

# *Astérisque*

MIREILLE CAR

## **Le problème de Waring pour les corps de fonctions**

*Astérisque*, tome 198-199-200 (1991), p. 77-82

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1991\\_\\_198-199-200\\_\\_77\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__77_0)

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# LE PROBLEME DE WARING POUR LES CORPS DE FONCTIONS

Mireille CAR

Soit  $F_q$  le corps fini à  $q$  éléments. L'analogie entre l'anneau  $Z$  et l'anneau  $F_q[X]$  a conduit à l'étude de nombreux problèmes additifs dans  $F_q[X]$  et notamment à l'étude du problème de Waring. Sous sa forme la plus générale, le problème de Waring peut être posé dans un anneau  $A$  quelconque. Il s'énonce ainsi. Soit un entier  $k \geq 2$ . Soit  $W(k, A)$  le plus petit entier  $m$ , s'il existe, tel que pour tout  $a \in A$ , l'équation

$$a = a_1^k + \cdots + a_m^k$$

admette une solution  $(a_1, \dots, a_m) \in A^m$ . Récemment, L.N. VASERSTEIN a donné une majoration des nombres  $W(k, A)$  pour différents anneaux  $A$  et pour des algèbres  $A$  sur un corps fini  $F_q$ , [6], [7]. Cette majoration est de l'ordre de  $k^3$  pour un entier  $k$  non divisible par la caractéristique du corps  $F_q$  lorsque  $A$  est une algèbre sur  $F_q$ . Cette majoration est valable lorsque  $A$  est l'anneau  $F_q[X]$  ou lorsque  $A$  est l'anneau des  $S$ -entiers d'un corps de fonctions algébriques sur  $F_q$ , objet de ce travail.

Toutefois, les problèmes qui m'intéressent sont d'une nature différente comme le montre le cas simple où  $A = F_q[X]$ .

## 1 Le problème de Waring pour $F_q[X]$

Pour  $A \in F_q[X]$ , on s'intéresse aux solutions  $(A_1, \dots, A_m) \in F_q[X]^m$  de l'équation

$$(I.1) \quad A = A_1^k + \cdots + A_m^k$$

réalisant les conditions de degré les plus restrictives possibles, c'est à dire telles que

$$(I.2) \quad \deg A_i \leq n \quad \text{si} \quad k(n-1) < \deg A \leq kn.$$

On désigne par  $g(k)$ , resp.  $G(k)$ , le plus petit entier  $m$  s'il existe, tel que pour tout  $A \in F_q[X]$ , l'équation (I.1) ait une solution vérifiant (I.2), resp. tel que pour tout  $A \in F_q[X]$  de degré assez grand, (I.1) ait une solution vérifiant (I.2).

Par une méthode analogue à la méthode du cercle on établit une estimation asymptotique du nombre  $r_m(A)$  de solutions de l'équation (I.1) assujetties aux conditions (I.2) valable pour des entiers  $k < p$ ,  $p$  désignant la caractéristique du corps  $F_q$ . On obtient alors pour  $k < p$  :

$$(I.3) \quad G(k) \leq k2^{k-1} + 1 \quad , \text{cf. [1], [3],}$$

$$(I.4) \quad G(2) \leq 4 \quad \text{et} \quad G(2) = 3 \quad \text{si} \quad q \geq 53, \text{cf. [2].}$$

On a peu de renseignements sur  $g(k)$ . Jean-Pierre SERRE a établi que  $g(2) = 3$  pour  $q \geq 5$ . Ce résultat n'a pas été publié.

## 2 Le problème de Waring pour les anneaux d'entiers des corps de fonctions algébriques sur $F_q$ .

Soit  $L$  une extension algébrique finie séparable du corps  $F_q(X)$ .

L'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions algébriques sur  $F_q$  laissait espérer que les méthodes introduites par C.L. SIEGEL, cf.[4], [5], pour l'étude du problème de Waring dans les corps de nombres pouvaient être adaptées à l'anneau  $B$  fermeture intégrale de  $F_q[X]$  dans  $L$ . Cet espoir était raisonnable. La seule difficulté, en dehors des difficultés techniques, était de bien poser le problème. Bien poser le problème consiste à avoir des conditions faisant intervenir tous les prolongements à  $L$  de la valuation à l'infini  $v$  de  $F_q(X)$  définie par  $v(A/B) = \deg B - \deg A$  si  $A$  et  $B$  sont des polynômes non nuls.

Pour exploiter l'analogie entre  $L$  et les corps de nombres, on fait une distinction entre valuations  $P$ -adiques de  $L$  et valuations prolongeant la valuation à l'infini  $v$ . Cette distinction est artificielle. En effet, soit  $S$  un ensemble fini non vide de valuations de  $L$ , soit  $O_S$  l'ensemble des  $S$ -entiers de  $L$ , i.e. l'ensemble des  $a \in L$  tels que  $w(a) \geq 0$  pour toute valuation  $w \notin S$ . Les résultats établis pour l'anneau  $B$  se généralisent à l'anneau  $O_S$ .

On s'intéresse aux représentations de  $b \in O_S$  comme somme

$$(II.1) \quad b = b_1^k + \dots + b_m^k,$$

telles que

$$(II.2) \quad w(b_j) \geq [w(b)/k]$$

pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ , tout  $w \in S$ .

On note  $r_m(b)$  le nombre de ces représentations et on désigne par  $G(k)$  le plus petit entier  $m$ , s'il existe tel que  $r_m(b) > 0$  pour tout les  $b \in O_S$  pour lesquels la somme

$$(II.3) \quad h(b) = \sum_{w \in S} f_w w(b)$$

est assez petite,  $f_w$  désignant le degré de la place  $w$ .

Dans le cas où  $L = F_q(X)$  et  $S$  est réduit à la seule valuation à l'infini  $v$ ,  $O_S = F_q[X]$ , la condition (II.2) se réduit à la condition (I.2) et  $h(b) = -\text{deg}(b)$ . On retrouve le problème de Waring posé au paragraphe I. Dans le cas où  $S$  est l'ensemble  $\{w_1, \dots, w_r\}$  de tous les prolongements de  $w$  à  $L$ ,  $O_S = B$ , et, pour  $b \in B$ , la condition (II.2) s'écrit aussi

$$(II.2)' \quad -w_i(b_j) \leq N_i \quad \text{si} \quad k(N_i - 1) < -w_i(b) \leq kN_i,$$

ce qui est une généralisation de la condition (I.2).

On a le théorème suivant :

**Théorème 2.1** *Pour  $2 \leq k < p$ , on a*

$$(II.4) \quad G(k) \leq 1 + k2^{k-1} \text{Card}(S) .$$

La démonstration de ce théorème est basée sur la méthode du cercle. Elle est très longue. J'indique seulement les étapes importantes. Tout d'abord on démontre qu'il existe  $y \in L$  possédant la propriété suivante :  $F_q[y]$  est inclus dans l'anneau de valuation de  $w$  si et seulement si  $w \notin S$ , ce qui prouve que  $y$  est transcendant sur  $F_q$ , que  $L$  est une extension algébrique de  $F_q(y)$  nécessairement finie et que  $O_S$  est la clôture entière de l'anneau  $F_q[y]$ . Il suffit donc de faire la démonstration lorsque  $S = \{w_1, \dots, w_r\}$  et que  $O_S = B$ .

On se place dans le cas où  $O_S = B$ . Si  $\vec{N} = (N_1, \dots, N_r) \in Z^r$ , si  $A \in B$ , on désigne par  $R(m, \vec{N}, A)$  le nombre de solutions  $(A_1, \dots, A_m) \in B^m$  de l'équation

$$A = A_1^k + \dots + A_m^k,$$

telles que

$$-w_i(A_j) \leq N_i,$$

pour tout  $i = 1, \dots, r$ , tout  $j = 1, \dots, m$ . Si  $\vec{N} \in Z^r$  et  $A \in B$  vérifient

$$(II.5) \quad k(N_i - 1) < -w_i(A) \leq kN_i,$$

on a

$$r_m(A) = R(m, \vec{N}, A).$$

Pour  $\vec{N} \in Z^r$ , soit

$$(II.6) \quad s(\vec{N}) = \sum_{i=1}^r f_{w_i} N_i.$$

On note que lorsque  $A \in B$  et  $\vec{N} \in Z^r$  sont liés par (II.5)  $s(\vec{N})$  tend vers  $+\infty$  si et seulement si  $h(A)$  tend vers  $-\infty$ . Pour démontrer le théorème on fixe un entier  $m \geq 1 + k2^{k-1} \text{Card}(S)$  et on montre que pour tous les  $A \in B$  pour lesquels la somme  $s(\vec{N})$  est assez grande, on a  $R(m, \vec{N}, A) > 0$ ,  $\vec{N}$  et  $A$  étant toujours liés par (II.5). On ne sait pas obtenir d'estimation asymptotique des nombres  $R(m, \vec{N}, A)$  pour tous les éléments  $A$  de  $B$ , mais seulement pour les éléments  $A$  vérifiant la condition supplémentaire

$$|f_{w_i} N_i - \frac{1}{r} s(\vec{N})|$$

borné pour tout  $i$  lorsque  $s(\vec{N})$  tend vers  $+\infty$ . Pour de tels éléments, on obtient l'estimation suivante, valable pour tout nombre réel  $a > 0$ ,

$$(II.7) \quad R(m, \vec{N}, A) = C_m(A)q^{(m-k)s(\vec{N})} + O(q^{s(\vec{N})(1+m-k-m/2k)} + q^{ms(\vec{N})(1+a-2^{1-k}r^{-1})}),$$

où  $C_m(A)$  définie par une série singulière est uniformément minorée par une constante strictement positive, les constantes impliquées par le symbole  $O$  dépendant de  $a$ .

De cette estimation, on déduit que  $R(m, \vec{N}, A) > 0$  lorsque  $s(\vec{N})$  est assez grand et que  $A$  vérifie la condition supplémentaire exigée.

A l'aide du théorème de unités, on montre qu'il existe des constantes  $a_1, \dots, a_r$  ne dépendant que du corps  $L$  telles que pour tout  $b \in B$  il existe une unité  $U$  de  $B$  possédant la propriété suivante : si  $\vec{Y} \in Z^r$  et  $bU^k$  sont liés par la relation (II.5), on a

$$|f_{w_i} Y_i - \frac{1}{r} s(\vec{Y})| \leq f_{w_i} a_i.$$

La relation (II.7) s'applique à  $bU^k$  et  $\vec{Y}$ . Mais si  $B$  et  $\vec{N}$  sont aussi liés par (II.5), la formule du produit donne l'égalité

$$s(\vec{Y}) = s(\vec{N}),$$

on a aussi

$$R(m, \vec{N}, b) = R(m, \vec{Y}, bU^k)$$

et on a  $R(m, \vec{N}, b) > 0$  dès que  $s(\vec{N}) = s(\vec{Y})$  est assez grand, d'où le résultat annoncé.

Pour obtenir l'estimation (II.7) on majore des sommes de caractères par la méthode de Weyl. Cette méthode fait apparaître un facteur  $k!$  qui conduit à la majoration triviale lorsque  $k \geq p$ , d'où la restriction  $k < p$ .

## Références

- [1] M.CAR. Le problème de Waring pour l'anneau des polynômes sur un corps fini. C.R.A.S., Paris, t. 273, 19 juillet 1971, p. 141-144.
- [2] M.CAR. Sommes de carrés dans  $F_q[X]$ . Dissertationes Mathematicae, 215, VARSOVIE, (1983).
- [3] R.M.KUBOTA. Waring's problem for  $F_q[X]$ . Dissertationes Mathematicae, 117, VARSOVIE, (1974).
- [4] C.L.SIEGEL. Generalization of Waring's problem to algebraic number fields. Amer. J. Math. 66, (1944), p. 122-136.
- [5] C.L.SIEGEL. Sums of  $m$ th. powers of algebraic integers. Ann. of Math. 46, (1945), p. 313-339.
- [6] L.N.VASERSTEIN. Waring's problem for commutative rings. J. Number theory 26, (1987), p. 299-307.
- [7] L.N.VASERSTEIN. Waring's problem for algebras over fields. J. Number Theory 26, (1987), p. 286-298.

Mireille CAR  
URA - 225  
Faculté de St-Jérôme  
Av. Normandie Niemen  
13013 MARSEILLE

*(reçu le 1er novembre 1989)*