JEAN-PIERRE SERRE

Lettre à M. Tsfasman

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 351-353
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__351_0>

LETTRE A M. TSFASMAN

Jean-Pierre SERRE

Paris, le 24 Juillet 1989

Cher Tsfasman,

Voici une solution du problème sur le nombre maximum de points d'une hypersurface que vous avez posé à Luminy.

Notations

$\mathbf{F}_q$ est un corps fini à q éléments ;

$\mathbf{P}_n(\mathbf{F}_q)$ est l'espace projectif de dimension n sur $\mathbf{F}_q$; son nombre d'éléments est $p_n = q^n + q^{n-1} + \cdots + 1$;

$f = f(X_0, \ldots, X_n)$ est un polynôme homogène $\neq 0$, de degré $d \leq q+1$, à coefficients dans $\mathbf{F}_q$;

$S = S(f)$ est le lieu des zéros de f dans $\mathbf{P}_n(\mathbf{F}_q)$;

$N = N(f)$ est le nombre d'éléments de S.

THÉORÈME – *On a :*

$$N \leq d\, q^{n-1} + p_{n-2} \ . \tag{1}$$

Démonstration

Le cas $d = q+1$ est trivial, car $d\, q^{n-1} + p_{n-2}$ est alors égal à p_n. *Je supposerai donc $d \leq q$ dans ce qui suit.*

Je raisonnerai par récurrence sur n, les cas $n = 0, 1$ étant faciles. On peut donc supposer $n \geq 2$.

Soient $g_1, \ldots, g_\delta$ les différents facteurs linéaires (à homothétie près) de f (sur le corps de base $\mathbf{F}_q$, bien entendu), et soient $G_1, \ldots, G_\delta$ les hyperplans de

$\mathbf{P}_n(\mathbf{F}_q)$ définis par les g_i. La réunion G des G_i est contenue dans S. On va distinguer deux cas, suivant que G est égal à S ou non.

(i) *On a* $G = S$.

Pour $m = 1, 2, \ldots, \delta$, on a

$$|G_1 \cup \ldots \cup G_m| \leq m q^{n-1} + p_{n-2} \ . \tag{2}$$

Cela se voit par récurrence sur m, en remarquant que G_{m+1} a $p_{n-1} = q^{n-1} + p_{n-2}$ points, et que $G_{m+1} \cap (G_1 \cup \ldots \cup G_m)$ a au moins p_{n-2} points. Comme $m \leq d$, l'inégalité (2) entraîne (1). (On voit de plus qu'il ne peut y avoir égalité dans (1) que si $\delta = d$, et si les g_i engendrent un espace de dimension 2, i.e. si les hyperplans G_i ont un espace de dimension $n-2$ en commun.)

(ii) *On a* $G \neq S$.

Choisissons un point $P \in S$, avec $P \notin G$. Si H est un hyperplan de $\mathbf{P}_n(\mathbf{F}_q)$, passant par P, la restriction de f à H n'est pas identiquement nulle, vu le choix de P. On peut donc appliquer à $S \cap H$ l'hypothèse de récurrence : on a

$$|S \cap H| \leq d\, q^{n-2} + p_{n-3} \ . \tag{3}$$

Je vais maintenant employer un procédé combinatoire standard : soit X l'ensemble des couples (P', H) où :

$$\begin{cases} P' & \text{est un point de } S - \{P\} \ ; \\ H & \text{est un hyperplan passant par } P \text{ et } P' \ . \end{cases}$$

Pour P' fixé dans $S - \{P\}$, le nombre des H passant par P et P' est égal à p_{n-2}. On en déduit :

$$|X| = (N-1) p_{n-2} \ . \tag{4}$$

D'autre part, pour H fixé passant par P, le nombre des $P' \in S - \{P\}$ situés sur H est égal à $|S \cap H| - 1 \leq d\, q^{n-2} + p_{n-3} - 1$. Comme le nombre des H passant par P est égal à p_{n-1}, on déduit de là :

$$|X| \leq p_{n-1}(d\, q^{n-2} + p_{n-3} - 1) \ . \tag{5}$$

En combinant (4) et (5), on obtient :

$$N \leq 1 + p_{n-1}(d\, q^{n-2} + p_{n-3} - 1)/p_{n-2} \ . \tag{6}$$

Un calcul ennuyeux, mais sans difficulté, montre que ceci équivaut à

$$N \leq d\,q^{n-1} + p_{n-2} - (q+1-d)q^{n-2}/p_{n-2}\ . \tag{7}$$

Comme $q + 1 - d$ est > 0, on en déduit :

$$N < d\,q^{n-1} + p_{n-2}\ , \tag{8}$$

ce qui est meilleur que (1). D'où le théorème.

Remarques

1) Dans le cas (ii), on peut obtenir une inégalité un peu meilleure que (8), à savoir :

$$N \leq d\,q^{n-1} + p_{n-2} - (q+1-d)\ . \tag{9}$$

2) La démonstration prouve en même temps que, si $d \leq q$, il ne peut y avoir égalité dans (1) que dans le cas trivial où S est réunion de d hyperplans contenant une même variété linéaire de codimension 2.

Par contre, pour $d = q + 1$, on peut prouver qu'il y a égalité dans (1) si et seulement si f est combinaison linéaire des polynômes $X_iX_j^q - X_jX_i^q$; si n est impair, l'hypersurface $f = 0$ peut être absolument irréductible, et lisse (exemple : $n = 3$, et $f = X_0X_1^q - X_1X_0^q + X_2X_3^q - X_3X_2^q$).

Bien à vous

J-P. SERRE
6 avenue de Montespan
75116 PARIS
France