j})_{1\leq j\leq r}$ est le même que l'idéal engendré par $\left(\frac{\partial^{|\delta_i|}F'_i}{\partial X''^{\delta_i}}(x',x')T^{\delta_i}\right)_{1\leq i\leq n}$, ce qui implique que pour tout j , $1\leq j\leq r$, il existe i , $1\leq i\leq n$, tel que $\delta_i = d_j$ et $\frac{\partial^{|\delta_i|}F'_i}{\partial X''^{\delta_i}}(x',x')\neq 0$ (ce qui implique en particulier que $\{d_1,\dots,d_r\}\subset\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$) .

Pour tout j , $1\leq j\leq r$, on pose $I_j = \{i : 1\leq i\leq n,\ \delta_i = d_j\}$, $I = I_1\times\dots\times I_r$ et on désigne par t_j la j-ième projection $t_j : I\longrightarrow I_j$. Alors I est un ensemble fini non vide, et si l'on pose pour tout i , $i\in I$, et tout j , $1\leq j\leq r$, $F_{ij} = F'_{t_j(i)}$ et pour tout k , $1\leq k\leq m$, $\beta_{ijk} = \beta'_{t_j(i),k}$, on constate immédiatement que 3.6.5 implique l'assertion (ii) et (3.6.4) l'assertion (iii). Enfin, comme pour tout x' , $x'\in(Y-S_{J;Y})\cap U'$, et tout j , $1\leq j\leq r$, il existe i_j , $1\leq i_j\leq n$, tel que $\delta_{i_j} = d_j$ et $\frac{\partial^{\delta_{i_j}}F_{ij}}{\partial X''^{\delta_{i_j}}}(x',x')\neq 0$, si l'on pose $i=(i_1,\dots,i_r)$, on a $i\in I$ et $x'\in U'_i$, ce qui démontre l'assertion (iv).

COROLLAIRE 3.7.- *Soient* J *un idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$, x *un point de* U *et* K *un polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *tel que* $x \in \overset{\circ}{K}$ *et* $K \subset U$. *Alors on a* $M_{\alpha;J;K;x} = M_{\alpha;J;x}$ et $P_{\alpha;J;K;x} = P_{\alpha;J;x}$.

Démonstration. Il existe des ouverts de Stein connexes U', U'' et U''' de $\mathbb{C}^p$ tels que

$$K \subset U' \subset U'' \subset U''' \subset U$$

et tels que U' (resp. U'') soit relativement compact dans U'' (resp. U''') . Alors il existe un entier m , $m \in \mathbb{N}$, et une famille $(f_k)_{1 \leq k \leq m}$ d'éléments de $\Gamma(U'',\mathcal{O}_U)$ qui engendre l'idéal J au-dessus de U'' . En appliquant la proposition 3.6 au fermé analytique irréductible Y de U'' réduit au seul point x , on déduit l'existence d'un entier r , $r \in \mathbb{N}$, d'une famille $(d_j)_{1 \leq j \leq r}$ d'éléments deux à deux distincts de $\mathbb{N}^p$, d'une famille $(F_{ij})_{i \in I, 1 \leq j \leq r}$ d'éléments de $\Gamma(U' \times U',\mathcal{O}_{U \times U})$, où I est un ensemble fini non vide, et d'une famille $(\beta_{ijk})_{i \in I, 1 \leq j \leq r, 1 \leq k \leq m}$ d'éléments de $\Gamma(U' \times U',\mathcal{O}_{U \times U})$ vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) et (iv) de la proposition 3.6. Or, comme dans ce cas on a $S_{J;Y} = \emptyset$, la condition (i) implique que $M_{\alpha,J,x} = \{d_1,\dots,d_r\}$. D'autre part, si pour tout i , $i \in I$, et tout j , $1 \leq j \leq r$, on désigne par g_{ij} l'élément de $\Gamma(U',\mathcal{O}_U)$ défini par $g_{ij}(y) = F_{ij}(x,y)$, pour $y \in U'$, la condition (iii) implique que $g_{ij} \in \Gamma(U',J)$ et les conditions (ii) et (iv) qu'il existe i_o , $i_o \in I$, tel que pour tout j , $1 \leq j \leq r$, $v_{\alpha;x}(g_{i_o j}) = d_j$. On en déduit que $M_{\alpha;J;K;x} = M_{\alpha;J;x}$ et que $P_{\alpha;J;K;x} = P_{\alpha;J;x}$ (1.4).

Exemples (3.8). Soient J_1 l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3}$ engendré par

$$XZ - Z \quad \text{et} \quad X^2 - 2X + Y + 1 \quad ,$$

J_2 celui engendré par

$$X^2Z + Y^2Z + Z^3 - Z$$

et

$$X^4 + 2X^2Y^2 + Y^4 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - 2X^2 - 2Y^2 - Z^2 + 1 \quad ,$$

où X, Y, Z désignent les coordonnées de $\mathbb{C}^3$, et posons $J = J_1 \cdot J_2$. Le sous-espace analytique fermé de $\mathbb{C}^3$ défini par J_1 est une courbe réduite, réunion de la droite L parallèle à l'axe des Z et passant par le point

$$A = (1,0,0) \quad ,$$

et de la parabole P du plan des X et Y définie par

$$P = \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \ : \ a^2 - 2a + b + 1 = 0 \ , \quad c = 0\} \quad .$$

Le support du sous-espace défini par J_2 est la sphère unité S de $\mathbb{C}^3$

$$S = \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \ : \ a^2+b^2+c^2 = 1\} \quad ,$$

ce sous-espace étant réduit en dehors du cercle

$$S_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \ : \ a^2+b^2 = 1 \ , \quad c=0\} \quad .$$

On désigne par S_2 le cercle

$$S_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \ : \ b^2+c^2 = 1 \quad , \quad a=0\} \quad ,$$

lieu des points de la sphère S où le plan tangent est parallèle à l'axe des X .
L'intersection des cercles S_1 et S_2 est formée des deux points

$$B = (0,1,0) \quad \text{et} \quad C = (0,-1,0) \quad ,$$

la droite L est tangente à la sphère S au point A et on a

$$S \cap P = S_1 \cap P = \{A,C,D,E\} \quad ,$$

où

$$D = (e,\bar{e},0), \quad E = (\bar{e},e,0) \quad \text{et} \quad e = 3/2 + i\sqrt{7}/2 \quad .$$

Enfin, on suppose que $\leq_\alpha$ désigne la relation d'ordre antilexicographique $\leq_L$ sur $\mathbb{N}^3$ (cf.(I,3.12.1). Alors on peut vérifier que :

I) Si l'on pose

$$X_o = \mathbb{C}^3 - (L \cup P) \quad ,$$

$$X_1 = L - \{A\} \quad , \quad X_2 = P - \{A\} \quad ,$$

$$X_3 = \{A\} \quad ,$$

la famille $(X_i)_{0\leq i\leq 3}$ est une stratification $\mathbb{C}$-analytique de $\mathbb{C}^3$ satisfaisant aux propriétés du théorème 3.5 pour l'idéal J_1 et on a :

$$M_{\alpha;J_1;x} = \{(0,0,0)\} \quad , \quad x \in X_o \quad ,$$

$$M_{\alpha;J_1;x} = \{(1,0,0), \ (0,1,0)\} \quad , \quad x \in X_1 \quad ,$$

$$M_{\alpha;J_1;x} = \{(1,0,0), \ (0,0,1)\} \quad , \quad x \in X_2 \quad ,$$

$$M_{\alpha;J_1;x} = \{(2,0,0), \ (1,0,1), \ (0,1,1)\} \quad , \quad x \in X_3 \quad .$$

II) Si l'on pose

$$X_o = \mathbb{C}^3 - S \ ,$$

$$X_1 = S - (S_1 \cup S_2) \quad ,$$

$$X_2 = S_2 - \{B,C\} \quad , \quad X_3 = S_1 - \{B,C\} \quad ,$$

$$X_4 = \{B\} \quad , \quad X_5 = \{C\} \ ,$$

alors la famille $(X_i)_{0\leq i\leq 5}$ est une stratification $\mathbb{C}$-analytique de $\mathbb{C}^3$ satisfaisant aux propriétés du théorème 3.5 pour l'idéal J_2 et on a :

$$M_{\alpha;J_2;x} = \{(0,0,0)\} \ , \quad x \in X_o \ ,$$
$$M_{\alpha;J_2;x} = \{(1,0,0)\} \ , \quad x \in X_1 \ ,$$
$$M_{\alpha;J_2;x} = \{(2,0,0)\} \ , \quad x \in X_2 \ ,$$
$$M_{\alpha;J_2;x} = \{(2,0,0),(1,0,1)\} \ , \quad x \in X_3 \ ,$$
$$M_{\alpha;J_2;x} = \{(4,0,0),(2,0,1)\} \ , \quad x \in X_4 \cup X_5 \ .$$

III) Si l'on pose

$$X_o = \mathbb{C}^3 - (S \cup L \cup P) \ ,$$
$$X_1 = S - (S_1 \cup S_2) \ ,$$
$$X_2 = S_2 - \{B,C\} \ , \quad X_3 = S_1 - \{A,B,C,D,E\} \ ,$$
$$X_4 = L - \{A\} \ , \quad X_5 = P - \{A,C,D,E\} \ ,$$
$$X_6 = \{A\} \ , \quad X_7 = \{B\} \ , \quad X_8 = \{C\} \ , \quad X_9 = \{D\} \ , \quad X_{10} = \{E\} \ ,$$

alors la famille $(X_i)_{0\leq i\leq 10}$ est une stratification $\mathbb{C}$-analytique de $\mathbb{C}^3$ satisfaisant aux propriétés du théorème 3.5 pour l'idéal $J = J_1 \cdot J_2$ et on a :

$$M_{\alpha;J;x} = \{(0,0,0)\} \ , \quad x \in X_o \ ,$$
$$M_{\alpha;J;x} = \{(1,0,0)\} \ , \quad x \in X_1 \ ,$$
$$M_{\alpha;J;x} = \{(2,0,0)\} \ , \quad x \in X_2 \ ,$$
$$M_{\alpha;J;x} = \{(2,0,0),(1,0,1)\} \ , \quad x \in X_3 \ ,$$
$$M_{\alpha;J;x} = \{(1,0,0),(0,1,0)\} \ , \quad x \in X_4 \ ,$$
$$M_{\alpha;J;x} = \{(1,0,0),(0,0,1)\} \ , \quad x \in X_5 \ ,$$
$$M_{\alpha;J;x} = \{(4,0,0),(3,0,1),(1,1,1),(2,0,2)\} \ , \quad x \in X_6 \ ,$$
$$M_{\alpha;J;x} = \{(4,0,0),(2,0,1)\} \ , \quad x \in X_7 \ ,$$
$$M_{\alpha;J;x} = \{(5,0,0),(3,0,1),(2,1,1),(2,0,2)\} \ , \quad x \in X_8 \ ,$$
$$M_{\alpha;J;x} = \{(3,0,0),(2,0,1),(1,1,1,),(1,0,2)\} \ , \quad x \in X_9 \cup X_{10} \ .$$

CHAPITRE III

THÉORÈME DE DIVISION NUMÉRIQUE UNIFORME PAR UN IDÉAL

Dans ce chapitre, on généralise et on précise le théorème classique de division par un idéal. Si p et m désignent des entiers, $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, et $\leqq_\alpha$ une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$ (ce qui implique que la relation $\leqq_\alpha$ est une relation de bon ordre (I,1.5)), ce théorème classique peut s'énoncer comme suit (1) :

<u>THÉORÈME</u>.- *Soit* $(f_i)_{1 \leqq i \leqq m}$ *une famille de séries convergentes non nulles*

$$f_i = \sum_{d \in \mathbb{N}^p} a_{id} X^d \quad , \quad f_i \in \mathbb{C}\{X_1,\dots,X_p\} \quad ,$$

et posons

$$d_i = \min_\alpha \{d \in \mathbb{N}^p : a_{id} \neq 0\} \quad , \quad 1 \leqq i \leqq m \quad ,$$

$$\Delta_i = d_i + \mathbb{N}^p - \bigcup_{1 \leqq j < i} (d_j + \mathbb{N}^p) \quad , \quad 1 \leqq i \leqq m \quad ,$$

et

$$\Delta_o = \mathbb{N}^p - \bigcup_{1 \leqq i \leqq p} (d_i + \mathbb{N}^p) \quad .$$

Alors pour toute série convergente g , $g \in \mathbb{C}\{X_1,\dots,X_p\}$, *il existe une famille unique de séries convergentes* $(g_i)_{0 \leqq i \leqq m}$

$$g_i = \sum_{d \in \mathbb{N}^p} b_{id} X^d \quad , \quad g_i \in \mathbb{C}\{X_1,\dots,X_p\} \quad ,$$

telle que

i) *pour tout* i , $1 \leqq i \leqq m$, *et tout* d , $d \in \mathbb{N}^p$, *tel que* $d + d_i \notin \Delta_i$ *on a*

$$b_{id} = 0 \quad ;$$

ii) *pour tout* d , $d \in \mathbb{N}^p$, *tel que* $d \notin \Delta_o$ *on a*

---

(1) Dans la littérature, on établit en général ce théorème pour des relations de bon ordre $\leqq_\alpha$ particulières.

$$b_{od} = 0 \ ;$$

iii) $g = \sum_{i=1}^{m} f_i g_i + g_o$.

En utilisant les notations introduites au chapitre II, (1.1), ce théorème peut s'énoncer de façon équivalente :

THÉORÈME.- *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, x *un point de* U , $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ *une famille d'éléments de* $\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$ *telle que pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, *le germe* f_{ix} *de* f_i *en* x *soit non nul et posons*

$$d_i = v_{\alpha;x}(f_i) \qquad , \ 1 \leq i \leq m \ ,$$

$$\Delta_i = d_i + \mathbb{N}^p - \bigcup_{1\leq j<i} (d_j + \mathbb{N}^p) \quad , \ 1 \leq i \leq m \ ,$$

et

$$\Delta_o = \mathbb{N}^p - \bigcup_{1\leq i\leq p} (d_i + \mathbb{N}^p) \quad .$$

Alors pour tout germe de fonction analytique g *en* x *il existe une famille unique* $(g_i)_{0\leq i\leq m}$ *de germes de fonctions analytiques en* x *telle que*

i) *pour tout* i , $1 \leq i \leq m$,

$$E_x(g_i) \subset -d_i + \Delta_i \qquad ;$$

ii) $E_x(g_o) \subset \Delta_o$;

iii) $g = \sum_{i=1}^{m} f_{ix}\, g_i + g_o$.

Pour démontrer ce théorème, on procède en général comme suit. On démontre d'abord qu'il existe un système fondamental de voisinages de x dans U formé de polydisques fermés K de centre x tels que pour tout g , $g \in B(K)$, il existe une famille unique $(g_i)_{o\leq i\leq m}$ d'éléments de $B(K)$ satisfaisant aux conditions (i), (ii) et (iii) et on conclut par passage à la limite inductive. Dans ce chapitre, on s'intéresse, conformément à l'esprit général de ce travail (développé en détail à l'introduction générale), à cette version du théorème de division "au-dessus d'un polydisque" (ou plus généralement "au-dessus d'un polycylindre compact").

Plus précisément, on dira qu'un polydisque fermé K de centre x contenu dans U (ou plus généralement un polycylindre compact pointé en x , autrement dit un couple formé d'un polycylindre compact K et d'un point x appartenant à l'intérieur de K) satisfait au théorème de division par $f=(f_1,\dots,f_m)$, si pour tout g , $g\in B(K)$, il existe une famille unique $(g_i)_{0\leq i\leq m}$ d'éléments de $B(K)$, satisfaisant aux conditions (i), (ii) et (iii) ci-dessus. On désignera alors par σ (resp. par r) l'application

$$\sigma : B(K) \longrightarrow B(K)^m$$

$$(\text{resp.}\quad r : B(K) \longrightarrow B(K)\quad)$$

définie par

$$\sigma(g) = (g_1,\dots,g_m)$$

$$(\text{resp.}\quad r(g) = g_o\ ) .$$

On démontre facilement que les applications σ et r sont des applications $\mathbb{C}$-linéaires continues. On s'intéressera plus particulièrement aux questions suivantes :

i) Expliciter des conditions suffisantes sur le polyrayon d'un polydisque fermé de centre x pour que ce polydisque satisfasse au théorème de division par f .

ii) Etudier la variation de ces conditions en fonction du point x .

iii) Trouver une majoration explicite de la norme de σ et de r en fonction du polyrayon.

iv) Etudier la variation de cette majoration en fonction du point x .

Le théorème de division est complété par la proposition suivante :

PROPOSITION.- *Si le polydisque fermé K de centre x satisfait au théorème de division par f , les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $M_{\alpha;J;x} \subset \{v_{\alpha;x}(f_1),\dots,v_{\alpha;x}(f_m)\}$,

où J désigne l'idéal cohérent de O_U engendré par $f_1,\dots,f_m$ (voir ch.II,1.2);

ii) *σ est une scission de $B(K;f)$ (autrement dit $B(K;f)\,\sigma\, B(K;f) = B(K;f)$).*

Cette proposition est le lien entre le théorème de division et l'axe principal de ce travail développé dans l'introduction générale.

Au §1, on étudie les propriétés algébriques des scissions, utiles dans la suite. Au §2, on introduit les notions qui permettent de s'affranchir du cadre des polydisques. La notion de polyrayon se scinde en deux, le polyrayon interne ρ' d'un polycylindre compact K pointé en x étant le polyrayon du plus grand polydisque de centre x contenu dans K et le polyrayon externe ρ'' étant celui du plus petit polydisque fermé de centre x contenant K. On introduit également les opérateurs élémentaires de $B(K)$ utiles par la suite. On démontre que si x est un point de $\mathbb{C}^p$ et si pour tout i, $1 \leqq i \leqq m$, f_i est un monôme $(X-x)^{d_i}$, alors tout polycylindre compact pointé en x satisfait au théorème de division par f. Au §3, on définit un opérateur $\nu_{f;K} : B(K) \longrightarrow B(K)$ dont l'inversibilité équivaut à la condition "K satisfait au théorème de division par f". On se place dans un cadre un peu plus général qui englobe des théorèmes de division "homogène" et qui nous permettra au chapitre IV de ramener le cas d'un sous-module à celui d'un idéal. Au §4, on étudie l'inversibilité de $\nu_{f;K}$. On démontre qu'il existe une partie V de $(\mathbb{R}_+^*)^p$ appartenant au filtre $F^{\circ}_{\leqq\alpha}$ (cf.I,5.1.3) telle que pour tout polydisque fermé de centre x et de polyrayon appartenant à V, $\nu_{f;K}$ soit inversible, ce qui implique que K satisfait au théorème de division par f (la condition pour un polycylindre compact pointé étant plus compliquée). Au §5, on expose quelques applications et on retrouve le théorème de division classique. On explicite également une majoration de la norme de σ et de r. Au §6, on étudie la variation de l'ensemble V ainsi que celle des majorations des normes de σ et de r, en fonction du point x. Enfin, au §7, en combinant les résultats du §6 et du chapitre II, on démontre le théorème principal de ce travail (énoncé dans l'introduction générale), dans le cas particulier où $n=1$.

§1.- Scissions

Dans la suite de ce travail on utilisera constamment la notion de "scission" d'un morphisme d'espaces de Banach. C'est un cas particulier de la notion de "scission" d'un morphisme dans une catégorie quelconque. Dans ce paragraphe, on étudiera quelques propriétés purement algébriques des "scissions" dans la catégorie des A-modules, où A est un anneau commutatif.

DÉFINITION 1.1.- *Soient* M *et* M' *deux objets d'une catégorie et* $u : M' \longrightarrow M$ *un morphisme de source* M' *et de but* M *. On appelle scission* (resp. *rétraction*, resp. *section*) *du morphisme* u *, un morphisme* $\sigma : M \longrightarrow M'$ *, de source* M *et de but* M' *, tel que* $u \circ \sigma \circ u = u$ (resp. $\sigma \circ u = \mathrm{id}_{M'}$, $u \circ \sigma = \mathrm{id}_M$) *. On dit que la scission* σ *du morphisme* u *est normale, si* u *est une scission du morphisme* σ *, c'est-à-dire si* $\sigma \circ u \circ \sigma = \sigma$ *. On appelle normalisé d'une scission* σ *du morphisme* u *le morphisme* $\sigma \circ u \circ \sigma$.

(1.1.1) Il est clair qu'une rétraction ou une section d'un morphisme est une scission normale de ce morphisme, que le normalisé d'une scission d'un morphisme est une scission normale de ce morphisme, et qu'une scission d'un morphisme est normale, si et seulement si, elle est égale à son normalisé.

(1.2) Soient A un anneau commutatif, M et M' deux A-modules, $u : M' \longrightarrow M$ un morphisme de A-modules et $\sigma : M \longrightarrow M'$ une scission de u dans la catégorie des A-modules (on dira A-scission ou scission A-linéaire). Alors $\sigma \circ u$ et $u \circ \sigma$ sont des projecteurs de M' et M respectivement et on a donc les décompositions en somme directe.

$$\text{(1.2.1)} \qquad \begin{aligned} M' &= M'_1 \oplus M'_2 \\ M'_1 &= \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(\sigma \circ u) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_{M'} - \sigma \circ u) \\ M'_2 &= \mathrm{Im}(\sigma \circ u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{M'} - \sigma \circ u) \end{aligned}$$

$$\text{(1.2.2)} \qquad \begin{aligned} M &= M_1 \oplus M_2 \\ M_1 &= \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u \circ \sigma) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M - u \circ \sigma) \\ M_2 &= \mathrm{Ker}(u \circ \sigma) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u \circ \sigma) \quad . \end{aligned}$$

Si en plus σ est une scission normale de u, on a

(1.2.3) $\qquad M'_2 = \mathrm{Im}(\sigma)$ et $M_2 = \mathrm{Ker}(\sigma)$.

PROPOSITION 1.3.- *Soient* A *un anneau commutatif,* M *et* M' *deux* A-*modules,* $u : M' \longrightarrow M$ *et* $\sigma : M \longrightarrow M'$ *des applications* A-*linéaires. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) σ *est une* A-*scission de* u ;

ii) $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u \circ \sigma) = \{0\}$;

iii) $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{M'} - \sigma \circ u) = M'$.

Démonstration. Si σ est une A-scission de u on a (ii) et (iii) (1.2.2) et (1.2.1). D'autre part, les égalités $u\sigma u - u = u \circ (\sigma u - \mathrm{id}_{M'}) = (u\sigma - \mathrm{id}_M) \circ u$ montrent immédiatement que (ii) ou (iii) implique (i).

PROPOSITION 1.4.- *Soient* A *un anneau commutatif,* M *et* M' *deux* A-*modules,* $u : M' \longrightarrow M$, $\delta : M' \longrightarrow M$, $\lambda : M \longrightarrow M'$ *des applications* A-*linéaires,* $v = u + \delta$ *et* $\nu = \mathrm{id}_M + \delta\lambda$.

a) *On a :*

i) $v(\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{M'} - \lambda u)) + \mathrm{Ker}(\lambda) \subset \mathrm{Im}(\nu) \subset v(\mathrm{Im}(\lambda)) + \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u\lambda)$;

ii) *si l'application* ν *est injective, pour tout* g , $g \in M$, *il existe au plus un couple* (g_0, g_1) , $g_0 \in \mathrm{Ker}(\lambda)$, $g_1 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{M'} - \lambda u)$ *tel que* $g = v(g_1) + g_0$;

iii) *si pour tout* g , $g \in M$, *il existe au plus un couple* (g_0, g_1) , $g_0 \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u\lambda)$, $g_1 \in \mathrm{Im}(\lambda)$, *tel que* $g = v(g_1) + g_0$, *l'application* ν *est injective.*

b) *Si l'application* u *est un* A-*scission de* λ *on a :*

i) *l'application* ν *est surjective, si et seulement si, pour tout* g , $g \in M$, *il existe un couple* (g_0, g_1) , $g_0 \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u\lambda)$, $g_1 \in \mathrm{Im}(\lambda)$, *tel que* $g = v(g_1) + g_0$;

ii) *l'application* ν *est injective, si et seulement si, pour tout* g , $g \in M$, *il existe au plus un couple* (g_0, g_1) , $g_0 \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u\lambda)$, $g_1 \in \mathrm{Im}(\lambda)$, *tel que* $g = v(g_1) + g_0$.

c) *Supposons que l'application* ν *soit inversible et posons* $\sigma = \lambda\nu^{-1}$. *Alors on a :*

i) $\mathrm{id}_M - v\sigma = (\mathrm{id}_M - u\lambda)\nu^{-1}$ *et* $\nu^{-1} = \mathrm{id}_M - \delta\sigma$;

ii) $\mathrm{Im}(\sigma) = \mathrm{Im}(\lambda)$ *et* $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - v\sigma) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u\lambda)$;

iii) v *est une* A-*scission de* σ , *si et seulement si* , u *est une* A-*scission de* λ ;

iv) *si* u *est une* A-*scission de* λ , *pour tout élément* g *de* M *si* (g_0,g_1) *désigne l'unique couple tel que* $g_0 \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u\lambda)$, $g_1 \in \mathrm{Im}(\lambda)$ *et* $g = v(g_1) + g_0$ (cf. à (b)), *on a*

$$\sigma(g) = g_1 \quad \textit{et} \quad (\mathrm{id}_M - v\sigma)\,(g) = g_0 \quad ;$$

v) σ *est une* A-*scission de* v , *si et seulement si,* $\mathrm{Im}(v) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u\lambda) = \{0\}$;

vi) *si* u *est une* A-*scission de* λ , *alors* σ *est une* A-*scission de* v , *si et seulement si,* $\mathrm{Im}(v) = v(\mathrm{Im}(\lambda))$;

vii) *si* λ *est une* A-*scission de* u , *alors* σ *est une* A-*scission de* v , *si et seulement si,* $\delta(\mathrm{Ker}(u)) \subset \nu(\mathrm{Im}(u))$.

<u>Démonstration</u>. Démontrons (a). Si $g \in v(\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{M'} - \lambda u)) + \mathrm{Ker}(\lambda)$, il existe un couple (g_0,g_1) , $g_0 \in \mathrm{Ker}(\lambda)$, $g_1 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{M'} - \lambda u)$, tel que $g = v(g_1) + g_0$, et si l'on pose $g' = u(g_1) + g_0$, on a

$$\nu(g') = u(g_1) + g_0 + \delta\lambda(u(g_1) + g_0) =$$
$$= u(g_1) + g_0 - \delta(\mathrm{id}_{M'} - \lambda u)(g_1) + \delta(g_1) + \delta\lambda(g_0) = v(g_1) + g_0 = g \ ,$$

donc $g \in \mathrm{Im}(\nu)$, ce qui prouve que

$$v(\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{M'} - \lambda u)) + \mathrm{Ker}(\lambda) \subset \mathrm{Im}(\nu) \quad .$$

Si g $\mathrm{Im}(\nu)$, il existe g' , $g' \in M$, tel que $g = \nu(g')$, c'est-à-dire que $g = g' + \delta\lambda(g')$, ou encore $g = v(\lambda(g')) + (\mathrm{id}_M - u\lambda)(g')$, donc

$$g \in v(\mathrm{Im}(\lambda)) + \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u\lambda) \ ,$$

ce qui démontre l'assertion (i). Pour démontrer l'assertion (ii), il suffit de démontrer que si l'application ν est injective et si $g_0 \in \mathrm{Ker}(\lambda)$, $g_1 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{M'} - \lambda u)$ et $v(g_1) + g_0 = 0$, alors $g_0 = 0$ et $g_1 = 0$. En effet, on remarque que comme $g_1 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{M'} - \lambda u)$, on a

$$\lambda u(g_1) = g_1 \quad ,$$

et comme $g_0 \in \mathrm{Ker}(\lambda)$ et $v(g_1) + g_0 = 0$, on a

$$\lambda v(g_1) = \lambda(v(g_1) + g_0) = 0 \quad ;$$

on a donc

$$\nu(\delta(g_1)) = \delta(g_1) + \delta\lambda v(g_1) - \delta\lambda u(g_1) = 0$$

et l'application ν étant injective on en déduit que $\delta(g_1) = 0$, d'où $v(g_1) = u(g_1)$, ce qui implique que $\lambda v(g_1) = \lambda u(g_1)$, et comme $\lambda v(g_1) = 0$ et $\lambda u(g_1) = g_1$, il en résulte que $g_1 = 0$, d'où $g_0 = 0$. Pour démontrer l'assertion (iii), soit g un élément de M et supposons que $\nu(g) = 0$. Alors on a

$g+\delta\lambda(g) = 0$, d'où $v(\lambda(g)) + (id_M - u\lambda)(g) = 0$. Or, si l'on pose $g_0 = (id_M - u\lambda)(g)$ et $g_1 = \lambda(g)$, on a $g_0 \in Im(id_M - u\lambda)$, g_1 $Im(\lambda)$ et $v(g_1) + g_0 = 0$. L'hypothèse implique donc que $g_0 = 0$ et $g_1 = 0$, c'est-à-dire que $g - u\lambda(g) = 0$ et $\lambda(g) = 0$, d'où $g = 0$.

Pour démontrer (b) on remarque que u étant une A-scission de λ on a $Ker(\lambda) = Im(id_M - u\lambda)$ et $Ker(id_{M'} - \lambda u) = Im(\lambda)$ (1.2). L'assertion (i) résulte donc de l'assertion (i) de (a), et l'assertion (ii) des assertions (ii) et (iii) de (a).

Il reste à démontrer (c). Pour démontrer l'assertion (i), on remarque que $id_M - v\sigma = id_M - (u+\delta)\lambda(id_M + \delta\lambda)^{-1} = (id_M + \delta\lambda - (u+\delta)\lambda)(id_M + \delta\lambda)^{-1} = (id_M - u\lambda)\nu^{-1}$, et que

$$\nu^{-1} = (id_M - u\lambda)\nu^{-1} + u\lambda\nu^{-1} = id_M - v\sigma + u\sigma = id_M - \delta\sigma \quad .$$

L'assertion (ii) résulte de la définition de σ et de (i). Pour démontrer l'assertion (iii), on remarque que v est une A-scission de σ , si et seulement si, $Ker(\sigma) + Ker(id_M - v\sigma) = M$ (1.3). Or, comme

$$\sigma = \lambda\nu^{-1} \quad \text{et} \quad id_M - v\sigma = (id_M - u\lambda)\nu^{-1} \quad ,$$

cela équivaut à $Ker\,\lambda + Ker(id_M - u\lambda) = M$, condition vérifiée, si et seulement si, u est une A-scission de λ (1.3). Pour démontrer l'assertion (iv) soit g un élément de M et posons

$$g_1 = \sigma(g) \quad \text{et} \quad g_0 = (id_M - v\sigma)(g) \quad .$$

Alors on a $g = v(g_1) + g_0$, et il résulte de l'assertion (ii) que $g_0 \in Im(id_M - u\lambda)$ et $g_1 \in Im(\lambda)$, ce qui, en vertu de (b), prouve l'assertion (iv). L'assertion (v) résulte de la proposition (1.3) et de l'assertion (ii). Si u est une A-scission de λ , il résulte de l'assertion (iv) que $(id_M - v\sigma)(v(Im(\lambda))) = \{0\}$, et si $Im(v) = v(Im(\lambda))$, on en déduit que σ est une A-scission de v . Réciproquement, si σ est une A-scission de v , on a $Im(v) = Im(v\sigma) = v(Im(\sigma))$ (1.2.2), et en vertu de l'assertion (ii), on en déduit que $Im(v) = v(Im(\lambda))$, ce qui démontre l'assertion (vi). Démontrons l'assertion (vii). En vertu de l'assertion (i), on a

$$v - v\sigma v = (id_M - v\sigma)v = (id_M - u\lambda)\nu^{-1}v \quad .$$

On en déduit que σ est une A-scission de v , si et seulement si ,

$$\nu^{-1}(u+\delta)(M') \subset Ker(id_M - u\lambda) \quad ,$$

ou encore

$$(u+\delta)(M') \subset \nu(Im(u)) \tag{1.4.1}$$

(1.2.2). D'autre part, comme d'après (1.2.1), on a $M' = Ker(u) \oplus Im(\lambda u)$, (1.4.1) équivaut à

$$(1.4.2)\qquad \begin{cases} (u+\delta)(\mathrm{Ker}(u)) \subset \nu(\mathrm{Im}(u)) \\ (u+\delta)(\mathrm{Im}(\lambda u)) \subset \nu(\mathrm{Im}(u)) \end{cases} ,$$

qui à son tour équivaut à

$$\delta(\mathrm{Ker}(u)) \subset \nu(\mathrm{Im}(u))$$

et

$$(1.4.3)\qquad (u+\delta)\lambda u(M') \subset \nu(u(M')) .$$

Mais comme

$$(u+\delta)\lambda u = u\lambda u + \delta\lambda u = (\mathrm{id}_M + \delta\lambda)u = \nu u ,$$

l'inclusion (1.4.3) est toujours vraie, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE 1.5.- *En gardant les notations de la proposition* 1.4 *, si* λ *est une* A-*scission normale de* u *, si* ν *est inversible et si l'on pose* $\sigma = \lambda\nu^{-1}$ *,* *les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) σ *est une* A-*scission normale de* u *;*

ii) σ *est une* A-*scission de* u *;*

iii) $\mathrm{Im}(\nu) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u\lambda) = \{0\}$;

iv) *pour tout* g , $g \in \mathrm{Im}(\nu)$ *, si* (g_0, g_1) *désigne l'unique couple tel que* $g_0 \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u\lambda)$, $g_1 \in \mathrm{Im}(\lambda)$ *et* $g = \nu(g_1) + g_0$ (*cf. proposition* (1.4),(b)), *on a* $g_0 = 0$;

v) *pour tout* g , $g \in \mathrm{Im}(\nu)$ *, il existe* g_1 *,* $g_1 \in \mathrm{Im}(\lambda)$ *, tel que* $g = \nu(g_1)$;

vi) $\delta(\mathrm{Ker}(u)) \subset \nu(\mathrm{Im}(u))$.

Démonstration. Comme λ est une A-scission normale de u , il résulte de (1.4), (c), (iii), que ν est une A-scission de σ , ce qui prouve l'équivalence des conditions (i) et (ii). L'équivalence des conditions (ii), (iii), (v) et (vi) résulte de (1.4), (c), (v), (vi) et (vii). L'équivalence des conditions (iv) et (v) est une conséquence directe de (1.4) (b).

LEMME 1.6.- *Soient* A *un anneau commutatif,* M , M' , M'' *des* A-*modules,* $u' : M' \longrightarrow M$, $u'' : M'' \longrightarrow M$, $\lambda' : M \longrightarrow M'$, $\lambda'' : M \longrightarrow M''$ *des applications* A-*linéaires,* $u : M' \oplus M'' \longrightarrow M$ *l'application* A-*linéaire définie par*

$$u(x', x'') = u'(x') + u''(x'') , \quad \textit{pour} \quad x' \in M' , \quad x'' \in M'' ,$$

et $\sigma : M \longrightarrow M' \oplus M''$ *l'application définie par*

$$\sigma = (\lambda', \lambda'' \circ (\mathrm{id}_M - u'\lambda')) .$$

Alors on a :

a) *si* λ' *et* λ'' *sont des* A-*scissions de* u' *et* u'' *respectivement, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $u'\lambda'$ *et* $u''\lambda''$ *commutent sur l'image de* u'' $((u'\lambda'u''\lambda'' - u''\lambda'' u'\lambda')\circ u'' = 0)$;

ii) σ *est une* A-*scission de* u ;

b) *si* u' *et* u'' *sont des* A-*scissions de* λ' *et* λ'' *respectivement, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $u'\lambda'$ *et* $u''\lambda''$ *commutent modulo le noyau de* λ' $(\lambda'\circ(u'\lambda'u''\lambda'' - u''\lambda'' u'\lambda') = 0)$;

ii) u *est une* A-*scission de* σ ;

iii) $\sigma\circ u\circ\tau = \tau$, *où* $\tau : M\oplus M \longrightarrow M'\oplus M''$ *désigne l'application* A-*linéaire définie par*

$$\tau = \lambda'\oplus(\lambda''\circ(id_M - u'\lambda')) \quad .$$

<u>Démonstration</u>. Démontrons (a). On suppose donc que $u'\lambda'u' = u'$ et $u''\lambda''u'' = u''$ et soit $(x',x'')\in M'\oplus M''$. Alors on a $u\sigma u(x',x'') = u\sigma(u'(x') + u''(x'')) =$
$= u(\lambda'u'(x') + \lambda'u''(x'') , \lambda''u'(x') + \lambda''u''(x'') - \lambda''u'\lambda'u'(x') - \lambda''u'\lambda'u''(x'')) =$
$= u(\lambda'u'(x') + \lambda'u''(x'') , \lambda''u''(x'') - \lambda''u'\lambda'u''(x'')) =$
$= u'\lambda'u'(x') + u'\lambda'u''(x'') + u''\lambda''u''(x'') - u''\lambda''u'\lambda'u''(x'') =$
$= u'(x') + u''(x'') + u'\lambda'u''(x'') - u''\lambda''u'\lambda'u''(x'')$. On en déduit que σ est une A-scission de u , si et seulement si, $u'\lambda'u'' - u''\lambda''u'\lambda'u'' = 0$. Or, $u'\lambda'u'' - u''\lambda''u'\lambda'u'' = (u'\lambda'u''\lambda'' - u''\lambda''u'\lambda')\circ u''$, ce qui démontre l'assertion (a).

Démontrons (b). On suppose donc que $\lambda'u'\lambda' = \lambda'$ et $\lambda''u''\lambda'' = \lambda''$. Soient $i : M\longrightarrow M\oplus M$, $i_1 : M\longrightarrow M\oplus M$, $i_2 : M\longrightarrow M\oplus M$ les applications A-linéaires définies par $i(x) = (x,x)$, $i_1(x) = (x,0)$, $i_2(x) = (0,x)$, pour $x\in M$. Alors on a $\tau\circ i = \sigma$, $\tau\circ i_1 = (\lambda',0)$, $\tau\circ i_2 = (0,\lambda''\circ(id_M - u'\lambda'))$, la condition (ii) équivaut à

$$\sigma\circ u\circ\tau\circ i = \tau\circ i$$

et la condition (iii) équivaut à

$$\sigma\circ u\circ\tau\circ i_1 = \tau\circ i_1 \quad \text{et} \quad \sigma\circ u\circ\tau\circ i_2 = \tau\circ i_2 \quad .$$

Or, on a

$$\sigma\circ u\circ\tau\circ i_1 = \sigma u'\lambda' = (\lambda'u'\lambda', \lambda''u'\lambda' - \lambda''u'\lambda'u'\lambda') = (\lambda',0) = \tau\circ i_1$$

On déduit que la condition (iii) équivaut à

$$\sigma\circ u\circ\tau\circ i_2 = \tau\circ i_2$$

et comme $i = i_1 + i_2$, il en est de même pour la condition (ii).

D'autre part,

$\sigma \circ u \circ \tau \circ i_2 = \sigma u''\lambda''(id_M - u'\lambda') =$
$=(\lambda'u''\lambda''(id_M - u'\lambda'),\ \lambda''(id_M - u'\lambda')\ u''\lambda''(id_M - u'\lambda') =$
$=(\lambda'u''\lambda'' - \lambda'u''\lambda''u'\lambda',\ \lambda''u''\lambda'' - \lambda''u''\lambda''u'\lambda' - \lambda''u'\lambda'u''\lambda'' + \lambda''u'\lambda'\ u''\lambda''u'\lambda') =$
$=(\lambda'(u'\lambda'u''\lambda'' - u''\lambda''u'\lambda'),\ \lambda''(id_M - u'\lambda') - \lambda''u'\lambda'(u'\lambda'u''\lambda'' - u''\lambda''\ u'\lambda'))$,

donc $\sigma \circ u \circ \tau \circ i_2 = \tau \circ i_2$ équivaut à $\lambda'(u'\lambda'u''\lambda'' - u''\lambda''u'\lambda') = 0$, ce qui démontre l'assertion (b).

PROPOSITION 1.7.- *En gardant les notations du lemme 1.6, si λ' et λ'' sont des A-scissions normales de u' et u'' respectivement et si $u'\lambda'$ et $u''\lambda''$ commutent entre eux, alors :*

i) σ *est une A-scission normale de* u ;

ii) $Im(\sigma) = Im(\lambda') \oplus \lambda''(Im(id_M - u'\lambda'))$;

iii) $Im(id_M - u \circ \sigma) = Im(id_M - u'\lambda') \cap Im(id_M - u''\lambda'')$.

Démonstration. L'assertion (i) résulte immédiatement du lemme 1.6. En gardant les notations de la démonstration de ce lemme, l'égalité $\sigma = \tau \circ i$ implique que $Im(\sigma) \subset Im(\tau)$ et l'égalité $\sigma \circ u \circ \tau = \tau$ (1.6, b, iii) implique que $Im(\tau) \subset Im(\sigma)$, donc $Im(\sigma) = Im(\tau) = Im(\lambda') \oplus Im(\lambda'' \circ (id_M - u'\lambda')) =$ $= Im(\lambda') \oplus \lambda''(Im(id_M - u'\lambda'))$, ce qui démontre l'assertion (ii). Pour démontrer l'assertion (iii) on remarque que $Im(id_M - u\sigma) = Ker(\sigma)$ (1.2.3) et que $Ker(\sigma) = Ker(\lambda') \cap Ker(\lambda'' \circ (id_M - u'\lambda')) = Ker(\lambda') \cap Ker(\lambda'') =$ $= Im(id_M - u'\lambda') \cap Im(id_M - u''\lambda'')$ (1.2.3).

COROLLAIRE 1.8.- *Soient* A *un anneau commutatif,* M *un A-module,* r *un entier,* $r \in \mathbb{N}^*$, $(M_i)_{1 \leq i \leq r}$ *une famille de A-modules, pour tout* i , $1 \leq i \leq r$, $u_i : M_i \longrightarrow M$ *une application A-linéaire,* $\lambda_i : M \longrightarrow M_i$ *une A-scission normale de* u_i , $q_i = u_i \circ \lambda_i$ *et* $u : \bigoplus_{i=1}^{r} M_i \longrightarrow M$ *l'application A-linéaire définie par* $u(x_1,\ldots,x_r) = \sum_{i=1}^{r} u_i(x_i)$, *pour* $(x_1,\ldots,x_r) \in \bigoplus_{i=1}^{r} M_i$. *On suppose que pour tout* i *et* j , $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r$, $q_i \circ q_j = q_j \circ q_i$ *et pour tout* i , $1 \leq i \leq r$, *on pose*

$$\sigma_i = \lambda_i \circ \prod_{j=1}^{i-1} (id_M - q_j) .$$

Soit $\sigma : M \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} M_i$ *l'application A-linéaire définie par* $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_r)$. *Alors*

i) σ *est une A-scission normale de* u ;

ii) $\mathrm{Im}(\sigma) = \bigoplus_{i=1}^{r} \lambda_i\Big(\bigcap_{1\leq j<i} \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - q_j)\Big)$;

iii) $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u\circ\sigma) = \bigcap_{1\leq i\leq r} \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - q_i)$.

Démonstration. On remarque d'abord qu'on a l'identité suivante dans $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$:

$$\prod_{i=1}^{n}(1-X_i) = 1 - \sum_{i=1}^{n} X_i \prod_{j=1}^{i-1}(1-X_j) \quad . \tag{1.8.1}$$

On la démontre par récurrence sur n . Pour $n=0,1$ elle est évidente. Supposons-la établie pour $n-1$ et démontrons-la pour n . En effet,

$$\prod_{i=1}^{n}(1-X_i) = \prod_{i=1}^{n-1}(1-X_i) - X_n\prod_{j=1}^{n-1}(1-X_j) \quad ,$$

donc par hypothèse de récurrence

$$\prod_{i=1}^{n}(1-X_i) = 1-\sum_{i=1}^{n-1} X_i \prod_{j=1}^{i-1}(1-X_j) - X_n\prod_{j=1}^{n-1}(1-X_j) = 1-\sum_{i=1}^{n} X_i\prod_{j=1}^{i-1}(1-X_j) \quad .$$

Démontrons maintenant le corollaire. On raisonne par récurrence sur r . Pour $r=1$ le corollaire est évident (pour $r=2$ c'est la proposition (1.7)). Supposons-le donc établi pour $r-1$ et démontrons-le pour r . Soient $M' = \bigoplus_{i=1}^{r-1} M_i$, $u' : M' \longrightarrow M$ l'application A-linéaire définie par

$$u'(x_1,\ldots,x_{r-1}) = \sum_{i=1}^{r-1} u_i(x_i) \text{ , pour } (x_1,\ldots,x_{r-1})\in M' \quad , \quad \sigma' = (\sigma_1,\ldots,\sigma_{r-1}) \quad .$$

Par hypothèse de récurrence σ' est une A-scission normale de u' ,

$$\mathrm{Im}(\sigma') = \bigoplus_{i=1}^{r-1}\lambda_i\Big(\bigcap_{1\leq j<i}\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - q_j)\Big) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u'\sigma') = \bigcap_{1\leq i\leq r-1}\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - q_i) \quad .$$

Démontrons d'abord que $\sigma = (\sigma', \lambda_r\circ(\mathrm{id}_M - u'\sigma'))$. Pour cela il suffit de démontrer que $\sigma_r = \lambda_r\circ(\mathrm{id}_M - u'\sigma')$. En effet,

$$\lambda_r\circ(\mathrm{id}_M - u'\sigma') = \lambda_r\circ\Big(\mathrm{id}_M - \sum_{i=1}^{r-1} u_i\sigma_i\Big) = \lambda_r\circ\Big(\mathrm{id}_M - \sum_{i=1}^{i-1} q_i\prod_{j=1}^{i-1}(\mathrm{id}_M - q_j)\Big) =$$

$$= \lambda_r\circ\prod_{i=1}^{r-1}(\mathrm{id}_M - q_i) = \sigma_r$$

(car les q_i commutant entre eux, on peut appliquer l'identité (1.8.1)) .D'autre part, comme $u'\sigma' = \sum_{i=1}^{r-1} q_i\circ\prod_{j=1}^{i-1}(\mathrm{id}_M - q_j)$ et q_r commutent (car les q_i commutent entre eux), on déduit de la proposition 1.7 que σ est une A-scission normale de u , que

$$\mathrm{Im}(\sigma) = \mathrm{Im}(\sigma') \oplus \lambda_r(\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u'\sigma')) = \bigoplus_{i=1}^{r} \lambda_i(\bigcap_{1\leq j<i} (\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - q_j))$$

et que

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u\sigma) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u'\sigma') \cap \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u_r\ \lambda_r) = \bigcap_{1\leq i\leq r} \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - q_i) \quad ,$$

ce qui démontre le corollaire.

PROPOSITION 1.9.- *Soient* A *un anneau commutatif,* M , M' , M'' *des* A-*modules,* $u' : M' \longrightarrow M$, $u'' : M'' \longrightarrow M$, $v : M' \longrightarrow M''$, $\lambda' : M \longrightarrow M'$ *et* $\lambda'' : M \longrightarrow M''$ *des applications* A-*linéaires telles que* $u' = u'' \circ v$ *et* $\lambda'' = v \circ \lambda'$. *Alors on a*

a) *si* λ'' *est une* A-*scission de* u'' , λ' *est une* A-*scission de* u';

b) *si* λ' *est une* A-*scission de* u' *et si* $\mathrm{Im}(u'') \subset \mathrm{Im}(u')$ *alors* λ'' *est une* A-*scission de* u'';

c) *si* u' *est une* A-*scission de* λ' , u'' *est une* A-*scission de* λ'' ;

d) *si* u'' *est une* A-*scission de* λ'' *et si* $\mathrm{Ker}(\lambda'') \subset \mathrm{Ker}(\lambda')$ *alors* u' *est une* A-*scission de* λ' .

Démonstration. Comme $u' = u''v$ et $\lambda'' = v\lambda'$, on a , d'une part,

$$u'\lambda' = u''v\lambda' = u''\lambda'' \ ,$$

et d'autre part,

$$\mathrm{Im}(u') \subset \mathrm{Im}(u'')$$

et

$$\mathrm{Ker}(\lambda') \subset \mathrm{Ker}(\lambda'') \ .$$

Or, en vertu de la proposition 1.3, pour que λ' (resp. λ'') soit une A-scission de u' (resp. u'') , il faut et il suffit que

$$\mathrm{Im}(u') \cap \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u'\lambda') = \{0\}$$

$$(\text{resp. } \mathrm{Im}(u'') \cap \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - u''\lambda'') = \{0\} \ ) \ ,$$

ce qui démontre les assertions (a) et (b). De même, en vertu de la proposition 1.3, pour que u' (resp. u'') soit une A-scission de λ' (resp. λ''), il faut et il suffit que

$$\mathrm{Ker}(\lambda') + \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M - u'\lambda') = M$$

$$(\text{resp. } \mathrm{Ker}(\lambda'') + \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M - u''\lambda'') = M \ ) \ ,$$

ce qui démontre les assertions (c) et (d) .

§2.- Opérateurs élémentaires

(2.0) Soit p un entier, $p \in \mathbb{N}$. On rappelle (chapitre O) qu'on appelle polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ une partie $K = K_1 \times \ldots \times K_p$ de $\mathbb{C}^p$, où pour tout i, $1 \leq i \leq p$, K_i est un compact convexe d'intérieur non vide de $\mathbb{C}$ et qu'on désigne par $B(K)$ l'algèbre de Banach normée des fonctions continues sur K et analytiques sur $\mathring{K}$, la norme de cette algèbre étant définie par

$$\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)| \quad , \text{ pour } f \in B(K) \quad .$$

Alors $B(K)$ est l'adhérence de l'image de $\Gamma(K, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$ dans l'algèbre de Banach $C(K)$ des fonctions continues sur K.

Soient p' et p'' des entiers, $p' \in \mathbb{N}$, $p'' \in \mathbb{N}$, et K' et K'' des polycylindres compacts de $\mathbb{C}^{p'}$ et $\mathbb{C}^{p''}$ respectivement. Alors $K' \times K''$ est un polycylindre compact de $\mathbb{C}^{p'+p''}$ et on a

$$(2.0.1) \qquad B(K' \times K'') = B(K') \hat{\otimes}_\varepsilon B(K'')$$

([7], §5, n°1, proposition 2, p.40).

(On rappelle que si E et F désignent deux espaces de Banach normés, on définit une norme $\|\cdot\|_\varepsilon$ sur $E \otimes_{\mathbb{C}} F$ par

$$\|t\|_\varepsilon = \sup_{\xi \in B_{E^*}, \eta \in B_{F^*}} |(\xi \otimes \eta)(t)| \quad , \text{ pour } t \in E \otimes_{\mathbb{C}} F \quad ,$$

où B_{E^*} (resp. B_{F^*}) désigne la boule unité de l'espace de Banach normé E^* (resp. F^*) dual topologique de E (resp. F), et on note $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ le complété de $E \otimes_{\mathbb{C}} F$ pour cette norme. Si $u : E' \longrightarrow E$ et $v : F' \longrightarrow F$ désignent deux morphismes d'espaces de Banach normés, l'application

$$u \otimes v : E' \otimes_{\mathbb{C}} F' \longrightarrow E \otimes_{\mathbb{C}} F$$

se prolonge d'une façon univoque à une application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$u \hat{\otimes}_\varepsilon v : E' \hat{\otimes}_\varepsilon F' \longrightarrow E \hat{\otimes}_\varepsilon F \quad ,$$

on a

$$(2.0.2) \qquad \|u \hat{\otimes}_\varepsilon v\| = \|u\| \cdot \|v\| \quad ,$$

et on définit ainsi un bifoncteur de la catégorie des espaces de Banach normés dans elle-même (cf.[13] 1.3, p.12-15)).

Enfin, on rappelle que si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ est un point de $\mathbb{C}^p$ et $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_p)$ un élément de $(\mathbb{R}_+^*)^p$, on appelle polydisque fermé de centre x et de polyrayon ρ, et on désigne par $\bar{D}(x;\rho)$, la partie de $\mathbb{C}^p$ définie par

$$\bar{D}(x;\rho) = \{(y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{C}^p : \forall i,\ 1 \leq i \leq p\ ,\ |y_i - x_i| \leq \rho_i\} \quad ,$$

et il est clair que $\bar{D}(x;\rho)$ est un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$.

(2.1) Soient p un entier, $p \in \mathbb{N}$, $K = K_1 \times \ldots \times K_p$ un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ et $x = (x_1,\ldots,x_p)$ un point de $\mathbb{C}^p$ tel que $x \in \mathring{K}$. On désigne par $\rho'(K;x)$ (resp. $\rho''(K;x)$) (ou plus simplement ρ' (resp. ρ'') quand aucune confusion n'en résulte) l'élément $(\rho_1'(K;x),\ldots,\rho_p'(K;x))$ (resp. $(\rho_1''(K;x),\ldots,(\rho_p''(K;x)))$ de $(\mathbb{R}_+^*)^p$ défini par

$$\rho_i'(K;x) = d(x_i,\partial K_i) = \inf_{z \in \partial K_i} |x_i - z| \quad , \text{ pour } \quad 1 \leq i \leq p$$

$$(\text{resp. } \rho_i''(K;x) = \sup_{z \in \partial K_i} |x_i - z| \quad , \text{ pour } \quad 1 \leq i \leq p) \quad ,$$

où pour tout i , $1 \leq i \leq p$, ∂K_i désigne le bord de K_i . Pour tout i , $1 \leq i \leq p$, on a

$$\rho_i'(K;x) \leq \rho_i''(K;x) \quad ,$$

et $\rho'(K;x) = \rho''(K;x)$, si et seulement si, K est un polydisque fermé de centre x et de polyrayon $\rho = \rho'(K;x) = \rho''(K;x)$.

On désigne par $e(K;x)$ (ou plus simplement par e quand aucune confusion n'en résulte), et on appelle excentricité du polycylindre K par rapport à x , le nombre réel

$$e(K;x) = \sup_{1 \leq i \leq p} (\rho_i''(K;x)/\rho_i'(K;x)) \quad ,$$

et on a

$$e(K;x) \geq 1 \quad ,$$

et $e(K;x) = 1$, si et seulement si, K est un polydisque fermé de centre x .

(2.2) Soient K une partie compacte convexe d'intérieur non vide de $\mathbb{C}$ et x un point de $\mathbb{C}$ tel que $x \in \mathring{K}$. On désigne par $\mu_{K;x}$ l'application

$$\mu_{K;x} : B(K) \longrightarrow B(K)$$

définie par

$$(\mu_{K;x}(f))(z) = (z-x)f(z) \quad , \text{ pour } \quad f \in B(K) \quad \text{et} \quad z \in K$$

(multiplication par $z-x$ dans $B(K)$) . Il est clair que $\mu_{K;x}$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire continue et que

(2.2.1) $$\|\mu_{K;x}\|_K = \rho''(K;x) \quad .$$

Soit f une fonction, $f \in B(K)$. On considère la fonction $g : K - \{x\} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$, pour $z \in K - \{x\}$. Comme la limite de g quand z tend vers x existe (car x étant à l'intérieur de K , f est analytique en ce point et cette limite est égale à $f'(x)$) , g se prolonge à une fonction continue sur K qui est analytique sur $\overset{\circ}{K}$ (elle l'est par définition sur $\overset{\circ}{K}-\{x\}$ donc aussi sur $\overset{\circ}{K}$ car elle est continue) qu'on désigne par $\tau_{K;x}(f)$, et qui est donc un élément de $B(K)$. On vérifie immédiatement que

$$\tau_{K;x} : B(K) \longrightarrow B(K)$$

est une application $\mathbb{C}$-linéaire continue, que

(2.2.2) $$\|\tau_{K;x}\|_K \leq 2/\rho'(K;x)$$

(principe du maximum), et que

(2.2.3) $$\tau_{K;x} \circ \mu_{K;x} = \mathrm{id}_{B(K)} \quad .$$

Enfin, on désigne par $\alpha_{K;x}$ l'application

$$\alpha_{K;x} : B(K) \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par

$$\alpha_{K;x}(f) = f(x) \ , \text{ pour } f \in B(K) \quad .$$

Alors $\alpha_{K;x}$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire continue,

(2.2.4) $$\|\alpha_{K;x}\|_K = 1 \quad ,$$

et

(2.2.5) $$\alpha_{K;x} \circ \mu_{K;x} = 0 \quad .$$

(2.3) Soient p un entier, $p \in \mathbb{N}$, $K = K_1 \times \ldots \times K_p$ un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ et $x = (x_1,\ldots,x_p)$ un point de $\mathbb{C}^p$ tel que $x \in \overset{\circ}{K}$. Pour tout i , $1 \leq i \leq p$, on désigne par $\mu_{i;K;x}$ (resp. $\tau_{i;K;x}$) (ou plus simplement par μ_i (resp. τ_i) quand aucune confusion n'en résulte) l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\mu_{i;K;x} : B(K) \longrightarrow B(K)$$
$$(\text{resp. } \tau_{i;K;x} : B(K) \longrightarrow B(K))$$

définie par

$$\mu_{i;K;x} = \mathrm{id}_{B(K_1)} \hat{\otimes}_\varepsilon \ldots \hat{\otimes}_\varepsilon \mathrm{id}_{B(K_{i-1})} \hat{\otimes}_\varepsilon \mu_{K_i;x_i} \hat{\otimes}_\varepsilon \mathrm{id}_{B(K_{i+1})} \hat{\otimes}_\varepsilon \ldots \hat{\otimes}_\varepsilon \mathrm{id}_{B(K_p)}$$

$$(\text{resp. } \tau_{i;K;x} = \mathrm{id}_{B(K_1)} \hat{\otimes}_\varepsilon \ldots \hat{\otimes}_\varepsilon \mathrm{id}_{B(K_{i-1})} \hat{\otimes}_\varepsilon \tau_{K_i;x_i} \hat{\otimes}_\varepsilon \mathrm{id}_{B(K_{i+1})} \hat{\otimes}_\varepsilon \ldots \hat{\otimes}_\varepsilon \mathrm{id}_{B(K_p)}) \ ,$$

et il résulte de (2.0.2), (2.2.1) et (2.2.2) que

(2.3.1) $$\|\mu_i\|_K = \rho_i''(K;x)$$

et

(2.3.2) $\|\tau_i\|_K \leq 2/\rho_i'(K;x))$.

D'autre part, on vérifie immédiatement que pour tout i et j , $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq p$ on a

(2.3.3) $\mu_i \mu_j = \mu_j \mu_i$ et $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$

et si $i \neq j$, on a

(2.3.4) $\mu_i \tau_j = \tau_j \mu_i$,

et il résulte de (2.2.3) que pour tout i , $1 \leq i \leq p$, on a

(2.3.5) $\tau_i \mu_i = \mathrm{id}_{B(K)}$.

(Les égalités (2.3.3), (2.3.4) et (2.3.5) montrent que la donnée de $(\mu_i)_{1\leq i\leq p}$ et $(\tau_i)_{1\leq i\leq p}$ définit ce qu'on appelle une structure d'algèbre de fermions sur $B(K)$) .

Enfin, on désigne par $\alpha_{K;x}$ (ou plus simplement par α quand aucune confusion n'en résulte) l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\alpha_{K;x} : B(K) \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par

$$\alpha_{K;x} = \alpha_{K_1;x_1} \hat{\otimes}_\varepsilon \cdots \hat{\otimes}_\varepsilon \alpha_{K_p;x_p}$$

($\alpha(f) = f(x)$, pour $f \in B(K)$) , et il résulte de (2.0.2) et (2.2.4) que

(2.3.6) $\|\alpha\|_K = 1$

et de (2.2.5) que pour tout i , $1 \leq i \leq p$, on a

(2.3.7) $\alpha \mu_i = 0$.

(2.4) Soit $d = (d_1,\ldots,d_p)$, $d \in \mathbb{N}^p$. Comme les μ_i (resp. les τ_i) commutent entre eux (2.3.3), l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue composée

$$\mu^d_{K;x} : B(K) \longrightarrow B(K) \ , \ \mu^d_{K;x} = \prod_{i=1}^{p} \mu^{d_i}_{i;K;x}$$

$$(\text{resp. } \tau^d_{K;x} : B(K) \longrightarrow B(K) \ , \ \tau^d_{K;x} = \prod_{i=1}^{p} \tau^{d_i}_{i;K;x})$$

(qu'on notera plus simplement μ^d (resp. τ^d) quand aucune confusion n'en résulte) est bien définie. Il résulte de (2.3.1) et (2.3.2) qu'on a

(2.4.1) $\|\mu^d\|_K \leq \rho''^d(K;x)$

et

(2.4.2) $\|\tau^d\|_K \leq 2^{|d|}/\rho'^d(K;x)$, où $\rho''^{d}(K;x) = \prod_{i=1}^{p} \rho''^{d_i}_i(K;x)$, $\rho'^{d}(K;x) = \prod_{i=1}^{p} \rho'^{d_i}_i(K;x)$ et $|d| = \sum_{i=1}^{p} d_i$ (cf. chapitre 0), et de (2.3.4) et (2.3.5) qu'on a

(2.4.3) $\qquad \tau^d \circ \mu^d = id_{B(K)}$.

D'autre part, on désigne par $q_{d;K;x}$ (ou plus simplement par q_d quand aucune confusion n'en résulte) l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$q_{d;K;x} : B(K) \longrightarrow B(K)$$

définie par

$$q_{d;K;x} = \mu^d_{K;x} \circ \tau^d_{K;x} \quad .$$

Il résulte de (2.4.1) et (2.4.2) qu'on a

(2.4.4) $\qquad ||q_d||_K \leq 2^{|d|} \rho''^{d}(K;x)/\rho'^{d}(K;x) \leq 2^{|d|} e^{|d|}(K;x)$,

et en particulier si K est un polydisque fermé de centre x , on a

(2.4.5) $\qquad ||q_d||_K \leq 2^{|d|}$.

Soit $d' = (d'_1,\ldots,d'_p)$, $d' \in \mathbb{N}^p$. On a

(2.4.6) $\qquad \mu^d\mu^{d'} = \mu^{d'}\mu^d = \mu^{d+d'}$

et

(2.4.7) $\qquad \tau^d\tau^{d'} = \tau^{d'}\tau^d = \tau^{d+d'}$.

D'autre part, démontrons qu'on a

(2.4.8) $\qquad q_d q_{d'} = q_{d'} q_d = q_{\sup\{d,d'\}}$,

la borne supérieure étant pour la relation d'ordre produit $\leq$ sur $\mathbb{N}^p$ (cf. chapitre 0). En effet, on a

$$q_d q_{d'} = \mu^d\tau^d\mu^{d'}\tau^{d'} = \mu_1^{d_1}\ldots\mu_p^{d_p}\tau_1^{d_1}\ldots\tau_p^{d_p}\mu_1^{d'_1}\ldots\mu_p^{d'_p}\tau_1^{d'_1}\ldots\tau_p^{d'_p} \quad .$$

Il résulte donc de (2.3.3) et (2.3.4) que

$$q_d q_{d'} = \mu_1^{d_1}\tau_1^{d_1}\mu_1^{d'_1}\tau_1^{d'_1}\ldots\mu_p^{d_p}\tau_p^{d_p}\mu_p^{d'_p}\tau_p^{d'_p} \quad .$$

Il suffit donc de démontrer que pour tout i , $1 \leq i \leq p$, on a

$$\mu_i^{d_i}\tau_i^{d_i}\mu_i^{d'_i}\tau_i^{d'_i} = \mu_i^{\sup\{d_i,d'_i\}}\tau_i^{\sup\{d_i,d'_i\}} \quad .$$

Pour cela, supposons par exemple que $d_i \leq d'_i$. Alors on a

$$\mu_i^{d_i}\tau_i^{d_i}\mu_i^{d'_i}\tau_i^{d'_i} = \mu_i^{d_i}\tau_i^{d_i}\mu_i^{d_i}\mu_i^{d'_i-d_i}\tau_i^{d'_i} = \mu_i^{d_i}\mu_i^{d'_i-d_i}\tau_i^{d'_i} = \mu_i^{d'_i}\tau_i^{d'_i} \quad .$$

(2.3.5), ce qu'il fallait démontrer. Enfin, on démontre d'une façon analogue qu'on a

(2.4.9) $$\tau^d\mu^{d'} = \tau^{d-\inf\{d,d'\}}\mu^{d'-\inf\{d,d'\}} = \mu^{d'-\inf\{d,d'\}}\tau^{d-\inf\{d,d'\}} \quad .$$

On désigne par $\alpha_{d;K;x}$ (ou plus simplement par α_d quand aucune confusion n'en résulte) l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\alpha_{d;K;x} : B(K) \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par

$$\alpha_{d;K;x} = \alpha_{K;x} \circ \tau^d_{K;x} \quad .$$

Il résulte de (2.3.6) et (2.4.2) qu'on a

(2.4.10) $$\|\alpha_d\|_K \leq 2^{|d|}/\rho'^{d}(K;x)$$

de (2.4.7) qu'on a

(2.4.11) $$\alpha_d\tau^{d'} = \alpha_{d+d'} \quad ,$$

de (2.4.9) et (2.3.7) qu'on a

(2.4.12) $$\alpha_d\mu^{d'} = \begin{cases} \alpha_{d-d'} & \text{si} \quad d' \leq d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ,$$

de (2.4.11) et (2.4.12) qu'on a

(2.4.13) $$\alpha_d \, q_{d'} = \begin{cases} \alpha_d & \text{si} \quad d' \leq d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ,$$

et de (2.4.13) qu'on a

(2.4.14) $$\alpha_d \circ (\mathrm{id}_{B(K)} - q_{d'}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad d' \leq d \\ \alpha_d & \text{sinon} \end{cases} \quad .$$

(2.5) Si K' est un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ contenu dans K et si f est un élément de $B(K)$, alors $f|K'$ est un élément de $B(K')$. On désigne par $r_{K';K}$ l'application

$$r_{K',K} : B(K) \longrightarrow B(K')$$

définie par

$$r_{K',K}(f) = f|K' \quad , \text{pour} \quad f \in B(K) \quad ,$$

et on vérifie immédiatement que $r_{K,K'}$ est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de Banach, que

(2.5.1) $$\|r_{K',K}\|_{K',K} \leq 1 \quad ,$$

et que si K'' est un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ contenu dans K' , on a $r_{K'',K'} \circ r_{K',K} = r_{K'',K}$. On en déduit que si l'on considère un système fondamental de voisinages de x , $(K_i)_{i\in I}$, formé par des polycylindres compacts, on a un système inductif

$$((B(K_i))_{i\in I} , (r_{K_i,K_j})_{K_i\subset K_j})$$

de $\mathbb{C}$-algèbres, et on vérifie que

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p,x} = \varinjlim B(K_i) \quad .$$

On désignera par $r_{K,x}$ l'application canonique

$$r_{K,x} : B(K) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p,x} \quad ,$$

qui n'est autre que l'application qui associe à une fonction f de $B(K)$ son germe en x .

D'autre part, on vérifie immédiatement que si K' est un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ contenu dans K et tel que $x \in \overset{\circ}{K'}$, on a

(2.5.2) $$r_{K',K}\,\mu^d_{K;x} = \mu^d_{K';x}\,r_{K',K} \quad ,$$

(2.5.3) $$r_{K',K}\,\tau^d_{K;x} = \tau^d_{K';x}\,r_{K',K} \quad ,$$

(2.5.4) $$r_{K',K}\,q_{d;K;x} = q_{d;K;x}\,r_{K',K} \quad ,$$

(2.5.5) $$\alpha_{d;K;x} = \alpha_{d;K';x}\,r_{K',K} \quad .$$

On pose

$$\mu^d_x = \varinjlim \mu^d_{K;x} \quad ,$$

$$\tau^d_x = \varinjlim \tau^d_{K;x} \quad ,$$

$$q_{d;x} = \varinjlim q_{d;K;x} \quad ,$$

$$\alpha_{d;x} = \varinjlim \alpha_{d;K;x}$$

(les limites inductives étant prises sur un système fondamental de voisinages de x formé par des polycylindres de $\mathbb{C}^p$, ces limites étant indépendantes du choix d'un tel système). Si l'on identifie $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p,x}$ à l'anneau des séries convergentes $\mathbb{C}\{X\} = \mathbb{C}\{X_1,\ldots,X_p\}$ en associant à un germe de fonction analytique f en x sa série de Taylor $F = \sum_{d\in\mathbb{N}^p} \frac{1}{d!} \frac{\partial^{|d|}f}{\partial X^d}(x)\, X^d$ en x , ou inversement à une série convergente $F = \sum_{d\in\mathbb{N}^p} a_d X^d$ le germe de fonction analytique f en x définie au voisinage de x par $f(y) = \sum_{d\in\mathbb{N}^p} a_d(y-x)^d$, on vérifie facilement que μ_x^d est la multiplication par X^d et si $F = \sum_{d'\in\mathbb{N}^p} a_{d'}X^{d'}$ est une série convergente, on a

(2.5.6) $$\mu_x^d(F) = \sum_{d'\in\mathbb{N}^p} a_{d'} X^{d'+d} = X^d.F \quad ,$$

(2.5.7) $$\tau_x^d(F) = \sum_{d'\geq d} a_{d'}X^{d'-d} \quad ,$$

(2.5.8) $$q_{d;x}(F) = \sum_{d'\geq d} a_{d'}X^{d'} \quad ,$$

et

(2.5.9) $$\alpha_{d;x}(F) = a_d = \frac{1}{d!}\frac{\partial^{|d|}f}{\partial X^d}(x) \quad ,$$

où f est le germe de fonction analytique au voisinage de x associé à F.

(2.6) Soient K un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$, x un point de $\mathbb{C}^p$ tel que $x\in\mathring{K}$ et Δ une partie de $\mathbb{N}^p$ qu'on considèrera, le cas échéant, plongé dans $\mathbb{Z}^p$. On désigne par $B_{\Delta;x}(K)$ (ou plus simplement par $B_\Delta(K)$, quand aucune confusion n'en résulte) la partie de $B(K)$ définie par

$$B_{\Delta;x}(K) = \bigcap_{d\in\mathbb{N}^p-\Delta} \mathrm{Ker}(\alpha_{d;K;x}) = \{f\in B(K) : \forall d, d\in\mathbb{N}^p-\Delta\ ,\ \frac{\partial^{|d|}f(x)}{\partial X^d} = 0\} \quad .$$

Comme pour tout d, $d\in\mathbb{N}^p$, $\alpha_{d;K;x}$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire continue, $B_{\Delta;x}(K)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $B(K)$, donc en particulier, un espace de Banach. On a

(2.6.1) $$B_{\mathbb{N}^p}(K) = B(K)$$

et

(2.6.2) $$B_\emptyset(K) = \{0\}$$

(principe du prolongement analytique). Si Δ' désigne une partie de $\mathbb{N}^p$, on a

(2.6.3) $$B_{\Delta\cap\Delta'}(K) = B_\Delta(K)\cap B_{\Delta'}(K) \quad ,$$

(2.6.4) $$B_\Delta(K) + B_{\Delta'}(K) \subset B_{\Delta\cup\Delta'}(K)$$

et

(2.6.5) $$B_\Delta(K).B_{\Delta'}(K) \subset B_{\Delta+\Delta'}(K) \quad .$$

En particulier, si $\Delta'\subset\Delta$, on a

(2.6.6) $$B_{\Delta'}(K) \subset B_\Delta(K)$$

et si $\Delta + \mathbb{N}^p \subset \Delta$, $B_\Delta(K)$ est un idéal fermé de l'algèbre de Banach $B(K)$. Si K' désigne un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ tel que $K' \subset K$ et $x \in \mathring{K}'$, en vertu de (2.5.5), on a

(2.6.7) $$r_{K',K}(B_{\Delta;x}(K)) \subset B_{\Delta;x}(K') \quad .$$

D'autre part, il résulte de (2.4.11), (2.4.12), (2.4.13) et (2.4.14) que si d désigne un élément de $\mathbb{N}^p$, on a

(2.6.8) $$\mu^d(B_\Delta(K)) \subset B_{d+\Delta}(K) \quad ,$$

(2.6.9) $$\tau^d(B_\Delta(K)) \subset B_{(-d+\Delta)\cap\mathbb{N}^p}(K) \quad ,$$

(2.6.10) $$q_d(B_\Delta(K)) \subset B_{\Delta\cap(d+\mathbb{N}^p)}(K) \quad ,$$

(2.6.11) $$(id_{B(K)} - q_d)(B_\Delta(K)) \subset B_{\Delta\cap(\mathbb{N}^p - (d+\mathbb{N}^p))}(K)$$

et il résulte de (2.4.13), (2.4.14) et du principe du prolongement analytique que

(2.6.12) $$q_d | B_{d+\mathbb{N}^p}(K) = id_{B_{d+\mathbb{N}^p}(K)}$$

et

(2.6.13) $$(id_{B(K)} - q_d) | B_{\mathbb{N}^p - (d+\mathbb{N}^p)}(K) = id_{B_{\mathbb{N}^p - (d+\mathbb{N}^p)}(K)} \quad .$$

On déduit de (2.6.12) et (2.6.9) que

$$B_{d+\Delta}(K) = q_d(B_{d+\Delta}(K)) = \mu^d\tau^d(B_{d+\Delta}(K)) \subset \mu^d(B_\Delta(K))$$

donc

(2.6.14) $$\mu^d(B_\Delta(K)) = B_{d+\Delta}(K) \quad ,$$

de (2.4.3), (2.6.8) et (2.6.6) que

$$B_{(-d+\Delta)\cap\mathbb{N}^p}(K) = \tau^d\mu^d(B_{(-d+\Delta)\cap\mathbb{N}^p}(K)) \subset \tau^d(B_\Delta(K))$$

donc

(2.6.15) $$\tau^d(B_\Delta(K)) = B_{(-d+\Delta)\cap\mathbb{N}^p}(K) \quad ,$$

de (2.6.12) et (2.6.6) que

$$B_{\Delta\cap(d+\mathbb{N}^p)}(K) = q_d(B_{\Delta\cap(d+\mathbb{N}^p)}(K)) \subset q_d(B_\Delta(K))$$

donc

(2.6.16) $$q_d(B_\Delta(K)) = B_{\Delta\cap(d+\mathbb{N}^p)}(K)$$

et de (2.6.13) et (2.6.6) que

$$B_{\Delta\cap(\mathbb{N}^p - (d+\mathbb{N}^p))}(K) = (id_{B(K)} - q_d)(B_{\Delta\cap(\mathbb{N}^p - (d+\mathbb{N}^p))}(K)) \subset (id_{B(K)} - q_d)(B_\Delta(K))$$

donc

(2.6.17) $$(id_{B(K)} - q_d)(B_\Delta(K)) = B_{\Delta\cap(\mathbb{N}^p - (d+\mathbb{N}^p))}(K) \quad .$$

En particulier, on a

(2.6.18) $$Im(\mu^d) = Im(q_d) = B_{d+\mathbb{N}^p}(K)$$

et

(2.6.19) $$Im(id_{B(K)} - q_d) = B_{\mathbb{N}^p - (d+\mathbb{N}^p)}(K)$$

et alors il résulte de (2.4.3) et (1.2) que

(2.6.20) $$Ker(\tau^d) = Ker(q_d) = B_{\mathbb{N}^p - (d+\mathbb{N}^p)}(K)$$

et que

(2.6.21) $$Ker(id_{B(K)} - q_d) = B_{d+\mathbb{N}^p}(K) \quad .$$

D'autre part, il résulte de (2.6.14), (2.6.15), (2.6.16), (2.6.17) et (2.6.3) que,

$$\mu^d(B_{(-d+\Delta)\cap\mathbb{N}^p}(K)) = B_\Delta(K) \cap Im(\mu^d) \quad ,$$

$$\tau^d(B_{(d+\Delta)\cup(\mathbb{N}^p - (d+\mathbb{N}^p))}(K)) = B_\Delta(K) \quad ,$$

$$q_d(B_{\Delta\cup(\mathbb{N}^p - (d+\mathbb{N}^p))}(K)) = B_\Delta(K) \cap Im(q_d)$$

et

$$(id_{B(K)} - q_d)(B_{(\Delta\cup(d+\mathbb{N}^p))}(K)) = B_\Delta(K) \cap Im(id_{B(K)} - q_d)$$

et de (2.6.20), (2.6.21) et (2.6.6) que

$$Ker(\tau^d) \subset B_{(d+\Delta)\cup(\mathbb{N}^p - (d + \mathbb{N}^p))}(K) \quad ,$$

$$Ker(q_d) \subset B_{\Delta\cup(\mathbb{N}^p - (d+\mathbb{N}^p))}(K)$$

et

$$Ker(id_{B(K)} - q_d) \subset B_{\Delta\cup(d+\mathbb{N}^p)}(K) \quad .$$

On en déduit que

(2.6.22) $$(\mu^d)^{-1}(B_\Delta(K)) = B_{(-d+\Delta)\cap\mathbb{N}^p}(K) \quad ,$$

(2.6.23) $$(\tau^d)^{-1}(B_\Delta(K)) = B_{(d+\Delta)\cup(\mathbb{N}^p - (d+\mathbb{N}^p))}(K) \quad ,$$

(2.6.24) $$q_d^{-1}(B_\Delta(K)) = B_{\Delta\cup(\mathbb{N}^p - (d+\mathbb{N}^p))}(K)$$

et

(2.6.25) $$(id_{B(K)} - q_d)^{-1}(B_\Delta(K)) = B_{\Delta\cup(d+\mathbb{N}^p)}(K) \quad .$$

PROPOSITION 2.6.26.- *Soient* p' *et* p'' *deux entiers,* $p' \in \mathbb{N}$, $p'' \in \mathbb{N}$, Δ *une partie de* $\mathbb{N}^{p'} \times \mathbb{N}^{p''}$, K' (resp. K'') *un polycylindre compact de* $\mathbb{C}^{p'}$ (resp. $\mathbb{C}^{p''}$) *et* x' *un point de* $\mathring{K}'$. *Si*

$$[(\mathbb{N}^{p'} \times \mathbb{N}^{p''}) - \Delta] + (\{0\} \times \mathbb{N}^{p''}) \subset (\mathbb{N}^{p'} \times \mathbb{N}^{p''}) - \Delta ,$$

alors pour tout x''_1 *et* x''_2 , $x''_1 \in \mathring{K}''$, $x''_2 \in \mathring{K}''$, *on a*

$$B_{\Delta;(x',x''_1)}(K' \times K'') = B_{\Delta;(x',x''_2)}(K' \times K'') .$$

Démonstration. Par symétrie il suffit de démontrer l'inclusion

$$B_{\Delta;(x',x''_1)}(K' \times K'') \subset B_{\Delta;(x',x''_2)}(K' \times K'') .$$

Soient donc $f \in B_{\Delta;(x',x''_1)}(K' \times K'')$ et $(d',d'') \in (\mathbb{N}^{p'} \times \mathbb{N}^{p''}) - \Delta$; il s'agit de démontrer que

$$\frac{\partial^{|d'|+|d''|} f}{\partial X'^{d'} \partial X''^{d''}} (x',x''_2) = 0 .$$

Soit $g : \mathring{K}'' \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$g(x'') = \frac{\partial^{|d'|+|d''|} f}{\partial X'^{d'} \partial X''^{d''}} (x',x'') , \text{ pour } x'' \in \mathring{K}'' .$$

Alors g est une fonction analytique, et comme

$$[(\mathbb{N}^{p'} \times \mathbb{N}^{p''}) - \Delta] + (\{0\} \times \mathbb{N}^{p''}) \subset (\mathbb{N}^{p'} \times \mathbb{N}^{p''}) - \Delta ,$$

pour tout d , $d \in \mathbb{N}^{p''}$, on a

$$\frac{\partial^{|d|} g}{\partial X''^{d}} (x''_1) = \frac{\partial^{|d'|+|d''+d|} f}{\partial X'^{d'} \partial X''^{d''+d}} (x',x''_1) = 0 .$$

La fonction g est donc identiquement nulle (principe du prolongement analytique). On en déduit que

$$\frac{\partial^{|d'|+|d''|} f}{\partial X'^{d'} \partial X''^{d''}} (x',x''_2) = g(x''_2) = 0 ,$$

ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE 2.6.27.- *Soit* Δ *une partie de* $\mathbb{N}^p$ *telle que* $(\mathbb{N}^p - \Delta) + \mathbb{N}^p \subset \mathbb{N}^p - \Delta$. *Alors pour tout point* x' *de* $\mathring{K}$ *on a*

$$B_{\Delta;x'}(K) = B_{\Delta;x}(K) .$$

Démonstration. Le corollaire est un cas particulier de la proposition 2.6.26, pour $p' = 0$ et $p'' = p$.

Remarque 2.6.28.- L'hypothèse $(\mathbb{N}^p - \Delta) + \mathbb{N}^p \subset \mathbb{N}^p - \Delta$ implique que $\mathbb{N}^p - \Delta = \bigcup_{d \in M} (d + \mathbb{N}^p)$, où M désigne l'ensemble (fini) d'éléments minimaux de $\mathbb{N}^p - \Delta$ pour la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$ (I, 1.3). On en déduit que $\Delta = \mathbb{N}^p - (\bigcup_{d \in M} (d + \mathbb{N}^p))$ et conformément à la démonstration de la proposition 2.6.26, on a

$$B_\Delta(K) = \{f \in B(K) \ : \ \forall d,\ d \in M \ , \ \frac{\partial^{|d|} f}{\partial X^d} = 0\} \ .$$

(2.7) Soient p et m des entiers, $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $d = (d_1, \ldots, d_m)$, $d \in (\mathbb{N}^p)^m$, $d_i \in \mathbb{N}^p$, $1 \leqq i \leqq p$, $a = (a_1, \ldots, a_m)$, $a \in (\mathbb{C}^*)^m$, K un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ et x un point de $\mathbb{C}^p$ tel que $x \in \mathring{K}$. On désigne par $\mu_{a;d;K;x}$ (resp. $\tau_{a;d;K;x}$) (ou plus simplement par $\mu_{a;d}$ (resp. $\tau_{a;d}$), quand aucune confusion n'en résulte) l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\mu_{a;d;K;x} : B(K)^m \longrightarrow B(K)$$
$$(\text{resp. } \tau_{a;d;K;x} : B(K) \longrightarrow B(K)^m)$$

définie par

$$\mu_{a;d;K;x}(g_1, \ldots, g_m) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu_{K;x}^{d_i}(g_i) \quad , \text{ pour } (g_1, \ldots, g_m) \in B(K)^m$$

(resp. $\tau_{a;d;K;x} = (\tau_{a;d;K;x;i})_{1 \leqq i \leqq m}$, où $\tau_{a;d;K;x;i} = a_i^{-1} \tau_{K;x}^{d_i} \circ \prod_{j=1}^{i-1} (id_{B(K)} - q_{d_j;K;x})$),

et il résulte de 2.4.1 que

$$(2.7.1) \qquad \|\mu_{a;d}\|_K \leqq \sum_{i=1}^{m} |a_i| \rho''^{d_i} \leqq m \sup_{1 \leqq i \leqq m} (|a_i| \rho''^{d_i})$$

et de 2.4.2 et 2.4.4 que

$$(2.7.2) \qquad \|\tau_{a;d;i}\|_K \leqq 2^{|d_1| + \ldots + |d_i| + i - 1} (\rho''/\rho')^{d_1 + \ldots + d_i} (1/|a_i| \rho''^{d_i}) \leqq$$

$$\leqq 2^{|d_1| + \ldots + |d_i| + i - 1} e^{|d_1| + \ldots + |d_i|} (1/|a_i| \rho''^{d_i})$$

et

$$(2.7.3) \qquad \|\tau_{a;d}\|_K \leqq 2^{|d_1| + \ldots + |d_m| + m - 1} (\rho''/\rho')^{d_1 + \ldots + d_m} \sup_{1 \leqq i \leqq m} (1/|a_i| \rho''^{d_i}) \leqq$$

$$\leqq 2^{|d_1| + \ldots + |d_m| + m - 1} e^{|d_1| + \ldots + |d_m|} \sup_{1 \leqq i \leqq m} (1/|a_i| \rho''^{d_i})$$

(où $\rho''/\rho' = (\rho''_1/\rho'_1, \ldots, \rho''_p/\rho'_p)$). En particulier, si K est un polydisque fermé de centre x et de polyrayon ρ, on a

(2.7.4) $$\|\tau_{a;d;i}\|_K \leq 2^{|d_1|+\ldots+|d_i|+i-1}(1/|a_i|\rho^{d_i})$$

et

(2.7.5) $$\|\tau_{a;d}\|_K \leq 2^{|d_1|+\ldots+|d_m|+m-1}\sup_{1\leq i\leq m}(1/|a_i|\rho^{d_i}) \quad .$$

D'autre part, comme

$$\mathrm{id}_{B(K)} - \mu_{a;d}\,\tau_{a;d} = \mathrm{id}_{B(K)} - \sum_{i=1}^{m} q_{d_i}\circ \prod_{j=1}^{i-1}(\mathrm{id}_{B(K)} - q_{d_j}) \quad ,$$

il résulte de (2.4.4) que

(2.7.6) $$\|\mathrm{id}_{B(K)} - \mu_{a;d}\,\tau_{a;d}\|_K \leq 1 + m\,2^{|d_1|+\ldots+|d_m|+m-1}e^{|d_1|+\ldots+|d_m|}$$

et si K est un polydisque de centre x, on a

(2.7.7) $$\|\mathrm{id}_{B(K)} - \mu_{a;d}\,\tau_{a;d}\|_K \leq 1 + m\,2^{|d_1|+\ldots+|d_m|+m-1} \quad .$$

Enfin, il résulte de 2.5.2, 2.5.3 et 2.5.4 que si K' désigne un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ tel que $K'\subset K$ et $x\in \mathring{K}'$, on a

(2.7.8) $$r_{K',K}\,\mu_{a;d;K;x} = \mu_{a;d;K';x}\circ(\overset{m}{\oplus} r_{K',K})$$

et

(2.7.9) $$(\overset{m}{\oplus} r_{K',K})\circ\tau_{a;d;K;x} = \tau_{a;d;K';x}\,r_{K',K} \quad .$$

On remarquera que si pour tout i, $1\leq i\leq m$, on pose

$$I_i = \mathrm{supp}(d_i) = \{j\in[1,p] : d_{ij}\neq 0\} \quad ,$$

où $d_i = (d_{i1},\ldots,d_{ip})$, et $I = \bigcup_{1\leq i\leq m} I_i$ et si l'on désigne par π la projection $\pi : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^I$, alors pour tout point x', $x'\in\mathring{K}$, tel que $\pi(x') = \pi(x)$ on a

(2.7.10) $$\mu_{a;d;K;x'} = \mu_{a;d;K;x} \quad \text{et} \quad \tau_{a;d;K;x'} = \tau_{a;d;K;x} \quad .$$

Pour tout i, $1\leq i\leq m$, on désigne par $\Delta_i(d)$ la partie de $\mathbb{N}^p$ définie par

(2.7.11) $$\Delta_i(d) = (d_i + \mathbb{N}^p) - \left(\bigcup_{j=1}^{i-1}(d_j+\mathbb{N}^p)\right)$$

et on pose

(2.7.12) $$\Delta_o(d) = \mathbb{N}^p - \bigcup_{i=1}^{m}\Delta_i(d) = \mathbb{N}^p - \bigcup_{i=1}^{m}(d_i+\mathbb{N}^p) \quad .$$

<u>PROPOSITION 2.7.13.</u>- *L'application $\tau_{a;d}$ est une scission normale, $\mathbb{C}$-linéaire continue de $\mu_{a;d}$ et on a :*

i) $\operatorname{Im}(\tau_{a;d}) = \prod_{i=1}^{m} B_{-d_i+\Delta_i(d)}(K)$;

ii) $\operatorname{Im}(id_{B(K)} - \mu_{a;d}\, \tau_{a;d}) = B_{\Delta_o(d)}(K)$.

Démonstration. On remarque que pour tout i , $1 \leqq i \leqq m$, $a_i^{-1}\tau^{d_i}$ est une rétraction de $a_i\mu^{d_i}$ (2.4.3) (et en particulier, une scission normale) et que $(a_i\mu^{d_i}) \circ (a_i^{-1}\tau^{d_i}) = q_{d_i}$. Or, comme les q_{d_i} commutent entre eux (2.4.8), on peut appliquer le corollaire 1.8. On en déduit que $\tau_{a;d}$ est une scission normale de $\mu_{a;d}$ et que :

i) $\operatorname{Im}(\tau_{a;d}) = \prod_{i=1}^{m} \tau^{d_i}(\bigcap_{1 \leqq j < i} \operatorname{Im}(id_{B(K)} - q_{d_j}))$;

ii) $\operatorname{Im}(id_{B(K)} - \mu_{a;d}\, \tau_{a;d}) = \bigcap_{1 \leqq i \leqq m} \operatorname{Im}(id_{B(K)} - q_{d_i})$;

et alors les assertions (i) et (ii) de la proposition résultent de 2.6.19, 2.6.3, et 2.6.15.

Remarque 2.7.14. Comme $\Delta_o(d) = \mathbb{N}^p - \bigcup_{i=1}^{m} (d_i + \mathbb{N}^p)$, on a $\mathbb{N}^p - \Delta_o(d) = \bigcup_{i=1}^{m}(d_i + \mathbb{N}^p)$, ce qui implique que $(\mathbb{N}^p - \Delta_o(d)) + \mathbb{N}^p \subset \mathbb{N}^p - \Delta_o(d)$. On en déduit que pour tout x' , $x' \in \mathring{K}$, on a

$$B_{\Delta_o(d);x'}(K) = B_{\Delta_o(d);x}(K)$$

(2.6.27). De même, pour tout i , $1 \leqq i \leqq m$,

$$-d_i + \Delta_i(d) = \mathbb{N}^p - (\bigcup_{j=1}^{i-1} (-d_i + d_j + \mathbb{N}^p) \cap \mathbb{N}^p)$$

et on a donc

$$\mathbb{N}^p - (-d_i + \Delta_i(d)) = \bigcup_{j=1}^{i-1} (-d_i + d_j + \mathbb{N}^p) \cap \mathbb{N}^p ,$$

d'où

$$[\mathbb{N}^p - (-d_i + \Delta_i(d))] + \mathbb{N}^p \subset \mathbb{N}^p - (-d_i + \Delta_i(d)) ,$$

ce qui implique que pour tout x' , $x' \in \mathring{K}$, on a

$$B_{-d_i+\Delta_i(d);x'}(K) = B_{-d_i+\Delta_i(d);x}(K)$$

(2.6.27).On en déduit que l'image de l'application $\tau_{a;d;K;x'}$, ainsi que celle de l'application $id_{B(K)} - \mu_{a;d;K;x'}\, \tau_{a;d;K;x'}$ ne dépend pas du point x' de $\mathring{K}$ (2.7.13).

(2.8) En gardant les notations de 2.7, soit $\mathcal{D}=(\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_m,\mathcal{D}')$, où pour tout i , $1\leq i\leq m$, $\mathcal{D}_i\subset\mathbb{N}^p$ et $\mathcal{D}'\subset\mathbb{N}^p$, tel que pour tout i , $1\leq i\leq m$, on ait

$$(2.8.1)\qquad \mathcal{D}'\cap\Delta_i(d)\subset d_i+\mathcal{D}_i\subset\mathcal{D}' .$$

Il résulte de l'inclusion $d_i+\mathcal{D}_i\subset\mathcal{D}'$ et de (2.6.14) et (2.6.4) que

$$\mu_{a;d}\Big(\prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i}(K)\Big)\subset B_{\mathcal{D}'}(K) ,$$

et de l'inclusion $\mathcal{D}'\cap\Delta_i(d)\subset d_i+\mathcal{D}_i$ et de (2.6.17) et (2.6.15) que

$$\tau_{a;d}(B_{\mathcal{D}'}(K))\subset\prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i}(K) .$$

On désigne par $\mu_{\mathcal{D};a;d;K;x}$ (resp. $\tau_{\mathcal{D};a;d;K;x}$) (ou plus simplement par $\mu_{\mathcal{D};a;d}$ (resp. $\tau_{\mathcal{D};a;d}$) , quand aucune confusion n'en résulte) l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\mu_{\mathcal{D};a;d;K;x} : \prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i;x}(K)\longrightarrow B_{\mathcal{D}';x}(K)$$

$$(\text{resp. } \tau_{\mathcal{D};a;d;K;x} : B_{\mathcal{D}';x}(K)\longrightarrow\prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i;x}(K))$$

induite par $\mu_{a;d;K;x}$ (resp. $\tau_{a;d;K;x}$) .

PROPOSITION 2.8.2.- *L'application* $\tau_{\mathcal{D};a;d}$ *est une scission normale,* $\mathbb{C}$-*linéaire continue de* $\mu_{\mathcal{D};a;d}$ *et on a :*

i) $\mathrm{Im}(\tau_{\mathcal{D};a;d})=\prod_{i=1}^{m} B_{-d_i+(\mathcal{D}'\cap\Delta_i(d))}(K)$;

ii) $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}'}(K)}-\mu_{\mathcal{D};a;d}\tau_{\mathcal{D};a;d})=B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_0(d)}(K)$.

Démonstration. Le fait que $\tau_{\mathcal{D};a;d}$ est une scission normale de $\mu_{\mathcal{D};a;d}$ résulte aussitôt de la proposition 2.7.13. On a donc

$$\mathrm{Im}(\tau_{\mathcal{D};a;d})=\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{\prod\limits_{1\leq i\leq m} B_{\mathcal{D}_i}(K)}-\tau_{\mathcal{D};a;d}\,\mu_{\mathcal{D};a;d})=$$

$$=\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{B(K)^m}-\tau_{a;d}\,\mu_{a;d})\cap\prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i}(K)=\mathrm{Im}(\tau_{a;d})\cap\prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i}(K)=$$

$$=\prod_{i=1}^{m} B_{-d_i+\Delta_i(d)}(K)\cap\prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i}(K)=\prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i\cap(-d_i+\Delta_i(d))}(K)\qquad ((1.2)\ ,\ (2.7.13)$$

et (2.6.3)). Or, il résulte de 2.8.1 que $\mathcal{D}_i\cap(-d_i+\Delta_i(d))=-d_i+(\mathcal{D}'\cap\Delta_i(d))$, ce qui démontre l'assertion (i). De même, on a

$\mathrm{Im}(\mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}'}(K)} - \mu_{\mathcal{D};a;d}\, \tau_{\mathcal{D};a;d}) = \mathrm{Ker}(\tau_{\mathcal{D};a;d}) = \mathrm{Ker}(\tau_{a;d}) \cap B_{\mathcal{D}'}(K) =$

$= \mathrm{Im}(\mathrm{id}_{B(K)} - \mu_{a;d}\, \tau_{a;d}) \cap B_{\mathcal{D}'}(K) = B_{\Delta_o(d)}(K) \cap B_{\mathcal{D}'}(K) = B_{\mathcal{D}' \cap \Delta_o(d)}(K)$ (1.2 , 2.7.13 et 2.6.3), ce qui démontre la proposition.

Remarque 2.8.2.1. Si x' désigne un point de $\overset{\circ}{K}$ différent de x , on n'a pas en général

$$B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);x'}(K) = B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);x}(K)$$

ni

$$B_{-d_i+(\mathcal{D}'\cap\Delta_i(d));x'}(K) = B_{-d_i+(\mathcal{D}'\cap\Delta_i(d));x}(K)$$

et l'image de l'application $\tau_{\mathcal{D};a;d;K;x'}$ ainsi que celle de $\mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}'}(K)} - \mu_{\mathcal{D};a;d;K;x'}\, \tau_{\mathcal{D};a;d;K;x'}$ n'est pas indépendante du point x' de $\overset{\circ}{K}$. En revanche, comme en vertu de 2.8.1 $-d_i + (\mathcal{D}' \cap \Delta_i(d)) = \mathcal{D}_i \cap (-d_i + \Delta_i(d))$, il en est ainsi si pour tout i , $1 \leq i \leq m$, $(\mathbb{N}^p - \mathcal{D}_i) + \mathbb{N}^p \subset \mathbb{N}^p - \mathcal{D}_i$ et $(\mathbb{N}^p - \mathcal{D}') + \mathbb{N}^p \subset \mathbb{N}^p - \mathcal{D}'$ ((2.6.27), (2.7.14) et (2.6.3)). Plus généralement, soient p' et p'' deux entiers, $p' \in \mathbb{N}$, $p'' \in \mathbb{N}$, tels que $p' + p'' = p$, K' (resp. K'') un polycylindre compact de $\mathbb{C}^{p'}$ (resp. $\mathbb{C}^{p''}$) , x' un point de $\overset{\circ}{K'}$ et supposons que pour tout i , $1 \leq i \leq m$,

$$[(\mathbb{N}^{p'} \times \mathbb{N}^{p''}) - \mathcal{D}_i] + (\{0\} \times \mathbb{N}^{p''}) \subset (\mathbb{N}^{p'} \times \mathbb{N}^{p''}) - \mathcal{D}_i$$

et

$$[(\mathbb{N}^{p'} \times \mathbb{N}^{p''}) - \mathcal{D}'] + (\{0\} \times \mathbb{N}^{p''}) \subset (\mathbb{N}^{p'} \times \mathbb{N}^{p''}) - \mathcal{D}' \quad .$$

Alors pour tout x''_1 et x''_2 , $x''_1 \in \overset{\circ}{K''}$, $x''_2 \in \overset{\circ}{K''}$, en vertu de 2.8.1, 2.6.26, 2.7.14 et 2.6.3, on a

$$B_{-d_i+(\mathcal{D}'\cap\Delta_i(d));(x',x''_1)}(K' \times K'') = B_{-d_i+(\mathcal{D}'\cap\Delta_i(d));(x',x''_2)}(K' \times K'')$$

et

$$B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);(x',x''_1)}(K' \times K'') = B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);(x',x''_2)}(K' \times K'')$$

et il résulte de 2.8.2 que

$$\mathrm{Im}\ \tau_{\mathcal{D};a;d;K' \times K'';(x',x''_1)} = \mathrm{Im}\ \tau_{\mathcal{D};a;d;K'\times K'';(x',x''_2)}$$

et

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}'}(K'\times K'')} - \mu_{\mathcal{D};a;d;K'\times K'';(x',x''_1)}\, \tau_{\mathcal{D};a;d;K'\times K'';(x',x''_1)}) =$$

$$= \mathrm{Im}(\mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}'}(K'\times K'')} - \mu_{\mathcal{D};a;d;K'\times K'';(x',x''_2)}\, \tau_{\mathcal{D};a;d;K'\times K'';(x',x''_2)}) \quad .$$

Corollaire 2.8.3.- *On a*

$$\mathrm{Im}(\mu_{\mathcal{D};a;d}) = B_{\mathcal{D}'\cap(\mathbb{N}^p - \Delta_o(d))}(K) = B_{\underset{1\leq i\leq m}{\cup}(d_i+\mathcal{D}_i)}(K) \quad .$$

Démonstration. On a

$$\mathrm{Im}(\mu_{\mathcal{D};a;d}) \subset B_{d_1+\mathcal{D}_1}(K)+\ldots+B_{d_m+\mathcal{D}_m}(K) \subset B_{\underset{1\leq i\leq m}{\cup}(d_i+\mathcal{D}_i)}(K)$$

(2.6.14 et 2.6.4) . Soit $f \in B_{\underset{1\leq i\leq m}{\cup}(d_i+\mathcal{D}_i)}(K)$. Si l'on pose

$g = (\mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}'}(K)} - \mu_{\mathcal{D};a;d}\,\tau_{\mathcal{D};a;d})(f)$, on a donc $g \in B_{\underset{1\leq i\leq m}{\cup}(d_i+\mathcal{D}_i)}(K)$, et il résulte de la proposition 2.8.2 que $g \in B_{\mathcal{D}'\cap\,\Delta_o(d)}(K)$, donc

$g \in B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d)\cap(\underset{1\leq i\leq m}{\cup}(d_i+\mathcal{D}_i))}(K)$ (2.6.3), et en vertu de 2.7.12, on a

$g \in B_{\phi}(K)$, d'où $g=0$ (2.6.2). On en déduit que $f = \mu_{\mathcal{D};a;d}\,\tau_{\mathcal{D};a;d}(f)$, ce qui prouve que $\mathrm{Im}(\mu_{\mathcal{D};a;d}) = B_{\underset{1\leq i\leq m}{\cup}(d_i+\mathcal{D}_i)}(K)$. Or, il résulte de 2.8.1 et 2.7.12 que

$\underset{1\leq i\leq m}{\cup}(d_i+\mathcal{D}_i) = \mathcal{D}'\cap(\mathbb{N}^p - \Delta_o(d))$, ce qui démontre le corollaire.

Remarque 2.8.4. Soient $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_m$ des parties de $\mathbb{N}^p$. Pour qu'il existe une partie $\mathcal{D}'$ de $\mathbb{N}^p$ satisfaisant à la condition 2.8.1, il faut et il suffit que pour tout i et j , $1\leq i<j\leq m$, on ait

$$(2.8.5) \qquad (d_j+\mathcal{D}_j)\cap\Delta_i(d) \subset d_i+\mathcal{D}_i \quad .$$

En effet, s'il existe une partie $\mathcal{D}'$ de $\mathbb{N}^p$ satisfaisant à la condition 2.8.1, pour tout j , $1\leq j\leq m$, on a $d_j+\mathcal{D}_j\subset\mathcal{D}'$ et pour tout i , $1\leq i\leq m$, on a $\mathcal{D}'\cap\Delta_i(d)\subset d_i+\mathcal{D}_i$, d'où $(d_j+\mathcal{D}_j)\cap\Delta_i(d)\subset d_i+\mathcal{D}_i$. Réciproquement, si pour tout i et j , $1\leq i<j\leq m$, on a $(d_j+\mathcal{D}_j)\cap\Delta_i(d)\subset d_i+\mathcal{D}_i$ et si l'on pose $\mathcal{D}' = \underset{1\leq j\leq m}{\cup}(d_j+\mathcal{D}_j)$, pour tout i , $1\leq i\leq m$ on a $d_i+\mathcal{D}_i\subset\mathcal{D}'$ et

$$\mathcal{D}'\cap\Delta_i(d) = [(\underset{1\leq j<i}{\cup}(d_j+\mathcal{D}_j))\cup(d_i+\mathcal{D}_i)\cup(\underset{i<j\leq m}{\cup}(d_j+\mathcal{D}_j))]\cap[(d_i+\mathbb{N}^p)-(\underset{1\leq j<i}{\cup}(d_j+\mathbb{N}^p))] \subset$$

$$\subset d_i+\mathcal{D}_i \quad .$$

Si pour tout i , $1\leq i\leq m$, $\mathcal{D}_i=\mathbb{N}^p$, il est clair que la famille $(\mathcal{D}_i)_{1\leq i\leq m}$ satisfait à la condition 2.8.5 et si $\mathcal{D}'$ est une partie de $\mathbb{N}^p$ contenant $\underset{1\leq i\leq m}{\cup}(d_i+\mathbb{N}^p)$, par exemple $\mathcal{D}'=\mathbb{N}^p$, $\mathcal{D}'$ satisfait à la condition 2.8.1. La proposition 2.7.13 est ainsi un cas particulier de la proposition 2.8.2.

COROLLAIRE 2.8.6.- *Soient* $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_m$ *des parties de* $\mathbb{N}^p$ *telles que pour tout* i *et* j , $1 \leq i < j \leq m$, *on ait*

$$(d_j + \mathcal{D}_j) \cap \Delta_i(d) \subset d_i + \mathcal{D}_i \quad .$$

Alors on a :

i) $\mu_{a;d}(\prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i}(K)) = B_{\bigcup_{1\leq i\leq m}(d_i+\mathcal{D}_i)}(K)$;

ii) $(\tau_{a;d}\,\mu_{a;d})(\prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i}(K)) = \prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i\cap(-d_i+\Delta_i(d))}(K)$.

Démonstration. Il existe une partie $\mathcal{D}'$ de $\mathbb{N}^p$ satisfaisant à la condition 2.8.1 (cf. 2.8.4). Posons $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_m,\mathcal{D}')$. Alors on a

$$\mu_{a;d}(\prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i}(K)) = \mathrm{Im}(\mu_{\mathcal{D};a;d}) = B_{\bigcup_{1\leq i\leq m}(d_i+\mathcal{D}_i)}(K)$$

(2.8.3) et

$$(\tau_{a;d}\,\mu_{a;d})\,(\prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i}(K)) = \mathrm{Im}(\tau_{\mathcal{D};a;d}\,\mu_{\mathcal{D};a;d}) = \mathrm{Im}(\tau_{\mathcal{D};a;d}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{m} B_{-d_i+(\mathcal{D}'\cap\,\Delta_i(d))}(K)$$

(2.8.2 et 1.2). Or, il résulte de 2.8.1 que $-d_i + (\mathcal{D}'\cap\Delta_i(d)) = \mathcal{D}_i \cap (-d_i + \Delta_i(d))$, ce qui démontre le corollaire.

Remarque 2.8.7.- Soit $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathbb{N}^p$. Il existe une famille $(\mathcal{D}_i)_{1\leq i\leq m}$ de parties de $\mathbb{N}^p$ satisfaisant à la condition 2.8.1. En effet, il suffit de poser pour tout i , $1 \leq i \leq m$, $\mathcal{D}_i = (-d_i + \mathcal{D}') \cap \mathbb{N}^p$.

COROLLAIRE 2.8.8.- *Soit* $\mathcal{D}'$ *une partie de* $\mathbb{N}^p$. *Alors on a :*

i) $\tau_{a;d}(B_{\mathcal{D}'}(K)) = \prod_{i=1}^{m} B_{-d_i+(\mathcal{D}'\cap\Delta_i(d))}(K)$;

ii) $(\mathrm{id}_{B(K)} - \mu_{a;d}\,\tau_{a;d})\,(B_{\mathcal{D}'}(K)) = B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_0(d)}(K)$;

iii) $(\mu_{a;d}\,\tau_{a;d})(B_{\mathcal{D}'}(K)) = B_{\mathcal{D}'\cap(\mathbb{N}^p-\Delta_0(d))}(K)$;

iv) $(\mathrm{id}_{B(K)} - \mu_{a;d}\,\tau_{a;d})^{-1}(B_{\mathcal{D}'}(K)) = B_{\mathcal{D}'\cup(\mathbb{N}^p-\Delta_0(d))}(K)$;

v) $(\mu_{a;d}\,\tau_{a;d})^{-1}(B_{\mathcal{D}'}(K)) = B_{\mathcal{D}'\cup\Delta_0(d)}(K)$.

Démonstration. Il existe une famille $(\mathcal{D}_i)_{1\leq i\leq m}$ de parties de $\mathbb{N}^p$ satisfaisant à la condition 2.8.1 (cf. 2.8.7). Posons $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_m,\mathcal{D}')$. Alors on a

$\tau_{a;d}(B_{\mathcal{D}'}(K)) = \mathrm{Im}(\tau_{\mathcal{D};a;d})$ et $(\mathrm{id}_{B(K)} - \mu_{a;d}\,\tau_{a;d})(B_{\mathcal{D}'}(K)) =$
$= \mathrm{Im}(\mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}'}(K)} - \mu_{\mathcal{D};a;d}\,\tau_{\mathcal{D};a;d})$, et les assertions (i) et (ii) résultent de la proposition 2.8.2. De même, on a $(\mu_{a;d}\,\tau_{a;d})(B_{\mathcal{D}'}(K)) = \mathrm{Im}(\mu_{\mathcal{D};a;d}\,\tau_{\mathcal{D};a;d}) = \mathrm{Im}(\mu_{\mathcal{D};a;d})$ (2.8.2 et 1.2), et l'assertion (iii) résulte du corollaire 2.8.3. D'autre part, il résulte de l'assertion (ii) que

$$(\mathrm{id}_{B(K)} - \mu_{a;d}\,\tau_{a;d})(B_{\mathcal{D}'\cup(\mathbf{N}^p - \Delta_0(d))}(K)) = B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_0(d)}(K) =$$

$$= B_{\mathcal{D}'}(K) \cap B_{\Delta_0(d)}(K) = B_{\mathcal{D}'}(K) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{id}_{B(K)} - \mu_{a;d}\,\tau_{a;d})$$

et de 2.7.13, de (1.2) et de l'assertion (iii) que

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{B(K)} - \mu_{a;d}\,\tau_{a;d}) = \mathrm{Im}(\mu_{a;d}\,\tau_{a;d}) = B_{\mathbf{N}^p - \Delta_0(d)}(K) \quad ,$$

donc $\quad \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{B(K)} - \mu_{a;d}\,\tau_{a;d}) \subset B_{\mathcal{D}'\cup(\mathbf{N}^p - \Delta_0(d))}(K)$

(2.6.6), ce qui démontre l'assertion (iv). De même, il résulte de l'assertion (iii) que $(\mu_{a;d}\,\tau_{a;d})(B_{\mathcal{D}'\cup\Delta_0(d)}(K)) = B_{\mathcal{D}'\cap(\mathbf{N}^p - \Delta_0(d))}(K) = B_{\mathcal{D}'}(K) \cap B_{\mathbf{N}^p - \Delta_0(d)}(K) =$
$= B_{\mathcal{D}'}(K) \cap \mathrm{Im}(\mu_{a;d}\,\tau_{a;d})$ et de 2.7.13 et de (1.2) que
$\mathrm{Ker}(\mu_{a;d}\,\tau_{a;d}) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_{B(K)} - \mu_{a;d}\,\tau_{a;d}) = B_{\Delta_0(d)}(K)$, donc
$\mathrm{Ker}(\mu_{a;d}\,\tau_{a;d}) \subset B_{\mathcal{D}'\cup\Delta_0(d)}(K)$ (2.6.6), ce qui démontre l'assertion (v).

COROLLAIRE 2.8.9.- *Soient* $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_m$ *des parties de* $\mathbf{N}^p$. *Alors on a*

$$(\tau_{a;d})^{-1}\Big(\prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i}(K)\Big) = B_{\Delta_0(d)\cup[\bigcup_{1\leq i\leq m}((d_i+\mathcal{D}_i)\cap\Delta_i(d))]}(K) \quad .$$

Démonstration. On a

$$\tau_{a;d}(B_{\Delta_0(d)\cup[\bigcup_{1\leq i\leq m}((d_i+\Delta_i)\cap\Delta_i(d))]}(K)) = \prod_{i=1}^{m} B_{-d_i+[[\Delta_0(d)\cup(\bigcup_{1\leq i\leq m}((d_i+\mathcal{D}_i)\cap\Delta_i(d)))]\cap\Delta_i(d)]}(K) =$$

$$= \prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i\cap(-d_i+\Delta_i(d))}(K) = \prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i}(K) \cap \prod_{i=1}^{m} B_{-d_i+\Delta_i(d)}(K) = \prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i}(K) \cap \mathrm{Im}(\tau_{a;d})$$

(2.8.8, 2.6.3 et 2.7.13) et

$$\mathrm{Ker}(\tau_{a;d}) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_{B(K)} - \mu_{a;d}\,\tau_{a;d}) = B_{\Delta_0(d)}(K) \subset B_{\Delta_0(d)\cup[\bigcup_{1\leq i\leq m}((d_i+\mathcal{D}_i)\cap\Delta_i(d))]}(K)$$

(2.7.13, 1.2 et 2.6.6), ce qui démontre le corollaire.

Remarque 2.8.10.- Si la famille $(\mathcal{D}_i)_{1\leq i\leq m}$ satisfait à la condition 2.8.5, on vérifie facilement que

$$\Delta_o(d) \cup [\bigcup_{1\leq i\leq m} ((d_i + \mathcal{D}_i) \cap \Delta_i(d))] = \Delta_o(d) \cup (\bigcup_{1\leq i\leq m} (d_i + \mathcal{D}_i)) ,$$

et on a donc

$$\tau^{-1}_{a;d}(\prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i}(K)) = B_{\Delta_o(d) \cup (\bigcup_{1\leq i\leq m} (d_i + \mathcal{D}_i))}(K) .$$

§3.- Théorème de division conditionnel

(3.0) Dans ce paragraphe, on se fixe une fois pour toutes deux entiers p et m, $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, un élément $d = (d_1, \dots, d_m)$ de $(\mathbb{N}^p)^m$, un élément $a = (a_1, \dots, a_m)$ de $(\mathbb{C}^*)^m$, un ouvert U de $\mathbb{C}^p$, un point x de U, un polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U et tel que $x \in \overset{\circ}{K}$, une famille $f = (f_1, \dots, f_m)$ d'éléments de $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$ et on désigne par $\mathcal{J}$ l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_U$ engendré par $f_1, \dots, f_m$. On rappelle (chapitre 0) qu'on désigne par $B(K;f)$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$B(K;f) : B(K)^m \longrightarrow B(K)$$

définie par

$$B(K;f)(g_1, \dots, g_m) = \sum_{i=1}^{m} (f_i | K) g_i \ , \text{ pour } (g_1, \dots, g_m) \in B(K)^m \ ,$$

et par $\mathcal{J}_K$ l'image de $\Gamma(K,\mathcal{J}) \otimes_{\Gamma(K,\mathcal{O}_U)} B(K)$ dans $B(K)$, qui n'est autre que l'image de l'application $B(K;f)$. Enfin, on remarque que

$$(3.0.1) \qquad \|B(K;f)\|_K \leq \sum_{i=1}^{m} \|f_i\|_K \leq m \sup_{1 \leq i \leq m} \|f_i\|_K$$

et si K' désigne un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ contenu dans K et tel que $x \in \overset{\circ}{K'}$, on vérifie aisément que

$$(3.0.2) \qquad r_{K',K} \circ B(K;f) = B(K';f) \circ (\overset{m}{\oplus}\, r_{K',K}) \ .$$

Enfin, on rappelle (2.7.14) que le sous-espace $B_{\Delta_o(d);x'}(K)$ (resp. $B_{-d_i+\Delta_i(d);x'}(K)$, pour $1 \leq i \leq m$) de $B(K)$ ne dépend pas du point x' de $\overset{\circ}{K}$. On le désignera simplement par $B_{\Delta_o(d)}(K)$ (resp. $B_{-d_i+\Delta_i(d)}(K)$).

(3.1) On désigne par $\nu_{f;a;d;K;x}$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\nu_{f;a;d;K;x} : B(K) \longrightarrow B(K)$$

définie par

$$\nu_{f;a;d;K;x} = \mathrm{id}_{B(K)} + (B(K;f) - \mu_{a;d;K;x}) \circ \tau_{a;d;K;x} \ .$$

Si K' désigne un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ contenu dans K et tel que $x \in \overset{\circ}{K'}$, en vertu de (2.7.8), (2.7.9) et (3.0.2), on a

$$(3.1.1) \qquad r_{K',K}\, \nu_{f;a;d;K;x} = \nu_{f;a;d;K';x}\, r_{K',K} \ .$$

PROPOSITION 3.1.2.- *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\nu_{f;a;d;K;x}$ *est inversible (en tant que morphisme d'espaces de Banach)*

ii) $\nu_{f;a;d;K;x}$ *est bijective.*

iii) *pour tout* g , $g \in B(K)$, *il existe une famille unique* $(g_i)_{0 \leq i \leq m}$ *d'éléments de* $B(K)$ *telle que pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $g_i \in B_{-d_i+\Delta_i(d)}(K)$, $g_o \in B_{\Delta_o(d)}(K)$ *et*

$$g = \sum_{i=1}^{m} g_i(f_i|K) + g_o \quad .$$

Démonstration. L'équivalence des conditions (i) et (ii) résulte du théorème de Banach et l'équivalence des conditions (ii) et (iii) des propositions 2.7.13 et (1.4), (b).

PROPOSITION 3.1.3.- *Si l'on suppose que* $\nu_{f;a;d;K;x}$ *est inversible et si l'on pose*

$$\sigma_{f;a;d;K;x} = \tau_{a;d;K;x} \circ \nu^{-1}_{f;a;d;K;x} \quad ,$$

on a :

i) $\mathrm{Im}(\sigma_{f;a;d;K;x}) = \prod_{i=1}^{m} B_{-d_i+\Delta_i(d)}(K)$;

ii) $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_{B(K)} - B(K;f) \circ \sigma_{f;a;d;K;x}) = B_{\Delta_o(d)}(K)$;

iii) *pour tout* g , $g \in B(K)$, *si* $(g_i)_{0 \leq i \leq m}$ *désigne l'unique famille d'éléments de* $B(K)$ *telle que pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $g_i \in B_{-d_i+\Delta_i(d)}(K)$, $g_o \in B_{\Delta_o(d)}(K)$ *et* $g = \sum_{i=1}^{m} g_i(f_i|K) + g_o$ (cf. 3.1.2), *on a*

$$\sigma_{f;a;d;K;x}(g) = (g_1,\dots,g_m)$$

et

$$(\mathrm{id}_{B(K)} - B(K;f) \circ \sigma_{f;a;d;K;x})(g) = g_o \quad ;$$

iv) $B(K;f)$ *est une scission de* $\sigma_{f;a;d;K;x}$;

v) *les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\sigma_{f;a;d;K;x}$ *est une scission ($\mathbb{C}$-linéaire continue, normale) de* $B(K;f)$;

b) $\mathrm{Im}(B(K;f)) \cap B_{\Delta_o(d)}(K) = \{0\}$;

c) *pour tout* g , $g \in J_K$, *il existe une famille* $(g_i)_{1 \leq i \leq m}$ *d'éléments de* $B(K)$ *telle que pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $g_i \in B_{-d_i+\Delta_i(d)}(K)$ *et* $g = \sum_{i=1}^{m} g_i(f_i|K)$;

d) *pour tout* g , $g \in J_K$, *si* $(g_i)_{0 \leq i \leq m}$ *désigne l'unique famille d'éléments de* $B(K)$ *telle que pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $g_i \in B_{-d_i+\Delta_i(d)}(K)$, $g \in B_{\Delta_o(d)}(K)$ *et* $g = \sum_{i=1}^{m} g_i(f_i|K) + g_o$ (cf. 3.1.2), on a $g_o = 0$.

Démonstration. Les assertions (i) et (ii) résultent de (2.7.13) et (1.4), (c), (ii), l'assertion (iii) de (2.7.13) et (1.4),(c), (iv), l'assertion (iv) de (2.7.13) et (1.4), (c), (iii) et l'assertion (v) de (2.7.13), de (1.5) et du fait que $J_K = \mathrm{Im}(B(K;f))$.

Exemple 3.1.4. En gardant les hypothèses et les notations de la proposition 3.1.3, si $m = 1$, comme $B_{-d_1+\Delta_1(d)}(K) = B(K)$, il résulte de (3.1.3), (i) que $\sigma_{f;a;d;K;x}$ est surjective et de 3.1.3, (iv) que $\sigma_{f;a;d;K;x} \circ B(K;f) = \mathrm{id}_{B(K)}$, c'est-à-dire que $\sigma_{f;a;d;K;x}$ est une rétraction de $B(K;f)$. En particulier, $\sigma_{f;a;d;K;x}$ est une scission normale de $B(K;f)$ et on a

$$\mathrm{Im}(B(K;f)) \cap B_{\Delta_o(d)}(K) = \{0\}$$

(3.1.3, (v)).

COROLLAIRE 3.1.5.- *Si l'on suppose que* $\nu_{f;a;d;K;x}$ *est inversible, alors pour tout* a' , $a' \in (\mathbb{C}^*)^m$, *et tout* x' , $x' \in \mathring{K}$, $\nu_{f;a';d;K;x'}$ *est inversible et si l'on pose*

$$\sigma_{f;a';d;K;x'} = \tau_{a';d;K;x'} \circ \nu^{-1}_{f;a';d;K;x'} ,$$

$\sigma_{f;a';d;K;x'}$ *ne dépend ni de* a' *ni de* x' .

Démonstration. Comme $\nu_{f;a;d;K;x}$ est inversible, il résulte de la proposition 3.1.2 que pour tout g , $g \in B(K)$, il existe une famille unique $(g_i)_{0 \leq i \leq m}$ d'éléments de $B(K)$ telle que pour tout i , $1 \leq i \leq m$, $g_i \in B_{-d_i+\Delta_i(d)}(K)$, $g_o \in B_{\Delta_o(d)}(K)$ et $g = \sum_{i=1}^{m} g_i(f_i|K) + g_o$. Par une nouvelle application de la proposition 3.1.2, en vertu de 3.7.14, on en déduit que pour tout a' , $a' \in (\mathbb{C}^*)^m$, et tout x' , $x' \in \mathring{K}$, $\nu_{f;a';d;K;x'}$ est inversible. D'autre part, il résulte de 3.1.3, (iii) que

$$\sigma_{f;a';d;K;x'}(g) = (g_1,\dots,g_m) = \sigma_{f;a;d;K;x}(g) \quad ,$$

ce qui démontre le corollaire.

(3.1.6) S'il existe a' , $a' \in (\mathbb{C}^*)^m$, et x' , $x' \in \overset{\circ}{K}$, tels que $\nu_{f;a';d;K;x'}$ soit inversible (dans quel cas, en vertu de 3.1.5, pour tout a'' , $a'' \in (\mathbb{C}^*)^m$, et tout x'' , $x'' \in \overset{\circ}{K}$, $\nu_{f;a'';d;K;x''}$ est inversible), on désigne par $\sigma_{f;d;x}$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\sigma_{f;d;K} : B(K) \longrightarrow B(K)^m$$

définie par

$$\sigma_{f;d;K} = \tau_{a';d;K;x'} \circ \nu^{-1}_{f;a';d;K;x'}$$

(qui, en vertu de 3.1.5, est indépendante de a' et x').

Remarque 3.1.7.- Supposons $m \geq 2$ et soit i_o , $1 < i_o \leq m$. S'il existe j_o , $1 \leq j_o < i_o$, tel que $d_{j_o} \leq d_{i_o}$, et si l'on pose

$$d' = (d_1,\dots,d_{i_o-1}, d_{i_o+1},\dots,d_m) \quad ,$$

il résulte de 2.7.11 et 2.7.12 que

$$\Delta_i(d) = \Delta_i(d') \quad , \quad 0 \leq i < i_o \quad ,$$

$$\Delta_{i_o}(d) = \emptyset \; ,$$

$$\Delta_i(d) = \Delta_{i-1}(d') \quad , \; i_o < i \leq m \quad .$$

Si en plus, on pose

$$a' = (a_1,\dots,a_{i_o-1}, a_{i_o+1},\dots,a_m)$$

et

$$f' = (f_1,\dots,f_{i_o-1}, f_{i_o+1},\dots,f_m) \quad ,$$

on a

$$\nu_{f';a';d';K;x} = \nu_{f;a;d;K;x} \quad .$$

En effet,

$$\nu_{f;a;d;K;x} = \mathrm{id}_{B(K)} + (B(K;f) - \mu_{a;d;K;x}) \circ \tau_{a;d;K;x} =$$

$$\mathrm{id}_{B(K)} + \sum_{i=1}^{m} (B(K;f_i) - a_i \mu^{d_i}_{K;x}) \circ \tau_{a;d;K;x;i}$$

où
$$\tau_{a;d;K;x;i} = a_i^{-1}\, \tau_{K;x}^{d_i} \circ \prod_{j=1}^{i-1} (\mathrm{id}_{B(K)} - q_{d_j;K;x})$$
(2.7). Or, il est clair que pour tout i , $1 \leq i < i_o$,
$$\tau_{a;d;K;x;i} = \tau_{a';d';K;x;i} \ .$$
D'autre part, il résulte de 2.6.17 que
$$\mathrm{Im}(\prod_{j=1}^{i_o-1} (\mathrm{id}_{B(K)} - q_{d_j;K;x})) = B_{\mathbb{N}^p - \bigcup\limits_{1\leq j<i_o} (d_j+\mathbb{N}^p)}(K) \ ,$$
et en vertu de 2.6.20, on a
$$\mathrm{Ker}(\tau_{K;x}^{d_{i_o}}) = \mathrm{Ker}(q_{d_{i_o};K;x}) = B_{\mathbb{N}^p - (d_{i_o}+\mathbb{N}^p)}(K) \ .$$
Comme l'hypothèse implique que
$$d_{i_o} + \mathbb{N}^p \subset d_{j_o} + \mathbb{N}^p \subset \bigcup_{j=1}^{i_o-1} (d_j+\mathbb{N}^p) \ ,$$
d'où
$$B_{\mathbb{N}^p - \bigcup\limits_{1\leq j<i_o} (d_j+\mathbb{N}^p)}(K) \subset B_{\mathbb{N}^p - (d_{i_o}+\mathbb{N}^p)}(K) \ ,$$
on en déduit que
$$\tau_{a;d;K;x;i_o} = 0$$
et que pour tout i , $i_o < i \leq m$,
$$\tau_{a;d;K;x;i} = a_i^{-1}\, \tau_{K;x}^{d_i} \circ \prod_{\substack{1\leq j<i-1 \\ j\neq i_o}} (\mathrm{id}_{B(K)} - q_{d_j;K;x}) = \tau_{a';d';K;x;i-1} \ ,$$
ce qui démontre que
$$\nu_{f';a';d';K;x} = \nu_{f;a;d;K;x}$$
En particulier, $\nu_{f';a';d';K;x}$ est inversible, si et seulement si, il en est de de même pour $\nu_{f;a;d;K;x}$, et sous cette hypothèse, il résulte de ce qui précède que si l'on pose
$$\sigma_{f;d;K} = (\sigma_1,\ldots,\sigma_m) \ ,$$
on a
$$\sigma_{i_o} = 0 \ , \quad \sigma_{f';d';K} = (\sigma_1,\ldots,\sigma_{i_o-1}, \sigma_{i_o+1},\ldots,\sigma_m)$$

et

$$\mathrm{id}_{B(K)} - B(K;f') \circ \sigma_{f';d';K} = \mathrm{id}_{B(K)} - B(K;f) \circ \sigma_{f;d;K} \quad .$$

Dans la plupart des questions, on peut donc supposer, sans perte de généralité, que pour tout i et j , $1 \leq j < i \leq m$, on a $d_j \not\leq d_i$.

(3.2) Pour tout i , $1 \leq i \leq m$, on désigne par $E_{i;x}(f)$ (ou plus simplement par $E_i(f)$, quand aucune confusion n'en résulte) la partie de $\mathbb{N}^p$ définie par

$$E_{i;x}(f) = E_x(f_i) = \{d \in \mathbb{N}^p \ : \ \frac{\partial^{|d|} f_i}{\partial^d x}(x) \neq 0\}$$

(cf. II,1.1).

Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_m,\mathcal{D}')$, où pour tout i , $1 \leq i \leq m$, $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{N}^p$ et $\mathcal{D}' \subset \mathbb{N}^p$, tel que pour tout i , $1 \leq i \leq m$, on ait

$$\mathcal{D}_i + E_{i;x}(f) \subset \mathcal{D}' \quad .$$

Alors on a

$$B(K;f) \ (\prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i;x}(K)) \subset B_{\mathcal{D}';x}(K)$$

(2.6.5 et 2.6.4) et on désigne par $B_{\mathcal{D};x}(K;f)$ (ou plus simplement par $B_{\mathcal{D}}(K;f)$, quand aucune confusion n'en résulte) l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$B_{\mathcal{D};x}(K;f) \ : \ \prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i;x}(K) \longrightarrow B_{\mathcal{D}';x}(K)$$

induite par $B(K;f)$. Si en plus pour tout i , $1 \leq i \leq m$, on a

$$\mathcal{D}' \cap \Delta_i(d) \subset d_i + \mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}' \quad ,$$

on a

$$\nu_{f;a;d;K;x}(B_{\mathcal{D}';x}(K)) \subset B_{\mathcal{D}';x}(K)$$

(2.8), et on désigne alors par $\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x} \ : \ B_{\mathcal{D}';x}(K) \longrightarrow B_{\mathcal{D}';x}(K)$$

induite par $\nu_{f;a;d;K;x}$. Dans la suite du n°3.2, on supposera que $\mathcal{D}$ satisfait aux conditions précédentes.

PROPOSITION 3.2.1.- *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ *est inversible (en tant que morphisme d'espaces de Banach) ;*

ii) $\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ *est bijective ;*

iii) *pour tout* g , $g \in B_{\mathcal{D}';x}(K)$, *il existe une famille unique* $(g_i)_{0\leqq i\leqq m}$ *d'éléments de* $B(K)$ *telle que pour tout* i , $1 \leqq i \leqq m$, $g_i \in B_{-d_i+(\mathcal{D}'\cap\Delta_i(d));x}(K)$, $g_o \in B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);x}(K)$ *et*

$$g = \sum_{i=1}^{m} g_i(f_i|K) + g_o \quad .$$

Démonstration. La proposition résulte du théorème de Banach et des propositions 2.8.2 et 1.4,(b).

PROPOSITION 3.2.2.- *Si l'on suppose que* $\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ *est inversible et si l'on pose*

$$\sigma_{\mathcal{D};f;a;d;K;x} = \tau_{\mathcal{D};a;d;K;x} \circ \nu^{-1}_{\mathcal{D};f;a;d;K;x} \quad ,$$

on a :

i) $\mathrm{Im}(\sigma_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}) = \sum_{i=1}^{m} B_{-d_i+(\mathcal{D}'\cap\Delta_i(d));x}(K)$;

ii) $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}';x}(K)} - B_{\mathcal{D};x}(K;f) \circ \sigma_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}) = B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);x}(K)$;

iii) *pour tout* g , $g \in B_{\mathcal{D}';x}(K)$, *si* $(g_i)_{0\leqq i\leqq m}$ *désigne l'unique famille d'éléments de* $B(K)$ *telle que pour tout* i , $1 \leqq i \leqq m$, $g_i \in B_{-d_i+(\mathcal{D}'\cap\Delta_i(d));x}(K)$, $g_o \in B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);x}(K)$ *et* $g = \sum_{i=1}^{m} g_i(f_i|K) + g_o$ (cf. 3.2.1), *on a*

$$\sigma_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}(g) = (g_1,\dots,g_m)$$

et

$$(\mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}';x}(K)} - B_{\mathcal{D};x}(K;f) \circ \sigma_{\mathcal{D};f;a;d;K;x})(g) = g_o \quad ;$$

iv) $B_{\mathcal{D};x}(K;f)$ *est une scission de* $\sigma_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$;

v) *les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\sigma_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ *est une scission* ($\mathbb{C}$*-linéaire continue, normale*) *de* $B_{\mathcal{D};x}(K;f)$;

b) $\mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};x}(K;f)) \cap B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);x}(K) = \{0\}$;

c) *pour tout* g , $g \in \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};x}(K;f))$, *il existe une famille* $(g_i)_{1 \leq i \leq m}$ *d'éléments de* $B(K)$ *telle que pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $g_i \in B_{-d_i+(\mathcal{D}' \cap \Delta_i(d));x}(K)$ *et* $g = \sum_{i=1}^{m} g_i(f_i|K)$;

d) *pour tout* g , $g \in \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};x}(K;f))$, *si* $(g_i)_{0 \leq i \leq m}$ *désigne l'unique famille d'éléments de* $B(K)$ *telle que pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $g_i \in B_{-d_i+(\mathcal{D}' \cap \Delta_i(d));x}(K)$, $g_0 \in B_{\mathcal{D}' \cap \Delta_0(d);x}(K)$ *et* $g = \sum_{i=1}^{m} g_i(f_i|K) + g_0$ (cf. 3.2.1), *on a* $g_0 = 0$.

Démonstration. La proposition résulte de 2.8.2, (1.4), (c) et (1.5).

Exemple 3.2.3. En gardant les hypothèses et les notations de la proposition 3.2.2, si $m = 1$, comme en vertu de 2.8.1, on a

$$-d_1 + (\mathcal{D}' \cap \Delta_1(d)) = \mathcal{D}_1 \cap (-d_1 + \Delta_1(d)) = \mathcal{D}_1 \quad ,$$

il résulte de 3.2.2 (i), que $\sigma_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ est surjective et de 3.2.2,(iv) que

$$\sigma_{\mathcal{D};f;a;d;K;x} \circ B_{\mathcal{D};x}(K;f) = \mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}_1;x}(K)} \quad .$$

En particulier, $\sigma_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ est une scission normale de $B_{\mathcal{D};x}(K;f)$ et on a

$$\mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};x}(K;f)) \cap B_{\mathcal{D}' \cap \Delta_0(d);x}(K) = \{0\}$$

(3.2.2, (v)).

COROLLAIRE 3.2.4.- *Si l'on suppose que* $\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ *est inversible, alors pour tout* a' , $a' \in (\mathbb{C}^*)^m$, $\nu_{\mathcal{D};f;a';d;K;x}$ *est inversible et si l'on pose*

$$\sigma_{\mathcal{D};f;a';d;K;x} = \tau_{\mathcal{D};a';d;K;x} \circ \nu^{-1}_{\mathcal{D};f;a';d;K;x} \quad ,$$

$\sigma_{\mathcal{D};f;a';d;K;x}$ *ne dépend de* a' .

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du corollaire 3.1.5 par une double application de 3.2.1 et 3.2.2, (iii).

(3.2.5) S'il existe a' , $a' \in (\mathbb{C}^*)^m$, tel que $\nu_{\mathcal{D};f;a';d;K;x}$ soit inversible (dans quel cas, en vertu de 3.2.4, pour tout a'' , $a'' \in (\mathbb{C}^*)^m$, $\nu_{\mathcal{D};f;a'';d;K;x}$ est inversible), on désigne par $\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;x}$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;x} : B_{\mathcal{D}';x}(K) \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i;x}(K)$$

définie par

$$\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;x} = \tau_{\mathcal{D};a';d;K;x} \circ \nu^{-1}_{\mathcal{D};f;a';d;K;x}$$

(qui en vertu de 3.2.4, est indépendante de a').

LEMME 3.2.6.- *Pour tout point* x' , $x' \in \overset{\circ}{K}$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $\mathcal{D}_i + E_{i;x'}(f) \subset \mathcal{D}'$;

ii) $B(K;f)(\prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i;x'}(K)) \subset B_{\mathcal{D}';x'}(K)$.

Démonstration. Il suffit de démontrer que la condition (ii) implique la condition (i) (3.2). Or, l'inclusion

$$B(K;f)\ (\prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i;x'}(K)) \subset B_{\mathcal{D}';x'}(K)$$

implique en particulier que pour tout i , $1 \leq i \leq m$, et tout d , $d \in \mathcal{D}_i$, si l'on désigne par g la fonction $g : K \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$g(y) = (y-x')^d \quad , \text{ pour } y \in K \ ,$$

on a $f_i g \in B_{\mathcal{D}';x'}(K)$ (car $g \in B_{\mathcal{D}_i;x}(K)$) , et comme $E_{x'}(f_i g) = d + E_{i;x'}(f)$, on en déduit que $d + E_{i;x'}(f) \subset \mathcal{D}'$, ce qui démontre le lemme.

PROPOSITION 3.2.7.- *Soient* p' *et* p'' *des entiers,* $p' \in \mathbb{N}$, $p'' \in \mathbb{N}$, *tels que* $p = p' + p''$, $\pi : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^{p'}$ *la première projection, et supposons que pour tout* i , $1 \leq i \leq m$,

$$((\mathbb{N}^{p'} \times \mathbb{N}^{p''}) - \mathcal{D}_i) + (\{0\} \times \mathbb{N}^{p''}) \subset (\mathbb{N}^{p'} \times \mathbb{N}^{p''}) - \mathcal{D}_i$$

et

$$((\mathbb{N}^{p'} \times \mathbb{N}^{p''}) - \mathcal{D}') + (\{0\} \times \mathbb{N}^{p''}) \subset (\mathbb{N}^{p'} \times \mathbb{N}^{p''}) - \mathcal{D}' \ .$$

Alors pour tout point x' *de* $\overset{\circ}{K}$ *tel que* $\pi(x') = \pi(x)$ *on a :*

i) *pour tout* i , $1 \leq i \leq m$,

$$\mathcal{D}_i + E_{i;x'}(f) \subset \mathcal{D}' \ ;$$

ii) $B_{\mathcal{D};x'}(K;f) = B_{\mathcal{D};x}(K;f)$;

iii) *si* $\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ *est inversible, il en est de même pour* $\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x'}$ *et on a*

$$\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;x'} = \sigma_{\mathcal{D};f;d;K;x} \ .$$

Démonstration. Il résulte de 2.6.26 que pour tout i , $1 \leq i \leq m$,

$$B_{\mathcal{D}_i;x'}(K) = B_{\mathcal{D}_i;x}(K)$$

et

$$B_{\mathcal{D}';x'}(K) = B_{\mathcal{D}';x}(K)$$

On en déduit que

$$B(K;f)(\prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i;x'}) \subset B_{\mathcal{D}';x'} \quad ,$$

ce qui démontre l'assertion (i), l'assertion (ii) en découle aussitôt, et l'assertion (iii) en résulte par une double application de 3.2.1 et 3.2.2,(iii).

Remarque 3.2.8.- Supposons $m \geq 2$ et soit i_o , $1 < i_o \leq m$. S'il existe j_o , $1 \leq j_o < i_o$, tel que $d_{j_o} \leq d_{i_o}$, et si l'on pose

$$d' = (d'_1,\dots,d'_{m-1}) = (d_1,\dots,d_{i_o-1}, d_{i_o+1},\dots,d_m)$$

et

$$\hat{\mathcal{D}} = (\hat{\mathcal{D}}_1,\dots,\hat{\mathcal{D}}_{m-1},\mathcal{D}') = (\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_{i_o-1}, \mathcal{D}_{i_o+1},\dots,\mathcal{D}_m,\mathcal{D}') \quad ,$$

il résulte de 3.1.7 que pour tout i , $1 \leq i \leq m-1$,

$$\mathcal{D}' \cap \Delta_i(d') \subset d'_i + \hat{\mathcal{D}}_i \subset \mathcal{D}' \quad .$$

Si en plus, on pose

$$a' = (a_1,\dots,a_{i_o-1},a_{i_o+1},\dots,a_m)$$

et

$$f' = (f_1,\dots,f_{i_o-1},f_{i_o+1},\dots,f_m) \quad ,$$

il est clair que pour tout i , $1 \leq i \leq m-1$, on a

$$\hat{\mathcal{D}}_i + E_{i;x}(f') \subset \mathcal{D}' \quad ,$$

et on démontre comme dans 3.1.7, que

$$\nu_{\hat{\mathcal{D}};f';a';d';K;x} = \nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x} \quad ,$$

et que si $\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ est inversible et si l'on pose

$$\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;x} = (\sigma_1,\dots,\sigma_m) \quad ,$$

on a

$$\sigma_{i_o} = 0 \quad , \quad \sigma_{\hat{\mathcal{D}};f';d';K;x} = (\sigma_1,\dots,\sigma_{i_o-1}, \sigma_{i_o+1},\dots,\sigma_m)$$

et

$$id_{B_{\mathcal{D}';x}(K)} - B_{\hat{\mathcal{D}};x}(K;f') \circ \sigma_{\hat{\mathcal{D}};f';d';K;x} = id_{B_{\mathcal{D}';x}(K)} - B_{\mathcal{D};x}(K;f) \circ \sigma_{\mathcal{D};f;d;K;x} \quad .$$

Remarque 3.2.9.- L'hypothèse que les fonctions $f_1,\dots,f_m$ sont définies et analytiques sur un ouvert de $\mathbb{C}^p$ contenant le polydylindre K n'est pas indispensable pour les résultats des n^{os} (3.1) et (3.2). Il suffit de disposer simplement que pour tout i , $1 \leq i \leq m$, $f_i \in B(K)$, définir l'application $B(K;f)$ par

$$B(K;f)(g_1,\dots,g_m) = \sum_{i=1}^{m} g_i\, f_i \quad , \text{ pour } \quad (g_1,\dots,g_m) \in B(K)^m \quad ,$$

et poser $J_K = \mathrm{Im}(B(K;f))$.

(3.3) Dans la suite de ce paragraphe, on se fixe une fois pour toutes une relation d'ordre total $\leq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit $\leq$ sur $\mathbb{N}^p$. Pour toute fonction analytique g sur U on désigne par g_x le germe de g au point x .

LEMME 3.3.1.- *Soit* $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_m, \mathcal{D}')$, *où pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{N}^p$ *et* $\mathcal{D}' \subset \mathbb{N}^p$, *tel que pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, *on ait*

$$\mathcal{D}_i + E_{i;x}(f) \subset \mathcal{D}' \quad ,$$

et considérons les assertions suivantes : (cf. II,1.1 et II, 1.2) :

i) $M_{\alpha;\mathcal{D}';J;K;x} \subset \{d_1,\dots,d_m\}$;

ii) $P_{\alpha;\mathcal{D}';J;K;x} \cap \Delta_o(d) = \emptyset$;

iii) $\mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};x}(K;f)) \cap B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);x}(K) = \emptyset$.

Alors on a

a) (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) ;

b) *si* $\{d_1,\dots,d_m\} \subset P_{\alpha;\mathcal{D}';J;K;x}$, *alors* (i) $\Rightarrow$ (ii) ;

c) *si l'on suppose que*

α) *pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $\mathcal{D}' \cap \Delta_i(d) \subset d_i + \mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}'$;

β) *pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $f_{i,x} \neq 0$ *et* $v_{\alpha;x}(f_i) = d_i$;

γ) $\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ *est inversible* ;

δ) $\mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};x}(K;f)) = J_K \cap B_{\mathcal{D}';x}(K)$;

alors (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Démonstration. Pour démontrer (a), on remarque que $M_{\alpha;\mathcal{D}';J;K;x} \subset \{d_1,\dots,d_m\}$ implique que $P_{\alpha;\mathcal{D}';J;K;x} \subset \bigcup_{1\leq i\leq m} (d_i + \mathbb{N}^p)$ (I,1.2), et comme

$\Delta_o(d) = \mathbb{N}^p - \bigcup_{1\leq i\leq m} (d_i + \mathbb{N}^p)$, on en déduit que (i) implique (ii). Démontrons que (ii) implique (iii). Soit $g \in \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};x}(K;f)) \cap B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);x}(K)$ et supposons que $g \neq 0$. Alors on a $v_{\alpha;x}(g) \in \Delta_o(d)$, et comme $g \in \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};x}(K;f))$, on a $g \in J_K$ et $g \in B_{\mathcal{D}';x}(K)$, donc $E_x(g) \subset \mathcal{D}'$, d'où $v_{\alpha;x}(g) \in P_{\alpha;\mathcal{D}';J;K;x}$. On en déduit que $P_{\alpha;\mathcal{D}';J;K;x} \cap \Delta_o(d) \neq \emptyset$, ce qui prouve (a). Pour démontrer (b), il suffit de démontrer que si $\{d_1,\dots,d_m\} \subset P_{\alpha;\mathcal{D}';J;K;x}$, alors (ii) implique (i). Soit $d \in M_{\alpha;\mathcal{D}';J;K;x}$. Alors $d \in P_{\alpha;\mathcal{D}';J;K;x}$ et (ii) implique que $d \in \bigcup_{1\leq i\leq m} (d_i+\mathbb{N}^p)$, donc il existe i , $1 \leq i \leq m$, tel que $d_i \leq d$, et comme $d_i \in P_{\alpha;\mathcal{D}';J;K;x}$, on a $d_i = d$, ce qui prouve (b). Il reste à démontrer que sous les hypothèses de (c) on a (iii) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que $P_{\alpha;\mathcal{D}';J;K;x} \cap \Delta_o(d) \neq \emptyset$. Alors il existe g , $g \in J_K$, $g \in B_{\mathcal{D}';x}(K)$, $g \neq 0$, tel que $v_{\alpha;x}(g) \in \Delta_o(d)$. Or, en vertu de l'hypothèse (δ), $g \in \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};x}(K;f))$, et en vertu des hypothèses (α) et (γ), l'assertion (iii) entraîne l'existence d'une famille $(g_i)_{1\leq i\leq m}$ d'éléments de $B(K)$ telle que pour tout i , $1 \leq i \leq m$, $g_i \in B_{-d_i+(\mathcal{D}'\cap\Delta_i(d));x}(K)$ et $g = \sum_{i=1}^{m} g_i(f_i|K)$ (3.2.2), (v). D'autre part, en vertu de l'hypothèse (β) et de (II, 1.1.3), pour tout i , $1 \leq i \leq m$, $v_{\alpha;x}(g_i(f_i|K)) \in \mathcal{D}' \cap \Delta_i(d)$, et comme la famille $(\Delta_i(d))_{1\leq i\leq m}$ est formée de parties deux à deux disjointes de $\mathbb{N}^p$, pour tout i et j , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$, $i \neq j$, on a $v_{\alpha;x}(g_i(f_i|K)) \neq v_{\alpha;x}(g_j(f_j|K))$, d'où $v_{\alpha;x}(g) = \min_{1\leq i\leq m} v_{\alpha;x}(g_i(f_i|K))$ (II, 1.1.5). On en déduit qu'il existe i , $1 \leq i \leq m$, tel que $v_{\alpha;x}(g) \in \mathcal{D}' \cap \Delta_i(d)$, ce qui est absurde, car $v_{\alpha;x}(g) \in \Delta_o(d)$ et $\Delta_i(d) \cap \Delta_o(d) = \emptyset$.

Remarque 3.3.2. L'hypothèse $\{d_1,\dots,d_m\} \subset P_{\alpha;\mathcal{D}';J;K;x}$ de 3.3.1, (b) est en particulier vérifiée si pour tout i , $1 \leq i \leq m$, $f_{i,x} \neq 0$, $v_{\alpha;x}(f_i) = d_i$ et $E_{i;x}(f) \subset \mathcal{D}'$. D'autre part, comme l'inclusion

$$\mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};x}(K;f)) \subset J_K \cap B_{\mathcal{D}';x}(K)$$

est toujours vérifiée, l'hypothèse (δ) de (3.3.1),(c) signifie que pour tout g , $g \in B_{\mathcal{D}';x}(K)$, s'il existe une famille $(g_i)_{1\leq i\leq m}$ d'éléments de $B(K)$ telle que

$$g = \sum_{i=1}^{m} g_i(f_i|K) \quad ,$$

alors il existe une famille $(g_i')_{1 \leq i \leq m}$ d'éléments de $B(K)$ telle que pour tout i , $1 \leq i \leq m$, $g_i' \in B_{\mathcal{D}_i;x}(K)$ et

$$g = \sum_{i=1}^{m} g_i'(f_i|K) \quad .$$

On peut démontrer que cela est vrai sous des hypothèses assez générales sur $\mathcal{D}$ et J , par exemple si $\mathcal{D}$ satisfait aux hypothèses de 7.1.0 et J_K est engendré comme idéal de $B(K)$ par $J_K \cap B_{\mathcal{D}';x}(K)$. (Voir aussi 3.3.5).

PROPOSITION 3.3.3.- *Si pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $f_{i,x} \neq 0$ *et* $v_{\alpha;x}(f_i) = d_i$, *et si* $\nu_{f;a;d;K;x}$ *est inversible, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\sigma_{f;d;K}$ *est une scission de* $B(K;f)$;

ii) $M_{\alpha;J;K;x} \subset \{d_1,\ldots,d_m\}$;

iii) $M_{\alpha;J;x} \subset \{d_1,\ldots,d_m\}$;

iv) $P_{\alpha;J;K;x} \cap \Delta_o(d) = \emptyset$;

v) $P_{\alpha;J;x} \cap \Delta_o(d) = \emptyset$.

Démonstration. En vertu de 3.1.3, (v) et 3.1.6, l'équivalence de (i), (ii) et (iv) résulte de 3.3.1 et 3.3.2 appliqués à $\mathcal{D}_1 = \ldots = \mathcal{D}_m = \mathcal{D}' = \mathbb{N}^p$. D'autre part, l'équivalence de (ii) et (iii) et de (iv) et (v) résulte de (II, 3.7).

PROPOSITION 3.3.4.- *Soient* $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_m,\mathcal{D}')$, *où pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{N}^p$ *et* $\mathcal{D}' \subset \mathbb{N}^p$, *et* J' *un idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *tel que* $J \subset J'$. *On suppose que :*

a) *pour tout* i , $1 \leq i \leq m$,

$$\mathcal{D}' \cap \Delta_i(d) \subset d_i + \mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}' \quad ;$$

b) *pour tout* i , $1 \leq i \leq m$,

$$\mathcal{D}_i + E_{i;x}(f) \subset \mathcal{D}' \quad ;$$

c) $\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ *est inversible ;*

d) $P_{\alpha;\mathcal{D}';J';K;x} \cap \Delta_o(d) = \emptyset$.

Alors :

i) $\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;x}$ *est une scission de* $B_{\mathcal{D};x}(K;f)$;

ii) $J'_K \cap B_{\mathcal{D}';x}(K) = \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};x}(K;f))$.

Démonstration. L'inclusion $J \subset J'$ implique que

$$P_{\alpha;\mathcal{D}';J;K;x} \subset P_{\alpha;\mathcal{D}';J';K;x}$$

(II,1.3), et en vertu de l'hypothèse (d), on a

$$P_{\alpha;\mathcal{D}';J;K;x} \cap \Delta_o(d) = \emptyset \quad .$$

On en déduit que $\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;x}$ est une scission de $B_{\mathcal{D};x}(K;f)$ ((3.3.1),(a) et (3.2.2),(v)). D'autre part, l'inclusion $J \subset J'$ implique que

(3.3.4.1) $\qquad \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};x}(K;f)) \subset J_K \cap B_{\mathcal{D}';x}(K) \subset J'_K \cap B_{\mathcal{D}';x}(K) \quad .$

Pour démontrer l'assertion (ii), il suffit donc de vérifier que

$$J'_K \cap B_{\mathcal{D}';x}(K) \subset \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};x}(K;f)) \quad .$$

Soit g , $g \in J'_K \cap B_{\mathcal{D}';x}(K)$, et posons

$$h = g - B_{\mathcal{D};x}(K;f) \circ \sigma_{\mathcal{D};f;d;K;x}(g) \quad .$$

En vertu de 3.3.4.1, on a $h \in J'_K \cap B_{\mathcal{D}';x}(K)$, et si $h \neq 0$, on en déduit que $v_{\alpha;x}(h) \in P_{\alpha;\mathcal{D}';J';K;x}$, et comme

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}';x}(K)} - B_{\mathcal{D};x}(K;f) \circ \sigma_{\mathcal{D};f;d;K;x}) = B_{\mathcal{D}' \cap \Delta_o(d);x}(K)$$

((3.2.2), (ii)), on a $v_{\alpha;x}(h) \in \Delta_o(d)$, ce qui est contraire à l'hypothèse (d). On a donc $h = 0$, d'où $g \in \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};x}(K;f))$, ce qui démontre la proposition .

Remarque 3.3.5. On peut remplacer l'hypothèse (d) de la proposition 3.3.4 par l'hypothèse plus forte

$$M_{\alpha;\mathcal{D}';J';K;x} \subset \{d_1,\dots,d_m\} \quad .$$

D'autre part, en appliquant la proposition 3.3.4 à $J' = J$, on en déduit que si $\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ est inversible et si $P_{\alpha;\mathcal{D};J;K;x} \cap \Delta_o(d) = \emptyset$ on a

$$\mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};x}(K;f)) = J_K \cap B_{\mathcal{D}';x}(K)$$

(voir remarque 3.3.2).

COROLLAIRE 3.3.6.- *En gardant les notations et les hypothèses de la proposition* 3.3.4 , *on a*

$$P_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J}';K;x} = P_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J};K;x} \quad \text{et} \quad M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J}';K;x} = M_{\alpha;\mathcal{D}',\mathcal{J};K;x} \quad .$$

Démonstration. En vertu de 3.3.4.1, il résulte de 3.3.4,(ii) que

$$\mathcal{J}'_K \cap B_{\mathcal{D}';x}(K) = \mathcal{J}_K \cap B_{\mathcal{D}';x}(K) \quad ,$$

ce qui démontre le corollaire.

COROLLAIRE 3.3.7.- *En gardant les notations de la proposition* 3.3.4 , *si l'on suppose en plus que* $\mathcal{J}'_K$ *est engendré comme idéal de* $B(K)$ *par* $\mathcal{J}'_K \cap B_{\mathcal{D}';x}(K)$, *on a* $\mathcal{J}'_K = \mathcal{J}_K$.

Démonstration. Comme l'inclusion $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}'$ implique que $\mathcal{J}_K \subset \mathcal{J}'_K$, et comme $\mathcal{J}'_K$ est engendré par $\mathcal{J}'_K \cap B_{\mathcal{D}';x}(K)$, le corollaire résulte de 3.3.4, (ii).

COROLLAIRE 3.3.8.- *Soit* $\mathcal{J}'$ *un idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *tel que* $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}'$. *On suppose que :*

a) $\nu_{f;a;d;K;x}$ *est inversible ;*

b) $P_{\alpha;\mathcal{J}';K;x} \cap \Delta_o(d) = \emptyset$.

Alors

i) $\sigma_{f;d;K}$ *est une scission de* $B(K;f)$;

ii) $\mathcal{J}'_K = \mathcal{J}_K$.

Démonstration. Le corollaire est un cas particulier de la proposition 3.3.4 appliquée à $\mathcal{D}_1 = \ldots = \mathcal{D}_m = \mathcal{D}' = \mathbb{N}^p$.

Remarque 3.3.9. En vertu de (II, 3.7), l'hypothèse (b) du corollaire 3.3.8 peut être remplacée par la condition équivalente

$$P_{\alpha;\mathcal{J}';x} \cap \Delta_o(d) = \emptyset \quad ,$$

ou par l'une des hypothèses plus fortes (et équivalentes entre elles)

$$M_{\alpha;\mathcal{J}';K;x} \subset \{d_1,\ldots,d_m\}$$

ou

$$M_{\alpha;\mathcal{J}';x} \subset \{d_1,\ldots,d_m\} \quad .$$

Bien entendu, si l'on suppose en plus que pour tout i , $1 \leq i \leq m$, $f_{i,x} \neq 0$ et $v_{\alpha;x}(f_i) = d_i$, ces quatre conditions sont équivalentes (3.3.3 et 3.3.6).

§4. Inversibilité de $\nu_{f;a;d;K;x}$

Dans la plupart des propositions du paragraphe précédent on suppose que "$\nu_{f;a;d;K;x}$" est inversible (inversibilité qui équivaut à la possibilité de "diviser" par f (cf.(3.1.2))). Il est donc primordial d'étudier des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi. Dans ce paragraphe, on étudie de telles conditions suffisantes pour des polycylindres "petits". Vu l'importance capitale de cette question, on la développera très en détail et on exposera trois versions différentes des résultats obtenus. La première (prop. 4.3.1) énonce les conditions suffisantes les plus faibles qu'on puisse obtenir par nos méthodes. La deuxième (prop. 4.4.3) met en évidence la variation "continue" de ces conditions en fonction du point x, et la troisième (prop. 4.4.5) nous fournit explicitement des polycylindres compacts K pour lesquels ces conditions sont vérifiées. Les résultats de ce paragraphe étant très techniques, on intercalera quelques commentaires informels pour en faciliter, si possible, la lecture. Dans les paragraphes suivants, on en exposera une formulation plus agréable (mais aussi moins précise) en termes de filtres. Néanmoins, les énoncés techniques de ce paragraphe sont incontournables pour la démonstration de certains de nos résultats.

(4.1) Soient p un entier, $p \in \mathbb{N}$, $\leqq_\alpha$ une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$ et d un élément de $\mathbb{N}^p$. On désigne par $S_\alpha(d)$ la partie de $\mathbb{N}^p$ définie par

$$S_\alpha(d) = \{d' \in \mathbb{N}^p : d <_\alpha d'\} \quad ,$$

par $r_{\alpha;d}$ le nombre d'éléments de l'ensemble fini $M(S_\alpha(d))$ (cf. (I,1.3))

$$r_{\alpha;d} = \mathrm{card}(M(S_\alpha(d)))$$

et pour tout i, $1 \leqq i \leqq r_{\alpha;d}$, par $s_{\alpha;i}(d)$ l'élément de $\mathbb{N}^p$ défini par récurrence sur i par

$$s_{\alpha;1}(d) = \min_\alpha(M(S_\alpha(d)))$$

et

$$s_{\alpha;i}(d) = \min_\alpha(M(S_\alpha(d)) - \{s_{\alpha;1}(d),\ldots,s_{\alpha;i-1}(d)\}) \quad .$$

Si en plus $\leqq_\alpha$ est moins fine que $\leqq$, ce qui implique que $\leqq_\alpha$ est une relation de bon ordre (I,1.5), on a $s_{\alpha;1}(d) = s_\alpha(d)$, où $s_\alpha(d)$ désigne le successeur de d pour $\leqq_\alpha$ (chapitre 0), et

(4.1.1) $$S_\alpha(d) = \bigcup_{1 \leqq i \leqq r_{\alpha;d}} (s_{\alpha;i}(d) + \mathbb{N}^p)$$

(I,1.3).

Exemple 4.1.2. Si $\leqq_\alpha$ est la relation d'ordre antilexicographique $\leqq_L$ sur $\mathbb{N}^p$ (cf. I,3.12.1), on vérifie facilement que pour d , $d \in \mathbb{N}^p$, $d = (d_1,\dots,d_p)$, on a $r_{\alpha;d} = p$ et pour tout i , $1 \leqq i \leqq p$,

$$s_{\alpha;i}(d) = (\delta_{i1},\dots,\delta_{ip}) \quad ,$$

où

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{, pour } 1 \leqq j < i \\ d_j + 1 & \text{, pour } j = 1 \\ d_j & \text{, pour } i < j \leqq p \ . \end{cases}$$

(4.2) Dans la suite de ce paragraphe, on se fixe une fois pour toutes un entier p , $p \in \mathbb{N}$, et une relation d'ordre total $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$. On rappelle (chapitre O) qu'on désigne par $d(.,.)$ la distance sur $\mathbb{C}^p$ définie par la norme sup :

$$d(x,y) = \sup_{1 \leqq i \leqq p} |x_i - y_i| \ , \text{ pour } x = (x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{C}^p \text{ et } y = (y_1,\dots,y_p) \in \mathbb{C}^p .$$

Si x est un point de $\mathbb{C}^p$ et A une partie de $\mathbb{C}^p$, on pose

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} (d(x,y)) \ .$$

Si B est une partie de $\mathbb{C}^p$, on pose

$$d(A,B) = \inf_{x \in A} (d(x,B)) = \inf_{x \in A, y \in B} (d(x,y)) \ .$$

On a $d(\bar{A},\bar{B}) = d(A,B)$, et si $\bar{A}$ est compact on a $d(A,B) = 0$, si et seulement si $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$.
Si A désigne une partie de $\mathbb{C}^p$ et L une partie compacte de A , on désigne par $\|\cdot\|_L$ la semi-norme sur l'algèbre $C(A)$ des fonctions continues sur A à valeur dans $\mathbb{C}$, définie par

$$\|f\|_L = \sup_{y \in L} |f(y)| \quad , \text{ pour } f \in C(A) \quad ,$$

qui est une norme, si et seulement si , $A = L$. Bien entendu, si L est un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$, et $f \in B(K)$, on retrouve la norme définie dans le chapitre O .

LEMME 4.2.1.- *Soient* K *un polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$, x *un point de* $\overset{\circ}{K}$ *et* f *un élément de* $B(K)$, $f \neq 0$. *On pose* $d = v_{\alpha;x}(f)$, $r = r_{\alpha;d}$, *pour tout* i , $1 \leqq i \leqq r$, $\delta_i = s_{\alpha;i}(d)$, $\delta = (\delta_1,\dots,\delta_r)$ *et* $f_i = \tau_{\mathbb{1};\delta;K;x;i}(f)$, *où* $\mathbb{1} = (1,\dots,1)$, $\mathbb{1} \in (C^*)^r$. *Alors on a :*

i) *pour tout* y , $y \in K$,

$$f(y) = \frac{1}{d!}\frac{\partial^{|d|}f}{\partial X^d}(x)(y-x)^d + \sum_{i=1}^{r} f_i(y)(y-x)^{\delta_i} \quad ;$$

ii) *pour tout* i , $1 \leq i \leq r$,

$$\|f_i\|_K \leq 2^{|\delta_1|+\ldots+|\delta_i|+i-1}\, e(K;x)^{|\delta_1|+\ldots+|\delta_i|}(1/\rho''^{\delta_i}(K;x))\|f\|_K \ .$$

Démonstration. L'assertion (ii) résulte de (2.7.2). Pour démontrer l'assertion (i), considérons l'élément g de $B(K)$ défini par

$$g(y) = \frac{1}{d!}\frac{\partial^{|d|}f}{\partial X^d}(x)(y-x)^d \quad , \text{ pour } y \in K \ .$$

On remarque que

$$g \in B_{\{d\};x}(K) \subset B_{\Delta_0(\delta)}(K)$$

et

$$f-g \in B_{S_\alpha(d);x}(K) = B_{\mathbb{N}^p-\Delta_0(\delta);x}(K)$$

(4.1.1) , et comme

$$\mathrm{Ker}(\tau_{\mathbb{I};\delta;K;x}) = B_{\Delta_0(\delta)}(K)$$

et

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{B(K)} - \mu_{\mathbb{I};\delta;K;x}\ \tau_{\mathbb{I},\delta,K;x}) = B_{\mathbb{N}^p-\Delta_0(\delta);x}(K)$$

((1.2), (2.7.13) et (2.8.3)) , on a

$$(\mathrm{id}_{B(K)} - \mu_{\mathbb{I};\delta;K;x}\ \tau_{\mathbb{I};\delta;K;x})(f-g) = 0 \quad ,$$

d'où

$$(\mathrm{id}_{B(K)} - \mu_{\mathbb{I};\delta;K;x}\ \tau_{\mathbb{I};\delta;K;x})(f) = g \quad ,$$

ce qui démontre le lemme.

PROPOSITION 4.2.2.- *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, L *une partie compacte de* U , $R_0 = d(L,\mathbb{C}^p-U)$ ($R_0 > 0$, car L est compact) , R *un nombre réel,* $R \in]0,1]$, *tel que* $R < R_0$, L' *la partie de* $\mathbb{C}^p$ *définie par*

$$L' = \{y \in \mathbb{C}^p \ : \ d(y,L) \leq R\}$$

(L' *est une partie compacte de* $\mathbb{C}^p$ *et on a* $L \subset \overset{\circ}{L'} \subset L' \subset U$) *et* f *un élément de* $\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$. *Pour tout* x , $x \in L$, *tel que* $f_x \neq 0$ *et tout polycylindre compact* K *de* $\mathbb{C}^p$ *tel que* $x \in \overset{\circ}{K}$ *et tel que pour tout* i , $1 \leq i \leq p$, $\rho''_i(K;x) \leq R$ (*ce qui implique que* $K \subset L'$) , *si l'on pose*

$$d = v_{\alpha;x}(f) \quad , \quad r = r_{\alpha;d} \quad ,$$

$$\delta_i = s_{\alpha;i}(d) \quad , \quad 1 \leq i \leq r \quad ,$$

$$M = \sup_{1 \leq i \leq r} |\delta_i| \quad ,$$

et si l'on désigne par g *l'élément de* $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$ *défini par*

$$g(y) = \frac{1}{d!} \cdot \frac{\partial^{|d|} f}{\partial X^d}(x)(y-x)^d \quad , \text{ pour } y \in U \quad ,$$

on a

$$\|f-g\|_K \leq (2^{|\delta_1|+\ldots+|\delta_r|+r-1} \|f\|_{L'}/R^M) \sum_{i=1}^{r} \rho''^{\delta_i}(K;x) \quad .$$

<u>Démonstration</u>. Soit D le polydisque fermé de centre x et de polyrayon $(R,R,\ldots,R)$. Alors on a

$$K \subset D \subset L' \quad ,$$

et si l'on applique le lemme 4.2.1 à la restriction de f à D , on en déduit qu'il existe une famille $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ d'éléments de $B(D)$ telle que :

i) pour tout y , $y \in D$,

$$f(y) - g(y) = \sum_{i=1}^{r} f_i(y)(y-x)^{\delta_i} \quad ;$$

ii) pour tout i , $1 \leq i \leq r$,

$$\|f_i\|_D \leq 2^{|\delta_1|+\ldots+|\delta_i|+i-1} (1/R^{|\delta_i|}) \|f\|_D \quad .$$

Comme $K \subset D \subset L'$, on en déduit que

$$\|f-g\|_K \leq \sum_{i=1}^{r} \|f_i\|_K \, \rho''^{\delta_i}(K;x) \leq \sum_{i=1}^{r} \|f_i\|_D \, \rho''^{\delta_i}(K;x) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{r} 2^{|\delta_1|+\ldots+|\delta_i|+i-1} (1/R^{|\delta_i|}) \|f\|_D \, \rho''^{\delta_i}(K;x) \leq$$

$$\leq (2^{|\delta_1|+\ldots+|\delta_r|+r-1} \|f\|_{L'} / R^M) \sum_{i=1}^{r} \rho''^{\delta_i}(K;x) \quad ,$$

ce qui démontre la proposition.

(4.3) Soient m un entier, $m>0$, et $d=(d_1,\dots,d_m)$, $d_i=(d_{i1},\dots,d_{ip})$, $1\leqq i\leqq m$, un élément de $(\mathbb{N}^p)^m$. On désigne par $|d|$ l'entier défini par

$$|d| = \sum_{i=1}^{m} |d_i| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} d_{ij} ,$$

et si l'on pose

$$r_i = r_{\alpha;d_i} , \quad 1\leqq i\leqq m ,$$

$$\delta_{ij} = s_{\alpha;j}(d_i) , \quad 1\leqq i\leqq m , \quad 1\leqq j\leqq r_i ,$$

et

$$\delta_i = (\delta_{i1},\dots,\delta_{ir_i}) , \quad 1\leqq i\leqq m ,$$

on désignera par $M(d)$ (resp. $N(d)$) l'entier défini par

$$M(d) = \sup_{1\leqq i\leqq m} \sup_{1\leqq j\leqq r_i} |\delta_{ij}|$$

$$(\text{resp. } N(d) = 2^{\sup_{1\leqq i\leqq m}(|\delta_i|+r_i-1)+d+m} . \sum_{i=1}^{m} r_i) .$$

Si $\leqq_\alpha$ est la relation d'ordre antilexicographique $\leqq_L$ sur $\mathbb{N}^p$, on vérifie facilement en vertu de 4.1.2, que

$$M(d) = \sup_{1\leqq i\leqq m} |d_i| + 1$$

et

$$N(d) = 2^{\sup_{1\leqq i\leqq m}(\sum_{j=1}^{p} jd_{ij}) + 2p-1+|d|+m} .pm .$$

PROPOSITION 4.3.1.- *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, L *une partie compacte de* U, $R_o = d(L,\mathbb{C}^p-U)$, R *un nombre réel*, $R\in\,]0,1]$, *tel que* $R<R_o$, L' *la partie de* $\mathbb{C}^p$ *définie par*

$$L' = \{y\in\mathbb{C}^p : d(y,L)\leqq R\} ,$$

m *un entier*, $m>0$, *et* $d=(d_1,\dots,d_m)$ *un élément de* $(\mathbb{N}^p)^m$. *On pose*

$$r_i = r_{\alpha;d_i} , \quad 1\leqq i\leqq m ,$$

et

$$\delta_{ij} = s_{\alpha;j}(d_i) , \quad 1\leqq i\leqq m , \quad 1\leqq j\leqq r_i .$$

Pour tout élément $f=(f_1,\dots,f_m)$ *de* $(\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}))^m$, *tout point* x *de* L *et tout polycylindre compact* K *de* $\mathbb{C}^p$ *tels que*

i) *pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $f_{i,x} \neq 0$ *et* $v_{\alpha;x}(f_i) = d_i$;

ii) $x \in \mathring{K}$, *et pour tout* i , $1 \leq i \leq p$, $\rho''_i(K;x) \leq R$;

si l'on pose

$$a_i = \frac{1}{d_i!} \frac{\partial^{|d_i|} f_i}{\partial X^{d_i}}(x) \quad , 1 \leq i \leq m, \quad \textit{et} \quad a = (a_1,\dots,a_m)$$

alors les inégalités

$$(4.3.1.1)\quad e(K;x)^{|d_1|+\dots+|d_i|}(\rho''^{\delta_{ij}}(K;x)/\rho''^{d_i}(K;x)) \leq (R^{M(d)}/(N(d)\|f\|_{L'}))\,|a_i|,$$

$$1 \leq i \leq m \ , \quad 1 \leq j \leq r_i ,$$

impliquent que :

a) $\|(B(K;f) - \mu_{a;d;K;x}) \circ \tau_{a;d;K;x}\|_K \leq 1/2$;

b) $\nu_{f;a;d;K;x}$ *est inversible et* $\|\nu^{-1}_{f;a;d;K;x}\|_K \leq 2$.

Démonstration . Remarquons d'abord que comme $B(K)$ est un espace de Banach, l'assertion (b) résulte de l'assertion (a). Or, si pour tout i , $1 \leq i \leq m$, on désigne par g_i l'élément de $\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$ défini par

$$g_i(y) = a_i(y-x)^{d_i} \quad , \text{ pour } y \in U \ ,$$

on a

$$\|B(K;f)-\mu_{a;d;K;x}) \circ \tau_{a;d;K;x}\|_K \leq \sum_{i=1}^{m} \|f_i-g_i\|_K \, \|\tau_{a;d;K;x;i}\|_K \ .$$

D'autre part, il résulte de la proposition 4.2.2, que pour tout i , $1 \leq i \leq m$, on a

$$\|f_i-g_i\|_K \leq (2^{|\delta_{i1}|+\dots+|\delta_{ir_i}|+r_i-1}\|f\|_{L'}/R^{M(d)}) \sum_{j=1}^{r_i} \rho''^{\delta_{ij}}(K;x) \ ,$$

et comme

$$\|\tau_{a;d;K;d;i}\|_K \leq 2^{|d_1|+\dots+|d_i|+i-1} e(K;x)^{|d_1|+\dots+|d_i|}(1/(|a_i|\rho''^{d_i}(K;x)))$$

(2.7.2) , on en déduit que

$$\|(B(K;f) - \mu_{a;d;K;x}) \circ \tau_{a;d;K;x}\|_K \leq$$

$$\leq (1/(2\sum_{i=1}^{m} r_i)) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} (N(d)\|f\|_{L'}/(R^{M(d)}|a_i|))e(K;x)^{|d_1|+\dots+|d_i|}\rho''^{\delta_{ij}}(K;x)/\rho''^{d_i}(K;x) \ ,$$

et les inégalités 4.3.1.1. impliquent que

$$\|(B(K;f) - \mu_{a;d;K;x}) \circ \tau_{a;d;K;x}\|_K \leq 1/2 \quad ,$$

ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE 4.3.2.- *En gardant les notations de la proposition* 4.3.1, *soit* $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_m,\mathcal{D}')$, *où pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{N}^p$ *et* $\mathcal{D}' \subset \mathbb{N}^p$, *tel que pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, *on ait*

$$\mathcal{D}' \cap \Delta_i(d) \subset d_i + \mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}' \quad .$$

Si en plus des conditions (i) *et* (ii) *de la proposition* 4.3.1 , *on a*

iii) *pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $\mathcal{D}_i + E_{i;x}(f) \subset \mathcal{D}'$;

alors les inégalités (4.3.1.1) *impliquent que* $\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ *est inversible et* $\|\nu^{-1}_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}\|_K \leq 2$.

Démonstration. On a

$$\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x} = \mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}';x}(K)} + (B_{\mathcal{D};x}(K;f) - \mu_{\mathcal{D};a;d;K;x}) \circ \tau_{\mathcal{D};a;d;K;x}$$

et $(B_{\mathcal{D};x}(K;f) - \mu_{\mathcal{D};a;d;K;x}) \circ \tau_{\mathcal{D};a;d;K;x}$ est la restriction de $(B(K;f) - \mu_{a;d;K;x}) \circ \tau_{a;d;K;x}$ à $B_{\mathcal{D}';x}(K)$, qui est stable par cet opérateur (3.2). Les inégalités (4.3.1.1) impliquent donc que

$$\|(B_{\mathcal{D};x}(K;f) - \mu_{\mathcal{D};a;d;K;x}) \circ \tau_{\mathcal{D};a;d;K;x}\|_K \leq 1/2$$

(4.3), et comme $B_{\mathcal{D}';x}(K)$ est un espace de Banach (2.6), on en déduit le corollaire.

Remarque 4.3.3.- La proposition 4.3.1 ainsi que son corollaire 4.3.2 seraient vides de sens, si la conjonction des inégalités (4.3.1.1) était impossible. En fait, pour tout élément f de $(\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}))^m$ et tout point x de L , satisfaisant à la condition (i) de la proposition 4.3.1, il existe un système fondamental de voisinages de x formé de polycylindres compacts de $\mathbb{C}^p$ satisfaisant à la condition (ii) de la proposition 4.3.1 ainsi qu'aux inégalités (4.3.1.1). En effet, soit C un nombre réel, $C > 1$. On peut d'abord se limiter aux polycylindres compacts K tels que $x \in \mathring{K}$ et $e(K;x) < C$. Cet ensemble forme un système fondamental de voisinages de x , car il contient tous les polydisques fermés de centre x (2.1). Ensuite, on remarque que si pour tout i , $1 \leq i \leq m$, on pose

$$\varepsilon_i = [R^{M(d)}/(C^{|d_1|+\dots+|d_i|} N(d) \|f\|_{L'})] |a_i| \quad ,$$

la condition (i) de la proposition 4.3.1 implique que $\varepsilon_i > 0$, et alors les inégalités (4.3.1.1) sont impliquées par la condition

(4.3.3.1) $$\rho''(K;x) \in \bigcap_{1\leq i\leq m}\ \bigcap_{1\leq j\leq r_i} V_{\delta_{ij}-d_i;\varepsilon_i}$$

(pour les polycylindres tels que $e(K;x) < C$) (cf. I,4.7).
Or, comme pour tout i et j , $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq r_i$, on a $d_i <_\alpha \delta_{ij}$, et comme la relation d'ordre $\leq_\alpha$ est compatible avec la structure de monoïde de $\mathbb{N}^p$ et moins fine que la relation d'ordre produit $\leq$, il résulte de (I,5.1.2) et (I,5.1.4) que pour tout nombre réel R' , $R'>0$, on a

$$\Big(\bigcap_{1\leq i\leq m}\ \bigcap_{1\leq j\leq r_i} V_{\delta_{ij}-d_i;\varepsilon_i}\Big) \cap \{(\rho''_1,\ldots,\rho''_p)\in(\mathbb{R}^*_+)^p : \forall i\ ,\ 1\leq i\leq p,\ \rho''_i<\inf\{R_o,R'\}\}\neq\emptyset,$$

ce qui démontre l'existence d'un système fondamental de voisinages de x formé de polycylindres compacts de $\mathbb{C}^p$ satisfaisant à la condition (ii) de la proposition 4.3.1 ainsi qu'aux inégalités (4.3.1.1).
En particulier, on en déduit, en appliquant la proposition 4.3.1 à un compact L réduit à un seul point x , que pour tout point x de U et tout élément f de $(\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}))^m$ satisfaisant à la condition (i) de la proposition 4.3.1, il existe un système fondamental de voisinages de x formé de polycylindres compacts K de $\mathbb{C}^p$, contenus dans U , tels que $\nu_{f;a;d;K;x}$ (ou $\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$, si l'on se place sous les hypothèses du corollaire 4.3.2) soit inversible.

(4.4). La proposition 4.3.1 fournit des conditions suffisantes pour l'inversibilité de $\nu_{f;a;d;K;x}$, uniformes sur un compact contenu dans U . On désire obtenir des conditions uniformes sur l'ouvert U . Pour cela, on énoncera une variante de cette proposition, en remplaçant certaines des constantes, intervenant dans les conditions, par des fonctions continues sur U , selon un procédé bien classique. En vue des applications, il faudra expliciter ces fonctions, de même que dans la proposition 4.3.1, on a explicité les constantes, au lieu de se borner à affirmer leur existence. On est ainsi amené à introduire les définitions et notations suivantes.

(4.4.1). Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^p$. On désigne par R_U la fonction

$$R_U : U \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$$

définie par

$$R_U(x) = \inf\{d(x,\mathbb{C}^p-U)/2,1\} \quad .$$

(Si $U=\mathbb{C}^p$, la fonction R_U est constante, égale à 1). La fonction R_U est une fonction continue. Pour tout x , $x\in U$, si D désigne le polydisque fermé de centre x et de polyrayon $(R_U(x),\ldots,R_U(x))\in(\mathbb{R}^*_+)^p$, on a $D\subset U$. Si U' désigne un ouvert de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U , pour tout x , $x \in U'$, on a

(4.4.1.1) $\qquad R_{U'}(x) \leq R_U(x)$.

Si p' et p'' désignent deux entiers, $p' \in \mathbb{N}$, $p'' \in \mathbb{N}$, tels que $p'+p'' = p$, et U' et U'' des ouverts de $\mathbb{C}^{p'}$ et $\mathbb{C}^{p''}$ respectivement, et si $U = U' \times U''$, alors pour tout x' et x'' , $x' \in U$, $x'' \in U''$, on a

(4.4.1.2) $\qquad R_U(x',x'') = \inf\{R_{U'}(x'), R_{U''}(x'')\}$;

si en plus $U'' = \mathbb{C}^p$ on a

(4.4.1.3) $\qquad R_U(x',x'') = R_{U'}(x')$.

(4.4.2) Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^p$, m un entier, $m \in \mathbb{N}$, et f un élément de $(C(U))^m$, où $C(U)$ désigne l'algèbre des fonctions continues sur U à valeurs dans $\mathbb{C}$. On désigne par Λ_f la fonction

$$\Lambda_f : U \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

définie par

$$\Lambda_f(x) = \sup\{\|f\|_{D_x}, 1\} \quad , \text{ pour } x \in U \quad ,$$

où D_x désigne le polydisque fermé de centre x et de polyrayon $(R_U(x),\dots,R_U(x)) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$. La fonction Λ_f est continue. (Cela résulte de la continuité des fonctions R_U et f , et du fait qu'une fonction continue sur un compact y est uniformément continue). Si U' désigne un ouvert de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U pour tout x , $x \in U'$, on a

(4.4.2.1) $\qquad \Lambda_{f|U'}(x) \leq \Lambda_f(x)$.

(L'opérateur qui associe à f , Λ_f n'est pas local, c'est-à-dire qu'on n'a pas en général $\Lambda_{f|U'} = \Lambda_f|U'$).

Si g désigne un élément de $(C(U))^m$, on a

(4.4.2.2) $\qquad \Lambda_{f+g} \leq \Lambda_f + \Lambda_g$,

et si a désigne un élément de $\mathbb{C}$, on a

(4.4.2.3) $\qquad \Lambda_{af} \leq \sup\{|a|,1\}.\Lambda_f$.

Si m' et m'' désignent deux entiers, $m' \in \mathbb{N}$, $m'' \in \mathbb{N}$, tels que $m'+m'' = m$, et f' et f'' des éléments de $(C(U))^{m'}$ et $(C(U))^{m''}$ respectivement, tels que $f = (f',f'')$, alors on a

(4.4.2.4) $\qquad \Lambda_f = \sup\{\Lambda_{f'},\Lambda_{f''}\}$.

Si h désigne un élément de $C(U)$, on a

(4.4.2.5) $\qquad \Lambda_{hf} \leq \Lambda_h \cdot \Lambda_f$.

PROPOSITION 4.4.3.- *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, m *un entier,* $m>0$, *et* $d = (d_1,\dots,d_m)$ *un élément de* $(\mathbb{N}^p)^m$. *On pose*

$$r_i = r_{\alpha;d_i} \quad , \; 1 \leq i \leq m \quad ,$$

et

$$\delta_{ij} = s_{\alpha;j}(d_i) \; , \; 1 \leq i \leq m \quad , \quad 1 \leq j \leq r_i \quad .$$

Pour tout élément $f = (f_1,\dots,f_m)$ *de* $(\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}))^m$, *tout point* x *de* U *et tout polycylindre compact* K *de* $\mathbb{C}^p$ *tels que*

i) *pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $f_{i,x} \neq 0$ *et* $\nu_{\alpha;x}(f_i) = d_i$;

ii) $x \in \mathring{K}$, *et pour tout* i , $1 \leq i \leq p$, $\rho''_i(K;x) \leq R_U(x)$ (*ce qui implique, en particulier, que* $K \subset U$ (cf. 4.4.1)); *si l'on pose*

$$a_i = \frac{1}{d_i!} \frac{\partial^{|d_i|} f_i}{\partial X^{d_i}}(x) \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad ,$$

et

$$a = (a_1,\dots,a_m) \quad ,$$

alors les inégalités

$$(4.4.3.1) \qquad \begin{aligned} & e(K;x)^{|d_1|+\dots+|d_i|} \rho''^{\delta_{ij}}(K;x)/\rho''^{d_i}(K;x) \leq \\ & \leq (R_U^{M(d)}(x)/(N(d)\,\Lambda_f(x)))\,\frac{1}{d_i!}\left|\frac{\partial^{|d_i|} f_i}{\partial X^{d_i}}(x)\right| \end{aligned} \qquad 1 \leq i \leq m \; , \; 1 \leq j \leq r_i$$

impliquent que :

a) $\|(B(K;f) - \mu_{a;d;K;x}) \circ \tau_{a;d;K;x}\|_K \leq 1/2$;

b) $\nu_{f;a;d;K;x}$ *est inversible et* $\|\nu^{-1}_{f;a;d;K;x}\|_K \leq 2$.

Démonstration. La proposition 4.4.3 résulte aussitôt de la proposition 4.3.1 appliquée à $L = \{x\}$ et $R = R_U(x)$, en tenant compte de 4.4.1 et 4.4.2.

COROLLAIRE 4.4.4.- *En gardant les notations de la proposition* 4.4.3, *soit* $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_m,\mathcal{D}')$, *où pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{N}^p$ *et* $\mathcal{D}' \subset \mathbb{N}^p$, *tel que pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, *on ait*

$$\mathcal{D}' \cap \Delta_i(d) \subset d_i + \mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}' \quad .$$

Si en plus des conditions (i) *et* (ii) *de la proposition* 4.4.3 , *on a*

iii) *pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $\mathcal{D}_i + E_{i;x}(f) \subset \mathcal{D}'$; *alors les inégalités* (4.4.3.1) *impliquent que* $\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ *est inversible et* $\|\nu^{-1}_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}\|_K \leq 2$.

Remarque 4.4.5.- En raisonnant comme dans la remarque 4.3.3, on constate que pour tout élément f de $(\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}))^m$ et tout point x de U , satisfaisant à la condition (i) de la proposition 4.4.3, il existe un système fondamental de voisinages de x formé de polycylindres compacts de $\mathbb{C}^p$ satisfaisant à la condition (ii) de la proposition 4.4.3 ainsi qu'aux inégalités (4.4.3.1). Le point crucial de la proposition 4.4.3 est que les seconds membres des inégalités figurant dans la condition (ii) sont des fonctions continues, à valeurs strictement positives, et que ceux des inégalités (4.4.3.1) sont le produit d'une fonction continue sur U , à valeurs strictement positives, $\mathcal{R}_U^{M(d)}/(N(d)\Lambda_f$, par la valeur absolue d'une fonction analytique sur U , $\frac{1}{d_i!}\frac{\partial^{|d_i|}f_i}{\partial X^{d_i}})$, ne s'annulant qu'à des points de U ne satisfaisant pas à la condition (i).

(4.5) Pourvu que la condition (i) de la proposition 4.4.3 soit satisfaite, la conjonction des inégalités figurant dans la condition (ii) et des inégalités (4.4.3.1) est impliquée par une condition de la forme

$$e(K;x) < C \quad \text{et} \quad \rho''(K;x) \in V \quad ,$$

où C est un nombre réel arbitraire tel que $1 < C$ et V une partie de $(\mathbb{R}_+^*)^p$ appartenant au filtre de Hahn-Banach $F^{o}_{\leqq_\alpha}$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$ défini par la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$ (cf. (I,5.1.3)

$$(\quad V = (\bigcap_{1\leqq i\leqq m} \bigcap_{1\leqq j\leqq r_i} V_{\delta_{ij}-d_i;\varepsilon_i}) \cap (\bigcap_{1\leqq i\leqq p} V_{e_i;\mathcal{R}_U(x)})$$

(cf. (I,4.7)) , où

$$\varepsilon_i = (\mathcal{R}_U^{M(d)}(x)/(C^{|d_1|+\dots+|d_i|}N(d)\;\Lambda_f(x)))\;\frac{1}{d_i!}\left|\frac{\partial^{|d_i|}f_i}{\partial X^{d_i}}(x)\right|$$

et $(e_1,\dots,e_p)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^p$) . Cette formulation, tout en nous assurant que l'ensemble V est non vide, ne nous permet pas d'exhiber un élément ρ'' de $(\mathbb{R}_+^*)^p$ appartenant à V . En revanche, si A désigne une matrice inversible à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ définissant la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$ (cf. (I,3.11) et (I,3.12)) , et $\leqq_{\alpha'}$ la relation d'ordre sur $\mathbb{R}^p$ définie par cette matrice (cf.(I,3.5)) (qui induit $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$) , le filtre de Hahn-Banach $F_{\leqq_{\alpha'}}$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$ défini par cette relation d'ordre (cf.(I,4.3.1) et (I,4.4)) est plus fin que le filtre $\mathcal{F}^{o}_{\leqq_\alpha}$ (I,5.1.5) et la famille

$$(r_A(\mathcal{E}_{p;\delta;\varepsilon}))_{\delta\in\mathbb{R}_+,\ \varepsilon\in\mathbb{R}^*_+}$$

en est une base (I,4.10); les lemmes (I,4.10.1) et (I,4.11) permettent de déterminer explicitement δ et ε , $\delta\in\mathbb{R}_+$, $\varepsilon\in\mathbb{R}^*_+$, tels que

$$r_A(\mathcal{E}_{p;\delta;\varepsilon})\subset V \quad ,$$

et comme l'ouvert

$$\mathcal{E}_{p;\delta;\varepsilon} = \{(\rho_1,\dots,\rho_p)\in(\mathbb{R}^*_+)^p : \ \rho_1<\varepsilon \ , \ \rho_2<\rho_1^{\delta},\dots,\rho_p<\rho_{p-1}^{\delta}\}$$

de $(\mathbb{R}^*_+)^p$ est défini de façon simple, on obtient une paramétrisation particulièrement pertinente d'un ouvert non vide de $(\mathbb{R}^*_+)^p$ (l'ensemble $r_A(\mathcal{E}_{p;\delta;\varepsilon})$ est un ouvert, car r_A est un homéomorphisme) contenu dans V . Bien entendu, l'ensemble $r_A(\mathcal{E}_{p;\delta;\varepsilon})$ n'appartient pas en général au filtre $\mathcal{F}^{o}_{\leqq_\alpha}$ (cf. I, 5.1.5), mais cela importe peu. En vue des applications, il faudra entièrement expliciter ce procédé, et on est ainsi amené à introduire les définitions et notations suivantes. Dans ce qui suit, on aura à considérer à plusieurs reprises des bornes supérieures de familles de nombres réels positifs ou nuls, indexées par des ensembles finis. Par convention, si l'ensemble d'indices est vide, la borne supérieure sera égale à zéro.

(<u>4.5.1</u>) Soients $A = (a_{k\ell})_{1\leqq k\leqq p,1\leqq \ell\leqq p}$ une matrice inversible à coefficients dans $\mathbb{R}$ définissant la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ (cf. (I,3.11) et (I,3.12)) et m un entier, $m>0$. On définit deux fonctions

$$\Phi_{A;m} : (\mathbb{N}^p)^m \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$$

et

$$\Psi_{A;m} : (\mathbb{N}^p)^m \times (\mathbb{R}^*_+)^m \times \mathbb{R}^*_+ \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$$

comme suit. Pour tout ℓ , $1\leqq\ell\leqq p$, on pose

$$k_\ell = \sup\{k : 1\leqq k\leqq p \ , \ a_{k\ell}\neq 0\} \quad ,$$

$$I_\ell = \{k : 1\leqq k < k_\ell \ , \ a_{k\ell} < 0 \ \} \ ,$$

$$b = \sup_{1\leqq\ell\leqq p}\ \sup_{k\in I_\ell} (|a_{k\ell}|/a_{k_\ell,\ell}) + 1$$

et

$$\eta = \inf_{1\leqq\ell\leqq p} (a_{k_\ell,\ell}) \quad .$$

On remarque que comme la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ est moins fine que la relation

d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$, pour tout ℓ , $1 \leqq \ell \leqq p$, on a $a_{k_\ell,\ell} > 0$, ce qui implique que $b \geqq 1$ et $\eta > 0$.
D'autre part, soit d , $d \in (\mathbb{N}^p)^m$, $d = (d_1,\dots,d_m)$, $d_i \in \mathbb{N}^p$, $d_i = (d_{i1},\dots,d_{ip})$. Pour tout i , $1 \leqq i \leqq m$, on pose

$$r_i = r_{\alpha;d_i}$$

et pour tout j , $1 \leqq j \leqq r_i$,

$$\delta_{ij} = s_{\alpha;j}(d_i) \quad , \quad \delta_{ij} = (\delta_{ij1},\dots,\delta_{ijp}) \quad ,$$

$$k'_{ij} = \sup\{k : 1 \leqq k \leqq p \quad , \quad \sum_{\ell=1}^{p} a_{k\ell}\,(\delta_{ij\ell} - d_{i\ell}) \neq 0\}$$

$$I'_{ij} = \{k : 1 \leqq k < k'_{ij} \quad , \quad \sum_{\ell=1}^{p} a_{k\ell}(\delta_{ij\ell} - d_{i\ell}) < 0\}$$

et

$$\eta'_{ij}(d) = \sum_{\ell=1}^{p} a_{k'_{ij},\ell}(\delta_{ij\ell} - d_{i\ell}) \quad .$$

On remarque que comme pour tout i et j , $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq r_i$, $d_i <_\alpha \delta_{ij}$, on a $\eta'_{ij}(d) > 0$. Les fonctions $\Phi_{A;m}$ et $\Psi_{A;m}$ sont définies par

$$\Phi_{A;m}(d) = \sup\{ \sup_{1\leq i\leq m} \ \sup_{1\leq j\leq r_i} \ \sup_{k\in I'_{ij}} (\sum_{\ell=1}^{p} |a_k\ (\delta_{ij\ell}-d_{i\ell})|/\eta'_{ij}(d)) + 1,\ b\}$$

et

$$\Psi_{A;m}(d,\varepsilon,R) = \inf\{ \inf_{1\leq i\leq m} \ \inf_{1\leq j\leq r_i} \ \varepsilon_i^{1/\eta'_{ij}(d)} \quad , \ R^{1/\eta}\} \ ,$$

pour $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$.

On remarque que

(4.5.1.1) $\qquad \Phi_{A;m}(d) \geqq 1$.

D'autre part, comme pour tout i et j , $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq r_i$, $\eta'_{ij}(d) > 0$ et $\eta > 0$, la fonction $\Psi_{A;m}$ est croissante en R et ε_i , et si $R \leqq 1$ (resp. $R < 1$) ou s'il existe i , $1 \leqq i \leqq m$ tel que $\varepsilon_i \leqq 1$ (resp. $\varepsilon_i < 1$) on a

(4.5.1.2) $\qquad \Psi_{A;m}(d,\varepsilon,R) \leqq 1$

$\qquad$ (resp. $\Psi_{A;m}(d,\varepsilon,R) < 1$).

Si pour tout i , $1 \leqq i \leqq m$, $\varepsilon_i \leqq 1$, et si l'on pose

$$\eta'_i(d) = \inf_{1\leq j\leq r_i} \eta'_{ij}(d)$$

on a

(4.5.1.3) $$\Psi_{A,m}(d,\varepsilon,R) = \inf\{ \inf_{1\leq i\leq m} \varepsilon_i^{1/\eta'_i(d)} , R^{1/\eta}\} .$$

Remarque 4.5.2.- Ce qu'il faut surtout retenir de la définition de la fonction $\Psi_{A;m}$, c'est qu'il existe un nombre réel η , $\eta > 0$, et pour tout d , $d \in (\mathbb{N}^p)^m$, et tout i , $1 \leq i \leq m$, un entier r_i , $r_i > 0$, et pour tout j , $1 \leq j \leq r_i$, un nombre réel $\eta'_{ij} > 0$, tels que pour tout ε , $\varepsilon \in (\mathbb{R}^*_+)^m$, $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)$ et tout R , $R \in \mathbb{R}^*_+$, on ait

(4.5.2.1) $$\Psi_{A;m}(d,\varepsilon,R) = \inf\{ \inf_{1\leq i\leq m} \inf_{1\leq j\leq r_i} \varepsilon_i^{1/\eta'_{ij}} , R^{1/\eta}\} .$$

En plus, pour tout d , $d \in (\mathbb{N}^p)^m$, et tout i , $1 \leq i \leq m$, il existe un nombre réel η'_i , $\eta'_i > 0$, tel que pour tout ε , $\varepsilon \in (\mathbb{R}^*_+)^m$, $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)$ tel que pour tout i , $1 \leq i \leq m$, $\varepsilon_i \leq 1$, et pour tout R , $R \in \mathbb{R}^*_+$, on ait

(4.5.2.2) $$\Psi_{A;m}(d,\varepsilon,R) = \inf\{ \inf_{1\leq i\leq m} \varepsilon_i^{1/\eta'_i} , R^{1/\eta}\} .$$

On remarquera que η dépend uniquement de la matrice A , r_i uniquement de d (et de la relation d'ordre $\leq_\alpha$) tandis que η'_{ij} ou η'_i dépend aussi bien de A que de d (mais bien entendu ni de ε ni de R).

Remarque 4.5.3.- Si la matrice A est à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ (cf. (I,3.12), (ii)), on a $b = 1$, d'où

(4.5.3.1) $$\Phi_{A;m}(d) = \sup_{1\leq i\leq m} \sup_{1\leq j\leq r_i} \sup_{k\in I'_{ij}} \Big(\sum_{\ell=1}^{p} |a_{k\ell}(\delta_{ij\ell} - d_{i\ell})|/\eta'_{ij}(d)\Big) + 1 ,$$

pour $d \in (\mathbb{N}^p)^m$.

Si $\leq_\alpha$ est la relation d'ordre antilexicographique $\leq_L$ sur $\mathbb{N}^p$ et A la matrice unité I (cf. (I,3.12.1)) , on vérifie facilement, en vertu de 4.1.2, que pour tout d , $d \in (\mathbb{N}^p)^m$, on a

(4.5.3.2) $$\Phi_{I;m}(d) = \sup_{1\leq i\leq m} \sup_{1\leq j<p} d_{ij} + 1$$

et

(4.5.3.3) $$\Psi_{I;m}(d,\varepsilon,R) = \inf\{ \inf_{1\leq i\leq m} \varepsilon_i , R\} ,$$

pour $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m) \in (\mathbb{R}^*_+)^m$ et $R \in \mathbb{R}^*_+$.

LEMME 4.5.4.- *Soient* A *une matrice inversible à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *définissant la relation d'ordre* $\leq_\alpha$, $d = (d_1,\ldots,d_m)$ *un élément de* $(\mathbb{N}^p)^m$, R *un nombre réel,* $0 < R \leq 1$, *et* $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)$ *un élément de* $(\mathbb{R}^*_+)^m$. *Si l'on pose*

$$r_i = r_{\alpha;d_i} \quad , \quad 1 \leqq i \leqq m \quad ,$$

$$\delta_{ij} = s_{\alpha;j}(d_i) \quad , \quad 1 \leqq i \leqq m \quad , \quad 1 \leqq j \leqq r_i \quad ,$$

$$\delta_o = \Phi_{A;m}(d)$$

et

$$\varepsilon_o = \Psi_{A;m}(d,\varepsilon,R) \quad ,$$

alors pour tout élément ρ , $\rho = (\rho_1,\ldots,\rho_p)$, *de* $(\mathbb{R}_+^*)^p$ *la condition*

(4.5.4.1) $\quad \rho \in r_A(E_{p;\delta_o;\varepsilon_o})$

implique que

i) *pour tout* i , $1 \leqq i \leqq p$, $\rho_i < R$;

ii) *pour tout* i *et* j , $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq r_i$, $\rho \in V_{\delta_{ij}-d_i;\varepsilon_i}$ (*c'est-à-dire* $\rho^{\delta_{ij}}/\rho^{d_i} < \varepsilon_i$) .

Démonstration. Comme $R \leqq 1$, en vertu de (I.4.9.3), la condition (4.5.4.1) implique (i) (I,4.11) et (ii) (I,4.10.1).

PROPOSITION 4.5.5.- *Soient* A *une matrice inversible à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *définissant la relation d'ordre* $\leqq_\alpha$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, m *un entier*, $m>0$, *et* $d = (d_1,\ldots,d_m)$ *un élément de* $(\mathbb{N}^p)^m$. *Pour tout élément* $f = (f_1,\ldots,f_m)$ *de* $(\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}))^m$, *tout point* x *de* U *tel que pour tout* i , $1 \leqq i \leqq m$, $f_{i,x} \neq 0$ *et* $V_{\alpha;x}(f_i) = d_i$, *tout polycylindre compact* K *de* $\mathbb{C}^p$ *tel que* $x \in \mathring{K}$ *et tout nombre réel* C , $1 \leqq C$, *si l'on pose*

$$a_i = \frac{1}{d_i!}\frac{\partial^{|d_i|}f_i}{\partial X^{d_i}}(x) \quad , \quad 1 \leqq i \leqq m \quad ,$$

$$a = (a_1,\ldots,a_m) \quad ,$$

$$\varepsilon_i(x) = [R_U^{M(d)}(x)/(C^{|d_1|+\ldots+|d_i|}N(d)\,\Lambda_f(x))]\,|a_i| \quad , \quad 1 \leqq i \leqq m \quad ,$$

$$\varepsilon(x) = (\varepsilon_1(x),\ldots,\varepsilon_m(x)) \; ,$$

$$\delta_o = \Phi_{A;m}(d) \; ,$$

$$\varepsilon_o(x) = \Psi_{A;m}(d,\varepsilon(x),R_U(x)) \quad ,$$

et si l'on suppose que

(4.5.5.1) $\qquad e(K;x) \leq C$ *et* $\rho''(K;x) \in r_A(E_{p;\delta_o;\varepsilon_o(x)})$;

alors on a

i) $K \subset U$;

ii) $\|(B(K;f) - \mu_{a;d;K;x}) \circ \tau_{a;d;K;x}\|_K \leq 1/2$;

iii) $\nu_{f;a;d;K;x}$ *est inversible et* $\|\nu^{-1}_{f;a;d;K;x}\|_K \leq 2$.

Démonstration. Comme $R_U(x) \leq 1$ (4.4.1), la proposition résulte de 4.4.3 et 4.5.4.

COROLLAIRE 4.5.6.- *En gardant les notations de la proposition* 4.4.5, *soit* $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_m, \mathcal{D}')$, *où pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{N}^p$ *et* $\mathcal{D}' \subset \mathbb{N}^p$, *tel que pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, *on ait*

$$\mathcal{D}' \cap \Delta_i(d) \subset d_i + \mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}' .$$

Si en plus des hypothèses de la proposition 4.5.5, *pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, *on a*

$$\mathcal{D}_i + E_{i;x}(f) \subset \mathcal{D}' ,$$

alors la condition (4.5.5.1) *implique que* $K \subset U$, *que* $\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ *est inversible et* $\|\nu^{-1}_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}\|_K \leq 2$.

Remarque 4.5.7.- Si $\leq_\alpha$ est la relation d'ordre antilexicographique $\leq_L$ sur $\mathbb{N}^p$, en vertu de 4.5.3, la condition (4.5.5.1) peut s'énoncer plus simplement

(4.5.7.1) $e(K;x) \leq C$, $\rho''_1(K;x) < \varepsilon_o(x)$, $\rho''_2(K;x) < \rho''_1{}^{\delta_o}(K;x), \ldots, \rho''_p(K;x) < \rho''_{p-1}{}^{\delta_o}(K;x)$,

où

$$\delta_o = \sup_{1 \leq i \leq m} \ \sup_{1 \leq j < p} d_{ij} + 1$$

et

$$\varepsilon_o(x) = \inf\{\inf_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_i(x), R_U(x)\} .$$

Si en plus on se limite aux polydisques fermés de centre x et de polyrayon $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_p)$, $\rho \in (\mathbb{R}^*_+)^p$, cette condition devient tout simplement

(4.5.7.2) $\qquad \rho_1 < \varepsilon_o(x)$, $\rho_2 < \rho_1^{\delta_o}, \ldots, \rho_p < \rho_{p-1}^{\delta_o}$.

§5.- Théorème de division numérique en un point

Dans ce paragraphe, on pourrait énoncer tous les résultats du §3, où figure l'hypothèse " $\nu_{f;a;d;K;x}$ inversible" (resp. " $\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ inversible"), en remplaçant cette hypothèse par les conditions des propositions (4.3.1), (4.4.3) ou (4.5.5) (resp. des corollaires (4.3.2), (4.4.4) ou (4.5.6)). Cela serait fastidieux et inutile. En revanche, on traduira ces conditions en termes de filtres, ce qui permettra d'énoncer les résultats les plus importants sous une forme moins technique. En particulier, on déduira, des résultats des paragraphes précédents, les théorèmes classiques de division par une famille de fonctions analytiques ou par un idéal, sous une forme néanmoins plus précise, la forme "numérique". Ces théorèmes sont des cas particuliers des théorèmes "uniformes" qu'on démontrera auxparagraphes suivants.Mais comme ces derniers dépendent des résultats difficiles du Chapitre II, il est intéressant de montrer comment les théorèmes "ponctuels" découlent directement des résultats du Chapitre III et de ceux, élémentaires, du §1 du Chapitre II. Enfin, on donnera quelques applications.

(5.1) Soit p un entier, $p \in \mathbb{N}$. On désigne par $\mathcal{K}^p$ l'ensemble des polycylindres compacts de $\mathbb{C}^p$ et par $\mathcal{K}^p_\bullet$ la partie de $\mathcal{K}^p \times \mathbb{C}^p$ définie par

$$\mathcal{K}^p_\bullet = \{(K,x) \in \mathcal{K}^p \times \mathbb{C}^p : x \in \mathring{K}\} ,$$

ensemble des polycylindres compacts pointés, c'est-à-dire des couples d'un polycylindre compact K et d'un point x appartenant à l'intérieur de K . Pour tout point x , $x \in \mathbb{C}^p$, on pose

$$\mathcal{K}^p_x = \{K \in \mathcal{K}^p : x \in \mathring{K}\} ,$$

l'ensemble $\mathcal{K}^p_x$ s'identifiant à la fibre de la deuxième projection

$$\mathcal{K}^p_\bullet \longrightarrow \mathbb{C}^p$$

au-dessus du point x . Plus généralement, pour toute partie A de $\mathbb{C}^p$, on désigne par $\mathcal{K}^p_A$ l'image réciproque de A par cette deuxième projection

$$\mathcal{K}^p_A = \{(K,x) \in \mathcal{K}^p_\bullet : x \in A\} ,$$

et on dit que $\mathcal{K}^p_A$ est l'ensemble des polycylindres compacts pointés par un point de A, ou plus simplement, pointés dans A .

Au paragraphe 2, on a défini deux applications

$$\rho'' : \mathcal{K}^p_\bullet \longrightarrow (\mathbb{R}^*_+)^p$$

et

$$e : \mathcal{K}^p_\bullet \longrightarrow [1,+\infty[$$

(2.1). On désigne par $\tilde{\rho}''$ l'application

$$\tilde{\rho}'' : \mathcal{K}^p_\bullet \longrightarrow [1,+\infty[\times (\mathbb{R}^*_+)^p$$

définie par

$$\tilde{\rho}''(K;x) = (e(K;x) , \rho''(K;x)) , \text{ pour } (K,x) \in \mathcal{K}^p_\bullet .$$

Pour tout point x , $x \in \mathbb{C}^p$, on désigne par $\tilde{\rho}''_x$ (resp. ρ''_x , resp. e_x) la restriction de l'application $\tilde{\rho}''$ (resp. ρ'' , resp. e) à $\mathcal{K}^p_x$. L'application $\tilde{\rho}''_x$ (et *a fortiori* ρ''_x et e_x) est surjective. (Si $x = (x_1,\dots,x_p)$ est un point de $\mathbb{C}^p$, C un élément de $[1,+\infty[$ et $\rho = (\rho_1,\dots,\rho_p)$ un élément de $(\mathbb{R}^*_+)^p$, si pour tout i , $1 \leqq i \leqq p$, K_i désigne la partie compacte de $\mathbb{C}$ dont le bord ∂K_i est une ellipse de $\mathbb{C}$ (identifié à $\mathbb{R}^2$) de centre x_i , de demi-grand-axe ρ_i et de demi-petit-axe ρ_i/C et si l'on pose $K = K_1 \times \dots \times K_p$, alors K est un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ dont l'intérieur contient x et tel que $\tilde{\rho}''(K;x) = (C,\rho)$.)(1)
L'image réciproque de $\{1\} \times (\mathbb{R}^*_+)^p$ par l'application $\tilde{\rho}''_x$ est l'ensemble des polydisques fermés de centre x , et la restriction de ρ''_x à cet ensemble est bijective (c'est l'application qui associe à un polydisque fermé de centre x son polyrayon).

(5.1.1) Soient p un entier, $p \in \mathbb{N}$, et x un point de $\mathbb{C}^p$. Si $\mathcal{F}$ désigne un filtre sur $[1,+\infty[\times (\mathbb{R}^*_+)^p$, l'application $\tilde{\rho}''_x$ étant surjective, $\tilde{\rho}''^{-1}_x(\mathcal{F})$ est une base de filtre sur $\mathcal{K}^p_x$. De même, si $\mathcal{F}'$ (resp. $\mathcal{F}''$) désigne un filtre sur $[1,+\infty[$ (resp. $(\mathbb{R}^*_+)^p$), $e_x^{-1}(\mathcal{F}')$ (resp. $\rho''^{-1}_x(\mathcal{F}'')$) est une base de filtre sur $\mathcal{K}^p_x$. En plus, la famille

$$(e_x^{-1}(V') \cap \rho''^{-1}_x(V''))_{V'\in\mathcal{F}' , V''\in\mathcal{F}''}$$

est aussi une base de filtre sur $\mathcal{K}^p_x$, autrement dit, si l'on désigne par $\mathcal{F}'_x$ (resp. $\mathcal{F}''_x$) le filtre sur $\mathcal{K}^p_x$ engendré par la base de filtre $e_x^{-1}(\mathcal{F}')$ (resp. $\rho''^{-1}_x(\mathcal{F}'')$) , alors l'ensemble $\{\mathcal{F}'_x , \mathcal{F}''_x\}$ admet une borne supérieure dans l'ensemble de tous les filtres sur $\mathcal{K}^p_x$, pour la relation d'ordre "moins fin que". En effet, si l'on désigne par $\mathcal{F}_x$ le filtre sur $\mathcal{K}^p_x$ engendré par la base de filtre $\tilde{\rho}''^{-1}_x(\mathcal{F}' \times \mathcal{F}'')$ (où $\mathcal{F}' \times \mathcal{F}''$ désigne le filtre sur $[1,+\infty[\times (\mathbb{R}^*_+)^p$, produit des filtres $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$), alors $\mathcal{F}_x$ est la borne supérieure de $\{\mathcal{F}'_x , \mathcal{F}''_x\}$.

(5.1.2) On appelle filtre d'excentricité sur $\mathcal{K}^p_x$ le filtre engendré par l'image réciproque par e_x du filtre sur $[1,+\infty[$ formé des voisinages de 1 dans $[1,+\infty[$. La famille

(1) L'excentricité du compact K_i , selon la définition (2.1), est égale à C , tandis que l'excentricité de l'ellipse ∂K_i , selon la théorie des coniques, est égale à $\sqrt{1 - 1/C^2}$. La fonction $C \longmapsto \sqrt{1 - 1/C^2}$ étant croissante (pour $C \geqq 1$), notre terminologie se trouve néanmoins justifiée .

$$(\{K \in \mathcal{K}_x^p : e(K;x) < C\})_{C\in]1,+\infty[}$$

en est une base. On dira qu'une propriété d'un polycylindre compact est satisfaite pour tout polycylindre compact suffisamment centré en x, si l'ensemble des polycylindres compacts, dont l'intérieur contient x, satisfaisant à cette propriété appartient au filtre d'excentricité sur $\mathcal{K}_x^p$.

(5.1.3) On dit qu'un filtre $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{K}_x^p$ est un filtre d'effilements, s'il est engendré par l'image réciproque par ρ_x'' d'un filtre de Hahn-Banach $\mathcal{F}$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$ (cf. (I,4.4) et (I,4.7)). Si A désigne une partie de $\mathbb{R}^p$ dont l'enveloppe convexe ne contient pas 0 et si $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$ (cf. (I,4.4)), on dira que $\mathcal{H}$ est le filtre d'effilements sur $\mathcal{K}_x^p$ défini par A. La famille

$$(\rho_x''^{-1}(\bigcap_{1\leq i\leq n} V_{a_i};\varepsilon_i))_{n\in\mathbb{N},\,(a_1,\ldots,a_n)\in A^n,\,(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n}$$

en est alors une base. On s'intéresse plus spécialement à deux cas particuliers.

Le premier est le cas où

$$A = \{a \in \mathbb{R}^p : \exists d, d' \in \mathbb{N}^p, d <' d' \text{ et } a = d' - d\},$$

où $\leqq'$ désigne une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde, autrement dit le cas où $\mathcal{F} = \mathcal{F}^o_{\leqq'}$ (cf. (I,5.1.1) et (I,5.1.3)). On dira alors que $\mathcal{H}$ est le filtre d'effilements sur $\mathcal{K}_x^p$ défini par la relation d'ordre $\leqq'$ sur $\mathbb{N}^p$.

Le deuxième cas est le cas où

$$A = \{a \in \mathbb{R}^p : a >'' 0\},$$

où $\leqq''$ désigne une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel, autrement dit, le cas où $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\leqq''}$ (cf. (I,4.4)). On dira alors que $\mathcal{H}$ est le filtre d'effilements sur $\mathcal{K}_x^p$ défini par la relation d'ordre $\leqq''$ sur $\mathbb{R}^p$. Si la relation $\leqq''$ est une relation d'ordre total et si B en est une matrice de définition (cf. (I,3.5)), la famille

$$(\rho_x''^{-1}(r_B(\mathcal{E}_{p;\delta;\varepsilon})))_{\delta\in\mathbb{R}_+,\,\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*}$$

est une base du filtre d'effilements sur $\mathcal{K}_x^p$ défini par cette relation d'ordre (cf. (I,4.10)). Si $\leqq''$ induit $\leqq'$ sur $\mathbb{N}^p$, alors le filtre d'effilements sur $\mathcal{K}_x^p$ défini par $\leqq''$ est plus fin que celui défini par $\leqq'$ (cf. (I,5.1.5)).

On dira qu'une propriété d'un polycylindre compact est satisfaite pour tout polycylindre compact suffisamment effilé pour A (resp. pour $\leqq'$, resp. pour $\leqq''$) en x, si l'ensemble des polycylindres compacts, dont l'intérieur contient x, satisfaisant à cette propriété, appartient au filtre d'effilements défini par A (resp. $\leqq'$, resp. $\leqq''$) sur $\mathcal{K}_x^p$. De même, on dira qu'une telle propriété est satisfaite pour tout polycylindre suffisamment centré et effilé pour A (resp. $\leqq'$, resp. $\leqq''$) en x, si l'ensemble des polycylindres compacts, dont l'intérieur contient x , satisfaisant à cette propriété, appartient au filtre sur K_x^p , borne supérieure du filtre d'excentricité et du filtre d'effilements défini par A (resp. $\leqq'$, resp. $\leqq''$) (cf. (5.1.1)). Si l'on désigne par V l'ensemble de ces polycylindres, cette condition équivaut à l'existence d'un ensemble V' appartenant au filtre d'excentricité et d'un ensemble V'' appartenant au filtre d'effilements défini par A , tels que

$$V' \cap V'' \subset V \ .$$

(5.1.4) On remarque que si V' désigne un ensemble de polycylindres compacts appartenant au filtre d'excentricité sur K_x^p , alors V' contient l'ensemble des polydisques fermés de centre x . Autrement dit, la trace du filtre d'excentricité sur l'ensemble des polydisques fermés de centre x est le filtre dont le seul élément est l'ensemble de tous les polydisques fermés de centre x .

Si H désigne un filtre d'effilements sur K_x^p , engendré par l'image réciproque par ρ''_x d'un filtre de Hahn-Banach F sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$, la trace de H sur l'ensemble des polydisques fermés de centre x est un filtre, qui n'est autre que l'image réciproque de F par la bijection définie par la restriction de ρ''_x sur cet ensemble (5.1). En gardant les notations de (5.1.3), on dira qu'une propriété d'un polydisque fermé est satisfaite pour tout polydisque fermé, de centre x , suffisamment effilé pour A (resp. pour $\leqq'$, resp. pour $\leqq''$), si l'ensemble des polydisques fermés de centre x , satisfaisant à cette propriété, appartient à la trace du filtre d'effilements défini par A (resp. par $\leqq'$, resp. par $\leqq''$) sur l'ensemble des polydisques fermés de centre x . Si l'on désigne par V l'ensemble des éléments ρ de $(\mathbb{R}_+^*)^p$ tels que le polydisque fermé de centre x et de polyrayon ρ satisfasse à cette propriété, cette condition équivaut à $V \in F_A$ (resp. $V \in F^o_{\leqq'}$, resp. $V \in F_{\leqq''}$).

Il résulte de ce qui précède que si une propriété d'un polycylindre compact est satisfaite pour tout polycylindre compact suffisamment centré en x , alors cette propriété est satisfaite pour tout polydisque fermé de centre x . De même, si une telle propriété est satisfaite pour tout polycylindre compact suffisamment centré et effilé pour A (resp. pour $\leqq'$, resp. pour $\leqq''$) en x , alors cette propriété est satisfaite pour tout polydisque fermé, de centre x , suffisamment effilé pour A (resp. pour $\leqq'$, resp. pour $\leqq''$).

(5.1.5) Soient $\leqq'$ une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa struture de monoïde, et A une matrice de définition de $\leqq'$ (cf. (I,3.11)). Si l'on suppose que $\leqq'$ est rationnelle (cf. (I,3.11)), alors la famille

$$(\rho''^{-1}_x(r_A(E_{p;\delta;\varepsilon})))_{\delta\in\mathbb{R}_+ ,\ \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*}$$

est une base du filtre d'effilements sur K_x^p défini par cette relation d'ordre

(I,5.2.3). (Si $\leqq'$ n'est pas rationnelle, cette famille est une base d'un filtre d'effilements sur K_x^p strictement plus fin que le filtre d'effilements défini par cette relation d'ordre (*cf.* (I,5.2.5)).) En particulier, si $\leqq'$ est la relation d'ordre antilexicographique $\leqq_L$ sur $\mathbb{N}^p$ (*cf.* (I,3.12.1)), dire qu'une propriété d'un polycylindre compact est satisfaite pour tout polycylindre compact suffisamment effilé pour $\leqq_L$ en x , équivaut à affirmer l'existence de ε , $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, et δ , $\delta \in \mathbb{R}_+$, tels que tout polycylindre compact K vérifiant

$$x \in \overset{\circ}{K} \text{ et } \rho_1''(K;x) < \varepsilon \text{ , } \rho_2''(K;x) < \rho_1''^{\delta}(K;x),\ldots,\rho_p''(K;x) < \rho_{p-1}''^{\delta}(K;x)$$

satisfasse à cette propriété.

(5.2) Les propositions suivantes, qui sont des reformulations de résultats déjà démontrés, servent à illustrer le langage introduit ci-dessus.

PROPOSITION 5.2.1.- *Soient* p *un entier* , $p \in \mathbb{N}$, $\leqq'$ (resp. $\leqq''$) *une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}^p$ (resp. $\mathbb{R}^p$) , *compatible avec sa structure de monoïde* (resp. *d'espace vectoriel*) *et moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$ (resp. *sur* $\mathbb{R}^p$) , x *un point de* $\mathbb{C}^p$ *et* $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p)$ *un élément de* $(\mathbb{R}_+^*)^p$. *Alors pour tout polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$, *suffisamment effilé pour* $\leqq'$ (resp. *pour* $\leqq''$) *en* x , *on a*

$$\rho_i''(K;x) < \varepsilon_i \quad , \quad 1 \leqq i \leqq p \ .$$

Démonstration. La proposition résulte de (I,5.1.4), (I,4.4.1) et (I,4.7.1).

COROLLAIRE 5.2.1.1.- *Soient* p *un entier,* $p \in \mathbb{N}$, $\leqq'$ (resp. $\leqq''$) *une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}^p$ (resp. $\mathbb{R}^p$) , *compatible avec sa structure de monoïde* (resp. *d'espace vectoriel*) *et moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$ (resp. *sur* $\mathbb{R}^p$) , U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$ *et* x *un point de* U . *Alors tout polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$, *suffisamment effilé pour* $\leqq'$ (resp. *pour* $\leqq''$) *en* x , *est contenu dans* U .

Démonstration. Si l'on pose $R = d(x , \mathbb{C}^p - U)$, en remarquant que pour tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$, tel que $x \in \overset{\circ}{K}$, les conditions

$$\rho_i''(K;x) < R \quad , \quad 1 \leqq i \leqq p \ ,$$

impliquent que $K \subset U$, le corollaire résulte de la proposition (5.2.1) appliquée à $\varepsilon = (R , R,\ldots,R)$.

Remarque 5.2.1.2. Le corollaire (5.2.1.1) signifie que l'ensemble des polycylindres compacts de $\mathbb{C}^p$, tels que $K \subset U$ et $x \in \overset{\circ}{K}$, appartient au filtre d'effilements sur K_x^p défini par la relation d'ordre $\leqq'$ sur $\mathbb{N}^p$ (resp. $\leqq''$ sur $\mathbb{R}^p$). En particulier, sous les hypothèses du corollaire (5.2.1.1), si une propriété d'un polycylindre compact est satisfaite pour tout polycylindre compact suffisamment centré et effilé pour $\leqq'$ (resp. $\leqq''$) en x , alors l'ensemble des polycylindres compacts K de $\mathbb{C}^p$, tels que $x \in \mathring{K}$, satisfaisant à cette propriété forme un système fondamental de voisinages de x .

PROPOSITION 5.2.2.- *Soient* p *un entier,* $p \in \mathbb{N}$, $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^p$, *compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, x *un point de* U , m *un entier,* $m \in \mathbb{N}$, *et* $f = (f_1,\ldots,f_m)$ *un élément de* $(\Gamma(U , \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}))^m$ *tel que pour tout* i , $1 \leqq i \leqq m$, $f_{i,x} \neq 0$. *Si l'on pose*

$$d_i = \nu_{\alpha ; x}(f_i) \quad , \quad 1 \leqq i \leqq m \quad ,$$

$$d = (d_1,\ldots,d_m) \quad ,$$

$$a_i = \frac{1}{d_i!} \frac{\partial^{|d_i|} f_i}{\partial X^{d_i}}(x), \quad 1 \leqq i \leqq m \quad ,$$

$$a = (a_1,\ldots,a_m) \quad ,$$

alors pour tout polycylindre compact K *de* $\mathbb{C}^p$ *suffisamment centré et effilé pour* $\leqq_\alpha$ *en* x *on a*

i) $K \subset U$

ii) $\nu_{f;a;d;K;x}$ *est inversible et* $\|\nu^{-1}_{f;a;d;K;x}\|_K \leqq 2$.

Démonstration. La proposition (5.2.2) est simplement une forme moins précise de la proposition (4.4.3).

(5.3) Les deux propositions suivantes sont des versions "numériques" des théorèmes classiques de division au-dessus d'un compact, dans un cadre légèrement plus général.

PROPOSITION 5.3.1.- *Soient* p *un entier,* $p \in \mathbb{N}$, $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^p$, *compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, x *un point de* U , m *un entier,* $m > 0$, *et* $f = (f_1,\ldots,f_m)$ *un élément de* $(\Gamma(U , \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}))^m$ *tel que pour tout* i , $1 \leqq i \leqq m$, $f_{i,x} \neq 0$. *On pose*

$$d_i = \nu_{\alpha ;x}(f_i) \quad , \quad 1 \leqq i \leqq m \quad ,$$

et

$$d = (d_1,\ldots,d_m) \quad .$$

Alors il existe des constantes A *et* B , $A \in \mathbb{R}^*_+$, $B \in \mathbb{R}^*_+$, *telles que pour tout polycylindre compact* K *de* $\mathbb{C}^p$ *suffisamment centré et effilé pour* $\leqq_\alpha$ *en* x , *on ait :*

i) $K \subset U$;

ii) *pour tout* g , $g \in B(K)$, *il existe une famille unique* $(g_i)_{0 \leqq i \leqq m}$ *d'éléments de* $B(K)$ *telle que pour tout* i , $1 \leqq i \leqq m$, $g_i \in B_{-d_i+\Delta_i(d)}(K)$, $g_o \in B_{\Delta_o(d)}(K)$ *et*

$$g = \sum_{i=1}^{m} g_i(f_i|K) + g_o \quad ;$$

iii) *si l'on désigne par* $\sigma_{f;d;K}$ (resp. *par* $r_{f;d;K}$) *l'application*

$$\sigma_{f;d;K} : B(K) \longrightarrow B(K)^m$$

$$(\text{resp. } r_{f;d;K} : B(K) \longrightarrow B(K) \ )$$

définie par

$$\sigma_{f;d;K}(g) = (g_1,\ldots,g_m)$$

$$(\text{resp. } r_{f;d;K}(g) = g_o \ ) ,$$

où pour tout g , $g \in B(K)$, $(g_i)_{0 \leqq i \leqq m}$ *désigne l'unique famille d'éléments de* $B(K)$ *telle que pour tout* i , $1 \leqq i \leqq m$, $g_i \in B_{-d_i+\Delta_i(d)}(K)$, $g_o \in B_{\Delta_o(d)}(K)$ *et*

$$g = \sum_{i=1}^{m} g_i(f_i|K) + g_o \quad ,$$

(cf. à (ii)) , *on a* :

a) $\sigma_{f;d;K}$ *est une application* $\mathbb{C}$*-linéaire continue et*

$$||\sigma_{f;d;K}||_K \leqq A/\rho''^{d_o}(K;x) \quad ,$$

où $d_o = \sup_{1 \leqq i \leqq m} d_i$ *(la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$) ;

b) $r_{f;d;K}$ *est une application* $\mathbb{C}$*-linéaire continue et*

$$||r_{f;d;K}||_K \leqq B \quad ;$$

c) *l'application* $\sigma_{f;d;K}$ *est une scission (normale) de* $B(K;f)$ *si et seulement si*

$$M_{\alpha;J;x} \subset \{d_1,\ldots,d_m\} \quad ,$$

où J *désigne l'idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *engendré par* $f_1,\ldots,f_m$;

iv) *si* J' *désigne un idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *tel que pour tout* i ,

$1 \leqq i \leqq m$, $f_i \in \Gamma(U,\mathcal{J}')$, *la condition*

$$M_{\alpha;\mathcal{J}';x} \subset \{d_1,\dots,d_m\}$$

implique que $\mathcal{J}'_K = \mathrm{Im}(B(K;f))$[1].

Démonstration. Soit C un nombre réel, $1 < C$, et posons

$$a_i = \frac{1}{d_i!} \frac{\partial^{|d_i|} f_i}{\partial X^{d_i}} (x) \ , \ 1 \leqq i \leqq m \ ,$$

$$a = (a_1,\dots,a_m) \ ,$$

$$A = 2^{|d|+m} C^{|d|} \sup_{1\leqq i \leqq m} (1/|a_i|)$$

et

$$B = 2(1 + m\, 2^{|d|+m-1} C^{|d|}) \ .$$

En vertu de (5.1.2), (5.2.1) et (5.2.2), pour tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$ suffisamment centré et effilé pour $\leqq_\alpha$ en x on a :

α) $K \subset U$;

β) pour tout i , $1 \leqq i \leqq p$, $\rho''_i(K;x) < 1$;

γ) $e(K;x) < C$;

δ) $\nu_{f;a;d;K;x}$ est inversible ;

ε) $\|\nu^{-1}_{f;a;d;K;x}\|_K \leqq 2$.

Alors l'assertion (i) résulte de (α) et l'assertion (ii) de (γ) et de (3.1.2). Pour démontrer l'assertion (iii), on remarque qu'en vertu de (3.1.3),(iii) et de (1.4), (c), (i), on a

$$\sigma_{f;d;K} = \tau_{a;d;K;x} \circ \nu^{-1}_{f;a;d;K;x}$$

et

$$r_{f;d;K} = (\mathrm{id}_{B(K)} - \mu_{a;d;K;x}\, \tau_{a;d;K;x}) \circ \nu^{-1}_{f;a;d;K;x} \ .$$

L'assertion (a) résulte donc de (β) , (γ), (ε) et de (2.7.3), l'assertion (b) de

---

(1) Pour la définition $\mathcal{J}'_K$ se reporter au chapitre 0.

(γ) , (ε) et de (2.7.6) et l'assertion (c) de (δ) et de (3.3.3). L'assertion (iv) résulte de (δ) et de (3.3.8) (cf. (3.3.9)) .

Remarque 5.3.1.1.- En gardant les notations de la proposition 5.3.1, on peut vérifier facilement que l'assertion (ii) implique que

a) $B(K;f)$ est une scission de $\sigma_{f;d;K}$;

b) $\mathrm{Im}(\sigma_{f;d;K}) = \prod_{i=1}^{m} B_{-d_i+\Delta_i(d)}(K)$;

c) $\mathrm{Im}(r_{f;d;K}) = B_{\Delta_o(d)}(K)$;

propriétés qui résultent aussi de la proposition 3.1.3.

Remarque 5.3.1.2.- Dans la démonstration de la proposition 5.3.1, on utilise, à travers la proposition 3.3.3 et la remarque 3.3.9, le corollaire (II,3.7) qui affirme que

$$M_{\alpha;J;K;x} = M_{\alpha;J;x}$$

et qu'on a déduit des résultats difficiles du chapitre II. En fait, d'une part, ce corollaire peut être démontré directement, et d'autre part, les affirmations de la proposition 5.3.1 concernant des polycylindres compacts suffisamment "petits", on peut utiliser à la place le corollaire (II,1.5) qui est élémentaire.

PROPOSITION 5.3.2.- *Soient* p *un entier,* $p \in \mathbb{N}$, $\leq_\alpha$ *une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}^p$ *, compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit* $\leq$ *sur* $\mathbb{N}^p$ *,* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$ *,* J *un idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *et* x *un point de* U *. On pose* (cf. (II,1.2))

$$\Delta = \mathbb{N}^p - P_{\alpha;J;x}$$

et

$$d = \sup(M_{\alpha;J;x})$$

(la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit $\leq$ *sur* $\mathbb{N}^p$ *). Alors il existe des constantes* A *et* B *,* $A \in \mathbb{R}_+^*$ *,* $B \in \mathbb{R}_+^*$ *, telles que pour tout polycylindre compact* K *de* $\mathbb{C}^p$ *suffisamment centré et effilé pour* $\leq_\alpha$ *en* x *on ait :*

i) $K \subset U$;

ii) $B(K) = B_\Delta(K) \oplus J_K$; (1)

(1) Pour la définition de J_K se reporter au chapitre O.

iii) *si l'on désigne par* π_J (resp. r_J) *le projecteur de* $B(K)$

$$\pi_J : B(K) \longrightarrow B(K)$$

$$(\text{resp. } r_J : B(K) \longrightarrow B(K))$$

sur J_K (resp. *sur* $B_\Delta(K)$) *parallèlement à* $B_\Delta(K)$ (resp. *à* J_K) (cf. à (ii)) *, on a*

a) π_J *est une application* $\mathbb{C}$*-linéaire continue et*

$$\|\pi_J\|_K \leq A/\rho''^d(K;x) \quad ;$$

b) r_J *est une application* $\mathbb{C}$*-linéaire continue et*

$$\|r_J\|_K \leq B \quad .$$

<u>Démonstration</u>. Soit m le nombre d'éléments de l'ensemble fini $M_{\alpha;J;x}$ (cf. II,1.2). Il existe un ouvert U' de $\mathbb{C}^p$, $U' \subset U$, tel que $x \in \dot{U}'$, et un élément $f = (f_1,\dots,f_m)$ de $\Gamma(U', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})^m$ tel que pour tout i , $1 \leq i \leq m$, $f_i \in \Gamma(U',J)$, $f_{i,x} \neq 0$ et tel que si l'on pose $d_i = v_{\alpha;x}(f_i)$ on ait

$$M_{\alpha;J;x} = \{d_1,\dots,d_m\} \quad .$$

Soit U'' un ouvert de $\mathbb{C}^p$ relativement compact dans U' et tel que $x \in U''$. On pose

$$A_o = m \sup_{1\leq i\leq m} \sup_{x\in \bar{U}''} |f_i(x)| \quad .$$

En vertu de la proposition 5.3.1 appliquée à l'ouvert U'' (et cf. 5.3.1.1) , il existe des constantes A_1 et B , $A_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $B \in \mathbb{R}_+^*$, telles que pour tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$ suffisamment centré et effilé pour $\leq_\alpha$ en x on ait

α) $K \subset U''$;

β) il existe des applications $\mathbb{C}$-linéaires continues

$$\sigma_{f;d;K} : B(K) \longrightarrow B(K)^m$$

$$r_{f;d;K} : B(K) \longrightarrow B(K)$$

telles que

β_1) $B(K;f) \circ \sigma_{f;d;K} + r_{f;d;K} = id_{B(K)}$;

β_2) $\sigma_{f;d;K}$ est une scission normale de $B(K;f)$;

β_3) $Im(r_{f;d;K}) = B_\Delta(K)$;

β_4) $\|\sigma_{f;d;K}\|_K \leq A_1\, \rho''^{d}(K;x)$;

β_5) $\|r_{f;d;K}\|_K \leq B$;

γ) $\mathrm{Im}(B(K;f)) = J_K$.

(La condition (β) résume les assertions (ii) et (iii) de la proposition 5.3.1 (cf. 5.3.1.1) et la condition (γ) résulte de l'assertion (iv) de la proposition (5.3.1), appliquée à l'idéal cohérent J de $\mathcal{O}_U$).L'assertion (i) résulte de la condition (α) . Les conditions (β_1) et (β_2) impliquent que

$$B(K) = (\mathrm{Im}(r_{f;d;K})) \oplus (\mathrm{Im}(B(K;f)))$$

(1.2), ce qui en vertu de (β_3) et de (γ) démontre l'assertion (ii). Alors l'application $B(K;f) \circ \sigma_{f;d;K}$ (resp. $r_{f;d;K}$) n'est autre que le projecteur π_J (resp. r_J) (cf.1.2) et si l'on pose $A = A_0 A_1$, l'assertion (iii), (a) résulte des conditions (α) et (β_4) et l'assertion (ii), (b) de (β_5) .

Remarque 5.3.3.- En vertu de 5.2.1.2, les propositions 5.3.1 et 5.3.2 nous permettent de démontrer, par passage à la limite inductive, les théorèmes de division dans l'anneau des germes de fonctions analytiques au voisinage d'un point de $\mathbb{C}^p$, autrement dit l'anneau des séries convergentes.

(5.4) La proposition suivante est une généralisation d'un résultat bien connu (corollaire 5.4.3).

PROPOSITION 5.4.1.- *Soient* p *un entier,* $p \in \mathbb{N}$, $\leq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^p$ *, compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit* $\leq$ *sur* $\mathbb{N}^p$, $\mathcal{D}'$ *une partie de* $\mathbb{N}^p$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$ x *un point de* U , J *un idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *et* $f = (f_1,\dots,f_m)$ *une famille finie d'éléments de* $\Gamma(U,J)$ *telle que pour tout* i , $1 \leq i \leq m$ *, le germe de* f_i *en* x *soit non nul. On pose*

$$d_i = v_{\alpha;x}(f_i) \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad ,$$

$$d = (d_1,\dots,d_m) \quad ,$$

et on suppose que

a) *pour tout* i , $1 \leq i \leq m$,

$$-d_i + (\mathcal{D}' \cap \Delta_i(d)) + E_{i;x}(f) \subset \mathcal{D}' \quad ;$$

b) *la fibre* J_x *de l'idéal* J *en* x *est engendrée, comme idéal de* $\mathcal{O}_{U,x}$ *, par l'ensemble* $J_{\mathcal{D}';x}$ *défini par*

$$\mathcal{J}_{\mathcal{D}';x} = \{g \in \mathcal{J}_x \ : \ E_x(g) \subset \mathcal{D}'\} \quad ;$$

c) $M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J};x} \subset \{d_1,\dots,d_m\}$.

Alors l'idéal $\mathcal{J}$ *est engendré par la famille* $(f_i)_{1\leqq i\leqq m}$ *au voisinage du point* x .

Démonstration. Soit $\mathcal{J}'$ l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_U$ engendré par la famille $(f_i)_{1\leqq i\leqq m}$. On a

(5.4.1.1) $\qquad \mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$.

Il suffit de démontrer qu'au voisinage de x on a $\mathcal{J}' = \mathcal{J}$. On remarque d'abord que l'hypothèse (c) implique que $P_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J};x} \cap \Delta_o(d) \neq \emptyset$ (II,1.2 et I,1.2). On en déduit que pour tout polycylindre compact K , $K \subset U$, tel que $x \in \mathring{K}$, on a

(5.4.1.2) $\qquad P_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J};K;x} \cap \Delta_o(d) = \emptyset$

(cf. II,1.3). D'autre part, il résulte de l'hypothèse (b) qu'il existe un ouvert U' de $\mathbb{C}^p$, $U' \subset U$, tel que $x \in U'$, et une famille finie $(g_j)_{1\leqq j\leqq n}$ d'éléments de $\Gamma(U',\mathcal{J})$ telle que pour tout j , $1 \leqq j \leqq n$, $E_x(g_j) \subset \mathcal{D}'$ et qui engendre l'idéal $\mathcal{J}$ au-dessus de U' . On en déduit que pour tout polycylindre compact K , $K \subset U'$, tel que $x \in \mathring{K}$ on a :

(5.4.1.3) $\qquad \mathcal{J}_K$ est engendré par $\mathcal{J}_K \cap B_{\mathcal{D}';x}(K)$

(comme idéal de $B(K)$) (cf. chapitre 0). Posons

$$\mathcal{D}_i = -d_i + (\mathcal{D}' \cap \Delta_i(d)) \ , \ 1 \leqq i \leqq m \quad .$$

Pour tout i , $1 \leqq i \leqq m$, on a

(5.4.1.4) $\qquad \mathcal{D}' \cap \Delta_i(d) \subset d_i + \mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}'$,

et il résulte de l'hypothèse (a) que

(5.4.1.5) $\qquad \mathcal{D}_i + E_{i;x}(f) \subset \mathcal{D}'$.

Enfin, si l'on pose

$$\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_m,\mathcal{D}') \quad ,$$

$$a_i = \frac{\partial^{|d_i|} f_i}{\partial X^{d_i}}(x) \quad , \quad 1 \leqq i \leqq m \quad ,$$

et

$$a = (a_1,\dots,a_m) \quad ,$$

il existe un polycylindre compact K , $K \subset U'$, tel que $x \in \overset{\circ}{K}$ et tel que l'on ait :

(5.4.1.6) $\qquad \nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$ est inversible

((4.4.4) et (4.4.5)). Alors, en vertu de la proposition 3.3.4 et son corollaire 3.3.7, les conditions (5.4.1.1) à (5.4.1.6) impliquent que $\mathcal{J}'_K = \mathcal{J}_K$. On en déduit que si l'on pose $g = (g_1,\dots,g_n)$, on a $\mathrm{Im}(B(K;f)) = \mathrm{Im}(B(K;g))$ (chapitre O), ce qui implique que $\mathcal{J}'|\overset{\circ}{K} = \mathcal{J}|\overset{\circ}{K}$ et démontre la proposition.

Remarque 5.4.2.- Dans la proposition 5.4.1, on peut remplacer, sans perte de généralité, l'hypothèse (c) par la condition

$$(c') \qquad M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J};x} = \{d_1,\dots,d_m\} \quad .$$

Comme $M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J};x} \subset \mathcal{D}'$ (cf. (II,1.3)), la condition (c') implique que pour tout i , $1 \leq i \leq m$, $d_i \in \mathcal{D}'$, d'où $0 \in -d_i + (\mathcal{D}' \cap \Delta_i(d))$ (car $d_i \in \Delta_i(d)$) , et l'hypothèse (a) implique que $E_{i;x}(f) \subset \mathcal{D}'$. On peut alors remplacer l'hypothèse (a) par les deux conditions

$$(a') \qquad E_{i;x}(f) \subset \mathcal{D}'$$

et

$$(a'') \qquad [(\mathcal{D}' + (-\mathcal{D}')) \cap \mathbb{N}^p] + \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'$$

(dont la conjonction est, bien entendu, plus forte que l'hypothèse (a)). On a déjà rencontré la condition (a'') dans (II,1.4) et (II,1.5). Cette condition qui paraît compliquée de prime abord est en fait assez naturelle (comme on le verra dans le chapitre IV). Une partie $\mathcal{D}'$ de $\mathbb{N}^p$ satisfaisant à cette condition est un "bon candidat" pour définir une notion de fonction analytique "homogène", du moins pour les questions relatives aux théorèmes de division.

COROLLAIRE 5.4.3.- *Soient* p *un entier,* $p \in \mathbb{N}$, $\leq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^p$ *, compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit* $\leq$ *sur* $\mathbb{N}^p$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, x *un point de* U , $\mathcal{J}$ *un idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *et* $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$ *une famille finie d'éléments de* $\Gamma(U,\mathcal{J})$ *telle que pour tout* i , $1 \leq i \leq m$ *, le germe de* f_i *en* x *soit non nul. On pose*

$$d_i = \nu_{\alpha;x}(f_i) \quad , \ 1 \leq i \leq m \quad .$$

Alors si $M_{\alpha;\mathcal{J};x} \subset \{d_1,\dots,d_m\}$ *, l'idéal* $\mathcal{J}$ *est engendré par la famille* $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$ *au voisinage du point* x .

Démonstration. Le corollaire 5.4.3 est un cas particulier de la proposition 5.4.1 appliquée à $\mathcal{D}' = \mathbb{N}^p$.

Commentaires sur le §5. Le but de ce paragraphe était de formuler, en termes de filtres, des conditions suffisantes pour qu'un polycylindre compact satisfasse "au théorème de division" (on devrait plutôt dire "pour qu'on puisse diviser au-dessus de ce polycylindre"). Afin d'obtenir des énoncés simples, on n'a pas cherché à rendre ces conditions minimales (et de loin). Cependant, il y a un point qui mérite d'être signalé. Dans les propositions 5.2.2, 5.3.1 et 5.3.2, on affirme que "pour tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$, suffisamment centré et effilé pour $\leqq_\alpha$ en x " certaines propriétés sont satisfaites ("inversibilité de $\nu_{f;a;d;K;x}$" ou "théorème de division par une famille finie de fonctions analytiques" ou "théorème de division par un idéal cohérent"). Conformément à 5.1.2 et 5.1.3, cette condition signifie qu'il existe C , $C \in]1,+\infty[$ et V , $V \in \mathcal{F}^o_{\leqq_\alpha}$ tels que pour tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$, tel que

$$x \in \overset{\circ}{K} \quad , \quad e(K;x) < C \quad \text{et} \quad \rho''(K;x) \in V \quad ,$$

ces propriétés soient satisfaites. En réalité, la forme des inégalités (4.4.3.1) de la proposition 4.4.3 nous permet d'affirmer, en raisonnant exactement comme dans les démonstrations des propositions 5.1.2 et 5.1.3, que *pour tout* C , $C \in]1,+\infty[$, il existe V , $V \in \mathcal{F}^o_{\leqq_\alpha}$, (dépendant de C) tel que pour tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$, tel que

$$x \in \overset{\circ}{K} \ , \ e(K;x) < C \quad \text{et} \quad \rho''(K;x) \in V \ ,$$

ces propriétés soient satisfaites. Néanmoins, on a préféré énoncer les "théorèmes ponctuels" dans la version la plus faible, d'une part, pour sa simplicité, et d'autre part, parce qu'elle suffit largement pour les applications les plus courantes, où l'on s'intéresse le plus souvent aux polydisques, dans quel cas les deux versions se confondent. Sans se limiter strictement aux polydisques, on affirme que pour tout polycylindre compact "suffisamment proche" d'un polydisque les mêmes "conditions d'effilement" suffisent. En revanche, dans les paragraphes suivants, où l'on énoncera les théorèmes "uniformes", on ne fera pas cette simplification.

§6.- Théorème de division numérique uniforme

Dans ce paragraphe, on commence à exposer les théorèmes uniformes. Pour cela, on introduit d'abord une version uniforme des filtres d'effilements, et puis on démontre les résultats ne dépendant que de la partie élémentaire du chapitre II, en réservant les théorèmes les plus profonds pour le paragraphe suivant. A partir de ce paragraphe on utilise constamment la notion de fonction modérée (ayant une croissance polynomiale) le long d'un fermé analytique. Le lecteur non familier avec cette notion devra se reporter à l'appendice I, qui est bien entendu indépendant du reste de ce travail.

(6.1) Pour introduire une version uniforme des filtres d'effilements, on part de la remarque triviale suivante. Soient E et Y deux ensembles non vides, $\mathcal{F}$ un filtre sur E et $\mathcal{A}$ un ensemble d'applications de Y dans $\mathcal{F}$ (une application appartenant à $\mathcal{A}$ associe à chaque élément de Y une partie de E appartenant au filtre $\mathcal{F}$). Alors si pour tout F , $F \in \mathcal{A}$, on pose

$$V_F = \{(x,y) \in E \times Y : x \in F(y)\} \quad ,$$

la famille de parties de $E \times Y$

$$(V_F)_{F \in \mathcal{A}}$$

est un système de générateurs d'un filtre sur $E \times Y$, filtre qu'on désignera par $\mathcal{F} \times_{\mathcal{A}} Y$. Pour tout y , $y \in Y$, si l'on désigne par i_y l'injection canonique

$$i_y : E \longrightarrow E \times Y$$

définie par

$$i_y(x) = (x,y) \ , \text{ pour } x \in E \ ,$$

alors $\mathcal{F} \times_{\mathcal{A}} Y$ induit par i_y un filtre sur E , qui est moins fin que le filtre $\mathcal{F}$. Si la famille

$$(F(y))_{F \in \mathcal{A}}$$

est un système de générateurs du filtre $\mathcal{F}$, alors $i_y^{-1}(\mathcal{F} \times_{\mathcal{A}} Y)$ n'est autre que $\mathcal{F}$.

(6.1.1) Soient X un espace $\mathbb{C}$-analytique[1], Z un fermé analytique d'intérieur vide de X , Y l'ouvert dense de X défini par $Y = X-Z$, $\mathcal{C}_m$ l'ensemble des fonctions continues φ ,

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

(1) Tous les espaces analytiques considérés sont supposés séparés et dénombrables à l'infini.

tels que $1/\varphi$ soit modérée le long de Z et p un entier, $p \in \mathbb{N}$. Pour toute partie A de $\mathbb{R}^p$ dont l'enveloppe convexe ne contient pas 0 , on désigne par $\mathcal{A}_A$ l'ensemble des applications F de Y dans le filtre de Hahn-Banach $\mathcal{F}_A$ (cf. I,4.4) telles qu'il existe a , $a \in A$, et φ , $\varphi \in \mathcal{C}_m$, tels que pour tout y , $y \in Y$, on ait

$$F(y) = V_{a;\varphi(y)}$$

(cf. (I,4.2), (I,4.7)). Conformément à 6.1, l'ensemble $\mathcal{A}_A$ définit un filtre $\mathcal{F}_A \times_{\mathcal{A}_A} Y$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^p \times Y$ et si pour tout a , $a \in A$, et tout φ , $\varphi \in \mathcal{C}_m$, on désigne par $V_{a;\varphi}$ la partie de $(\mathbb{R}_+^*)^p \times Y$ définie par

$$V_{a;\varphi} = \{(\rho,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^p \times Y : \rho \in V_{a;\varphi(y)}\} \quad ,$$

alors la famille

$$(V_{a;\varphi})_{a \in A, \varphi \in \mathcal{C}_m}$$

en est un système de générateurs.

LEMME 6.1.2.- *Soient* A *et* A' *deux parties de* $\mathbb{R}^p$ *dont l'enveloppe convexe respectif ne contient pas* 0 *et telles que* $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_{A'}$. *Alors on a*

$$\mathcal{F}_A \times_{\mathcal{A}_A} Y = \mathcal{F}_{A'} \times_{\mathcal{A}_{A'}} Y \quad .$$

Démonstration. Si l'on pose

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \ \bigcup_{(r_1,\dots,r_n) \in (\mathbb{R}_+)^n - \{0\}} (r_1 A + \dots + r_n A)$$

et

$$B' = \bigcup_{n' \in \mathbb{N}^*} \ \bigcup_{(r'_1,\dots,r'_{n'}) \in (\mathbb{R}_+)^{n'} - \{0\}} (r'_1 A' + \dots + r'_{n'} A') \quad ,$$

il résulte de l'hypothèse $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_{A'}$ et de la proposition (I,4.5) que $B = B'$ et que $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_B$. Par symétrie, il suffit donc de démontrer que

$$\mathcal{F}_A \times_{\mathcal{A}_A} Y = \mathcal{F}_B \times_{\mathcal{A}_B} Y \quad .$$

Comme $A \subset B$, on a $\mathcal{A}_A \subset \mathcal{A}_B$, ce qui implique que le filtre $\mathcal{F}_B \times_{\mathcal{A}_B} Y$ est plus fin que le filtre $\mathcal{F}_A \times_{\mathcal{A}_A} Y$. Il reste à démontrer que pour tout b , $b \in B$, et tout φ , $\varphi \in \mathcal{C}_m$, on a $V_{b;\varphi} \in \mathcal{F}_A \times_{\mathcal{A}_A} Y$. Or, $b \in B$ implique qu'il existe n , $n \in \mathbb{N}^*$, $(r_1,\dots,r_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(a_1,\dots,a_n) \in A^n$ tels que

$$b = r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n \quad .$$

Si pour tout i , $1 \leq i \leq n$, on pose

$$\varphi_i = \varphi^{1/nr_i} \quad ,$$

la fonction φ_i est continue, $1/\varphi_i$ est modérée le long de Z (App.1,1.2.2,(vii)) et il résulte de (I,4.2.4) que

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} V_{a_i;\varphi_i} \subset V_{b;\varphi} \quad ,$$

ce qui démontre le lemme.

DÉFINITION 6.1.3.- *Soient* X *un espace* $\mathbb{C}$*-analytique,* Z *un fermé analytique d'intérieur vide de* X , Y *l'ouvert de* X *défini par* $Y = X - Z$, p *un entier,* $p \in \mathbb{N}$, *et* F *un filtre de Hahn-Banach sur* $(\mathbb{R}_+^*)^p$. *On désigne par* $F(Y/Z)$ *le filtre sur* $(\mathbb{R}_+^*)^p \times Y$ *tel que pour toute partie* A *de* $\mathbb{R}^p$, *dont l'enveloppe convexe ne contient pas* 0 *et telle que* $F = F_A$, *on ait*

$$F(Y/Z) = F \times_{F_{A_A}} Y$$

(cf. 6.1.2).

Remarque 6.1.4.- Si F' désigne un filtre de Hahn-Banach sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$, plus fin que F , alors $F'(Y/Z)$ est plus fin que $F(Y/Z)$. (Cela résulte de la proposition (I,4.5)). Si x désigne un point de Y et si l'on identifie $(\mathbb{R}_+^*)^p \times \{x\}$ à $(\mathbb{R}_+^*)^p$, le filtre $F(Y/Z)$ induit F sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$. (Conformément à (6.1) cela est une conséquence du fait que les fonctions constantes sont modérées).

(6.1.5). En gardant les notations de (6.1.1), pour tout δ , $\delta \in \mathbb{R}_+$, et tout φ , $\varphi \in C_m$, on désigne par $E_{p;\delta;\varphi}$ la partie de $(\mathbb{R}_+^*)^p \times Y$ définie par

$$E_{p;\delta;\varphi} = \{(\rho,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^p \times Y \ : \ \rho \in E_{p;\delta;\varphi(y)}\}$$

(cf.(I,4.9)).

PROPOSITION 6.1.6.- *Soient* $\leq''$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{R}^p$ *compatible avec sa structure d'espace vectoriel (sur* $\mathbb{R}$ *),* A *une matrice inversible à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *définissant la relation d'ordre* $\leq''$ (cf. (I,3.5)) *et* F *le filtre de Hahn Banach sur* $(\mathbb{R}_+^*)^p$ *défini par cette relation d'ordre* (cf. (I,4.4) . *Alors la famille*

$$((r_A \times id_Y)\ (E_{p;\delta;\varphi}))_{\delta \in \mathbb{R}_+ ,\varphi \in C_m}$$

est une base du filtre $F(Y/Z)$ *sur* $(\mathbb{R}_+^*)^p \times Y$.

Démonstration. Démontrons d'abord que pour tout δ , $\delta \in \mathbb{R}_+$, et tout φ , $\varphi \in \mathcal{C}_m$, on a

$$(r_A \times id_Y)\,(\mathcal{E}_{p;\delta;\varphi}) \in \mathcal{F}(Y/Z) \quad .$$

Pour tout i et j , $1 \leqq i \leqq p$, $1 \leqq j \leqq p$, on pose

$$b_{ij} = 1 \quad , \text{ pour } \quad i = j \quad ,$$
$$b_{ij} = -\delta \quad , \text{ pour } \quad i = j+1 \quad ,$$
$$b_{ij} = 0 \quad , \text{ pour } \quad i \neq j \quad \text{et} \quad i \neq j+1 \quad ,$$
$$b_i = (b_{i1},\dots,b_{ip}) \quad ,$$
$$a_i = A^{-1} b_i \quad .$$

On a $b_i >_L 0$, où $\leqq_L$ désigne l'ordre antilexicographique sur $\mathbb{R}^p$ (cf. (I,3.5.3)), d'où $a_i >'' 0$ (cf. (I,3.5.3)). Pour tout i , $1 \leqq i \leqq p$, on désigne par φ_i la fonction

$$\varphi_i : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

définie par

$$\varphi_i = \varphi \quad , \text{ pour } \quad i = 1 \quad ,$$
$$\varphi_i = 1 \quad , \text{ pour } \quad i \neq 1 \quad .$$

On a $\varphi_i \in \mathcal{C}_m$ et pour tout y , $y \in Y$,

$$\mathcal{E}_{p;\delta;\varphi(y)} = \bigcap_{1 \leqq i \leqq p} V_{b_i;\varphi_i(y)} \quad ,$$

d'où

$$r_A(\mathcal{E}_{p;\delta;\varphi(y)}) = \bigcap_{1 \leqq i \leqq p} V_{a_i;\varphi_i(y)}$$

((I,4.6), (I,4.7) et (I,4.1)), ce qui implique que

$$(r_A \times id_Y)\,(\mathcal{E}_{p;\delta;\varphi}) = \bigcap_{1 \leqq i \leqq p} V_{a_i;\varphi_i}$$

et démontre que

$$(r_A \times id_Y)(\mathcal{E}_{p;\delta;\varphi}) \in \mathcal{F}(Y/Z) \quad .$$

Il reste à démontrer que pour toute famille finie $(a_k)_{1 \leqq k \leqq n}$ d'éléments de $\mathbb{R}^p$ tels que $a_k >'' 0$ et toute famille $(\varphi_k)_{1 \leqq k \leqq n}$ d'éléments de $\mathcal{C}_m$ il existe δ , $\delta \in \mathbb{R}_+$, et φ , $\varphi \in \mathcal{C}_m$, tels que

$$(r_A \times id_Y)\,(\mathcal{E}_{p;\delta;\varphi}) \subset \bigcap_{1 \leqq k \leqq n} V_{a_k;\varphi_k} \quad .$$

Pour tout k , $1 \leqq k \leqq n$, soit b_k l'élément $b_k = (b_{k1},\dots,b_{kp})$ de $\mathbb{R}^p$ défini par

$$b_k = Aa_k \quad .$$

On pose

$$i_k = \sup\{i \ : \ 1 \leqq i \leqq p \ , \ b_{ki} \neq 0\} \quad , \ 1 \leqq k \leqq n \quad ,$$

$$I_k = \{i \ : \ 1 \leqq i < i_k \ , \ b_{ki} < 0\} \quad , \ 1 \leqq k \leqq n \quad ,$$

et

$$\delta = \sup_{1 \leqq k \leqq n} \ \sup_{i \in I_k} \ (|b_{ki}|/b_{ki_k}) + 1 \quad .$$

Comme $a_k >'' 0$, on a $b_k >_L 0$ (cf. (I,3.5.3)), d'où $b_{ki_k} > 0$ et en particulier $\delta \geqq 0$.
Si pour tout y , $y \in Y$, on pose

$$\varphi(y) = \inf\{\varphi_1(y)^{1/b_{1i_1}},\dots,\varphi_n(y)^{1/b_{ni_n}} \ , \ 1\}$$

la fonction

$$\varphi \ : \ Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

est donc une fonction continue telle que $1/\varphi$ soit modérée le long de Z (App.I,1.2.2,(vii),1.3.3) et il résulte de (I,4.10.1) que pour tout y , $y \in Y$, on a

$$r_A(E_{p;\delta;\varphi(y)}) \subset \bigcap_{1 \leqq k \leqq n} V_{a_k;\varphi_k(y)} \quad ,$$

d'où

$$(r_A \times id_Y)(E_{p;\delta;\varphi}) \subset \bigcap_{1 \leqq k \leqq n} V_{a_k;\varphi_k} \quad ,$$

ce qui démontre la proposition.

Remarque 6.1.7.- Soient $\leqq'$ une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde, A une matrice de définition de $\leqq'$ (cf. (I,3.11)), et F le filtre de Hahn-Banach $F^{\circ}_{\leqq'}$ défini par cette relation d'ordre (cf. (I,5.1.3)). Alors il résulte de la proposition 6.1.6 (cf. (I,3.5)) que la famille

$$((r_A \times id_Y)(E_{p;\delta;\varphi}))_{\delta \in \mathbb{R}_+ , \varphi \in C_m}$$

est une base d'un filtre sur $(\mathbb{R}_+^*)^p \times Y$, plus fin que $F(Y/Z)$ (cf. (I,5.1.5) et (6.1.4)), qui lui est égal si et seulement si la relation d'ordre $\leqq'$ est rationnelle (cf. (I,3.11), (I,5.2.1), (I,5.2.2) et (6.1.4)). En particulier, si

$\leqq'$ désigne l'ordre antilexicographique $\leqq_L$ sur $\mathbb{N}^p$ (cf. (I,3.12.1)), la famille

$$(E_{p;\delta;\varphi})_{\delta\in\mathbb{R}_+,\varphi\in C_m}$$

est une base du filtre $F(Y/Z)$.

(6.2). Soient p un entier, $p\in\mathbb{N}$, et A une partie non vide de $\mathbb{C}^p$. On rappelle (cf. 5.1) que K_A^p désigne l'ensemble des polycylindres compacts pointés par un point de A , autrement dit l'ensemble des couples (K,x) formés d'un polycylindre K de $\mathbb{C}^p$ et d'un point x appartenant à l'intérieur de K , tel que $x\in A$. L'application qui associe à tout polydisque fermé de centre appartenant à A le couple formé de ce polydisque et de son centre, identifie l'ensemble de ces polydisques à une partie de K_A^p . De même, pour tout point x , $x\in A$, l'application qui associe à tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$, tel que $x\in \mathring{K}$, le couple (K,x) , identifie K_x^p à une partie de K_A^p (cf. 5.1).

On désigne par ρ_A'' l'application

$$\rho_A'' : K_A^p \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^p\times A$$

définie par

$$\rho_A''(K;x) = (\rho''(K;x),x),\text{ pour } (K,x)\in K_A^p .$$

L'application ρ_A'' est surjective et induit une bijection de l'ensemble des polydisques fermés de centre appartenant à A sur l'ensemble $(\mathbb{R}_+^*)^p\times A$ (c'est la bijection qui associe à un polydisque fermé le couple formé de son polyrayon et de son centre). En particulier, si F désigne un filtre sur $(\mathbb{R}_+^*)^p\times A$, alors $\rho_A''^{-1}(F)$ est une base de filtre sur K_A^p .

(6.2.1). Soient p un entier, $p\in\mathbb{N}$, X un sous-espace analytique localement fermé de $\mathbb{C}^p$, Z un fermé analytique de X d'intérieur vide (dans X) et Y l'ouvert dense de X défini par Y = X-Z . On dit qu'un filtre H sur K_Y^p est un filtre d'effilements modérés le long de Z , s'il existe un filtre de Hahn-Banach F sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$ tel que H soit engendré par la base de filtre $\rho_Y''^{-1}(F(Y/Z))$ sur K_Y^p (cf. 6.1.3 et 6.2). Si A désigne une partie de $\mathbb{R}^p$ dont l'enveloppe convexe ne contient pas 0 et si $F = F_A$ (cf. (I,4.4)), on dira que H est le filtre d'effilements modérés le long de Z sur K_Y^p , défini par A . La famille

$$(\rho_Y''^{-1}(\bigcap_{1\leq i\leq n} V_{a_i;\varphi_i}))_{n\in N,\ (a_1,\dots,a_n)\in A^n\ ,\ (\varphi_1,\dots,\varphi_n)\in C_m^n}$$

en est alors une base (cf. 6.1.1). On s'intéresse plus spécialement à deux cas

particuliers.
Le premier est celui où

$$A = \{a \in \mathbb{R}^p : \exists d, d' \in \mathbb{N}^p , d <' d' \quad \text{et} \quad a = d'-d\} \quad ,$$

où $\leqq'$ désigne une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde, autrement dit le cas où $F = F^{\circ}_{\leqq'}$ (cf. (I,5.1.1) et (I,5.1.3)). On dira alors que H est le filtre d'effilements modérés le long de Z sur K^p_Y , défini par la relation d'ordre $\leqq'$ sur $\mathbb{N}^p$.

Le deuxième cas est celui où

$$A = \{a \in \mathbb{R}^p : a >'' 0\} \quad ,$$

où $\leqq''$ désigne une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^p$ compatible avec sa structure d'espace vectoriel, autrement dit le cas où $F = F_{\leqq''}$ (cf. (I,4.4)). On dira alors que H est le filtre d'effilements modérés le long de Z sur K^p_Y , défini par cette relation d'ordre. Si $\leqq''$ induit $\leqq'$ sur $\mathbb{N}^p$, alors le filtre d'effilements modérés le long de Z sur K^p_Y défini par $\leqq''$ est plus fin que celui défini par $\leqq'$ (cf. (I,5.1.5) et (6.1.4)).

On dira qu'une propriété d'un polycylindre compact pointé est satisfaite pour tout polycylindre compact pointé dans Y , suffisamment effilé pour A (resp. pour $\leqq'$, resp. pour $\leqq''$), modérément le long de Z , si l'ensemble des polycylindres compacts pointés appartenant à K^p_Y , satisfaisant à cette propriété, appartient au filtre d'effilements modérés le long de Z , défini par A (resp. par $\leqq'$, resp. par $\leqq''$) , sur K^p_Y .

(<u>6.2.2</u>). Si $\leqq''$ désigne une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^p$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel et A une matrice de définition de $\leqq''$ (cf. (I,3.5)), une propriété d'un polycylindre compact pointé est satisfaite pour tout polycylindre compact pointé dans Y , suffisamment effilé pour $\leqq''$, modérément le long de Z , si et seulement si il existe un nombre réel δ , $\delta \in \mathbb{R}_+$, et une fonction continue φ ,

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}^*_+ \quad ,$$

telle que la fonction $1/\varphi$ soit modérée le long de Z , tels que pour tout point y , $y \in Y$, et tout polycylindre compact K , tel que $y \in \overset{\circ}{K}$ et

$$\rho''(K;y) \in r_A(E_{p;\delta;\varphi(y)}) \quad ,$$

le polycylindre pointé (K,y) satisfasse à cette propriété (6.1.6).

(<u>6.2.3</u>). Si $\leqq'$ désigne une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde et A une matrice de définition de $\leqq'$ (cf. (I,3.11)), pour qu'une propriété d'un polycylindre compact pointé soit satisfaite pour tout polycylindre compact pointé dans Y , suffisamment effilé pour $\leqq'$, modérément le long de Z , il faut qu'il existe un nombre réel δ , $\delta \in \mathbb{R}_+$, et une fonction continue φ ,

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

telle que $1/\varphi$ soit une fonction modérée le long de Z , tels que pour tout point y , $y \in Y$, et tout polycylindre K , tel que $y \in \overset{\circ}{K}$ et

$$\rho''(K;y) \in r_A(E_{p;\delta;\varphi(y)}) ,$$

le polycylindre pointé (K,y) satisfasse à cette propriété (6.1.7); ces conditions étant équivalentes si et seulement si la relation d'ordre total $\leqq'$ est rationnelle (cf. (I,3.11) et (6.1.7)). En particulier, si $\leqq'$ est la relation d'ordre anti-lexicographique $\leqq_L$ sur $\mathbb{N}^p$ (cf. (I,3.12.1)), une propriété d'un polycylindre compact pointé est satisfaite pour tout polycylindre compact pointé dans Y , suffisamment effilé pour $\leqq_L$, modérément le long de Z , si et seulement si il existe un nombre réel δ , $\delta \in \mathbb{R}_+$, et une fonction continue φ ,

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

telle que $1/\varphi$ soit une fonction modérée le long de Z , tels que pour tout point y , $y \in Y$, et tout polycylindre compact K , tel que $y \in \overset{\circ}{K}$ et

$$\rho_1''(K;y) < \varphi(y) ,\ \rho_2''(K;y) < \rho_1''^{\delta}(K;y) , \ldots , \rho_p''(K;y) < \rho_{p-1}''^{\delta}(K;y) ,$$

le polycylindre pointé (K,y) satisfasse à cette propriété.

(6.2.4). Si H désigne un filtre d'effilements modérés le long de Z sur K_Y^p , engendré par $\rho_Y''^{-1}(F(Y/Z))$, où F désigne un filtre de Hahn-Banach sur $(\mathbb{R}_+^*)^p$, la trace de H sur l'ensemble des polydisques fermés de centre appartenant à Y est un filtre, qui n'est autre que l'image réciproque du filtre $F(Y/Z)$ par la bijection définie par la restriction de ρ_Y'' sur cet ensemble (cf. (6.2)). En gardant les notations de 6.2.1, on dira qu'une propriété d'un polydisque fermé est satisfaite pour tout polydisque fermé de centre appartenant à Y , suffisamment effilé pour A (resp. pour $\leqq'$, resp. pour $\leqq''$) , modérément le long de Z , si l'ensemble des polydisques fermés de centre appartenant à Y , satisfaisant à cette propriété, appartient à la trace du filtre d'effilements modérés le long de Z sur K_Y^p , défini par A (resp. par $\leqq'$, resp. par $\leqq''$) , sur l'ensemble des polydisques fermés de centre appartenant à Y . Si l'on désigne par V l'ensemble des éléments (ρ,y) de $(\mathbb{R}_+^*)^p \times Y$ tels que le polydisque fermé de centre y et de polyrayon ρ satisfasse à cette propriété, cette condition équivaut à $V \in F_A(Y/Z)$ (resp. à $V \in F^o_{\leqq'}(Y/Z)$, resp. à $V \in F_{\leqq''}(Y/Z)$) .

(6.2.5). Si $\mathcal{H}$ désigne un filtre d'effilements modérés le long de Z sur K_Y^p, pour tout point y, $y \in Y$, la trace du filtre $\mathcal{H}$ sur K_y^p (cf. 6.2) est un filtre d'effilements sur K_y^p (cf.(6.1.4) et (5.1.3)). Plus précisément, en gardant les notations de (6.2.1), si $\mathcal{H}$ désigne le filtre d'effilements modérés le long de Z sur K_Y^p, défini par A (resp. par $\leqq'$, resp. par $\leqq''$), la trace du filtre $\mathcal{H}$ sur K_y^p n'est autre que le filtre d'effilements sur K_y^p, défini par A (resp. par $\leqq'$, resp. par $\leqq''$).

(6.3). Par abus de langage, on dira qu'une propriété d'un polycylindre compact est satisfaite par un polycylindre compact pointé (K,x), si K satisfait à cette propriété.

PROPOSITION 6.3.1.- *Soient* p *un entier,* $p \in \mathbb{N}$, $\leqq'$ (resp. $\leqq''$) *une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}^p$ (resp. $\mathbb{R}^p$), *compatible avec sa structure de monoïde* (resp. *d'espace vectoriel*) *et moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$ (resp. *sur* $\mathbb{R}^p$), U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, X *un sous-espace analytique fermé de* U, Z *un fermé analytique de* X *d'intérieur vide* (*dans* X) *et* Y *l'ouvert dense de* X *défini par* $Y = X-Z$. *Alors tout polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *pointé dans* Y, *suffisamment effilé pour* $\leqq'$ (resp. *pour* $\leqq''$), *modérément le long de* Z, *est contenu dans* U.

Démonstration. Soit φ' la fonction

$$\varphi' : X \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

définie par

$$\varphi'(x) = \inf \{d(x,\mathbb{C}^p-U), 1\} \quad , \text{ pour } x \in X .$$

La fonction φ' (ainsi que la fonction $1/\varphi'$) est une fonction continue sur X. On en déduit que si l'on désigne par φ la restriction de φ' à Y, φ est une fonction continue et $1/\varphi$ une fonction modérée le long de Z (App. I, 1.2.1). Soit $e_1,\ldots,e_p$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Pour tout i, $1 \leqq i \leqq p$, on a $e_i >' 0$ (resp. $e_i >'' 0$). Alors pour tout point y de Y et tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$ tel que $y \in \mathring{K}$ la condition

$$\rho''(K;y) \in \bigcap_{1 \leqq i \leqq p} V_{e_i;\varphi(y)}$$

implique que $K \subset U$, ce qui démontre la proposition.

Remarque 6.3.2.- Plus généralement, si $(\varphi_i)_{1 \leqq i \leqq p}$ désigne une famille de fonctions continues

$$\varphi_i : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

telle que pour tout i, $1 \leqq i \leqq p$, la fonction $1/\varphi_i$ soit modérée le long de Z (condition qui est, en particulier, vérifiée si φ_i est la restriction d'une fonction continue de X dans $\mathbb{R}_+^*$) , pour tout polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ pointé dans Y , (K,y) , suffisamment effilé pour $\leqq'$ (resp. $\leqq''$), modérément le long de Z , on a

$$\rho_i''(K;y) < \varphi_i(y) \ , \text{ pour } \ 1 \leqq i \leqq p \ \text{ et } \ y \in Y \ .$$

En effet, en gardant les notations de la démonstration de la proposition 6.3.1, cette condition est équivalente à la condition

$$\rho''(K;y) \in \bigcap_{1 \leqq i \leqq p} V_{e_i;\varphi_i(y)} \ .$$

(6.4). Le lemme suivant résume l'essentiel des résultats démontrés jusqu'ici, dans le chapitre III, et constitue la forme la plus précise du théorème de division numérique uniforme par une famille finie de fonctions analytiques. On utilise la plupart des notations introduites dans ce travail et plus spécialement celles introduites au §1 du chapitre II et aux §2 et §4 du chapitre III. Le théorème qui le suit en est une forme moins précise mais plus "lisible".

LEMME 6.4.1.- *Soient* p *un entier,* $p \in \mathbb{N}$, $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}^p$, *compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$, m *un entier,* $m \in \mathbb{N}$, $d = (d_1,\dots,d_m)$ *un élément de* $(\mathbb{N}^p)^m$, $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_m,\mathcal{D}')$, *où pour tout* i , $1 \leqq i \leqq m$, $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{N}^p$ *et* $\mathcal{D}' \subset \mathbb{N}^p$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, X *un sous-espace analytique fermé de* U , Z *un fermé analytique de* X *d'intérieur vide (dans* X *)* , Y *l'ouvert dense de* X *défini par* $Y = X-Z$ *et* $f = (f_1,\dots,f_m)$ *un élément de* $(\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}))^m$. *On suppose que*

i) *pour tout* i , $1 \leqq i \leqq m$,

$$\mathcal{D}' \cap \mathcal{D}_i(d) \subset d_i + \mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}' \ ;$$

ii) *pour tout* i , $1 \leqq i \leqq m$, *et tout* y , $y \in Y$,

$$\mathcal{D}_i + E_{i;y}(f) \subset \mathcal{D}' \ ;$$

iii) *pour tout* i , $1 \leqq i \leqq m$, *et tout* y , $y \in Y$, *le germe* $f_{i,y}$ *de* f_i *en* y *est non nul et*

$$v_{\alpha;y}(f_i) = d_i \ .$$

On pose

$$r_i = r_{\alpha;d_i} \ , \ 1 \leqq i \leqq m \ ,$$

et

$$\delta_{ij} = s_{\alpha;j}(d_i) \ , \ 1 \leqq i \leqq m \ , \ 1 \leqq j \leqq r_i \ .$$

Alors pour tout point y *de* Y *et tout polycylindre compact* K *de* $\mathbb{C}^p$ *tel que* $y \in \mathring{K}$ *, les conditions*

$$\text{a)}\ \rho''_i(K;y) \leq R_U(y) \quad , \quad 1 \leq i \leq p \quad ;^{(1)}$$

$$\text{b)}\ e(K;y)^{|d|}\rho''^{\delta_{ij}}(K;y)/\rho''^{d_i}(K;y) \leq \qquad 1\leq i\leq m \ , \ 1\leq j\leq r_i \ ,$$

$$\leq (R_U^{M(d)}(y)/(N(d)\ \Lambda_f(y)))\ \frac{1}{d_i!}\left|\frac{\partial^{|d_i|} f_i}{\partial X^{d_i}}(y)\right|$$

impliquent que

i) *pour tout* g , $g \in B_{\mathcal{D}';y}(K)$, *il existe une famille unique* $(g_i)_{0\leq i\leq m}$ *d'éléments de* $B(K)$ *telle que pour tout* i , $1 \leq i \leq m$, $g_i \in B_{\mathcal{D}_i \cap (-d_i+\Delta_i(d));y}(K)$, $g_o \in B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);y}(K)$ *et*

$$g = \sum_{i=1}^{m} g_i(f_i|K) + g_o \quad ;$$

ii) *si l'on désigne par* $\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;y}$ (resp. *par* $r_{\mathcal{D};f;d;K;y}$) *l'application*

$$\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;y} : B_{\mathcal{D}';y}(K) \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i;y}(K)$$

$$(\text{resp.}\ r_{\mathcal{D};f;d;K;y} : B_{\mathcal{D}';y}(K) \longrightarrow B_{\mathcal{D}';y}(K)\ )$$

définie par

$$\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;y}(g) = (g_1,\dots,g_m)$$

$$(\text{resp.}\ r_{\mathcal{D};f;d;K;y}(g) = g_o\ )\ ,$$

où pour tout g , $g \in B_{\mathcal{D}';y}(K)$, $(g_i)_{0\leq i\leq m}$ *désigne l'unique famille d'éléments* de $B(K)$ *telle que pour tout* i , $1 \leq i \leq m$,

$g_i \in B_{\mathcal{D}_i \cap (-d_i+\Delta_i(d));y}(K)$, $g_o \in B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);y}(K)$ *et*

$$g = \sum_{i=1}^{m} g_i\ (f_i|K) + g_o$$

(cf. à (i)) , *on a* :

---

(1) On rappelle que cette condition implique que $K \subset U$ (cf. (4.4.1)).

a) $\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;y}$ *est une application* $\mathbb{C}$*-linéaire continue et*

$$\|\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;y}\|_K \leq 2^{|d|+m}\, e(K;y)^{|d|} \sup_{1\leq i\leq m}\left(d_i!/\left|\frac{\partial^{|d_i|} f_i}{\partial X^{d_i}}(y)\right|\right)/\rho''^{\,d_o}(K;y) \quad ,$$

où $d_o = \sup\limits_{1\leq i\leq m} d_i$ *(la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit* $\leq$ *sur* $\mathbb{N}^p$ *);*

b) $r_{\mathcal{D};f;d;K;y}$ *est une application* $\mathbb{C}$*-linéaire continue et*

$$\|r_{\mathcal{D};f;d;K;y}\|_K \leq 2(1+m\,2^{|d|+m-1}\, e(K;y)^{|d|}) \quad ;$$

c) $\mathrm{Im}(\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;y}) = \prod\limits_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_i\cap(-d_i+\Delta_i(d));y}(K) \quad ;$

d) $\mathrm{Im}(r_{\mathcal{D};f;d;K;y}) = \mathrm{Ker}(\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;y}) = B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);y}(K) \quad ;$

e) $B_{\mathcal{D};y}(K;f)$ *est une scission de* $\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;y}$;

f) $\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;y}$ *est une scission de* $B_{\mathcal{D};y}(K;f)$ *, si et seulement si*

$$\mathrm{Ker}(r_{\mathcal{D};f;d;K;y}) = \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};y}(K;f)) \quad ;$$

g) *si l'on désigne par* $\mathcal{J}$ *l'idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *engendré par* $f_1,\dots,f_m$ *et si*

$$M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J};K;y} \subset \{d_1,\dots,d_m\} \quad ,$$

alors $\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;y}$ *est une scission de* $B_{\mathcal{D};y}(K;f)$; *réciproquement si* $\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;y}$ *est une scission de* $B_{\mathcal{D};y}(K;f)$ *et si l'on suppose que*

$$\mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};y}(K;f)) = \mathcal{J}_K \cap B_{\mathcal{D}';y}(K) \quad ,$$

alors

$$M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J};K;y} \subset \{d_1,\dots,d_m\} \quad ;$$

iii) *si* $\mathcal{J}'$ *désigne un idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *tel que pour tout* i , $1\leq i\leq m$, $f_i\in\Gamma(U,\mathcal{J}')$, *la condition*

$$M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J}';K;y} \subset \{d_1,\dots,d_m\}$$

implique que

$$\mathcal{J}'_K \cap B_{\mathcal{D}';y}(K) = \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};y}(K;f)) \quad .$$

Démonstration. Pour tout i , $1 \leq i \leq p$, et tout y , $y \in Y$, on pose

$$a_i(y) = \frac{1}{d_i!} \frac{\partial^{|d_i|} f_i}{\partial X^{d_i}}(y)$$

et

$$a(y) = (a_1(y), \ldots, a_p(y)) .$$

En vertu de 4.4.4, pour tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$, tel que $y \in \mathring{K}$, satisfaisant aux conditions (a) et (b), $\nu_{\mathcal{D};f;a;(y);d;K;y}$ est inversible et on a

$$(6.4.1.1) \qquad \|\nu^{-1}_{\mathcal{D};f;a(y);d;K;y}\|_K \leq 2 .$$

D'autre part, l'hypothèse (i) implique que pour tout i , $1 \leq i \leq p$, on a

$$(6.4.1.2) \qquad \mathcal{D}_i \cap (-d_i + \Delta_i(d)) = -d_i + (\mathcal{D}' \cap \Delta_i(d)) .$$

Alors l'assertion (i) résulte de la proposition 3.2.1. Pour démontrer l'assertion (ii), on remarque qu'en vertu de 3.2.2, (iii), et de (1.4),(c), (i), on a

$$\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;y} = \tau_{\mathcal{D};a(y);d;K;y} \circ \nu^{-1}_{\mathcal{D};f;a(y);d;K;y}$$

et

$$r_{\mathcal{D};f;d;K;y} = (\mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}';y}(K)} - \mu_{\mathcal{D};a(y);d;K;y}\, \tau_{\mathcal{D};a(y);d;K;y}) \circ \nu^{-1}_{\mathcal{D};f;a(y);d;K;y} .$$

Comme la condition (a) implique que pour tout i , $1 \leq i \leq p$,

$$\rho''_i(K;y) \leq 1$$

(cf. 4.4.1), l'assertion (a) résulte de (2.7.3) et de (6.4.1.1). L'assertion (b) résulte de (2.7.6) et de (6.4.1.1), l'assertion (c) de 3.2.2, (i) et de (6.4.1.2), l'assertion (e) de 3.2.2, (iv) et l'assertion (d) de 3.2.2, (ii), de (1.2) et de l'assertion (e). D'autre part, en vertu de la définition de $r_{\mathcal{D};f;d;K;y}$, on a

$$\mathrm{Ker}(r_{\mathcal{D};f;d;K;y}) \subset \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D};y}(K;f))$$

et l'assertion (f) résulte de l'équivalence des conditions (a) et (d) de 3.2.2,(v). L'assertion (g) découle de 3.3.1 et de l'équivalence des conditions (a) et (b) de 3.2.2, (v). Enfin, l'assertion (iii) résulte de 3.3.1 et de 3.3.4.

THÉORÈME 6.4.2.- *Soient* p *un entier,* $p \in \mathbb{N}$, $\leq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^p$, *compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit* $\leq$ *sur* $\mathbb{N}^p$, m *un entier,* $m \in \mathbb{N}$, $d = (d_1, \ldots, d_m)$ *un élément de* $(\mathbb{N}^p)^m$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, X *un sous-espace analytique fermé de* U , Z *un fermé* *analytique de* X *d'intérieur vide (dans* X *)* , Y *l'ouvert dense de* X *défini par* $Y = X-Z$, $f = (f_1,\dots,f_m)$ *un élément de* $(\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}))^m$ *et* φ *une fonction continue*

$$\varphi : Y \longrightarrow [\,1,+\infty\,[$$

modérée le long de Z . *On suppose que pour tout* i , $1 \leqq i \leqq m$, *et tout* y , $y \in Y$, *le germe* $f_{i,y}$ *de* f_i *en* y *est non nul et que*

$$v_{\alpha;y}(f_i) = d_i \quad .$$

Alors il existe des fonctions continues

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad , \quad \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

modérées le long de Z *telles que pour tout polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *pointé dans* Y , (K,y) , *suffisamment effilé pour* $\leqq_\alpha$, *modérément le long de* Z *la condition*

$$e(K;y) \leqq \varphi(y)$$

implique que :

i) $K \subset U$;

ii) *pour tout* g , $g \in B(K)$, *il existe une famille unique* $(g_i)_{0\leqq i\leqq m}$ *d'éléments de* $B(K)$ *telle que pour tout* i , $1 \leqq i \leqq m$, $g_i \in B_{-d_i+\Delta_i(d)}(K)$, $g_o \in B_{\Delta_o(d)}(K)$ *et*

$$g = \sum_{i=1}^{m} g_i(f_i|K) + g_o \quad ;$$

iii) *si l'on désigne par* $\sigma_{f;d;K}$ (resp. $r_{f;d;K}$) *l'application*

$$\sigma_{f;d;K} : B(K) \longrightarrow B(K)^m$$

$$(\text{resp. } r_{f;d;K} : B(K) \longrightarrow B(K)\ )$$

définie par

$$\sigma_{f;d;K}(g) = (g_1,\dots,g_m)$$

$$(\text{resp. } r_{f;d;K}(g) = g_o\ ) \quad ,$$

où pour tout g , $g \in B(K)$, $(g_i)_{0\leqq i\leqq p}$ *désigne l'unique famille d'éléments de* $B(K)$ *telle que pour tout* i , $1 \leqq i \leqq p$, $g_i \in B_{-d_i+\Delta_i(d)}(K)$, $g_o \in B_{\Delta_o(d)}(K)$ *et*

$$g = \sum_{i=1}^{m} g_i(f_i|K) + g_o$$

(cf. *à* (ii)), *on a* :

a) $\sigma_{f;d;K}$ *est une application* $\mathbb{C}$-*linéaire continue et*

$$\|\sigma_{f;d;K}\|_K \leqq \Psi_1(y)/\rho''^{\,d_o}(K;y) \quad ,$$

où $d_o = \sup\limits_{1\leqq i\leqq m} d_i$ (*la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$) ;

b) $r_{f;d;K}$ *est une application* $\mathbb{C}$-*linéaire continue et*

$$\|r_{f;d;K}\|_K \leqq \psi_2(y) \quad ;$$

c) $\mathrm{Im}(\sigma_{f;d;K}) = \prod\limits_{i=1}^{m} B_{-d_i+\Delta_i(d)}(K)$;

d) $\mathrm{Im}(r_{f;d;K}) = \mathrm{Ker}(\sigma_{f;d;K}) = B_{\Delta_o(d)}(K)$;

e) $B(K;f)$ *est une scission de* $\sigma_{f;d;K}$;

f) *si l'on désigne par* J *l'idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *engendré par* $f_1,\ldots,f_m$, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

α) $M_{\alpha;J;y} \subset \{d_1,\ldots,d_m\}$;

β) $\mathrm{Ker}(r_{f;d;K}) = J_K$;

γ) $\sigma_{f;d;K}$ *est une scission de* $B(K;f)$;

iv) *si* J' *désigne un idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *tel que pour tout* i , $1\leqq i\leqq m$, $f_i \in \Gamma(U,J')$, *la condition*

$$M_{\alpha;J';y} \subset \{d_1,\ldots,d_m\}$$

implique que

$$J'_K = \mathrm{Im}(B(K;f)) \ .$$

Démonstration. Soit ψ_1 (resp. ψ_2) la fonction

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$(\text{resp. } \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ )$$

définie par

$$\psi_1(y) = 2^{|d|+m}\ \varphi^{|d|}(y) \sup_{1\leq i\leq m}\left(d_i!/\left|\frac{\partial^{|d_i|} f_i}{\partial X^{d_i}}(y)\right| \right)$$

$$(\text{resp.}\quad \psi_2(y) = 2(1+m\ 2^{|d|+m-1}\ \varphi^{|d|}(y))\ )\ ,$$

pour $y \in Y$. Les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont continues, modérées le long de Z (App.I,1.2.1,1.3.3 et 1.3.2). Pour tout i , $1 \leqq i \leqq m$, soit φ_i la fonction

$$\varphi_i : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

définie par

$$\varphi_i(y) = (R_U^{M(d)}(y)/(N(d)\Lambda_f(y)\ \varphi^{|d|}(y)))\frac{1}{d_i!}\left|\frac{\partial^{|d_i|} f_i}{\partial X^{d_i}}(y)\right| ,$$

pour $y \in Y$. La fonction φ_i est continue et $1/\varphi_i$ est modérée le long de Z (App.I, 1.2.1 et 1.3.2). Alors si l'on pose

$$r_i = r_{\alpha;d_i} \ , \quad 1 \leqq i \leqq m \ ,$$

$$\delta_{ij} = s_{\alpha;j}(d_i) \ , \quad 1 \leqq i \leqq m \ , \quad 1 \leqq j \leqq r_i \ ,$$

on a $\delta_{ij} >_\alpha d_i$ et on en déduit que pour tout polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ centré dans Y , (K,y) , suffisamment effilé pour $\leqq_\alpha$, modérément le long de Z , on a

a) pour tout i , $1 \leqq i \leqq p$, $\rho''_i(K;y) < R_U(y)$;

b) pour tout i et j , $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq r_i$,

$$\rho''^{\,\delta_{ij}-d_i}(K;y) < \varphi_i(y) \ ;$$

(cf. 6.3.2 et (6.2.1)). La condition (a) implique que $K \subset U$ (4.4.1), d'où l'assertion (i). Si l'on suppose en plus que

$$e(K;y) \leqq \varphi(y) \ ,$$

les conditions ci-dessus impliquent les conditions (a) et (b) du lemme 6.4.1. En appliquant ce lemme à

$$\mathcal{D}_i = \mathbb{N}^p \ , \quad 1 \leqq i \leqq p \ , \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' = \mathbb{N}^p \ ,$$

on en déduit aussitôt les assertions (ii) et (iii), (a), (b), (c), (d), (e) du théorème. Pour démontrer l'assertion (iii), (f), on remarque que

$$M_{\alpha;J;K;y} = M_{\alpha;J;y}$$

(II,3.7) et que

$$J_K = \operatorname{Im}(B(K;f))$$

(chapitre 0). L'assertion (iii), (f) résulte alors des assertions (ii), (f) et (ii), (g) du lemme 6.4.1. De même, l'assertion (iv) résulte de l'assertion (iii) du lemme en remarquant que

$$M_{\alpha;J';K;y} = M_{\alpha;J';y}$$

(II,3.7), ce qui démontre le théorème.

Remarque 6.4.3.- Dans les applications, la fonction φ sera, le plus souvent, supposée constante et il découle de la démonstration qu'on pourra alors choisir la fonction ψ_2 constante également (mais non pas la fonction ψ_1) . En appliquant le théorème à $\varphi = 1$, on obtient un cas particulier important concernant les polydisques :

PROPOSITION 6.4.4.- *En gardant les notations et les hypothèses du théorème* 6.4.2, *il existe une fonction continue*

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$$

modérée le long de Z *et une constante* ψ_2 , $\psi_2 \in \mathbf{R}_+^*$, *telles que pour tout polydisque fermé* K *de centre* y *appartenant à* Y , *suffisamment effilé pour* $\leqq_\alpha$, *modérément le long de* Z , *les conditions* (i), (ii), (iii) et (iv) *du théorème* 6.4.2 *soient satisfaites.*

Remarque 6.4.5.- En utilisant la proposition 4.5.5 ainsi que les fonctions introduites dans 4.5.1, on peut donner une forme "paramétrique" explicite à la condition "suffisamment effilé pour $\leqq_\alpha$, modérément le long de Y " du théorème 6.4.2. Plus précisément, si A désigne une matrice de définition de la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ sur $\mathbf{N}^p$ (cf. (I,3.11)) et si l'on pose

$$\delta_o = \Phi_{A;m}(d)$$

et pour tout y , $y \in Y$,

$$\varepsilon_i(y) = (R_U^{M(d)}(y)/(N(d)\Lambda_f(y)\ \varphi^{|d|}(y)))\ \frac{1}{d_i!}\left|\frac{\partial^{|d_i|} f_i}{\partial X^{d_i}}(y)\right|, \quad 1 \leqq i \leqq m \quad ,$$

$$\varepsilon(y) = (\varepsilon_1(y),\dots,\varepsilon_m(y))$$

et

$$\varepsilon_o(y) = \Psi_{A;m}\ (d,\varepsilon(y),R_U(y)) \quad ,$$

alors on peut remplacer cette condition par la condition (plus forte)

$$\rho''(K;y) \in r_A(E_{p;\delta_o;\varepsilon_o(y)}) \quad .$$

On remarquera que la fonction

$$\varepsilon_o : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

est continue et que $1/\varepsilon_o$ est modérée le long de Z (App.I,1.2.2,(vii), 1.2.1, 1.3.3, 1.3.2) (ce qui est conforme à 6.2.3). En particulier, si $\leqq_\alpha$ n'est autre que la relation d'ordre antilexicographique $\leqq_L$ et A la matrice unité (cf. (I,3.12.1)), on obtient l'énoncé suivant.

PROPOSITION 6.4.6.- *En gardant les notations et les hypothèses du théorème* 6.4.2, *si* $\leqq_\alpha$ *est la relation d'ordre antilexicographique* $\leqq_L$ *sur* $\mathbb{N}^p$, *si pour tout* i , $1 \leqq i \leqq m$,

$$d_i = (d_{i1},\ldots,d_{ip})$$

et si l'on pose

$$\delta_o = \sup_{1\leqq i\leqq m} \sup_{1\leqq j<p} d_{ij} + 1 \quad ,$$

alors il existe des fonctions continues

$$\psi_o : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \ \psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \ \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

modérées le long de Z , *telles que pour tout point* y *de* Y *et tout polycylindre compact* K *de* $\mathbb{C}^p$, *tel que* $y \in \overset{\circ}{K}$, *les conditions*

$$e(K;y) \leqq \varphi(y)$$

et

$$\rho_1''(K;y) < 1/\psi_o(y), \ \rho_2''(K;y) < \rho_1''^{\delta_o}(K;y),\ldots,\rho_p''(K;y) < \rho_{p-1}''^{\delta_o}(K;y)$$

impliquent les assertions (i), (ii), (iii) *et* (iv) *du théorème* 6.4.2.

Démonstration. En vertu de la remarque 6.4.5, la proposition résulte de 4.5.3.

§7. Théorème de privilège numérique uniforme pour un idéal

Dans ce paragraphe, on démontre le théorème de "privilège numérique uniforme", dans le cas particulier d'un morphisme f de $\mathcal{O}_U$-modules cohérents de la forme

$$f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U \quad ,$$

le cas général d'un morphisme

$$f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U^n$$

étant démontré au chapitre suivant. On démontre aussi une version uniforme de la proposition 5.3.2, qu'on pourrait appeler théorème de division numérique uniforme par un idéal.

(7.1.0). Dans ce numéro, on se fixe un entier p , $p \in \mathbb{N}$, une relation d'ordre total $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde, moins fine que la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$, et une partie $\mathcal{D}'$ de $\mathbb{N}^p$ telle que

(7.1.0.1) $\quad [(\mathcal{D}' + (-\mathcal{D}')) \cap \mathbb{N}^p] + \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'$

(voir remarque (5.4.2)). On désigne par $\mathcal{D}_o$ la partie de $\mathbb{N}^p$ définie par

$$\mathcal{D}_o = (\mathcal{D}' + (-\mathcal{D}')) \cap \mathbb{N}^p$$

et pour tout entier m , $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{D}^m = (\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_m, \mathcal{D}') \quad ,$$

où pour tout i , $1 \leqq i \leqq m$, $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_o$. On a

(7.1.0.2) $\quad \mathcal{D}_o + \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'$,

(7.1.0.3) $\quad \mathcal{D}_o + \mathcal{D}_o \subset \mathcal{D}_o$

et si $d = (d_1, \ldots, d_m)$ désigne un élément de $(\mathbb{N}^p)^m$ tel que pour tout i , $1 \leqq i \leqq m$, $d_i \in \mathcal{D}'$, alors

(7.1.0.4) $\quad \mathcal{D}' \cap \Delta_i(d) \subset d_i + \mathcal{D}_o \subset \mathcal{D}'$,

c'est-à-dire que $\mathcal{D}^m$ et d satisfont à la condition 2.8.1.

Si U désigne un ouvert de $\mathbb{C}^p$, K un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U , x un point de U appartenant à $\overset{\circ}{K}$ et $f = (f_1, \ldots, f_m)$ un élément de $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})^m$ tel que pour tout i , $1 \leqq i \leqq m$, $E_x(f_i) \subset \mathcal{D}'$, alors l'application $B(K;f)$ induit une application

$$B_{\mathcal{D}^m;x}(K;f) \; : \; (B_{\mathcal{D}_o;x}(K))^m \longrightarrow B_{\mathcal{D}';x}(K)$$

(cf. (3.2)).

(7.1.1). Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^p$, X un sous-espace analytique fermé de U , Z un fermé analytique de X d'intérieur vide (dans X) et Y l'ouvert dense de X défini par $Y = X-Z$.

DÉFINITION 7.1.1.1.- *Soient* m *un entier,* $m \in \mathbb{N}$, *et* $f = (f_1,\ldots,f_m)$ *un élément de* $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})^m$. *On dit qu'un ouvert* U' *de* $\mathbb{C}^p$ *contenu dans* U *est distingué pour* $(\leqq_\alpha; \mathcal{D}';X;Z;f)$, *s'il existe des constantes* G , H , $G \in \mathbb{R}_+^*$, $H \in \mathbb{R}_+^*$, *une fonction continue*

$$\varphi : Y \cap U' \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

modérée le long de $Z \cap U'$, *un entier* r , $r \in \mathbb{N}$, *une famille* $(d_j)_{1 \leqq j \leqq r}$ *d'éléments de* $\mathbb{N}^p$ *et des familles*

$$(g_{jy})_{1\leqq j\leqq r, y\in Y\cap U'} \quad et \quad (h_{jiy})_{1\leqq j\leqq r, 1\leqq i\leqq m, y\in Y\cap U'}$$

d'éléments de $\Gamma(U', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$ *telles que* :

a) *pour tout* y , $y \in Y \cap U'$,

$$M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J};y} = \{d_1,\ldots,d_r\} \quad ,$$

où $\mathcal{J}$ *désigne l'idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *engendré par* $f_1,\ldots,f_m$;

b) *pour tout* y , $y \in Y \cap U'$, *et tout* j , $1 \leqq j \leqq r$

$$g_{jy} = \sum_{i=1}^{m} h_{jiy}\, f_i \; ;$$

c) *pour tout* y , $y \in Y \cap U'$, *et tout* i *et* j , $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq r$,

$$E_y(g_{jy}) \subset \mathcal{D}' \quad et \quad E_y(h_{jiy}) \subset \mathcal{D}_0 \; ;$$

d) *pour tout* y , $y \in Y \cap U'$, *tout* x , $x \in U'$, *et tout* i *et* j , $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq r$,

$$|g_{jy}(x)| \leqq G \quad et \quad |h_{jiy}(x)| \leqq H \; ;$$

e) *pour tout* y , $y \in Y \cap U'$, *et tout* j , $1 \leqq j \leqq r$,

$$v_{\alpha;y}(g_{jy}) = d_j \quad et \quad 1 \Big/ \left| \frac{\partial^{|d_j|} g_{jy}}{\partial X^{d_j}}(y) \right| \leqq \varphi(y) \quad .$$

Si $\mathcal{D}' = \mathbb{N}^p$, *on dira plus simplement que* U' *est distingué pour* $(\leqq_\alpha;X;Z;f)$.

DÉFINITION 7.1.1.2.- *Soit* $\mathcal{J}$ *un idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$. *On dit qu'un ouvert* U' *de* $\mathbb{C}^p$ *contenu dans* U *est distingué pour* $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X;Z;\mathcal{J})$, *s'il existe un entier* m , $m \in \mathbb{N}$, *et un élément* $f = (f_1,\ldots,f_m)$ *de* $\Gamma(U', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})^m$ *tels que*

a) *la famille* $f_1,\ldots,f_m$ *engendre l'idéal* $\mathcal{J}$ *au-dessus de* U' ;

b) *l'ouvert* U' *est distingué pour* $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X\cap U';Z\cap U';f)$.

Si $\mathcal{D}' = \mathbb{N}^p$, *on dira plus simplement que* U' *est distingué pour* $(\leqq_\alpha;X;Z;\mathcal{J})$.

Remarque 7.1.1.3.- En gardant les notations de la définition (7.1.1.1) (resp. de la définition (7.1.1.2)), si U'' désigne un ouvert de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U' et si U' est distingué pour $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X;Z;f)$ (resp. pour $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X;Z;\mathcal{J})$), alors il en est de même pour U''. D'autre part, on remarque que si $U'\cap Y=\emptyset$, alors U' est distingué pour $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X;Z;f)$ (resp. U' est distingué pour $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X;Z;\mathcal{J})$ si et seulement si il existe une famille finie d'éléments de $\Gamma(U',\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$ qui engendre $\mathcal{J}$ au-dessus de U'). En particulier, pour tout point x de U tel que $x\notin X$ il existe un voisinage ouvert de x contenu dans U, distingué pour $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X;Z;f)$ (resp. pour $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X;Z;\mathcal{J})$).

Remarque 7.1.1.4.- En gardant les notations de la définition (7.1.1.1) soit y un point de Y. S'il existe un ouvert U' de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U, distingué pour $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X;Z;f)$, tel que $y\in U'$, alors en vertu de (7.1.0.2) les conditions (b) et (c) de la définition (7.1.1.1) impliquent que pour tout i, $1\leqq i\leqq m$, on a

$$E_y(f_i)\subset\mathcal{D}' .$$

LEMME 7.1.2.- *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, X *un sous-espace analytique fermé de* U, Z *un fermé analytique de* X, *d'intérieur vide (dans* X*)*, Y *l'ouvert dense de* X *défini par* $Y=X-Z$, m *un entier,* $m\in\mathbb{N}$, $f=(f_1,\dots,f_m)$ *un élément de* $\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})^m$, $\mathcal{J}$ *l'idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *engendré par* $f_1,\dots,f_m$, r *un entier,* $r\in\mathbb{N}$, *et* $d=(d_1,\dots,d_r)$ *un élément de* $(\mathbb{N}^p)^r$. *On suppose que :*

i) *pour tout* y, $y\in Y$, $M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J};y}=\{d_1,\dots,d_r\}$;

ii) U *est distingué pour* $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X;Z;f)$.

On pose

$$d_o=\sup_{1\leqq j\leqq r} d_j$$

(la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$*)*,

$$r_i=r_{\alpha;d_i}\ ,\quad 1\leqq i\leqq r\ ,$$

$$\delta_{ij}=s_{\alpha;j}(d_i)\ ,\quad 1\leqq i\leqq r\ ,\quad 1\leqq j\leqq r_i\ ,$$

(cf. (4.1)). *Alors il existe une fonction continue*

$$R:X\longrightarrow\ ]0,1[$$

et des fonctions continues

$$\varphi:Y\longrightarrow\mathbb{R}_+^*\ ,\ \psi:Y\longrightarrow\mathbb{R}_+^*\ ,\ \psi':Y\longrightarrow\mathbb{R}_+^*\ ,$$

modérées le long de Z, *telles que pour* *tout point* y *de* Y *et tout polycylindre compact* K *de* $\mathbb{C}^p$ *tel que* $y \in \overset{\circ}{K}$, *les conditions*

a) $\rho''_i(K;y) \leq R(y)$, $1 \leq i \leq p$;

b) $e(K;y)^{|d|}\rho''^{\delta_{ij}}(K;y)/\rho''^{d_i}(K;y) \leq 1/\varphi(y)$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r_i$;

impliquent que :

i) $K \subset U$;

ii) $\mathrm{Im}(B_{\mathcal{D}^m;y}(K;f)) = J_K \cap B_{\mathcal{D}';y}(K)$;(1)

iii) il existe une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue normale σ_K de $B_{\mathcal{D}^m;y}(K;f)$

$$\sigma_K : B_{\mathcal{D}';y}(K) \longrightarrow (B_{\mathcal{D}_o;y}(K))^m$$

telle que

$$\|\sigma_K\|_K \leq \psi(y)\ e(K;y)^{|d|}/\rho''^{d_o}(K;y) ;$$

iv) $B_{\mathcal{D}';y}(K) = (J_K \cap B_{\mathcal{D}';y}(K)) \oplus B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);y}(K)$

et si l'on désigne par $\pi_{\mathcal{D}';J;K;y}$ (resp. par $r_{\mathcal{D}';J;K;y}$) *le projecteur de* $B_{\mathcal{D}';y}(K)$

$$\pi_{\mathcal{D}';J;K;y} : B_{\mathcal{D}';y}(K) \longrightarrow B_{\mathcal{D}';y}(K)$$

$$(\text{resp. } r_{\mathcal{D}';J;K;y} : B_{\mathcal{D}';y}(K) \longrightarrow B_{\mathcal{D}';y}(K)\ )$$

sur $J_K \cap B_{\mathcal{D}';y}(K)$ (resp. sur $B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);y}(K)$) *parallèlement à* $B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);y}(K)$ (resp. à $J_K \cap B_{\mathcal{D}';y}(K)$) , on a

a) $\pi_{\mathcal{D}';J;K;y}$ *est une application* $\mathbb{C}$-*linéaire continue et*

$$\|\pi_{\mathcal{D}';J;K;y}\|_K \leq \psi'(y)\ e(K;y)^{|d|}/\rho''^{d_o}(K;y) ;$$

b) $r_{\mathcal{D}';J;K;y}$ *est une application* $\mathbb{C}$-*linéaire continue et*

$$\|r_{\mathcal{D}';J;K;y}\|_K \leq 2(1 + r\ 2^{|d|+r-1}\ e(K;y)^{|d|}) .$$

Démonstration. Les hypothèses (i) et (ii) impliquent qu'il existe des constantes G , H , $G \in \mathbb{R}^*_+$, $H \in \mathbb{R}^*_+$, une fonction continue

$$\varphi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$$

modérée le long de Z et des familles

(1) voir (7.1.0) et remarque (7.1.1.4); pour la définition de J_K se reporter au chapitre 0.

$$(g_{jy})_{1\leqq j\leqq r, y\in Y} \quad \text{et} \quad (h_{jiy})_{1\leqq j\leqq r, 1\leqq i\leqq m, y\in Y}$$

d'éléments de $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$, telles que

α) pour tout y , $y \in Y$, et tout j , $1 \leqq j \leqq r$,

$$g_{jy} = \sum_{i=1}^{m} h_{jiy} f_i \ ;$$

β) pour tout y , $y \in Y$, et tout i et j , $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq r$

$$E_y(g_{jy}) \subset \mathcal{D}' \quad \text{et} \quad E_y(h_{jiy}) \subset \mathcal{D}_o \ ;$$

γ) pour tout y , $y \in Y$, tout x , $x \in U$, et tout i et j , $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq r$,

$$|g_{jy}(x)| \leqq G \quad \text{et} \quad |h_{jiy}(x)| \leqq H$$

δ) pour tout y , $y \in Y$, et tout j , $1 \leqq j \leqq r$,

$$v_{\alpha;y}(g_{jy}) = d_j \quad \text{et} \quad 1 \Big/ \left| \frac{\partial^{|d_j|} g_{jy}}{\partial X^{d_j}}(y) \right| \leqq \varphi_1(y) \ .$$

On pose

$$G' = \sup\{rG, 1\}$$

et on désigne par R la fonction

$$R : X \longrightarrow]0,1[$$

restriction de la fonction R_U à X (cf. (4.4.1)) et par φ , ψ et ψ' les fonctions

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \ \psi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \ \psi' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

définies par

$$\varphi = \sup_{1\leqq j\leqq r} (d_i!)\ N(d)\ G'\varphi_1 / (R|Y)^{M(d)}$$

(cf. (4.3)),

$$\psi = r \cdot H\ 2^{|d|+r} \sup_{1\leqq j\leqq r} (d_i!)\varphi_1$$

et

$$\psi' = r\ G\ 2^{|d|+r} \sup_{1\leqq j\leqq r} (d_i!)\varphi_1 \ .$$

On remarque que la fonction R est continue (cf. (4.4.1)) et que les fonctions φ ψ et ψ' sont continues, modérées le long de Z (App. I, 1.2.1 et 1.3.2).

Soient y un point de Y et K un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ tel que $y \in \mathring{K}$, satisfaisant aux conditions (a) et (b). L'assertion (i) résulte de la condition (a) et de (4.4.1). Considérons l'élément $g_y = (g_{1y}, \dots, g_{ry})$ de $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})^r$. La condition (β) implique que l'application $B(K;g_y)$ induit une application

$$B_{\mathcal{D}^r;y}(K;g_y) : (B_{\mathcal{D}_o;y}(K))^r \longrightarrow B_{\mathcal{D}';y}(K)$$

(cf. (7.1.0)). La condition (γ) implique que

$$\|B(K;g_y)\|_K \leq r\,G \ ,$$

et a fortiori que

$$\|B_{\mathcal{D}^r;y}(K;g_y)\| \leq r\,G \ . \tag{7.1.2.1}$$

On appliquera le lemme 6.4.1 à $\mathcal{D}^r$ et g_y . En effet, les hypothèses (i), (ii) et (iii) du lemme 6.4.1 sont satisfaites, en vertu de (7.1.0.4), de (7.1.0.2) et des conditions (β) et (δ) ci-dessus. En plus, les conditions (a) et (b) du lemme 6.4.1 sont impliquées par les conditions (a) et (b) du présent lemme, en vertu des définitions de R et de φ et des conditions (γ) et (δ) , en remarquant que la condition (γ) implique que $\Lambda_{g_y}(y) \leq G'$ (cf. (4.4.2)).

Alors il résulte du lemme 6.4.1 qu'il existe des applications $\mathbb{C}$-linéaires continues

$$\sigma_{\mathcal{D}^r;g_y;d;K;y} : B_{\mathcal{D}';y}(K) \longrightarrow (B_{\mathcal{D}_o;y}(K))^r \quad \text{et} \quad r_{\mathcal{D}^r;g_y;d;K;y} : B_{\mathcal{D}';y}(K) \longrightarrow B_{\mathcal{D}';y}(K)$$

telles que

α') $$r_{\mathcal{D}^r;g_y;d;K;y} = \mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}';y}(K)} - B_{\mathcal{D}^r;y}(K;g_y) \circ \sigma_{\mathcal{D}^r;g_y;d;K;y} \ ;$$

β') $$\|\sigma_{\mathcal{D}^r;g_y;d;K;y}\|_K \leq 2^{|d|+r} \sup_{1\leq j\leq r} \left(d_i! \Big/ \left| \frac{\partial^{|d_j|} g_{jy}}{\partial X^{d_j}}(y) \right| \right) \cdot e(K;y)^{|d|} / \rho''^{d_o}(K;y) \ ;$$

γ') $$\|r_{\mathcal{D}^r;g_y;d;K;y}\|_K \leq 2(1 + r\,2^{|d|+r-1}\, e(K;y)^{|d|}) \ ;$$

δ') $$\mathrm{Im}(r_{\mathcal{D}^r;g_y;d;K;y}) = \mathrm{Ker}(\sigma_{\mathcal{D}^r;g_y;d;K;y}) = B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);y}(K) \ ;$$

ε') $\sigma_{\mathcal{D}^r;g_y;d;K;y}$ est une scission normale de $B_{\mathcal{D}^r;y}(K;g_y)$;

ζ') $$J_K \cap B_{\mathcal{D}';y}(K) = \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D}^r;y}(K;g_y)) \ .$$

En effet, les conditions (α'), (β'), (γ') et (δ') sont des conséquences immédiates des assertions (i) et (ii), (a), (b) et (d) du lemme 6.4.1. D'autre part, on remarque que si l'on désigne par $\mathcal{J}'$ l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_U$ engendré par $g_{1y},\dots,g_{ry}$, la condition (α) implique que

$$\mathcal{J}' \subset \mathcal{J} \quad ,$$

d'où

(7.1.2.2) $$P_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J}';K;y} \subset P_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J};K;y}$$

(cf. (II,1.3)), et la condition (δ) implique que

(7.1.2.3) $$\{d_1,\dots,d_r\} \subset P_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J}';K;y} \quad .$$

Or, en vertu de (II,1.4), les conditions (α) et (δ) et l'hypothèse (i) impliquent que

(7.1.2.4) $$M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J};K;y} = M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J};y} = \{d_1,\dots,d_r\} \quad .$$

Alors il résulte de (7.1.2.2), (7.1.2.3) et (7.1.2.4) que

$$M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J}';K;y} = \{d_1,\dots,d_r\} \quad .$$

La condition (ε') résulte donc des assertions (ii), (g) et (ii), (e) du lemme 6.4.1, et en vertu de (7.1.2.4), la condition (ζ') résulte de l'assertion (iii) du même lemme.

On pose

$$\pi_{\mathcal{D}';\mathcal{J};K;y} = B_{\mathcal{D}^r;y}(K;g_y) \circ \sigma_{\mathcal{D}^r;g_y;d;K;y}$$

et

$$r_{\mathcal{D}';\mathcal{J};K;y} = r_{\mathcal{D}^r;g_y;d;K;y} \quad .$$

Alors, en vertu de (1.2), les conditions (α'), (δ'), (ε') et (ζ') impliquent que

$$B_{\mathcal{D}';y}(K) = (\mathcal{J}_K \cap B_{\mathcal{D}';y}(K)) \oplus B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);y}(K)$$

et que $\pi_{\mathcal{D}';\mathcal{J};K;y}$ (resp. $r_{\mathcal{D}';\mathcal{J};K;y}$) est le projecteur de $B_{\mathcal{D}';y}(K)$ sur $\mathcal{J}_K \cap B_{\mathcal{D}';y}(K)$ (resp. sur $B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);y}(K)$) parallèlement à $B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);y}(K)$ (resp. à $\mathcal{J}_K \cap B_{\mathcal{D}';y}(K)$). L'assertion (iv), (a) résulte de (β'), de (δ) et de (7.1.2.1) et l'assertion (iv), (b) de (γ'), ce qui démontre l'assertion (iv).

Considérons maintenant le morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules

$$h_y : \mathcal{O}_U^r \longrightarrow \mathcal{O}_U^m$$

défini par la matrice transposée de la matrice

$(h_{jiy})_{1\leq j\leq r,1\leq i\leq m}$.

Il résulte de (β) et de (7.1.0.3) que l'application $B(K;h_y)$ induit une application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$B_{\mathcal{D}_o;y}(K;h_y) \ : \ (B_{\mathcal{D}_o;y}(K))^r \longrightarrow (B_{\mathcal{D}_o;y}(K))^m \quad .$$

En vertu de (γ), on a

$$\|B(K;h_y)\|_K \leq r\,H$$

et a fortiori

(7.1.2.5) $$\|B_{\mathcal{D}_o;y}(K;h_y)\|_K \leq r\,H \quad ,$$

et en vertu de (α), on a

$$B(K;g_y) = B(K;f) \circ B(K;h_y) \quad ,$$

d'où

(7.1.2.6) $$B_{\mathcal{D}^r;y}(K;g_y) = B_{\mathcal{D}^m;y}(K;f) \circ B_{\mathcal{D}_o;y}(K;h_y) \quad .$$

En particulier, on a

$$\mathrm{Im}(B_{\mathcal{D}^r;y}(K;g_y)) \subset \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D}^m;y}(K;f)) \quad ,$$

et comme

$$\mathrm{Im}(B_{\mathcal{D}^m;y}(K;f)) \subset \mathcal{J}_K \cap B_{\mathcal{D}';y}(K) \quad ,$$

la condition (ζ') implique que

(7.1.2.7) $$\mathrm{Im}(B_{\mathcal{D}^m;y}(K;f)) = \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D}^r;y}(K;g_y)) = \mathcal{J}_K \cap B_{\mathcal{D}';y}(K) \quad ,$$

ce qui prouve l'assertion (ii). Enfin, si l'on pose

$$\sigma_K = B_{\mathcal{D}_o;y}(K;h_y) \circ \sigma_{\mathcal{D}^r;g_y;d;K;y} \quad ,$$

en vertu de (7.1.2.6) et (7.1.2.7), il résulte de la proposition 1.9 que σ_K est une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue, normale de $B_{\mathcal{D}^m;y}(K;f)$, et en vertu de (7.1.2.5), de (β') et de (δ) , on a

$$\|\sigma_K\|_K \leq \psi(y)\ e(K;y)^{|d|}/\rho''^{d_o}(K;y) \quad ,$$

ce qui démontre le lemme.

PROPOSITION 7.1.3.- *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, X *un sous-espace analytique fermé de* U , Z *un fermé analytique de* X , *d'intérieur vide (dans* X) Y *l'ouvert dense de* X *défini par* $Y = X - Z$, m *un entier,* $m \in \mathbb{N}$, $f = (f_1,\ldots,f_m)$

un élément de $\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})^m$, J *l'idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *engendré par* $f_1,\dots,f_m$, r *un entier,* $r\in\mathbb{N}$, *et* $d=(d_1,\dots,d_r)$ *un élément de* $(\mathbb{N}^p)^r$. *On suppose que :*

i) *pour tout* y , $y\in Y$, $M_{\alpha;\mathcal{D}';J;y}=\{d_1,\dots,d_r\}$;

ii) *il existe un recouvrement de* U *formé d'ouverts de* $\mathbb{C}^p$ *contenus dans* U , *distingués pour* $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X;Z;f)$.

On pose

$$r_i=r_{\alpha;d_i}\ ,\ 1\leqq i\leqq r\ ,$$

$$\delta_{ij}=s_{\alpha;j}(d_i)\ ,\ 1\leqq i\leqq r\quad ,\quad 1\leqq j\leqq r_i\ ,$$

(cf. (4.1)). *Alors, il existe une fonction continue*

$$R: X\longrightarrow\ ]0,1[$$

et des fonctions continues

$$\varphi: Y\longrightarrow\mathbb{R}_+^*\quad et\quad \psi: Y\longrightarrow\mathbb{R}_+^*$$

modérées le long de Z , *telles que pour tout point* y *de* Y *et tout polycylindre compact* K *de* $\mathbb{C}^p$ *tel que* $y\in\overset{\circ}{K}$, *les conditions*

a) $\rho_i''(K;y)\leqq R(y)$, $1\leqq i\leqq p$;

b) $e(K;y)^{|d|}\rho''^{\delta_{ij}}(K;y)/\rho''^{d_i}(K;y)\leqq 1/\varphi(y)$, $1\leqq i\leqq r$, $1\leqq j\leqq r_i$;

impliquent que

i) $K\subset U$;

ii) $\operatorname{Im} B_{\mathcal{D}^m;y}(K;f)=J_K\cap B_{\mathcal{D}';y}(K)$;(1)

iii) *il existe une scission* $\mathbb{C}$*-linéaire continue normale* σ_K *de* $B_{\mathcal{D}^m;y}(K;f)$

$$\sigma_K: B_{\mathcal{D}';y}(K)\longrightarrow(B_{\mathcal{D}_o;y}(K))^m$$

telle que

$$\|\sigma_K\|_K\leqq\psi(y)\ e(K;y)^{|d|}/\rho''^{d_o}(K;y)\ ,$$

où $d_o=\sup\limits_{1\leqq j\leqq r}d_j$ *(la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$) .

Démonstration. Soit $(U_k)_{k\in I}$ un recouvrement de U formé d'ouverts de $\mathbb{C}^p$ contenus dans U , distingués pour $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X;Z;f)$. En vertu de (7.1.1.3), U étant paracompact, on peut supposer que le recouvrement $(U_k)_{k\in I}$ est localement fini.

---

(1) voir (7.1.0) et remarque (7.1.1.4); pour la définition de J_K se reporter au chapitre O.

Il résulte du lemme 7.1.2 que pour tout k , $k\in I$, il existe une fonction continue

$$R_k : X\cap U_k \longrightarrow \,]0,1[$$

et des fonctions continues

$$\varphi_k : Y\cap U_k \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ et } \psi_k : Y\cap U_k \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

modérées le long de $Z\cap U_k$ telles que pour tout point y de $Y\cap U_k$ et tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$ tel que $y\in \overset{\circ}{K}$, les conditions

$a_k)$ $\rho''_i(K;y) \leq R_k(y)$, $1\leq i\leq p$;

$b_k)$ $e(K;y)^{|d|}\rho''^{\delta_{ij}}(K;y)/\rho''^{d_i}(K;y) \leq 1/\varphi_k(y)$, $1\leq i\leq r$, $1\leq j\leq r_i$;

impliquent que :

$i_k)$ $K\subset U_k$;

$ii_k)$ $\mathrm{Im}(B_{\mathcal{D}^m;y}(K;f)) = J_K\cap B_{\mathcal{D}';y}(K)$;

$iii_k)$ il existe une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue normale σ_K de $B_{\mathcal{D}^m;y}(K;f)$ telle que

$$\|\sigma_K\|_K \leq \psi_k(y)\ e(K;y)^{|d|}/\rho''^{d_o}(K;y) .$$

Or, U étant paracompact, il existe un recouvrement ouvert $(V_k)_{k\in I}$ de U tel que pour tout k , $k\in I$, $\overline{V}_k\subset U_k$. Alors il existe une fonction continue

$$R : X\longrightarrow \,]0,1[$$

et des fonctions continues

$$\varphi : Y\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad\text{et}\quad \psi : Y\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

telles que pour tout k , $k\in I$, et tout y , $y\in Y\cap V_k$

$$R(y)\leq R_k(y) ,$$

$$\varphi_k(y)\leq \varphi(y)$$

et

$$\psi_k(y)\leq \psi(y)$$

(App. I, 1.3.4, 1.3.6). Soient y un point de Y et K un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ tel que $y\in \overset{\circ}{K}$, satisfaisant aux conditions (a) et (b). Il existe k , $k\in I$, tel que $y\in V_k$. On en déduit que $y\in Y\cap U_k$ et que y et K satisfont aux conditions (a_k) et (b_k) . L'assertion (i) résulte alors de (i_k) , l'assertion (ii) de (ii_k) et l'assertion (iii) de (iii_k) , ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 7.1.4.- *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, X *un sous-espace analytique fermé de* U , Z *un fermé analytique de* X , *d'intérieur vide (dans* X *),* Y

l'ouvert dense de X *défini par* $Y = X - Z$, $\mathcal{J}$ *un idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$, r *un entier,* $r \in \mathbb{N}$, *et* $d = (d_1, \ldots, d_r)$ *un élément de* $(\mathbb{N}^p)^r$. *On suppose que :*

i) *pour tout* y , $y \in Y$, $M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J};y} = \{d_1, \ldots, d_r\}$;

ii) *il existe un recouvrement de* U *formé d'ouverts de* $\mathbb{C}^p$ *contenus dans* U , *distingués pour* $(\leqq_\alpha; \mathcal{D}'; X; Z; \mathcal{J})$.

On pose

$$r_i = r_{\alpha;d_i} \ , \quad 1 \leqq i \leqq r \ ,$$
$$\delta_{ij} = s_{\alpha;j}(d_i) \ , \quad 1 \leqq i \leqq r \ , \ 1 \leqq j \leqq r_i$$

(cf. (4.1)). *Alors il existe une fonction continue*

$$R : X \longrightarrow \,]0,1[$$

et des fonctions continues

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \psi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

modérées le long de Z , *telles que pour tout point* y *de* Y *et tout polycylindre compact* K *de* $\mathbb{C}^p$ *tel que* $y \in \overset{\circ}{K}$, *les conditions*

a) $\rho_i''(K;y) \leqq R(y)$, $1 \leqq i \leqq p$;

b) $e(K;y)^{|d|} \rho''^{\delta_{ij}}(K;y) / \rho''^{d_i}(K;y) \leqq 1/\varphi(y)$, $1 \leqq i \leqq r$, $1 \leqq j \leqq r_i$;

impliquent que :

i) $K \subset U$;

ii) $B_{\mathcal{D}';y}(K) = (\mathcal{J}_K \cap B_{\mathcal{D}';y}(K)) \oplus B_{\mathcal{D}' \cap \Delta_o(d);y}(K)$ (1)

et si l'on désigne par $\pi_{\mathcal{D}';\mathcal{J};K;y}$ (resp. par $r_{\mathcal{D}';\mathcal{J};K;y}$) *le projecteur de* $B_{\mathcal{D}';y}(K)$

$$\pi_{\mathcal{D}';\mathcal{J};K;y} : B_{\mathcal{D}';y}(K) \longrightarrow B_{\mathcal{D}';y}(K)$$

$$(\text{resp. } r_{\mathcal{D}';\mathcal{J};K;y} : B_{\mathcal{D}';y}(K) \longrightarrow B_{\mathcal{D}';y}(K)\ )$$

sur $\mathcal{J}_K \cap B_{\mathcal{D}';y}(K)$ (resp. sur $B_{\mathcal{D}' \cap \Delta_o(d);y}(K)$) *parallèlement à* $B_{\mathcal{D}' \cap \Delta_o(d);y}(K)$ (resp. à $\mathcal{J}_K \cap B_{\mathcal{D}';y}(K)$) , *on a*

a) $\pi_{\mathcal{D}';\mathcal{J};K;y}$ *est une application* $\mathbb{C}$-*linéaire continue et*

$$\|\pi_{\mathcal{D}';\mathcal{J};K;y}\|_K \leqq \psi(y)\ e(K;y)^{|d|} / \rho''^{d_o}(K;y) \ ,$$

---

(1) Pour la définition de $\mathcal{J}_K$ se reporter au chapitre 0.

où $d_o = \sup_{1 \leq j \leq r} d_j$ *(la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit $\leq$ sur $\mathbb{N}^p$)* ;

b) $r_{\mathcal{D}';J;K;y}$ *est une application $\mathbb{C}$-linéaire continue et*

$$\|r_{\mathcal{D}';J;K;y}\|_K \leq 2(1 + r\, 2^{|d|+r-1}\, e(K;y)^{|d|}) .$$

Démonstration. En vertu de l'hypothèse (ii), de la remarque (7.1.1.3) et de la paracompacité de U, il existe un recouvrement localement fini $(U_k)_{k\in I}$ de U formé d'ouverts de $\mathbb{C}^p$ contenus dans U, distingués pour $(\leq_\alpha;\mathcal{D}';X;Z;J)$. Alors pour tout k, $k \in I$, il existe un entier m_k, $m_k \in \mathbb{N}$, et un élément $f_k = (f_{k1},\dots,f_{km_k})$ de $\Gamma(U_k,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})^{m_k}$ tel que :

a) la famille $f_{k1},\dots,f_{km_k}$ engendre l'idéal J au-dessus de U_k ;

b) l'ouvert U_k est distingué pour $(\leq_\alpha;\mathcal{D}';X\cap U_k;Z\cap U_k;f_k)$.

En appliquant le lemme 7.1.2 (assertions (i) et (iv)) à chacun des ouverts U_k pour f_k, on termine la démonstration en raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 7.1.3.

Remarque 7.1.5.- Dans les énoncés des propositions 7.1.3 et 7.1.4 on peut remplacer les conditions (a) et (b) par des conditions "paramétriques" en utilisant la proposition 4.5.5 ainsi que les fonctions introduites dans 4.5.1. De même, on peut les traduire dans le langage des effilements, comme dans le théorèpe 6.4.2.

Remarque 7.1.6.- En gardant les notations du lemme 7.1.2, ainsi que celles de sa démonstration, on remarque que comme la scission σ_K est définie par

$$\sigma_K = B_{\mathcal{D}_o;y}(K;h_y) \circ \sigma_{\mathcal{D}^r;g_y;d;K;y} ,$$

en vertu de (7.1.2.6), on a

$$B_{\mathcal{D}^m;y}(K;f) \circ \sigma_K = B_{\mathcal{D}^r;y}(K;g_y) \circ \sigma_{\mathcal{D}^r;g_y;d;K;y} = \pi_{\mathcal{D}';J;K;y} .$$

De même, on a

$$id_{B_{\mathcal{D}';y}} - B_{\mathcal{D}^m;y}(K;f) \circ \sigma_K = r_{\mathcal{D}';J;K;y} .$$

On en déduit que les projecteurs

$$B_{\mathcal{D}^m;y}(K;f) \circ \sigma_K \quad \text{et} \quad id_{B_{\mathcal{D}';y}(K)} - B_{\mathcal{D}^m;y}(K;f) \circ \sigma_K$$

de $B_{\mathcal{D}';y}(K)$ sont indépendants de f (pourvu que $f_1,\dots,f_m$ engendre l'idéal J) , que

(7.1.6.1) $\qquad \mathrm{Ker}(\sigma_K) = \mathrm{Im}(r_{\mathcal{D}';J;K;y}) = B_{\mathcal{D}'\cap\Delta_o(d);y}(K)$

(cf. (1.2)) et que

(7.1.6.2) $\qquad \| \mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}';y}(K)} - B_{\mathcal{D}^m;y}(K;f)\circ\sigma_K\|_K \leq 2(1+r2^{|d|+r-1}\, e(K;y)^{|d|})$.

(7.2) Dans la suite, on étudiera le cas particulier où $\mathcal{D}' = \mathbb{N}^p$, dans quel cas on a également $\mathcal{D}_o = \mathbb{N}^p$.

LEMME 7.2.1.- *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, X *un sous-espace analytique fermé irréductible de* U , Z *un fermé analytique de* X *distinct de* X , U' *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$ *relativement compact dans* U , m *un entier,* $f=(f_1,\dots,f_m)$ *un élément de* $(\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}))^m$ *et* J *l'idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *engendré par la famille* $f_1,\dots,f_m$. *On suppose que :*

i) $S_{\alpha;J;X}\subset Z$ (cf.(II,3.1));

ii) *il existe deux ouverts de Stein connexes* U'' *et* U''' *de* $\mathbb{C}^p$ *contenus dans* U *tels que* U' *soit relativement compact dans* U'' *et* U'' *relativement compact dans* U''' .

Alors l'ouvert U' *est distingué pour* $(\leqq_\alpha;X;Z;f)$.

Démonstration. En vertu de (7.1.1.3), on peut supposer que $U'\cap X\neq\emptyset$. Alors il résulte de (II,3.6) qu'il existe un entier r , $r\in\mathbb{N}$, une famille $(d_j)_{1\leqq j\leqq r}$ d'éléments deux à deux distincts de $\mathbb{N}^p$, en ensemble fini non vide I et des familles

$$(F_{kj})_{k\in I,1\leqq j\leqq r} \quad \text{et} \quad (\beta_{kji})_{k\in I,1\leqq j\leqq r,1\leqq i\leqq m}$$

d'éléments de $\Gamma(U''\times U'' , \mathcal{O}_{U\times U})$ telles que :

α) pour tout y , $y\in X-S_{\alpha;J;X}$, on a

$M_{\alpha;J;y} = \{d_1,\dots,d_r\}$;

β) pour tout k et j , $k\in I$, $1\leqq j\leqq r$, et tout x' , $x'\in U''$, si l'on désigne par $F_{kjx'}$ l'élément de $\Gamma(U'',\mathcal{O}_U)$ défini par

$$F_{kjx'}(x'') = F_{kj}(x',x'') \text{ , pour } x''\in U'' \text{ ,}$$

on a

$$v_{\alpha;x'}(F_{kjx'}) \geqq_\alpha d_j \quad ;$$

γ) pour tout k et j , $k\in I$, $1\leqq j\leqq r$, tout x' , $x'\in X\cap U''$, et tout x'' , $x''\in U''$, on a

$$F_{kj}(x',x'') = \sum_{i=1}^{m} \beta_{kji}(x',x'')\, f_i(x'') \; ;$$

δ) si pour tout k , $k \in I$, on pose

$$S_k = \{x' \in U'' : \exists j \, , \; 1 \leq j \leq r \; , \; \frac{\partial^{|d_j|} F_{kj}}{\partial X''^{d_j}}(x',x') = 0\}$$

(la dérivation étant relative au deuxième paquet de variables) et $U''_k = U'' - S_k$, alors

$$(X - S_{\alpha;J;x}) \cap U'' \subset \bigcup_{k \in I} U''_k$$

(ou, ce qui est équivalent, $(\bigcap_{k \in I} S_k) \cap X \subset S_{\alpha;J;X} \cap U''$).

On pose

$$G = \sup_{k \in I} \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{x' \in U'} \sup_{x'' \in U'} |F_{kj}(x',x'')|$$

et

$$H = \sup_{k \in I} \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{1 \leq i \leq m} \sup_{x' \in U'} \sup_{x'' \in U'} |\beta_{kji}(x',x'')|$$

(les bornes supérieures étant finies, car U' est relativement compact dans U'') , et pour tout k , $k \in I$, on désigne par φ_k la fonction

$$\varphi_k : U''_k \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$$

définie par

$$\varphi_k(x) = \sup_{1 \leq j \leq r} \left(1 \Big/ \left| \frac{\partial^{|d_j|} F_{kj}}{\partial X''^{d_j}}(x,x) \right| \right), \text{ pour } x \in U''_k \; .$$

La fonction φ_k est continue, modérée le long de S_k (App. I, 1.2.1, 1.3.3). On en déduit qu'il existe une fonction continue

$$\varphi' : \bigcup_{k \in I} U''_k \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$$

modérée le long de $\bigcap_{k \in I} S_k$ telle que pour tout x , $x \in \bigcup_{k \in I} U''_k$ il existe k_x , $k_x \in I$, tel que $x \in U''_{k_x}$ et

$$\varphi_{k_x}(x) \leq \varphi'(x) \tag{7.2.1.1}$$

(App. I, 1.6.1). En vertu de l'hypothèse (i) et de la condition (δ), on a

$$X \cap (\bigcap_{k \in I} S_k) \subset Z \cap U'' \; ,$$

et si l'on désigne par Y l'ouvert dense de X défini par $Y=X-Z$, la restriction

$$\varphi'' : Y\cap U'' \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

de φ' à $Y\cap U''$ est une fonction continue, modérée le long de $Z\cap U''$ (App. I, 1.2.2, (iii) et (iv)). On désigne par φ la restriction

$$\varphi : Y\cap U' \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

de φ' à $Y\cap U'$. La fonction φ est continue, modérée le long de $Z\cap U'$ (App. I 1.2.2, (ii)). Pour tout i et j, $1\leqq i\leqq m$, $1\leqq j\leqq r$, et tout point y de $Y\cap U'$ on pose

$$g_{jy} = F_{k_y jy}|U' \quad \text{et} \quad h_{jiy} = \beta_{k_y jiy}|U'$$

où $F_{k_y jy}$ (resp. $\beta_{k_y jiy}$) désigne l'élément de $\Gamma(U'',\mathcal{O}_U)$ défini par

$$F_{k_y jy}(x) = F_{k_y j}(y,x) \text{ , pour } x\in U'' \text{ ,}$$

$$(\text{resp. } \beta_{k_y jiy}(x) = \beta_{k_y ji}(y,x) \text{ , pour } x\in U'' \text{).}$$

On a $g_{jy}\in\Gamma(U',\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$ et $h_{jiy}\in\Gamma(U',\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$.

Démontrons que l'ouvert U' satisfait aux conditions (a), (b), (c), (d) et (e) de la définition (7.1.1.1). La condition (a) résulte de l'hypothèse (i) et de la condition (α) ci-dessus, la condition (b) résulte de la condition (γ), la condition (c) se réduit à néant car $\mathcal{D}' = \mathcal{D}_0 = \mathbb{N}^p$ et la condition (d) est évidente. Pour démontrer la condition (e), on remarque d'abord que pour tout j, $1\leqq j\leqq r$, et tout y, $y\in Y\cap U'$, on a

$$(7.2.1.2) \qquad \frac{\partial^{|d_j|} g_{jy}}{\partial X^{d_j}}(y) = \frac{\partial^{|d_j|} F_{k_y j}}{\partial X''^{d_j}}(y,y) \quad .$$

D'autre part, la condition (β) implique que $v_{\alpha;y}(g_{jy}) \geqq_\alpha d_j$, et comme $y\in U''_{k_y}$, en vertu de (7.2.1.2), on a $v_{\alpha;y}(g_{jy}) = d_j$. Enfin, l'inégalité

$$1\Bigg/\left|\frac{\partial^{|d_j|} g_{jy}}{\partial X^{d_j}}(y)\right| \leqq \varphi(y)$$

résulte de (7.2.1.1) et (7.2.1.2), ce qui prouve que U' est distingué pour

$(\leqq_\alpha;X;Z;f)$ et démontre le lemme.

LEMME 7.2.2.- *En gardant les notations du lemme* 7.2.1, *ainsi que l'hypothèse* (i) *si* K *désigne un polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *contenu dans* U , *alors il existe un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, *contenu dans* U , *contenant* K , *distingué pour* $(\leqq_\alpha;X;Z;f)$.

Démonstration. Il existe des polycylindres compacts K' , K'' , K''' de $\mathbb{C}^p$ tels que

$$K \subset \overset{\circ}{K}{}' \subset K' \subset \overset{\circ}{K}{}'' \subset K'' \subset \overset{\circ}{K}{}''' \subset K''' \subset U \quad .$$

Alors si l'on pose

$$U' = \overset{\circ}{K}{}' \ , \ U'' = \overset{\circ}{K}{}'' \ \text{ et } \ U''' = \overset{\circ}{K}{}''' \quad ,$$

les ouverts U' , U'' , U''' satisfont à la condition (ii) du lemme 7.2.1, ce qui implique que U' est distingué pour $(\leqq_\alpha;X;Z;f)$.

LEMME 7.2.3.- *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, X *un sous-espace analytique fermé irréductible de* U , Z *un fermé analytique de* X *distinct de* X , K *un polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *contenu dans* U *et* J *un idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *tel que*

$$S_{\alpha;J;X} \subset Z \quad .$$

Alors il existe un ouvert de $\mathbb{C}^p$ *contenu dans* U , *contenant* K , *distingué pour* $(\leqq_\alpha;X;Z;J)$.

Démonstration. Soit K' un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ tel que

$$K \subset \overset{\circ}{K}{}' \subset K' \subset U \ .$$

Il existe un entier m , $m \in \mathbb{N}$, et un élément $f = (f_1,\dots,f_m)$ de $(\Gamma(\overset{\circ}{K}{}',\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}))^m$ tel que l'idéal J soit engendré par $f_1,\dots,f_m$ au-dessus de $\overset{\circ}{K}{}'$. Alors il résulte de 7.2.2 qu'il existe un ouvert de $\mathbb{C}^p$ contenu dans $\overset{\circ}{K}{}'$, contenant K , distingué pour $(\leqq_\alpha;X\cap\overset{\circ}{K}{}';Z\cap\overset{\circ}{K}{}';f)$, ce qui démontre le lemme (cf. (7.1.1.2)).

(7.3). Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^p$, X un sous-espace analytique fermé irréductible de U et J un idéal cohérent de $\mathcal{O}_U$. En vertu de (II,3.3), l'ensemble $P_{\alpha;J;y}$ des exposants privilégiés pour $\leqq_\alpha$ de J en y ne dépend pas du point y , pour $y \in X - S_{\alpha;J;X}$. On désignera cet ensemble par $P_{\alpha;J;X_{gen}}$. De même, si l'on désigne par $M_{\alpha;J;X_{gen}}$ l'ensemble (fini) des éléments minimaux de $P_{\alpha;J;X_{gen}}$ pour la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$, pour tout point y , $y \in X - S_{\alpha;J;X}$,

$$M_{\alpha;J;y} = M_{\alpha;J;X_{gen}}$$

(cf. (II,1.2)), et on a

$$P_{\alpha;J;X_{gen}} = M_{\alpha;J;X_{gen}} + \mathbb{N}^p$$

(cf. (II,1.3)). L'ensemble $S_{\alpha;J;X}$ étant un fermé analytique de X , d'intérieur vide dans X (II,3.2), $P_{\alpha;J;X_{gen}}$ (resp. $M_{\alpha;J;X_{gen}}$) est l'ensemble des exposants privilégiés (resp. des exposants privilégiés minimaux) de J en un point "général" de X .

THÉORÈME 7.3.1.- *Soient* p *et* m *des entiers,* $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^p$ *, compatible avec sa structure de monoïde, moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$*,* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$ *,* X *un sous-espace analytique fermé irréductible de* U *,* Z *un fermé analytique de* X *distinct de* X *,* Y *l'ouvert dense de* X *défini par* $Y = X - Z$ *,* $f = (f_1,\dots,f_m)$ *un élément de* $\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})^m$ *et* J *l'idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *engendré par* $f_1,\dots,f_m$ *. On suppose que*

$$S_{\alpha;J;X} \subset Z \quad .$$

Alors pour toute fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow [1,+\infty[\quad ,$$

modérée le long de Z *, il existe des fonctions continues*

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \qquad \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad ,$$

modérées le long de Z *, telles que pour tout polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *pointé dans* Y *,* (K,y) *, suffisamment effilé pour* $\leqq_\alpha$*, modérément le long de* Z *, satisfaisant à la condition*

$$e(K;y) \leqq \varphi(y)$$

on ait :

i) $K \subset U$;

ii) *il existe une scission* $\mathbb{C}$*-linéaire continue, normale* σ_K *de* $B(K;f)$

$$\sigma_K : B(K) \longrightarrow B(K)^m$$

telle que :

a) $\mathrm{Ker}(\sigma_K) = B_{\Delta_o}(K)$,

où $\Delta_o = \mathbb{N}^p - P_{\alpha;J;X_{gen}}$;

b) $\|\sigma_K\|_K \leqq \psi_1(y)/\rho''^{\,d_o}(K;y)$,

où $d_o = \sup(M_{\alpha;J;X_{gen}})$ *(la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$ *)* ;

c) $\|id_{B(K)} - B(K;f) \circ \sigma_K\|_K \leq \psi_2(y)$.

Démonstration. L'hypothèse $S_{\alpha;J;X} \subset Z$ implique qu'il existe un recouvrement de U formé d'ouverts de $\mathbb{C}^p$ contenus dans U , distingués pour $(\leq_\alpha;X;Z;f)$ (7.2.2). Soient

$$r = \mathrm{card}(M_{\alpha;J;X_{gen}})$$

et $d = (d_1,\ldots,d_r)$ un élément de $(\mathbb{N}^p)^r$ tel que

$$M_{\alpha;J;X_{gen}} = \{d_1,\ldots,d_r\} \quad .$$

Pour tout point y , $y \in Y$,

$$M_{\alpha;J;y} = \{d_1,\ldots,d_r\}$$

(car $S_{\alpha;J;X} \subset Z$) (cf.(7.3)) et on a

$$d_o = \sup_{1\leq j\leq r} d_j \quad \text{et} \quad \Delta_o = \Delta_o(d)$$

(cf.(7.3) et (2.7.12)). On pose

$$r_i = r_{\alpha;d_i} \quad , \ 1 \leq i \leq r \ ,$$

$$\delta_{ij} = s_{\alpha;j}(d_i) \quad , \ 1 \leq i \leq r \ , \ 1 \leq j \leq r_i$$

(cf. (4.1)). En vertu de (7.1.3), (7.1.6.1) et (7.1.6.2) (appliqués à $\mathcal{D}' = \mathbb{N}^p$) , il existe une fonction continue

$$R : X \longrightarrow]0,1[$$

et des fonctions continues

$$\varphi' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \psi' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad ,$$

modérées le long de Z , telles que pour tout point y de Y et tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$ tel que $y \in \overset{\circ}{K}$ les conditions

a) $\rho''_i(K;y) \leq R(y)$, $1 \leq i \leq p$;

b) $e(K;y)^{|d|} \rho''^{\delta_{ij}-d_i}(K;y) \leq 1/\varphi'(y)$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r_i$;

impliquent que

i) $K \subset U$;

ii) il existe une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue, normale σ_K de $B(K;f)$ telle que

a) $\mathrm{Ker}(\sigma_K) = B_{\Delta_o(d)}(K)$;

b) $\|\sigma_K\|_K \leq \psi'(y)\ e(K;y)^{|d|}/\rho''^{d_o}(K;y)$;

c) $\| id_{B(K)} - B(K;f) \circ \sigma_K \|_K \leq 2(1 + r\, 2^{|d|+r-1}\, e(K;y)^{|d|})$.

On pose

$$\varphi'' = \varphi' \varphi^{|d|} \ , \ \psi_1 = \psi' \varphi^{|d|} \quad \text{et} \quad \psi_2 = 2(1 + r\, 2^{|d|+r-1}\, \varphi^{|d|}) \ .$$

Les fonctions

$$\varphi'' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \ \psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

sont continues, modérées le long de Z (App. I, 1.3.2). Or, pour tout polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ pointé dans Y , (K,y) , suffisamment effilé modérément le long de Z les conditions (a) et (b')

(b') $\qquad \rho''^{\,\delta_{ij}-d_i}(K;y) \leq 1/\varphi''$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r_i$

sont satisfaites (cf. (6.3.2) et (6.2.1)). En remarquant que si en plus on a

$$e(K;y) \leq \varphi(y) \ ,$$

la condition (b') implique la condition (b), on en déduit le théorème.

Remarque 7.3.2.- En vertu de (1.2), il résulte de (7.3.1), (ii) que

$$B(K) = J_K \oplus B_{\Delta_o}(K)^{(1)}$$

et que l'application

$$B(K;f) \circ \sigma_K : B(K) \longrightarrow B(K)$$

$$(\text{resp.} \ \ id_{B(K)} - B(K;f) \circ \sigma_K : B(K) \longrightarrow B(K) \ \ )$$

est le projecteur de $B(K)$ sur J_K (resp. sur $B_{\Delta_o}(K)$) , parallèlement à $B_{\Delta_o}(K)$ (resp. à J_K) .

En particulier, ces projecteurs ne dépendent que de l'idéal J , et non pas du système de générateurs $f_1,\dots,f_m$.

L'ensemble $S_{\alpha;J;X}$ étant un fermé analytique d'intérieur vide de X (II,3.2), on peut appliquer le théorème à $Z = S_{\alpha;J;X}$.

Dans la plupart des applications, la fonction φ est supposée constante, et il découle de la démonstration du théorème 7.3.1 qu'on peut alors choisir la fonction ψ_2 constante également. En appliquant le théorème à $\varphi = 1$, on obtient un cas particulier important concernant les polydisques :

PROPOSITION 7.3.3.- *En gardant les notations et les hypothèses du théorème* 7.3.1 *il existe une fonction continue*

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

---

(1) Pour la définition de J_K se reporter au chapitre 0

modérée le long de Z *et une constante* ψ_2 , $\psi_2 \in \mathbb{R}_+^*$ *, telles que pour tout polydisque fermé* K *de centre* y *appartenant à* Y *, suffisamment effilé pour* $\leq_\alpha$ *, modérément le long de* Z *, les conditions* (i) *et* (ii) *du théorème* 7.3.1 *soient satisfaites.*

COROLLAIRE 7.3.4.- *En gardant les notations et les hypothèses du théorème* 7.3.1 *, si* A *désigne une matrice inversible à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *, définissant la relation d'ordre* $\leq_\alpha$ *sur* $\mathbb{N}^p$ *, alors pour toute fonction continue*

$$\varphi : Y \longrightarrow [1,+\infty[$$

modérée le long de Z *il existe des fonctions continues*

$$\psi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \;,\; \psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad et \quad \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

modérées le long de Z *et une constante* δ_o , $\delta_o \in \mathbb{R}_+^*$ *, telles que pour tout point* y *de* Y *et tout polycylindre compact* K *de* $\mathbb{C}^p$ *tel que* $y \in \mathring{K}$ *les conditions*

a) $e(K;y) \leq \varphi(y)$;

b) $\rho''(K;y) \in r_A(E_{p;\delta_o};1/\psi(y))$;

impliquent les assertions (i) *et* (ii) *du théorème* 7.3.1.

Démonstration. Le corollaire est une conséquence directe du théorème 7.3.1 (cf.(6.2.3)).

Remarque 7.3.5.- Si au lieu d'obtenir (7.3.4) comme corollaire du théorème (7.3.1), on le démontre directement à partir de la proposition (7.1.3), en raisonnant comme dans la démonstration du théorème (7.3.1) et en utilisant la proposition (4.5.5), on obtient une formule explicite pour la constante δ_o , à savoir

$$\delta_o = \Phi_{A;r}(d)$$

(cf. (4.5.1)), où

$$r = \mathrm{card}(M_{\alpha;J;X\mathrm{gen}})$$

et $d = (d_1,\ldots,d_r)$ désigne un élément de $(\mathbb{N}^p)^r$ tel que

$$M_{\alpha;J;X_{\mathrm{gen}}} = \{d_1,\ldots,d_r\} \quad .$$

En particulier, si $\leq_\alpha$ n'est autre que la relation d'ordre antilexicographique $\leq_L$ sur $\mathbb{N}^p$ et A la matrice unité (cf. (I.3.12.1)), en se limitant aux polydisques, on obtient l'énoncé suivant.

PROPOSITION 7.3.6.- *En gardant les notations et les hypothèses du théorème* 7.3.1 *si* $\leq_\alpha$ *est la relation d'ordre antilexicographique* $\leq_L$ *sur* $\mathbb{N}^p$ *et si l'on pose*

$$d_o = \sup(M_{\alpha;J;X_{\mathrm{gen}}})$$

(la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$ *et*

$$\delta_o = \sup_{1\leqq i<p} (d_{oi}) + 1 ,$$

où $d_o = (d_{o1},\dots,d_{op})$ *, alors il existe des fonctions continues*

$$\psi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad et \quad \psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

modérées le long de Z *, et une constante* ψ_2 *,* $\psi_2 \in \mathbb{R}_+^*$ *, telles que pour tout point* y *de* Y *et tout polydisque fermé de centre* y *et de polyrayon* $\rho = (\rho_1,\dots,\rho_p)$ *,* $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ *, les conditions*

$$\rho_1 < 1/\psi(y) \ , \ \rho_2 < \rho_1^{\delta_o},\dots,\rho_p < \rho_{p-1}^{\delta_o}$$

impliquent les assertions (i) *et* (ii) *du théorème* 7.3.1.

Démonstration. En vertu de (7.3.2), de (7.3.5) et de (4.5.3.2), la proposition est un cas particulier du corollaire (7.3.4).

THÉORÈME 7.4.- *Soient* p *un entier,* $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^p$ *, compatible avec sa structure de monoïde, moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$ *,* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$ *,* X *un sous-espace analytique fermé irréductible de* U *,* Z *un fermé analytique de* X *, distinct de* X *,* Y *l'ouvert dense de* X *défini par* $Y = X - Z$ *et* J *un idéal cohérent de* $\mathcal{O}_U$ *. On suppose que*

$$S_{\alpha;J;X} \subset Z .$$

Alors pour toute fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow [1,+\infty[,$$

modérée le long de Z *, il existe des fonctions continues*

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad et \quad \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

modérées le long de Z *, telles que pour tout polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *pointé dans* Y *,* (K,y) *, suffisamment effilé pour* $\leqq_\alpha$ *, modérément le long de* Z *, satisfaisant à la condition*

$$e(K;y) \leqq \varphi(y)$$

on ait :

i) $K \subset U$;

ii) $B(K) = J_K \oplus B_{\Delta_o}(K)$ (1) ,

où $\Delta_o = \mathbb{N}^p - P_{\alpha;J;X_{gen}}$ *, et si l'on désigne par* $\pi_{J;K}$ (resp. *par* $r_{J;K}$) *le*

---

(1) Pour la définition de J_K se reporter au chapitre 0.

projecteur de B(K)

$$\pi_{J;K} \; : B(K) \longrightarrow B(K)$$

$$(\text{resp. } r_{J;K} \; : B(K) \longrightarrow B(K)\;)$$

sur J_K (resp. *sur* $B_{\Delta_o}(K)$) *parallèlement à* $B_{\Delta_o}(K)$ (resp. *à* J_K), *on a*

a) $\pi_{J;K}$ *est une application* $\mathbb{C}$*-linéaire continue et*

$$\|\pi_{J;K}\|_K \leqq \psi_1(y)/\rho''^{d_o}(K;y) \quad ,$$

où $d_o = \sup(M_{\alpha;J;X_{gen}})$ (*la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$) ;

b) $r_{J;K}$ *est une application* $\mathbb{C}$*-linéaire continue et*

$$\|r_{J;K}\|_K \leqq \psi_2(y) \quad .$$

Démonstration. La démonstration du théorème (7.4) est rigoureusement analogue à celle du théorème (7.3.1) en utilisant le lemme (7.2.3) à la place du lemme (7.2.2) et la proposition (7.1.4) à la place de la proposition (7.1.3).

Remarque 7.4.1.- L'ensemble $S_{\alpha;J;X}$ étant un fermé analytique d'intérieur vide de X (II,3.2), on peut appliquer le théorème à $Z = S_{\alpha;J;X}$.

Dans la plupart des applications, la fonction φ est supposée constante, et on peut alors choisir la fonction ψ_2 constante également (cf. (7.3.2)). En appliquant le théorème (7.4) à $\varphi = 1$, on obtient un cas particulier concernant les polydisques, analogue à la proposition (7.3.3).

De même, en vertu de (6.2.3), on peut formuler une variante "paramétrique" de la condition "suffisamment effilé" et obtenir un énoncé analogue au corollaire (7.3.4) remarquer qu'en vertu de la proposition (4.5.5), on peut alors expliciter la constante δ_o (cf. (7.3.5)), et enfin donner une version simple dans le cas où $\leqq_\alpha$ est la relation d'ordre antilexicographique $\leqq_L$ sur $\mathbb{N}^p$ (analogue à la proposition (7.3.6)). On n'explicitera pas plus tous ces énoncés importants, que le lecteur pourra reconstituer sans difficulté.

CHAPITRE IV

THÉORÈME DE PRIVILÈGE NUMÉRIQUE UNIFORME

Dans ce chapitre, on étend aux sous-modules les résultats du chapitre précédent et on démontre le théorème principal de ce travail (théorème 4.4.1 et ses corollaires). La philosophie générale de ce chapitre est qu'un module cohérent sur un espace analytique peut toujours être considéré comme un idéal du faisceau structural d'un autre espace analytique. Il y a des questions dont le contexte naturel est celui des modules, les idéaux n'étant qu'un cas particulier. Ce n'est pas le cas pour les théorèmes de division dont le cadre approprié est celui des idéaux. S'il y a des théorèmes de division pour les modules, c'est uniquement parce qu'un module peut être considéré comme un idéal. C'est pour cette raison d'ailleurs que les théorèmes de division par un sous-module paraissent moins naturels que ceux par un idéal. C'est également une des raisons qui m'a conduit à les démontrer d'abord pour un idéal et à en déduire le cas général. En effet, une partie des résultats aurait pu être établie directement pour les sous-modules. En revanche, les résultats du chapitre II, essentiels pour les versions uniformes, ne peuvent pas, à ma connaissance, être démontrés directement, la notion d'exposant privilégié d'un sous-module étant trop artificielle.

La méthode la plus connue pour considérer un module comme un idéal est celle qui découle du "principe d'idéalisation" de Nagata, qui consiste à considérer un module comme un idéal de carré nul. Cette méthode n'est point adaptée pour les questions de division car cet idéal est un idéal du faisceau structural d'un espace qui n'est pas réduit et qui est donc singulier (voir [44] , §1, pp.383-384).

C'est une autre construction qui sera utilisée. Soient X un espace analytique et M un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. On cherche à définir un espace analytique X' et pour tout sous-$\mathcal{O}_X$-module cohérent M' de M un idéal cohérent J de $\mathcal{O}_{X'}$ de sorte que la donnée de l'idéal J de $\mathcal{O}_{X'}$ fournisse "les mêmes informations" que la donnée du sous-$\mathcal{O}_X$-module M' de M . L'espace X' sera l'espace défini par

$$X' = \mathrm{Specan}(\mathrm{S}(M)) ,$$

où $\mathrm{S}(M)$ désigne l'algèbre symétrique de M , et on associera à un sous-$\mathcal{O}_X$-module M' de M l'idéal $J(M')$ de $\mathcal{O}_{X'}$, idéal de définition de l'immersion fermée

$$\mathrm{Specan}(\mathrm{S}(M')) \longrightarrow X'$$

déduite de la surjection canonique

$$M \longrightarrow M/M' \quad .$$

Si X est un ouvert U de $\mathbb{C}^p$ et M un $\mathcal{O}_U$-module libre $\mathcal{O}_U^n$, l'espace analytique X' s'identifie à l'ouvert $U \times \mathbb{C}^n$ de $\mathbb{C}^{p+n}$ et en appliquant le théorème de division à l'idéal $\mathcal{J}(M')$ de $\mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}^n}$, on en déduit un théorème de division pour le sous-module M' de $\mathcal{O}_U^n$.

Au §1, on expose un "dictionnaire" traduisant les propriétés de l'idéal $\mathcal{J}(M')$ en des propriétés du sous-module M' . Aux §2 et §3, on établit le théorème de division par un sous-module, et au §4, on démontre le théorème de "privilège numérique uniforme", objet principal de ce travail.

§1. Opérateurs élémentaires et exposants privilégiés d'un sous-module

Dans ce paragraphe, on introduit les opérateurs qui permettent de ramener l'étude des théorèmes de division par un sous-module cohérent à celle des théorèmes de division par un idéal, et on définit la notion d'exposant privilégié minimal d'un sous-module, qui généralise les définitions du §1 du chapitre II concernant un idéal.

(1.0). Dans ce paragraphe, on se fixe deux entiers p et n , $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$, une relation d'ordre total $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^{p+n}$, compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^{p+n}$. Pour tout i , $1 \leqq i \leqq n$, on désigne par e_i l'élément de $\mathbb{N}^{p+n}$ défini par

$$e_i = (e_{i1}, \dots, e_{i,p+n}) \quad ,$$

où pour tout j , $1 \leqq j \leqq p+n$,

$$e_{ij} = 0 \quad , \quad j \neq p+i \quad ,$$

$$e_{i,p+i} = 1$$

et on pose

$$e = (e_1,\dots,e_n) \quad ,$$

$e \in (\mathbb{N}^{p+n})^n$. On désigne par $\mathcal{D}_o$ la partie de $\mathbb{N}^{p+n}$ définie par

$$\mathcal{D}_o = \mathbb{N}^p \times \{0\}$$

et par $\mathcal{D}'$ celle définie par

$$\mathcal{D}' = \bigcup_{1\leq i\leq n} (e_i+\mathcal{D}_o) \quad .$$

Alors pour tout i , $1 \leqq i \leqq n$, on a

(1.0.1) $$\mathcal{D}' \cap \Delta_i(e) = e_i + \mathcal{D}_o \subset \mathcal{D}' \quad .$$

Pour tout m , $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{D}^m = (\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_m,\mathcal{D}') \quad ,$$

où pour tout i , $1 \leqq i \leqq m$,

$$\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_o \quad .$$

Si $m = n$, on pose plus simplement

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^n$$

et alors, en vertu de (1.0.1), $\mathcal{D}$ satisfait aux conditions 2.8.1 du chapitre III pour $d = e$. Enfin, on désignera par $X_1,\dots,X_p$ les coordonnées de $\mathbb{C}^p$ et par $T_1,\dots,T_n$ celles de $\mathbb{C}^n$.

(1.1.0) Soient K un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ et K' un polycylindre compact de $\mathbb{C}^n$ tel que $0 \in \mathring{K}'$. En vertu de (III,2.6.26), pour toute partie Δ de $\mathbb{N}^{p+n}$ telle que

(1.1.0.1) $$\exists \Delta' \ , \ \Delta' \subset \mathbb{N}^n \ : \ \Delta = \mathbb{N}^p \times \Delta'$$

le sous-espace $B_{\Delta;(x,o)}(K\times K')$ de $B(K\times K')$ est indépendant du point x de $\mathring{K}$. On désignera alors ce sous-espace, plus simplement, par $B_\Delta(K\times K')$. On remarquera que l'ensemble des parties de $\mathbb{N}^{p+n}$ satisfaisant à la condition (1.1.0.1) est stable par addition, réunion, intersection et passage au complémentaire et que $\mathcal{D}_o$ et $\mathcal{D}'$ appartiennent à cet ensemble.

De même, il résulte de (III,2.7.10) que l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\mu_{\mathbb{1};e;K\times K';(x,o)} : B(K\times K')^n \longrightarrow B(K\times K')$$

$$(\text{resp. } \tau_{\mathbb{1};e;K\times K';(x,o)} : B(K\times K') \longrightarrow B(K\times K')^n \ ) \ ,$$

où $\mathbb{1} = (1,\dots,1)$, $\mathbb{1} \in (\mathbb{C}^*)^n$, est indépendante du point de x de $\mathring{K}$. On désignera donc, plus simplement, cette application par $\mu_{\mathbb{I};e;K\times K'}$ (resp. $\tau_{\mathbb{I};e;K\times K'}$), ou même par $\mu_{\mathbb{I};e}$ (resp. $\tau_{\mathbb{I};e}$), quand aucune confusion n'en résulte. Dans la suite, on identifiera $B(K)$ à son image dans $B(K\times K')$ par l'isométrie canonique (qui associe à une fonction f , $f\in B(K)$, la fonction f' , $f'\in B(K\times K')$, définie par $f'(x,x') = f(x)$, pour $(x,x')\in K\times K'$) , image qui n'est autre que $B_{\mathcal{D}_o}(K\times K')$, on notera $\varepsilon_{K';K}$ l'inclusion

$$\varepsilon_{K';K} : B(K) \longrightarrow B(K\times K')$$

et on désignera par $\pi_{K;K'}$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\pi_{K;K'} : B(K\times K') \longrightarrow B(K)$$

définie par

$$(\pi_{K;K'}(g))(x) = g(x,0) ,$$

pour $g\in B(K\times K')$ et $x\in K$. Alors on a

(1.1.0.2) $$\|\pi_{K;K'}\|_{K\times K'} = 1 ,$$

(1.1.0.3) $$\pi_{K;K'} \circ \varepsilon_{K';K} = id_{B(K)}$$

et $\varepsilon_{K';K} \circ \pi_{K;K'}$ est un projecteur dont l'image est $B(K)$ et le noyau $B_{\mathbb{N}^{p+n}-\mathcal{D}_o}(K\times K')$. On pose

$$\theta_{K;K'} = \varepsilon_{K';K} \circ \pi_{K;K'}$$

et on a

(1.1.0.4) $$\|\theta_{K;K'}\|_{K\times K'} = 1 .$$

En vertu de l'identification ci-dessus, l'application $\mu_{\mathbb{I};e}$ (resp. $\tau_{\mathbb{I};e}$) induit une application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\mu_{\mathcal{D};\,\mathbb{I};e} : B(K)^n \longrightarrow B_{\mathcal{D}'}(K\times K')$$

$$(\text{resp.}\quad \tau_{\mathcal{D};\,\mathbb{I};e} : B_{\mathcal{D}'}(K\times K') \longrightarrow B(K)^n\ )$$

(cf. (III,2.8) et (1.0)). On remarquera que pour tout élément $(f_1,\dots,f_n)$ de $B(K)^n$ on a

(1.1.0.5) $$\mu_{\mathcal{D};\,\mathbb{I};e}(f_1,\dots,f_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i\, T_i .$$

PROPOSITION 1.1.1.- *L'application* $\mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}$ *est un isomorphisme d'espaces de Banach de* $B(K)^n$ *sur* $B_{\mathcal{D}'}(K\times K')$ *et* $\tau_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}$ *en est l'isomorphisme inverse. En plus, on a*

a) $\|\mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}\|_{K\times K'} = \sum_{i=1}^{n} \rho_i''(K';0)$;

b) $\|\tau_{\mathcal{D};\mathbb{I};e;i}\|_{K\times K'} \leqq 2^{2i-1} e(K';0)^i/\rho_i''(K';0)$;

c) $\|\tau_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}\|_{K\times K'} \leqq 2^{2n-1}\, e(K';0)^n \sup_{1\leqq i\leqq n} (1/\rho_i''(K';0))$.

Démonstration. L'injectivité de $\mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}$ résulte de (1.1.0.5) et la surjectivité de (III,2.8.3). On en déduit que $\mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}$ est un isomorphisme d'espaces de Banach (théorème de Banach). D'autre part, $\tau_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}$ est une scission de $\mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}$ (III,2.8.2), ce qui implique ($\mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}$ étant bijective) que

$$\tau_{\mathcal{D};\mathbb{I};e} \circ \mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e} = \mathrm{id}_{B(K)^n} \quad \text{et} \quad \mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e} \circ \tau_{\mathcal{D};\mathbb{I};e} = \mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}'}(K\times K')} .$$

L'assertion (a) résulte de (1.1.0.5), l'assertion (b) de (III,2.7.2) et l'assertion (c) de (b).

Remarque 1.1.2.- Dans la suite, il aurait été pratique de pouvoir identifier $B(K)^n$ à $B_{\mathcal{D}'}(K\times K')$ par l'isomorphisme $\mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}$. Néanmoins, $\mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}$ n'étant pas une isométrie, cela entrainerait une ambiguité sur la norme.

(1.2). On désigne par $\chi_{K;K'}$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\chi_{K;K'} : B(K\times K') \longrightarrow B(K\times K')$$

définie par

$$\chi_{K;K'} = \mu_{\mathbb{I};e} \circ (\bigoplus^{n} \theta_{K;K'}) \circ \tau_{\mathbb{I};e} .$$

PROPOSITION 1.2.1.- *L'application* $\mathbb{C}$*-linéaire continue* $\chi_{K;K'}$ *est un projecteur et on a :*

i) $\|\chi_{K;K'}\|_{K\times K'} \leqq n\, 2^{2n-1}\, e(K';0)^n$;

ii) $\mathrm{Im}(\chi_{K;K'}) = B_{\mathcal{D}'}(K\times K')$;

iii) $\mathrm{Ker}(\chi_{K;K'}) = B_{\mathbb{N}^{p+n}-\mathcal{D}'}(K\times K')$.

Démonstration. On a

$$\chi_{K;K'}\circ\chi_{K;K'} = \mu_{\Pi;e}\circ(\overset{n}{\oplus}\varepsilon_{K';K})\circ(\overset{n}{\oplus}\pi_{K;K'})\circ\tau_{\Pi;e}\circ\mu_{\Pi;e}\circ(\overset{n}{\oplus}\varepsilon_{K';K})\circ(\overset{n}{\oplus}\pi_{K;K'})\circ\tau_{\Pi;e}\,.$$

Or,

$$(\overset{n}{\oplus}\pi_{K;K'})\circ\tau_{\Pi;e}\circ\mu_{\Pi;e}\circ(\overset{n}{\oplus}\varepsilon_{K';K}) = \tau_{\mathcal{D};\Pi;e}\circ\mu_{\mathcal{D};\Pi;e} = id_{B(K)^n}$$

(1.1.1), donc

$$\chi_{K;K'}\circ\chi_{K;K'} = \chi_{K;K'}\quad ,$$

ce qui démontre que $\chi_{K;K'}$ est un projecteur. D'autre part, pour tout f , $f\in B(K\times K')$, on a

$$\chi_{K;K'}(f) = \sum_{i=1}^{n}(\theta_{K;K'}\circ\tau_{\Pi;e;i})(f)T_i$$

(1.1.0.5), d'où

$$\|\chi_{K;K'}\|_{K\times K'}\leq \sum_{i=1}^{n}\|\tau_{\Pi;e;i}\|_{K\times K'}\ \rho''_i(K';0)\leq n\ 2^{2n-1}e(K';0)^n$$

((1.1.0.4) et (III,2.7.2)), ce qui démontre l'assertion (i). Pour démontrer l'assertion (ii), on remarque que

$$Im(\tau_{\Pi;e}) = \prod_{i=1}^{n} B_{-e_i+\Delta_i(e)}(K\times K')$$

(III,2.7.13), et comme pour tout i , $1\leq i\leq n$,

$$\mathcal{D}_o\subset -e_i + \Delta_i(e)$$

(1.0.1), on a, en vertu de l'identification de $B(K)$ à $B_{\mathcal{D}_o}(K\times K')$,

$$B(K)^n\subset Im(\tau_{\Pi;e})\quad ,$$

d'où

$$Im((\overset{n}{\oplus}\theta_{K;K'})\circ\tau_{\Pi;e}) = B(K)^n$$

et l'assertion (ii) résulte de (III,2.8.6). Enfin la bijectivité de $\mu_{\mathcal{D};\Pi;e}$ (1.1.1) implique que $\mu_{\Pi;e}|B(K)^n$ est injective. On en déduit que

$$Ker(\chi_{K;K'}) = \tau_{\Pi;e}^{-1}(Ker(\overset{n}{\oplus}\theta_{K;K'})) = \tau_{\Pi;e}^{-1}(B_{\mathbb{N}^{p+n}-\mathcal{D}_o}(K\times K')^n)$$

(1.1.0) et l'assertion (iii) résulte de (III,2.8.9) et (III,2.8.10).

COROLLAIRE 1.2.2.- *On a*

$$\theta_{K;K'} \circ \chi_{K;K'} = \chi_{K;K'} \circ \theta_{K;K'} = 0 \quad .$$

Démonstration. Comme

$$\mathrm{Ker}(\theta_{K;K'}) = B_{\mathbb{N}^{p+n}-\mathcal{D}_o}(K\times K') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\theta_{K;K'}) = B_{\mathcal{D}_o}(K\times K')$$

(cf. 1.1.0)), le corollaire résulte de la proposition 1.2.1 et des inclusions

$$\mathcal{D}' \subset \mathbb{N}^{p+n}-\mathcal{D}_o \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_o \subset \mathbb{N}^{p+n}-\mathcal{D}' \quad .$$

COROLLAIRE 1.2.3.- *Soit* x *un point de* $\overset{\circ}{K}$. *Si pour tout* $d = (d_1,d_2)$, $d \in \mathbb{N}^{p+n}$, $d_1 \in \mathbb{N}^p$, $d_2 \in \mathbb{N}^m$, *on désigne par* $\delta_{d;x}$ *l'application* $\mathbb{C}$*-linéaire continue*

$$\delta_{d;x} : B(K) \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par

$$\delta_{d;x}(f) = \frac{\partial^{|d|}f}{\partial X^{d_1}\partial T^{d_2}}(x,0) \ , \text{ pour } \ f \in B(K\times K') \quad ,$$

on a

a) *si* $d \in \mathcal{D}'$, $\delta_{d;x} \circ \chi_{K;K'} = \delta_{d;x}$;

b) *si* $d \in \mathbb{N}^{p+n}-\mathcal{D}'$, $\delta_{d;x} \circ \chi_{K;K'} = 0$.

Démonstration. L'assertion (b) résulte de (1.2.1), (ii). Pour démontrer l'assertion (a), on remarque que, $\chi_{K;K'}$ étant un projecteur, on a

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id}_{B(K\times K')} - \chi_{K;K'}) = \mathrm{Ker}(\chi_{K;K'}) = B_{\mathbb{N}^{p+n}-\mathcal{D}'}(K\times K')$$

((1.2.1), (iii)), ce qui implique que si $d \in \mathcal{D}'$,

$$\delta_{d;x} \circ (\mathrm{id}_{B(K\times K')} - \chi_{K;K'}) = 0 \quad .$$

COROLLAIRE 1.2.4.- *Pour tout point* x *de* $\overset{\circ}{K}$ *et tout élément* h *de* $B(K\times K')$ *tel que* $h \neq 0$ *on a :*

i) *si* $\chi_{K;K'}(h) \neq 0$, *alors* $v_{\alpha;(x,0)}(h) \leqq_\alpha v_{\alpha;(x,0)}(\chi_{K;K'}(h))$;

ii) *pour que* $v_{\alpha;(x,0)}(h) \in \mathcal{D}'$ *il faut et il suffit que* $\chi_{K;K'}(h) \neq 0$ *et* $v_{\alpha;(x,0)}(h) = v_{\alpha;(x,0)}(\chi_{K;K'}(h))$.

Démonstration. En vertu du corollaire 1.2.3, on a

$$E_{(x,0)}(\chi_{K;K'}(h)) = E_{(x,0)}(h)\cap \mathcal{D}'$$

et le corollaire 1.2.4 en découle directement (cf. (II,1.1)).

COROLLAIRE 1.2.5.- *Soient* f *et* g *deux éléments de* $B(K\times K')$. *Alors on a*

$$\chi_{K;K'}(f\cdot g) = \theta_{K;K'}(f)\cdot \chi_{K;K'}(g) + \chi_{K;K'}(f)\cdot \theta_{K;K'}(g) \quad .$$

Démonstration. En vertu du corollaire 1.2.2, on a

$$\mathrm{id}_{B(K\times K')} - \theta_{K;K'} - \chi_{K;K'} = (\mathrm{id}_{B(K\times K')} - \theta_{K;K'})\circ(\mathrm{id}_{B(K\times K')} - \chi_{K;K'}) =$$

$$= (\mathrm{id}_{B(K\times K')} - \chi_{K;K'})\circ(\mathrm{id}_{B(K\times K')} - \theta_{K;K'}).$$

On en déduit que

(1.2.5.1) $$\mathrm{Im}(\mathrm{id}_{B(K\times K')} - \theta_{K;K'} - \chi_{K;K'})\subset B_{\mathbb{N}^{p+n} - (\mathcal{D}_o\cup\mathcal{D}')}(K\times K')$$

((1.2.1), (1.1.0) et (III,2.6.3)) . On pose

$$f' = f - \theta_{K;K'}(f) - \chi_{K;K'}(f)$$

et

$$g' = g - \theta_{K;K'}(g) - \chi_{K;K'}(g) \ .$$

Alors on a

(1.2.5.2) $$fg = f'g + (f-f')g' + \theta_{K;K'}(f)\theta_{K;K'}(g) + \chi_{K;K'}(f)\,\chi_{K;K'}(g) +$$

$$+ \theta_{K;K'}(f)\,\chi_{K;K'}(g) + \chi_{K;K'}(f)\,\theta_{K;K'}(g) \quad .$$

Or, il résulte de (1.2.5.1) et (II, 2.6.5) que

$$f'g\in B_{(\mathbb{N}^{p+n}-(\mathcal{D}_o\cup\mathcal{D}'))+\mathbb{N}^{p+n}}(K\times K') \ , \qquad (f-f')g'\in B_{(\mathbb{N}^{p+n}-(\mathcal{D}_o\cup\mathcal{D}'))+\mathbb{N}^{p+n}}(K\times K')$$

et de (1.10),(1.2.1) et (II,2.6.5) que

$$\theta_{K;K'}(f)\,\theta_{K;K'}(g)\in B_{\mathcal{D}_o+\mathcal{D}_o}(K\times K') \ ,$$

$$\chi_{K;K'}(f)\,\chi_{K;K'}(g)\in B_{\mathcal{D}'+\mathcal{D}'}(K\times K') \ ,$$

$$\theta_{K;K'}(f)\,\chi_{K;K'}(g)\in B_{\mathcal{D}_o+\mathcal{D}'}(K\times K') \ ,$$

$$\chi_{K;K'}(f)\,\theta_{K;K'}(g)\in B_{\mathcal{D}_o+\mathcal{D}'}(K\times K') \ ,$$

et comme

$$(\mathbb{N}^{p+n} - (\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}')) + \mathbb{N}^{p+n} \subset \mathbb{N}^{p+n} - \mathcal{D}' \quad ,$$

$$\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_0 \subset \mathbb{N}^{p+n} - \mathcal{D}' \quad ,$$

$$\mathcal{D}' + \mathcal{D}' \subset \mathbb{N}^{p+n} - \mathcal{D}'$$

et

$$\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}' \quad ,$$

il résulte de la proposition 1.2.1 et de (1.2.5.2) que

$$\chi_{K;K'}(f\cdot g) = \theta_{K;K'}(f)\ \chi_{K;K'}(g) + \chi_{K;K'}(f)\ \theta_{K;K'}(g) \quad ,$$

ce qui démontre le corollaire.

(1.3.1). Soient m un entier, $m \in \mathbb{N}$, U un ouvert de $\mathbb{C}^p$ et $f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U^n$ un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules, $f = (f_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$, $f_{ij} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. On désigne par $\tilde{f}$ le morphisme de $\mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}^n}$-modules

$$\tilde{f} : \mathcal{O}^m_{U\times\mathbb{C}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}^n}$$

défini par $\tilde{f} = (F_1,\ldots,F_m)$, où pour tout j , $1 \leq j \leq m$,

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ij}\, T_i \quad .$$

Soient K un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U et K' un polycylindre compact de $\mathbb{C}^n$ tel que $0 \in \mathring{K}'$. Alors on a

(1.3.1.1) $$B(K\times K';\tilde{f}) = \mu_{\mathbb{I};e} \circ (B(K;f)\ \hat{\otimes}_\varepsilon\ \mathrm{id}_{B(K')})$$

(cf. chapitre 0 et (III,2.0)). D'autre part, on remarque que pour tout j , $1 \leq j \leq m$, et tout point x de $\mathring{K}$ on a

$$\mathcal{D}_0 + E_{(x,0)}(F_j) \subset \mathcal{D}' \quad ;$$

l'application $B(K\times K';\tilde{f})$ induit donc une application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$B_{\mathcal{D}^m}(K\times K';\tilde{f}) \ : \ B(K)^m \longrightarrow B_{\mathcal{D}'}(K\times K')$$

(cf. (1.0), (1.1.0) et (III,3.2)), et il résulte de (1.3.1.1) et de (1.1.1) qu'on a

(1.3.1.2) $$B_{\mathcal{D}^m}(K\times K';\tilde{f}) = \mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e} \circ B(K;f)$$

et

(1.3.1.3) $$B(K;f) = \tau_{\mathcal{D};\mathbb{I};e} \circ B_{\mathcal{D}^m}(K \times K';\tilde{f})$$

(c'est-à-dire que si l'on identifiait $B(K)^n$ à son image $B_{\mathcal{D}'}(K \times K')$ par l'isomorphisme $\mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}$ on aurait $B_{\mathcal{D}^m}(K \times K';\tilde{f}) = B(K;f)$ (voir 1.1.2)).
De même, pour tout j, $1 \leq j \leq m$, et tout point x de $\overset{\circ}{K}$ on a

$$(\mathbb{N}^{p+n} - \mathcal{D}_o) + E_{(x,0)}(F_j) \subset \mathbb{N}^{p+n} - \mathcal{D}' \quad .$$

On en déduit que si l'on pose

$$\mathbb{N}^{p+n} - \mathcal{D}^m = (\mathbb{N}^{p+n} - \mathcal{D}_1, \dots, \mathbb{N}^{p+n} - \mathcal{D}_m \, , \, \mathbb{N}^{p+n} - \mathcal{D}' \,) \, ,$$

où pour tout j, $1 \leq j \leq m$, $\mathcal{D}_j = \mathcal{D}_o$, l'application $B(K \times K';\tilde{f})$ induit une application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$B_{\mathbb{N}^{p+n} - \mathcal{D}^m}(K \times K';\tilde{f}) : (B_{\mathbb{N}^{p+n} - \mathcal{D}_o}(K \times K'))^m \longrightarrow B_{\mathbb{N}^{p+n} - \mathcal{D}'}(K \times K')$$

(cf. (III,3.2)) et il résulte de (1.1.0) et de (1.2.1) que

(1.3.1.4) $$B(K \times K';\tilde{f}) = B_{\mathcal{D}^m}(K \times K';\tilde{f}) \oplus B_{\mathbb{N}^{p+n} - \mathcal{D}^m}(K \times K';\tilde{f}) \quad .$$

PROPOSITION 1.3.2.- *Soient* $\sigma : B_{\mathcal{D}'}(K \times K') \longrightarrow B(K)^m$ *une application* $\mathbb{C}$*-linéaire continue et* $\sigma' : B(K)^n \longrightarrow B(K)^m$ *l'application définie par*

$$\sigma' = \sigma \circ \mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e} \quad .$$

Alors

i) σ' *est une application* $\mathbb{C}$*-linéaire continue et*

$$\|\sigma'\|_K \leq \sum_{i=1}^{n} \rho''_i(K';0) \, \|\sigma\|_{K \times K'} \quad ;$$

ii) *pour que* σ' *soit une scission de* $B(K;f)$ *il faut et il suffit que soit une scission de* $B_{\mathcal{D}^m}(K \times K';\tilde{f})$;

iii) *pour que* $B(K;f)$ *soit une scission de* σ' *il faut et il suffit que* $B_{\mathcal{D}^m}(K \times K';\tilde{f})$ *soit une scission de* σ .

Démonstration. L'assertion (i) résulte de (1.1.1), (a) et les assertions (ii) et (iii) de (1.3.1.2) et de (1.1.1).

Remarque 1.3.3.- La proposition 1.3.2 permet de ramener la construction de scissions (resp. de scissions normales) de $B(K;f)$ au cas où $n=1$.

(1.3.4.). Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^p$, $\mathcal{M}$ un sous-$\mathcal{O}_U$-module cohérent de $\mathcal{O}_U^n$,

$i : M \hookrightarrow \mathcal{O}_U^n$ le morphisme d'inclusion, $\mathcal{Q}$ le conoyau de i et $t : \mathcal{O}_U^n \to \mathcal{Q}$ la surjection canonique, de telle sorte qu'on ait une suite exacte

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} \mathcal{O}_U^n \xrightarrow{t} \mathcal{Q} \longrightarrow 0 \quad .$$

On en déduit une surjection

$$S(t) : S(\mathcal{O}_U^n) \longrightarrow S(\mathcal{Q})$$

de l'algèbre symétrique de $\mathcal{O}_U^n$ sur celle de $\mathcal{Q}$, d'où une immersion fermée

$$\mathrm{Specan}(S(\mathcal{Q})) \hookrightarrow \mathrm{Specan}(S(\mathcal{O}_U^n)) \quad .$$

Or,

$$\mathrm{Specan}(S(\mathcal{O}_U^n)) = U \times \mathbb{C}^n$$

et si l'on pose

$$Y = \mathrm{Specan}(S(\mathcal{Q})) \ ,$$

Y s'identifie à un sous-espace analytique fermé de $U \times \mathbb{C}^n$. On désigne par $\mathcal{J}(M)$ l'idéal de définition de Y dans $U \times \mathbb{C}^n$. Si U' est un ouvert de U tel qu'il existe un entier m, $m \in \mathbb{N}$, et un morphisme de $\mathcal{O}_{U'}$-modules

$$f : \mathcal{O}_{U'}^m \longrightarrow \mathcal{O}_{U'}^n$$

tels que $M|U' = \mathrm{Im}(f)$, alors on a

(1.3.4.1) $\qquad \mathcal{J}(M)|U' \times \mathbb{C}^n = \mathrm{Im}(\tilde{f}) \quad .$

(1.4.1). Soient x un point de $\mathbb{C}^p$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$, où pour tout i, $1 \leq i \leq n$, f_i est une fonction définie au voisinage de x et analytique au voisinage de x, ou un germe de fonction analytique au voisinage de x (par exemple $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U^n)$, où U est un ouvert de $\mathbb{C}^p$ contenant x, ou $f \in B(K)^n$, où K est un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ tel que $X \in \mathring{K}$, ou $f \in \mathcal{O}^n_{\mathbb{C}^p, x}$).

On désigne par $E_x(f)$ la partie de $\mathbb{N}^{p+n}$ définie par

$$E_x(f) = \bigcup_{1 \leq j \leq n} (e_j + (E_x(f_j) \times \{0\}))$$

(cf. (II,1.1)), et si le germe de f en x est non nul, ce qui équivaut à $E_x(f) \neq \emptyset$, on pose

$$v_{\alpha;x}(f) = \min_\alpha(E_x(f)) \quad .$$

On a

(1.4.1.1) $\qquad E_x(f) \subset \mathcal{D}'$

et

(1.4.1.2) $\qquad v_{\alpha;x}(f) \in \mathcal{D}' \quad .$

On remarquera que si l'on pose

$$F = \sum_{j=1}^{n} f_j T_j$$

et si x' désigne le point de $\mathbb{C}^{p+n}$ défini par $x' = (x,0)$, alors F est une fonction (ou un germe de fonction) définie et analytique au voisinage de x' dans $\mathbb{C}^{p+n}$, et conformément à (II,1.1), on a

(1.4.1.3) $\qquad E_{x'}(F) = E_x(f)$

et

(1.4.1.4) $\qquad v_{\alpha;x'}(F) = v_{\alpha;x}(f)$.

(1.4.2) Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^p$, $\mathcal{M}$ un sous-$\mathcal{O}_U$-module cohérent de $\mathcal{O}_U^n$, x un point de U et K un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ tel que $x \in \mathring{K}$ et $K \subset U$. On appelle ensemble des exposants privilégiés pour $\leqq_\alpha$ en x de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{O}_U^n$ (resp. ensemble des exposants privilégiés pour $\leqq_\alpha$ sur K en x de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{O}_U^n$) et on note $P_{\alpha;\mathcal{M};x}$ (resp. $P_{\alpha;\mathcal{M};K;x}$) la partie de $\mathbb{N}^{p+n}$ définie par

$$P_{\alpha;\mathcal{M};x} = \{d \in \mathbb{N}^{p+n} \ : \ \exists f \in \mathcal{M}_x \ , \ f \neq 0 \ \text{ et } \ v_{\alpha;x}(f) = d\}$$

$$(\text{resp. } P_{\alpha;\mathcal{M};K;x} = \{d \in \mathbb{N}^{p+n} \ : \ \exists f \in \mathcal{M}_K \ , \ f \neq 0 \ \text{ et } \ v_{\alpha;x}(f) = d\})\ ^{(1)} \ .$$

On note $M_{\alpha;\mathcal{M};x}$ (resp. $M_{\alpha;\mathcal{M};K;x}$) l'ensemble fini $M(P_{\alpha;\mathcal{M};x})$ (resp. $M(P_{\alpha;\mathcal{M};K;x})$) des éléments minimaux de $P_{\alpha;\mathcal{M};x}$ (resp. $P_{\alpha;\mathcal{M};K;x}$) pour la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^{p+n}$ et on appellera les éléments de cet ensemble les exposants privilégiés minimaux.
En vertu de (1.4.1.2), on a

(1.4.2.1) $\qquad P_{\alpha;\mathcal{M};K;x} \subset P_{\alpha;\mathcal{M};x} \subset \mathcal{D}'$

(on verra plus loin qu'en fait $P_{\alpha;\mathcal{M};K;x} = P_{\alpha;\mathcal{M};x}$) et comme $\mathcal{M}$ est un sous-module de $\mathcal{O}_U^n$, on a

(1.4.2.2) $\qquad P_{\alpha;\mathcal{M};x} = M_{\alpha;\mathcal{M};x} + \mathcal{D}_o$

et

(1.4.2.3) $\qquad P_{\alpha;\mathcal{M};K;x} = M_{\alpha;\mathcal{M};K;x} + \mathcal{D}_o$.

D'autre part, si $\mathcal{M}'$ désigne un sous-$\mathcal{O}_U$-module cohérent de $\mathcal{O}_U^n$ tel que $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$,

---

(1) Pour la définition de $\mathcal{M}_K$ se reporter au chapitre 0.

on a

(1.4.2.4) $\qquad P_{\alpha;M;x} \subset P_{\alpha;M';x}$

et

(1.4.2.5) $\qquad P_{\alpha;M;K;x} \subset P_{\alpha;M';K;x}$.

Remarque 1.4.3.- Dans le cas où $n = 1$ (ce qui implique que M est un idéal cohérent J de $\mathcal{O}_U$), les définitions et notations de (1.4.1) et (1.4.2) ne coïncident avec celles de (II,1.1) et (II,1.2) que si l'on identifie $\mathbb{N}^p$ à la partie $\mathbb{N}^p \times \{1\}$ de $\mathbb{N}^{p+1}$.

PROPOSITION 1.4.4.- *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, M *un sous-*$\mathcal{O}_U$*-module cohérent de* $\mathcal{O}_U^n$, x *un point de* U , K *un polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *tel que* $K \subset U$ *et* $x \in \overset{\circ}{K}$, *et* K' *un polycylindre compact de* $\mathbb{C}^n$ *tel que* $0 \in \overset{\circ}{K'}$. *Alors on a :*

i) $P_{\alpha;M;K;x} = P_{\alpha;\mathcal{D}';J(M);K\times K';(x,0)} = P_{\alpha;J(M);K\times K';(x,0)} \cap \mathcal{D}'$;

ii) $M_{\alpha;M;K;x} = M_{\alpha;\mathcal{D}';J(M);K\times K';(x,0)} = M_{\alpha;J(M);K\times K';(x,0)} \cap \mathcal{D}'$.

Démonstration. Il existe un ouvert U' contenu dans U contenant K , un entier m , $m \in \mathbb{N}$, et un morphisme de $\mathcal{O}_{U'}$-modules

$$f : \mathcal{O}_{U'}^m \longrightarrow \mathcal{O}_{U'}^n$$

tel que

$$M|U' = \operatorname{Im}(\tilde{f}) \quad .$$

Alors, on a

$$J(M)|U' \times \mathbb{C}^n = \operatorname{Im}(\tilde{\tilde{f}}) \quad ,$$

$$M_K = \operatorname{Im}(B(K;f))$$

et

$$(J(M))_K = \operatorname{Im}(B(K \times K';\tilde{f}))$$

(cf.(1.3.4.1) et chapitre 0). On en déduit que

$$P_{\alpha;M;K;x} = \{d \in \mathbb{N}^{p+n} : \exists g \in \operatorname{Im}(B(K;f)),\ g \neq 0 \ \text{ et } \ v_{\alpha;x}(g) = d\}$$

et

$$P_{\alpha;\mathcal{D}';J(M);K\times K';(x,0)} = \{d \in \mathbb{N}^{p+n} : \ h \in \operatorname{Im}(B(K\times K';\tilde{f})) \cap B_{\mathcal{D}'}(K\times K'),\ h\neq 0 \text{ et } v_{\alpha;(x,0)}(h) = d\}.$$

(cf. (1.4.2), (II,1.2) et (III,2.6)). Or il résulte de (1.3.1.4) que

$$\mathrm{Im}(B(K\times K';\tilde{f})) = \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D}^m}(K\times K';\tilde{f})) \oplus \mathrm{Im}(B_{\mathbb{N}^{p+n}-\mathcal{D}^m}(K\times K';\tilde{f})) \ ,$$

d'où

$$\mathrm{Im}(B(K\times K';\tilde{f})) \cap B_{\mathcal{D}'}(K\times K') = \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D}^m}(K\times K';\tilde{f}))$$

et en vertu de (1.3.1.2), on a

$$\mathrm{Im}(B(K\times K';\tilde{f})) \cap B_{\mathcal{D}'}(K\times K') = \mu_{\mathcal{D};\Pi;e}(\mathrm{Im}(B(K;f))) \ .$$

D'autre part, l'application $\mu_{\mathcal{D};\Pi;e}$ est bijective (1.1.1), et pour tout g, $g\in B(K)^n$, $g\neq 0$, on a

$$v_{\alpha;x}(g) = v_{\alpha;(x,0)}(\mu_{\mathcal{D};\Pi;e}(g))$$

((1.1.0.5) et (1.4.1.4)). On en déduit que

$$P_{\alpha;M;K;x} = P_{\alpha;\mathcal{D}';J(M);K\times K';(x,0)}$$

et il s'ensuit que

$$M_{\alpha;M;K;x} = M_{\alpha;\mathcal{D}';J(M);K\times K';(x,0)} \ .$$

Démontrons que

$$P_{\alpha;\mathcal{D}';J(M);K\times K';(x,0)} = P_{\alpha;J(M);K\times K';(x,0)} \cap \mathcal{D}' \ .$$

L'inclusion

$$P_{\alpha;\mathcal{D}';J(M);K\times K';(x,0)} \subset P_{\alpha;J(M);K\times K';(x,0)} \cap \mathcal{D}'$$

est évidente (cf. (II,1.3)). Réciproquement, soit d, $d\in P_{\alpha;J(M);K\times K';(x,0)} \cap \mathcal{D}'$. Alors il existe h, $h\in \mathrm{Im}(B(K\times K';\tilde{f}))$, $h\neq 0$, tel que

$$v_{\alpha;(x,0)}(h) = d \ .$$

On pose

$$h' = \chi_{K;K'}(h) \ .$$

En vertu de (1.2.1) et de (1.3.1.4), on a

$$h'\in B_{\mathcal{D}'}(K\times K') \quad \text{et} \quad h'\in \mathrm{Im}(B(K\times K';\tilde{f})) \ ,$$

et il résulte de 1.2.4 que

$$h'\neq 0 \quad \text{et} \quad v_{\alpha;(x,0)}(h') = d \ .$$

On en déduit que $d\in P_{\alpha;\mathcal{D}';J(M);K\times K';(x,0)}$.

Il reste à démontrer que

$$M_{\alpha;\mathcal{D}';J(M);K\times K';(x,0)} = M_{\alpha;J(M);K\times K';(x,0)} \cap \mathcal{D}' \ .$$

L'égalité

$$P_{\alpha;\mathcal{D}';J(M);K\times K';(x,0)} = P_{\alpha;J(M);K\times K';(x,0)} \cap \mathcal{D}'$$

implique que

$$M_{\alpha;J(M);K\times K';(x,0)} \cap \mathcal{D}' \subset M_{\alpha;\mathcal{D}';J(M);K\times K';(x,0)} \quad .$$

Réciproquement, soit d , $d \in M_{\alpha;\mathcal{D}';J(M);K\times K';(x,0)}$. Alors $d \in \mathcal{D}'$ et $d \in P_{\alpha;J(M);K\times K';(x,0)}$. Soit d' , $d' \in P_{\alpha;J(M);K\times K';(x,0)}$, et supposons que $d' < d$. Les conditions $d \in \mathcal{D}'$ et $d' < d$ impliquent que $d' \in \mathcal{D}_0$ ou $d' \in \mathcal{D}'$ et comme $d' \in P_{\alpha;J(M);K\times K';(x,0)}$, il existe h , $h \in \operatorname{Im}(B(K\times K';\tilde{f}))$, $h \neq 0$, tel que $v_{\alpha;(x,0)}(h) = d'$. Or ,

$$\operatorname{Im}(B(K\times K';\tilde{f})) \subset \operatorname{Im}(\mu_{\Pi;e})$$

(1.3.1.1) et

$$\operatorname{Im}(\mu_{\Pi;e}) = B_{\mathbb{N}^{p+m}-\mathcal{D}_0}(K\times K')$$

(III,2.8.3). On en déduit que $d' \notin \mathcal{D}_0$, donc $d' \in \mathcal{D}'$,
d'où $d' \in P_{\alpha;J(M);K\times K';(x,0)} \cap \mathcal{D}'$, c'est-à-dire $d' \in P_{\alpha;\mathcal{D}';J(M);K\times K';(x,0)}$, ce qui est absurde. On en déduit que $d \in M_{\alpha;J(M);K\times K';(x,0)}$, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE 1.4.5.- *En gardant les notations de la proposition* 1.4.4, *on a*

i) $P_{\alpha;M;K;x} = P_{\alpha;M;x} = P_{\alpha;J(M);(x,0)} \cap \mathcal{D}'$;

ii) $M_{\alpha;M;K;x} = M_{\alpha;M;x} = M_{\alpha;J(M);(x,0)} \cap \mathcal{D}'$.

Démonstration. En vertu de (II,3.7), on a

$$P_{\alpha;J(M);(x,0)} = P_{\alpha;J(M);K\times K';(x,0)}$$

et

$$M_{\alpha;J(M);(x,0)} = M_{\alpha;J(M);K\times K';(x,0)} \quad .$$

On en déduit que

$$P_{\alpha;M;K;x} = P_{\alpha;J(M);(x,0)} \cap \mathcal{D}'$$

et

$$M_{\alpha;M;K;x} = M_{\alpha;J(M);(x,0)} \cap \mathcal{D}'$$

(1.4.4). D'autre part, l'ensemble $M_{\alpha;M;x}$ étant fini, il existe un ouvert U' de

$\mathbb{C}^p$ tel que $x \in U'$ et $U' \subset U$ et une famille finie $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$ d'éléments de $\Gamma(U',M)$ telle que pour tout d , $d \in M_{\alpha;M;x}$, il existe i , $1 \leq i \leq m$, tel que $f_{i,x} \neq 0$ et $v_{\alpha;x}(f_i) = d$. Alors, si K_1 désigne un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ tel que $x \in \overset{\circ}{K}_1$ et $K_1 \subset U'$, on a

$$M_{\alpha;M;x} \subset P_{\alpha;M;K_1;x}$$

et comme

$$P_{\alpha;M;K_1;x} \subset P_{\alpha;M;x}$$

(1.4.2.1), on en déduit que

$$M_{\alpha;M;x} = M_{\alpha;M;K_1;x} \quad ,$$

d'où

$$P_{\alpha;M;x} = P_{\alpha;M;K_1;x}$$

((1.4.2.2) et (1.4.2.3)). Or, il résulte de la première partie de la démonstration que

$$P_{\alpha;M;K_1;x} = P_{\alpha;J(M);(x,0)} \cap \mathcal{D}'$$

et

$$M_{\alpha;M;K_1;x} = M_{\alpha;J(M);(x,0)} \cap \mathcal{D}' \quad ,$$

ce qui démontre le corollaire.

Remarque 1.4.6.- Le corollaire 1.4.5 permet de ramener l'étude des exposants privilégiés d'un sous-module de $\mathcal{O}_U^n$ à celle des exposants privilégiés d'un idéal.

§2. Division par un sous-module en un point

En utilisant les résultats du paragraphe précédent, qui permettent de ramener l'étude d'un sous-module à celle d'un idéal, on démontre dans ce paragraphe des énoncés concernant un sous-module, analogues aux principaux résultats des paragraphes 3, 4 et 5 du chapitre III, relatifs à un idéal.

(2.0) Dans ce paragraphe, on garde les notations du paragraphe précédent et en particulier celles du n°(1.0). On rappelle que $\mathcal{D}'$ désigne la partie de $\mathbb{N}^{p+n}$ définie par

$$\mathcal{D}' = \bigcup_{1\leq j\leq n} \mathbb{N}^p \times \{e_j\} \quad ,$$

où $e_1,\dots,e_n$ désigne la "base" canonique de $\mathbb{N}^n$, et $\mathcal{D}_0$ celle définie par

$$\mathcal{D}_0 = \mathbb{N}^p \times \{0\}$$

(qu'on identifiera parfois à $\mathbb{N}^p$) . On remarque que la partie $\mathcal{D}'$ de $\mathbb{N}^{p+n}$ satisfait à la condition (III,7.1.0.1)

$$[(\mathcal{D}' + (-\mathcal{D}')) \cap \mathbb{N}^{p+n}] + \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}' \quad ,$$

et on vérifie facilement que

$$\mathcal{D}_0 = (\mathcal{D}' + (-\mathcal{D}')) \cap \mathbb{N}^{p+n} \quad .$$

En particulier, pour tout élément $d = (d_1,\dots,d_m)$ de $(\mathbb{N}^{p+n})^m$, tel que pour tout i , $1 \leq i \leq m$, $d_i \in \mathcal{D}'$, on a

$$\mathcal{D}' \cap \Delta_i(d) \subset d_i + \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}'$$

(cf. (III, 7.1.0.4)). Si d désigne un tel élément de $(\mathbb{N}^{p+n})^m$, pour tout i , $1 \leq i \leq m$, il existe un élément d_i' de $\mathbb{N}^p$ et un entier j_i , $1 \leq j_i \leq n$, (uniques) tels que

$$d_i = (d_i', e_{j_i}) \quad .$$

On désigne par $\bar{\Delta}_i(d)$ la partie de $\mathbb{N}^p$ définie par

$$\bar{\Delta}_i(d) = d_i' + \mathbb{N}^p - \bigcup_{\substack{1\leq i'<i \\ j_{i'}=j_i}} (d_{i'}' + \mathbb{N}^p)$$

et pour tout j , $1 \leq j \leq n$, par $\bar{\Delta}_{0j}(d)$ celle définie par

$$\bar{\Delta}_{0j}(d) = \mathbb{N}^p - \bigcup_{\substack{1\leq i\leq m \\ j_i = j}} (d_i' + \mathbb{N}^p) \quad .$$

On remarque que pour tout j , $1 \leq j \leq n$, (resp. pour tout i , $1 \leq i \leq m$), on a

$$(\mathbb{N}^p - \bar{\Delta}_{oj}(d)) + \mathbb{N}^p \subset \mathbb{N}^p - \bar{\Delta}_{oj}(d)$$

$$(\text{resp.}\quad [\mathbb{N}^p - (-d_i^! + \bar{\Delta}_i(d))] + \mathbb{N}^p \subset \mathbb{N}^p - (-d_i^! + \bar{\Delta}_i(d)) \quad) ,$$

ce qui implique que pour tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$ le sous-espace $B_{\bar{\Delta}_{oj}(d);x}(K)$ (resp. $B_{-d_i^!+\bar{\Delta}_i(d);x}(K)$) de $B(K)$ ne dépend pas du point x de $\overset{\circ}{K}$ (III,2.6.27). On le désignera simplement par $B_{\bar{\Delta}_{oj}(d)}(K)$ (resp. par $B_{-d_i^!+\bar{\Delta}_i(d)}(K)$).

(<u>2.1</u>) Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^p$,

$$f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U^n$$

un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules, x un point de U , K un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U tel que $x \in \overset{\circ}{K}$, K' un polycylindre compact de $\mathbb{C}^n$ tel que $0 \in \overset{\circ}{K'}$, $d = (d_1,\dots,d_m)$ un élément de $(\mathbb{N}^{p+n})^m$ tel que pour tout i , $1 \leq i \leq m$, $d_i \in \mathcal{D}'$ et $a = (a_1,\dots,a_m)$ un élément de $(\mathbb{C}^*)^m$, et considérons l'application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\nu_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};a;d;K\times K';(x,o)} : B_{\mathcal{D}'}(K\times K') \longrightarrow B_{\mathcal{D}'}(K\times K')$$

définie, conformément à (III,3.1) et (III,3.2), par

$$\nu_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};a;d;K\times K';(x,o)} = \mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}'}(K\times K')} - (B_{\mathcal{D}^m}(K\times K';\tilde{f}) - \mu_{\mathcal{D}^m;a;d;K\times K';(x,o)}) \circ \tau_{\mathcal{D}^m;a;d;K\times K';(x,o)} .$$

On en déduit une application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\tau_{\mathcal{D};\mathbb{I};e} \circ \nu_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};a;d;K\times K';(x,o)} \circ \mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e} : B(K)^n \longrightarrow B(K)^n$$

(cf. (1.1.0)). On remarquera que cette application est indépendante du choix du polycylindre K' de $\mathbb{C}^n$ (tel que $0 \in \overset{\circ}{K'}$). En effet, il suffit de le vérifier pour un polycylindre compact K'' tel que $K' \subset K''$ (car étant donné deux polycylindres compacts, leur intersection est aussi un polycylindre compact) et cela résulte de (III,3.1.1), (III,2.7.8) et (III,2.7.9) et du fait que l'application de restriction

$$r_{K\times K',K\times K''} : B(K\times K'') \longrightarrow B(K\times K')$$

respecte l'identification de $B(K)$ à $B_{\mathcal{D}_o}(K\times K')$ ou à $B_{\mathcal{D}_o}(K\times K'')$. On pose

$$\nu_{f;a;d;K;x} = \tau_{\mathcal{D};\mathbb{I};e} \circ \nu_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};a;d;K\times K';(x,o)} \circ \mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e} ,$$

et on vérifie aisément que si $n = 1$, on retrouve la définition de (3.1) (en identifiant $\mathbb{N}^p \times \{1\}$ à $\mathbb{N}^p$) .

PROPOSITION 2.1.1.- *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\nu_{f;a;d;K;x}$ *est inversible ;*

ii) $\nu_{f;a;d;K;x}$ *est bijective ;*

iii) *pour tout* g , $g \in B(K)^n$, *il existe un couple unique* (g_o, g_1) *tel que*

$$g_o \in \prod_{j=1}^{n} B_{\overline{\Delta}_{oj}(d)}(K) \quad , \quad g_1 \in \prod_{i=1}^{m} B_{-d_i^! + \overline{\Delta}_i(d)}(K)$$

et

$$g = B(K;f)(g_1) + g_o$$

(où $d_i^!$ *désigne l'image de* d_i *par la première projection* $\mathbb{N}^{p+n} \longrightarrow \mathbb{N}^p$.

Démonstration. L'équivalence des conditions (i) et (ii) résulte du théorème de Banach. D'autre part, en vertu de (1.1.1), pour que $\nu_{f;a;d;K;x}$ soit inversible il faut et il suffit que $\nu_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};a;d;K\times K';(x,o)}$ le soit, où K' désigne un polycylindre compact de $\mathbb{C}^n$ tel que $0 \in \mathring{K}'$. L'équivalence des conditions (i) et (iii) résulte alors de (III,3.2.1), (1.3.1.1) et (1.1.1) en remarquant que

$$(2.1.1.1) \qquad -d_i + (\mathcal{D}' \cap \Delta_i(d)) = \mathcal{D}_o \cap (-d_i + \Delta_i(d)) = -d_i^! + \overline{\Delta}_i(d) \ , \ 1 \leq i \leq m \ ,$$

et que

$$(2.1.1.2) \qquad \mathcal{D}_o \cap (-e_j + \Delta_o(d)) = \overline{\Delta}_{oj}(d) \quad , \ 1 \leq j \leq n \quad ,$$

ce qui en vertu de (III,2.8.8), implique que

$$(2.1.1.3) \qquad \tau_{\mathcal{D};\mathrm{II};e}(B_{\mathcal{D}' \cap \Delta_o(d)}(K \times K')) = \prod_{j=1}^{n} B_{\overline{\Delta}_{oj}(d)}(K) \quad .$$

Remarque 2.1.2.- Si $(f_1, \ldots, f_m)$ désigne un élément de $\Gamma(U, \mathcal{O}_U^n)^m$ et

$$f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U^n$$

le morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules défini par cet élément, la condition (iii) signifie que pour tout élément $g = (g_1, \ldots, g_n)$ de $B(K)^n$ il existe un élément unique $h = (h_1, \ldots, h_m)$ de $B(K)^m$ et un élément unique $g' = (g_1', \ldots, g_n')$ de $B(K)^n$ tels que :

a) pour tout i , $1 \leq i \leq m$,

$$h_i \in B_{-d_i^! + \overline{\Delta}_i(d)}(K) \quad ;$$

b) pour tout j , $1 \leq j \leq n$,

$$g_j' \in B_{\overline{\Delta}_{oj}(d)}(K) \quad ;$$

c) $g = \sum_{i=1}^{m} h_i(f_i|K) + g'$;

c'est-à-dire que la condition (iii) est une condition de "division".

COROLLAIRE 2.1.3.- *Si l'on suppose que* ${}_o\nu_{f;a;d;K;x}$ *est inversible, alors pour tout* a' , $a' \in (\mathbb{C}^*)^m$ *, et tout* x' , $x' \in \overset{\circ}{K}$, $\nu_{f;a';d;K;x'}$ *est également inversible.*

Démonstration. En effet, la condition (iii) de la proposition (2.1.1) est indépendante de a et de x (cf.(2.0)).

PROPOSITION 2.1.4.- *Si l'on suppose que* $\nu_{f;a;d;K;x}$ *est inversible et si l'on désigne par* $\sigma_{f;d;K}$ (resp. $r_{f;d;K}$) *l'application*

$$\sigma_{f;d;K} : B(K)^n \longrightarrow B(K)^m$$

$$(\text{resp.} \quad r_{f;d;K} : B(K)^n \longrightarrow B(K)^n \;)$$

définie par

$$\sigma_{f;d;K}(g) = g_1$$

$$(\text{resp.} \quad r_{f;d;K}(g) = g_0 \;) ,$$

où (g_0,g_1) *désigne l'unique couple tel que*

$$g_0 \in \prod_{j=1}^{n} B_{\overline{\Delta}_{oj}(d)}(K) \quad , \quad g_1 \in \prod_{i=1}^{m} B_{-d_i'+\overline{\Delta}_i(d)}(K)$$

et

$$g = B(K;f)(g_1) + g_0$$

(cf. (2.1.1)), *alors on a* :

i) *l'application* $\sigma_{f;d;K}$ (resp. $r_{f;d;K}$) *est une application* $\mathbb{C}$*-linéaire continue* ;

ii) $id_{B(K)^n} = B(K;f) \circ \sigma_{f;d;K} + r_{f;d;K}$;

iii) $Im(\sigma_{f;d;K}) = \prod_{i=1}^{m} B_{-d_i'+\overline{\Delta}_i(d)}(K)$;

iv) $Ker(\sigma_{f;d;K}) = Im(r_{f;d;K}) = \prod_{j=1}^{n} B_{\overline{\Delta}_{oj}(d)}(K)$;

v) $B(K;f)$ *est une scission de* $\sigma_{f;d;K}$;

vi) *les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) $\sigma_{f;d;K}$ *est une scission (normale) de* $B(K;f)$;

b) $Im(B(K;f)) \cap \prod_{j=1}^{n} B_{\overline{\Delta}_{oj}(d)}(K) = \{0\}$;

c) $\mathrm{Im}(B(K;f)) = \mathrm{Im}(B(K;f) \circ \sigma_{f;d;K})$;

d) $\mathrm{Im}(B(K;f)) \subset \mathrm{Ker}(r_{f;d;K})$.

Démonstration. Soit K' un polycylindre compact de $\mathbb{C}^n$ tel que $0 \in \overset{\circ}{K'}$. Alors $\nu_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};a;d;K\times K';(x,o)}$ est inversible (1.1.1), et en vertu de (1.1.1), (1.3.1.1), (2.1.1.1) et (2.1.1.3) la proposition (2.1.4) résulte de la proposition (III,3.2.2) en remarquant que

(2.1.4.1) $$\sigma_{f;d;K} = \sigma_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};a;d;K\times K';(x,o)} \circ \mu_{\mathcal{D};\Pi;e}$$

et que

(2.1.4.2) $$r_{f;d;K} = \tau_{\mathcal{D};\Pi;e} \circ (\mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}'}(K)} - B_{\mathcal{D}^m}(K;\tilde{f}) \circ \sigma_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};a;d;K\times K';(x,o)}) \circ \mu_{\mathcal{D};\Pi;e}$$.

(2.2) En gardant les notations de (2.1), soient $\leqq_\alpha$ une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^{p+n}$, compatible avec sa structure de monoïde, moins fine que la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^{p+n}$, $(f_1,\dots,f_m)$ un élément de $(\Gamma(U,\mathcal{O}^n_{\mathbb{C}^p}))^m$,

$$f : \mathcal{O}^m_U \longrightarrow \mathcal{O}^n_U$$

le morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules défini par cet élément et $\mathcal{M}$ le sous-$\mathcal{O}_U$-module cohérent de $\mathcal{O}^n_U$ engendré par $f_1,\dots,f_m$ $(\mathcal{M} = \mathrm{Im}(f))$.

PROPOSITION 2.2.1.- *Si pour tout* i , $1 \leqq i \leqq m$, *le germe de* f_i *en* x *est non nul et* $v_{\alpha;x}(f_i) = d_i$, *et si* $\nu_{f;a;d;K;x}$ *est inversible, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\sigma_{f;d;K}$ *est une scission de* $B(K;f)$;

ii) $M_{\alpha;\mathcal{M};x} \subset \{d_1,\dots,d_m\}$.

Démonstration. Soit K' un polycylindre compact de $\mathbb{C}^n$ tel que $0 \in \overset{\circ}{K'}$. Il résulte de (1.1.1) que $\nu_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};a;d;K\times K';(x,o)}$ est inversible et en vertu de (2.1.4.1), on a

$$\sigma_{f;d;K} = \sigma_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};a;d;K\times K';(x,o)} \circ \mu_{\mathcal{D};\Pi;e} .$$

On en déduit que $\sigma_{f;d;K}$ est une scission de $B(K;f)$ si et seulement si $\sigma_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};a;d;K\times K';(x,o)}$ est une scission de $B_{\mathcal{D}^m}(K\times K';\tilde{f})$ (1.3.2). Or, si $\tilde{f} = (\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_m)$, pour tout i , $1 \leqq i \leqq m$, on a

$$v_{\alpha;(x,o)}(\tilde{f}_i) = v_{\alpha;x}(f_i)$$

(cf. (1.4.1.4) et (1.3.1)). D'autre part, si l'on désigne par $\mathcal{J}$ l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}^n}$ engendré par $\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_m$, on a $\mathcal{J}=\mathcal{J}(M)$ (1.3.4.1), et il résulte de (1.3.1.4) que

$$\mathcal{J}_{K\times K'}\cap B_{\mathcal{D}'}(K\times K') = \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D}^m}(K\times K';\tilde{f}))$$

(car $\mathcal{J}_{K\times K'} = \mathrm{Im}(B(K\times K';\tilde{f}))$) . On en déduit que $\sigma_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};a;d;K\times K';(x,o)}$ est une scission de $B_{\mathcal{D}^m}(K\times K';\tilde{f})$ si et seulement si

$$M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J}(M);K\times K';(x,o)}\subset\{d_1,\dots,d_m\}$$

((III,3.3.1) et (III,3.2.2),(v)). Or,

$$M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J}(M);K\times K';(x,o)} = M_{\alpha;M;x}$$

((1.4.4) et (1.4.5)), ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 2.2.2.- *En gardant les notations et les hypothèses de la proposition (2.2.1), si M' désigne un sous-module cohérent de $\mathcal{O}_U^n$ tel que $M\subset M'$, la condition*

$$M_{\alpha;M';x}\subset\{d_1,\dots,d_m\}$$

implique que

$$M'_K = M_K{}^{(1)} \quad .$$

Démonstration. En gardant les notations de la démonstration de la proposition 2.2.1, si l'on désigne par $\mathcal{J}'$ l'idéal cohérent $\mathcal{J}(M')$ de $\mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}^n}$ (cf. (1.3.4)), on a $\mathcal{J}\subset\mathcal{J}'$ et en vertu de (1.4.4) et (1.4.5) ,

$$M_{\alpha;M';x} = M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J}(M');K\times K';(x,o)} \quad ,$$

d'où

$$M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J}(M');K\times K';(x,o)}\subset\{d_1,\dots,d_m\} \quad .$$

On en déduit que

$$\mathcal{J}'_{K\times K'}\cap B_{\mathcal{D}'}(K\times K') = \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D}^m}(K\times K';\tilde{f}))$$

((III,3.3.4) et (III,3.3.5)). Or, il existe un ouvert U' de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U contenant K et un morphisme de $\mathcal{O}_{U'}$-modules

$$g:\mathcal{O}_{U'}^{m'}\longrightarrow\mathcal{O}_{U'}^n$$

tel que $M'|U'=\mathrm{Im}(g)$, et il résulte de (1.3.4.1) et de (1.3.1.4) que

$$\mathcal{J}'_{K\times K'}\cap B_{\mathcal{D}'}(K\times K') = \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D}^m}(K\times K';\tilde{g})) \quad .$$

On en déduit que

---

(1) Pour la définition de M_K se reporter au chapitre 0.

$$\mathrm{Im}(B_{\mathcal{D}^m}(K\times K';\tilde{g})) = \mathrm{Im}(B_{\mathcal{D}^m}(K\times K';\tilde{f})) \ ,$$

d'où

$$\mathrm{Im}(B(K;g)) = \mathrm{Im}(B(K;f))$$

(1.3.1.3), ce qui démontre la proposition (cf. chapitre 0).

PROPOSITION 2.3.- *Soient* p, m, n *des entiers*, $p\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$, $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^{p+n}$, *comptatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^{p+n}$, $\leqq_{\alpha'}$ *la relation d'ordre total induite par* $\leqq_\alpha$ *sur* $\mathbb{N}^p$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, x *un point de* U , $(f_1,\dots,f_m)$ *un élément de* $(\Gamma(U,\mathcal{O}^n_{\mathbb{C}^p}))^m$,

$$f:\mathcal{O}^m_U \longrightarrow \mathcal{O}^n_U$$

le morphisme de $\mathcal{O}_U$*-modules défini par cet élément et* a *un élément de* $(\mathbb{C}^*)^m$. *On suppose que pour tout* i , $1\leqq i\leqq m$, *le germe de* f_i *en* x *est non nul et on pose*

$$v_{\alpha;x}(f_i) = d_i = (d'_i, e_{j_i}) \ , \quad 1\leqq i\leqq m \ ,$$

où $d'_i\in\mathbb{N}^p$ *et* e_{j_i} *est le* j_i*-ème élément de la "base" canonique de* $\mathbb{N}^n$ (cf. (1.4.1) et (2.0)), et

$$d=(d_1,\dots,d_m) \ .$$

Alors pour tout polycylindre compact K *de* $\mathbb{C}^p$, *suffisamment centré et effilé pour* $\leqq_{\alpha'}$ (cf. (III,5.1.3)) *on a*

i) $K\subset U$;

ii) $\nu_{f;a;d;K;x}$ *est inversible.*

Démonstration. En vertu de (1.1.1), pour tout polycylindre K de $\mathbb{C}^p$ tel que $x\in\overset{\circ}{K}$ et $K\subset U$ et tout polycylindre compact K' de $\mathbb{C}^n$ tel que $0\in\overset{\circ}{K'}$, $\nu_{f;a;d;K;x}$ est inversible si et seulement si $\nu_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};a;d;K\times K';(x,o)}$ l'est. Or, si $\tilde{f}=(\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_m)$, pour tout i , $1\leqq i\leqq m$, on a

$$v_{\alpha;(x,o)}(\tilde{f}_i) = v_{\alpha;x}(f_i) = d_i$$

(cf.(1.4.1.4) et (1.3.1)). Alors il résulte de (III,4.4.4) et de (III,3.2.4) qu'il existe une constante C , $C\in\,]1,+\infty[$, et une partie V de $(\mathbb{R}^*_+)^{p+n}$, appartenant au filtre de Hahn-Banach $\mathcal{F}^o_{\leqq_\alpha}$ (cf.(I,5.1.3)), telles que pour tout polycylindre compact K'' de $\mathbb{C}^{p+n}$, tel que $(x,o)\in\overset{\circ}{K''}$, satisfaisant à

$$e(K'';(x,o)) < C$$

et

$$\rho''(K'';(x,o)) \in V$$

on ait

i) $K'' \subset U \times \mathbb{C}^n$;

ii) $\nu_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};a;d;K'';(x,o)}$ est inversible.

Or, si l'on désigne par r la première projection

$$r : (\mathbb{R}_+^*)^{p+n} \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^p \quad ,$$

il existe une partie V' de $(\mathbb{R}_+^*)^p$ appartenant au filtre de Hahn-Banach $\mathcal{F}^o_{\leqq\alpha}$, telle que

$$V' \subset r(V)$$

(I,5.3). Alors pour tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$, tel que $x \in \mathring{K}$, satisfaisant à

$$e(K;x) < C$$

et

$$\rho''(K;x) \in V'$$

il existe ρ, $\rho \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, tel que

$$(\rho''(K;x),\rho) \in V \ ,$$

et si l'on désigne par K' le polydisque fermé de $\mathbb{C}^n$ de centre 0 et de polyrayon ρ, on a

$$e(K \times K';(x,o)) = e(K;x)$$

et

$$\rho''(K \times K';(x,o)) = (\rho''(K;x),\rho) \ ,$$

ce qui implique que

i) $K \times K' \subset U \times \mathbb{C}^n$;

ii) $\nu_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};a;d;K\times K';(x,o)}$ est inversible;

d'où

i) $K \subset U$;

ii) $\nu_{f;a;d;K;x}$ est inversible;

ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE 2.3.1.- *Soient* p *et* n *des entiers,* $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\leq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^{p+n}$, *compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit* $\leq$ *sur* $\mathbb{N}^{p+n}$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, x *un point de* U, M *un sous-*$\mathcal{O}_U$*-module cohérent de* $\mathcal{O}_U^n$ *et* $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ *une famille finie d'éléments de* $\Gamma(U,M)$ *telle que pour tout* i, $1 \leq i \leq m$, *le germe de* f_i *en* x *soit non nul. On pose*

$$d_i = v_{\alpha;x}(f_i) \ , \ 1 \leq i \leq m \ .$$

Alors si

$$M_{\alpha;M;x} \subset \{d_1,\ldots,d_m\} \ ,$$

le sous-module M *est engendré par la famille* $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ *au voisinage du point* x.

Démonstration. En gardant les notations de la proposition 2.3, il résulte de cette dernière qu'il existe un polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$ tel que $x \in \overset{\circ}{K}$, $K \subset U$, et tel que $\nu_{f;a;d;K;x}$ soit inversible. Alors si l'on désigne par $\mathcal{M}'$ le sous-$\mathcal{O}_U$-module de $\mathcal{O}_U^n$ engendré par la famille $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ au-dessus de U, on a

$$\mathcal{M}' \subset \mathcal{M} \ ,$$

et en vertu de (2.2.2), on en déduit que

$$\mathcal{M}_K = \mathcal{M}'_K \ ,$$

ce qui démontre le corollaire.

Remarque 2.3.2.- En combinant les propositions 2.3 et 2.1.4, on obtient aussitôt un théorème de division par un sous-module. Dans le paragraphe suivant on en démontrera une version "numérique uniforme" qui nécessite quelques développements supplémentaires.

§3. Théorème de division numérique uniforme par un sous-module.

Dans ce paragraphe, on étend aux sous-modules les résultats établis au paragraphe 6 du chapitre III.

(3.0) Soient p et n des entiers, $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\leqq_\alpha$ une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^{p+n}$, compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^{p+n}$. La relation d'ordre $\leqq_\alpha$ induit une relation d'ordre $\leqq_{\alpha_1}$ (resp. $\leqq_{\alpha_2}$) sur $\mathbb{N}^p$ (identifié à $\mathbb{N}^p \times \{0\}$) (resp. sur $\mathbb{N}^n$ (identifié à $\{0\} \times \mathbb{N}^n$)). On remarquera que les relations d'ordre $\leqq_{\alpha_1}$ et $\leqq_{\alpha_2}$ ne déterminent pas, en général, la relation d'ordre $\leqq_\alpha$.

La notion fondamentale (introduite dans (1.4.1)) est celle de l'exposant privilégié pour $\leqq_\alpha$ en x d'un élément $f = (f_1,\dots,f_n)$ de $(\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}))^n$, où U désigne un ouvert de $\mathbb{C}^p$ et x un point de U, exposant noté $v_{\alpha;x}(f)$ et qui satisfait, comme il est facile de vérifier, à l'identité

$$v_{\alpha;x}(f) = \min_{\substack{\alpha \\ 1 \leqq i \leqq n}} (v_{\alpha_1;x}(f_i), e_i) =$$

$$= \min_\alpha \{d \in \mathbb{N}^{p+n} : \exists d' \in \mathbb{N}^p,\ \exists i,\ 1 \leqq i \leqq n : d = (d', e_i) \text{ et } \frac{\partial^{|d'|} f_i}{\partial x^{d'}}(x) \neq 0\},$$

où $e_1,\dots,e_n$ désigne la "base" canonique de $\mathbb{N}^n$.

On remarquera que $v_{\alpha;x}(f)$ ne dépend que de la restriction de la relation $\leqq_\alpha$ à $\mathcal{D}' = \mathbb{N}^p \times \{e_1,\dots,e_n\}$. Cette restriction n'est pas non plus déterminée, en général, par les relations $\leqq_{\alpha_1}$ et $\leqq_{\alpha_2}$. Néanmoins, si l'on veut "privilégier les exposants par rapport aux indices" il est naturel de supposer que si d_1 et d_1' désignent deux éléments de $\mathbb{N}^p$ tels que $d_1 <_{\alpha_1} d_1'$, alors pour tout d_2 et d_2', $d_2 \in \mathbb{N}^n$, $d_2' \in \mathbb{N}^n$, on ait

$$(d_1,d_2) <_\alpha (d_1',d_2') .$$

Sous cette hypothèse, pour tout d_1 et d_1', $d_1 \in \mathbb{N}^p$, $d_1' \in \mathbb{N}^p$, et tout d_2 et d_2', $d_2 \in \mathbb{N}^n$, $d_2' \in \mathbb{N}^n$, on a

$$(d_1,d_2) \leqq_\alpha (d_1',d_2') \Leftrightarrow (d_1 <_{\alpha_1} d') \text{ ou } [(d_1 = d_1') \text{ et } (d_2 \leqq_{\alpha_2} d_2')] ,$$

et alors la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ (et en particulier sa restriction à $\mathcal{D}'$) est déterminée par les relations d'ordre $\leqq_{\alpha_1}$ et $\leqq_{\alpha_2}$. On ne fera pas cette hypothèse en général car les théorèmes "uniformes" ne la nécessitent pas. En revanche, cette hypothèse sera utile dans la partie "numérique" de ces théorèmes car elle permet d'obtenir des majorations plus simples et canoniques. On est ainsi conduit à formuler la définition suivante :

DÉFINITION 3.0.1.- *Soient* p *et* n *des entiers,* $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, *et* $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^{p+n}$, *compatible avec sa structure de monoïde. On dira que la relation d'ordre* $\leqq_\alpha$ *privilégie le sous-monoïde* $\mathbb{N}^p = \mathbb{N}^p \times \{0\}$ *de* $\mathbb{N}^{p+n}$ *si pour tout* d_1, d_1', d_2 *et* d_2' , $d_1 \in \mathbb{N}^p$, $d_1' \in \mathbb{N}^p$, $d_2 \in \mathbb{N}^n$, $d_2' \in \mathbb{N}^n$, *on a*

$$(d_1,0) <_\alpha (d_1',0) \Rightarrow (d_1,d_2) <_\alpha (d_1',d_2') \quad .$$

PROPOSITION 3.0.2.- *En gardant les notations de la définition* 3.0.1 , *si la relation d'ordre* $\leqq_\alpha$ *privilégie le sous-monoïde* $\mathbb{N}^p$ *de* $\mathbb{N}^{p+n}$ *et si l'on désigne par* $\leqq_{\alpha_1}$ (resp. *par* $\leqq_{\alpha_2}$) *la restriction de* $\leqq_\alpha$ *à* $\mathbb{N}^p$ *(identifié à* $\mathbb{N}^p \times \{0\}$) (resp. à $\mathbb{N}^n$ *(identifié à* $\{0\} \times \mathbb{N}^n$)) , *pour tout* d_1, d_1', d_2, d_2' , $d_1 \in \mathbb{N}^p$, $d_1' \in \mathbb{N}^p$, $d_2 \in \mathbb{N}^n$, $d_2' \in \mathbb{N}^n$ *on a*

$$(d_1,d_2) \leqq_\alpha (d_1',d_2') \Leftrightarrow (d_1 <_{\alpha_1} d_1') \text{ ou } [(d_1 = d_1') \text{ et } (d_2 \leqq_{\alpha_2} d_2')] \ .$$

Démonstration. Si $d_1 <_{\alpha_1} d_1'$, on a $(d_1,0) <_\alpha (d_1',0)$ et $\leqq_\alpha$ privilégiant le sous-monoïde $\mathbb{N}^p$ de $\mathbb{N}^{p+n}$, on en déduit que $(d_1,d_2) <_\alpha (d_1',d_2')$. Si $d_1 = d_1'$ et $d_2 \leqq_{\alpha_2} d_2'$, on a $(0,d_2) \leqq_\alpha (0,d_2')$ et $\leqq_\alpha$ étant compatible avec la structure de monoïde de $\mathbb{N}^{p+n}$, on ne déduit que $(d_1,d_2) \leqq_\alpha (d_1',d_2')$. Réciproquement, si $(d_1,d_2) \leqq_\alpha (d_1',d_2')$, on en peut avoir $d_1' <_{\alpha_1} d_1$ car, en vertu de ce qui précède, on aurait $(d_1',d_2') <_\alpha (d_1,d_2)$. La relation $\leqq_\alpha$ étant une relation d'ordre total, on en déduit que $d_1 <_{\alpha_1} d_1'$ ou $d_1 = d_1'$. Si $d_1 = d_1'$, la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ étant régulière (cf. (I,1.0)) on en déduit que $(0,d_2) \leqq_\alpha (0,d_2')$, d'où $d_2 \leqq_{\alpha_2} d_2'$, ce qui démontre la proposition.

Remarque 3.0.3.- En gardant les notations de la proposition 3.0.2, si la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ privilégie le sous-monoïde $\mathbb{N}^p$ de $\mathbb{N}^{p+n}$, la restriction de $\leqq_\alpha$ à $\mathcal{D}' = \mathbb{N}^p \times \{e_1,\dots,e_n\}$, où $e_1,\dots,e_n$ désigne la "base" canonique de $\mathbb{N}^n$, est déterminée par la relation d'ordre $\leqq_{\alpha_1}$ et la restriction de la relation d'ordre $\leqq_{\alpha_2}$ à l'ensemble $\{e_1,\dots,e_n\}$. Quitte à changer, le cas échéant, l'ordre des indices, on peut supposer que

$$e_1 <_{\alpha_2} e_2 <_{\alpha_2} \dots <_{\alpha_2} e_n$$

et alors la restriction de $\leqq_{\alpha_2}$ à $\{e_1,\dots,e_n\}$ n'est autre que la restriction de l'ordre antilexicographique $\leqq_L$ sur $\mathbb{N}^n$ (cf. (I,3.12.1)). La notion d'"exposant privilégié" ne dépendant que de la restriction de $\leqq_\alpha$ à $\mathcal{D}'$, on peut alors supposer, sans perte de généralité que $\leqq_{\alpha_2}$ n'est autre que $\leqq_L$. Il sera donc utile d'introduire la notation suivante.

(3.0.4) Soient p et n des entiers, $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, et $\leqq_\alpha$ une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$, compatible avec sa structure de monoïde. On désigne par $\leqq_{\bar{\alpha}}$ la relation dans $\mathbb{N}^{p+n}$ définie par

$$(d_1,d_2) \leqq_{\bar{\alpha}} (d_1',d_2') \Leftrightarrow (d_1 <_\alpha d_1') \text{ ou } [(d_1 = d_1') \text{ et } (d_2 \leqq_L d_2')] ,$$

pour $d_1 \in \mathbb{N}^p$, $d_1' \in \mathbb{N}^p$, $d_2 \in \mathbb{N}^n$, $d_2' \in \mathbb{N}^n$, où $\leqq_L$ désigne la relation d'ordre antilexicographique sur $\mathbb{N}^n$ (cf(I,3.12.1)). La relation $\leqq_{\bar{\alpha}}$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^{p+n}$, compatible avec sa structure de monoïde, privilégiant le sous-monoïde $\mathbb{N}^p$ de $\mathbb{N}^{p+n}$, induisant $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$ et si $\leqq_\alpha$ est moins fine que la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$, $\leqq_{\bar{\alpha}}$ est moins fine que la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^{p+n}$.

LEMME 3.1.- *Soient* X *un espace* $\mathbb{C}$*-analytique,* Z *un fermé analytique d'intérieur vide de* X , Y *l'ouvert dense de* X *défini par* $Y = X - Z$, n *un entier,* $n \in \mathbb{N}$, $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^n$, *compatible avec sa structure de monoïde et* F *le filtre de Hahn-Banach* $F^\circ_{\leqq_\alpha}$ *sur* $(\mathbb{R}_+^*)^n$ *défini par cette relation d'ordre* (cf. (I,5.1.3)). *Alors pour tout ensemble* V *appartenant au filtre* $F(Y/Z)$ *sur* $(\mathbb{R}_+^*)^n \times Y$ (cf. (III,6.1.3)) *il existe une famille* $(\rho_j)_{1\leqq j\leqq n}$ *de fonctions continues*

$$\rho_j : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

telle que pour tout j , $1 \leqq j \leqq n$, ρ_j *et* $1/\rho_j$ *soient modérées le long de* Z , *et telle que pour tout point* y *de* Y *on ait*

$$(\rho_1(y),\dots,\rho_n(y),y) \in V .$$

Démonstration. En vertu de (III,6.1.7), si $A = (a_{ij})_{1\leqq i\leqq n, 1\leqq j\leqq n}$ désigne une matrice de définition de $\leqq_\alpha$ (cf.(I,3.11)), il existe δ , $\delta \in \mathbb{R}_+$, et une fonction continue φ

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

telle que $1/\varphi$ soit modérée le long de Z , et telle que

$$(r_A \times id_Y)\ (E_{n;\delta;\varphi}) \subset V .$$

On peut supposer que la fonction φ soit également modérée le long de Z en la remplaçant par la fonction φ' définie par

$$\varphi'(y) = \inf\{\varphi(y),1\} \text{ , pour } y \in Y$$

(car alors $E_{n;\delta;\varphi'} \subset E_{n;\delta;\varphi}$). Pour tout i , $1 \leq i \leq n$, on désigne par ρ'_i la fonction

$$\rho'_i : Y \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$$

définie par

$$\rho'_i = \varphi^{\delta^{i-1}}/2^{1+\delta+\ldots+\delta^{i-1}} .$$

La fonction ρ'_i est continue, modérée le long de Z , $1/\rho'_i$ est également modérée le long de Z (App.I, 1.2.2,(vii)) et on vérifie facilement que pour tout y , $y \in Y$, on a

$$(\rho'_1(y),\ldots,\rho'_n(y)) \in E_{n;\delta;\varphi(y)} ,$$

autrement dit

$$(\rho'_1(y),\ldots,\rho'_n(y),y) \in E_{n;\delta;\varphi} .$$

Si pour tout j , $1 \leq j \leq n$, on désigne par ρ_j la fonction

$$\rho_j : Y \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$$

définie par

$$\rho_j = \prod_{i=1}^{n} \rho_i^{a_{ij}} ,$$

la fonction ρ_j est continue, modérée le long de Z , $1/\rho_j$ est également modérée le long de Z (App.I, 1.2.2,(vii) et (1.3.2)) et pour tout y , $y \in Y$, on a

$$r_A(\rho'_1(y),\ldots,\rho'_n(y)) = (\rho_1(y),\ldots,\rho_n(y))$$

(cf. (I, 4.7)), d'où

$$(\rho_1(y),\ldots,\rho_n(y)) \in r_A(E_{n;\delta;\varphi(y)}) ,$$

autrement dit

$$(\rho_1(y),\ldots,\rho_n(y),y) \in (r_A \times \mathrm{id}_Y)(E_{n;\delta;\varphi}) ,$$

ce qui démontre le lemme.

Remarque 3.1.1.- En gardant les notations du lemme 3.1, il en résulte immédiatement que si X est un sous-espace analytique localement fermé de $\mathbb{C}^n$ et si une propriété d'un polycylindre compact pointé est satisfaite pour tout polycylindre compact de $\mathbb{C}^n$ pointé dans Y , suffisamment effilé pour $\leq_\alpha$, modérément le long de Z (cf. (III,6.2.1)), alors il existe une famille $(\rho_j)_{1\leq j\leq n}$ de fonctions continues

$$\rho_j : Y \longrightarrow \mathbb{R}^*_+ ,$$

telle que pour tout j , $1 \leqq j \leqq n$, ρ_j et $1/\rho_j$ soient modérées le long de Z et telle que pour tout point y de Y le polycylindre compact pointé $(K(y),y)$, où $K(y)$ désigne le polydisque fermé de $\mathbb{C}^n$ de centre y et de polyrayon $(\rho_1(y),\ldots,\rho_n(y))$, satisfasse à la propriété.

(3.2) Soient p et n des entiers, $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\leqq_\alpha$ une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^{p+n}$, compatible avec sa structure de monoïde, $\leqq_{\alpha'}$ la relation d'ordre induite par $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$, X un sous-espace analytique localement fermé de $\mathbb{C}^p$, Z un fermé analytique de X d'intérieur vide (dans X), Y l'ouvert dense de X défini par $Y = X - Z$, X' le sous-espace analytique localement fermé de $\mathbb{C}^{p+n}$ défini par

$$X' = X \times \{0\} \quad ,$$

Z' le fermé analytique d'intérieur vide de X' défini par

$$Z' = Z \times \{0\}$$

et Y' l'ouvert dense de X' défini par

$$Y' = Y \times \{0\} = X' - Z' \quad .$$

LEMME 3.2.1.- *Si une propriété d'un polycylindre compact pointé est satisfaite pour tout polycylindre compact de* $\mathbb{C}^{p+n}$ *pointé dans* Y' , *suffisamment effilé pour* $\leqq_\alpha$, *modérément le long de* Z' (cf. (III,6.2.1)), *alors pour tout polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *pointé dans* Y , (K,y) , *suffisamment effilé pour* $\leqq_{\alpha'}$, *modérément le long de* Z , *il existe* ρ , $\rho \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, *tel que le polycylindre compact pointé* $(K \times K';(y,0))$, *où* K' *désigne le polydisque fermé de* $\mathbb{C}^n$ *de centre* 0 *et de polyrayon* ρ , *satisfasse à cette propriété.*

Démonstration. Soit $\leqq_{\alpha,\mathbb{Q}}$ (resp. $\leqq_{\alpha';\mathbb{Q}}$) l'unique prolongement de $\leqq_\alpha$ (resp. de $\leqq_{\alpha'}$) en une relation d'ordre total sur $\mathbb{Q}^{p+n}$ (resp. sur $\mathbb{Q}^p$) , compatible avec sa structure d'espace vectoriel (cf. (I,2.1)) et posons

$$B = \{a \in \mathbb{Q}^{p+n} : a >_{\alpha;\mathbb{Q}} 0\}$$

et

$$B' = \{a' \in \mathbb{Q}^p : a' >_{\alpha';\mathbb{Q}} 0\} \quad .$$

Il existe un entier m , $m \in \mathbb{N}$, une famille $(a_i)_{1 \leqq i \leqq m}$ d'éléments de B et une famille $(\varphi_i)_{1 \leqq i \leqq m}$ de fonctions continues

$$\varphi_i : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

modérées le long de Z , telles que pour tout point y de Y et tout polycylindre compact K (resp. K') de $\mathbb{C}^p$ (resp. de $\mathbb{C}^n$) , tel que $y \in \mathring{K}$ (resp. tel que $0 \in \mathring{K}'$) , la condition

$$\rho''(K\times K';(y,0)) \in \bigcap_{1\leq i\leq m} V_{a_i;1/\varphi_i(y)}$$

implique que le polycylindre compact pointé $(K\times K',(y,0))$ satisfait à la propriété (cf. (III,6.2.1) et (I,5.2.6)). En vertu de (I,5.3.1), il existe une famille finie $(a'_{i'})_{1\leq i'\leq m'}$ d'éléments de B' telle que si l'on désigne par φ la fonction

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

définie par

$$\varphi(y) = \sup_{1\leq i\leq m} \varphi_i(y) \ , \text{ pour } y\in Y \ ,$$

on ait

$$\bigcap_{1\leq i'\leq m'} V_{a'_{i'};1/\varphi(y)} \subset r\Big(\bigcap_{1\leq i\leq m} V_{a_i;1/\varphi_i(y)}\Big) \ ,$$

où r désigne la première projection

$$r : (\mathbb{R}_+^*)^{p+n} \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^p \quad .$$

La fonction φ est une fonction continue, modérée le long de Z (App. I, 1.3.3) et pour tout point y de Y et tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$, tel que $y\in \mathring{K}$, la condition

$$\rho''(K;y) \in \bigcap_{1\leq i'\leq m'} V_{a'_{i'};1/\varphi(y)}$$

implique qu'il existe ρ, $\rho\in(\mathbb{R}_+^*)^n$, tel que

$$(\rho''(K;y),\rho) \in \bigcap_{1\leq i\leq m} V_{a_i;1/\varphi_i(y)} \ ,$$

ce qui implique que si l'on désigne par K' le polydisque fermé de $\mathbb{C}^n$ de centre 0 et de polyrayon ρ on a

$$\rho''(K\times K';(y,0)) \in \bigcap_{1\leq i\leq m} V_{a_i;1/\varphi_i(y)} \ ,$$

et démontre le lemme (cf. (III,6.2.1) et (I,5.2.6)).

LEMME 3.2.2.- *Si l'on suppose que la relation d'ordre $\leq_\alpha$ privilégie le sous-monoïde $\mathbb{N}^p$ de $\mathbb{N}^{p+n}$, alors si une propriété d'un polycylindre compact pointé est satisfaite pour tout polycylindre compact de $\mathbb{C}^{p+n}$ pointé dans Y', suffisamment effilé pour $\leq_\alpha$, modérément le long de Z', il existe une famille $(\rho_j)_{1\leq j\leq n}$ de fonctions continues*

$$\rho_j : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ ,$$

telle que pour tout j, $1\leq j\leq n$, ρ_j et $1/\rho_j$ soient modérées le long de Z et telle que pour tout polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ pointé dans Y, (K,y), suffisamment effilé pour $\leq_{\alpha'}$, modérément le long de Z, le polycylindre compact pointé $(K\times K'(y),(y,0))$, où $K'(y)$ désigne le polydisque fermé de $\mathbb{C}^n$

de centre 0 *et de polyrayon* $(\rho_1(y),\ldots,\rho_n(y))$ *, satisfasse à cette propriété.*

Démonstration. Il existe un entier m , $m\in\mathbb{N}$, des familles $(d_i)_{1\leq i\leq m}$ et $(\delta_i)_{1\leq i\leq m}$ d'éléments de $\mathbb{N}^{p+n}$ telles que pour tout i , $1\leq i\leq m$, $d_i <_\alpha \delta_i$ et une famille $(\varphi_i)_{1\leq i\leq m}$ de fonctions continues

$$\varphi_i : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

modérées le long de Z , telles que pour tout point de Y et tout polycylindre compact K (resp. K') de $\mathbb{C}^p$ (resp. de $\mathbb{C}^n$) tel que $y\in\mathring{K}$ (resp. tel que $0\in\mathring{K}'$) , la condition

$$\rho''(K\times K';(y,0)) \in \bigcap_{1\leq i\leq m} V_{\delta_i - d_i;1/\varphi_i(y)}$$

implique que le polycylindre compact pointé $(K\times K',(y,0))$ satisfait à la propriété (cf. (III,6.2.1)). Posons

$$d_i = (d_i',d_i'') \ , \ d_i'\in\mathbb{N}^p \ , \ d_i''\in\mathbb{N}^n \ , \ 1\leq i\leq m \ ,$$

et

$$\delta_i = (\delta_i',\delta_i'') \ , \ \delta_i'\in\mathbb{N}^p \ , \ \delta_i''\in\mathbb{N}^m \ , \ 1\leq i\leq m \ .$$

La relation d'ordre $\leq_\alpha$ privilégiant le sous-monoïde $\mathbb{N}^p$ de $\mathbb{N}^{p+n}$, si l'on désigne par $\leq_{\alpha''}$ la relation d'ordre sur $\mathbb{N}^n$ induite par $\leq_\alpha$, pour tout i , $1\leq i\leq m$, on a

$$(d_i' <_{\alpha'} \delta_i') \text{ ou } [(d_i'=\delta_i') \text{ et } (d_i'' <_{\alpha''} \delta_i'')] \ .$$

Quitte à changer, le cas échéant, l'ordre des indices, on peut donc supposer qu'il existe m' , $1\leq m'\leq m$ tel que

$$d_i' <_{\alpha'} \delta_i' \ , \ 1\leq i\leq m' \ , \tag{3.2.2.1}$$

et

$$d_i' = \delta_i' \text{ et } d_i'' <_{\alpha''} \delta_i'' \ , \ m' < i\leq m \ . \tag{3.2.2.2}$$

En vertu du lemme 3.1, il existe une famille $(\rho_j)_{1\leq j\leq n}$ de fonctions continues

$$\rho_j : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ ,$$

telle que pour tout j , $1\leq j\leq n$, ρ_j et $1/\rho_j$ soient modérées le long de Z , et telle que pour tout point y de Y on ait

$$(\rho_1(y),\ldots,\rho_n(y)) \in \bigcap_{m'<i\leq m} V_{\delta_i''-d_i'';1/\varphi_i(y)} \ . \tag{3.2.2.3}$$

Pour tout i , $1\leq i\leq m'$, on désigne par φ_i' la fonction

$$\varphi_i' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

définie par

$$\varphi_i' = \varphi_i \, \rho^{\delta_i''-d_i''} ,$$

où ρ désigne la fonction

$$\rho : Y \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^n$$

définie par

$$\rho = (\rho_1,\ldots,\rho_n) .$$

La fonction φ_i' est continue, modérée le long de Z (App. I, 1.3.2), et pour tout point y de Y et tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$, tel que $y \in \mathring{K}$, la condition

$$\rho''(K;y) \in \bigcap_{1 \leq i \leq m'} V_{\delta_i'-d_i';1/\varphi_i'(y)}$$

implique que si l'on désigne par $K'(y)$ le polydisque fermé de $\mathbb{C}^n$ de centre 0 et de polyrayon $\rho(y)$, on a

$$\rho''(K \times K'(y);(y,0)) \in \bigcap_{1 \leq i \leq m'} V_{\delta_i-d_i;1/\varphi_i(y)} .$$

Or, en vertu de (3.2.2.2) et de (3.2.2.3), on a

$$\rho''(K \times K'(y);(y,0)) \in \bigcap_{m' < i \leq m} V_{\delta_i-d_i;1/\varphi_i(y)} ,$$

ce qui démontre le lemme (cf. (III,6.2.1)).

THÉORÈME 3.3.- *Soient* p, m, n *des entiers,* $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\leq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^{p+n}$, *compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit* $\leq$ *sur* $\mathbb{N}^{p+n}$, $\leq_{\alpha'}$ *la relation d'ordre induite par* $\leq_\alpha$ *sur* $\mathbb{N}^p$, $d = (d_1,\ldots,d_m)$ *un élément de* $(\mathbb{N}^{p+n})^m$ *tel que si* $e_1,\ldots,e_n$ *désigne la "base" canonique de* $\mathbb{N}^n$, *pour tout* i, $1 \leq i \leq m$, *on ait*

$$d_i = (d_i', e_{j_i}) ,$$

où $d_i' \in \mathbb{N}^p$ *et* $1 \leq j_i \leq n$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, X *un sous-espace analytique fermé de* U, Z *un fermé analytique de* X *d'intérieur vide (dans* X*),* Y *l'ouvert dense de* X *défini par* $Y = X - Z$,

$$\varphi : Y \longrightarrow [1,+\infty[$$

une fonction continue, modérée le long de Z, $(f_1,\ldots,f_m)$ *un élément de* $(\Gamma(U,\mathcal{O}^n_{\mathbb{C}^p}))^m$ *et*

$$f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U^n$$

le morphisme défini par cet élément. On suppose que pour tout i, $1 \leq i \leq m$, *et tout* y, $y \in Y$, *le germe* $f_{i,y}$ *de* f_i *en* y *est non nul et que*

$$v_{\alpha;y}(f_i) = d_i \quad .$$

I) *Pour tout polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *pointé dans* Y , $(K;y)$, *suffisamment effilé pour* $\leqq_{\alpha'}$, *modérément le long de* Z , *la condition*

$$e(K;y) \leqq \varphi(y)$$

implique que

i) $K \subset U$;

ii) *pour tout élément* g *de* $B(K)^n$ *il existe un couple unique* (g_o, g_1) *tel que*

$$g_o \in \prod_{j=1}^{n} B_{\bar{\Delta}_{oj}(d)}(K) \quad , \quad g_1 \in \prod_{i=1}^{m} B_{-d_i^! + \bar{\Delta}_i(d)}(K)$$

(cf. (2.0)) *et*

$$g = B(K;f)(g_1) + g_o$$

et si l'on désigne par $\sigma_{f;d;K}$ (resp. *par* $r_{f;d;K}$) *l'application*

$$\sigma_{f;d;K} : B(K)^n \longrightarrow B(K)^m$$

$$(\text{resp. } r_{f;d;K} : B(K)^n \longrightarrow B(K)^n \ )$$

définie par

$$\sigma_{f;d;K}(g) = g_1$$

$$(\text{resp. } r_{f;d;K}(g) = g_o \ ) ,$$

on a

a) $\sigma_{f;d;K}$ *et* $r_{f;d;K}$ *sont des applications* $\mathbb{C}$*-linéaires continues ;*

b) $\operatorname{Im}(\sigma_{f;d;K}) = \prod_{i=1}^{m} B_{-d_i^! + \bar{\Delta}_i(d)}(K)$;

c) $\operatorname{Ker}(\sigma_{f;d;K}) = \operatorname{Im}(r_{f;d;K}) = \prod_{j=1}^{n} B_{\bar{\Delta}_{oj}(d)}(K)$;

d) $B(K;f)$ *est une scission de* $\sigma_{f;d;K}$;

e) *si l'on désigne par* M *le sous-*$\mathcal{O}_U$*-module cohérent de* $\mathcal{O}_U^n$ *engendré par* $f_1, \ldots, f_m$ *les conditions suivantes sont équivalentes*

α) $M_{\alpha;M;y} \subset \{d_1, \ldots, d_m\}$;

β) $\sigma_{f;d;K}$ *est une scission de* $B(K;f)$;

iii) *si* M' *désigne un sous-*$\mathcal{O}_U$*-module cohérent de* $\mathcal{O}_U^n$ *tel que pour tout* i ,

$1 \leq i \leq m$, $f_i \in \Gamma(U,\mathcal{M}')$, *la condition*

$$M_{\alpha;\mathcal{M}';y} \subset \{d_1,\ldots,d_m\}$$

implique que

$$\mathcal{M}'_K = \mathrm{Im}(B(K;f))^{(1)}$$

II) *Si l'on suppose en plus que la relation d'ordre* $\leq_\alpha$ *privilégie le sous-monoïde* $\mathbb{N}^p$ *de* $\mathbb{N}^{p+n}$ *il existe des fonctions continues*

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ et } \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad ,$$

modérées le long de Z , *telles que pour tout polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *pointé dans* Y , $(K;y)$, *suffisamment effilé pour* $\leq_{\alpha'}$, *modérément le long de* Z , *la condition*

$$e(K;y) \leq \varphi(y)$$

implique les assertions (i), (ii) *et* (iii) *de la partie* (I) *du théorème, où l'on remplace l'assertion* (ii), (a) *par l'assertion plus précise*

a') $\sigma_{f;d;K}$ *et* $r_{f;d;K}$ *sont des applications* $\mathbb{C}$*-linéaires continues et on a*

$$\|\sigma_{f;d;K}\|_K \leq \psi_1(y)/\rho''^{d_o}(K;y) \quad ,$$

où $d_o = \sup_{1\leq i\leq m} d'_i$ *(la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit* $\leq$ *sur* $\mathbb{N}^p$ *)* , *et*

$$\|r_{f;d;K}\|_K \leq \psi_2(y) \quad .$$

<u>Démonstration</u>. Soient U' l'ouvert de $\mathbb{C}^{p+n}$ défini par $U' = U\times\mathbb{C}^n$, X' le sous-espace analytique fermé de U' défini par $X' = X\times\{0\}$, Z' le fermé analytique d'intérieur vide de X' défini par $Z' = Z\times\{0\}$, Y' l'ouvert dense de X' défini par $Y' = X' - Z' = Y\times\{0\}$ et φ' la fonction

$$\varphi' : Y' \longrightarrow [1, +\infty[$$

définie par

$$\varphi'(y,0) = \varphi(y) \text{ , pour } y \in Y \quad .$$

La fonction φ' est continue, modérée le long de Z' (car φ l'est) . Considérons l'élément $\tilde{f} = (\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_m)$ de $(\Gamma(U',\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{p+n}}))^m$ défini dans (1.3.1). On remarque que pour tout i , $1 \leq i \leq m$, et pour tout y , $y \in Y$, on a

(1) Pour la définition de $\mathcal{M}'_K$ se reporter au chapitre 0.

$$v_{\alpha;(y,0)}(\tilde{f}_i) = v_{\alpha;y}(f_i) = d_i$$

(cf. (1.4.1.4) et (1.3.1)). En appliquant le lemme (III, 6.4.1) à $\tilde{f}$ et en raisonnant comme dans la démonstration du théorème (III, 6.4.2), on en déduit l'existence de fonctions continues

$$\psi'_1 : Y' \longrightarrow \mathbb{R}^*_+ \quad \text{et} \quad \psi'_2 : Y' \longrightarrow \mathbb{R}^*_+ \quad ,$$

modérées le long de Z', telles que pour tout polycylindre compact de $\mathbb{C}^{p+n}$ pointé dans Y', (K'',y'), suffisamment effilé pour $\leqq_\alpha$, modérément le long de Z', la propriété (P) ci-dessous soit satisfaite :

(P) *La condition*

A) $e(K'';y') \leqq \varphi'(y')$

implique que :

B_1) $K'' \subset U'$

B_2) *pour tout* g', $g' \in B_{\mathcal{D}'}(K'')$, *il existe un couple unique* (g'_0, g'_1) *tel que*

$$g'_0 \in B_{\mathcal{D}' \cap \Delta_0(d)}(K''), \quad g'_1 \in \prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_0 \cap (-d_i + \Delta_i(d))}(K'')^{(1)}$$

et

$$g' = B(K'';\tilde{f})(g'_1) + g'_0 \quad ,$$

et si l'on désigne par $\sigma_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};d;K'';y'}$ (resp. *par* $r_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};d;K'';y'}$) *l'application*

$$\sigma_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};d;K'';y'} : B_{\mathcal{D}'}(K'') \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} B_{\mathcal{D}_0}(K'')$$

$$(\text{resp. } r_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};d;K'';y''} : B_{\mathcal{D}'}(K'') \longrightarrow B_{\mathcal{D}'}(K''))$$

définie par

$$\sigma_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};d;K'';y'}(g') = g'_0$$

$$(\text{resp. } r_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};d;K'';y'}(g') = g'_0) \quad ,$$

alors $\sigma_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};d;K'';y'}$ (resp. $r_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};d;K'';y'}$) *est une application* $\mathbb{C}$*-linéaire continue* ,

---

(1) Pour la définition de $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}^m$ se reporter à (1.0).

$$\|\sigma_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};d;K'';y'}\|_{K''} \leqq \psi_1'(y')/\rho''^{\delta_o}(K'';y') \quad ,$$

où $\delta_o = \sup\limits_{1\leqq i\leqq m} d_i$ (la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^{p+n}$) , *et*

$$\|r_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};d;K'';y'}\|_{K''} \leqq \psi_2'(y') \quad .$$

En vertu de (III,3.2.1), la condition (B_2) de la propriété (P) implique en particulier que pour tout a , $a\in(\mathbb{C}^*)^m$, $\nu_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};a;d;K'';y'}$ est inversible.

Pour démontrer la partie (I) du théorème, on remarque qu'en vertu du lemme 3.2.1, pour tout polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ pointé dans Y , (K,y) , suffisamment effilé pour $\leqq_{\alpha'}$, modérément le long de Z , il existe ρ , $\rho\in(\mathbb{R}_+^*)^n$, tel que le polycylindre compact pointé $(K\times K';(y,0))$, où K' désigne le polydisque fermé de $\mathbb{C}^n$ de centre 0 et de polyrayon ρ , satisfasse à la propriété (P). Comme

$$e(K\times K';(y,0)) = e(K;y) \quad ,$$

si $e(K;y)\leqq\varphi(y)$, alors $(K\times K';(y,0)$ satisfait à la condition (A) de la propriété (P) , donc également aux conditions (B_1) et (B_2) , et en particulier $\nu_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};a;d;K\times K';(y,0)}$ est inversible (pour tout a , $a\in(\mathbb{C}^*)^m$) , ce qui implique que $\nu_{f;a;d;K;y}$ est inversible et la partie (I) du théorème résulte de (2.1.4), (2.1.4.1), (2.1.4.2), (2.2.1) et (2.2.2).

Pour démontrer la partie (II) du théorème, on remarque d'abord que si l'on suppose que la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ privilégie le sous-monoïde $\mathbb{N}^p$ de $\mathbb{N}^{p+n}$, en vertu du lemme 3.2.2, il existe une famille $(\rho_j)_{1\leqq j\leqq n}$ de fonctions continues

$$\rho_j : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

telle que pour tout j , $1\leqq j\leqq n$, ρ_j et $1/\rho_j$ soient modérées le long de Z et telle que pour tout polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ pointé dans Y , (K,y) , suffisamment effilé pour $\leqq_{\alpha'}$, modérément le long de Z , le polycylindre compact pointé $(K\times K'(y),(y,0))$, où $K'(y)$ désigne le polydisque fermé de $\mathbb{C}^n$ de centre 0 et de polyrayon $(\rho_1(y),\ldots,\rho_n(y))$, satisfasse à la propriété (P). Comme

$$e(K\times K'(y);(y,0)) = e(K;y) \quad ,$$

si $e(K;y)\leqq\varphi(y)$, alors $(K\times K'(y),(y,0))$ satisfait à la condition (A) de la propriété (P), donc également aux conditions (B_1) et (B_2) . Ensuite, on remarque qu'en vertu des définitions de d_o et δ_o , on a

$$\delta_o = (d_o, \delta'_o)$$

où

$$\delta'_o = \sum_{j \in J} e_j$$

et

$$J = \{j : 1 \leq j \leq n \ : \ \exists i,\ 1 \leq i \leq m \ ,\ j = j_i\} \ .$$

Soit ψ_1 (resp. ψ_2) la fonction

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}^*_+ \quad (\text{resp. } \ \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}^*_+ \ )$$

définie par

$$\psi_1(y) = \psi'_1(y,0)\Big(\sum_{j=1}^{n} \rho_j(y)\Big)/\prod_{j \in J} \rho_j(y) \ , \text{ pour } \ y \in Y \ ,$$

$$(\text{resp. } \ \psi_2(y) = \psi'_2(y,0) \ 2^{2n-1}\Big(\sum_{j=1}^{n} \rho_j(y)\Big) \sup_{1 \leq j \leq n} (1/\rho_j(y)) \ , \text{ pour } \ y \in Y \ , \ ).$$

Les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont continues, modérées le long de Z (App.I,(1.3.2) et (1.3.3)). Enfin, il résulte de (2.1.4.1) et de (1.1.1) que

$$\|\sigma_{f;d;K}\|_K \leq \|\sigma_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};d;K\times K'(y);(y,0)}\|_{K\times K'(y)} \, \|\mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}\|_{K\times K'(y)} \leq$$

$$\leq [\psi'_1(y,0)/\rho''^{\delta_o}(K \times K'(y);(y,0))] \sum_{j=1}^{n} \rho''_j(K'(y);0) \ .$$

De même, il résulte de (2.1.4.2) et de (1.1.1) que

$$\|r_{f;d;K}\|_K \leq \|\tau_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}\|_{K\times K'(y)} \|r_{\mathcal{D}^m;\tilde{f};d;K\times K'(y);(y,0)}\|_{K\times K'(y)} \, \|\mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}\|_{K\times K'(y)} \leq$$

$$\leq 2^{2n-1} \cdot \sup_{1 \leq j \leq n} (1/\rho''_j(K'(y);0)) \ \psi'_2(y,0) \sum_{j=1}^{n} \rho''_j(K'(y);0) \ .$$

En observant que

$$\rho''^{\delta_o}(K \times K'(y);(y,0)) = \rho''^{d_o}(K;y) \prod_{j \in J} \rho_j(y)$$

et que

$$\rho''_j(K'(y);0) = \rho_j(y)$$

on en déduit l'assertion (a'), ce qui démontre le théorème.

Remarque 3.3.1.- Dans la plupart des applications, la fonction φ est supposée constante. En appliquant le théorème à $\varphi = 1$, on obtient un cas particulier concernant les polydisques. De même, en vertu de (III, 6.2.3), on peut formuler une version "paramétrique" de la condition "suffisamment effilé" et obtenir un énoncé plus explicite. En particulier, si $\leqq_{\alpha}$, n'est autre que la relation d'ordre anti-lexicographique sur $\mathbb{N}^p$, on obtient un énoncé analogue à la proposition (III, 6.4.6).

§4.- Théorème de privilège numérique uniforme (cas général).

Dans ce paragraphe, on démontre le théorème de "privilège numérique uniforme", résultat principal de ce travail. On en expose plusieurs variantes, et on énonce explicitement les cas particuliers les plus importants, la version la plus générale étant le théorème 4.4.1, et la plus concrète le corollaire 4.4.7. Par ailleurs, on démontre un théorème de "division numérique uniforme" par un sous-module (théorème 4.3.2).

(4.1). Soient p et n deux entiers, $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\leq_\alpha$ une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^{p+n}$, compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit $\leq$ sur $\mathbb{N}^{p+n}$, U un ouvert de $\mathbb{C}^p$, M un sous-$\mathcal{O}_U$-module cohérent de $\mathcal{O}_U^n$, X un fermé analytique irréductible de U et X' le fermé analytique de $U \times \mathbb{C}^n$ défini par

$$X' = X \times \{0\} \quad .$$

On désigne par $S_{\alpha;M;X}$ la partie de X définie par

$$S_{\alpha;M;X} = \pi(S_{\alpha;J(M);X'})$$

(cf. (II,3.1) et (1.3.4)), où π désigne la première projection

$$\pi : U \times \mathbb{C}^n \longrightarrow U \quad .$$

Remarque 4.1.1.- On démontre que dans le cas où $n = 1$ (donc où M est un idéal cohérent de $\mathcal{O}_U$) la définition ci-dessus coïncide avec celle de (II,3.1).

PROPOSITION 4.1.2.- *En gardant les notations de* (4.1), *l'ensemble* $S_{\alpha;M;X}$ *est un fermé analytique d'intérieur vide de* X *et si* y *et* y' *désignent deux points de* $X - S_{\alpha;M;X}$, *on a*

$$M_{\alpha;M;y} = M_{\alpha;M;y'} \quad \textit{et} \quad P_{\alpha;M;y} = P_{\alpha;M;y'} \quad .$$

Démonstration. La proposition est une conséquence directe de (II,3.2), (II,3.3) et (1.4.5).

(4.1.3) En gardant les notations de (4.1), on désigne par $M_{\alpha;M;X_{gen}}$ (resp. par $P_{\alpha;M;X_{gen}}$) la partie de $\mathbb{N}^{p+n}$ définie par

$$M_{\alpha;M;X_{gen}} = M_{\alpha;M;y}$$

$$(\text{resp. } P_{\alpha;M;X_{gen}} = P_{\alpha;M;y})$$

où y désigne un point quelconque de $Y - S_{\alpha;M;X}$ (cf. (4.1.2)).

THÉORÈME 4.1.4.- *Soient* p *et* n *des entiers,* $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^{p+n}$ *, compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^{p+n}$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$ *et* M *un* $\mathcal{O}_U$*-module cohérent. Alors il existe une stratification* $\mathbb{C}$*-analytique* $(Y_i)_{i \in I}$ *de* U *telle que pour tout* i , $i \in I$, *et tout* y *et* y' , $y \in Y_i$, $y' \in Y_i$, *on ait*

$$M_{\alpha;M;y} = M_{\alpha;M;y'} \quad et \quad P_{\alpha;M;y} = P_{\alpha;M;y'} \ .$$

Démonstration. Le théorème est une conséquence directe de (II,3.4.1) et de (4.1.2).

(4.2) Soient p , n des entiers, $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\leqq_\alpha$ une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^{p+n}$, compatible avec sa structure de monoïde, moins fine que la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^{p+n}$, U un ouvert de $\mathbb{C}^p$, X un sous-espace analytique fermé irréductible de U , Z un fermé analytique de X distinct de X , U' l'ouvert de $\mathbb{C}^{p+n}$ défini par $U' = U \times \mathbb{C}^n$, X' le sous-espace fermé de U' défini par $X' = X \times \{0\}$ et Z' le fermé analytique de X' défini par $Z' = Z \times \{0\}$.

LEMME 4.2.1.- *Soient* m *un entier,* $m \in \mathbb{N}$,

$$f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U^n$$

un morphisme de $\mathcal{O}_U$*-modules et* M *le sous-*$\mathcal{O}_U$*-module cohérent de* $\mathcal{O}_U^n$ *, image de* f *. Si l'on suppose que*

$$S_{\alpha;M;X} \subset Z$$

alors il existe un recouvrement de U' *formé par des ouverts de* $\mathbb{C}^{p+n}$ *contenus dans* U' *distingués pour* $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X';Z';\tilde{f})$ [1] .

Démonstration. En vertu de (III,7.1.1.3), il suffit de démontrer que pour tout point x de U il existe un voisinage ouvert de $(x,0)$ dans U' distingué pour $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X';Z';\tilde{f})$. Soient K un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U tel que $x \in \mathring{K}$ et K' un polycylindre de $\mathbb{C}^n$ tel que $0 \in \mathring{K}'$. Nous allons démontrer que l'ouvert V' de U' défini par

$$V' = \overset{\circ}{\widehat{K \times K'}}$$

est un ouvert distingué pour $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X';Z';\tilde{f})$. En vertu de (4.1), l'hypothèse

$$S_{\alpha;M;X} \subset Z$$

implique que

$$S_{\alpha;\mathcal{J}(M);X'} \subset Z' \ ,$$

(1) Pour la définition de $\mathcal{D}'$ se reporter à (1.0), pour celle de $\tilde{f}$ à (1.3.1) et pour celle des ouverts distingués à (III,7.1.1.1).

et comme $\mathcal{J}(M)$ est l'idéal de $\mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}^n}$ engendré par $\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_m$ (où $\tilde{f}=(\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_n)$) (cf. (1.3.4.1)), il résulte de (7.2.2) qu'il existe un ouvert V de $\mathbb{C}^{p+n}$, contenu dans U', contenant $K\times K'$ et distingué pour $(\leqq_\alpha ; \mathbb{N}^{p+n} ; X';Z';\tilde{f})$, autrement dit il existe des constantes G, H, $G\in\mathbb{R}_+^*$, $H\in\mathbb{R}_+^*$, une fonction continue

$$\varphi : Y'\cap V \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

(où $Y'=X'-Z'$), modérée le long de $Z'\cap V$, un entier r, $r\in\mathbb{N}$, une famille $(d_j)_{1\leqq j\leqq r}$ d'éléments de $\mathbb{N}^{p+n}$ et des familles

$$(g_{jy})_{1\leqq j\leqq r,y\in Y'\cap V} \quad \text{et} \quad (h_{jiy})_{1\leqq j\leqq r,1\leqq i\leqq m,y\in Y'\cap V}$$

d'éléments de $\Gamma(V,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{p+n}})$, telles que :

α) pour tout y, $y\in Y'\cap V$,

$$M_{\alpha;\mathcal{J}(M);y} = \{d_1,\dots,d_r\} \quad ;$$

β) pour tout y, $y\in Y'\cap V$, et tout j, $1\leqq j\leqq r$,

$$g_{jy} = \sum_{i=1}^{m} h_{jiy}\,\tilde{f}_i \quad ;$$

γ) pour tout y, $y\in Y'\cap V$, tout x', $x'\in V$, et tout i et j, $1\leqq i\leqq m$, $1\leqq j\leqq r$,

$$|g_{jy}(x')|\leqq G \quad \text{et} \quad |h_{jiy}(x')|\leqq H \quad ;$$

δ) pour tout y, $y\in Y'\cap V$, et tout j, $1\leqq j\leqq r$,

$$v_{\alpha;y}(g_{jy}) = d_j \quad \text{et} \quad 1\Big/\left|\frac{\partial^{|d_j|}g_{jy}}{X^{d_j}}(y)\right| \leqq \varphi(y) \quad ,$$

où $X=(X_1,\dots,X_p,X_{p+1},\dots,X_{p+n})$ désigne les coordonnées de $\mathbb{C}^{p+n}$.

Soit

$$r' = \mathrm{Card}(\{d_1,\dots,d_r\}\cap\mathcal{D}') \quad .$$

On a $r'\leqq r$, et quitte à changer l'ordre des indices, on peut supposer, en vertu de (α), que pour tout y, $y\in Y'\cap V$, on a

$$M_{\alpha;\mathcal{J}(M);y}\cap\mathcal{D}' = \{d_1,\dots,d_{r'}\} \quad ,$$

et alors il résulte de (1.4.4), (1.4.5) et (II,3.7) que

(4.2.1.1) $$M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J}(M);y} = \{d_1,\dots,d_{r'}\} \quad .$$

On pose

$$G' = n\ 2^{2n-1} e(K';0)^n\, G$$

et

$$\varphi' = \varphi | Y' \cap V' \quad .$$

La fonction φ' est continue, modérée le long de $Z' \cap V'$ (App.I,1.2.2,(ii)). Pour tout y , $y \in Y' \cap V'$ et tout i et j , $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq r'$, on pose

$$\gamma_{jy} = \chi_{K;K'}(g_{jy} | K \times K')$$

(cf. (1.2)),

$$\eta_{jiy} = \theta_{K;K'}(h_{jiy} | K \times K')$$

(cf. (1.1.0)),

$$g'_{jy} = \gamma_{jy} | V'$$

et

$$h'_{jiy} = \eta_{jiy} | V' \ .$$

On a $g'_{jy} \in \Gamma(V', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{p+n}})$, $h'_{jiy} \in \Gamma(V', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{p+n}})$ et il résulte de (β) et de (1.2.5) que

$$\chi_{K;K'}(g_{jy}|K\times K') = \sum_{i=1}^{m} [\theta_{K;K'}(h_{jiy}|K\times K')\chi_{K;K'}(\tilde{f}_i|K\times K') + \chi_{K;K'}(h_{jiy}|K\times K')\theta_{K;K'}(\tilde{f}_i|K\times K')].$$

Or, $\tilde{f}_i | K \times K' \in B_{\mathcal{D}'}(K \times K')$ (cf. (1.3.1)), ce qui implique que

$$\chi_{K;K'}(\tilde{f}_i | K \times K') = \tilde{f}_i | K \times K'$$

(1.2.1), et que

$$\theta_{K;K'}(\tilde{f}_i | K \times K') = 0$$

(cf. (1.1.0)) (car $\mathcal{D}' \subset \mathbb{N}^{p+n} - \mathcal{D}_o$) . On en déduit que

$$\gamma_{jy} = \sum_{i=1}^{m} \eta_{jiy} \cdot (\tilde{f}_i | K \times K') \ ,$$

ce qui implique que

(4.2.1.2) $$g'_{jy} = \sum_{i=1}^{m} h'_{jiy} \cdot (\tilde{f}_i | V') \quad .$$

D'autre part, il résulte de (1.2.1) et de (γ) que

$$\|\gamma_{jy}\|_{K\times K'} \leqq n\ 2^{2n-1}\ e(K';0)^n \|g_{jy}\|_{K\times K'} \leqq G' \quad .$$

De même, il résulte de (1.1.0.4) et de (γ) que

$$\|\eta_{jiy}\|_{K\times K'} \leqq \|h_{jiy}\|_{K\times K'} \leqq H \quad .$$

On en déduit que pour tout y , $y \in Y' \cap V'$, tout x' , $x' \in V'$, et tout i et j , $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq r'$,

(4.2.1.3) $$|g'_{jy}(x')| \leqq G' \quad \text{et} \quad |h'_{jiy}(x')| \leqq H \quad .$$

Par ailleurs, en vertu de (1.2.1) et de (1.1.0),

$$\gamma_{jy} \in B_{\mathcal{D}'}(K \times K') \quad \text{et} \quad \eta_{jiy} \in B_{\mathcal{D}_o}(K \times K') \quad .$$

On en déduit que

(4.2.1.4) $$E_y(g'_{jy}) \subset \mathcal{D}' \quad \text{et} \quad E_y(h'_{jiy}) \subset \mathcal{D}_o \quad .$$

Enfin il résulte de (1.2.4) et de (δ) que pour tout y , $y \in Y' \cap V'$, et tout j , $1 \leqq j \leqq r'$,

$$v_{\alpha;y}(\gamma_{jy}) = v_{\alpha;y}(g_{jy}) = d_j$$

(car $d_j \in \mathcal{D}'$) , d'où

(4.2.1.5) $$v_{\alpha;y}(g'_{jy}) = d_j \quad ,$$

et en vertu de (1.2.3), on a

$$\frac{\partial^{|d_j|} g'_{jy}}{\partial X^{d_j}}(y) = \frac{\partial^{|d_j|} \gamma_{jy}}{\partial X^{d_j}}(y) = \frac{\partial^{|d_j|} g_{jy}}{\partial X^{d_j}}(y)$$

(car $d_j \in \mathcal{D}'$) , d'où

(4.2.1.6) $$1 \Big/ \left| \frac{\partial^{|d_j|} g'_{jy}}{\partial X^{d_j}}(y) \right| \leqq \varphi'(y)$$

(par (δ)) . Les conditions (4.2.1.1), (4.2.1.2), (4.2.1.3), (4.2.1.4), (4.2.1.5) et (4.2.1.6) impliquent que V' est distingué pour $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X';Z';\tilde{f})$, ce qui démontre le lemme.

<u>LEMME 4.2.2</u>.- *Soit* M *un sous-*$\mathcal{O}_U$*-module cohérent de* $\mathcal{O}_U^n$. *Si l'on suppose que*

$$S_{\alpha;M;X} \subset Z$$

alors il existe un recouvrement de U' *fermé par des ouverts de* $\mathbb{C}^{p+n}$ *contenus dans* U' *distingués pour* $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X';Z';\mathcal{J}(M))$(1) .

(1) Pour la définition de $\mathcal{D}'$ se reporter à (1.0), pour celle de $\mathcal{J}(M)$ à (1.3.4) et pour celle des ouverts distingués à (III,7.1.1.2).

Démonstration. En vertu de (III,7.1.1.3), il suffit de démontrer que pour tout point x de U il existe un voisinage ouvert de $(x,0)$ dans U' distingué pour $(\leqq_\alpha;\mathcal{D}';X';Z';\mathcal{J}(M))$. Soit V un voisinage ouvert de x dans U tel qu'il existe un entier m, $m\in\mathbb{N}$, et un morphisme de $\mathcal{O}_V$-modules

$$f:\mathcal{O}_V^m\longrightarrow\mathcal{O}_V^n$$

tel que $\operatorname{Im}(f)=M|V$. En vertu de (4.2.1), il existe un voisinage ouvert de $(x,0)$ dans $V\times\mathbb{C}^n$ distingué pour $(\leqq_\alpha;\ \mathcal{D}';X'\cap(V\times\mathbb{C}^n)\ ;Z'\cap(V\times\mathbb{C}^n);\tilde{f})$, ce qui démontre le lemme, en remarquant que $\operatorname{Im}(\tilde{f})=\mathcal{J}(M)|V\times\mathbb{C}^n$ (1.3.4.1).

THÉORÈME 4.3.1.- *Soient* p, m, n *des entiers,* $p\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^{p+n}$, *compatible avec sa structure de monoïde, moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^{p+n}$ *et privilégiant le sous-monoïde* $\mathbb{N}^p$ *de* $\mathbb{N}^{p+n}$, $\leqq_{\alpha'}$ *la relation d'ordre induite par* $\leqq_\alpha$ *sur* $\mathbb{N}^p$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, X *un sous-espace analytique fermé irréductible de* U, Z *un fermé analytique de* X, *distinct de* X, Y *l'ouvert dense de* X *défini par* $Y=X-Z$,

$$f:\mathcal{O}_U^m\longrightarrow\mathcal{O}_U^n$$

un morphisme de $\mathcal{O}_U$*-modules et* M *le sous-*$\mathcal{O}_U$*-module cohérent de* $\mathcal{O}_U^n$, *image de* f. *On suppose que*

$$S_{\alpha;M;X}\subset Z\quad .$$

Alors pour toute fonction continue

$$\varphi:Y\longrightarrow[1,+\infty[\quad ,$$

modérée le long de Z, *il existe des fonctions continues*

$$\psi_1:Y\longrightarrow\mathbb{R}_+^*\quad et\quad \psi_2:Y\longrightarrow\mathbb{R}_+^*\quad ,$$

modérées le long de Z, *telles que pour tout polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *pointé dans* Y, (K,y), *suffisamment effilé pour* $\leqq_{\alpha'}$, *modérément le long de* Z, *satisfaisant à la condition*

$$e(K;y)\leqq\varphi(y)$$

on ait

i) $K\subset U$;

ii) *il existe une scission* $\mathbb{C}$*-linéaire continue, normale* σ_K *de* $B(K;f)$

$$\sigma_K:B(K)^n\longrightarrow B(K)^m$$

telle que :

a) $\|\sigma_K\|_K\leqq\psi_1(y)/\rho''^{\,d_\rho}(K;y)\quad ,$

où

$$d_o = \sup(\pi(M_{\alpha;M;X_{gen}})) \quad ,$$

π *désignant la première projection*

$$\pi : \mathbb{N}^{p+n} \longrightarrow \mathbb{N}^p$$

(*la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit* $\leq$ *sur* $\mathbb{N}^p$) ;

b) $\| id_{B(K)^n} - B(K;f) \circ \sigma_K \|_K \leq \psi_2(y)$.

c) $\mathrm{Ker}(\sigma_K) = \prod_{j=1}^{n} B_{\Delta_j}(K)$,

où pour tout j , $1 \leq j \leq n$,

$$\Delta_j = \{d \in \mathbb{N}^p : (d,e_j) \notin P_{\alpha;M;X_{gen}}\}$$

et $e_1,\ldots,e_n$ *désigne la "base" canonique de* $\mathbb{N}^n$.

<u>Démonstration</u>. Soient U' l'ouvert de $\mathbb{C}^{p+n}$ défini par $U' = U \times \mathbb{C}^n$, X' le sous-espace analytique fermé de U' défini par $X' = X \times \{0\}$, Z' le fermé analytique de X' défini par $Z' = Z \times \{0\}$, Y' l'ouvert dense de X' défini par $Y' = X' - Z' = Y \times \{0\}$ et φ' la fonction

$$\varphi' : Y' \longrightarrow [1, +\infty[$$

définie par

$$\varphi'(y,0) = \varphi(y) \text{ , pour } y \in Y \text{ .}$$

La fonction φ' est continue, modérée le long de Z' (car φ l'est). Considérons l'élément $\tilde{f} = (\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_m)$ défini dans (1.3.1). La famille $\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_m$ engendre l'idéal cohérent $\mathcal{J}(M)$ de $\mathcal{O}_{U'}$ (1.3.4.1) et pour tout y' , $y' \in Y'$, on a

$$P_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J}(M);y'} = P_{\alpha;M;X_{gen}} \quad \text{et} \quad M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J}(M);y'} = M_{\alpha;M;X_{gen}}$$

((1.4.4), (1.4.5), (II,3.7) et (4.1.3)). Soient

$$r = \mathrm{Card}(M_{\alpha;M;X_{gen}})$$

et $d = (d_1,\ldots,d_r)$ un élément de $(\mathbb{N}^{p+n})^r$ tel que

$$M_{\alpha;M;X_{gen}} = \{d_1,\ldots,d_r\} \text{ .}$$

Alors pour tout y' , $y' \in Y'$, on a

$$M_{\alpha;\mathcal{D}';\mathcal{J}(M);y'} = \{d_1,\ldots,d_r\}$$

et on vérifie facilement que

(4.3.1.1) $\mathcal{D}' \cap \Delta_o(d) = \mathcal{D}' - P_{\alpha;M;X_{gen}}$.

On pose

$$\delta_o = \sup_{1\leq i\leq r} d_i = \sup(M_{\alpha;M;X_{gen}})$$

(la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit $\leq$ sur $\mathbb{N}^{p+n}$).

En vertu de (4.2.1), il existe un recouvrement de U' par des ouverts de $\mathbb{C}^{p+n}$ contenus dans U' , distingués pour $(\leq_\alpha;\mathcal{D}';X';Z';\tilde{f})$. En appliquant la proposition (III,7.1.3) à $\tilde{f}$, en tenant compte de la remarque (III,7.1.6) et en raisonnant comme dans la démonstration du théorème (III,7.3.1), on en déduit l'existence de fonctions continues

$$\psi_1' : Y' \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \psi_2 : Y' \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad ,$$

modérées le long de Z' , telles que pour tout polycylindre compact de $\mathbb{C}^{p+n}$ pointé dans Y' , (K'',y') , suffisamment effilé pour $\leq_\alpha$, modérément le long de Z' , la propriété (P) ci-après soit satisfaite :

(P) *La condition*

A) $e(K'';y') \leq \varphi'(y')$

implique que

B_1) $K''\subset U'$;

B_2) *il existe une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue normale* $\sigma'_{K''}$ *de* $B_{\mathcal{D}^m}(K'';\tilde{f})$

$$\sigma'_{K''} : B_{\mathcal{D}'}(K'') \longrightarrow B_{\mathcal{D}_o}(K'')^m$$

telle que

a) $\|\sigma'_{K''}\|_{K''} \leq \psi_1'(y')/\rho''^{\delta_o}(K'';y)$;

b) $\|id_{B_{\mathcal{D}'}(K'')} - B_{\mathcal{D}^m}(K'';\tilde{f}) \circ \sigma'_{K''}\|_{K''} \leq \psi_2'(y')$;

c) $\mathrm{Ker}(\sigma'_{K''}) = B_{\Delta_o}(K'')$,

où $\Delta_o = \mathcal{D}' - P_{\alpha;M;X_{gen}}$ (cf. (4.3.1.1) et (III,7.1.6)).

En vertu du lemme 3.2.2, il existe une famille $(\rho_j)_{1\leq j\leq n}$ de fonctions continues

$$\rho_j : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

telle pour tout j , $1\leq j\leq n$, ρ_j et $1/\rho_j$ soient modérées le long de Z et telle que pour tout polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ pointé dans Y , (K,y) , suffisamment effilé pour $\leq_{\alpha'}$, modérément le long de Z, le polycylindre compact pointé $(K\times K'(y),(y,0))$, où $K'(y)$ désigne le polydisque fermé de $\mathbb{C}^n$ de centre 0 et de polyrayon $(\rho_1(y),\dots,\rho_n(y))$ satisfasse à la propriété (P). Comme

$$e(K\times K'(y);(y,0)) = e(K;y) \ ,$$

si $e(K;y)\leq\varphi(y)$, alors $(K\times K'(y),(y,0))$ satisfait à la condition (A) de la propriété (P), donc également aux conditions (B_1) et (B_2). Or, en vertu des définitions de d_o et δ_o, on a

$$\delta_o = (d_o,\delta'_o) \ ,$$

où

$$\delta'_o = \sum_{j\in J} e_j \ ,$$

$e_1,\dots,e_n$ désigne la "base" canonique de $\mathbb{N}^n$ et J une partie de $[1,n]$. Soit ψ_1 (resp. ψ_2) la fonction

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}^*_+ \quad (\text{resp. } \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}^*_+)$$

définie par

$$\psi_1(y) = \psi'_1(y,0)\,\Big(\sum_{j=1}^{n}\rho_j(y)\Big)\Big/\prod_{j\in J}\rho_j(y) \ , \text{ pour } y\in Y \ ,$$

$$(\text{resp. } \psi_2(y) = \psi'_2(y,0)\,2^{2n-1}\,\Big(\sum_{j=1}^{n}\rho_j(y)\Big)\sup_{1\leq j\leq n}(1/\rho_j(y)) \ , \text{ pour } y\in Y\ ).$$

Les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont continues, modérées le long de Z (App. I, (1.3.2) et (1.3.3)). En vertu de la proposition (1.3.2), il résulte de la condition B_2 (en tenant compte de l'identification de $B_{\mathcal{D}_o}(K\times K'(y))$ à $B(K)$ (cf. 1.1.0)) que si l'on pose

$$\sigma_K = \sigma'_{K\times K'(y)}\circ\mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}$$

alors σ_K est une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue, normale de $B(K;f)$ et

$$\|\sigma_K\|_K \leq \sum_{j=1}^{n}\rho''_j(K'(y);0)\ \|\sigma'_{K\times K'(y)}\|_{K\times K'(y)} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}\rho''_j(K'(y);0)\quad \psi'_1(y,0)/\rho''^{\,\delta_o}(K\times K'(y),(y,0)) \leq \psi_1(y)/\rho''^{\,d_o}(K,y)$$

$$(\text{car } \rho''_j(K'(y);0) = \rho_j(y) \quad \text{et} \quad \rho''^{\,\delta_o}(K\times K'(y),(y,0)) = \rho''^{\,d_o}(K;y)\prod_{j\in J}\rho_j(y)) \ .$$

D'autre part, il résulte de (1.1.1) et de (1.3.1.3) que

$$\mathrm{id}_{B(K)^n} - B(K;f)\sigma_K = \tau_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}\circ[\mathrm{id}_{B_{\mathcal{D}'}(K\times K'(y))} - B_{\mathcal{D}^m}(K\times K'(y);\tilde{f})\,\sigma'_{K\times K'(y)}]\circ\mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}$$

ce qui implique en vertu de (1.1.1) que

$$\|\mathrm{id}_{B(K)^n} - B(K;f)\sigma_K\|_K \leq 2^{2n-1}\cdot \sup_{1\leq j\leq n}(1/\rho''_j(K'(y);0))\psi'_2(y,0)\sum_{j=1}^{n}\rho''_j(K'(y);0) \leq \psi_2(y)$$

(car $\rho''_j(K'(y);0) = \rho_j(y)$) .

Enfin on a

$$\mathrm{Ker}(\sigma_K) = \mu^{-1}_{\mathcal{D};\Pi;e}(\mathrm{Ker}(\sigma'_{K\times K'(y)})) = \tau_{\mathcal{D};\Pi;e}(\mathrm{Ker}(\sigma'_{K\times K'(y)})) = \tau_{\mathcal{D};\Pi;e}(B_{\Delta_0}(K\times K'(y)))$$

(1.1.1) et en vertu de (III,2.8.8), (i), on en déduit que

$$\mathrm{Ker}(\sigma_K) = \prod_{j=1}^{n} B_{\Delta_j}(K) ,$$

ce qui démontre le théorème.

THÉORÈME 4.3.2.- *Soient* p *et* n *des entiers,* $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\leq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^{p+n}$ *, compatible avec sa structure de monoïde, moins fine que la relation d'ordre produit* $\leq$ *sur* $\mathbb{N}^{p+n}$ *et privilégiant le sous-monoïde* $\mathbb{N}^p$ *de* $\mathbb{N}^{p+n}$, $\leq_{\alpha'}$ *la relation d'ordre induite par* $\leq_\alpha$ *sur* $\mathbb{N}^p$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, X *un sous-espace analytique fermé irréductible de* U , Z *un fermé analytique de* X , *distinct de* X , Y *l'ouvert dense de* X *défini par* $Y = X - Z$ *et* M *un sous-*$\mathcal{O}_U$*-module cohérent de* $\mathcal{O}_U^n$ *. On suppose que*

$$S_{\alpha;M;X} \subset Z .$$

Alors pour toute fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow [1,+\infty[,$$

modérée le long de Z , *il existe des fonctions continues*

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}^*_+ \quad et \quad \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}^*_+ ,$$

modérées le long de Z , *telles que pour tout polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *pointé dans* Y , (K,y) , *suffisamment effilé pour* $\leq_{\alpha'}$, *modérément le long de* Z , *satisfaisant à la condition*

$$e(K;y) \leq \varphi(y)$$

on ait :

i) $K \subset U$;

ii) $B(K)^n = M_K \oplus \prod_{j=1}^{n} B_{\Delta_j}(K)$ (1) ,

(1) Pour la définition de M_K se reporter au chapitre 0.

où pour tout j , $1 \leq j \leq n$,

$$\Delta_j = \{d \in \mathbb{N}^p : (d,e_j) \notin P_{\alpha;M;X_{gen}}\}$$

et $e_1,\dots,e_n$ *désigne la "base" canonique de* $\mathbb{N}^n$, *et si l'on désigne par* $\pi_{M;K}$ (resp. par $r_{M;K}$) *le projecteur de* $B(K)^n$

$$\pi_{M;K} : B(K)^n \longrightarrow B(K)^n$$

$$(\text{resp. } r_{M;K} : B(K)^n \longrightarrow B(K)^n \ )$$

sur M_K (resp. *sur* $\prod_{j=1}^{n} B_{\Delta_j}(K)$) *parallèlement à* $\prod_{j=1}^{n} B_{\Delta_j}(K)$ (resp. *à* M_K),

on a

a) $\pi_{M;K}$ *est une application* $\mathbb{C}$*-linéaire continue et*

$$\|\pi_{M;K}\|_K \leq \psi_1(y)/\rho''^{\,d_o}(K;y) \quad ,$$

où $d_o = \sup(\pi(M_{\alpha;M;X_{gen}}))$, π *désignant la première projection*

$$\pi : \mathbb{N}^{p+n} \longrightarrow \mathbb{N}^p$$

(*la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit* $\leq$ *sur* $\mathbb{N}^p$)

b) $r_{M;K}$ *est une application* $\mathbb{C}$*-linéaire continue et*

$$\|r_{M;K}\|_K \leq \psi_2(y) \quad .$$

Démonstration. La démonstration du théorème (4.3.2) est tout à fait analogue à celle du théorème (4.3.1), en utilisant le lemme (4.2.2) à la place du lemme (4.2.1) et la proposition (III,7.1.4) à la place de la proposition (III,7.1.3).

Remarque 4.3.3.- Si l'on ne suppose plus que la relation d'ordre $\leq_\alpha$ privilégie le sous-monoïde $\mathbb{N}^p$ de $\mathbb{N}^{p+n}$, on peut obtenir des versions plus faibles des théorèmes (4.3.1) et (4.3.2) en utilisant le lemme (3.2.1) à la place du lemme (3.2.2) et en raisonnant comme dans la démonstration de la partie (I) du théorème (3.3). Dans le théorème (4.3.1) on aboutit à l'existence de la scission $\mathbb{C}$-linéaire continue normale, σ_K de $B(K;f)$ satisfaisant à l'assertion (ii), (c) mais pas aux majorations (ii), (a) et (ii),(b). De même, dans l'assertion (ii) du théorème (4.3.2), on obtient la décomposition en somme directe de $B(K)^n$, ainsi que la continuité des projecteurs, mais non pas les majorations (ii), (a) et (ii),(b).

COROLLAIRE 4.3.4.- *En gardant les notations du théorème* (4.3.1), *soient* $\leq_\beta$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^{p+m}$, *compatible avec sa structure de monoïde,* *moins fine que la relation d'ordre produit* $\leq$ *sur* $\mathbb{N}^{p+m}$, $\leq_{\beta'}$ *la relation d'ordre induite par* $\leq_\beta$ *sur* $\mathbb{N}^p$, M' *le sous-*O_U*-module cohérent de* O_U^m , *noyau du morphisme* f , *et*

$$\varphi : Y \longrightarrow [1,+\infty[$$

une fonction continue, modérée le long de Z . *On suppose que*

$$S_{\beta;M';X} \subset Z \quad .$$

Alors pour tout polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ *pointé dans* Y , (K,y) , *suffisamment effilé pour* $\leq_{\beta'}$, *modérément le long de* Z , *satisfaisant à la condition*

$$e(K;y) \leq \varphi(y)$$

on a :

i) $K \subset U$;

ii) $M'_K = \mathrm{Ker}(B(K;f))$(1) .

Démonstration. En vertu de la définition de M'_K , l'inclusion

$$M'_K \subset \mathrm{Ker}(B(K;f))$$

est vraie pour tout polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U . D'autre part, il résulte du théorème (4.3.2) appliqué à M' (et en tenant compte de la remarque (4.3.3)) que pour tout polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ pointé dans Y , (K,y) , suffisamment effilé pour $\leq_{\beta'}$, modérément le long de Z , satisfaisant à la condition

$$e(K;y) \leq \varphi(y)$$

on a :

i) $K \subset U$

ii) $B(K)^m = M'_K \oplus \prod_{i=1}^{m} B_{\Delta_i}(K)$,

où pour tout i , $1 \leq i \leq m$,

$$\Delta_i = \{d \in \mathbb{N}^p : (d,e_i) \notin P_{\beta;M';X_{gen}}\}$$

et $e_1,\ldots,e_m$ désigne la "base" canonique de $\mathbb{N}^m$. En particulier, l'ensemble des polycylindres compact K' de $\mathbb{C}^p$ tels que $y \in \mathring{K}'$, $K' \subset K$ et tels que

(1) Pour la définition de M'_K se reporter au chapitre 0.

$$B(K')^m = \mathcal{M}'_{K'} \oplus \prod_{i=1}^{m} B_{\Delta_i}(K')$$

forme un système fondamental de voisinages de y (cf. (III,6.2.5) et (III,5.2.1.2)). Cette décomposition en somme directe commutant avec les morphismes de restriction, on en déduit, par passage à la limite inductive, une décomposition en somme directe

(4.3.4.1) $$\mathcal{O}^m_{U,y} = (\varinjlim \mathcal{M}'_{K'}) \oplus (\varinjlim \prod_{i=1}^{m} B_{\Delta_i}(K')) \ .$$

Or,

(4.3.4.2) $$\varinjlim \mathcal{M}'_{K'} = \mathcal{M}'_y = \mathrm{Ker}(f_y) \quad ,$$

où f_y désigne le germe du morphisme f en y . Soit g un élément de $\mathrm{Ker}(B(K;f))$. Alors il existe g_1 et g_2 tels que

$$g = g_1 + g_2 \ , \quad g_1 \in \mathcal{M}'_K \quad \text{et} \quad g_2 \in \prod_{i=1}^{m} B_{\Delta_i}(K) \ .$$

Si l'on désigne par g_y , g_{1y} et g_{2y} les germes en y de g , g_1 et g_2 respectivement, l'hypothèse $g \in \mathrm{Ker}(B(K;f))$ implique que $g_y \in \mathrm{Ker}(f_y)$, l'hypothèse $g_1 \in \mathcal{M}'_K$ implique, en vertu de (4.3.4.2), que $g_{1y} \in \mathrm{Ker}(f_y)$ et comme $g_y = g_{1y} + g_{2y}$ on en déduit que $g_{2y} \in \mathrm{Ker}(f_y)$. Or, l'hypothèse $g_2 \in \prod_{i=1}^{m} B_{\Delta_i}(K)$ implique que $g_{2y} \in \varinjlim \prod_{i=1}^{m} B_{\Delta_i}(K')$ et il résulte de (4.3.4.1) que $g_{2y} = 0$, d'où $g_2 = 0$ (principe du prolongement analytique). On en déduit que $g \in \mathcal{M}'_K$, ce qui démontre le corollaire.

THÉORÈME 4.3.5.- *Soient* p, m, n *des entiers,* $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\leqq_{\alpha'}$ (resp. $\leqq_{\alpha''}$) *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^{p+n}$ (resp. *sur* $\mathbb{N}^{p+m}$), *compatible avec sa structure de monoïde, moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^{p+n}$ (resp. $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^{p+m}$) *et privilégiant le sous-monoïde* $\mathbb{N}^p$ *de* $\mathbb{N}^{p+n}$ (resp. *de* $\mathbb{N}^{p+m}$) , U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, X *un sous-espace analytique fermé irréductible de* U , Z *un fermé analytique de* X , *distinct de* X , Y *l'ouvert dense de* X *défini par* $Y = X - Z$

$$f : \mathcal{O}^m_U \longrightarrow \mathcal{O}^n_U$$

un morphisme de $\mathcal{O}_U$*-modules,* $\mathcal{M}$ *l'image de* f *et* $\mathcal{M}'$ *son noyau. On suppose que les relations d'ordre* $\leqq_{\alpha'}$ *et* $\leqq_{\alpha''}$ *induisent la même relation d'ordre* $\leqq_\alpha$ *sur* $\mathbb{N}^p$ *et que*

$$S_{\alpha';\mathcal{M};X} \cup S_{\alpha'';\mathcal{M}';X} \subset Z \ .$$

Alors pour toute fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow [1,+\infty[\ ,$$

modérée le long de Z *, il existe des fonctions continues*

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad et \quad \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ ,$$

modérées le long de Z *, telles que pour tout polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *pointé dans* Y *,* (K,y) *, suffisamment effilé pour* $\leqq_\alpha$ *, modérément le long de* Z *, satisfaisant à*

$$e(K;y) \leqq \varphi(y)$$

on ait :

i) $K \subset U$;

ii) *il existe une scission* $\mathbb{C}$*-linéaire continue, normale,* <u>*unique*</u> σ_K *de* $B(K;f)$

$$\sigma_K : B(K)^n \longrightarrow B(K)^m$$

telle que

$$\mathrm{Ker}(\sigma_K) = \prod_{j=1}^{n} B_{\Delta_j}(K) \quad et \quad \mathrm{Im}(\sigma_K) = \prod_{i=1}^{m} B_{\Delta'_i}(K) \ ,$$

où pour tout j , $1 \leqq j \leqq n$,

$$\Delta_j = \{d \in \mathbb{N}^p : (d,e_j) \notin P_{\alpha';M;X_{gen}}\} \ ,$$

pour tout i , $1 \leqq i \leqq m$,

$$\Delta'_i = \{d \in \mathbb{N}^p : (d,e'_i) \notin P_{\alpha'';M';X_{gen}}\} \ ,$$

$e_1,\ldots,e_n$ (resp. $e'_1,\ldots,e'_m$) *désignant la "base" canonique de* $\mathbb{N}^n$ (resp. *de* $\mathbb{N}^m$) *, et on a :*

a) $\|\sigma_K\|_K \leqq \psi_1(y)/\rho''^{\,d_o}(K;y)$,

où

$$d_o = \sup(\pi(M_{\alpha';M;X_{gen}}))$$

π *désignant la première projection*

$$\pi : \mathbb{N}^{p+n} \longrightarrow \mathbb{N}^p$$

(la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$) ;

b) $\|\mathrm{id}_{B(K)^n} - B(K;f) \circ \sigma_K\|_K \leqq \psi_2(y)$.

Démonstration. En vertu du théorème (4.3.1), du théorème (4.3.2) et du corollaire (4.3.4) , il existe des fonctions continues

$$\psi_1' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \ \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \psi_2' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

modérées le long de Z , telles que pour tout polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ pointé dans Y , (K,y) , suffisamment effilé pour $\leqq_\alpha$, modérément le long de Z , satisfaisant à la condition

$$e(K;y) \leqq \varphi(y)$$

on ait :

i) $K \subset U$;

ii) il existe une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue, normale σ_K' de $B(K;f)$ telle que

a) $\|\sigma_K'\| \leqq \psi_1'(y)/\rho''^{d_0}(K;y)$;

b) $\|id_{B(K)^n} - B(K;f) \circ \sigma_K'\|_K \leqq \psi_2(y)$;

c) $\mathrm{Ker}(\sigma_K') = \prod_{j=1}^{n} B_{\Delta_j}(K)$;

iii) $B(K)^m = M_K' \oplus \prod_{i=1}^{m} B_{\Delta_i'}(K)$

et si l'on désigne par r_K le projecteur de $B(K)^m$ sur $\prod_{i=1}^{m} B_{\Delta_i'}(K)$ parallèlement à M_K' , r_K est une application $\mathbb{C}$-linéaire continue et

$$\|r_K\|_K \leqq \psi_2'(y) \quad ;$$

iv) $M_K' = \mathrm{Ker}(B(K;f))$.

Comme $\mathrm{Im}(B(K;f)) = M_K$ (cf. chapitre 0), il résulte de (III,1.2) et de la condition (ii) ci-dessus que

(4.3.5.1) $$B(K)^n = \mathrm{Im}(B(K;f)) \oplus \prod_{j=1}^{n} B_{\Delta_j}(K)$$

et

(4.3.5.2) $$B(K)^m = \mathrm{Ker}(B(K;f)) \oplus \mathrm{Im}(\sigma_K') \quad .$$

De même, il résulte des conditions (iii) et (iv) ci-dessus que

(4.3.5.3) $$B(K)^m = \mathrm{Ker}(B(K;f)) \oplus \prod_{i=1}^{m} B_{\Delta_i'}(K)$$

et que

(4.3.5.4) $\qquad B(K;f) \circ r_K = B(K;f)$

On déduit de (4.3.5.1) et (4.3.5.3) qu'il existe au plus une scission satisfaisant aux conditions du théorème et si l'on pose

$$\sigma_K = r_K \circ \sigma'_K$$

en vertu de (4.3.5.4) on a

$$B(K;f)\ \sigma_K\ B(K;f) = B(K;f)\ \sigma'_K\ B(K;f) = B(K;f)$$

et

$$\sigma_K\ B(K;f)\ \sigma_K = r_K\ \sigma'_K\ B(K;f)\ \sigma'_K = r_K\ \sigma'_K = \sigma_K \quad .$$

L'application σ_K est donc une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue, normale, de $B(K;f)$ et comme en vertu de (4.3.5.2) et (4.3.5.3), r_K induit une bijection de l'image de σ'_K sur $\prod_{i=1}^{m} B_{\Delta'_i}(K)$, on a

$$\operatorname{Im}(\sigma_K) = \prod_{i=1}^{m} B_{\Delta'_i}(K) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker}(\sigma_K) = \operatorname{Ker}(\sigma'_K) = \prod_{j=1}^{n} B_{\Delta_j}(K) \ .$$

Enfin, on a

$$\| \mathrm{id}_{B(K)^n} - B(K;f) \circ \sigma_K \|_K = \| \mathrm{id}_{B(K)^n} - B(K;f) \circ \sigma'_K \|_K \leqq \psi_2(y)$$

et si l'on désigne par ψ_1 la fonction

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$$

définie par

$$\psi_1 = \psi'_1\ \psi'_2 \quad ,$$

la fonction ψ_1 est continue, modérée le long de Z (App.I, 1.3.1), et on a

$$\|\sigma_K\|_K \leqq \|r_K\|_K\ \|\sigma'_K\|_K \leqq \psi_1(y)/\rho''^{d}o(K;y) \quad ,$$

ce qui démontre le théorème.

Remarque 4.3.6.- De même que pour les théorèmes (4.3.1) et (4.3.2), si l'on ne suppose plus que les relations $\leqq_{\alpha'}$ et $\leqq_{\alpha''}$ privilégient le sous-monoïde $\mathbb{N}^p$, on obtient une version plus faible du théorème (4.3.5). On aboutit aux mêmes affirmations, sans toutefois les majorations (ii), (a) et (ii), (b).

Remarque 4.3.7.- Dans la plupart des applications des théorèmes (4.3.1), (4.3.2) et (4.3.5), la fonction φ est supposée constante. J'ignore si l'on peut alors choisir la fonction ψ_2 constante (comme c'est le cas pour un idéal). En appliquant ces théorèmes à $\varphi = 1$, on obtient des cas particuliers concernant les polydisques.

D'autre part, en vertu de (III,6.2.3), on peut en formuler des variantes "paramétriques".

Remarque 4.3.8.- On peut trouver étrange le rôle joué par le point y qui "pointe" le polycylindre compact K dans les théorèmes (4.3.1), (4.3.2) et (4.3.5), et encore plus dans le corollaire (4.3.4) (ou les versions faibles des théorèmes précités) où y ne figure pas du tout dans la conclusion. Ce rôle est purement auxilliaire. Néanmoins, il permet de simplifier les énoncés, qui restent ainsi proches du cas particulier où K est un polydisque fermé de centre y. Ce qu'il faut retenir est que la décomposition en somme directe définie dans le théorème (4.3.2), ainsi que la scission dans le théorème (4.3.5) sont indépendantes du point y.

THÉORÈME 4.4.1.- *Soient* p, m, n *des entiers,* $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}^p$, *compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$, U *un ouvert de* $\mathbf{C}^p$ *et*

$$f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U^n$$

un morphisme de $\mathcal{O}_U$*-modules. Alors il existe une stratification* $\mathbf{C}$*-analytique* $(Y_i)_{i\in I}$ *de* U *et pour tout* i, $i \in I$, *un élément* d_i *de* $\mathbb{N}^p$, *tels que pour toute fonction continue*

$$\varphi_i : Y_i \longrightarrow [1,+\infty[$$

modérée le long de $\overline{Y}_i - Y_i$[(1)], *il existe deux fonctions continues*

$$\psi_{i1} : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \psi_{i2} : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

modérées le long de $\overline{Y_i} - Y_i$, *telles que pour tout polycylindre compact de* $\mathbf{C}^p$ *pointé dans* Y_i, (K,y), *suffisamment effilé pour* $\leqq_\alpha$, *modérément le long de* $\overline{Y}_i - Y_i$, *satisfaisant à la condition*

$$e(K;y) \leqq \varphi_i(y)$$

on ait :

i) $K \subset U$;

ii) *il existe une scission* $\mathbf{C}$*-linéaire continue, normale* σ_K *de* $B(K;f)$

$$\sigma_K : B(K)^n \longrightarrow B(K)^m$$

telle que

a) $\|\sigma_K\|_K \leqq \psi_{i1}(y)/\rho''^{\,d_i}(K;y)$;

b) $\|id_{B(K)^n} - B(K;f) \circ \sigma_K\|_K \leqq \psi_{i2}(y)$

---

(1) $\overline{Y}_i$ désignera toujours l'adhérence de Y_i dans U (et non pas dans $\mathbf{C}^p$).

Démonstration. Si $n=0$ le théorème est trivial. On peut donc supposer que $n\in\mathbb{N}^*$. Soient M le sous-$\mathcal{O}_U$-module cohérent de $\mathcal{O}_U^n$, image de f, et $\leqq_{\overline{\alpha}}$ la relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^{p+n}$, définie dans (3.0.4). En vertu de (4.1.2) et de (II,3.4.1), il existe une stratification $\mathbb{C}$-analytique $(Y_i)_{i\in I}$ telle que pour tout i, $i\in I$

$$S_{\overline{\alpha};M;\overline{Y_i}} \subset \overline{Y_i} - Y_i \quad .$$

Comme la relation d'ordre $\leqq_{\overline{\alpha}}$ privilégie le sous-monoïde $\mathbb{N}^p$ de $\mathbb{N}^{p+n}$ et induit $\leqq_\alpha$ sur $\mathbb{N}^p$ (cf. (3.0.4)), si l'on pose

(4.4.1.1) $$d_i = \sup(\pi(M_{\overline{\alpha};M;(\overline{Y_i})_{gen}})) \quad ,$$

où π désigne la première projection

$$\pi : \mathbb{N}^{p+n} \longrightarrow \mathbb{N}^p$$

(la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$), le théorème (4.4.1) résulte du théorème (4.3.1).

COROLLAIRE 4.4.2.- *En gardant les notations du théorème* (4.4.1), *il existe une stratification* $\mathbb{C}$*-analytique* $(Y_i)_{i\in I}$ *de* U, *et pour tout* i, $i\in I$, *un élément* d_i *de* $\mathbb{N}^p$ *et des fonctions continues*

$$\psi_{i1} : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad et \quad \psi_{i2} : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad ,$$

modérées le long de $\overline{Y_i} - Y_i$, *tels que pour tout polydisque fermé* K *de* $\mathbb{C}^p$ *de centre* y *appartenant à* Y, *suffisamment effilé pour* $\leqq_\alpha$, *modérément le long de* $\overline{Y_i} - Y_i$ (cf. (III, 6.2.4)), *on ait :*

i) $K\subset U$;

ii) *il existe une scission* $\mathbb{C}$*-linéaire continue, normale* σ_K *de* $B(K;f)$

$$\sigma_K : B(K)^n \longrightarrow B(K)^m$$

telle que

a) $$\|\sigma_K\|_K \leqq \psi_{i1}(y)/\rho^{d_i} \quad ,$$

où ρ *désigne le polyrayon de* K ;

b) $$\|id_{B(K)^n} - B(K;f) \circ \sigma_K\|_K \leqq \psi_{i2}(y) \; .$$

Démonstration. C'est un cas particulier du théorème (4.4.1) appliqué à $\varphi_i = 1$, compte tenu du fait que pour tout polydisque fermé K de $\mathbb{C}^p$ de centre y et de polyrayon ρ on a

$$\rho''(K;y) = \rho \quad .$$

COROLLAIRE 4.4.3.- *Soient* p, m, n *des entiers,* $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, A *une matrice, à* p *lignes et* p *colonnes, inversible, à coefficients dans* $\mathbb{R}_+$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$ *et*

$$f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U^n$$

un morphisme de $\mathcal{O}_U$*-modules. Alors il existe une stratification* $\mathbb{C}$*-analytique* $(Y_i)_{i\in I}$ *de* U, *et pour tout* i, $i \in I$, *un élément* d_i *de* $\mathbb{N}^p$ *et un nombre réel* δ_i, $\delta_i \in \mathbb{R}_+$, *tels que pour toute fonction continue*

$$\varphi_i : Y_i \longrightarrow [1,+\infty[\ ,$$

modérée le long de $\overline{Y_i} - Y_i$, *il existe des fonctions continues*

$$\psi_i : Y_i \to \mathbb{R}_+^* \ , \ \psi_{i1} : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ \text{ et } \ \psi_{i2} : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ ,$$

modérées le long de $\overline{Y_i} - Y_i$, *telles que pour tout point* y *de* Y_i *et tout polycylindre compact* K *de* $\mathbb{C}^p$ *tel que* $y \in \overset{\circ}{K}$ *les conditions*

a) $e(K;y) \leq \varphi_i(y)$;

b) $\rho''(K;y) \in r_A(E_{p;\delta_i;1/\psi_i(y)})$;

impliquent les assertions (i) *et* (ii) *du théorème* (4.4.1).

Démonstration. Si l'on désigne par $\leq_\alpha$ la relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$ définie par la matrice A (cf.(I,3.11)), cette relation est compatible avec la structure de monoïde de $\mathbb{N}^p$, et moins fine que la relation d'ordre produit $\leq$ sur $\mathbb{N}^p$ (car les coefficients de la matrice A sont positifs ou nuls). En vertu de (III,6.2.3), le corollaire résulte donc du théorème (4.4.1).

COROLLAIRE 4.4.4.- *En gardant les notations du corollaire* (4.4.3), *il existe une stratification* $\mathbb{C}$*-analytique* $(Y_i)_{i\in I}$ *de* U *et pour tout* i, $i \in I$, *un élément* d_i *de* $\mathbb{N}^p$, *un élément* δ_i *de* $\mathbb{R}_+$ *et des fonctions continues*

$$\psi_i : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \ \psi_{i1} : Y_i \to \mathbb{R}_+^* \ , \ \psi_{i2} : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ ,$$

modérées le long de $\overline{Y_i} - Y_i$, *telles que pour tout point* y *de* Y_i *et tout polydisque* K *de* $\mathbb{C}^p$ *de centre* y *et de polyrayon* ρ, $\rho \in (\mathbb{R}_+^*)^p$, *la condition*

$$\rho \in r_A(E_{p;\delta_i;1/\psi_i(y)})$$

implique les assertions (i) *et* (ii) *du corollaire* (4.4.2).

Démonstration. C'est un cas particulier du corollaire (4.4.3) appliqué à $\varphi_i = 1$.

Remarque 4.4.5.- Dans les corollaires (4.4.3) et (4.4.4), on peut remplacer l'hypothèse que les coefficients de A sont positifs ou nuls, par l'hypothèse plus faible que la relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$ définie par la matrice A est moins fine que la relation d'ordre produit sur $\mathbb{N}^p$.

COROLLAIRE 4.4.6.- *Soient* p, m, n *des entiers,* $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$ *et*

$$f : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U^n$$

un morphisme de $\mathcal{O}_U$*-modules. Alors il existe une stratification* $\mathbb{C}$*-analytique* $(Y_i)_{i\in I}$ *de* U , *et pour tout* i , $i \in I$, *un élément* d_i *de* $\mathbb{N}^p$ *et un nombre réel* δ_i , $\delta_i \in \mathbb{R}_+$, *tels que pour toute fonction continue*

$$\varphi_i : Y_i \longrightarrow [1,+\infty[\ ,$$

modérée le long de $\overline{Y_i} - Y_i$, *il existe des fonctions continues*

$$\psi_i : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \quad \psi_{i1} : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \psi_{i2} : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ ,$$

modérées le long de $\overline{Y_i} - Y_i$, *telles que pour tout point* y *de* Y_i *et tout polycylindre compact* K *de* $\mathbb{C}^p$ *tel que* $y \in \overset{\circ}{K}$ *les conditions*

a) $e(K;y) \leq \varphi_i(y)$;

b) $\rho_1''(K;y) < 1/\psi_i(y)$, $\rho_2''(K;y) < \rho_1''^{\delta_i}(K;y), \ldots, \rho_p''(K;y) < \rho_{p-1}''^{\delta_i}(K;y)$;

impliquent les assertions (i) *et* (ii) *du théorème* (4.4.1).

Démonstration. C'est un cas particulier du corollaire (4.4.3) appliqué à la matrice unité.

COROLLAIRE 4.4.7.- *En gardant les notations du corollaire* (4.4.6) , *il existe une stratification* $(Y_i)_{i\in I}$ *de* U , *et pour tout* i , $i \in I$, *un élément* d_i *de* $\mathbb{N}^p$, *un nombre réel* δ_i , $\delta_i \in \mathbb{R}_+$, *et des fonctions continues*

$$\psi_i : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \ \psi_{i1} : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ \text{et} \ \psi_{i2} : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ ,$$

modérées le long de $\overline{Y_i} - Y_i$, *tels que pour tout point* y *de* Y_i *et tout polydisque fermé* K *de* $\mathbb{C}^p$ *de centre* y *et de polyrayon* $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_p)$, $\rho \in (\mathbb{R}_+^*)^p$, *les conditions*

$$\rho_1 < 1/\psi_i(y) \quad , \quad \rho_2 < \rho_1^{\delta_i}, \ldots, \rho_p < \rho_{p-1}^{\delta_i}$$

impliquent les assertions (i) *et* (ii) *du corollaire* (4.4.2).

Démonstration. C'est un cas particulier du corollaire (4.4.6) appliqué à $\varphi_i = 1$.

Remarque 4.4.8.- En relisant attentivement les démonstrations des théorémes et propositions conduisant aux corollaires (4.4.3) et (4.4.4), on peut obtenir des formules explicites pour d_i et δ_i en fonction de la matrice A et de l'ensemble $M_{\overline{\alpha};\mathcal{M};(\overline{Y}_i)_{gen}}$, où $\leq_\alpha$ désigne la relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$ défini par la matrice A et $\mathcal{M}$ le sous-$\mathcal{O}_U$-module cohérent de $\mathcal{O}_U^n$, image du morphisme f (ce qui implique en particulier que d_i et δ_i ne dépendent pas du morphisme f lui-même mais uniquement de son image). L'élément d_i de $\mathbb{N}^p$ est défini par (4.4.1.1). La formule pour δ_i est plus complexe. On utilise pour cela les fonctions introduites dans (III,4.5.1). On remarque d'abord que si $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p}$ et si l'on désigne par $\overline{A}$ la matrice à $p+n$ lignes et $p+n$ colonnes définie par

$$\overline{A} = (\overline{a}_{ij})_{1 \leq i \leq p+n, 1 \leq j \leq p+n} \quad ,$$

où

$$\begin{aligned} \overline{a}_{ij} &= 0 && , 1 \leq i \leq n \ , \ j \neq p+i \ , \\ \overline{a}_{ij} &= 1 && , 1 \leq i \leq n \ , \ j = p+i \ , \\ \overline{a}_{ij} &= a_{i-n,j} && , n < i \leq p+n \ , \ 1 \leq j \leq p \ , \\ \overline{a_{ij}} &= 0 && , n < i \leq p+n \ , \ p < j \leq p+n \ , \end{aligned}$$

alors $\overline{A}$ est une matrice de définition de la relation d'ordre total $\leq_{\overline{\alpha}}$ sur $\mathbb{N}^{p+n}$ (cf. (3.0.4) et (I,3.11)). Si l'on pose

$$r_i = \operatorname{card}(M_{\overline{\alpha};M;(\overline{Y}_i)_{gen}})$$

et si $d_i^! = (d_{i1}^!, \ldots, d_{ir_i}^!)$ désigne un élément de $(\mathbb{N}^{p+n})^{r_i}$ tel que

$$M_{\overline{\alpha};M;(\overline{Y_i})_{gen}} = \{d_{i1}^!, \ldots, d_{ir_i}^!\} \ ,$$

alors

$$\delta_i = \Phi_{\overline{A};r_i}(d_i^!)$$

(cf.(III,4.5.1)). Dans le cas particulier des corollaires (4.4.6) et (4.4.7), où A est la matrice unité on obtient une formule remarquablement plus simple. En effet on vérifie facilement dans ce cas que

$$\delta_i = \sup_{1 \leq j < p} d_{ij} + 1 \quad ,$$

où $d_i = (d_{i1}, \ldots, d_{ip})$ désigne l'élément de $\mathbb{N}^p$ défini par (4.4.1.1) (la relation $\leq_\alpha$ étant la relation d'ordre antilexicographique).

Remarque 4.4.9.- Si $n = 1$ la fonction ψ_{i2} peut être chosie constante dans les corollaires (4.4.2), (4.4.4) et (4.4.7) (cf. (4.3.3)). J'ignore si cela est vrai pour n quelconque.

Remarque 4.4.10.- On peut énoncer une version "stratifiée" du théorème (4.3.2), comme on l'a fait pour le théorème (4.3.1). De même, on peut formuler une variante plus précise du théorème (4.4.1) en utilisant le théorème (4.3.5) à la place du théorème (4.3.1). On laissera le soin au lecteur d'expliciter ces énoncés.

APPENDICE I

FONCTIONS MODÉRÉES

Dans cet appendice on définit la notion de fonction modérée et on démontre les propriétés utilisées dans ce travail. Intuitivement une fonction modérée est une fonction qui croît comme un polynôme quand on "s'approche" d'un sous-espace analytique, vu comme étant à l'infini. Par exemple, une fonction définie sur un espace affine est modérée le long de "l'hyperplan à l'infini" si et seulement si sa valeur absolue est majorée par la valeur absolue d'une fonction polynomiale. Au §1, on démontre les propriétés élémentaires et au §2, celles qui découlent des inégalités de Łojasiewicz.

§1.- Propriétés élémentaires de fonctions modérées

(1.0) Tous les espaces analytiques considérés sont des $\mathbb{C}$-espaces analytiques séparés, dénombrables à l'infini, et en particulier, paracompacts. Dans la suite, on utilisera fréquemment les propriétés topologiques suivantes :

i) pour tout recouvrement ouvert localement fini $(U_i)_{i\in I}$ d'un espace analytique, il existe un recouvrement ouvert $(U'_i)_{i\in I}$ tel que pour tout i, $i\in I$, $\overline{U'_i}\subset U_i$;

ii) si U et U' désignent des ouverts d'un espace analytique X, tels que $\overline{U'}\subset U$, il existe un ouvert W de X tel que $\overline{U'}\subset W$ et $\overline{W}\subset U$;

iii) si F_o et F_1 désignent des fermés d'un espace analytique X, tels que $F_o\cap F_1=\emptyset$, il existe une fonction continue

$$\chi : X \longrightarrow [0,1]$$

telle que

$$\chi|F_o = 0 \quad \text{et} \quad \chi|F_1 = 1 \quad .$$

Enfin, on rappelle que si $(Z_i)_{i\in I}$ désigne une famille de fermés analytiques d'un espace analytique X, l'ensemble

$$Z = \bigcap_{i\in I} Z_i$$

est un fermé analytique de X et pour tout point x de X il existe un voisinage ouvert U de x et une partie finie I_x de I tels que

$$Z\cap U = (\bigcap_{i\in I_x} Z_i)\cap U \quad .$$

(1.1) Dans ce paragraphe, on se fixe un espace analytique X, un fermé analytique Z de X et on désigne par Y l'ouvert $X-Z$ de X. Si U désigne un ouvert de X on appellera fonction $\mathbb{C}$-analytique sur U un élément de $\Gamma(U,\mathcal{O}_{X_{red}})$.

Les notions que nous définirons ne dépendent que de la structure réduite sous-jacente à X. Néanmoins, on ne supposera pas que X soit réduit car ces notions peuvent être utiles même si $\mathcal{O}_X$ possède des éléments nilpotents.

DÉFINITION 1.2.- *Soient*

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

une fonction continue et z *un point de* Z. *On dit que* φ *est modérée le long de* Z *en* z, *s'il existe un voisinage ouvert* U *de* z *dans* X *et une famille finie* $(g_j)_{1\leq j\leq n}$, $n\in\mathbb{N}$, *de fonctions* $\mathbb{C}$*-analytiques sur* U, *n'ayant pas de zéro commun dans* $Y\cap U$, *satisfaisant à la condition*

(M) *pour tout compact* K *de* U *il existe des constantes* A *et* N , $A \in \mathbb{R}_+$, $N \in \mathbb{R}_+$ *telles que*

$$\forall y \in Y \cap K : \left(\sum_{j=1}^{n} |g_j(y)|^2\right)^N |\varphi(y)| \leq A .$$

On dit que la fonction φ *est modérée le long de* Z , *si elle l'est en tout point de* Z . *Si* E *désigne une partie de* $\mathbb{R}$ *et*

$$\psi : Y \longrightarrow E$$

une fonction continue, on dit que ψ *est modérée le long de* Z , *si la fonction* φ *obtenue en composant* ψ *avec l'injection canonique de* E *dans* $\mathbb{R}$ *est modérée le long de* Z .

Exemples 1.2.1.- Une fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

localement bornée sur X (et en particulier, la restriction d'une fonction continue sur X) est modérée le long de Z . Si g est une fonction $\mathbb{C}$-analytique sur X ne s'annulant pas dans Y , la fonction φ , définie par

$$\varphi(y) = 1/|g(y)| \text{ , pour } y \in Y ,$$

est modérée le long de Z . Si $(g_j)_{1 \leq j \leq n}$ désigne une famille finie de fonctions $\mathbb{C}$-analytiques sur X , n'ayant pas de zéro commun dans Y , la fonction φ , définie par

$$\varphi(y) = 1/\left(\sum_{j=1}^{n} |g_j(y)|^2\right) \text{ , pour } y \in Y ,$$

est modérée le long de Z . Si $Z = \emptyset$ toute fonction continue sur Y est modérée le long de Z .

Remarque 1.2.2.- Pour des raisons techniques on ne supposera pas que Z soit d'intérieur vide dans X . Néanmoins, si z est un point de Z tel que $z \notin \overline{Y}$, toute fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

est modérée le long de Z en z . (Il existe un voisinage ouvert U de z dans X tel que $Y \cap U = \emptyset$, ce qui implique que la fonction identiquement nulle sur U n'a pas de zéro dans $Y \cap U$). La notion de fonction modérée n'est donc intéressante que si Y est dense dans X . Les propriétés suivanges découlent aussitôt de la définition.

i) Une fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

est modérée le long de Z si et seulement si il existe un recouvrement ouvert localement fini $(U_i)_{i\in I}$ de X tel que pour tout i , $i \in I$, il existe une famille finie $(g_{ij})_{1\leq j\leq n_i}$ de fonctions $\mathbb{C}$-analytiques sur U_i n'ayant pas de zéro commun dans $Y \cap U_i$ et satisfaisant à la condition (M) de la définition (1.2).

ii) Si pour tout ouvert U de X on désigne par $C_{m;X;Z}(U)$ l'ensemble des fonctions continues

$$\varphi : Y \cap U \longrightarrow \mathbb{R}$$

modérées le long de $Z \cap U$, pour tout ouvert U' de X contenu dans U et tout élément φ de $C_{m;X;Z}(U)$ on a

$$\varphi | Y \cap U' \in C_{m;X;Z}(U')$$

et $C_{m;X;Z}$ est un faisceau sur X , sous-faisceau de $i_*(C_Y)$, où C_Y désigne le faisceau des fonctions continues sur Y et i l'injection canonique $i : Y \hookrightarrow X$.

iii) Si Z' désigne un fermé analytique de X tel que $Z \subset Z'$, Y' l'ouvert de X défini par $Y' = X - Z'$ et

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

une fonction continue, modérée le long de Z , alors la fonction

$$\varphi | Y' : Y' \longrightarrow \mathbb{R}$$

est continue, modérée le long de Z' .

iv) Si X' désigne un sous-espace analytique fermé de X , Z' le fermé analytique de X' défini par $Z' = X' \cap Z$, Y' l'ouvert de X' défini par

$$Y' = X' \cap Y = X' - Z'$$

et

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

une fonction continue, modérée le long de Z , alors la fonction

$$\varphi | Y' : Y' \longrightarrow \mathbb{R}$$

est continue, modérée le long de Z' .

v) Une fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

est modérée le long de Z si et seulement si il en est de même pour $|\varphi|$.

vi) Soient

$$\varphi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

deux fonctions continues telles que

$$\forall y \in Y : |\varphi_2(y)| \leq |\varphi_1(y)| \quad .$$

Alors si φ_1 est modérée le long de Z il en est de même pour φ_2 .

vii) Soient

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

une fonction continue et a un nombre réel, $a \geq 0$. Si φ est modérée le long de Z , il en est de même pour φ^a .

PROPOSITION 1.3.- *Soient*

$$\varphi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad \varphi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

deux fonctions continues. Si φ_1 *et* φ_2 *sont modérées le long de* Z *, il en est de même pour* $\varphi_1 + \varphi_2$.

Démonstration. Pour tout point z de Z il existe un voisinage ouvert U de z dans X et une famille finie $(g_i)_{1\leq i\leq m}$ (resp. $(h_j)_{1\leq j\leq n}$) de fonctions $\mathbb{C}$-analytiques sur U , n'ayant pas de zéro commun dans $Y \cap U$, tels que pour tout compact K de U il existe des constantes A et M (resp. B et N) , $A \in \mathbb{R}_+$, $M \in \mathbb{R}_+$, (resp. $B \in \mathbb{R}_+$, $N \in \mathbb{R}_+$) telles que

$$y \in Y \cap K : (\sum_{i=1}^{m} |g_i(y)|^2)^M |\varphi_1(y)| \leq A$$

$$(\text{resp.} \quad \forall y \in Y \cap K : (\sum_{j=1}^{n} |h_j(y)|^2)^N |\varphi_2(y)| \leq B \quad) \quad .$$

Pour tout i et j , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, on pose

$$f_{ij} = g_i h_j \quad .$$

La famille $(f_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ est une famille de fonctions $\mathbb{C}$-analytiques sur U , n'ayant pas de zéro commun dans $Y \cap U$, et si l'on pose

$$L = \sup\{ M,N \}$$

et

$$C = \sup_{x\in K}[(\sum_{i=1}^{m} |g_i(x)|^2)^{L-M}(\sum_{j=1}^{n} |h_j(x)|^2)^L A + (\sum_{i=1}^{m} |g_i(x)|^2)^L(\sum_{j=1}^{n} |h_j(x)|^2)^{L-N} B] \quad ,$$

pour tout point y de $Y \cap K$ on a

$$(\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} |f_{ij}(y)|^2)^L\ |\varphi_1(y)+\varphi_2(y)| \leq$$

$$\leq (\sum_{1\leq i\leq m} |g_i(y)|^2)^L (\sum_{1\leq j\leq n} |h_j(y)|^2)^L (|\varphi_1(y)|+|\varphi_2(y)|) \leq$$

$$\leq (\sum_{1\leq i\leq m} |g_i(y)|^2)^{L-M} (\sum_{1\leq j\leq n} |h_j(y)|^2)^L A + (\sum_{1\leq i\leq n} |g_i(y)|^2)^L (\sum_{1\leq j\leq n} |h_j(y)|^2)^{L-N} B \leq C ,$$

ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE 1.3.1.- *Soient*

$$\varphi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R} \quad et \quad \varphi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

deux fonctions continues. Si φ_1 *et* φ_2 *sont modérées le long de* Z *, il en est de même pour* $\varphi_1 \cdot \varphi_2$.

Démonstration. On a

$$|\varphi_1\ \varphi_2| \leq \varphi_1^2 + \varphi_2^2$$

et en vertu de (1.2.2), (vii) et (vi), le corollaire (1.3.1) résulte de la proposition (1.3).

COROLLAIRE 1.3.2.- *Soient* n *un entier,* $n \in \mathbb{N}$ *,* P *un polynôme à* n *indéterminées à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *et* $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ *une famille de fonctions continues*

$$\varphi_i : Y \longrightarrow \mathbb{R} \quad .$$

Si pour tout i *,* $1 \leq i \leq n$ *, la fonction* φ_i *est modérée le long de* Z *, il en est de même pour* $P(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$.

Démonstration. En raisonnant par récurrence, le corollaire (1.3.2) résulte de la proposition (1.3) et du corollaire (1.3.1).

COROLLAIRE 1.3.3.- *Soit* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *une famille de fonctions continues*

$$\varphi_i : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

localement finie sur X [(1)] *. Si pour tout* i *,* $i \in I$ *, la fonction* φ_i *est modérée le long de* Z *il en est de même pour* $\sup_{i\in I} \varphi_i$ *et* $\sum_{i\in I} \varphi_i$.

Démonstration. En vertu de (1.2.2), (ii), on peut supposer que la famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ est finie. Alors il résulte du corollaire (1.3.2) que $\sum_{i\in I} \varphi_i$ est modérée le

(1) Cela signifie que pour tout point x de X il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que l'ensemble des indices i , $i \in I$, tels que la fonction φ_i ne soit pas identiquement nulle sur $Y \cap U$, soit fini.

long de Z . D'autre part, en vertu de (1.2.2), (v), pour tout i , $i \in I$, la fonction $|\varphi_i|$ est modérée le long de Z et il en est donc de même pour $\sum_{i \in I} |\varphi_i|$. Or,

$$|\sup_{i \in I} \varphi_i| \leq \sum_{i \in I} |\varphi_i| \quad .$$

On en déduit que $\sup_{i \in I} \varphi_i$ est modérée le long de Z ((1.2.2),(vi)) .

COROLLAIRE 1.3.4.- *Soient* $(U_i)_{i \in I}$ *un recouvrement ouvert localement fini de* X *et pour tout* i , $i \in I$, *une fonction continue*

$$\varphi_i : Y \cap U_i \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

modérée le long de $Z \cap U_i$. *Alors pour tout recouvrement* $(V_i)_{i \in I}$ *de* X *tel que pour tout* i , $i \in I$,

$$\overline{V_i} \subset U_i \ ,$$

il existe une fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

modérée le long de Z , *telle que pour tout* i , $i \in I$, *et tout* y , $y \in Y \cap V_i$, *on ait*

$$\varphi_i(y) \leq \varphi(y) \quad .$$

Démonstration. Pour tout i , $i \in I$, il existe un ouvert W_i de X tel que

$$\overline{V_i} \subset W_i \subset \overline{W_i} \subset U_i$$

et une fonction continue

$$\chi_i : X \longrightarrow [0,1]$$

telle que

$$\chi_i | \overline{V_i} = 1 \quad \text{et} \quad \chi_i | X - W_i = 0$$

(cf.(1.0)). Soit φ'_i la fonction

$$\varphi'_i : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$\varphi'_i | Y \cap U_i = (\chi_i | Y \cap U) \cdot \varphi_i$$

et

$$\varphi'_i | Y \cap (X - U_i) = 0 \quad .$$

La fonction φ'_i est continue, modérée le long de Z . En effet, $\varphi'_i | Y \cap U_i$ est modérée le long de $Z \cap U_i$ ((1.2.1) et (1.3.1)), $\varphi'_i | Y \cap (X - \overline{W}_i) = 0$ est modérée le long de $Z \cap (X - \overline{W_i})$, et comme X est la réunion des ouverts U_i et $X - \overline{W_i}$, il résulte de (1.2.2), (ii) que $\varphi_i^!$ est modérée le long de Z . La famille $(\varphi_i^!)_{i\in I}$ étant localement finie sur X , la fonction φ définie par $\varphi = \sup_{i\in I} \varphi_i^!$ est continue, modérée le long de Z (1.3.3), et pour tout i , $i \in I$, et tout y , $y \in Y \cap V_i$, on a

$$\varphi(y) \geqq \varphi_i^!(y) = \chi_i(y)\ \varphi_i(y) = \varphi_i(y) \quad ,$$

ce qui démontre le corollaire.

Remarque 1.3.5.- En gardant les notations de la démonstration du corollaire (1.3.4), si pour tout y , $y \in Y$, on désigne par I_y la partie de I définie par

$$I_y = \{i \in I \ : \ y \in U_i\} \quad ,$$

l'ensemble I_y est fini et on a

$$\varphi(y) \leqq \sup_{i\in I_y} \varphi_i(y) \quad .$$

En particulier, s'il existe une constante A , $A \in \mathbb{R}$, telle que pour tout i , $i \in I$, et tout y , $y \in U_i$,

$$\varphi_i(y) < A \quad ,$$

alors pour tout y , $y \in Y$, on a

$$\varphi(y) < A \quad .$$

COROLLAIRE 1.3.6.- *En gardant les notations du corollaire* (1.3.4) , *si pour tout* i , $i \in I$,

$$\psi_i : U_i \longrightarrow \,]0,1[$$

désigne une fonction continue, il existe des fonctions continues

$$\psi' : X \longrightarrow \,]0,1[\quad et \quad \psi'' : X \longrightarrow \,]0,1[$$

telles que pour tout i , $i \in I$, *et tout* x , $x \in V_i$, *on ait*

$$\psi'(x) \leqq \psi_i(x) \leqq \psi''(x) \quad .$$

Démonstration. En vertu de (1.3.5), l'existence de ψ'' résulte de (1.3.4) appliqué à $Y = \emptyset$ et l'existence de ψ' en découle, en remarquant que pour tout i , $i \in I$, la fonction $1/\psi_i$ est une fonction continue de U_i dans $]0,1[$.

(1.4) Soient U un ouvert de X et $(h_k)_{1\leqq k\leqq m}$ une famille finie de fonctions $\mathbb{C}$-analytiques sur U . On dit que la famille $(h_k)_{1\leqq k\leqq m}$ est une famille d'équations $\mathbb{C}$-analytiques de Z dans U si

$$Z \cap U = \{x \in X : \forall k,\ 1 \leqq k \leqq m \ ,\ \ h_k(x) = 0\} \quad .$$

Pour tout point x de X il existe un voisinage ouvert U de x dans X et une famille finie d'équations $\mathbb{C}$-analytiques de Z dans U.

LEMME 1.4.1.- *Soient* U *un ouvert de* X, $(g_j)_{1\leq j\leq n}$ *une famille finie de fonctions* $\mathbb{C}$*-analytiques sur* U *n'ayant pas de zéro commun dans* $Y\cap U$ *et* $(h_k)_{1\leq k\leq m}$ *une famille finie d'équations* $\mathbb{C}$*-analytiques de* Z *dans* U. *Alors pour tout compact* K *de* U, *il existe des constantes* C *et* M, $C\in\mathbb{R}_+^*$, $M\in\mathbb{R}_+^*$, *telles que*

$$\forall x\in K : \Big(\sum_{k=1}^{m} |h_k(x)|^2\Big)^M \leq C \sum_{j=1}^{n} |g_j(x)|^2 .$$

Démonstration. Si l'on désigne par Z' le fermé analytique de U défini par

$$Z' = \{x\in U : \forall j \ ,\ 1\leq j\leq n \ ,\ g_j(x) = 0\}$$

on a $Z'\subset Z\cap U$ et en particulier pour tout k, $1\leq k\leq m$, la fonction h_k s'annule sur Z'. En vertu du Nullstellensatz $\mathbb{C}$-analytique, pour tout point x de U il existe un voisinage ouvert U_x de x dans U, un entier N_x, $N_x\in\mathbb{N}^*$, et une famille $(\alpha_{xkj})_{1\leq k\leq m, 1\leq j\leq n}$ de fonctions $\mathbb{C}$-analytiques sur U_x, telle que pour tout k, $1\leq k\leq m$, on ait

$$h_k^{N_x}|U_x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{xkj}\cdot(g_j|U_x) .$$

L'ensemble K étant compact, il existe une famille finie $(x_i)_{1\leq i\leq r}$ de points de U telle que

$$K\subset \bigcup_{1\leq i\leq r} U_{x_i} .$$

Posons

$$N = \sup_{1\leq i\leq r} N_{x_i} .$$

et pour tout i, j, k, $1\leq i\leq r$, $1\leq j\leq n$, $1\leq k\leq m$,

$$\beta_{ikj} = (h_k^{N-N_{x_i}}|U_{x_i})\cdot\alpha_{x_i kj} .$$

La fonction β_{ikj} est une fonction $\mathbb{C}$-analytique sur U_{x_i} et pour tout i et k, $1\leq i\leq r$, $1\leq k\leq m$, on a

$$h_k^N|U_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ikj}\cdot(g_j|U_{x_i}) .$$

Il existe un recouvrement ouvert $(V_i)_{1\leq i\leq r}$ de K tel que pour tout i, $1\leq i\leq r$, $\overline{V_i}\subset U_{x_i}$, et si l'on pose $K_i = K\cap\overline{V_i}$, l'ensemble K_i est compact et on a

$$K = \bigcup_{1 \leq i \leq r} K_i \quad .$$

Soit S un entier, $S \in \mathbb{N}$, tel que

$$2S \geq n + 1$$

et posons

$$R = NS \quad \text{et} \quad M = m(R-1)+1 \quad .$$

On remarque que si $X_1,\ldots,X_m$ (resp. $Y_1,\ldots,Y_n$) désignent des indéterminées, il existe une famille de polynômes $(P_k(X_1,\ldots,X_m))_{1\leq k\leq m}$ (resp. $(Q_j(Y_1,\ldots,Y_n))_{1\leq j\leq n}$) à coefficients dans $\mathbb{N}$ telle que

$$(\sum_{k=1}^{m} X_k)^M = \sum_{k=1}^{m} P_k(X_1,\ldots,X_m) \cdot X_k^R$$

$$\text{(resp.} \quad (\sum_{j=1}^{n} Y_j)^{2S} = \sum_{j=1}^{n} Q_j(Y_1,\ldots,Y_n) \cdot Y_j^2 \quad) \quad .$$

Posons

$$C_1 = \sup_{1\leq k\leq m} \sup_{x\in K} P_k(|h_1(x)|^2,\ldots,|h_m(x)|^2) \quad ,$$

$$C_2 = \sup_{1\leq i\leq r} \sup_{1\leq j\leq n} \sup_{x\in K_i} \sum_{k=1}^{m} Q_j(|\beta_{ik1}(x)g_1(x)|,\ldots,|\beta_{ikn}(x)g_n(x)|)|\beta_{ikj}(x)|^2$$

et

$$C = C_1 \cdot C_2 \quad .$$

Alors pour tout x , $x \in K$, il existe i , $1 \leq i \leq r$, tel que $x \in K_i$ et on a

$$(\sum_{k=1}^{m} |h_k(x)|^2)^M = \sum_{k=1}^{m} P_k(|h_1(x)|^2,\ldots,|h_m(x)|^2)|h_k(x)|^{2R} \leq$$

$$\leq C_1 \sum_{k=1}^{m} |h_k(x)|^{2R} = C_1 \sum_{k=1}^{m} |h_k^N(x)|^{2S} =$$

$$= C_1 \sum_{k=1}^{m} |\sum_{j=1}^{n} \beta_{ikj}(x)g_j(x)|^{2S} \leq C_1 \sum_{k=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} |\beta_{ikj}(x)g_j(x)|)^{2S} =$$

$$= C_1 \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Q_j(|\beta_{ik1}(x)g_1(x)|,\ldots,|\beta_{ikn}(x)g_n(x)|)\ |\beta_{ikj}(x)g_j(x)|^2 =$$

$$= C_1 \sum_{j=1}^{n} [\sum_{k=1}^{m} Q_j(|\beta_{ik1}(x)g_1(x)|,\ldots,|\beta_{ikn}(x)g_n(x)|)|\beta_{ikj}(x)|^2]\,|g_j(x)|^2 \leq$$

$$C_1 \sum_{j=1}^{n} C_2 |g_j(x)|^2 = C \sum_{j=1}^{n} |g_j(x)|^2 \quad ,$$

ce qui démontre le lemme.

PROPOSITION 1.4.2.- *Soient* $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue, modérée le long de* Z , U *un ouvert de* X *et* $(h_k)_{1 \leq k \leq m}$ *une famille finie d'équations* $\mathbb{C}$*-analytiques de* Y *dans* U . *Pour tout compact* K *de* U *il existe des constantes* A *et* N $A \in \mathbb{R}_+$, $N \in \mathbb{R}_+$ *telles que*

$$\forall y \in Y \cap K : \Big(\sum_{k=1}^{m} |h_k(y)|^2\Big)^N |\varphi(y)| \leq A \quad .$$

Démonstration. En vertu de (1.2.2), (i), il existe un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{1 \leq i \leq r}$ de K tel que pour tout i , $1 \leq i \leq r$, il existe une famille finie $(g_{ij})_{1 \leq j \leq n_i}$ de fonctions $\mathbb{C}$-analytiques sur U_i n'ayant pas de zéro commun dans $Y \cap U_i$ telle que pour tout compact K' de U_i il existe des constantes M et B , $M \in \mathbb{R}_+$, $B \in \mathbb{R}_+$, telles que

$$\forall y \in Y \cap K' : \Big(\sum_{j=1}^{n_i} |g_{ij}(y)|^2\Big)^M |\varphi(y)| \leq B \quad .$$

Soit $(V_i)_{1 \leq i \leq r}$ un recouvrement ouvert de K tel que pour tout i , $1 \leq i \leq r$, $\overline{V_i} \subset U_i$ et posons $K_i = \overline{V_i} \cap K$. La partie K_i de U_i étant compacte il existe des constantes N_i et A_i , $N_i \in \mathbb{R}_+$, $A_i \in \mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall y \in Y \cap K_i : \Big(\sum_{j=1}^{n_i} |g_{ij}(y)|^2\Big)^{N_i} |\varphi(y)| \leq A_i \quad .$$

D'autre part, il résulte de (1.4.1) que pour tout i , $1 \leq i \leq r$, il existe des constantes M_i et C_i , $M_i \in \mathbb{R}_+$, $C_i \in \mathbb{R}_+$, telles que

$$\forall x \in K_i : \Big(\sum_{k=1}^{m} |h_k(x)|^2\Big)^{M_i} \leq C_i \sum_{j=1}^{n_i} |g_{ij}(x)|^2 \quad .$$

On pose

$$N = \sup_{1 \leq i \leq r} M_i N_i$$

et

$$A = \sup_{1 \leq i \leq r} \Big[A_i\, C_i^{N_i} \sup_{x \in K_i} \Big(\sum_{k=1}^{m} |h_k(x)|^2\Big)^{N - M_i N_i}\Big] \quad .$$

Alors pour tout point y de $Y \cap K$ il existe i , $1 \leq i \leq r$, tel que $y \in K_i$ et on a

$$\Big(\sum_{k=1}^{m} |h_k(y)|^2\Big)^N |\varphi(y)| =$$

$$= \Big(\Big(\sum_{k=1}^{m} |h_k(y)|^2\Big)^{M_i}\Big)^{N_i} |\varphi(y)| \cdot \Big(\sum_{k=1}^{m} |h_k(y)|^2\Big)^{N-M_iN_i} \leqq$$

$$\leqq C_i^{N_i}\Big(\sum_{j=1}^{n_i} |g_{ij}(y)|^2\Big)^{N_i} |\varphi(y)| \cdot \Big(\sum_{k=1}^{m} |h_k(y)|^2\Big)^{N-M_iN_i} \leqq$$

$$\leqq C_i^{N_i} A_i \Big(\sum_{k=1}^{m} |h_k(y)|^2\Big)^{N-M_iN_i} \leqq A \quad ,$$

ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 1.5.- *Soient* Z_1 *et* Z_2 *deux fermés analytiques de* X *tels que* $Z = Z_1 \cap Z_2$ *et*

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

une fonction continue. Si les restrictions $\varphi|(X-Z_1)$ *et* $\varphi|(X-Z_2)$ *sont des fonctions modérées le long de* Z_1 *et* Z_2 *respectivement, alors la fonction* φ *est modérée le long de* Z .

Démonstration. Pour tout point z , $z \in Z$, il existe un voisinage ouvert U de z dans X et des familles finies $(g_i)_{1 \leqq i \leqq m}$ et $(h_j)_{1 \leqq j \leqq n}$ d'équations $\mathbb{C}$-analytiques de Z_1 et Z_2 respectivement dans U . En vertu de la proposition (1.4.2), pour tout compact K de U il existe des constantes M, A, N, B, $M \in \mathbb{R}_+$, $A \in \mathbb{R}_+$, $N \in \mathbb{R}_+$, $B \in \mathbb{R}_+$, telles que

$$\forall y \in (X - Z_1) \cap K : \Big(\sum_{i=1}^{m} |g_i(y)|^2\Big)^M |\varphi(y)| \leqq A$$

et

$$\forall y \in (X - Z_2) \cap K : \Big(\sum_{j=1}^{n} |h_j(y)|^2\Big)^N |\varphi(y)| \leqq B \quad ,$$

et comme pour tout i , $1 \leqq i \leqq m$, (resp. pour tout j , $1 \leqq j \leqq n$) la fonction g_i (resp. h_j) s'annule sur $Z_1 \cap U$ (resp. sur $Z_2 \cap U$) , on a

$$\forall y \in Y \cap K : \Big(\sum_{i=1}^{m} |g_i(y)|^2\Big)^M |\varphi(y)| \leqq A$$

et

$$\forall y \in Y \cap K : \Big(\sum_{j=1}^{n} |h_j(y)|^2\Big)^N |\varphi(y)| \leqq B \quad .$$

Soit $(f_k)_{1 \leqq k \leqq m+n}$ la famille définie par

$$f_k = g_k \quad , \quad 1 \leqq k \leqq m \quad ,$$

$$f_k = h_{k-m} \quad , \quad m < k \leqq m+n \quad .$$

La famille $(f_k)_{1\leqq k\leqq m+n}$ est une famille finie de fonctions $\mathbb{C}$-analytiques sur U n'ayant pas de zéro commun dans $Y\cap U$. Soient M' et N' des entiers, $M'\in\mathbb{N}^*$, $N'\in\mathbb{N}^*$, tels que $M'\geqq M$ et $N'\geqq N$. Si X_1, X_2 désignent des indéterminés et si l'on pose

$$L = M' + N' - 1$$

il existe des polynômes $P(X_1,X_2)$ et $Q(X_1,X_2)$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ tels que

$$(X_1 + X_2)^L = P(X_1,X_2)X_2^{M'} + Q(X_1,X_2)X_2^{N'} \quad .$$

Posons

$$C_1 = \sup_{x\in K} [P(\sum_{i=1}^{m} |g_i(x)|^2, \sum_{j=1}^{n} |h_j(x)|^2)\cdot(\sum_{i=1}^{m} |g_i(x)|^2)^{M'-M}] \quad ,$$

$$C_2 = \sup_{x\in K} [Q(\sum_{i=1}^{m} |g_i(x)|^2, \sum_{j=1}^{n} |h_j(x)|^2)\cdot(\sum_{j=1}^{n} |h_j(x)|^2)^{N'-N}]$$

et

$$C = C_1 A + C_2 B \quad .$$

Alors pour tout y, $y\in Y\cap K$, on a

$$(\sum_{k=1}^{m+n} |f_k(y)|^2)^L\,|\varphi(y)| =$$

$$= P(\sum_{i=1}^{m}|g_i(x)|^2 \;,\; \sum_{j=1}^{n}|h_j(x)|^2)(\sum_{i=1}^{m} |g_i(x)|^2)^{M'}|\varphi(y)| +$$

$$+ Q(\sum_{i=1}^{m}|g_i(x)|^2 \;,\; \sum_{j=1}^{n}|h_j(x)|^2)(\sum_{j=1}^{n}|h_j(x)|^2)^{N'}\;|\varphi(y)|\leqq$$

$$\leqq C_1 A + C_2 B = C \quad ,$$

ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE 1.5.1.- *Soient* $(Z_i)_{i\in I}$ *une famille de fermés analytiques de* X *telle que*

$$Z = \bigcap_{i\in I} Z_i$$

et

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

une fonction continue telle que pour tout i, $i\in I$, *la restriction* $\varphi|X - Z_i$ *soit une fonction modérée le long de* Z_i. *Alors la fonction* φ *est modérée le* *long de* Z .

<u>Démonstration</u>. Pour tout point x de X il existe un voisinage ouvert U de x et une partie finie I' de I tels que

$$Z \cap U = (\bigcap_{i \in I'} Z_i) \cap U$$

(cf.(1.0)). En vertu de (1.2.2), (ii), le corollaire résulte alors de la proposition (1.5), en raisonnant par récurrence.

<u>LEMME 1.6</u>.- *Il existe une fonction continue*

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R} \quad ,$$

modérée le long de Z , *telle que pour tout* z , $z \in Z$, *et toute constante* A $A \in \mathbb{R}_+^*$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* z *dans* X *tel que pour tout* y , $y \in Y \cap U$, *on ait*

$$\varphi(y) \geqq A \quad .$$

<u>Démonstration</u>. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de X tel que pour tout i , $i \in I$, il existe une famille finie $(g_{ij})_{1 \leqq j \leqq n_i}$ d'équations $\mathbb{C}$-analytiques de Y dans U_i , et soit

$$\varphi_i : Y \cap U_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

la fonction définie par

$$\varphi_i(y) = 1/(\sum_{j=1}^{n_i} |g_{ij}(y)|^2) \quad , \text{ pour } \ y \in Y \cap U_i \quad .$$

La fonction φ_i est continue, modérée le long de $Z \cap U_i$ (1.2.1). Soit $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X tel que pour tout i , $i \in I$, $\overline{V_i} \subset U_i$ (cf.(1.0),(i)). En vertu de (1.3.4), il existe une fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R} \quad ,$$

modérée le long de Z , telle que pour tout i , $i \in I$, et tout y , $y \in V_i$, on ait

$$\varphi_i(y) \leqq \varphi(y) \quad .$$

Soit z un point de Z . Il existe i , $i \in I$, tel que $z \in V_i$. Si l'on désigne par ψ_i la fonction

$$\psi_i : V_i \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

définie par

$$\psi_i(x) = \sum_{j=1}^{n_i} |g_{ij}(x)|^2 \quad , \text{ pour } \ x \in V_i \quad ,$$

la fonction ψ_i est continue et $\psi_i(z)=0$. On en déduit que pour toute constante A , $A\in\mathbb{R}_+^*$, il existe un voisinage ouvert U de z dans X contenu dans V_i tel que pour tout x , $x\in U$,

$$0\leqq\psi_i(x) < 1/A \ ,$$

ce qui implique que pour tout y , $y\in Y\cap U$,

$$\varphi_i(y)\geqq A \ ,$$

d'où

$$\varphi(y)\geqq A \ ,$$

ce qui démontre le lemme.

PROPOSITION 1.6.1.- *Soient* $(Z_i)_{i\in I}$ *une famille finie de fermés analytiques de* X *tels que*

$$Z=\bigcap_{i\in I} Z_i$$

et pour tout i , $i\in I$, *une fonction continue*

$$\varphi_i : X-Z_i \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

modérée le long de Z_i . *Alors il existe une fonction continue*

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

modérée le long de Z , *telle que pour tout* y , $y\in Y$, *il existe* i , $i\in I$, *tel que* $y\in X-Z_i$ *et*

$$\varphi_i(y)\leqq\varphi(y) \ .$$

Démonstration. En vertu du lemme (1.6), pour tout i , $i\in I$, il existe une fonction continue

$$\psi_i : X-Z_i \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

modérée le long de Z_i , telle que pour tout z , $z\in Z_i$, et toute constante A , $A\in\mathbb{R}_+^*$, il existe un voisinage ouvert U de z dans X tel que pour tout y , $y\in(X-Z_i)\cap U$, on ait

$$\psi_i(y)\geqq A \ .$$

Posons

$$\varphi_i' = \sup\{\varphi_i,\psi_i,0\} \ .$$

La fonction

$$\varphi' : X-Z_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

est continue, modérée le long de Z_i (1.3.3). Pour tout y , $y\in Y$, on pose

$$I_y = \{i \in I \ : \ y \notin Z_i\}$$

et

$$\varphi(y) = \inf_{i \in I_y} \varphi_i^!(y) \quad .$$

Démontrons que la fonction

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

est continue. En effet, soit y un point de Y .

Alors $y \in X - \bigcup_{i \in I_y} Z_i$. Soit

$$\psi : X - \bigcup_{i \in I_y} Z_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

la fonction définie par

$$\psi(y') = \inf_{i \in I_y} \varphi_i^!(y') \quad , \text{ pour } \quad y' \in X - \bigcup_{i \in I_y} Z_i \quad .$$

La fonction ψ est continue. Il suffit donc de démontrer que φ et ψ coïncident au voisinage de y . Soit A , $A \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $\psi(y) < A$. La fonction ψ étant continue il existe un voisinage ouvert U de y dans $X - \bigcup_{i \in I_y} Z_i$ tel que pour tout y' , $y' \in U$,

$$\psi(y') < A \quad .$$

D'autre part, comme $y \in \bigcap_{i \in I - I_y} Z_i$, il existe un voisinage ouvert U' de y dans X tel que pour tout i , $i \in I - I_y$, et tout y' , $y' \in (X - Z_i) \cap U'$

$$\psi_i(y') \geqq A$$

et a fortiori

$$\varphi_i(y') \geqq A \quad .$$

Alors il découle aussitôt des définitions de φ et ψ que

$$\varphi | U \cap U' = \psi | U \cap U' \quad ,$$

ce qui démontre la continuité de φ . Enfin, pour tout i , $i \in I$, et tout y , $y \in X - Z_i$, on a

$$\varphi(y) \leqq \varphi_i^!(y) \quad ,$$

et comme $\varphi(y) \geqq 0$, il résulte de (1.2.2), (vi) que $\varphi | X - Z_i$ est modérée le long de Z_i . On en déduit que φ est modérée le long de Z (1.5.1), ce qui démontre la proposition.

Remarque 1.6.2.- La proposition (1.6.1) demeure vraie, même si l'on ne suppose pas que la famille $(Z_i)_{i\in I}$ soit finie. En effet, il existe alors un recouvrement ouvert localement fini $(U_j)_{j\in J}$ de X tel que pour tout j, $j\in J$, il existe une partie finie I_j de I telle que

$$Z\cap U_j = (\bigcap_{i\in I_j} Z_i)\cap U_j$$

(cf.(1.0)). En vertu de la proposition (1.6.1), il existe donc une fonction continue

$$\psi_j : Y\cap U_j \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

modérée le long de $Z\cap U_j$, telle que pour tout y, $y\in Y\cap U_j$, il existe i, $i\in I_j$, tel que $y\in X-Z_i$ et

$$\varphi_i(y) \leqq \psi_j(y) \quad .$$

Soit $(V_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de X tel que pour tout j, $j\in J$, $\overline{V_j}\subset U_j$ (cf.(1.0),(i)). En vertu du corollaire (1.3.4), il existe une fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

modérée le long de Z, telle que pour tout j, $j\in J$, et tout y, $y\in V_j$,

$$\psi_j(y) \leqq \varphi(y) \quad .$$

Alors pour tout point y de Y il existe j, $j\in J$, tel que $y\in V_j$ et i, $i\in I_j$, tel que $y\in X-Z_i$ et

$$\varphi_i(y) \leqq \psi_j(y) ,$$

ce qui implique que

$$\varphi_i(y) \leqq \varphi(y) \quad .$$

PROPOSITION 1.7.1.- *Soient* X' *un sous-espace analytique fermé de* X, $Y' = Y\cap X'$, $Z' = Z\cap X'$ *et*

$$\varphi' : Y' \longrightarrow \mathbb{R}$$

une fonction continue, modérée le long de Z'. *Alors il existe une fonction continue*

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

modérée le long de Z, *telle que*

$$\varphi|Y' = \varphi' \ .$$

Démonstration. Soient $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement localement fini de X formé par des ouverts relativement compacts dans X tels que pour tout i, $i\in I$, il existe une famille finie d'équations $\mathbb{C}$-analytiques de Z dans U_i, et $(U'_i)_{i\in I}$

un recouvrement ouvert de X tel que pour tout i , $i \in I$, $\overline{U'_i} \subset U_i$. Démontrons que pour tout i , $i \in I$, il existe une fonction continue

$$\varphi_i : Y \cap U'_i \longrightarrow \mathbb{R} \quad ,$$

modérée le long de $Z \cap U'_i$, telle que

$$\varphi_i | Y' \cap U'_i = \varphi' | Y' \cap U'_i \quad .$$

En effet, soit $(h_k)_{1 \leq k \leq m}$ une famille d'équations $\mathbb{C}$-analytiques de Z dans U_i . La famille $(h_k | X' \cap U_i)_{1 \leq k \leq m}$ est une famille d'équations $\mathbb{C}$-analytiques de Z' dans $X' \cap U_i$, et comme $X' \cap \overline{U'_i}$ est une partie compacte de $X' \cap U_i$, il existe des constantes A et M , $A \in \mathbb{R}_+$, $M \in \mathbb{R}_+$, telles que

$$\forall y \in Y' \cap U'_i : \left(\sum_{k=1}^{m} |h_k(y)|^2 \right)^M |\varphi'(y)| \leq A$$

(1.4.2), ce qui implique que la fonction

$$\psi'_i : X' \cap U'_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$\psi'_i(y) = \left(\sum_{k=1}^{m} |h_k(y)|^2 \right)^{M+1} \varphi'(y) \quad , \text{ pour } \ y \in Y' \cap U'_i \quad ,$$

et

$$\psi'_i(y) = 0 \quad , \text{ pour } \ y \in Z' \cap U'_i \quad ,$$

est continue. On en déduit qu'il existe une fonction continue

$$\psi_i : U'_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que $\psi_i | X' \cap U'_i = \psi'_i$ et alors la fonction

$$\varphi_i : Y \cap U'_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$\varphi_i(y) = \psi_i(y) / \left(\sum_{k=1}^{m} |h_k(y)|^2 \right)^{M+1} \quad , \text{ pour } \ y \in Y \cap U' \quad ,$$

est une fonction continue, modérée le long de $Z \cap U'$ ((1.2.1) et (1.3.1)), telle que

$$\varphi_i | Y' \cap U'_i = \varphi' | Y' \cap U'_i \quad . \tag{1.7.1.1}$$

Soit $(U''_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X tel que pour tout i , $i \in I$, $\overline{U''_i} \subset U'_i$. En vertu de (1.3.4) et (1.3.5), il existe une fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R} \quad ,$$

modérée le long de Z , telle que pour tout point y de Y les deux propriétés suivantes soient satisfaites :

a) pour tout i , $i \in I$, tel que $y \in U''_i$, on a

$\varphi_i(y) \leqq \varphi(y)$;

b) il existe i' , $i' \in I$, tel que $y \in U'_{i'}$, et tel que

$\varphi(y) \leqq \varphi_{i'}(y)$.

La famille $(U''_i)_{i \in I}$ étant un recouvrement de Y' plus fin que le recouvrement $(U'_i)_{i \in I}$, il résulte de (1.7.1.1) que les conditions (a) et (b) impliquent que pour tout point y de Y' on a

$\varphi'(y) = \varphi(y)$,

ce qui démontre la proposition .

Remarque 1.7.2.- Si la fonction φ' est positive, on peut supposer qu'il en est de même pour φ . (Il suffit de prendre sa valeur absolue). De même, si la fonction φ' est strictement positive, on peut supposer que φ l'est également. En effet, on peut d'abord supposer que φ est positive, et il suffit de lui ajouter la restriction sur Y d'une fonction continue sur X s'annulant exactement sur le fermé X' de X (l'espace X étant métrisable on peut par exemple lui ajouter la fonction $x \longmapsto d(x,X')$, où d désigne une distance sur X , compatible avec sa topologie).

§2.- Fonctions modérées sur un ouvert de $\mathbb{C}^p$.

(2.0) Dans ce paragraphe, on étudie les fonctions modérées sur un ouvert de $\mathbb{C}^p$. On utilise un théorème de Łojasiewicz [38] qui permet de majorer localement les fonctions modérées par une puissance de la distance à l'"infini". On se fixe un ouvert U de $\mathbb{C}^p$, un fermé analytique Z d'intérieur vide de U et l'on pose $Y=U-Z$. L'ensemble Y est un ouvert de $\mathbb{C}^p$ dense dans U . On désigne par $d(.,.)$ la distance sur $\mathbb{C}^p$ déduite de la norme sup. On rappelle (cf. (III,4.4.1)) que pour tout ouvert U' de $\mathbb{C}^p$ on désigne par $R_{U'}$ la fonction

$$R_{U'} : U' \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

définie par

$$R_{U'}(x) = \inf\{d(x,\mathbb{C}^p-U')/2,1\} \quad .$$

On remarque aussitôt que pour tout y , $y \in Y$,

(2.0.1) $$R_Y(y) = \inf\{R_U(y),\ d(y,Z)/2\} \quad .$$

Pour que certains énoncés demeurent vrais même si $Z=\emptyset$, on aimerait que $d(x,\emptyset)$ ait une valeur finie. On peut choisir n'importe quelle constante strictement positive. Par convention, on posera

$$d(x,\emptyset) = 2 \quad .$$

(C'est la plus petite valeur pour laquelle la formule (2.0.1) reste vraie si $Z=\emptyset$).

PROPOSITION 2.1.- *La fonction*

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

définie par

$$\varphi(y) = 1/d(y,Z) \ , \qquad pour \ \ y \in Y \ ,$$

est une fonction continue, modérée le long de Z .

Démonstration. La continuité de φ est évidente. Soit z_o un point de Z et U' un voisinage ouvert de z_o dans U tel qu'il existe une famille finie d'équations $\mathbb{C}$-analytiques $(h_i)_{1\leq i\leq m}$ de Z dans U' . Il existe ε , $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, tel que

$$\overline{D}(z_o;8\underline{\varepsilon}) \subset U'$$

(où $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon,\ldots,\varepsilon) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$) et tel que pour tout i , $1 \leq i \leq m$, si l'on désigne par $\overline{h}_i$ la fonction $\mathbb{C}$-analytique

$$\overline{h}_i : D(z_o;3\underline{\varepsilon}) \times D(0;5\underline{\varepsilon}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par

$$\bar{h}_i(x,t) = h_i(x+t) - h_i(x) \quad ,$$

il existe des fonctions $\mathbb{C}$-analytiques

$$h_{ij} : D(z_o;3\underline{\varepsilon}) \times D(0,5\underline{\varepsilon}) \longrightarrow \mathbb{C} \,, \qquad 1 \leq j \leq p \quad ,$$

telles que pour tout x , $x \in D(z_o;3\underline{\varepsilon})$, et tout t , $t = (t_1,\dots,t_p)$, $t \in D(0;5\underline{\varepsilon})$ on ait

$$\bar{h}_i(x,t) = \sum_{j=1}^{p} t_j \, h_{ij}(x,t) \quad .$$

On pose

$$F = \sup_{1\leq i\leq m} \; \sup_{x\in\bar{D}(z_o;2\underline{\varepsilon})} |h_i(x)|$$

$$H = \sup_{1\leq i\leq m} \; \sup_{1\leq j\leq p} \; \sup_{x\in\bar{D}(z_o;2\underline{\varepsilon})} \; \sup_{t\in\bar{D}(z_o;4\underline{\varepsilon})} |h_{ij}(x,t)|$$

et

$$A = FHmp \quad .$$

Alors pour tout x , $x = (x_1,\dots,x_p)$, $x \in \bar{D}(z_o;2\underline{\varepsilon})$, et tout z , $z = (z_1,\dots,z_p)$, $z \in \bar{D}(z_o;2\underline{\varepsilon}) \cap Z$, on a

$$\sum_{i=1}^{m} |h_i(x)|^2 \leq F \sum_{i=1}^{m} |h_i(x)| = F \sum_{i=1}^{m} |h_i(x) - h_i(z)| =$$

$$= F \sum_{i=1}^{m} |\bar{h}_i(z,x-z)| \leq F \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} |x_j - z_j| \; |h_{ij}(z,x-z)| \leq$$

$$FH \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} |x_j - z_j| \leq A \; d(x,z) \quad .$$

On en déduit que pour tout x , $x \in \bar{D}(z_o;2\underline{\varepsilon})$,

$$\sum_{i=1}^{m} |h_i(x)|^2 \leq A \; d(x,\bar{D}(z_o,2\underline{\varepsilon}) \cap Z)$$

et il en découle que pour tout x , $x \in \bar{D}(z_o;\underline{\varepsilon})$

$$\sum_{i=1}^{m} |h_i(x)|^2 \leq A \; d(x,Z) \quad ,$$

ce qui démontre la proposition ((1.2.1) et (1.2.2), (ii),(vi)) .

<u>COROLLAIRE 2.1.1</u>.- *La fonction*

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

définie par

$$\varphi(y) = 1/R_Y(y) = \{\sup 2/d(y,\mathbb{C}-Y),1\}$$

(cf. (III,4.4.1)) *est continue, modérée le long de* Z .

Démonstration. En effet, pour tout y , $y \in Y$,

$$\varphi(y) = \sup\{2/d(y,Z) \ , \ 1/R_U(y)\}$$

(2.0.1) et le corollaire résulte de (III,4.4.1), (2.1), (1.2.1) et (1.3.3).

THÉORÈME 2.2.- (Łojasiewicz). *Soient* n *un entier,* V *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, K *un compact de* V , $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction* $\mathbb{R}$*-analytique, et* E *le fermé de* V *défini par*

$$E = \{x \in V \ : \ f(x) = 0\} \quad .$$

Alors il existe des constantes A *et* M , $A \in \mathbb{R}_+^*$, $M \in \mathbb{R}_+^*$, *telles que pour tout* x , $x \in K$,

$$|f(x)| \geq A \ d_e(x,E)^M \quad ,$$

où $d_e(.,.)$ *désigne la distance euclidienne sur* $\mathbb{R}^n$ (1) .

Démonstration. [38] , théorème 2, p. 85.

COROLLAIRE 2.2.1.- *Soit* U' *un ouvert de* U *tel qu'il existe une famille finie d'équations* $\mathbb{C}$*-analytiques* $(h_j)_{1 \leq j \leq n}$ *de* Z *dans* U' . *Alors pour toute partie compacte* K *de* U' *il existe des constantes* A *et* M , $A \in \mathbb{R}_+^*$, $M \in \mathbb{R}_+^*$, *telles que*

$$\forall x \in K \ : \ \sum_{j=1}^{n} |h_j(x)|^2 \geq A \ d(x,Z)^M \quad .$$

Démonstration. Si $Z \cap U' = \emptyset$ il suffit de poser $M = 1$ et

$$A = \inf_{x \in K} \Big[\sum_{j=1}^{n} |h(x)|^2 / d(x,Z) \Big] \quad .$$

Supposons donc que $Z \cap U' \neq \emptyset$. En remarquant que la fonction

$$f : U' \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} |h_j(x)|^2 \ , \text{ pour } x \in U' \ ,$$

est une fonction $\mathbb{R}$-analytique (en identifiant $\mathbb{C}^p$ à $\mathbb{R}^{2p}$) et que

$$Z \cap U' = \{x \in U' \ : \ f(x) = 0\} \quad ,$$

(1) Le théorème est vrai même si $E = \emptyset$, en convenant que $d_e(x,\emptyset)$ est une constante strictement positive quelconque, par exemple $d_e(x,\emptyset) = 2$ (cf.(2.0)).

il résulte du théorème (2.2) qu'il existe des constantes A et M , $A \in \mathbb{R}_+^*$, $M \in \mathbb{R}_+^*$, telles que

$$\forall x \in K : \sum_{j=1}^{n} |h_j(x)|^2 \geq A\, d_e(x, Z \cap U')^M \quad ,$$

où $d_e(.,.)$ désigne la distance hermitienne sur $\mathbb{C}^p$. Or, pour tout x , $x \in U'$, on a

$$d(x,Z) \leq d(x, Z \cap U') \leq d_e(x, Z \cap U') \quad ,$$

ce qui démontre le corollaire.

<u>PROPOSITION 2.2.2</u>.- *Soit*

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

une fonction continue, modérée le long de Z . *Alors pour tout compact* K *de* U *il existe des constantes* A *et* M , $A \in \mathbb{R}_+$, $M \in \mathbb{R}_+$, *telles que*

$$\forall y \in Y \cap K : |\varphi(y)| \leq A/d(y,Z)^M \quad .$$

<u>Démonstration</u>. Il existe un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{1 \leq i \leq m}$ de K tel que pour tout i , $1 \leq i \leq m$, il existe une famille finie d'équations $\mathbb{C}$-analytiques $(h_{ij})_{1 \leq j \leq n_i}$ de Z dans U_i . Soit $(V_i)_{1 \leq i \leq m}$ un recouvrement ouvert de K tel que pour tout i , $1 \leq i \leq m$, $\overline{V}_i \subset U_i$ et posons $K_i = \overline{V}_i \cap K$. La partie K_i de U_i étant compacte il existe des constantes A_i et M_i , $A_i \in \mathbb{R}_+$, $M_i \in \mathbb{R}_+$, telles que

$$(2.2.2.1) \qquad \forall y \in Y \cap K_i : \Big(\sum_{j=1}^{n_i} |h_{ij}(y)|^2\Big)^{M_i} |\varphi(y)| \leq A_i$$

(1.4.2), et des constantes B_i et N_i , $B_i \in \mathbb{R}_+^*$, $N_i \in \mathbb{R}_+^*$, telles que

$$(2.2.2.2) \qquad \forall x \in K_i : \sum_{j=1}^{n_i} |h_{ij}(x)|^2 \geq B_i\, d(x,Z)^{N_i}$$

(2.2.1). On pose

$$M = \sup_{1 \leq i \leq m} M_i N_i$$

et

$$A = \sup_{1 \leq i \leq m} \big[(A_i/B_i^{M_i}) \sup_{x \in K_i} d(x,Z)^{M - M_i N_i}\big] \quad .$$

Alors pour tout point y de $Y \cap K$ il existe i , $1 \leq i \leq m$, tel que $y \in K_i$ et il résulte de (2.2.2.1) et (2.2.2.2) que

$$|\varphi(y)| \leq A_i/\Big(\sum_{j=1}^{n_i} |h_{ij}(y)|^2\Big)^{M_i} \leq (A_i/B_i^{M_i})/d(y,Z)^{M_i N_i} =$$
$$= (A_i/B_i^{M_i})\, d(y,Z)^{M - M_i N_i}/d(y,Z)^M \leq A/d(y,Z)^M \quad ,$$

ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 2.2.3.- *Soient*

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

une fonction continue, modérée le long de Z *, et* $(E_i)_{i\in I}$ *une famille de parties de* Y *telle que pour tout* i *,* $i \in I$ *, et tout* y *,* $y \in E_i$ *, on ait*

$$E_i \subset \bar{D}(y;\underline{\rho}(y)) ,$$

où

$$\underline{\rho}(y) = (\rho(y),\dots,\rho(y))$$

et

$$\rho(y) = R_Y(y) = \inf\{d(y,\mathbb{C}^p - Y)/2,1\}$$

(cf.(III,4.4.1)). *Alors il existe une fonction continue*

$$\varphi' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

modérée le long de Z *, telle que pour tout* i *,* $i \in I$ *,*

$$\sup_{y\in E_i} \varphi(y) \leq \inf_{y\in E_i} \varphi'(y) .$$

Démonstration. Soit $(U_j)_{j\in J}$ un recouvrement localement fini de U (1) par des ouverts relativement compacts dans U et posons

$$K_j = \{x \in \mathbb{C}^p : \exists x' \in \bar{U}_j \quad d(x,x') \leq R_U(x')\} .$$

En vertu de (III,4.4.1), $K_j \subset U$, et comme $\bar{U}_j$ est compact et la fonction R_U continue (III,4.4.1), l'ensemble K_j est un compact de U . On en déduit qu'il existe des constantes A_j et M_j , $A_j \in \mathbb{R}_+^*$, $M_j \in \mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall y \in Y \cap K_j \qquad \varphi(y) \leq A_j/d(y,Z)^{M_j}$$

(2.2.2). Soit φ_j la fonction

$$\varphi_j : Y \cap U_j \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

définie par

$$\varphi_j(y) = 2^{M_j} A_j/d(y,Z)^{M_j} , \text{ pour } y \in Y \cap U_j .$$

---

(1) Le recouvrement $(U_j)_{j\in J}$ est localement fini sur U et non pas dans $\mathbb{C}^p$.

La fonction φ_j est continue, modérée le long de $Z \cap U_j$ ((2.1) et (1.2.2),(vii)). Soit $(U'_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de U tel que pour tout j , $j \in J$, $\overline{U}'_j \subset U_j$. En vertu de (1.3.4), il existe une fonction continue

$$\varphi' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad ,$$

modérée le long de Z , telle que pour tout j , $j \in J$, et tout y , $y \in Y \cap U'_j$,

$$\varphi_j(y) \leqq \varphi'(y)$$

Soient i , $i \in I$, et y et y' deux points de E_i . Il existe j , $j \in J$, tel que $y' \in U'_j$, ce qui implique que

(2.2.3.1) $\qquad \varphi_j(y') \leqq \varphi'(y') \quad .$

Or, l'hypothèse

$$E_i \subset \overline{D}(y';\underline{\rho}(y'))$$

implique que

(2.2.3.2) $\qquad d(y,y') \leqq R_Y(y') = \inf\{R_U(y'),d(y',Z)/2\}$

(cf.(2.0.1)) et en particulier $y \in K_j$. On en déduit que

(2.2.3.3) $\qquad \varphi(y) \leqq A_j/d(y,Z)^{M_j} \quad .$

D'autre part, on a

$$d(y',Z) \leqq d(y,y') + d(y,Z)$$

et l'inégalité (2.2.3.2) implique que

$$d(y,Z) \geqq d(y',Z)/2$$

(inégalité vraie même si $Z = \emptyset$ (cf.2.0)), d'où

(2.2.3.4) $\qquad A_j/d(y,Z)^{M_j} \leqq 2^{M_j}\ A_j/d(y',Z)^{M_j} = \varphi_j(y') \quad .$

Alors il résulte de (2.2.3.1), (2.2.3.3) et (2.2.3.4) que

$$\varphi(y) \leqq \varphi'(y') \quad ,$$

ce qui démontre la proposition.

APPENDICE II

THÉORÈME DE PRIVILÈGE NUMÉRIQUE UNIFORME POUR UN MORPHISME DE MODULES COHÉRENTS

Dans cet appendice, on généralise le résultat principal de ce travail aux morphismes de modules cohérents. Au §1, on expose quelques compléments sur les propriétés algébriques des scissions. Au §2, on définit les notions nécessaires à la généralisation du théorème principal. En particulier, on définit la notion de polycylindre privilégié. Notre définition n'est pas la même que celle de Douady, qui a introduit cette notion dans [7], mais elle est équivalente (voir [48]). Dans le §3, on démontre le théorème de privilège numérique uniforme pour un morphisme de modules cohérents. On remarquera que le théorème d'existence de polycylindres privilégiés de Douady en résulte. On obtient ainsi une autre démonstration de ce théorème en utilisant des théorèmes de division au lieu d'utiliser le théorème de platitude et privilège. Au §4, on démontre une variante du théorème principal, variante qui ne fait pas intervenir de stratifications.

§1.- Compléments sur les scissions.

PROPOSITION 1.1- *Soient* A *un anneau commutatif,* M, M' *et* M'' *des* A-*modules,* $v : M' \longrightarrow M$, $u : M \longrightarrow M'$ *et* $\sigma' : M \longrightarrow M'$ *des applications* A-*linéaires. On suppose que la suite*

$$M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{u} M'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte et que σ' *est une scission de* v *. Alors il existe une* A-*scission unique* σ *de* u [(1)] *telle que*

$$\sigma \circ u = id_M - v \circ \sigma' \quad .$$

Démonstration. L'application u étant surjective l'unicité de σ est évidente. Pour démontrer l'existence on remarque qu'en vertu de (III,1.2) ,

$$Ker(id_M - v\sigma') = Im(v) \quad ,$$

et comme

$$Im(v) = Ker(u) \ ,$$

l'application $id_M - v\sigma'$ se "factorise à travers u " , autrement dit il existe une application A-linéaire σ telle que

$$\sigma \circ u = id_M - v\sigma'$$

ce qui implique que

$$u \circ \sigma \circ u = u - u \circ v \circ \sigma' = u$$

et démontrer la proposition.

LEMME 1.2.- *Soient* A *un anneau commutatif,* M, M', N *et* N' *des* A-*modules,* $u : M' \longrightarrow M$, $v : N' \longrightarrow N$, $w : N \longrightarrow M$, $w' : N' \longrightarrow M'$, $\lambda : M \longrightarrow N$ *et* $\mu : N \longrightarrow N'$ *des applications* A-*linéaires. On suppose que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} N' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "w'"] & N \arrow[d, "w"] \\ M' \arrow[r, "u"] & M \end{tikzcd}$$

est commutatif et l'on pose

$$\sigma = w'\mu\lambda \quad .$$

Alors on a :

i) *si* λ *et* μ *sont des* A-*scissions de* w *et* v *respectivement et si*

---

(1) qui en est une section puisque u est surjective.

a) $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(w)$

b) $\mathrm{Im}(v) = w^{-1}(\mathrm{Im}(u))$,

l'application σ *est une A-scission de* u *et*

$$(\mathrm{id}_M - u\sigma) \circ w = w \circ (\mathrm{id}_N - v\mu) \quad ;$$

ii) *si* w *et* v *sont des A-scissions de* λ *et* μ *respectivement et si*

c) $\mathrm{Ker}(\mu) \subset \mathrm{Im}(\lambda)$,

l'application u *est une A-scission de* σ .

Démonstration. Démontrons l'assertion (i). L'application λ étant une A-scission de w , l'hypothèse (a) implique que

(1.2.1) $$w\lambda u = u \quad .$$

En particulier,

$$\mathrm{Im}(\lambda u) \subset w^{-1}(\mathrm{Im}(u))$$

et en vertu de l'hypothèse (b),

$$\mathrm{Im}(\lambda u) \subset \mathrm{Im}(v) \quad .$$

L'application μ étant une A-scission de v on en déduit que

(1.2.2) $$v\mu\lambda u = \lambda u \quad .$$

Alors il résulte de (1.2.1) et (1.2.2) que

$$u\sigma u = uw'\mu\lambda u = wv\mu\lambda u = w\lambda u = u \quad ,$$

ce qui démontre que σ est une A-scission de u . D'autre part, on a

$$(\mathrm{id}_M - u\sigma)w = w - uw'\mu\lambda w = w\lambda w - wv\mu\lambda w = w(\mathrm{id}_N - v\mu)\lambda w \quad .$$

Or, l'hypothèse (b) implique que

$$\mathrm{Ker}(w) \subset \mathrm{Im}(v)$$

et en vertu de (III,1.2) on a

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id}_N - \lambda w) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_N - v\mu) \quad ,$$

d'où

$$(\mathrm{id}_N - v\mu)(\mathrm{id}_N - \lambda w) = 0 \quad ,$$

autrement dit

$$(\mathrm{id}_N - v\mu)\lambda w = \mathrm{id}_N - v\mu \quad .$$

On en déduit que

$$(\mathrm{id}_M - u\sigma)w = w(\mathrm{id}_N - v\mu) \quad ,$$

ce qui démontre l'assertion (i). Pour démontrer l'assertion (ii), on remarque que si w et v sont des A-scissions de λ et μ respectivement, l'hypothèse (c) implique, en vertu de (III,1.2), que

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id}_N - v\mu) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_N - \lambda w) \ .$$

On en déduit que

$$(\mathrm{id}_N - \lambda w)(\mathrm{id}_N - v\mu) = 0 \ ,$$

d'où

$$\lambda w v \mu = \lambda w + v\mu - \mathrm{id}_N \quad .$$

On a donc

$$\sigma u \sigma = w'\mu\lambda u w'\mu\lambda = w'\mu\lambda w v\mu\lambda = w'\mu(\lambda w + v\mu - \mathrm{id}_N)\lambda =$$
$$= w'\mu\lambda w\lambda + w'\mu v\mu\lambda - w'\mu\lambda = w'\mu\lambda = \sigma \ ,$$

ce qui démontre le lemme.

<u>PROPOSITION 1.3</u>.- *Soient* A *un anneau commutatif,* M, M', N, N' *et* N'' *des* A-*modules,* $u : M' \longrightarrow M$, $v' : N' \longrightarrow N$, $v'' : N'' \longrightarrow N$, $w : N \longrightarrow M$ *et* $w' : N' \longrightarrow M'$ *des applications* A-*linéaires,* $p' : N' \oplus N'' \longrightarrow N'$ *la première projection,* $p'' : N' \oplus N'' \longrightarrow N''$ *la deuxième projection,* $v : N' \oplus N'' \longrightarrow N$ *l'application définie par*

$$v = v'p' + v''p'' \quad ,$$

τ *une* A-*scission de* v'' *et* μ *une* A-*scission de* v . *On suppose que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
 & N'' \arrow[d, "v''"] \\
N' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "w'"] & N \arrow[d, "w"] \\
M' \arrow[r, "u"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif dont les colonnes sont des suites exactes. Si l'on désigne par λ *l'unique* A-*scission de* w *telle que*

$$\lambda w = \mathrm{id}_N - v''\tau$$

(cf. proposition (1.1)) *et si l'on pose*

$$\sigma = w'p'\mu\lambda \quad ,$$

on a :

i) *l'application* σ *est une* A-*scission de* u ;

ii) $(\mathrm{id}_M - u\sigma) \circ w = w \circ (\mathrm{id}_N - v\mu)$;

iii) *si les scissions* τ *et* μ *de* v'' *et* v *respectivement sont normales et si*

$$\mathrm{Ker}\,\mu \subset \mathrm{Ker}\,\tau \quad ,$$

alors σ *est une* A-*scission normale de* u .

Démonstration. On a

$$wv = wv'p' + wv''p'' = wv'p' = uw'p'$$

autrement dit, le diagramme

$$\begin{tikzcd} N' \oplus N'' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "w'p'"] & N \arrow[d, "w"] \\ M' \arrow[r, "u"] & M \end{tikzcd}$$

est commutatif. D'autre part,

$$\mathrm{Ker}(w) = \mathrm{Im}(v'') \subset \mathrm{Im}(v)$$

et comme l'application $w'p'$ est surjective on en déduit que

$$\mathrm{Im}(v) = w^{-1}(\mathrm{Im}(u)) \ .$$

De même, l'application w étant surjective on a

$$\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(w) \ .$$

Les assertions (i) et (ii) résultent donc du lemme (1.2), (i). Sous les hypothèses de l'assertion (iii), on a

$$\mathrm{Ker}(\tau) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_N - v''\tau)$$

(III,1.2) et comme

$$\mathrm{id}_N - v''\tau = \lambda w \ ,$$

on a

$$\mathrm{Ker}(\tau) = \mathrm{Im}(\lambda)$$

(car w est surjective). On en déduit que

$$\mathrm{Ker}(\mu) \subset \mathrm{Im}(\lambda)$$

et l'assertion (iii) résulte du lemme (1.2), (ii).

§2.- Polycylindres privilégiés

(2.1). Soient p un entier, $p \in \mathbb{N}$, U un ouvert de $\mathbb{C}^p$, K un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U et

$$f : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$$

un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules cohérents. On désigne par $B(K;f)$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire $\Gamma(K,f) \otimes \mathrm{id}_{B(K)}$

$$B(K;f) : \Gamma(K,\mathcal{M}') \otimes_{\Gamma(K,\mathcal{O}_U)} B(K) \longrightarrow \Gamma(K,\mathcal{M}) \otimes_{\Gamma(K,\mathcal{O}_U)} B(K) \quad .$$

(On remarque que s'il existe des entiers m et m' tels que $\mathcal{M} = \mathcal{O}_U^m$ et $\mathcal{M}' = \mathcal{O}_U^{m'}$, alors $\Gamma(K,\mathcal{M}) \otimes_{\Gamma(K,\mathcal{O}_U)} B(K)$ s'identifie à $B(K)^m$, $\Gamma(K,\mathcal{M}') \otimes_{\Gamma(K,\mathcal{O}_U)} B(K)$ à $B(K)^{m'}$, et dans ce cas la définition ci-dessus coïncide avec celle du chapitre 0).

Si $\mathcal{M}''$ désigne un $\mathcal{O}_U$-module cohérent et

$$f' : \mathcal{M}'' \longrightarrow \mathcal{M}'$$

un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules, on a

$$B(K;f \circ f') = B(K;f) \circ B(K;f') \quad .$$

Le compact K étant un compact de Stein, si f est un épimorphisme, $\Gamma(K;f)$ l'est également, donc $B(K;f)$ aussi (exactitude à droite du produit tensoriel).

En particulier, pour tout épimorphisme

$$\eta : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

on en déduit un épimorphisme

$$B(K;\eta) : B(K)^m \longrightarrow \Gamma(K,\mathcal{M}) \otimes_{\Gamma(K,\mathcal{O}_U)} B(K) \quad .$$

On désigne par $B_\eta(K;\mathcal{M})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\Gamma(K,\mathcal{M}) \otimes_{(K,\mathcal{O}_U)} B(K)$, muni de la semi-norme $\|\cdot\|_{\eta;K}$ définie par

$$\|s\|_{\eta;K} = \inf_{\substack{t \in B(K)^m \\ B(K;\eta)(t)=s}} \|t\|_K \quad ,$$

la norme $\|\cdot\|_K$ sur $B(K)^m$ étant celle définie au chapitre 0. (On remarque que si $\mathcal{M} = \mathcal{O}_U^m$ et $\eta = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_U^m}$, alors $B_{\mathrm{id}_{\mathcal{O}_U^m}}(K;\mathcal{O}_U^m)$ n'est autre que $B(K)^m$ muni de la norme $\|\cdot\|_K$). La topologie définie par la semi-norme $\|\cdot\|_{\eta;K}$ sur $B_\eta(K;\mathcal{M})$ est la topologie quotient définie par l'épimorphisme $B(K;\eta)$.

Si

$$\eta' : \mathcal{O}_U^{m'} \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow 0$$

désigne un autre épimorphisme et $L(B_{\eta'}(K;M'); B_\eta(K;M))$ l'espace vectoriel des applications $\mathbb{C}$-linéaires continues de $B_{\eta'}(K;M')$ dans $B_\eta(K;M)$, on note $\|\cdot\|_{\eta;\eta';K}$ la semi-norme sur $L(B_{\eta'}(K;M'); B_\eta(K;M))$ déduite des semi-normes $\|\cdot\|_{\eta;K}$ et $\|\cdot\|_{\eta';K}$ sur $B_\eta(K;M)$ et $B_{\eta'}(K;M')$ respectivement.(Si $M = \mathcal{O}_U^m$ et $\eta = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_U^m}$ (resp. si $M' = \mathcal{O}_U^{m'}$ et $\eta' = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_U^{m'}}$) la semi-norme $\|\cdot\|_{\eta;\eta';K}$ est notée plus simplement $\|\cdot\|_{\eta';K}$ (resp. $\|\cdot\|_{\eta;K}$)). Pour toute application $\mathbb{C}$-linéaire continue

$$\lambda : B_{\eta'}(K;M') \longrightarrow B_\eta(K;M')$$

on a

$$\|\lambda\|_{\eta;\eta';K} = \|\lambda\circ B(K;\eta')\|_{\eta;K} \tag{2.1.1}$$

(C'est un résultat général sur les semi-normes quotient, facile à vérifier).
En particulier, on a

$$\|B(K;\eta)\|_{\eta;K} = \|\mathrm{id}_{B_\eta(K;M)}\|_{\eta;\eta;K} \leq 1 \quad . \tag{2.1.2}$$

(En fait, $\|\mathrm{id}_{B_\eta(K;M)}\|_{\eta;\eta;K} = 1$, sauf si la semi-norme $\|\cdot\|_{\eta;K}$ est identiquement nulle dans quel cas $\|\mathrm{id}_{B_\eta(K;M)}\|_{\eta;\eta;K} = 0$).

(2.2) Soient p un entier, $p \in \mathbb{N}$, U un ouvert de $\mathbb{C}^p$ et K un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ contenu dans U .

LEMME 2.2.1.- *Soient* m *et* m' *des entiers,* $m \in \mathbb{N}$, $m' \in \mathbb{N}$,

$$f : M' \longrightarrow M$$

un morphisme de $\mathcal{O}_U$*-modules cohérents et*

$$\eta : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

et

$$\eta' : \mathcal{O}_U^{m'} \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

des épimorphismes. Alors l'application

$$B(K;f) : B_{\eta'}(K;M') \longrightarrow B_\eta(K;M)$$

est une application $\mathbb{C}$*-linéaire continue.*

Démonstration. Soit U' un ouvert de Stein contenu dans U et contenant K . Alors il existe un morphisme de $\mathcal{O}_{U'}$-modules

$$g : \mathcal{O}_{U'}^{m'} \longrightarrow \mathcal{O}_{U'}^m$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{U'}^{m'} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta'|U'"] & \mathcal{O}_{U'}^{m} \arrow[d, "\eta|U'"] \\ M'|U' \arrow[r, "f|U'"] & M|U' \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On en déduit que le diagramme

$$\begin{tikzcd} B(K)^{m'} \arrow[r, "B(K;g)"] \arrow[d, "B(K;\eta')"] & B(K)^{m} \arrow[d, "B(K;\eta)"] \\ B_{\eta'}(K;M') \arrow[r, "B(K;f)"] & B_{\eta}(K;M) \end{tikzcd}$$

est également commutatif. Or, l'application $B(K;g)$ est continue (cf. chapitre 0) et la topologie définie sur $B_{\eta'}(K;M')$ (resp. sur $B_{\eta}(K;M)$) par la semi-norme $\|\cdot\|_{\eta';K}$ (resp. $\|\cdot\|_{\eta;K}$) est la topologie quotient définie par la surjection $B(K;\eta')$ (resp. $B(K;\eta)$) (cf. (2.1)). On en déduit que l'application $B(K;f)$ est continue.

PROPOSITION 2.2.2.- *Soit* M *un* $\mathcal{O}_U$*-module cohérent. Il existe une topologie unique* T *sur* $\Gamma(K,M) \otimes_{\Gamma(K,\mathcal{O}_U)} B(K)$ *telle que pour tout ouvert* U' *de* $\mathbb{C}^p$ *contenu dans* U *et contenant* K , *tout entier* m , $m \in \mathbb{N}$, *et tout épimorphisme de* $\mathcal{O}_U$*-modules*

$$\mathcal{O}_{U'}^{m} \xrightarrow{\eta} M|U \longrightarrow 0 \ ,$$

T *soit la topologie définie par la semi-norme* $\|\cdot\|_{\eta;K}$. *En plus,* T *muni* $\Gamma(K,M) \otimes_{\Gamma(K,\mathcal{O}_U)} B(K)$ *d'une structure d'espace vectoriel topologique, dont le séparé associé est un espace de Banach.*

Démonstration. L'existence de T résulte du lemme (2.2.1) appliqué à $M' = M$ et $f = \mathrm{id}_M$. L'unicité est évidente. La topologie T étant définie par une semi-norme, elle est compatible avec la structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et l'espace séparé associé étant muni de la topologie quotient, par transitivité des topologies quotient et conformément à (2.1), il est un quotient séparé d'un espace de Banach, donc lui-même un espace de Banach.

DÉFINITION 2.2.3.- *Soit* M *un* $\mathcal{O}_U$*-module cohérent. On désigne par* $B(K;M)$ *l'espace vectoriel topologique dont l'espace vectoriel sous-jacent est* $\Gamma(K,M) \otimes_{\Gamma(K,\mathcal{O}_U)} B(K)$ *et dont la topologie est l'unique topologie* T *satisfaisant aux conditions de la proposition* (2.2.2).

Remarque 2.2.4.- Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ des $\mathcal{O}_U$-modules cohérents et $f : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$ un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules. Il résulte aussitôt du lemme (2.2.1) que l'application

$$B(K;f) : B(K;\mathcal{M}') \longrightarrow B(K;\mathcal{M})$$

est une application $\mathbb{C}$-linéaire continue. Si $\mathcal{M}''$ désigne un $\mathcal{O}_U$-module cohérent et $g : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}''$ un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules tel que la suite

$$\mathcal{M}' \xrightarrow{f} \mathcal{M} \xrightarrow{g} \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

soit une suite exacte, le compact K étant un compact de Stein, on en déduit une suite exacte

$$\Gamma(K,\mathcal{M}') \xrightarrow{\Gamma(K,f)} \Gamma(K,\mathcal{M}) \xrightarrow{\Gamma(K,g)} \Gamma(K,\mathcal{M}'') \longrightarrow 0 ,$$

d'où une suite exacte

$$B(K;\mathcal{M}') \xrightarrow{B(K;f)} B(K;\mathcal{M}) \xrightarrow{B(K;g)} B(K;\mathcal{M}'') \longrightarrow 0$$

(exactitude à droite du produit tensoriel). Si U' désigne un ouvert de $\mathbb{C}^p$ tel que $K \subset U' \subset U$ et

$$\eta : \mathcal{O}^n_{U'} \longrightarrow \mathcal{M}|U' \longrightarrow 0$$

un épimorphisme, le morphisme $(g|U') \circ \eta$ est également un épimorphisme et $B(K;\mathcal{M})$ (resp. $B(K;\mathcal{M}'')$) est l'espace vectoriel topologique sous-jacent à l'espace semi-normé $B_\eta(K;\mathcal{M})$ (resp. $B_{(g|U)\circ\eta}(K;\mathcal{M}'')$).

En vertu de la transitivité des topologies quotients et de (2.1), on en déduit que la topologie de $B(K;\mathcal{M}'')$ est la topologie quotient définie par la surjection $B(K;g)$. En revanche, la topologie sur $\mathrm{Im}(B(K;f))$ induite par celle de $B(K;\mathcal{M})$ n'est pas en général la topologie quotient définie par la surjection

$$B(K;f) : B(K;\mathcal{M}') \longrightarrow \mathrm{Im}(B(K;f)) .$$

DÉFINITION 2.2.5.- *Soit* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{O}_U$*-module cohérent. On dit que* K *est privilégié pour* $\mathcal{M}$ *si l'espace vectoriel topologique* $B(K;\mathcal{M})$ *est séparé.*

REMARQUE 2.2.6.- Un quotient séparé d'un espace de Banach étant un espace de Banach, pour que K soit privilégié pour $\mathcal{M}$, il faut et il suffit que $B(K;\mathcal{M})$ soit un espace de Banach. Si

$$\eta : \mathcal{O}^m_U \longrightarrow \mathcal{M}$$

désigne un épimorphisme de $\mathcal{O}_U$-modules et si $\mathcal{N}$ désigne le noyau de η alors K est privilégié pour $\mathcal{M}$ si et seulement si $\mathcal{N}_K$ [(1)] est un sous-espace fermé de $B(K)$. En effet, il existe un ouvert U' de U, contenant K, et un épimorphisme

(1) Pour la définition de $\mathcal{N}_K$ se reporter au chapitre 0.

$$\mathcal{O}^n_{U'} \longrightarrow \mathcal{N}|U' \quad .$$

On en déduit une suite exacte

$$\mathcal{O}^n_{U'} \xrightarrow{f} \mathcal{O}^m_{U'} \xrightarrow{\eta|U'} \mathcal{M}|U' \longrightarrow 0 \quad ,$$

où $\operatorname{Im}(f) = \mathcal{N}|U'$, d'où une suite exacte

$$B(K)^n \xrightarrow{B(K;f)} B(K)^m \xrightarrow{B(K;\eta)} B(K;\mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

(cf. (2.2.4)). On a donc

$$\operatorname{Ker}(B(K;\eta)) = \operatorname{Im}(B(K;f)) = \mathcal{N}_K$$

(cf. chapitre 0). La topologie sur $B(K;\mathcal{M})$ étant la topologie quotient définie par la surjection $B(K;\eta)$ (cf. (2.1)), on en déduit que $B(K;\mathcal{M})$ est séparé si et seulement si $\mathcal{N}_K$ est fermé dans $B(K)^m$.

§3.- Théorème de privilège numérique uniforme pour un morphisme.

LEMME 3.1.- *Soient* p *et* n *des entiers,* $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^{p+n}$ *, compatible avec sa structure de monoïde, moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^{p+n}$ *, privilégiant le sous-monoïde* $\mathbb{N}^p$ *de* $\mathbb{N}^{p+n}$ *,* $\leqq_{\alpha'}$ *la relation d'ordre induite par* $\leqq_\alpha$ *sur* $\mathbb{N}^p$ *,* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$ *,* X *un sous-espace analytique fermé irréductible de* U *,* Z *un fermé analytique de* X *distinct de* X *,* Y *l'ouvert dense de* X *défini par* $Y = X - Z$ *,* $(U_i)_{i\in I}$ *un recouvrement de* U *formé par des ouverts de* $\mathbb{C}^p$ *contenus dans* U *,* M *un sous-*$\mathcal{O}_U$*-module cohérent de* $\mathcal{O}_U^n$ *,* $(m_i)_{i\in I}$ *une famille d'entiers ,* $m_i \in \mathbb{N}$ *,* $(f_i)_{i\in I}$ *une famille de morphismes de* $\mathcal{O}_{U_i}$*-modules*

$$f_i : \mathcal{O}_{U_i}^{m_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_i}^n \quad .$$

On suppose que pour tout i *,* $i \in I$ *,*

$$\mathrm{Im}(f_i) = M|U_i$$

et que

$$S_{\alpha;M;X} \subset Z \quad .$$

Alors pour toute fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow [1,+\infty[\ ,$$

modérée le long de Z *, il existe des fonctions continues*

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad , \quad \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

modérées le long de Z *, telles que pour tout polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *pointé dans* Y *,* (K,y) *, suffisamment effilé pour* $\leqq_{\alpha'}$ *, modérément le long de* Z *, satisfaisant à la condition*

$$e(K;y) \leqq \varphi(y)$$

il existe i *,* $i \in I$ *, tel que :*

i) $K \subset U_i$;

ii) *il existe une scission* $\mathbb{C}$*-linéaire continue normale* σ *de* $B(K;f_i)$

$$\sigma : B(K)^n \longrightarrow B(K)^{m_i}$$

telle que :

a) $\|\sigma\|_K \leqq \psi_1(y)/\rho''^{d_o}(K;y)$,

où

$$d_o = \sup(\pi(M_{\alpha;M;X_{gen}}))$$

π *désignant la première projection*

$$\pi : \mathbb{N}^{p+n} \longrightarrow \mathbb{N}^p$$

(la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit $\leq$ *sur* $\mathbb{N}^p$) ;

b) $\| id_{B(K)^n} - B(K;f_i) \circ \sigma \|_K \leq \psi_2(y)$;

c) $\mathrm{Ker}(\sigma) = \prod_{j=1}^{n} B_{\Delta_j}(K)$,

où pour tout j , $1 \leq j \leq n$,

$$\Delta_j = \{d \in \mathbb{N}^p : (d,e_j) \notin P_{\alpha;M;X_{gen}}\}$$

et $e_1,\dots,e_n$ *désigne la "base" canonique de* $\mathbb{N}^n$.

Démonstration. L'espace U étant paracompact, on peut supposer, quitte à remplacer le recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ par un recouvrement plus fin, que la famille $(U_i)_{i\in I}$ est localement finie (dans U). Posons

$$I' = \{i \in I : U_i \cap X \neq \emptyset\}$$

et

$$A = \{a \in \mathbb{R}^p : \exists d,\ d' \in \mathbb{N}^p ,\ d <_{\alpha'} d' \text{ et } a = d' - d\} .$$

En remarquant que pour tout i , $i \in I'$,

$$P_{\alpha;M|U_i;(X\cap U_i)_{gen}} = P_{\alpha;M;X_{gen}} ,$$

$$M_{\alpha;M|U_i;(X\cap U_i)_{gen}} = M_{\alpha;M;X_{gen}}$$

et

$$S_{\alpha;M|U_i;X\cap U_i} = S_{\alpha;M;X} \cap U_i ,$$

il résulte du théorème (IV,4.3.1) (cf.(III,6.2.1)) que pour tout i , $i \in I'$, il existe un ensemble fini J_i , une famille $(a_{ij})_{j\in J_i}$ d'éléments de A , une famille $(\varphi_{ij})_{j\in J_i}$ de fonctions continues

$$\varphi_{ij} : Y \cap U_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

modérées le long de $Z \cap U_i$, et des fonctions continues

$$\psi_{i1} : Y \cap U_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,\quad \psi_{i2} : Y \cap U_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

modérées le long de $Z \cap U_i$ tels que pour tout point y de $Y \cap U_i$ et tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$, tel que $y \in \mathring{K}$, les conditions

$$e(K;y) \leqq \varphi(y)$$

et

$$\rho''(K;y) \in \bigcap_{j\in J_i} V_{a_{ij};1/\varphi_{ij}(y)}$$

impliquent que

i) $K \subset U_i$;

ii) il existe une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue normale σ de $B(K;f_i)$ telle que :

a) $\|\sigma\|_K \leqq \psi_{i1}(y)/\rho''^{d_o}(K;y)$;

b) $\|id_{B(K)^n} - B(K;f_i)\circ\sigma\|_K \leqq \psi_{i2}(y)$;

c) $\mathrm{Ker}(\sigma) = \prod_{j=1}^{n} B_{\Delta_j}(K)$.

Le point crucial pour la suite est de remarquer, en suivant la démonstration du théorème (IV,4.3.1), ainsi que celles des énoncés qui y conduisent, que la famille $(a_{ij})_{j\in J_i}$ ne dépend que de l'ensemble $M_{\alpha;M|U_i;(X\cap U_i)_{gen}}$ et de la relation d'ordre $\leqq_\alpha$. L'ensemble $M_{\alpha;M|U_i;(X\cap U_i)_{gen}}$ étant indépendant de i , $i\in I'$, on peut donc supposer qu'il existe un ensemble fini J et une famille $(a_j)_{j\in J}$ d'éléments de A tels que pour tout i , $i\in I'$, $J_i = J$ et pour tout j , $j\in J$, $a_{ij} = a_j$. Or, U étant paracompact, il existe un recouvrement ouvert $(U'_i)_{i\in I}$ de U tel que pour tout i , $i\in I$, $\overline{U'_i}\subset U_i$. En remarquant que $(U_i\cap X)_{i\in I'}$ et $(U'_i\cap X)_{i\in I'}$ sont des recouvrements ouverts localement finis de X et que pour tout i , $i\in I'$, $\overline{U'_i\cap X}\subset U_i\cap X$, il résulte de (App. I, 1.3.4) qu'il existe une famille $(\varphi_j)_{j\in J}$ de fonctions continues

$$\varphi_j : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

modérées le long de Z , et des fonctions continues

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

modérées le long de Z , telles que pour tout i , $i\in I'$, tout j , $j\in J$, et tout point y de $Y\cap U'_i$, on ait

$$\varphi_{ij}(y) \leqq \varphi_j(y)$$

$$\psi_{i1}(y) \leqq \psi_1(y)$$

et

$$\psi_{i2}(y) \leqq \psi_2(y) .$$

Alors pour tout point y de Y et tout polycylindre compact K de $\mathbb{C}^p$, tel que $y \in \mathring{K}$, satisfaisant à

$$e(K;y) \leqq \varphi(y)$$

et

$$\rho''(K;y) \in \bigcap_{j\in J} V_{a_j;1/\varphi_j(y)}$$

il existe i , $i \in I'$, tel que $y \in Y \cap U_i'$, ce qui implique que

$$\rho''(K;y) \in \bigcap_{j\in J} V_{a_j;1/\varphi_{ij}(y)} \quad .$$

On en déduit que le polycylindre compact pointé (K,y) satisfait aux conditions (i) et (ii), (a), (b), (c) du lemme, ce qui démontre le lemme (cf. (III,6.2.1)).

PROPOSITION 3.2.- *Soient* p, n, n' *des entiers*, $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n' \in \mathbb{N}$, $\leqq_{\alpha'}$ (resp. $\leqq_{\alpha''}$) *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^{p+n}$ (resp. *sur* $\mathbb{N}^{p+n'}$) , *compatible avec sa structure de monoïde, moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^{p+n}$ (resp. *sur* $\mathbb{N}^{p+n'}$) , *privilégiant le sous-monoïde* $\mathbb{N}^p$ *de* $\mathbb{N}^{p+n}$ (resp. *de* $\mathbb{N}^{p+n'}$) , U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, X *un sous-espace analytique fermé, irréductible de* U , Z *un fermé analytique de* X *distinct de* X , Y *l'ouvert dense de* X *défini par* $Y = X - Z$.

$$f : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{N}$$

un morphisme de $\mathcal{O}_U$*-modules cohérents,*

$$\eta' : \mathcal{O}_U^{n'} \longrightarrow \mathcal{N}'$$

et

$$\eta : \mathcal{O}_U^{n} \longrightarrow \mathcal{N}$$

des épimorphismes de $\mathcal{O}_U$*-modules. On suppose que les relations d'ordre* $\leqq_{\alpha'}$ *et* $\leqq_{\alpha''}$ *induisent la même relation d'ordre* $\leqq_{\alpha}$ *sur* $\mathbb{N}^p$ *et que*

$$S_{\alpha'';\mathcal{M}';X} \cup S_{\alpha';\mathcal{M};X} \cup S_{\alpha';\mathcal{M}'';X} \subset Z \quad ,$$

où

$$\mathcal{M}' = \mathrm{Ker}(\eta') \ , \quad \mathcal{M} = \mathrm{Ker}(\eta) \quad et \quad \mathcal{M}'' = \eta^{-1}(\mathrm{Im}(f)) \quad .$$

Alors pour toute fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow [1,+\infty[\quad ,$$

modérée le long de Z , *il existe des fonctions continues*

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad , \quad \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad ,$$

modérées le long de Z , *telles que pour tout polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *pointé dans* Y , $(K;y)$, *suffisamment effilé pour* $\leqq_{\alpha}$, *modérément le long de* Z , *satisfaisant à*

$$e(K;y) \leqq \varphi(y)$$

on ait :

i) $K \subset U$;

ii) K *est privilégié pour* N *et* N' ;

iii) *il existe une scission* $\mathbb{C}$*-linéaire continue normale* σ *de* $B(K;f)$

$$\sigma : B(K;N) \longrightarrow B(K;N')$$

telle que :

$$\text{a)} \quad \|\sigma\|_{\eta';\eta;K} \leqq \psi_1(y)/\rho''^{d_o}(K;y) \ ,$$

où

$$d_o = \sup(\pi(M_{\alpha'};M';X_{gen}))$$

π *désignant la première projection*

$$\pi : \mathbb{N}^{p+n} \longrightarrow \mathbb{N}^p$$

(*la borne supérieure étant relative à la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$) ;

$$\text{b)} \quad \|id_{B(K;N)} - B(K;f)\circ\sigma\|_{\eta;\eta;K} \leqq \psi_2(y) \ .$$

<u>Démonstration</u>. Il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de U formé par des ouverts de Stein de U , une famille $(m_i)_{i\in I}$ d'entiers, $m_i \in \mathbb{N}$, et une famille $(\eta_i)_{i\in I}$ d'épimorphismes de $\mathcal{O}_{U_i}$-modules

$$\eta_i : \mathcal{O}_{U_i}^{m_i} \longrightarrow M|U_i \ .$$

En composant η_i avec l'injection canonique

$$M|U_i \longrightarrow \mathcal{O}_{U_i}^n \ ,$$

on en déduit un morphisme de $\mathcal{O}_{U_i}$-modules

$$g_i : \mathcal{O}_{U_i}^{m_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_i}^n \ .$$

D'autre part, l'ouvert U_i étant de Stein et $\eta|U_i$ un épimorphisme, il existe un morphisme

$$f_i : \mathcal{O}_{U_i}^{n'} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_i}^n$$

tel que

$$(\eta|U_i)\circ f_i = (f|U_i)\circ(\eta'|U_i) \ .$$

On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_{U_i}^{m_i} \arrow[d, "g_i"] \\ \mathcal{O}_{U_i}^{n'} \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\eta'|U_i"] & \mathcal{O}_{U_i}^{n} \arrow[d, "\eta|U_i"] \\ N'|U_i \arrow[r, "f|U_i"] \arrow[d] & N|U_i \arrow[d] \\ 0 & 0 \end{tikzcd}$$

dont les colonnes sont exactes. Soient

$$p_i' : \mathcal{O}_{U_i}^{n'} \oplus \mathcal{O}_{U_i}^{m_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_i}^{n'}$$

$$(\text{resp. } p_i'' : \mathcal{O}_{U_i}^{n'} \oplus \mathcal{O}_{U_i}^{m_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_i}^{m_i} \ )$$

la première (resp. la deuxième) projection et

$$h_i : \mathcal{O}_{U_i}^{n'} \oplus \mathcal{O}_{U_i}^{m_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_i}^{n}$$

le morphisme de $\mathcal{O}_{U_i}$-modules défini par

$$h_i = f_i p_i' + g_i p'' \ .$$

On remarque que pour tout i , $i \in I$, on a

$$\operatorname{Im}(g_i) = M|U_i \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(h_i) = M''|U_i \ .$$

En vertu de (3.1) et de (IV,4.3.2), il existe des fonctions continues

$$\psi_1' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \quad \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \quad \psi_2' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ ,$$

modérées le long de Z , telles que pour tout polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$ pointé dans Y , (K,y) , suffisamment effilé pour $\leqq_\alpha$, modérément le long de Z , satisfaisant à

$$e(K;y) \leqq \varphi(y)$$

il existe i , $i \in I$, tel que

i) $K \subset U_i$;

ii) il existe une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue, normale μ de $B(K;h_i)$ telle que a) $\|\mu\|_K \leq \psi_1'(y)/\rho''^{d_0}(K;y)$;

b) $\|\mathrm{id}_{B(K)^n} - B(K;h_i) \circ \mu\|_K \leq \psi_2(y)$;

c) $\mathrm{Ker}(\mu) = \prod_{j=1}^{n} B_{\Delta_j}(K)$,

où pour tout j , $1 \leq j \leq n$,

$$\Delta_j = \{d \in \mathbb{N}^p : (d,e_j) \notin P_{\alpha';M'';X_{gen}}\}$$

et $e_1,\ldots,e_n$ désigne la "base" canonique de $\mathbb{N}^n$;

iii) il existe une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue, normale τ de $B(K;g_i)$ telle que

a) $\|\mathrm{id}_{B(K)^n} - B(K;g_i) \circ \tau\|_K \leq \psi_2'(y)$;

b) $\mathrm{Ker}(\tau) = \prod_{j=1}^{n} B_{\Delta_j'}(K)$,

où pour tout j , $1 \leq j \leq n$,

$$\Delta_j' = \{d \in \mathbb{N}^p : (d,e_j) \notin P_{\alpha';M;X_{gen}}\} ;$$

iv) M_K' est un facteur direct (topologique) de $B(K)^{n'}$.

On remarque que M_K' étant un facteur direct de $B(K)^{n'}$, M_K' est un sous-espace vectoriel fermé de $B(K)^{n'}$, donc K est privilégié pour N' (cf. (2.2.6)). De même, il résulte de (iii) que $\mathrm{Im}(B(K;g_i))$ est un facteur direct (topologique) de $B(K)^n$, et comme

$$\mathrm{Im}(B(K;g_i)) = M_K$$

(cf. chapitre 0), on en déduit que K est privilégié pour N , ce qui démontre l'assertion (ii) de la proposition.

D'autre part, en vertu de (2.2.4), le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & B(K)^{m_i} \arrow[d, "B(K;g_i)"] \\
B(K)^{n'} \arrow[r, "B(K;f_i)"] \arrow[d, "B(K;\eta')"] & B(K)^n \arrow[d, "B(K;\eta)"] \\
B(K;N') \arrow[r, "B(K;f)"] \arrow[d] & B(K;N) \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif dont les colonnes sont exactes. En plus, $B(K;p_i')$ (resp. $B(K;p_i'')$) n'est autre que la première (resp. deuxième) projection

$$B(K)^{n'} \oplus B(K)^{m_i} \longrightarrow B(K)^{n'}$$

$$(\text{resp.}\quad B(K)^{n'} \oplus B(K)^{m_i} \longrightarrow B(K)^{m_i}\ )$$

et

$$B(K;h_i) = B(K;f_i) \circ B(K;p_i') + B(K;g_i) \circ B(K;p_i'') \quad .$$

D'autre part, comme

$$M \subset M'' \ ,$$

on a

$$P_{\alpha';M;X_{gen}} \subset P_{\alpha';M'';X_{gen}} \ ,$$

ce qui implique que pour tout j , $1 \leq j \leq n$,

$$\Delta_j \subset \Delta_j' \ ,$$

et en vertu des conditions (ii), (c) et (iii), (b) ci-dessus, on a

$$\mathrm{Ker}(\mu) \subset \mathrm{Ker}(\tau) \quad .$$

Alors il résulte de la proposition (1.3) que si l'on désigne par λ l'unique $\mathbb{C}$-scission de $B(K;\eta)$ telle que

(3.2.1) $$\lambda \circ B(K;\eta) = \mathrm{id}_{B(K)^n} - B(K;g_i) \circ \tau$$

(cf. (1.1)) et si l'on pose

$$\sigma = B(K;\eta') \circ B(K;p_i') \circ \mu\lambda \quad ,$$

σ est une scission $\mathbb{C}$-linéaire normale de $B(K;f)$ et

(3.2.2) $$(\mathrm{id}_{B(K;N)} - B(K;f)\sigma) \circ B(K;\eta) = B(K;\eta) \circ (\mathrm{id}_{B(K)^n} - B(K;h_i)\mu) \quad .$$

L'application $\mathrm{id}_{B(K)^n} - B(K;g_i)\tau$ étant continue et la topologie de $B(K;N)$ étant la topologie quotient définie par la surjection $B(K;\eta)$ (cf.(2.1)), l'application λ est continue et en vertu de (3.2.1), de (2.1.1) et de la condition (iii), (a) ci-dessus, on a

(3.2.3) $$\|\lambda\|_{\eta;K} = \|\mathrm{id}_{B(K)^n} - B(K;g_i)\tau\|_K \leqq \psi_2'(y) \ .$$

On en déduit que l'application σ est continue et comme

$$\|B(K;\eta')\|_{\eta';K} \leqq 1$$

(cf.(2.1.2) et

$$\|B(K;p_i')\|_K = 1 \ ,$$

on a

$$\|\sigma\|_{\eta';\eta;K} \leqq \|\mu\|_K \ \|\lambda\|_{\eta;K} \quad ,$$

et il résulte de (3.2.3) et de la condition (ii), (a) ci-dessus que

$$\|\sigma\|_{\eta';\eta;K} \leqq \psi_1'(y) \ \psi_2'(y)/\rho''^{d_o}(K;y) \quad .$$

Si l'on pose $\psi_1 = \psi_1' \ \psi_2'$, la fonction

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

est continue, modérée le long de Z (App. I, 1.3.1) et

$$\|\sigma\|_{\eta';\eta;K} \leqq \psi_1(y)/\rho''^{d_o}(K;y) \quad ,$$

ce qui démontre l'assertion (iii), (a) de la proposition.

De même, il résulte de (3.2.2), (2.1.1), (2.1.2) et de la condition (ii), (b) ci-dessus que

$$\|\mathrm{id}_{B(K;N)} - B(K;f)\sigma\|_{\eta;\eta;K} = \|(\mathrm{id}_{B(K;N)} - B(K;f)\sigma) \circ B(K;\eta)\|_{\eta;K} =$$

$$= \|B(K;\eta) \circ (\mathrm{id}_{B(K)^n} - B(K;h_i)\mu\|_{\eta;K} \leqq \|\mathrm{id}_{B(K)^n} - B(K;h_i)\mu\|_K \leqq \psi_2(y),$$

ce qui démontre la proposition.

THÉORÈME 3.3.- *Soient* p, n, n' *des entiers,* $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n' \in \mathbb{N}$, $\leqq_\alpha$ *une relation d'ordre total sur* $\mathbb{N}^p$, *compatible avec sa structure de monoïde, moins fine que la relation d'ordre produit* $\leqq$ *sur* $\mathbb{N}^p$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$,

$$f : N' \longrightarrow N$$

un morphisme de $\mathcal{O}_U$*-modules cohérents,*

$$\eta' : \mathcal{O}_U^{n'} \longrightarrow N'$$

et

$$\eta : \mathcal{O}_U^{n} \longrightarrow N$$

des épimorphismes de $\mathcal{O}_U$*-modules. Alors il existe une stratification* $\mathbb{C}$*-analytique* $(Y_i)_{i\in I}$ *de* U *et pour tout* i , $i\in I$, *un élément* d_i *de* $\mathbb{N}^p$, *tels que pour toute fonction continue*

$$\varphi_i : Y_i \longrightarrow [1,+\infty[,$$

modérée le long de $\overline{Y_i} - Y_i$, *il existe des fonctions continues*

$$\psi_{i1} : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \textit{et} \quad \psi_{i2} : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad ,$$

modérées le long de $\overline{Y_i} - Y_i$, *telles que pour tout polycylindre compact de* $\mathbb{C}^p$ *pointé dans* Y_i , (K,y) , *suffisamment effilé pour* $\leqq_\alpha$, *modérément le long de* $\overline{Y_i} - Y_i$, *satisfaisant à la condition*

$$e(K;y) \leqq \varphi_i(y)$$

on ait :

i) $K\subset U$;

ii) K *est privilégié pour* N *et* N' ;

iii) *il existe une scission* $\mathbb{C}$*-linéaire continue, normale* σ *de* $B(K;f)$

$$\sigma : B(K;N) \longrightarrow B(K;N')$$

telle que :

$$\text{a)} \quad \|\sigma\|_{\eta';\eta;K} \leqq \psi_{i1}(y)/\rho''^{\,d_i}(K;y) \quad ;$$

$$\text{b)} \quad \|id_{B(K;N)} - B(K;f)\circ\sigma\|_{\eta;\eta;K} \leqq \psi_{i2}(y) \quad .$$

Démonstration. Soit $\leqq_{\alpha'}$ (resp. $\leqq_{\alpha''}$) la relation d'ordre total $\leqq_{\overline{\alpha}}$ sur $\mathbb{N}^{p+n}$ (resp. sur $\mathbb{N}^{p+n'}$) définie dans (IV,3.0.4) et posons

$$M = \mathrm{Ker}(\eta) \ , \quad M' = \mathrm{Ker}(\eta') \quad \text{et} \quad M'' = \eta^{-1}(\mathrm{Im}(f)) \ .$$

En vertu de (IV,4.1.2) et de (II,3.4.1), il existe une stratification $\mathbb{C}$-analytique $(Y_i)_{i\in I}$ telle que pour tout i , $i\in I$,

$$S_{\alpha'';M';\overline{Y_i}} \cup S_{\alpha';M;\overline{Y_i}} \cup S_{\alpha';M'';\overline{Y_i}} \subset \overline{Y_i} - Y_i$$

et le théorème résulte aussitôt de la proposition 3.2.

Remarque 3.3.1.- On peut énoncer des corollaires de ce théorème, analogues aux corollaires du théorème (IV,4.4.1). On laissera le soin au lecteur de le faire et on se bornera d'énoncer le cas particulier où la relation d'ordre $\leqq_\alpha$ est la relation d'ordre antilexicographique et où on se limite aux polydisques :

COROLLAIRE 3.3.2.- *Soient* p, n, n' *des entiers*, $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n' \in \mathbb{N}$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$,

$$f : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{N}$$

un morphisme de $\mathcal{O}_U$*-modules cohérents,*

$$\eta' : \mathcal{O}_U^{n'} \longrightarrow \mathcal{N}'$$

et

$$\eta : \mathcal{O}_U^{n} \longrightarrow \mathcal{N}$$

des épimorphismes de $\mathcal{O}_U$*-modules. Alors il existe une stratification* $\mathbb{C}$*-analytique* $(Y_i)_{i\in I}$ *de* U *et pour tout* i , $i \in I$, *un élément* d_i *de* $\mathbb{N}^p$, *un nombre réel* δ_i , $\delta_i \in \mathbb{R}_+$, *et des fonctions continues*

$$\psi_i : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \quad \psi_{i1} : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad et \quad \psi_{i2} : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

modérées le long de $\overline{Y}_i - Y_i$, *tels que pour tout point* y *de* Y_i *et tout polydisque fermé* K *de* $\mathbb{C}^p$ *de centre* y *et de polyrayon* $\rho = (\rho_1,\dots,\rho_p)$, $\rho \in (\mathbb{R}_+^*)^p$, *les conditions*

$$\rho_1 < 1/\psi_i(y),\ \rho_2 < \rho_1^{\delta_i},\dots,\rho_p < \rho_{p-1}^{\delta_i}$$

impliquent que

i) $K \subset U$;

ii) K *est privilégié pour* $\mathcal{N}$ *et* $\mathcal{N}'$;

iii) *il existe une scission* $\mathbb{C}$*-linéaire continue, normale* σ *de* $B(K;f)$ *telle que*

a) $\|\sigma\|_{\eta';\eta;K} \leqq \psi_{i1}(y)/\rho^{d_i}$;

b) $\|id_{B(K;\mathcal{N})} - B(K;f)\circ\sigma\|_{\eta;\eta;K} \leqq \psi_{i2}(y)$.

§4.- Théorème de privilège numérique uniforme le long d'un "diviseur à l'infini".

Dans ce paragraphe, on démontre une conséquence du théorème de privilège numérique uniforme (3.3), utile à l'étude de la variation de la norme des scissions construites dans ce théorème, quand "on s'approche" d'un fermé analytique. Dans l'appendice III, on esquissera comment on peut appliquer ce résultat pour établir une théorie de cohomologie à croissance des modules cohérents.

(4.1) On rappelle que $d(.,.)$ désigne la distance sur $\mathbb{C}^p$ déduite de la norme sup.

THÉORÈME 4.1.1.- *Soient* p, m, m' *des entiers*, $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m' \in \mathbb{N}$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, Z *un fermé analytique d'intérieur vide de* U, Y *l'ouvert dense de* U *défini par* $Y = U - Z$, $(M_k)_{1 \leq k \leq m}$ *une famille de* $\mathcal{O}_U$*-modules cohérents*, $(f_{k'})_{1 \leq k' \leq m'}$ *une famille de morphismes de* $\mathcal{O}_U$*-modules cohérents*

$$f_{k'} : N'_{k'} \longrightarrow N_{k'}$$

et pour tout k', $1 \leq k' \leq m'$, $n_{k'}$, $n'_{k'}$ *des entiers*, $n_{k'} \in \mathbb{N}$, $n'_{k'} \in \mathbb{N}$, *et*

$$\eta_{k'} : \mathcal{O}_U^{n_{k'}} \longrightarrow N_{k'}$$

et

$$\eta'_{k'} : \mathcal{O}_U^{n'_{k'}} \longrightarrow N'_{k'}$$

des épimorphismes de $\mathcal{O}_U$*-modules. Alors pour toute fonction continue*

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

modérée le long de Z, *il existe des fonctions continues*

$$\varphi' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* , \ \psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* , \ \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

modérées le long de Z, *et une famille* $(K_i)_{i \in I}$ *de polydisques fermés de* $\mathbb{C}^p$, *contenus dans* Y, *tels que :*

i) *pour tout point* y *de* Y *on a :*

a) *pour tout* i, $i \in I$, *tel que* $y \in \mathring{K}_i$

$$K_i \subset \overline{D}(y;(1/\varphi(y),\ldots,1/\varphi(y))) \ ;$$

b) *il existe* i, $i \in I$, *tel que* $y \in \mathring{K}_i$ *et*

$$\overline{D}(y;(1/\varphi'(y),\ldots,1/\varphi'(y))) \subset K_i$$

(et en particulier $(\mathring{K}_i)_{i \in I}$ *est un recouvrement de* Y *) ;*

ii) *pour tout* i, $i \in I$, *on a :*

a) *pour tout* k, $1 \leq k \leq m$, K_i *est privilégié pour* M_k ;

b) *pour tout* k' , $1 \leq k' \leq m'$, K_i *est privilégié pour* $\mathcal{N}_{k'}$ *et* $\mathcal{N}'_{k'}$;

iii) *pour tout* i , $i \in I$, *et tout* k' , $1 \leq k' \leq m'$, *il existe une scission* $\mathbb{C}$*-linéaire continue, normale* σ *de* $B(K_i;f_{k'})$

$$\sigma : B(K_i;\mathcal{N}_{k'}) \longrightarrow B(K_i;\mathcal{N}'_{k'})$$

telle que

a) $\|\sigma\|_{\eta'_{k'};\eta_k;K_i} \leq \inf_{y \in K_i} \psi_1(y)$

b) $\|id_{B(K_i;\mathcal{N}_{k'})} - B(K_i;f_{k'}) \circ \sigma\|_{\eta_{k'};\eta_{k'};K_i} \leq \inf_{y \in K_i} \psi_2(y)$

Démonstration. La démonstration repose uniquement sur le corollaire (3.3.2) et sur les résultats du §2 de l'appendice I, découlant de l'inégalité de Łojasiewicz. Néanmoins, elle est longue et technique. On procèdera par plusieurs réductions.

I) On peut supposer que $m = m' = 1$. En effet, si l'on pose

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{k=1}^{m} \mathcal{M}_k \ , \quad \mathcal{N} = \bigoplus_{k'=1}^{m'} \mathcal{N}_{k'} \ , \quad \mathcal{N}' = \bigoplus_{k'=1}^{m'} \mathcal{N}'_{k'} \ ,$$

$$n = \sum_{k'=1}^{m'} n_{k'} \quad \text{et} \quad n' = \sum_{k'=1}^{m'} n'_{k'}$$

et si l'on considère les morphismes de $\mathcal{O}_U$-modules

$$f : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{N} \ ,$$

$$\eta : \mathcal{O}_U^n \longrightarrow \mathcal{N}$$

et

$$\eta' : \mathcal{O}_U^{n'} \longrightarrow \mathcal{N}'$$

définis par

$$f = \bigoplus_{k'=1}^{m'} f_{k'} \ , \quad \eta = \bigoplus_{k'=1}^{m'} \eta_{k'} \ \text{et} \ \eta' = \bigoplus_{k'=1}^{m'} \eta'_{k'} \ ,$$

on remarque que η et η' sont des épimorphismes et il résulte du cas particulier du théorème $(m = m' = 1)$ qu'il existe des fonctions continues

$$\varphi' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \quad \psi'_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \quad \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ ,$$

modérées le long de Z , et une famille $(K_i)_{i \in I}$ de polydisques fermés de $\mathbb{C}^p$, contenus dans Y satisfaisant à l'assertion (i) du théorème et tels que :

ii') pour tout i , $i \in I$, K_i est privilégié pour $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$;

iii') pour tout i , $i \in I$, il existe une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue, normale

$$\sigma' : B(K_i;\mathcal{N}) \longrightarrow B(K_i;\mathcal{N}')$$

de $B(K_i;f)$ telle que

$$\text{a'}) \quad \|\sigma'\|_{\eta';\eta;K_i} \leqq \inf_{y \in K_i} \psi_1'(y) \quad ;$$

$$\text{b'}) \quad \|\mathrm{id}_{B(K_i;\mathcal{N})} - B(K_i;f) \circ \sigma'\|_{\eta;\eta;K_i} \leqq \inf_{y \in K_i} \psi_2(y) \quad .$$

La condition (ii') implique aussitôt l'assertion (ii) du théorème, en remarquant que $B(K_i;\mathcal{M})$ (resp. $B(K_i;\mathcal{N})$, resp. $B(K_i;\mathcal{N}')$) est somme directe topologique de la famille d'espaces vectoriels topologiques $(B(K_i;\mathcal{M}_k))_{1 \leq k \leq m}$ (resp. $(B(K_i;\mathcal{N}_{k'}))_{1 \leq k' \leq m'}$, resp. $(B(K_i;\mathcal{N}'_{k'}))_{1 \leq k' \leq m'}$) . D'autre part, la scission σ' est définie par une matrice

$$(\sigma'_{k'k''})_{1 \leq k' \leq m', 1 \leq k'' \leq m'} \quad ,$$

où

$$\sigma'_{k'k''} : B(K_i;\mathcal{N}_{k''}) \longrightarrow B(K_i;\mathcal{N}'_{k'})$$

est une application $\mathbb{C}$-linéaire continue. On vérifie aussitôt que

$$\|\sigma'_{k'k''}\|_{\eta'_{k'};\eta_{k''};K_i} \leqq \|\sigma'\|_{\eta';\eta;K_i}$$

et que $\sigma'_{k'k'}$ est une scission de $B(K_i;f_{k'})$ (pas nécessairement normale). Soit k' , $1 \leqq k' \leqq m'$, et posons

$$\sigma = \sigma'_{k'k'} \, B(K_i;f_{k'})\sigma'_{k'k'} \quad .$$

En vertu de (III,1.1.1), σ est une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue, normale de $B(K_i;f_{k'})$ et on a

$$\|\mathrm{id}_{B(K_i;\mathcal{N}_{k'})} - B(K_i;f_{k'})\sigma\|_{\eta_{k'};\eta_{k'};K_i} =$$

$$= \|\mathrm{id}_{B(K_i;\mathcal{N}_{k'})} - B(K_i;f_{k'})\sigma'_{k'k'}\|_{\eta_{k'};\eta_{k'};K_i} \leqq$$

$$\leqq \|\mathrm{id}_{B(K_i;\mathcal{N})} - B(K_i;f)\sigma'\|_{\eta;\eta;K_i} \leqq \inf_{y \in K_i} \psi_2(y) \quad ,$$

ce qui démontre l'assertion (iii), (b) du théorème. Enfin, si l'on pose $\psi_1 = \psi_1' \, (1 + \psi_2)$, la fonction

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

est continue, modérée le long de Z (App.I, 1.3.2), et on a

$$\|\sigma\|_{\eta'_{k'};\eta_{k'};K_i} = \|\sigma'_{k'k'} B(K_i;f_{k'})\sigma'_{k'k'}\|_{\eta'_{k'};\eta_{k'};K_i} \leqq$$

$$\leqq \|\sigma'_{k'k'}\|_{\eta'_{k'};\eta_{k'};K_i} + \|\sigma'_{k'k'}\|_{\eta'_{k'};\eta_{k'};K_i} \|id_{B(K_i;N_{k'})} - B(K_i;f_{k'})\sigma'_{k'k'}\|_{\eta_{k'};\eta_{k'};K_i} \leqq$$

$$\leqq \|\sigma'\|_{\eta';\eta;K_i} (1 + \|id_{B(K_i;N)} - B(K;f)\ \sigma'\|_{\eta;\eta;K_i} \leqq$$

$$\leqq \inf_{y\in K_i} \psi_1'(y)\ (1 + \inf_{y\in K_i} \psi_2(y)) \leqq \inf_{y\in K_i} \psi_1(y) \quad ,$$

ce qui démontre l'assertion (iii), (a) du théorème.

Désormais on supposera donc que $m = m' = 1$ et on omettra l'indice 1 en posant $M = M_1$, $f = f_1$ et ainsi de suite.

II) Il suffit de démontrer le théorème localement sur U . En effet, soit $(U_j)_{j\in J}$ un recouvrement localement fini (sur U) de U , par des ouverts relativement compacts dans U , satisfaisant au théorème. Soit

$$\varphi_j : Y \cap U_j \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

la fonction définie par

$$\varphi_j(y) = \sup\{\varphi(y),\ 1/R_{U_j}(y)\} = \sup\{\varphi(y), 2/d(y,\mathbb{C}^p - U_j), 1\}$$

(cf. (III,4.4.1)). En vertu de (III,4.4.1) et (App.I, 1.2.1, 1.3.3), la fonction φ_j est continue, modérée le long de $Z \cap U_j$. Alors par hypothèse, pour tout j , $j \in J$, il existe des fonctions continues

$$\varphi_j' : Y \cap U_j \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \quad \psi_{1j} : Y \cap U_j \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \quad \psi_{2j} : Y \cap U_j \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ ,$$

modérées le long de $Z \cap U_j$, et une famille $(K_i)_{i\in I_j}$ de polydisques fermés de $\mathbb{C}^p$, contenus dans $Y \cap U_j$, tels que :

i_j) pour tout point y de $Y \cap U_j$ on a :

a_j) pour tout i , $i \in I_j$, tel que $y \in \overset{\circ}{K}_i$

$$K_i \subset \overline{D}(y;(1/\varphi_j(y),\dots,1/\varphi_j(y))) \ ;$$

b_j) il existe i , $i \in I_j$, tel que $y \in \overset{\circ}{K}_i$ et

$$\overline{D}(y;(1/\varphi_j'(y),\ldots,1/\varphi_j'(y)))\subset K_i \quad ;$$

ii_j) pour tout i , $i\in I_j$, K_i est privilégié pour M , N et N' ;

iii_j) pour tout i , $i\in I_j$, il existe une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue, normale σ de $B(K;f)$

$$\sigma : B(K;N) \longrightarrow B(K;N')$$

telle que

$$a_j)\ \ \|\sigma\|_{\eta';\eta;K_i} \leqq \inf_{y\in K_i} \psi_{1j}(y) \quad ;$$

$$b_j)\ \ \|id_{B(K_i;N)} - B(K_i;f)\sigma\|_{\eta;\eta;K_i} \leqq \inf_{y\in K_i} \psi_{2j}(y) \quad .$$

Soit $(U_j')_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de U tel que pour tout j , $j\in J$, $\overline{U}_j'\subset U_j$ et posons

$$\varepsilon_j = d(\overline{U}_j', \mathbb{C}^p - U_j) \quad .$$

On a $\varepsilon_j\in\mathbb{R}_+^*$, car U_j étant relativement compact dans U , $\overline{U}_j'$ est compact. On pose

$$V_j = \{y\in\mathbb{C}^p : d(y,\overline{U}_j') < \varepsilon_j/2\} \quad .$$

L'ensemble V_j est une partie ouverte de U_j et on a $\overline{U}_j'\subset V_j$ et $\overline{V}_j\subset U_j$. Soit

$$I_j' = \{i\in I_j : K_i\cap U_j' \neq \emptyset\}$$

et démontrons que pour tout i , $i\in I_j'$, $K_i\subset V_j$.

En effet, U_j' étant ouvert il existe y tel que $y\in U_j'\cap\mathring{K}_i$, et en vertu de (i_j), (a_j) , on a

$$K_i\subset\overline{D}(y;(1/\varphi_j(y),\ldots,1/\varphi_j(y))) \quad ,$$

ce qui implique que pour tout y' , $y'\in K_i$,

$$d(y,y')\leqq d(y,\mathbb{C}^p - U_j)/2 < \varepsilon_j/2$$

(car $y\in\mathring{\overline{U}}_j'$) . On en déduit que $y'\in V_j$, d'où $K_i\subset V_j$. En vertu de (App. I, 1.3.4), il existe des fonctions continues

$$\varphi' : Y\longrightarrow\mathbb{R}_+^* \ ,\ \psi_1 : Y\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ ,\ \psi_2 : Y\longrightarrow\mathbb{R}_+^* \ ,$$

modérées le long de Z , telles que pour tout j , $j\in J$, et tout y , $y\in Y\cap V_j$, on ait

$$\varphi'_j(y) \leqq \varphi'(y) \ , \quad \psi_{1j}(y) \leqq \psi_1(y) \quad \text{et} \quad \psi_{2j}(y) \leqq \psi_2(y) \ .$$

Enfin, posons

$$I = \bigcup_{j \in J} I'_j$$

(en supposant pour simplifier que la famille $(I'_j)_{j \in J}$ est formée d'ensembles deux à deux disjoints) et considérons la famille de polydisques $(K_i)_{i \in I}$. Comme pour tout j, $j \in J$, et tout y, $y \in Y \cap U_j$ on a

$$\varphi(y) \leqq \varphi_j(y) \quad ,$$

l'assertion (i), (a) du théorème résulte aussitôt des conditions (i_j), (a_j). Pour démontrer l'assertion (i), (b), on remarque que pour tout point y de Y il existe j, $j \in J$, tel que $y \in \overset{\circ}{U'_j}$, et en vertu de (i_j), (b_j), il existe i, $i \in I_j$, tel que $y \in K_i$ et

$$\bar{D}(y\,;(1/\varphi'_j(y), \dots, 1/\varphi'_j(y))) \subset K_i \ .$$

Comme $y \in U'_j$, on a $K_i \cap U'_j \neq \emptyset$, donc $i \in I'_j$, d'où $i \in I$, et comme $U'_j \subset V_j$, on a

$$\varphi'_j(y) \leqq \varphi'(y) \quad ,$$

ce qui démontre l'assertion (i), (b), du théorème. L'assertion (ii) résulte aussitôt des conditions (ii_j). Enfin, pour démontrer l'assertion (iii), on remarque que pour tout i, $i \in I$, il existe j, $j \in J$, tel que $i \in I'_j$, et que la condition (iii_j) entraine l'existence d'une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue, normale σ de $B(K_i;f)$, satisfaisant aux inégalités (iii_j), (a_j) et (iii_j), (b_j). Or, on a démontré que pour tout i, $i \in I'_j$, on a $K_i \subset V_j$, ce qui implique que

$$\inf_{y \in K_i} \psi_{1j}(y) \leqq \inf_{y \in K_i} \psi_1(y) \quad \text{et} \quad \inf_{y \in K_i} \psi_{2j}(y) \leqq \inf_{y \in K_i} \psi_2(y) \quad ,$$

et démontre l'assertion (iii) du théorème.

III) On peut supposer que $m = 0$ et $m' = 1$ (autrement dit on peut "oublier" $\mathcal{M}$). En effet, en vertu de la réduction (II), on peut supposer qu'il existe un entier n'' et un épimorphisme de $\mathcal{O}_U$-modules

$$\eta'' : \mathcal{O}_U^{n''} \longrightarrow \mathcal{M} \ .$$

Si l'on pose $n_2 = n'_2 = n''$, $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}'_2 = \mathcal{M}$, $\eta_2 = \eta'_2 = \eta''$ et $f_2 = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ on remarque qu'il suffit de démontrer le théorème pour $m = 0$ et $m' = 2$ et en raisonnant comme dans la réduction (I), on se ràmène au cas $m = 0$ et $m' = 1$.

IV) Dans les inégalités (iii), (a), et (iii), (b) du théorème, on peut remplacer les bornes inférieures par des bornes supérieures. En effet, supposons qu'on ait démontré la forme la plus faible du théorème (majorations par des bornes supérieures), et considérons la fonction

$$\varphi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

définie par

$$\varphi_1(y) = \{\sup \varphi(y), 1/R_Y(y)\}$$

(cf.(III,4.4.1)). La fonction φ_1 est continue, modérée le long de Z (App. I, 2.1.1, 1.3.3), et par hypothèse il existe des fonctions continues

$$\varphi' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* , \psi_1' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* , \psi_2' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

modérées le long de Z, et une famille $(K_i)_{i\in I}$ de polydisques fermés de $\mathbb{C}^p$, contenus dans Y, satisfaisant

a) à l'assertion (i) du théorème où l'on a remplacé φ par φ_1 ;

b) à l'assertion (ii) du théorème;

c) à l'assertion (iii) du théorème où l'on a remplacé les bornes inférieures par des bornes supérieures, ψ_1 par ψ_1' et ψ_2 par ψ_2' .

Comme $\varphi \leqq \varphi_1$, l'assertion (i) du théorème résulte de la condition (a). D'autre part, comme $\varphi \leqq 1/R_Y$, la condition (a) implique que pour tout i, $i \in I$, et tout y, $y \in K_i$,

$$K_i \subset \overline{D}(y;(R_Y(y),\ldots,R_Y(y)))$$

et en vertu de (App.I, 2.2.3), il existe des fonctions continues

$$\psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* , \quad \psi_2 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

modérées le long de Z, telle que pour tout i, $i \in I$,

$$\sup_{y\in K_i} \psi_1'(y) \leqq \inf_{y\in K_i} \psi_1(y) \quad \text{et} \quad \sup_{y\in K_i} \psi_2'(y) \leqq \inf_{y\in K_i} \psi_2(y) ,$$

et alors l'assertion (iii) du théorème résulte de la condition (c) ci-dessus.

V) En vertu du corollaire (3.3.2), il existe une stratification $\mathbb{C}$-analytique $(Y_j)_{j\in J}$ de U et pour tout j, $j \in J$, un nombre réel δ_j, $\delta_j \in \mathbb{R}_+$, un élément d_j de $\mathbb{N}^p$ et des fonctions continues

$$\varphi_j : Y_j \longrightarrow \mathbb{R}_+^* , \quad \psi_{1j} : Y_j \longrightarrow \mathbb{R}_+^* , \quad \psi_{2j} : Y_j \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

modérées le long de Z_j, où $Z_j = X_j - Y_j$ et X_j désigne l'adhérence de Y_j dans U, tels que pour tout y, $y \in Y_j$, et tout ρ, $\rho = (\rho_1,\ldots,\rho_p)$, $\rho \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ tel que

$$(A_j') \qquad \rho_1 < 1/\varphi_j(y) , \quad \rho_2 < \rho_1^{\delta_j},\ldots,\rho_p < \rho_{p-1}^{\delta_j} ,$$

si l'on pose $K=\overline{D}(y;\rho)$, on ait :

$\mathrm{i}_j^!)$ $K\subset U$;

$\mathrm{ii}_j^!)$ K est privilégié pour $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$;

$\mathrm{iii}_j^!)$ il existe une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue, normale σ de $B(K;f)$ telle que :

$$a_j^!)\quad \|\sigma\|_{\eta';\eta;K} \leqq \psi_{1j}(y)/\rho^{d_j} \ ;$$

$$b_j^!)\quad \|\mathrm{id}_{B(K;\mathcal{N})} - B(K;f)\circ\sigma\|_{\eta;\eta;K} \leqq \psi_{2j}(y) \ .$$

En vertu de (App.I, 1.7.1 et 1.7.2), on peut supposer que les fonctions φ_j , ψ_{1j} , ψ_{2j} sont des restrictions de fonctions continues sur $U-Z_j$, modérées le long de Z_j , à valeurs strictement positives. On désignera également ces prolongements par

$$\varphi_j : U-Z_j \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \ \psi_{1j} : U-Z_j \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ , \ \psi_{2j} : U-Z_j \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \ .$$

VI) En vertu de la réduction (II), il suffit de démontrer le théorème localement sur U . En gardant les notations de (V), on peut donc supposer que :

α) J est fini ;

β) pour tout x et x' , $x\in U$, $x'\in U$, on a $d(x,x')<1$;

γ) il existe des constantes positives C et L telles que

$$\forall y\in Y \ : \ \varphi(y)\leqq C/d(y,Z)^L \ ;$$

δ) pour tout j , $j\in J$, il existe des constantes positives A_j , M_j, B_{1j} , N_{1j} , B_{2j} et N_{2j} telles que

$$a)\ \forall y\in U-Z_j : \varphi_j(y)\leqq A_j/d(y,Z_j)^{M_j} \ ;$$

$$b)\ \forall y\in U-Z_j \ : \ \psi_1(y)\leqq B_{1j}/d(y,Z_j)^{N_{1j}} \ ;$$

$$c)\ \forall y\in U-Z_j \ : \ \psi_2(y)\leqq B_{2j}/d(y,Z_j)^{N_{2j}} \ ;$$

(cf. (App.I,2.2.2)).

On remarque que la condition (β) implique que pour tout point x de U et toute partie F de U , on a $d(x,F)\leqq 1$ (en convenant que $d(x,\emptyset)=1$ [(1)]) et en particulier pour tout M et M' , $M\in\mathbb{R}$, $M'\in\mathbb{R}$, $M\leqq M'$ implique que

---

(1) Cette convention est différente de celle de (App.I,2.0). Néanmoins, la validité des théorèmes du §2 de l'appendice I est indépendante de la valeur strictement positive, arbitraire, constante attribuée à $d(x,\emptyset)$ (cf. (App.I,2.0)).

(4.1.1.1) $\qquad d(x,F)^{M'} \leqq d(x,F)^{M}$.

Alors il résulte de (V) qu'il existe des constantes δ , A, M, B_1, N_1, B_2, N_2 , supérieures ou égales à 1, et un élément d de $\mathbb{N}^p$ tels que pour tout j , $j \in J$, tout y , $y \in Y_j$, et tout ρ , $\rho = (\rho_1,\dots,\rho_p)$, $\rho \in (\mathbb{R}_+^*)^p$, tel que

$$(A_j'') \qquad \rho_1 < d(y,Z_j)^M/A \ , \quad \rho_2 < \rho_1^{\delta} \ ,\dots,\rho_p < \rho_{p-1}^{\delta} \ ,$$

si l'on pose $K = \bar{D}(y;\rho)$, les conditions $(i_j^!)$, $(ii_j^!)$ et $(iii_j^!)$ de (V) soient satisfaites, en remplaçant dans $(iii_j^!)$ les inégalités $(a_j^!)$ et $(b_j^!)$ par les inégalités :

$$a_j'') \quad \|\sigma\|_{\eta';\eta;K} \leqq B_1/(d(y,Z_j)^{N_1}\rho^d) \ ;$$

$$b_j'') \quad \|id_{B(K;N)} - B(K;f) \circ \|_{\eta;\eta;K} \leqq B_2/d(y,Z_j)^{N_2} \ .$$

En effet, il suffit de poser

$$\delta = \sup\{\sup_{j\in J} \delta_j,1\} \ , \ A = \sup\{\sup_{j\in J} A_j,1\} \ , \ M = \sup\{\sup_{j\in J} M_j,1\} \ ,$$

$$B_i = \sup\{\sup_{j\in J} B_{ij},1\} \ , \quad N_i = \sup\{\sup_{j\in J} N_{ij},1\} \ , \quad i = 1,2$$

et

$$d = \sup_{j\in J} d_j \ ,$$

cette dernière borne supérieure étant relative à l'ordre produit $\leqq$ sur $\mathbb{N}^p$.

(VII) En gardant les notations et les hypothèses de (V) et (VI), pour tout k , $0 \leqq k \leqq p$, on pose

$$J_k = \{j \in J \ : \ \dim Y_j = k\} = \{j \in J : \dim X_j = k\}$$

et

$$F_k = \bigcup_{0\leqq k'\leqq k} \ \bigcup_{j\in J_{k'}} X_j \ .$$

L'ensemble F_k est un fermé analytique de U et on a

$$F_p = U \ .$$

Par convention, on pose

$$J_{-1} = \emptyset \quad \text{et} \quad F_{-1} = \emptyset \ .$$

On remarque que pour tout j , $j \in J_k$, on a

(4.1.1.2) $\qquad Z_j \subset F_{k-1}$.

(Le fermé analytique Z_j étant le bord d'une strate de dimension k , il est réunion de strates de dimension strictement inférieure à k) .

Pour tout entier k , $-1 \leq k \leq p$, on considère l'assertion suivante :

(A_k) *Il existe des constantes* A'_k , M'_k, B'_{1k} , N'_{1k} , B'_{2k} , N'_{2k} , *supérieures ou égales à* 1 , *et une famille* $(K_i)_{i\in I_k}$ *de polydisques fermés de* $\mathbb{C}^p$ *contenus dans* Y *tels que :*

i_k) a_k) *pour tout* i , $i \in I_k$, *et tout* y , $y \in \overset{\circ}{K}_i$, *on a*

$$K_i \subset \bar{D}(y;(1/\varphi(y),\ldots,1/\varphi(y))) \quad ;$$

b_k) *pour tout* y , $y \in Y \cap F_k$, *il existe* i , $i \in I_k$, *tel que* $y \in \overset{\circ}{K}_i$ *et*

$$\bar{D}(y;(d(y,Z)^{M'_k}/A'_k,\ldots,d(y,Z)^{M'_k}/A'_k)) \subset K_i \quad ;$$

ii_k) *pour tout* i , $i \in I_k$, K_i *est privilégié pour* N *et* N' ;

iii_k) *pour tout* i , $i \in I_k$, *il existe une scission* $\mathbb{C}$-*linéaire continue, normale* σ *de* $B(K_i;f)$ *telle que :*

$$a_k) \quad \|\sigma\|_{\eta';\eta;K_i} \leq \sup_{y\in K_i} (B'_{1k}/d(y,Z)^{N'_{1k}}) \quad ;$$

$$b_k) \quad \|id_{B(K_i;N)} - B(K_i;f)\circ\sigma\|_{\eta;\eta;K_i} \leq \sup_{y\in K_i} (B'_{2k}/d(y,Z)^{N'_{2k}}) \quad .$$

On remarque qu'en vertu de (App.I,2.1) et des réductions (III) et (IV), l'assertion (A_p) implique le théorème, et que l'assertion (A_{-1}) est évidente. Il suffit donc de démontrer :

(VIII) Pour tout k , $0 \leq k \leq p$, $(A_{k-1}) \Rightarrow (A_k)$. Soit k , $0 \leq k \leq p$, et supposons qu'on ait démontré l'assertion (A_{k-1}). En gardant les notations de (V), (VI) et (VII), considérons l'ouvert V_k de $Y \cap F_k$ défini par

$$V_k = \{y \in Y \cap F_k : d(y, Y \cap F_{k-1}) < d(y,Z)^{M'_{k-1}}/2^{M'_{k-1}+1} A'_{k-1}\} \quad ,$$

et posons

$$I'_k = \{(y,j) \in Y \times J \ : \ j \in J_k \ , \ y \in Y \cap Y_j \ \text{ et } \ y \notin V_k\} \quad ,$$

$$I_k = I_{k-1} \cup I'_k \quad ,$$

$$A' = \sup\{A, 2^L C\} \quad \text{et} \quad M' = \sup\{M, L\} \quad .$$

Pour tout i , $i = (y,j)$, $i \in I'_k$, on désigne par ρ_i l'élément de $(\mathbb{R}^*_+)^p$ défini par

$$\rho_i = (\rho_{i1},\dots,\rho_{ip}) \quad ,$$

où pour tout r , $1 \leqq r \leqq p$,

$$\rho_{ir} = d(y, Z \cup Z_j)^{M'\delta^{r-1}} / 2^{1+\delta+\dots+\delta^{r-1}} A'^{\delta^{r-1}} \quad ,$$

et l'on pose

$$K_i = \overline{D}(y,\rho_i) \quad .$$

En vertu de (4.1.1.1), on remarque que ρ_i satisfait à la condition (A''_j) de (VI), et en particulier il résulte de la condition (i'_j) de (V) que

$$K_i \subset U \quad .$$

De même, comme $A' \geqq 1$, $M' \geqq 1$ et $\delta \geqq 1$ on a

(4.1.1.3) $$\rho_{ip} < \rho_{i,p-1} < \dots < \rho_{i1} \leqq d(y,Z)/2 \quad ,$$

ce qui implique que

(4.1.1.4) $$\overline{D}(y;\rho_{ip}\cdot \mathbb{1}) \subset K_i \subset \overline{D}(y;\rho_{i1}\cdot \mathbb{1})$$

(où $\mathbb{1}$ désigne l'élément $(1,\dots,1)$ de $(\mathbb{R}_+^*)^p$ et que

$$K_i \subset Y \quad .$$

D'autre part, démontrons que pour tout j , $j \in J_k$, et tout y , $y \in Y \cap Y_j$, tel que $y \notin V_k$, on a

(4.1.1.5) $$d(y, Z_j \cup Z) \geqq d(y,Z)^{M'_{k-1}} / 2^{M'_{k-1}+1} A'_{k-1} \quad .$$

En effet, en vertu de (4.1.1.2), on a

$$Z_j \cup Z \subset F_{k-1} \cup Z = (Y \cap F_{k-1}) \cup Z \quad ,$$

d'où

$$\begin{aligned} d(y, Z_j \cup Z) &\geqq d(y, (Y \cap F_{k-1}) \cup Z) = \\ &= \inf\{d(y, Y \cap F_{k-1}) \ , \ d(y,Z)\} \quad , \end{aligned}$$

et comme $y \notin V_k$, on a

$$d(y, Y \cap F_{k-1}) \geqq d(y,Z)^{M'_{k-1}} / 2^{M'_{k-1}+1} A'_{k-1} \quad ,$$

ce qui démontre (4.1.1.5) (conformément à (4.1.1.1), car $M'_{k-1} \geqq 1$ et $A'_{k-1} \geqq 1$).

Enfin, posons

$$M'_k = M'_{k-1}\, M'\delta^{p-1} \quad ,$$

$$A'_k = 2^{(M'_{k-1}+1)M'\delta^{p-1} + 1 + \delta + \ldots + \delta^{p-1}} A'^{M'\delta^{p-1}}_{k-1} A'^{\delta^{p-1}} ,$$

$$\alpha = d_1 + (1+\delta)d_2 + \ldots + (1+\delta+\ldots+\delta^{p-1})d_p$$

(où $d = (d_1,\ldots,d_p)$ désigne l'élément de $\mathbb{N}^p$ défini dans VI),

$$\beta = d_1 + \delta d_2 + \ldots + \delta^{p-1} d_p ,$$

$$N'_{1k} = \sup\{N'_{1,k-1}, M'_{k-1}(N_1 + \beta M')\} ,$$

$$B'_{1k} = \sup\{B'_{1,k-1}, 2^{\alpha + (M'_{k-1}+1)(N_1+\beta M')} A'^{N_1+\beta M'}_{k-1} A'^{\beta} B_1\} ,$$

$$N'_{2k} = \sup\{N'_{2,k-1}, M'_{k-1} N_2\}$$

et

$$B'_{2k} = \sup\{B'_{1,k-1} , 2^{(M'_{k-1}+N)N_2} A'^{N_2}_{k-1} B_2\} .$$

Pour démontrer la condition (i_k), (a_k) de l'assertion (A_k), soient $i \in I_k$ et $y \in \mathring{K}_i$. Si $i \in I_{k-1}$, la condition résulte de la condition (i_{k-1}), (a_{k-1}) de l'assertion (A_{k-1}). Supposons donc que $i \in I'_k$. Alors il existe j, $j \in J_k$, et y', $y' \in Y \cap Y_j$, $y' \notin V_k$, tels que $i = (y',j)$ et $K_i = \overline{D}(y';\rho_i)$. Il s'agit de démontrer que pour tout point y'' de K_i on a

$$d(y,y'') \leqq 1/\varphi(y) .$$

Or,

$$d(y,y'') \leqq d(y',y) + d(y',y'') \leqq 2 \sup_{1\leqq r\leqq p} \rho_{ir} =$$

$$= 2\rho_{i1} = d(y',Z \cup Z_j)^{M'}/A' \leqq d(y',Z)^L/2^L C$$

(cf. (4.1.1.3) et (4.1.1.1)). D'autre part,

$$d(y',Z) \leqq d(y,y') + d(y,Z) \leqq$$

$$\leqq \rho_{i1} + d(y,Z) \leqq d(y',Z)/2 + d(y,Z)$$

(cf. (4.1.1.3)), d'où

$$d(y',Z)/2 \leqq d(y,Z)$$

et

$$d(y',Z)^L/2^L C \leqq d(y,Z)^L/C \leqq 1/\varphi(y)$$

(en vertu de la condition (γ) de (VI)).

Démontrons la condition (i_k), (b_k). Pour cela, soit y un point de $Y \cap F_k$. On distingue deux cas :

<u>1er cas</u> : $y \in V_k$. Alors il existe un point y' de $Y \cap F_{k-1}$ tel que

$$d(y,y') < d(y,Z)^{M'_{k-1}}/2^{M'_{k-1}+1} A'_{k-1} \leqq d(y,Z)/2 \tag{4.1.1.6}$$

(conformément à la définition de V_k et à (4.1.1.1) car $M'_{k-1} \geqq 1$ et $A'_{k-1} \geqq 1$). En vertu de la condition (i_{k-1}), (b_{k-1}), il existe i, $i \in I_{k-1}$, tel que

$$\bar{D}(y';(d(y',Z)^{M'_{k-1}}/A'_{k-1}) \cdot \mathbb{I}) \subset K_i \quad .$$

Or,

$$d(y,Z) \leqq d(y,y') + d(y',Z) \leqq d(y,Z)/2 + d(y',Z)$$

(cf.(4.1.1.6)), d'où

$$d(y,Z)/2 \leqq d(y',Z) \quad ,$$

ce qui implique que

$$\bar{D}(y';(d(y,Z)^{M'_{k-1}}/2^{M'_{k-1}}A'_{k-1}) \cdot \mathbb{I}) \subset K_i \quad ,$$

et en vertu de (4.1.1.6),

$$\bar{D}(y;(d(y,Z)^{M'_{k-1}}/2^{M'_{k-1}+1} A'_{k-1}) \cdot \mathbb{I}) \subset K_i \quad ,$$

d'où

$$\bar{D}(y;(d(y,Z)^{M'_k}/A'_k,\dots,d(y,Z)^{M'_k}/A'_k)) \subset K_i$$

(conformément à (4.1.1.1), car $M'_k \geqq M_{k-1}$ et $A'_k \geqq 2^{M'_{k-1}+1} A'_{k-1}$) .

<u>2ème cas</u> : $y \notin V_k$. On remarque qu'en vertu de (4.1.1.2), on a

$$(Y \cap F_k) - (Y \cap F_{k-1}) \subset \bigcup_{j \in J_k} (Y \cap Y_j) \quad ,$$

et comme

$$Y \cap F_{k-1} \subset V_k \quad ,$$

on en déduit qu'il existe j, $j \in J_k$, tel que $y \in Y \cap Y_j$, ce qui implique que si l'on pose $i = (y,j)$, on a $i \in I'_k$. Or, en vertu de (4.1.1.4), on a

$$\bar{D}(y;\rho_{ip} \cdot \mathbb{I}) \subset K_i \quad ,$$

et comme

$$\rho_{ip} = d(y, Z \cup Z_j)^{M'\delta^{p-1}} / 2^{1+\delta+\ldots+\delta^{p-1}} A'^{\delta^{p-1}} \quad ,$$

il résulte de (4.1.1.5) que

$$\rho_{ip} \geqq d(y,Z)^{M'_k}/A'_k \quad ,$$

ce qui prouve que

$$\overline{D}(y;(d(y,Z)^{M'_k}/A'_k,\ldots,d(y,Z)^{M'_k}/A'_k)) \subset K_i \quad .$$

Pour démontrer les conditions (ii_k) et (iii_k) de l'assertion (A_k) , soit i , $i \in I_k$. Si $i \in I_{k-1}$, ces conditions résultent aussitôt des conditions (ii_{k-1}) et (iii_{k-1}) de l'assertion (A_{k-1}) (conformément à (4.1.1.1), et en remarquant que par définition $B'_{1k} \geqq B'_{1,k-1}$, $N'_{1k} \geqq N'_{1,k-1}$, $B'_{2k} \geqq B'_{2,k-1}$ et $N'_{2k} \geqq N'_{2,k-1}$). Supposons donc que $i \in I'_k$. Alors il existe j , $j \in J_k$, et y , $y \in Y \cap Y_j$, $y \notin V_k$, tel que $i = (y,j)$. Comme ρ_i satisfait à la condition (A''_j) de (VI), la condition (ii_k) résulte de (ii_j) de (V), et il résulte de (VI) qu'il existe une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue, normale σ de $B(K_i;f)$ telle que

$$\|\sigma\|_{\eta';\eta;K_i} \leqq B_1/d(y,Z_j)^{N_1} \rho_i^d$$

et

$$\|id_{B(K_i;N)} - B(K_i;f)\circ\sigma\|_{\eta;\eta;K_i} \leqq B_2/d(y,Z_j)^{N_2}$$

(inégalités (a''_j) et (b''_j) de (VI)). Conformément à la définition de ρ_i , α et β , on a donc

$$\begin{aligned}\|\sigma\|_{\eta';\eta;K_i} &\leqq 2^{\alpha}A'^{\beta}B_1/d(y,Z_j)^{N_1} d(y,Z\cup Z_j)^{\beta M'} \leqq \\ &\leqq 2^{\alpha}A'^{\beta}B_1/d(y,Z\cup Z_j)^{N_1+\beta M'} \quad ,\end{aligned}$$

ce qui implique (en vertu de (4.1.1.5) et (4.1.1.1), et conformément à la définition de B'_{1k} et N'_{1k}) que

$$\|\sigma\|_{\eta';\eta;K_i} \leqq B'_{1k}/d(y,Z)^{N'_{1k}} \leqq \sup_{y'\in K_i} (B'_{1k}/d(y',Z)^{N'_{1k}})$$

et démontre l'inégalité (iii_k), (a_k). De même, en vertu de (4.1.1.5) et (4.1.1.1), et conformément à la définition de B'_{2k} et N'_{2K} , on a

$$\|\mathrm{id}_{B(K_i;N)} - B(K_i;f)\circ\sigma\|_{\eta;\eta;K_i} \leq B_2/d(y,Z\cup Z_j)^{N_2} \leq$$

$$\leq B'_{2k}/d(y,Z)^{N'_{2k}} \leq \sup_{y'\in K_i} (B'_{2k}/d(y',Z)^{N'_{2k}}) ,$$

ce qui démontre l'inégalité (iii_k), (b_k) et termine la démonstration du théorème.

APPENDICE III

COHOMOLOGIE MODÉREE ET GAGA NON PROPRE

Dans cet appendice, on esquisse une application des résultats de l'appendice précédent, afin d'établir des théories cohomologiques des faisceaux analytiques cohérents, avec conditions de croissance à "l'infini". On définit en particulier une cohomologie "modérée" qui permet d'énoncer un GAGA non propre généralisant [50] . On s'inspire de la notion de section modérée d'un faisceau localement libre, définie dans [6], qu'on généralise pour les faisceaux cohérents. A la fin de l'appendice on indique une approche possible pour l'établissement des théories cohomologiques pour des conditions de croissance plus générales. Les résultats sont énoncés sans démonstration, sauf pour expliquer comment les résultats de ce travail interviennent. Un exposé détaillé sera fait dans une publication ultérieure. Ici on se limitera aux espaces analytiques réguliers. Le cas singulier n'est pas essentiellement plus difficile mais les définitions sont plus techniques, nécessitant des plongements locaux dans des réguliers.

(1.1.1) Tous les espaces analytiques considérés sont des espaces $\mathbb{C}$-analytiques séparés, dénombrables à l'infini. Soit Y une variété analytique (espace analytique régulier). On appelle compactification partielle de Y une immersion ouverte

$$i : Y \hookrightarrow X$$

telle que X soit un espace analytique réduit et $X - i(Y)$ un fermé analytique d'intérieur vide de X . On identifiera Y à l'ouvert dense $i(Y)$ de X et le fermé analytique $Z = X - Y$ de X sera vu comme étant à "l'infini". On dira qu'un couple (Y,X) est une compactification partielle, si X est un espace analytique réduit, Y un ouvert régulier de X , et l'immersion canonique $i : Y \hookrightarrow X$ une compactification partielle de Y . Un morphisme d'une compactification partielle (Y',X') dans une compactification partielle (Y,X) est un morphisme d'espaces analytiques

$$u : X' \longrightarrow X$$

tel que $u(Y') \subset Y$. On dira que le morphisme u est strict (ou qu'il conserve l'infini), si l'on a en plus

$$u(Z') \subset Z \quad ,$$

où $Z = X-Y$ et $Z' = X' - Y'$. On dira que le morphisme u est une immersion ouverte de compactifications partielles, s'il existe une famille finie $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$

de morphismes <u>stricts</u> de compactifications partielles

$$u_i : (Y_i, X_i) \longrightarrow (Y_{i-1}, X_{i-1})$$

telle que :

i) $(Y_o, X_o) = (Y, X)$ et $(Y_n, X_n) = (Y', X')$;

ii) $u = u_1 \circ u_2 \circ \ldots \circ u_n$;

iii) pour tout i , $1 \leq i \leq n$, le morphisme d'espaces analytiques $u_i : X_i \longrightarrow X_{i-1}$ est ou bien une immersion ouverte, ou bien un morphisme propre, induisant un isomorphisme de Y_i sur Y_{i-1} .

On remarque que si u est une immersion ouverte de compactifications partielles, alors Y' s'identifie à un ouvert de Y , et que le composé de deux immersions ouvertes de compactifications partielles en est une également.

On démontre que si

$$u' : (Y', X') \longrightarrow (Y, X) \quad \text{et} \quad u'' : (Y'', X'') \longrightarrow (Y, X)$$

désignent deux immersions ouvertes de compactifications partielles, il existe au plus un morphisme de compactifications partielles

$$u : (Y'', X'') \longrightarrow (Y', X')$$

tel que

$$u'' = u' \circ u \quad ,$$

qui est alors une immersion ouverte. On dira, dans ce cas, que u'' se factorise à travers u' . Plus généralement, il existe une immersion de compactifications partielles unique (à isomorphisme près)

$$v : (Y_1, X_1) \longrightarrow (Y, X)$$

se factorisant à travers u' et u'' satisfaisant à la propriété que toute immersion ouverte de compactifications partielles

$$v' : (Y_1, X_1) \longrightarrow (Y, X) \quad ,$$

se factorisant à travers u' et u'' , se factorise à travers v (produit fibré de (Y', X') et (Y'', X'') au-dessus de (Y, X) dans la catégorie de compactifications partielles).

On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de morphismes de compactifications partielles

$$u_i : (Y_i, X_i) \longrightarrow (Y, X)$$

est un recouvrement ouvert de (Y, X) si :

i) pour tout i , $i \in I$, u_i est une immersion ouverte de compactifications partielles;

ii) pour tout compact K de X il existe une partie finie I' de I et pour tout i, $i \in I'$, un compact K_i de X_i tels que

$$K \subset \bigcup_{i \in I'} u_i(K_i) \quad .$$

Si $(u'_{i'})_{i' \in I'}$ désigne un deuxième recouvrement ouvert de (Y,X), on dit qu'il est plus fin que le recouvrement ouvert $(u_i)_{i \in I}$, si pour tout i', $i' \in I$, il existe i, $i \in I$, tel que $u'_{i'}$ se factorise à travers u_i.

La notion de recouvrement ouvert d'une compactification partielle définit une topologie de Grothendieck qu'on appellera topologie de Grothendieck-Hironaka(1) ou plus simplement topologie G.H. de cette compactification partielle. (Intuitivement cette topologie peut être considérée comme intermédiaire entre celle de Y et de X). La topologie G.H. a des propriétés très proches de celles de la topologie ordinaire. Par exemple, on a la propriété de paracompacité suivante : pour tout recouvrement ouvert $(u_i)_{i \in I}$ d'une compactification partielle (Y,X), il existe un recouvrement ouvert $(u'_{i'})_{i' \in I'}$ de (Y,X), plus fin que $(u_i)_{i \in I}$, tel que pour tout compact K de X l'ensemble

$$I'_K = \{i' \in I' : u'^{-1}_{i'}(K) \neq \emptyset\}$$

soit fini.

(1.1.2) Soient Y une variété analytique et (Y,X) et (Y,X') deux compactifications partielles de Y. On dit que ces compactifications partielles sont équivalentes, s'il existe des recouvrements ouverts $(u_i)_{i \in I}$ et $(u'_i)_{i \in I}$,

$$u_i : (Y_i, X_i) \longrightarrow (Y,X) \quad , \quad u'_i : (Y'_i, X'_i) \longrightarrow (Y,X')$$

de (Y,X) et (Y,X') respectivement et pour tout i, $i \in I$, un isomorphisme de compactifications partielles

$$v_i : (Y_i, X_i) \longrightarrow (Y'_i, X'_i) \quad ,$$

tel que

$$u_i | Y_i = (u'_i | Y'_i) \circ (v_i | Y_i) \quad .$$

On appelle variété analytique avec infini une variété analytique Y munie d'une classe d'équivalence de compactifications partielles. Si (Y,X) est une compactification partielle appartenant à cette classe, on dira qu'elle définit sa struc-

(1) En effet, Hironaka introduit une notion analogue dans [27], où il étudie la "voûte étoilée".

ture de variété analytique avec infini.

(1.1.3) Soit (Y,X) une compactification partielle. On désigne par $\mathrm{Mod}_{Y;X}$ l'ensemble des fonctions continues

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

modérées le long de Z, où $Z = X-Y$. Pour tout morphisme de compactifications partielles

$$u : (Y',X') \longrightarrow (Y,X)$$

et tout φ, $\varphi \in \mathrm{Mod}_{Y;X}$, on a

$$\varphi \circ (u|Y') \in \mathrm{Mod}_{Y';X'} \ .$$

On démontre que le foncteur qui associe à toute immersion ouverte de compactifications partielles

$$u : (Y',X') \longrightarrow (Y,X)$$

l'anneau $\mathrm{Mod}_{Y';X'}$ est un faisceau pour la topologie G.H. sur (Y,X). Autrement dit, pour tout recouvrement ouvert $(u_i)_{i\in I}$ de (Y,X),

$$u_i : (Y_i,X_i) \longrightarrow (Y,X)$$

et toute famille $(\varphi_i)_{i\in I}$, $\varphi_i \in \mathrm{Mod}_{Y_i;X_i}$, telle que pour tout i et i', $i \in I$, $i' \in I$, et toute immersion ouverte de compactifications partielles

$$u : (Y',X') \longrightarrow (Y,X)$$

se factorisant à travers u_i et $u_{i'}$, si l'on désigne par v (resp. v') l'unique morphisme de compactifications partielles tel que $u = u_i \circ v$ (resp. $u = u_{i'} \circ v'$), on ait

$$\varphi_i \circ (v|Y') = \varphi_{i'} \circ (v'|Y') \ ,$$

il existe une fonction unique φ, $\varphi \in \mathrm{Mod}_{Y;X}$, telle que pour tout i, $i \in I$,

$$\varphi_i = \varphi \circ (u_i|Y_i) \ .$$

Enfin, si (Y,X') désigne une compactification partielle de Y équivalente à (Y,X), on a

$$\mathrm{Mod}_{Y;X'} = \mathrm{Mod}_{Y;X} \ ,$$

ce qui permet de définir une notion de fonction continue, modérée sur une variété avec infini.

(1.1.4) Soient (Y,X) une compactification partielle et d_1 et d_2 deux distances sur Y. On dit que d_1 et d_2 sont équivalentes, s'il existe un recouvrement ouvert $(u_i)_{i\in I}$ de (Y,X) ,

$$u_i : (Y_i,X_i) \longrightarrow (Y,X) ,$$

et pour tout i , $i\in I$, des fonctions continues

$$\varphi_i : Y_i\times Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \psi_i : Y_i\times Y_i \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

modérées le long de $(X_i\times Z_i)\cup(Z_i\times X_i)$, où $Z_i = X_i - Y_i$, telles que pour tout y et y' , $y\in Y_i$, $y'\in Y_i$, on ait

$$d_1(u_i(y),\ u_i(y')) \leq \varphi_i(y,y')d_2(u_i(y),u_i(y'))$$

et

$$d_2(u_i(y),u_i(y')) \leq \psi_i(y,y')d_1(u_i(y),u_i(y')) .$$

On démontre la proposition suivante :

PROPOSITION 1.1.5.- *Il existe une classe d'équivalence unique de distances sur* Y *telle que pour toute distance* d *appartenant à cette classe et toute immersion ouverte de compactifications partielles*

$$u : (Y',X') \longrightarrow (Y,X)$$

telle que X' *soit un ouvert de* $\mathbb{C}^p$ *, la distance induite par* d *sur* Y' *soit équivalente à la distance induite sur* Y' *par la distance sur* $\mathbb{C}^p$ *déduite de la norme sup.*

On dit qu'une distance sur Y est modérée le long de Z (où $Z = X-Y$) , si elle appartient à la classe d'équivalence définie dans la proposition ci-dessus. On remarque qu'une telle distance est compatible avec la topologie de Y . Si

$$u : (Y',X') \longrightarrow (Y,X)$$

désigne une immersion ouverte de compactifications partielles et d une distance sur Y , modérée le long de Z , alors la distance induite par d sur Y' est modérée le long de Z' (où $Z' = X'-Y'$) .

(1.1.6) Soient Y une variété analytique, d une distance sur Y et (Y,X) et (Y,X') deux compactifications partielles équivalentes de Y . Alors la distance d est modérée le long de Z (où $Z = X-Y$) si et seulement si elle est modérée le long de Z' (où $Z' = X'-Y$) . Cela permet de définir une notion de distance modérée sur une variété avec infini.

(1.2.1) Soient (Y,X) une compactification partielle, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent et $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux $\mathcal{O}_X$-modules cohérents prolongeant $\mathcal{M}$, autrement dit tels que $\mathcal{M}_1|Y = \mathcal{M} = \mathcal{M}_2|Y$. Si l'on désigne par $i : Y \hookrightarrow X$ l'injection canonique, on a donc des morphismes de $\mathcal{O}_X$-modules

$$j_1 : M_1 \longrightarrow i_*(M) \quad \text{et} \quad j_2 : M_2 \longrightarrow i_*(M) \quad .$$

(On remarque que $i_*(M)$ n'est pas en général un $\mathcal{O}_X$-module cohérent). On démontre que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) il existe un $\mathcal{O}_X$-module cohérent M' prolongeant M et des morphismes de $\mathcal{O}_X$-modules

$$u_1 : M_1 \longrightarrow M' \ , \quad u_2 : M_2 \longrightarrow M'$$

induisant l'identité au-dessus de Y .

ii) il existe un $\mathcal{O}_X$-module cohérent M'' prolongeant M et des morphismes de $\mathcal{O}_X$-modules

$$v_1 : M'' \longrightarrow M_1 \ , \quad v_2 : M'' \longrightarrow M_2$$

induisant l'identité au-dessus de Y .

iii) le sous-$\mathcal{O}_X$-module $\mathrm{Im}(j_1) + \mathrm{Im}(j_2)$ de $i_*(M)$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent.

On dit que les prolongements M_1 et M_2 sont équivalents, si les conditions équivalentes ci-dessus sont satisfaites. On démontre que si $(u_i)_{i\in I}$ désigne un recouvrement ouvert de (Y,X) ,

$$u_i : (Y_i,X_i) \longrightarrow (Y,X) \quad ,$$

pour que les prolongements M_1 et M_2 de M soient équivalents, il faut et il suffit que pour tout i , $i \in I$, les prolongements $u_i^*(M_1)$ et $u_i^*(M_2)$ de $(u_i|Y_i)^*(M)$ le soient.

On appelle prolongement local de M la donnée d'un recouvrement ouvert $(u_i)_{i\in I}$ de (Y,X) ,

$$u_i : (Y_i,X_i) \longrightarrow (Y,X) \ ,$$

et pour tout i , $i \in I$, d'un $\mathcal{O}_{X_i}$-module cohérent M_i , prolongeant $(u_i|Y_i)^*(M)$, tels que pour tout i et i' , $i \in I$, $i' \in I$, et toute immersion ouverte de compactifications partielles

$$u : (Y',X') \longrightarrow (Y,X)$$

se factorisant à travers u_i et $u_{i'}$, si l'on désigne par v (resp. v') l'unique morphisme de compactifications partielles tel que $u = u_i \circ v$ (resp. $u = u_{i'} \circ v'$), les prolongements $v^*(M_i)$ et $v'^*(M_{i'})$ de $(u|Y')^*(M)$ soient équivalents.

Si $(u'_{i'})_{i'\in I'}$, $(M'_{i'})_{i'\in I'}$ désigne un autre prolongement local de M , on dira qu'il est équivalent au précédent si pour tout i , $i \in I$, tout i' , $i' \in I'$, et toute immersion ouverte de compactifications partielles

$$u : (Y',X') \longrightarrow (Y,X)$$

se factorisant à travers u_i et $u'_{i'}$, si l'on désigne par v (resp. v') l'unique morphisme de compactifications partielles tel que $u = u_i \circ v$ (resp. $u = u'_{i'} \circ v'$) , les prolongements $v^*(M_i)$ et $v'^*(M'_{i'})$ de $(u|Y')^*(M)$ sont équivalents.

On appelle $\mathcal{O}_Y$-module cohérent méromorphe le long de Z (où $Z = X-Y$) un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent muni d'une classe d'équivalence de prolongements locaux. On dit qu'il est effectivement méromorphe s'il existe un $\mathcal{O}_X$-module cohérent M' prolongeant M tel que (id_X , M') appartient à cette classe (en considérent id_X comme un recouvrement ouvert de la compactification partielle (Y,X) formé de la seule immersion ouverte id_X). On ignore si tout $\mathcal{O}_Y$-module cohérent méromorphe le long de Z est effectivement méromorphe (1) . Si $M = \mathcal{O}_Y^m$, où $m \in \mathbb{N}$, le $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{O}_X^m$ prolonge $\mathcal{O}_Y^m$, et munit canoniquement $\mathcal{O}_Y^m$ d'une structure de $\mathcal{O}_Y$-module effectivement méromorphe le long de Z . Sauf mention expresse du contraire, $\mathcal{O}_Y^m$ sera toujours considéré comme muni de cette structure méromorphe.

(1.2.2) Soient (Y,X) une compactification partielle de Y , $Z = X-Y$, M et M' deux $\mathcal{O}_Y$-modules cohérents, méromorphes le long de Z , et $f : M' \longrightarrow M$ un morphisme de $\mathcal{O}_Y$-modules. On dit que f est un morphisme de $\mathcal{O}_Y$-modules méromorphes, ou plus simplement un morphisme méromorphe, s'il existe un recouvrement ouvert $(u_i)_{i \in I}$ de la compactification partielle (Y,X) ,

$$u_i : (Y_i,X_i) \longrightarrow (Y,X)$$

et pour tout i , $i \in I$, des $\mathcal{O}_{X_i}$-modules cohérents M_i et M'_i et un morphisme de $\mathcal{O}_{X_i}$-modules $f_i : M'_i \longrightarrow M_i$ tels que :

i) $((u_i)_{i \in I} , (M_i)_{i \in I})$ (resp. $(u_i)_{i \in I}$, $(M'_i)_{i \in I}$) est un prolongement local de M (resp. de M') définissant sa structure méromorphe;

ii) pour tout i , $i \in I$, $f_i|Y_i = (u_i|Y_i)^*(f)$.

On dit qu'une section s du $\mathcal{O}_Y$-module méromorphe M , $s \in \Gamma(Y,M)$, est méromorphe, si le morphisme

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow M$$

défini par cette section est méromorphe. On vérifie facilement que le composé de

(1) Voir néanmoins, [51], théorème 1, p.364 et [15], corollaires (VI.4), (VII.5) et (VII.6), p.342.

deux morphismes méromorphes est méromorphe.

(1.2.3) Soient (Y,X) une compactification partielle, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent, méromorphe le long de Z, où $Z=X-Y$, et $\mathcal{N}$ un sous-$\mathcal{O}_Y$-module cohérent. On démontre que les conditions suivantes sont équivalentes.

i) Il existe une structure de $\mathcal{O}_Y$-module méromorphe le long de Z sur $\mathcal{N}$ telle que l'injection canonique

$$\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$$

soit un morphisme méromorphe.

ii) Il existe une structure de $\mathcal{O}_Y$-module méromorphe le long de Z sur $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ telle que la surjection canonique

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/\mathcal{N}$$

soit un morphisme méromorphe.

On dit que $\mathcal{N}$ est un sous-$\mathcal{O}_Y$-module méromorphe de $\mathcal{M}$, si les conditions équivalentes ci-dessus sont satisfaites, et alors la structure méromorphe sur $\mathcal{N}$ (resp. sur $\mathcal{M}/\mathcal{N}$) satisfaisant à la condition (i) (resp. à la condition (ii)) est unique. On dira que cette structure est induite (resp. déduite) de celle de $\mathcal{M}$.

Si $f : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$ désigne un morphisme de $\mathcal{O}_Y$-modules cohérents méromorphes le long de Z, alors $\mathrm{Ker}(f)$ (resp. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-$\mathcal{O}_Y$-module méromorphe de $\mathcal{M}'$ (resp. de $\mathcal{M}$). On en déduit que $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Coker}(f)$ et $\mathrm{Coim}(f)$ sont munis naturellement d'une structure de $\mathcal{O}_Y$-module méromorphe le long de Z et on démontre que l'isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_Y$-modules

$$\mathrm{Coim}(f) \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$$

est un isomorphisme de $\mathcal{O}_Y$-modules méromorphes le long de Z. On peut donc définir une notion de suite exacte dans la catégorie de $\mathcal{O}_Y$-modules cohérents, méromorphes le long de Z, et une telle suite sera exacte si et seulement si la suite sous-jacente de $\mathcal{O}_Y$-modules cohérents est exacte.

(1.2.4) Soient (Y,X) une compactification partielle, $Z=X-Y$, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent méromorphe le long de Z et $u : (Y',X') \longrightarrow (Y,X)$ une immersion ouverte de compactifications partielles. Alors le $\mathcal{O}_{Y'}$-module cohérent $(u|Y')^*(\mathcal{M})$ est muni naturellement d'une structure de $\mathcal{O}_{Y'}$-module méromorphe le long de Z' (où $Z'=X'-Y'$) et si $f : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$ désigne un morphisme de $\mathcal{O}_Y$-modules cohérents, méromorphes le long de Z,

$$(u|Y')^*(f) : (u|Y')^*(\mathcal{M}') \longrightarrow (u|Y')^*(\mathcal{M})$$

est un morphisme de $\mathcal{O}_{Y'}$-modules méromorphes le long de Z'. En particulier, pour toute section s , $s \in \Gamma(Y,M)$, méromorphe le long de Z , la section $s' = s|Y' = (u|Y')^*(s)$, $s' \in \Gamma(Y',(u|Y')^*(M))$ est méromorphe le long de Z' , et on démontre que le foncteur qui associe à l'immersion ouverte

$$u : (Y',X') \longrightarrow (Y,X)$$

l'ensemble des sections méromorphes de $(u|Y)^*(M)$ le long de Z' est un faisceau pour la topologie G.H. de la compactification partielle (Y,X).

(1.2.5) Soient Y une variété analytique, M un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent et (Y,X) et (Y,X') deux compactifications partielles équivalentes de Y . Pour toute structure de $\mathcal{O}_Y$-module méromorphe le long de Z (où $Z = X-Y$) sur M , on peut définir naturellement une structure de $\mathcal{O}_Y$-module méromorphe le long de Z' (où $Z' = X'-Y'$) , ce qui permet de définir une notion de $\mathcal{O}_Y$-module cohérent méromorphe sur une variété avec infini, ainsi qu'une notion de morphisme méromorphe.

(1.3.1) Soient Y une variété analytique et K une partie de Y . On dit que K est un compact polycylindrique, s'il existe un ouvert U de Y tel que $K \subset U$ et une carte $w : U' \longrightarrow U$ (isomorphisme analytique), où U' est un ouvert de $\mathbb{C}^p$, telle que $w^{-1}(K)$ soit un polycylindre compact de $\mathbb{C}^p$. Si K est un compact polycylindrique de Y , on désigne par $B(K)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues sur K , analytiques sur $\overset{\circ}{K}$, munie de la norme sup. Si M désigne un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent, on définit comme dans l'appendice II, (2.2.3) l'espace vectoriel topologique $B(K;M)$ dont l'espace vectoriel sous-jacent est $\Gamma(K,M) \otimes_{\Gamma(K,\mathcal{O}_Y)} B(K)$ et dont la topologie est définie par la semi-norme $\|\cdot\|_{\eta;K}$, où

$$\eta : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow M|U$$

désigne un épimorphisme au voisinage de K et $\|\cdot\|_{\eta;K}$ est définie comme dans l'appendice II, (2.1). On démontre que cette topologie est indépendante de l'épimorphisme η (cf. App.II,2.2.2) et on dit que K est privilégié pour M , si $B(K;M)$ est séparé, dans quel cas $B(K;M)$ est un espace de Banach (cf. App. II, 2.2.5, 2.2.6). Pour tout morphisme $f : M' \longrightarrow M$ de $\mathcal{O}_Y$-modules cohérents on désigne par $B(K;f)$ l'application

$$B(K;f) : B(K;M') \longrightarrow B(K;M)$$

définie par

$$B(K;f) = \Gamma(K,f) \otimes \mathrm{id}_{B(K)}$$

(cf. App.II,2.1), qui est une application $\mathbb{C}$-linéaire continue (cf. App.II,2.2.4).

On désigne par $KP(Y)$ l'ensemble des compacts polycylindriques de Y et on appelle semi-norme sur M une famille $(\|\cdot\|_K)_{K\in KP(Y)}$, où pour tout K , $K \in KP(Y)$, $\|\cdot\|_K$ désigne une semi-norme sur $B(K;M)$ qui en définit la topologie.

Afin de simplifier les notations, pour toute section s de M au-dessus de Y, $s \in \Gamma(Y,M)$, on désignera par $\|s\|_K$ la semi-norme de l'image de s dans $B(K;M)$.

(1.3.2) Soient (Y,X) une compactification partielle de Y, M un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent et $(\|\cdot\|_K)_{K\in KP(Y)}$ et $(\|\cdot\|'_K)_{K\in KP(Y)}$ deux semi-normes sur M. On dit qu'elles sont équivalentes, s'il existe un recouvrement ouvert $(u_i)_{i\in I}$ de (Y,X),

$$u_i : (Y_i, X_i) \longrightarrow (Y,X) ,$$

et pour tout i, $i \in I$, des fonctions continues

$$\varphi_i : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}^*_+ \quad \text{et} \quad \psi_i : Y_i \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$$

modérées le long de Z_i, où $Z_i = X_i - Y_i$, telles que pour tout K, $K \in KP(Y_i)$, on ait

$$\|\cdot\|_K \leq \sup_{y\in K} \varphi_i(y)\ \|\cdot\|'_K$$

et

$$\|\cdot\|'_K \leq \sup_{y\in K} \psi_i(y)\ \|\cdot\|_K$$

(en remarquant que comme u_i induit un isomorphisme analytique de Y_i sur un ouvert de Y, $KP(Y_i)$ s'identifie par

$$K \longmapsto u_i(K)$$

à un sous-ensemble de $KP(Y)$). On démontre la proposition suivante :

PROPOSITION 1.3.3.- *Soit M un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent, méromorphe le long de Z, où $Z = X-Y$. Alors il existe une classe d'équivalence unique de semi-normes sur M telle que pour toute semi-norme $(\|\cdot\|_K)_{K\in KP(Y)}$ appartenant à cette classe, toute immersion ouverte de compactifications partielles*

$$u : (Y',X') \longrightarrow (Y,X) ,$$

tout prolongement M' de $M|Y' = (u|Y')^*(M)$ sur X' définissant la structure méromorphe de $M|Y'$ le long de Z' (où $Z' = X'-Y'$) déduite de celle de M et tout épimorphisme de $\mathcal{O}_{X'}$-modules

$$\eta : \mathcal{O}^m_{X'} \longrightarrow M'$$

les semi-normes $(\|\cdot\|_{\eta;K})_{K\in KP(Y')}$ et $(\|\cdot\|_K)_{K\in KP(Y')}$ sur $M|Y'$ soient équivalentes.

On dit qu'une semi-norme sur M est modérée le long de Z, si elle appartient à la classe d'équivalence définie dans la proposition ci-dessus. Si

$$u : (Y',X') \longrightarrow (Y,X)$$

désigne une immersion ouverte de compactifications partielles et $(\|\cdot\|)_{K\in KP(Y)}$

une semi-norme sur M , modérée le long de Z , alors la semi-norme $(\|\cdot\|_K)_{K \in \mathcal{KP}(Y')}$ sur $M|Y'$ est modérée le long de Z' .

Enfin, on étend facilement la notion de semi-norme modérée aux modules cohérents, méromorphes sur une variété avec infini, en remarquant que cette notion est indépendante des compactifications partielles équivalentes choisies.

(1.4.1) Soient Y une variété analytique, K un compact polycylindrique de Y et d une distance sur Y , compatible avec sa topologie. Pour tout point y , $y \in \overset{\circ}{K}$, on pose

$$\rho'_d(K;y) = d(y,\partial K) = \inf_{y' \in \partial K} d(y,y') = \inf_{y' \notin K} d(y,y')$$

et

$$\rho''_d(K;y) = \sup_{y' \in \partial K} d(y,y') = \sup_{y' \in K} d(y,y') \quad .$$

On remarque que si Y est un ouvert de $\mathbb{C}^p$, K un polycylindre compact et d la distance déduite de la norme sup sur $\mathbb{C}^p$, alors on a

$$\rho'_d(K;y) = \inf_{1 \leqq i \leqq p} \rho'_i(K;y)$$

et

$$\rho''_d(K;y) = \sup_{1 \leqq i \leqq p} \rho''_i(K;y)$$

(cf.(III,2.1)).

(1.4.2) Soient (Y,X) une compactification partielle et d une distance sur Y , modérée le long de Z , où $Z = X-Y$. On dit qu'un ensemble $\mathcal{K}$ de compacts polycylyndriques, de Y est suffisant le long de Z , si les conditions suivantes sont satisfaites :

i) pour tout K , $K \in \mathcal{K}$, et tout K' , $K' \in \mathcal{KP}(Y)$ tel que $K' \subset K$, on a $K' \in \mathcal{K}$;

ii) il existe une fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}^*_+ \quad ,$$

modérée le long de Z , telle que pour tout y , $y \in Y$, il existe K , $K \in \mathcal{K}$ tel que

a) $y \in \overset{\circ}{K}$

B) $1/\varphi(y) \leqq \rho'_d(K;y)$.

On démontre que cette notion est indépendante de la distance modérée d . En utilisant les résultats du paragraphe 2 de l'appendice I, on démontre que l'ensemble

$\mathcal{KP}(Y)$ est suffisant le long de Z et qu'une intersection finie d'ensembles suffisants est un ensemble suffisant. En particulier, l'ensemble des parties de $\mathcal{KP}(Y)$ qui sont des ensembles suffisants le long de Z est une base de filtre sur $\mathcal{KP}(Y)$. Pour tout ensemble $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}\subset\mathcal{KP}(Y)$, suffisant le long de Z , et toute immersion ouverte de compactifications partielles

$$u : (Y',X') \longrightarrow (Y,X)$$

l'ensemble $\mathcal{K}'$ de compacts polycylindriques K de Y' tels que $u(K)\in\mathcal{K}$ est un ensemble suffisant le long de Z' , où $Z'=X'-Y'$. Réciproquement, si $(u_i)_{i\in I}$ désigne un recouvrement ouvert de (Y,X) ,

$$u_i : (Y_i,X_i) \longrightarrow (Y,X) ,$$

et pour tout i , $i\in I$, $\mathcal{K}_i$ un ensemble de compacts polycylindriques de Y_i , suffisant le long de Z_i , où $Z_i=X_i-Y_i$, alors l'ensemble

$$\mathcal{K}=\{ K\in\mathcal{KP}(Y) \ :\ \exists i\in I \ ,\ u^{-1}(K_i)\in\mathcal{K}_i \}$$

est suffisant le long de Z .

Soit $(K_j)_{j\in J}$ une famille de compacts polycylindriques de Y . On dit que $(K_j)_{j\in J}$ est un recouvrement de Y , suffisant le long de Z , si l'ensemble

$$\mathcal{K}=\{ K\in\mathcal{KP}(Y) \ :\ \exists j\in J \ ,\ K\subset K_j \}$$

est suffisant le long de Z . Pour cela, il faut et il suffit que l'ensemble

$$\mathcal{K}'=\{ K\in\mathcal{KP}(Y) \ :\ \exists j\in J \ ,\ K=K_j\}$$

satisfasse à la condition (ii) ci-dessus.

Enfin, en utilisant la proposition (2.2.3) de l'appendice I, on démontre le lemme suivant :

LEMME 1.4.3.- *Soient* (Y,X) *une compactification partielle,* $\mathcal{K}$ *un ensemble de compacts polycylindriques de* Y *, suffisant le long de* Z *, où* $Z=X-Y$ *, et*

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

une fonction continue, modérée le long de Z *. Alors il existe un ensemble* $\mathcal{K}'$ *,* $\mathcal{K}'\subset\mathcal{K}$ *, suffisant le long de* Z *, et une fonction continue*

$$\varphi' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

modérée le long de Z *, telle que pour tout* K *,* $K\in\mathcal{K}'$ *,*

$$\sup_{y\in K} \varphi(y) \leqq \inf_{y\in K} \varphi'(y) .$$

(1.4.4) Soient Y une variété analytique, $\mathcal{K}$ un ensemble de compacts polycylindriques de Y et (Y,X) et (Y,X') deux compactifications partielles équivalentes de Y . On démontre que pour que K soit suffisant le long de Z , où $Z=X-Y$, il faut et il suffit que K soit suffisant le long de Z' , où $Z'=X'-Y$. Cela permet de définir une notion d'ensemble de compacts polycylindriques, suffisant, sur une variété avec infini.

(1.5.1) Soient (Y,X) une compactification partielle, M un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent méromorphe le long de Z , où $Z=X-Y$, $(\|\cdot\|_K)_{K\in KP(Y)}$ une semi-norme sur M , modérée le long de Z , et s une section de M au-dessus de Y , $s\in\Gamma(Y,M)$. On démontre que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) il existe une fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad ,$$

modérée le long de Z , et un ensemble K , $K\subset KP(Y)$, suffisant le long de Z , tels que pour tout K , $K\in K$,

$$\|s\| \leq \sup_{y\in K} \varphi(y) \quad ;$$

ii) il existe une fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad ,$$

modérée le long de Z , et une famille $(K_j)_{j\in J}$ de compacts polycylindriques de Y , formant un recouvrement suffisant de Y le long de Z , telles que pour tout j , $j\in J$,

$$\|s\|_{K_j} \leq \sup_{y\in K} \varphi(y) \; ;$$

et que ces conditions sont équivalentes aux conditions (i') et (ii') obtenues en remplaçant dans les inégalités des conditions (i) et (ii) les bornes supérieures par des bornes inférieures. (Ces équivalences résultent essentiellement du lemme 1.4.3). On dit qu'une section s de M au-dessus de Y , $s\in\Gamma(Y,M)$, est modérée le long de Z , si elle satisfait aux conditions équivalentes ci-dessus, et on démontre que cette notion est indépendante de la semi-norme modérée sur M . L'ensemble des sections modérées le long de Z forme un sous-groupe additif de $\Gamma(Y,M)$ qu'on désigne par $\mathrm{Mod}_{Y;X}(M)$. On vérifie facilement que $\mathrm{Mod}_{Y;X}(\mathcal{O}_Y)$ (où $\mathcal{O}_Y$ est muni de sa structure méromorphe canonique (cf.(1.2.1))) est un sous-anneau de $\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y)$ et que $\mathrm{Mod}_{Y;X}(M)$ est un sous-$\mathrm{Mod}_{Y;X}(\mathcal{O}_Y)$-module de $\Gamma(Y,M)$. Si $f : M' \longrightarrow M$ désigne un morphisme de $\mathcal{O}_Y$-modules cohérents, méromorphes le long de Z , pour tout s , $s\in\mathrm{Mod}_{Y;X}(M')$, on a $f(s)\in\mathrm{Mod}_{Y;X}(M)$ et l'application

$$s \longmapsto f(s)$$

définit un morphisme de $\mathrm{Mod}_{Y;X}(\mathcal{O}_Y)$-modules, et ceci fonctoriellement.

Pour toute immersion ouverte de compactifications partielles

$$u : (Y',X') \longrightarrow (Y,X)$$

et toute section s de M modérée le long de Z, $s \in \mathrm{Mod}_{Y;X}(M)$, la section $s' = s|Y' = (u|Y')^*(s)$, $s' \in \Gamma(Y',(u|Y')^*(M))$, est modérée le long de Z', où $Z' = X'-Y'$, (la structure méromorphe sur $(u|Y')^*(M)$ étant déduite de celle de M (cf. (1.2.4))). On démontre que le foncteur qui associe à l'immersion ouverte de compactifications partielles

$$u : (Y',X') \longrightarrow (Y,X)$$

le groupe $\mathrm{Mod}_{Y';X'}((u|Y)^*(M))$ est un faisceau de groupes pour la topologie G.H. de (Y,X), qu'on désigne par M_{mod}.

Pour tout $\mathcal{O}_Y$-module cohérent M, méromorphe le long de Z, et tout m, $m \in \mathbb{N}$, on appelle m-ième groupe de cohomologie modérée de M et on désigne par $H^m_{\mathrm{mod}}((Y,X),M)$ le m-ième groupe de cohomologie du faisceau M_{mod} pour la topologie G.H.,

$$H^m_{\mathrm{mod}}((Y,X),M) = H^m_{\mathrm{G.H.}}((Y,X),M_{\mathrm{mod}}) .$$

En particulier, on a donc

$$H^{\circ}_{\mathrm{mod}}((Y,X),M) = \mathrm{Mod}_{Y;X}(M) .$$

(1.5.2) Soient Y une variété analytique, (Y,X) et (Y,X') deux compactifications partielles équivalentes de Y et M un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent, méromorphe le long de Z, où $Z = X-Y$. Conformément à (1.2.5), on en déduit une structure de $\mathcal{O}_Y$-module méromorphe le long de Z' (où $Z' = X'-Y$) sur M, et on vérifie aussitôt que

$$\mathrm{Mod}_{Y;X}(M) = \mathrm{Mod}_{Y;X'}(M) .$$

Plus généralement, on démontre (en utilisant la méthode de calcule de la cohomologie par Čech) que pour tout m, $m \in \mathbb{N}$, on a

$$H^m_{\mathrm{mod}}((Y,X),M) = H^m_{\mathrm{mod}}((Y,X'),M) .$$

Cela permet de définir les groupes de cohomologie modérée d'un module cohérent M méromorphe sur une variété analytique avec infini $\mathcal{Y}$ qu'on désignera par

$$H^m_{\mathrm{mod}}(\mathcal{Y},M) .$$

THÉORÈME 1.5.3.- *Soient (Y,X) une compactification partielle et $Z = X-Y$. Le foncteur qui associe à un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent M, méromorphe le long de Z, le $\mathrm{Mod}_{Y;X}(\mathcal{O}_Y)$-module $\mathrm{Mod}_{Y;X}(M)$ est exact à gauche.*

Ce théorème est le résultat "clef" de la théorie et se démontre en utilisant le théorème (4.1.1) de l'appendice II. On en esquissera la démonstration pour indiquer comment les résultats de ce travail s'appliquent à la théorie de la cohomologie modérée.

Après plusieurs réductions faciles on est amené à démontrer le lemme suivant :

LEMME 1.5.4.- *Soient* p, m, m' *des entiers,* $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m' \in \mathbb{N}$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}^p$, Z *un fermé analytique d'intérieur vide de* U, $Y = U - Z$,

$$f : M' \longrightarrow M$$

un morphisme de $\mathcal{O}_U$*-modules cohérents tel que* $f|Y$ *soit injectif,*

$$\eta : \mathcal{O}_U^m \longrightarrow M$$

et

$$\eta' : \mathcal{O}_U^{m'} \longrightarrow M'$$

des épimorphismes de $\mathcal{O}_U$*-modules. Alors pour toute section* s *de* M', $s \in \Gamma(Y,M')$, *telle qu'il existe un ensemble* $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \subset KP(Y)$, *suffisant le long de* Z, *et une fonction continue*

$$\psi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

modérée le long de Z, *tels que pour tout* K, $K \in \mathcal{K}$, *on ait*

$$\|f(s)\|_{\eta;K} \leq \inf_{y \in K} \psi(y) ,$$

il existe un ensemble $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}' \subset KP(Y)$, *suffisant le long de* Z, *et une fonction continue*

$$\psi' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

modérée le long de Z, *tels que pour tout* K', $K' \in \mathcal{K}$, *on ait*

$$\|s\|_{\eta';K'} \leq \inf_{y \in K'} \psi'(y) .$$

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{K}$ étant suffisant, on vérifie facilement qu'il existe une fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

modérée le long de Z, telle que pour tout K, $K \in KP(Y)$, et tout y, $y \in \mathring{K}$, la condition

$$K \subset \overline{D}(y;(1/\varphi(y),\dots,1/\varphi(y)))$$

implique que $K \in \mathcal{K}$ (cf. (1.1.5), (1.4.1) et (1.4.2)). On pose

$$M'' = \mathrm{Coker}(f) .$$

En vertu du théorème (4.1.1) de l'appendice II, il existe des fonctions continues

$$\varphi' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \psi_1 : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^* ,$$

modérées le long de Z , et une famille $(K_i)_{i\in I}$ de polydisques fermés de $\mathbb{C}^p$ contenus dans Y tels que :

i) pour tout point y de Y on a :

a) pour tout i , $i\in I$, tel que $y\in \mathring{K}_i$

$K_i \subset \overline{D}(y;(1/\varphi(y),\ldots,1/\varphi(y)))$;

b) il existe i , $i\in I$, tel que $y\in \mathring{K}_i$ et

$\overline{D}(y;(1/\varphi'(y),\ldots,1/\varphi'(y)))\subset K_i$;

ii) pour tout i , $i\in I$, K_i est privilégié pour M , M' et M'' ;

iii) pour tout i , $i\in I$, il existe une scission $\mathbb{C}$-linéaire continue σ_i de $B(K_i;f)$ telle que

$$\|\sigma_i\|_{\eta';\eta;K_i} \leqq \inf_{y\in K_i} \psi_1(y) \quad .$$

On remarque que la condition (i), (a) implique que pour tout i , $i\in I$, $K_i\in \mathcal{K}$. D'autre part, comme par hypothèse $f|Y$ est injectif, la suite

$$0 \longrightarrow M'|Y \xrightarrow{f|Y} M|Y \longrightarrow M''|Y \longrightarrow 0$$

est exacte et la condition (ii) implique que $B(K_i;f)$ est injectif ([7], §7, n°3, proposition 3, p.56)(1). On en déduit que la scission σ_i de la condition (iii) est une section de $B(K_i;f)$, autrement dit

$$\mathrm{id}_{B(K_i;M')} = \sigma_i \circ B(K_i;f) \quad ,$$

d'où

$$\|s\|_{\eta';K_i} \leqq \|\sigma_i\|_{\eta';\eta;K_i} \; \|f(s)\|_{\eta;K_i} \leqq$$

$$\leqq \inf_{y\in K_i} \psi_1(y) \cdot \inf_{y\in K_i} \psi(y) \leqq \inf_{y\in K_i} (\psi_1(y)\psi(y)) \; .$$

Posons

$$\psi' = \psi_1 \cdot \psi$$

et

$$\mathcal{K}' = \{K\in \mathcal{KP}(Y) \; : \; \exists i\in I \; , \; K\subset K_i\} \quad .$$

La fonction

(1) La définition (2.2.5) de l'appendice II est équivalente à la définition 1, §7, n°1, p.54 de [7] (cf.[48] , théorème du §1, p.146).

$$\psi' : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

est continue, modérée le long de Z (App.I,1.3.1), et la condition (i), (b) implique que K' est un ensemble suffisant le long de Z. Enfin, pour tout K, $K \in K'$, il existe i, $i \in I$, tel que $K \subset K_i$, d'où

$$\|s\|_{\eta';K} \leqq \|s\|_{\eta';K_i} \leqq \inf_{y \in K_i} \psi'(y) \leqq \inf_{y \in K} \leqq \psi'(y) ,$$

ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 1.5.5.- *Soient* (Y,X) *une compactification partielle,* $Z = X-Y$, M *un* O_Y*-module cohérent, méromorphe le long de* Z *et* s *une section de* M *au-dessus de* Y , $s \in \Gamma(Y,M)$. *Pour que la section* s *soit modérée le long de* Z , *il faut et il suffit que* s *soit méromorphe le long de* Z .

Le plan de la démonstration de ce théorème est le suivant. On le démontre d'abord, dans le cas où $M = O_T|Y$, T étant un sous-espace analytique fermé réduit de X et la structure méromorphe de M étant celle définie par le prolongement O_T de $O_T|Y$. Ensuite, on en déduit le cas général en considérant un "dévissage" local d'un prolongement local de M définissant sa structure méromorphe et en utilisant le théorème (1.5.3).

COROLLAIRE 1.5.6.- *En gardant les notations du théorème* (1.5.5) , *le faisceau* M_{mod} *sur* (Y,X) *n'est autre que le faisceau pour la topologie* G.H *de* (Y,X) *formé des sections méromorphes de* M *le long de* Z (cf. (1.2.4)).

(1.6.1) Soit Y un schéma algébrique lisse sur $\mathbb{C}$. D'après Nagata [46] , Y s'identifie à un ouvert de Zariski dense d'un schéma X propre sur $\mathbb{C}$ (qu'on peut supposer réduit, et même lisse par la théorie de désingularisation de Hironaka [24]) . De plus, si X_1 et X_2 sont deux telles "compactifications" de Y , il en existe une troisième X , et des morphismes de $\mathbb{C}$-schémas

$$u_1 : X \longrightarrow X_1 \quad \text{et} \quad u_2 : X \longrightarrow X_2$$

(forcément propres), tels que

$$u_i^{-1}(Y) = Y , \qquad i = 1,2$$

et induisant l'identité sur Y . (On peut prendre X l'adhérence schématique de l'image diagonale de Y dans $X_1 \times X_2$). On en déduit que la variété $\mathbb{C}$-analytique Y^{an} associé est munie d'une structure de variété avec infini, qu'on désignera par $\tilde{Y}^{an}$. En effet, il résulte de ce qui précède que les compactifications partielles (Y^{an},X_1^{an}) et (Y^{an},X_2^{an}) (on dira plus simpleme compactifications, puisque X_1^{an} et X_2^{an} sont compacts) sont équivalentes.

(1.6.2) Soient Y un schéma algébrique lisse sur $\mathbb{C}$, X un $\mathbb{C}$-schéma algébrique réduit contenant Y comme ouvert de Zariski dense et M un O_Y-module cohérent.

Le $\mathcal{O}_Y$-module M peut se prolonger en un $\mathcal{O}_X$-module cohérent M_1 ([23], 6.9.8), et on vérifie facilement que si l'on considère la compactification partielle (Y^{an},X^{an}), les prolongements M_1^{an} de M^{an} ainsi obtenus sont tous équivalents. On définit ainsi sur M^{an} une structure de $\mathcal{O}_{Y^{an}}$-module cohérent effectivement méromorphe le long de $Z = X^{an} - Y^{an}$.

(1.6.3) Soit Y un schéma algébrique lisse sur $\mathbb{C}$. Conformément à (1.6.2), pour tout $\mathcal{O}_Y$-module cohérent M, M^{an} est muni d'une structure de $\mathcal{O}_{Y^{an}}$-module cohérent effectivement méromorphe sur $\tilde{Y}^{an}$. On déduit de plus aussitôt de GAGA [50] (et cf. [6]) que :

PROPOSITION 1.6.4.- *Le foncteur* $M \longrightarrow M^{an}$ *induit une équivalence de catégorie entre la catégorie des* $\mathcal{O}_Y$*-modules cohérents et celle des* $\mathcal{O}_{Y^{an}}$*-modules cohérents effectivement méromorphes sur* $\tilde{Y}^{an}$.

La proposition suivante généralise la proposition 2.24, p.71 de [6].

PROPOSITION 1.6.5.- *Soient* Y *un schéma algébrique lisse sur* $\mathbb{C}$ *et* M *un* $\mathcal{O}_Y$*-module cohérent. Une section* s *de* M^{an}, $s \in \Gamma(Y^{an},M^{an})$, *est algébrique si et seulement si elle est modérée sur* $\tilde{Y}^{an}$.

Cette proposition résulte du théorème (1.5.5) et de GAGA [50] et est un cas particulier du théorème suivant.

THÉORÈME 1.6.6.- *Soient* Y *un schéma algébrique lisse sur* $\mathbb{C}$ *et* M *un* $\mathcal{O}_Y$*-module cohérent. Alors pour tout* m, $m \in \mathbb{N}$, *on a*

$$H^m(Y,M) = H^m_{mod}(\tilde{Y}^{an},M^{an}) .$$

Le plan de la démonstration est le suivant. Il existe un schéma propre et lisse X sur $\mathbb{C}$ tel que Y s'identifie à un ouvert de Zariski de X et $Z = X-Y$ soit un diviseur de X. Si l'on désigne par $i : Y \hookrightarrow X$ l'injection canonique on démontre que pour tout m, $m \in \mathbb{N}$,

$$H^m(Y,M) = H^m(X,i_*(M)) .$$

Or, il résulte de [23] (6.9.2) et (6.9.9) que $i_*(M)$ est limite inductive d'une famille M_i de $\mathcal{O}_X$-modules cohérents tels que $M_i|Y = M$. Comme X est noetherien on a

$$H^m(X,i_*(M)) = \varinjlim H^m(X,M_i)$$

et il résulte de GAGA [50] que

$$H^m(X,M_i) = H^m(X^{an},M_i^{an}) .$$

L'espace X^{an} étant compact, on a

$$\varinjlim H^m(X^{an}, M_i^{an}) = H^m(X^{an}, \varinjlim M_i^{an}) .$$

On vérifie que $\varinjlim M_i^{an}$ n'est autre que le faisceau sur X des sections méromorphes de M^{an} le long de Z^{an} et on démontre que sa cohomologie pour la topologie ordinaire de X est la même que pour la topologie G.H. On termine la démonstration en utilisant le corollaire (1.5.6).

(1.7.1) On appelle condition de croissance à l'infini la donnée pour toute compactification partielle (Y,X), d'un ensemble $M_{Y;X}$ de fonctions continues de Y dans $\mathbb{R}$ satisfaisant aux axiomes suivants :

i) $M_{Y;X}$ est un sous-anneau de l'anneau C_Y des fonctions continues sur Y à valeurs dans $\mathbb{R}$.

ii) $M_{Y;X}$ contient l'ensemble des fonctions continues sur Y à valeurs dans $\mathbb{R}$, modérées le long de Z , où $Z = X-Y$.

iii) Pour tout φ_1 et φ_2 , $\varphi_1 \in C_Y$, $\varphi_2 \in M_{Y;X}$ la condition

$$|\varphi_1| \leq |\varphi_2|$$

implique que $\varphi_1 \in M_{Y;X}$.

iv) Pour tout morphisme de compactifications partielles

$$u : (Y',X') \longrightarrow (Y;X)$$

et tout φ , $\varphi \in M_{Y;X}$, on a $\varphi \circ u \in M_{Y';X'}$ (fonctorialité).

v) Pour toute compactification partielle (Y,X) le foncteur qui associe à une immersion ouverte de compactifications partielles

$$u : (Y',X') \longrightarrow (Y,X)$$

l'anneau $M_{Y';X'}$ est un faisceau pour la topologie G.H. de (Y,X) .

On dit qu'une fonction continue

$$\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

est M-modérée le long de Z si $\varphi \in M_{Y;X}$. En vertu des axiomes (iv) et (v) , si (Y,X) et (Y,X') sont deux compactifications partielles équivalentes de Y , on a $M_{Y;X} = M_{Y;X'}$, ce qui permet de définir une notion de fonction M-modérée sur une variété analytique avec infini.

Exemples 1.7.2.- Si pour toute compactification partielle (Y,X) on pose

$$M_{Y;X} = \mathrm{Mod}_{Y;X}$$

(cf. (1.1.3)), alors M est une condition de croissance à l'infini (appelée croissance polynomiale). Il en est de même si l'on pose

$$M_{Y;X} = C_Y \quad .$$

C'est les deux cas extrêmes. On peut donner d'autres exemples de croissance à l'infini comme la croissance exponentielle :

$$M_{Y;X} = \{\varphi \in C_Y \ : \ \mathrm{Log}(1 + |\varphi|) \in \mathrm{Mod}_{Y;X}\} \quad .$$

(1.7.3) Soient (Y,X) une compactification partielle et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent méromorphe le long de $Z = X-Y$. On définit la notion de section de $\mathcal{M}$ au-dessus de Y , M-modérée le long de Z , exactement comme dans (1.5.1) en remplaçant dans la définition "fonction modérée" par "fonction M-modérée". On désigne l'ensemble de ces sections par $M_{Y;X}(\mathcal{M})$. Le théorème (1.5.3) reste vrai, autrement dit le foncteur

$$\mathcal{M} \longmapsto M_{Y;X}(\mathcal{M})$$

est exact à gauche, et la démonstration en est rigoureusement identique. On définit également le faisceau (pour la topologie G.H.) des sections M-modérées, $\mathcal{M}_{\text{M-mod}}$ et la cohomologie M-modérée par

$$H^m_{\text{M-mod}}((Y,X),\mathcal{M}) = H^m_{\text{G.H.}}((Y,X),\mathcal{M}_{\text{M-mod}}) \quad .$$

INDEX DES NOTATIONS

$|d|$, $d!$, a^d $(d \in \mathbb{N}^p)$: 0 .

s_α ($\leqq_\alpha$ relation de bon ordre) : 0 .

$B(K)$, $\|\cdot\|_K$: 0 .

$B(K;f)$ (f matrice de fonctions analytiques) : 0 .

$\mathcal{M}_K$, $\mathcal{J}_K$: 0 .

$M(\Delta)$ $(\Delta \subset \mathbb{N}^p)$: I,1.3.

D_α , $\leqq_\alpha$ (α drapeau orienté) : I,3.2.

$\leqq_L$: I,3.5.3, I,3.12.1.

Ξ_E , e_E (E $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie) : I,4.1.

r_u (u application $\mathbb{R}$-linéaire) : I,4.1.

$V_{x;\varepsilon}$, $W_{\chi;c}$ $(\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $c \in \mathbb{R})$: I,4.2.

$\mathcal{F}_A$, $\mathcal{F}_{\leqq_E}$, $\mathcal{F}_\alpha$: I,4.4.

$\mathcal{G}_A$, $\mathcal{G}_{\leqq_E}$, $\mathcal{G}_\alpha$: I,4.4.

χ_ρ $(\rho \in (\mathbb{R}_+^*)^p)$: I,4.7.

ξ_p : I,4.7.

r_A (A matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$) : I,4.7.

$\mathcal{E}_{p;\delta;\varepsilon}$, $\mathcal{C}_{p;\delta;c}$ ($\delta \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $c \in \mathbb{R}$) : I,4.9.

$\mathcal{F}^{o}_{\leqq'}$, $\mathcal{G}^{o}_{\leqq'}$: I,5.1.3.

$E_x(f)$, $E(f)$ (f fonction analytique) : II,1.1.

$v_{\alpha;x}(f)$, $v_\alpha(f)$, $v(f)$ (f fonction analytique) : II,1.1.

$P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};x}$, $P_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};K;x}$, $P_{\alpha;\mathcal{J};x}$, $P_{\alpha;\mathcal{J};K;x}$ ($\mathcal{J}$ idéal cohérent) : II,1.2.

$M_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};x}$, $M_{\alpha;\mathcal{D};\mathcal{J};K;x}$, $M_{\alpha;\mathcal{J};x}$, $M_{\alpha;\mathcal{J};K;x}$ ($\mathcal{J}$ idéal cohérent) : II,1.2.

J^d_α : II,2.0.

$\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$, $u \boxtimes v$: II,2.0.

π_d : II,2.1.

$\mathcal{P}^d_{\alpha;\mathcal{M};\mathcal{N}}$, $\mathcal{P}^d_{\alpha;u;v}$: II,2.1.

$\mathcal{P}_{\alpha;\mathcal{M};\mathcal{N}}$, $\mathcal{P}_{\alpha;u;v}$: II,2.3.

$\varphi_{\mathcal{M};\mathcal{M}';\mathcal{N}}$: II,2.6.2.

$S_{\alpha;\mathcal{J};Y}$, $S_{\mathcal{J};Y}$ ($\mathcal{J}$ idéal cohérent) : II,3.1.

$E \mathbin{\hat{\otimes}_\varepsilon} F$: III,2.0.

$\overline{D}(x;\rho)$: III,2.0.

$\rho'(K;x)$, $\rho''(K;x)$, $e(K;x)$: III,2.1.

$\mu_{K;x}$, $\tau_{K;x}$, $\alpha_{K;x}$ (K compact convexe de $\mathbb{C}$) : III,2.2.

$\mu_{i;K;x}$, μ_i , $\tau_{i;K;x}$, τ_i , $\alpha_{K;x}$, α (K polycylindre compact) : III,2.3.

$\mu^d_{K;x}$, μ^d , $\tau^d_{K;x}$, τ^d , $q_{d;K;x}$, q_d , $\alpha_{d;K;x}$, α_d : III,2.4.

$r_{K';K}$ $(K' \subset K)$: III,2.5.

μ^d_x , τ^d_x , $q_{d;x}$, $\alpha_{d;x}$: III,2.5.

$B_{\Delta;x}(K)$, $B_\Delta(K)$ $(\Delta \subset \mathbb{N}^p)$: III,2.6.

$\mu_{a;d;K;x}$, $\mu_{a;d}$, $\tau_{a;d;K;x}$, $\tau_{a;d}$: III,2.7.

$\Delta_i(d)$ $(d \in (\mathbb{N}^p)^m$, $1 \leqq i \leqq m)$: III,2.7.11.

$\Delta_o(d)$ $(d \in (\mathbb{N}^p)^m)$: III,2.7.12.

$\mu_{\mathcal{D};a;d;K;x}$, $\tau_{\mathcal{D};a;d;K;x}$: III,2.8.

$\nu_{f;a;d;K;x}$ (f matrice ligne de fonctions analytiques) : III,3.1.

$\sigma_{f;d;K}$: III,3.1.6.

$E_{i;x}(f)$, $E_i(f)$: III,3.2.

$B_{\mathcal{D};x}(K;f)$, $\nu_{\mathcal{D};f;a;d;K;x}$: III,3.2.

$\sigma_{\mathcal{D};f;d;K;x}$: III,3.2.5.

$S_\alpha(d)$, $r_{\alpha;d}$, $s_{\alpha;i}(d)$: III,4.1.

$M(d)$, $N(d)$ $(d \in (\mathbb{N}^p)^m)$: III,4.3.

$\mathcal{R}_U$: III,4.4.1.

Λ_f : III,4.4.2.

$\Phi_{A;m}$, $\Psi_{A;m}$: III,4.5.1.

$\mathcal{K}^p$, $\mathcal{K}^p_\bullet$, $\mathcal{K}^p_x$, $\mathcal{K}^p_A$: III,5.1.

$\tilde{\rho}''$, $\tilde{\rho}''_x$, ρ''_x , e_x : III,5.1.

$\mathcal{C}_m$, $V_{a;\varphi}$ $(\varphi \in \mathcal{C}_m)$: III,6.1.1.

$\mathcal{F}(Y/Z)$ ($\mathcal{F}$ filtre de Hahn-Banach) : III,6.1.3.

$\mathcal{E}_{p;\delta;\varphi}$ $(\varphi \in \mathcal{C}_m)$: III,6.1.4.

ρ''_A : III,6.2.

$\mathcal{D}_o$, $\mathcal{D}^m$: III,7.1.0.

$P_{\alpha;\mathcal{J};X_{gen}}$, $M_{\alpha;\mathcal{J};X_{gen}}$ ($\mathcal{J}$ idéal cohérent) : III,7.3.

e , $\mathcal{D}_o$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}$: IV,1.0.

$\mu_{\mathbb{I};e;K\times K'}$, $\mu_{\mathbb{I};e}$, $\tau_{\mathbb{I};e;K\times K'}$, $\tau_{\mathbb{I};e}$: IV,1.1.0.

$\varepsilon_{K';K}$, $\pi_{K;K'}$, $\theta_{K;K'}$: IV,1.1.0.

$\mu_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}$, $\tau_{\mathcal{D};\mathbb{I};e}$: IV,1.1.0.

$\chi_{K;K'}$: IV,1.2.

$\tilde{f}$ (f matrice de fonctions analytiques) : VI,1.3.1.

$B_{\mathcal{D}^m}(K\times K';\tilde{f})$, $B_{\mathbb{N}^{p+n}-\mathcal{D}^m}(K\times K';\tilde{f})$: IV,1.3.1.

$\mathcal{J}(\mathcal{M})$: IV,1.3.4.

$E_x(f)$, $v_{\alpha;x}(f)$ (f matrice colonne de fonctions analytiques) : VI,1.4.1.

$P_{\alpha;\mathcal{M};x}$, $P_{\alpha;\mathcal{M};K;x}$, $M_{\alpha;\mathcal{M};x}$, $M_{\alpha;\mathcal{M};K;x}$ ($\mathcal{M}$ module cohérent) : IV,1.4.2.

$\bar{\Delta}_i(d)$, $\bar{\Delta}_{oj}(d)$: IV,2.0.

$\nu_{f;a;d;K;x}$ (f matrice de fonctions analytiques) : IV,2.1.

$\leq_{\bar{\alpha}}$ ($\leq_\alpha$ relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$) : IV,3.0.4.

$S_{\alpha;\mathcal{M};X}$ ($\mathcal{M}$ module cohérent) : IV,4.1.

$M_{\alpha;\mathcal{M};X_{gen}}$, $P_{\alpha;\mathcal{M};X_{gen}}$ ($\mathcal{M}$ module cohérent) : IV,4.1.3.

B(K;f) (f morphisme de modules cohérents) : App.II,2.1.

$\|\cdot\|_{\eta;K}$ (η épimorphisme) : App.II,2.1.

$B_\eta(K;\mathcal{M})$ ($\mathcal{M}$ module cohérent) : App.II,2.1.

$\|\cdot\|_{\eta;\eta';K}$ (η , η' épimorphismes) : App.II,2.1.

$B(K;\mathcal{M})$ ($\mathcal{M}$ module cohérent) : App.II,2.2.3.

$Mod_{Y;X}$: App. III,1.1.3.

$\mathcal{KP}(Y)$: App. III,1.3.1.

$\rho'_d(K;y)$, $\rho''_d(K;y)$: App.III,1.4.1.

$Mod_{Y;X}(\mathcal{M})$, $\mathcal{M}_{mod}$, $H^m_{mod}((Y,X),\mathcal{M})$: App.III,1.5.1.

$H^m_{mod}(\mathcal{Y},\mathcal{M})$ ($\mathcal{Y}$ variété analytique avec infini) : App.III,1.5.2.

$\tilde{Y}^{an}$ (Y $\mathbb{C}$-schéma algébrique lisse) : App.III,1.6.1.

INDEX TERMINOLOGIQUE

Caractère : I,4.1.
Compact polycylindrique : App.III,1.3.1.
Compact polycylindrique privilégié : App.III,1.3.1.
Compactification partielle : App.III,1.1.1.
Compactifications partielles équivalentes : App.III,1.1.2.
Condition de croissance à l'infini : App.III,1.7.1.
Distance modérée le long de Z : App.III,1.1.5.
Distance modérée sur une variété analytique avec infini : App.III,1.1.6.
Distances équivalentes sur une compactification partielle : App.III,1.1.4.
Drapeau orienté : I,3.1.
Excentricité d'un polycylindre compact par rapport à un point : III,2.1.
Exposant privilégié d'un idéal cohérent : II,1.2.
Exposant privilégié d'un sous-module cohérent : IV,1.4.2.
Exposant privilégié minimal d'un idéal cohérent : II,1.2.
Exposant privilégié minimal d'un sous-module cohérent : VI,1.4.2.
Exposant privilégié d'une fonction analytique : II,1.1.
Famille de compacts polycylindriques suffisante le long de Z : App.III,1.4.2.
Famille de compacts polycylindriques suffisante sur une variété analytique avec infini : App.III,1.4.4.
Filtre d'effilements : III,5.1.3.
Filtre d'effilements modérés le long de Z : III,6.2.1.
Filtre de Hahn-Banach : I,4.4.
Filtre d'excentricité : III,5.1.2.
Fonction continue modérée le long de Z : App.I, 1.2.
Groupes de cohomologie modérée : App.III,1.5.2.
Immersion ouverte de compactifications partielles : App.III,1.1.1.
Matrice adaptée à un sous-espace vectoriel : I,3.5.
Matrice adaptée à un sous-monoïde : I,3.11.
Matrice de définition d'une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$: I,3.11.
Matrice de définition d'une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^p$: I,3.5.
Module cohérent effectivement méromorphe le long de Z : App.III,1.2.1.
Module cohérent méromorphe le long de Z : App.III,1.2.1.
Module cohérent méromorphe sur une variété analytique avec infini : App.III,1.2.5.
Module cohérent porté par un sous-espace analytique fermé : 0.

Morphisme de compactifications partielles : App.III,1.1.1.
Morphisme strict de compactifications partielles : App.III,1.1.1.
Morphisme de modules cohérents méromorphes : App.III,1.2.2.
Ouvert distingué pour une famille finie de fonctions analytiques : III,7.1.1.1.
Ouvert distingué pour un idéal cohérent : III,7.1.1.2.
Polycylindre compact : 0.
Polycylindre compact pointé : III,5.1.
Polycylindre compact pointé suffisamment effilé, modérément le long de Z : III,6.2.1.
Polycylindre compact privilégié pour un module cohérent : App.II, 2.2.5.
Polycylindre compact suffisamment centré en un point : III,5.1.2.
Polycylindre compact suffisamment effilé en un point : III,5.1.3.
Polydisque fermé : III,2.0.
Polydisque fermé suffisamment effilé : III,5.1.4.
Polydisque fermé suffisamment effilé, modérément le long de Z : III,6.2.4.
Prolongement local d'un module cohérent : App.III,1.2.1.
Prolongements équivalents de modules cohérents : App.III,1.2.1.
Prolongements locaux équivalents de modules cohérents : App.III,1.2.1.
Recouvrement ouvert d'une compactification partielle : App.III,1.1.1.
Relation d'ordre antilexicographique sur $\mathbb{N}^p$: I,3.12.1.
Relation d'ordre antilexicographique sur $\mathbb{R}^p$: I,3.5.3.
Relation d'ordre compatible avec la structure d'un espace vectoriel : I,2.0.
Relation d'ordre compatible avec la structure d'un monoïde : I,1.0.
Relation d'ordre privilégiant un sous-monoïde : IV,3.0.1.
Relation d'ordre régulière sur $\mathbb{N}^p$: I,1.0.
Relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^p$ rationnelle : I,3.11.
Relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^p$ rationnelle : I,3.9.1.
Scission : III,1.1.
Scission normale : III,1.1.
Section d'un module cohérent méromorphe, modérée le long de Z : App.III,1.5.1.
Section méromorphe d'un module cohérent méromorphe : App.III,1.2.2.
Semi-norme sur un module cohérent : App.III,1.3.1.
Semi-norme sur un module cohérent méromorphe, modérée le long de Z : App.III,1.3.3.
Semi-normes équivalentes sur un module cohérent : App.III,1.3.2.
Sous-module méromorphe : App.III,1.2.3.
Stratification $\mathbb{C}$-analytique : II,3.4.
Topologie de Grothendieck-Hironaka : App.III,1.1.1.
Variété analytique avec infini : App.III,1.1.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.M. AROCA, H. HIRONAKA et J.L. VINCENTE, *The theory of the maximal contact*. Memorias de matematica del instituto "Jorge Juan", Vol.29, Madrid (1975).

[2] J.M. AROCA, H. HIRONAKA et J.L. VINCENTE, *Desingularization theorems*. Memorias de matematica del instituto "Jorge Juan", Vol.30, Madrid (1977).

[3] D.A. BAYER, *The division algorithm and the Hilbert scheme*. Ph.D. Thesis, Harvard (1982).

[4] J. BRIANÇON, *Weierstrass préparé à la Hironaka*. Astérisque n°7 et 8, Paris (1973), 67-73.

[5] J. BRIANÇON et A. GALLIGO, *Déformations distinguées d'un point de* $\mathbb{C}^2$ *ou* $\mathbb{R}^2$. Astérisque n°7 et 8, Paris (1973), 129-138.

[6] P. DELIGNE, *Equations différentielles à points singuliers réguliers*. Lecture Notes in Mathematics, 163, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1970).

[7] A. DOUADY, *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16, 1 (1966), 1-95.

[8] A. DOUADY, *Platitude et privilège*. L'enseignement Mathématique, Monographie n°17.

[9] A. DOUADY, *Le théorème des images directes de Grauert*. Astérisque n°16, Paris (1974), 49-62.

[10] A. DOUADY, *Le problème des modules locaux pour les espaces* $\mathbb{C}$*-analytiques compacts*. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t.7 (1974), 569-602.

[11] A. DOUADY, J. FRISCH et A. HIRSCHOWITZ, *Recouvrements privilégiés*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 22, 4 (1972), 59-96.

[12] R. DOUADY, *Petites perturbations d'une suite exacte et d'une suite quasi-exacte*. Séminaire d'Analyse, Nice (1966).

[13] R. DOUADY, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Astérisque n°16, Paris (1974), 7-32.

[14] O. FORSTER et K. KNORR, *Ein Beweis des Grauertschen Bildgarbensatzes nach Ideen vom B. Malgrange*. Manuscripta Math., vol.5 (1971), 19-44.

[15] J. FRISCH et J. GUENOT, *Prolongements de faisceaux analytiques cohérents*. Inventiones Math. 7 (1969), 321-343.

[16] A. GALLIGO, *A propos du théorème de préparation*. Lecture Notes in Mathematics, 409, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1973), 543-579.

[17] A. GALLIGO, *Sur le théorème de préparation de Weierstrass pour un idéal de* $k\{x_1,\dots,x_n\}$. Astérisque n°7 et 8, Paris (1973), 165-169.

[18] A. GALLIGO, *Théorème de division et stabilité en géométrie analytique locale*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 29, 2 (1979), 107-184.

[19] A. GALLIGO, *Algorithmes de calcul de base standards*. Publications Mathématiques, Université de Nice, vol. n°9 (1983).

[20] A. GALLIGO et C. HOUZEL, *Module des singularités isolées d'après Verdier et Grauert*. Astérisque n°7 et 8, Paris (1973), 139-163.

[21] J. GIRAUD, *Sur la théorie du contact maximal*. Math. Z. 137 (1974), 285-310.

[22] H. GRAUERT, *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*. Publ. Math. I.H.E.S., 5, Bures-sur-Yvette (1960).

[23] A. GROTHENDIECK et J.A. DIEUDONNÉ, *Eléments de Géométrie Algébrique* I . Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 166, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1971).

[24] H. HIRONAKA, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, I et II. Ann. of Math. 79 (1964), 109-326.

[25] H. HIRONAKA, *Characteristic polyhedra of singularities*. J. Math. Kyoto Univ., vol.7, n°3 (1967), 251-293.

[26] H. HIRONAKA, *Bimeromorphic smoothing of complex analytic spaces*. Preprint, Université de Warwick (1971).

[27] H. HIRONAKA, *La voûte étoilée*. Astérisque n°7 et 8, Paris (1973), 415-440.

[28] H. HIRONAKA, *Introduction to the theory of infinitely near singular points*. Memorias de matematica del instituto "Jorge Juan", vol.28, Madrid (1974).

[29] H. HIRONAKA, *Flattening theorem in complex-analytic geometry*, Am. J. of Math. vol.97, n°2 (1975), 503-547.

[30] H. HIRONAKA, M. LEJEUNE et B. TEISSIER, *Platificateur local en géométrie analytique*. Astérisque n° 7 et 8, Paris (1973), 441-463.

[31] L. HÖRMANDER, *On the division of distributions by polynomials*. Arkiv för Mathematik, 3 (1958), 555-568.

[32] R. KIEHL et J.L. VERDIER, *Ein einfacher Beweis des Kohärensatzes von Grauert*. Math. Ann. 195 (1971), 24-50.

[33] M. LEJEUNE et B. TEISSIER, *Normal cones and sheaves of relative jets*. Preprint, Université de Warwick (1971).

[34] M. LEJEUNE et B. TEISSIER, *Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités*. Séminaire Ecole Polytechnique (1972).

[35] M. LEJEUNE et B. TEISSIER, *Contribution à l'étude des singularités*. Thèses Université de Paris VII (1973).

[36] M. LEJEUNE et B. TEISSIER, *Transversalité, polygone de Newton, et installations*. Astérisque n° 7 et 8 , Paris (1973), 75-119.

[37] S. ŁOJASIEWICZ, *Sur le problème de la division*. Studia Math.18 (1959), 87-136.

[38] S. ŁOJASIEWICZ, *Ensembles semi-analytiques*. Notes miméographiées par l'I.H.E.S, Bures-Sur-Yvette (1965).

[39] B. MALGRANGE, *Division des distributions*. Séminaire Bourbaki 1959/60, n°203.

[40] B. MALGRANGE, *Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques*. Bull. Soc. Math. France, 91 (1963), 113-127.

[41] B. MALGRANGE, *Ideals of differentiable functions*. Oxford Univ. Press (1966).

[42] G. MALTSINIOTIS , *Precise vanishing theorem*. Astérisque n°17, Paris (1974), 51-67.

[43] G. MALTSINIOTIS , G.A.G.A. *affine* (d'après Pierre Deligne). Astérisque n°17, Paris (1974), 141-160.

[44] G. MALTSINIOTIS , *Transversalité obtenue par éclatements permis*. Bull. Soc. Math. France, 108 (1980), 365-400.

[45] J. MATHER, *On the preparation theorem of Malgrange : Structural stability of mappings*. Notes miméographiées, Princeton (1966).

[46] M. NAGATA, *Embeding of an abstract variety in a complete variety*. J. Math. Kyoto 2, 1 (1962), 1-10.

[47] G. POURCIN, *Théorème de Douady au-dessus de* S . Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, t.23 (1969), 451-459.

[48] G. POURCIN, *Polycylindres privilégiés*. Astérisque n°16, Paris (1974), 145-160.

[49] G. POURCIN, *Sous-espaces privilégiés d'un polycylindre*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 25, 1 (1975), 151-193.

[50] J.P. SERRE, *Géométrie algébrique et géométrique analytique*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 6 (1956), 1-42.

[51] J.P. SERRE, *Prolongements de faisceaux analytiques cohérents*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16, 1 (1966), 363-374.

[52] H. SPÄTH, *Der Weierstrassche Vorbereitungssatz*. Crelle Journ., 161, (1929), 95-100.

[53] K. WEIERSTRASS, *Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze*. Mathematische Werke von Karl Weierstrass, Vol. II, Berlin (1895), 135-188.

[54] H. CARTAN, *Idéaux de fonctions analytiques de* n *variables complexes*. Annales E.N.S., 61 (1944), 149-197.

[55] H. GRAUERT, *Über die Deformation isolierter Singularitäten analytischer Mengen*. Inventiones Math. 15 (1972), 171-198.

[56] B. MALGRANGE, *Frobenius avec singularités*. Publ. Math. I.H.E.S., 46, Bures sur Yvette (1976), 163-173.

POSTFACE

Aprés avoir terminé la rédaction de ce livre, j'ai appris que E. Bierstone et P. D. Milman avaient obtenu [57], de façon indépendante, des résultats de semi-continuité du diagramme de Newton analogues à ceux du chapitre II de ce livre. Leurs résultats sont à la fois beaucoup plus généraux et précis que ceux du chapitre II, et insuffisants pour les applications en vue dans ce livre.

Ils se placent dans le cadre suivant. Ils considèrent un morphisme d'espaces analytiques $\phi : X \to Y$, $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$) un $\mathcal{O}_X$-module (resp. $\mathcal{O}_Y$-module) cohérent et $f : \mathcal{N} \to \phi_*(\mathcal{M})$ un morhisme de $\mathcal{O}_Y$-modules (on remarquera que $\phi_*(\mathcal{M})$ n'est pas forcément un module cohérent). On en déduit, pour tout a, $a \in X$, une application $\mathcal{O}_{Y,\phi(a)}$-linéaire $f_a : \mathcal{N}_{\phi(a)} \to \mathcal{M}_a$. Soient $s \in \mathbb{N}$ et X^s_ϕ le produit fibré s-uple de X au dessus de Y

$$X^s_\phi = \{\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s) \in X^s : \phi(a_1) = \dots = \phi(a_s)\} \quad .$$

Pour tout $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s) \in X^s_\phi$, on pose $\mathcal{R}_\mathbf{a} = \bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Ker}(f_{a_i})$. Bierstone et Milman étudient la variation de $\mathcal{R}_\mathbf{a}$ en fonction du point $\mathbf{a}$ de X^s_ϕ. Le cas qui nous intéresse ici est celui où Y est un ouvert U de $\mathbb{C}^p$ et où $\mathcal{N}$ est égal à $\mathcal{O}^n_U$. Si l'on désigne par $\leq_{LB}$ la relation d'ordre sur $\mathbb{N}^{p+n}$ définie par

$$d \leq_{LB} d' \quad \Longleftrightarrow \quad (d, |d|) \leq_L (d', |d'|) \quad ,$$

où $\leq_L$ désigne l'ordre antilexicographique sur $\mathbb{N}^{p+n+1}$, on note $\mathfrak{N}_\mathbf{a}$ l'ensemble des exposants privilégiés du sous-module $\mathcal{R}_\mathbf{a}$ de $\mathcal{O}^n_{U,b}$, relativement à la relation d'ordre $\leq_{LB}$, où si $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, alors $b = \phi(a_1) = \dots = \phi(a_n)$. Sous ces hypothèses, Bierstone et Milman démontrent que $\mathfrak{N}_\mathbf{a}$ est semi-continu comme fonction de $\mathbf{a}$ dans les cas suivants:

(a) Cas algébrique: *ϕ est un morphisme d'espaces algébriques, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont algébriques cohérents, et f est algébrique.*

(b) Cas régulier: *X est régulier, ϕ est régulier et f est le morphisme $f : \mathcal{O}_Y \to \phi_*(\mathcal{O}_X)$, déduit de ϕ.*

(c) Cas fini: *X est de Cohen-Macauley et ϕ est localement fini.*

(d) Cas cohérent: *$X = Y$ et $\phi = \mathrm{id}_X$.*

En plus, ils démontrent, dans ces cas, un théorème analogue à la proposition 3.6 du chapitre II.

Le cas étudié au chapitre II de ce livre est le cas (d) ci-dessus. Ce cas est trivial et classique pour la relation d'ordre $\leq_{LB}$ utilisée par Bierstone et Milman, qui ne le citent d'ailleurs que pour mémoire. En effet, l'argument de platitude utilisé dans le chapitre II est alors immédiat, sans aucun passage à la limite. Il en est de même pour toute relation de bon ordre sur $\mathbb{N}^p$ (compatible avec sa structure de monoïde et moins fine que le relation d'ordre produit $\leq$), telle que $\mathbb{N}^p$ muni de cette relation d'ordre soit isomorphe, en tant qu'ensemble ordonné, à $\mathbb{N}$ muni de sa relation d'ordre naturel. Les difficultés commencent quand il existe des suites strictement croissantes infinies mais bornées, comme il en existe dans le cas de l'ordre antilexicographique pur $\leq_L$. La raison pour laquelle on s'intéresse particulièrement à ce cas est que c'est le seul cas où l'on obtient des majorations s'exprimant de façon vraiement simple.

J'ignore si les méthodes de Bierstone et Milman peuvent s'adapter à ce cas. A priori dans leurs article on utilise explicitement l'hypothèse qu'il n'y a pas de suite infinie strictement croissante et bornée. Néanmoins, en étudiant la façon dont le diagramme de Newton dépend de la relation d'ordre on pourrait, peut être, contourner cette difficulté.

[57] E. Bierstone, P. D. Milman, *Relations among analytic functions I.* Ann. Inst. Fourier, 37, 1 (1987), 187-239.

ABSTRACT

The object of this book is the study of the following problem. Consider a domain U of $\mathbb{C}^p$ and a linear system with coefficients in $\Gamma(U, \mathcal{O}^p_{\mathbb{C}})$, in other words, a matrix $(f_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$, where $f_{ij} \in \Gamma(U, \mathcal{O}^p_{\mathbb{C}})$, or equivalently an $\mathcal{O}_U$-module morphism

$$f : \mathcal{O}^m_U \to \mathcal{O}^n_U \quad .$$

For every compact polycylinder K of $\mathbb{C}^p$ contained in U, if we denote by $B(K)$ the normed Banach algebra of functions continuous on K and analytic in the interior of K, the morphism f defines, by restriction of the f_{ij} to K, a $B(K)$-linear continuous map

$$B(K; f) : B(K)^m \to B(K)^n \quad ,$$

which can be considered as a linear system of n equations in m unknowns, with coefficients in $B(K)$. We want to define a $\mathbb{C}$-linear continuous procedure associating to every $g \in B(K)^n$ an element $h \in B(K)^m$, which is a solution of the system if $g \in \mathrm{Im}(B(K; f))$, in other words, to define a $\mathbb{C}$-linear continuous map

$$\sigma : B(K)^n \to B(K)^m$$

such that

$$B(K; f) \circ \sigma \circ B(K; f) = B(K; f) \quad .$$

We then say that σ is a scission of $B(K; f)$. This is not always possible. If we denote by $\mathcal{Q}$ the $\mathcal{O}_U$-coherent module cokernel of the morphism f, the existence of such a σ is equivalent to the assertion that K is $\mathcal{Q}$-privileged in the sense of Douady. The aim of this book is to define $\mathbb{C}$-linear, continuous scissions σ_K of $B(K, f)$, in such a way that we can "control" the growth of the norm of σ_K, when K varies, at least for "sufficiently small" K. We obtain the following theorem:

Theorem.- *Let U be a domain of $\mathbb{C}^p$ and $f : \mathcal{O}_U^m \to \mathcal{O}_U^n$ a morphism of $\mathcal{O}_U$-modules. There exist a $\mathbb{C}$-analytic stratification $(X_j)_{j\in J}$ of U and for every j, $j \in J$, an element $d_j = (d_{j1}, \dots, d_{jp})$ of $\mathbb{N}^p$, a real number δ_j, $\delta_j \in \mathbb{R}_+^*$, and two continuous functions*

$$\varphi_j : X_j \to \mathbb{R}_+^* \qquad \text{and} \qquad \psi_j : X_j \to \mathbb{R}_+^* \qquad ,$$

with polynomial growth along $\bar{X}_j - X_j$ ($\bar{X}_j$ being the closure of X_j in U), such that for every point x of X_j and every closed polydisk K of center x and polyradius $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_p)$, $\rho \in (\mathbb{R}_+^*)^p$, the inequalities

$$(I) \qquad \rho_1 < 1/\varphi_j(x)\,, \quad \rho_2 < \rho_1^{\delta_j}\,, \dots, \rho_p < \rho_{p-1}^{\delta_j}$$

imply that K is contained in U and that there exists a $\mathbb{C}$-linear continuous scission σ_K of $B(K; f)$ such that

$$\|\sigma_K\|_K \leq \psi_j(x)/\rho^{d_j}$$

(where $\rho^{d_j} = \prod_{i=1}^{p} \rho_i^{d_{ji}}$).

In fact, we prove a more precise and more general result. More precise, because we give explicit formulas for d_j and δ_j, in terms of the minimal privileged exponents of the sub-module $\mathrm{Im}(f)$ of $\mathcal{O}_U$, and for φ_j and ψ_j, in terms of the partial derivatives of the coefficients of the matrix defining the morphism f, the stratification $(X_j)_{j\in J}$ being canonically constructed, depending only on the sub-module $\mathrm{Im}(f)$ of $\mathcal{O}_U$. More general, because we replace the inequalities (I) by more general conditions, depending on the choice of an order on $\mathbb{N}^p$, and the polydisks by polycylinders.

The main two ingredients of the proof of this theorem are a precise numerical and uniform version of Hironaka's division theorem, proved in chapter III, and the construction of a stratification such that the set of minimal privileged exponents is constant on every stratum, in chapter II.

In appendix III, we sketch an application of our theorem to a generalization of Serre's "GAGA" theorem for non-proper $\mathbb{C}$-algebraic schemes. We define a notion of moderate section of a coherent sheaf, with respect to a partial compactification, and hence a functor of "global moderate sections". We use the results of appendix II to prove that this functor is left exact. We define a "moderate cohomology" corresponding to right derived functors, which is technically defined by the use of some Grothendieck topology. This cohomology is used to state a generalization of the GAGA theorem the proof of which depends on the results of this book and a subtle version of Hironaka's theory of the "voûte étoilée", to be published elsewhere.