

# Astérisque

DAVID-OLIVIER JAQUET

**Classification des réseaux dans  $\mathbb{R}^7$  (via la notion de formes parfaites)**

*Astérisque*, tome 198-199-200 (1991), p. 177-185

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1991\\_\\_198-199-200\\_\\_177\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__177_0)

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# CLASSIFICATION DES RESEAUX DANS $\mathbb{R}^7$ (via la notion de formes parfaites)

par

David-Olivier JAQUET

## 1. Introduction

On part d'une forme quadratique réelle à  $n$  variables, définie positive. On peut écrire cette forme de la façon suivante :

$Q(x) = x^t A x$  où  $A$  est une matrice symétrique réelle définie positive.

Nous allons étudier la restriction de  $Q(x)$  à  $x \in \mathbb{Z}^n$ . Tout d'abord, remarquons que  $A$  peut être considérée comme la matrice des produits scalaires d'une base de  $\mathbb{R}^n$ . On montre facilement que cette base est unique à isométrie près. Restreindre  $Q(x)$  à  $x \in \mathbb{Z}^n$  revient à ne considérer que les combinaisons linéaires entières des vecteurs de cette base, c'est-à-dire les points du *réseau* engendré par les vecteurs de cette base.  $Q(x)$  nous donne alors le carré de la distance euclidienne entre le point  $x$  du réseau et l'origine.

On appelle *minimum* de  $A$ , noté  $\min A$ , le minimum sur  $\mathbb{Z}^n \setminus \{O\}$  de  $Q(x)$ . C'est donc le carré de la distance euclidienne à l'origine, du point du réseau le plus proche de  $O$ .

Les paires de vecteurs  $\pm v_k \in \mathbb{Z}^n$  ( $k = 1, \dots, s$ ), qui vérifient

$$v_k^t A v_k = \min A$$

s'appellent les *vecteurs minimaux* de  $A$ .

Dans le but de donner une classification des réseaux de  $\mathbb{R}^n$ , on introduit des relations "naturelles" d'équivalence entre réseaux :

- les isométries (pas d'influence sur  $A$ ),

- les changements de base dans  $GL_n(\mathbf{Z})$ ,
- les homothéties.

Un invariant important de cette classification est l'invariant d'Hermite  $\mu$  :

$$\mu(A) = \frac{\min A}{\sqrt[n]{\det A}}$$

Cet invariant est borné pour  $n$  fixé. On rencontre, dans la littérature, diverses inégalités relatives à la fonction  $\mu$ . Je ne citerai que celle de MINKOWSKI, liée à la géométrie des nombres,  $\mu(A) < n$  si  $n \geq 2$ . D'autre part,  $\mu$  atteint ses maxima ; les formes correspondant à ces maxima sont dites *extrêmes*. On montre que, modulo les homothéties, les maxima sont isolés et, qu'à équivalence près, il n'existe qu'un nombre fini de formes extrêmes. Le maximum absolu est appelé  $\gamma_n$ .

On connaît les valeurs de  $\gamma_n$  pour  $n \leq 8$  :

$$\begin{aligned} \gamma_1 = 1 \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad \gamma_3 = \sqrt[3]{2} \quad \gamma_4 = \sqrt{2} \\ \gamma_5 = \sqrt[5]{8} \quad \gamma_6 = \sqrt[6]{\frac{64}{3}} \quad \gamma_7 = \sqrt[7]{64} \quad \gamma_8 = 2 . \end{aligned}$$

VORONOÏ, essentiellement à l'aide des notions de formes parfaites et de domaines associés aux formes parfaites, donne une méthode de réduction des formes quadratiques définies positives, de même qu'un algorithme permettant de calculer les maxima de la fonction  $\mu$ , donc en particulier  $\gamma_n$ . VORONOÏ donne aussi un critère, maintenant classique, pour les formes extrêmes et montre qu'il n'existe qu'un nombre fini de formes parfaites inéquivalentes en dimension  $n$ .

## 2. Formes parfaites

Pour comprendre ce qu'est une forme parfaite, il faut en quelque sorte inverser le procédé de départ. Connaissant  $A$ , on a, tout d'abord, calculé les vecteurs minimaux  $\pm v_k \in \mathbf{Z}^n$  associés à  $A$ . Maintenant, connaissant les  $v_k$  et ayant effacé  $A$ , peut-on retrouver  $A$ ? Ou encore,  $A$  est-elle l'unique solution du système d'équations linéaires  $v_k^t B v_k = \min A$ , ( $k = 1, \dots, s$ )? Si oui, on dit que  $A$  est *parfaite*.

Donc une forme est dite parfaite si la connaissance des coordonnées entières de ses vecteurs minimaux dans une base du réseau permet de retrouver la matrice des produits scalaires de cette base, c'est-à-dire  $A$ .

Par contre, la connaissance des vecteurs minimaux considérés comme points d'un réseau plongé dans  $\mathbb{R}^n$  ne caractérise pas la forme, ni même le réseau. On connaît, en effet, des exemples de formes parfaites, non équivalentes, pour lesquelles les vecteurs minimaux plongés dans  $\mathbb{R}^n$  coïncident.

On peut tout de même faire la remarque évidente suivante : lorsqu'on plonge un réseau dans  $\mathbb{R}^n$ , les points correspondant aux vecteurs minimaux sont sur une sphère centrée à l'origine. Les formes associées à ce réseau sont parfaites si et seulement si le seul ellipsoïde dans  $\mathbb{R}^n$  qui passe par ces points est la sphère.

### 3. Domaine associé à une forme parfaite

Plaçons-nous, maintenant, dans l'espace des matrices symétriques réelles  $n \times n$ , qui est de dimension  $N = \frac{n(n+1)}{2}$  ; on identifie cet espace à  $\mathbb{R}^N$  qu'on rend euclidien via le produit scalaire  $A \cdot B = \text{Trace } AB$ .

A chaque vecteur minimal  $v_k$ , on peut faire correspondre un point  $\lambda_k^2$  dans cet espace : on pose  $\lambda_k^2 = v_k v_k^t$ . (On remarque, au passage, que  $\lambda_k^2 \cdot A = \min A$ .)

A chaque  $\lambda_k^2$ , on associe alors la demi-droite qui part de l'origine et contient  $\lambda_k^2$ . L'enveloppe convexe de ces demi-droites est appelée *domaine* associé à  $A$ .

On peut montrer que  $A$  est parfaite si et seulement si son domaine est de dimension maximale.

On appelle *faces* de dimension  $N - 1$  du domaine, les intersections de ce domaine avec ses hyperplans d'appui.

Une face de dimension  $d$  ( $d < N - 1$ ) est une variété de dimension  $d$  obtenue en intersectant des faces de dimension  $N - 1$ .

Définissons, maintenant, une action de  $GL_n(\mathbb{Z})$  sur l'ensemble des formes quadratiques (définies ou non), en considérant tout élément de  $GL_n(\mathbb{Z})$  comme une matrice de changement de base. Cette action induit une action de  $GL_n(\mathbb{Z})$  sur l'ensemble des domaines de VORONOÏ. On dira que deux domaines sont équivalents s'ils appartiennent à la même orbite.

On montre facilement que deux domaines sont équivalents si et seulement si les formes parfaites correspondantes sont équivalentes.

#### 4. Quelques résultats dus à Voronoï

- 4.1 Deux domaines ne peuvent être en contact que par leurs bords (faces de dimension  $d \leq N - 1$ ).
- 4.2 Soit une face  $F$  de dimension  $N - 1$  appartenant à un domaine. Alors  $F$  appartient également à un autre domaine. Géométriquement, ces deux domaines se situent de part et d'autre de  $F$ . Ces deux domaines sont dits *voisins* ou *contigus*.
- 4.3 Toute forme quadratique définie positive appartient au moins à un domaine.
- 4.4 Soient deux domaines quelconques. Il existe un chemin reliant ces deux domaines qui, à chaque pas, ne fait que passer d'un domaine à un domaine voisin.
- 4.5 A équivalence près, il n'existe qu'un nombre fini de formes parfaites en dimension  $n$ , donc qu'un nombre fini de domaines inéquivalents.

Le problème actuel est d'obtenir la liste exhaustive des domaines inéquivalents en dimension  $N$ , ainsi que leurs faces. Il est judicieux d'injecter, dans la théorie comme dans la pratique, le groupe des automorphismes de chacune des formes. Il faut comprendre automorphisme dans le sens d'isométrie de la forme à coefficients entiers.

Tout automorphisme de la forme induit de manière canonique une application linéaire de  $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , qui laisse le domaine de la forme globalement invariant.

#### 5. Problème en dimension $n=7$ ( $N=28$ )

Pourquoi s'intéresser particulièrement à la dimension  $n = 7$ ? La raison est historique :

$n = 3$  Le problème a été résolu par GAUSS en 1831. GAUSS a montré que

$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  représente la seule forme parfaite à équivalence près.

Par conséquent, le réseau cubique à faces centrées qui correspond à cette forme est le seul réseau absolument extrême en dimension  $n = 3$ .

$n = 4$  ,

$n = 5$  Ces deux dimensions ont été traitées en 1877 par KORKINE et ZOLOTAREFF.

$n = 6$  Il a fallu attendre 1957 pour que BARNES donne la liste exhaustive des formes parfaites à 6 variables, toujours à équivalence près.

$n = 7$  Jusqu'en 1971, on ne connaissait que 22 formes parfaites non équivalentes en dimension  $n = 7$ . STACEY amena cette liste à 33 en employant des méthodes dues à WATSON.

Dans le cadre de la thèse de doctorat que je fais sous la direction du Professeur François SIGRIST, je cherche à montrer que cette liste de 33 formes en dimension  $n = 7$  est exhaustive. Il suffit pour cela, d'après l'algorithme de VORONOÏ, de montrer que chacune des formes contiguës à l'une de ces 33 formes est équivalente justement à une de ces 33 formes.

La connaissance de la liste exhaustive des formes parfaites en dimension  $n = 7$  permettrait de calculer directement  $\gamma_7$ . Bien que la valeur de  $\gamma_7$  soit connue, les démonstrations de  $\gamma_7 = \sqrt[7]{64}$  restent très longues. La première est due à BLICHFELD en 1929. Plus récemment, en 1980, VETCHINKIN a confirmé ce résultat. (Pour les références, voir la bibliographie de [1]).

Pour traiter une forme, il faut calculer l'ensemble des faces de son domaine, les formes voisines correspondantes et, finalement, exhiber les changements de base qui permettent d'identifier ces formes voisines avec une des 33 formes de la liste.

Il faut remarquer que si l'on aborde le calcul des faces du point de vue combinatoire, le problème explose rapidement. Certes, le cas où la forme possède 28 vecteurs minimaux est trivial : on obtient 28 faces en éliminant à tour de rôle chacun des  $v_k v_k^t$  ; ceux qui restent déterminent une face ! L'algorithme que j'ai développé trouve son intérêt quand le nombre  $s$  de vecteurs minimaux est supérieur à  $N = \frac{n(n+1)}{2}$  .

Je construis tout d'abord un cône de dimension maximale dans un espace de dimension  $s$ , cône qui se projette dans un sous-espace de dimension  $N$ , exactement sur le domaine de la forme.

En projetant ce cône successivement dans un sous-espace de dimension  $s - 1$ , puis  $s - 2$ , etc... jusqu'à  $N = \frac{n(n+1)}{2}$ , le temps de calcul est considé-

ablement réduit.

L'identification des voisines, dans la phase finale, est une recherche en arbre avec une très forte heuristique (très peu de "backtracking"). L'heuristique se base principalement sur le spectre des vecteurs minimaux, c'est-à-dire sur leur position relative.

Mon programme utilise, à plusieurs endroits, les données précieuses contenues dans l'article de CONWAY et SLOANE [1], en particulier le recensement des 33 formes connues ainsi que la description détaillée de leurs groupes d'automorphismes. J'ai développé ce programme en LISP. Le calcul d'une matrice de changement de base dans  $GL_n(\mathbf{Z})$  qui identifie une forme à une des 33 formes connues demande, en moyenne, environ une dizaine de secondes.

CONWAY et SLOANE dans leur article [1] écrivent : "... the (sometimes putative) lists of neighbours given by STACEY (1973), P.R. SCOTT (quoted in STACEY 1973) and SHUSHBAEV (1985), who together have studied the VORONOÏ neighbours for 27 of the seven-dimensional perfect lattices...". Actuellement, j'ai réussi à énumérer les listes de toutes les voisines pour 32 des 33 formes connues. Pour chacune de ces formes, j'ai regroupé ses voisines en orbites sous l'action de son groupe d'automorphismes.

Plus précisément, 31 formes ont pu être entièrement traitées à l'aide de mon programme.

Pour  $D_7(x) = (x_1 - x_2)^2 + x_3^2 + \dots + x_7^2 + (x_1 + \dots + x_7)^2$  (la notation indique que les vecteurs minimaux forment le système de racines correspondant), j'ai utilisé, d'une part, l'article de VORONOÏ [3] qui donne une liste suffisante de faces pour  $D_n$  [2] et, d'autre part, mon programme pour engendrer les orbites correspondantes, les voisines associées et pour faire finalement les identifications nécessaires.

Pour  $E_7(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + x_4^2 + \dots + x_7^2 + (x_1 + \dots + x_7)^2$ , qui possède 63 vecteurs minimaux (formant le système de racines de  $E_7$ ), il faut renoncer à énumérer *explicitement* toutes les faces. La forme  $E_7$  possède 77965804 voisines équivalentes à une des 32 autres formes. Je suis en train d'élaborer un algorithme qui, se basant sur les résultats actuels, devrait éviter cette énumération tout en caractérisant complètement les orbites des faces de  $E_7$  sous l'action du groupe des automorphismes de cette forme.

Prenons, pour conclure, l'exemple de  $P_7^3$  (la notation est de CONWAY et SLOANE dans [1]).  $P_7^3$  possède 36 vecteurs minimaux. Lorsqu'on normalise son

minimum à 2, son déterminant vaut  $\frac{243}{64}$ . Le nombre de faces possibles du point de vue combinatoire vaut  $\binom{36}{27} = 94143280$ . Avec mon programme, il a fallu moins de cinq heures pour énumérer les 3906 faces de  $P_7^3$ , les regrouper en 23 orbites sous l'action du groupe des automorphismes dont l'ordre est 2592, calculer les formes voisines et finalement les identifier aux formes déjà connues. On obtient ainsi pour les voisines de  $P_7^3$  :

- 6 orbites de voisines équivalentes à  $P_7^1$ ,
- 3 orbites de voisines équivalentes à  $P_7^3$ ,
- 1 orbite de voisines équivalentes à  $P_7^4$ ,
- 3 orbites de voisines équivalentes à  $P_7^6$ ,
- 3 orbites de voisines équivalentes à  $P_7^7$ ,
- 2 orbites de voisines équivalentes à  $P_7^8$ ,
- 1 orbite de voisines équivalentes à  $P_7^9$ ,
- 1 orbite de voisines équivalentes à  $P_7^{17}$ ,
- 1 orbite de voisines équivalentes à  $P_7^{22}$ ,
- 1 orbite de voisines équivalentes à  $P_7^{26}$ ,
- 1 orbite de voisines équivalentes à  $P_7^{29}$  .

Le tableau annexé résume les liens de voisinages entre les 33 classes de formes parfaites.

Actuellement, je peux donc déjà affirmer que, s'il existe une nouvelle forme parfaite en dimension  $n = 7$ , elle n'est reliée que par  $E_7$  à la liste des formes déjà connues.

## REFERENCES

- [1] J.H. CONWAY et N.J.A. SLOANE, Low-dimensional lattices III, Perfect forms, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **418** (1988), 43-80.
- [2] D.-O. JAQUET et F. SIGRIST, Formes quadratiques contiguës à  $D_7$ , *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **309** (1989), 641-644.

- [3] G. VORONOÏ, Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites, *J. Reine Angew. Math.*, **133** (1908), 97-178.

David-Olivier JAQUET  
Institut de Mathématiques  
et d'Informatique (IMI)  
Chantemerle 20 - Case postale 2  
2007 NEUCHÂTEL  
SUISSE

