

Astérisque

GÉRARD BEN AROUS

Géométrie de la courbe brownienne plane

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire
Bourbaki, exp. n° 730, p. 7-42

http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__7_0

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE DE LA COURBE BROWNIENNE PLANE

par Gérard BEN AROUS

INTRODUCTION :

Nous passons en revue quelques résultats récents sur la géométrie de la trajectoire du mouvement brownien plan. Nous avons choisi d'exposer essentiellement les résultats de Pitman et Yor d'une part (sur le comportement en temps grand de certaines fonctionnelles browniennes, comme le temps passé dans un ensemble, ou le nombre de tours autour d'un ou plusieurs points) et les résultats sur la géométrie de la courbe brownienne en temps fini d'autre part, résultats que nous avons tirés pour l'essentiel, du cours de Le Gall [L12] à Saint-Flour. Nous invitons, bien sur, le lecteur intéressé à se reporter à ce cours, extrêmement riche et clair.

1. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DU MOUVEMENT BROWNIEN PLAN :

Nous rappelons ici brièvement quelques propriétés fondamentales. Ici, et dans toute la suite, $(B_t)_{t \geq 0}$ désigne un mouvement brownien plan issu de $z_0 \in \mathbf{C}$, c'est-à-dire un processus aléatoire $B_t = B_t^1 + iB_t^2$, indexé par $t \in \mathbf{R}_+$, à trajectoires presque sûrement continues, tel que

- a) $B_0 = z_0$ p.s.
- b) les processus réels $(B_t^1)_{t \geq 0}$ et $(B_t^2)_{t \geq 0}$ sont indépendants,
- c) Pour $i \in \{1, 2\}$ et tous $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ la variable aléatoire $B_{t_n}^i - B_{t_{n-1}}^i$ est indépendante de $(B_{t_1}^i, \dots, B_{t_{n-1}}^i)$ et sa loi est gaussienne de moyenne nulle et de variance $t_n - t_{n-1}$.

S.M.F.

1.1 Invariance conforme et skew-product :

Il est clair que l'image par une isométrie d'un mouvement brownien est un mouvement brownien. Lévy a généralisé ce résultat de la façon suivante :

THÉORÈME 1.— *Si f est holomorphe d'un ouvert U de \mathbf{C} dans \mathbf{C} (avec $z_0 \in U$), et si on pose $\tau_U = \inf(t \geq 0, B_t \notin U)$, alors il existe un mouvement brownien $(\zeta_t)_{t \geq 0}$ tel que, pour tout $t \in [0, \tau_U[$: $f(B_t) = \zeta_t$, avec $U_t = \int_0^t |f'(B_s)|^2 ds$.*

La preuve est simple : si $f = g + ih$, g et h sont harmoniques et $g(B_t)$ et $h(B_t)$ sont des martingales locales. La formule d'Ito et les équations de Cauchy Riemann montrent que ces martingales locales ont le même processus croissant U_t , et que le processus crochet $\langle g(B_t), h(B_t) \rangle$ est nul. Ce qui implique l'existence de deux browniens réels indépendants β_t et θ_t tels que : $g(B_t) = \beta_{U_t}$ et $h(B_t) = \theta_{U_t}$, pour $t \in [0, \tau_U[$. \square

On déduit de ceci la représentation du brownien plan en "skew-product" : Si $z_0 \neq 0$ il existe un mouvement brownien complexe $\zeta_t = \beta_t + i\theta_t$ issu de 0 tel que :

$$B_t = z_0 \exp \zeta_{U_t}$$

avec

$$U_t = \int_0^t \frac{ds}{|B_s|^2} = \inf(u \geq 0, \int_0^u \exp(2\beta_v) dv > t).$$

Ainsi, si on note $R_t = |B_t|$ on a : $R_t = |z_0| \exp \beta_{U_t}$ et si $\phi_{(t)}$ désigne la détermination continue de l'argument de B_t telle que $\phi_{(0)} = \arg z_0 \in]-\pi, \pi]$: $\phi(t) = \theta_{U_t}$. Ainsi $\phi(t)$ est un mouvement brownien réel dont on a changé le temps par une "horloge" (ici U_t) indépendante.

On déduit très simplement de cette représentation que :

a) le mouvement brownien plan est récurrent. C'est-à-dire que pour tout ouvert D de \mathbf{C} presque sûrement $\forall t \exists T > t \ B_T \in D$.

b) Avec probabilité 1 : $\limsup_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = +\infty$ et $\liminf_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = -\infty$.

En effet $|B_t| = |z_0| \exp \beta_{U_t}$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} U_t = +\infty$, par le fait que $\limsup_{v \rightarrow \infty} \beta_v = +\infty$ et $\liminf_{v \rightarrow \infty} \beta_v = -\infty$ on a le résultat si D est une boule de centre 0, ce qui suffit pour prouver le a). De plus $\phi(t) = \theta_{U_t}$ et U_t tend vers l'infini ce qui prouve le b).

Ces deux propriétés du mouvement brownien plan font naître deux questions essentielles.

D'une part le mouvement brownien plan revient infiniment souvent visiter tout ouvert D de \mathbb{C} . On peut se demander quelle proportion de temps il y passe. De façon plus précise, il s'agit de comprendre le comportement asymptotique de $\int_0^t 1_{B_s \in D} ds$ lorsque t tend vers l'infini. La réponse est connue depuis longtemps : ce temps d'occupation est de l'ordre de $\log t$.

Pour un énoncé plus précis de ce théorème, dû à Kallianpur et Robbins voir plus bas, au 2.4. b).

D'autre part, par le b) ci-dessus nous savons que le mouvement brownien "fait un nombre infini de tours autour de zéro lorsque t tend vers l'infini". On peut étudier aussi le comportement asymptotique précis de $\phi(t)$ lorsque t tend vers l'infini. La réponse est fournie par le théorème de Spitzer : $\phi(t)$ est de l'ordre de $\log t$ (voir plus bas au 2.4. a) pour un énoncé plus précis).

Pitman et Yor ont construit un outil extrêmement souple pour montrer que ces deux théorèmes (de Kallianpur et Robbins et de Spitzer) sont deux aspects d'un même phénomène, et pour généraliser radicalement ces énoncés. Nous donnons un aperçu de ces résultats au §2.

1.2 Dimension de Hausdorff de la courbe brownienne

La mesure de la courbe brownienne : $\{B_s, s \in [0, \infty[)\}$ est nulle. En effet :

$$m(\{B_s, s \in [0, \infty[)\}) = \int dy P(T_y < \infty)$$

où $T_y = \inf(s, B_s = y)$.

Or $P(T_y < \infty) = 0$ pour tout $y \neq z_0$ (i.e. les points sont pôlares). Néanmoins on peut vérifier que la dimension de Hausdorff de cette courbe est 2. Pour un résultat plus précis, voir plus bas (au 3.2).

Lévy [Lé 4] explique ainsi la différence entre la courbe brownienne (de mesure nulle) et la courbe de Péano :

“ Pour qu’une aire soit remplie sans que l’oscillation brownienne soit infinie, il faut une exploration méthodique que le hasard ne peut réaliser”.

En particulier, la trajectoire brownienne se recoupe beaucoup. On sait depuis les travaux de Dvoretzky, Erdős et Kakutani qu’il existe des points multiples de toute multiplicité (finie ou non). On donnera au §3 les progrès récents sur cette question de l’auto-intersection de la courbe brownienne plane, en insistant sur un outil essentiel : le temps local d’auto-intersection : i.e. une mesure de Radon aléatoire portée par les instants de multiplicité. Une question intimement reliée à la précédente est celle du volume des voisinages tubulaires de la courbe brownienne. Elle est abordée au §4, sans pourtant y faire mention des résultats de grandes déviations (qui ont été abordés par Sznitman dans son exposé (Bourbaki ; Février 1987), voir aussi [DV]).

Enfin au §5 nous montrons à quel point la géométrie de la courbe brownienne est complexe en donnant les résultats récents relatifs à l’enveloppe convexe, les composantes connexes du complémentaire et les points de coupure de cette courbe, sur un intervalle de temps fini. Comme le dit Lévy à ce propos (en citant Leibniz) “Notre imagination se lassera plutôt de concevoir que la nature de fournir”.

Fixons ici certaines **notations** pour la suite :

$B_{[u,v]}$ est la trajectoire brownienne entre les instants u et v

$$B_{[u,v]} = \{B_s, s \in [u, v]\} \quad \text{pour } 0 \leq u < v .$$

- $m(A)$ est la mesure de Lebesgue de A .
- $D(a, r)$ le disque dans \mathbf{C} de centre a , de rayon r et $D = D(0, 1)$.
- $T_A = \inf(t, B_t \in A)$ est le temps d'atteinte de A par le brownien plan.

2. NOMBRE DE TOURS ET LOIS LIMITES :

Pitman et Yor ([PY1] et [PY2]) ont isolé, dans la preuve des deux théorèmes les plus importants pour le comportement en temps grand du mouvement brownien plan (i.e. les théorèmes de Spitzer et de Kallianpur-Robbins), un argument commun et général, et en ont tiré une ligne de conduite (brièvement : “faire un changement d'échelle sur le mouvement brownien en représentation “skew-product””) qui leur a permis d'étendre de façon considérable les théorèmes cités et de mettre au jour leurs liens. Ils ont prouvé ainsi un très grand nombre de résultats nouveaux et ouvert un champ qui semble inépuisable. Il est impossible d'aborder ici tous les aspects de leurs travaux. Nous allons seulement introduire le formalisme unificateur des “limites en échelle logarithmique” (traduction très peu satisfaisante de “log-scaling limit”) et donner quelques conséquences.

2.1 Limites en échelle logarithmique : Définitions

On note $\Omega(\mathbf{C})$ l'espace des fonctions continues de $[0, \infty[$ à valeurs dans \mathbf{C} .

Soit $(\psi(h, \omega) \cdot h > 0, \omega \in \Omega(\mathbf{C}))$ un processus et φ une fonction mesurable sur $\Omega(\mathbf{C})$.

Soit B un mouvement brownien, issu de $z_0 \neq 0$. On notera ζ le mouvement brownien, issu de zéro, intervenant dans la décomposition de B en “skew-product” et on posera, si $h > 0$:

$$\zeta_u^h = \frac{1}{h} \zeta_{h^2 u}.$$

On dira que le processus ψ converge vers φ en échelle logarithmique (de pôle 0) si pour tout mouvement brownien B , issu de $z_0 \neq 0$, $\psi(h, B) - \varphi(\zeta^{(h)})$ converge en probabilité vers zéro, lorsque h tend vers l'infini.

Il est clair que, si $\psi(h)$ converge en échelle logarithmique vers φ , alors $\psi(h)$ converge en loi vers φ . Mais, toutes les convergences en loi obtenues ainsi sont valides **conjointement**. On pourrait aussi définir la notion de limite en échelle logarithmique de pôle différent de zéro. Toutes les convergences en loi obtenues par limite en échelle logarithmique de pôles éventuellement distincts sont valides conjointement.

2.2 Quelques exemples :

On va donner ici des exemples, utiles pour la suite, de temps aléatoires qui convergent en échelle logarithmique. Ces temps seront tous de la forme :

$$V_h = \frac{1}{h^2} U_{T_h}$$

a) Si on choisit $T_h = \inf(t, R_t = e^{vh})$ avec $v \in \mathbf{R}$ on voit que $V_h = \sigma_v(\zeta^{(h)})$, où $\sigma_v = \inf(t, \beta_t = v)$. Et donc que V_h converge en échelle logarithmique vers σ_v . (ceci est une tautologie).

b) Si $T_h = e^{2vh}$ où $v > 0$, alors V_h converge en échelle logarithmique vers σ_v .

Ce résultat, est la clef du théorème de Spitzer. Il est néanmoins très simple et fondé sur une méthode de Laplace (*cf.* [L12] par exemple).

c) Soit A_t une fonctionnelle additive continue, croissante, de masse finie. Si $v > 0$, on pose $T_h = \inf(t, A_t = vh)$. $V_h = \frac{1}{h^2} U_{T_h}$ converge en échelle logarithmique vers $\inf(u, L_u(\beta) = \frac{2\pi}{\|A\|} v)$. Ici $L_u(\beta)$ est le temps local en 0 du mouvement brownien unidimensionnel $\beta = \text{Re } \zeta$.

Pour vérifier ceci, on commence par considérer le cas où A_t est le temps local ℓ_t de $\log|B_t|$ en 0. Dans ce cas $V_h = \inf(u, L_u(\beta^{(h)}) = v)$ et il est trivial que V_h converge en échelle logarithmique vers $\inf(u, L_u(\beta) = v)$.

Dans le cas général, on se ramène au cas particulier précédent au moyen du théorème ergodique pour les fonctionnelles additives (Ito-Mc Kean [IMK] p.277) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_t}{\ell_t} = \frac{\|A\|}{2\pi}.$$

2.3 Attracteurs logarithmiques :

Si $G(t, B)$ est une fonction du temps et du brownien B , on peut l'exprimer sous la forme : $G(t, B) = \Gamma(U_t, \zeta)$ pour un processus $\Gamma(u) = \Gamma(u, \zeta)$. Il suffit de poser :

$$\Gamma(u, \zeta) = G(U^{-1}(u), z_0 \exp \zeta(U))$$

On définit $\Gamma^{(h)}$ par changement d'échelle :

$$\Gamma^{(h)}(u) = \frac{1}{h} \Gamma(h^2 u).$$

La recette pour fabriquer $\Gamma^{(h)}$ à partir de G est donc la suivante : exprimer la fonctionnelle G en fonction du mouvement brownien ζ (qui intervient dans la représentation en "skew-product"), oublier l'horloge U_t i.e. remplacer t par u , puis faire le changement d'échelle en u .

Par exemple : Si φ_t désigne la détermination continue de l'argument de B_t telle que $\varphi_0 = \arg z_0 \in]-\pi, \pi]$ (i.e. le nombre de tours autour de zéro) le processus ainsi fabriqué est

$$\Gamma^{(h)}(u) = \frac{1}{h} \theta(h^2 u) \quad (\text{avec } \theta = \text{Im } \zeta).$$

DÉFINITION : On dit que G est attiré logarithmiquement par le processus γ si le processus $\Gamma^{(h)}$ converge en échelle logarithmique vers γ i.e. : $\Gamma^{(h)}(\zeta) - \gamma(\zeta^{(h)})$ converge en probabilité vers 0, au sens de la convergence uniforme sur les compacts.

Remarque : Pitman-Yor [PY2] caractérisent parmi les processus continus les attracteurs logarithmiques : ce sont ceux qui commutent avec le

changement d'échelle brownien i.e. ceux qui s'écrivent $\gamma(u, \zeta) = \sqrt{u}\hat{\gamma}(\zeta(\sqrt{u}))$ où $\hat{\gamma}$ est une variable aléatoire.

Voici **deux exemples** d'attracteurs logarithmiques :

1) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$ on pose

$$G_i(t) = \int_0^t 1_{(R_s \in I_i)} d\phi_s \quad \text{et} \quad \gamma_i(u) = \int_0^u 1_{\beta_v \in J_i} d\theta_v$$

avec

$$I_1 =]r, \infty[, \quad I_2 =]0, r[, \quad I_3 =]0, \infty[\quad (\text{et } r > 0)$$

et

$$J_1 =]0, \infty[, \quad J_2 =]-\infty, 0[, \quad J_3 =]-\infty, \infty[.$$

alors G_i est attiré logarithmiquement par γ_i .

2) Si $G(t) = A_t$ est une fonctionnelle additive croissante continue, de masse finie, alors G est attiré logarithmiquement par $\frac{\|A\|}{2\pi} L_u(\beta)$.

On a le théorème trivial mais essentiel :

THÉORÈME 2.— Si $(T_h)_{h>0}$ est une famille de temps aléatoires telle que $V_h = \frac{1}{h^2} U_{T_h}$ converge en échelle logarithmique vers le temps aléatoire τ , si $G = (G(t), t > 0)$ est, par ailleurs, une fonctionnelle brownienne attirée logarithmiquement par $\gamma = (\gamma(u), u > 0)$, alors $\frac{1}{h} G(T_h)$ converge en échelle logarithmique vers $\gamma(\tau)$.

COROLLAIRE.— Si G est attiré logarithmiquement par γ alors $\frac{2}{\log t} G(t)$ converge en loi vers $\gamma(\sigma_1)$ lorsque t tend vers l'infini.

En effet le théorème et l'exemple 2.2.2 montrent que : $\frac{1}{h} G(e^{2h})$ converge en loi vers $\gamma(\sigma_1)$. Il suffit de poser $h = \frac{\log t}{2}$ pour conclure.

2.4 Nombre de tours et temps d'occupation :

a) Le théorème de Spitzer

Si l'on considère $\phi(t)$ la détermination continue de l'argument de B_t telle que $\phi(0) = \arg z_0 \in]-\pi, \pi]$. On a vu (et c'est ici trivial) que ϕ est attiré logarithmiquement par $\theta(u)$ (la partie imaginaire du mouvement brownien ζ issu de 0). Par le corollaire du théorème 2 et l'exemple 2.2.2 b), on a donc le théorème de Spitzer [S1] :

$$\frac{2}{\log t} \phi(t) \quad \text{converge en loi vers} \quad \theta(\sigma_1) \quad \text{lorsque} \quad t \rightarrow \infty .$$

Il suffit pour retrouver l'énoncé complet du théorème de Spitzer de rappeler que $\theta(\sigma_1)$ a une loi de Cauchy standard, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\frac{2}{\log t} \phi(t) \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{dy}{\pi(1+y^2)}$$

b) Le théorème de Kallianpur-Robbins :

Si A_t est une fonctionnelle additive croissante continue de masse finie, le même corollaire montre, puisque A est attiré par $\frac{\|A\|}{2\pi} L_u(\beta)$, que :

$$\frac{2}{\log t} A_t \quad \text{converge en loi vers} \quad \frac{\|A\|}{2\pi} L_{\sigma_1}(\beta) \quad \text{lorsque} \quad t \rightarrow \infty .$$

En particulier si $A_t = \int_0^t f(B_s) ds$, où f est positive, on a ainsi :

$$\frac{2}{\log t} \int_0^t f(B_s) ds \xrightarrow{(d)} \frac{\int f(x+iy) dx dy}{2\pi} L_{\sigma_1}(\beta)$$

Pour retrouver l'énoncé complet du théorème de Kallianpur-Robbins [KR] il suffit de rappeler que $L_{\sigma_1}(\beta)$ suit une loi exponentielle de moyenne 2. On a ainsi par exemple :

$$\frac{2}{\log t} \int_0^t 1_{B_s \in D} ds \xrightarrow{(d)} \frac{m(D)}{\pi} \mathbf{e}$$

où D est un borélien de \mathbf{R}^2 de mesure finie, et où \mathbf{e} est une variable exponentielle de paramètre 1.

Mais on obtient aussi le résultat

$$\frac{2}{\log t} L(t, R, 1) \xrightarrow{(d)} L_{\sigma_1}(\beta)$$

si $L(t, R, 1)$ est le temps local en 1 de la semi-martingale $R_s (= |B_s|)$ au temps 1.

En effet $L(t, R, 1)$ (qui compte le temps passé par le brownien sur le cercle de centre 0 et de rayon 1) est une fonctionnelle additive croissante continue, de masse 2π .

c) **Petits et grands tours :**

Toujours par le corollaire du théorème 2, on peut étudier le comportement du nombre de “grands tours” et du nombre de “petits tours” autour de 0 : Si $r > 0$, posons

$$\phi_+(t) = \int_0^t 1_{R_s > r} d\phi(s) \quad \text{et} \quad \phi_-(t) = \int_0^t 1_{R_s < r} d\phi(s)$$

On a vu que ces processus sont attirés logarithmiquement par $\gamma_+(u) = \int_0^u 1_{\beta_v > 0} d\theta(v)$ et $\gamma_-(u) = \int_0^u 1_{\beta_v < 0} d\theta(v)$.

On sait donc que le couple $\frac{2}{\log t}(\phi_+(t), \phi_-(t))$ converge en loi vers : (W_+, W_-) avec $W_+ = \gamma_+(\sigma_1)$, $W_- = \gamma_-(\sigma_1)$. C’est l’intérêt de la présentation suivie ici de n’avoir rien à prouver pour la convergence de la loi du couple.

En fait Pitman et Yor précisent ce résultat en introduisant la variable qui décrit la transition entre les petits et les grands tours, i.e. le temps local $L(t, R, 1)$. Sans rien d’autre à prouver, on sait donc que :

$$\frac{2}{\log t}(\phi_+(t), \phi_-(t), L(t, R, 1)) \xrightarrow{(d)} (W_+, W_-, \Lambda)$$

avec

$$W_+ = \gamma_+(\sigma_1) = \int_0^{\sigma_1} 1_{\beta_v > 0} d\theta_v$$

$$W_- = \gamma_-(\sigma_1) = \int_0^{\sigma_1} 1_{\beta_v < 0} d\theta_v$$

$$\Lambda = L_{\sigma_1}(\beta) : \quad (\text{temps local de } \beta \text{ en } 0 \text{ au temps } \sigma_1).$$

La loi du triplet limite (W_+, W_-, Λ) est calculée dans [PY1] :

a) Λ est de loi exponentielle de paramètre 2

b) W_+ et W_- sont **indépendants** conditionnellement à Λ

c) conditionnellement à W_+ et Λ , W_- suit une loi de Cauchy de paramètre $\Lambda/2$

d) la loi de W_+ est de densité $[2 \operatorname{ch}(\pi\omega)/2]^{-1}$

En fait, on a la formule, si $a \geq 0$ et $b, c \in \mathbf{R}^2$:

$$E(\exp(-a\Lambda + ibW_- + icW_+)) = f(2a + |b|, c)$$

où

$$\begin{aligned} f(u, v) &= (chv + \frac{u}{v}shv)^{-1} & \text{si } v \neq 0 \\ &= (1 + u)^{-1} & \text{si } v = 0. \end{aligned}$$

On peut trouver dans [PY1] une description beaucoup plus éclairante des variables (W_-, W_+) au moyen des excursions du brownien $\zeta_t = \beta_t + i\theta_t$ dans les demi-plans supérieur ou inférieur.

d) **Le nombre de tours autour de plusieurs points.**

Soient n points z_0, z_1, \dots, z_n distincts. Si (B_t) est un brownien issu de z_0 , on considère ici les enlacements $\phi^1(s), \dots, \phi^n(s)$ autour des n points z_1, \dots, z_n .

On va même considérer directement les petits et les grands tours en posant :

$$\phi_+^j(t) = \int_0^t 1_{|B_s - z_j| > r_j} d\phi^j(s)$$

et

$$\phi_-^j(t) = \int_0^t 1_{|B_s - z_j| < r_j} d\phi^j(s)$$

où les $r_j > 0$ sont arbitraires.

On a alors, si A_t est une fonctionnelle additive croissante de masse 2π :

THÉORÈME 3.— Lorsque t tend vers l'infini, le $(2n + 1)$ -uplet $\frac{2}{\log t}(\phi_+^j(t), \phi_-^j(t); 1 \leq j \in n; A_t)$ converge en loi vers $(W_+, W_-^j; 1 \leq j \leq n; \Lambda)$ où, pour chaque j , le triplet (W_+, W_-^j, Λ) a la loi de (W_+, W_-, Λ) décrite au théorème précédent et où les $n+1$ variables $(W_+, W_-^1, \dots, W_-^n)$ sont indépendantes conditionnellement à Λ .

Ainsi la loi limite est donnée par une limite commune W_+ décrivant les “grands tours”, ceux qui sont dus au mouvement du brownien au voisinage de l'infini, et n variables W_-^j décrivant les enlacements au voisinage de chaque z_j . Ces $(n + 1)$ variables ne sont pas indépendantes ; elles le deviennent si on conditionne par Λ , qui mesure la transition entre les voisinages de z_1, \dots, z_n et ∞ . Là aussi, une description très précise de la loi du $(2n + 1)$ -uplet limite est donnée en [PY1] (théorème 6.2) au moyen d'excursions.

Enfin ce théorème est généralisé en un “théorème des résidus”

THÉORÈME 4.— Soit (z_1, \dots, z_n) n points distincts de \mathbf{C} . Soit f une fonction à valeurs complexes telle que

- (i) f est holomorphe dans $D_j \setminus \{z_j\}$ où D_j est un voisinage de z_j ,
- (ii) f est bornée sur le complémentaire de la réunion de ces voisinages,
- (iii) f est holomorphe au voisinage de l'infini et $\lim_{z \rightarrow \infty} f = 0$

alors : $\frac{2}{\log t} \int_0^t f(B_s) dB_s$ converge en loi, lorsque t tend vers l'infini, vers :

$$\sum_j \operatorname{Res}(f, z_j) \left(\frac{\Lambda}{2} + iW_-^j \right) + \operatorname{Res}(f, \infty) \left(\frac{\Lambda}{2} - 1 + iW_+ \right)$$

Dans le cas particulier où f a un pôle simple en chaque z_j , on retrouve le résultat précédent. La preuve du théorème consiste à se ramener à ce cas particulier.

En guise de conclusion, il faut rappeler que nous avons seulement effleuré ici le domaine (et les résultats) mis au jour par Pitman et Yor.

3. POINTS MULTIPLES DE LA COURBE BROWNIENNE

3.1 Intersections de courbes browniennes indépendantes

Si $p \geq 2$ et si B^1, \dots, B^p sont p mouvements browniens indépendants dans \mathbf{C}^2 issus de x^1, \dots, x^p , existe-t-il un point commun aux trajectoires de B^1, \dots, B^p ?

La méthode la plus féconde pour répondre à cette question passe par la construction du temps local d'intersection. De façon plus générale, pour montrer qu'un ensemble aléatoire est non vide et, surtout, étudier les propriétés des points "typiques" de cet ensemble, il suffit de construire une mesure (aléatoire et judicieuse) portée par cet ensemble.

Ici cette mesure sera d'abord construite sur l'ensemble des temps de multiplicité (plutôt que des points multiples), i.e. sur

$$\{(t_1, \dots, t_p) \in \mathbf{R}_+^p : B_{t_1}^1 = \dots = B_{t_p}^p\}.$$

Cette mesure, dite temps local d'intersection, est formellement définie par :

$$\alpha(ds_1, \dots, ds_p) = \left[\int \delta_y(B_{s_1}) \cdots \delta_y(B_{s_p}) dy \right] ds_1 \cdots ds_p$$

On pose : $\delta_y^\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} 1_{|z-y| \leq \varepsilon}$ et :

$$\alpha_\varepsilon(ds_1, \dots, ds_p) = \left[\int \delta_y^\varepsilon(B_{s_1}) \cdots \delta_y^\varepsilon(B_{s_p}) dy \right] ds_1 \cdots ds_p.$$

On a alors :

THÉORÈME 5. — Avec probabilité 1, il existe une mesure de Radon $\alpha(ds_1, \dots, ds_p)$ sur \mathbf{R}_+^p telle que, pour tous boréliens A^1, \dots, A^p de \mathbf{R}_+ et, pour tout $n < \infty$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\varepsilon(A^1 \times \cdots \times A^p) = \alpha(A^1 \times \cdots \times A^p) \quad (\text{dans } L^n).$$

Le support de la mesure α est inclus dans :

$$\{(s_1 \cdots s_p) \in \mathbf{R}_+^p : B_{s_1}^1 = \cdots = B_{s_p}^p\}$$

et, avec probabilité 1. pour tout $j \in \{1 \cdots p\}$ et tout $t > 0$:

$$\alpha(\{s_j = t\}) = 0$$

et

$$\alpha([0, t]^p) > 0.$$

Ce théorème montre, bien sûr, que les courbes B^1, \dots, B^p s'intersectent ; plus précisément :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (t_1, \dots, t_p) \in]0, \varepsilon[^p \quad B_{t_1}^1 = \dots = B_{t_p}^p.$$

On peut décrire la mesure α plus précisément en calculant explicitement tous les moments $E(\alpha(A^1 \times \dots \times A^p)^n)$ (cf. [L3], par exemple).

On verra plus loin une interprétation du temps local d'intersection comme limite de la surface (normalisée) de l'intersection de p Saucisses de Wiener indépendantes.

Le temps local d'intersection a été introduit par Wolpert [Wo] Dynkin [Dy1] et [Dy2], étudié, entre autres, par Geman Horowitz et Rosen [GHR], Rosen [R1] [R2] Yor [Y3], [Y4].

3.2 Temps local d'auto-intersection :

Considérons maintenant un seul mouvement brownien dans C , issu de 0.

Pour étudier les points multiples de sa trajectoire, on construit le temps local d'auto-intersection (de multiplicité p) comme la mesure aléatoire β sur

$$\mathcal{J}_p = \{(t_1, \dots, t_p) \in \mathbf{R}_+^p, t_1 < \dots < t_p\}$$

définie formellement par :

$$\beta(ds_1 \cdots ds_p) = \left(\int \delta_y(B_{s_1}) \cdots \delta_y(B_{s_p}) dy \right) ds_1 \cdots ds_p.$$

THÉORÈME 6.— *Avec probabilité 1, il existe une mesure de Radon β sur \mathcal{J}_p telle que, pour tout compact de \mathcal{J}_p de la forme $A_1 \times \dots \times A_p$ on ait, pour tout $n < \infty$:*

$$\beta(A_1 \times \dots \times A_p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_\varepsilon(A_1 \times \dots \times A_p)$$

en norme L^n , avec

$$\beta_\varepsilon(ds_1 \cdots ds_p) = 1_{\mathcal{J}_p}(s_1 \cdots s_p) \left(\int \prod_{i=1}^p \delta_y^\varepsilon(B_{s_i}) dy \right) ds_1 \cdots ds_p.$$

La mesure β est portée par l'ensemble des temps de multiplicité p : $\{(s_1 \cdots s_p) \in \mathcal{J}_p, B_{s_1} = \cdots = B_{s_p}\}$. Avec probabilité 1, pour tout $j \in \{1 \cdots p\}$ et tout $t > 0$:

$$\beta(\{s_j = t\}) = 0.$$

De plus, pour tout $0 \leq a \leq b$: $\beta(\mathcal{J}_p \cap [a, b]^p) = +\infty$.

Comme corollaire de ce théorème on obtient donc l'existence de points multiples de la trajectoire brownienne, de multiplicité supérieure ou égale à p (due initialement à Dvoretzky-Erdős-Kakutani [DEK2]).

Ce théorème permet aussi de donner certaines propriétés des temps typiques d'auto-intersection, comme la suivante (énoncée de façon informelle) : "entre deux points doubles typiques la portion de trajectoire d'un mouvement brownien est celle d'un lacet brownien (i.e. d'un mouvement brownien conditionné pour revenir à son point de départ)".

La phrase précédente ne peut être vraie pour **tous** les points doubles. Le Gall [L6] donne une version "intégrée sur tous les points doubles". Plus précisément, notons, pour $0 \leq u \leq v \leq 1$:

$$\begin{aligned} {}_u B_v(t) &= B_{u+t} - B_u \quad \text{si } 0 \leq t \leq v - u. \\ &= B_v - B_u \quad \text{si } t > v - u. \end{aligned}$$

Pour toute fonction borélienne Φ sur l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbf{R}^2 :

$$E\left(\int_{0 \leq u < v \leq 1} \Phi({}_u B_v) \beta_2(dudv)\right) = \int_{0 \leq u < v \leq 1} \frac{dudv}{2\pi(v-u)} E(\Phi(L^{(v-u)}))$$

où $L^{(a)}$ désigne un lacet brownien (un mouvement brownien issu de 0 conditionné à retourner en 0 à l'instant a), avec la convention $L_t^{(a)} = 0$ si $t \in]a, 1]$.

(Le Gall donne aussi la version naturelle de ce résultat valide pour les points de p -multiplicité.)

La conséquence essentielle d'une telle formule est que toute propriété vraie presque sûrement pour les lacets browniens sera aussi vérifiée pour ${}_u B_v$ pour β_2 -presque tout (u, v) .

Ainsi on montre facilement que, pour β_2 presque tout (u, v) le point double $B_u = B_v$ n'est pas un point triple.

Plus généralement, on a ainsi :

THÉORÈME 7.— *Avec probabilité 1, pour β_p presque tout $s_1 \cdots s_p$ le point $B_{s_1} = \cdots = B_{s_p}$ n'est pas un point de multiplicité $p + 1$.*

En particulier, il existe des points de multiplicité exactement p [AD]. Ce théorème montre que les points de multiplicité $p + 1$ sont rares parmi ceux de multiplicité p . La mesure ℓ_p , portée par l'ensemble des points de multiplicité p , image de β_p par l'application $(s_1, \cdots, s_p) \rightarrow B_{s_1}$ est étrangère à ℓ_{p+1} .

Pour apprécier la taille de l'ensemble des points de multiplicité $p + 1$, on peut aussi tenter de comparer les mesures de Hausdorff.

Le Gall [L9] montre que, si l'on pose :

$$\varphi_p(x) = x^2 \left(\log \frac{1}{x} \log \log \log \frac{1}{x} \right)^p$$

la φ_p -mesure de Hausdorff est la "bonne" mesure pour les points de multiplicité p . Précisément, l'ensemble des points de multiplicité p est réunion dénombrable d'ensembles de φ_p -mesure finie et non nulle.

En particulier, la dimension de Hausdorff n'est pas suffisante pour distinguer les points de multiplicité p ou $p + 1$, cette dimension valant toujours 2.

En fait les deux approches (temps local ou mesure de Hausdorff) sont très comparables car Le Gall montre qu'il existe deux constantes C_p, C'_p telles que, presque sûrement pour tout borélien F de \mathbf{R}^2 :

$$C_p \ell_p(F) \leq \varphi_p - m(F \cap D_p) \leq C'_p \ell_p(F)$$

(où D_p est l'ensemble des points de multiplicité $p + 1$).

Enfin, signalons que, grâce à la propriété donnée ci-dessus pour le mouvement brownien entre deux points doubles, Le Gall a pu contourner ce qui semble être une utilisation abusive de la propriété de Markov dans la preuve originale (due à Dvoretzky-Erdős-Kakutani) de l'existence de points de multiplicité infinie. Il obtient ainsi le

THÉORÈME 8. — *Si K est un compact totalement discontinu de \mathbf{R} , il existe avec probabilité 1 un point z de \mathbf{R}^2 et un homéomorphisme croissant φ de \mathbf{R} tel que*

$$\varphi(K) = \{t \geq 0, B_t = z\}.$$

Ainsi il existe des points de multiplicité exactement dénombrable ou de multiplicité la puissance du continu. Il ne semble pas que le temps local d'auto-intersection correspondant ait été construit.

3.3 Renormalisation du temps local d'auto-intersection :

Le problème ici est d'étudier la singularité de la mesure β_2 sur la diagonale. Cette question dite de la renormalisation du temps local pour les points doubles a été résolue par Varadhan [V]. La question identique pour les points de multiplicité $p > 2$ est nettement plus difficile ; voir [Dy2], [Dy6], [R4], [RY], [L12], [LJ].

Si $k \geq 0$ et $\ell \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$ on pose

$$A_\ell^k = \left[\frac{2^\ell}{2^{k+1}}, \frac{2^\ell + 1}{2^{k+1}} \right] \times \left[\frac{2^\ell + 1}{2^{k+1}}, \frac{2^\ell + 2}{2^{k+1}} \right]$$

les A_ℓ^k forment une partition de $\mathcal{J}_2 \cap [0, 1]^2$. On sait que $\beta_2(\mathcal{J}_2 \cap [0, 1]^2) = +\infty$, mais on a :

THÉORÈME 9. — *Pour tout borélien de $\mathcal{J}_2 \cap [0, 1]^2$ la série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{2^k-1} \beta_2(A \cap A_\ell^k) - E(\beta_2(A \cap A_\ell^k)) \right)$$

converge (p.s et L^2). La somme de cette série est notée $\gamma(A)$ et l'application $A \rightarrow \gamma(A)$ est appelée temps local d'auto-intersection renormalisé.

4. LA SAUCISSE DE WIENER :

4.1 La surface d'une petite saucisse de Wiener :

DÉFINITION : Si K est un compact non polaire de \mathbf{R}^2 , on définit la saucisse de Wiener (de base K) entre les instants u et v par :

$$\begin{aligned} S_K(u, v) &= \{y \in \mathbf{R}^2, \exists s \in [u, v] y - B_s \in K\} \\ &= \bigcup_{u \leq s \leq v} (B_s + K). \end{aligned}$$

Le cas le plus usuel est celui où K est le disque unité, $S_D(u, v)$ est alors le voisinage tubulaire de la trajectoire du mouvement brownien entre les instants u et v .

Il s'agit ici d'étudier le comportement asymptotique (lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$) de $m(S_{\varepsilon K}(0, 1))$ ou encore le comportement asymptotique (lorsque $t \rightarrow \infty$) de $m(S_K(0, t))$.

Les deux questions sont reliées par l'invariance d'échelle : $m(S_k(0, t))$ a en effet la même loi que $t m(S_{t^{-1/2}K}(0, 1))$.

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 10.—

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\log \frac{1}{\varepsilon}) m(S_{\varepsilon K}(0, 1)) = \pi$$

(la convergence étant L^2 , et presque sûre si K est étoilée)

COROLLAIRE.—

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} m(S_K(0, t)) = 2\pi$$

(la convergence étant L^2 et presque sûre).

Preuve : Elle consiste à montrer que

$$(a) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\log \frac{1}{\varepsilon}) E(m(S_{\varepsilon K}(0, 1))) = \pi$$

et que :

$$(b) \quad (\text{var } m(S_{\varepsilon K}(0, 1)))^{1/2} \leq C(\log \frac{1}{\varepsilon})^{-2}.$$

Ce qui donne :

$$E \left(\left[\frac{m(S_{\varepsilon K}(0, 1))}{E(m(S_{\varepsilon K}(0, 1)))} - 1 \right]^2 \right) = O\left(\frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^2}\right)$$

et donc la convergence L^2 .

Si $\varepsilon_k = e^{-k^2}$, on a, par (a) et (b) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} E \left(\left[\frac{m(S_{\varepsilon_k K}(0, 1))}{E(m(S_{\varepsilon_k K}(0, 1)))} - 1 \right]^2 \right) < \infty$$

et donc :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(S_{\varepsilon_k K})}{E(m(S_{\varepsilon_k K}))} = 1 \text{ p.s.}$$

Si K est étoilé, $m(S_{\varepsilon K})$ est une fonction croissante de ε , ce qui achèvera la preuve, une fois (a) et (b) prouvés.

Pour prouver (a) on a :

$$\begin{aligned} E(m(S_{\varepsilon K}(0, 1))) &= E\left(\int 1_{S_{\varepsilon K}+(0,1)}(y)dy\right) \\ &= \int P(T_{y-\varepsilon K} \leq 1)dy \end{aligned}$$

où $T_{y-\varepsilon K} = \inf\{s, B_s \in y - \varepsilon K\}$.

Or la théorie du potentiel permet d'estimer ces temps d'atteinte et de vérifier que, si ζ est une variable de loi exponentielle indépendante du mouvement brownien et si $G_\lambda(x, y)$ est la fonction de Green du Brownien tué au temps ζ on a (si K est non-polaire) :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\log \frac{1}{\varepsilon}) P(T_{y-2K} < \zeta) = \pi G_\lambda(0, y).$$

C'est-à-dire que la transformée de Laplace de $(\log \frac{1}{\varepsilon})\gamma_\varepsilon(ds)$ (où γ_ε est la loi de $T_{y-\varepsilon K}$) converge vers la transformée de Laplace de $\pi p_s(0, y)ds$. On en déduit que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\log \frac{1}{\varepsilon})\gamma_\varepsilon([0, t]) = \pi \int_0^t p_s(0, y)ds$$

c'est-à-dire que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\log \frac{1}{\varepsilon})P(T_{y-\varepsilon K} \leq t) = \pi \int_0^t p_s(0, y)ds .$$

De plus on montre qu'il existe une constante $C(\lambda, K)$ telle que :

$$P(T_{y-\varepsilon K} \leq \zeta) \leq C(\lambda, K)G_\lambda(0, \frac{y}{2})(\log \frac{1}{\varepsilon}).$$

d'où :

$$\begin{aligned} P(T_{y-\varepsilon K} \leq 1) &\leq e^\lambda P(T_{y-\varepsilon K} \leq \zeta) \\ &\leq e^\lambda C(\lambda, K)(\log \frac{1}{\varepsilon})G_\lambda(0, \frac{y}{2}) \end{aligned}$$

G_λ étant intégrable, par convergence dominée le (a) est prouvé.

La preuve du (b) est plus délicate, nous renvoyons à [L4].

Remarque : La limite de $\log \frac{1}{\varepsilon} m(S_{\varepsilon K}(0, 1))$ est indépendante de K .

Ceci est spécifique à la dimension 2. En dimension $d \geq 3$ on prouve le résultat suivant : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2-d} m(S_{\varepsilon K}(0, 1)) = C(K)$ où $C(K)$ est la capacité newtonienne de K .

4.2 Interprétation du résultat précédent en termes de conduction de la chaleur :

Le comportement asymptotique du volume de la saucisse de Wiener est directement lié au problème de conduction de la chaleur suivant :

Si un compact K non polaire de \mathbf{R}^2 est maintenu à température 1 lorsque le temps varie de 0 à $+\infty$, alors que $\mathbf{R}^2 \setminus K$ est à température nulle à l'instant initial $t = 0$, quel est le comportement asymptotique,

lorsque t tend vers $+\infty$, de la quantité de chaleur $E_K(t)$ transmise au temps t par K à $\mathbf{R}^2 \setminus K$?

Si u est la solution de l'équation de la chaleur sur $\mathbf{R}^2 \setminus K$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u$$

avec $u(0, x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} u(t, x) = 1$ pour tout $t > 0$, et tout point régulier x_0 de la frontière de K , on a :

$$E_K(t) = \int_{\mathbf{R}^2 \setminus K} u(t, x) dx$$

Or on a : $u(t, x) = P(T_{x-K} \leq t)$ et donc :

$$E_K(t) = \int_{\mathbf{R}^2 \setminus K} P(T_{x-K} \leq t) dx = \int_{\mathbf{R}^2} P(T_{x-K} \leq t) dx - m(K)$$

et donc $E_K(t) = E(m(S_K(0, t))) - m(K)$.

Ainsi on a vu que : $E_K(t) \sim 2\pi \frac{t}{\log t}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

En dimension ≥ 3 $E_K(t) \sim C(K)t$, si $C(K)$ est la capacité newtonienne de K .

Spitzer [S2] a prouvé ce théorème et a même donné le développement asymptotique de $E_K(t)$. Nous reviendrons sur ce point au 4.4.

4.3 Intersections de Saucisses de Wiener indépendantes :

Considérons ici p mouvements browniens indépendants B^1, \dots, B^p dans C^2 et K un compact non polaire. Le théorème suivant, (dû à Le Gall [L3]) permet d'interpréter le temps local d'intersection comme une mesure de l'intersection des p saucisses $S_{\varepsilon K}^{\gamma}(0, t)$ convenablement normalisée.

THÉORÈME 11.— Pour tout $n < \infty$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\log \frac{1}{\varepsilon})^n m(S_{\varepsilon K}^1(0, t) \cap \dots \cap S_{\varepsilon K}^n(0, t)) = \pi^n \alpha([0, t]^n)$$

en norme L^n .

4.4 Fluctuations et renormalisation :

La renormalisation de Varadhan (exposé au 3.3) permet d'obtenir un terme de plus dans le développement asymptotique de $m(S_{\varepsilon K}(0, 1))$:

THÉORÈME 12.— *Si K est non polaire*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\log \frac{1}{\varepsilon})^2 (m(S_{\varepsilon K}(0, 1)) - E(m(S_{\varepsilon K}(0, 1))) = -\pi^2 \gamma(\mathcal{J}_2 \cap [0, 1]^2))$$

en norme L^2 .

Comme corollaire de ce théorème on peut obtenir un développement asymptotique :

$$m(S_{\varepsilon K}(0, 1)) = \frac{\pi}{\log 1/\varepsilon} + \frac{\pi}{(\log 1/\varepsilon)^2} \left(\frac{1 + \kappa - \log 2}{2} + R(K) - \pi \gamma(\mathcal{J}_2 \cap [0, 1]^2) \right) + o\left(\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2\right)$$

où κ est la constante d'Euler et $R(K)$ est le logarithme de la capacité logarithmique de K .

Pour cela il suffit d'utiliser, outre le théorème précédent, le développement asymptotique, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, de $E(m(S_{\varepsilon K}(0, 1)))$ (ou, ce qui est équivalent, du flot de chaleur $E_K(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$) donné par Spitzer [S2].

On peut aussi inverser l'argument et obtenir ce développement asymptotique avant celui de Spitzer. On peut même obtenir un développement d'ordre plus élevé mais à condition d'avoir développé la renormalisation des temps locaux d'intersections de multiplicité supérieure à 2, ce qui est beaucoup plus difficile. Pour cela renvoyons à Dynkin [Dy3], Le Gall [L10], ou Rosen et Yor [RY] (pour les points triples).

Esquisse de preuve : Si ℓ et k sont des entiers tels que $\ell \leq 2^k - 1$ les processus

$$\left(B_{\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}-t} - B_{\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}}, t \in [0, \frac{1}{2^{k+1}}] \right) \text{ et } \left(B_{\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}+t} - B_{\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}}, t \in [0, \frac{1}{2^{k+1}}] \right)$$

sont des browniens indépendants.

Le temps local d'auto-intersection

$$\beta\left(\left[\frac{2\ell}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+1}{2^{k+1}}\right] \times \left[\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+2}{2^{k+1}}\right]\right)$$

suit la même loi que le temps local d'intersection $\alpha([0, \frac{1}{2^{k+1}}]^2)$. Ainsi (en notant, si U est une variable aléatoire, $\{U\} = U - E(U)$ la variable U centrée) on sait par le 4.3 que

$$\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2 m\left(S_{\varepsilon K}\left(\frac{2\ell}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+1}{2^{k+1}}\right) \cap S_{\varepsilon K}\left(\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+2}{2^{k+1}}\right)\right)$$

converge dans L^2 lorsque ε tend vers zéro, vers $\pi^2\{\beta(A_\ell^k)\}$ avec

$$A_\ell^k = \left[\frac{2\ell}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+1}{2^{k+1}}\right] \times \left[\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+2}{2^{k+1}}\right].$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \{m(S_{\varepsilon K}(0, 1))\} &= \sum_{i=1}^{2^n} \left\{m\left(S_{\varepsilon K}\left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right)\right\} \\ &- \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{2^k-1} \left\{m\left(S_{\varepsilon K}\left(\frac{2\ell}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+1}{2^{k+1}}\right) \cap S_{\varepsilon K}\left(\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+2}{2^{k+1}}\right)\right)\right\} \end{aligned}$$

Or par le théorème 11 et par invariance d'échelle :

$$E\left(\sum_{i=1}^{2^n} \left\{m\left(S_{\varepsilon K}\left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right)\right\}\right) \leq \frac{C}{2^{n/2}} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-2},$$

pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0(n)$. Ainsi (cf. [L12] pour les détails) :

$$\begin{aligned} L^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \{m(S_{\varepsilon K}(0, 1))\} &= -\pi^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{2^k-1} \{\beta(A_\ell^k)\} \\ &= -\pi^2 \gamma(\mathcal{J}_2 \cap [0, 1]^2). \end{aligned}$$

5. GÉOMÉTRIE DE LA COURBE BROWNIENNE :

5.1 Points cônes :

Si B est un mouvement brownien le théorème de Spitzer implique que, pour t fixé, avec probabilité 1, les courbes $(B_{t+s}, 0 < s \leq 1)$ et $(B_{t-s}, 0 < s \leq t)$ font un nombre infini de tours autour de B_t . Il est impossible de renforcer l'affirmation précédente pour la rendre vraie avec probabilité 1, pour tout t . Il existe des temps exceptionnels (et aléatoires) où la courbe brownienne, loin de s'enrouler autour de $B_t(\omega)$ demeure dans un cône de sommet $B_t(\omega)$.

Par exemple si $B_t = B_t^1 + iB_t^2$ et

$$T = \inf(t \geq 0 . B_t^1 = \sup_{0 \leq s \leq 1} B_s^1)$$

il est clair que les deux courbes $(B_{T-s}, 0 \leq s \leq T)$ et $(B_{T+s}, 0 < s \leq 1-T)$ sont contenues dans le demi-plan $\{x \leq B_T^1\}$.

Plus généralement on définit :

DÉFINITION : Si $\alpha \in]0, 2\pi[$, on dit que B_t est un point cône bilatère (respectivement unilatère) d'angle α , s'il existe $\delta > 0$ et un cône fermé d'angle α et de sommet B_t qui contienne les deux courbes (respectivement une des deux courbes) $(B_{t+s}, 0 < s < \delta)$ et $(B_{t-s}, 0 < s < \delta)$.

Nous venons de voir qu'il existe des points cônes bilatères d'angle π . Il s'agit d'un cas limite, en effet, si Γ_α est l'ensemble des points cônes bilatères d'angle α , Evans [EV] a prouvé le

THÉORÈME 13.— Avec probabilité 1 :

- (1) si $\alpha \in]0, \pi[$ $\Gamma_\alpha = \emptyset$
- (2) si $\alpha \in [\pi, 2\pi[$ $\dim \Gamma_\alpha = 2 - \frac{2\pi}{\alpha}$.

Par contre, Burdzy [B1] et Shimura [Sh2] ont constaté qu'il existe des points cônes unilatères d'angle $\in]\frac{\pi}{2}, \pi]$. On peut aussi en donner la dimension de Hausdorff. Le Gall [L7] a construit un temps local (une mesure de Radon portée par certains points cônes unilatères) et obtenu ainsi

une description précise probabiliste de ces ensembles comme l'adhérence de la trajectoire de certains processus stables plongés dans le brownien, généralisant ainsi les résultats de Spitzer [S1] relatifs au cas où $\alpha = \pi$. Pour le cas où $\alpha < \frac{\pi}{2}$, il n'existe pas de points cônes unilatères. Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la question est ouverte.

5.2. Enveloppe convexe de la courbe brownienne

Soit $C(t)$ l'enveloppe convexe de la trajectoire brownienne jusqu'au temps $t : \{B_s, 0 \leq s \leq t\}$. Quelle est l'allure de $C(t)$, de $\partial C(t)$?

On sait que le périmètre moyen de $C(t)$ est de $\sqrt{8\pi t}$ (Takacs [Ta]), que l'aire moyenne de $C(t)$ est de $\frac{\pi t}{2}$ (El Bachir [EB]).

On a même la loi du log-itéré pour l'aire $A(t)$ de $C(t)$ due à P. Lévy [Le3] : $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{2t \log \log t} = \frac{1}{2\pi}$ presque sûrement.

La frontière $\partial C(t)$ possède les propriétés suivantes :

THÉORÈME 14.—

1) Pour tout $t > 0$, avec probabilité 1, $C(t)$ n'a pas de coins, i.e. il n'existe pas de cône d'angle $< \pi$ et de sommet sur $\partial C(t)$ qui contienne $C(t)$.

Avec probabilité 1

2) $\partial C(t)$ est une courbe C^1 , et n'est pas une courbe $C^{1-\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

3) L'ensemble $e(t)$ des points extrémaux de $\partial C(t)$ est de dimension 0.

4) $\partial C(t) \setminus e(t)$ est une réunion dénombrable de segments de droite.

5) $C(t)$ n'a pas de points extrémaux isolés.

Le 1) est dû à El Bachir [EB] : Cranston-Hsu-March [CHM] ont étudié la régularité de $\partial C(t)$ et donné un module de continuité précis qui contient l'énoncé donné ici au 2). Voir aussi Burdzy-San Martin [BSM]. Evans [Ev] a prouvé les 3), 4), 5).

Preuve du 1) : (En suivant l'approche de Le Gall [L12]). Si on suppose que $C(t)$ a un coin en z , alors z est un point de la trajectoire brownienne, en fait on a même $z \in \{B_s, s \in]0, t[\}$ car B_0 et B_t sont

intérieurs à $C(t)$ par le théorème de Spitzer. Un tel z est un point cône bilatère d'angle $\alpha < \pi$. On a vu qu'il n'existe pas de tels points.

Le fait que $\partial C(t)$ soit C^1 est alors simple. Pour la non-régularité $C^{1,\alpha}$ (i.e. la non-hölderianité de la tangente) on renvoie à Cranston-Hsu-March [CHM].

Le 5) est très simple : un point extrémal isolé est un coin, car $C(t)$ est aussi l'enveloppe convexe de $\{z\} \cup C(t) \setminus D(x, \delta)$ (pour δ assez petit, par Krein-Milman).

Le 3) est aussi très simple : un point extrémal est un point cône bilatère d'angle π . On a vu que la dimension de l'ensemble de ces points est nulle.

5.3 Points de coupure :

Est-il possible de déconnecter la courbe brownienne en enlevant un seul point ?

Un tel point sera alors dit point de coupure. La réponse est positive (en dimension ≥ 2) et est due à Burdzy. Elle est triviale en dimension ≥ 4 puisque les trajectoires browniennes n'ont alors pas de points doubles, tous les points sont des points de coupure. En dimension 2 (et 3) la preuve de Burdzy est délicate : il s'agit d'une approche "théorie du potentiel". On renvoie à [B4], on citera ici seulement le résultat et quelques questions.

THÉORÈME 15.— *Avec probabilité 1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t \in]0, \varepsilon[$ tel que :*

$$B_s \neq B_t \quad \forall s \in [0, 1] \setminus \{t\}$$

et

$$\{B_s, 0 \leq s < t\} \cap \{B_s, t < s \leq 1\} = \emptyset.$$

Remarque : Burdzy utilise ce résultat pour infirmer une conjecture de Mandelbrot : la courbe brownienne n'est pas homéomorphe au Tapis de Sierpinski.

On ne sait presque rien sur l'ensemble des points de coupure, si ce n'est qu'il est non vide. Quelle est sa dimension ? Est-il non dénombrable ? Est-il inclus dans l'ensemble des points cônes bilatères ?

5.4. L'extérieur de la courbe brownienne : points spirales.

Soit F la composante connexe non bornée du complémentaire de la courbe brownienne : $\mathbf{C} \setminus B_{[0,1]}$. Burdzy [B3] a montré que la frontière de ∂F est très complexe : "presque tout point de ∂F n'est atteignable par une courbe continue venue de l'infini, qu'au prix d'un nombre infini de tours dans les deux sens".

Un point z est sur ∂F si et seulement si il existe une fonction continue $\varphi[0,1] \rightarrow \mathbf{C}$ telle que :

$$(1) \quad \varphi(s) \in F \quad \forall s \in [0,1[$$

$$(2) \quad \varphi(1) = z.$$

On dira que $z \in \partial F$ est un point spirale si pour toute fonction φ vérifiant (1) et (2) on a :

$$\begin{cases} \limsup_{s \rightarrow 0^1} \arg(\varphi(s) - z) = +\infty \\ \liminf_{s \rightarrow 0^1} \arg(\varphi(s) - z) = -\infty \end{cases}$$

Un point cône bilatère ne peut être un point spirale. En fait les points cônes bilatères d'angle π forment une partie dense de ∂F . Néanmoins les points spirales sont génériques sur ∂F au sens de la mesure harmonique.

THÉORÈME 16.— *Avec probabilité 1, presque tout $z \in \partial F$ (au sens de la mesure harmonique) est un point spirale.*

Preuve : Il existe une application analytique bijective f du disque unité D sur $\hat{F} = F \cup \{\infty\}$. On peut étendre f par continuité de \bar{D} sur $\hat{F} \cup \partial F$, car les limites radiales existent pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$ (par le fait que $\mathbf{C} \setminus F$ est connexe). Cette extension n'est pas injective du fait de l'existence de points de coupure (cf. Pommerenke [Po]). Soit A_f l'ensemble des points $\zeta \in \partial D$ tels que f ait une dérivée angulaire non nulle en ζ . Le point clef de la preuve est le lemme suivant :

Lemme.— *$f(A_f)$ est de dimension nulle.*

En effet $f(A_f)$ est inclus dans l'ensemble des points cônes bilatères d'angle, pour tout $\alpha > \pi$. L'estimation, donnée au 5.1, de la dimension de Hausdorff de l'ensemble de ces points cônes montre donc que $\dim f(A_f) = 0$.

Il faut ensuite remarquer qu'il existe un $\beta > 0$ tel que si $H \subset \partial F$ et si $\dim H < \beta$ alors la mesure harmonique de H est nulle. Ceci est une conséquence du théorème de Makarov [Ma] qui affirme entre autres que l'on peut choisir $\beta = 1$.

Mais la version faible du théorème de Makarov utile ici peut être prouvée de façon probabiliste très simplement (*cf.* Le Gall [L12]). On déduit donc que la mesure harmonique de $f(A_f)$ est nulle.

Pour achever la preuve il suffit d'utiliser le théorème de Mac-Millan : on dira que $\zeta \in \partial F$ est un f -point spirale si $\arg(f(z) - f(\zeta))$ est non borné supérieurement et inférieurement sur toute courbe de D aboutissant en ζ . On notera S_f l'ensemble des f points spirale.

Le théorème de Mac Millan affirme que la mesure harmonique de $\partial D \setminus (S_f \cup A_f)$ est nulle, et donc aussi celle de $f(\partial D \setminus S_f \cup A_f)$ (par invariance conforme de la mesure harmonique).

Or il est clair d'après les définitions que, si $z \in \partial F$ n'est pas un point spirale il existe un point ζ de ∂D qui n'est pas un f -point spirale tel que $f(\zeta) = z$. Ainsi le complémentaire de l'ensemble des points spirale de ∂F est inclus dans

$$f(\partial D \setminus S_f \cup A_f) \cup f(A_f)$$

qui est de mesure nulle \square .

5.5. Les petites composantes connexes du complémentaire de la courbe brownienne :

Combien la courbe brownienne laisse-t-elle de "petits trous" dans le plan ?

Mandelbrot [M] a conjecturé que le nombre N_ε de composantes connexes du complémentaire de la courbe brownienne, d'aire supérieure à

ε est de l'ordre de $\frac{L(\varepsilon)}{\varepsilon}$, où L est une fonction à croissance lente telle que $\int_0^1 \frac{L(u)}{u} du < \infty$. Mountford [Mo] a prouvé cette conjecture avec $L(\varepsilon) = \frac{2\pi}{(\log \varepsilon)^2}$. Nous allons donner ici l'approche de Le Gall [L11] qui a amélioré ces résultats : si $u < v$ notons $N_{[u,v[}$ le nombre de composantes connexes du complémentaire de la courbe brownienne dont l'aire appartient à $[u, v[$ on a alors :

THÉORÈME 17.— Avec probabilité 1, pour tout $\delta > 0$:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sup_{v \geq (1+\delta)u} \left| \frac{(\log u)^2 N_{[u,v[}}{u^{-1} - v^{-1}} - 2\pi \right| = 0$$

En particulier : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon (\log \varepsilon)^2 N_\varepsilon = 2\pi$.

Preuve : Si W_ε est la réunion de toutes les composantes connexes d'aire inférieure ou égale à $\pi\varepsilon^2$, il est clair que $W_\varepsilon \subset S_{\varepsilon D}(0, 1)$ (la saucisse de Wiener de rayon ε). Réciproquement on montre que, si $y \in S_{\varepsilon D}(0, 1)$ la composante connexe de y sera contenue dans le disque de centre y et de rayon ε (et donc d'aire $\leq \pi\varepsilon^2$), ceci avec probabilité proche de 1. Ainsi la mesure de W_ε est de l'ordre de celle de $S_{\varepsilon D}(0, 1)$, i.e. de l'ordre de $\frac{\pi}{|\log \varepsilon|}$.

Si $\lambda \in [0, 1[$ et si $U_\varepsilon^\lambda = W_\varepsilon \setminus W_{\lambda\varepsilon}$, on peut vérifier (c'est beaucoup plus difficile) que :

$$m(U_\varepsilon^\lambda) = m(W_\varepsilon) - m(W_{\lambda\varepsilon}) \sim \frac{\pi}{|\log \varepsilon|} - \frac{\pi}{|\log \lambda\varepsilon|}$$

i.e. que $m(U_\varepsilon^\lambda) \sim \frac{\pi |\log \lambda|}{(\log \varepsilon)^2}$. Ce qui permet de prouver le théorème si on remarque en outre que :

$$(M\lambda^{2n})^{-1} m(U_{\lambda^n}^\lambda) \leq N_{[\pi\lambda^{2n+2}, \pi\lambda^{2n}[} \leq (\pi\lambda^{2n+2})^{-1} m(U_{\lambda^n}^\lambda).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [AD] O. Adelman, A. Dvoretzky, Plane Brownian motion has strictly n -multiple points. *Israel J. Math.* 52, 361-364 (1985).
- [B1] K. Burdzy, Brownian paths and cones. *Ann. Probab.* 13, 1006-1010 (1985).
- [B2] K. Burdzy, *Multidimensional Brownian Excursions and Potential Theory*. Longman, New-York, 1987.
- [B3] K. Burdzy, Geometric properties of two-dimensional Brownian paths. *Probab. Th. Rel. Fields* 81, 485-505 (1989).
- [B4] K. Burdzy, Cut points on Brownian paths. *Ann. Probab.* 17, 1012-1036.
- [BSM] K. Burdzy, J. San Martin, Curvature of the convex hull of planar Brownian motion near its minimum point. *Stoch. Process. Appl.* 33, 89-103 (1989).
- [CT] Z. Ciesielski, S.J. Taylor, First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path. *Trans. Amer. Math. Soc.* 103, 434-450 (1963).
- [CHM] M. Cranston, P. Hsu, P. March, Smoothness of the convex hull of planar Brownian motion. *Ann. Probab.* 17, 144-150 (1989).
- [Da] B. Davis, Brownian motion and analytic functions. *Ann. Probab.* 7, 913-932 (1979).
- [DV] M.D. Donsker, S.R.S. Varadhan, Asymptotics for the Wiener sausage. *Comm. Pure Appl. Math.* 28, 525-565 (1975).
- [Du1] R. Durrett, A new proof of Spitzer's result on the winding of two-dimensional Brownian motion. *Ann. Probab.* 10, 244-246 (1982).
- [Du2] R. Durrett, *Brownian Motion and Martingales in Analysis*. Wadsworth, Belmont Ca. 1984.

- [DE] A. Dvoretzky, P. Erdős, Some problems on random walk in space. *Proc. Second Berkeley Symposium on Math, Statistics and Probability*. 353-367. University of California Press, Berkeley, 1951.
- [DK1] A. Dvoretzky, P. Erdős, S. Kakutani, Double points of paths of Brownian motion in n -space. *Acta Sci. Math. (Szeged)* 12, 74-81 (1950).
- [DK2] A. Dvoretzky, P. Erdős, S. Kakutani, Multiple points of Brownian motion in the plane. *Bull. Res. Council Israel Sect. F3*, 364-371 (1954).
- [DK3] A. Dvoretzky, P. Erdős, S. Kakutani, Points of multiplicity of plane Brownian paths. *Bull. Res. Council Israel Sect. F7*, 175-180 (1958).
- [DKT] A. Dvoretzky, P. Erdős, S. Kakutani, S.J. Taylor, Triple points of Brownian motion in 3-space. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 53, 856-862 (1957).
- [Dy1] E.B. Dynkin, Additive functionals of several time-reversible Markov processes. *J. Funct. Anal.* 42, 64-101 (1981).
- [Dy2] E.B. Dynkin, Local times and quantum fields, *Seminar on Stochastic Processes 1983*, pp.69-84, Birkhäuser, Boston, 1984.
- [Dy3] E.B. Dynkin, Polynomials of the occupation field and related random fields. *J. Funct. Anal.* 42, 64-101 (1984).
- [Dy4] E.B. Dynkin, Random fields associated with multiple points of the Brownian motion *J. Funct. Anal.* 62, 397-434 (1985).
- [Dy5] E.B. Dynkin, Functionals associated with self-intersections of the Brownian motion. *Séminaire de Probabilités XX, Lecture Notes in Math.* 1204, 553-571, Springer, Berlin, 1986.
- [Dy6] E.B. Dynkin, Self-intersection gauge for random walks and for Brownian motion. *Ann. Probab.* 16, 1-57 (1988).
- [Dy7] E.B. Dynkin, Regularized self-intersection local times of the planar Brownian motion. *Ann. Probab.* 16, 58-74 (1988).

- [E] S.F. Edwards, The statistical mechanics of polymers with excluded volume. *Proc. Phys. Sci.* 85, 613-624 (1965).
- [EB] M. EL Bachir, L'enveloppe convexe du mouvement brownien. Thèse de troisième cycle, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1983.
- [Ev] S.N. Evans, On the Hausdorff dimension of Brownian cone points. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 98, 343-353 (1985).
- [GHR] D. Geman, J. Horowitz, J. Rosen, A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. *Ann. probab.* 12, 86-107 (1984).
- [H] J. Hawkes, Some geometric aspects of potentials theory. *Stochastic Analysis and Applications. Lecture Notes in Math.* 1095, 130-154, Springer, New-York, 1984.
- [IMK] K. Itô, H.P. McKean, *Diffusion Processes and their Sample Paths.* Springer, New-York, 1965.
- [Kn] F.B. Knight, *Essentials of Brownian Motion and Diffusion.* A.M.S. Providence, 1981.
- [KR] G. Kallianpur, H. Robbins, Ergodic property of the Brownian Motion process. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 39, 525-533.
- [L1] J.F. Le Gall, Sur la mesure de Hausdorff de la courbe brownienne. *Séminaire de Probabilités XIX. Lecture Notes in Math.* 1123, 297-313. Springer, New-York, 1985.
- [L2] J.F. Le Gall, Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. *Séminaire de Probabilités XIX. Lecture Notes in Math* 1123, 314-331, Springer, New-York 1985.
- [L3] J.F. Le Gall, Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien *Ann. Probab.* 14, 1219-1244 (1986).
- [L4] J.F. Le Gall, Le comportement du mouvement brownien entre les deux instants où il passe par un point double. *J. Funct. Anal.* 71, 246-262 (1987).

- [L5] J.F. Le Gall, Mouvement brownien, cônes et processus stables. *Probab. Th. Rel. Fields* 76, 587-627 (1987).
- [L6] J.F. Le Gall, Temps locaux d'intersection et points multiples des processus de Lévy. *Séminaire de probabilités XXI, Lecture Notes in Math.* 1247, 341-375. Springer, New-York, 1987.
- [L7] J.F. Le Gall, The exact Hausdorff measure of Brownian multiple points, *Seminar on Stochastic Processes 1986*, pp.107-137, Birkhäuser, Boston, 1987.
- [L8] J.F. Le Gall, Fluctuation results for the Wiener sausage. *Ann. Probab.* 16, 991-1018 (1988).
- [L9] J.F. Le Gall, Sur une conjecture de M. Kac. *Probab. Th. Rel. Fields* 78, 389-402 (1988).
- [L10] J.F. Le Gall, Wiener sausage and self-interaction local times. *J. Funct. Anal.* 88, 299-341 (1990).
- [L11] J.F. Le Gall, On the connected components of the complement of a two-dimensional Brownian path. *To appear.*
- [L12] J.F. Le Gall, Cours à l'Ecole d'été de St Flour 1990. A paraître en Lecture Notes Springer Verlag.
- [LY] J.F. Le Gall, M. Yor, Etude asymptotique de certains mouvements browniens complexes avec drift. *Probab. Th. Rel. Fields* 71, 183-229 (1986).
- [LJ] Y. Le Jan, On the Fock space representation of functionals of the occupation field and their renormalization. *J. Funct. Anal.* 80, 88-108 (1988).
- [Lé1] P. Lévy, Le mouvement brownien plan. *Amer. J. Math.* 62, 487-550 (1940).
- [Lé2] P. Lévy, La mesure de Hausdorff de la courbe du mouvement brownien. *Giornale de l'Istituto Italiano degli Attuari* 16, 1-37 (1953).

- [Lé3] P. Lévy, Le caractère universel de la courbe du mouvement brownien et la loi du logarithme itéré. *Rendiconti del circolo matematico di Palermo, II*, 4, 337-366 (1955).
- [Lé4] P. Lévy, *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*. Gauthier-Villars, Paris, 1965.
- [Ma] N.G. Makarov, On the distortion of boundary sets under conformal mappings. *Proc. London Math. Soc. (3)* 51, 369-384 (1985).
- [M] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman and Co. New-York, 1982.
- [MM] J.E. McMillan, Boundary behaviour of a conformal mapping. *Acta Math.* 123, 43-68 (1969).
- [Mo] T.S. Mountford, On the asymptotic number of small components created by planar Brownian motion. *Stochastics* 28, 177-188 (1989).
- [PY1] J.W. Pitman, M. Yor, Asymptotic laws of planar Brownian motion. *Ann. Probab.* 14, 733-779 (1986).
- [PY2] J.W. Pitman, M. Yor, Further asymptotic laws of planar Brownian Motion. *Annals of Probability* 1989, vol.17, N°3, 965-1011.
- [Po] G. Pommerenke, *Univalent Functions*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [PS] S.C. Port, C.J. Stone, *Brownian Motion and Classical Potential Theory*. Academic Press, New-York, 1978.
- [ReY] D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingale Calculus*. Springer, 1990 (to appear).
- [RoW] L.C.G. Rogers, D. Williams, *Diffusions, Markov Processes, and Martingales, Vol.II*. Wiley, Chichester, 1987.
- [R1] J. Rosen, A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space. *Comm. Math. Physics.* 88, 327-338 (1983).
- [R2] J. Rosen, Self-intersections of random fields. *Ann. Probab.* 12, 108-119 (1984).

- [R3] J. Rosen, Tanaka formula and renormalization for intersections of planar Brownian motion. *Séminaire de Probabilités XX. Lecture Notes in Math.* 1204, 515-531. Springer, Berlin, 1986.
- [RY] J. Rosen, M. Yor, Tanaka formulae and renormalization for triple intersections of Brownian motion in the plane. *Ann. Probab.* to appear.
- [Sh1] M. Shimura, A limit theorem for two-dimensional conditioned random walk. *Nagoya Math. J.* 95, 105-116 (1984).
- [Sh2] M. Shimura, Excursions in a cone for two-dimensional Brownian motion. *J. Math. Kyoto Univ.* 25, 433-443 (1985).
- [Sh3] M. Shimura, Meandering points of two-dimensional Brownian motion. *Kodai Math. J.* 11, 169-176 (1988).
- [S1] F. Spitzer, Some theorems concerning two-dimensional Brownian motion. *Trans. Amer. Math. Soc.* 87, 187-197 (1958).
- [S2] F. Spitzer, Electrostatic capacity, heat flow and Brownian motion. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* 3, 110-121 (1964).
- [Sz] A.S. Sznitman, Some bounds and limiting results for the Wiener sausage of small radius associated with elliptic diffusions. *Stochastic Process. Appl.* 25, 1-25 (1987).
- [Ta] L. Takacs, Expected perimeter length, *Amer. Math. Monthly* 87-142.
- [T1] S.J. Taylor, The exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 60, 253-258 (1964).
- [T2] S.J. Taylor, Sample path properties of processes with stationary independent increments. *Stochastic Analysis*, D. Kendall, E. Harding eds. Wiley, London, 1973.
- [T3] S.J. Taylor, The measure theory of random fractals. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 100, 383-406 (1986).

- [V] S.R.S. Varadhan, Appendix to “Euclidean quantum field theory”, by K. Symanzik. In *Local Quantum Theory* (R. Jost ed.). Academic, New-York, 1969.
- [Wo] R. Wolpert, Wiener path intersections and local time. *J. Funct. Anal.* 30, 329-340 (1978).
- [Y1] M. Yor, Compléments aux formules de Tanaka-Rosen. *Séminaire de Probabilités XIX. Lecture Notes in Math.* 1123, 332-349. Springer, Berlin, 1985.
- [Y2] M. Yor, Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d’intersection du mouvement brownien dans \mathbf{R}^3 . *Séminaire de Probabilités XIX. Lecture Notes in Math.* 1123, 350-365. Springer, Berlin, 1985.
- [Y3] M. Yor, Précisions sur l’existence et la continuité des temps locaux d’intersection du mouvement brownien dans \mathbf{R}^d . *Séminaire de Probabilités XX. Lecture Notes in Math.* 1204, 532-541. Springer, Berlin, 1986.
- [Y4] M. Yor, Sur la représentation comme intégrales stochastiques des temps d’occupation du mouvement brownien dans \mathbf{R}^d . *Séminaire de Probabilités XX. Lecture Notes in Math.* 1204, 543-552. Springer, Berlin, 1986.

Gérard BEN AROUS
Université Paris XI
Département de Mathématiques
U.R.A. n°743 du CNRS
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY CEDEX

Ecole Normale Supérieure
Département de Mathématiques
et d’Informatique
U.R.A. n° 762 du CNRS
45, rue d’Ulm
F- 75230 PARIS CEDEX 05

Astérisque

JEAN-BENOÎT BOST

Théorie de l'intersection et théorème de Riemann-Roch arithmétiques

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire
Bourbaki, exp. n° 731, p. 43-88

http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__43_0

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DE L'INTERSECTION ET THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH ARITHMÉTIQUES

par Jean-Benoît BOST

Depuis la fin du dix-neuvième siècle, l'analogie entre les corps de nombres, c'est-à-dire les extensions de degré fini de \mathbf{Q} , et les corps de fonctions algébriques d'une variable, c'est-à-dire les corps de fonctions rationnelles sur une courbe algébrique définie sur un corps, a joué un rôle crucial en géométrie algébrique et en arithmétique. En témoignent par exemple les travaux de Dedekind et Weber sur les courbes algébriques et le douzième problème de Hilbert.

Au cours du premier tiers de ce siècle, cette analogie s'est vue complétée par la découverte que, pour la rendre plus satisfaisante, il convenait de considérer les plongements d'un corps de nombres K dans les corps archimédiens \mathbf{R} et \mathbf{C} (les "places à l'infini de K ") sur le même plan que les idéaux premiers de l'anneau des entiers \mathcal{O}_K de K et que les plongements de K dans des corps p -adiques qui leur sont attachés. Cette découverte⁽¹⁾ intervient crucialement dans la définition des adèles d'un corps de nombres et, par là, a connu un immense succès.

(1) Hensel et son élève Hasse semblent les premiers à avoir compris l'importance qu'il y a à considérer simultanément toutes les places d'un corps de nombres, finies ou infinies. Toutefois, la première mention explicite de résultats globaux, mettant en jeu toutes les places d'un corps de nombres, analogues aux résultats classiques sur les surfaces de Riemann est, à notre connaissance, l'article de Weil [W1] de 1939. Un peu plus tard, dans une lettre à sa sœur ([W2], p. 252), ce dernier attribue à Hasse ou Artin la découverte du rôle des places à l'infini.

Par ailleurs, la transposition aux corps de fonctions de problèmes diophantiens, telle l'étude des points rationnels d'une variété définie sur un corps de nombres, a conduit à s'intéresser aux variétés définies sur le corps de fonctions d'une variable $k(C)$ attaché à une courbe C définie sur un corps k . Pour étudier de telles variétés V , on en choisit un modèle au-dessus de C , *i.e.* une variété \mathcal{V} munie d'un morphisme plat $\mathcal{V} \rightarrow C$, définis sur k , tels que V soit isomorphe à la fibre générique de ce morphisme. Si V est de dimension n sur $k(C)$, alors \mathcal{V} est de dimension $n+1$ sur k . C'est ainsi que l'étude des *courbes* sur $k(C)$ conduit à utiliser la théorie des *surfaces* sur k (Manin, Grauert, Samuel).

Cette démarche peut être imitée dans l'étude des variétés V sur un corps de nombres K : un modèle de V est alors un schéma \mathcal{V} plat sur \mathcal{O}_K tel que $\mathcal{V} \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ soit isomorphe à V . Si, par exemple, V est une courbe, alors \mathcal{V} est un schéma de dimension (absolue) 2, ce que l'on appelle une *surface arithmétique* (Schafarevitch, Lichtenbaum). Arakelov a découvert comment faire intervenir dans cette approche les places à l'infini de K , du moins lorsque \mathcal{V} est une surface arithmétique : en faisant appel à la *géométrie hermitienne* sur la courbe analytique complexe $\mathcal{V}(\mathbb{C})$. C'est ainsi que, en munissant $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ d'une métrique kählerienne et les fibrés en droites sur \mathcal{V} (plus précisément, les fibrés en droites holomorphes sur $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ qui s'en déduisent) d'une métrique hermitienne, Arakelov puis Faltings ont étendu aux surfaces arithmétiques les théorèmes classiques de la théorie des surfaces sur un corps (*cf.* [A1], [A2], [Fa1], [Sz], [La2], et exposé Bourbaki, n° 713). Les idées "arakeloviennes" ont joué aussi un grand rôle dans la démonstration par Faltings de la conjecture de Mordell (*cf.* exposés Bourbaki n° 616 et 619).

Dans cet exposé, nous présentons une introduction aux travaux de Gillet et Soulé qui ont généralisé cette "géométrie d'Arakelov" aux variétés de dimension arbitraire. Ils ont établi une théorie de l'intersection sur les "variétés arithmétiques" générales, ainsi qu'une théorie des classes caractéristiques pour les fibrés vectoriels hermitiens sur celles-ci. Puis ils ont démontré un "théorème de Riemann-Roch arithmétique" ([GS10]), en s'appuyant sur des travaux de Bismut et Lebeau ([BL1,2]). Dans les pages

qui suivent, nous cherchons seulement à donner une idée de ces résultats, sans les présenter sous leur forme la plus générale et sans en décrire les démonstrations, qui présentent souvent des difficultés techniques considérables. (La démonstration actuelle du théorème 4.2 utilise les résultats des articles de Gillet et Soulé [GS3 à 7], Bismut, Gillet et Soulé [BGS1 à 3], Bismut [Bi1-2] et Bismut et Lebeau [BL1,2].) Nous mettons l'accent sur les définitions de base de la théorie de l'intersection et des classes caractéristiques arithmétiques, et nous ne disons à peu près rien sur les résultats d'analyse "complexe hermitienne", concernant la torsion analytique, qui jouent un rôle crucial dans les démonstrations et mériteraient à eux seuls un exposé.

La géométrie d'Arakelov en dimension supérieure a déjà connu une application spectaculaire : la nouvelle démonstration par Vojta [V] de la conjecture de Mordell. La théorie de l'intersection arithmétique joue aussi un rôle important dans les travaux récents de Faltings sur l'approximation diophantienne dans les variétés abéliennes, où celui-ci l'utilise pour attacher une hauteur aux sous-variétés de l'espace projectif ([Fa2]).

Terminons cette introduction par quelques remarques historiques.

Les définitions des groupes de Chow arithmétiques et de leur structure multiplicative étendent les définitions introduites par Arakelov ([A1]) et Deligne ([De]) pour les surfaces arithmétiques. Des cas particuliers "d'intersection arithmétique" en dimension relative > 1 ont été aussi considérés par Bloch ([Bl]) et Beilinson ([Be1], [Be2]). Quant au théorème de Riemann-Roch arithmétique, il généralise en dimension supérieure le travail de Faltings ([Fa1]) et Deligne ([De]) sur les surfaces arithmétiques.

Si l'on recherche les origines plus lointaines de la "géométrie arakelovienne", on peut les faire remonter aux travaux de Weil sur l'arithmétique sur les courbes et sur les variétés algébriques, où développant le point de vue "kroneckerien" en géométrie arithmétique, il introduit "hauteurs" et "distributions" (*cf.* l'article [W3] et les références qui y sont citées). Les travaux de Néron et Tate concernant les hauteurs sur les variétés abéliennes et leur décomposition locale (*cf.* par exemple [La1]), qui sont longtemps apparus comme l'archétype d'une théorie des hauteurs précisées, ont sans

doute joué aussi un rôle déterminant. On ne saurait enfin sous-estimer celui de l'école russe, autour de Schafarevitch, dont est issu Arakelov (voir à ce propos les articles prospectifs de Paršin [P] et Manin [M]).

1. PRÉLIMINAIRES

1.1. Définitions et notations

DÉFINITIONS 1.1.— *On appelle variété arithmétique tout schéma intègre régulier X plat et quasi-projectif sur \mathbf{Z} . On note F_∞ l'involution antiholomorphe de la variété complexe $X(\mathbf{C})$ induite par la conjugaison complexe.*

On appelle fibré hermitien sur une variété analytique complexe V la donnée $\overline{E} = (E, h)$ d'un fibré vectoriel holomorphe E sur V et d'un produit scalaire hermitien h , de classe C^∞ , sur les fibres de E .

On appelle fibré hermitien sur une variété arithmétique X la donnée $\overline{E} = (E, h)$ d'un \mathcal{O}_X -module localement libre E sur X et d'un produit scalaire hermitien h , de classe C^∞ et invariant par F_∞ , sur le fibré vectoriel holomorphe $E(\mathbf{C})$ sur $X(\mathbf{C})$.

On observera que tout schéma intègre régulier X plat et quasi-projectif sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres est une variété arithmétique.

Si $\overline{E} = (E, h)$ et $\overline{E}' = (E', h')$ sont deux fibrés vectoriels hermitiens sur une variété analytique complexe ou sur une variété arithmétique, on peut former leur somme directe $\overline{E} \oplus \overline{E}' := (E \oplus E', h \oplus h')$ — où $h \oplus h'$ désigne la somme directe orthogonale des métriques h et h' — et leur produit tensoriel $\overline{E} \otimes \overline{E}' := (E \otimes E', h \otimes h')$. On désigne par $\det \overline{E}$ la puissance extérieure maximale $\det E$ de E munie de la métrique $\det h$. C'est un fibré en droites hermitien. Enfin, on définit l'image inverse $f^* \overline{E}$ de \overline{E} par un morphisme f de variétés complexes^{ou} de variétés arithmétiques comme $f^* E$ muni de la métrique $f^* h$ qui fait des isomorphismes $(f^* E)_x \simeq E_{f(x)}$ des isométries.

Dans la suite, nous définirons indifféremment une structure de fibré vectoriel hermitien sur un fibré vectoriel E au moyen d'un produit scalaire h ou au moyen d'une métrique hermitienne $\| \cdot \|$, reliés par $\|v\| = h(v, v)^{1/2}$.

On note $\text{rg } E$ le rang d'un fibré vectoriel E et on note $\alpha^{(k)}$ la composante de degré k d'une forme différentielle, ou d'une classe de cohomologie, ou d'un cycle algébrique α .

Si K est un corps et E est un \mathbf{Z} -module, on désigne par E_K le produit tensoriel $E \otimes_{\mathbf{Z}} K$. Plus généralement, si \mathcal{F} est un faisceau de modules sur un \mathbf{Z} -schéma X , on désigne par X_K et \mathcal{F}_K le K -schéma et le faisceau sur X_K qui s'en déduisent par le changement de base $\text{Spec } K \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}$.

1.2. Degré arakelovien (cf. [W1], [A1] et [Sz], exposé 1)

L'importance des places à l'infini des corps de nombres dans l'analogie avec les corps de fonctions se manifeste clairement lorsque, par exemple, on cherche à transposer aux corps de nombres la notion de degré d'un fibré en droites.

Soient en effet K un corps de nombres, \mathcal{O}_K l'anneau des entiers de K , et soient σ_i , $1 \leq i \leq r_1$, les plongements réels de K et $\sigma_i, \bar{\sigma}_i$, $r_1 + 1 \leq i \leq r_1 + r_2$, les plongements complexes de K . Les σ_i , $1 \leq i \leq r_1 + r_2$, sont les *places à l'infini* de K , et l'on pose $\varepsilon_i = 1$ si $1 \leq i \leq r_1$ et $\varepsilon_i = 2$ si $r_1 < i \leq r_1 + r_2$. Soit $\bar{L} = (L, \|\ \|)$ un fibré en droites hermitien sur $X = \text{Spec } \mathcal{O}_K$. La donnée de L est équivalente à celle du \mathcal{O}_K -module projectif de rang 1 $\Lambda = H^0(\text{Spec } \mathcal{O}_K; L)$. La structure hermitienne sur L est la donnée d'une métrique hermitienne, invariante par F_∞ , sur le fibré $L_{\mathbf{C}}$ sur l'espace $X(\mathbf{C})$, dont les points sont les $[K : \mathbf{Q}]$ morphismes de K vers \mathbf{C} ; elle se ramène à la donnée d'une norme hermitienne $\|\ \|_i$ sur chacune des droites vectorielles complexes $\Lambda \otimes_K \mathbf{C}_{\sigma_i}$, $1 \leq i \leq r_1 + r_2$.

Soit \mathbf{P} l'ensemble des idéaux premiers de \mathcal{O}_K . Pour tout $\mathfrak{p} \in \mathbf{P}$, on note

$$N\mathfrak{p} = \# \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$$

sa norme et $v_{\mathfrak{p}}$ la valuation sur K qui lui est associée. Utilisant que, localement sur $\text{Spec } \mathcal{O}_K$, L est isomorphe au faisceau structural, on peut encore définir $v_{\mathfrak{p}}(s)$ pour une section s de L . Il vient alors, pour tout $s \in \Lambda \setminus \{0\}$

$$(1.2.1) \quad \begin{aligned} \#(\Lambda/s\mathcal{O}_K) - \sum_{x \in X(\mathbf{C})} \log \|s(x)\| \\ = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathbf{P}} v_{\mathfrak{p}}(s) \log N\mathfrak{p} - \sum_{i=1}^{r_1+r_2} \varepsilon_i \log \|s\|_i. \end{aligned}$$

La formule du produit, qui affirme que pour tout $x \in K \setminus \{0\}$,

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathbf{P}} N\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(x)} \prod_{i=1}^{r_1+r_2} |\sigma_i(x)|^{-\varepsilon_i} = 1,$$

montre que cette expression est indépendante de s . C'est le *degré arakelovien* de \overline{L} , noté $\widehat{\deg} \overline{L}$.

Clairement, la partie algébrique de (1.2.1), formée du premier terme de l'un ou l'autre membre, ne possède pas cette propriété d'invariance : il faut "compactifier" le schéma affine $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ par les places à l'infini de K pour que les fibrés en droites y possèdent un degré bien défini.

Plus généralement, si \overline{E} est un fibré vectoriel hermitien sur $\text{Spec } \mathcal{O}_K$, on pose

$$\widehat{\deg} \overline{E} = \widehat{\deg} \det \overline{E}.$$

Lorsque $K = \mathbf{Q}$, $\Lambda := H^0(\text{Spec } \mathbf{Z}, E)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^{r_{\mathbf{R}}} E$ et la structure hermitienne sur \overline{E} définit un produit scalaire invariant par conjugaison complexe sur $\Lambda_{\mathbf{C}}$, i.e. une structure euclidienne sur $\Lambda_{\mathbf{R}}$; de plus, $\widehat{\deg} \overline{E}$ n'est autre que l'opposé du logarithme du covolume de Λ dans $\Lambda_{\mathbf{R}}$ calculé au moyen de cette structure euclidienne.

Lorsque X est une variété arithmétique et que \overline{L} est un fibré en droites hermitien sur X , on définit la *hauteur relativement à \overline{L}* d'un élément $x : \text{Spec } \mathcal{O}_K \rightarrow X$ de $X(\mathcal{O}_K)$ comme

$$h_{\overline{L}}(x) = \widehat{\deg} x^* \overline{L}.$$

Si $X = \mathbf{P}^N = \text{Proj } \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_N]$ et si \overline{L} est le fibré hermitien $\overline{\mathcal{O}(1)}$ défini comme $\mathcal{O}(1)$ muni de la métrique standard $\| \cdot \|$ — la fibre de $\mathcal{O}(1)$ en

$P = [x_0 : \cdots : x_N] \in \mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ est la droite $\text{Hom}(\mathbf{C}(x_0, \cdots, x_N), \mathbf{C})$ et par définition

$$\|(z_i)_{0 \leq i \leq N}\| \mapsto \sum_{i=0}^N z_i \bar{x}_i = \left(\sum_{i=0}^N |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad \text{—}$$

alors la hauteur $h_{\overline{\mathcal{O}_K}}$ sur $\mathbf{P}^N(\mathcal{O}_K)$ ($= \mathbf{P}^N(K)$ par propriété) est la hauteur logarithmique usuelle : si $(x_0, \cdots, x_N) \in \mathcal{O}_K^{N+1} \setminus \{0\}$, on a

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}([x_0 : \cdots : x_N]) = \log \frac{\prod_{i=1}^{r_1+r_2} \left(\sum_{j=0}^N |\sigma_i(x_j)|^2 \right)^{\varepsilon_i/2}}{N \left(\sum_{j=0}^N x_j \mathcal{O}_K \right)}.$$

En particulier, si $K = \mathbf{Q}$ et si $(x_0, \cdots, x_N) \in \mathbf{Z}^{N+1} \setminus \{0\}$ et sont premiers entre eux dans leur ensemble, alors

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}([x_0 : \cdots : x_N]) = \log \left(\sum_{j=0}^N x_j^2 \right)^{1/2}.$$

1.3. Le problème de Riemann-Roch

(α) Dans sa version la plus naïve, le problème de Riemann-Roch se pose dans les termes suivants :

Étant donné une variété projective complexe lisse V et un fibré vectoriel holomorphe E sur V , que vaut la dimension de l'espace $H^0(V; E)$ des sections holomorphes de E sur V ?

(β) On sait, au moins depuis Riemann, que cette question ne possède pas de réponse simple à cause des phénomènes “d’irrégularité”, *i.e.* de non-annulation des groupes de cohomologie supérieure. Le “bon problème” est plutôt :

Calculer la caractéristique d’Euler-Poincaré

$$\chi(V; E) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H^i(V; E).$$

Une solution à ce problème en termes d’invariants cohomologiques attachés à V et E est apportée par la formule

$$(1.3.1) \quad \chi(V; E) = \int_V (\text{ch } E \cdot \text{Td } T_V)^{(2n)}$$

où $n = \dim_{\mathbf{C}} V$ et où $\text{Td} T_V$ désigne la classe de Todd du fibré tangent à V et $\text{ch} E$ le caractère de Chern de E . Cette formule, dont diverses variantes dans des cas particuliers où V est une courbe ou une surface remontent à la fin du dix-neuvième siècle, a été établie par Hirzebruch, puis étendue par Washnitzer, puis Grothendieck (cf. par exemple [Fu], chap. 15). Ces derniers auteurs travaillent dans un cadre purement algébrique en utilisant la *théorie de l'intersection* sur V : les fibrés vectoriels E et T_V ont des classes caractéristiques $\text{ch} E$ et $\text{Td} T_V$ dans les *groupes de Chow* $\text{CH}^*(V)_{\mathbf{Q}}$; l'intégration sur la classe fondamentale \int_V des classes de cohomologie possède une contrepartie algébrique, le *degré*

$$\begin{aligned} \text{deg}_V : \text{CH}^n(V) &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ \left[\sum_i n_i P_i \right] &\longmapsto \sum_i n_i, \end{aligned}$$

et la formule de Riemann-Roch peut s'écrire

$$\chi(V; E) = \text{deg}_V (\text{ch} E \cdot \text{Td} T_V)^{(n)}.$$

(γ) Sous des hypothèses convenables sur E (positivité,...), les groupes de cohomologie supérieure $H^i(V; E)$, $i \geq 1$, s'annulent et la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch (1.3.1) permet de calculer $\dim H^0(V; E)$. Il en va en particulier ainsi lorsque E est de la forme $E_0 \otimes \mathcal{L}^n$, où \mathcal{L} est un fibré en droites ample sur V , et que n est suffisamment grand.

1.4. Le problème de Riemann-Roch arithmétique

La théorie de Gillet et Soulé fournit un analogue arithmétique des énoncés géométriques du paragraphe précédent.

(α) Une version arithmétique "naïve" du problème de Riemann-Roch peut être formulée comme suit :

Soit V une variété arithmétique, propre sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$, et soit $\overline{E} = (E, \|\ \|)$ un fibré vectoriel hermitien sur V . Combien existe-t-il de sections s de E sur V telles que, sur $V(\mathbf{C})$, on ait $\|s_{\mathbf{C}}\| \leq 1$?

On observera que le \mathbf{Z} -module $H^0(V; E)$ des sections de E sur V est libre et de type fini, et s'identifie à un réseau dans le \mathbf{Q} -espace vectoriel de

dimension finie

$$H^0(V_{\mathbf{Q}}; E_{\mathbf{Q}}) \simeq H^0(V; E) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}.$$

Les sections cherchées sont les éléments de $H^0(V_{\mathbf{Q}}; E_{\mathbf{Q}})$ qui satisfont à la fois à des conditions d'intégralité (appartenir au réseau $H^0(V; E)$) et à une condition sur leur taille archimédienne, condition qui joue le rôle "aux places à l'infini" des conditions d'intégralité.

(β) On peut deviner une forme plus cohomologique du problème de Riemann-Roch arithmétique grâce à l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions, en réécrivant la formule (1.3.1) lorsque la variété projective lisse V est munie d'un morphisme (plat) $\pi : V \rightarrow C$ vers une courbe projective lisse C .

La caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(V; E)$ peut se calculer *via* le morphisme π : elle coïncide avec la caractéristique $\chi(C; R\pi_* E)$ de l'image directe $R\pi_* E$ de E (dans la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux cohérents sur C). Or la formule de Riemann-Roch sur C s'écrit

$$(1.4.1) \quad \chi(C; R\pi_* E) = \text{rg } R\pi_* E \cdot \int_C (\text{Td } T_C)^{(2)} + \text{deg } R\pi_* E.$$

De plus, le rang $\text{rg } R\pi_* E$ est donné par

$$(1.4.2) \quad \text{rg } R\pi_* E = \chi(\pi^{-1}(y); E)$$

pour tout $y \in C$, et le degré $\text{deg } R\pi_* E$ est aussi le degré du fibré en droites "déterminant de l'image directe" (Grothendieck, Knudsen, Mumford ; cf. [KM])

$$(1.4.3) \quad \lambda(E) := \det R\pi_* E$$

dont la fibre en $y \in C$ est naturellement isomorphe au produit tensoriel

$$\bigotimes_{i \geq 0} [\det H^i(\pi^{-1}(y); E)]^{(-1)^i}.$$

Posons

$$(1.4.4) \quad \text{Td } V/C = \text{Td } T_V \cdot (\pi^* \text{Td } T_C)^{-1}.$$

La relation (1.4.2) et la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch (1.3.1) appliquées aux fibres lisses de π montrent que, si $n = \dim_{\mathbf{C}} V$, on a

$$\operatorname{rg} \mathbf{R}\pi_* E \cdot \int_C (\operatorname{Td} T_C)^{(2)} = \int_V (\operatorname{ch} E \cdot \operatorname{Td} V/C)^{(2n-2)} \pi^* (\operatorname{Td} T_C)^{(2)}$$

La relation (1.4.1), jointe aux égalités

$$\chi(C; \mathbf{R}\pi_* E) = \chi(V; E) \quad \text{et} \quad \operatorname{deg} \mathbf{R}\pi_*(E) = \operatorname{deg} \lambda(E),$$

montre alors que (1.3.1) est équivalente à

$$\operatorname{deg} \lambda(E) = \int_V (\operatorname{ch} E \cdot \operatorname{Td} T_V)^{(2n)} - \int_V (\operatorname{ch} E \cdot \operatorname{Td} V/C)^{(2n-2)} \pi_* (\operatorname{Td} T_C)^{(2)}$$

ou encore, compte tenu de (1.4.4)

$$\operatorname{deg} \lambda(E) = \int_V (\operatorname{ch} E \cdot \operatorname{Td} V/C)^{(2n)}.$$

Une formule analogue est valable, où les classes caractéristiques sont calculées dans le groupe de Chow de V :

$$(1.4.5) \quad \operatorname{deg} \lambda(E) = \operatorname{deg}_V (\operatorname{ch} E \cdot \operatorname{Td} V/C)^{(n)}.$$

Cette formule est en fait un cas particulier du théorème de Riemann-Roch relatif de Grothendieck. Nous venons de montrer que, compte tenu de la formule de Riemann-Roch dans la fibre générique de π , elle est essentiellement équivalente à la formule de Riemann-Roch sur V tout entier.

Dans la situation arithmétique, où V est une variété arithmétique telle que $\pi : V \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ soit propre et où E est un faisceau cohérent localement libre sur V , la construction du déterminant de l'image directe $\det \mathbf{R}\pi_* E$ conserve un sens, et fournit un fibré en droite $\lambda(E)$ sur $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$, *i.e.* un \mathbf{Z} -module libre de rang 1, muni d'un isomorphisme canonique

$$\lambda(E) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \simeq \bigotimes_{i \geq 0} [\det H^i(V_{\mathbf{Q}}, E_{\mathbf{Q}})]^{(-1)^i}.$$

Ce fibré en droites possède un degré arakelovien, pourvu qu'on l'ait muni d'une métrique. Lorsque $V(\mathbf{C})$ est muni d'une métrique kählerienne et $E_{\mathbf{C}}$ d'une structure hermitienne, il y a pour cela une construction naturelle, due à Quillen, qui fait appel à la torsion analytique de Ray et Singer (cf. [Q], [RS]) et que nous décrirons plus loin (§4.1).

La discussion qui précède conduit à poser le problème de Riemann-Roch arithmétique dans les termes suivants :

Calculer le degré arakelovien du fibré en droites $\lambda(E)$ muni de la métrique de Quillen déterminée par une métrique hermitienne $\|\cdot\|_E$ sur $E_{\mathbf{C}}$ et une métrique kählerienne sur $V(\mathbf{C})$.

Une formule pour ce degré a été conjecturée ([GS7]) puis récemment démontrée ([GS10]) par Gillet et Soulé. Leur formule est analogue à la formule de Riemann-Roch géométrique (1.4.5), mais fait appel à la théorie de l'intersection et à la théorie des classes caractéristiques arithmétiques.

2. THÉORIE DE L'INTERSECTION ARITHMÉTIQUE

(cf. [GS5])

2.1. Courants de Green

Soit V une variété analytique complexe.

On note $A^{p,q}(V)$ (resp. $D^{p,q}(V)$) l'espace des formes différentielles C^∞ (resp. des courants) de type (p, q) sur V . La différentiation extérieure d se décompose en $d = d' + d''$, où $d'A^{p,q}(V) \subset A^{p+1,q}(V)$ et $d''A^{p,q}(V) \subset A^{p,q+1}(V)$, et l'on pose

$$d^c = \frac{1}{4\pi i} (d' - d'').$$

On a ainsi

$$dd^c = -d^c d = -\frac{1}{2\pi i} d' d''.$$

On pose

$$\tilde{A}^{p,q}(V) = A^{p,q}(V) / (d'A^{p-1,q}(V) + d''A^{p,q-1}(V))$$

et

$$\tilde{\mathcal{D}}^{p,q}(V) = \mathcal{D}^{p,q}(V) / (d' \mathcal{D}^{p-1,q}(V) + d'' \mathcal{D}^{p,q-1}(V)).$$

L'application $dd^c : \mathcal{D}^{p,q}(V) \rightarrow \mathcal{D}^{p+1,q+1}(V)$ se factorise en une application $dd^c : \tilde{\mathcal{D}}^{p,q}(V) \rightarrow \mathcal{D}^{p+1,q+1}(V)$.

On déduit alors des propriétés classiques de la d - et de la d'' -cohomologie sur une variété complexe :

PROPOSITION 2.1.— 1) *L'application naturelle $\tilde{A}^{p,q}(V) \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}^{p,q}(V)$ est injective.*

2) *Pour tout $\varphi \in \tilde{\mathcal{D}}^{p,q}(V)$*

$$dd^c \varphi \in A^{p+1,q+1}(V) \implies \varphi \in \tilde{A}^{p,q}(V).$$

3) *Lorsque V est compacte et kählerienne, la restriction de l'application canonique $\mathcal{D}^{p,q}(V) \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}^{p,q}(V)$ à l'espace $\mathcal{H}^{p,q}(V)$ des formes harmoniques de type (p, q) sur V est injective, son image est le noyau de dd^c et l'image de dd^c est formée des courants d -exactes dans $\mathcal{D}^{p+1,q+1}(V)$.*

Si Z est une sous-variété analytique complexe de V de codimension p , on note δ_Z le courant d'intégration sur Z , c'est-à-dire le courant dans $\mathcal{D}^{p,p}(V)$ défini par

$$\int_V \delta_Z \alpha = \int_Z \alpha.$$

Le courant d'intégration δ_Z est encore bien défini lorsque Z est un sous-ensemble analytique de V de codimension p , même si le lieu Z_s des points singuliers de Z n'est pas vide. C'est l'unique courant fermé d'ordre 0 dans $\mathcal{D}^{p,p}(V)$, qui prolonge le courant $\delta_{Z \setminus Z_s}$ sur $V \setminus Z_s$. On étend par linéarité la définition de δ_Z à tous les cycles analytiques Z sur V .

Si f est une fonction méromorphe non identiquement nulle sur un sous-ensemble analytique irréductible Z de V de codimension $p - 1$, la fonction $\log |f|^2$ est définie presque partout et est localement L^1 relativement à la classe de mesures sur Z définie par δ_Z ; elle détermine donc un courant $\log |f|^2 \cdot \delta_Z$ dans $\mathcal{D}^{p+1,q+1}(V)$. Ce courant satisfait à l'équation de Poincaré-Lelong

$$(2.1.1) \quad dd^c [\log |f|^2 \cdot \delta_Z] = \delta_{\text{div } f},$$

où $\text{div } f$ désigne le diviseur de f (c'est un cycle analytique de codimension p de V).

On appelle *courant de Green* pour un cycle analytique Z de codimension p sur V tout élément $g \in \tilde{\mathcal{D}}^{p-1, q-1}(V)$ tel que $dd^c g + \delta_Z$ soit une forme C^∞ . On appelle *forme de Green* pour Z tout courant $g \in \mathcal{D}^{p-1, q-1}(V)$ localement L^1 sur V et C^∞ sur le complémentaire du support $|Z|$ de Z tel que $dd^c g + \delta_Z$ soit une forme C^∞ .

La formule de Poincaré-Lelong montre que tout cycle de la forme $\text{div } f$ possède un courant de Green. On peut en fait montrer que *tout cycle algébrique sur une variété quasi-projective complexe lisse possède une forme de Green*.

2.2. Groupes de Chow arithmétiques

Soit X une variété arithmétique.

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on note $X^{(p)}$ l'ensemble des sous-schémas intègres de codimension p et $Z^p(X)$ le groupe des cycles de codimension p sur X , *i. e.* le groupe abélien libre engendré par $X^{(p)}$. On note $k(x)$ le corps résiduel d'un point x de X et, si $x \in X^{(p-1)}$ et $f \in k(x)^*$, on note $\text{div } f$ le diviseur de f ; c'est un élément de $Z^p(X)$.

Le p -ième groupe de Chow de X , $\text{CH}^p(X)$, est le quotient de $Z^p(X)$ par le sous-groupe $R^p(X)$ engendré par les cycles $\text{div } f$, $f \in k(x)^*$, $x \in X^{(p-1)}$.

On note $\mathcal{D}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ (resp. $A^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$) le sous-espace de $\mathcal{D}^{p,p}(X(\mathbf{C}))$ (resp. $A^{p,p}(X(\mathbf{C}))$) formé des courants réels T tels que $F_\infty^* T = (-1)^p T$; on note $\tilde{\mathcal{D}}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ et $\tilde{A}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ leurs images respectives dans $\tilde{\mathcal{D}}^{p,p}(X(\mathbf{C}))$ et $\tilde{A}^{p,p}(X(\mathbf{C}))$. On déduit aisément de la proposition 2.1 un énoncé analogue avec $X_{\mathbf{R}}$ substitué à V .

On appelle *cycle arithmétique de codimension p sur X* tout couple $(Z, g) \in Z^p(X) \oplus \tilde{\mathcal{D}}^{p-1, p-1}(X_{\mathbf{R}})$ tel que g soit un courant de Green pour le cycle analytique $Z(\mathbf{C})$ sur $X(\mathbf{C})$. L'ensemble de ces cycles arithmétiques sera noté $\hat{Z}^p(X)$. Si $x \in X^{(p-1)}$ et $f \in k(x)^*$, on note $\widehat{\text{div}} f$ le cycle arithmétique $(\text{div } f, [-\log |f_{\mathbf{C}}|^2 \cdot \delta_{x(\mathbf{C})}])$.

Le p -ième groupe de Chow arithmétique de X , $\widehat{\text{CH}}^p(X)$, est défini comme le quotient de $\hat{Z}^p(X)$ par le sous-groupe $\hat{R}^p(X)$ engendré par les

éléments $\widehat{\text{div}} f$, $f \in k(x)^*$, $x \in X^{(p-1)}$. On pose $\widehat{\text{CH}}^*(X) = \bigoplus_{p \geq 0} \widehat{\text{CH}}^p(X)$.

On dispose de morphismes canoniques de groupes abéliens

$$\begin{aligned} \zeta : \widehat{\text{CH}}^p(X) &\longrightarrow \text{CH}^p(X) \\ [(Z, g)] &\longmapsto [Z] \\ \omega : \widehat{\text{CH}}^p(X) &\longrightarrow \ker d \cap \ker d^c \quad (\subset A^{p,p}(X_{\mathbf{R}})) \\ [(Z, g)] &\longmapsto \delta_{Z(\mathbf{C})} + dd^c g \\ \alpha : \widetilde{A}^{p-1,p-1}(X) &\longrightarrow \text{CH}^p(X) \\ \eta &\longmapsto [(0, \eta)]. \end{aligned}$$

Rappelons qu'au schéma X sont associés, outre les groupes de Chow $\text{CH}^p(X)$, des groupes $\text{CH}^{p,q}(X)$ définis comme les termes $E_2^{p,-q}$ d'une certaine suite spectrale due à Quillen calculant la K -théorie algébrique de X (cf. par exemple [Gil]). En particulier

$$\text{CH}^{p,p-1}(X) = \frac{\ker (d^{p-1} : \bigoplus_{x \in X^{(p-1)}} k(x)^* \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \mathbf{Z})}{\text{im} (d^{(p-2)} : \bigoplus_{x \in X^{(p-2)}} K_2 k(x) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(p-1)}} k(x)^*)}$$

où d^{p-1} envoie $f \in k(x)^*$ sur $\text{div } f$ et où d^{p-2} est essentiellement le symbole modéré. On définit alors un morphisme de groupes

$$\rho : \text{CH}^{p,p-1}(X) \longrightarrow \widetilde{A}^{p-1,p-1}(X_{\mathbf{R}})$$

en posant

$$\rho([(f^x)_{x \in X^{(p-1)}}]) = - \sum_{x \in X^{p-1}} \log |f_{\mathbf{C}}^x|^2 \delta_{x(\mathbf{C})}.$$

(Cette somme appartient bien à $\widetilde{A}^{p-1,p-1}(X_{\mathbf{R}})$ d'après l'équation de Poincaré-Lelong (2.1.1) et la proposition 2.1.2), puisque $\sum_{x \in X^{p-1}} \text{div } f^x = 0$. Le morphisme ρ est étroitement lié au régulateur de Beilinson (cf. [Be1] et [GS5], §3.5.)

On note enfin $Z^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ le sous-espace de $A^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ constitué des formes fermées, $H^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ son image dans la cohomologie de de Rham de

$X(\mathbf{C})$, h l'application canonique de $Z^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ sur $H^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ et c l'application naturelle des groupes de Chow vers la cohomologie de de Rham

$$c : \text{CH}^p(X) \longrightarrow H^{p,p}(X_{\mathbf{R}}) \\ [Z] \longmapsto [\delta_Z(\mathbf{C})].$$

On a $c \circ \zeta = h \circ \omega$. Lorsque $X_{\mathbf{Q}}$ est projective, $H^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ s'identifie avec l'image de $Z^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ dans $\tilde{A}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ et avec l'espace $\mathcal{H}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ des formes harmoniques (relativement à une structure kählerienne sur $X(\mathbf{C})$) dans $A^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$.

On peut alors décrire le groupe de Chow arithmétique $\widehat{\text{CH}}^*(X)$ au moyen de suites exactes à cinq termes :

THÉORÈME 2.2.— *Le diagramme suivant est une suite exacte*

$$(2.2.1) \quad \text{CH}^{p,p-1}(X) \xrightarrow{\rho} \tilde{A}^{p-1,p-1}(X_{\mathbf{R}}) \xrightarrow{a} \widehat{\text{CH}}^p(X) \xrightarrow{\zeta} \text{CH}^p(X) \longrightarrow 0.$$

Lorsque $X_{\mathbf{Q}}$ est projective, il en va de même du diagramme

$$(2.2.2) \quad \begin{array}{c} \text{CH}^{p,p-1}(X) \xrightarrow{\rho} H^{p-1,p-1}(X_{\mathbf{R}}) \xrightarrow{a} \widehat{\text{CH}}^p(X) \\ \xrightarrow{(\zeta, -\omega)} \text{CH}^p(X) \oplus Z^{p,p}(X_{\mathbf{R}}) \xrightarrow{c+h} H^{p,p}(X_{\mathbf{R}}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

2.3. Fibrés en droites hermitiens et cycles arithmétiques de codimension 1

Soit X une variété arithmétique. L'ensemble $\widehat{\text{Pic}}(X)$ des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels hermitiens de rang 1 est muni d'une structure de groupe définie par le produit tensoriel. L'élément neutre de ce groupe est \mathcal{O}_X muni de la métrique triviale ($\|1\| = 1$) et l'opposé de la classe d'un fibré en droites hermitien (L, h) est celle de L^{-1} muni de la métrique duale de la métrique h .

Rappelons que si $\overline{F} = (F, \|\cdot\|)$ est un fibré en droites hermitien sur une variété analytique complexe V , sa première forme de Chern est l'élément de $A^{1,1}(V)$ définie localement comme

$$(2.3.1) \quad c_1(\overline{F}) = -dd^c \log \|s\|^2$$

où s désigne une section holomorphe locale non nulle de F (le second membre de (2.3.1) est bien indépendant du choix de s , puisque le logarithme du module d'une fonction holomorphe non nulle est pluriharmonique, *i.e.* appartient à $\ker dd^c$).

Soit $\bar{L} = (L, \|\cdot\|)$ un fibré en droites hermitien sur une variété arithmétique X et soit s une section rationnelle non nulle de L . Cette section définit une section méromorphe $s_{\mathbf{C}}$ de $L_{\mathbf{C}}$. La fonction $\log \|s_{\mathbf{C}}\|$ est localement L^1 sur $X(\mathbf{C})$ et définit donc un élément de $\mathcal{D}^{0,0}(X_{\mathbf{R}})$ (*cf.* §2.1). Soient $\operatorname{div}(s) \in Z^1(X)$ le diviseur de s et $c_1(\bar{L}_{\mathbf{C}}) \in A^{1,1}(X_{\mathbf{R}})$ la première forme de Chern de $(\bar{L}_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|)$. Il découle alors de l'équation de Poincaré-Lelong (2.1.1) et de l'égalité (2.3.1) :

$$dd^c \log \|s_{\mathbf{C}}\|^2 = \delta_{\operatorname{div}(s_{\mathbf{C}})} - c_1(\bar{L}_{\mathbf{C}}).$$

Par conséquent, le couple $\widehat{\operatorname{div}}(s) := (\operatorname{div}(s), -\log \|s_{\mathbf{C}}\|^2)$ appartient à $\widehat{Z}^1(X)$.

La proposition suivante étend aux variétés arithmétiques la correspondance classique entre classes d'équivalence linéaire de diviseurs et classes d'isomorphisme de fibrés en droites.

PROPOSITION 2.4.— 1) La classe $\hat{c}_1(\bar{L})$ de $\widehat{\operatorname{div}}(s)$ dans $\widehat{\operatorname{CH}}^1(X)$ ne dépend pas du choix de s .

$$2) \omega(\hat{c}_1(\bar{L})) = c_1(\bar{L}) \quad ; \quad \zeta(\hat{c}_1(\bar{L})) = c_1(L). \quad (1)$$

3) Si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|' = e^{\varphi/2} \|\cdot\|$ sont deux métriques hermitiennes sur le fibré en droites L sur X , alors

$$(2.3.2) \quad \hat{c}_1(L, \|\cdot\|) - \hat{c}_1(L, \|\cdot\|') = a(\varphi).$$

4) La "première classe de Chern arithmétique" \hat{c}_1 détermine un isomorphisme

$$\hat{c}_1 : \widehat{\operatorname{Pic}}(X) \xrightarrow{\sim} \widehat{\operatorname{CH}}^1(X).$$

Compte tenu de cet isomorphisme, la suite exacte (2.2.1) devient, lorsque $p = 1$:

$$\mathcal{O}(X)^* \xrightarrow{\rho} A^{0,0}(X_{\mathbf{R}}) \xrightarrow{a} \widehat{\operatorname{Pic}}(X) \xrightarrow{b} \operatorname{Pic}(X) \longrightarrow 0$$

(1) $c_1(L)$ désigne la première classe de Chern de L dans $\operatorname{CH}^1(X)$, *i.e.* la classe d'équivalence linéaire de $\operatorname{div}(s)$.

où

$$\begin{aligned}\rho(f) &= -\log |f_{\mathbf{C}}|^2 \\ a(g) &= [(\mathcal{O}_X, \|\cdot\|_g)] \quad \text{où } \|1\|_g^2 = e^g \\ b([\overline{L}]) &= [L].\end{aligned}$$

Lorsque X est le spectre de l'anneau \mathcal{O}_K des entiers d'un corps de nombres K , cette suite exacte devient, en notant r_1 et r_2 le nombre de places réelles et complexes de K et $\text{Cl } \mathcal{O}_K$ le groupe des classes d'idéaux de K ,

$$\mathcal{O}_X^* \xrightarrow{\rho} \mathbf{R}^{r_1+r_2} \longrightarrow \widehat{\text{Pic}}(\text{Spec } \mathcal{O}_X) \longrightarrow \text{Cl } \mathcal{O}_K \longrightarrow 0$$

et ρ s'identifie au régulateur de Dirichlet.

2.4. Functorialité et structure multiplicative

Nous pouvons résumer les résultats essentiels de l'article [GS5] en l'énoncé suivant :

THÉORÈME 2.5.— 1) Image inverse. *Tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ entre variétés arithmétiques détermine un morphisme de groupes abéliens $f^* : \widehat{\text{CH}}^*(Y) \rightarrow \widehat{\text{CH}}^*(X)$. Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont des morphismes de variétés arithmétiques, on a $f^* g^* = (g \circ f)^*$; jointe à la functorialité des groupes $\text{CH}^{p,p-1}$, CH^p , etc., cette functorialité fait des suites exactes (2.2.1) et (2.2.2) des suites exactes naturelles.*

2) Image directe par un morphisme propre. *Tout morphisme propre $f : X \rightarrow Y$, de dimension relative d , telle que $f_{\mathbf{C}} : X(\mathbf{C}) \rightarrow Y(\mathbf{C})$ soit lisse, détermine un morphisme de groupes abéliens $f_* : \widehat{\text{CH}}^*(X) \rightarrow \widehat{\text{CH}}^{*-d}(Y)$. La formule de projection est vérifiée :*

$$f_*(x \cdot f^*(y)) = f_*(x) \cdot y.$$

3) Structure multiplicative. *Le \mathbf{Q} -espace vectoriel $\widehat{\text{CH}}^*(X)_{\mathbf{Q}}$ est muni d'une structure d'algèbre unifère graduée et commutative. Cette structure multiplicative est compatible, via ζ , avec la structure multiplicative sur $\text{CH}^*(X)_{\mathbf{Q}}$ définie par l'intersection des classes de cycles algébriques, et, via ω , avec la multiplication extérieure des formes différentielles. Elle est aussi compatible avec la functorialité par image inverse.*

La construction rigoureuse de ces functorialités et de cette structure multiplicative présente de multiples difficultés techniques. Heuristiquement, ces opérations sont définies par les formules suivantes :

- $f^*[(Z, g)] = [(f^{-1}(Z), f_{\mathbf{C}}^* g)]$ si f rencontre Z proprement, *i.e.* si $\text{codim } f^{-1}(|Z|) = \text{codim } |Z|$.
- $f_*[(Z, g)] = [(f_* Z, f_{\mathbf{C}*} g)]$.
- $[(Z_1, g_1)][(Z_2, g_2)] = [Z_1 \cap Z_2, g_1 * g_2]$ si Z_1 et Z_2 se rencontrent proprement, *i.e.* si $\text{codim } |Z_1| \cap |Z_2| = \text{codim } |Z_1| + \text{codim } |Z_2|$. Dans cette formule $Z_1 \cap Z_2$ est le cycle de codimension $\text{codim } |Z_1| + \text{codim } |Z_2|$ supporté par $|Z_1| \cap |Z_2|$, dont les multiplicités sont données par la “formule des Tor” de Serre (*cf.* [Se]), et $g_1 * g_2$ le “*-produit” de g_1 et g_2 , *i.e.* le courant de Green pour $Z_1 \cap Z_2$ “défini” en termes de représentants \check{g}_1 et \check{g}_2 de g_1 et g_2 par

$$(2.4.1) \quad g_1 * g_2 = \check{g}_1 \delta_{Z_2(\mathbf{C})} + \omega(Z_1, g_1) \check{g}_2 \quad \text{mod } (\text{im } d' + \text{im } d'').$$

On a en effet, formellement :

$$(2.4.2) \quad \begin{aligned} dd^c(g_1 * g_2) &= dd^c g_1 \delta_{Z_2(\mathbf{C})} + \omega(Z_1, g_1) dd^c g_2 \\ &= (-\delta_{Z_1(\mathbf{C})} + \omega(Z_1, g_1)) \delta_{Z_2(\mathbf{C})} \\ &\quad + \omega(Z_1, g_1)(-\delta_{Z_2(\mathbf{C})} + \omega(Z_2, g_2)) \\ &= \omega(Z_1, g_1)\omega(Z_2, g_2) - \delta_{Z_1(\mathbf{C}) \cap Z_2(\mathbf{C})}. \end{aligned}$$

Pour donner un sens à ces formules, on est confronté à deux types de difficultés :

- des *difficultés analytiques* : la formule (2.4.1) requiert, pour prendre un sens, que l’on sache définir le produit de courants $\check{g}_1 \delta_{Z_2(\mathbf{C})}$. En fait, Gillet et Soulé montrent que l’on peut choisir comme représentant \check{g}_1 de g_1 une forme de Green telle que l’intégration contre la restriction de \check{g}_1 à la partie lisse de $Z_2(\mathbf{C}) \setminus |Z_1(\mathbf{C})|$ définisse bien un courant et que le calcul (2.4.2) soit valable. Pour cela, ils introduisent une classe de formes de Green ayant de “bonnes” singularités (les formes de Green “de type logarithmique”), au moyen de laquelle ils établissent diverses propriétés du *-produit telles que sa commutativité ou son associativité.

• des *difficultés algèbro-géométriques* : pour définir, par exemple, la structure multiplicative de $\widehat{\text{CH}}^*(X)$ au moyen des formules ci-dessus, il faudrait disposer d'un "lemme de déplacement" qui assurerait que, quitte à remplacer deux cycles sur X par des cycles rationnellement équivalents, on peut supposer qu'ils se rencontrent proprement. Il en va ainsi sur la fibre générique $X_{\mathbf{Q}}$, qui est une variété lisse quasi-projective sur \mathbf{Q} à laquelle on peut appliquer le classique lemme de déplacement de Chow. Malheureusement, pour des cycles de codimension > 1 sur une variété arithmétique, on ne dispose pas d'un tel résultat.

Cette difficulté, qui apparaît déjà si l'on cherche à définir une structure multiplicative sur $\text{CH}^*(X)$, peut être résolue après tensorisation par \mathbf{Q} au moyen d'une construction K -théorique (cf. [S1], [GS4]). Soient Z_1 et Z_2 deux cycles sur X de codimension p_1 et p_2 , se rencontrant proprement dans $X_{\mathbf{Q}}$. Pour tout sous-schéma fermé Y de X , notons $K_0^Y(X)$ la K -théorie de X à support dans Y et $K_0^Y(X)^{(j)}$, $j \in \mathbf{N}$, la partie de $K_0^Y(X)_{\mathbf{Q}}$ de poids j pour les opérations d'Adams. Soit $[Z_i] \in K_0^{|Z_i|}(X)^{(p_i)}$ la classe de Z_i , et soit $Z \in Z^{p_1+p_2}(X)_{\mathbf{Q}}$ un cycle à support dans $|Z_1| \cap |Z_2|$, dont l'image dans $K_0^{|Z_1| \cap |Z_2|}(X)^{(p_1+p_2)}$ coïncide avec la composante de poids $p_1 + p_2$ du produit $[Z_1] \cdot [Z_2]$. La classe du cycle Z dans $\text{CH}^{p_1+p_2}(X)_{\mathbf{Q}}$ définit alors le "produit d'intersection" des classes dans $\text{CH}^*(X)$ de Z_1 et Z_2 , et si g_1 et g_2 sont des courants de Green pour $Z_1(\mathbf{C})$ et $Z_2(\mathbf{C})$, le cycle arithmétique $(Z, g_1 * g_2)$ définit le produit dans $\text{CH}^*(X)_{\mathbf{Q}}$ des classes dans $\text{CH}^*(X)$ de (Z_1, g_1) et (Z_2, g_2) .

Signalons que l'on peut définir dans $\widehat{\text{CH}}^*(X)$ le produit de deux éléments de $\widehat{\text{CH}}^*(X)$, sans tensoriser par \mathbf{Q} , lorsque l'un d'entre eux est de degré 1 ou lorsque X est un schéma lisse sur le spectre d'un anneau d'entiers de corps de nombres (en utilisant les constructions de Fulton [Fu]).

On notera enfin les formules :

$$(2.4.3) \quad a(\eta)C = a(\eta\omega(C))$$

$$(2.4.4) \quad a(\eta)a(\eta') = a(dd^c \eta \cdot \eta')$$

$$= 0 \quad \text{si } \eta \text{ ou } \eta' \text{ est } d\text{-, } d'\text{- ou } d''\text{-fermé.}$$

2.5. Degré arithmétique et hauteur des cycles

Lorsque $K = \mathbf{Q}$, la suite exacte (2.3.3) devient l'isomorphisme

$$a : \mathbf{R} \xrightarrow{\sim} \widehat{\text{CH}}^1(\text{Spec } \mathbf{Z}).$$

On vérifie immédiatement que, compte tenu de l'identification

$$\widehat{\text{CH}}^1(\text{Spec } \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\text{Pic}}(\text{Spec } \mathbf{Z}),$$

l'isomorphisme inverse de $2a$ associe à la classe d'un fibré en droites hermitien \bar{L} sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$ le degré arakelovien $\widehat{\text{deg}} \bar{L}$. On le notera

$$\widehat{\text{deg}} : \widehat{\text{CH}}^1(\text{Spec } \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}.$$

Soit X une variété arithmétique tel que le morphisme $f : X \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}$ soit *propre*, et soit d la dimension relative de f (X est donc de dimension de Krull "absolue" $d + 1$). On peut composer le degré arakelovien $\widehat{\text{deg}}$ avec l'application

$$f_* : \widehat{\text{CH}}^{d+1}(X) \longrightarrow \widehat{\text{CH}}^1(\text{Spec } \mathbf{Z}).$$

On obtient ainsi le *degré arithmétique*

$$\widehat{\text{deg}}_X = \widehat{\text{deg}} \circ f_* : \widehat{\text{CH}}^{d+1}(X) \longrightarrow \mathbf{R},$$

qui est l'analogie arithmétique de l'application

$$\text{deg}_V : \text{CH}^d(V) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

définie pour toute variété propre de dimension d sur un corps.

Lorsque X est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres K , deg_X coïncide encore avec le degré d'Arakelov des fibrés en droites hermitiens sur $\text{Spec } \mathcal{O}_K$. En général, un cycle arithmétique de codimension $d + 1$ sur X est de la forme $(\sum_{i=1}^N n_i P_i, g)$, où les P_i sont des points fermés de X et où $g \in \widetilde{A}^{d,d}(X_{\mathbf{R}})$, et son degré arithmétique est donné par

$$\widehat{\text{deg}}_X \left[\left(\sum_{i=1}^N n_i P_i, g \right) \right] = \sum_{i=1}^N n_i \log \# k(P_i) + \frac{1}{2} \int_{X(\mathbf{C})} g.$$

Soit maintenant \bar{L} un fibré en droites hermitien sur X . Si Y est une sous-variété arithmétique de X , i.e. une variété arithmétique Y munie d'une immersion fermée $i : Y \hookrightarrow X$, on pose

$$h_{\bar{L}}(Y) = \widehat{\deg}_Y i^* \hat{c}_1(\bar{L})^{d'+1},$$

où d' désigne la dimension relative de Y sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$. On généralise ainsi la notion de hauteur d'un point de $X(\mathbf{Z}) (= X(\mathbf{Q}))$ relativement à \bar{L} . Cette définition peut être étendue à des cycles Y dans X qui ne sont pas réguliers (cf. §2.5). Si Y est le diviseur d'une section rationnelle non identiquement nulle s de L , alors il découle des définitions de $\widehat{\deg}_X$ et \hat{c}_1 :

$$h_{\bar{L}}(Y) = h_{\bar{L}}(X) + \int_{X(\mathbf{C})} \log \|s_{\mathbf{C}}\| c_1(\bar{L}_{\mathbf{C}})^d.$$

Si l'on applique cette identité à $X = \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^N$ et à $\bar{L} = \bar{\mathcal{O}}(1)$ (cf. 1.2), on obtient, en notant ω_{FS} la forme de Fubini-Study $c_1(\bar{\mathcal{O}}(1)_{\mathbf{C}}) = dd^c \log \sum_{i=0}^N |z_i|^2$ sur $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$:

$$\begin{aligned} h_{\bar{\mathcal{O}}(1)}(\mathbf{P}^N) - h_{\bar{\mathcal{O}}(1)}(\mathbf{P}^{N-1}) &= \int_{\mathbf{P}^N(\mathbf{C})} \log \frac{|z_0|}{(|z_0|^2 + \cdots + |z_N|^2)^{1/2}} \omega_{FS}^N \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} \right) \end{aligned}$$

et donc, par récurrence, que la hauteur de \mathbf{P}^N relativement à $\bar{\mathcal{O}}(1)$ est égale au N -ième nombre de Stoll (cf. [GS6] et [St]) :

$$h_{\bar{\mathcal{O}}(1)}(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^N) = \sigma_N := \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \sum_{j=1}^p \frac{1}{j}.$$

On obtient aussi que si $P \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_N]$ est un polynôme homogène non nul de degré d et si Y est le cycle sur $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^N$ définie par $P = 0$, alors

$$h_{\bar{\mathcal{O}}(1)}(Y) = h_{\bar{\mathcal{O}}(1)}(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^N) + \int_{\mathbf{P}^N(\mathbf{C})} \log \frac{|P(z_0, \dots, z_N)|}{(\sum_{i=0}^N |z_i|^2)^{d/2}} \omega_{FS}^N.$$

La hauteur $h_{\overline{\mathcal{O}}(1)}$ des variétés projectives intervient dans [Fa2] ainsi qu'en théorie de la transcendance (cf. [S3], [Ph]).

2.6. Variétés d'Arakelov

Lorsque la fibre générique d'une variété arithmétique X est projective, il est naturel d'utiliser la théorie des formes harmoniques dans l'étude des courants de Green sur $X(\mathbf{C})$. C'est ce que faisait Arakelov dans son travail sur les surfaces arithmétiques. Plus généralement, cela conduit à poser :

DÉFINITION 2.6. — *Une variété d'Arakelov est un couple $\overline{X} = (X, \omega)$ formé d'une variété arithmétique X de fibre générique $X_{\mathbf{Q}}$ projective et d'une forme de Kähler ω sur $X(\mathbf{C})$ telle que $F_{\infty}^* \omega = -\omega$.*

(Cette condition exprime l'invariance sous F_{∞} de la métrique riemannienne définie par ω).

Soit donc \overline{X} une variété d'Arakelov. La projection harmonique de $A^{p,p}(X(\mathbf{C}))$ vers $\mathcal{H}^{p,p}(X(\mathbf{C}))$ se factorise en une application de $\tilde{A}^{p,p}(X(\mathbf{C}))$ vers $\mathcal{H}^{p,p}(X(\mathbf{C}))$. Nous noterons $\tilde{\mathcal{H}}^{\perp p,p}(X_{\mathbf{R}})$ l'intersection avec $\tilde{A}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ du noyau de cette application. On peut alors définir le *p-ième groupe de Chow-Arakelov de \overline{X}* comme le sous-groupe

$$\mathrm{CH}^p(\overline{X}) = \omega^{-1}(\mathcal{H}^{p,p}(X_{\mathbf{R}}))$$

de $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$. C'est en fait un facteur direct de $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$. On déduit en effet du point 3) de la proposition 2.1 que l'on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{CH}^p(\overline{X}) \oplus \tilde{\mathcal{H}}^{\perp p-1,p-1}(X_{\mathbf{R}}) &\xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{CH}}^p(X) \\ c \oplus \eta &\longmapsto c + a(\eta). \end{aligned}$$

La suite exacte (2.2.1) peut se réécrire sous la forme

$$\mathrm{CH}^{p,p-1}(X) \longrightarrow \mathcal{H}^{p-1,p-1}(X_{\mathbf{R}}) \xrightarrow{a} \mathrm{CH}^p(\overline{X}) \xrightarrow{\zeta} \mathrm{CH}^p(X) \longrightarrow 0.$$

On pose $\mathrm{CH}^*(\overline{X}) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathrm{CH}^p(\overline{X})$. Lorsque $\bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{H}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ est une sous-algèbre de $\bigoplus_{p \geq 0} A^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$, par exemple si $X(\mathbf{C})$ est une courbe, une

variété abélienne ou un espace hermitien symétrique (tel qu'un espace projectif, ou une grassmannienne), alors $\text{CH}^*(\overline{X})_{\mathbf{Q}}$ est une sous-algèbre de $\widehat{\text{CH}}^*(X)_{\mathbf{Q}}$. On prendra garde que ce n'est pas le cas en général — par exemple pour les espaces de drapeaux complets. Cette difficulté conduit à considérer le “gros groupe” $\widehat{\text{CH}}^*(X)$ plutôt que se limiter au groupe $\text{CH}^*(\overline{X})$.

Soit Y un sous-schéma fermé de X , dont le support est de codimension $\geq p$, et soit $[Y] \in Z^p(X)$ le cycle qui lui est associé. Soit $g_Y \in \mathcal{H}^{p-1, p-1}(X_{\mathbf{R}})$ l'unique courant de Green pour $\delta_{[Y](\mathbf{C})}$ de projection harmonique nulle et tel que

$$dd^c g_Y + \delta_{[Y](\mathbf{C})} \in \mathcal{H}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$$

(cf. Prop. 2.1, 3)). On définit la *classe fondamentale* $[Y]_A$ de Y dans $\text{CH}^p(\overline{X})$ comme la classe du cycle arithmétique $([Y], g_Y)$ (cf. [Fa2]).

Si \overline{L} est un fibré en droites hermitiens sur X tel que la forme $c_1(\overline{L}_{\mathbf{C}})$ et ses puissances soient harmoniques sur $X(\mathbf{C})$, on peut définir la hauteur relativement à \overline{L} de Y comme

$$h_{\overline{L}}(Y) = \widehat{\text{deg}}_X([Y]_A \cdot \widehat{c}_1(\overline{L})^p),$$

et l'on étend ainsi la définition du §2.4.

Exemples (cf. [GS6], I).— 1) Soit $\overline{\mathbf{P}}^N$ la variété d'Arakelov obtenue en munissant l'espace projectif $\mathbf{P}^N = \text{Proj } \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_N]$ de la forme de Fubini-Study ω_{FS} . Notons \mathbf{P}^k le sous-schéma intègre de \mathbf{P}^N défini par

$$X_0 = \dots = X_{N-k-1} = 0.$$

On a alors des isomorphismes

$$\begin{aligned} i_0 : \text{CH}^0(\overline{\mathbf{P}}^N) &\simeq \mathbf{Z} \\ i_p : \text{CH}^p(\overline{\mathbf{P}}^N) &\simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{R} \quad \text{si } 1 \leq p \leq N \\ i_{N+1} : \text{CH}^{N+1}(\overline{\mathbf{P}}^N) &\simeq \mathbf{R} \end{aligned}$$

définis par

$$\begin{aligned} i_0^{-1}(n) &= [(X, 0)] = n [\mathbf{P}^N]_A \\ i_p^{-1}(n \oplus \lambda) &= n [\mathbf{P}^{N-p}]_A + a(\lambda \omega_{FS}^{p-1}) \\ i_{N+1} &= \widehat{\text{deg}}_{\mathbf{P}^N}. \end{aligned}$$

On a de plus, avec les notations de la fin du §2.5, si $k = 0, \dots, N$:

$$[\mathbf{P}^k]_A = \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{O}}(1))^{N-k} - a(2(\sigma_N - \sigma_k) \omega^{N-k-1}). \quad (0 \leq k \leq N)$$

Ces relations, jointes aux identités (2.4.3), (2.4.4) et $\omega([\mathbf{P}^k]_A) = \omega_{FS}^{N-k}$, déterminent complètement la structure multiplicative de $\text{CH}^*(\overline{\mathbf{P}}^N)$.

2) Plus généralement, soit X une grassmannienne sur \mathbf{Z} et soit K un corps de nombres. Les anneaux $\text{CH}^*(X)$, $\text{CH}^*(X_{\mathbf{Q}})$, et $H^*(X(\mathbf{C}); \mathbf{Z})$ sont canoniquement isomorphes : ils coïncident avec l'anneau de polynômes tronqués engendré par les classes de Chern du fibré quotient canonique sur X . Notons le $M^*(X)$.

L'espace $X(\mathbf{C})$ possède une structure d'espace hermitien symétrique naturel, qui fait de X ainsi que de $X_{\mathcal{O}_K} := X \otimes_{\mathbf{Z}} \text{Spec } \mathcal{O}_K$, une variété d'Arakelov, et l'on a un isomorphisme de groupes abéliens gradués :

$$\text{CH}^*(\overline{X}_{\mathcal{O}_K}) \simeq M^*(X) \otimes \widehat{\text{CH}}^*(\text{Spec } \mathcal{O}_K).$$

3. CLASSES CARACTÉRISTIQUES ARITHMÉTIQUES

3.1. Classes de Bott-Chern

Soit V une variété analytique complexe (lisse). Pour tout fibré vectoriel hermitien $\overline{E} = (E, h)$ sur V , il existe une unique connexion $\nabla_{\overline{E}}$ sur E qui est unitaire et dont la composante antiholomorphe $\nabla_{\overline{E}}^{0,1}$ coïncide avec l'opérateur de Cauchy-Riemann $\overline{\partial}_E$ de E (cf. [BC] Prop. 3.2, ou [GH] Lemma p. 73). On notera encore $K_{\overline{E}}$ la courbure $\nabla_{\overline{E}}^2$ de cette connexion ; c'est une $(1, 1)$ -forme sur V à valeurs dans le fibré $\text{End}(E)$ des endomorphismes de E .

Soit $\varphi \in \mathbf{Q}[[T_1, \dots, T_n]]$ une série formelle symétrique en n variables, et pour tout $k \geq 0$, soit $\varphi^{(k)}$ sa composante homogène de degré k . On notera $\varphi^{(k)}$ l'unique application polynômiale sur les matrices complexes $n \times n$ qui soit invariante par conjugaison et qui vérifie

$$\varphi^{(k)}(M) = \varphi^{(k)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

si M est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Plus généralement, pour toute \mathbf{Q} -algèbre commutative A , cette application polynômiale "s'étend" en une application

$$\varphi^{(k)} : M_n(A) \rightarrow A.$$

Pour tout fibré vectoriel hermitien \bar{E} sur V , de rang n , on définit

$$\varphi(\bar{E}) := \sum_{k \geq 0} \varphi^{(k)} \left(-\frac{1}{2\pi i} K_{\bar{E}} \right) \in \bigoplus_{k \geq 0} A^{k,k}(V)$$

en identifiant localement $\text{End}(E)$ à $M_n(\mathbf{C})$, au moyen d'un repère C^∞ de E , et en appliquant la discussion précédente à l'algèbre des formes différentielles de degré pair sur V . Notons $c_i(E)$ ($\in H^{2i}(V; \mathbf{Z})$) la i -ième classe de Chern de E et σ_i la i -ième fonction symétrique élémentaire de T_1, \dots, T_n . La théorie de Chern-Weil établit que $\varphi(\bar{E})$ est une forme fermée et que si $\varphi = \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, où $\psi \in \mathbf{Q}[[X_1, \dots, X_n]]$, alors la classe de cohomologie de de Rham de $\varphi(\bar{E})$ coïncide avec la classe caractéristique

$$\psi(c_1(E), \dots, c_n(E)) \in \bigoplus_{k \geq 0} H^{2k}(V; \mathbf{Q}) \quad (\subset \bigoplus_{k \geq 0} H^{2k}(V; \mathbf{R})).$$

En particulier, la classe de cohomologie de $\varphi(\bar{E})$ ne dépend pas de la métrique h . Plus généralement, si

$$\bar{\mathcal{E}} : 0 \rightarrow \bar{S} \rightarrow \bar{E} \rightarrow \bar{Q} \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte de fibrés vectoriels hermitiens sur V — c'est-à-dire la donnée de trois fibrés vectoriels hermitiens \bar{S} , \bar{E} et \bar{Q} sur V et d'une suite exacte courte de fibrés vectoriels holomorphes

$$0 \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow Q \rightarrow 0$$

reliant les fibrés vectoriels sous-jacents — et si E est de rang n , alors les formes différentielles $\varphi(\overline{S} \oplus \overline{Q})$ et $\varphi(\overline{E})$ sont cohomologues. Dans leur travail sur la théorie de Nevanlinna, Bott et Chern ont montré qu'elles diffèrent en fait par une forme dans l'image de l'opérateur dd^c (cf. [BC]). Plus précisément, on peut montrer ([BGS1], Theorem 1.2.9, [GS6] ; voir aussi [Do]) :

THÉORÈME 3.1.— *Soit $\varphi \in \mathbf{Q}[[T_1, \dots, T_n]]$ une série formelle symétrique. Il est possible, de façon unique, d'associer à toute suite exacte courte*

$$\overline{\mathcal{E}} : 0 \longrightarrow \overline{S} \xrightarrow{i} \overline{E} \xrightarrow{p} \overline{Q} \longrightarrow 0$$

de fibrés vectoriels hermitiens sur une variété analytique complexe V , telle que $\text{rg } E = n$, une forme $\tilde{\varphi}(\overline{\mathcal{E}}) \in \tilde{A}(V)$ de sorte que

i) $dd^c \tilde{\varphi}(\overline{\mathcal{E}}) = \varphi(\overline{S} \oplus \overline{Q}) - \varphi(\overline{E})$

ii) *pour toute application holomorphe $f : W \rightarrow V$ entre variétés analytiques complexes*

$$\tilde{\varphi}(f^*(\overline{\mathcal{E}})) = f^*(\tilde{\varphi}(\overline{\mathcal{E}}))$$

iii) *si $\overline{\mathcal{E}}$ est scindée, i.e. si $\overline{\mathcal{E}}$ est de la forme*

$$0 \rightarrow \overline{S} \xrightarrow{i} \overline{S} \oplus \overline{Q} \xrightarrow{p} \overline{Q} \rightarrow 0$$

où $i(x) = x \oplus 0$, $p(x \oplus y) = y$, alors $\tilde{\varphi}(\overline{\mathcal{E}}) = 0$.

Indiquons une construction de la classe $\tilde{\varphi}$. Soit $\mathcal{O}(1)$ le fibré en droites de degré 1 sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, soit σ une section holomorphe de $\mathcal{O}(1)$ s'annulant seulement à l'infini et soient p_1 et p_2 les projections de $X \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, respectivement sur X et sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. On notera encore S, E, Q et $\mathcal{O}(1)$ les fibrés p_1^*S, p_1^*E, p_1^*Q et $p_2^*\mathcal{O}(1)$ sur $X \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Sur $X \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, considérons le fibré

$$S(1) = S \otimes \mathcal{O}(1)$$

et le morphisme

$$\text{id} \otimes \sigma : S \longrightarrow S(1).$$

Le morphisme injectif

$$i \oplus (\text{id} \otimes \sigma) : S \longrightarrow E \otimes S(1)$$

permet de construire le fibré quotient $\tilde{E} = E \otimes S(1)/S$. Le noyau de la projection $\tilde{E} \rightarrow E/S = Q$ s'identifie à $S(1)$ et la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow S(1) \longrightarrow \tilde{E} \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

lorsqu'on la restreint à $X \times \{\infty\}$, s'identifie à

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow S \oplus Q \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

Soit \tilde{h} une métrique hermitienne sur \tilde{E} telle que les isomorphismes

$$\tilde{E}|_{X \times \{0\}} \simeq E \quad \text{et} \quad \tilde{E}|_{X \times \{\infty\}} \simeq S \oplus Q$$

soient des isométries. On déduit facilement de l'équation de Poincaré-Lelong que

$$\tilde{\varphi}(\tilde{E}) := - \int_{pr_1} \varphi(\tilde{E}, \tilde{h}) \log |z|^2$$

satisfait aux conditions i), ii) et iii).

On appliquera ces constructions, outre aux fonctions symétriques $c_i = \sigma_i(T_1, \dots, T_n)$, à la classe de Chern totale $c = \sum_{i \geq 0} c_i$, au caractère de Chern

$$\text{ch}(T_1, \dots, T_n) = \sum_{i=1}^n e^{T_i}$$

et à la classe de Todd

$$\text{Td}(T_1, \dots, T_n) = \prod_{i=1}^n \frac{T_i}{1 - e^{-T_i}}.$$

3.2. Classes caractéristiques arithmétiques

Le résultat principal de [GS6], I, est le théorème suivant qui étend aux fibrés hermitiens de rang > 1 les constructions du §2.3, en montrant que l'on dispose d'une théorie des classes caractéristiques pour les fibrés vectoriels hermitiens sur les variétés arithmétiques compatible avec la théorie des classes caractéristiques sur les schémas (cf. [S1], [GS4]) et avec la théorie de Chern-Weil :

THÉORÈME 3.2.— À tout fibré vectoriel hermitien \overline{E} de rang n sur une variété arithmétique X et à toute série symétrique $\varphi \in \mathbf{Q}[[T_1, \dots, T_n]]$, on peut associer une classe caractéristique $\hat{\varphi}(\overline{E}) \in \widehat{\text{CH}}^*(X)_{\mathbf{Q}}$ de manière à satisfaire aux conditions suivantes :

I. *Fonctorialité.* Si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme entre variétés arithmétiques et si \overline{E} est un fibré vectoriel hermitien sur X , alors

$$f^*(\hat{\varphi}(\overline{E})) = \hat{\varphi}(f^*(\overline{E})).$$

II. *Normalisation.* Si \overline{E} est la somme directe orthogonale de fibrés en droites $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_n$, alors

$$\hat{\varphi}(\overline{E}) = \varphi(\hat{c}_1(\overline{L}_1), \dots, \hat{c}_1(\overline{L}_n)).$$

III. *Tensorisation par un fibré en droites.* Posons

$$\varphi(T_1 + T, \dots, T_n + T) = \sum_{i \geq 0} \varphi_i(T_1, \dots, T_n) T^i.$$

Si \overline{E} (resp. \overline{L}) est un fibré vectoriel hermitien (resp. un fibré en droites hermitien) sur X , alors

$$\hat{\varphi}(\overline{E} \oplus \overline{L}) = \sum_i \hat{\varphi}_i(\overline{E}) \hat{c}_1(\overline{L})^i.$$

IV. *Compatibilité aux classes caractéristiques.* Pour tout fibré vectoriel hermitien \overline{E} sur X , on a, si $\varphi = \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, où $\psi \in \mathbf{Q}[[X_1, \dots, X_n]]$

$$\text{IV.a} \quad \omega(\hat{\varphi}(\overline{E})) = \varphi(\overline{E}_{\mathbf{C}}) \quad \text{dans } \bigoplus_{p \geq 0} A^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$$

$$\text{IV.b} \quad \zeta(\hat{\varphi}(\overline{E})) = \psi(c_1(\overline{E}), \dots, c_n(\overline{E})) \quad \text{dans } \text{CH}^*(X)_{\mathbf{Q}}.$$

V. *Compatibilité aux suites exactes courtes.* Pour toute suite exacte courte

$$\overline{\mathcal{E}} : 0 \rightarrow \overline{S} \rightarrow \overline{E} \rightarrow \overline{Q} \rightarrow 0$$

de fibrés vectoriels hermitiens sur X , on a

$$\hat{\varphi}(\overline{S} \oplus \overline{Q}) - \hat{\varphi}(\overline{E}) = a(\tilde{\varphi}(\overline{\mathcal{E}})).$$

De plus, les propriétés I, II, III et IV.a caractérisent cette construction.

La démonstration de ce théorème fait appel au calcul des groupes de Chow arithmétiques des grassmanniennes (cf. §2.5) et à un principe de scindage qui en découle (cf. [GS6], §3 et §4). On pourra consulter aussi [E1], [E2] pour une construction fondée sur la considération du fibré en projectif \mathbf{P}_E .

On dispose ainsi, dans le cadre arithmétique, de classes de Chern $\hat{c}_p(\bar{E})$ et $\hat{c}(\bar{E}) = \sum_{p \geq 0} \hat{c}_p(\bar{E})$, du caractère de Chern $\hat{\text{ch}}(\bar{E})$ et de la classe de Todd $\widehat{\text{Td}}(\bar{E})$. Elles satisfont aux formules usuelles (cf. [GS6], I, theorem 4.8 et §4.9) :

THÉORÈME 3.3.— Si \bar{E} et \bar{F} sont deux fibrés vectoriels hermitiens sur une variété arithmétique X , on a

$$\begin{aligned} \hat{c}(\bar{E} \oplus \bar{F}) &= \hat{c}(\bar{E}) \hat{c}(\bar{F}) & \hat{\text{ch}}(\bar{E} \oplus \bar{F}) &= \hat{\text{ch}}(\bar{E}) + \hat{\text{ch}}(\bar{F}) \\ \widehat{\text{Td}}(\bar{E} \otimes \bar{F}) &= \widehat{\text{Td}}(\bar{E}) \widehat{\text{Td}}(\bar{F}) & \hat{\text{ch}}(\bar{E} \otimes \bar{F}) &= \hat{\text{ch}}(\bar{E}) \hat{\text{ch}}(\bar{F}) \\ \hat{\text{ch}}^{(1)}(\bar{E}) &= \hat{c}_1(\bar{E}) = \hat{c}_1(\det \bar{E}) \in \widehat{\text{CH}}^1(X). \end{aligned}$$

De plus, si $p > \text{rg } E$, alors $\hat{c}_p(\bar{E}) = 0$.

Exemple.— Soit Q le fibré quotient universel sur $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^N$. C'est un fibré de rang N , que l'on munit de la métrique hermitienne faisant de l'application $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N(\mathbf{C})} \otimes \mathbf{C}^{N+1} \rightarrow Q_{\mathbf{C}}$ une isométrie partielle lorsque \mathbf{C}^{N+1} est munie de la métrique hermitienne usuelle. On a alors

$$\begin{aligned} \hat{c}_p(\bar{Q}) &= [\mathbf{P}^{N-p}]_A + a(2(\sigma_N - \sigma_{p-1} - \sigma_{N-p}) \omega_{FS}^{p-1}) \\ &= \hat{c}_1(\bar{\mathcal{O}}(1))^p - a(2\sigma_{p-1} \omega_{FS}^{p-1}). \end{aligned}$$

3.3. K -théorie

Soit X une variété arithmétique.

On note $\widehat{K}_0(X)$ le groupe abélien engendré par les couples (\bar{E}, η) , où \bar{E} est un fibré vectoriel hermitien sur X et où $\eta \in \widetilde{A}(X_{\mathbf{R}})$, soumis aux

relations suivantes : pour tout $\zeta, \eta \in \tilde{A}(X_{\mathbf{R}})$, et toute suite exacte courte de fibrés vectoriels hermitiens sur X

$$\bar{\mathcal{E}} : 0 \rightarrow \bar{S} \rightarrow \bar{E} \rightarrow \bar{Q} \rightarrow 0,$$

on impose

$$(\bar{S}, \zeta) \oplus (\bar{Q}, \eta) = (\bar{E}, \zeta + \eta + \widehat{\text{ch}}(\bar{\mathcal{E}})).$$

On peut décrire le groupe $\widehat{K}_0(X)$ au moyen du régulateur de Beilinson (cf. [Bel])

$$\rho : K_1(X) \longrightarrow \bigoplus_{p \geq 1} H_{\mathbf{Q}}^{2p-1}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(p)) \subset \tilde{A}(X_{\mathbf{R}}).$$

THÉORÈME 3.4 ([GS2], [GS6] II, [De]).— *On dispose de la suite exacte naturelle*

$$K_1(X) \xrightarrow{2\rho} \tilde{A}(X_{\mathbf{R}}) \xrightarrow{\alpha} \widehat{K}_0(X) \xrightarrow{\beta} K_0(X) \longrightarrow 0$$

où α et β sont définis par $\alpha(\eta) = [(0, \eta)]$ et $\beta([(E, \eta)]) = [E]$.

Il existe enfin dans le cadre arithmétique un caractère de Chern qui établit un isomorphisme entre K -théorie et groupes de Chow rationnels :

THÉORÈME ([GS2], [GS6] II).— *On définit un isomorphisme de \mathbf{Q} -espaces vectoriels*

$$\widehat{\text{ch}} : \widehat{K}_0(X)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \widehat{\text{CH}}^*(X)_{\mathbf{Q}}$$

en posant, pour chaque générateur (E, η) de $\widehat{K}_0(X)$,

$$\widehat{\text{ch}}([(E, \eta)]) = \widehat{\text{ch}}(E) + a(\eta).$$

4. LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH ARITHMÉTIQUE

4.1. La métrique de Quillen

Soit V une variété analytique complexe compacte de dimension n , munie d'une forme de Kähler ω , et soit $\bar{E} = (E, \|\cdot\|_E)$ un fibré vectoriel hermitien sur V .

La forme ω détermine un produit scalaire hermitien g sur le fibré tangent holomorphe T_V de V , et donc sur les fibrés des formes différentielles complexes sur V , ainsi qu'une forme volume μ sur V , définis par

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha, \beta=1}^n g \left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial z_\beta} \right) dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$$

et

$$\mu = \frac{1}{n!} \omega^n.$$

On en déduit, par produit tensoriel, des produits scalaires hermitiens \langle, \rangle sur les fibrés de formes différentielles à coefficients dans E , puis des "produits scalaires L^2 " sur chacun des espaces $A^{0,i}(V; E)$ de formes différentielles de type $(0, i)$ à coefficients dans E , C^∞ sur V , définis par

$$\langle s_1, s_2 \rangle_{L^2} = \int_V \langle s_1(x), s_2(x) \rangle \mu(x).$$

Le théorème de Dolbeault fournit un isomorphisme canonique (au signe près) entre le i -ème groupe de cohomologie $H^i(V; E)$ et le i -ième groupe de cohomologie du complexe $(A^{0,i}(V; E), \bar{\partial}_E)$. La théorie de Hodge identifie ce groupe de cohomologie au noyau de l'opérateur

$$\Delta_{E,i} : A^{0,i}(V; E) \longrightarrow A^{0,i}(V; E)$$

où $\Delta_{E,i}$ est défini comme la restriction à $A^{0,i}(V; E)$ de

$$\Delta_E = \bar{\partial}_E \bar{\partial}_E^* + \bar{\partial}_E^* \bar{\partial}_E$$

où $\bar{\partial}_E^*$ désigne l'adjoint de $\bar{\partial}_E$, relativement aux produits scalaires L^2 .

En particulier, les produits scalaires L^2 sur les espaces $A^{0,i}(V; E)$ déterminent par restriction des produits scalaires hermitiens sur les groupes de cohomologie $H^i(V; E)$, puis, par passage aux puissances extérieures et aux produits tensoriels, un produit scalaire hermitien sur le déterminant de la cohomologie de E

$$\lambda(E) = \bigotimes_{i=0}^n [\det H^i(V; E)]^{(-1)^i}.$$

Chacun des opérateurs $\Delta_{E,i}$ est positif et elliptique. Soit $(\lambda_{i,p})_{p \in \mathbb{N}}$ la suite croissante de ses valeurs propres, répétées suivant leur multiplicité et soit

$$\zeta_i(s) = \sum_{\lambda_{i,p} \neq 0} \lambda_{i,p}^{-s}$$

la série de Dirichlet qu'elle définit. On peut montrer qu'elle converge si $\operatorname{Re} s > n$ et qu'elle se prolonge en une fonction méromorphe ζ_i sur tout le plan, qui est holomorphe au voisinage de 0. La torsion analytique de Ray et Singer du fibré hermitien \overline{E} est définie comme

$$\tau(V, \omega, \overline{E}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i i \zeta'_i(0)$$

(cf. [RS]). Enfin, on définit la métrique de Quillen $\| \cdot \|_Q$ sur $\lambda(E)$ par

$$(4.1.3) \quad \| \cdot \|_Q^2 = e^{-\tau(V, \omega, \overline{E})} \| \cdot \|_{L^2}^2 .$$

La définition de la métrique de Quillen peut être motivée par les remarques suivantes, concernant un “modèle en dimension finie” de la théorie de Hodge.

Soit

$$0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{b} E^1 \xrightarrow{b} \dots E^n \longrightarrow 0$$

un complexe d'espaces vectoriels complexes de dimension finie. Si H^i désigne le i -ième groupe de cohomologie de ce complexe, on dispose d'un isomorphisme canonique (au signe près)

$$I : \bigotimes_{i \geq 0} (\det H^i)^{(-1)^i} \simeq \bigotimes_{i \geq 0} (\det E^i)^{(-1)^i} .$$

Supposons de plus les E^i munis de produits scalaires hermitiens. Ces derniers déterminent par passage aux puissances extérieures et aux produits tensoriels une norme sur $\bigotimes_{i=0}^n (\det E^i)^{(-1)^i}$. Par ailleurs, ils permettent de former l'adjoint b^* de b , puis l'opérateur $\Delta = bb^* + b^*b$. Le noyau \mathcal{H}^i de $\Delta|_{E^i}$ est inclus dans $\operatorname{Ker} b|_{E^i}$ et s'envoie isomorphiquement sur H^i , et l'isomorphisme $H^i \simeq \mathcal{H}^i$ ainsi défini détermine un produit

scalaire hermitien sur H^i par restriction à \mathcal{H}^i du produit scalaire sur E^i , puis, par passage aux puissances extérieures et au produit tensoriel, une norme sur $\otimes_{i=0}^n (\det H^i)^{(-1)^i}$. On vérifie alors facilement que la norme de l'isomorphisme I relativement à ces normes vaut

$$\|I\| = \prod_{i=0}^n (\det' \Delta_i)^{(-1)^i/2}$$

où $\det' \Delta_i$ désigne le produit des valeurs propres non nulles de $\Delta_{|E^i}$.

Formellement, $\exp(-\zeta'_i(0))$ est le produit des valeurs propres non nulles de $\Delta_{E,i}$; en effet

$$-\zeta'_i(s) = \sum_{\lambda_{i,p} \neq 0} \lambda_{i,p}^{-s} \log \lambda_{i,p}.$$

Ainsi, la formule (4.1.3) montre que, toujours formellement, la métrique de Quillen est la métrique L^2 naturelle sur $\lambda(E)$, compte tenu de l'“isomorphisme”

$$\lambda(E) \simeq \left(\bigotimes_{i=0}^n (\det A^{0,i}(E))^{(-1)^i} \right).$$

Exemples.— 1) Soient $V = \mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ et $\omega = \omega_{FS}$ et soit \bar{E} le fibré hermitien trivial. Il vient

$$\begin{aligned} H^i(V; E) &\cong \mathbf{C} && \text{si } i = 0 \\ &= 0 && \text{si } i > 0 \end{aligned}$$

et donc $\lambda(E) \cong \mathbf{C}$. Par ailleurs, les valeurs propres des opérateurs $\Delta_{E,i}$ sont connues, et Gillet, Soulé et Zagier ont calculé la torsion analytique des espaces projectifs et ont montré (cf. [GS7]) que, si l'on pose

$$\rho(x) = \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

et

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{\rho(t) - \rho(0)}{t} dt,$$

la métrique de Quillen sur $\lambda(E)$ est donnée par

$$\log \|1\|_Q^2 = \text{coefficient de } x^N \text{ dans}$$

$$\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)^{N+1} \left[(N+1) \sum_{m \in 2\mathbf{N}+1} (2\zeta'(-m) + \zeta(-m)(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m})) \frac{x^m}{m!} - 2\sigma_N x^{-1} - \psi(x) \right]$$

où ζ désigne la fonction zêta de Riemann.

2) Soit E une courbe elliptique complexe et soit α une forme différentielle holomorphe non nulle sur E . Soit

$$\Gamma = \left\{ \int_{\gamma} \alpha; \gamma \in H_1(M; \mathbf{Z}) \right\}$$

le réseau dans \mathbf{C} des périodes de α et soient g_2 et g_3 les invariants du réseau Γ , définis par

$$g_2 = 60 \sum_{\gamma \in \Gamma - \{0\}} \gamma^{-4} \quad \text{et} \quad g_3 = 140 \sum_{\gamma \in \Gamma - \{0\}} \gamma^{-6}.$$

Soit enfin $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ le discriminant de (M, α) . Le déterminant de la cohomologie $\lambda(\mathcal{O})$ du fibré \mathcal{O} sur M s'identifie (par dualité de Serre algébrique) à la droite vectorielle des 1-formes holomorphes sur M . Lorsque T_M et \mathcal{O} sont munis de métriques invariantes par translation, la métrique de Quillen $\|\cdot\|_Q$ sur $\lambda(\mathcal{O})$ qui s'en déduit vérifie

$$\|\alpha\|_Q = |\Delta|^{-1/12}.$$

Cela découle aisément de la formule limite de Kronecker appliquée au réseau dual de Γ (voir par exemple [W4], formule (17), p. 75).

La métrique de Quillen sur le fibré déterminant associé à une *famille* de variétés analytiques compactes munies d'un fibré vectoriel holomorphe satisfait à des propriétés remarquables : elle est C^∞ , et sa courbure se calcule au moyen d'une formule à la Riemann-Roch-Grothendieck. Par ailleurs, la variation de métrique de Quillen sur $\lambda(E)$ par variation de la métrique sur T_V et E se calcule au moyen des classes de Bott-Chern (cf. [Q], exposé Bourbaki n° 676, [BGS1] et *infra* §4.2, exemples, 2)).

4.2. Le théorème de Riemann-Roch arithmétique

Soit X une variété arithmétique et soit ω une forme de Kähler sur $X(\mathbf{C})$, invariante sous F_∞ .

Lorsque $\pi : X \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}$ est un morphisme lisse, on dispose du fibré tangent relatif à π , T_π , qui est un fibré vectoriel bien défini sur X . La forme de Kähler ω sur $X(\mathbf{C})$ fait de T_π un fibré vectoriel hermitien, qui possède une classe de Todd $\widehat{\text{Td}} \bar{T}_\pi$ dans $\widehat{\text{CH}}^*(X)_\mathbf{Q}$.

En général, lorsque X n'est plus lisse sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$, \bar{T}_X est encore bien défini comme "fibré vectoriel hermitien virtuel sur X ", *i.e.* comme élément de $\widehat{K}_0(X)$ et possède toujours une classe de Todd $\widehat{\text{Td}} \bar{T}_X$ (*cf.* [GS10]). Indiquons une construction de cette dernière. Soit $i : X \rightarrow Y$ une immersion fermée de X dans une variété arithmétique Y lisse sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$ (on peut choisir par exemple $Y = \mathbf{P}_\mathbf{Z}^N$ avec N suffisamment grand). Notons N le fibré normal à X dans Y et \mathcal{E} la suite exacte canonique sur $X(\mathbf{C})$

$$0 \longrightarrow T_{X(\mathbf{C})} \longrightarrow i^* T_{Y, \mathbf{C}} \longrightarrow N_{\mathbf{C}} \longrightarrow 0.$$

Munissons $T_{X(\mathbf{C})}$ de la métrique hermitienne définie par ω , et $T_{Y, \mathbf{C}}$ et $N_{\mathbf{C}}$ de métriques hermitiennes. Ces métriques font de \mathcal{E} une suite exacte de fibrés vectoriels hermitiens $\bar{\mathcal{E}}$. On a alors

$$\widehat{\text{Td}} \bar{T}_\pi = i^* \widehat{\text{Td}} \bar{T}_Y \cdot (\widehat{\text{Td}} \bar{N})^{-1} + a(\widehat{\text{Td}}(\bar{\mathcal{E}})) \cdot (\text{Td} \bar{N})^{-1}.$$

Avant d'énoncer le théorème de Riemann-Roch de Gillet et Soulé, il nous faut encore introduire une définition (*cf.* [GS7], [GS10]).

DÉFINITION 4.1.— *On pose*

$$(4.2.1) \quad R(X) = \sum_{m \in 2\mathbf{N}+1} [2\zeta'(-m) + \zeta(-m)(1 + \frac{1}{2} \cdots + \frac{1}{m})] \frac{X^m}{m!},$$

et on note aussi R la classe caractéristique additive associée, à valeurs dans la cohomologie à coefficients réels.

Rappelons que cela signifie que R est l'unique classe caractéristique qui associe à tout fibré vectoriel complexe E sur un espace topologique

raisonnable T (par exemple un espace compact, ou un espace topologique possédant le type d'homotopie d'un CW complexe fini) une classe $R(E)$ dans $H^*(T; \mathbf{R})$ d'une manière fonctorielle, de sorte que :

- si E_1 et E_2 sont deux fibrés vectoriels sur T ,

$$R(E_1 \oplus E_2) = R(E_1) \cdot R(E_2).$$

- pour tout fibré L en droites sur T

$$R(L) = R(c_1(L))$$

où le second membre est défini au moyen de la série (4.2.1).

Nous pouvons finalement énoncer :

THÉORÈME 4.2 ([GS7], [GS10]).— *Soit X une variété arithmétique propre sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$ et soit $\bar{E} = (E, \|\cdot\|_E)$ un fibré vectoriel hermitien sur X . On suppose $X(\mathbf{C})$ muni d'une métrique kählerienne invariante sous F_∞ et $\lambda(E)$ muni de la métrique de Quillen $\|\cdot\|_Q$ déduite de $\|\cdot\|_E$ et de la structure kählerienne de $X(\mathbf{C})$. On a alors :*

$$(4.2.2) \quad \widehat{\text{deg}}(\lambda(E), \|\cdot\|_Q) = \widehat{\text{deg}}_X(\widehat{\text{ch}} \bar{E} \cdot \widehat{\text{Td}} \bar{T}_\pi) - \frac{1}{2} \int_{X(\mathbf{C})} \text{ch}(E_{\mathbf{C}}) \cdot R(T_{X(\mathbf{C})}) \cdot \text{Td}(T_{X(\mathbf{C})}).$$

Si l'on définit la classe de Chern arithmétique de X comme :

$$\text{Td}^A(X) = \widehat{\text{Td}}(\bar{T}_\pi)(1 - a(R(T_{X(\mathbf{C})}))),$$

on peut réécrire l'égalité (4.2.2) sous la forme

$$\widehat{\text{deg}}(\lambda(E), \|\cdot\|_Q) = \widehat{\text{deg}}_X(\widehat{\text{ch}} \bar{E} \cdot \text{Td}^A X).$$

Gillet et Soulé démontrent en fait un théorème plus général, valable pour des “familles”, et qui permet de ne supposer X régulier que dans la fibre générique $X_{\mathbf{Q}}$. Outre les résultats analytiques mentionnés plus haut et le calcul de la torsion analytique des projectifs, leur preuve fait appel à l'étude du comportement des complexes de fibrés hermitiens lors de la

“construction du graphe grassmannien” de Baum, Fulton et MacPherson. Signalons aussi que Faltings a donné récemment une démonstration du théorème 4.2 plus simple quant à l’analyse.

Exemples.— 1) Si on applique le théorème 4.2 à $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^N$ muni de ω_{FS} et au fibré hermitien trivial, on retrouve la formule du §4.1, exemples, 1). De fait, c’est le calcul de la torsion analytique des espaces projectifs qui a conduit Gillet et Soulé à introduire la classe R . Celle-ci intervient par un autre biais dans les travaux de Bismut ([Bi2]) et Bismut-Lebeau ([BL1,2]).

2) Si $\bar{\mathcal{E}} : 0 \rightarrow \bar{S} \rightarrow \bar{E} \rightarrow \bar{Q} \rightarrow 0$ est une suite exacte de fibrés vectoriels hermitiens sur X , on dispose d’un isomorphisme canonique (au signe près) entre déterminants de la cohomologie :

$$I : \lambda(E) \simeq \lambda(S) \otimes \lambda(Q).$$

En appliquant le théorème 4.2 à chacun des fibrés S , E et Q , on retrouve la formule d’anomalie (cf. [BGS1]) qui exprime la norme de cet isomorphisme relativement aux métriques de Quillen au moyen des formes de Chern et de Bott-Chern :

$$\begin{aligned} \log \|I\|_Q &= \widehat{\deg}(\lambda(E), \|\cdot\|_Q) - \widehat{\deg}(\lambda(S), \|\cdot\|_Q) - \widehat{\deg}(\lambda(Q), \|\cdot\|_Q) \\ &= \widehat{\deg}_X((\widehat{\text{ch}} \bar{E} - \widehat{\text{ch}} \bar{S} - \widehat{\text{ch}} \bar{Q}) \cdot \widehat{\text{Td}} \bar{T}_\pi) \\ &= -\widehat{\deg}_X(a(\widehat{\text{ch}}(\bar{\mathcal{E}})) \widehat{\text{Td}} \bar{T}_\pi) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{X(\mathbf{C})} \tilde{\varphi}(\bar{\mathcal{E}}) \text{Td} \bar{T}_{X(\mathbf{C})}. \end{aligned}$$

3) Soit E une courbe elliptique sur \mathbf{Q} et soit X son modèle régulier minimal sur \mathbf{Z} . Supposons pour simplifier que E admet une réduction semi-stable sur \mathbf{Z} , choisissons une différentielle de Néron α sur X et notons Δ le discriminant de E . Les nombres premiers où X possède mauvaise réduction sont exactement ceux qui divisent Δ , et, si p est un tel nombre premier, le degré (sur \mathbf{F}_p) du cycle Z_p des points singuliers de $X_{\mathbf{F}_p}$ est la valuation en p de Δ . Munissons T_π de la métrique telle que $\|\alpha_{\mathbf{C}}^{-1}\| = 1$ et \mathcal{O}_X de la métrique triviale. Le déterminant de la cohomologie $\lambda(\mathcal{O}_X)$ s’identifie au \mathbf{Z} -module $\mathbf{Z}\alpha$, et donc

$$\widehat{\deg}_X(\lambda(\mathcal{O}_X), \|\cdot\|_Q) = -\log \|\alpha\|_Q.$$

Soit $\bar{\omega}_\pi$ le dualisant relatif de π muni de la métrique telle que $\|\alpha\| = 1$. C'est un fibré en droites hermitien sur X trivialisé en tant que tel par α . Par ailleurs, on montre, en explicitant l'isomorphisme entre T_π et ω_π^{-1} sur la fibre générique de π , que

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Td}} \bar{T}_X &= \widehat{\text{Td}} \bar{\omega}_\pi^{-1} + \frac{1}{12} \left[\left(\sum_{p|\Delta} Z_p, 0 \right) \right] \\ &= 1 + \frac{1}{12} \left[\left(\sum_{p|\Delta} Z_p, 0 \right) \right] \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \widehat{\text{deg}}_X [\widehat{\text{ch}}(\bar{\mathcal{O}}_X) \cdot \text{Td}^A X] &= \widehat{\text{deg}}_X \widehat{\text{Td}} \bar{T}_\pi \quad \text{car } \bar{\mathcal{O}}_X \text{ et } T_{X(\mathbf{C})} \text{ sont triviaux} \\ &= \widehat{\text{deg}}_X \left(1 + \frac{1}{12} \left[\left(\sum_{p|\Delta} Z_p, 0 \right) \right] \right) \\ &= \frac{1}{12} \sum_{p|\Delta} \log p \cdot v_p(\Delta) \\ &= \frac{1}{12} \log \Delta. \end{aligned}$$

Le théorème de Riemann-Roch arithmétique redonne ici la formule limite de Kronecker (cf. §4.1, exemples, 2)).

4.3. Applications

Conservons les notations du théorème et considérons en outre un fibré en droites hermitien \bar{L} sur X .

Bismut et Vasserot ont montré ([BV]) que lorsque la forme de courbure $c_1(\bar{L}) \in A^{1,1}(X(\mathbf{C}))$ est partout strictement positive, on dispose de l'évaluation asymptotique

(4.3.1)

$$\tau(X(\mathbf{C}), \omega, \bar{E} \otimes \bar{L}^n) = \frac{1}{2(d-1)!} \text{rg } E \int_{X(\mathbf{C})} c_1(L)^d \cdot n^d \log n + O(n^d),$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$, où d désigne la dimension complexe de $X(\mathbf{C})$.

Par ailleurs, le théorème 4.1 appliqué à $\overline{E} \otimes \overline{L}^n$ donne⁽¹⁾

$$(4.3.2) \quad \widehat{\deg}(\lambda(E \otimes L^n), \|\cdot\|_Q) \\ = \frac{1}{(d+1)!} \operatorname{rg} E \cdot \widehat{\deg}_X \widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1} \cdot n^{d+1} + O(n^d),$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$.

On déduit alors de (4.3.1) et (4.3.2) :

THÉORÈME 4.3 (cf. [GS9]).— *Conservons les notations du théorème et considérons un fibré en droites hermitien \overline{L} sur X , ample relativement au morphisme $\pi : X \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ et tel que $c_1(\overline{L}_{\mathbf{C}}) > 0$. On a alors, en notant d la dimension complexe de X et $\|\cdot\|_{L^2}$ la norme L^2 la norme sur $H^0(X; E \otimes L^n)$ déduite de la métrique kählerienne⁽²⁾ ω sur $X(\mathbf{C})$ et de la structure hermitienne de $\overline{E} \otimes \overline{L}^n$:*

$$(4.3.3) \quad \widehat{\deg}(H^0(X; E \otimes L^n), \|\cdot\|_{L^2}) = \frac{1}{(d+1)!} \operatorname{rg} E \cdot \widehat{\deg}_X \widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1} \cdot n^{d+1} \\ + \frac{1}{4(d-1)!} \operatorname{rg} E \int_{X(\mathbf{C})} c_1(L)^d \cdot n^d \log n + O(n^d)$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Rappelons que si V est une variété projective, disons pour simplifier sur \mathbf{C} , de dimension d , munie d'un fibré en droites ample L , son degré relativement à L est défini comme

$$\int_V c_1(L)^d$$

et s'exprime aussi "à la Hilbert-Samuel" comme la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d!}{n^d} \dim H^0(V; L^{\otimes n}).$$

(1) Pour établir cette évaluation asymptotique, il n'est en fait pas nécessaire de disposer du théorème 4.2 dans toute sa force. Les résultats de [GS7] suffisent.

(2) On remarquera que les deux premiers termes du membre de droite de (4.3.3) sont en fait indépendants de ω .

La formule asymptotique (4.3.3) fournit une expression analogue pour la hauteur d'une variété arithmétique :

COROLLAIRE 4.4.— *Soit X une variété arithmétique propre sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$, de dimension relative d (donc de dimension absolue $d+1$), et soit \bar{L} un fibré en droites hermitien sur X ample relativement au morphisme $\pi : X \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}$ et tel que $c_1(\bar{L}_{\mathbf{C}}) > 0$. La hauteur $\widehat{\text{deg}}_X \widehat{c}_1(\bar{L})^{d+1}$ de X relativement à \bar{L} est égale à*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(d+1)!}{n^{d+1}} \widehat{\text{deg}}(H^0(X; L^{\otimes n}), \| \cdot \|_{L^2})$$

où $\| \cdot \|_{L^2}$ désigne la métrique L^2 sur $H^0(X; L^{\otimes n})$ déterminée par une métrique kählerienne⁽¹⁾ sur $X(\mathbf{C})$ et par la structure hermitienne de $\bar{L}^{\otimes n}$.

Si l'on pose

$$h(n) = \dim_{\mathbf{C}} H^0(X(\mathbf{C}); E_{\mathbf{C}} \otimes L_{\mathbf{C}}^n),$$

le théorème de Minkowski appliqué au réseau $H^0(X; E \otimes L^n)$ montre que

$$(4.3.4) \quad \begin{aligned} & \#\{s \in H^0(X; E \otimes L^n) \mid \|s\|_{L^2} \leq 1\} \\ & \geq \frac{\pi^{h(n)/2}}{2^{h(n)} \Gamma(\frac{h(n)}{2} + 1)} \exp \widehat{\text{deg}}(H^0(X; E \otimes L^n), \| \cdot \|_{L^2}). \end{aligned}$$

En combinant cette inégalité à l'estimation

$$(4.3.5) \quad h(n) = O(n^d),$$

qui découle par exemple de la formule de Riemann-Roch sur $X(\mathbf{C})$, et à l'expression asymptotique (4.3.3), on obtient que, sous les hypothèses du théorème 4.3, lorsque de plus

$$\widehat{\text{deg}}_X \widehat{c}_1(\bar{L})^{d+1} > 0,$$

alors le fibré $E \otimes L^n$ sur X admet des sections de norme archimédienne L^2 bornée par 1 lorsque n est grand.

⁽¹⁾ indépendante de n , mais arbitraire.

En fait, toujours sous les hypothèses du théorème, il est possible de comparer la norme $\| \cdot \|_{L^2}$ sur les sections de $E_{\mathbf{C}} \otimes L_{\mathbf{C}}^n$ à la norme $\| \cdot \|_{L^\infty}$ définie par

$$(4.3.6) \quad \|s\|_{L^\infty} = \sup_{x \in X(\mathbf{C})} \|s(x)\|_{\overline{E} \otimes \overline{L}^n}.$$

On montre qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de n telle que, pour tout $s \in H^0(X(\mathbf{C}); E \otimes L^n)$, on ait

$$\|s\|_{L^\infty} \leq C n^d \|s\|_{L^2}.$$

Les relations (4.3.3) à (4.3.6) impliquent le théorème suivant qui apporte une réponse au "problème de Riemann-Roch arithmétique naïf" du §1.4 :

COROLLAIRE 4.5.— *Soit X une variété arithmétique propre sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$, de dimension relative d , soit \overline{E} un fibré vectoriel hermitien sur X et soit \overline{L} un fibré en droites hermitien sur X tel que L soit ample relativement à $\pi : X \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}$, et que*

$$c_1(\overline{L}_{\mathbf{C}}) > 0 \quad \text{et} \quad \widehat{\deg} \widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1} > 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} & \log \# \{s \in H^0(X; E \otimes L^n) \mid \|s\|_{L^\infty} \leq 1\} \\ & \geq \frac{1}{(d+1)!} \text{rg } E \cdot \widehat{\deg}_X \widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1} \cdot n^{d+1} + O(n^d). \end{aligned}$$

Une variante de cet énoncé joue un rôle crucial dans la nouvelle démonstration par Vojta de la conjecture de Mordell [V]. Lorsque X est une surface arithmétique (*i.e.* lorsque $d = 1$), cet énoncé avait été démontré, dans une version moins précise, par Faltings ([Fa1]), et a été complété récemment par Shouwu Zhang sous la forme d'un "critère d'amplitude arithmétique" (*cf.* [Z]).

BIBLIOGRAPHIE

- [A1] S.J. ARAKELOV - *Intersection theory for divisors on an arithmetic surface*, Math. U.S.S.R. Izv. **8**, 1974, 1167-1189.
- [A2] S.J. ARAKELOV - *Theory of intersection on an arithmetic surface*, Proc. Int. Cong. of Math., Vancouver, vol. 1, 1978, 405-408.
- [Be1] A.A. BEILINSON - *Higher regulators and values of L-functions*, J. Soviet Math. **30**, 1985, 2036-2070.
- [Be2] A.A. BEILINSON - *Height pairings between algebraic cycles*, Contemp. Math. **67**, 1-24.
- [Bi1] J.-M. BISMUT - *Superconnections currents and complex immersions*, Inventiones Math. **99**, 1990, 59-113.
- [Bi2] J.-M. BISMUT - *Koszul complexes, harmonic oscillators and the Todd class*, Journal of the A.M.S. **3**, 1990, 159-256.
- [BGS1] J.-M. BISMUT, H. GILLET et C. SOULÉ - *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. Bott-Chern forms and analytic torsions ; II Direct images and Bott-Chern forms ; III Quillen metrics on holomorphic determinants*, Commun. Math. Phys. **115**, 1988, 49-78, 79-126, 301-351.
- [BGS2] J.-M. BISMUT, H. GILLET et C. SOULÉ - *Complex immersions and Arakelov geometry*, Grothendieck Festschrift, Birkhäuser, 1990
- [BGS3] J.-M. BISMUT, H. GILLET et C. SOULÉ - *Bott-Chern currents and complex immersions*, Duke Math. J. **60**, 1990, 255-284.
- [BL1] J.-M. BISMUT et G. LEBEAU - *Immersion complexes et métriques de Quillen*, Comptes rendus Acad. Sci. Paris **309**, Série I, 1989, 487-491.
- [BL2] J.-M. BISMUT et G. LEBEAU - *Complex immersions and Quillen metrics*, Preprint, Orsay, 1990, 386 p.
- [BV] J.-M. BISMUT et E. VASSEROT - *The asymptotic of the Ray-Singer analytic torsion associated with high powers of a positive line bundle*, Commun. Math. Phys. **125**, 1989, 355-367.
- [Bl] S. BLOCH - *Height pairings for algebraic cycles*, Proc. Luminy conference on algebraic K-theory, J. Pure Appl. Algebra **34**, 1984, 119-145.
- [BC] R. BOTT et S.S. CHERN - *Hermitian vector bundles and the equidis-*

- tribution of zeroes of their holomorphic sections*, Acta Math. **114**, 1968, 71-112.
- [De] P. DELIGNE - *Le déterminant de la cohomologie* in Current trends in arithmetical algebraic geometry (K. Ribet ed.), Contemporary Math. **67**, 1987, 93-177.
- [Do] S. DONALDSON - *Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc. **50**, 1986, 1-26.
- [E1] R. ELKIK - *Fibrés d'intersection et intégrales de classes de Chern*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **22**, 4^{ème} série, 1989, 195-226.
- [E2] R. ELKIK - *Métriques sur les fibrés d'intersection*, Duke Math. J. **61**, 1990, 303-328.
- [Fa1] G. FALTINGS - *Calculus on arithmetic surfaces*, Annals of Math. **119**, 1984, 387-424.
- [Fa2] G. FALTINGS - *Diophantine approximation on Abelian varieties*, preprint, 1989.
- [Fu] W. FULTON - *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, Band 2. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1984.
- [G1] H. GILLET - *Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory*, Adv. in Math. **40**, 1981, 203-289.
- [G2] H. GILLET - *An introduction to higher dimensional Arakelov-theory*, Contemporary Mathematics, **67**, 209-228.
- [GS1] H. GILLET et C. SOULÉ - *Intersection sur les variétés d'Arakelov*, Comptes rendus Acad. Sci. Paris, **299**, Série I, 1984, 563-566.
- [GS2] H. GILLET et C. SOULÉ - *Classes caractéristiques sur les variétés d'Arakelov*, Comptes rendus Acad. Sci. Paris, **301**, Série I, 1985, 439-442.
- [GS3] H. GILLET et C. SOULÉ - *Direct images of Hermitian holomorphic bundles*, Bull. A.M.S. **15**, 1986, 209-212.
- [GS4] H. GILLET et C. SOULÉ - *Intersection theory using Adams operations*, Inventiones Math. **90**, 1987, 243-277.
- [GS5] H. GILLET et C. SOULÉ - *Arithmetic intersection theory*, preprint I.H.E.S., 1988, à paraître aux Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.

- [GS6] H. GILLET et C. SOULÉ - *Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric*, I, II, Annals of Math. **131**, 1990, 163-203.
- [GS7] H. GILLET et C. SOULÉ - *Analytic torsion and the arithmetic Todd germs*, preprint I.H.E.S., 1988, à paraître dans Topology.
- [GS8] H. GILLET et C. SOULÉ - *Differential characters and arithmetic intersection theory* in “Algebraic K-theory : connections with geometry and topology”, edited by J.F. Jardine and V.P. Snaith, NATO ASI Series C, Vol. 279, Kluwer Academic Publishers, 1989, 29-68.
- [GS9] H. GILLET et C. SOULÉ - *Amplitude arithmétique*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **307**, 1988, 887-890.
- [GS10] H. GILLET et C. SOULÉ - *Un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck arithmétique*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **309**, Série I, 1989, 929-932.
- [GH] P. GRIFFITHS et J. HARRIS - *Principles of algebraic geometry*, John Wiley and Sons, 1978.
- [KM] F. KNUDSEN et D. MUMFORD - *The projectivity of the moduli space of stable curves*, I, Preliminaries on “det” and “div”, Math. Scand. **39**, 1976, 19-55.
- [La1] S. LANG - *Fundamentals of diophantine geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1983.
- [La2] S. LANG - *Introduction to Arakelov theory*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1988.
- [M] Yu.I. MANIN - *New dimensions in geometry* in Arbeitstagung Bonn 1984, Ed. by F. Hirzebruch, J. Schwermer and S. Suter, Springer Lect. Notes in Math. n° 1111, 59-101.
- [P] A.N. PARŠIN - *Modular correspondences, heights and isogenies of Abelian varieties*, Trudy Mat. Inst. Steklov **132**, 1973 = Proc. Steklov Inst. Mat. **132**, 1973, 243-270.
- [Ph] P. PHILIPPON - *Sur des hauteurs alternatives*, preprint, 1989.
- [Q] D. QUILLEN - *Determinants of Cauchy-Riemann operators over a Riemann surface*, Funct. Anal. Appl. **14**, 1985, 31-34.
- [RS] D.B. RAY et I.M. SINGER - *Analytic torsion for complex manifolds*, Annals of Math. **98**, 1973, 154-177.

- [Se] J.-P. SERRE - *Algèbre locale, multiplicités*, troisième édition, Lecture Notes in Math. **11**, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [St] W. STOLL - *About the value distribution of holomorphic maps into projective space*, Acta Math. **123**, 1969, 83-114.
- [Sz] L. SZPIRO - *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell*, Astérisque **127**, 1985.
- [S1] C. SOULÉ - *Opérations en K -théorie algébrique*, Can. J. Math. **37**, 1985, 488-550.
- [S2] C. SOULÉ - *Théorie de Nevanlinna et théorie d'Arakelov*, Astérisque **183**, 1990, 127-135.
- [S3] C. SOULÉ - *Géométrie d'Arakelov et théorie des nombres transcendants*, preprint I.H.E.S., 1989.
- [V] P. VOJTA - *An extension of the Thue-Siegel-Dyson-Gel'fond theorem*, preprint, 1989.
- [W1] A. WEIL - *Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques*, Revue scientifique **77**, 1939, 104-106. (= Œuvres scientifiques, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, volume I, 1980, [1939a], 236-240).
- [W2] A. WEIL - *Une lettre et un extrait de lettre à Simone Weil*, [1940a] in Œuvres scientifiques, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, volume I, 1980, 244-255.
- [W3] A. WEIL - *Number theory and algebraic geometry*, Proc. Intern. Math. Congress, Cambridge, Mass., vol. II, 90-10 (= Œuvres scientifiques, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, volume I, 1980, [1950b], 442-452).
- [W4] A. WEIL - *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **88**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
- [Z] S. ZHANG - *Ample Hermitian line bundles on arithmetic surfaces*, Preprint, october 1989 and may 1990.

ADDENDUM (septembre 1991)

Depuis l'exposé oral sont parues les publications suivantes :

- [F3] G. FALTINGS - *Lectures on the arithmetic Riemann-Roch theorem*, notes by S. Zhang, preprint, 1991.
- [GS11] H. GILLET et C. SOULÉ - *An arithmetic Riemann-Roch theorem*, preprint IHES, 1991.

L'article [GS11] précise et détaille les résultats des notes [GS9] et [GS10]. En particulier, il développe la machinerie nécessaire pour énoncer et établir l'analogie du théorème 4.2 lorsque X n'est régulier que sur la fibre générique $X_{\mathbf{Q}}$ et complète ainsi les résultats de [GS5-7], [BGS1-3] et [BL2], qui suffisaient pour établir le théorème 4.2, où X est supposé régulier (cf. [GS10], §3.4). En fait, comme dans la note [GS10], Gillet et Soulé considèrent une situation plus générale où $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme projectif entre variétés arithmétiques tel que $f_{\mathbf{Q}} : X_{\mathbf{Q}} \rightarrow Y_{\mathbf{Q}}$ soit lisse, et calculent au moyen de la théorie de l'intersection arithmétique la classe $\widehat{c}_1(\lambda(\overline{E}))$ associée au déterminant de l'image directe par f d'un fibré vectoriel hermitien \overline{E} sur X .

Faltings établit dans [F3] un théorème relatif plus complet, qui calcule, non seulement $\widehat{c}_1(\lambda(\overline{E}))$, mais aussi les classes caractéristiques de degré supérieur de l'image directe par f de \overline{E} (c'est un élément de $\widehat{K}_0(Y)$, défini au moyen de "torsions analytiques supérieures" ; voir aussi [GS3] et [GS7]). Toutefois, il travaille en supposant X et Y réguliers.

Jean-Benoît BOST

I.H.E.S.

35 route de Chartres

F-91440 BURES-sur-YVETTE

Astérisque

ANDRÉ GRAMAIN

Rapport sur la théorie classique des nœuds (2ème partie)

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 732, p. 89-113

http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__89_0

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RAPPORT SUR LA THÉORIE CLASSIQUE DES NŒUDS
(2ème partie)

par **André GRAMAIN**

Un *nœud* (non orienté) est une sous-variété différentiable (ou PL) de la sphère S_3 difféomorphe au cercle. Deux nœuds k et k' ont *même type* s'il existe un homéomorphisme h de S_3 sur S_3 tel que $h(k') = k$. Si deux nœuds k et k' ont même type, leurs complémentaires $S_3 - k$ et $S_3 - k'$ sont homéomorphes. La réciproque vient d'être démontrée par C. McA. Gordon et J. Luecke [GL].

THÉORÈME 1.— *Deux nœuds dont les complémentaires sont homéomorphes ont même type.*

La question se ramène à savoir si la donnée du complémentaire $S_3 - k$ détermine la classe d'homotopie du méridien du nœud k (prop. 1). La propriété était connue pour diverses classes de nœuds, notamment les nœuds composés (D. Noga [N], voir prop. 2) et pour les nœuds toriques (voir [BZ], p. 274) ; évidemment aucun contre-exemple n'était connu. Un résultat partiel avait été obtenu en 1987 [CGLS] selon lequel un complémentaire de nœud ne pouvait provenir que de deux types de nœuds au plus.

Le groupe d'un nœud k est le groupe fondamental $\pi_1(S_3 - k)$. C.D. Feustel et W. Whitten avaient démontré en 1978 [FW] que le théorème 1 implique le résultat suivant :

THÉORÈME 2.— *Deux nœuds indécomposables dont les groupes sont isomorphes ont des complémentaires homéomorphes.*

Ce théorème a été établi avant le théorème 1 par W. Whitten ([Wh], 1987) en utilisant seulement les résultats partiels de [CGLS]. Pour un nœud

composé, la donnée du groupe ne détermine pas le type du nœud lui-même, mais elle détermine les types de ses composants indécomposables dont l'assemblage avec des orientations différentes peut donner un groupe isomorphe ([FW]).

Dans leur article [GL], C. McA. Gordon et J. Luecke donnent en 40 pages agréables à lire la démonstration complète du théorème 1. Nous en donnons un aperçu dans la deuxième partie de cet exposé. Pour commencer, nous abordons la question de remonter du groupe à la variété du nœud. Nous avons rassemblé en Appendice certains théorèmes utilisés ; signalons comme ouvrage de référence le livre bleu de G. Burde et H. Zieschang [BZ, 85] et, comme introduction rapide, un précédent exposé [Gr].

1. CHIRURGIE DE DEHN

Étant donné un nœud k dans S_3 , on entoure k d'un voisinage tubulaire fermé $U(k)$. La *variété du nœud* est le complémentaire $E(k)$ de l'intérieur de $U(k)$. Elle a l'homologie d'un cercle. Le bord commun de $U(k)$ et $E(k)$ est un tore $T(k)$. Inversement, d'après un théorème classique d'Alexander [A], un tore plongé sépare la sphère S_3 en deux composantes dont l'une est un tore plein et l'autre, par conséquent, la variété d'un nœud. Sur le tore $T(k)$, on appelle *méridien* un cercle plongé m dont la classe d'homotopie $[m]$ est, à l'orientation près, celle d'une fibre de la fibration du voisinage

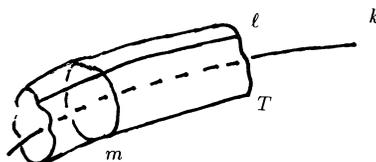


Figure 1

tubulaire. Un *parallèle* (ou *longitude*) est un cercle homotope à une section de cette fibration et dont la classe d'homologie est nulle dans $E(k)$. Le *groupe $G(k)$ du nœud k* est le groupe fondamental $\pi_1(E(k))$ relatif à un point-base $*$ que nous supposons situé sur $T(k)$. Si le nœud k n'est pas

trivial, l'homomorphisme canonique de $\pi_1(T(k))$ dans $G(k)$ est injectif (voir [Gr]) ; son image $H(k)$ est appelée *sous-groupe périphérique*.

PROPOSITION 1.— *Soient k et k' deux nœuds et φ un isomorphisme de $G(k')$ sur $G(k)$.*

(a) *Il existe une équivalence d'homotopie f de $(E(k'), *)$ dans $(E(k), *)$ telle que $\pi_1(f) = \varphi$.*

(b) *Si φ induit un isomorphisme de $H(k')$ sur $H(k)$, il existe un homéomorphisme h de $E(k')$ sur $E(k)$ tel que $\pi_1(h) = \varphi$.*

(c) *Soient m et m' des méridiens de k et k' , $[m]$ et $[m']$ leurs classes d'homotopie. Si l'hypothèse (b) est satisfaite, pour que l'homéomorphisme h se prolonge en un homéomorphisme de S_3 sur S_3 , il faut et il suffit que $\varphi([m']) = \pm[m]$.*

La variété E d'un nœud a l'homotopie d'un 2-complexe. En outre, le groupe $\pi_2(E)$ est nul : en effet, s'il n'était pas nul, il existerait une sphère plongée différemment non homotope à 0 (théorème de la sphère) et une telle sphère sépare S_3 en deux boules fermées (théorème d'Alexander-Schönflies) dont l'une est contenue dans E , ce qui est contradictoire. Par suite l'isomorphisme φ se réalise par une équivalence d'homotopie f de $(E(k'), *)$ dans $(E(k), *)$.

Notons m, m', ℓ, ℓ' des méridiens et parallèles de k et k' aux points $*$. Sous l'hypothèse (b), par prolongement des homotopies, on peut déformer l'application f pour qu'elle envoie m' et ℓ' dans le bord $bE(k)$ de $E(k)$, puis, comme $\pi_2(E(k)) = 0$, pour que f induise un homéomorphisme de $bE(k')$ sur $bE(k)$. Le *théorème de Waldhausen* permet alors de déformer f en un homéomorphisme et même un difféomorphisme.

Les parallèles de k sont caractérisés comme générateurs du noyau de $H_1(bE(k)) \rightarrow H_1(E(k))$. Sous l'hypothèse (b), on a donc $\varphi([\ell']) = \pm[\ell]$, donc $\varphi([m']) = \pm[m] + n[\ell]$. Pour que h se prolonge en un homéomorphisme de S_3 sur S_3 , il faut et il suffit que $n = 0$.

Remarque.— Un nœud k possède la propriété (P) s'il y a une unique manière, à homotopie près, d'obtenir une sphère d'homotopie en collant un tore plein à $E(k)$ le long de $bE(k)$. Il revient au même de dire que le

sous-groupe distingué de $G(k)$ engendré par $[m][\ell]^n$ n'est égal à $G(k)$ que si $n = 0$. Si les variétés de deux nœuds sont homéomorphes, et si l'un des deux nœuds possède la propriété (P), les nœuds ont même type. La propriété (P) a été introduite par les chercheurs de contre-exemple à la conjecture de Poincaré.

2. ANNEAUX ESSENTIELS

Posons $A = S_1 \times [0, 1]$, $bA = S_1 \times \{0, 1\}$. Un *anneau singulier* dans une variété à bord V est une application $f : (A, bA) \rightarrow (V, bV)$. L'anneau singulier f est *essentiel* si :

- (a) l'anneau f est incompressible (*i.e.* $\pi_1(f)$ est injectif),
- (b) le chemin $f|(* \times [0, 1])$ n'est pas strictement homotope à un chemin dans bV .

Supposons que le bord bV est incompressible (*i.e.* $\pi_1(bV_i) \rightarrow \pi_1(V)$ injectif pour chaque composante bV_i de bV), que $\pi_2(V) = 0$ et que $\pi_1(f)$ est injectif. Alors, si l'anneau f n'est pas essentiel, l'application f est homotope relativement à bA à une application dont l'image est dans le bord bV .

Le *théorème de l'anneau* ([CF], [Ja], [Sc]) affirme qu'une variété de dimension 3 qui contient un anneau singulier essentiel dont le bord est plongé, contient un anneau essentiel plongé de même bord.

Si E est la variété d'un nœud et $f : A \rightarrow E$ un anneau incompressible plongé, l'image $f(bA)$ du bord découpe deux anneaux B_1 et B_2 sur le tore bE . Les tores $B_1 \cup f(A)$ et $B_2 \cup f(A)$ séparent E en deux variétés à bord torique qui sont soit des tores pleins, soit des variétés de nœud (théorème d'Alexander). Si l'anneau f n'est pas essentiel, on peut démontrer à l'aide du théorème du lacet qu'il est parallèle au bord, c'est-à-dire qu'il existe un plongement $F : A \times [0, 1] \rightarrow E$ tel que $F(x, 0) = f(x)$ pour tout $x \in A$ et $F((A \times \{1\}) \cup (bA \times [0, 1])) \subset bE$.

Exemples. — 1) Si un nœud k est *composé* de deux nœuds k_1 et k_2 , la variété $E(k)$ est la réunion des variétés $E(k_1)$ et $E(k_2)$ recollées le long d'un anneau dont le bord est constitué de méridiens pour les trois nœuds k_1 , k_2 et k . Si

aucun des nœuds k_1 ou k_2 n'est trivial, cet anneau est essentiel. Le groupe $G(k)$ est somme amalgamée $G(k_1) *_Z G(k_2)$ où les classes de méridiens convenables $[m_1]$ et $[m_2]$ sont identifiées entre elles.

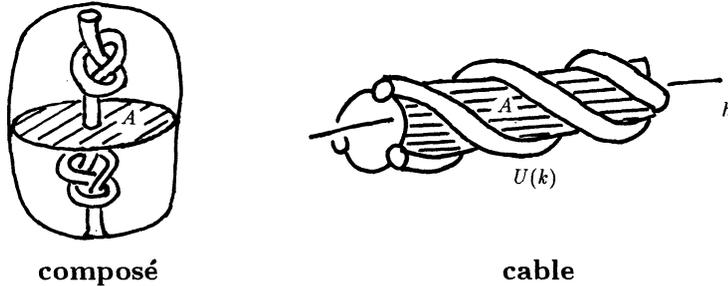


Figure 2

2) Soient h un nœud, m et ℓ un méridien et un parallèle de h et (p, q) un couple de nombres premiers entre eux. Un cercle k plongé dans le tore $T(h) = bE(h)$, dont la classe (d'homotopie ou d'homologie) est $p[m] + q[\ell]$, est par définition un (p, q) -cable du nœud porteur h . Prenons un voisinage tubulaire $U(k)$ dont l'intersection avec $T(h)$ soit un anneau B . L'anneau $A = T(h) - \text{int}(B)$ sépare $E(k)$ en un tore plein $U(h) - \text{int}(U(k))$ d'âme h et une variété $E(h) - \text{int}(U(k))$ difféomorphe à $E(h)$. Les composantes de bA ont pour classe $q[\ell]$ dans le tore plein $U(h) - \text{int}(U(k))$, p fois un générateur dans $H_1(E(h))$ et pq fois un générateur dans $H_1(E(k))$. Si le nœud h n'est pas trivial et si $|q| \geq 2$, l'anneau A est donc essentiel. Si le nœud h est trivial, le nœud k est le nœud torique de type (p, q) ; si $|p| \geq 2$ et $|q| \geq 2$, ce nœud n'est pas trivial et l'anneau A est essentiel.

PROPOSITION 2 (cf [FW], [Wh 74], [Si]).— *Supposons que la variété d'un nœud k contienne un anneau essentiel plongé A . L'anneau A sépare $E(k)$ en deux variétés X_1, X_2 et l'on est dans l'un des deux cas suivants qui s'excluent :*

(a) *Aucune des variétés X_1 ou X_2 n'est un tore plein, le nœud k est décomposable, chaque composante de bA est un méridien de k .*

(b) *L'une au moins des variétés X_1 ou X_2 est un tore plein, le nœud k est un (p, q) -cable, $|q| \geq 2$, de l'âme de ce tore, les composantes de bA ont pour classe $[m]^n[\ell]^{\pm 1}$ dans $G(k)$.*

On a déjà vu que bA sépare le tore $T(k)$ en deux anneaux B_1, B_2 et que A sépare $E(k)$ en deux variétés X_1 et X_2 dont les bords sont les tores $B_1 \cup A$ et $B_2 \cup A$.

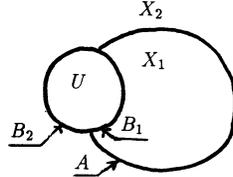


Figure 3

Supposons que ni X_1 ni X_2 ne soient des tores pleins. Les variétés $X_2 \cup U(k)$ et $X_1 \cup U(k)$ qui sont les adhérences de leurs complémentaires dans S_3 sont alors des tores pleins. (théorème d'Alexander), leurs âmes sont des nœuds k_1, k_2 et X_i est la variété du nœud k_i . D'après le théorème de Van Kampen, le groupe $\pi_1(X_1 \cup U(k))$ est somme amalgamée de $\pi_1(X_1)$ et $\pi_1(U(k))$ le long de $\pi_1(B_1)$.

$$\pi_1(B_1) = \mathbf{Z} \quad \begin{array}{c} \swarrow \\ \pi_1(X_1) \\ \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow \\ \pi_1(X_1 \cup U(k)) = \mathbf{Z} \\ \searrow \end{array} \\ \pi_1(U(k)) = \mathbf{Z}$$

Si $\pi_1(B_1) \rightarrow \pi_1(U(k))$ était injectif, $\pi_1(X_1) \rightarrow \pi_1(X_1 \cup U(k))$ serait injectif, ce qui est absurde car le nœud k_1 n'est pas trivial. Les homomorphismes $\pi_1(B_1) \rightarrow \pi_1(U(k))$ et $\pi_1(B_1) \rightarrow \pi_1(X_1 \cup U(k))$ sont donc nuls ; les composantes de bB_1 ($= bA$) sont des méridiens de k et k_2 , et similairement de k_1 . Cette démonstration, due à D. Noga [N], prouve aussi qu'un nœud décomposable possède la propriété (P). En effet, si l'on attache à $X_1 \cup X_2$ un tore plein V au lieu de $U(k)$, de telle sorte que $X_1 \cup X_2 \cup V$ soit une sphère d'homotopie, alors $X_1 \cup V$ est un tore d'homotopie, et bA est encore constitué de méridiens de V .

Supposons au contraire que X_1 soit un tore plein. Remarquons d'abord que $X_1 \cup U(k)$ est un tore plein. Cela résulte du théorème d'Alexander si X_2 est une vraie variété de nœud. Si X_2 est un tore plein, la variété $E(k) = X_1 \cup X_2$ est la variété d'un nœud torique k' . Comme les nœuds toriques ont la propriété (P) ([BZ], p. 274), les méridiens et parallèles pour

k' et pour k sont les mêmes sur $bE(k)$, donc $X_1 \cup U(k)$ est un tore plein puisque $X_1 \cup U(k')$ en est un. Appliquons alors le théorème de Van Kampen au calcul de $\pi_1(X_1 \cup U(k))$.

$$\pi_1(B_1) = \mathbf{Z} \quad \begin{array}{c} \nearrow \varphi \\ \searrow \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi_1(X_1) = \mathbf{Z} \\ \pi_1(U(k)) = \mathbf{Z} \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} \quad \pi_1(X_1 \cup U(k)) = \mathbf{Z}.$$

L'un des deux homomorphismes φ ou ψ est un isomorphisme ; comme l'anneau A est essentiel, l'homomorphisme φ est injectif, mais pas bijectif ; c'est donc la multiplication par un entier q tel que $|q| \geq 2$. Le nœud k est alors un (p, q) -cable du nœud k_2 , âme du tore plein X_1 .

3. ÉQUIVALENCES D'HOMOTOPIE (d'après [FW])

Dans ce n^o, nous admettons le théorème 1 pour démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 3.— *Soient k et k' deux nœuds dont les groupes sont isomorphes. Si l'un est indécomposable, l'autre aussi et ils ont même type. Si k est un composé $k_1 \# \cdots \# k_{m+1}$ de nœuds indécomposables, k' est un composé $k'_1 \# \cdots \# k'_{m+1}$ de nœuds tels que k_i et k'_i aient même type (non orienté).*

Le théorème de Gordon-Luecke intervient pour le passage de la variété au type du nœud dans le cas des nœuds indécomposables, mais aussi pour démontrer que les variétés sont homéomorphes dans le cas particulier des cables.

3.1. *Si la variété $E(k)$ ne contient pas d'anneau essentiel, un théorème profond de K. Johansson ([Jo], prop. 14.9) et C.D. Feustel ([F], th. 10) (voir aussi [Ja], th. X.15) affirme que les variétés $E(k)$ et $E(k')$ sont homéomorphes, et on conclut par le théorème 1. Nous n'expliquerons pas ici le théorème de Johansson-Feustel.*

3.2. Dans le cas contraire, nous utiliserons le lemme suivant (cf. [Wa], 1967, lemma 1.1, [St]) :

Lemme 1.— Soient $g : E(k') \rightarrow E(k)$ une application telle que $\pi_1(g)$ soit injectif et A un anneau essentiel plongé dans $E(k)$. L'application g est homotope à une application différentiable f telle que :

- (a) L'application f est transverse à A , l'image réciproque $A' = f^{-1}(A)$ est une surface compacte orientable sans bord relatif.
- (b) Toute composante A'_i de A' est un anneau essentiel dans $E(k')$ et $f|_{A'_i}$ induit une injection de $\pi_1(A'_i)$ dans $\pi_1(A)$.
- (c) Si $\pi_1(g)$ est un isomorphisme, A' n'est pas vide.

Par densité, on déforme g en une application différentiable f transverse à A , d'où (a). Soit A'_1 une composante de A' . Si A'_1 est une sphère, on peut la supprimer purement et simplement car A'_1 borde une boule dans $E(k')$ et $f|_{A'_1}$ est homotope à 0 dans $E(k)$. Si $\pi_1(A'_1) \rightarrow \pi_1(A)$ n'est pas injectif, il existe un cercle C plongé non homotope à 0 dans A'_1 et tel que $f|_C$ soit homotope à 0 dans A . Ce cercle C est homotope à 0 dans $E(k')$; d'après le lemme de Dehn, il borde un disque D plongé dans $E(k')$. On peut supposer le disque D transversal à A' ; en éliminant les composantes de $A' \cap D$ qui sont homotopes à 0 dans A' , on peut trouver une composante C_0 de $A' \cap D$ non homotope à 0 dans A' et bordant un disque D_0 tel que $A' \cap D_0 = C_0$. On peut alors déformer f au voisinage de D_0 de façon que la composante A'_0 de A' qui contient C_0 subisse une chirurgie éliminant C_0 (procédé de Stallings [St]). Une telle chirurgie augmente de 2 unités la caractéristique

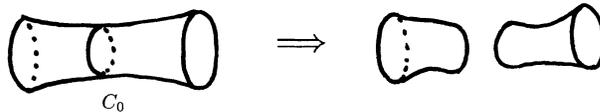


Figure 4

$\chi(A')$, elle ne produit pas de sphère, elle augmente d'au plus une unité le cardinal de $\pi_0(A')$. Comme A' ne contient pas de sphère, on a $\chi(A') \leq \#\pi_0(A')$, et au bout d'un nombre fini d'opérations, on obtient l'injectivité de $\pi_1(f)$ pour chaque composante de A' . Les composantes de A' ont alors

des groupes fondamentaux isomorphes à des sous-groupes de \mathbf{Z} ; ce sont des disques ou des anneaux. Si une composante est un disque D , son bord bD est homotope à 0 dans $E(k')$ donc dans $bE(k')$ (car le nœud k' n'est pas trivial) ; bD borde un disque D_0 dans $bE(k')$ et la sphère $D \cup D_0$ borde une boule dans $E(k')$; on peut déformer f au voisinage de cette boule pour éliminer D . Si une composante de A' est un anneau non essentiel, comme il est incompressible, il est parallèle au bord et on peut aussi le supprimer, d'où (b).

Enfin, si $f^{-1}(A)$ est vide, l'image de f est contenue dans l'une des sous-variétés de $E(k)$ découpées par A , par exemple X_1 . Comme l'anneau A est essentiel, $\pi_1(X_1)$ est un vrai sous-groupe de $\pi_1(E(k))$ et $\pi_1(f)$ ne peut être un isomorphisme.

3.3. *Supposons que la variété $E(k)$ contienne un anneau essentiel.* Le nœud k est alors un câble ou un nœud décomposable (prop. 2) et ces deux possibilités s'excluent mutuellement d'après un théorème de H. Schubert ([Schu], 21, Satz 2).

Supposons dans cette section que k soit un (p, q) -câble. Soient A un anneau essentiel comme dans la proposition 2,b et f une homéotopie de $E(k')$ dans $E(k)$ satisfaisant aux conditions du lemme 1. Si une composante A'_i de A' séparait $E(k')$ en deux variétés de nœuds non triviaux, les composantes bA'_i seraient des méridiens de k' (prop. 2) et engendreraient $H_1(E(k'))$. Or la classe d'une composante de bA est pq fois un générateur de $H_1(E(k))$. Par suite, l'anneau A'_i décompose $E(k')$ en un tore plein V'_i et une variété W'_i , et l'homomorphisme $\pi_1(A'_i) \rightarrow \pi_1(V'_i)$ n'est pas surjectif, sinon l'anneau A'_i serait parallèle au bord. Si W'_i est un tore plein, k' est un nœud torique. Ce cas est entièrement résolu par un théorème de G. Burde et H. Zieschang [BZ, 66] : pour qu'un nœud k soit un nœud torique, il faut et il suffit que le centre du groupe $G(k)$ ne soit pas trivial, et le type d'un nœud torique est déterminé par son groupe.

Écartons le cas des nœuds toriques ; la variété W'_i est alors la variété d'un nœud non trivial h'_i , âme de V'_i , et le nœud k' est un (p', q') -câble du nœud porteur h'_i (prop. 2). Comme l'homéomorphisme $\pi_1(A'_i) \rightarrow \pi_1(A)$ est injectif, pq divise $p'q'$. D'après un résultat de H. Schubert ([Schu], 21,

Satz 5), la donnée d'un cable k détermine le porteur h et le couple (p, q) aux signes près. Appliquant ce qui précède à une homéotopie de $E(k)$ dans $E(k')$, on en déduit que $p'q'$ divise pq . Par suite $pq = \pm p'q'$ et f induit une homéotopie de A'_i dans A . On peut donc supposer que f induit un homéomorphisme de A'_i sur A , et ceci pour chaque composante A'_i de A' .

Si A'_1 et A'_2 sont deux composantes de A' , les variétés W'_1 et W'_2 sont emboîtées et leur différence est un tore plein. En effet, les anneaux disjoints A'_1 et A'_2 séparent la variété $E(k')$ en V'_1 et W'_1 d'une part, V'_2 et W'_2 d'autre

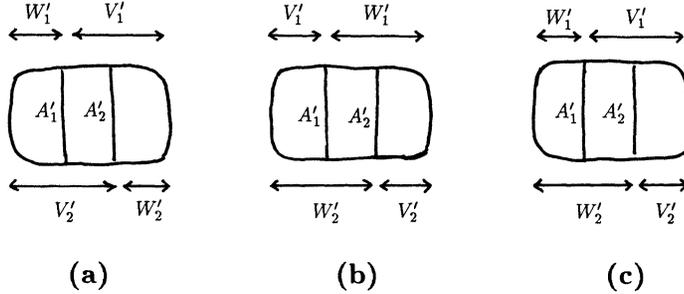


Figure 5

part ; on a donc les possibilités suivantes : (a) $W'_1 \cap W'_2 = \emptyset$, (b) $V'_1 \cap V'_2 = \emptyset$, (c) $W'_1 \subset W'_2$ ou $W'_1 \subset V'_2$.

Dans le cas (a), l'anneau A'_1 étant incompressible dans $E(k')$, les homomorphismes $\pi_1(A'_1) \rightarrow \pi_1(W'_1)$ et $\pi_1(A'_1) \rightarrow \pi_1(V'_1 \cap V'_2)$ sont injectifs, donc l'homomorphisme $\pi_1(W'_1) \rightarrow \pi_1(V'_2)$ est injectif (théorème de van Kampen), ce qui est absurde.

Dans le cas (b), l'anneau A'_2 décompose W'_1 en le tore plein V'_2 et la variété $Y = W'_1 \cap W'_2$ qui est soit un tore plein, soit la variété d'un nœud. Dans les deux cas, l'anneau A'_2 est essentiel dans W'_1 et les composantes de bA'_2 ont même classe, dans le tore plein $S_3 - \text{int}(W'_1)$ que l'âme de ce tore plein (prop. 2). Les composantes de bA'_1 sont parallèles à celles de bA'_2 sur le tore bW'_1 et l'homomorphisme $\pi_1(A'_1) \rightarrow \pi_1(V'_1)$ est donc surjectif, ce qui est absurde.

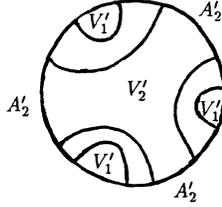


Figure 6

On est donc dans une des configurations de (c), par exemple $W'_1 \subset W'_2$. Le même argument que dans le cas (a) montre alors que l'homomorphisme $\pi_1(W'_2 \cap V'_1) \rightarrow \pi_1(V'_1)$ est injectif et que $W'_2 \cap V'_1$ est nécessairement un tore plein.

D'après ce qui précède, on peut numérotter les composantes A'_1, \dots, A'_k de A' de sorte que $W'_1 \subset W'_2 \subset \dots \subset W'_k$. Démontrons que l'on peut déformer l'homéotopie f pour rendre A' connexe. Pour $i = 2, \dots, k$, posons $X'_i = W'_i \cap V'_{i-1}$, et $X'_{k+1} = V'_k$. Notons X_1 et X_2 les variétés découpées par l'anneau A dans $E(k)$. L'application f envoie chaque X'_i dans X_1 ou X_2 .

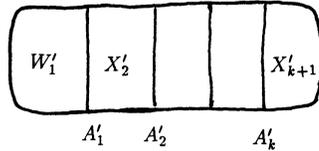


Figure 7

Supposons par exemple $f(W'_1) \subset X_1$, on a alors $f(X'_i) \subset X_{[i]}$, où $[i] = 1$ ou 2 , et $i \equiv [i] \pmod{2}$. Soit $*$ un point-base dans A , et pour $i = 1, \dots, k$, soit $*'_i$ l'image réciproque de $*$ par f dans A'_i . Comme f est une homéotopie, le théorème général de van Kampen implique qu'il existe un indice $i \in [2, k]$ et un chemin α reliant $*'_{i-1}$ à $*'_i$ dans X'_i tel que $f \circ \alpha$ soit un lacet en $*$ homotope à 0 dans $X_{[i]}$. Cet argument du "binding tie" de Stallings ([St]) est détaillé dans [BZ], p. 293. Comme X'_i est un tore plein, il existe deux arcs β et γ reliant $*'_{i-1}$ à $*'_i$ dans bX'_i dont la réunion borde un disque

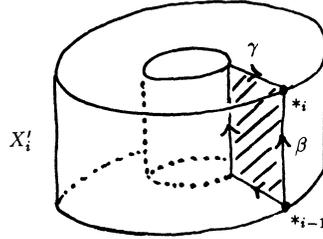


Figure 8

méridien D de X'_i et tels que les lacets $f \circ \beta$ et $f \circ \gamma$ soient homotopes à 0 dans $X_{[i]}$. Comme $\pi_2(X_{[i]}) = 0$, on peut, par une déformation constante hors d'un voisinage de X'_i , déformer f de façon que l'image de D soit concentrée au point $*$. Puis, comme $\pi_3(X_{[i]}) = 0$, on peut déformer f pour que $f(X'_i) \subset A$. Il reste alors à déplacer un peu f vers l'intérieur de $X_{[i+1]}$ pour supprimer les composantes A'_i et A'_{i+1} de $f^{-1}(A)$. Par récurrence, on arrive donc à rendre A' connexe.

On est alors dans la situation suivante : le nœud k est un (p, q) -cable, $E(k)$ est la réunion de la variété $E(h)$ du nœud porteur h et d'un tore plein V collés le long de l'anneau A . De même le nœud k' est un (p', q') -cable, $E(k')$ est la réunion d'une variété de nœud $E(h')$ et d'un tore plein V' collés le long de A' . L'application $f : E(k') \rightarrow E(k)$ est une homéotopie, elle induit un homéomorphisme de A' sur A , et $A' = f^{-1}(A)$. Comme $\pi_1(f)$ est un isomorphisme de $\pi_1(E(h')) *_{\pi_1(A')} \pi_1(V')$ sur $\pi_1(E(h)) *_{\pi_1(A)} \pi_1(V)$, et que les homomorphismes $\pi_1(A') \rightarrow \pi_1(V')$ et $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(V)$ sont injectifs, nécessairement l'application f induit une homéotopie de $E(h')$ dans $E(h)$ et une homéotopie de V' dans V .

Soit B' l'anneau complémentaire de A' dans $bE(h')$; la restriction $f|_{B'}$ est un anneau incompressible dans $E(h)$, mais pas essentiel car les composantes de $f(bB') = bA$ ont pour classe $p[m] + q[\ell]$, $|q| \geq 2$, où m et ℓ sont un méridien et un parallèle de h (prop. 2). Par suite, on peut supposer $f(B') \subset bE(h)$, donc $f(bE(h')) \subset bE(h)$. D'après le théorème de Waldhausen, on peut supposer que f induit un homéomorphisme de $E(h')$ sur $E(h)$ et une homéotopie de V' dans V . En regardant la classe des

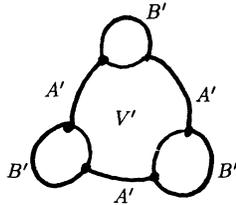


Figure 9

composantes de bA' et bA dans V' et V , on voit que $q' = \pm q$, donc $p' = \pm p$. L'homéomorphisme f de $E(h')$ sur $E(h)$ respecte les parallèles et les méridiens de h' et h (théorème de Gordon-Luecke). Les variétés $E(k')$ et $E(k)$ sont donc homéomorphes. Les nœuds k et k' ont même type d'après le théorème de Gordon-Luecke.

3.4. *Supposons enfin que le nœud k soit décomposable* et soit A un anneau essentiel séparant $E(k)$ en deux variétés de nœud non triviales X_1 et X_2 . Soit $f : E(k') \rightarrow E(k)$ une homéotopie satisfaisant aux conditions du lemme 1. Alors $f^{-1}(A)$ est constitué d'anneaux essentiels dont les bords sont des méridiens de k' .

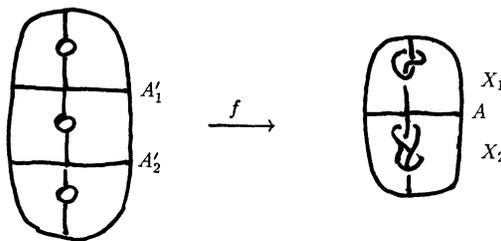


Figure 10

En effet, dans le cas contraire, k' serait un câble (prop. 2) donc k serait aussi un câble d'après 3.3, ce qui est contraire à l'hypothèse que k est décomposable. Les anneaux $A'_1 \cdots A'_k$ qui composent $f^{-1}(A)$ partagent $E(k')$ en des variétés $X'_1 \cdots X'_{k+1}$ qui sont des tores pleins ou des variétés de nœud, et les homomorphismes de $\pi_1(X'_i)$ dans $\pi_1(X_j)$ induits par f sont

injectifs car les homomorphismes de $\pi_1(X'_i)$ dans $\pi_1(E(k'))$ sont injectifs (théorème de van Kampen).

Si le nœud k est un composé $k_1 \# \cdots \# k_{m+1}$ de nœuds indécomposables, on peut supposer, par récurrence sur m , que la variété $E(k)$ est partagée en variétés $E(k_1), \dots, E(k_{m+1})$ par des anneaux essentiels disjoints A_1, \dots, A_m , que l'homéotopie f est transversale à la réunion A des anneaux A_i et que $f^{-1}(A)$ est constitué d'anneaux essentiels $A'_1 \cdots A'_n$ dont les bords sont des méridiens et qui partagent $E(k')$ en variétés E'_j , $1 \leq j \leq n+1$. La variété E'_j , pour $j \neq 1, n+1$, est bordée par des anneaux A'_{j-1} , A'_j et deux anneaux B'_j , C'_j de $bE(k')$; la variété E'_1 (resp. E'_{n+1}) est bordée par A'_1 (resp. A'_n) et un anneau B_1 (resp. B_{n+1}) de $bE(k')$. L'application f envoie E'_j dans une variété $E(k_i)$ et $\pi_1(f|E'_j)$ est injectif. Les anneaux $f|B'_j$ et $f|C'_j$ ne peuvent être essentiels, sinon $E(k_i)$ contiendrait un anneau essentiel plongé dont le bord est constitué de méridiens (théorème de l'anneau) ce qui contredirait l'hypothèse que k_i est indécomposable (prop. 2). Les anneaux $f|B'_j$ et $f|C'_j$ sont donc parallèles au bord de $E(k_i)$. Deux cas se présentent :

(a) Le parallèle de E'_j est homotope à 0, la variété E'_j est un tore plein et $f|E'_j$ est homotope dans $E(k_i)$ à une application dont l'image est un méridien. On peut alors supprimer au moins un des anneaux A'_j ou A'_{j+1} .

(b) L'application f se déforme en une application telle que $f|bE'_j$ soit un revêtement de $bE(k_i)$ respectant les méridiens. D'après le théorème de Waldhausen, $f|E'_j$ est homotope, relativement au bord, à un revêtement de $E(k_i)$.

Le raisonnement est analogue pour E'_1 et E'_{n+1} .

Lorsqu'on met ensemble tous ces revêtements, on doit obtenir une homéotopie. Après suppression des anneaux superflus de a), on a donc $m = n$, tous les revêtements sont des homéomorphismes et les variétés $E(k)$ et $E(k')$ sont homéomorphes.

4. PRÉSENTATIONS FINES ET SURFACES PLANAIRES

Venons-en à la démonstration du théorème de Gordon et Luecke. Soient k un nœud non trivial et, comme au n° 1, U un voisinage tubulaire de k , T son bord et $E = S_3 - \text{int}(U)$. Si π est la classe d'homotopie d'un cercle (non orienté) plongé dans T , on note $K(\pi)$ la variété obtenue en collant à E , le long de T , un tore plein V_π de sorte que π borde un disque dans V_π (chirurgie de Dehn). Si γ est la classe d'un méridien de k , la variété $K(\gamma)$ est isomorphe à S_3 . Soient π une autre classe et $n = |\pi\gamma|$ le nombre d'intersection arithmétique de π et γ . Il s'agit de démontrer que la variété $K(\pi)$ ne peut être homéomorphe à S_3 si $n \neq 0$. La démonstration procède par l'absurde ; elle utilise des surfaces sphériques transversales au nœud.

PROPOSITION 4.— *Si $K(\pi)$ est homéomorphe à S_3 , il existe des surfaces planaires P et Q (sphères trouées) proprement plongées dans E telles que :*

- (a) bP (resp. bQ) est réunion de cercles de classe π (resp. γ).
- (b) P et Q se coupent transversalement et chaque composante de bP rencontre chaque composante de bQ en n points.
- (c) $P \cap Q$ ne contient pas d'arc parallèle au bord dans P ni dans Q .

Cette proposition a été démontrée indépendamment par David Gabai et améliore un résultat antérieur ([Ga], 4.A).

Identifions la sphère S_3 privée de deux points $\pm\infty$ à $S_2 \times \mathbf{R}$ et notons $h : S_3 - \{\pm\infty\} \rightarrow \mathbf{R}$ la deuxième projection. Supposons que le nœud k évite les points $\pm\infty$ et que la restriction $h|_k$ soit une fonction de Morse (points critiques non-dégénérés, en nombre fini et à valeurs critiques distinctes). Une telle donnée est appelée *présentation* du nœud k . Soient S_1, \dots, S_m des sphères de niveau situées entre chaque couple de valeurs critiques consécutives ; la *complexité* de la présentation est la somme $\sum_{1 \leq i \leq m} \text{Card}(S_i \cap k)$. Une *présentation fine* est une présentation de complexité minimale.

La surface Q de la proposition 4 est l'intersection avec E d'une surface de niveau convenable pour une présentation fine h du nœud k , qui rencontre V_γ suivant des disques méridiens. La surface P est obtenue de façon

analogue à l'aide d'une présentation fine h_π du nœud k_π , âme du tore plein V_π dans $K(\pi) \cong S_3$. La condition (a) est alors satisfaite ; la condition (b) est réalisée après une déformation de h_π constante au voisinage de k_π . Il reste à réaliser la condition (c).

Introduisons deux terminologies. Supposons que $P \cap Q$ contienne un arc α qui, avec un arc β de bP , borde dans P un disque Δ qui ne contienne aucun arc de $P \cap Q$ autres que α (mais qui peut contenir des composantes circulaires de $P \cap Q$). On dit que Δ est un *disque haut* ou *bas* pour Q suivant que l'arc β est au-dessus ou en-dessous de Q (pour la fonction hau-

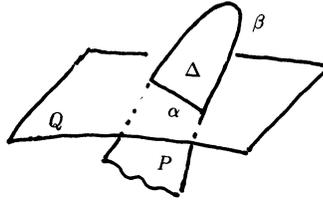


Figure 11

teur h). On peut donner une définition analogue pour P .

Désignons par I l'intervalle $[0, 1]$. Étant donné un plongement de $Q \times I$ dans E , nous identifierons $Q \times I$ à son image, nous notons $Q(\lambda)$ l'image de $Q \times \{\lambda\}$ et nous parlerons de famille plongée. Une famille plongée $Q \times I$ de surfaces de niveau de h est une *tranche médiane* si $h(Q \times I) \subset]a, b[$, où a et b sont deux valeurs critiques consécutives de $h|_k$ telles que a soit un minimum local et b un maximum local.

Lemme 2. — Il existe des familles $P \times I$ et $Q \times I$ de surfaces planaires proprement plongées dans E telles que :

- (a) $Q \times I$ est une tranche médiane dans une présentation fine de k .
- (b) $P \times I$ est isotope à une tranche médiane dans une présentation fine de k_π .
- (c) Toute composante de $bP(\lambda)$ rencontre toute composante $bQ(\mu)$ transversalement en n points.

(d) Il existe $\lambda_0 \in]0, 1[$ tel que $P(\lambda_0)$ contienne un disque haut pour $Q(1)$ et un disque bas pour $Q(0)$.

(e) Il existe $\mu_0 \in]0, 1[$ tel que $Q(\mu_0)$ contienne un disque haut pour $P(1)$ et un disque bas pour $P(0)$.

(f) La fonction $h|P \times I$ est une fonction de Cerf.

On a déjà vu comment réaliser la condition (c). Choisissons $\lambda_0 \in]0, 1[$ et rendons $P(\lambda_0)$ transversal à $Q(0)$ et $Q(1)$ par une petite isotopie du plongement de $P \times I$ fixe au voisinage de $bP \times I$. La position de $Q \times I$ en tranche médiane permet alors de réaliser la condition (d). Le même raisonnement peut s'appliquer à $Q(\mu_0)$, mais alors, on prolonge à E l'isotopie de $Q \times I$, et, en l'inversant, on obtient une isotopie de $P \times I$ qui donne le même résultat sans bouger $Q \times I$.

La condition (f) a la signification suivante :

(i) les fonctions $h|P(\lambda)$ n'ont pas de point critique au voisinage de $bP(\lambda)$,

(ii) la fonction $h|P(\lambda)$ est une fonction de Morse sauf pour un nombre fini de valeurs de λ ,

(iii) les singularités autorisées sont le croisement de deux valeurs critiques et les singularités de naissance ou de mort.

Cette condition est réalisée par une petite isotopie de $P \times I$ en raison de la densité des fonctions de Cerf. Bien sûr, j'ai omis un certain nombre de détails et notamment qu'il faut s'assurer que P a une forme convenable au voisinage de bP .

Supposons la fonction h choisie de sorte que les surfaces $Q(\mu)$ soient les surfaces de niveau $h^{-1}(\mu)$. Le graphique Γ de $h|P \times I$ est l'ensemble des points (λ, μ) de $I \times I$ tels que μ soit la valeur de h en un point singulier de $h|P(\lambda)$ (voir figure 12). Pour un couple $(\lambda, \mu) \in I^2 - \Gamma$, les surfaces $P(\lambda)$ et $Q(\mu)$ sont transverses. La proposition 4 sera démontrée si l'on établit l'existence d'un point (λ, μ) de $I^2 - \Gamma$ tel que $P(\lambda)$ ne contienne pas de disque haut ni de disque bas pour $Q(\mu)$ et inversement.

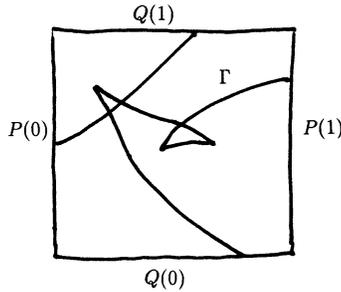


Figure 12

On remarque que, si $P(\lambda)$ contient un disque haut pour $Q(\mu)$, pour tout λ' , la surface $P(\lambda')$ ne peut contenir de disque bas pour $Q(\mu)$. La démonstration de cette remarque utilise le fait que k n'est pas trivial et que h est une présentation fine de k . On peut donc définir une fonction $q(\lambda, \mu)$ sur $I^2 - \Gamma$ prenant pour valeur l'une des trois lettres H, L, N suivant que $P(\lambda)$ contient un disque haut pour $Q(\mu)$, un disque bas ou aucun des deux. On définit de façon symétrique une fonction $p(\lambda, \mu)$. Ces fonctions sont localement constantes. Les propriétés (d) et (e) du lemme 2 donnent des indications sur p et q au bord du carré I^2 . On démontre aussi que la traversée d'un arc de Γ ne peut produire que certains changements des valeurs de p et q . Raisonnant à nouveau par l'absurde, les auteurs démontrent que, s'il n'existe pas de point (λ, μ) tel que $p(\lambda, \mu) = q(\lambda, \mu) = N$, il existe dans le graphique Γ un croisement comme sur la figure 13, puis que cette éventualité est impossible.

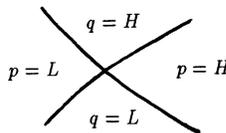


Figure 13

5. GRAPHERS LABELLÉS

Nous pouvons maintenant décrire le principe de la démonstration de Gordon et Luecke. Au couple de surfaces P et Q de la proposition 4, on associe deux graphes labellés G_P et G_Q satisfaisant à une règle de parité (voir ci-dessous). Vient alors un raisonnement combinatoire sur un tel couple de graphes. Dans le cas $n \geq 2$, traité dans [CGLS], on conclut que l'un des graphes contient une face d'un certain type (cycle de Scharlemann). Dans le cas $n = 1$, traité dans [GL], on démontre que G_Q contient un cycle de Scharlemann ou que G_P possède une propriété (T) plus faible que la précédente. Revenant alors à la situation topologique, on démontre que, si G_P (resp. G_Q) contient un cycle de Scharlemann, la variété $K(\gamma)$ (resp. $K(\pi)$) contient un espace lenticulaire percé. Un raisonnement plus élaboré montre que la seule propriété (T) pour G_P implique la même conclusion pour $K(\gamma)$. Le groupe fondamental d'un espace lenticulaire, percé ou non, est un groupe cyclique non nul et ne peut donc se plonger dans $\pi_1(S_3)$, d'où la dernière contradiction.

Nous définissons les graphes G_P et G_Q dans ce n° ; dans le n° suivant, nous définissons un cycle de Scharlemann et nous démontrons comment il lui correspond un espace lenticulaire troué. Pour la démonstration complète, nous renvoyons aux mémoires originaux [CGLS] et [GL].

Supposons, pour simplifier, que $n = 1$, c'est-à-dire que chaque composante de bP rencontre chaque composante de bQ en un point unique. Orientons arbitrairement les surfaces P et Q et numérotions de 1 à p , consécutivement sur le tore T , les composantes de bP et de 1 à q celles de bQ . L'ensemble des sommets du graphe G_Q est l'ensemble des composantes de bQ . Les sommets ne sont pas des points mais des disques. Pour $j \in [1, q]$, le sommet q_j de G_Q est représenté par un disque dont le bord est la composante bQ_j . Les arêtes sont les arcs de $P \cap Q$. Les arêtes issues de q_j ont pour points d'attache les p points $bQ_j \cap bP_i$; l'indice i est le label du point d'attache. Ces points d'attache se présentent en ordre consécutif dans le sens direct ou rétrograde ; on associe au sommet q_j le signe + ou - suivant le cas. Le graphe G_P est défini de façon analogue. Les signes des sommets ne sont pas indépendants. Notons (j, i) le point

d'attache $bQ_j \cap bP_i$ de label i au sommet q_j de G_Q ; le *caractère* de ce point est $\text{char}(j, i) = (\text{signe } q_j)(\text{signe } p_i)$. Du fait que la variété E est orientable, on vérifie que si une arête joint deux points d'attache (de G_P ou de G_Q), les caractères de ces points sont opposés (*règle de parité*).

Le graphe G_Q est tracé sur la surface Q à l'exception des disques Q_j que l'on peut considérer comme disques méridiens de V_γ . Une face de G_Q est une composante du complémentaire dans Q des arêtes de G_Q . On remarque qu'on oublie complètement les composantes circulaires éventuelles de $P \cap Q$. D'après la proposition 4,c, les graphes G_P et G_Q n'ont pas de face bordée par une seule arête.

De tels graphes labellés, à sommets épais, ont été utilisés et étudiés par M. Scharlemann [Scha], D. Gabai [Ga] et [CGLS].

6. CYCLE DE SCHARLEMANN

Un *cycle de Scharlemann* Σ dans G_Q est un cycle d'arêtes tel que :

(1) si l'on imagine que les sommets de G_Q sont ponctuels, Σ est homéomorphe à un cercle qui borde un disque Δ dans Q tel que $G_Q \cap \text{int}(\Delta) = \emptyset$,

(2) si l'on oriente le cycle Σ , les queues de toutes les arêtes ont même label,

(3) tous les sommets de G_Q appartenant au cycle Σ ont même signe.

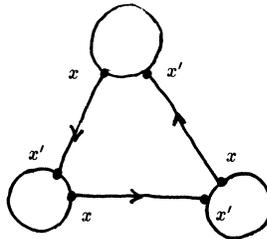


Figure 14

Il résulte de la définition que toutes les arêtes de Σ ont des origines ayant un même label x et des extrémités ayant le même label voisin x' . À

la fin du n° précédent, on a remarqué que les graphes G_P et G_Q ne peuvent contenir de cycle bordé par une seule arête.

Lemme 3. — Si G_Q contient un cycle de Scharlemann bordé par k arêtes, la variété $K(\pi)$ contient un sous-espace homéomorphe à un espace lenticulaire percé de deux trous, dont le groupe fondamental est $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$.

Soit Σ comme ci-dessus un cycle de Scharlemann dans G_Q . Les labels x et x' sont des composantes de bP adjacentes dans T et de signes opposés puisque tous les sommets de Σ ont même signe. Ces composantes bordent des disques méridiens disjoints D et D' dans V_π . Soit C le cylindre découpé dans V_π par D et D' qui ne contient dans son bord pas d'autres composantes de bP que x et x' . Notons \hat{P} la sphère contenue dans $K(\pi)$ obtenue en bouchant tous les trous de P par des disques méridiens de V_π . Soit enfin

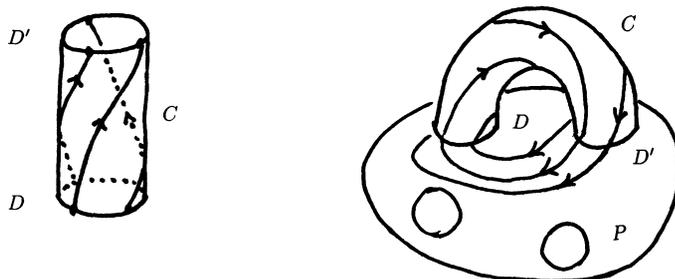


Figure 15

R la réunion de \hat{P} un peu épaissi et de l'anse C attachée à \hat{P} en D et D' . L'espace R est homéomorphe à un tore plein percé d'un trou. Le disque Δ de Q bordé par le cycle Σ est attaché à R le long d'un cercle qui parcourt k fois l'anse C ; sa classe est k fois un générateur de $\pi_1(R)$. Par suite, l'espace réunion de R et du disque Δ un peu épaissi est homéomorphe à un espace lenticulaire $L(k, h)$ percé de deux trous. Plus simplement, son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ (théorème de van Kampen) et son bord est réunion de deux sphères disjointes, ce qui suffit à lui interdire d'être un sous-espace de S_3 .

Indiquons maintenant quelle est la propriété (T) qui intervient dans la démonstration du cas $n = 1$ (cf. n° 5). Un q -type est un élément de $\{+, -\}^q$.

Soit E une face de G_P , homéomorphe à un disque. Ce disque touche un sommet v du graphe suivant un intervalle joignant des points d'attache dont les labels sont consécutifs. Pour $k \in [1, q]$, notons $S_k(E)$ l'ensemble des sommets de la face E pour lesquels ces labels sont k et $k + 1$ (avec la convention $q + 1 = 1$). Le graphe G_P possède la propriété (T) si, et pour tout q -type τ , il existe une face E de G_P , homéomorphe à un disque et telle que :

(1) pour tout $k \in [1, q]$, les sommets de l'ensemble $S_k(E)$ ont un même signe $\varepsilon(k)$,

(2) la fonction ε et la restriction de τ à l'ensemble $L(E)$ des entiers k tels que $S_k(E) \neq \emptyset$, sont égales ou opposées.

On remarque immédiatement qu'un cycle de Scharlemann représente tout q -type.

APPENDICE

Les théorèmes suivants sont des outils usuels de la topologie de dimension 3 et ont été utilisés dans l'exposé.

THÉORÈME (J.W. Alexander).— *Une sphère différentiablement plongée dans S_3 sépare S_3 en deux variétés homéomorphes à des boules fermées.*

Un tore différentiablement plongé dans S_3 sépare S_3 en deux variétés dont l'une est homéomorphe à un tore plein. ([A], [M], [Schu] ; on peut d'ailleurs lire "difféomorphe" au lieu de "homéomorphe".)

THÉORÈME (C. Papakyriakopoulos).— *Soit V une variété de dimension 3, de bord bV .*

a) *Si $\pi_1(bV) \rightarrow \pi_1(V)$ n'est pas injectif, il existe un cercle plongé dans bV dont la classe d'homotopie est 0 dans V et $\neq 0$ dans bV (théorème du lacet).*

b) *Soit C un cercle plongé dans bV , homotope à 0 dans V . Il existe un disque D plongé dans V tel que $C = D \cap bV$ (lemme de Dehn).*

c) *Si $\pi_2(V) \neq 0$, il existe une sphère plongée dans V qui n'est pas*

homotope à 0 (théorème de la sphère). ([Pa], voir aussi [H] ou [Ja].)

DÉFINITION.— Une variété V de dimension 3, de bord bV , est une variété de Haken si elle est compacte, connexe, orientable, irréductible (une sphère plongée dans V borde une boule), suffisamment grande (elle contient une surface orientable proprement plongée S telle que $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(V)$ soit injectif).

Le bord bV est incompressible si, pour chaque composante connexe bV_i de bV , l'homomorphisme $\pi_1(bV_i) \rightarrow \pi_1(V)$ est injectif.

THÉORÈME (F. Waldhausen).— Soient V et V' deux variétés de Haken à bords incompressibles. Soit $f : (V, bV) \rightarrow (V', bV')$ une application continue telle que l'homomorphisme $\pi_1(f)$ soit injectif. Alors ou bien l'application f est homotope, dans les applications de (V, bV) dans (V', bV') , à un revêtement, ou bien V est difféomorphe à un produit $S \times [0, 1]$ et f est homotope à une application dont l'image est contenue dans le bord bV' .

Si $\pi_1(f)$ est un isomorphisme, f est homotope à un homéomorphisme. ([Wa], 1968, th. 6.1, voir aussi [Ja], X, [He], XIII et [L].)

Les propriétés analogues pour les surfaces sont connues depuis Nielsen. Elles ont été utilisées tacitement dans cet exposé pour le tore.

BIBLIOGRAPHIE

- [A] J.W. ALEXANDER - *On the subdivision of a 3-space by a polyhedron*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **10** (1924), 8-10.
- [BZ] G. BURDE, H. ZIESCHANG - *Eine Kennzeichnung der Torusknoten*, Math. Annalen, **167** (1966), 169-176.
- *Knots*, Walter de Gruyter, Berlin New-York (1985).
- [CF] J.W. CANNON, C.D. FEUSTEL - *Essential embeddings of annuli and Möbius bands in 3-manifolds*, Trans. AMS, **215** (1976), 219-239.
- [CGLS] M. CULLER, C.McA. GORDON, J. LUECKE, P.B. SHALEN - *Dehn surgery on knots*, Ann. of Math., **125** (1987), 237-300.

- [F] C.D. FEUSTEL - *On the torus theorem and its applications*, Trans. AMS, **217** (1976), 1-43.
- [FW] C.D. FEUSTEL, W. WHITTEN - *Groups and complements of knots*, Can. J. of Math., **30** (1978), 1284-1295.
- [Ga] D. GABAI - *Foliations and the topology of 3-manifolds*, III, J. Diff. Geom., **18** (1987), 479-536.
- [GL] C.McA. GORDON, J. LUECKE - *Knots are determined by their complements*, Journal of AMS, **2** (1989), 371-415.
- [Gr] A. GRAMAIN - *Rapport sur la théorie classique des nœuds (1ère partie)*, Sémin. Bourbaki, exposé n° 485, 1975-76, Lect. Notes in Math. n° 567, Springer (1977), 222-237.
- [H] J. HEMPEL - *3-manifolds*, Ann. of Math. Studies n° 86 (1976), Princeton Univ. Press.
- [Ja] W. JACO - *Lectures on Three-Manifolds Theory*, Reg. Conf. in Math. n° 43, AMS (1980).
- [Jo] K. JOHANNSON - *Homotopy equivalence of 3-manifolds with boundaries*, Lect. Notes in Math. n° 761, Springer (1979).
- [F] F. LAUDENBACH - *Topologie de la Dimension 3*, Astérisque n° 12, S.M.F., Paris (1974).
- [M] E.E. MOÏSE - *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Graduate Texts in Math. **47**, Springer (1977).
- [N] D. NOGA - *Über den Aussenraum von Produktknoten und die Bedeutung der Fixgruppen*, Math. Zeit., **101** (1967), 131-141.
- [P] C. PAPAKYRIAKOPOULOS - *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*, Ann. of Math., **66** (1957), 1-26.
- [Scha] M. SCHARLEMANN - *Smooth spheres in R^4 with four critical points are standard*, Invent. Math., **70** (1985), 125-141.
- [Schu] H. SCHUBERT - *Knoten und Vollringe*, Acta Mat., **90** (1953), 131-286.
- [Sc] P. SCOTT - *A new proof of the annulus and torus theorem*, Amer. J. of Math., **102** (1980), 241-277.
- [Si] J. SIMON - *An algebraic classification of knots in S^3* , Ann. of Math., **97** (1973), 1-13.

- [ST] J. STALLINGS - *On fibering certain 3-manifolds*, in *Topology of 3-manifolds and related topics* (Proceedings of the 1961 Topology Conference, Univ. of Georgia), Prentice-Hall (1962).
- [Wa] F. WALDHAUSEN - *Gruppen mit Zentrum und 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten*, *Topology* **6** (1967), 505-517.
- *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, *Ann. of Math.*, **87** (1968), 56-88.
- [Wh] W. WHITTEN - *Algebraic and geometric characterizations of knots*, *Invent. Math.*, **26** (1974), 259-270.
- *Knots complements and groups*, *Topology*, **26** (1987), 41-44.

André GRAMAIN
Université de Tours
Faculté des Sciences
Parc de Grandmont
F-37200 TOURS

Astérisque

JEAN-CLAUDE SIKORAV

Homologie associée à une fonctionnelle [d'après A. Floer]

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 733, p. 115-141

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__115_0>

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

HOMOLOGIE ASSOCIÉE À UNE FONCTIONNELLE

[d'après A. FLOER]

par Jean Claude SIKORAV

INTRODUCTION

Commençons par rappeler une présentation de la théorie de Morse sur une variété M de dimension finie :

1) Toute fonction $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ peut être perturbée pour n'avoir que des points critiques non dégénérés.

Si M est compacte, les points critiques sont alors en nombre fini et l'on peut construire un complexe donnant l'homologie de M , de la façon suivante :

2) C_i est engendré librement sur \mathbf{Z} par les points critiques d'indice i .

3) L'opérateur bord $\partial : C_i \rightarrow C_{i-1}$ est défini par $\partial a = \sum \bar{m}(a, b) b$, où a est un point d'indice i , b décrit les points d'indice $i-1$ et $\bar{m}(a, b)$ compte algébriquement le nombre de lignes de gradient descendant de a à b pour une métrique générique.

L'existence du complexe est due à R. Thom en 1949 [Th] et la description du bord à S. Smale en 1960 [S], mais sa compréhension a été renouvelée en 1981 par E. Witten [Wi1], motivé par des considérations physiques. Ce dernier fait jouer le premier rôle à l'espace $\mathcal{M}(a, b)$ des lignes de gradient descendant de a à b . C'est génériquement une variété de dimension $ind(a) - ind(b)$, ce qui se voit classiquement en l'écrivant comme intersection de la variété stable $W^s(a)$ et de la variété instable $W^u(b)$. Mais Witten le considère comme un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{B}(a, b)$ des chemins $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$ reliant a à b , formé des minima de l'énergie $E(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} [|\dot{\gamma}(t)|^2 + |\nabla f(\gamma(t))|^2] dt$. Ces chemins sont aussi appelés "instantons".

S.M.F.

S.P. Novikov [N] a indiqué une généralisation de cette construction pour une fonction à valeurs dans S^1 (ou plus généralement pour une forme fermée non exacte). L'anneau de base du complexe est alors un complété convenable de $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ (pour tenir compte des différents relevés des points critiques sur le revêtement d'intégration).

La présentation de Witten ouvrait la voie à une généralisation de ce complexe de "Thom-Smale-Witten" à la dimension infinie, pour des fonctionnelles dont les points critiques ont un indice et un co-indice infini. C'est ce qu'a fait Floer en 1986-87 dans deux cas particuliers, intéressants à deux titres très différents : la fonctionnelle d'aire (ou d'action) en géométrie symplectique [F2], dont nous dirons quelques mots au §6 (elle mériterait beaucoup plus !), et la fonctionnelle de Chern-Simons, qui donne naissance à l'homologie d'instantons [F3], à laquelle cet exposé sera essentiellement consacré.

Dans les deux cas, l'indice d'un point critique est d'abord défini de façon relative (différence d'indices entre deux points) en utilisant la notion de *flot spectral* de [APS III]. Un phénomène nouveau par rapport à la dimension finie apparaît : cette différence dépend de la donnée d'une classe d'homotopie de chemins entre les deux points (voir 1.5 et 6.1). Pour la fonctionnelle de Chern-Simons, qui est en fait à valeurs dans S^1 , ceci implique que le complexe est défini sur \mathbf{Z} (à la différence de l'homologie de Novikov), mais qu'il est gradué sur $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$.

Le point sans doute le plus intéressant de la théorie est l'interprétation des lignes de gradient. Pour la fonctionnelle de Chern-Simons, elles s'interprètent comme des connexions (modulo jauge) *autoduales* sur $\mathbf{R} \times M$ (voir 1.4). Une ligne de gradient joint deux points critiques si la connexion associée est asymptotiquement plate. La fonctionnelle d'énergie est celle de Yang-Mills : $E(A) = \int_{\mathbf{R} \times M} |F(A)|^2$. Rappelons que cette équation d'autodualité, considérée sur une variété W^4 fermée, est à la base des travaux de Donaldson [D1] [D2] [D3]. Son étude sur une variété ouverte a été commencée par Taubes [Ta1].

C'est cette généralisation de l'équation des lignes de gradient qui va fournir les propriétés les plus intéressantes de l'homologie d'instantons, notamment les propriétés de "Topological Quantum Field Theory" en dimen-

sion (3+1) : voir [At1],[At2] et [Wi2].

Dans le cas symplectique, l'équation des lignes de gradient s'interprète comme celle des courbes pseudo-holomorphes au sens de M. Gromov [Gr] (voir 6.1).

On se contentera ici d'exposer quelques résultats de cette théorie et de donner une idée des démonstrations. La seule référence publiée pour celles-ci reste l'article [F3], mais nous avons aussi utilisé des préprints de Jones-Rawnsley-Salamon [JRS] et de Fukaya [Fu]. Signalons que ce dernier donne une extension des résultats de Floer pour une variété de dimension trois quelconque.

1. LA FONCTIONNELLE DE CHERN-SIMONS

1.1. Rappels sur les connexions et l'action du groupe de jauge (cf. [FU], [DK])

Soit M une variété et $P \rightarrow M$ un G -fibré principal, où G est un groupe de Lie. L'espace $\mathcal{A}(P)$ des connexions sur P est affine sur $\Omega^1(M, ad(P))$. On notera $\Omega^i(M, ad(P)) = \Omega_{ad}^i(M)$ ou Ω_{ad}^i s'il n'y a pas de risque de confusion. La connexion a donne une dérivation covariante $d_a : \Omega_{ad}^i \rightarrow \Omega_{ad}^{i+1}$. Le composé $d_a \circ d_a$ est la multiplication (en utilisant le crochet dans l'algèbre de Lie) par la courbure $F(a) \in \Omega_{ad}^2$. Le groupe d'automorphismes de P ou *groupe de jauge*, noté $\mathcal{G}(P)$, agit naturellement sur $\mathcal{A}(P)$. Son algèbre de Lie s'identifie à Ω_{ad}^0 et la différentielle de $a \mapsto g.a$ est d_a (en prenant l'action à droite). On note $\mathcal{B}(P) = \mathcal{A}(P)/\mathcal{G}(P)$ le quotient : il est séparé, et est une variété près des classes de connexions *irréductibles*. L'espace tangent $T_{[a]}\mathcal{B}^*(M)$ est $\Omega_{ad}^1/im d_a$.

Soit σ une métrique riemannienne sur M . En utilisant le produit scalaire naturel sur $su(2)$ on peut définir l'opérateur de Hodge $*_\sigma : \Omega_{ad}^i \rightarrow \Omega_{ad}^{n-i}$ et l'adjoint $L^2, d_a^* = *d_a*$, ce qui permet d'identifier

$$T_{[a]}\mathcal{B}^*(M) = \ker d_a^* \subset \Omega_{ad}^1.$$

Le plus souvent, P sera trivial. Le choix d'une trivialisaton permet alors d'identifier $\mathcal{A}(P) = \Omega^1(M, g)$ et l'on a $d_a\omega = d\omega + [a, \omega]$. Le groupe

$\mathcal{G}(P) = \mathcal{G}(M)$ est formé des applications de M dans G , et il agit sur $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(M)$ par: $g \cdot a = g^{-1}dg + g^{-1}ag$. De plus, on supposera $G = SU(2)$ ou $SO(3)$ de sorte que : a irréductible $\Leftrightarrow \mathcal{G}_a = Z(G)$ (où $\mathcal{G}_a = \{g \in \mathcal{G}(M) \mid g \cdot a = a\}$ est le groupe d'isotropie et $Z(G)$ le centre) $\Leftrightarrow \ker(d_a) = 0$.

Remarque. — Il faut travailler avec des espaces de Sobolev pour avoir des variétés banachiques auxquelles on peut appliquer le théorème des fonctions implicites. Par exemple on peut prendre pour $\mathcal{A}(P)$ des formes de classe L_1^p (une dérivée dans L^p) et pour $\mathcal{G}(P)$ des applications de classe L_2^p , avec $p > \frac{1}{2} \dim M$ pour que $\mathcal{G}(P)$ soit formé d'applications continues. Au §2 on aura besoin de prendre $p > \dim M$ pour que $\mathcal{A}(P)$ soit formé d'applications continues.

1.2. Fonctionnelle de Chern-Simons [CS] [APS]

On suppose maintenant M de dimension trois, fermée, orientée, et $G = SU(2)$. La courbure définit alors une 1-forme sur $\mathcal{A}(M)$: $\alpha(a) \cdot u = \int_M \text{tr}(F(a) \wedge u)$. Cette forme est fermée car $d\alpha(u, v) = \int_M \text{tr}(d_a(u \wedge v)) = \int_M d(\text{tr}(u \wedge v))$. Comme $\mathcal{A}(M)$ est un espace vectoriel, elle a une primitive préférée qui est par définition la *fonctionnelle de Chern-Simons*. Si le fibré est trivial, on trouve en utilisant la formule pour la courbure :

$$CS(a) = \int_M \text{tr}\left(\frac{1}{2}a \wedge da + \frac{1}{3}a \wedge a \wedge a\right).$$

En utilisant Stokes, on trouve la définition originelle, issue de la théorie des classes caractéristiques secondaires :

$$CS(a) = \frac{1}{2} \int_{M \times I} \text{tr}(F(A) \wedge F(A)),$$

où $A \in \Omega_{ad}^1(M \times I)$, est telle que $A \mid M \times \{0\} = 0$ et $A \mid M \times \{1\} = a$.

La courbure étant équivariante sous l'action du groupe de jauge, descend en une 1-forme fermée sur $\mathcal{B}(M)$. Elle n'est alors plus exacte. Plus précisément, en considérant un fibré convenable sur $M \times S^1$, le fait que $\frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(F(A) \wedge F(A))$ est l'intégrande donnant la deuxième classe de Chern implique

$$CS(g \cdot a) = CS(a) + 4\pi^2 \deg(g).$$

Donc, si l'on note $\mathcal{G}_o(M) \subset \mathcal{G}(M)$ la composante connexe de id , formé des automorphismes de degré 0, et $\hat{\mathcal{B}}(M) = \mathcal{A}(M)/\mathcal{G}_o(M)$, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{B}}(M) & \xrightarrow{CS} & \mathbf{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}(M) & \xrightarrow{CS} & \mathbf{R}/4\pi^2\mathbf{Z} \end{array}$$

Remarque. — Les espaces $\mathcal{B}(M)$ et $\mathcal{B}^*(M)$ ont le type d'homotopie faible du classifiant $B(\mathcal{G}(M)/\{\pm id\})$, donc $\pi_1 \mathcal{B}(M) = \pi_o(\mathcal{G}(M)/\{\pm 1\}) = \mathbf{Z}$, donné par le degré, et $\hat{\mathcal{B}}(M)$ est le revêtement universel de $\mathcal{B}(M)$.

1.3. Points critiques

Par définition, les points critiques de CS sur $\mathcal{A}(M)$ sont les connexions plates. L'holonomie donne une identification canonique entre l'espace des connexions plates modulo jauge et l'espace $R(M) = Hom(\pi_1 M, SU(2))$ /conjugaison. Cet espace a été étudié par de nombreux auteurs, en particulier c'est lui qui figure dans la définition de l'invariant de Casson [AM] [Ma]. Notons qu'il est compact puisque $\pi_1 M$ est de type fini. On note de même $R^*(M)$ correspondant aux connexions plates irréductibles, ce qui équivaut à l'irréductibilité de la représentation d'holonomie.

1.4. Lignes de gradient

Si M est munie d'une métrique riemannienne, on peut considérer $*_{\sigma} F(a) \in \Omega_{ad}^1(M)$ comme le gradient L^2 de CS sur $\mathcal{A}(M)$. Par passage au quotient, on obtient une section $\nabla_{\sigma} CS : \mathcal{B}^*(M) \rightarrow \hat{T}\mathcal{B}^*(M)$, où $\hat{T}\mathcal{B}^*(M)$ est un complété convenable du fibré tangent.

Soit $t \mapsto a(t)$ un chemin dans $\mathcal{A}(M)$. Notant A la connexion $\{a(t)\} \in \Omega_{ad}^1(\mathbf{R} \times M)$ (A est "en jauge temporelle", c'est-à-dire sans terme dt), on a

$$F(A) = \{F(a(t))\} + \partial a / \partial t \wedge dt.$$

On en déduit que l'équation des lignes de gradient descendantes $\partial a/\partial t + *_\sigma F(a(t)) = 0$ équivaut à l'équation d'autodualité

$$F^-(A) = \frac{1}{2}(F(A) - *F(A)) = 0,$$

où A est la connexion $\{a(t)\} \in \Omega_{ad}^1(\mathbf{R} \times M)$ et la métrique est le produit $dt^2 \times \sigma$. Notons que toute connexion sur $\mathbf{R} \times M$ est équivalente modulo $\mathcal{G}(\mathbf{R} \times M)$ à une connexion $A = \{a(t)\}$ sans terme dt , ou "en jauge temporelle". En effet, posant $A = \{a(t)\} + \{b(t) \wedge dt\}$, il suffit de résoudre l'équation différentielle ordinaire $g^{-1} \frac{\partial g}{\partial t} + g^{-1} b g = 0$. Ceci prouve en fait qu'on a une identification naturelle

$$\mathcal{B}(\mathbf{R} \times M) = \mathcal{A}(\mathbf{R} \times M) / \mathcal{G}(\mathbf{R} \times M) = C^\infty(\mathbf{R}, \mathcal{A}(M)) / \mathcal{G}(M)$$

A fortiori un élément de $\mathcal{B}(\mathbf{R} \times M)$ définit un chemin dans $\mathcal{B}(M)$. Notons que le caractère elliptique de l'équation d'autodualité modulo jauge implique qu'il n'y a pas de solution locale à partir d'une condition initiale arbitraire. Ceci est bien sûr lié au fait que le gradient L^2 n'est pas un vrai champ de vecteurs.

1.5. Indice d'un point critique [F3] [APS III]

Si M est munie d'une métrique riemannienne, le hessien de CS en un point critique $[a] \in R^*(M)$ s'identifie à $H_a = *d_a|_{ker d_a^*}$. Cet opérateur est Fredholm d'indice 0 si on le considère de L_1^2 vers L_0^2 . Considéré comme opérateur non borné sur L_0^2 , il est auto-adjoint à spectre discret et non borné dans les deux sens.

Ceci empêche de définir l'indice d'un point critique comme le nombre de valeurs propres < 0 du hessien, mais si $[a(t)]$ est un chemin entre deux points critiques, on peut définir le *flot spectral* $SF(H_{a(t)})$ comme le nombre algébrique de valeurs propres qui passent de (< 0) à (≥ 0). Il ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin et pas de la métrique.

En fait, on aura besoin de traiter aussi les connexions plates réductibles, où $\mathcal{B}(M)$ n'est plus une variété. Pour cela, on remplace H_a par le "hessien équivariant"

$$D_a \in End(\Omega^0 \oplus \Omega^1), (u, v) \mapsto (d_a^* v, d_a u + *d_a v).$$

Un calcul simple montre que si a est plate on a $\ker D_a = \ker(d_a|\Omega^0) \oplus \ker H_{[a]}$. On définit ainsi $SF(a, b) \in \mathbf{Z}$ pour a, b plates quelconques, nombre ne dépendant que des classes de a et b dans $\hat{R}(M)$.

En revanche, $SF(a, b)$ n'est défini que modulo 8 sur $R(M)$. Plus précisément :

PROPOSITION [APS III].— *Si a est plate et $g \in \mathcal{G}(M)$ on a $SF(ga, a) = 8 \deg(g)$.*

La preuve de cette proposition repose sur l'identification de $SF(ga, a)$ avec l'indice de l'opérateur d'autodualité sur le $SU(2)$ -fibré $P_g \rightarrow S^1 \times M$ défini par g . Rappelons que l'indice sur une variété fermée vaut $8c_2(P) - 3(1 - b_1(W) + b_2^-(W))$ [FU] [DK].

On peut maintenant définir l'indice d'une (classe de) connexion plate en utilisant la connexion triviale privilégiée θ :

DÉFINITION.— *Si a est une connexion plate on pose $ind([a]) = SF(a, \theta)$. Ceci définit $ind(\alpha) \in \mathbf{Z}$ si $\alpha \in \hat{R}(M)$ et $ind(\alpha) \in \mathbf{Z}_{/8\mathbf{Z}}$ si $\alpha \in R(M)$.*

Précisons l'effet d'un changement d'orientation de M . Comme $CS(-M, a) = -CS(M, a)$ on a $SF(-M, a, b) = SF(M, b, a) - \dim \ker(D_a) + \dim \ker(D_b)$, d'où

$$ind(-M, a) = -ind(M, a) - \dim \ker(D_a) + \dim \ker(D_\theta).$$

Notations Si $a, b \in R(M)$, on note $\mathcal{B}(a, b) \in \mathcal{B}(\mathbf{R} \times M)$ le sous-espace correspondant aux chemins de a à b dans $\mathcal{B}(M)$. Ses composantes connexes $\mathcal{B}(a, b; i)$ sont paramétrées par les entiers i dans la classe modulo 8 de $ind(a) - ind(b)$ (valeurs du flot spectral).

1.6. DÉFINITION.— *Un point critique $[a] \in R(M)$ est non dégénéré si $\ker H_{[a]} = 0$.*

(C'est la notion naturelle pour une fonctionnelle équivariante.)

Cette propriété s'écrit $\ker(d_a) \cap \ker(d_a^*) = 0$ soit $H^1(\Omega^*, d_a) = 0$ par théorie de Hodge. Or on a $H^1(\Omega^*, d_a) = H_{[a]}^*(M, su(2)) = H_{[a]}^*(\pi_1 M, su(2))$, cohomologies à coefficients tordus par $[a] : \pi_1 M \rightarrow SU(2)$ (définie modulo conjugaison). L'espace $H_{[a]}(\pi_1 M, su(2))$ est l'espace tangent de Zariski à

$R(M)$. Donc si $[a]$ est non dégénéré il est isolé dans $R(M)$. Comme $R(M)$ est compact, il sera fini si tous ses points sont non dégénérés. Notons que, si a est plate, on a $\ker(D_a) = 0$ si et seulement si a est irréductible et non dégénérée.

La connexion triviale est non dégénérée si et seulement si $H^1(M; su(2)) = 0$ soit si M est une *sphère d'homologie rationnelle*. On a alors $\dim \ker(D_\theta) = \dim \ker(d_\theta) = 3$, donc si a est un point critique non dégénéré on a :

$$\text{ind}(-M, a) = 3 - \text{ind}(M, a) - \dim \mathcal{G}_a.$$

Si M est de plus une sphère d'homologie entière, le seul morphisme réductible $\pi_1 M \rightarrow SU(2)$ est trivial : en effet, il prend ses valeurs dans un $S^1 \subset SU(2)$, et $\text{Hom}(\pi_1 M, S^1) = H^1(M, S^1) = 0$.

2. PERTURBATIONS [Ta4]

2.1. Espace des perturbations

On fixe une 2-forme ω_0 sur D^2 , à support compact, positive ou nulle et d'intégrale 1. Pour un plongement $S^1 \times D^2 \rightarrow M$, on définit $\tau_\gamma : \mathcal{B}(M) \rightarrow \mathbf{R}$:

$$\tau_\gamma(a) = \int_{D^2} \text{tr}(h_a(z))\omega_0$$

où $h_a(z)$ est l'holonomie de a le long des $\gamma(S^1 \times \{z\})$. Une perturbation sera de la forme $\pi = \sum_i v_i \tau_{\gamma_i}$ où $v_i \in \mathbf{R}$. On définit ainsi un espace Π paramétré par (Γ, v) où Γ est une famille $(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ et $v \in \mathbf{R}^N$. On a alors la

PROPOSITION.— 1) *La fonctionnelle perturbée a les mêmes propriétés que CS (perturbation "compacte"). En particulier l'ensemble critique reste compact et chaque point critique a un indice dans $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$.*

2) *Si M est une sphère d'homologie entière, il existe $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ tels que pour presque tout $v \in \mathbf{R}^N$ les points critiques de $CS_{\Gamma, v}$ sont non dégénérés.*

Démonstration.— 1) C'est essentiellement parce que τ_γ (donc π), a un

gradient L^2 qui est un vrai champ de vecteurs sur $\mathcal{B}(M)$. Il est donné par :

$$\nabla_{\sigma} \tau_{\gamma}(a) = h_a \cdot (*_{\sigma} \omega_0(z)) \text{ sur } \gamma(S^1 \times D^2), 0 \text{ ailleurs.}$$

2) L'hypothèse sur M fait que $[\theta] \in R(M)$ est non dégénéré et $R^*(M) = R(M) - \{[\theta]\}$. De plus, la régularité elliptique donne la compacité de l'ensemble (que l'on veut rendre vide)

$$K = \left\{ (a, [u]) \in T\mathcal{B}^*(M) \mid [a] \in R^*(M), H_a \cdot u = 0 \text{ et } \|u\|_{L^2} = 1 \right\}.$$

Comme un élément de $\mathcal{B}(M)$ est défini par la trace de l'holonomie de *tous* les lacets $S^1 \rightarrow M$ ayant un vecteur tangent fixe à l'origine, la compacité de K implique qu'il existe $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ tels que, si l'on pose $\tau = (\tau_{(\gamma_i)}) : \mathcal{B}(M) \rightarrow \mathbf{R}^N$, alors $d\tau : TK \rightarrow \mathbf{R}^N$ est injectif sur toute fibre de K . Il en résulte que l'application $(v, [a]) \rightarrow \nabla(CS + \langle v, \tau \rangle)([a])$ de $\mathbf{R}^N \times \mathcal{B}^*$ dans $T\mathcal{B}^*$ est transverse à la section nulle, son hessien par rapport à la seconde variable définissant un opérateur Fredholm d'indice N . Le théorème de Sard "classique" permet de conclure (pas besoin de Sard-Smale).

2.2. Interprétation de l'invariant de Casson en théorie de jauge

Rappelons la définition de l'invariant de Casson $\lambda(M)$ pour une sphère d'homologie entière de dimension 3 (cf. [AM], [Ma]) : si $M = M_1 \cup_{\Sigma} M_2$ est un scindement de Heegaard de M , c'est la moitié du nombre d'intersection $R^*(M_1) \cdot R^*(M_2)$ où $R^*(M_i) \subset R^*(\Sigma)$ sont les espaces de représentations non triviales de π_1 dans $SU(2)$ (modulo conjugaison). Notons que $R^*(M_1) \cap R^*(M_2) = R^*(M)$.

Pour une perturbation $\pi \in \Pi$ générique au sens de 2.1, l'ensemble $R_{\pi}^* = \text{crit}(CS + \pi \mid \mathcal{B}^*(M))$ est fini. De plus à chaque point est associé un indice $\text{ind}_{\pi}([a]) \in \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$, de sorte que $(-1)^{\text{ind}_{\pi}([a])}$ est bien défini.

THÉORÈME.— [Ta4] La "caractéristique d'Euler"

$$n(\pi) = \sum_{[a] \in R_{\pi}^*} (-1)^{\text{ind}_{\pi}([a])}$$

ne dépend pas de π , et est égale à $2\lambda(M)$. Dans le cas où $R^*(M)$ est non dégénéré, on a en fait l'énoncé plus précis $(R^*(M_1) \cdot R^*(M_2))_{[a]} = (-1)^{ind(a)}..$

2.3. Le gradient de CS_π donne naissance à une application $F_\pi : \mathcal{A}(\mathbf{R} \times M) \rightarrow \Omega_{ad}^{2,-}(\mathbf{R} \times M)$ qui est une perturbation équivariante de F^- . Pour a, b dans R_π on note $\mathcal{M}_\pi(a, b) \subset \mathcal{B}(a, b)$ l'espace des modules de solutions qui donnent un chemin de a à b . Il se décompose en $\mathcal{M}_\pi(a, b; i)$ pour $i \equiv ind(a) - ind(b) \pmod{8}$.

3. HOMOLOGIE D'INSTANTONS

3.1. Soit M une 3-sphère d'homologie entière, munie d'une métrique riemannienne σ . Les objets introduits au §2 permettent maintenant de définir l'homologie associée à la fonctionnelle de Chern-Simons. Pour cela, considérons les espaces $\mathcal{M}(a, b; i) = \mathcal{M}_{\sigma\pi}(a, b; i)$ et $\bar{\mathcal{M}}(a, b; i) = \mathcal{M}(a, b; i)/\mathbf{R}$. où $a, b \in R_\pi^*$ et $i \equiv ind(a) - ind(b) \pmod{8}$. Si $a = b$ on suppose $i \neq 0$.

THÉORÈME 1.— *Pour une perturbation $\pi \in \Pi$ générique on a les propriétés suivantes :*

a) *L'espace $\mathcal{M}(a, b; i)$ est une variété lisse orientée de dimension i . Donc $\bar{\mathcal{M}}(a, b; i)$ est une variété orientée de dimension $i - 1$.*

b) *Si $ind(a) - ind(b) \equiv 1 \pmod{8}$, la variété orientée de dimension zéro $\bar{\mathcal{M}}(a, b; 1)$ est compacte, donc on peut définir son nombre algébrique de points $\bar{m}(a, b) \in \mathbf{Z}$.*

c) *Si $ind(a) - ind(b) \equiv 2 \pmod{8}$, la variété orientée de dimension un $\bar{\mathcal{M}}(a, b; 2)$ se compactifie de façon orientée par*

$$\partial \bar{\mathcal{M}}(a, b; 2) = \bigsqcup_c \bar{\mathcal{M}}(a, c; 1) \times \bar{\mathcal{M}}(c, b; 1),$$

où c décrit les points d'indice $ind(a) - 1$. Le bord algébrique étant nul, on a $\sum_c \bar{m}(a, c)\bar{m}(c, b) = 0$. Donc si l'on définit $C_i, i \in \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$, comme le groupe abélien libre engendré par les $a \in R_\pi^*$ d'indice i et $\partial : C_i \rightarrow C_{i-1}$ par la

formule $\partial a = \sum_b \bar{m}(a, b)b$, on a $\partial \circ \partial = 0$. Donc (C_*, ∂) est un complexe, dont l'homologie est notée $H(\sigma, \pi)$.

d) Si (σ, π) et (σ', π') sont deux choix admissibles on a un isomorphisme canonique de $H(\sigma, \pi)$ sur $H(\sigma', \pi')$.

Ceci rend licite la

DÉFINITION.— On appelle homologie d'instantons de M , et l'on note $I_*(M)$, le groupe abélien $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ -gradué $H(\sigma, \pi)$.

On déduit immédiatement du résultat de [Ta4] (cf. 2.2) la

Propriété. La caractéristique d'Euler $\sum_{i=0}^7 (-1)^i \text{rg } I_i(M)$ est égale au double de l'invariant de Casson $\lambda(M)$.

La dépendance de l'indice envers l'orientation (1.5) donne immédiatement la

Propriété. $I_*(-M)$ est dual à $I_{3-*}(M)$ c'est-à-dire engendré par un complexe dual. On a donc un accouplement $I_*(M) \otimes I_{3-*}(-M) \rightarrow \mathbf{Z}$.

(Cette dualité n'est pas celle de Poincaré mais de la forme de Killing sur $SU(2)$.)

Dans le reste de cette section on donne quelques indications sur la preuve du théorème 1.

3.2. Propriété de variété

Pour prouver le a) du théorème, on définit d'abord des espaces conuenables $\mathcal{B}(a, b)$. Choissant des représentants lisses a, b et une connexion lisse A_0 quelconque valant a pour $t \leq -1$ et b pour $t \geq 1$, on pose $\mathcal{A}(a, b) = A_0 + L_1^4(\Omega_{ad}^1)$ (où $\Omega_{ad}^i = \Omega_{ad}^i(\mathbf{R} \times M)$). Cet espace admet une action lisse de

$$\mathcal{G}(\mathbf{R} \times M) =$$

$$\{g \in L_{2,loc}^4((\mathbf{R} \times M, su(2))) \mid \exists \xi \in L_{ad}^4(\Omega_{ad}^2) \text{ tel que } g = \exp(\xi) \text{ si } |t| \geq 1\}.$$

Comme dans le cas fermé, le quotient $\mathcal{B}(a, b) = \mathcal{A}(a, b)/\mathcal{G}(\mathbf{R} \times M)$ est une variété, d'espace tangent $T_{[A]}\mathcal{B} = \ker d_A^*$ (remarquer que A est toujours

irréductible). Il est clair qu'il ne dépend que des classes dans $R(M)$ et est la réunion des $\mathcal{B}(a, b; i)$.

Ensuite, l'application $F_{\sigma\pi} : \mathcal{A}(a, b) \rightarrow \Omega_{ad}^{2,-}$ passe au quotient par $\mathcal{G}(\mathbf{R} \times M)$ pour définir une section $\bar{F} : \mathcal{B}(a, b) \rightarrow \mathcal{L}(a, b)$ d'un certain fibré de fibre $\Omega_{ad}^{2,-}$. La dérivée covariante $D\bar{F}_{[A]} : T_{[A]}\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}_{[A]}$ s'identifie à la restriction à $\ker d_A^*$ de la différentielle $dF_{\sigma\pi} : \Omega_{ad}^1 \rightarrow \Omega_{ad}^{2,-}$.

PROPOSITION.— [APSI] *L'opérateur $D\bar{F}_{[A]}$ est Fredholm, et son indice est i sur la composante $\mathcal{B}(a, b; i)$.*

Pour le démontrer supposons pour simplifier $\pi = 0$. Alors $D\bar{F}_{[A]}$ a mêmes noyau et conoyau que $\partial/\partial t + D_{a(t)}$ sur un espace de chemins de a à b . Comme D_a et D_b sont non dégénérés l'indice vaut $SF(D_{a(t)})$ (fait général).

On achève la preuve du a) (sauf l'orientation) en montrant que pour π générique l'opérateur $D\bar{F}_{[A]}$ est surjectif, ce qui se fait de façon analogue à 2.2.

En fait, on doit aussi considérer le cas a ou b sont réductibles, et pour cela utiliser la théorie de [LM] pour les opérateurs elliptiques sur une variété non compacte. Celle-ci fait intervenir des objets à décroissance exponentielle vers les bouts. On obtient alors :

PROPOSITION.— *Génériquement $\mathcal{M}(a, b; i)$ est une variété orientée si a ou b est irréductible, de dimension*

$$\dim \mathcal{M}(a, b; i) = -\dim \mathcal{G}_b.$$

COROLLAIRE. *On a $\mathcal{M}(a, b; i) = \emptyset$ si $i - \dim \mathcal{G}_b \leq 0$ sauf si $i = 0$ et $a = b$.*

(Le corollaire vient de l'action de \mathbf{R} .)

On fixe maintenant une perturbation générique en ce sens. En fait pour simplifier on supposera que $\pi = 0$ convient.

Disons quelques mots de l'orientation. L'orientabilité se prouve comme dans [D1] : il suffit de voir que le fibré déterminant $\det(\ker D\bar{F}_{[A]} \otimes \text{coker } D\bar{F}_{[A]})$ est trivial sur $\mathcal{B}(a, b)$. En stabilisant de $SU(2)$ à $SU(3)$, on montre que c'est la restriction d'un fibré sur $\mathcal{B}(SU(3), a, b)$ (analogue de $\mathcal{B}(a, b)$ où l'on a remplacé $SU(2)$ par $SU(3)$). Or ce dernier espace est simplement connexe,

d'où le résultat. Pour faire un choix "cohérent" pour les orientations des divers espaces, on doit utiliser les constructions de recollement définis en 3.5.

3.3. Le gros morceau de la preuve est la compactification des $\bar{\mathcal{M}}(a, b; i)$. Celle-ci fait intervenir deux phénomènes distincts :

1) Interprétant les éléments comme des lignes de gradient non paramétrées de a à b , celles-ci peuvent "accrocher" des points critiques intermédiaires : une suite de telles lignes peut converger vers une réunion finie ℓ_1, \dots, ℓ_n où ℓ_i joint c_i à c_{i+1} , avec $c_0 = a$ et $c_n = b$. En dimension finie, c'est la seule possibilité. Une construction de recollement de trajectoires permet alors de décrire le complémentaire d'un compact dans $\bar{\mathcal{M}}(a, b)$ comme la réunion disjointe d'ouverts

$$\mathcal{O}(a, c_1, \dots, c_{n-1}, b) = \bar{\mathcal{M}}(a, c_1) \times \mathbf{R}_+ \times \bar{\mathcal{M}}(c_1, c_2) \dots \times \mathbf{R}_+ \times \bar{\mathcal{M}}(c_{n-1}, b)$$

Les cas particuliers où la différence d'indice est zéro ou un permettent de définir le complexe de l'Introduction. Pour une fonctionnelle équivariante on a des résultats analogues sur le quotient en tenant compte des groupes d'isotropie des c_i .

2) Revenant à $\mathcal{M}(a, b)$ et interprétant les éléments comme des (modules de) connexions autoduales, on a le phénomène d'apparitions de "bulles", ou instantons découvert par K. Uhlenbeck [U2]. Pour une variété fermée, Taubes et Donaldson ont montré que ceci suffit à décrire la compactification. Sur une variété ouverte, il s'agit d'une compactification faible (convergence sur tout compact).

Nous allons d'abord préciser le 2) puis montrer qu'il ne se produit pas si $\dim \mathcal{M}(a, b) \leq 8$. Pour cela, on considère l'espace $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathbf{R} \times M)$ onnées par les connexions autoduales dont l'énergie $e(A) = \int_{(\mathbf{R} \times M)} |F(A_n)|^2$ est bornée. Cela équivaut à dire que sur la ligne de gradient associée la variation de $CS(a(t))$ reste bornée (rappelons que $|F(A)|^2 = 2(d/dt)(CS(a(t)))$). Donc \mathcal{M} contient les $\mathcal{M}(a, b)$.

PROPOSITION.— 1) Soit $[A_n]$ une suite dans \mathcal{M} telle que l'énergie $e(A_n)$ reste bornée. Alors, quitte à passer à une sous suite, il existe un

nombre fini de points $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{R} \times M$, des entiers positifs n_1, \dots, n_k et un élément $[B]$ de \mathcal{M} tels que, en prenant des représentants convenables, on ait :

a) $A_n \rightarrow B$ dans C^∞ sur tout compact de $\mathbf{R} \times M - \{x_1, \dots, x_k\}$

b) En x_j apparaît un instanton sur \mathbf{R}^4 d'énergie $8\pi^2 n_j$.

c) $e(B) + 4\pi^2 \sum_{j=1}^k n_j \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} e(A_n)$.

2) On a $\mathcal{M} = \cup_{a,b} \mathcal{M}(a,b)$. De plus, la topologie de chaque $\mathcal{M}(a,b;i)$ est donnée par la convergence sur tout compact (convergence faible).

Démonstration. 1) Le lemme de compacité d'Uhlenbeck [U2] affirme l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que, si $U \subset \mathbf{R} \times M$ est un ouvert où $\int_U |F(A_n)|^2 < \varepsilon$, alors (en passant à une sous-suite et dans une jauge convenable) A_n converge dans C^∞ sur tout compact de U . En particulier $|F(A_n)|$ est uniformément borné sur tout compact de U . Disons que $x \in \mathbf{R} \times M$ est un *mauvais point* si $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B(x,r)} |F(A_n)|^2 > \varepsilon$ pour tout $r > 0$. Il est clair qu'il y a au plus $\lceil \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \rceil$ tels points où e est la borne sur l'énergie. Soient x_1, \dots, x_k ces mauvais points. Alors sur $\mathbf{R} \times M - \{x_1, \dots, x_k\}$, $|F(A_n)|$ est uniformément borné sur tout compact donc [U1] implique l'existence de $B \in \mathcal{A}(\mathbf{R} \times M - \{x_1, \dots, x_k\})$ tel que a) soit vérifié. De plus on a $e(B) \leq e < \infty$ donc [U2] implique que B se prolonge à $\mathbf{R} \times M$, et est clairement auto-duale.

Enfin, choisissons des boules disjointes B_1, \dots, B_k centrées en x_1, \dots, x_k . La courbure $|F(A_n)|$ reste bornée sur chaque bord ∂B_j , et on a $M_{j,n} = \sup_{B_j} |F(A_n)| \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Soit $x_{j,n} \in B_j$ un point où $|F(A_n)|$ est maximum, alors une "renormalisation" convenable transforme $A_n|_{B(x_{j,n}, \varepsilon_{j,n})}$ en une connexion $C_{j,n}$ sur $B(0, R_{j,n}) \subset \mathbf{R}^4$, avec $R_{j,n} \rightarrow \infty$ et $|F(C_{j,n})| \leq |F(C_{j,n})(0)| = 1$. De plus $C_{j,n}$ est autoduale. Donc [U1] et [U2] impliquent le b). Le c) est évident.

2) Considérons une suite $A + t_n$ où $t_n \rightarrow +\infty$. D'après le 1), le fait que l'énergie tend vers zéro sur tout compact implique qu'une sous-suite converge faiblement vers une connexion B qui est nécessairement plate, donc donne un chemin dans $R(M)$. Comme $R(M)$ est discret d'après

l'hypothèse de non-dégénérescence, ce chemin est constant. On en déduit $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = a \in R(M)$. La propriété sur la topologie se prouve par "bootstrap" elliptique (cf. [FU]).

3.4. PROPOSITION.— *On suppose a ou b irréductible et $i \leq 8$. Alors si $[A_n]$ une suite dans $\mathcal{M}(a, b; i)$ on a les propriétés suivantes en passant à une sous-suite. Il existe $c_0 = a, c_1, c_2, \dots, c_n = b$ et des lignes de gradient $\gamma_\ell \in \mathcal{M}(c_i, c_{i+1})$ tels que $[a_n(t)]$ s'approche uniformément de la réunion des lignes de gradient $\text{im}(\gamma_\ell)$ dans $\mathcal{B}(M)$. Si $i \leq 4$ les c_ℓ sont irréductibles pour $1 \leq i \leq n - 1$.*

Démonstration. L'énergie est bornée puisque $e(A_n) = CS(a) - CS(b)$ pour des relevés dans $\mathcal{A}(M)$ convenables, qu'on peut prendre fixes puisque i est fixe. Donc on peut appliquer 3.3 ainsi qu'à toutes les suites translâtées $[A_n + t_n]$. Considérons toutes les limites $[\bar{B}] \in \mathcal{M}$ non triviales. En utilisant la finitude du nombre de valeurs critiques dans $[CS(b), CS(a)]$, il est facile de trouver une sous-suite ayant un nombre "maximal" de telle limites. Plus précisément, pour une telle suite les limites se rangent en une suite finie $[\bar{B}_\ell] \in \bar{\mathcal{M}}(c_\ell, c_{\ell+1})$, $0 \leq \ell \leq n - 1$, avec $\beta_0 = a$ et $b_n = b$. De plus on peut choisir les relevés c_ℓ de sorte que $c_0 = a$ et $c_n = gb$ pour un certain $g \in \mathcal{G}(M)$.

Il faut aussi considérer tous les instantons sur \mathbf{R}^4 qui apparaissent pour les suites translâtées : la borne sur l'énergie fait qu'il y en a un nombre fini c_1, \dots, c_k . Notons n_1, \dots, n_k leurs "charges". Comme on a pris toutes les limites possibles on a la formule d'énergie

$$CS(a) - CS(b) = \sum_{\ell=0}^{n-1} (CS(c_\ell) - CS(c_{\ell-1})) + 4\pi^2 \sum_{j=1}^k n_j.$$

En utilisant les formules $CS(ga) - CS(a) = 4\pi^2 \text{deg}(g)$, $\text{ind}(ga) - \text{ind}(a) = 8 \text{deg}(g)$ et $i = \text{ind}(a) - \text{ind}(b) - \text{dim } \mathcal{G}_b$, il vient la formule d'indice

$$i = \sum_{\ell=0}^{n-1} i_\ell + \sum_{\ell=1}^{n-1} \text{dim } \mathcal{G}_{c_\ell} + 8 \sum_{j=1}^k n_j,$$

où $i_\ell = \text{ind}(c_\ell) - \text{ind}(c_{\ell+1}) - \text{dim } \mathcal{G}_{c_\ell}$. Or d'après 3.2 on a $i_\ell \geq 1$ donc $i \leq 8$ on a $k = 0$. La convergence de $a_n(t)$ est alors due au fait qu'on a pris toutes

les limites possibles (raisonner par l'absurde). Si $i \leq 4$ l'irréductibilité de c_ℓ résulte de la formule d'indice.

Remarque Notre rôle capital joué par la proportionnalité entre la différence d'indice et la variation de la fonction (“monotonie”, pour employer le langage de [F4]). C'est ce qui fait que chaque bulle “coûte” de l'indice, donc peut être évitée sous certaines hypothèses.

3.5. Faisant $i = 0$ dans la proposition 3.4, on a forcément $n = 0$ donc la proposition 3.3.(2) donne la compacité. Pour prouver le c) du théorème, et plus généralement pour donner une description de l'infini de $\bar{\mathcal{M}}(a, b)$ analogue à la dimension finie (cf. 3.2), il faut définir une construction de recollement de trajectoires donnant un difféomorphisme local (dans le cas de deux trajectoires)

$$(*) \quad \bar{\mathcal{M}}(a, c; i) \times \mathbf{R}_+ \times \bar{\mathcal{M}}(c, b; j) \rightarrow \bar{\mathcal{M}}(a, b; i + j).$$

Ceci se fait par une construction analogue à celle de Taubes [Ta1] [Ta2] en définissant d'abord une connexion “presque” autoduale puis en utilisant le théorème des fonctions implicites pour la rendre autoduale.

3.6. Preuve du d)

Pour prouver l'indépendance de l'homologie par rapport aux choix, on construit un morphisme $C(\sigma, \pi) \rightarrow C(\sigma', \pi')$ en considérant une métrique Σ sur $\mathbf{R} \times M$ qui vaut σ pour $t < 0$ et σ' pour $t > 1$. Supposant pour simplifier $\pi = \pi' = 0$ on définit l'espace de modules $\mathcal{M}_\sigma(a, a')$ des connexions autoduales reliant a à a' , où $a, a' \in R^*$. Il se décompose en $\mathcal{M}_\Sigma(a, a'; i)$ où i est un relevé de $ind(a) - ind(a')$.

Des raisonnements tout à fait analogues aux précédents montrent que $\mathcal{M}_\Sigma(a, a'; i)$ est génériquement une variété orientée de dimension i , qui est compacte si $i = 0$. Notons qu'il n'y a plus d'action de \mathbf{R} , de sorte que $\mathcal{M}_\Sigma(a, a'; 0)$ n'a pas de raison d'être vide. Ceci permet de définir $m_\Sigma(a, a') \in \mathbf{Z}$ et le morphisme $\varphi_\Sigma : C(\sigma) \rightarrow C(\sigma')$ par $\varphi(a) =$

$$\sum_{a'} m_\Sigma(a, a')_0 a'.$$

Reste à montrer :

1) C'est un morphisme de complexes, soit $\partial \circ \varphi_\sigma - \varphi_W \circ \partial' = 0$. Ceci résulte de la compactification de $\mathcal{M}_\Sigma(a, a'; 1)$ par

$$\partial \mathcal{M}(W, a, a'; 1) = \bigsqcup_{b \in R_*^*} \bar{\mathcal{M}}(a, b; 0) \times \mathcal{M}_\Sigma(b, a') - \bigsqcup_{b' \in R_*^*} \mathcal{M}_\Sigma(a, b') \times \bar{\mathcal{M}}(b', a').$$

2) Le morphisme induit en homologie est indépendant du choix de Σ . Pour cela, on considère une famille à un paramètre $\Sigma_\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ reliant Σ à Σ' , et l'on pose

$$\tilde{\mathcal{M}}(a, a') = \{(A, \lambda) \mid A \in \mathcal{M}_{\Sigma_\lambda}(a, a')\} \subset \mathcal{B}(\mathbf{R} \times M) \times [0, 1].$$

Cet espace se décompose en $\tilde{\mathcal{M}}(a, a'; i)$. Génériquement $\tilde{\mathcal{M}}(a, a'; i)$ est une variété orientée de dimension $i + 1$, compacte si $i = -1$. Donc $\tilde{\mathcal{M}}(a, a'; -1)$ permet de définir un morphisme $H : C \rightarrow C'$ de degré -1 , de plus la compactification de $\tilde{\mathcal{M}}(a, a'; 0)$ donne une homotopie de chaînes entre les morphismes associés à Σ et Σ' .

3) C'est un isomorphisme : ceci vient d'une formule de composition $\varphi_{\Sigma_R} = \varphi'_\Sigma \varphi_\Sigma$ pour une métrique Σ_R qui vaut $\Sigma(t + R)$ pour $t < 0$ et $\Sigma'(t + R)$ pour $t > 0$, R étant assez grand.

Remarques 1) En dimension finie cette méthode est nouvelle (me semble-t-il) : d'habitude on prouve que l'homologie est celle de la variété sans comparer directement deux choix. Il serait intéressant de décrire le morphisme en termes d'accidents (naissance ou mort de points critiques, attachement d'anses). Elle devrait pouvoir s'appliquer à l'homologie de Novikov.

2) Cette construction se généralise pour associer à un cobordisme entre deux sphères d'homologie un morphisme de $I_*(M)$ vers $I_*(N)$ (voir 4.2).

4. THÉORIE DE JAUGE SUR UNE VARIÉTÉ OUVERTE DE DIMENSION QUATRE [At1]

4.1. Espaces de modules

Soit W^4 une variété ouverte orientée connexe. On supposera toujours que W est l'intérieur d'une variété compacte, de sorte que le "bout" de W

a la forme $\infty_W =]0, +\infty[\times \partial W$, où ∂W est une réunion finie de variétés M_j^3 , $1 \leq j \leq N$. On la munit d'une métrique σ_W qui est un produit sur le bout. On dira que la variété est "à bouts cylindriques". Notons que Taubes [Ta3] utilise la notion plus générale de variété à bouts périodiques.

On peut définir un espace Π_W de perturbations $\mathcal{G}(W)$ -équivariantes $F_\pi : \mathcal{A}(W) \rightarrow \Omega_{ad}^{2,-}(W)$ de l'opérateur d'autodualité qui étendent les perturbations déjà définies sur les bouts. La construction est analogue à celle de 2.3.

On va étudier l'espace des solutions de $F_\pi(A) = 0$ modulo l'action de $\mathcal{G}(W)$. Pour avoir une théorie intéressante, c'est-à-dire trouver des espaces de dimension finie, on se restreint aux solutions d'énergie finie. D'après 3.3, cela revient à exiger que sur chaque bout le chemin de connexions associé tende vers un point critique de CS_{π_j} . On définit ainsi des espaces de modules

$$\mathcal{M}(W, a) = \mathcal{M}(W, a_1, \dots, a_N)$$

où $a_j \in R_{\pi_j}$. **Variante.** Il est souvent conceptuellement important de diviser le bout ∞_W en une partie positive $\infty_W^+ =]0, +\infty[\times \partial^+ W$ et une partie négative $\infty_W^- =]-\infty, 0[\times \partial^- W$, comme on l'a fait pour $\mathbf{R} \times M$. En particulier si $\partial^- W$ et $\partial^+ W$ sont non vides et connexes, $W - \infty_W$ est alors un cobordisme de $\partial^- W$ à $\partial^+ W$. On définit alors de façon évidente les espaces $\mathcal{M}(W, a^-, a^+)$. Notons que $\partial^- W$ est munie d'une orientation opposée à celle habituelle.

On suppose dorénavant que les ensembles critiques R_{π_j} sont non dégénérés. Rappelons que si les M_j sont des sphères d'homologie entière cette propriété des π_i est générique. D'un autre côté, elle implique que les M_j sont des sphères d'homologie rationnelle. Notons $b_i(W) = \dim H^i(W; \mathbf{R})$ et $b_2^-(W)$ l'indice de la forme d'intersection sur $H^2(W; \mathbf{R})$, qui est bien définie dès que ∂W est une réunion de sphères d'homologie rationnelle.

PROPOSITION.— *On suppose que les R_{π_j} sont non dégénérés et que l'un des a_i est irréductible. Alors pour une perturbation π_W étendant (π_j) et générique, l'espace $\mathcal{M}(W, a)$ se décompose en variétés lisses orientées*

$\mathcal{M}(W, a; i)$ de dimensions

$$\dim \mathcal{M}(W, a; i) = i + 3(N - 1 + b_1(W) - b_2^-(W)) - \sum_{j=1}^N \dim \mathcal{G}_{a_j}$$

où $i \equiv -\sum_{j=1}^N \text{ind}(a_j) \pmod{8}$.

Si l'on distingue un bout positif et un bout négatif, il faut pour trouver la dimension se rappeler que les M_j sont des sphères d'homologie rationnelle, de sorte qu'on a $\text{ind}(-M_j, a_j) = 3 - \text{ind}(M_j, a_j)$. En particulier, si $\partial^- W$ et $\partial^+ W$ sont non vides et connexes, on a

$$\dim \mathcal{M}(W, a^-, a^+; i) = 3(b_1(W) - b_2^-(W)) - \dim \mathcal{G}_{a^+}.$$

Notation. On note $\mathcal{M}(W, a)_i$ la partie de dimension i de $\mathcal{M}(W, a)$ si elle existe.

4.2. Définitions d'invariants. Foncteur sur les cobordismes

Des raisonnements tout à fait analogues à ceux du §3 donnent le

THÉORÈME 2. *On suppose que les M_j sont des sphères d'homologie entière. Alors pour (σ_W, π_W) générique on a les propriétés suivantes :*

a) *Chaque $\mathcal{M}(W, a)_0$ est compacte. On peut donc définir $m(W, a) \in \mathbf{Z}$.*

b) *Chaque $\mathcal{M}(W, a)_1$ peut être compactifiée comme variété orientée en lui ajoutant*

$$\partial \mathcal{M}(W, a)_1 = \bigsqcup_b \mathcal{M}(W, b)_0 \times \bar{\mathcal{M}}(b, a)_0,$$

où $b = (b_j)$ décrit $\prod_j R_{\pi_j}$ et $\bar{\mathcal{M}}(b, a)_0 = \prod_j \bar{\mathcal{M}}(b_j, a_j)$. Donc l'élément $z(W)$ de $\bigotimes_{j=1}^{j=N} C(\pi_j)$ défini par

$$z(W) = \sum_a m(W, a) a_1 \otimes \dots \otimes a_N$$

est un cycle.

c) *La classe d'homologie de $z(W)$ ne dépend pas de σ_W, π_W .*

On définit ainsi $z(W) \in I_*(\partial W) = \bigotimes_{j=1}^{j=N} I_*(M_j)$. Si les homologies $I_*(M_j)$ sont sans torsion (on n'a aucun exemple où ce n'est pas le cas, cf.

le §5), on ne perd rien par rapport au théorème. Si l'on distingue un bout positif et un bout négatif, la classe $z(W)$ permet de définir un morphisme $\varphi_W : I_*(\partial^- W) \rightarrow I_*(\partial^+ W)$. Si les deux bouts sont connexes, il est de degré $3(b_1(W) - b_2^-(W))$. Une construction de recollement convenable donne alors :

THÉORÈME 3.— *L'application $W \mapsto \varphi_W$ est fonctorielle pour la composition des cobordismes : si $W = UV$ on a $\varphi_W = \varphi_V \varphi_U$.*

4.3. Relations avec les variétés fermées

Considérons une variété fermée W^4 simplement connexe, admettant une décomposition $W = U \cup_M V$ où M est une sphère d'homologie entière. Un théorème de Freedman et Taylor [FT] donne une telle décomposition différentiable pour toute décomposition algébrique de la forme d'intersection. Par ailleurs, un théorème de Freedman dit qu'on a toujours (sous l'hypothèse algébrique) une décomposition *topologique* en somme connexe le long d'une sphère. Donaldson [D4] a défini des invariants qui donnent une obstruction à l'existence d'une décomposition différentiable. Dans un travail en cours (décrit par Atiyah dans [At1]), il raffine ce résultat en décomposant ces invariants dans l'homologie de Floer de M .

Les invariants sont toujours obtenus en comptant le nombre de points d'un espace de modules de dimension zéro. Décrivons le plus simple, que nous noterons $z(W)$ (c'est l'extension naturelle du cas à bord). Pour cela, rappelons que si $P \rightarrow W$ est un $SU(2)$ -fibré, l'espace $\mathcal{M}(P)$ des modules de connexions autoduales est génériquement une variété orientée de dimension $n(k) = 8k - 3(1 + b_2^-(W))$ [FU] [DK]. S'il existe k tel que $n(k) = 0$, elle est compacte ce qui fournit $z(W) \in \mathbf{Z}$ qui est un invariant de W . Sinon on pose $z(W) = 0$.

Le résultat suivant (implicite dans [F4]) se démontre sans doute comme le théorème 4 : si W^4 (fermée simplement connexe) est la réunion $U \cup_M V$ le long d'une sphère d'homologie entière, on a

$$z(W) = \langle z(U), z(V) \rangle$$

où l'on utilise la dualité entre $I_*(M)$ et $I_*(-M)$.

En général, Donaldson décrit un moyen de trouver des espaces de modules de dimension zéro en imposant des conditions supplémentaires sur

les connexions. Il obtient ainsi, sous l'hypothèse que $b_2^-(W)$ est impair et > 1 , des polynômes $p_{W,d} : H_2(W; \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}$, de degrés d assez grands. Pour une variété dont le bord est une sphère d'homologie, on obtient des polynômes $p_{W,d}$ à valeurs dans $I_*(\partial W)$. Pour une décomposition $W = U \cup_M V$ comme ci-dessus (et sous certaines conditions supplémentaires à préciser), le résultat annoncé dans [At1] est alors :

$$p_{W,d} = \sum_{\ell} p_{W,\ell} \cdot p_{W,d-\ell},$$

en utilisant la décomposition $H_2(W) = H_2(U) \oplus H_2(V)$.

5. AUTRES RÉSULTATS [FS] [O1] [F5]

5.1. Pour l'instant, les seules variétés pour lesquelles $I_*(M)$ a été calculé sont les sphères d'homologie qui sont des fibrations de Seifert [FS] [O1] : pour ces variétés, la fonctionnelle $CS|_{\mathcal{B}^*}(M)$ est non dégénérée au sens de Bott, donc $R^*(M)$ est une réunion finie de variétés connexes compactes. De plus toute fonction de Morse f sur $R^*(M)$ permet de construire une perturbation π telle que les points critiques de $CS_{\pi}|_{\mathcal{B}^*}(M)$ sont non dégénérés, en bijection avec ceux de f , avec une formule explicite reliant les indices des points critiques des deux fonctions : cette formule est de la forme $ind_{\pi}(\alpha) = ind_f(\alpha) + (\text{entier pair})$. (la preuve repose sur [APSIII]). Enfin on peut montrer par diverses méthodes que $R^*(M)$ admet toujours une fonction de Morse n'ayant que des points d'indice pair. En mettant ensemble ces résultats, on obtient que $I_*(M)$ est concentré en les indices pairs et est libre sur les points critiques. De plus tout est algorithmiquement calculable.

5.2. Récemment Floer [F5] a indiqué une méthode qui semble donner un algorithme de calcul de $I_*(M)$ sur le modèle de celui qui existe pour l'invariant de Casson, c'est-à-dire en décrivant M comme obtenue par chirurgie sur un entrelacs dans S^3 . En tout cas ses constructions expliquent de nouveau pourquoi la caractéristique d'Euler est paire, c'est-à-dire pourquoi l'invariant de Casson est entier.

L'idée de départ est de décrire le morphisme $\varphi_W : I_*(M) \rightarrow I_*(N)$ si N est obtenue par chirurgie sur un nœud $K \subset M$. Floer décrit un diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccc} I_*(M) & \longrightarrow & I_*(N) \\ & \swarrow & \searrow \\ & I'_*(\overline{M-K}) & \end{array}$$

Dans ce diagramme, $\overline{M-K}$ est l'unique variété ayant l'homologie de $S^1 \times S^2$ que l'on peut obtenir en recollant un tore solide au complémentaire du nœud. Le groupe $I'_*(\overline{M-K})$ est une homologie d'instantons obtenue à partir du $SO(3)$ -fibré non trivial sur $\overline{M-K}$. La construction de cette dernière utilise l'inexistence de connexions réductibles. Elle est graduée sur $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ($= 2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ dans le diagramme), ce qui implique la conservation de la parité de la caractéristique d'Euler.

6. HOMOLOGIE SYMPLECTIQUE

Soient (V, ω) une variété symplectique et $L, L' \subset V$ deux sous-variétés lagrangiennes. L'étude de l'intersection $L \cap L'$ est motivée par les conjectures faites par V.I. Arnold dans les années 60 (voir [Ar]). L'une d'elles énonce que si L et L' sont fermées et hamiltoniennement isotopes et sous certaines hypothèses supplémentaires, par exemple $[\omega] \mid \pi_2(V, L) = 0$ cette intersection a au moins autant de points qu'une fonction sur L a de points critiques : $\#(L \cap L') \geq c(L)$. En particulier, si (P, ω) est une variété symplectique compacte et $\varphi \in \text{Diff}(P, \omega)$ un difféomorphisme hamiltonien, Arnold conjecture que les points fixes de φ , qui sont en bijection avec $\Delta_p \cap (id \times \varphi)(\Delta_p)$ où $\Delta_p \subset P \times P$ est lagrangienne pour la structure $\omega \oplus (-\omega)$, vérifient : $\#\text{Fix}(\varphi) \geq c(P)$. Les travaux de Floer [F2] et [F4] donnent à ce jour les résultats les plus généraux connus sur ces questions. Comme on va le voir, ils sont basés sur la définition d'une homologie sur le modèle mentionné dans l'Introduction. L'analogue de l'équation d'autodualité est celle des courbes pseudo-holomorphes de M. Gromov [Gr].

6.1. Définissons d'abord la fonctionnelle d'aire, dont les points critiques seront les points de $L \cap L'$. En fait on va voir qu'on a en général une 1-forme fermée, qui sous certaines hypothèses admet une primitive à valeurs dans \mathbf{R} ou dans S^1 .

L'espace fonctionnel $\mathcal{B} = \mathcal{B}(V, L, L')$ est celui des chemins $\gamma : (I, 0, 1) \rightarrow (V, L, L')$, et la 1-forme annoncée est définie par $\alpha(\gamma) \cdot \xi = \int_0^1 \omega(\xi, \dot{\gamma}) dt$. Un vecteur tangent $\xi \in T_\gamma \mathcal{B}$ est bien sûr un champ de vecteurs sur V le long de γ . Cette 1-forme est fermée car elle admet une primitive locale $(\gamma) = \int_R \omega$ où R est un petit rectangle quelconque entre γ_0 et γ : la primitive est bien définie car ω est fermée et L, L' lagrangiennes. Pour voir si α est exacte, notons que le groupe fondamental de \mathcal{B} est isomorphe à $[S^1 \times I, S^1 \times 0, S^1 \times 1; V, L, L']$, le morphisme $[\alpha] : \pi_1 \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}$ étant donné par l'intégration de ω . On en déduit par exemple que α est exacte si L' est hamiltonniennement isotope à L et si $[\omega] | \pi_2(V, L) = 0$.

Les zéros de α sont les chemins constants dans $L \cap L'$. Si $L \cap L'$ est discret, ce qui est le cas si L et L' sont transverses, on a donc une bijection $\text{crit}(\alpha) \longleftrightarrow L \cap L'$. De plus on peut toujours munir (V, ω) d'une structure presque kählérienne, c'est-à-dire d'une métrique \langle, \rangle et d'une structure presque complexe J telles que $\omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle$. Il est alors clair que le gradient L^2 est $\nabla(\gamma) = -J\dot{\gamma}$. Donc une ligne de gradient $u \mapsto \gamma_u$ est donnée par l'équation $\partial \gamma_u / \partial u = -J\dot{\gamma}_u$, ce qui s'écrit $\partial \Gamma / \partial t = J \partial \Gamma / \partial u$ en notant $\gamma_u(t) = \Gamma(u, t)$. Autrement dit, $\Gamma(u + it)$ est pseudo-holomorphe sur $\mathbf{R} + i[0, 1] \subset \mathbf{C}$.

L'indice d'un zéro de α est encore donné par le flot spectral du hessien. Cette fois il s'exprime en termes homotopiques : un chemin entre deux points critiques donne naissance à une application $D^2 \rightarrow V$ qui envoie le bord inférieur dans L et le bord supérieur dans L' . On obtient donc un fibré symplectique sur D^2 muni de deux sous-fibrés lagrangiens sur les deux moitiés du bord. Dans cette situation, on peut définir un indice de Maslov $[V]$ qui est justement le flot spectral [F1].

Par une construction analogue à celle exposée dans l'Introduction, Floer construit une homologie $I_*(V, L, L')$ sous certaines hypothèses [F2] [F4]. Par exemple :

THÉORÈME [F2].— *Si L' est hamiltonniennement isotope à L et si $\pi_2(V, L) = 0$, $I_*(V, L, L')$ est bien défini et est isomorphe à $H_*(L)$.*

Remarque. Floer n'énonce ses résultats qu'avec des coefficients $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ mais il n'y a sans doute pas de difficultés à orienter les espaces de modules pour avoir des coefficients \mathbf{Z} .

6.2. Il y a une relation entre l'homologie d'instantons et l'homologie symplectique, expliquée par Atiyah dans [At1]. Si M^3 est une sphère d'homologie avec un scindement de Heegaard $M = M_1 \cup_{\Sigma} M_2$, on a vu au 2.2 que $R(M) = R(M_1) \cap R(M_2) \subset R(\Sigma)$. Or le fait que Σ est une surface implique que $R(\Sigma)$ est une variété symplectique, non singulière près des connexions irréductibles [Go]. De plus les $R(M_i)$ sont deux sous-variétés lagrangiennes. Donc l'homologie d'instantons est basée sur les points d'intersection de deux sous-variétés lagrangiennes (en supposant pour simplifier que cette intersection est transverse). Le problème est que ces variétés sont singulières, et que si l'on enlève la singularité elles ne sont plus compactes. Atiyah demande si l'homologie symplectique peut malgré tout être définie, et donner ainsi une nouvelle interprétation de l'homologie d'instantons. Notons que les fonctionnelles de Chern Simons et d'action symplectique ont les mêmes points critiques mais que leurs lignes de gradient sont différentes.

BIBLIOGRAPHIE

- [AM] S. ABKULUT, J. Mc CARTHY - *Casson's invariant for oriented homology three-spheres : an exposition*. Math. Notes 36, Princeton U.P., 1990.
- [Ar] V.I. ARNOLD - *First steps in symplectic topology*, Russian Math. Surv. 41 (1986), 1-21
- [A1] M.F. ATIYAH - *New invariants of three and four-dimensional manifolds*, in the mathematical heritage of Hermann Weyl, Proc. Symp. Pure Math. 48, Amer. Math. Soc. (1988), 285-299.
- [A2] M.F. ATIYAH - *Topological quantum field theory*, Publ. Math. IHES

70 (1990), 175-186.

- [APS] M.F. ATIYAH, V.K. PATODI and I.M. SINGER - *Spectral asymmetry and Riemannian geometry, I* : Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 77 (1975), 43-69. II : id., 78 (1975), 405-432. III : id., 79 (1976), 71-99.
- [Br] P.J. BRAAM - *Floer homology groups for homology three-spheres*, Adv. in Math. (1991)
- [CS] S.S. CHERN, J. SIMONS - *Characteristic forms and geometric invariants*, Ann. of Math. 99 (1974), 48-69.
- [D1] S.K. DONALDSON - *An application of gauge theory to the topology of four-manifolds*, J. Diff. Geom. 18 (1983), 279-315.
- [D2] S.K. DONALDSON - *Connections, cohomology and the intersection form of four-manifolds*, J. Diff. Geom. 24 (1986), 275-341.
- [D3] S.K. DONALDSON - *The orientation of Yang-Mills moduli spaces and four-manifold topology*, J. Diff. Geom. 26 (1987) 397-428.
- [D4] S.K. DONALDSON - *Polynomial invariants for smooth four-manifolds*, Topology 29 (1990), 257-315.
- [DK] S.K. DONALDSON et P.B. KRONHEIMER - *Geometry of four-manifolds*, Oxford U.P., 1990.
- [F1] A. FLOER - *A relative Morse index for the symplectic action*, Comm. Pure and Appl. Math. 41 (1988), 393-407.
- [F2] A. FLOER - *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Diff. Geom. 28 (1988), 513-547.
- [F3] A. FLOER - *An instanton invariant for three-manifolds*, Comm. Math. Phys. 118 (1988), 215-240.
- [F4] A. FLOER - *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Comm. Math. Phys. 120 (1989), 335-356.
- [F5] A. FLOER - *Instanton homology, Dehn surgery, and knots*, in *Geometry of Low-Dimensional Manifolds 1* (S.K. Donaldson and C.B. Thomas editors), London Math. Soc. Lect. Notes 150, Cambridge U.P. (1990).
- [FS] R. FINTUSHEL and R. STERN - *Instanton homology of Seifert fibered homology three spheres*, Proc. London Math. Soc.(1990).
- [FT] M. FREEDMAN - L. TAYLOR - *Λ -splitting four-manifolds*, Topology 16 (1977), 181-184

- [FU] D.S. FREED, K. UHLENBECK - *Instantons and four-manifolds*, Springer, 2^e éd. (1990).
- [Fu] K. FUKAYA - *Floer homology oriented three-manifolds*, préprint (1990).
- [Go] W. GOLDMAN - *The symplectic nature of the fundamental group of surfaces*, Adv. in Math. 54 (1984), 200-225.
- [Gr] M. GROMOV - *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Inv. Math. 82 (1985), 307-347.
- [JRS] J.D.S. JONES, J.H. RAWNSLEY and D.A. SALAMON - *Instanton homology and the η invariant*, préprint 1990.
- [K] D. KOTSCHICK - *Instanton homology* (after A. Floer), in *Geometry of Low-Dimensional Manifolds 1* (S.K. Donaldson and C.B. Thomas editors), London Math. Soc. Lect. Notes **150**, Cambridge U.P. (1990).
- [LM] R.B. LOCKHARDT, R.C. Mc OWEN - *Elliptic differential operators on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa IV-12 (1985), 409-446.
- [Ma] A. MARIN - *Un nouvel invariant pour les sphères d'homologie de dimension trois* (d'après A. Casson), Sémin. Bourbaki n^o 693 (février 1988), Astérisque 161-162 (1989), 151-164.
- [Mi] J. MILNOR - *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton U.P., 1965.
- [N] S.P. NOVIKOV - *Multivalued functions and functionals, an analogue of the Morse theory*, Soviet Math. Dokl. 24 (1981), 222-226.
- [O1] C. OKONEK - *On the Floer homology of Seifert-fibered homology three-spheres*, préprint 1990.
- [O2] C. OKONEK - *Instanton invariants and algebraic surfaces*, préprint 1990.
- [S] S.SMALE - *On gradient dynamical systems*, Annals of Math. 74 (1961), 199-206.
- [Ta1] C.H. TAUBES - *Self-dual connections on non self-dual manifolds*, J. Diff. Geom. 17 (1982), 139-170.
- [Ta2] C.H. TAUBES - *Self-dual connections on four-manifolds with indefinite intersection matrix*, J. Diff. Geom. 19 (1984), 517-560.
- [Ta3] C.H. TAUBES - *Gauge theory on asymptotically periodic four-manifolds*, J. Diff. Geom. 25 (1987), 363-430.

- [Ta4] C.H. TAUBES - *Casson's invariant and gauge theory*, J. Diff. Geom. 31 (1990), 547-599.
- [Th] R. THOM - *Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété*, C..R. Acad.Sci. Paris 228 (1949),973-975
- [U1] K. UHLENBECK - *Removable singularities in Yang-Mills fields*, Comm. Math. Phys. 83 (1982), 11-29.
- [U2] K. UHLENBECK - *Connections with L^p -bounds on curvature*, Comm. Math. Phys. 83 (1982), 31-42.
- [Vi] C. VITERBO - *Intersections de sous-variétés lagrangiennes, fonctionnelles d'action et indice des systèmes hamiltoniens*, Bull. Soc. Math. Fr. (1987)
- [W1] E. WITTEN - *Supersymmetry and Morse theory*, J. Diff. Geom.17 (1982), 661-692.
- [W2] E. WITTEN - *Topological quantum field theory*, Comm. Math. Phys. 117 (1988), 353-386.

Jean-Claude SIKORAV

Université Paul-Sabatier

URA 1408 du CNRS

UFR de Mathématiques

118 route de Narbonne

F-31062 TOULOUSE CEDEX

Astérisque

JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

Polynômes quadratiques et attracteur de Hénon

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 734, p. 143-165

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__143_0>

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

POLYNÔMES QUADRATIQUES ET ATTRACTEUR DE HÉNON

par Jean-Christophe YOCCOZ

0. INTRODUCTION

Nous énonçons (§1) trois résultats importants sur les systèmes dynamiques démontrés ces dernières années. Ces résultats sont, grosso modo, du type suivant : dans certaines familles d'applications (polynômes quadratiques, fractions rationnelles, famille de Hénon), on a, avec probabilité positive sur les paramètres, une dilatation exponentielle (non uniforme) en dépit de la présence d'une zone "critique" fortement contractante.

Nous indiquons ensuite (§2, 3, 4) le contexte dans lequel se situent ces résultats.

La méthode de démonstration est commune aux trois résultats (bien que les difficultés techniques soient de degré très varié) : après avoir garanti, par une bonne localisation des paramètres, une forte dilatation pour les premiers itérés, on montre qu'avec forte probabilité dans la zone de paramètres considérée, les retours dans la zone critique, qui sont inévitables, ne sont ni trop précis ni trop fréquents pour détruire la dilatation acquise. C'est une récurrence assez compliquée sur le nombre d'itérations, mais dont le principe semble extrêmement fécond, et devrait, une fois bien compris, ouvrir la voie à de nombreux autres résultats significatifs.

Nous esquissons au §5 une démonstration du résultat le plus simple, et indiquons au §6 quelles sont dans les deux autres résultats les difficultés supplémentaires rencontrées.

1. LES RÉSULTATS

1.1. Pour $a \in \mathbf{R}$, nous considérons l'itération du polynôme quadratique réel :

$$P_a(x) = x^2 + a.$$

Pour $a \leq \frac{1}{4}$, nous notons β_a le plus grand point fixe de P_a .

THÉORÈME 1. [M. Jakobson] ([1], [2], [3], [4]).— *Soient $1 < \lambda < 2$ et $\delta > 0$. Il existe $a_0 \in]-2, \frac{1}{4}[$ et un ensemble $A \subset [-2, a_0]$ possédant les propriétés suivantes :*

a) $|A| \geq (1 - \delta)(a_0 + 2)$;

b) *Soit $a \in A$;*

(i) *on a $|DP_a^n(a)| \geq \lambda^n$, pour $n \geq 0$;*

(ii) *pour presque tout $x \in [-\beta_a, \beta_a]$, il existe $c(x) > 0$ tel qu'on ait :*

$$|DP_a^n(x)| \geq c(x)\lambda^n \quad \text{pour } n \geq 0 ;$$

(iii) *le polynôme P_a possède une (unique) mesure invariante ergodique absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

La propriété b) (iii) implique qu'il existe une fonction positive $h_a \in L^1([-\beta_a, \beta_a])$ telle qu'on ait, pour $-\beta_a \leq s < t \leq \beta_a$ et presque tout $x \in [-\beta_a, \beta_a]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \# \{n \in [0, N[, P_a^n(x) \in [s, t]\} = \int_s^t h_a(u) du.$$

La propriété b) (ii) signifie que l'exposant de Lyapounov, et donc aussi l'entropie métrique, de P_a relatif à la mesure de (iii) est au moins égal à $\text{Log } \lambda$.

1.2. Pour $d \geq 2$, considérons l'espace \mathcal{R}_d des fractions rationnelles irréductibles de degré d . C'est un ouvert de Zariski de $\mathbf{C}P(2d+1)$. Chaque fraction rationnelle $R \in \mathcal{R}_d$ définit une application holomorphe de $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ dans lui-même.

On dit qu'une fraction rationnelle R est *strictement prépériodique* si tout point critique de R a une orbite finie mais n'est pas périodique.

THÉORÈME 2. [M. Rees] ([5]).— *Il existe une partie A de \mathcal{R}_d ayant les propriétés suivantes :*

a) *A est de mesure positive (pour la classe de la mesure de Lebesgue sur \mathcal{R}_d) et toute fraction rationnelle strictement prépériodique est un point de densité de A ;*

b) *Soit $R \in A$;*

(i) *il existe $\lambda = \lambda(R) > 1$ et pour presque tout $x \in \overline{C}$ un réel $c(x) > 0$ tels que :*

$$\|T_x R^n\| \geq c(x) \lambda^n \quad , \quad \forall n \geq 0 ;$$

(ii) *R possède une mesure invariante ergodique absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

D'après b) (i), l'ensemble de Julia de $R \in A$ est égal à \overline{C} .

1.3. La famille de Hénon ([6], [7]) est définie par :

$$P_{a,b}(x, y) = (x^2 + a + y, bx) \quad , \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Pour $b = 0$, $P_{a,b}$ dégénère en le polynôme quadratique P_a sur $\mathbf{R} \times \{0\}$. Pour $b \neq 0$, $P_{a,b}$ est un difféomorphisme de \mathbf{R}^2 , de jacobien constant égal à $-b$.

Pour $a \leq \frac{1}{4}(1-b)^2$, notons $\alpha_{a,b}$ la plus petite racine de $x^2 + a + (b-1)x = 0$ et $p_{a,b} = (\alpha_{a,b}, b\alpha_{a,b})$ le point fixe de $P_{a,b}$ correspondant.

THÉORÈME 3. [M. Benedicks, L. Carleson] ([8], [9]).— *Soient $1 < \lambda < 2$, et $\delta > 0$. Il existe $a_0 \in [-2, 0]$, $b_0 > 0$, et, pour $0 < |b| < b_0$, un ensemble $A_b \subset [-2, a_0]$ ayant les propriétés suivantes :*

a) $|A_b| \geq (1-\delta)(a_0+2)$;

b) *Soient $0 < |b| < b_0$, $a \in A_b$; notons $\Lambda = \Lambda_{a,b}$ l'adhérence de la variété instable du point fixe hyperbolique $p_{a,b}$ de $P_{a,b}$;*

(i) *on a $\Lambda \subset [-3, 3] \times [-3b, +3b]$;*

(ii) *il existe un point $z_0 \in \Lambda$, d'orbite dense dans Λ , vérifiant*

$$\|DP_{a,b}^n(z_0)\| \geq \lambda^n \quad , \quad \forall n \geq 0 ;$$

(iii) *il existe un ouvert non vide $U \subset \mathbf{R}^2$ tel qu'on ait :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(P_{a,b}^n(x), \Lambda) = 0$$

pour tout $x \in U$.

Ce théorème représente un progrès majeur dans la compréhension des difféo-morphismes dissipatifs des surfaces (cf. §4). On aimerait obtenir dans la partie b) une information plus complète, du type de celle contenue dans les parties b) des théorèmes 1 et 2.

2. POLYNÔMES QUADRATIQUES

2.1. Pour $a > \frac{1}{4}$, on a $\text{Lim}_{n \rightarrow +\infty} P_a^n(x) = +\infty$ pour tout réel x .

Pour $a \leq \frac{1}{4}$, notons K_a l'ensemble des réels x dont l'orbite par P_a est bornée. On a :

$$K_a = \{\cap_{n \geq 0} P_a^{-n}([-\beta_a, \beta_a])\}.$$

Pour $a < -2$, on a $P_a(0) = a < -\beta_a$; il est élémentaire de voir qu'il existe un homéomorphisme h_a de $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ sur K_a qui conjugue le décalage σ à P_a/K_a . L'ensemble de Cantor K_a est dilaté par P_a : $\exists c > 0, \lambda > 1$ tels que :

$$\forall x \in K_a, \forall n \geq 0 \quad |DP_a^n(x)| \geq c\lambda^n.$$

La dimension de Hausdorff de K_a dépend analytiquement de $a \in]-\infty, -2[$ ([10]) ; on contrôle très bien dans ce cas tous les aspects de la dynamique de P_a .

2.2. Si $a \in [-2, \frac{1}{4}] = J$, on a $K_a = [-\beta_a, \beta_a]$. Notons \mathcal{D} l'ensemble dénombrable discret des valeurs de a pour lesquelles le point critique 0 est périodique.

Soient $a_0 \in \mathcal{D}$, et r la période de 0 pour P_{a_0} . Il existe un intervalle ouvert $I(a_0) =]a_0^-, a_0^+[\subset J$, contenant a_0 , et une application analytique $\alpha^{a_0} : I(a_0) \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour $a \in I(a_0)$, $\alpha^{a_0}(a)$ est un point périodique de P_a , de période n ;

(ii) $\alpha^{a_0}(a_0) = 0$;

(iii) l'application $a \rightarrow DP_a^n(\alpha^{a_0}(a))$ est un difféomorphisme analytique croissant de $I(a_0)$ sur $] -1, +1[$.

Pour $a \in I(a_0)$, posons

$$W_a = \{x \in \mathbf{R}, \text{Lim}_{k \rightarrow \infty} P_a^{kn}(x) = \alpha^{a_0}(a)\},$$

$$V_a = \bigcup_{i=0}^{n-1} P_a^{-i}(W_a), J_a = K_a - V_a.$$

Les parties V_a, W_a sont ouvertes, les points 0 et $\alpha^{a_0}(a)$ appartiennent à la même composante connexe de W_a , et le compact J_a est dilaté par P_a .

Au voisinage de l'orbite périodique de $\alpha^{a_0}(a)$, la famille P_a présente une bifurcation de type flip (doublement de période) en a_0^- , et de type flip ou selle-nœud en a_0^+ .

2.3. La conjecture principale concernant la famille quadratique réelle est :

CONJECTURE.— *L'ouvert $\cup_{a_0 \in \mathcal{D}} I(a_0) = \mathcal{H}$ est dense dans J .*

Pour $a \in J, a \notin \cup_{a_0 \in \mathcal{D}} \overline{I(a_0)}$, toutes les orbites périodiques de P_a sont répulsives. Mais K_a , contenant le point critique, ne peut évidemment pas être dilaté par P_a dans le sens de §2.1.

Le théorème de Jakobson montre que \mathcal{H} n'est pas de mesure de Lebesgue pleine dans $[-2, \frac{1}{4}]$.

On dit que P_a (avec $a \in J$) vérifie la condition de Misiurewicz si l'orbite postcritique $(P_a^n(0))_{n \geq 1}$ n'accumule pas 0. Le polynôme P_a vérifie alors la conclusion b) du théorème 1 ([11]) (pour un certain $\lambda > 1$). Cependant la condition de Misiurewicz n'est presque jamais vérifiée par P_a .

2.4. Soit $a_0 \in \mathcal{D}$, n la période de 0 pour P_{a_0} . Il existe un réel $\tilde{a}_0^- < a_0^-$, une application continue $\beta_{a_0} : J \rightarrow \mathbf{R}^+$ et un homéomorphisme $\varphi_{a_0} : J \rightarrow J(a_0) = [\tilde{a}_0^-, a_0^+]$ tels que pour tout $a \in J$, les restrictions P_a/K_a et $P_{\varphi_{a_0}(a)/[-\beta_{a_0}(a), \beta_{a_0}(a)]}^n$ soient topologiquement conjuguées ([35]). Le réel \tilde{a}_0^- est déterminé par ces propriétés.

Une valeur $a \in J(a_0)$ du paramètre est dite n -renormalisable. Une valeur a du paramètre est dite infiniment renormalisable (on note $a \in R^\infty$) si elle est n -renormalisable pour des entiers n arbitrairement grands. Elle est infiniment renormalisable de type constant (on note $a \in R_c^\infty$) si elle est n_k -renormalisable pour une suite $(n_k)_{k \geq 0}$ d'entiers vérifiant $\text{Sup}_{k \geq 0} n_{k+1} n_k^{-1} < +\infty$.

D'après les travaux de Sullivan ([12], [13]), on possède un bon contrôle de la dynamique de P_a lorsque $a \in R_c^\infty$. En particulier, tout point de R_c^∞ est adhérent à \mathcal{H} .

D'autre part, on sait ([14]) que $\overline{\mathcal{H}} \cup R^\infty = J$. Pour démontrer la conjecture 2.3, il reste à voir que toutes les composantes connexes de R^∞ sont des points.

Les questions suivantes semblent intéressantes : soit $\mathcal{A} = (J - R^\infty \cup_{a_0 \in \mathcal{D}} \overline{I(a_0)})$; d'après le théorème 1, \mathcal{A} est de mesure positive ; est-il vrai que, pour presque tout $a \in \mathcal{A}$, P_a possède une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ? qu'on ait $\liminf_{n \rightarrow +\infty} |DP_a^n(x)|^{1/n} > 1$ pour presque tout x ?

[On conjecture par ailleurs que R^∞ est de mesure nulle, ce qui impliquerait évidemment la conjecture 2.3.]

2.5. Le théorème 1 a été étendu à des familles d'endomorphismes plus générales que la famille quadratique ([15]).

Dans une autre direction, M. Benedicks et L.S. Young ont prouvé une version du théorème 1 concernant l'itération de perturbations aléatoires d'un polynôme quadratique [16].

3. FRACTIONS RATIONNELLES

3.1. Soient $d \geq 2$ et $R : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ une fraction rationnelle (irréductible) de degré d . L'ensemble de Julia J_R est le complémentaire dans $\overline{\mathbb{C}}$ du plus grand ouvert U_R sur lequel la famille $(R^n)_{n \geq 0}$ est normale.

C'est une partie compacte, non vide, totalement invariante ($R^{-1}(J_R) = J_R$), égale à $\overline{\mathbb{C}}$ ou d'intérieur vide. Les points périodiques répulsifs de R y sont denses.

L'ensemble de Julia joue, pour l'itération de J , le rôle de l'ensemble limite d'un groupe kleinien. Rappelons la :

Conjecture 1.— Si $J_R \neq \overline{\mathbb{C}}$, J_R est de mesure nulle.

3.2. Une fraction rationnelle $R \in \mathcal{R}_d$ est dite *hyperbolique* si aucun des

points critiques de R n'appartient à J_R . L'ouvert U_R est alors constitué des bassins des orbites périodiques attractives de R (celles-ci sont en nombre fini, non nul) ; l'ensemble de Julia J_R est *dilaté* par R (cf. §2.1), donc de mesure nulle dans ce cas.

Pour la description des composantes connexes de U_R lorsque R n'est plus nécessairement hyperbolique, voir [17], [18].

Une fraction rationnelle R_0 est *structurellement stable* s'il existe un voisinage \mathcal{U} de R_0 dans \mathcal{R}_d tel que tout R dans \mathcal{U} soit topologiquement conjugué à R_0 .

Une fraction rationnelle R_0 est *J-stable* (ou Ω -stable) s'il existe un voisinage \mathcal{U} de R_0 dans \mathcal{R}_d tel que, pour tout R dans \mathcal{U} , R et R_0 soient topologiquement conjugués au voisinage de leurs ensembles de Julia.

Une fraction rationnelle hyperbolique est *J-stable*. La deuxième conjecture importante dans le sujet est :

Conjecture 2.— *Une fraction rationnelle J-stable est hyperbolique.*

On sait qu'une fraction rationnelle R *J-stable* qui ne serait pas hyperbolique doit vérifier $J_R = \overline{C}$.

3.3. La conjecture précédente est à rapprocher du résultat fondamental de Mané-Sad-Sullivan ([19]) : les fractions rationnelles structurellement stables (ou *J-stables*) forment un ouvert dense de \mathcal{R}_d .

Le théorème de M. Rees implique que les fractions rationnelles qui *ne sont pas* structurellement stables forment une partie de \mathcal{R}_d de mesure positive. On peut risquer la question (optimiste) suivante : est-il vrai que presque toute fraction rationnelle $R \in \mathcal{R}_d$ soit structurellement stable ou vérifie la conclusion b) du théorème 2 ?

3.4. M. Rees obtient en fait la conclusion plus précise suivante (il existe de même une version analogue du théorème de Mané-Sad-Sullivan). Soit $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles ; on suppose qu'il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que R_{λ_0} soit strictement prépériodique, et que la famille (R_λ) vérifie en λ_0 la condition de transversalité suivante :

Pour tout point critique $c(\lambda)$ de R_λ , soient k, n des entiers > 0 tels que

$R_{\lambda_0}^k(c(\lambda_0)) = R_{\lambda_0}^{k+n}(c(\lambda_0))$; on a :

$$D_\lambda(R_\lambda^k(c(\lambda)) - R_\lambda^{k+n}(c(\lambda)))|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0.$$

Alors, λ_0 est point de densité d'une partie $A \subset \Lambda$ de mesure positive constituée de paramètres $\lambda \in \Lambda$ pour lesquels R_λ vérifie la conclusion b) du théorème 2.

3.5. Fornæss et Sibony ([20]) ont démontré une version du théorème 2 concernant l'itération de perturbations aléatoires d'une fraction rationnelle.

4. LA FAMILLE DE HÉNON. BIFURCATIONS HOMOCLI- NIQUES

Nous indiquons ci-dessous le rôle de la famille de Hénon (et ses généralisations) dans l'étude des difféomorphismes polynômiaux de \mathbf{R}^2 . Nous expliquons ensuite comment le résultat de Benedicks-Carleson (généralisé par Mora-Viana) s'inscrit dans la compréhension de la dynamique des difféomorphismes (dissipatifs) des surfaces.

4.1. Difféomorphismes polynômiaux de \mathbf{R}^2 [21]

Notons G le groupe des difféomorphismes polynômiaux de \mathbf{R}^2 , A le sous-groupe des automorphismes affines, S le sous-groupe (résoluble) constitué des difféomorphismes de la forme :

$$(x, y) \mapsto (\alpha x + p(y), \beta y + \gamma),$$

avec $(\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*, \gamma \in \mathbf{R}, p \in \mathbf{R}[x])$.

Le groupe G est isomorphe au produit amalgamé de A et S le long de $A \cap S$ ([22]).

Une *application de Hénon généralisée* est un difféomorphisme polynômial de la forme :

$$(x, y) \mapsto (p(x) + y, bx),$$

avec $b \in \mathbf{R}^*, p \in \mathbf{R}[x], d^0 p \geq 2$.

THÉORÈME (Friedland-Milnor).— *Tout difféomorphisme polynômial de \mathbf{R}^2 est conjugué dans G à :*

- ou bien un élément de $A \cup S$;
- ou bien la composition $H_1 \circ \dots \circ H_m$ ($m \geq 1$) d'applications de Hénon généralisées $H_i(x, y) = (y + p_i(x), b_i x)$.

La dynamique des difféomorphismes de $A \cup S$ est élémentaire et sans grand intérêt. Dans le second cas, la décomposition $H_1 \circ \dots \circ H_m$ est essentiellement unique : en particulier, l'entier m et les degrés d_i des polynômes p_i sont parfaitement déterminés. L'étude dynamique de la famille de Hénon constitue donc le premier cas non trivial de la dynamique des difféomorphismes polynômiaux de \mathbf{R}^2 : le cas général consiste en l'itération cyclique d'un nombre fini d'applications de Hénon généralisées.

4.2. Hyperbolicité ([23], [24])

Soit M^n une variété riemannienne compacte de classe C^∞ , $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^∞ .

Une partie compacte K de M invariante par f est *hyperbolique* s'il existe $c > 0$, $0 < \lambda < 1$ et une décomposition $TM|_K = E^s \oplus E^u$ en sous-fibrés invariants par Tf tels qu'on ait :

$$\begin{aligned} \|Tf^n|_{E^s}\| &\leq c\lambda^n, \\ \|Tf^{-n}|_{E^u}\| &\leq c\lambda^n, \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Les variétés stables $W^s(x) = \{y \in M, \text{Lim}_{n \rightarrow +\infty} d(f^n y, f^n x) = 0\}$ et instables $W^u(x) = \{y \in M, \text{Lim}_{n \rightarrow -\infty} d(f^n y, f^n x) = 0\}$ sont alors, pour $x \in K$, les images d'immersions injectives de E_x^s, E_x^u respectivement.

Une partie compacte invariante hyperbolique K de M est un *ensemble basique* si $f|_K$ a une orbite dense et s'il existe un voisinage U de K tel que $K = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(U)$. Les points périodiques de $f|_K$ sont alors denses dans K .

Pour un ensemble basique K , définissons :

$$\begin{aligned} W^s(K) &= \{y \in M, \text{Lim}_{n \rightarrow +\infty} d(f^n y, K) = 0\}, \\ W^u(K) &= \{y \in M, \text{Lim}_{n \rightarrow -\infty} d(f^n y, K) = 0\}. \end{aligned}$$

On a $W^s(K) = \bigcup_{x \in K} W^s(x)$, $W^u(K) = \bigcup_{x \in K} W^u(x)$. On dit que K est un *attracteur hyperbolique* si $W^s(K)$ est ouvert.

L'ensemble récurrent par chaînes $C(f)$ de f est constitué des points x pour lesquels il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une suite finie $x = x_0, x_1, \dots, x_n = x$ ($n \geq 1$) avec $d(f(x_\ell), x_{\ell+1}) < \varepsilon$ pour $0 \leq \ell < n$. C'est la plus petite partie compacte invariante contenant tous les phénomènes de récurrence de f .

On dit que f est C -hyperbolique si $C(f)$ est hyperbolique. Si f est C -hyperbolique, $C(f)$ admet une partition (dite spectrale) en ensembles basiques disjoints C_1, \dots, C_r tels que $W^s(C_i) \cap W^u(C_j) = \emptyset$ pour $i < j$ et $W^u(C_i) \cap W^s(C_i) = C_i$.

Un difféomorphisme C -hyperbolique f a la propriété de *transversalité forte* si $W^s(x)$ et $W^u(y)$ sont transverses pour tous $x, y \in C(f)$.

Si f est C -hyperbolique, alors f est C^1 C -stable : pour tout difféomorphisme g C^1 -voisin de f , il existe un homéomorphisme $h : C(f) \mapsto C(g) \subset M$, proche de l'injection canonique, conjuguant $f|_{C(f)}$ à $g|_{C(g)}$.

Si de plus f a la propriété de transversalité forte, f est C^1 -structurellement stable : tout difféomorphisme C^1 -proche de f est topologiquement conjugué à f ([25], [26]).

Un résultat remarquable de Mané ([27]) affirme qu'inversement la C^1 -stabilité structurelle implique C -hyperbolicité et transversalité forte. Ceci a été généralisé par Palis [28] (C^1 C -stabilité \Rightarrow C -hyperbolicité) et est totalement ouvert pour la C^2 -stabilité structurelle.

4.3. Bifurcations homocliniques

Supposons que M soit une surface compacte. Même dans ce cas, on ne dispose pratiquement pas d'outils permettant d'étudier la dynamique du difféomorphisme le plus général de M . Par exemple, on ne sait pas si les difféomorphismes ayant au moins une orbite périodique forment une partie dense de $\text{Diff}^\infty(\mathbf{T}^2)$: c'est, sous sa forme la plus simple, le problème du "closing lemma" ; les seuls résultats généraux connus concernent la C^1 -topologie (Pugh, [29]).

Pour contourner ce problème (et d'autres), une approche qui s'est avérée fructueuse est la suivante. On considère des familles lisses $(f_t)_{t \in [-1,1]}$ de difféomorphismes tels que f_t soit C -hyperbolique pour $t < 0$, mais f_0 ne le soit pas. L'étude de la dynamique des f_t , pour $0 \leq t \ll 1$ a permis d'exhiber des phénomènes nouveaux et très intéressants. La façon proba-

blement la plus intéressante de traverser la frontière de l'ouvert formé par les difféomorphismes C -hyperboliques est à travers une *bifurcation homoclinique* : le difféomorphisme f_0 présente une *tangence homoclinique*, c'est-à-dire une intersection tangentielle (quadratique) entre les variétés stables et instables d'un point périodique hyperbolique ; cette intersection n'existait pas pour $t < 0$, et se déploie génériquement avec t (voir Figure 1).

À ce propos, Palis a formulé la :

Conjecture.— *Tout difféomorphisme de la surface compacte M qui n'est pas C -hyperbolique peut être perturbé (dans la C^∞ -topologie) de façon à exhiber une tangence homoclinique.*

Les bifurcations homocliniques ne sont assez bien comprises que dans le cas dissipatif : on demande par exemple, dans le cas le plus simple où la tangence se produit pour un point fixe hyperbolique p , que $|\text{Det } T_p f_0| < 1$.

Mentionnons quelques résultats obtenus (pour les familles génériques) sur la dynamique des f_t ($0 < t \ll 1$) :

- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle non trivial $J \subset [0, \varepsilon]$, et une partie R G_δ -dense dans J , tels que pour $t \in R$ le difféomorphisme f_t ait une infinité d'orbites périodiques attractives (Newhouse [30], [31]) ;
- si l'ensemble basique qui contient p a une dimension de Hausdorff strictement inférieure à 1, alors avec forte probabilité sur $t \in [0, \varepsilon]$ le difféomorphisme f_t a de bonnes propriétés d'hyperbolicité (Newhouse-Palis-Takens [32], Palis-Takens [33]).

Le rôle de la famille de Hénon (ou plutôt de familles de "type Hénon") dans ce contexte est le suivant (voir Figure 2) : soit q un point de tangence pour f_0 , N un entier assez grand ; on s'intéresse aux points situés au voisinage de q qui reviennent pour la première fois dans ce voisinage en N itérations de f_t . Un calcul montre alors que, dans un système de coordonnées approprié, et pour des valeurs du paramètre $t \in [t_N^-, t_N^+]$, l'application de retour $F_t = f_t^N$ a des propriétés semblables à celles des applications de Hénon $P_{a,b}$ (le paramètre a se déduisant de t par une application affine, et le paramètre b étant essentiellement constant de l'ordre de $[\text{Det}(T_p f_0)]^N$) : voir [9] pour la définition précise de ces familles "de type Hénon".

Mora et Viana ([9]) ont étendu le résultat de Benedicks et Carleson à ce cadre : ils ont ainsi démontré qu’avec probabilité strictement positive sur le paramètre $t \in [0, \varepsilon]$, le difféomorphisme f_t exhibe un “attracteur étrange” : une partie compacte invariante Λ , possédant une orbite dense $\mathcal{O}(z_0)$ d’exposant de Lyapounov positif ($\text{Lim inf}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|T_{z_0} f^n\| > 0$), et dont le bassin $W^s(\Lambda) = \{y \in M, \text{Lim}_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(y), \Lambda) = 0\}$ soit d’intérieur non vide. Il est à noter que Λ ne peut être un attracteur hyperbolique au sens de 4.1 (cf. [34]). La démonstration, adaptée de celle de Benedicks-Carleson, ne fournit malheureusement pas, dans son état actuel, beaucoup d’informations sur la géométrie de Λ .

Figure 1

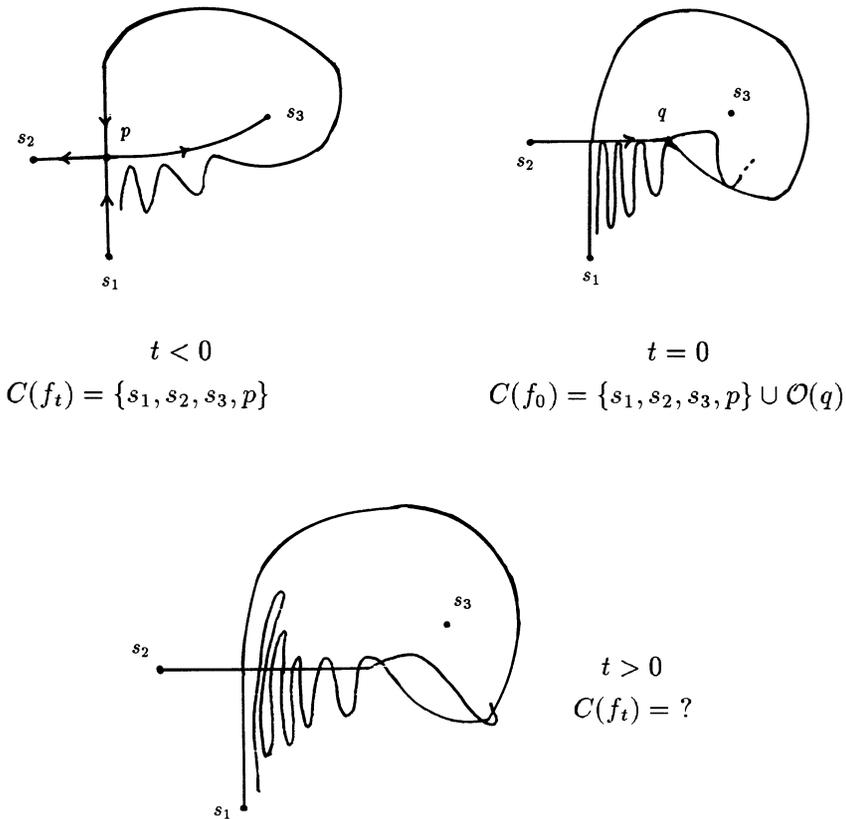
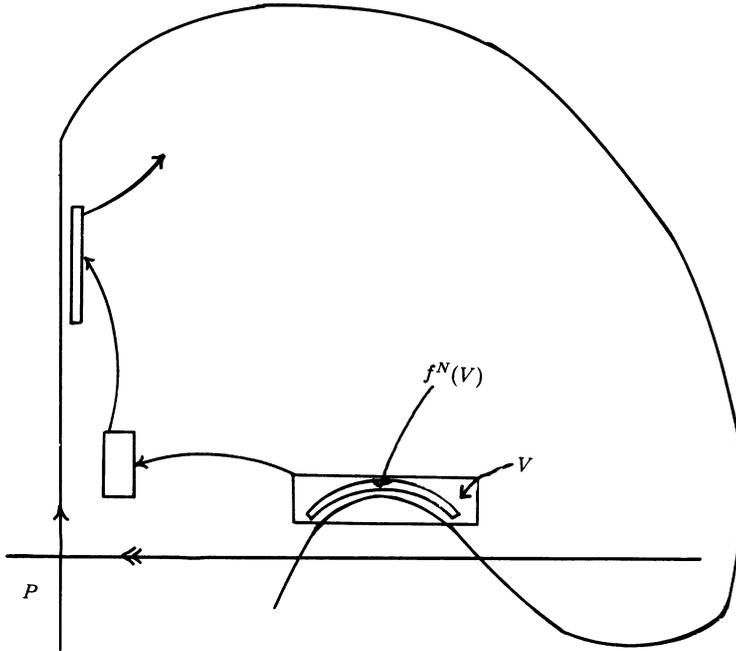


Figure 2



5. ESQUISSE DE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

5.1. Mise sous forme normale

Un changement linéaire de variable et un changement de paramètre transforme la famille $(P_a)_{a \in [-2,0]}$ en la famille $(\tilde{P}_s)_{s \in [0,1]}$, avec :

$$\tilde{P}_s(x) = 2x^2 - 1 + s(1 - x^2).$$

Notons h l'homéomorphisme $x \mapsto \sin \frac{\pi}{2} x$ de $[-1, 1]$ dans lui-même. Posons

$$Q_s = h^{-1} \circ \tilde{P}_s \circ h, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

On a

$$Q_0(x) = 2|x| - 1,$$
$$\sin \frac{\pi}{2} Q_s(x) = \sin \frac{\pi}{2} Q_0(x) + s \cos^2 \frac{\pi}{2} x.$$

Nous nous intéressons à des valeurs du paramètre $s > 0$ très voisines de 0. En dehors d'un voisinage de l'origine, on a :

$$Q_s(x) = Q_0(x) + O(s)$$

en topologie C^∞ . Au voisinage de l'origine, on a :

$$(1 + Q_s(x))^2 = 4x^2 + \frac{8s}{\pi^2} + O(sx^2) + O(x^4).$$

On a aussi $Q_s(1) = 1$, $DQ_s(1) = 2 + O(s)$.

5.2. Notons $\alpha(s)$ le point fixe de Q_s différent de 1 (on a $\alpha(s) = -\frac{1}{3} + O(s)$). Pour s petit, la valeur critique $c(s)$ de Q_s appartient à $[-1, \alpha(s)[$.

On suppose qu'on a $Q_s^n(0) \neq \alpha(s)$ pour tout $n \geq 0$; ceci exclut un ensemble dénombrable de valeurs de s .

Posons $J^{(0)} = [\alpha(s), -\alpha(s)]$; pour $n \geq 1$, notons $J^{(n)}$, $J^{(-n)}$ les deux composantes de l'image réciproque par Q_s de $J^{(n-1)}$, avec $J^{(n)} \subset [-\alpha(s), 1]$.

On a

$$] - 1, 1[= \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} J^{(n)},$$

ces intervalles étant d'intérieurs disjoints.

Soit $n \geq 2$; les valeurs du paramètre s pour lesquelles $c(s) \in J^{(-n)}$ forment un intervalle $K^{(n)}$. On fixe dorénavant un entier n_0 , qu'on suppose assez grand, et on considère uniquement les valeurs du paramètre s dans $K^{(n_0)}$.

Posons $J_0 = J_1 = J^{(0)}$. Pour $2 \leq n \leq n_0$, notons $J_n^{(-1)}$, $J_n^{(1)}$ les deux composantes de $Q_s^{-1}(J^{(1-n)})$, avec $J_n^{(1)} \subset [0, -\alpha(s)]$. Posons aussi :

$$J_n = J_n^{(0)} = Q_s^{-1} \left(\bigcup_{m > n} J_0^{(1-m)} \right).$$

On a donc, pour $2 \leq n \leq n_0$:

$$J_{n-1} = J_n^{(-1)} \cup J_n^{(0)} \cup J_n^{(1)},$$

ces intervalles étant d'intérieurs disjoints.

Posons $I_{n_0} = I_{n_0+1} = J^{(-n_0)}$, $g_{n_0} = g_{n_0+1} = (Q_{s/I_{n_0}}^{n_0})^{-1}$; pour $2 \leq n \leq n_0$, $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, posons aussi :

$$\bar{g}_n^{(\varepsilon)} = (Q_{s/J_n^{(\varepsilon)}}^n)^{-1}.$$

5.3. Branches d'inverses critiques et résiduelles

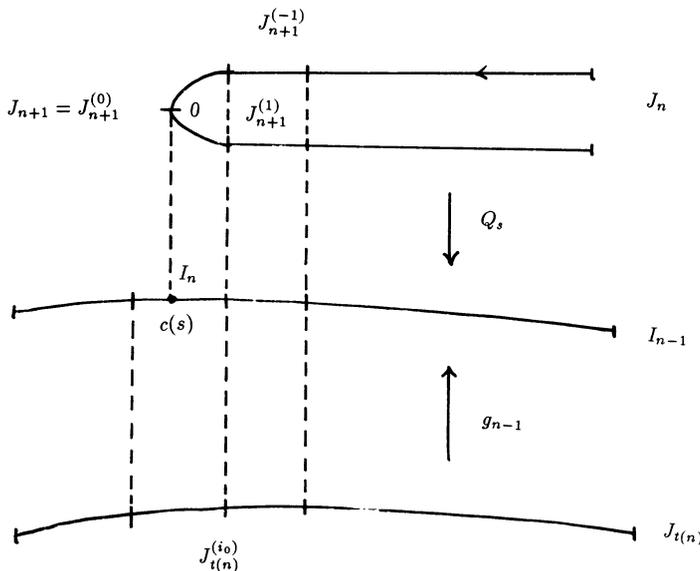
On va définir une suite décroissante d'intervalles J_k contenant 0 et considérer certaines branches des applications multivaluées $(Q_s^n)^{-1}$, qui sont définies sur un intervalle J_k , et dont l'image ou bien contient la valeur critique (branches critiques) ou bien est contenue dans J_0 (branches résiduelles) ; l'ordre d'une telle branche est $n + k$.

Pour $2 \leq n \leq n_0$, les branches résiduelles d'ordre n sont $\bar{g}_n^{(-1)}$ et $\bar{g}_n^{(1)}$. Ce sont des difféomorphismes de J_0 sur $J_n^{(-1)}$ et $J_n^{(1)}$ respectivement.

La branche critique d'ordre n_0 (ou $n_0 + 1$) est $g_{n_0} = g_{n_0+1}$: c'est un difféomorphisme de $J_0 = J_1$ sur $I_{n_0} = I_{n_0+1}$.

Définissons maintenant par récurrence les branches critiques et résiduelles d'ordre $n > n_0 + 1$. On les définit, ainsi qu'une fonction $t : \{n \in \mathbb{N}, n > n_0\} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant $t(n) < n$, par les propriétés suivantes (figure 3) :

Figure 3



1. La branche critique d'ordre $n-1$ ($\geq n_0$), notée g_{n-1} est un difféomorphisme de $J_{t(n)}$ sur I_{n-1} .
2. On a une décomposition en intervalles d'intérieurs disjoints :

$$J_n = \bigcup_{-k_{n+1} \leq i \leq k_{n+1}} J_{n+1}^{(i)},$$

avec un entier $k_{n+1} \geq 0$; on pose $J_{n+1} = J_{n+1}^{(0)}$; les branches résiduelles d'ordre $n+1$ sont des difféomorphismes $\bar{g}_{n+1}^{(i)}$ ($0 < |i| \leq k_{n+1}$) de $J_{t(n+1,i)}$ (pour un certain entier $t(n+1, i) \in [0, n]$) sur $J_{n+1}^{(i)}$.

3. La valeur critique $c(s)$ appartient à I_{n-1} . Soit $i_0 \in [-k_{t(n)+1}, k_{t(n)+1}]$ l'entier tel que $c(s) \in g_{n-1}(J_{t(n)+1}^{(i_0)})$. Posons $I_n = g_{n-1}(J_{t(n)+1}^{(i_0)})$, $J_{n+1}^{(0)} = Q_s^{-1}(I_n)$.

Si $i_0 = 0$, on a $g_n = g_{n-1/J_{t(n)+1}}$, et $t(n+1) = t(n) + 1$.

Si $i_0 \neq 0$, on a $g_n = g_{n-1} \circ \bar{g}_{t(n)+1}^{(i_0)}$, et $t(n+1) = t(t(n) + 1, i_0)$.

4. Posons $\theta = +1$ ou -1 suivant que g_{n-1} préserve ou renverse l'orientation. On a $k_{n+1} = k_{t(n)+1} - \theta i_0$. Pour $0 < i \leq k_{n+1}$, $J_{n+1}^{(-i)}$ et $J_{n+1}^{(i)}$ sont les deux composantes de $Q_s^{-1}(g_{n-1}(J_{t(n)+1}^{(j)}))$, avec $j = i_0 + \theta i$ et $J_{n+1}^{(i)} \subset [0, 1]$. On a

$$\bar{g}_{n+1}^{(\pm i)} = (Q_s^{-1})^{\pm} \circ g_{n+1} \circ \bar{g}_{t(n)+1}^{(j)}, t(n+1, \pm i) = t(t(n) + 1, j), \text{ si } j \neq 0,$$

$$\bar{g}_{n+1}^{(\pm i)} = (Q_s^{-1})^{\pm} \circ g_{n-1/J_{t(n)+1}}, t(n+1, \pm i) = t(n) + 1, \text{ si } j = 0.$$

5.4. Restrictions sur le paramètre

On impose au paramètre s de vérifier la propriété suivante : il existe une suite d'entiers $n_0 < n_1 < \dots$ satisfaisant à :

- (i) $n_k + 2 \leq n_{k+1} \leq n_k + (\text{Log } n_k)^3$;
- (ii) pour $k \geq 1$:

$$\sum_{\substack{1 \leq \ell \leq k \\ n_\ell - n_{\ell-1} > \frac{n_0}{2}}} (n_\ell - n_{\ell-1}) < 2^{-\sqrt{n_0}} n_k ;$$

(iii) $t(n_k + 1) = 0, \forall k \geq 0$;

(iv) posons $L_k = g_{n_k}^{-1}(I_{n_{k+1}})$ et notons g la branche de $(Q_s^{n_{k+1}-n_k})^{-1}$ qui est un difféomorphisme de J_0 sur L_k (on a $g_{n_{k+1}} = g_{n_k} \circ g$) ; alors

$$|D \operatorname{Log} Dg(x)| < \frac{1}{100}, \quad \forall x \in J_0.$$

[On remarquera que cette condition est automatiquement vérifiée, pour n_0 assez grand, lorsque $n_{k+1} - n_k \leq \frac{n_0}{2}$.]

5.5. Branches régulières

Appelons branche admissible une composition

$$g = \bar{g}_{m_r}^{(i_r)} \circ \dots \circ \bar{g}_{m_1}^{(i_1)} \circ \bar{g}_{m_0}^{(i_0)}$$

telle que $t(m_0, i_0) = 0, t(m_\ell, i_\ell) < m_{\ell-1}$ pour $1 \leq \ell \leq r$: les applications sont donc composables, et g est un difféomorphisme de J_0 sur son image. Nous dirons que g est *régulière* si on a :

$$|D \operatorname{Log} Dg(x)| < \frac{1}{100}, \quad \forall x \in J_0.$$

L'ordre de g est $\sum_{\ell=0}^r (m_\ell - t(m_\ell, i_\ell))$.

Lemme.— Supposons que le paramètre vérifie les hypothèses de 5.4 jusqu'à l'ordre n_k . Soit m un entier dans $[4, n_k]$. Les points de J_0 qui n'appartiennent à l'image d'aucune branche régulière d'ordre $\leq m$ forment une partie dont la mesure de Lebesgue n'excède pas $2^{-\sqrt{m}}$.

[On remarquera que, pour n_0 assez grand, les branches $\bar{g}_n^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, $2 \leq n \leq \frac{n_0}{2}$, sont régulières.]

5.6. Fin de la démonstration

Pour presque tout point $x \in J_0$, on peut grâce au lemme construire une suite d'entiers $m_0(x) = 0 < m_1(x) < \dots < m_k(x) < \dots$ vérifiant pour k assez grand (dépendant de x) les propriétés :

$$(i) \quad m_k(x) + 2 \leq m_{k+1}(x) \leq m_k(x) + (\operatorname{Log} m_k(x))^3 ;$$

$$(ii) \quad \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq k \\ m_\ell(x) - m_{\ell-1}(x) > \frac{n_0}{2}}} (m_\ell(x) - m_{\ell-1}(x)) < 2^{-\frac{1}{2}\sqrt{n_0}} m_k(x);$$

(iii) le point $Q_s^{m_r(x)}(x)$ appartient, pour tout $r \geq 0$, à l'image d'une branche régulière d'ordre $m_{r+1}(x) - m_r(x)$.

Soit alors $1 < \lambda < 2$; pour n_0 assez grand, les branches régulières $\bar{g}_n^{(\varepsilon)}$, $2 \leq n \leq \frac{n_0}{2}$, vérifient :

$$|D\bar{g}_n^{(\varepsilon)}(y)| \leq (\sqrt{2\lambda})^{-n} \quad , \quad \forall y \in J_0 .$$

Les conditions (i), (ii) ci-dessus impliquent alors, pour presque tout $x \in J_0$ et pour m assez grand (dépendant de x) :

$$|DQ_s^m(x)| \geq \lambda^m$$

(pour $n_0 = n_0(\lambda)$ assez grand.

Les autres assertions du théorème 1 (en particulier, le fait que l'ensemble des valeurs du paramètre satisfaisant aux conditions de 5.4 soit de mesure de Lebesgue positive) résultent aussi, avec un peu plus de travail, de l'estimation de distortion donnée par le lemme de 5.5.

6. QUELQUES REMARQUES SUR LES DÉMONSTRATIONS DES THÉORÈMES 2 ET 3

6.1. La démonstration du théorème 2 ne diffère pas, dans son principe, de cette théorème 1. Il faut remplacer les arguments d'une variable réelle (basés sur l'ordre de \mathbf{R}) par des arguments d'une variable complexe (essentiellement tirés de la théorie des fonctions univalentes). Par ailleurs, il faut contrôler simultanément les orbites de plusieurs points critiques, ce qui complique un peu la partie combinatoire de la démonstration.

6.2. Par rapport aux situations considérées dans les théorèmes 1 et 2, celle du théorème 3 présente des difficultés supplémentaires considérables.

6.2.1. Points "critiques"

Il s'agit des points (de la variété instable du point fixe $p_{a,b}$) dont on veut éviter, par un choix adéquat des paramètres, qu'ils reviennent trop vite ou trop souvent près d'eux-mêmes, car cela impliquerait la présence d'une orbite périodique attractive (ce qu'on cherche à éviter).

Dans le cadre des théorèmes 1 et 2, ces points sont simplement les points critiques de l'application considérée, donc définis *a priori* par les propriétés locales de ces applications.

La famille de Hénon étant composée de difféomorphismes, une telle définition *a priori* n'existe pas pour le théorème 3 : en fait, les points critiques ne sont précisément définis par Benedicks et Carleson que pour les valeurs du paramètre qui satisfont à la conclusion du théorème 3.

À une étape donnée de la récurrence (sur le nombre d'itérations n considéré), on ne dispose que d'une approximation de ces points critiques : par l'hypothèse de récurrence, on a $\|DP_{a,b}^n(z)\| \geq 1$ (par exemple) aux points considérés ; comme le jacobien de $P_{a,b}$ est partout égal à $-b$, il existe une direction contractée par $DP_{a,b}^n(z)$ d'un facteur $\leq |b|^n$, et le point $z = (x, y)$ est une *approximation critique* d'ordre n si $|x| < \delta \ll 1$ et la direction contractée est *tangente* en z à $W^u(p_{a,b})$.

Le nombre d'approximations critiques d'ordre donné est fini, mais croît avec l'ordre (exponentiellement) : on doit créer de nouvelles approximations critiques pour contrôler les retours dans la région $\{|x| < \delta\}$ d'anciennes approximations critiques. Ceci se fait par une construction assez compliquée.

6.2.1. Plis

La figure 4 montre le point de départ de la construction.

Figure 4

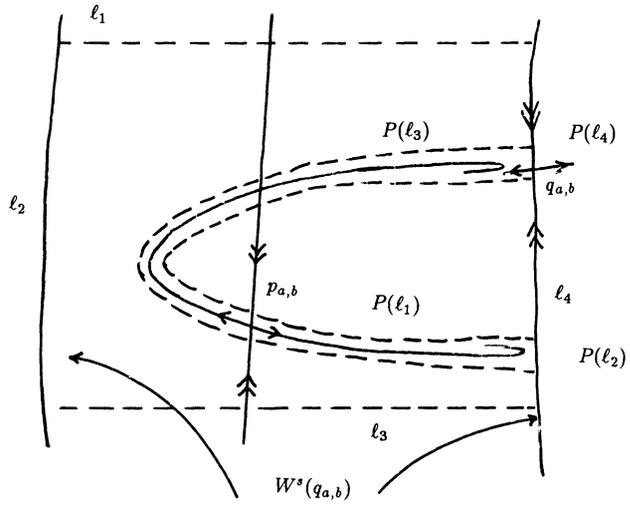
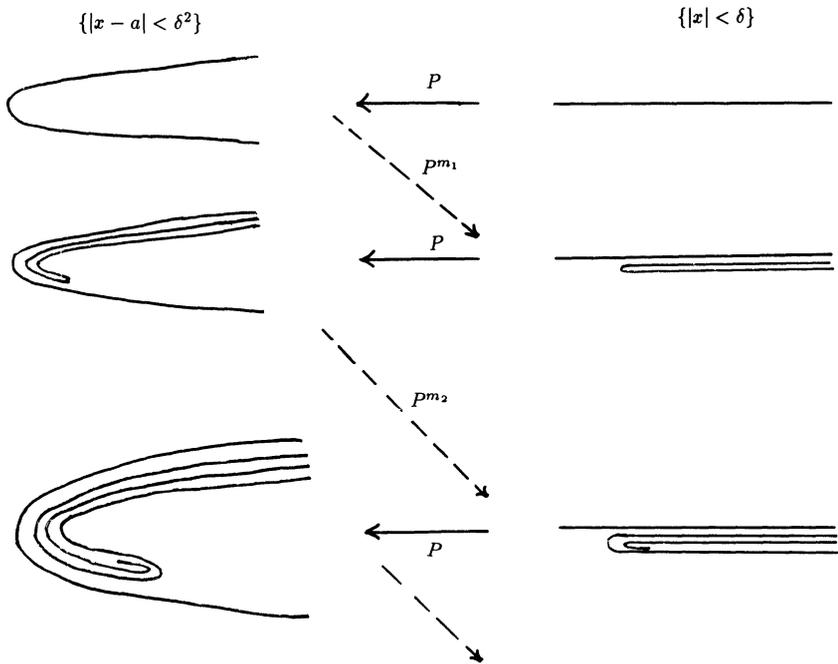


Figure 5



Bien que la récurrence ne donne pas beaucoup d'informations sur la géométrie globale de $W^u(p_{a,b})$, il faut un minimum de contrôle sur cette géométrie pour que la récurrence puisse fonctionner : il faut contrôler les plis dans les plis dans les plis... (Figure 5). En effet, l'hypothèse de récurrence garantit l'expansion des vecteurs horizontaux, mais un retour dans la zone $\{|x| < \delta\}$ transforme un vecteur horizontal en un vecteur "oblique". La solution adoptée par Benedicks et Carleson consiste à casser ce vecteur "oblique" en ses composantes verticales et horizontales, à les itérer séparément un certain temps (au bout duquel la composante horizontale a augmenté tandis que la composante verticale a été fortement contractée) puis les remettre ensemble ; mais entretemps, un autre retour peut avoir lieu...

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. JAKOBSON - *Topological and metric properties of 1-dimensional endomorphisms*, Soviet Math. Dokl. **19** (1978), 1452-56.
- [2] M. JAKOBSON - *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps*, Comm. Math. Phys. **81** (1981), 39-88.
- [3] M. BENEDICKS et L. CARLESON - *On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$* , Ann. Math. **122** (1985), 1-25.
- [4] M. RYCHLIK - *A proof of Jakobson's theorem*, Erg. th. and dyn. syst. **8** (1988), 93-109.
- [5] M. REES - *Positive measure sets of ergodic rational maps*, Ann. Sc. E.N.S. 4^e série **19** (1986), 383-407.
- [6] M. HÉNON - *Numerical study of quadratic area preserving mappings*, Q. Appl. Math. **27** (1969), 291-312.
- [7] M. HÉNON - *A 2-dimensional mapping with a strange attractor*, Comm. Math. Phys. **50** (1976), 69-77.
- [8] M. BENEDICKS et L. CARLESON - *The dynamics of the Hénon map*, preprint (à paraître aux Ann. Math.).

- [9] L. MORA et E. VIANA - *Abundance of strange attractors*, preprint IMPA (1989).
- [10] D. RUELLE - *Repellers for real analytic maps*, Erg. th. and dyn. syst. **2** (1982), 99-107.
- [11] M. MISIUREWICZ - *Absolutely continuous measures for certain maps of an interval*, Publ. Math. IHES **53** (1981), 17-51.
- [12] D. SULLIVAN - *Quasi-conformal homeomorphisms I : solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, Ann. of Maths **122** (1985), 401-418.
- [13] D. SULLIVAN - *Quasi-conformal homeomorphisms II, III : topological conjugacy classes of analytic endomorphisms*, Preprint IHES (1983).
- [14] J.-C. YOCCOZ - *Sur la connexité locale des ensembles de Julia et du lieu de connexité des polynômes quadratiques*, en préparation.
- [15] P. THIEULLEN, C. TRESSER et L.S. YOUNG - *Positive exponent for generic 1-parameter families of $1 - d$ maps*, en préparation.
- [16] M. BENEDICKS et L.S. YOUNG - *Absolutely continuous invariant measures and random perturbations for certain one-dimensional maps*, preprint (1990).
- [17] D. SULLIVAN - *On the structure of infinitely many dynamical systems nested inside or outside a given one*, Notes IHES (1990).
- [18] D. SULLIVAN - *Bounded structure of infinitely renormalizable mappings*, in P. Cvitanovic (ed.), *Universality in Chaos*, 2^d edition, Adam Hilger, Bristol (1989).
- [19] R. MAÑE, P. SAD et D. SULLIVAN - *On the dynamics of rational maps*, Ann. Sc. E.N.S. **16** (1983), 193-217.
- [20] E. FORNAESS et N. SIBONY - *Random iteration of rational functions*, à paraître dans Erg. th. and dyn. syst.
- [21] S. FRIEDLAND et J. MILNOR - *Dynamical properties of plane polynomial automorphisms*, Erg. th. and dyn. syst. **9** (1989), 67-99.
- [22] I.R. SHAFAREVICH - *On some infinite dimensional groups*, Rend. Mat. e Applic. (Roma) **25** (1966), 208-212.
- [23] M. SHUB - *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Astérisque **56** (1978).

- [24] S. SMALE - *Differentiable dynamical systems*, B.A.M.S. **73** (1967), 747-.
- [25] J. ROBBIN - *A structural stability theorem*, Ann. Math. **91** (1971), 447-.
- [26] C. ROBINSON - *Structural stability of C^1 -diffeomorphisms*, J. of diff. eq. **22** (1976), 28.
- [27] R. MAÑE - *A proof of the C^1 -stability conjecture*, Publ. Math. IHES, **66** (1988), 161-210.
- [28] J. PALIS - *On the C^1 Ω -stability conjecture*, Publ. Math. IHES, **66** (1988), 211-215.
- [29] C. PUGH - *An improved closing lemma and general density theorem*, Am. J. of Math. **89** (1967), 1010-.
- [30] S. NEWHOUSE - *The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms*, Publ. math. IHES **50** (1979), 101-151.
- [31] J. PALIS et F. TAKENS - *Homoclinic bifurcations : hyperbolicity, fractional dimensions and infinitely many attractors*, Cambridge Univers. Press, à paraître.
- [32] S. NEWHOUSE, J. PALIS et F. TAKENS - *Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms*, Publ. math. IHES **57** (1983), 5-71.
- [33] J. PALIS et F. TAKENS - *Hyperbolicity and the creation of homoclinic orbits*, Ann. Math. **125** (1987), 337-374.
- [34] R. PLYKIN - *On the geometry of hyperbolic attractors of smooth cascades*, Russ. math. surveys **396** (1984), 85-131.
- [35] A. DOUADY et J. HUBBARD - *On the dynamics of polynomial like mappings*, Ann. Sc. E.N.S. **18** (1985), 287-343.

Jean-Christophe YOCCOZ

Université de Paris-Sud

Département de Mathématiques

Bâtiment 425

F-91405 ORSAY CEDEX

Astérisque

FRANCIS COMETS

Limites hydrodynamiques

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 735, p. 167-192

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__167_0>

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LIMITES HYDRODYNAMIQUES

par Francis COMETS

On peut obtenir certaines équations de la mécanique des fluides à partir de systèmes de particules aléatoires évoluant selon une dynamique markovienne avec lois de conservation. Après renormalisation en espace et en temps (passage à la “limite hydrodynamique”), la mesure associée aux quantités conservées converge vers la solution d’une équation aux dérivées partielles non linéaire. Récemment, Guo, Papanicolaou et Varadhan ont proposé une méthode générale pour montrer la convergence, en utilisant des estimations *a priori* basées sur l’entropie (probabiliste) et la production d’entropie.

Cet exposé présente les idées générales en se limitant à la dynamique hors équilibre, certains développements à travers des exemples, et le schéma de la nouvelle méthode.

1. INTRODUCTION

L’idée selon laquelle les équations régissant un fluide à l’échelle macroscopique peuvent être obtenues à partir d’une dynamique microscopique n’est pas neuve. Par exemple, dans le cas d’une dynamique déterministe, Morrey tente dans [M] de déduire les équations d’Euler de la mécanique statistique, et Sinaï formule une condition de validité dans [Si]. Nous considérerons ici des dynamiques aléatoires.

Parmi les systèmes dynamiques aléatoires, les modèles les plus étudiés S.M.F.

sont les systèmes de particules disposées sur un réseau, évoluant selon des échanges entre sites voisins avec lois de conservation (réseaux gazeux, modèle de Ginzburg-Landau,...). Ces systèmes de particules ont été introduits par Spitzer au début des années 70 ; Dobrushin fut le premier à remarquer quelques années plus tard qu'ils permettaient de reproduire des phénomènes hydrodynamiques et à étudier cette procédure de limite [DS].

À l'échelle microscopique, le système est localement à l'équilibre, d'après la loi des grands nombres ; les équilibres sont paramétrés par les valeurs moyennes des quantités (extensives) conservées. Ces paramètres diffèrent en général d'un point macroscopique à l'autre, et dans une échelle de temps bien choisie, ils évoluent selon une équation aux dérivées partielles non linéaire ; l'équation sera du premier ordre pour un système soumis à une force extérieure, à une source ou un puits ("sink"), du second ordre pour un système invariant par retournement du temps. Même si le système admet une description autonome au niveau macroscopique, les deux niveaux ne sont pas indépendants : les équations possédant parfois plusieurs solutions, l'étude microscopique nous indique en général quelle est la solution signifiante.

La difficulté est que l'interaction (échange entre sites) de caractère local ne conduit pas directement à des équations closes, mais à une hiérarchie d'équations (hiérarchie BBGKY, des initiales de Bogolyubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon) : typiquement, l'équation régissant le moment d'ordre 1 contient celui d'ordre 2, dont la propre équation contient celui d'ordre 3, etc.

Dans la partie II, nous décrivons les équations hydrodynamiques obtenues formellement à partir de la notion d'équilibre local utilisé comme un ansatz, pour clore la hiérarchie d'équations. Cette partie, plutôt heuristique et générale, nous a semblé indispensable à la compréhension du sujet. Ensuite, nous donnons des exemples de processus de saut attractifs ; puis nous présenterons la méthode de preuve de la production d'entropie pour le modèle de Ginzburg-Landau (§4), et enfin d'autres exemples et développements (§5). Nous n'aborderons ici que la dynamique de non-équilibre, laissant de côté d'autres aspects importants comme les fluctuations à l'équilibre et loin de l'équilibre, le théorème de fluctuation-dissipation, ... Un point assez

complet sur le sujet est fait dans le gros article de synthèse de De Masi, Ianiro, Pellegrinotti et Presutti [DIPP], et dans celui — tout récent — de Spohn [Sp] consacré aux réseaux gazeux.

L'auteur remercie vivement C. Kipnis pour son aide durant la préparation de cet exposé.

2. LIMITES HYDRODYNAMIQUES : GÉNÉRALITÉS

2.1. Modèle aléatoire

Considérons des variables aléatoires $Y = (Y(i))_{i \in \mathbf{L}}$ à valeurs entières ou réelles indexées par un réseau \mathbf{L} . \mathbf{L} pourra être le réseau \mathbf{Z}^d de dimension d , ou au §4, le réseau torique $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^d$ avec N grand ; $Y(i)$ représente une quantité algébrique de charges, le nombre de molécules au point i , la présence ou l'absence d'une particule en i (réseaux gazeux, $Y(i) \in \{0, 1\}$), ...

La configuration Y évolue au cours du temps selon un processus de Markov homogène dans le temps de générateur $\mathcal{L} = \sum_{i, i'} \mathcal{L}_{i, i'}$ invariant par translation, avec $\mathcal{L}_{i, i'} f = 0$ pour toute fonction test f ne dépendant pas de $(y(i), y(i'))$. Nous supposons pour la simplicité de cet exposé que les échanges ne s'effectuent qu'entre sites plus proches voisins, de sorte que la somme ne porte que sur les paires de points i, i' à distance 1. Nous supposons aussi que la masse totale, formellement $\sum_i y(i)$, est la seule quantité conservée par le semi-groupe de générateur \mathcal{L} . Si E est un espace topologique, notons $\mathcal{M}(E)$ [resp., $\mathcal{M}_1^+(E)$] l'ensemble des mesures de Radon [resp., de probabilité] sur la tribu borélienne de E .

Un ingrédient essentiel au comportement hydrodynamique est l'existence, liée à la loi de conservation, d'une famille paramétrique $\nu_\rho \in \mathcal{M}_1^+(\mathbf{R}^L)$, $\rho \in I$ intervalle réel, de mesures de probabilité invariantes par le semi-groupe, qui soient invariantes par translation et ergodiques (analogue des Maxwelliennes). Sous cette hypothèse, on choisira le paramétrage comme la valeur moyenne de la quantité conservée

$$(1) \quad \rho = \mathbf{E}^{\nu_\rho} Y(i).$$

Ces mesures ν_ρ diffèrent l'une de l'autre par la valeur de leur potentiel chimique, variable duale de y .

Soit ε un paramètre de renormalisation en espace, que l'on fera tendre vers 0 ; dans le cas du tore, $\varepsilon = \frac{1}{N}$. Les échanges étant locaux, il faut accélérer le temps par un facteur $1/a(\varepsilon)$ avec $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(\varepsilon) = 0$; les variables d'espace et de temps i, u au niveau microscopique seront notées $x = \varepsilon i$, $t = a(\varepsilon)u$ au niveau macroscopique. La distribution initiale P_0^ε dépendra de ε ; soit P^ε la loi du processus de générateur \mathcal{L} sur l'espace des trajectoires, et $P_u^\varepsilon = \exp(u\mathcal{L}^*) P_0^\varepsilon$ sa marginale à l'instant u . Notons enfin \mathcal{T}^i la translation du vecteur i sur l'espace des configurations ($\mathcal{T}^i y(i') = y(i + i')$ pour tout $i' \in \mathbf{L}$).

2.2. Équilibre local

DÉFINITIONS.— 1) *La distribution initiale satisfait à l'équilibre local si*

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, P_0^\varepsilon \circ \mathcal{T}^{\lfloor x/\varepsilon \rfloor} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{et.}} \nu_{\rho_0(x)}$$

pour une fonction régulière ρ_0 ; ρ_0 s'appelle le profil d'équilibre local ($\xrightarrow{\text{et.}}$ désigne la convergence étroite des mesures de probabilité).

2) *il y a alors conservation de l'équilibre local si il existe une fonction régulière $\rho(t, x)$ telle que*

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \forall t \geq 0, P_{t/a(\varepsilon)}^\varepsilon \circ \mathcal{T}^{\lfloor x/\varepsilon \rfloor} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{et.}} \nu_{\rho(t, x)}.$$

La définition 1 signifie que le système se trouve, au voisinage du site microscopique $i = x/\varepsilon$, dans l'état d'équilibre dicté par la moyenne locale de la quantité conservée. On peut obtenir des distributions d'équilibre local en imposant un "équilibre" avec potentiel chimique variant lentement dans l'espace des sites : lorsque les ν_ρ sont des mesures produits, un exemple simple est $\otimes_{i \in \mathbf{Z}^d} \nu_{\rho_0(\varepsilon i)}(dy(i))$. La définition 2 signifie quant à elle que la valeur moyenne de Y évolue lentement (à cause du caractère local des échanges), et que sur des intervalles de temps longs, l'ergodicité entraîne localement le système vers l'équilibre possédant cette valeur moyenne. Les systèmes possédant une limite hydrodynamique conservent en général l'équilibre local ; nous rencontrerons deux exceptions, celle de la courbe de choc (§3.5) et celle de la transition de phase (§4.4).

Introduisons deux vecteurs liés à la loi de conservation ; soit (e_1, \dots, e_d) la base canonique de \mathbf{Z}^d . Pour $k \leq d$, le flux $J_{u,k}(i)$ est le nombre algébrique de charges ayant migré de i vers $i + e_k$ dans l'intervalle de temps $]0, u]$; on a alors l'équation de bilan instantané

$$(2) \quad dY_u(i) = - \sum_{k=1}^d [dJ_{u,k}(i) - dJ_{u,k}(i - e_k)].$$

Notons que $J_{u,\cdot}$ n'est défini en général que sur un espace plus gros que l'espace des trajectoires du processus originel Y , par exemple un espace contenant les processus de Wiener ou de Poisson sous-jacents à Y ; $J_{u,\cdot}$ est fonction mesurable de tout le passé avant u . Le courant instantané $j(i; y) = (j_k(i; y))_{k \leq d}$ est défini comme la dérivée (instantanée) du flux ; c'est une fonction de la configuration courante ; l'invariance par translation de \mathcal{L} entraîne que $j(i, y) = j(0, T^i y)$. Avec (2), on a donc

$$(3) \quad Y_u(i) - \int_0^u \mathcal{L} Y_v(i) dv \quad \text{est une } P^\varepsilon - \text{martingale,}$$

avec

$$\mathcal{L} Y_u(i) = - \sum_{k=1}^d [j_k(0, T^i Y_u) - j_k(0, T^{i-e_k} Y_u)].$$

La relation précédente lie au niveau microscopique la "dérivée temporelle de la densité" à la divergence du courant. On la retrouve au niveau macroscopique dans le premier des régimes suivants.

2.3. Forme générale des équations

On s'intéresse à la mesure $\hat{Y}_t^\varepsilon \in M(\mathbf{R}^d)$ associée à la quantité conservée (mesure de charges, mesure d'occupation, ...)

$$(4) \quad \hat{Y}_t^\varepsilon = \varepsilon^d \sum_{i \in \mathbf{Z}^d} Y_{t/a(\varepsilon)}(i) \delta_{i/\varepsilon}.$$

Soit $\tilde{j}(\rho) = \mathbf{E}^{\nu_\rho} j(0; y)$ le vecteur de courant à l'équilibre ν_ρ .

DÉFINITION 3.— *Le système est dans le régime d'Euler si $\tilde{j} \neq 0$.*

La bonne normalisation du temps est alors $a(\varepsilon) = \varepsilon$.

THÉORÈME 1 (th. 4.1 [DIPP]).— *Si le système satisfait à la conservation de l'équilibre local avec $a(\varepsilon) = \varepsilon$, alors le profil d'équilibre local $\rho(t, x)$ est solution faible de*

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \tilde{j}(\rho) = 0 \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot). \end{cases}$$

La preuve, élémentaire, consiste à expliciter le terme de dérive d'une martingale associée à \hat{Y}_t^ε , à l'aide de (3) et de l'hypothèse de conservation de l'équilibre local.

De plus, on voit aisément que sous les hypothèses de non-accumulation de masse au voisinage d'un point et d'une majoration (linéaire en temps) du processus croissant associé à J , la mesure \hat{Y}_t^ε converge en probabilité vers la limite déterministe $\rho(t, x) dx$ pour tout $t \geq 0$ (loi des grands nombres). Comme nous le verrons, les preuves de limite hydrodynamique établissent souvent simultanément la convergence de \hat{Y}_t^ε et la conservation de l'équilibre local.

L'équation hyperbolique non linéaire (5) admet en général plusieurs solutions faibles, que l'on détermine par la méthode des caractéristiques. Néanmoins, elle possède une solution naturelle unique, ou solution entropique (cf. Smoller [Sm]), obtenue comme limite de la solution ρ_ε dite de viscosité

$$(5.b) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon + \operatorname{div} \tilde{j}(\rho_\varepsilon) = \varepsilon \Delta \rho_\varepsilon$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans tous les cas où la convergence de \hat{Y}_t^ε a été établie, la limite est la solution entropique de (5), voir §3.

DÉFINITION 4.— *Le système est en régime diffusif si $\tilde{j}(\rho) = 0, \forall \rho \in I$.*

Alors l'équation (5) est triviale et la normalisation requise est $a(\varepsilon) = \varepsilon^2$. Le cas le plus simple est celui des *systèmes gradients*, où le courant s'écrit comme gradient discrétisé d'une fonction U ,

$$(6) \quad j_k(0; y) = (U \circ T^{\varepsilon k} - U)(y).$$

Soit $\tilde{U}(\rho) = \mathbf{E}^{\nu\rho} U$.

THÉORÈME 2 (th. 4.1 [DIPP]).— *Si le système satisfait à la conservation de l'équilibre local avec $a(\varepsilon) = \varepsilon^2$, alors le profil $\rho(t, x)$ est solution faible de l'équation de diffusion*

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \Delta[\tilde{U}(\rho)] = 0 \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot). \end{cases}$$

Sous les mêmes hypothèses supplémentaires que plus haut, \hat{Y}_t^ε converge vers $\rho(t, x) dx$ en probabilité.

L'équation parabolique non linéaire (7) ne pose pas de problème d'unicité ; la limite de \hat{Y}_t^ε est continue en temps, on peut tirer des estimées probabilistes une majoration de sa norme dans H_{-1} [GPV], ou invoquer l'unicité pour des équations d'évolution non linéaires gouvernées par un opérateur accréatif ou maximal monotone ([Re 1]).

Pour les systèmes diffusifs non gradients, l'équation conjecturée, à partir de la loi de Fick de la Physique, est

$$(7.b) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho = \operatorname{div} [D(\rho) \nabla \rho]$$

où le coefficient de diffusion (bulk coefficient) D — intervenant aussi dans les fluctuations à l'équilibre — est donné par la formule de Green-Kubo [Sp] qui fait intervenir un terme dynamique ; dans le cas gradient, cette équation coïncide avec (7). Le cas général est moins bien connu, nous nous limiterons au cas gradient, sauf au §5.2.

Pour introduire les équations limites (5), (7), nous avons utilisé la conservation de l'équilibre local comme un ansatz commode. Les démonstrations traitent simultanément la convergence du champ vers la solution de l'équation et la conservation de l'équilibre local. Cependant, la distribution initiale est le plus souvent supposée d'équilibre local, pour éviter de considérer une période initiale courte à l'échelle macroscopique (mais grande microscopiquement) nécessaire au système pour s'équilibrer localement ("initial layer").

3. PROCESSUS DE SAUT PUR

Ils décrivent des systèmes de particules sur \mathbf{Z}^d qui peuvent sauter d'un site à l'autre ; les variables $Y(i)$ sont à valeurs entières. Nous nous limitons encore aux sauts à distance 1. Pour l'existence et les propriétés des exemples ci-dessus, voir Liggett [Li].

3.1. Des exemples

a) Processus d'exclusions simple ($Y(i) \in \{0, 1\}$, une particule au plus par site). Au bout d'un temps aléatoire, indépendant d'une particule à l'autre, de loi exponentielle de moyenne 1, une particule choisit le site voisin dans la direction $\pm e_k$ avec probabilité $p_{\pm k}$ ($p_{\pm k} \geq 0$, $\sum_k (p_{+k} + p_{-k}) = 1$). Si le site est libre, elle y saute, elle reste à sa place sinon. Ce mécanisme est ensuite réitéré.

Le générateur \mathcal{L} est alors défini sur les fonctions f cylindriques de la configuration $y \in \{0, 1\}^{\mathbf{Z}^d}$ par (avec la notation $e_{-k} = -e_k$)

$$\mathcal{L}f(y) = \sum_{i \in \mathbf{Z}^d} \sum_{1 \leq |k| \leq d} y(i)[1 - y(i + e_k)] p_k [f(y + \delta_{i+e_k} - \delta_i) - f(y)].$$

Le processus est dit symétrique si $p_k = p_{-k}$, $k = 1, \dots, d$, asymétrique sinon. Le cas symétrique est trivial, l'équation de la densité étant close ; à la limite, on obtient une équation de diffusion linéaire [DIPP].

Ici, les mesures ν_ρ sont les mesures de Bernoulli produit, de moyenne $\rho \in [0, 1]$.

b) Processus d'exclusion simple avec vitesse : exclusion simple où la moyenne de la loi exponentielle dépend du nombre de sites voisins occupés. Les ν_ρ sont des mesures de Gibbs, comme celle du modèle d'Ising, que l'on peut obtenir avec une vitesse de Kawasaki ou de Metropolis ([DIPP], [Sp]).

c) Processus d'interaction purement locale, dit de "zero-range" : plusieurs particules peuvent occuper le même site. La moyenne du temps aléatoire au bout duquel une particule saute est fonction décroissante du nombre d'occupants. Alors, elle choisit son nouveau site selon la probabilité de transition $p_{\pm k}$ sans restriction. Comme dans l'exemple de l'exclusion

simple a), les mesures invariantes ν_ρ sont des mesures produit, malgré l'interaction dynamique entre particules, ce qui constitue une simplification importante par rapport au cas général, *e.g.* l'exemple b).

3.2. Processus attractifs

Cette propriété de monotonie est un outil essentiel pour prouver des théorèmes limites pour des systèmes de particules (*cf.* [Li], p. 70). Les exemples a) et c) ci-dessus la possèdent toujours.

Définissons des relations d'ordre partiel : si $y, y' \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$, on notera $y \leq y'$ si $y(i) \leq y'(i)$ pour tout $i \in \mathbf{Z}^d$. Une fonction $f : \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d} \rightarrow \mathbf{R}$ est croissante si elle préserve l'ordre. Enfin, si $\nu, \nu' \in M_1^+(\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d})$, on notera $\nu \leq \nu'$ si $\int f d\nu \leq \int f d\nu'$ pour toute fonction f croissante. Un processus de générateur \mathcal{L} est *attractif* si $\nu \leq \nu' \implies \exp(u\mathcal{L}^*)\nu \leq \exp(u\mathcal{L}^*)\nu', \forall u \geq 0$.

La propriété d'attractivité permet de comparer des profils d'équilibres réalisés à l'instant t par un même processus partant de profils initiaux ordonnés. Au-delà de cette comparaison stochastique, une comparaison trajectorielle s'obtient alors par la technique du *couplage* dynamique, consistant à construire simultanément sur un même espace plusieurs versions du même processus partant de configurations arbitraires ; pour un processus attractif et deux distributions initiales ordonnées, il existe un couplage préservant l'ordre des configurations à chaque instant. Enfin, la procédure de *priorité* introduite par Andjel et Kipnis [AK] permet de tirer parti des mesures invariantes.

3.3. Équation d'Euler pour les processus de saut en dimension un

Commençons par l'exclusion simple asymétrique. En dimension $d = 1$, la limite prévue (5) pour la densité d'occupation ρ est l'équation de *Burgers*

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + (p_{+1} - p_{-1}) \frac{\partial}{\partial x} [\rho(1 - \rho)] = 0$$

(dont la forme usuelle est obtenue pour $u = \rho - \frac{1}{2}$). Définissons d'abord la solution entropique. Nous supposons que $p_{+1} > p_{-1}$ sans perte de

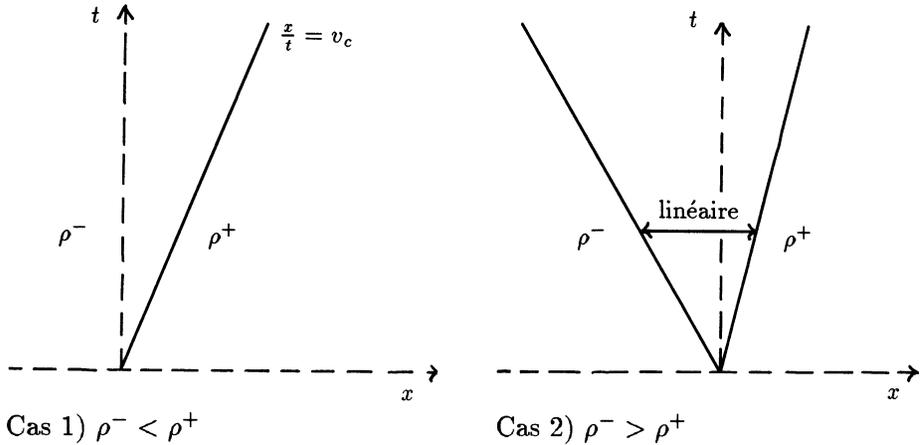
généralité (déplacement libre “moyen” vers la droite). La plupart des résultats mentionnés dans cette section sont obtenus pour la loi initiale

$$\bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} \nu_{\rho_0(\varepsilon i)}(dy(i))$$

— voir la remarque après la définition 1 — avec profil initial

$$(8) \quad \rho_0(x) = \rho^- \mathbf{1}_{x < 0} + \rho^+ \mathbf{1}_{x \geq 0},$$

où $\rho^+, \rho^- \in [0, 1]$. Deux cas se présentent : si $\rho^- < \rho^+$, le choc (discontinuité) se propage à vitesse $v_c = (p_{+1} - p_{-1})(1 - \rho^- - \rho^+)$, d’après la condition de Rankine-Hugoniot ; si au contraire, $\rho^- > \rho^+$, les caractéristiques correspondant à ρ^- et ρ^+ sont séparées par un “éventail de raréfaction” où la solution entropique est linéaire dans la variable d’espace. Résumons ceci par la représentation de $\rho(t, x)$:



D’abord Rost [Ro 1] dans un cas particulier, puis Benassi et Fouque [BF 1] ont montré la convergence du champ $\widehat{Y}_t^\varepsilon$ vers la solution entropique ρ de l’équation de Burgers ci-dessus, et la conservation de l’équilibre local (sauf au choc, c’est-à-dire sauf dans le cas 1 lorsque $x = v_c t$).

La preuve traditionnelle (par opposition à la nouvelle méthode de Guo, Papanicolaou, Varadhan de la production d’entropie, cf. §4), utilise l’attractivité du processus, la monotonie du profil initial et la connaissance de la solution de l’équation limite. Cette preuve fonctionne plus

généralement pour les autres processus attractifs introduits dans cette section ; elle comporte trois étapes :

- des arguments de couplage et priorité, un théorème ergodique sous-additif permettent d'abord de montrer la convergence de la mesure d'occupation $\widehat{Y}_t^\varepsilon$ vers une densité $u(t, x)$ déterministe, monotone en x si le profil initial l'est ;
- par couplage et priorité on peut encore clore ensuite l'équation de la mesure de densité, en établissant la propriété de décorrélation limite

$$\mathbf{E}^{P^\varepsilon} Y_{t/\varepsilon} \left(\left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor \right) Y_{t/\varepsilon} \left(\left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, x)^2,$$

c'est-à-dire la propagation du chaos ; cette propriété suffit pour fermer l'équation. À propos de ce modèle de réseau gazeux, il est amusant de noter que le mot "gaz" a été introduit au XVIIIe siècle comme traduction du mot latin "chaos" ;

- L'équation close obtenue exprime exactement que u est solution faible de l'équation de Burgers. On prouve alors que u est égale à la solution entropique ρ explicite en utilisant sa propriété de monotonie et des comparaisons avec d'autres profils initiaux.

Pour le processus de zéro-range, Andjel et Vares [AVA] d'abord, puis Andjel et Kipnis [AK], Benassi et Fouque [BF 2] pour des sauts à distance plus que un, ont montré le même type de résultat, avec une équation limite pour la densité d'occupation ρ (à valeurs \mathbf{R}_+ cette fois) de la forme $\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{j}(\rho) = 0$; la fonction \tilde{j} est une fonction régulière de \mathbf{R}_+ dans \mathbf{R}_+ , soit strictement convexe, soit strictement concave.

3.4. Cas de la dimension d

Même si l'équation limite (5) se ramène par changement d'axes à celle de la dimension un d'espace, l'étude microscopique est cependant bien plus délicate. Landim [La 1] vient d'adapter la méthode au cas du zéro-range, avec profil initial constant par morceaux, égal à ρ^- à l'intérieur d'un demi-cône, ρ^+ à l'extérieur ; lorsque le bord du cône est entièrement diffusant ou entièrement propageant (*i.e.* : notant \vec{v} le déplacement moyen d'une par-

ticule libre, l'un exactement des deux vecteurs \vec{v} et $-\vec{v}$ pointe à l'intérieur du demi-cône).

Plus récemment encore, Rezakhanlou [Re 2] montre la convergence de $\widehat{Y}_t^\varepsilon$ pour l'exclusion simple asymétrique, vers la solution de (5) vérifiant les conditions d'entropie de Kružkov, sans restriction sur le profil initial. Cette solution est par définition l'unique fonction ρ vérifiant

$$\frac{\partial}{\partial t} |\rho - c| + \operatorname{div} \{ \operatorname{signe}(\rho - c) [\tilde{j}(\rho) - \tilde{j}(c)] \} \leq 0$$

au sens des distributions, pour toute constante réelle c . La preuve, très générale, combine attractivité du processus et certains des arguments de production d'entropie (probabiliste) décrits au §4. Dans un couplage entre le processus et celui partant de ν_c , les configurations sont ordonnées localement d'après l'attractivité, ce qui permet de traiter la non-linéarité due au signe.

3.5. Étude microscopique du choc

Dans le cas d'un choc se propageant, deux questions naturelles se posent, à propos de la structure fine au voisinage de la courbe de choc :

- i) quelle est la loi des grands nombres en ces points ?
- ii) peut-on trouver une échelle intermédiaire entre microscopique et macroscopique, où le profil devient régulier, ou reste-t-il au contraire rigide et discontinu ?

Nous détaillons les résultats avec les notations de l'exclusion simple asymétrique (cas a) du §3.1) partant de ρ_0 donnée par (8), en dimension $d = 1$.

i) Andjel, Bramson et Liggett remarquent dans [ABL] que l'équilibre local ne se conserve pas le long de la droite de choc $x = v_c t$, mais que la distribution locale est asymptotiquement une superposition de "Maxwelliennes" :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{t/\varepsilon}^\varepsilon \circ \mathcal{T}^{[v_c t/\varepsilon]} = \frac{1}{2} (\nu_{\rho^-} + \nu_{\rho^+}).$$

ii) D'abord dans un cas particulier (Wick [W 1]), puis plus généralement (par De Masi, Kipnis, Presutti, Saada [DKPS], Ferrari, Kipnis, Saada

[FKS]), on s'est aperçu que seul le second cas se produisait :

$$(9) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{t/\varepsilon}^\varepsilon \circ \mathcal{T}^{[v_c \frac{t}{\varepsilon} + \frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}]} = \lambda \nu_{\rho^-} + (1 - \lambda) \nu_{\rho^+}$$

avec $\lambda = \lambda(t, r) = \text{Probabilité}(\sqrt{v} B_t \leq r)$ où B_t est un mouvement brownien réel. L'interprétation pour $\rho^- = 0$ est liée à la position de X_u de la particule la plus à gauche (l'interface), qui vérifie $\sqrt{\varepsilon}(X_{t/\varepsilon} - v_c t/\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{v} B_t$: il n'y a bien sûr pas de particule à gauche de l'interface $X_{t/\varepsilon}$, tandis qu'à distance d'ordre $\varepsilon^{-1/2}$ à droite, le système se trouve dans l'équilibre ν_{ρ^+} d'après (9). Le choc est même sensible à distance microscopique, à droite de l'interface.

Par conséquent, la moyenne empirique locale (en x) de particules n'est donc pas uniformément proche au voisinage du choc de la solution d'une équation de viscosité faible comme (5b) ; pour obtenir une asymptotique réminiscente de la correction de Navier-Stokes, il faut régulariser cette moyenne en temps [W 1].

4. LE MODÈLE DE GINZBURG-LANDAU ET LA MÉTHODE DE LA PRODUCTION D'ENTROPIE

Le but de cette partie est de présenter la méthode remarquable de la production d'entropie, introduite en 1988 par Guo, Papanicolaou et Varadhan dans [GPV]. Elle dépend de manière cruciale de la réversibilité du système, à l'heure actuelle. Comme cadre de présentation, je reprends le modèle de Ginzburg-Landau discret utilisé dans [GPV].

4.1. Le modèle de Ginzburg-Landau

Sur le tore discrétisé à une dimension $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, vu comme l'intervalle $\{0, 1, \dots, N\}$ avec ses extrémités identifiées, considérons le système différentiel stochastique

$$\begin{cases} dY_u(i) = dJ_u(i-1) - dJ_u(i) \quad , \quad i \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \\ dJ_u(i) = -\frac{1}{2} \{ \phi'[Y_u(i+1)] - \phi'[Y_u(i)] \} du + dB_u(i) \end{cases}$$

où les $B(i)$, $i \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ sont des mouvements browniens indépendants, et où $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 vérifiant

$$\int e^{-\phi(y)} dy = 1$$

$$(10) \quad \alpha(\lambda) = \text{Log} \int e^{\lambda y - \phi(y)} dy \quad \text{existe pour tout } \lambda \in \mathbf{R}$$

$$\int e^{\lambda|\phi'(y)| - \phi(y)} dy < +\infty \quad , \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

Le système est diffusif, gradient, avec

$$(11) \quad U(y) = -\frac{1}{2} \phi'[y(0)].$$

Rappelons que la normalisation dans (4) est alors $\varepsilon = 1/N$, $a(\varepsilon) = 1/N^2$. Soit Y le processus de Markov continu à valeurs dans \mathbf{R}^N , de générateur infinitésimal

$$(12) \quad \mathcal{L}_N = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y(i)} - \frac{\partial}{\partial y(i+1)} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial}{\partial y(i)} - \frac{\partial}{\partial y(i+1)} \right) \mathcal{H}_N \right] \left(\frac{\partial}{\partial y(i)} - \frac{\partial}{\partial y(i+1)} \right) \right\}$$

où le hamiltonien \mathcal{H}_N est donné par

$$(13) \quad \mathcal{H}_N(y(0), \dots, y(N-1)) = - \sum_{i=0}^{N-1} \phi[y(i)].$$

Dans (12), l'exposant 2 signifie que l'on itère l'opérateur. La masse totale $\sum_{i=0}^{N-1} y(i)$ est conservée. Introduisons la duale h de α au sens de Legendre-Fenchel,

$$(14) \quad h(\rho) = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \{ \lambda y - \alpha(\lambda) \} \quad , \quad \rho \in \mathbf{R}.$$

Alors h et α sont des fonctions convexes conjuguées, dont les dérivées sont régulières, strictement croissantes et inverses l'une de l'autre. Les mesures de probabilité invariantes pour le processus, invariantes par translation et extrémales sont les $\nu_\rho^N \in M_1^+(\mathbf{R}^N)$, $\rho \in \mathbf{R}$

$$(15) \quad \begin{aligned} & \nu_\rho^N(dy(0), \dots, dy(N-1)) \\ &= \exp \left\{ \lambda \sum_{i=0}^{N-1} y(i) - N\alpha(\lambda) + \mathcal{H}_N \right\} dy(0) \cdots dy(N-1) \end{aligned}$$

où l'on choisit le paramétrage $\lambda = h'(\rho)$ de sorte que $\mathbf{E}^{\nu_\rho^N} y(0) = \rho$, c'est-à-dire (1). Le générateur \mathcal{L}_N est formellement auto-adjoint dans $\mathbf{L}^2(\nu_\rho^N)$, et le processus restreint à chaque hyperplan $\sum y(i) = \text{constante}$ est ergodique avec pour unique probabilité invariante, la distribution ν_ρ^N conditionnelle à cet hyperplan (indépendante de ρ). Dans la suite, le tore $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est muni de la mesure de Haar, notée dx .

THÉORÈME [GPV].— *Supposons que la distribution initiale P_0^N satisfait à l'équilibre local avec profil $\rho_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbf{T})$, P_0^N absolument continue par rapport à ν_0^N de densité f_0^N vérifiant*

$$(16) \quad H^N(f_0^N) = \int f_0^N \text{Log } f_0^N d\nu_0^N \leq CN.$$

Alors, il y a conservation de l'équilibre local avec profil $\rho(t, x)$, $x \in \mathbf{T}$, vérifiant

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} h'(\rho) \quad , \quad \rho(0, x) = \rho_0(x)$$

$$(18) \quad \int h(\rho) dx \leq C \quad , \quad \frac{1}{2} \int \int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial t} h'(\rho) \right|^2 dt dx \leq C.$$

D'après (11) et (15), $\tilde{U} = -\frac{1}{2} h'$, et donc l'équation (17) est celle attendue (7) ; elle admet une unique solution avec (18) dans l'espace $H_{-1}(\mathbf{T})$. La condition (16) est un contrôle de l'entropie P_0^N par rapport à une mesure

invariante. Guo, Papanicolaou et Varadhan en déduisent les estimations *a priori* (21.a et b, ci-dessous), qui seront les seuls ingrédients nécessaires à la preuve.

4.2. Entropie

Si $f^N : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^+$ est une densité de probabilité pour la mesure ν_0^N , notons

$$H^N(f^N) = \int f^N \text{Log } f^N d\nu_0^N$$

l'entropie (ou information de Kullback-Leibler) de la distribution $f^N d\nu_0^N$ par rapport à ν_0^N . Rappelons que $H^N(f^N)$ est positif, nul seulement si $f^N = 1$. Il est commode ici de considérer, non pas des mesures de probabilité, mais leurs densités par rapport à une mesure invariante arbitraire — ici, ν_0^N —. Sous les hypothèses de l'énoncé, la loi P_0^N du système reste absolument continue par rapport à ν_0^N ; sa dérivée de Radon-Nykodim $f_t^N = \frac{dP_{N^2,t}^N}{d\nu_0^N}$ vérifie l'équation progressive de Kolmogorov

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t^N = N^2 \mathcal{L}_N f_t^N$$

et on obtient facilement

$$(19) \quad \frac{d}{dt} H^N(f_t^N) = -N^2 I^N(f_t^N) \leq 0$$

où

$$(20) \quad I^N(f) = 2 \sum_{i=0}^{N-1} \int \left[\left(\frac{\partial}{\partial y(i)} - \frac{\partial}{\partial y(i+1)} \right) \sqrt{f} \right]^2 d\nu_0^N$$

est la valeur au point \sqrt{f} de la forme de Dirichlet associée à l'opérateur symétrique \mathcal{L}_N . La décroissance de l'entropie dans (19) est connue sous le nom de "théorème H" de Boltzmann. Elle n'apporte pas de renseignement direct sur la densité locale. Au contraire, la *production d'entropie* I^N , qui s'annule si f est l'une des densités invariantes, se décompose en une somme sur les liens, ce qui est informatif.

Soit f^N la densité (sur \mathbf{R}^N) moyennée en temps $f^N = \frac{1}{t} \int_0^t f_s^N ds$.

Par convexité des fonctionnelles H^N et I^N , on déduit immédiatement de (16), (19) et (20) les estimations *a priori*

$$(21.a) \quad H^N(f^N) \leq CN$$

$$(21.b) \quad I^N(f^N) \leq C/N$$

4.3. Les principales étapes de la preuve de Guo, Papanicolaou, Varadhan [GPV]

Pour toute fonction test g régulière sur \mathbf{T} , la formule d'Ito appliquée à $\widehat{Y}_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} Y_{N^2 t}(i) \delta_{i/N}$ s'écrit

$$(22) \quad \langle g, \widehat{Y}_t^N \rangle - \langle g, \widehat{Y}_0^N \rangle = \int_0^t S_s^N ds + M_t^N$$

et deux calculs élémentaires montrent que la martingale M_t^N converge vers 0 en probabilité, uniformément sur les intervalles de temps bornés, et que

$$(23) \quad S_t^N = \mathcal{L}_N \langle g, \widehat{Y}_t^N \rangle = \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{N-1} g''\left(\frac{i}{N}\right) \phi'(Y_{N^2 t}(i)) (1 + o(1)).$$

Sauf dans le cas gaussien où ϕ est quadratique, l'équation résultant de (22) n'est pas close, car (23) n'est plus fonction de \widehat{Y}_t^N . Considérons au lieu de ϕ' dans (23), $\psi(y) = \psi(y(-k), \dots, y(k))$ une fonction "locale" continue ; Guo, Papanicolaou et Varadhan montre à l'aide de (21.a,b) que pour toute fonction test g

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}^{P^N} \left\{ \frac{1}{N} \int_0^t \left| \sum_{i=0}^{N-1} g\left(\frac{i}{N}\right) \left[\psi \circ \mathcal{T}^i(Y_{N^2 s}) - \int \psi d\nu_{\rho(Y_{N^2 s}, i, [N\varepsilon])} \right] ds \right\} = 0$$

avec

$$(24) \quad \rho(y, i, \ell) = \frac{1}{2\ell + 1} [y(i - \ell) + \dots + y(i + \ell)]$$

et où $\nu_\rho \in M_1^+(\mathbf{R}^Z)$ est le prolongement naturel de ν_ρ^N .

Soit $P^N \circ (\widehat{Y}^N)^{-1}$ la mesure image de P^N par $(\widehat{Y}_t^N)_{t \geq 0}$. On peut montrer (essentiellement à partir de (16)) que cette suite de probabilité sur $\mathcal{C}(\mathbf{R}^+; M(\mathbf{T}))$ est compacte ; ses points limites Q se concentrent sur des trajectoires déterministes μ_t d'après (22), de la forme $\mu_t(dx) = \rho(t, x)dx$; (23) et (24) entraînent que

$$\langle g, \mu_t \rangle - \langle g, \mu_0 \rangle = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbf{T}} g''(x) h'(\rho(s, x)) dx ds,$$

ce qui est la formulation faible de (17). L'unicité de la solution de (17) assure alors la convergence des $P^N \circ (\widehat{Y}^N)^{-1}$, et donc celle de la mesure de charges $\widehat{Y}_t^\varepsilon$ vers $\rho(t, x) dx$.

Preuve de (24) : L'espérance dans (24) s'écrit en terme de $f^N = \frac{1}{t} \int_0^t f_s^N ds$ comme

$$\int \frac{1}{N} \left| \sum_{i=0}^{N-1} g\left(\frac{i}{N}\right) \left[\psi \circ \mathcal{T}^i(y) - \int \psi d\nu_{\rho(y, i, [N\varepsilon])} \right] \right| f^N d\nu_0^N.$$

Les estimations *a priori* (21.a et b) suffisent à assurer (24). Définissons

$$A(N, C) = \{ \text{densités } f \text{ sur } \mathbf{R}^N : H^N(f) \leq CN, I^N(f) \leq CN^{-1} \};$$

$$(25) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sup_{f \in A(N, C)} \int \frac{1}{N} \left| \sum_{i=0}^{N-1} g\left(\frac{i}{N}\right) \left[\psi \circ \mathcal{T}^i(y) - \int \psi d\nu_{\rho(y, i, [N\varepsilon])} \right] \right| f d\nu_0^N = 0$$

implique (24). La difficulté est que le nombre $2[N\varepsilon] + 1$ de variables tend vers l'infini, et semble échapper à tout contrôle. La première étape consiste à remplacer le petit bloc macroscopique de taille $N\varepsilon$ par un grand bloc microscopique de taille ℓ dans (25):

Estimée pour un bloc :

$$(26) \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sup_{f \in A(N, C)} \int \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{1}{2\ell+1} (\psi \circ T^{i-\ell} + \dots + \psi \circ T^{i+\ell}) - \int \psi d\nu_{\rho(y, i, \ell)} \right| f d\nu_0^N = 0.$$

L'intégrale figurant dans (26) porte sur la moyenne glissante de la fonction $\overline{\psi}_\ell = \left| \frac{1}{2\ell+1} (\psi \circ T^{-\ell} + \dots + \psi \circ T^\ell) - \int \psi d\nu_{\rho(y, 0, \ell)} \right|$ qui dépend de $2(k+\ell)+1$ variables : elle est donc égale à $\int \overline{\psi}_\ell f_\ell d\nu_0^N$ où f_ℓ est la moyenne glissante des densités de $2(k+\ell)+1$ variables consécutives. L'intérêt de fixer ℓ est que (21.a) assure la compacité de ces distributions sur $\mathbf{R}^{2(\ell+k)+1}$, et l'on peut remplacer $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sup_{f \in A(N, C)}$ dans (26) par le supremum sur les points limites lorsque $N \rightarrow \infty$; (21.b) assure que ces points limites sont des combinaisons convexes des mesures invariantes $\nu_\rho^{2(\ell+k)+1}$.

Il suffit donc de montrer $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \int \overline{\psi}_\ell d\nu_\rho^{2(\ell+k)+1} = 0$, c'est-à-dire que les mesures $\nu_\rho^{2\ell+1}$ conditionnées par $\rho(y, 0, \ell) = \rho^*$ ont asymptotiquement le même comportement ergodique que ν_{ρ^*} ; ce point (substantiel) s'obtient à l'aide de techniques de grandes déviations (théorème 3.5 dans [GPV]).

Estimée pour deux blocs : les moyennes dans deux grands blocs microscopiques séparés par une faible distance macroscopique, sont proches :

$$(27) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\ell \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sup_{\substack{m \in (-N\varepsilon, N\varepsilon) \\ |m| \geq 2(k+\ell)+1}} \sup_{f \in A(N, C)} \frac{1}{N} \int \sum_{i=0}^{N-1} |\rho(y, i, \ell) - \rho(y, i+m, \ell)| f d\nu_0^N = 0.$$

Cette fois, l'intégrale s'exprime à l'aide de la moyenne glissante de la distribution jointe de deux groupes de $2(k+\ell)+1$ variables consécutives, à distance m ; en plus de l'étude des deux marginales menée pour établir (26), il s'agit de contrôler les échanges entre les deux groupes à l'aide de (21.b) et d'un générateur fictif (cf. théorèmes 4.3 et 4.6 de [GPV]).

Par continuité de $\rho \mapsto \int \psi d\nu_\rho$, les relations (26) et (27) entraînent (25).

4.4. Les modèles de Ginzburg-Landau gibbsiens

Sur le tore $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^d$ à d dimensions, considérons maintenant un générateur de la forme (12) où la somme porte sur les plus proches voisins, et où

$$(28) \quad \mathcal{H}_N = - \sum_i (\phi + F) \circ \mathcal{T}^i$$

avec F une fonction locale régulière bornée. Les mesures invariantes extrémales sont combinaisons convexes des mesures de Gibbs avec interaction de portée finie

$$\nu_\rho^N(dy) = Z_N^{-1} \exp \left\{ -\lambda(\rho) \sum_i y(i) + \mathcal{H}_N(y) \right\} dy(0) \cdots dy(N-1)$$

avec λ choisi selon (1) ; contrairement au modèle (12), les variables sont dépendantes à l'équilibre. Le système est gradient avec $U = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y(0)} \mathcal{H}_N$ (indépendant de N pour N assez grand). Définissons cette fois

$$(29) \quad \alpha(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^d} \text{Log } \mathbf{E}^{\nu_0^N} \exp \left\{ \lambda \sum_i y(i) \right\}$$

et notons encore h sa duale. Rezakhanlou [Re 1] montre par la méthode de production d'entropie, la convergence de \hat{Y}_t^N vers la solution de l'équation (17) ainsi obtenue.

L'intérêt du modèle est l'existence de transition de phase, c'est-à-dire l'existence de plusieurs mesures de Gibbs $\nu_\rho \in M_1^+(\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d})$ à volume infini correspondant à un même potentiel chimique λ . Dans ce cas, la fonction convexe h n'est plus strictement convexe, et l'évolution décrite par l'équation de diffusion limite est dégénérée dans la région critique.

À cause de la transition de phase, la validité de (25) n'est pas établie pour toute fonction test ψ , mais seulement pour $\psi = U$ intervenant dans l'analogie de (41).

Fritz [Fr 1] étudie des modèles de Ginzburg-Landau gibbsiens et gaussiens. Dans [Fr 2], il étend la méthode de production d'entropie au cas du volume infini au lieu du tore ; la difficulté est de contrôler la production

d'entropie au bord d'un volume fixe. Notons enfin la méthode plus ancienne de la résolvante proposée par Papanicolaou et Varadhan [PV] : Fritz l'utilise dans [Fr 1] en l'absence de transition de phase.

Tout récemment, Yau propose dans [Y] une simplification de la méthode de la production d'entropie, en calculant l'entropie relative de la distribution instantanée $f_t^N dv_0^N$ non plus par rapport à l'équilibre global ν_0^N comme au 4.2, mais directement par rapport à un équilibre local dont le profil varie en temps et en espace : lorsque ce profil est solution de l'équation hydrodynamique, il remarque qu'alors l'entropie reste $o(N)$ à chaque instant, ce qui permet d'établir la convergence de \hat{Y}_t^N comme plus haut, mais sans avoir recours à l'estimée pour deux blocs. La limitation essentielle de cette simplification est de ne fonctionner que lorsque l'équation hydrodynamique a une solution régulière.

5. D'AUTRES DÉVELOPPEMENTS

5.1. Modèles à espace continu

Olla et Varadhan [OV] étudient dans l'espace des phases (avec positions dans \mathbf{R}/\mathbf{Z}) un grand nombre de particules dont les vitesses sont des processus d'Ornstein-Uhlenbeck couplés par une force répulsive ; ce système est non réversible. La limite fait intervenir le formalisme canonique de la mécanique statistique. Voir aussi Varadhan [V] pour des particules browniennes sur le tore couplées comme ci-dessus, et Rost [Ro 2] pour le modèle stochastique des sphères dures en dimension 1.

Funaki pose directement le modèle de Ginzburg-Landau sur la droite réelle, c'est-à-dire comme une équation aux dérivées partielles stochastique [Fu].

5.2. D'autres modèles de réseau

Le modèle du votant ne possède pas de quantité conservée, mais son comportement est tout à fait semblable à ceux étudiés ici ; la hiérarchie est close, et il donne lieu à des équations linéaires ($d \geq 3$) [PS].

D'autres modèles sans loi de conservation conduisent à des équations de réaction-diffusion ou des équations cinétiques, en ajoutant à (5) ou à (8) un terme non linéaire de degré 0 ; leur générateur est de la forme $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + a(\varepsilon) \mathcal{L}_2$ où \mathcal{L}_1 est du type considéré jusqu'à présent, et où \mathcal{L}_2 est un générateur de saut ne possédant pas de quantité conservée. La dynamique \mathcal{L}_2 étant ralentie par le facteur $a(\varepsilon)$, le système s'équilibre localement selon la dynamique "hydrodynamique" \mathcal{L}_1 entre les sauts, espacés dans le temps, provoqués par \mathcal{L}_2 ; le système relève encore de méthodes hydrodynamiques. De Masi, Ferrari et Lebowitz[DFL], dans le cas où \mathcal{L}_1 est l'exclusion simple symétrique, \mathcal{L}_2 la dynamique de Glauber, montrent que le profil limite vérifie $\frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho + F(\rho)$ où F est un polynôme ; Caprino, de Masi, Pulvirenti et Presutti obtiennent l'équation de Carleman (l'équation de Boltzmann avec vitesse discrète) comme équation limite [CDPP].

5.3. Cas diffusifs non gradients

Le seul système non gradient pour lequel la limite (7b) a été établie est l'exclusion simple en milieu périodique (symétrique en moyenne) étudié par Wick [W 2] ; la contribution dynamique au coefficient de diffusion se calcule explicitement. Eyink, Lebowitz et Spohn envisagent le cas unidimensionnel où le courant est somme d'un gradient spatial et d'une dérivée temporelle [ELS].

5.4. Grandes déviations

Le comportement hydrodynamique étant une loi des grands nombres, l'étude des grands écarts à la limite hydrodynamique peut être menée, grosso modo avec les mêmes ingrédients. Donsker et Varadhan [DV] pour le modèle de Ginzburg-Landau, Kipnis, Olla, Varadhan [KOV] pour l'exclusion simple symétrique, procèdent au recentrage exponentiel de la mesure $\widehat{Y}_t^\varepsilon$ par une perturbation, faible et à variation lente en espace et en temps, du générateur. Dans le premier cas, l'intégrale d'action est la norme $\frac{\partial}{\partial t} \rho - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} h'(\rho)$ dans l'espace $H_{-1}(\mathbf{T})$ intégrée en temps. Dans le deuxième, la perturbation s'interprète comme une asymétrie faible du processus d'exclusion simple. Notons que la probabilité de grande déviation est exponentiel-

lement petite pour la mesure $\widehat{Y}_t^\varepsilon$ associée à la quantité conservée, mais superexponentiellement petite pour les autres mesures — lorsque ces déviations ne résultent pas de celles de $\widehat{Y}_t^\varepsilon$; ce phénomène rappelle les différentes échelles de temps des fluctuations [DIPP]. Notons enfin que Landim [La 2] a pu résoudre complètement le problème des grandes déviations du temps d'occupation d'un site pour le processus d'exclusion simple symétrique en dimension un, en construisant la passerelle liant cette question à celle, plus simple, concernant la mesure d'occupation $\widehat{Y}_t^\varepsilon$.

BIBLIOGRAPHIE

- [AVA] E.D. ANDJEL, M.E. VARES - *Hydrodynamic equations for attractive particle systems in \mathbf{Z}* , J. Stat. Phys. **47** (1987), 265-288.
- [ABL] E.D. ANDJEL, M.D. BRAMSON, T.M. LIGGETT - *Shocks in the asymmetric exclusion process*, Prob. Th. Rel. Fields **78** (1988), 231-247.
- [AK] E.D. ANDJEL, C. KIPNIS - *Derivation of the hydrodynamical equation for the zero-range interaction process*, Ann. Prob. **12** (1984) 325-334.
- [BF 1] A. BENASSI, J.-P. FOUQUE - *Hydrodynamic limit for the asymmetric simple exclusion process*, Ann. Prob. **15** (1987), 546-560.
- [BF 2] A. BENASSI, J.-P. FOUQUE - *Hydrodynamic limit for the asymmetric zero range process*, Ann. Inst. H. Poincaré **24** (1988), 184-200.
- [BR] T. BROX, H. ROST - *Equilibrium fluctuations of stochastic particle systems : The role of conserved quantities*, Ann. Prob. **12** (1984), 742-759.
- [DKPS] A. DE MASI, C. KIPNIS, E. PRESUTTI, E. SAADA - *Microscopic structure at the shock in the asymmetric simple exclusion*, Stochastics (1989).
- [DFL] A. DE MASI, P. FERRARI, J.L. LEBOWITZ - *Reaction-diffusion equations for interacting particle systems*, J. Stat. Phys. **44**, (1986), 589-644.
- [DIPP] A. DE MASI, N. IANIRO, A. PELLEGRINOTTI, E. PRESUTTI - *A survey of the hydrodynamical behavior of many-particle systems. In*

- non equilibrium phenomena II, from stochastic to hydrodynamics*, J.L. Lebowitz and E.W. Montroll, eds., North-Holland, Amsterdam (1984), 123-294.
- [DV] M. DONSKER, S.R.S. VARADHAN - *Large deviations from a hydrodynamic scaling limit*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 243-270.
- [DS] R.L. DOBRUSHIN, R. SIEGMUND-SCHUTZE - *Hydrodynamical limit for systems of particles with independent evolution*, Math. Nachr. **105** (1982), 199-224.
- [ELS] G. EYINK, J.L. LEBOWITZ, H. SPOHN - *Hydrodynamics of stationary non-equilibrium states from stochastic lattice gas models*, Comm. Math. Phys. **132** (1990), 253-283.
- [Fr 1] J. FRITZ - *On the hydrodynamic limit of a Ginzburg-Landau model. The law of large numbers in arbitrary dimensions*, Prob. Theory Rel. Fields **81** (1989), 291-318.
- [Fr 2] J. FRITZ - *On the diffusive nature of entropy flow in infinite systems...*, Comm. Math. Phys. **133** (1990), 331-352.
- [Fu] T. FUNAKI - *The hydrodynamical limit for scalar Ginzburg-Landau model on \mathbf{R}* , in stochastic Analysis, Lect. Notes in Math. **1322** (1988), 28-36.
- [FKS] P. FERRARI, C. KIPNIS, E. SAADA - *Microscopic structure of travelling wave in the asymmetric simple exclusion process*, Ann. Prob. **19** (1991), 226-244.
- [GPV] MZ. GUO, G.C. PAPANICOLAOU, S.R.S. VARADHAN - *Non linear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions*, Comm. Math. Phys. **118** (1988), 31-59.
- [KOV] C. KIPNIS, S. OLLA, S.R.S. VARADHAN - *Hydrodynamics and large deviation for simple exclusion process*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 115-137.
- [La 1] C. LANDIM - *Hydrodynamic equation for attractive particle systems on \mathbf{Z}^d* , preprint, Paris (1989).
- [La 2] C. LANDIM - Thèse Université de Paris 7 (1990).
- [Li] T.M. LIGGETT - *Interacting particle systems*, Springer, Berlin (1985).
- [M] C.B. MORREY - *On the derivation of the equation of hydrodynamics from statistical mechanics*, Comm. Pure Appl. Math. **8** (1955), 279-

326.

- [OV] S. OLLA, S.R.S. VARADHAN - *Scaling limit for interacting Ornstein-Uhlenbeck processes*, preprint New York (1990).
- [PV] G. PAPANICOLAOU, S.R.S. VARADHAN - *Boundary value problems with rapidly oscillating coefficients*, in Random fields II, ed. Fritz, Lebowitz, Szász, North Holland, Amsterdam (1981).
- [Pr] E. PRESUTTI - *Collective behavior of interacting particle systems*, Proceed. 1st World Congress Bernoulli Society (1986).
- [PS] E. PRESUTTI, H. SPOHN - *Hydrodynamics of the voter model*, Ann. Prob. **11** (1983), 867-875.
- [Re 1] F. REZAKHANLOU - *Hydrodynamic limit for a system with finite range interactions*, Comm. Math. Phys. **129** (1990), 445-480.
- [Re 2] F. REZAKHANLOU - *Hydrodynamic limit for attractive particle systems on \mathbf{Z}^d* , preprint, New York (1990).
- [Ro 1] H. ROST - *Non-equilibrium behavior of a many particle systems : density profile and local equilibrium*, Z. Wahr. verw. Geb. **58** (1981), 41-54.
- [Ro 2] H. ROST - *Diffusion de sphères dures dans la droite réelle. Comportement macroscopique et équilibre local*, Lect. Notes in Math. **1059** (1984), 127-143.
- [Si] Ya.G. SINAIĭ - *Dynamics of local equilibrium Gibbs distributions and Euler equations. The one-dimensional case*, Selecta Math. Soviet. **7** (1988), n° 3, 279-289.
- [Sm] J. SMOLLER - *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer-Berlin (1982).
- [Sp] H. SPOHN - *Large scale dynamics of interacting particles. Part B : stochastic lattice gases*, preprint, Munich (1989), 260 pages. À paraître aux Lect. Notes in Physics.
- [V] S.R.S. VARADHAN - *Scaling limits for interacting diffusions*, Comm. Math. Phys. **135** (1991), 313-353.
- [W. 1] D. WICK - *A dynamical phase transition in an infinite particle system*, J. Stat. Phys. **38** (1985), 1015-1025.
- [W. 2] D. WICK - *Hydrodynamic limit of non-gradient interacting particle process*, J. Stat. Phys. **54** (1989), 873-892.

- [Y] H. YAU - *Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models*, Let. Math. Phys. **22** (1991), 63-80.

Francis COMETS

URA 756 et 1321 du CNRS

Université de Paris 7

U.F.R. de Mathématiques

Tour 45-55 - 5ème étage

2 place Jussieu

F-75251 PARIS CEDEX 05

Astérisque

GUY HENNIART

Représentations des groupes réductifs p -adiques

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 736, p. 193-219

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__193_0>

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES RÉDUCTIFS p -ADIQUES

par Guy HENNIART

1. INTRODUCTION, PRÉSENTATION DES RÉSULTATS ET HISTORIQUE

1.1. Soient k un corps de nombres et \mathbf{G} un groupe réductif connexe sur k , par exemple le groupe GL_n . Généralisant la notion classique de forme modulaire, on est amené à considérer des représentations, dites automorphes, du groupe des points de \mathbf{G} à valeurs dans l'anneau \mathbf{A}_k des adèles de k ; la situation classique correspond à $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_2$ et $k = \mathbf{Q}$. Le groupe $\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)$ est un produit restreint des groupes $\mathbf{G}(k_v)$ où v parcourt les places de k et k_v est le complété de k en v , ce qui conduit à étudier les représentations de $\mathbf{G}(k_v)$. Quand v est une place archimédienne, $\mathbf{G}(k_v)$ est un groupe de Lie et la théorie de ses représentations est extrêmement élaborée (et présente d'ailleurs d'autres motivations et intérêts). En particulier, on sait les classifier en examinant la restriction à un sous-groupe compact maximal K : c'est la théorie dite des K -types (*cf.* [Vo]). Lorsque v est une place non archimédienne, de caractéristique résiduelle p , alors k_v est une extension finie du corps \mathbf{Q}_p des nombres p -adiques, et le problème se pose de classifier ou construire les représentations irréductibles de $\mathbf{G}(k_v)$ (la bonne notion étant celle de représentation lisse, *cf.* 1.2), par exemple en termes de restriction à des sous-groupes compacts maximaux.

Le présent exposé vise à présenter les résultats obtenus récemment sur ce problème, les plus complets et spectaculaires concernant le groupe GL_n .

L'étude des représentations de $\mathbf{G}(k_v)$ mène à bien des problèmes autres que la classification ou la construction de toutes ces représentations. Par exemple, on se demande lesquelles de ces représentations sont unitarisables, les représentations unitaires étant celles qui interviennent dans le cas global des représentations automorphes pour les corps de nombres. On a aussi toute une théorie duale des distributions, notamment les distributions invariants (par conjugaison) sur $\mathbf{G}(k_v)$. Là aussi, les progrès récents ont été spectaculaires, mais les techniques sont très différentes et, par manque de place et de temps, nous n'avons pu présenter ici ces résultats.

1.2. Soit donc F un corps commutatif localement compact non archimédien. Notons p sa caractéristique résiduelle. Si F est de caractéristique nulle, F est une extension finie du corps \mathbf{Q}_p des nombres p -adiques ; si F est de caractéristique p , F est isomorphe au corps des séries de Laurent formelles à coefficients dans le corps résiduel de F , un corps fini.

Soit \mathbf{G} un groupe algébrique réductif connexe défini sur F . Nous pensons le plus souvent à l'exemple $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$. Le groupe $G = \mathbf{G}(F)$ est localement compact et totalement discontinu. Une représentation *lisse* π de G est un homomorphisme π de G dans $\mathrm{GL}(V)$ où V est un espace vectoriel complexe, de sorte que chaque vecteur de V ait un stabilisateur ouvert dans G ; elle est dite *irréductible* si tout sous-espace de V stable par $\pi(G)$ est $\{0\}$ ou V . On sait que dans le cas où π est irréductible, le centre Z de G agit sur V par un *caractère*, *i.e.* un homomorphisme continu dans \mathbf{C}^\times , appelé *caractère central* de π , et que π est *admissible*, c'est-à-dire que, pour tout sous-groupe ouvert H de G , l'espace V^H des points de V fixés par $\pi(H)$ est de dimension finie. Si H est en outre compact modulo Z , la restriction de π à H est semi-simple et ses composants isotypiques sont de dimension finie. Le plus souvent (c'est le cas en particulier pour $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, $n > 1$), les seules représentations lisses irréductibles de dimension finie de G sont de dimension 1, c'est-à-dire des caractères, de sorte qu'il s'agit en général ici de représentations de *dimension infinie*. Cependant, l'admissibilité entraîne que l'on peut faire une étude *algébrique* du *dual admissible* de G , c'est-à-dire de l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de G . Des références pour la théorie

générale des représentations lisses de G sont [BZ1, Cas].

1.3. Un procédé général pour obtenir des représentations lisses de G est celui d'*induction*. Soit H un sous-groupe fermé de G et $\rho : H \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ une représentation lisse de H . Soit $I(\rho)$ l'espace des fonctions f de G dans W vérifiant les conditions suivantes :

- i) il existe un sous-groupe ouvert K de G tel que $f(gk) = f(g)$ pour $g \in G, k \in K$.
- ii) il existe une partie compacte C de G telle que f soit nulle hors de HC .
- iii) pour $h \in H$ et $g \in G$, on a $f(hg) = \rho(h)f(g)$.

Alors G agit par translations à droite sur l'espace $I(\rho)$ et on obtient une représentation lisse de G dite *induite compacte* de ρ et notée $\mathrm{ind}_H^G \rho$.

Cette construction est utilisée principalement dans deux cas. Le premier est celui où H est un sous-groupe *parabolique* P de G (dans le cas de $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, il s'agit simplement du stabilisateur d'un drapeau dans F^n). Alors $P \backslash G$ est compact de sorte que la condition ii) est vide. On prend pour ρ une représentation lisse irréductible de P , triviale sur le radical unipotent de P , de sorte que ρ provient d'une représentation d'un sous-groupe de Lévi de G , qui dans le cas de GL_n est un produit de groupes $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ avec $\sum n_i = n$. Alors $\mathrm{ind}_H^G \rho$ est de longueur finie et ses sous-quotients irréductibles donnent des éléments du dual admissible de G . On appelle *cuspidales* les représentations lisses irréductibles de G qui ne peuvent être obtenues ainsi par induction à partir de sous-groupes paraboliques propres de G . On voit donc que modulo la connaissance du dual admissible des sous-groupes de Lévi propres de G (qui sont de dimension sur F strictement inférieure à celle de G) et l'étude de la décomposition des représentations induites à G , on a réduit la détermination du dual admissible de G à celle de sa partie *cuspidale*, *i.e.* formée des classes de représentations cuspidales. Cette réduction est l'analogie pour F de la classification de Langlands des représentations des groupes réductifs réels. Noter que dans le cas où l'on considère en même temps tous les groupes $\mathrm{GL}_n(F)$, pour $n \geq 1$, une étude fine de l'induction parabolique donne naissance à une algèbre de Hopf extrêmement intéressante, introduite par J. Bernstein et A. Zelevinski [BZ2,

Z] ; voir l'exposé de Rodier au Séminaire Bourbaki [Ro].

1.4. Le second cas où le procédé d'induction est utilisé est celui où H est un sous-groupe ouvert de G , contenant le centre Z de G et compact modulo Z . En ce cas, toute représentation lisse irréductible ρ de H est de dimension finie et triviale sur un sous-groupe ouvert ; c'est donc à peu de choses près une représentation d'un groupe fini. De plus, la représentation lisse $\pi = \text{ind}_H^G \rho$ de G est *admissible* si et seulement si elle est somme directe d'un nombre fini de représentations cuspidales de G [Bu2] ; et si π est irréductible, alors π est admissible et cuspidale. On dispose même d'un critère d'irréductibilité pour π qui s'exprime de la même façon que pour les groupes finis : pour que π soit irréductible, il suffit que, pour $g \in G-H$, les restrictions à $H \cap gHg^{-1}$ des représentations ρ et $\rho^g : x \mapsto \rho(g^{-1}xg)$ n'aient aucun constituant commun.

On sait qu'une représentation cuspidale a ses coefficients matriciels à support compact modulo Z ; même plus, le caractère (trace) de π est à support dans la réunion des sous-groupes compacts modulo Z [De]. Il est donc raisonnable de conjecturer que toute représentation cuspidale de G est obtenue comme composant d'une représentation admissible induite à partir d'un sous-groupe ouvert compact modulo Z , voire même est une telle induite. Récemment, L. Corwin d'une part [Co4], et C. Bushnell et Ph. Kutzko d'autre part [BK] ont annoncé une preuve du résultat suivant :

THÉORÈME 1.— *Soit π une représentation (lisse irréductible) cuspidale de $\text{GL}_n(F)$. Alors π est l'induite d'une représentation admissible d'un sous-groupe ouvert compact modulo le centre.*

En fait, le résultat ne se réduit pas à ce simple constat d'existence. De manière plus précise et plus intéressante, on sait dresser une liste de paires (H, ρ) où H est un sous-groupe ouvert de $\text{GL}_n(F)$, compact modulo le centre, et ρ une représentation lisse irréductible de H , de sorte que toute représentation cuspidale de $\text{GL}_n(F)$ soit induite à partir de l'une des paires (H, ρ) et l'on sait dire quand deux telles paires (H, ρ) et (H', ρ') induisent à G des représentations cuspidales isomorphes. On peut donc parler d'une véritable *paramétrisation du dual cuspidal* de G .

On peut d'ailleurs exprimer le résultat d'une manière qui ressemble plus à la théorie des K -types dans le cas des groupes de Lie : si π est une représentation cuspidale de G , il existe une paire (H, ρ) dans la liste, unique à conjugaison près par les éléments de G , telle que la restriction π à H contienne ρ (comme constituant), et π est alors l'induite de ρ .

Ces deux manières d'exprimer le résultat correspondent en fait à deux méthodes d'approche différente, qui chacune sont l'aboutissement d'une série de travaux brièvement rappelés au n° 1.7.

1.5. Dans la première méthode, qui est celle suivie par Corwin, la démonstration se déroule en deux étapes. On commence par construire des paires (H, ρ) comme plus haut telles que l'induite de ρ à $\mathrm{GL}_n(F)$ soit cuspidale, et on détermine quelles paires (H, ρ) donnent la même représentation. Le problème à ce stade est surtout de deviner suffisamment de paires (H, ρ) . Il s'agit ensuite de prouver qu'on obtient ainsi *toutes* les représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$. Pour cela, on utilise un argument de comptage (qui remonte à la thèse de J.B. Tunnell [Tu] pour $n = 2$) et la comparaison avec les représentations des formes intérieures de $\mathrm{GL}_n(F)$. Un élément π du dual admissible de $\mathrm{GL}_n(F)$ possède un invariant $a(\pi) \in \mathbf{N}$ appelé *conducteur* de π , et on sait qu'à conducteur et caractère central donné, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments cuspidaux dans le dual. L'argument de comptage consiste à prouver que les paires (H, ρ) fournissent bien le nombre voulu d'éléments cuspidaux. Encore faut-il connaître ce nombre !

Pour cela, on considère un corps gauche D de centre F et de degré n^2 sur F . Le centre du groupe localement compact D^\times s'identifie au centre Z de $\mathrm{GL}_n(F)$ et de plus D^\times est compact modulo Z , ce qui fait que le dual admissible $\widehat{D^\times}$ de D^\times est formé de représentations de dimension finie. Si on note P_D l'idéal de la valuation de D , tout élément τ de $\widehat{D^\times}$ est trivial sur un groupe de la forme $(1 + P_D^i) \cap D^\times$, où i est un entier positif, et le *conducteur* de τ est l'entier $j + n - 1$, où j est le plus petit tel entier. Par voie globale, utilisant une version de la formule des traces pour GL_n et ses formes intérieures, on établit [Rg, DKV] l'existence d'une bijection entre le dual admissible $\widehat{D^\times}$ de D^\times et l'union disjointe des parties cuspidales des

duaux admissibles des $GL_d(F)$, quand d parcourt les diviseurs de n , cette bijection étant compatible avec les caractères centraux et les conducteurs au sens où, si π est un élément cuspidal du dual de $GL_n(F)$ et si $\tau \in \widehat{D^\times}$ correspond à π par cette bijection, alors π et τ ont même caractère central et même conducteur.

Or, de la même façon qu'on a deviné des représentations cuspidales de $GL_n(F)$, on devine et construit des éléments de $\widehat{D^\times}$ et pour D^\times la situation est suffisamment simple pour que l'on trouve ainsi tout $\widehat{D^\times}$. (À vrai dire, on commence par analyser et construire $\widehat{D^\times}$, ce qui aide à deviner des représentations cuspidales de $GL_n(F)$, cf. la remarque ci-dessous.) Comparant le nombre de représentations des $GL_d(F)$ et de D^\times ainsi obtenues (à conducteur et caractère central donnés), on voit qu'on a obtenu tout le dual cuspidal de $GL_n(F)$.

Remarque.— Dans les cas simples, par exemple si n est premier ou premier à p , les paramètres décrivant les paires (H, ρ) pour $GL_n(F)$ sont

- une extension E de degré n de F contenue dans $M_n(F)$
- un caractère additif de E
- un caractère multiplicatif de E^\times . (Ces données doivent vérifier quelques compatibilités.)

Or le corps gauche D contient une extension de F isomorphe à E , unique à conjugaison près. On conçoit donc bien qu'on puisse transférer les paramètres de $GL_n(F)$ à D^\times et vice versa. Il resterait à décrire explicitement en ces termes concrets la bijection de [DKV].

1.6. On voit que cette méthode est assez contournée et n'explique pas au fond la paramétrisation obtenue. Il est sans doute aussi dommage d'utiliser une théorie globale difficile pour obtenir un résultat local.

D'autre part, la prépublication [Co4] est extrêmement technique et difficile à lire, et je ne prétends pas avoir réussi à suivre tous les calculs et comprendre tous les détails, ou les compléter aux endroits obscurs.

Dans le §3, nous nous attacherons à décrire la méthode utilisée par Bushnell et Kutzko, qui présente à mon avis les avantages suivants :

- Elle est purement locale et n'utilise ni comparaison avec un autre groupe, ni argument de comptage.
- Elle est conceptuellement claire, et partant susceptible de généralisations (cf. §4). En particulier, nous verrons comment le concept nouveau de *strate simple* est la clef de la classification.
- Il s'agit à proprement parler non d'une détermination du dual cuspidal de $GL_n(F)$ mais en fait d'une classification de *tout* le dual admissible de $GL_n(F)$ à l'aide de la restriction aux sous-groupes ouverts compacts modulo le centre. Cette méthode est indépendante, dans sa majeure partie, des techniques de Bernstein et Zelevinski mentionnés plus haut.

Par manque de place, nous ne pouvons au §3 que décrire l'enchaînement des idées et résultats et non pas donner une idée des démonstrations. Le §2 est consacré à des généralités et l'étude de cas simples et l'on essaie d'y faire sentir en quoi le cas général est si compliqué.

1.7. Pour terminer cette introduction, un brin d'historique n'est pas superflu.

Dans le cas $p \neq 2$, on savait depuis longtemps (cf. [GGPS, JL]) construire le dual cuspidal de $GL_2(F)$ grâce à la représentation de Weil.

Dans les années 70, R. Howe a proposé d'attaquer le cas général en examinant la restriction aux sous-groupes ouverts compacts modulo le centre [Ho1], et il a décrit [Ho2], dans le cas dit *modéré* où n est premier à p , une construction de représentations cuspidales de $GL_n(F)$ à partir de représentations de sous-groupes ouverts compacts modulo le centre, ces dernières représentations étant paramétrées par certains caractères multiplicatifs d'extensions de degré n de F . Que l'on obtienne ainsi tout le dual cuspidal de $GL_n(F)$ pour n premier à p fut prouvé ultérieurement par A. Moy [My1], par l'argument de comptage (introduit pour $n = 2$ par J.B. Tunnell [Tu]). Entretemps, Ph. Kutzko [Ku1] avait déterminé le dual admissible de $GL_2(F)$ pour tout p , par une méthode locale et Carayol [Ca] avait introduit la notion de représentation très cuspidale des sous-groupes compacts modulo le centre maximaux de $GL_n(F)$ (ces représentations sont très faciles à décrire explicitement) et montré que par induction, elles don-

nent des représentations cuspidales de G ; de plus, il montrait, à nouveau par comptage, que pour n premier, on obtenait tout le dual cuspidal de $\mathrm{GL}_n(F)$.

Il fallait pourtant attaquer le cas général. Dans [Wa], J.-L. Waldspurger parvenait à trouver une généralisation commune aux constructions de Howe et Carayol, et à analyser ainsi une bonne partie du dual admissible de $\mathrm{GL}_n(F)$, mais ses

constructions ne donnaient pas tout le dual. En 1985, A. Moy [My2] proposait la notion de K -type minimal, dont l'existence était prouvée peu après par C. Bushnell [Bu2, cf. aussi HM1] qui en tirait une démonstration locale du fait que pour n premier, les constructions de Carayol donnent tout le dual cuspidal. Kutzko obtint ensuite une variante toujours locale mais plus directe de ce résultat [Ku2].

Dans un autre ordre d'idées, R. Howe [Ho3] avait introduit des isomorphismes d'algèbres de Hecke dont nous verrons des exemples plus loin (de tels isomorphismes interviennent aussi dans [Wa]), et dans [HM2] R. Howe et A. Moy tirent de la considération de tels isomorphismes une construction locale de tout le dual cuspidal de $\mathrm{GL}_n(F)$ quand n est premier ou premier à p .

Enfin, le résultat de Corwin [Co4] est l'aboutissement d'une série d'articles [Co1, Co2, Co3] traitant des cas de plus en plus généraux tant pour $\mathrm{GL}_n(F)$ que pour D^\times , tandis que le travail de Bushnell et Kutzko [BK] couronne l'ensemble [Bu2, Ku2, Wa, KM1, KM2].

2. GÉNÉRALITÉS ET QUELQUES CAS SIMPLES DE CONSTRUCTION

2.1. Dans ce §2, nous montrons comment analyser la restriction aux sous-groupes compacts modulo le centre des représentations lisses de $\mathrm{GL}_n(F)$, de manière de plus en plus fine et dans des cas de plus en plus compliqués. Par commodité, nous utilisons la terminologie de [BK] qui servira au §3.

On note R l'anneau des entiers de F , P son idéal maximal, \tilde{F} le corps résiduel R/P , q le cardinal de \tilde{F} ; on fixe une uniformisante $\tilde{\omega}$ de F et un

caractère additif ψ de F trivial sur P mais non sur R .

On fixe un entier $n \geq 2$ et un espace vectoriel V de dimension n sur F . On note $A = \text{End}_F(V)$ l'anneau des endomorphismes de V , G le groupe des éléments inversibles de A , et Z son centre. Tout sous-groupe de G compact modulo Z est contenu dans un sous-groupe de G compact modulo Z et maximal pour ces propriétés. Cependant, contrairement au cas archimédien, deux tels sous-groupes maximaux ne sont pas conjugués. On peut les décrire à l'aide de *chaînes de réseaux* dans V .

Un *réseau* L dans V est un sous- R -module de V , libre de rang n . Une *chaîne de réseaux* est une suite décroissante de réseaux $\mathcal{L} = (L_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ telle qu'il existe un entier $e \in \mathbf{Z}$, appelé période de \mathcal{L} , et vérifiant $L_{i+e} = \tilde{\omega} L_i$ pour $i \in \mathbf{Z}$. Deux chaînes de réseaux sont dites *équivalentes* si elles diffèrent par une translation des indices et on note $[\mathcal{L}]$ la classe d'équivalence de \mathcal{L} .

Soit \mathcal{L} une chaîne de réseaux dans V . L'anneau $A_{\mathcal{L}} = \{g \in A \mid g L_i \subset L_i \text{ pour } i \in \mathbf{Z}\}$ est un R -ordre héréditaire de A [Re], de radical de Jacobson $P_{\mathcal{L}} = \{g \in A \mid g L_i \subset L_{i+1}, \text{ pour } i \in \mathbf{Z}\}$ et le stabilisateur $H_{\mathcal{L}} = \{g \in G \mid \exists j \in \mathbf{Z} g L_i = L_{i+j} \text{ pour } i \in \mathbf{Z}\}$, de \mathcal{L} dans G est un sous-groupe ouvert de G , compact modulo Z . Comme $H_{\mathcal{L}}$, $A_{\mathcal{L}}$ et $P_{\mathcal{L}}$ ne dépendent que de $[\mathcal{L}]$. Soit e la période de \mathcal{L} ; pour tout $i \in \mathbf{Z}$, L_i/L_{i+e} est un \tilde{F} -espace vectoriel et la suite

$$O = L_{i+e}/L_{i+e} \subset L_{i+e-1}/L_{i+e} \subset \cdots \subset L_{i+1}/L_{i+e} \subset L_i/L_{i+e}$$

forme un drapeau de cet espace vectoriel. On dit que \mathcal{L} est *uniforme* si la dimension sur \tilde{F} de L_i/L_{i+1} ne dépend pas de i ; il revient au même de dire que $A_{\mathcal{L}}$ est un ordre principal, *i.e.* que $P_{\mathcal{L}}$ est un $A_{\mathcal{L}}$ -module à gauche libre; si on pose $f = \dim_{\tilde{F}}(L_i/L_{i+1})$, on a $ef = n$. Si \mathcal{L} est *uniforme*, $H_{\mathcal{L}}$ est un sous-groupe compact modulo Z maximal de G . Réciproquement, tout sous-groupe compact modulo Z maximal H de G est de la forme $H_{\mathcal{L}}$, où \mathcal{L} est une chaîne de réseaux uniforme dont la classe d'équivalence est déterminée par H . Des sous-groupes $H_{\mathcal{L}}$ et $H_{\mathcal{L}'}$, où \mathcal{L} et \mathcal{L}' sont uniformes, sont conjugués si et seulement si \mathcal{L} et \mathcal{L}' ont même période.

Étant donnée une représentation lisse irréductible π de G , le but du jeu sera de regarder la restriction de π à ces groupes $H_{\mathcal{L}}$ et de prouver que pour $H_{\mathcal{L}}$ bien choisi, cette restriction contient une représentation ρ d'un

sous-groupe de $H_{\mathcal{L}}$ d'un type bien particulier. La notion de "type bien particulier" progresse par raffinements successifs, au point qu'au plus haut degré de distillation, on sache notamment que si π est cuspidale, alors π est induite par ρ .

2.2. Soit $\mathcal{L} = (L_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ une chaîne de réseaux dans V , de période e . On dispose d'une filtration de $H_{\mathcal{L}}$ par les groupes $H_{\mathcal{L}}^0 = \{g \in G \mid g L_i = L_i \text{ pour } i \in \mathbf{Z}\}$ et, pour $i \geq 1$, $H_{\mathcal{L}}^i = 1 + P_{\mathcal{L}}^i$. Toute représentation lisse irréductible ρ de $H_{\mathcal{L}}$ est triviale sur $H_{\mathcal{L}}^i$ pour i assez grand ; si i est le plus petit entier ≥ 1 tel que cela se produise, on appelle $\frac{i-1}{e}$ le *niveau* de ρ .

Le groupe $H_{\mathcal{L}}^0/H_{\mathcal{L}}^1$ est isomorphe au groupe fini $\prod_{i=1}^e \mathrm{GL}_{\widehat{\mathbb{F}}}(L_{i-1}/L_i)$ dont les représentations sont connues depuis longtemps [Gr]. Pour des entiers m et r vérifiant $2m \geq r > m \geq 1$, le groupe $H_{\mathcal{L}}^m/H_{\mathcal{L}}^r$ est abélien, isomorphe au groupe additif $P_{\mathcal{L}}^m/P_{\mathcal{L}}^r$ par l'application $1 + x \mapsto x$. Si ρ est une représentation lisse irréductible de $H_{\mathcal{L}}$ triviale sur $H_{\mathcal{L}}^r$, sa restriction à $H_{\mathcal{L}}^m$ se décompose en une somme de caractères de $H_{\mathcal{L}}^m/H_{\mathcal{L}}^r$, conjugués les uns des autres sous l'action de $H_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}^r$. Ces caractères correspondent donc à des caractères de $P_{\mathcal{L}}^m/P_{\mathcal{L}}^r$. Mais le groupe des caractères de $P_{\mathcal{L}}^m/P_{\mathcal{L}}^r$ s'identifie à $P_{\mathcal{L}}^{1-r}/P_{\mathcal{L}}^{1-m}$: à tout élément $b \in P_{\mathcal{L}}^{1-r}$, on associe le caractère $\psi_b : x \mapsto \psi \circ \mathrm{Tr}(bx)$ de $P_{\mathcal{L}}^m$, qui est trivial sur $P_{\mathcal{L}}^r$ et ne dépend que de b modulo $P_{\mathcal{L}}^{1-m}$. De plus, l'action par conjugaison de $H_{\mathcal{L}}$ sur les caractères $P_{\mathcal{L}}^m/P_{\mathcal{L}}^r$ se transfère en l'action par conjugaison de $H_{\mathcal{L}}$ sur $P_{\mathcal{L}}^{1-r}/P_{\mathcal{L}}^{1-m}$.

DÉFINITION [BK].— *Une strate dans A est un quadruplet $([\mathcal{L}], r, m, b)$ où \mathcal{L} est une chaîne de réseaux dans V , r et m deux entiers avec $r > m$, et b un élément de $P_{\mathcal{L}}^{-r}$. Deux strates $([\mathcal{L}], r, m, b)$ et $([\mathcal{L}], r, m, b')$ sont équivalentes si on a $b \equiv b'$ modulo $P_{\mathcal{L}}^{-m}$. Une strate de la forme $([\mathcal{L}], r, r-1, b)$ est dite fondamentale si $r \geq 1$ et si $b + P_{\mathcal{L}}^{1-r}$ ne contient aucun élément nilpotent de A .*

2.3. Soient π une représentation lisse irréductible de G et $s = ([\mathcal{L}], r, m, b)$ une strate dans A avec $2m \geq r > 1$. On dira que π contient s si la restriction de π à $H_{\mathcal{L}}^{m+1}$ contient comme constituant le caractère ψ_b corres-

pendant à b . Les strates fondamentales ont été introduites par Moy [My2] qui conjecturait le résultat suivant, prouvé peu après par Bushnell [Bu1].

THÉORÈME 2.— *Soit π une représentation lisse irréductible de G . Alors, ou bien (cas a)) π contient une strate fondamentale $([\mathcal{L}], r, r - 1, b)$, ou bien (cas b)) il existe une chaîne de réseaux \mathcal{L} telle que $\pi|_{H_{\mathcal{L}}^0}$ contienne une représentation triviale sur $H_{\mathcal{L}}^1$ correspondant à une représentation cuspidale du groupe fini $H_{\mathcal{L}}^0/H_{\mathcal{L}}^1$.*

Remarque.— Bien sûr, les représentations cuspidales des groupes linéaires sur les corps finis sont celles qu'on ne peut obtenir par induction à partir des sous-groupes paraboliques propres. On les connaît toutes (cf. [Md]).

Si $([\mathcal{L}], r, r - 1, b)$ est une strate fondamentale et e la période de \mathcal{L} , alors $b^e/\tilde{\omega}^m$ appartient à $A_{\mathcal{L}}$ et on note ϕ_b la réduction modulo P de son polynôme caractéristique.

THÉORÈME 3.— *Plaçons-nous dans le cas a) du théorème 2.*

a) [Bu1, HM1] *Le niveau r/e et le polynôme ϕ_b ne dépendent pas de la strate fondamentale $([\mathcal{L}], r, r - 1, b)$ contenue dans π . Le niveau est le plus petit niveau des strates contenues dans π .*

b) [Ku2] *Si le polynôme ϕ_b est produit de 2 facteurs de degré > 1 premiers entre eux dans $\tilde{F}[X]$ (on dit alors que la strate est scindée) alors π n'est pas cuspidale.*

Le théorème 2 se prouve (en très gros) en partant d'une strate non fondamentale $([\mathcal{L}], r, r - 1, b)$ contenue dans π et en modifiant la chaîne de réseaux suivant des directions indiquées par le drapeau formé des noyaux des itérés d'un élément nilpotent dans $b + P_{\mathcal{L}}^{-r}$; cela donne aussi l'assertion concernant le niveau du théorème 3 a). Pour le théorème 3 b), on relève la factorisation de ϕ_b en une factorisation fg dans $R[X]$ du polynôme caractéristique de $y = b^e/\tilde{\omega}^m$, et utilisant la décomposition de V en $\text{Ker } f(y) \oplus \text{Ker } g(y)$, on prouve que π a un coefficient matriciel à support non compact modulo Z . En fait, on peut montrer que π est l'induite d'une représentation lisse irréductible du sous-groupe de Lévi de G correspondant à cette décomposition de V .

Remarque.— On peut analyser aussi, c'est plus facile, les cas b) du théorème 2.

2.4. Le jeu se poursuit en raffinant la notion de strate fondamentale.

DÉFINITION.— Une strate $([\mathcal{L}], r, r - 1, \alpha)$ est dite *alfalfa* (cf. [KM1]) si $r \geq 1$ et

- i) $\alpha \notin P_{\mathcal{L}}^{1-r}$.
- ii) $E = F[\alpha]$ est un corps et $H_{\mathcal{L}}$ contient E^{\times} .
- iii) α est minimal, i.e. la valuation normalisée $v(\alpha)$ de α dans E est première à l'indice de ramification $e(E/F)$ et le corps résiduel de E est engendré sur \tilde{F} par la classe de $\alpha^{e(E/F)} \tilde{\omega}^{-v(\alpha)}$.

La strate est dite très cuspidale (cf. [Ca]) si elle est alfalfa et que E est de degré n sur F .

Remarquons qu'une strate alfalfa est nécessairement fondamentale, non scindée.

THÉORÈME 4 [Ca] .— a) Soit $s = ([\mathcal{L}], r, r - 1, \alpha)$ une strate très cuspidale et ρ une représentation de $H_{\mathcal{L}}$ contenant s . Alors l'induite à G de ρ est irréductible, donc cuspidale.

b) Soit \mathcal{L} une chaîne de réseaux de période 1 et ρ une représentation de $H_{\mathcal{L}}$ triviale sur $H_{\mathcal{L}}^1$ et correspondant à une représentation cuspidale de $H_{\mathcal{L}}^0/H_{\mathcal{L}}^1$ (isomorphe à $\mathrm{GL}_n(\tilde{F})$). Alors l'induite à G de ρ est irréductible, donc cuspidale.

c) Soit π une représentation cuspidale de G obtenue par les procédés de a) ou b). Alors, le couple $(H_{\mathcal{L}}, \rho)$ est déterminé à conjugaison près.

Ce résultat provient du critère d'irréductibilité de 1.4. Par exemple pour a), si ρ n'est pas irréductible, on voit qu'il existe $g \in G - H_{\mathcal{L}}$ tel que ψ_{α} et $\psi_{g\alpha g^{-1}}$ aient même restriction à $H_{\mathcal{L}}^r \cap g^{-1} H_{\mathcal{L}}^r g$. Mais pour une strate très cuspidale, cela implique facilement que g appartient à $H_{\mathcal{L}}$. On prouve b) et c) de manière analogue. Les représentations ρ intervenant dans a) et b) sont faciles à décrire explicitement. On peut donc les dénombrer à

conducteur et caractère central donnés, et l'argument de comptage donne le corollaire suivant :

COROLLAIRE.— *Supposons n premier. Soit π une représentation cuspidale de G . Alors, il existe un caractère χ de F^\times tel que $\pi \otimes (\chi \circ \det)$ soit obtenu par les constructions a) ou b) du théorème 4.*

2.5. Si n n'est pas premier, on n'a pas fini, hélas.

PROPOSITION 1 [Ku2].— *Soit $s = ([\mathcal{L}], r, r - 1, b)$ une strate fondamentale non scindée. Alors, il existe une strate alfalfa $([\mathcal{L}], r, r - 1, \alpha)$ qui apparaît dans toute représentation lisse irréductible de G contenant s .*

La strate s étant non scindée, le polynôme ϕ_b est une puissance d'un polynôme irréductible de $\tilde{F}[X]$, et l'idée est de choisir α semi-simple tel que $\phi_\alpha = \phi_b$. On est donc ramené, au moins si on s'intéresse au dual cuspidal de G , à étudier les représentations lisses irréductibles de G contenant une strate alfalfa.

Supposons un instant que n soit premier, et soit π une représentation lisse irréductible de G contenant la strate alfalfa $s = ([\mathcal{L}], r, r - 1, \alpha)$. Alors, ou bien $\alpha \in F$, auquel cas il existe un caractère χ de F^\times tel que $a(\pi \otimes (\chi \circ \det)) < a(\pi)$, ou bien $F[\alpha]$ est de degré n , auquel cas la strate est très cuspidale et π est cuspidale induite à partir de $H_{\mathcal{L}}$. Procédant par conducteurs croissants, on obtient la preuve locale [Ku2] du corollaire précédent. (Celle de [Bu1] utilise la notion de strate fondamentale et l'équation fonctionnelle des fonctions Zêtas attachées à π .)

2.6. La situation se complique déjà beaucoup quand n est le produit de p par un nombre premier [KM2, Co2]. Cependant, la situation est favorable dans le cas modéré où n est premier à p . Décrivons brièvement dans notre langage les résultats de Howe et Moy [HM2].

Soit $s = ([\mathcal{L}], r, r - 1, \alpha)$ une strate alfalfa dans V . Posons $E = F[\alpha]$ et notons G' le centralisateur de α dans G , de sorte que G' est isomorphe à $GL(m, E)$, avec $m[E : F] = n$. Alors, on peut trouver un sous-groupe compact ouvert H de G contenant $H_{\mathcal{L}}$ et un caractère ψ'_α de H prolongeant

ψ_α tels que, d'une part, toute représentation lisse de G qui contienne s contienne aussi (par restriction à H) le caractère ψ'_α et que, d'autre part, l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G, \psi'_\alpha)$ (cf. 3.1) dont les représentations décrivent les représentations lisses de G contenant ψ'_α soit isomorphe à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G', 1)$ dont les représentations décrivent les représentations lisses de G' contenant la représentation triviale de $H'_\mathcal{L} \cap H$. Comme, dans ce cas modéré, le groupe $H'_\mathcal{L} \cap H$ est de la forme $H_{\mathcal{L}'}^m$, où \mathcal{L}' est une chaîne de R_E -réseaux dans le E -espace vectoriel V , on dispose bien d'un procédé de récurrence qui permet une description du dual cuspidal de G . (On traite de la même façon le cas b) du théorème 2.)

2.7. Plaçons-nous dans le cas où n est le produit de deux nombres premiers [KM2] en suivant ici l'exposition de [BK], p.15-16. On part d'une représentation lisse irréductible de G contenant une strate alfalfa

$([\mathcal{L}], r, r-1, \alpha)$. On choisit une telle strate de sorte que π contienne la strate $([\mathcal{L}], r, m, \alpha)$ avec $m/e(\mathcal{L})$ *minimal*. Supposons pour fixer les idées $m > \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ (il faut adapter le raisonnement pour $m = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$). Alors la restriction de π à $H_{\mathcal{L}}^m$ contient un caractère $\psi_{\alpha'}$ se restreignant à ψ_α sur $H_{\mathcal{L}}^{m+1}$, i.e. $\alpha' = \alpha + b$ avec $b \in P_{\mathcal{L}}^{-m}$. Remarquons que la strate $([\mathcal{L}], r, m-1, \alpha + b)$ n'est pas alfalfa. Posons $E = F[\alpha]$ et $B = \text{End}_E(V) \subset A$; alors \mathcal{L} est une chaîne de R_E -réseaux dans le E -espace vectoriel V ; notant $H'_\mathcal{L}$ le stabilisateur de \mathcal{L} dans B^\times , on a $H_{\mathcal{L}}^i = H'_\mathcal{L} \cap B^\times$ pour $i \geq 0$. La restriction de ψ_b à $H_{\mathcal{L}}^m$ définit une strate $([\mathcal{L}], m, m-1, b')$ dans B . Le point (difficile) prouvé dans [KM2] est qu'on peut s'arranger pour que cette strate soit *fondamentale* dans B . Si elle est scindée, alors π n'est pas cuspidale (cf. théorème 3.b)) et sinon, on peut supposer que la strate est alfalfa dans B , et alors $\alpha + b$ engendre un corps. Si ce corps est de degré n sur F , la situation redevient semblable au cas très cuspidal : π est nécessairement cuspidale induite à partir de $H_{\mathcal{L}}$. Comme n est produit de deux nombres premiers, on a gagné dès que $[F[\alpha + b] : F] > [F[\alpha] : F] > 1$. On pourrait espérer que ce procédé reste valable pour n quelconque, i.e. que l'on puisse travailler avec la strate $([\mathcal{L}], m, m-1, b')$ dans B . Mais ce n'est hélas pas possible : on doit retourner à F comme corps de base et travailler avec la

strate $([\mathcal{L}], r, m - 1, \alpha + b)$ dans A . Le même phénomène se présente aussi dans [Co4], ce qui explique pourquoi l'approche directe de [Co4] semble plus compliquée que [Co2].

3. LE CAS GÉNÉRAL : STRATES SIMPLES ET ALGÈBRES DE HECKE

3.1. Abordons maintenant le cas de GL_n où n est quelconque, suivant [BK]. On étudie les algèbres de Hecke attachées aux représentations des sous-groupes ouverts compacts de $G = GL_n(F)$, et en particulier l'entrelacement de ces représentations ; cela mène à l'entrelacement des strates, et les strates simples (concept fondamental dégagé dans [BK]) sont celles dont l'entrelacement, plus facile à déterminer, permet d'effectuer l'analyse dont la difficulté a été soulignée en 2.7.

Commençons par définir les algèbres de Hecke adéquates. On fixe une mesure de Haar dg sur G (G est unimodulaire). On note $\mathcal{H}(G)$ l'algèbre des fonctions localement constantes à support compact sur G , munie de la loi de convolution

$$\phi\psi(g) = \int_G \phi(h)\psi(h^{-1}g) dh.$$

Si π est une représentation lisse de G sur l'espace V , l'algèbre $\mathcal{H}(G)$ agit sur V par la formule $\pi(\phi)(v) = \int_G \phi(h)\pi(h)(v)dh$ pour $\phi \in \mathcal{H}(G)$ et $v \in V$.

Fixons un sous-groupe ouvert compact H de G et une représentation lisse irréductible (donc de dimension finie) $\rho : H \rightarrow GL(W)$. (On a une variante de tout ce qui va suivre pour les sous-groupes compacts modulo Z .) On dispose alors d'un idempotent e_ρ dans $\mathcal{H}(G)$ défini par $e_\rho(x) = \text{vol}(K)^{-1} \dim(\rho) \text{tr}(\rho(x^{-1}))$ pour $x \in H$ et $e_\rho(x) = 0$ pour $x \notin H$. Alors $e_\rho \mathcal{H}(G) e_\rho$ est une sous-algèbre de $\mathcal{H}(G)$ et a e_ρ pour élément unité. Si π est comme plus haut, la restriction de π à H est semi-simple et $\pi(e_\rho)$ est la projection sur le composant isotypique $V(\rho)$, qui est donc un module sur $e_\rho \mathcal{H}(G) e_\rho$. On a une bijection naturelle, associant $V(\rho)$ à V , entre les classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles $\pi : G \rightarrow GL(V)$ vérifiant $V(\rho) \neq 0$ et les classes d'isomorphisme de modules

simples sur $e_\rho \mathcal{H}(G) e_\rho$.

3.2. Au vrai, il est commode d'utiliser une autre algèbre $\mathcal{H}(G, \rho)$ attachée à ρ , qui est équivalente à $e_\rho \mathcal{H}(G) e_\rho$ au sens de Morita. On l'appelle l'*algèbre d'entrelacement* de ρ . Notons ρ^\vee la représentation contragrédiente de ρ ; on a $\rho^\vee(g) = {}^t\rho(g^{-1})$ pour $g \in G$. L'espace $\mathcal{H}(G, \rho)$ est formé des fonctions localement constantes à support compact de G dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(W^*)$, satisfaisant à $\Phi(hgh') = \rho^\vee(h) \circ \Phi(g) \circ \rho^\vee(h')$ pour h, h' dans H et g dans G . La loi d'algèbre est la loi de convolution

$$\Phi \Phi'(g) = \int_G \Phi(a) \circ \Phi'(a^{-1}g) dx.$$

Il existe un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{H}(G, \rho) \otimes_{\mathbb{C}} \text{End}_{\mathbb{C}}(W)$ sur $e_\rho \mathcal{H}(G) e_\rho$ associant à $\Phi \otimes (w \circ w^*)$ pour $\Phi \in \mathcal{H}(G, \rho)$, $w \in W$ et $w^* \in W^*$) la fonction $g \mapsto \dim \rho \text{Tr}(w \otimes \Phi(g)w^*)$.

Pour $g \in G$, on note gH le groupe gHg^{-1} et ${}^g\rho : {}^gH \rightarrow \text{GL}(W)$ la représentation $x \mapsto \rho(g^{-1}xg)$. On note $\text{Hom}({}^g\rho, \rho)$ l'espace des endomorphismes ϕ de W vérifiant $\phi \circ {}^g\rho(x) = \rho(x) \circ \phi$ pour $x \in H \cap {}^gH$. On dit que g entrelace ρ (avec elle-même) si cet espace est non nul. Le support des fonctions de $\mathcal{H}(G, \rho)$ est donné par l'entrelacement de ρ .

PROPOSITION.— *Soit $g \in G$. On a un isomorphisme canonique entre $\text{Hom}({}^g\rho, \rho)$ et l'espace des fonctions Φ de $\mathcal{H}(G, \rho^\vee)$ qui s'annulent hors de HgH .*

Remarque.— Le cas où H est compact mod Z et où $\text{Hom}({}^g\rho, \rho) = 0$ pour $g \notin H$ i.e. $\mathcal{H}(G, \rho^\vee)$ de dimension 1 est précisément celui où $\text{ind}_H^G(\rho)$ est irréductible et cuspidale cf. 1.4.

3.3. Grossièrement dit, l'analyse d'un élément π du dual admissible de G s'effectue en partant d'une paire (H, ρ) relativement simple intervenant dans π , par exemple une paire correspondant (2.2) à une strate alfalfa (2.4) $([\mathcal{L}], r, r-1, \alpha)$ et en affinant l'observation, i.e. en grossissant H , par exemple en passant à une strate $([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ avec $r/2 \leq m < r-1$.

La notion d'entrelacement se transporte aux strates de manière compatible avec l'assignement $b \mapsto \psi_b$ de 2.2. Un élément g de G entrelace la strate $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, b)$ et la strate $\Omega' = ([\mathcal{L}'], r', m', b')$ si $g^{-1}(b + P_{\mathcal{L}}^{-m})g \cap (b' + P_{\mathcal{L}'}^{-m'})$ est non vide ; on note $\mathcal{I}_G(\Omega)$ l'ensemble des éléments de G entrelaçant Ω avec elle-même.

On s'intéresse essentiellement, cf. 2.4, aux strates *pures* $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$, i.e. telles que $([\mathcal{L}], r, r-1, \beta)$ vérifie les deux premières conditions de la définition 2.4 (si elle vérifie en outre la troisième, Ω sera dite *minimale*). Fixons donc Ω pure et notons E le corps $F[\beta]$ et B le sous-anneau $\text{End}_E(V)$ de A . Les réseaux de la chaîne \mathcal{L} sont stables par l'action de l'anneau d'entiers R_E de E et on obtient ainsi une chaîne $\mathcal{L}(E)$ de réseaux dans le E -module V ; on utilisera pour cette chaîne les notations $B_{\mathcal{L}(E)}$, $P_{\mathcal{L}(E)}$, etc. de 2.2.

L'entrelacement de Ω amène à étudier l'application $a_\beta : x \mapsto \beta x - x\beta$ de A dans A . Pour $k \in \mathbf{Z}$, on note $N_k(\Omega)$ l'ensemble des éléments x de $A_{\mathcal{L}}$ tels que $a_\beta(x)$ appartienne à $P_{\mathcal{L}}^k$; c'est un sous-anneau ouvert de $A_{\mathcal{L}}$, qui est aussi un bimodule sur $B_{\mathcal{L}(E)}$, et on a $N_k(\Omega) \subset B_{\mathcal{L}(E)} + P_{\mathcal{L}}$ pour k assez grand. On note $k_0(\Omega)$ le plus petit entier k tel que $N_{k+1}(\Omega) \subset B_{\mathcal{L}(E)} + P_{\mathcal{L}}$.

L'intérêt de $k_0(\Omega)$ vient de la propriété d'exactitude suivante. Fixons une *corestriction* s relative à E/F , c'est-à-dire un morphisme de (B, B) -bimodules de A dans B tel que $s(B_{\mathcal{L}(E)}) = A_{\mathcal{L}'} \cap B$ pour toute chaîne \mathcal{L}' de réseaux dans A stables par R_E (la corestriction reflète la restriction à B des caractères $\psi_{b'}$ définis par les strates $([\mathcal{L}'], r', m', b')$ de A).

Lemme.— Soit $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ une strate pure et $E = F[\beta]$. Soit k un entier, $k \geq k_0(\Omega)$. Alors la suite suivante est exacte

$$0 \longrightarrow N_k(\Omega)/B_{\mathcal{L}(E)} \xrightarrow{a_\beta} P_{\mathcal{L}}^k \xrightarrow{s} P_{\mathcal{L}(E)}^k \longrightarrow 0.$$

3.4. DÉFINITION.— Une strate pure $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ dans A est dite simple si $m < -k_0(\Omega)$.

Les strates *minimales* sont les strates simples $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ telles que $k_0(\Omega) \leq -r$. Si $m = r-1$, les strates simples ne sont autres que les strates *alfalfa*.

L'importance des strates simples est attestée par le résultat technique fondamental suivant :

THÉORÈME [BK §2].— Soit $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ une strate pure dans A .

a) Parmi les strates pures $([\mathcal{L}], r, m, \omega)$ équivalentes à Ω , les strates simples sont celles pour lesquelles $[F[\omega] : F]$ est minimal.

b) Supposons Ω simple. Si $\Omega' = ([\mathcal{L}], r', m', b')$ est simple et entrelacée avec Ω , alors Ω' est conjuguée de Ω par un élément de $H_{\mathcal{L}}$.

c) Supposons Ω simple, et posons $k = k_0(\Omega)$, $N = N_k(\Omega)$. Alors

$$\mathcal{I}_G(\Omega) = (1 + P_{\mathcal{L}(E)}^{-(m+k)} N) B^\times (1 + P_{\mathcal{L}(E)}^{-(m+k)} N).$$

On voit que a) donne une caractérisation simple des strates simples et que c) détermine l'entrelacement d'une strate simple d'une façon qui permet d'espérer une réduction à B .

Une strate simple $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ se comporte bien vis-à-vis du processus de raffinement : Posons $E = F[\beta]$, $B = \text{End}_E(V)$ et fixons comme plus haut une corestriction s relative à E/F . Prenons $b \in P_{\mathcal{L}}^{-m}$ et considérons la strate raffinée $\Omega' = ([\mathcal{L}], r, m-1, \beta+b)$. On a une *strate dérivée* dans B : $(([\mathcal{L}(E)], m, m-1, s(b))$. Si la strate dérivée est *scindée*, alors une représentation lisse irréductible de G qui contient la strate Ω' est induite à partir d'un sous-groupe parabolique propre et en particulier ne saurait être cuspidale. Si à l'opposé la strate dérivée est simple dans B (c'est-à-dire alfalfa), alors Ω' est équivalente à une strate simple dans A .

On montre aussi que les strates simples s'obtiennent par raffinements successifs de ce genre à partir de strates alfalfa.

3.5. Cependant l'analyse du dual admissible de G est plus compliquée que ce schéma de raffinement de strates. En effet, la strate $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ ne saurait définir une représentation d'un sous-groupe de G que si $m \geq \frac{r}{2}$; passer au-delà impose de modifier la construction. La classification de [BK] repose néanmoins sur les strates simples $([\mathcal{L}], r, 0, \beta)$ dans A , mais le chemin est plus contourné. Nous le décrivons brièvement ci-après. Pour une strate simple $\Omega = ([\mathcal{L}], r, 0, \beta)$, on définit en 3.6 des sous-anneaux filtrés $j(\Omega)$ et $h(\Omega)$ de $A_{\mathcal{L}}$, des sous-groupes filtrés $J(\Omega)$ et $H(\Omega)$ de $H_{\mathcal{L}}$ et des ensembles

de caractères $\mathcal{C}(\Omega, k)$ (pour $0 \leq k \leq r-1$) des groupes $H(\Omega)^{k+1}$. Ces objets sont définis directement si Ω est minimal (i.e. $k_0(\Omega) \leq -r$) et par référence à une strate $(([\mathcal{L}], r, -k_0(\Omega), \gamma)$ simple et équivalente à $([\mathcal{L}], r, -k_0(\Omega), \beta)$ sinon (la strate $\Omega' = ([\mathcal{L}], r, 0, \gamma)$ est alors simple elle aussi). On vérifie, mais ce n'est pas évident, que ces objets existent et ne dépendent que de Ω et non des choix effectués. En 3.6, nous considérons une strate simple $\Omega = ([\mathcal{L}], r, 0, \beta)$ et fixons un choix de Ω' .

3.6. Gardons les notations E et B (cf. 3.4), et posons $m = -k_0(\Omega)$. Si Ω est minimale, on pose $h(\Omega) = B_{\mathcal{L}(E)} + P_{\mathcal{L}}^{[r/2]+1}$ et $j(\Omega) = B_{\mathcal{L}(E)} + P_{\mathcal{L}}^{[(r+1)/2]}$. Sinon, on pose $h(\Omega) = B_{\mathcal{L}(E)} + h(\Omega') \cap P_{\mathcal{L}}^{[m/2]+1}$ et $j(\Omega) = B_{\mathcal{L}(E)} + j(\Omega') \cap P_{\mathcal{L}}^{[(m+1)/2]}$.

Ce sont des sous-anneaux de $A_{\mathcal{L}}$ filtrés par $h^m = h \cap P_{\mathcal{L}}^m$ et $j^m = j \cap P_{\mathcal{L}}^m$. On pose $H(\Omega) = h(\Omega)^\times$, $J(\Omega) = j(\Omega)^\times$ et $H^m = 1 + h^m$, $J^m = 1 + j^m$ pour $m \geq 1$.

Soit $0 \leq k \leq r-1$. Si Ω est minimale, on note $\mathcal{C}(\Omega, k)$ l'ensemble des caractères θ de $H(\Omega)^{k+1}$ satisfaisant à

- i) $\theta | (H(\Omega)^{k+1} \cap H_{\mathcal{L}}^{[n/2]+1}) = \psi_\beta$.
- ii) $\theta | (H(\Omega)^{k+1} \cap B^\times)$ se factorise par le déterminant $B^\times \rightarrow E^\times$.

Supposons Ω non minimale. Si $k \geq m$, on pose $\mathcal{C}(\Omega, k) = \mathcal{C}(\Omega', k)$. Sinon, $\mathcal{C}(\Omega, k)$ est formé des caractères θ de $H(\Omega)^{k+1}$ vérifiant ii) et

- iii) θ est normalisé par $H_{\mathcal{L}(E)}$.
- iv) Pour $k' = \max(k, [m/2])$, la restriction de θ à $H(\Omega)^{k'+1}$ est de la forme $\theta_0 \cdot \psi_{\beta-\gamma}$ avec $\theta_0 \in \mathcal{C}(\Omega', k')$.

On peut facilement calculer l'entrelacement de $\theta_0 \in \mathcal{C}(\Omega, k)$ [BK, Thm 4.7].

3.7. Soit θ un caractère dans $\mathcal{C}(\Omega, 0)$. Alors il existe une unique représentation irréductible $\eta(\theta)$ de $J^1(\Omega)$ dont la restriction à $H^1(\Omega)$ contienne θ . De plus, $\eta(\theta)$ s'étend de manière canonique (à torsion près par $\chi \circ \det_B$ où χ est un caractère de $R_E^\times / 1 + P_E$) en une représentation $\kappa(\theta)$ de $J(\Omega)$.

Remarque.— Dans les cas simples mentionnés au §2, et dans [Co4], de

telles extensions s'obtiennent par la représentation de Weil. Cependant, cela mène à des difficultés techniques, par exemple si $p = 2$. Dans [BK] est utilisée une approche inspirée de [Wa].

On peut enfin définir la notion de *type simple*. On part d'une strate simple $\Omega = ([\mathcal{L}], r, m, \beta)$ comme plus haut et on suppose \mathcal{L} *uniforme*. Alors $J(\Omega)/J^1(\Omega)$ est isomorphe à $H_{\mathcal{L}(E)}/H_{\mathcal{L}(E)}^1$, c'est-à-dire au produit de e copies de $\mathrm{GL}_f(R_E/P_E)$ (avec $ef = \dim_E(V)$). Étant donnée une représentation cuspidale σ_0 de $\mathrm{GL}_f(R_E/P_E)$, on peut voir $\sigma = \sigma_0 \otimes \cdots \otimes \sigma_0$ comme une représentation de $J(\Omega)$ triviale sur $J^1(\Omega)$.

DÉFINITION.— *Un type simple est soit une représentation de $J(\Omega)$ de la forme $\kappa(\theta) \otimes \sigma$ où $\theta \in \mathcal{C}(\Omega, 0)$ et σ comme ci-dessus, soit une représentation de $H_{\mathcal{L}}^0$ où \mathcal{L} est uniforme, triviale sur $H_{\mathcal{L}}^1$ et de la forme σ comme ci-dessus.*

Remarque.— Dans le deuxième cas de cette définition, on peut avoir $f = 1$; alors $H_{\mathcal{L}}^0$ est ce qu'on appelle un *sous-groupe d'Iwahori* de G .

3.8. On peut enfin énoncer les résultats fondamentaux.

On prend une représentation de $J(\Omega)$ qui est un type simple. On fixe un sous-corps L de A contenant E , non ramifié de degré f sur E , et on pose $C = \mathrm{End}_L(V)$.

THÉORÈME.— *L'algèbre $\mathcal{H}(J(\Omega), \lambda)$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre d'entrelacement de la représentation triviale d'un sous-groupe d'Iwahori de C^\times .*

Remarquons que les représentations de ces algèbres sont très bien connues [Bo, KL] et que cet isomorphisme peut se décrire par des conditions de support.

COROLLAIRE.— *Soit π une représentation lisse irréductible de G dont la restriction à $J(\Omega)$ contient λ .*

Si $[L : F] = n$, alors π est cuspidale induite par une extension de λ au normalisateur dans G de $J(\Omega)$ (qui est compact modulo Z).

Si non π n'est pas cuspidale.

On peut, enfin, décrire les représentations de G contenant un type simple. On sait que [BZ1, Cas] si π est une représentation lisse irréductible de G , il existe un sous-groupe de Lévi de G , $L \simeq \prod_{i=1}^s \mathrm{GL}_{n_i}(F)$, et des représentations cuspidales π_i de $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ pour $i = 1, \dots, s$, tels que π soit une sous-représentation de l'induite parabolique de $\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_s$. L'ensemble $\{\pi_1 \dots \pi_s\}$ est déterminé par π ; appelons-le le *support* de π . Il est dit *simple* si les n_i sont tous égaux et si pour $i > 1$, π_i est équivalente à $\pi_1 \otimes (\chi_i \circ \det)$ où χ_i est un caractère non ramifié de F^\times .

THÉORÈME.— *Une représentation lisse irréductible de G contient un type simple si et seulement si son support est simple.*

COROLLAIRE.— *Toute représentation cuspidale π de G est induite à partir d'un sous-groupe compact modulo Z . Plus précisément, π contient un type simple λ représentation d'un sous-groupe J et la paire (λ, J) est unique à conjugaison près; de plus, π est l'induite d'une unique extension de λ au normalisateur de J dans G .*

4. GROUPES AUTRES QUE GL_n

4.1. Parlons en premier des groupes proches de GL_n et d'abord de ses formes intérieures anisotropes. Si D est un corps gauche de centre F , Corwin a donné [Co3] une classification des représentations de D^\times , comme il est inhérent à la méthode de comptage. Il est clair d'autre part (mais ce n'est pas écrit) que les méthodes de [BK] s'appliquent dans le cas de D^\times , qui est plus facile que celui de $\mathrm{GL}_n(F)$, et fournissent une classification analogue. En fait, certaines idées de [BK] ont été utilisées par E.W. Zink pour compléter son approche originale [Zi], qui fournit une autre classification du dual admissible de D^\times , liée à une bonne connaissance des classes de conjugaison dans U_D^1/U_D^i pour $i > 1$, et sans doute plus proche de la correspondance conjecturale [La, He] avec les représentations du groupe de Galois absolu de F .

On devrait pouvoir traiter de même le cas de $\mathrm{GL}_m(D)$, mais cela reste à écrire.

Le cas de PGL_n se réduit immédiatement au cas de GL_n : les représentations lisses de $\mathrm{PGL}_n(F)$ sont celles de $\mathrm{GL}_n(F)$ qui sont triviales sur le centre. On peut étudier le cas de SL_n en restreignant à $\mathrm{SL}_n(F)$ les représentations de $\mathrm{GL}_n(F)$, et Bushnell et Kutzko annoncent qu'ils savent en particulier prouver que toute représentation cuspidale de $\mathrm{SL}_n(F)$ est induite à partir d'un sous-groupe compact ouvert ; voir [KS] pour le cas où n est premier.

4.2. Pour les groupes proches de GL_2 et certains autres groupes de petit rang, la construction explicite des représentations est un problème abordé depuis longtemps. Parmi les travaux récents en petit rang, et sans prétention d'exhaustivité, mentionnons les classifications de A. Moy [My3].

Prenons donc un groupe réductif connexe général \mathbf{G} sur F . Alors la structure des sous-groupes compacts maximaux de $\mathbf{G}(F)$ est élucidée dans [BT], et dans [PR] sont introduites des filtrations, dites standard, sur ces groupes et d'autres sous-groupes compacts de $\mathbf{G}(F)$, les sous-groupes parahoriques (pour $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, ils correspondent aux stabilisateurs des chaînes de réseaux). L'analogie des représentations très cuspidales de Carayol conduit à la notion de représentation P -cuspidale de $\mathbf{G}(F)$, due à L. Morris [Mo1, cf. aussi Hi].

Cependant, si l'on veut obtenir une généralisation aux groupes classiques des résultats de R. Howe [Ho1] pour GL_n dans le cas modéré, on est amené [Mo2] à définir des filtrations attachées aux tores modérés, qui ne sont pas toutes des filtrations standard. Enfin, si l'on veut obtenir le cas général, les tores modérés ne peuvent suffire et Morris a dégagé pour un groupe classique \mathbf{G} [Mo3] (en caractéristique résiduelle impaire) la bonne notion de chaîne de réseaux et de filtrations de l'ordre héréditaire et des sous-groupes compacts associés : les chaînes de réseaux doivent, en gros, être union de deux chaînes se déduisant l'une de l'autre par dualité par rapport à la forme définissant \mathbf{G} , et les filtrations reflètent subtilement cette décomposition. Morris définit aussi la notion de *strate fondamentale* et prouve que toute représentation lisse irréductible de $\mathbf{G}(F)$ contient une strate fondamentale. L'investigation devrait se poursuivre selon les lignes de [BK].

Si les isomorphismes d'algèbres de Hecke de 3.7 s'avéraient généraux, cela serait particulièrement intéressant puisque, au moins pour G déployé à centre connexe, les représentations de l'algèbre de Hecke relative à la représentation triviale d'un sous-groupe d'Iwahori ont été classifiées par Kazhdan et Lusztig [KL] à l'aide de techniques de \mathbf{K} -homologie.

4.3. Signalons enfin que, même pour $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, l'histoire n'est pas finie, puisque les célèbres conjectures de Langlands [La, He] impliquent un lien très précis entre les représentations de degré n du groupe de Galois absolu de F et le dual admissible de $\mathrm{GL}_n(F)$, les représentations galoisiennes irréductibles correspondant au dual cuspidal. Seuls les cas $n \leq 3$ ont été complètement traités jusqu'à maintenant, et l'on est en droit d'attendre une correspondance explicite pour n quelconque.

BIBLIOGRAPHIE

- [BZ1] J. BERNSTEIN et A. ZELEVINSKI - *Representations of the group $\mathrm{GL}(n, F)$ where F is a local non-Archimedean field*, Usp. Mat. Nauk **31** (1976), 5-70.
- [BZ2] J. BERNSTEIN et A. ZELEVINSKI - *Induced representations of reductive p -adic groups*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **10** (1977), 441-472.
- [Bo] A. BOREL - *Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup*, Invent. Math. **35** (1976), 233-259.
- [BT] F. BRUHAT et J. TITS - *Groupes réductifs sur un corps local I*, Publ. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5-251.
- [Bu1] C. BUSHNELL - *Hereditary orders, Gauss sums, and supercuspidal representations of GL_N* , J. reine angew. Math. **375/376** (1987), 184-210.
- [Bu2] C. BUSHNELL - *Induced representations of locally profinite groups*, prépublication 1990, à paraître au J. of Algebra.

- [BK] C. BUSHNELL et Ph. KUTZKO - *The admissible dual of GL_N via compact open subgroups*, prépublication 1990, §§1 à 8, annoncé par *The admissible dual of GL_N via restriction to compact open subgroups*, à paraître dans les comptes rendus de la Conférence “Harmonic analysis on reductive groups”, Bowdoin, 1989.
- [Ca] H. CARAYOL - *Représentations cuspidales du groupe linéaire*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **17** (1984), 191-225.
- [Cas] W. CASSELMAN - *Introduction to the theory of admissible representations of p -adic reductive groups*, prépublication.
- [Co1] L. CORWIN - *Representations of division algebras over local fields*, I, Adv. in Math. **13** (1974), 259-267 ; II, Pacific J. Math **101** (1982), 49-70.
- [Co2] L. CORWIN - *Supercuspidal representations of $GL_{pp'}(F)$, F p -adic*, prépublication.
- [Co3] L. CORWIN - *The unitary dual for the multiplicative group of arbitrary division algebras over local fields*, J.A.M.S. **2** (1989), 565-598.
- [Co4] L. CORWIN - *A construction of the supercuspidal representations of $GL_n(F)$, F p -adic*, prépublication, dernière version novembre 1989.
- [De] P. DELIGNE - *Le support du caractère d’une représentation supercuspidale*, C.R.A.S. Paris **283** (1976), 155-157.
- [DKV] P. DELIGNE, D. KAZHDAN et M.-F. VIGNERAS - *Représentations des algèbres centrales simples p -adiques* in Représentations des groupes réductifs sur un corps local, Hermann, Paris (1984).
- [GGPS] I. GELFAND, I. GRAEV, I.PIATETSKI-SHAPIRO - *Representations and automorphic functions*, Saunders (1969).
- [Gr] J.A. GREEN - *The characters of the finite general linear groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 402-447.
- [He] G. HENNIART - *Les conjectures de Langlands locales pour $GL(n)$* in Journées Arithmétiques de Metz, Astérisque **94** (1982), 67-85.
- [Hi] H. HIJIKATA - *Some supercuspidal representations induced from parabolic subgroups* in Automorphic forms in several variables, Progress in Math. **46** (1984), 160-178.
- [Ho1] R. HOWE - *Some qualitative results on the representation theory of GL_n over a p -adic field*, Pacific J. Math. **73** (1977), 497-538.

- [Ho2] R. HOWE - *Tamely ramified supercuspidal representations of GL_n* , Pacific J. Math. **73** (1977), 365-381.
- [Ho3] R. HOWE - (With the collaboration of A. Moy) *Harish-Chandra homomorphisms for p -adic groups* CBMS Regional Conference Series in Math. **59**, AMS (1985).
- [HM1] R. HOWE et A. MOY - *Minimal K -types for $GL(n)$* , Astérisque **171-172** (1989), 257-273.
- [HM2] R. HOWE et A. MOY - *Hecke algebra isomorphisms for GL_N* , J. of Algebra **131** (1990), 388-424.
- [JL] H. JACQUET et R.P. LANGLANDS - *Automorphic forms on $GL(2)$* , L.N. **114**, Springer, 1971.
- [KL] D. KAZHDAN et G. LUSZTIG - *Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras*, Invent. Math. **87** (1987), 153-215.
- [Ku1] Ph. KUTZKO - *On the supercuspidal representations of GL_2* , I, II, Amer. J. Math. **100** (1978), 43-60 et 705-716.
- [Ku2] Ph. KUTZKO - *Towards a classification of the supercuspidal representations of GL_N* , J. London Math. Soc. **37** (1988), 265-274.
- [KM1] Ph. KUTZKO et D. MANDERSCHEID - *On intertwining operators for $GL_N(F)$, F a non-Archimedean local field*, Duke Math. J. **57** (1988), 275-293.
- [KM2] Ph. KUTZKO et D. MANDERSCHEID - *On the supercuspidal representations of GL_N , N the product of two primes*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **23** (1990), 39-88.
- [KS] Ph. KUTZKO et P. SALLY Jr. - *All supercuspidal for SL_p over a p -adic field are induced* in Representation theory of p -adic groups, Progress in Math. **40** (1983), 185-196.
- [La] R.P. LANGLANDS - *Problems in the theory of automorphic forms*, in Lectures in Modern Analysis III, LN **170** (1970), 18-86.
- [Md] I. MACDONALD - *Symmetric functions and Hall Polynomials*, Oxford (1979).
- [Mo1] L. MORRIS - *P -cuspidal representations*, Proc. London Math. Soc. **57** (1988), 329-356 ; *P -cuspidal representations of level one*, Proc. London Math. Soc. **58** (1989), 550-558.

- [Mo2] L. MORRIS - *Tamely ramified supercuspidal representations of some classical groups*, prépublication, et *Tamely ramified supercuspidal representations of the classical groups I et II*, prépublications.
- [Mo3] L. MORRIS - *Fundamental G -strata for classical groups*, prépublication IAS, 1990.
- [My1] A. MOY - *Local constants and the tame Langlands correspondence*, Amer. J. Math. **108** (1986), 863-930.
- [My2] A. MOY - *A conjecture on minimal K -types for GL_n over a p -adic field*, Contemporary Math. **86** (1989), 249-254.
- [My3] A. MOY - *Representations of $U(2,1)$ over a P -adic field*, J. Reine Angew. Math. **372** (1987), 178-208 ; *Representations of GSp_4 over a P -adic field I, II*, Comp. Math. **66** (1988), 237-328 ; *Minimal K -types for G_2 over a P -adic field*, Trans. AMS **305** (1988), 517-529.
- [PR] G. PRASAD, M.S. RAGHUNATHAN - *Topological central extensions of semisimple groups over local fields I*, Ann. Math. **119** (1988), 143-201.
- [Re] I. REINER - *Maximal orders*, Academic Press, Londres 1976.
- [Ro] F. RODIER - *Représentations de $GL_n(F)$ où F est un corps p -adique*, Sémin. Bourbaki, exposé n° 587, février 1982, Astérisque **92-93** (1982), 201-219.
- [Rg] J. ROGAWSKI - *Representations of $GL(n)$ and division algebras over a p -adic field*, Duke Mat. J. **50** (1983), 161-196.
- [Tu] J.B. TUNNELL - *On the local Langlands conjectures for $GL(2)$* , Invent. Math. **46** (1978), 179-200.
- [Vo] D. VOGAN - *Representations of real reductive Lie groups*, Birkhäuser (1981).
- [Wa] J.-L. WALDSPURGER - *Algèbres de Hecke et induites de représentations cuspidales pour $GL(N)$* , J. reine angew. Math. **370** (1986), 127-191.
- [Ze] A. ZELEVINSKI - *Induced representations of reductive p -adic groups II : On irreducible representations of $GL(n)$* , Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **13** (1980), 165-210.

[Zi] E.W. ZINK - *Representation theory of local division algebras* I, II,
prépublications Karl-Weierstraß Institut für Math., Berlin 1990.

Guy HENNIART

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

Département de Mathématiques

et URA D 752 du CNRS

Bâtiment 425

F-91405 ORSAY

Astérisque

JOSEPH LE POTIER

Fibrés de Higgs et systèmes locaux

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 737, p. 221-268

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__221_0>

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FIBRÉS DE HIGGS ET SYSTÈMES LOCAUX

par Joseph LE POTIER

En 1965, Narasimhan et Seshadri établissaient [28] une correspondance bijective entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles du groupe fondamental π d'une surface de Riemann compacte X , et l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibré vectoriels stables de degré 0 sur X : ils associent à une représentation $\rho : \pi \rightarrow \mathbf{U}(r)$ le fibré vectoriel holomorphe E_ρ défini par

$$E_\rho = \tilde{X} \times_\pi \mathbf{C}^r$$

où $\tilde{X} \rightarrow X$ est le revêtement universel de X , et où le produit ci-dessus est le quotient de $\tilde{X} \times \mathbf{C}^r$ par l'action de π définie par $(\gamma, (x, v)) \mapsto (x\gamma^{-1}, \gamma v)$ pour $\gamma \in \pi$ et $(x, v) \in \tilde{X} \times \mathbf{C}^r$. La correspondance fut étendue récemment sur toute variété projective lisse par Donaldson [6,7,9], et sur toute variété kählérienne compacte par Uhlenbeck et Yau ([36],[22], Séminaire Bourbaki n° 683) ; le point essentiel est de montrer que sur tout fibré vectoriel stable, il existe de bonnes métriques hermitiennes, dites suivant les auteurs, de Yang et Mills, ou d'Hermite et Einstein.

L'objet des travaux de C. Simpson, auxquels est consacré l'essentiel de ce rapport, est de trouver un analogue pour les représentations linéaires quelconques. On doit rajouter aux fibrés vectoriels holomorphes une donnée supplémentaire pour obtenir une équivalence du même type que celle de Narasimhan et Seshadri. C'est la notion de fibré de Higgs, qui fut d'abord S.M.F.

introduite par Hitchin sur les courbes algébriques [19], et que nous expliquons dans la section 2. Pour définir le fibré vectoriel algébrique, muni de sa structure de Higgs, associé à une représentation $\pi \rightarrow \mathbf{GL}(r, \mathbf{C})$ les choses ne sont pas aussi simples que ci-dessus, et l'on doit faire intervenir de bonnes métriques. La manière dont nous avons choisi de présenter les choses passe par l'intermédiaire des fibrés harmoniques (cf. section 1) notion introduite par Simpson sous une forme voisine dans [32].

Le résultat essentiel de Simpson [29,30,31], reposant en partie sur des résultats de Corlette [4], et surtout de Donaldson [6,7,8], est d'établir une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations linéaires du groupe fondamental d'une variété projective lisse, celle des fibrés plats, et celle des fibrés de Higgs semi-stables de classes de Chern nulles. Ceci se traduit, quand on fixe le rang r , par l'existence de trois espaces de modules grossiers $M_B(r)$, $M_{DR}(r)$ et $M_{Dol}(r)$ associés à de tels objets ; ces variétés algébriques ont même ensemble de points fermés, mais les structures algébriques diffèrent. Les deux premiers espaces de modules ont cependant même espace analytique sous-jacent : déjà, pour $r = 1$, on retrouve les exemples classiques de Serre de variétés algébriques analytiquement isomorphes, mais non isomorphes. La construction de ces variétés de modules, esquissée dans la section 5, fait appel, comme on en a maintenant l'habitude, à la théorie de Mumford, que nous rappellerons brièvement. Sur la variété $M_{Dol}(r)$ le groupe \mathbf{C}^* agit de manière naturelle ; les points fixes de cette action correspondent à des représentations d'un type particulier, appelées variations de structures de Hodge. Ces points fixes sont très utiles pour obtenir des renseignements sur la topologie de la variété de modules : nous en donnons un exemple sur les courbes dans la section 7.

Nous n'aborderons pas ici toute la partie du travail de Simpson relatif aux variétés kählériennes éventuellement non compactes [29,34]. Dans ce cadre, on rencontre bien sûr des difficultés supplémentaires, alors que si l'on se limite aux variétés projectives, il n'y a pas de problèmes majeurs pour étendre la méthode de Donaldson : on travaille essentiellement par récurrence sur la dimension, à condition d'avoir au préalable généralisé les théorèmes de restriction de Mehta et Ramanathan (cf. section 4).

Sommaire

1. Fibrés harmoniques
2. Fibrés de Higgs
3. Fibrés plats
4. Restriction à une hypersurface
5. Les espaces de modules M_B, M_{Dol}, M_{DR}
6. L'action de \mathbf{C}^*
7. Fibrés de Higgs sur les courbes

Dans tout l'exposé, variété algébrique signifie schéma de type fini sur \mathbf{C} ; par points, on entend les points fermés. Soit X une variété projective lisse, de dimension n , munie d'un fibré inversible très ample $\mathcal{O}(1)$.

1. Fibrés harmoniques

On considère sur X un fibré vectoriel complexe E de classe C^∞ , de rang r , muni d'une métrique hermitienne \langle, \rangle ; on désigne par $A^i(E)$ l'espace des formes différentielles de classe C^∞ , de degré i à valeurs dans E . Une connexion de classe C^∞ sur E est un opérateur \mathbf{C} -linéaire $D : A^0(E) \rightarrow A^1(E)$ satisfaisant à la règle de Leibniz $D(fs) = (df)s + fDs$ pour $s \in A^0(E)$ et f fonction de classe C^∞ sur X . Etant donnée une telle connexion D , on peut lui en associer une autre, notée \check{D} , de sorte que l'on ait la formule, pour s et t sections de classe C^∞ de E

$$d \langle s, t \rangle = \langle Ds, t \rangle + \langle s, \check{D}t \rangle$$

où, dans le membre de droite, \langle, \rangle désigne l'extension aux formes différentielles de la forme hermitienne. Les connexions constituent un espace affine \mathcal{A} modelé sur l'espace vectoriel $A^1(\text{End}(E))$ des formes différentielles de degré 1 à valeurs dans le fibré des endomorphismes de E , et l'application $D \mapsto \check{D}$ est une involution affine de \mathcal{A} dont l'application linéaire tangente est donnée par $\omega \mapsto -\omega^*$, où ω^* est la forme différentielle adjointe de ω . La connexion D est dite *hermitienne* si elle est invariante par cette involution. Toute connexion D s'écrit de manière unique $D = \nabla + \alpha$ où ∇

est une connexion hermitienne, et α une forme différentielle à valeurs dans $End(E)$ telle que $\alpha = \alpha^*$.

On appelle *fibré harmonique* sur X un triplet (E, D, \langle, \rangle) formé d'un tel fibré vectoriel, d'une connexion D et d'une métrique satisfaisant aux deux conditions d'intégrabilité suivantes :

(1) *la connexion D est intégrable .*

Ceci signifie que la forme différentielle de courbure $F_D \in A^2(End(E))$, définie par $F_D(s) = D^2(s)$ pour $s \in A^0(E)$, est nulle. Au couple (E, D) est alors associé un système local d'espaces vectoriels complexes de dimension r défini par le faisceau des sections locales (dans la topologie usuelle) annihilées par D ; c'est aussi ce qu'on appelle fibré vectoriel plat de rang r . Un point x étant choisi dans X , ce fibré provient d'une représentation du groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ de la variété X dans $GL(r, \mathbf{C})$, bien définie à conjugaison près.

Pour énoncer la deuxième condition d'intégrabilité, on décompose D suivant la forme suivante : $D = \nabla + \alpha$, où ∇ est une connexion hermitienne, et où α est une forme différentielle de degré 1, à valeurs dans le fibré des endomorphismes $End(E)$, auto-adjointe par rapport à la métrique hermitienne. On décompose ∇ et α selon leur type :

$$\nabla = \partial + \bar{\partial} \quad ; \quad \alpha = \theta + \theta^*,$$

où ∂ et $\bar{\partial}$ sont de type (1,0) et (0,1) respectivement, et où θ est une forme différentielle de type (1,0) à valeurs dans le fibré des endomorphismes de E . A un tel couple (E, D) on associe l'opérateur différentiel $D'' : A^0(E) \rightarrow A^1(E)$ défini par $D'' = \bar{\partial} + \theta$. La deuxième condition s'énonce :

(2) *la forme différentielle $G \in A^2(End(E))$ définie par $G = D''^2$ est nulle .*

En décomposant la forme différentielle G en types, on voit que cette condition est équivalente à $\bar{\partial}^2 = 0$, $\bar{\partial}\theta = 0$ et $\theta \wedge \theta = 0$. Ainsi, l'opérateur $\bar{\partial}$ définit sur E une structure de fibré vectoriel holomorphe, et θ est alors une

forme différentielle holomorphe sur X , à valeurs dans $End(E)$, satisfaisant à la condition $\theta \wedge \theta = 0$.

2. Fibrés de Higgs

On appelle *fibré de Higgs* sur X la donnée d'un couple (E, θ) , où E est un fibré vectoriel algébrique sur X , et θ une forme différentielle régulière de degré 1 à valeurs dans le fibré des endomorphismes $End(E)$, satisfaisant à l'identité $\theta \wedge \theta = 0$. On pourra, si l'on veut, considérer cette forme différentielle comme un morphisme $\theta : E \rightarrow \Omega^1(E)$ de E dans le fibré $\Omega^1(E)$ des formes différentielles de degré 1 à valeurs dans E .

Puisque la variété X est projective, en vertu des théorèmes de comparaison de Serre, il revient au même de travailler avec les fibrés vectoriels algébriques ou les fibrés vectoriels holomorphes sur X . Ainsi, à tout fibré harmonique sur X on associe d'après le paragraphe précédent un fibré de Higgs de classes de Chern nulles. La question qui se pose immédiatement est la réciproque : dans quelles conditions un tel fibré de Higgs de classes de Chern nulles provient-il d'un fibré harmonique ? La réponse à cette question est en fait un cas particulier d'un énoncé plus général, concernant l'existence de métrique de Yang et Mills sur le fibré de Higgs .

Etant donné un fibré de Higgs (E, θ) de rang r et une métrique hermitienne $H = \langle, \rangle$ sur E , il existe une unique connexion hermitienne ∇ sur E dont la partie de type $(0,1)$ coïncide avec l'opérateur $\bar{\partial}$ de Dolbeault, et on pose $\alpha = \theta + \theta^*$. On considère alors la connexion $D = \nabla + \alpha$, dont la forme de courbure $F = D^2$ s'appellera forme de courbure de la métrique hermitienne H . Bien entendu, si les classes de Chern sont quelconques, il est hors de question d'espérer que l'on puisse obtenir par un choix convenable de H que la courbure F soit nulle . Cependant, on peut essayer de minimiser la courbure. Pour mesurer cette courbure, on munit le fibré des endomorphismes $End(E)$ de la métrique hermitienne $(f, g) \mapsto trace fg^*$, pour f et g appartenant à une même fibre de $End(E)$. La forme quadratique associée est notée $f \mapsto |f|^2$; la norme L^2 de la courbure est alors

définie par

$$\| F \|^2 = \int_X | F |^2 \frac{\omega^n}{n!}.$$

Par hypothèse, on dispose sur X d'un fibré très ample $\mathcal{O}(1)$; on désigne par h sa classe de Chern, et par ω la forme de Chern d'une métrique hermitienne sur ce fibré . Comme sur toute variété kählérienne, on dispose sur l'algèbre des formes différentielles extérieurs des opérateurs $*$, C , L , Λ ; rappelons (cf. A. Weil [37]) que C est définie par

$$C\varphi = (-1)^{a-b}\varphi$$

pour toute forme différentielle φ de type (a, b) .

On décompose la forme de courbure F de la connexion D associée sous la forme

$$F = \frac{1}{r}\text{tr}(F)id_E + F^\perp$$

où $\text{tr}(F)$ désigne la trace de F , et où F^\perp est une forme différentielle de degré 2 à valeurs dans $\text{End}(E)$ de trace nulle . On désigne par F_0 (resp. F_0^\perp) la partie primitive de F (resp. F^\perp), et on écrit la décomposition orthogonale $F = F_0 + \frac{c_2}{n}\Lambda(F)$ (resp. $F^\perp = F_0^\perp + \frac{c_2}{n}\Lambda(F^\perp)$). Enfin, soient c_i les classes de Chern de E . Ces classes de Chern fournissent des contraintes topologiques qui limitent les valeurs possibles de $\| F \|^2$, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1. — *On a les formules*

$$(c_2 - \frac{c_1^2}{2}).h^{n-2} = \frac{1}{8\pi^2}(\| F_0 \|^2 - \frac{1}{n} \| \Lambda(F) \|^2)$$

$$(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2).h^{n-2} = \frac{1}{8\pi^2}(\| F_0^\perp \|^2 - \frac{1}{n} \| \Lambda(F^\perp) \|^2)$$

Démonstration. On traite seulement le cas $n=2$; les modifications à apporter pour n supérieur sont mineures. Considérons la décomposition de la forme de courbure $D = \nabla + \alpha$, où ∇ est la connexion hermitienne. La courbure de D s'écrit $F = A + B$, avec $A = F_\nabla + \alpha \wedge \alpha$ et $B = \nabla(\alpha)$; la

forme différentielle A est anti-hermitienne, et de type (1,1), tandis que B est hermitienne (c'est-à-dire auto-adjointe), somme de formes différentielles de type (2,0) et (0,2). Par définition des classes de Chern, on a dans $H^4(X, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$

$$\begin{aligned} c_2 - \frac{c_1^2}{2} &= \frac{1}{8\pi^2} \int_X \text{tr}(F^2) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_X \text{tr}(BB^* - AA^*) \end{aligned}$$

Ecrivons $A = A_0 + A_1$, où A_0 est la partie primitive (donc anti-invariante par $*$) et A_1 la partie orthogonale (donc invariante par $*$). Alors $F_0 = A_0 + B$, et $A_1 = \frac{\omega}{n} \Lambda(F)$. De la définition de la norme des formes différentielles auto-adjointes $\|\varphi\|^2 = \int_X \varphi \wedge * \varphi$ on tire

$$\begin{aligned} c_2 - \frac{c_1^2}{2} &= \frac{1}{8\pi^2} (\|B\|^2 + \|A_0\|^2 - \|A_1\|^2) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} (\|F_0\|^2 - \frac{1}{n} \|\Lambda(F)\|^2) \end{aligned}$$

La démonstration de la seconde formule est identique, en remplaçant F par F^\perp , compte-tenu de la formule

$$c_2 - \frac{r-1}{2r} c_1^2 = \frac{1}{8\pi^2} \int_X \text{tr}(F^\perp)^2.$$

Métriques de Yang et Mills

Une métrique hermitienne sur E est dite de *Yang et Mills* si

- (1) la trace de F est harmonique
- (2) $\Lambda(F^\perp) = 0$.

La première condition est équivalente à $\Lambda(\text{tr}(F)) = \text{cte}$; dire que la métrique est de Yang et Mills signifie donc que la forme de courbure F s'écrit

$$F = i\lambda \omega id_E + F_0$$

où F_0 est la partie primitive de F , et λ un réel. Dans l'espace des métriques hermitiennes, la fonctionnelle $\|F\|^2$ est minimum aux points correspondant aux métriques de Yang et Mills. Le proposition ci-dessus impose des conditions topologiques pour l'existence de telles métriques :

Corollaire. — Soit (E, θ) un fibré de Higgs sur X , muni d'une métrique de Yang et Mills.

(1) on a

$$\left(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2\right).h^{n-2} \geq 0$$

(2) Si les classes de Chern c_1 et c_2 satisfont aux conditions suivantes :

$$c_1.h^{n-1} = 0 \quad ; \quad \left(c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right).h^{n-2} = 0$$

la connexion associée D est plate. En particulier, toutes les classes de Chern sont nulles.

L'assertion (1) est la généralisation de l'inégalité classique de Bogomolov [2] et de Lübke [21] pour les fibrés stables. Sous les conditions de l'assertion (2), la métrique de Yang et Mills donnée définit sur (E, θ) une structure de fibré harmonique ce qui répond donc à la question posée en début de section. Le résultat qui suit explique les relations entre fibré de Higgs μ -stables et métriques de Yang et Mills.

Faisceaux de Higgs

Pour tout faisceau algébrique cohérent F sans torsion sur X , de rang r et de classes de Chern c_i on définit le degré et la pente de F par

$$\deg(F) = c_1.h^{n-1} \quad ; \quad \mu(F) = \frac{\deg(F)}{r}$$

Un *faisceau de Higgs* de rang r sur X est un couple (E, θ) formé d'un faisceau algébrique cohérent E et d'un morphisme $\theta : E \rightarrow \Omega^1 \otimes E$ tel que $\theta \wedge \theta = 0$; bien entendu, à tout fibré de Higgs on associe un faisceau de Higgs en considérant le faisceau des sections régulières. Un sous-faisceau

cohérent $E' \subset E$ sera dit sous-faisceau de Higgs si $\theta(E') \subseteq \Omega^1 \otimes E'$. On dit qu'un faisceau de Higgs (E, θ) est μ -semistable (resp. μ -stable) si pour tout sous-faisceau de Higgs E' de rang r' , avec $0 < r' < r$, on a

$$\mu(E') \leq \mu(E) \quad ; \quad (\text{resp. } <).$$

Le résultat fondamental de C.Simpson donne une caractérisation des fibrés de Higgs sur lesquels existent une métrique de Yang et Mills.

Théorème 1 (Simpson).— *Soit (E, θ) un fibré de Higgs. Il existe sur (E, θ) une métrique de Yang et Mills si et seulement si E est somme directe de sous-fibrés de Higgs μ -stable de même pente μ . Cette métrique est unique à automorphismes près.*

Esquisse de démonstration

Soit (E, θ) un fibré de Higgs, muni d'une métrique de Yang et Mills $H = \langle, \rangle$, et considérons un sous-faisceau de Yang et Mills E' , dont on se propose de majorer la pente. On peut supposer que le quotient $E'' = E/E'$ est sans torsion, de sorte que sur un ouvert de Zariski U dont le complémentaire est de codimension ≥ 2 on a la suite exacte de fibrés vectoriels algébriques

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0 \quad (1)$$

La métrique donnée sur E permet, sur l'ouvert U , de scinder cette suite exacte, en tant que fibrés vectoriels de classe C^∞ : $E = E' \oplus E''$; cette somme directe est orthogonale, et dans cette décomposition, les opérateurs $\bar{\partial}$ et θ s'écrivent sous forme matricielle

$$\bar{\partial} = \begin{pmatrix} \bar{\partial}_{E'} & \beta^* \\ 0 & \bar{\partial}_{E''} \end{pmatrix} \quad ; \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta' & \gamma \\ 0 & \theta'' \end{pmatrix}$$

où $\beta \in A^{1,0}(U, \text{Hom}(E'', E'))$ et $\gamma \in A^{1,0}(U, \text{Hom}(E', E''))$ sont des formes différentielles de types $(1,0)$ à valeurs dans le fibré des homomorphismes $\text{Hom}(E', E'')$ et $\text{Hom}(E'', E')$ respectivement et où β^* désigne l'adjointe

de β . Désignons par $D_{E'}$ et $D_{E''}$ les connexions associées aux fibrés de Higgs (E', θ') et (E'', θ'') respectivement, munis des métriques hermitiennes induites sur l'ouvert U . La connexion sur E a alors pour matrice

$$D = \begin{pmatrix} D_{E'} & \beta^* + \gamma \\ -\beta + \gamma^* & D_{E''} \end{pmatrix}$$

Désignons par F' et F'' les formes de courbure des fibrés de Higgs E' et E'' ; la forme de courbure F de la connexion D sur le fibré E est donnée au-dessus de U par la matrice

$$F = \begin{pmatrix} F' + (\beta^* + \gamma) \wedge (\gamma^* - \beta) & D(\beta^* + \gamma) \\ D(\gamma^* - \beta) & F'' + (\gamma^* - \beta) \wedge (\beta^* + \gamma) \end{pmatrix}$$

Dans cette formule, on a encore noté D les connexions induites sur les fibrés d'homomorphismes $Hom(E', E'')$ et $Hom(E'', E')$ et leur prolongement aux formes différentielles. Puisque la métrique est de Yang et Mills, on a $\frac{i}{2\pi} F \cdot \omega^{n-1} = \frac{1}{\deg(X)} \mu \omega^n id_E$. De la matrice ci-dessus, il résulte que

$$\frac{i}{2\pi} (F' + \gamma \wedge \gamma^* - \beta^* \wedge \beta) \cdot \omega^{n-1} = \frac{1}{\deg(X)} \mu \omega^n id_{E'}.$$

En prenant la trace, et après intégration sur l'ouvert U on obtient, r' désignant le rang de E'

$$\mu' + \frac{1}{2\pi r'} \int_U i \operatorname{tr}(\gamma \wedge \gamma^* - \beta^* \wedge \beta) \cdot \omega^{n-1} = \mu;$$

l'intégrale figurant ci-dessus est celle d'une fonction positive; la formule dit en particulier que cette intégrale a un sens. Il en résulte que $\mu' \leq \mu$, avec égalité si et seulement si $\beta = \gamma = 0$. Dans ce cas, on obtient un scindage holomorphe de la suite exacte (1), scindage qui, du fait que le complémentaire de U est de codimension ≥ 2 s'étend à X . Ainsi, le fibré de Higgs (E, θ) est somme directe de sous-fibrés de Higgs de même pente μ , et chacun des facteurs porte encore une métrique de Yang et Mills, ce qui permet de recommencer la construction jusqu'à obtenir des facteurs qui soient μ -stables.

Formulaire

C'est bien entendu la réciproque qui est la partie la plus difficile. Nous avons d'abord besoin d'un formulaire. Si (E, θ) est un fibré de Higgs, et K une métrique hermitienne sur E , on note $D = D_K$ la connexion associée, et on écrit $D = D' + D''$. On pose $D^c = C^{-1} \check{D} C$, c'est-à-dire $D^c = i(D'' - D')$. Les identités classiques de géométrie kählérienne s'étendent à cette situation : on peut par exemple calculer l'adjoint formel pour les opérateurs D, D', D'' :

$$\begin{aligned} D^* &= - *D* \\ &= [\Lambda, D^c] \\ D'^* &= i[\Lambda, D''] \quad ; \quad D''^* = -i[\Lambda, D'] \end{aligned} \quad (2)$$

Considérons, sur le fibré vectoriel E , une autre métrique hermitienne H ; on écrit $H = Kh$, où h est un automorphisme de E , hermitien par rapport à K ; les opérateurs différentiels D'_H et D'_K , relatifs aux deux métriques H et K et leurs formes de courbures sont liés par les formules

$$D'_H = D'_K + h^{-1} D'_K h \quad (3)$$

$$F_H = F_K + h^{-1} (D'' D'_K h - D'' h h^{-1} D'_K h) \quad (4)$$

Compte-tenu de la formule (2), le laplacien Δ'_K associé à l'opérateur D'_K sur le fibré des endomorphismes de E , est donné par $\Delta'_K(h) = D'^*_K D'_K h = i\Lambda D'' D'_K h$. De la formule (3) on tire alors

$$\Delta'_K(h) = ih\Lambda(F_H - F_K) + i\Lambda(D'' h h^{-1} D'_K h) \quad (5)$$

Champs de Yang et Mills

On se place sur la "variété" $Met(E)$ des métriques hermitiennes sur E , et on considère la fonctionnelle de Yang et Mills, définie par $H \mapsto \|F_H\|^2$. Une métrique de Yang et Mills devant minimiser cette fonctionnelle, on est

amené à en rechercher les points critiques. Si on identifie l'espace tangent en H à l'espace vectoriel $Herm_H(E)$ des endomorphismes hermitiens de E pour la métrique H , on voit que la dérivée de cette fonctionnelle est donnée, en vertu de la formule (4) par l'application linéaire $Herm_H(E) \mapsto \mathbf{R}$ définie par $\eta \mapsto 2\Re \langle D''D'_H\eta, F_H \rangle_H$, où \langle, \rangle_H désigne le produit scalaire associé à la métrique L^2 définie sur $A^2(Hom(E, E))$ par la métrique H . Compte-tenu de la formule (2) et de l'identité de Bianchi $D'_H(F_H) = 0$, on obtient que cette dérivée est donnée par $\eta \mapsto \Re \langle \eta, 2i\Delta'_H \wedge F_H \rangle_H$. Ainsi, le "champ de vecteurs" $H \mapsto 2i\Delta'_H \wedge F_H$ joue le rôle d'un champ de gradient pour la fonctionnelle de Yang et Mills. On est amené à suivre les trajectoires $t \mapsto H_t$ du champ de de vecteurs $H \mapsto -i\Delta'_H \wedge F_H$, c'est-à-dire à résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$H^{-1} \frac{\partial H}{\partial t} + i\Delta'_H \wedge F_H = 0$$

Cette fonctionnelle décroît le long de ces trajectoires. Cette équation est du quatrième ordre ; tout comme Donaldson pour les fibrés stables, Simpson choisit ici de la remplacer par l'équation de la chaleur

$$H^{-1} \frac{\partial H}{\partial t} = -i\Delta F_H \tag{6}$$

dont l'étude est plus facile.

L'équation de la chaleur

L'équation (6) se casse en deux dans la somme directe $End(E) = Cid_E \oplus End_0(E)$, où $End_0(E)$ est le fibré des endomorphismes de E de trace nulle. Multiplier H par une fonction réelle strictement positive permet de changer la partie centrale de F_H : on lui ajoute en effet une forme s'écrivant $\partial\bar{\partial}\varphi$, où φ est une fonction de classe C^∞ ; la partie centrale de F_H étant de type (1,1), par un choix convenable de cette fonction, on peut obtenir une fonction harmonique pour la partie centrale de F_H . On se contentera donc d'étudier les trajectoires $t \mapsto H_t$ partant d'un point $H_0 = K$, et telles que $\det(H_t K^{-1}) = 1$. Pour de telles trajectoires, l'équation (6) s'écrit

$$H^{-1} \frac{\partial H}{\partial t} = -i\Delta F_H^\perp \tag{7}$$

Si on pose $H_t = Kh_t$, l'équation (7) est équivalente à l'équation suivante, compte-tenu de (5)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta'_K\right)h = -ih(\Lambda F_K^\perp) + iD''h h^{-1}D'_K h \quad (8)$$

C'est une équation non linéaire, de type parabolique. Ni l'existence, ni l'unicité des solutions de (7), avec conditions initiales imposées, ne sont évidentes, et une part importante du travail consiste à montrer le résultat suivant :

Proposition 2. — *L'équation de la chaleur (7) a, sur $[0, \infty[$, une solution et une seule $t \mapsto H_t$ telle que $\det H_t K^{-1} = 1$ et $H_0 = K$.*

Posons $e_t = \Lambda F_{H_t}^\perp$, et désignons par $|e|^2 = -\text{trace } e^2$ la fonction donnant le carré de la norme (relative à H_t) en chaque point de X . Un calcul facile ([29], lemme (6.1)) montre que le long de la trajectoire, on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta'\right) |e|^2 = -|D''e|^2$$

Il en résulte que $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta'\right) |e|^2 \leq 0$. Il résulte du principe du maximum ([16], p. 101) que $t \mapsto \text{Sup}_X |e_t|$ décroît le long des trajectoires. Le point essentiel du travail de Simpson consiste alors à construire une fonctionnelle auxiliaire $M : \text{Met}(E) \times \text{Met}(E) \rightarrow \mathbf{R}$ sur l'espace des paires de métriques, satisfaisant aux propriétés suivantes :

$$\frac{d}{dt} M(H_t, K) = -2\|e_t\|_{H_t}^2 \quad (9)$$

Si (E, θ) est stable, il existe des constantes A et B strictement positives telles que pour tout endomorphisme hermitien s (relativement à la métrique K) de trace nulle on ait la majoration

$$\sup_X |s|_K \leq A + B M(K e^s, K) \quad (10)$$

Il en résulte de (9) que la fonction $t \mapsto M(H_t, K)$ est décroissante le long des trajectoires, et de (10) qu'elle est bornée inférieurement. Si on écrit

pour une telle trajectoire $H_t = Ke^{s_t}$, avec s_t endomorphisme hermitien de trace nulle les s_t sont alors uniformément bornés d'après (10), et e_t l'est d'après ce que l'on a vu plus haut. Comme dans Donaldson ([7], lemme 19) s_t reste bornée dans l'espace de Sobolev L_2^p . Le fait que $M(H_t, K)$ est borné inférieurement entraîne que l'on peut trouver une suite de réels $t_i \rightarrow \infty$ telle que $\lim_{i \rightarrow \infty} \|e_{t_i}\|_{L^2} = 0$. On peut supposer que la suite s_{t_i} converge faiblement vers s_∞ dans L_2^p ; on aura alors pour $h_\infty = e^{s_\infty}$, d'après la formule (5) :

$$\Delta'_K h_\infty = -h_\infty e_0 + i\Lambda(D''h_\infty h_\infty^{-1} D'_K h_\infty)$$

Par régularité elliptique, on obtient alors que h_∞ est en fait de classe C^∞ , et définit une métrique hermitienne $H_\infty = Ke^{s_\infty}$ telle que $\Lambda F_{H_\infty}^\perp = 0$. Ainsi, H_∞ est de Yang et Mills.

La construction de $M(H, K)$

La construction de $M(H, K)$ est analogue à celle de Donaldson [7]; elle est liée à la description des représentants des classes de Chern associés à des métriques hermitiennes, due à Bott et Chern [3]. Donaldson construit des classes caractéristiques, dites secondaires, $R(H, K) \in A^{1,1}(X)/\text{Im } \partial + \text{Im } \bar{\partial}$ satisfaisant aux conditions suivantes

- (a) $R(H, H) = 0$, et $R(H, K) = R(H, J) + R(J, K)$ pour toutes métriques hermitiennes H, J, K ;
- (b) Pour tout chemin $t \mapsto H_t$ de classe C^1 dans l'espace des métriques, on a

$$\frac{d}{dt} R(H_t, K) = 2i \text{tr} \left(H^{-1} \frac{\partial H}{\partial t} \cdot F_H \right)$$

- (c) $i\partial\bar{\partial}R(H, K) = \text{tr}(F_K^2) - \text{tr}(F_H^2)$

La forme différentielle $R(H, K)$ s'obtient en intégrant la relation (b) sur un chemin de classe C^1 joignant H à K ; la propriété (a) permet de vérifier que le résultat ne dépend pas, modulo $\text{Im } \partial + \text{Im } \bar{\partial}$, du chemin choisi. La fonctionnelle considérée est alors définie par

$$M(H, K) = \int_X R(H, K) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}$$

Remarquons que même si $R(H, K)$ n'est définie que modulo $\text{Im}\partial + \text{Im}\bar{\partial}$, cette formule a bien un sens. Il résulte de la propriété (b) que le long d'une trajectoire H_t telle que $\det H_t^{-1}K = 1$ et $H_0 = K$ on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}M(H_t, K) &= 2 \int_X \text{tr}(\Lambda F_{H_t}^\perp \cdot F_{H_t}) \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= -2\|e_t\|^2 \end{aligned}$$

Ceci donne la formule (9). La démonstration de l'estimation (10) est le coeur du problème. Alors que la méthode de Donaldson [6,7] consistait à se restreindre à une section hyperplane générale de degré assez grand, ce qui conserve les propriétés de stabilité (voir section 4), Simpson s'inspire des travaux de Uhlenbeck et Yau [36] : il construit directement, si cette majoration n'était pas vraie, un sous-faisceau déstabilisant pour (E, θ) ([29], section 5). Ceci lui permet d'obtenir une variante du théorème 1 pour certaines variétés kählériennes non compactes.

L'unicité

Soient (E, θ) un fibré de Higgs, et H et K deux métriques de Yang et Mills. Il résulte de la formule (5) que l'endomorphisme $h = HK^{-1}$ satisfait à l'équation

$$\frac{1}{2}\Delta(\text{tr } h) = -|D''h|_{h^{-\frac{1}{2}}}^2 \leq 0$$

Par conséquent, la fonction $\text{tr } h$ est plurisousharmonique ; le principe du maximum montre qu'elle est constante et on a alors $D''h = 0 = D'h$. Ainsi h est un endomorphisme holomorphe de E qui commute avec l'opérateur θ ; il en est de même de $h^{\frac{1}{2}}$ qui définit alors un isomorphisme entre les fibrés harmoniques (E, θ, H) et (E, θ, K) . Bien sûr, si le fibré de Higgs (E, θ) est μ -stable, on trouve une homothétie de rapport constant. Ce raisonnement figure déjà, pour les fibrés stables sur une surface de Riemann, dans [9].

3. Fibrés plats

A tout fibré harmonique (E, D, \langle, \rangle) on associe le fibré plat (E, D) . Réciproquement, étant donné un fibré plat (E, D) sur la variété X , à quelle condition existe-t'il une métrique hermitienne $H = \langle, \rangle$ sur E telle le triplet (E, D, \langle, \rangle) soit harmonique, autrement dit que la condition d'intégrabilité (2) (section 1) soit satisfaite? La forme différentielle $G = D''^2$ s'appelle *pseudocourbure* de la métrique hermitienne. Si la condition d'intégrabilité $G = 0$ est satisfaite, on dira aussi que la métrique est harmonique. Cette condition est en fait satisfaite dès que $\Lambda G = 0$, condition tout à fait analogue à la condition exigée dans la section précédente des métriques de Yang et Mills, comme le prouve le lemme suivant, dû à Deligne :

Lemme 2 (Deligne).— *Soit E un fibré vectoriel complexe sur X , muni d'une connexion plate D . Une métrique hermitienne sur E est harmonique dès que la pseudocourbure G satisfait à l'équation*

$$\Lambda(G) = 0$$

Démonstration. On utilise les mêmes notations que dans le formulaire de la section (2); les formules (2) n'utilisent pas de condition d'intégrabilité. Par hypothèse, on a $D^2 = (D^c)^2 = 0$. Par définition, $D'' = \frac{1}{2}(D - iD^c)$, d'où il découle que $G = -\frac{i}{4}(DD^c + D^cD)$. On a alors les identités de Bianchi : $D(G) = D^c(G) = 0$. Considérons la décomposition de D en types (1,0) et (0,1) : $D = d' + d''$, avec

$$d' = \partial + \theta \quad ; \quad d'' = \bar{\partial} + \theta^*$$

Du fait que la connexion est plate, on tire $d''^2 = d''^2 = d'd'' + d''d' = 0$. D'autre part, si on pose $\theta - \theta^* = 2i\beta$, on a

$$D^c = i(d'' - d' + 4i\beta)$$

et par suite $G = iD(\beta)$. Pour la métrique induite sur les formes différentielles, on a alors

$$\begin{aligned} \|G\|^2 &= i \int_X (D(\beta), G) \frac{\omega^n}{n!} \\ &= i \int_X (\beta, D^*(G)) \frac{\omega^n}{n!} \end{aligned}$$

Or, l'identité de Bianchi et l'hypothèse $\Lambda(G) = 0$ entraînent $D^*(G) = [\Lambda, D^c](G) = 0$. Par suite $\|G\| = 0$. D'où l'énoncé.

Le théorème suivant, dû à Donaldson [8] et Corlette [4], est la généralisation d'un résultat de Eells et Sampson [10] sur les applications harmoniques ; le lien se fait en observant que la donnée d'un fibré harmonique de rang r sur X est équivalente à la donnée d'une représentation du groupe fondamental de X dans $GL(r, \mathbf{C})$ et d'une application harmonique du revêtement universel de X à valeurs dans $GL(n, \mathbf{C})/U(n)$, équivariante sous l'action du groupe de Poincaré. Un fibré plat est dit *irréductible* s'il ne contient pas de sous-fibré plat non nul de rang strictement inférieur ; en termes de représentation du groupe fondamental, ceci signifie que la représentation associée est irréductible. Une somme directe de fibrés plats irréductibles est dite *semi-simple*.

Théorème 2.— *Il existe sur un fibré plat une métrique harmonique si et seulement si il est semi-simple.*

Cet énoncé se démontre par des méthodes voisines de celles du théorème 1. Naturellement, on a aussi l'unicité à isomorphisme près pour la métrique.

Complexes de de Rham et de Dolbeault

Étant donné un fibré plat (E, D) , on définit le complexe de de Rham $(A^\cdot(E), D)$:

$$0 \rightarrow A^0(E) \xrightarrow{D} A^1(E) \xrightarrow{D} \dots$$

en prolongeant la connexion D aux formes différentielles ; sa cohomologie, notée $H_{DR}^q(E)$ s'identifie à la cohomologie de X à valeurs dans le faisceau (pour la topologie usuelle) des sections localement plates de E . De même, étant donné un fibré de Higgs (E, θ) les espaces vectoriels de cohomologie du complexe $(A^\cdot(E), D'')$:

$$0 \rightarrow A^0(E) \xrightarrow{D''} A^1(E) \xrightarrow{D''} \dots$$

appelé complexe de Dolbeault, seront noté $H_{Dol}^q(E)$; si on considère le complexe $(\mathcal{A}(E), D'')$ des faisceaux de formes différentielles de classe C^∞ à valeurs dans E , on obtient une résolution fine du complexe $(\Omega(E), \theta)$ des formes différentielles holomorphes à valeurs dans E ; par suite, les groupes de cohomologie de Dolbeault $H_{Dol}^q(E)$ s'identifient aux groupes d'hypercohomologie $\mathbf{H}^q(X, (\Omega(E), \theta))$ de X à valeurs dans le complexe ci-dessus. Lorsque l'on dispose d'un fibré harmonique, on peut à la fois considérer la cohomologie de de Rham et la cohomologie de Dolbeault. L'énoncé suivant généralise un énoncé bien connu en géométrie kählérienne :

Lemme 3.— *Soit E un fibré harmonique . On a un isomorphisme canonique*

$$H_{DR}^q(E) \simeq H_{Dol}^q(E)$$

Démonstration. On considère les laplaciens Δ, Δ' et Δ'' associés aux opérateurs différentiels D, D' et D'' respectivement, opérant sur les espaces de formes différentielles à valeurs dans E . Comme dans le cas des formes différentielles scalaires sur une variété kählérienne, les formules (2) et les conditions d'intégrabilité définissant les fibrés harmoniques fournissent les identités $\Delta = 2\Delta' = 2\Delta''$. Le lemme résulte alors du fait que chaque classe de cohomologie de $H_{DR}^q(E)$ (resp. $H_{Dol}^q(E)$) se représente par une forme Δ -harmonique (resp. Δ'' -harmonique).

Soient E' et E'' deux fibrés harmoniques. Alors le fibré des homomorphismes $Hom(E'', E')$ est lui-même un fibré harmonique, et on a d'après le lemme ci-dessus $H_{DR}^q(Hom(E'', E')) \simeq H_{Dol}^q(Hom(E'', E'))$. Si $q = 0$, cette identité signifie que les morphismes plats s'identifient aux morphismes de fibrés de Higgs. Si $q=1$, l'espace vectoriel $H_{DR}^1(Hom(E'', E'))$ classe les extensions de fibrés plats $0 \rightarrow E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \rightarrow 0$ avec f et g plats; de même, l'espace $H_{Dol}^1(Hom(E'', E'))$ classe les extensions $0 \rightarrow E' \xrightarrow{i} F \xrightarrow{j} E'' \rightarrow 0$, où F est un fibré de Higgs et où i et j sont des morphismes de Higgs. Plus généralement, si on considère un fibré plat E , il a une filtration $0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_\ell = E$ telle que chaque $gr_i = E_i/E_{i-1}$

soit un fibré plat irréductible. Chacun des fibrés gr_i provient d'un fibré harmonique d'après le théorème 2 ; une généralisation facile de ce qui précède montre que la filtration ci-dessus peut être considérée comme une filtration de fibrés de Higgs. Ceci conduit finalement au résultat suivant :

Théorème 3.— *La catégorie des fibrés plats est équivalente à celle des fibrés de Higgs possédant une filtration dont le gradué est somme directe de fibrés de Higgs μ -stables dont les classes de Chern satisfont aux conditions suivantes :*

$$c_1 \cdot h^{n-1} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{c_1^2}{2} - c_2\right) \cdot h^{n-2} = 0$$

Dans la section suivante, on va en fait montrer que l'on obtient tous les fibrés de Higgs μ -semi-stables dont les classes de Chern satisfont aux mêmes conditions (cf. corollaire 1 du théorème 4).

4. Restriction à une hypersurface

Il s'agit d'étendre aux fibrés de Higgs les théorèmes de restriction de Mehta et Ramanathan [25,26] . Rappelons d'abord qu'étant donné un faisceau algébrique cohérent sans torsion F sur X on peut trouver une filtration de F :

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k = F$$

telle que (i) F/F_i soit sans torsion ; (ii) le gradué $gr_i = F_i/F_{i-1}$ soit μ -semi-stable, de pente μ_i strictement décroissante. Cette filtration est unique et s'appelle la filtration de Harder-Narasimhan de F . Dans la suite, on notera $\mu_1 = \mu_{max}(F)$, et $\mu_k = \mu_{min}(F)$. Il résulte du théorème de restriction de Mehta et Ramanathan [25], que l'on peut choisir d , aussi grand que l'on veut, et une hypersurface lisse $Y \in |\mathcal{O}_X(d)|$ telle que $F|_Y$ soit sans torsion et que la filtration de Harder-Narasimhan de $F|_Y$ coïncide avec $F_i|_Y$.

Etant donné un faisceau de Higgs (F, θ) , avec F sans torsion, on peut encore définir une filtration comme ci-dessus $0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k = F$, satisfaisant aux conditions (i) et (ii) ci-dessus, où l'on impose à F_i d'être

un sous-faisceau de Higgs, et où la semi-stabilité doit être prise au sens des faisceaux de Higgs. Cette filtration est encore unique, et sera appelée filtration de Harder-Narasimhan du faisceau de Higgs (F, θ) .

Etant donné un faisceau de Higgs (F, θ) et une sous-variété lisse Y de X , on définit un faisceau de Higgs $(F|_Y, \theta_Y)$ induit sur Y en considérant le morphisme composé

$$F|_Y \xrightarrow{\theta|_Y} \Omega_X^1|_Y \otimes F|_Y \rightarrow \Omega_Y^1 \otimes F|_Y$$

L'énoncé qui suit étend aux faisceaux de Higgs le théorème classique de Mehta et Ramanathan :

Proposition 3.— *Soient (F, θ) un faisceau de Higgs μ -semi-stable sur X , et d_0 un entier. Il existe un entier $d \geq d_0$ et une hypersurface $Y \in |\mathcal{O}_X(d)|$ tels que $(F|_Y, \theta_Y)$ soit μ -semi-stable .*

On a aussi bien sûr le même énoncé pour les faisceaux de Higgs μ -stables. La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 4.— *Soient $Y \in |\mathcal{O}_X(d)|$ une hypersurface générale et $0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_k$ la filtration de Harder-Narasimhan du faisceau de Higgs $G = F|_Y$. Alors G_i est invariant par l'opérateur $\theta|_Y : G \rightarrow \Omega_X^1|_Y \otimes G$, pourvu que d soit assez grand.*

Démonstration. En vertu de la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-d) \rightarrow \Omega_X^1|_Y \rightarrow \Omega_Y^1 \rightarrow 0$ il suffit de vérifier que $\text{Hom}(G_i, G/G_i(-d)) = 0$ si d est assez grand. Soit F_i la filtration de Harder-Narasimhan (ordinaire) de F , et supposons d et Y choisis en sorte que $F_i|_Y$ soit la filtration de Harder-Narasimhan (ordinaire) de $G = F|_Y$. On a alors $\mu_{\max}(G) = d\mu_{\max}(F)$ et $\mu_{\min}(G) = d\mu_{\min}(F)$ et d'autre part un calcul élémentaire de barycentres montre que, r désignant le rang de F ,

$$\mu_{\min}(G_i) - \mu_{\max}(G/G_i) \geq r(\mu_{\min}(G) - \mu_{\max}(G))$$

Or, $\mu(\mathcal{O}_Y(1)) = d \deg(X)$. On voit donc que si $d > r(\mu_{\max}(F) - \mu_{\min}(F))$, on aura $\text{Hom}(G_i, G/G_i(-d)) = 0$; d'où le lemme .

Dès lors, la démonstration de la proposition 3 se termine comme dans le cas classique de Mehta et Ramanathan [25;11;18] : si d est assez grand et Y suffisamment générale, la filtration de Harder-Narasimhan du faisceau de Higgs $G = F|_Y$ s'étend en une filtration de F par des sous-modules cohérents $(F_i)_{i=1,\dots,k}$ de F , croissante et telle que F/F_i soit sans torsion : le seul point qui reste à vérifier est de constater que les sous-faisceaux F_i sont des sous-faisceaux de Higgs, pourvu que d soit assez grand. D'après la suite exacte $0 \rightarrow \Omega_X^1(-d) \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^1|_Y \rightarrow 0$, et le lemme 4, il suffit de vérifier que $\text{Hom}(F_i, \Omega_X^1(-d) \otimes F/F_i) = 0$. Cet espace vectoriel sera nul dès que $d > \mu_{\max}(F/F_i) - \mu_{\min}(F_i) + \mu_{\max}(\Omega_X^1)$. Comme ci-dessus, $\mu_{\max}(F/F_i) - \mu_{\min}(F_i) \leq r(\mu_{\max}(F) - \mu_{\min}(F))$ de sorte que cette condition sera réalisée si l'on prend $d > r(\mu_{\max}(F) - \mu_{\min}(F)) + \mu_{\max}(\Omega_X^1)$. On a $\mu(G_i) = d\mu(F_i)$; ainsi le fibré de Higgs F ne peut être μ -semi-stable que si $k = 1$; par suite, $F|_Y$ est μ -semi-stable.

Etant donnés deux faisceaux de Higgs F et G , l'espace vectoriel des morphismes de Higgs de F dans G sera noté $\text{Hom}_{\text{Higgs}}(F, G)$. Par des arguments semblables à ceux que nous venons d'utiliser on obtient également :

Lemme 5.—*Soient d un entier, $Y \in |\mathcal{O}_X(d)|$ une hypersurface lisse et F et G deux faisceaux de Higgs sans torsion sur X . Si d est assez grand, le morphisme de restriction*

$$\text{Hom}_{\text{Higgs}}(F, G) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Higgs}}(F|_Y, G|_Y)$$

est injectif; si en outre G est réflexif, il est surjectif.

Lorsque F et G parcourent des familles limitées, on peut même choisir d aussi grand que l'on veut, indépendamment de F et G . L'injectivité est en fait déjà vraie pour l'espace des morphismes de modules. Pour vérifier la surjectivité, on relève un morphisme de Higgs $u : F|_Y \rightarrow G|_Y$ en un morphisme $v : F \rightarrow G$ en utilisant le fait que $\text{Ext}^1(F, G(-d)) = 0$ pour d assez grand (lemme de Severi), et on constate que le morphisme relevé v est en fait un morphisme de Higgs, par la même méthode que ci-dessus. Nous

allons utiliser ce résultat pour montrer que dans l'équivalence du théorème 3, on obtient en fait tous les fibrés μ -semi-stables de classes de Chern $c_i = 0$. Plus précisément :

Théorème 4.— Soit (F, θ) un faisceau de Higgs μ -semi-stable, dont les classes de Chern c_i satisfont aux conditions suivantes :

$$c_1.h^{n-1} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{c_1^2}{2} - c_2\right).h^{n-2} = 0$$

Alors

- (1) le bidual F^{**} est localement libre et possède une filtration par des sous-fibrés de Higgs dont le gradué est somme directe de fibrés de Higgs μ -stables de classes de Chern $c_i = 0$
- (2) le morphisme canonique $F \rightarrow F^{**}$ est un isomorphisme en dehors d'un fermé de codimension ≥ 3 .

Démonstration 1. Si X est une courbe, le résultat est trivial.

2. Si X est une surface, commençons par le cas où le faisceau de Higgs F est μ -stable. Le bidual F^{**} est alors localement libre et encore μ -stable, donc, d'après l'inégalité de Bogomolov et Lübke (corollaire de la proposition 1), on a pour F^{**} , $c_1.h = 0$ et $c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2 \geq 0$. La forme d'intersection étant négative sur l'orthogonal de h , on obtient $c_2 - \frac{c_1^2}{2} \geq -\frac{c_1^2}{2r} \geq 0$, et l'hypothèse entraîne alors $c_2 - \frac{c_1^2}{2} = 0$ pour le fibré F^{**} . D'après le théorème 1, provient d'un fibré harmonique ; en particulier, ses classes de Chern sont nulles. Alors $F \simeq F^{**}$, et F est localement libre.

Si F est un faisceau cohérent de classes de chern c_i , on pose selon l'usage $ch_2(F) = \frac{c_1^2}{2} - c_2$; si F est un faisceau de Higgs μ -stable de pente $\mu = 0$, on vient de voir que $ch_2(F) \leq 0$. Si F est seulement μ -semi-stable il a une filtration par des sous-faisceaux de Higgs F_i tels que $gr_i = F_i/F_{i-1}$ soit un faisceau μ -stable de pente $\mu_i = 0$, et on a alors

$$0 = ch_2(F) = \sum_i ch_2(gr_i)$$

Par suite, $ch_2(gr_i) = 0$: il résulte de la première partie que gr_i est un fibré de Higgs de classes de Chern $c_i = 0$.

3. Dans le cas général on raisonne par récurrence sur la dimension. Par restriction à une hypersurface lisse $Y \in |\mathcal{O}_X(d)|$ convenable, on peut supposer d'après la proposition 4 que le faisceau de Higgs $(F|_Y, \theta_Y)$ est encore μ -semi-stable et que $F^{**}|_Y \simeq (F|_Y)^{**}$. D'après l'hypothèse de récurrence $G = (F|_Y)^{**}$ a une filtration dont le gradué est une somme directe de fibrés de Higgs μ -stables de classes de Chern $c_i = 0$, et le morphisme canonique $F|_Y \rightarrow (F|_Y)^{**}$ est un isomorphisme en dehors d'un fermé de codimension ≥ 3 . Soit y un point de Y ; d'après le théorème 3, G provient d'une représentation du groupe fondamental $\pi_1(Y, y)$; comme $\dim X \geq 3$, d'après le théorème de Lefchetz, l'inclusion $Y \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme $\pi_1(Y, y) \simeq \pi_1(X, y)$, ce qui permet d'étendre le fibré de Higgs G en un fibré de Higgs H sur X . La famille des faisceaux de Higgs μ -semi-stables de rang et classes de Chern fixées est limitée (cf. section suivante); il résulte alors du lemme 5 que, pour un choix convenable de d , l'isomorphisme $F^{**}|_Y \simeq H|_Y$ s'étend en un isomorphisme $F^{**} \simeq H$. Le lemme de Nakayama montre que le support du conoyau du morphisme canonique $F \rightarrow F^{**}$ ne peut rencontrer Y que suivant un fermé de codimension ≥ 3 : il est donc lui aussi de codimension ≥ 3 . D'où le théorème.

Corollaire 1.— *Soit F un fibré de Higgs μ -semi-stable, de classes de Chern c_i telles que*

$$c_1 \cdot h^{n-1} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{c_1^2}{2} - c_2\right) \cdot h^{n-2} = 0$$

Alors F provient d'un fibré plat.

Corollaire 2.— *Soit F un faisceau de Higgs μ -semi-stable, de classes de Chern $c_i = 0$. Alors le faisceau F est localement libre, et provient d'un fibré plat.*

L'hypothèse implique en effet que les faisceau F et F^{**} ont même polynôme de Hilbert, et par suite, le morphisme canonique $F \rightarrow F^{**}$, injectif parce que F est sans torsion, est en fait un isomorphisme.

5. Les espaces de modules M_B, M_{Dol}, M_{DR}

L'espace de modules de Betti

Soit $x \in X$; le groupe fondamental $\pi = \pi_1(X, x)$ est un groupe de type fini, par conséquent on peut mettre sur l'espace des représentations $R = \text{Hom}(\pi, GL(r, \mathbf{C}))$ une structure naturelle de variété algébrique affine. Soit en effet $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ un système de générateurs pour π ; le groupe π s'écrit \mathcal{L}/\mathcal{N} , où \mathcal{L} est le groupe libre à k générateurs, et \mathcal{N} le groupe des relations entre ces générateurs, qu'on supposera lui-même engendré par ℓ générateurs. On voit que l'application $R \rightarrow GL(r, \mathbf{C})^k$ définie par $\rho \mapsto (A_i = \rho(\gamma_i))_{i=1, \dots, k}$ identifie R à la sous-variété fermée de $GL(r, \mathbf{C})^k$ définie par l'image réciproque de l'élément neutre de $GL(r, \mathbf{C})^\ell$ par le morphisme $GL(r, \mathbf{C})^k \rightarrow GL(r, \mathbf{C})^\ell$ associé à ces relations. On peut vérifier que la structure ainsi définie est indépendante de la présentation de π . Sur la variété R , le groupe $GL(r, \mathbf{C})$ agit par conjugaison, et puisque ce groupe est réductif, l'algèbre des invariants $\mathcal{O}(R)^{GL(r, \mathbf{C})}$ est une algèbre de type fini d'après Hilbert, ce qui définit une variété affine

$$M_B(r) = R/GL(r, \mathbf{C})$$

L'ensemble des points fermés de $M_B(r)$ correspond à l'ensemble des orbites fermées de $GL(r, \mathbf{C})$: on vérifie que ces orbites fermées sont celles des représentations semi-simples. L'inclusion $\mathcal{O}(R)^{GL(r, \mathbf{C})} \hookrightarrow \mathcal{O}(R)$ définit un morphisme $R \rightarrow M_B(r)$ qu'on peut décrire de la manière suivante : toute représentation ρ a une filtration croissante $\rho_1 \subset \rho_2 \subset \dots \subset \rho_k = \rho$ telle que $gr_i(\rho) = \rho_i/\rho_{i-1}$ soit irréductible ; on associe à ρ le point défini par la représentation semi-simple $gr(\rho) = \bigoplus_{i=1}^k gr_i(\rho)$.

Remarquons que cet espace de module, dit de Betti, pourrait se définir sur un espace topologique quelconque, pourvu que le groupe de Poincaré soit de type fini.

Géométrie projective invariante [27]

Soient G un groupe réductif opérant linéairement sur un espace vectoriel W , $\mathbf{P}(W)$ l'espace projectif des droites de W , $A \subset \mathbf{P}(W)$ un sous-schéma fermé G -invariant. Un point $x \in A$ est dit *semi-stable* sous l'action de G s'il existe un polynôme homogène G -invariant sur W non nul en x . Les points $x \in A$ semi-stables sous l'action de G constituent un ouvert A^{ss} . Un point $x \in A^{ss}$ est dit *stable* s'il est semi-stable et si le morphisme $g \mapsto gx : G \rightarrow A^{ss}$ est propre. On peut alors construire une variété projective B et un morphisme $\pi : A^{ss} \rightarrow B$, G -équivariant et satisfaisant à la propriété universelle attendue des quotients : pour tout morphisme G -équivariant $f : A^{ss} \rightarrow C$ dans une variété C , il existe un morphisme et un seul $g : B \rightarrow C$ tel que $g \circ \pi = f$; de plus, cette propriété reste vraie par changement de base. Ce morphisme π est surjectif, affine, et envoie deux fermés G -invariants disjoints sur deux fermés disjoints. De plus, la réunion A^s des orbites des points stables est l'image réciproque d'un ouvert B^s de B .

Il existe un critère commode pour déterminer quels sont les points semi-stables et stables sous l'action de G . Soit $\lambda : \mathbf{C}^* \rightarrow G$ un sous-groupe à un paramètre de G ; on peut alors écrire $W = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} W_n$, où W_n est le sous-espace vectoriel des vecteurs $v \in W_n$ tels que $\lambda(t).v = t^n v$. Un point $x \in \mathbf{P}(W)$ se représente par un vecteur $v = \sum_n v_n$; soit $\mu(\lambda, x) = \inf\{n, v_n \neq 0\}$. On a alors l'équivalence :

$$x \text{ est semi-stable (resp. stable) } \Leftrightarrow \text{pour tout } \lambda, \mu(\lambda, x) \leq 0 \text{ (resp. } < 0)$$

On peut par exemple utiliser ce résultat pour trouver les points semi-stables de la grassmannienne $\mathbf{Gr} = \text{Grass}(H \otimes \mathbf{C}^r, s)$ des espaces vectoriels quotients K de dimension s de $H \otimes \mathbf{C}^r$ sous l'action de $SL(H)$: il s'agit des quotients K satisfaisant à la condition suivante : pour tout sous-espace vectoriel H' l'image K' de $H' \otimes \mathbf{C}^r$ dans K satisfait à l'inégalité

$$\frac{\dim K'}{\dim H'} \geq \frac{\dim K}{\dim H}.$$

L'espace de modules des faisceaux cohérents

Un faisceau algébrique cohérent F sur X est dit de dimension d si son support est de dimension d . Un tel faisceau est dit *équidimensionnel* de dimension d s'il n'a pas de sous-module cohérent de dimension $< d$. Pour $d = n$, il s'agit des faisceaux sans torsion ; pour $d = 1$, il s'agit de faisceaux de dimension un localement de Cohen-Macaulay. Le polynôme de Hilbert d'un faisceau algébrique cohérent F de dimension d s'écrit

$$P_F(m) = \chi(F(m)) = \sum_{i=0}^d C_{m+i-1}^i \chi_i$$

où $\chi_i = \chi(F|_{Y_i})$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la restriction de F à une intersection Y_i de i sections hyperplanes en position générale. Le coefficient $r = \chi_d$ s'appelle la *multiplicité*. Dans le cas où F est sans torsion, on a $r = \text{rang}(F) \cdot \text{deg}(X)$; le nombre $\frac{\chi_{d-1}}{r} \text{deg}(X)$ ne diffère de la pente, définie dans la section 2, que par une constante indépendante de F .

On dit qu'un faisceau algébrique cohérent F de dimension d , de multiplicité r est *semi-stable* (resp. *stable*) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (a) le faisceau F est équidimensionnel
- (b) pour tout sous-module cohérent non nul $F' \subset F$ de multiplicité $r' < r$

on a

$$\frac{P_{F'}}{r'} \leq \frac{P_F}{r} \quad (\text{resp. } <)$$

Dans ces inégalités, les polynômes sont ordonnés par ordre lexicographique sur les coefficients, en commençant par le terme de plus haut degré. On définit de même la notion de faisceau μ -semi-stable (resp. μ -stable) en remplaçant le polynôme de Hilbert par le coefficient χ_{d-1} . On a évidemment les implications

$$\begin{aligned} \mu - \text{stable} &\Rightarrow \text{stable} \\ &\Downarrow \\ \mu - \text{semi-stable} &\Leftarrow \text{semi-stable} \end{aligned}$$

Pour les faisceaux cohérents sans torsion, on retrouve évidemment les définitions de Gieseker [12] et Maruyama [24].

Lemme 6.— *La famille des faisceaux μ -semi-stables de polynôme de Hilbert donné P est limitée.*

Cet énoncé est classique [23] pour les faisceaux sans torsion. Dans le cas général, on peut considérer F comme un faisceau de modules sur le sous-schéma S de X défini par l'annulateur de F ; ce sous-schéma est équidimensionnel de dimension d et de degré borné. D'après Chow, la famille des sous-schémas ainsi obtenue est limitée.

On peut alors considérer, S étant maintenant fixé, une projection finie $\pi : S \rightarrow \mathbf{P}_d$ telle que $\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_d}(1)) = \mathcal{O}_S(1)$. Le faisceau $\pi_*(F)$ est alors un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_d}$ -modules sans torsion de même polynôme de Hilbert que F . Ce faisceau n'est peut-être pas μ -semi-stable, mais la pente de ses sous-modules est majorée. Ceci suffit en fait pour obtenir une famille limitée; il en résulte que la famille des faisceaux F est elle-même limitée.

Fixons un polynôme Q de degré d , et considérons la catégorie $\mathcal{C}(Q)$ des faisceaux semi-stables F tels que $\frac{P_F}{r} = Q$, où r désigne la multiplicité de F . Il est facile de vérifier qu'on obtient ainsi une catégorie abélienne; en plus elle est évidemment noethérienne et artinienne, ce qui permet de définir dans cette catégorie la notion de filtration de Jordan-Hölder: on entend par là une filtration

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_k = F$$

telle que le gradué $gr_i(F) = F_i/F_{i-1}$ soit stable; le gradué $gr(F) = \bigoplus gr_i(F)$ est alors bien défini à isomorphisme près. Deux faisceaux semi-stables F et G de $\mathcal{C}(Q)$ sont dit S-équivalents si les gradués $gr(F)$ et $gr(G)$ sont isomorphes.

Soit P un polynôme de degré d . On considère le foncteur $\underline{M}_X(P)$ qui associe à la variété algébrique S l'ensemble $\underline{M}_X(P)(S)$ des classes d'isomorphisme de familles de faisceaux semi-stables sur X de polynôme de Hilbert P .

Théorème 5.— 1. Il existe pour le foncteur $\underline{M}_X(P)$ un espace de modules grossier $M_X(P)$, dont les points sont les classes de S -équivalence de faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert P .

2. La variété algébrique $M_X(P)$ est projective.

3. Il existe un ouvert $M_X^s(P)$ de $M_X(P)$ dont les points correspondent aux classes d'isomorphisme de faisceaux stables.

La propriété de module grossier de $M_X(P)$ signifie qu'il existe un morphisme fonctoriel $f : \underline{M}_X(P)(S) \rightarrow \text{Mor}(S, M_X(P))$ satisfaisant à la propriété universelle suivante : pour toute autre variété algébrique N , et tout morphisme fonctoriel $g : \underline{M}_X(P)(S) \rightarrow \text{Mor}(S, N)$ il existe un morphisme et un seul φ tel que $g_F = \varphi \circ f_F$ pour toute famille F de $\underline{M}_X(P)(S)$.

Esquisse de démonstration. On choisit d'abord un entier N assez grand pour que, n étant donné $\geq N$ les propriétés suivantes soient vraies :

(i) tout faisceau semi-stable F de polynôme de Hilbert P , $F(n)$ est engendré par ses sections, et on a $H^q(F(n)) = 0$ si $q > 0$.

(ii) pour tout faisceau semi-stable F de multiplicité r , de polynôme de Hilbert $P_F = P$, et tout sous-module $F' \subset F$ non nul et de multiplicité r' , on a

$$\frac{h^0(F'(n))}{r'} \leq \frac{h^0(F(n))}{r}, \quad \text{et, en cas d'égalité} \quad \frac{P_{F'}}{r'} = \frac{P_F}{r}.$$

L'assertion a) résulte des théorèmes A et B de Serre appliqués à la famille limitée du lemme 6. L'assertion b), qui traduit la semi-stabilité, n'est pas évidente, car la famille des sous-faisceaux F' qui intervient dans cet énoncé n'est pas limitée.

L'entier N étant ainsi choisi, soit H un espace vectoriel complexe de dimension $P(N)$; on pose, pour tout entier $k \geq 0$, $A_k = H^0(\mathcal{O}_X(k))$. Considérons le schéma projectif de Hilbert et Grothendieck [15] $\mathbf{Hilb} = \mathbf{Hilb}(H \otimes \mathcal{O}_X(-N), P)$ des \mathcal{O}_X -modules cohérents quotients du faisceau localement libre $H \otimes \mathcal{O}_X(-N)$ et de polynôme de Hilbert P . D'après sa construction, ce schéma se plonge, pour k assez grand, dans la grassmannienne

$\mathbf{Gr} = \text{Grass}(H \otimes A_k, P(N+k))$ des espaces vectoriels quotients de $H \otimes A_k$ de dimension $P(N+k)$, en associant au faisceau quotient F l'espace vectoriel $H^0(F(N+k))$; ceci définit une polarisation de **Hilb**. Le groupe $SL(H)$ opère sur **Hilb** et sur \mathbf{Gr} ; l'action provient de la représentation linéaire de $SL(H)$ dans $\Lambda^{P(N+k)}(H \otimes A_k)$, via le plongement de Plücker. En utilisant le critère du paragraphe précédent, il n'est pas difficile d'identifier les points semi-stables pour l'action de ce groupe, pourvu que k soit assez grand :

Lemme 7.— *Pour une polarisation convenable de **Hilb**, on a l'équivalence, pour un point $F \in \mathbf{Hilb}$:*

- (a) *le point F est semi-stable sous l'action de $SL(H)$;*
- (b) *Pour tout sous-espace vectoriel non nul $H' \subset H$, on a, pour le sous-faisceau F' de F engendré par $H' \otimes \mathcal{O}_X(-N)$:*

$$\frac{P_{F'}}{\dim H'} \geq \frac{P}{\dim H}$$

On considère le quotient de Mumford $\mathbf{M}' = \mathbf{Hilb}^{ss}/SL(H)$ de l'ouvert \mathbf{Hilb}^{ss} des points semi-stables de **Hilb** sous l'action de $SL(H)$. A tout couple (F, α) formé d'un faisceau semi-stable F de polynôme de Hilbert P et d'un isomorphisme $\alpha : H \cong H^0(F(N))$, on associe un point de **Hilb**. Si on désigne par F' le sous-faisceau de F engendré par un sous-espace non nul H' de H , on a alors $\dim H' \leq \dim H^0(F'(N))$, d'où il découle en utilisant la propriété (ii) ci-dessus

$$\frac{\dim H'}{r'} \leq \frac{\dim H}{r} \quad \text{et en cas d'égalité} \quad \frac{P_{F'}}{r'} = \frac{P_F}{r}.$$

Il en résulte que

$$\frac{P_{F'}}{\dim H'} \geq \frac{P_F}{\dim H}$$

D'après le lemme 7, ceci signifie que le point défini par (F, α) appartient à l'ouvert \mathbf{Hilb}^{ss} . Il est clair que si l'on change l'isomorphisme α , on

obtiendra un point dans la même orbite, et par suite le même point dans le quotient \mathbf{M}' . Il n'est pas difficile de voir que cette construction fournit en fait un morphisme fonctoriel

$$\underline{M}_X(P)(S) \rightarrow \text{Mor}(S, \mathbf{M}')$$

Réciproquement, on pourrait espérer que si l'entier N et la polarisation sont bien choisis, les points F de \mathbf{Hilb}^{ss} définissent des faisceaux semi-stables, et que le morphisme d'évaluation $H \rightarrow H^0(F(N))$ est un isomorphisme. Si la deuxième assertion est claire, il n'en est pas de même de la première : on rencontrait déjà ce genre de difficulté dans les travaux de Gieseker et Maruyama pour les faisceaux sans torsion. Cependant, il est possible de prouver que les points F de \mathbf{Hilb} correspondant à des faisceaux semi-stables, et tels que le morphisme d'évaluation $H \rightarrow H^0(F(N))$ soit un isomorphisme définissent un sous-schéma à la fois ouvert et fermé \mathbf{H}^{ss} de \mathbf{Hilb}^{ss} , invariant par $SL(H)$. Le quotient de Mumford $\mathbf{M} = M_X(P) = \mathbf{H}^{ss}/SL(H)$ a alors un sens ; c'est une variété projective dont on vérifie facilement la propriété de module grossier annoncée.

L'espace de modules de Dolbeault

Comme pour les faisceaux cohérents, on définit les notions de semi-stabilité et de stabilité pour les faisceaux de Higgs en introduisant le polynôme de Hilbert : un faisceau de Higgs (F, θ) de multiplicité r est semi-stable s'il est équidimensionnel, et si pour tout sous-module de Higgs non nul $F' \subset F$ de multiplicité r' , on a

$$\frac{P_{F'}}{r'} \leq \frac{P_F}{r}.$$

De même, on définit la notion de filtration de Jordan-Hölder et de S-équivalence.

Pour simplifier, on se limite ici au cas des faisceaux sans torsion ; leur polynôme de Hilbert P est donc de degré n . Par famille de faisceaux de Higgs, de polynôme de Hilbert P , paramétrée par une variété algébrique S , on entend la donnée d'un faisceau algébrique cohérent F sur $S \times X$, et

d'un morphisme $\theta : F \rightarrow \Omega_{S \times X/S}^1 \otimes F$, induisant au-dessus de chaque point $s \in S$ un faisceau de Higgs (F_s, θ_s) de polynôme de Hilbert P . (Le faisceau $\Omega_{S \times X/S}^1$ désigne, selon l'usage, le faisceau des formes différentielles relatives de degré 1). On considère le foncteur $\underline{M}_{\text{Higgs}}(P)$ qui associe à S l'ensemble des classes d'isomorphisme de familles de faisceaux de Higgs semi-stables sur X , de polynôme de Hilbert P , paramétrées par S . Le résultat suivant généralise le théorème 5.

Théorème 6.— *Soit P un polynôme de degré n .*

1. *Il existe, pour le foncteur $\underline{M}_{\text{Higgs}}(P)$ un espace de modules grossier, noté $M_{\text{Higgs}}(P)$, dont les points sont les classes de S -équivalence de faisceaux de Higgs semi-stables.*

2. *La variété $M_{\text{Higgs}}(P)$ est quasi-projective.*

3. *Dans $M_{\text{Higgs}}(P)$, il existe un ouvert dont les points sont les classes d'isomorphisme de faisceaux de Higgs stables.*

Cet énoncé est en fait une conséquence du théorème 5. Considérons le fibré tangent $T(X)$, et le fibré en espaces projectifs associé (au sens de Grothendieck) $Z = \mathbf{P}(T(X) \oplus \mathcal{O}_X)$; c'est une complétion lisse de la variété $T^*(X)$ des vecteurs cotangents; on désigne par $\pi : Z \rightarrow X$ la projection canonique, et par D le diviseur à l'infini. Sur la variété Z , le fibré inversible $\pi^*(\mathcal{O}_X(a)) \otimes \mathcal{O}(D)$ est très ample si a est un entier assez grand. Pour simplifier nous supposerons $a = 1$, cas auquel on peut se ramener en changeant au besoin la polarisation de X ; ceci modifie le polynôme de Hilbert, mais non les notions de semi-stabilité et stabilité.

Lemme 8.— *Il y a équivalence entre la catégorie des faisceaux de Higgs semi-stables sans torsion sur X , et la catégorie des faisceaux semi-stables de dimension n sur Z , dont le support ne rencontre pas le diviseur à l'infini D .*

Démonstration : Soit $\mathcal{A} = \text{Sym } T(X)$ l'algèbre symétrique associée au faisceau des champs de vecteurs $T(X)$; on a $T^*(X) = \text{Spec } \mathcal{A}$. Se donner

un faisceau de Higgs sur X revient à se donner un \mathcal{A} -module cohérent ; à un tel module F on associe un faisceau cohérent G sur $T^*(X)$ en posant

$$G = \pi^{-1}(F) \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{O}_{T^*}$$

Le support du faisceau G est propre au-dessus de X ; si F est sans torsion, G est équidimensionnel de dimension n . Réciproquement, étant donné un tel module cohérent sur T^* on obtient un faisceau de Higgs F sans torsion sur X en posant $F = \pi_*(G)$. Les deux opérations sont inverses l'une de l'autre ([17], exercice 5.17) ; les polynômes de Hilbert sont inchangés et les sous-modules de Higgs de F correspondent aux sous-modules cohérents de G . Par suite, les notions de semi-stabilité se correspondent ; même chose pour la stabilité. D'où le lemme.

Les modules cohérents sur T^* dont le support est propre sur X peuvent être considérés comme des modules cohérents sur Z dont le support ne rencontre pas le diviseur à l'infini D . Il en résulte que si l'on considère l'ouvert \mathcal{U} de $M_Z(P)$ des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert P dont le support ne rencontre pas Z , on obtient une variété algébrique quasi-projective qui satisfait à la propriété de module grossier demandée. On prendra donc $M_{Higgs}(P) = \mathcal{U}$.

Désignons par P_0 le polynôme de Hilbert de \mathcal{O}_X . Soit r un entier ; l'espace de modules $M_{Higgs}(rP_0)$ contient comme sous-schéma à la fois ouvert et fermé les classes de S-équivalence de faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern nulles. Comme Simpson, on désignera par $M_{Dol}(r)$ cette composante. On sait d'après le corollaire 2 du théorème 4 que les points de cette composante sont en fait représentés par des somme directe de fibrés de Higgs μ -stables de classes de Chern $c_i = 0$.

L'espace de modules de de Rham

Il s'agit de construire une variété algébrique qui paramètre les fibrés plats sur X . Se donner un tel fibré revient à se donner un couple (E, D)

formé d'un fibré vectoriel algébrique E et d'une connexion régulière $D : \mathcal{O}(E) \rightarrow \Omega^1 \otimes E$ satisfaisant à la condition d'intégrabilité $D^2 = 0$. Une connexion régulière s'identifie à un scindage de la suite exacte de fibrés vectoriels algébriques

$$0 \rightarrow \Omega^1 \otimes E \rightarrow J^1 E \rightarrow E \rightarrow 0$$

où $J^1 E$ désigne le fibré des jets d'ordre 1. Pour E fixé, on peut regarder l'espace de ces connexions intégrables comme un sous-schéma fermé de l'espace vectoriel $\text{Hom}(J^1 E, \Omega^1 \otimes E)$: les équations définissant ce sous-schéma traduisent les conditions de scindage et d'intégrabilité.

Lemme 9.— *La famille des fibrés vectoriels algébriques sous-jacents aux fibrés plats de rang r est limitée.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la famille des fibrés plats irréductibles est limitée. Soit (E, D) un tel fibré ; considérons la filtration de Harder-Narasimhan $(F_i)_{i=1, \dots, k}$ de E , et désignons par μ_i la pente de $gr_i = F_i/F_{i-1}$. La connexion induit un opérateur \mathcal{O}_X -linéaire

$$F_i \rightarrow \Omega^1 \otimes E/F_i$$

non nul si $1 \leq i < k$, car sinon F_i serait un sous-module invariant par D , donc localement libre d'après Deligne ([5], théorème 2.23), ce qui définirait un sous-fibré plat, ce qui est contraire à notre hypothèse d'irréductibilité. On a alors $\mu_{\min}(F_i) \leq \mu_{\max}(\Omega^1) + \mu_{\max}(E/F_i)$, c'est-à-dire $\mu_i - \mu_{i+1} \leq \mu_{\max}(\Omega^1)$. Par suite, $\mu_{\max}(E) - \mu_{\min}(E) \leq r\mu_{\max}(\Omega^1)$. Puisque le polynôme de Hilbert est fixé, une variante déjà invoquée du lemme 6 suffit pour conclure que la famille des fibrés E est limitée.

Un fibré plat E sur X a une filtration croissante F_i par des sous-fibrés plats, telle que $gr_i = F_i/F_{i-1}$ soit irréductible ; le gradué $gr(E) = \bigoplus_i gr_i$ est, à isomorphisme près, indépendant de la filtration. Deux fibrés plats E et F sont dits S-équivalents si les fibrés plats semi-simples $gr(E)$ et $gr(F)$ sont isomorphes. Soit r un entier. On considère pour toute variété

algébrique S , l'ensemble $\underline{M}_{DR}(r)(S)$ des faisceaux algébriques cohérents F sur $S \times X$, munis d'une connexion relative $D : F \rightarrow \Omega_{S \times X/S}^1 \otimes F$ satisfaisant à la condition d'intégrabilité $D^2 = 0$ et tels que pour tout $s \in S$, F_s soit de rang r .

Théorème 7.— 1. Il existe pour le foncteur $\underline{M}_{DR}(r)$ un espace de modules grossier $M_{DR}(r)$, dont les points sont les classes de S -équivalence de fibrés plats.

2. La variété $M_{DR}(r)$ est une variété quasi-projective.

3. Les classes d'isomorphismes de fibrés plats irréductibles s'identifient à un ouvert de $M_{DR}(r)$.

Esquisse de démonstration. Soient comme ci-dessus, $P = rP_0$, N un entier assez grand, et H un espace vectoriel complexe de dimension $P(N)$. Considérons l'ensemble des triplets (E, α, D) , formés d'un fibré vectoriel algébrique E , d'un isomorphisme $\alpha : H \rightarrow H^0(E(N))$ et d'une connexion intégrable D sur E . On peut définir une variété algébrique quasi-projective relative

$$\mathbf{A} \rightarrow \text{Hilb}(H \otimes \mathcal{O}(-N), P)$$

qui paramètre tous ces triplets. On va expliquer comment on peut munir cette variété \mathbf{A} d'une polarisation.

On désigne par \mathcal{D} l'algèbre des opérateurs différentiels scalaires sur X ; elle est munie de deux structures évidentes de \mathcal{O}_X -modules. La donnée d'une connexion intégrable sur le faisceau localement libre E équivaut à celle d'une structure de \mathcal{D} -module : étant donnée une telle structure, on retrouve la connexion D en posant $\langle Ds, \xi \rangle = \xi.s$ pour tout champ de vecteurs local ξ et toute section locale s de E ; la compatibilité avec le crochet fournit la règle de Leibniz et la condition d'intégrabilité.

Considérons le sous- \mathcal{O}_X -module \mathcal{D}_i défini par les opérateurs différentiels d'ordre $\leq i$. Étant donné un \mathcal{D} -module E on a un morphisme $\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} E \rightarrow E$, où dans le produit tensoriel, \mathcal{D}_i est muni de la structure de \mathcal{O}_X -module à droite; en composant avec le morphisme d'évaluation, ceci permet d'associer à tout point (E, α, D) de \mathbf{A} un module quotient du

module $\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} (H \otimes \mathcal{O}_X(-N))$. On obtient ainsi un plongement

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{H}_i = \text{Hilb}(\mathcal{D}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} (H \otimes \mathcal{O}_X(-N)), P)$$

Le groupe $SL(H)$ opère sur \mathbf{H}_i et \mathbf{A} est un sous-schéma localement fermé de \mathbf{H}_i invariant par $SL(H)$. Le lemme 7 permet encore de déterminer (pour une polarisation convenable) l'ouvert \mathbf{H}_i^{ss} des points semi-stables sous l'action de $SL(H)$: Simpson démontre que pour N et $i \geq r$, on a $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{H}_i^{ss}$ ([31], lemme 4.5). On obtient alors un morphisme

$$A \rightarrow \mathbf{H}_i^{ss}/SL(H)$$

Sous les mêmes conditions, il démontre en fait que \mathbf{A} est l'image réciproque d'un sous-schéma localement fermé de $\mathbf{H}_i^{ss}/SL(H)$: ce sous-schéma satisfait à la propriété de module grossier demandée dans l'énoncé ; ceci fournit donc la construction de l'espace de modules $M_{DR}(r)$.

Comparaison des trois espaces de modules

Les trois variétés algébriques $M_B(r)$, $M_{Dol}(r)$ et $M_{DR}(r)$ ont même ensemble de points fermés ; cependant, elles diffèrent comme variétés algébriques. C. Simpson démontre cependant le résultat suivant :

Théorème 8.—(1) Soient $M_B^{an}(r)$ et $M_{Dol}^{an}(r)$ les espaces \mathbf{C} -analytiques sous-jacents à $M_B(r)$ et $M_{Dol}(r)$ respectivement. On a un isomorphisme

$$M_B^{an}(r) \cong M_{Dol}^{an}(r)$$

(2) Pour la topologie usuelle, les espaces topologiques sous-jacents à $M_B(r)$ et $M_{Dol}(r)$ sont homéomorphes.

Un exemple : le cas $r=1$

Étudions le cas des fibrés de rang $r = 1$ sur une surface de Riemann X . On a $M_B = H^1(X, \mathbf{C}^*) = \mathbf{C}^{*2g}$. C'est donc une variété affine de

dimension $2g$. La variété M_{DR} se projette sur la jacobienne $Jac(X)$ des fibrés inversibles de degré 0 ; le morphisme $M_{DR} \rightarrow Jac(X)$ est le fibré en espaces affines de fibre $\Omega^1(X)$, qu'on peut décrire de la manière suivante : considérons la suite exacte de groupes abéliens

$$0 \rightarrow \Omega^1(X) \rightarrow H^1(X, \mathbf{C}^*) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

La dernière flèche a pour image la jacobienne ; du point de vue \mathbf{C} -analytique, ceci permet de voir $H^1(X, \mathbf{C}^*)$ comme espace total d'un fibré en espaces affines au-dessus de $Jac(X)$, de groupe structural $\Omega^1(X)$. La variété $Jac(X)$ étant projective, ce fibré est en fait algébrique d'après les théorèmes de comparaison de Serre, et l'espace total $H^1(X, \mathbf{C}^*)$ hérite ainsi d'une structure de variété algébrique : c'est M_{DR} . Comme Serre l'avait remarqué, cette variété algébrique n'est pas affine bien qu'analytiquement isomorphe à \mathbf{C}^{*2g} : on a $M_B \neq M_{Dol}$.

Enfin si on écrit $\mathbf{C}^* = \mathbf{U} \times \mathbf{R}_+^*$, \mathbf{U} désignant le groupe de nombres complexes de module 1, l'inclusion $H^1(X, \mathbf{U}) \hookrightarrow H^1(X, \mathbf{C}^*)$ induit un isomorphisme $H^1(X, \mathbf{U}) \cong Jac(X)$, et par suite un scindage

$$H^1(X, \mathbf{C}^*) \cong Jac(X) \times \Omega^1(X)$$

La variété M_{Dol} est la variété algébrique produit $Jac(X) \times \Omega^1(X)$ et on a $M_{Dol}^{an} \neq M_B^{an} = M_{DR}^{an}$: en effet, M_{Dol}^{an} , qui contient des sous-variétés analytiques compactes de dimension > 0 n'est pas une variété de Stein.

Remarque.

On peut construire un morphisme plat de variétés algébriques $\mathcal{W} \rightarrow A^1$ au-dessus de la droite affine, dont la fibre au-dessus du point $\lambda \neq 0$ est isomorphe à $M_{DR}(r)$ et dont la fibre au-dessus de l'origine 0 isomorphe à $M_{Dol}(r)$, en introduisant pour un fibré vectoriel algébrique E la notion, due à Deligne, de λ -connexion : il s'agit d'opérateurs \mathbf{C} -linéaires $E \rightarrow \Omega^1 \otimes E$ tels que $D(fs) = \lambda dfs + fDs$ pour f fonction régulière locale, et s section locale de E , et tels que $D^2 = 0$: autrement dit, il s'agit d'opérateurs différentiels d'ordre 1 de symbole $\lambda id_{\Omega^1 \otimes E}$. Ainsi, la variété de modules $M_{Dol}(r)$ peut être vue comme une spécialisation de $M_{DR}(r)$.

6. L'action de \mathbf{C}^*

Etant donnée une famille $(F_s, \theta_s)_{s \in S}$ de faisceaux de Higgs semi-stables de polynômes de Hilbert P paramétrée par une variété algébrique S , on obtient une nouvelle famille de faisceaux de Higgs semi-stables en considérant $(E_s, t\theta_s)_{(t,s) \in \mathbf{C}^* \times S}$; ceci définit un morphisme $\mathbf{C}^* \times S \rightarrow M_{Higgs}(P)$. La variété $M_{Higgs}(P)$ a été obtenue en quotientant par l'action d'un groupe $SL(H)$ un ouvert U d'un schéma de Hilbert paramétrant un faisceau de Higgs universel (F, θ) ; on peut donc prendre $S = U$: on obtient ainsi un morphisme équivariant $\mathbf{C}^* \times U \rightarrow M_{Higgs}(P)$, qui donne par passage au quotient un morphisme

$$\mathbf{C}^* \times M_{Higgs}(P) \rightarrow M_{Higgs}(P)$$

On vérifie qu'on obtient ainsi une action du groupe \mathbf{C}^* sur $M_{Higgs}(P)$.

Points fixes

Pour simplifier, on se limite à l'étude des points fixes de \mathbf{C}^* sur la variété $M_{Dol}(r)$.

Proposition 4.— *Un point p de $M_{Dol}(r)$ est fixe sous l'action de \mathbf{C}^* si et seulement si on peut le représenter par un fibré de Higgs (E, θ) s'écrivant $E = \bigoplus_{i=1}^k F_i$, où les F_i sont des sous-fibrés algébriques de E tels que*

$$\theta(F_i) \subset \Omega^1 \otimes F_{i-1}.$$

Démonstration. Rappelons que chaque point p de $M_{Dol}(r)$ peut se représenter par une somme directe $(E, \theta) = \bigoplus_j (E_j, \theta_j)$ de fibrés de Higgs stables de classes de Chern nulles, et ceci de manière unique à isomorphisme près. Si un tel point p est fixe sous l'action de \mathbf{C}^* , on doit avoir $(E, \theta) \cong (E, t\theta)$ pour tout $t \in \mathbf{C}^*$; choisissons t non racine de l'unité, et désignons par g un tel isomorphisme. Pour tout champ de vecteurs local ξ au-dessus

d'un ouvert U , considérons le morphisme $\theta_\xi = \langle \xi, \theta \rangle$. Sur U , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\theta_\xi} & E \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ E & \xrightarrow{t\theta_\xi} & E \end{array}$$

Le polynôme caractéristique de g a évidemment ses coefficients constants ; soit λ une valeur propre de g , de multiplicité ρ , et $V_\lambda = \text{Ker}(g - \lambda \text{id}_E)^\rho$. C'est un sous-fibré de rang ρ de E , et on a $\theta_\xi(V_\lambda) \subset V_{t\lambda}$. Il en résulte que, ou bien $\theta_\xi(V_\lambda) = 0$ pour tout champ de vecteurs local ξ , ou bien $t\lambda$ est encore valeur propre de g . Soit Λ l'ensemble des valeurs propres de g , et $\Lambda_i \subset \Lambda$ l'ensemble des valeurs propres λ telles que $t\lambda, \dots, t^{i-1}\lambda \in \Lambda$, et telles que $t^i\lambda \notin \Lambda$. On obtient ainsi une partition de Λ ; on pose $F_0 = 0$ et pour $i > 0$,

$$F_i = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_i} V_\lambda.$$

On a $\theta(F_i) \subset \Omega^1 \otimes F_{i-1}$. Réciproquement, étant donnée une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^k F_i$ telle que $\theta(F_i) \subset \Omega^1 \otimes F_{i-1}$, on prend $g_t|_{F_i} = t^{k-i} \text{id}_{F_i}$. Il est clair que g_t définit un isomorphisme $(E, \theta) \cong (E, t\theta)$.

Variations de structures de Hodge

On appelle *variation (complexe) de structure de Hodge* (de poids m) sur X la donnée d'une somme directe $V = \bigoplus_{p+q=m} V^{p,q}$ de fibrés vectoriels de classe C^∞ , d'une connexion plate D sur V

$$\begin{array}{ccc} A^0(V^{p,q}) & \rightarrow & A^1(V^{p,q}) \oplus A^{1,0}(V^{p-1,q+1}) \oplus A^{0,1}(V^{p+1,q-1}) \\ s & \mapsto & Ds = (\nabla s, \theta s, \theta^* s) \end{array}$$

et d'une forme hermitienne h sur V ; ces données doivent satisfaire aux conditions suivantes :

- (1) la décomposition de V en somme directe est orthogonale par rapport à la forme hermitienne h ;
- (2) la forme hermitienne $(-1)^p h$ est positive non dégénérée sur $V^{p,q}$;
- (3) la connexion D est compatible avec h .

La notion de variation de structures de Hodge fut d'abord introduite par P.A. Griffiths ([14]) qui imposait en plus des données précédentes l'existence d'une conjugaison sur le fibré vectoriel V . L'exemple fondamental provient de l'étude des structures de Hodge associées aux familles de variétés projectives lisses plongées dans \mathbf{P}_N . Plus précisément, soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme lisse de variétés projectives, muni d'un plongement dans le projectif relatif $X \times \mathbf{P}_N$; on considère le fibré vectoriel V de classe C^∞ associé au système local $R^m f_*(\mathbf{C})_0$, partie primitive de l'image directe; la décomposition de Hodge fournit un isomorphisme

$$V = R^m f_*(\mathbf{C})_0 \otimes_{\mathbf{C}} C_X^\infty \cong \bigoplus_{p+q=m} R^q f_*(\Omega_{Y/X}^p)_0 \otimes_{\mathcal{O}_X} C_X^\infty$$

(où l'indice 0 indique la partie primitive, et C_X^∞ le faisceau des fonctions de classe C^∞ sur X). On désigne par ω la forme kählerienne relative associée au plongement dans le projectif relatif au-dessus de X . La forme hermitienne h sur V est définie sur la fibre Y_x par la formule

$$h(\alpha, \beta) = i^{m^2} \int_{Y_x} \alpha \wedge \bar{\beta} \wedge \omega^{n-m}$$

pour α et $\beta \in \text{Harm}^m(Y_x)_0$, espace des formes harmoniques primitives de degré m sur Y_x , qu'on peut identifier avec la fibre au point x du système local $R^m f_*(\mathbf{C})_0$. La connexion D est celle qui provient du système local, c'est-à-dire la connexion de Gauss-Manin, et la forme différentielle θ est celle qui est fournie par le théorème de transversalité de Griffiths.

Théorème 9.— *Les points fixes de \mathbf{C}^* dans la variété $M_{\text{Dol}}(r)$ correspondent aux fibrés de Higgs qui proviennent de variations de structures de Hodge.*

Démonstration (esquisse). Considérons une variation de structure de Hodge $(V = \bigoplus_{p+q=m} V^{p,q}, D, h)$, et la métrique hermitienne K donnée sur $V^{p,q}$ par $(-1)^p h$. La connexion ∇ est hermitienne pour K , et la forme différentielle θ^* est l'adjointe de θ pour cette métrique. On vérifie en écrivant la condition d'intégrabilité $D^2 = 0$ dans la somme directe

$$A^2(V) = \bigoplus_{\substack{r+s=2 \\ p+q=m}} A^{r,s}(V^{p,q})$$

que l'opérateur $D'' = \nabla^{0,1} + \theta$ définit une structure de Higgs sur V , et puisque $\theta(V^{p,q}) \subseteq \Omega^1(V^{p-1,q+1})$, d'après la proposition 5 un point fixe (V, θ) pour l'action de \mathbf{C}^* .

Pour la réciproque, on se ramène d'abord au cas d'un point fixe stable (E, θ) ; il s'agit de montrer qu'il existe alors une métrique de Yang et Mills dans laquelle la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^k F_i$ de la proposition 4 est orthogonale. Il faut constater que dans l'équation de la chaleur (7)

$$H^{-1} \frac{\partial H}{\partial t} = -i \Lambda F_H^\perp$$

si on part d'une métrique hermitienne initiale K dans laquelle la somme directe ci-dessus est orthogonale, il en est de même de la solution $t \mapsto H_t$, et de la limite H_∞ . On obtient ainsi un fibré harmonique, et en changeant alternativement les signes de la métrique sur les facteurs F_i on obtient une variation de structure de Hodge de poids $k - 1$.

Le morphisme de Hitchin

Soit P un polynôme de degré n . On considère le morphisme, déjà envisagé par Hitchin ([19,20])

$$\gamma : M_{\text{Higgs}}(P) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r H^0(\text{Sym}^i(\Omega_X^1))$$

construit en associant au faisceau de Higgs (E, θ) les coefficients $s_i(\theta)$ du polynôme caractéristique $t^r + \sum_{i=1}^r s_i(\theta)t^{r-i}$. En effet, E est sans torsion et en dehors d'un fermé de codimension ≥ 2 , θ peut être vue localement comme une matrice dont les coefficients sont des formes différentielles régulières; on peut alors calculer les coefficients $s_i(\theta)$ du polynôme caractéristique, qui se prolongent évidemment en sections régulières sur X .

Proposition 5.— *Le morphisme γ est propre.*

Démonstration. On considère une courbe lisse C , munie d'un point marqué O , et on pose $U = C - \{O\}$. Il s'agit de montrer que si $s \mapsto \alpha(s) =$

$(E_s, \theta_s) : U \rightarrow M_{\text{Higgs}, X}(P)$ est un morphisme tel que $\gamma \circ \alpha$ s'étend à C , il en est de même de α . Posons $\alpha_i = s_i(\alpha)$; cette section s'étend à C ; considérons la fonction $a : C \times T^* \rightarrow \text{Sym}^r(\Omega_X^1)$ définie par $a(s, t) = t^r + \sum_{i=1}^r t^{r-i} \alpha_i$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $a(s, \theta_s)$ est nul pour $s \neq 0$.

Considérons, avec les notations de la section 5, le faisceau semi-stable F_s sur Z défini par $\alpha(s) = (E_s, \alpha_s)$; le morphisme $F_s \rightarrow \text{Sym}^r(\Omega_X^1) \otimes F_s$, associé à a est nul comme on vient de le voir : il en résulte que le support de F_s est contenu dans le fermé $V(a)$ des zéros de a . Or, on sait que l'espace de modules $M_Z(P)$ est propre : ainsi $F_0 = \lim_{s \rightarrow 0} F_s$ existe. Par platitude, le support de F_0 est lui aussi contenu dans $V(a)$. Puisque qu'en fait $V(a) \subset C \times T^*$, le support de F_0 ne rencontre pas le diviseur à l'infini D . Ainsi, le morphisme α s'étend à C .

Corollaire 1.— *Soit (F, θ) un faisceau de Higgs semi-stable de polynôme de Hilbert P ; alors $\lim_{t \rightarrow 0} (F, t\theta)$ existe dans $M_{\text{Higgs}}(P)$, et c'est un point fixe pour l'action de \mathbf{C}^* .*

Corollaire 2.— *Toute représentation linéaire du groupe fondamental de X peut être déformée continûment en une représentation qui provient d'une variation de structure de Hodge.*

Démonstration. Topologiquement (pour la topologie usuelle), on a $M_B(r) \cong M_{\text{Dol}}(r)$, et donc toute composante connexe de $M_B(r)$ contient un point qui provient d'une variation de structure de Hodge. Dans l'espace des représentations R , les composantes connexes sont des fermés de Zariski disjoints. Dans le quotient $M_B(r)$, leurs images sont encore des fermés disjoints, et ce sont obligatoirement les composantes connexes. Par suite, dans chaque composante connexe de R , il y a des points correspondant à des variations de structure de Hodge.

7. Fibrés de Higgs sur les courbes

Si X est une courbe, Hitchin calcule dans ([19]) les nombres de Betti de l'espace de modules $M_{\text{Higgs}}(P)$, pour les fibrés de Higgs de rang 2 et de degré impair. Dans ce cas, tous les points sont stables, et cet espace

de modules est lisse. Il utilise pour ceci l'action de \mathbf{C}^* ; c'est une idée classique, que reprend Simpson pour étudier l'irréductibilité de l'espace de module $M_{Dol}(r)$, bien que dans ce cas cette variété soit singulière.

Théorème 10.—*Soit X une courbe de genre $g \geq 2$. Alors l'espace de modules $M_{Dol}(r)$ est une variété irréductible de dimension $2(r^2(g-1)+1)$.*

On a aussi le même résultat pour $M_B(r)$ et $M_{DR}(r)$. On aura besoin des résultats suivants, qui sont vrais si la variété X est de dimension n . Soient (E, θ) un fibré de Higgs de rang r , $(E^*, -\check{\theta})$ le fibré de Higgs dual : $\check{\theta}$ est la forme différentielle régulière à valeurs dans $End(E^*)$ obtenue à partir de θ par transposition.

(a) On a $H_{Dol}^{2n}(\mathcal{O}_X) = \mathbf{C}$; l'accouplement $E \times E^* \rightarrow \mathcal{O}_X$ est compatible avec les structures de Higgs et induit une dualité, dite de Poincaré-Serre

$$H_{Dol}^q(E) \cong H_{Dol}^{2n-q}(E^*)^*$$

(b) La caractéristique d'Euler-Poincaré de E , définie par la formule $\chi_{Dol}(E) = \sum_i (-1)^i \dim H_{Dol}^i(E)$ est liée à la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi_{top}(X)$ par la relation

$$\chi_{Dol}(E) = r \chi_{top}(X)$$

La démonstration du théorème 10 se décompose en deux : irréductibilité locale, et connexité : c'est l'objet des propositions 6 et 7 qui suivent.

Proposition 6.—*Si X est une courbe, l'espace analytique $M_{Dol}^{an}(r)$ est localement irréductible.*

Cet énoncé est une conséquence de la description locale de $M_{Dol}^{an}(r)$. Soient (E, θ) un fibré de Higgs sur la courbe X , somme directe de fibrés de Higgs stables de degré 0, $End(E)$ le fibré de Higgs des endomorphismes de E , et $End_0(E)$ le fibré des endomorphismes de trace nulle. On dispose d'une forme quadratique $q : \alpha \mapsto \alpha \wedge \alpha = \frac{1}{2}[\alpha, \alpha]$

$$H_{Dol}^1(End(E)) \rightarrow H_{Dol}^2(End_0(E)).$$

Considérons le cône $\Gamma \subset H_{Dol}^1(End(E))$ d'équation $q(\alpha) = 0$. Le groupe $Aut(E)$ des automorphismes de Higgs est un groupe linéaire qui opère sur Γ par conjugaison ; du point de vue analytique, au voisinage du point $p \in M_{Dol}^{an}(r)$ défini par (E, θ) , on a un isomorphisme de germes d'espaces analytiques

$$\varphi : (\Gamma/Aut(E), 0) \cong (M_{Dol}^{an}(r), p).$$

Ceci résulte de la théorie générale des déformations de Schlessinger et Stasheff, Deligne, Goldman et Millson ([13]). L'espace $H_{Dol}^2(End_0(E))$ est, dans la dualité de Poincaré-Serre, le dual de l'espace des endomorphismes de Higgs de E de trace nulle ; en particulier, quand (E, θ) est stable, cet espace est nul, et le groupe des automorphismes, réduit à \mathbf{C}^* , opère trivialement. Ceci fournit la lissité de $M_{Dol}(r)$ au voisinage d'un point p stable ; de plus, la dimension au voisinage d'un tel point est donnée par $\dim H_{Dol}^1(End(E)) = -\chi_{Dol}(End(E)) + 2 = 2r^2(g - 1) + 2$. Si E est somme directe de fibrés de Higgs stables de degré 0 :

$$E = \oplus_i E_i^{r_i}$$

le morphisme q peut se calculer en termes de matrices en choisissant une base de $H_{Dol}^1(Hom(E_i, E_j))$, et l'énoncé se ramène à prouver un résultat du type suivant : si $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ sont des matrices carrées, la variété algébrique définie par l'équation

$$\sum_{i=1}^k [a_i, b_i] = 0$$

est irréductible ([31]).

Proposition 7.— *Si X est une courbe, la variété $M_{Dol}(r)$ est connexe.*

C'est ici qu'intervient l'action de \mathbf{C}^* . Rappelons (cf. section 5) que $\mathcal{M} = M_{Dol}(r)$ se plonge dans un espace projectif $\mathbf{P}(W)$ (espace projectif des droites d'un espace vectoriel W) et que l'action de \mathbf{C}^* s'étend en une action linéaire $\mathbf{C}^* \rightarrow GL(W)$. Ecrivons $W = \oplus_{\alpha} W_{\alpha}$, où W_{α} désigne le sous-espace

propre relatif au caractère $t \mapsto t^\alpha$. L'ensemble des points fixes de l'action est la réunion disjointe des variétés linéaires $\mathbf{P}(W_\alpha)$. Pour $z \in \mathbf{P}(W)$ désignons par z_0 (resp. z_∞) la limite de tz quand $t \rightarrow 0$ (resp. $t \rightarrow \infty$) et $\alpha_0(z)$ (resp. $\alpha_\infty(z)$) l'unique entier α tel que $z_0 \in \mathbf{P}(W_\alpha)$ (resp. $z_\infty \in \mathbf{P}(W_\alpha)$). On a $\alpha_0(z) \leq \alpha_\infty(z)$, l'égalité n'ayant lieu que si z est un point fixe. D'après le théorème de propreté (proposition 5), z_0 appartient à \mathcal{M} si $z \in \mathcal{M}$. Considérons d'autre part le sous-schéma fermé $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ correspondant aux classes de fibrés de Higgs $(E, 0)$, où E est un fibré semi-stable de degré 0 : il s'identifie à la variété de Narasimhan et Seshadri ([28]) et est donc propre et irréductible. Chacun de ses points est évidemment invariant par \mathbf{C}^* .

Lemme 10.— *Soit $y \in \mathcal{M}$ un point fixe. Si $y \notin \mathcal{N}$, il existe $z \in \mathcal{M}$ distinct de y et tel que $z_\infty = y$.*

Voici comment cet énoncé entraîne la connexité : supposons qu'il existe une composante connexe \mathcal{M}' de \mathcal{M} qui ne rencontre pas \mathcal{N} . Soit α' le plus petit des nombres $\alpha_0(z')$, pour $z' \in \mathcal{M}'$. Cette borne inférieure est atteinte en un point fixe $y \in \mathcal{M}'$; ce point n'appartient pas à \mathcal{N} . D'après le lemme, il existe donc $z \in \mathcal{M}$ distinct de y et tel que $z_\infty = y$. On a alors $z \in \mathcal{M}'$, et $\alpha_0(z) < \alpha_\infty(z) = \alpha'$, ce qui fournit une contradiction. Par suite \mathcal{M} est connexe.

Démonstration du lemme 10. Soit (E, θ) un représentant de y ; on peut supposer qu'il s'agit d'un fibré de Higgs stable. D'après la proposition 4, il s'écrit $E = \bigoplus_{i=1}^k F_i$, où F_i est un sous-fibré de E tel que $\theta(F_i) \subseteq \Omega^1 \otimes F_{i-1}$. Par hypothèse, $y \notin \mathcal{N}$, donc $\theta \neq 0$; alors $k \geq 2$. Puisque (E, θ) est stable, on a $\deg(F_1) < 0$ et $\deg(F_k) > 0$. Par suite, le fibré $\text{Hom}(F_k, F_1)$ est de degré < 0 , et il existe un élément non nul η dans $\text{Ext}^1(F_k, F_1)$. Considérons l'extension G_t définie par l'élément $t^k \eta$: on a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow F_1 \rightarrow G_t \rightarrow F_k \rightarrow 0.$$

On munit le fibré vectoriel $E_t = G_t \oplus (\bigoplus_{1 < i < k} F_i)$ d'une structure de fibré de Higgs en considérant le morphisme $\theta_t : E_t \rightarrow \Omega^1 \otimes E_t$ défini par les

conditions suivantes : $\theta_t |_{G_t}$ est le morphisme composé $G_t \rightarrow F_k \rightarrow \Omega^1 \otimes F_{k-1} \hookrightarrow \Omega^1 \otimes E_t$ et si $1 < i < k$, $\theta_t |_{F_i} = \theta |_{F_i}$.

Remarquons que pour $t = 0$, on récupère le fibré de Higgs (E, θ) . La stabilité étant une propriété ouverte, (E_t, θ_t) est encore un fibré de Higgs stable. D'autre part, si $t \neq 0$, on construit un isomorphisme $\varphi_t : (E_t, \theta_t) \rightarrow (E_1, \frac{1}{t}\theta_1)$ en posant, pour $1 < i < k$, $\varphi_t |_{F_i} = t^i id_{F_i}$, et de sorte que $\varphi_t |_{G_t}$ rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & F_1 & \rightarrow & G_t & \rightarrow & F_k & \rightarrow & 0 \\ & & id \downarrow & & \downarrow \varphi_t & & \downarrow t^k & & \\ 0 & \rightarrow & \bar{F}_1 & \rightarrow & \bar{G}_1 & \rightarrow & \bar{F}_k & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Il en résulte que, dans \mathcal{M} , $\lim_{t \rightarrow 0} (E_1, \frac{1}{t}\theta_1) = (E, \theta)$. Il reste à vérifier que (E, θ) n'est pas S-équivalent à (E_1, θ_1) . Mais puisqu'il est stable, il suffit de vérifier que ces deux fibrés de Higgs ne sont pas isomorphes. Ceci est dû au fait que (E, θ) étant stable, il n'a pas d'autre automorphisme que les homothéties : ainsi les sous-fibrés F_i construits dans la proposition 4 sont intrinsèquement attachés à (E, θ) . S'il existait un tel isomorphisme, E_1 devrait contenir un sous-fibré F'_k jouant le même rôle que F_k . Vu la définition de θ_1 , ce sous-fibré, de même rang que F_k , devrait être contenu dans G_1 , et tel que $F_1 \cap F'_k = 0$. Il définirait donc un scindage de la suite exacte définissant G_1 , ce qui est absurde puisque $\eta \neq 0$.

L'un des objectifs de Simpson est de généraliser le calcul des nombres de Betti de la variété $M_{Higgs}(P)$, fait par Hitchin en rang 2 et degré 1 sur les courbes, au moins quand cette variété est lisse : comme pour la variété de Narasimhan et Seshadri sur les courbes [1], on peut espérer obtenir des formules de récurrence permettant théoriquement de calculer ces nombres de Betti. Une tentative est faite dans ce sens dans [33] ; ceci nécessite une meilleure compréhension de la structure de la variété des points fixes, et du comportement de l'action au voisinage des points fixes.

Bibliographie

- [1] **M.F. Atiyah et R. Bott.** *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. R. Soc. London **A308** (1982), 523-615.
- [2] **F.A. Bogomolov.** *Holomorphic tensors and vector bundles on projective varieties*, Math. USSR Izvestija **13** (1979), 499-555.
- [3] **R. Bott and S.S. Chern.** *Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeros of their holomorphic cross-sections*, Acta Mathematica **114** (1968), 71-112.
- [4] **K. Corlette.** *Flat G-bundles with canonical metrics*, J. Diff. Geom. **28** (1988), 361-382.
- [5] **P. Deligne.** *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Maths **163** (1970) Springer.
- [6] **S.K. Donaldson.** *Infinite determinants, stable bundles and curvature*, Duke Math. Journal **54.1** (1987), 231-247.
- [7] **S.K. Donaldson.** *Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc.(3)**50** (1985), 1-26.
- [8] **S.K. Donaldson.** *Twisted harmonic maps and self-duality equations*, Proc. London Math. Soc **55** (1987), 127-131.
- [9] **S.K. Donaldson.** *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri*, J. Differential Geom. **18** (1983), 269-277.
- [10] **J. Eells et J.H. Sampson.** *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. of Math. **86** (1964), 109-160.
- [11] **H. Flenner.** *Restrictions of semistable bundles on projective varieties*, Comment. Math. Helvetici **59** (1984), 635-650.
- [12] **D. Gieseker.** *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface*, Ann. of Math. **106** (1970), 45-60.
- [13] **W. Goldman et J. Millson.** *The deformation theory of representation of fundamental groups of compact Kähler manifolds*, Preprint, University of Maryland.

- [14] **P.A. Griffiths.** *Periods of integrals on algebraic manifolds III*, Publ. Math. I.H.E.S. **38** (1970), 125-180.
- [15] **A. Grothendieck.** *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, IV : les schémas de Hilbert*. Séminaire Bourbaki, Exposé **221** (1960-61).
- [16] **R.S. Hamilton.** *Harmonic mappings of riemannian manifolds*, Lecture Notes in math. **471** (1975) Springer.
- [17] **R. Hartshorne.** *Algebraic geometry*, Springer (1977).
- [18] **A. Hirschowitz.** *Sur la restriction des faisceaux semi-stables*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. **14** (1980), 199-207.
- [19] **N.J. Hitchin.** *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London, Math. Soc.(3)**55** (1987), 59-126.
- [20] **N.J. Hitchin.** *Stable bundles and integrable systems*, Duke Math. J. **54** (1987), 91-114.
- [21] **M. Lübke.** *Chern classen von Hermite-Einstein-Vektorbündeln*, Math. Annalen **260** (1982), 133-141
- [22] **C. Margerin.** *Fibrés stables et métriques d'Hermite-Einstein, d'après S.K. Donaldson, K.K. Uhlenbeck et S.T. Yau*, Séminaire Bourbaki, Exposé **683** (1987).
- [23] **M. Maruyama.** *On boundedness of families of torsion free sheaves*, J. Math. Kyoto University **21-4** (1981), 673-701.
- [24] **M. Maruyama.** *Moduli of stable sheaves*, J. Math. Kyoto University, I **17-1** (1977) 91-126 ; II **18-3** (1978) 557-614.
- [25] **V.B. Mehta et A. Ramanathan.** *Semistable sheaves on projective varieties and their restriction to curves*, Math. Annalen **258** (1982), 213-224
- [26] **V.B. Mehta et A. Ramanathan.** *Restriction of stable sheaves and representation of the fundamental group*, Invent. math. **77** (1984), 163-172

- [27] **D. Mumford et J. Fogarty.** *Geometric invariant theory*, Springer (1982).
- [28] **M.S. Narasimhan et C.S. Seshadri.** *Stable and unitary vector bundles on compact Riemann surfaces*, Ann. of maths **82** (1965), 540-567.
- [29] **C.T. Simpson.** *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization*, Journal of the Amer. Math. Soc. **1** (1988), 867-918.
- [30] **C.T. Simpson.** *Higgs bundles and local systems*, Preprint, Princeton University.
- [31] **C.T. Simpson.** *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth variety*, Preprint, Princeton University.
- [32] **C.T. Simpson.** *Non abelian Hodge theory*, Preprint, Princeton University.
- [33] **C.T. Simpson.** *The ubiquity of variations of Hodge structures*, Preprint, Princeton University.
- [34] **C.T. Simpson.** *Harmonic bundles on non compact curves*, Preprint, Princeton University.
- [35] **C.T. Simpson.** *Report on twistor space and the mixed Hodge structure on the fundamental group*, Preprint, Princeton University.
- [36] **K.K. Uhlenbeck et S.T. Yau.** *On the existence of hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles*, Comm. Pure and Appl. Math. **39-S** (1986), 257-293.
- [37] **A. Weil.** *Variétés kählériennes*, Paris, Hermann (1958).

J. Le Potier
U.F.R. de Mathématiques et U.A. 212
Université Paris 7
2, Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05

Astérisque

PIERRE PANSU

**Le flot géodésique des variétés riemanniennes
à courbure négative**

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 738, p. 269-298

http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__269_0

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE FLOT GÉODÉSIQUE DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES À COURBURE NÉGATIVE

par Pierre PANSU¹

1. INTRODUCTION

Sur une variété riemannienne V , la distance entre deux points est, par définition, la borne inférieure des longueurs des courbes qui les relient. Pour deux points assez proches, cette borne inférieure est atteinte pour une unique courbe. On appelle *géodésique* une courbe paramétrée qui réalise ce minimum entre deux quelconques de ses points (assez proches), et qui est parcourue à vitesse constante. Les géodésiques sont les solutions d'une équation différentielle du second ordre. Autrement dit, ce sont les projections des orbites d'un champ de vecteurs X sur le fibré tangent TV . On dit que V est *complète* si ce champ est complet, i.e., s'il s'intègre en un groupe à un paramètre (ϕ_t) de difféomorphismes de TV , défini pour tout temps.

Ainsi, les géodésiques peuvent être vues sous deux angles. Le point de vue variationnel - la géodésique est solution d'un problème de Dirichlet - a joué un rôle essentiel dans le développement interne de la géométrie riemannienne. Le point de vue dynamique - la géodésique est solution d'un problème de Cauchy - a donné naissance à une branche particulièrement riche en interactions avec les disciplines voisines.

¹ L'auteur est partiellement soutenu par le contrat CEE GADGET n° SC1-0105-C.
S.M.F.

Astérisque 201-202 - 203 (1991)

Dans cet exposé, on rappellera quelques-unes des propriétés globales du flot lorsque la courbure est négative. La plus saisissante est sans doute le fait que les géodésiques, au comportement apparemment irrégulier, s'organisent collectivement suivant une loi codée dans le groupe fondamental (stabilité structurelle). L'apport de la théorie ergodique, notamment la notion d'entropie, soulève de nombreux problèmes de rigidité du genre : telle propriété est caractéristique de tel exemple. On présentera notamment trois résultats récents qui vont dans ce sens :

- caractérisation du flot géodésique des espaces localement symétriques par la différentiabilité du feuilletage stable ;
- caractérisation des espaces localement symétriques comme minima de l'entropie normalisée par la courbure ;
- détermination d'une surface par son spectre marqué des longueurs.

Je tiens à remercier Patrick Foulon et les participants du séminaire de Géométrie Ergodique de l'Ecole Polytechnique qui m'ont initié aux mystères du flot géodésique.

2. INSTABILITE INFINITESIMALE

2.1. Un flot hamiltonien. Une géodésique parcourue à vitesse constante est un point critique de l'énergie

$$\frac{1}{2} \int \|\dot{c}(t)\|^2 dt.$$

Depuis Hamilton, on sait que le champ de vecteurs X , dont les orbites se projettent sur les géodésiques, vit plus naturellement sur le fibré cotangent que sur le fibré tangent.

La métrique définit une fonction H - la moitié du carré de la norme des covecteurs - sur le cotangent. Or celui-ci porte une 1-forme canonique α , dont la différentielle extérieure $d\alpha$ est symplectique. La relation

$$dH = -i_Y d\alpha$$

définit le champ de vecteurs hamiltonien Y , dont le flot préserve α . La métrique définit aussi un difféomorphisme (linéaire sur les fibres) de TV sur T^*V . Ce difféomorphisme applique le champ hamiltonien Y sur le flot géodésique X , la forme α sur une 1-forme A et la fonction H en une fonction - la norme des vecteurs - invariante par X . Le flot géodésique est tangent aux surfaces de niveau - les fibrés en sphères, et on considérera désormais sa restriction au fibré unitaire T_1V . La restriction de A au fibré unitaire est une forme de contact, qui détermine entièrement le champ X , via les relations

$$A(X) = 1, \quad i_X dA = 0.$$

On dit que X est le *champ de Reeb* de la forme de contact A . On voit que X préserve l'élément de volume

$$A \wedge (dA)^{n-1}$$

(où n est la dimension de V) que l'on appelle souvent la *mesure de Liouville*.

2.2. Intervention de la courbure.

Pour évaluer la différentielle du difféomorphisme ϕ_t , on doit résoudre l'équation aux variations des géodésiques. C'est l'équation de Jacobi. Elle porte sur des champs de vecteurs tangents J le long d'une géodésique $c(t)$, et s'écrit, en fonction de la dérivée covariante D de la métrique riemannienne,

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\dot{c}, J)\dot{c} = 0$$

où R est le tenseur de courbure riemannien. La courbure apparaît donc à travers l'endomorphisme symétrique

$$u \mapsto R(\dot{c}, u)\dot{c},$$

nul sur \dot{c} , et dont les autres valeurs propres sont des courbures sectionnelles.

De cette équation vectorielle, tirons une équation satisfaite par la norme du champ de vecteurs J :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}|J| &= -\langle R(\dot{c}, J)\dot{c}, \frac{J}{|J|} \rangle + \left| \frac{DJ}{dt} \right|^2 - \left\langle \frac{J}{|J|}, \frac{DJ}{dt} \right\rangle^2 \\ &\geq -\langle R(\dot{c}, J)\dot{c}, \frac{J}{|J|} \rangle. \end{aligned}$$

On voit qu'il est plus aisé d'interpréter l'équation de Jacobi quand on se donne une borne supérieure sur la courbure sectionnelle plutôt qu'une borne inférieure. On suppose désormais que J est orthogonal au vecteur vitesse \dot{c} .

Si la courbure sectionnelle est négative ou nulle, la fonction $t \rightarrow |J(t)|$ est convexe. Cela annonce le fait que *localement la fonction distance entre deux géodésiques est convexe*.

Si de plus la courbure sectionnelle K est majorée par une constante négative, par exemple $K \leq -1$, alors en général, la fonction $|J(t)|$ tend vers l'infini au moins comme e^t lorsque t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Cela indique qu'*en général deux géodésiques infiniment voisines divergent exponentiellement*.

Il y a toutefois des exceptions : certaines solutions tendent vers 0 en $+\infty$ ou en $-\infty$. L'espace E des champs de Jacobi le long de c orthogonaux à \dot{c} est de dimension $2n - 2$. Les solutions qui tendent vers 0 en $+\infty$ (resp. $-\infty$) forment un sous-espace vectoriel E^s (resp. E^u) de dimension moitié $n - 1$. En effet, pour chaque t , la condition $J(t) = 0$ définit un sous-espace $E(t)$ de E , de dimension $n - 1$, et E^s est la limite des $E(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Clairement, $E^s \cap E^u = 0$. Revenant au fibré unitaire tangent, en chaque point $p \in T_1V$, on interprète E_p^s et E_p^u comme des sous-espaces de T_pT_1V . En termes dynamiques, E_p^s est candidat à être l'espace tangent en p à la variété stable de p .

Conclusion. La courbure négative se manifeste de trois manières différentes :

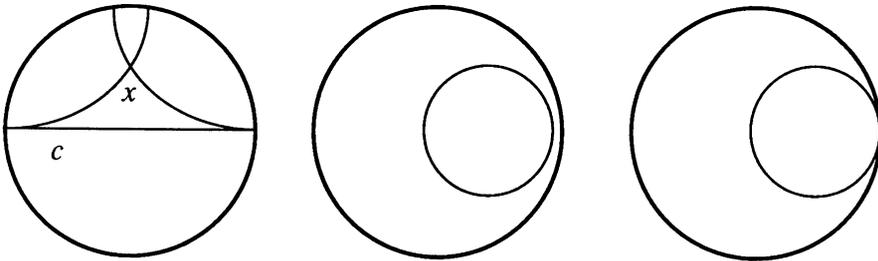
- (1) la convexité de la fonction distance ;
- (2) l'instabilité des géodésiques ;

- (3) l'existence de variétés stable et instable transverses et de dimension $n - 1$.

3. L'ESPACE DES GEODESIQUES

3.1. Le plan hyperbolique

Le plan hyperbolique, noté H^2 , découvert par Lobatchevsky et Bolyai vers 1828, est une géométrie où l'axiome des parallèles est en défaut. On le représente traditionnellement comme l'intérieur d'un disque plan. Les géodésiques sont les arcs de cercle orthogonaux au bord (appelé le *cercle à l'infini* et noté $H^2(\infty)$ car il se trouve à distance infinie). On voit que, étant donné une géodésique c et un point x , il existe une infinité de géodésiques passant par x et ne rencontrant pas c (voir figure).



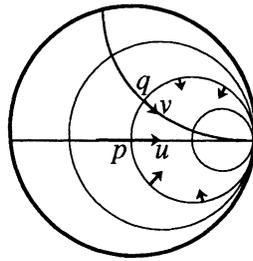
Le plan hyperbolique

Toutefois, par deux points distincts du cercle à l'infini passe exactement une géodésique. L'espace des géodésiques $G(H^2)$ du plan hyperbolique est donc

$$G(H^2) = H^2(\infty) \times H^2(\infty) - \text{Diag.}$$

Les variétés stables du flot géodésique sont aussi aisées à décrire. Les cercles géodésiques (lieu des points équidistants d'un point donné)

sont représentés par des cercles euclidiens mais décentrés (le centre hyperbolique est plus près du bord que le centre euclidien). A la limite, les cercles euclidiens tangents au bord s'appellent *horocycles*. Leurs trajectoires orthogonales sont des géodésiques convergeant exponentiellement dans une direction. Il y a donc bien, pour chaque $p = (x, u)$ du fibré unitaire, une variété stable. On l'obtient comme suit. L'orbite de p est une géodésique orientée aboutissant en un point ξ du cercle à l'infini. Un point $q = (y, v)$ de la variété stable de p a sa projection y sur l'horocycle passant par x et q , et le vecteur v est la normale dirigée vers q (voir figure).



Les variétés stables s'identifient aux horocycles

3.2. Les quotients du plan hyperbolique.

Dans les années 20, E. Artin, G.D. Birkhoff, J. Koebe s'intéressent à la dynamique du flot géodésique sur un quotient du plan hyperbolique. Ces variétés s'imposent en raison du dictionnaire - issu du théorème d'uniformisation de Riemann-Poincaré-Koebe : chaque surface de Riemann, i.e., variété complexe de dimension 1, de caractéristique d'Euler négative s'écrit uniquement comme un quotient de ce plan hyperbolique par un groupe discret sans point fixe d'isométries préservant l'orientation.

D'autre part, la complexité de la dynamique a été mise en évidence dès 1898 par J. Hadamard. Suivant la voie indiquée par H. Poincaré, on étudie les orbites fermées. Puis, sous l'impulsion de G. D. Birkhoff, les questions de transitivité. Petit à petit, les résultats seront étendus à la

courbure variable et aux dimensions supérieures. Voir à ce sujet l'article de revue de G. A. Hedlund [He2].

Si V est le quotient de H^2 par un groupe discret Γ d'isométries de H^2 , sans point fixe, alors l'espace des géodésiques de V est le quotient de l'espace des géodésiques du revêtement universel $\tilde{V} = H^2$ par l'action de Γ . Comme l'action de Γ se prolonge au bord, on a

$$G(V) = \Gamma \backslash (H^2(\infty) \times H^2(\infty) - \text{Diag}).$$

Les propriétés du flot géodésique de V se traduisent par des propriétés de l'action de Γ sur $H^2(\infty)$ et sur $G(H^2)$.

Une géodésique fermée dans V correspond à un axe de Γ , i.e. une paire de points de $\tilde{V}(\infty)$, qui sont des points fixes (une source et un puit) d'un élément de Γ . On a un dictionnaire :

densité des géodésiques fermées dans T_1V	\iff	densité des axes dans $G(H^2)$
la plupart des géodésiques sont denses dans T_1V	\iff	la plupart des orbites de Γ dans $G(H^2)$ sont denses
ergodicité du flot géodésique dans T_1V pour la mesure de Liouville.	\iff	ergodicité de Γ dans $G(H^2)$ pour la mesure symplectique

3.3. Généralisation

La discussion précédente s'étend aux variétés simplement connexes à courbure négative (et même, pour certains aspects, courbure négative ou nulle). La convexité de la distance entre géodésiques joue un grand rôle : elle garantit l'unicité de la géodésique joignant deux points et la convexité des boules. Etant donné une géodésique c , la famille des boules passant par x et centrées en $c(t)$ est croissante, sa réunion définit une *horoboule*, dont le bord est une *horosphère*. Deux géodésiques c et c' définissent

la même famille d'horosphères si et seulement si la distance $d(c(t), c'(t))$ reste bornée lorsque t tend vers $+\infty$. Deux telles géodésiques sont dites *asymptotes*, et les classes d'équivalence de géodésiques asymptotes forment la *sphère à l'infini* de V , notée $V(\infty)$ (si l'idée de cette relation d'équivalence remonte à M. Morse [M2], J. Hadamard [H1] mettait déjà en évidence l'invariance de "l'ordre circulaire" des géodésiques).

Lorsque la courbure est strictement négative, deux géodésiques asymptotes se rapprochent l'une de l'autre exponentiellement, et les horosphères, relevées dans le fibré unitaire par leur vecteur normal rentrant, sont les variétés stables. De plus, chaque horosphère est une sous-variété plongée, aussi régulière que la métrique donnée. Enfin, par deux points de la sphère à l'infini passe une unique géodésique. Par conséquent, lorsque V est simplement connexe à courbure strictement négative, l'espace des géodésiques $G(V)$ s'identifie aux paires de points distincts de la sphère à l'infini.

En général, pour une variété V à courbure négative, non simplement connexe, de revêtement universel \tilde{V} , l'espace des géodésiques $G(V)$ est le quotient par l'action du groupe fondamental $\pi_1(V)$ de l'ensemble des paires de points distincts de $\tilde{V}(\infty)$, et le dictionnaire s'étend, P. Eberlein et G. O'Neill [EO], [E].

4. GEODESIQUES FERMEES

Dans ce paragraphe, on explique pourquoi, en courbure négative, il y a tant de géodésiques fermées. Le principe dégagé vers 1924 par E. Artin, J. Nielsen, M. Morse (voir [He2]) est que, près de chaque géodésique presque fermée, il y a une géodésique fermée. Cela résulte du fait suivant : dans l'espace euclidien, si on se déplace en regardant le ciel, l'aspect de la voûte étoilée ne change pas (l'angle entre les étoiles ne varie pas). Dans le plan hyperbolique, au contraire, lorsqu'on se déplace, on voit les étoiles s'écarter les unes des autres. Plus précisément,

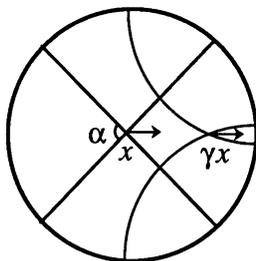
Lemme.— Soit \tilde{V} une variété simplement connexe à courbure majorée par une constante négative $-\kappa$. Soit S un secteur de sommet x , d'ouverture α , déterminant un ouvert O sur la sphère à l'infini. Si $y \in S$ et $d(x, y) > 1$, alors O est vu de y sous un angle au moins égal à $\alpha'(\kappa, \alpha) > \alpha$.

Théorème. (Closing Lemma).— Soit V une variété à courbure négative. Pour tout ϵ petit et T grand, il existe $\eta(\epsilon, T)$ avec la propriété suivante : pour tout $p \in T_1V$ tel que $d(p, \phi_T(p)) < \eta$, il existe $q \in T_1V$ et un $T' \in [T - \epsilon, T + \epsilon]$ tel que $\phi_{T'}(q) = q$ et $d(\phi_t p, \phi_t q) < \epsilon$ pour tout $t \in [0, T]$.

En effet, passons au revêtement universel. Il existe une isométrie $\gamma \in \pi_1(M)$ telle que

$$d(\gamma(p), \phi_T(p)) < \epsilon .$$

Il faut montrer que γ laisse invariante une géodésique proche de p .



Pour ϵ petit et T grand, $\gamma(p)$ est contenu dans un secteur $S(p, \alpha)$ de petite ouverture. D'après le lemme, ce secteur est envoyé dans lui-même par γ . Par symétrie, le secteur opposé $S(-\phi_T(p), \alpha)$ est envoyé dans lui-même par γ^{-1} . La famille décroissante de convexes

$$\gamma^n(S(p, \alpha))$$

a une intersection vide, donc leurs adhérences dans $V \cup V(\infty)$ ont un seul point commun, fixé par γ . On trouve de même un point fixe de γ^{-1} . La géodésique qui les joint est invariante par γ et proche de p .

Corollaire.— Soit V une variété simplement connexe à courbure majorée par une constante négative. Toute géodésique récurrente (i.e., qui s'accumule sur elle-même dans T_1V) est limite de géodésiques fermées. En particulier, si le volume de V est fini, les points périodiques du flot géodésique sont denses dans T_1V .

Il y a d'autres manières de mesurer la richesse d'un flot en orbites périodiques : compter le nombre de géodésiques fermées de longueur inférieure à T , étudier leur répartition "en mesure" (voir au paragraphe 11), étudier finement la répartition des longueurs à travers les propriétés de la fonction zeta (voir [PP]). La méthode consiste à établir une correspondance entre le flot et un *flot symbolique*, décrit en termes finis. L'idée de départ - coder chaque orbite par une suite infinie de symboles - se trouve en germe dans [H1] et s'est développée en une riche théorie que M. Morse [M1] a baptisée *dynamique symbolique*.

5. TRANSITIVITE

L'instabilité des géodésiques, mise en évidence en 2.2, donne à penser que, sur une variété compacte, une géodésique typique va visiter toute la variété. C'est ce que l'on entend par transitivité. Par exemple, J. Hadamard [H1] montrait que, étant donnée une surface à courbure négative plongée dans l'espace euclidien, qui a par conséquent des branches infinies, après une perturbation arbitrairement petite, on peut faire partir toute géodésique dans n'importe laquelle des branches infinies.

La *transitivité topologique* affirme l'existence de géodésiques denses. C'est une conséquence assez directe de la densité des orbites périodiques, voir [He2].

Dans la catégorie mesurable, la transitivité s'appelle *ergodicité*. Elle affirme que *les seules fonctions mesurables invariantes sont les fonctions constantes presque partout*. Activement recherchée - l'histoire de l'ergodicité remonte à Maxwell et Boltzmann, mais peu d'exemples de systèmes

dynamiques ergodiques existent avant les années 30, - elle est prouvée par Hedlund en 1934 [He1] pour les surfaces d'aire finie, à courbure constante.

En 1938, E. Hopf propose l'argument suivant, qui s'étend au cas de la courbure variable [Hop]. Il s'agit de prouver l'ergodicité de l'action du groupe $\pi_1(V)$ sur les paires de points du cercle à l'infini. Un lemme de G. Birkhoff permet de se ramener aux fonctions obtenues comme limites temporelles de fonctions continues à support compact sur V (les limites temporelles

$$f_{\pm}(x) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f \circ \phi_s(x) ds$$

existent pour presque tout x et sont presque partout égales). Or clairement la limite f_+ est constante sur les variétés stables, i.e., sur les tranches $\xi \times \tilde{V}(\infty)$, f_- est constante sur les variétés instables.

Dans cet argument intervient un point technique : la mesure naturelle sur $G(\tilde{V})$ est-elle absolument continue par rapport à la mesure produit ? Cela découle de la différentiabilité de l'homéomorphisme entre l'espace des géodésiques $G(\tilde{V})$ et $\tilde{V}(\infty) \times \tilde{V}(\infty) - \text{Diag}$, liée à la régularité du feuilletage stable W^s . E. Hopf savait montrer seulement en dimension 2 que le feuilletage stable est de classe C^1 . En dimensions supérieures, le problème de l'ergodicité du flot géodésique des variétés compactes à courbure négative non constante est resté ouvert jusqu'en 1962. D.V. Anosov le résoud en montrant que le feuilletage stable est absolument continu [A1]. On reviendra sur cette question de régularité au paragraphe 8.

6. STABILITE STRUCTURELLE

Dans une variété compacte à courbure négative, chaque classe d'homotopie libre de courbes fermées contient une unique géodésique (à translation du paramètre près). Cela résulte du principe variationnel (existence) et de la convexité (unicité). Par conséquent, si on perturbe la métrique, on peut suivre chaque géodésique fermée. En est-il de même pour les géodésiques non fermées ? La réponse remonte à M. Morse

[M1] : l'espace des géodésiques $G(V)$ est essentiellement indépendant de la métrique à courbure négative particulière. Cela résulte de la caractérisation de la sphère à l'infini du revêtement universel au moyen de *quasigéodésiques*, due à G.A. Margulis.

6.1. Invariance de l'espace des géodésiques

Une courbe σ dans \tilde{V} est une *quasigéodésique* si

- (1) sa vitesse est bornée ;
- (2) le rapport $\frac{\|t-s\|}{d(\sigma(t),\sigma(s))}$ est borné.

On montre que, dans une variété simplement connexe à courbure majorée par une constante négative, toute quasigéodésique est contenue dans un voisinage tubulaire de largeur bornée d'une unique géodésique. Par conséquent, la sphère à l'infini s'identifie aux classes d'équivalence de quasigéodésiques asymptotes.

En fait, la notion de quasigéodésique garde un sens dans un groupe discret de type fini. Si V est compacte, $\tilde{V}(\infty)$ est attaché intrinsèquement au groupe discret $\Gamma = \pi_1(V)$, et

$$G(V) = \Gamma \setminus (\Gamma(\infty) \times \Gamma(\infty) - \text{Diag}).$$

La sphère à l'infini devient un outil pour l'étude du groupe Γ : des propriétés de l'action de Γ sur $\Gamma(\infty)$, on déduit la structure des sous-groupes abéliens, l'existence de sous-groupes distingués libres, la finitude du nombre de sous-groupes isomorphes à un groupe donné, la finitude de $\text{Out}(\Gamma)$, etc...

Ce point de vue, inauguré par A. Preissmann [P], a été développé par M. Gromov [Gr2]. Celui-ci généralise les propriétés des groupes fondamentaux liées à la courbure négative à la classe des *groupes hyperboliques*, qui contient "la plupart" des groupes discrets de type fini, voir l'exposé [Gh3].

6.2. Stabilité structurelle des flots d'Anosov

Soit V une variété compacte, X le flot géodésique d'une métrique riemannienne à courbure négative, vu comme un champ de vecteurs sur $T_1 V$.

On vient de voir que, si on perturbe X parmi les champs géodésiques attachés à des métriques riemanniennes, l'espace des orbites reste inchangé. Qu'en est-il pour des perturbations plus générales ? C'est le problème de la stabilité structurelle.

D.V. Anosov [A2] a formulé ses résultats sous l'hypothèse suivante sur un champ de vecteurs différentiable X , de flot ϕ_t , sur une variété M : il existe une décomposition

$$(U) \quad TM = E^s \oplus E^u \oplus E^0$$

où $E^0 = \mathbf{R}X$, et sur E^s , (resp. E^u) la dérivée $d\phi_t$ (resp. $d\phi_{-t}$) est uniformément contractante.

Depuis, un champ de vecteurs ayant ces propriétés est appelé *flot d'Anosov*. La définition correspondante pour un difféomorphisme est évidente (supprimer la partie E^0).

Théorème [D.V. Anosov], ([A2]).— *Sur une variété compacte, un champ de vecteurs d'Anosov X est C^1 -structurellement stable, i.e., si X' est un champ de vecteurs suffisamment C^1 -proche de X , il existe un homéomorphisme (dépendant différemment de la perturbation) envoyant les orbites du flot de X sur les orbites du flot de X' .*

D.V. Anosov fait remonter la méthode qu'il emploie à J. Hadamard, [H2].

Peut-on faire mieux ? On ne peut certainement pas transformer cette équivalence d'orbites en conjugaison (même mesurable), car les longueurs des orbites fermées, par exemple, seraient alors conservées.

Du côté de la régularité, on peut affirmer que l'équivalence d'orbites n'est pas absolument continue en général. En effet, il résulte de la preuve du théorème de rigidité de G.D. Mostow [Mos] que, pour des surfaces à courbure -1 homéomorphes mais non isométriques, la correspondance entre cercles à l'infini n'est pas absolument continue.

Enfin, on peut se demander si, pour deux variétés à courbure négative ayant même type d'homotopie, l'homéomorphisme entre fibrés unitaires

tangents implique un homéomorphisme entre variétés. C'est vrai en grande dimension, mais on ne peut pas aller jusqu'à un difféomorphisme, [FJ].

6.3. Universalité de l'hyperbolicité

L'instabilité du comportement individuel des trajectoires entraîne la stabilité de leur comportement collectif. Ce principe paradoxal, mis en évidence par D.V. Anosov dans le contexte des flots géodésiques, a été observé simultanément par S. Smale sur son fameux "fer à cheval". S. Smale [S] a dégagé l'idée que l'hypothèse (U) d'Anosov, satisfaite seulement le long d'un compact invariant Λ suffit pour assurer la stabilité de Λ et une description symbolique. Un tel compact invariant est dit *hyperbolique*.

Il émerge de ces travaux une méthode d'investigation d'un système dynamique : partant du fait que les ensembles invariants hyperboliques sont compris, on doit décrire comment le comportement du système se rattache ou diffère du comportement hyperbolique. Ce point de vue est toujours d'actualité, voir par exemple [Y].

7. COURBURE NEGATIVE OU NULLE ET ERGODICITE

Certains aspects de la courbure négative s'étendent au cas où on autorise la courbure à s'annuler tout en restant non positive. En quelque sorte, il suffit qu'une géodésique rencontre un peu de courbure négative pour que son comportement soit conforme au modèle hyperbolique. Cette généralisation fait l'objet de l'article de revue de Ya. Pesin [Pes].

La question de l'ergodicité du flot géodésique a conduit W. Ballmann à l'hypothèse suivante.

Définition.— *Soit V une variété à courbure négative ou nulle. Le rang d'une géodésique c est la dimension de l'espace vectoriel des champs de Jacobi parallèles le long de c . Le rang de la variété V est la borne inférieure des rangs des géodésiques de V .*

L'hypothèse de rang égal à 1 entraîne probablement l'ergodicité du flot géodésique. Malheureusement, ce point n'est pas encore complètement éclairci. Toutefois, on a

Théorème [W. Ballmann et M. Brin], ([BB]).— *Soit V une variété à courbure négative ou nulle, de rang un. Si le volume de V est fini, alors il existe dans T_1V un ouvert invariant sur lequel le flot géodésique est ergodique.*

Voici deux classes de variétés de rang supérieur ou égal à 2 :

- les produits riemanniens : le rang d'un produit est la somme des rangs des facteurs ;
- les espaces symétriques de rang supérieur ou égal à 2 ; un espace symétrique est le quotient d'un groupe de Lie semi-simple par son compact maximal ; le rang est la dimension des sous-espaces plats totalement géodésiques maximaux, et ne vaut 1 que pour une courte liste d'exemples décrits au paragraphe suivant.

Le flot géodésique sur un produit (resp. sur un espace localement symétrique de rang supérieur à 2) a des intégrales premières invariantes par isométries. Il s'agit de l'angle que fait un vecteur tangent avec les facteurs (resp. avec les murs de sa chambre de Weyl).

Suite aux efforts conjugués de W. Ballman, M. Brin, K. Burns, P. Eberlein, R. Spatzier, on sait maintenant que les variétés compactes, à courbure négative ou nulle, de rang supérieur ou égal à deux, sont essentiellement les variétés localement symétriques de rang supérieur ou égal à deux.

Théorème. ([Bal], [BBE], [BBS], [BS]).— *Soit V une variété compacte à courbure négative, de rang au moins égal à 2. Alors le revêtement universel de V est, ou bien un produit, ou bien un espace symétrique de rang supérieur ou égal à 2.*

La preuve consiste à reconstruire un à un les éléments de la géométrie des espaces symétriques : sous-espaces plats totalement géodésiques max-

imaux, chambres de Weyl, intégrales premières. W. Ballmann montre que les intégrales premières sont invariantes par holonomie et conclut avec un théorème fameux de M. Berger. K. Burns et R. Spatzier préfèrent utiliser la rigidité des immeubles de Tits sphériques.

Le théorème est maintenant connu sous l'hypothèse suivante : tout point de T_1V est récurrent [EH].

8. LES ESPACES SYMETRIQUES DE RANG 1

Ce sont les espaces symétriques dont la courbure est strictement négative. Il y a le plan hyperbolique décrit en 3, et ses généralisations, en dualité avec les espaces projectifs. Il y a un exemple, noté \mathbf{KH}^m sur chacun des corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{Ca}$, pour chaque dimension m (seulement $m = 2$ pour les octaves de Cayley \mathbf{Ca}). Par exemple, le plan hyperbolique est à la fois \mathbf{RH}^2 et \mathbf{CH}^1 .

Dans un espace symétrique, le tenseur de courbure est parallèle, l'équation de Jacobi est à coefficients constants. En rang un, le groupe d'isométries est transitif sur le fibré unitaire, et les valeurs propres non nulles de l'opérateur

$$u \mapsto R(\dot{c}, u)\dot{c},$$

ne dépendent pas de \dot{c} . Elles valent -1 (dans le cas réel), -1 et -4 dans les autres cas, avec les multiplicités $(m - 1)k$, et $k - 1$ respectivement ($k = \dim \mathbf{K}$). Voici pourquoi : \mathbf{KH}^m est un ouvert dans le projectif \mathbf{KP}^m . Chaque géodésique est contenue dans une \mathbf{K} -droite unique, qui est totalement géodésique à courbure -4 , et responsable des $k - 1$ valeurs propres -4 . Chaque vecteur propre de valeur propre -1 est tangent à un $\mathbf{RP}^2 \subset \mathbf{KP}^m$ totalement géodésique à courbure -1 , qui contient la géodésique.

Il est clair que, dans ces exemples symétriques, les directions stables E^s , qui sont déterminées par le tenseur de courbure, sont différentiables.

Comme on l'a vu au paragraphe 5, la question de la régularité du feuilletage en variétés stables est délicate. D.V. Anosov a montré que, en

dimension supérieure à 3, le feuilletage n'est pas toujours de classe C^1 . On arrive à C^1 à condition de faire une hypothèse sur les exposants de contraction uniforme du flot (M. Hirsch et C. Pugh [HP], B. Hasselblatt [Has]), qui correspond au pincement $1/4$ pour la courbure sectionnelle.

En dimension 2, S. Hurder et A. Katok [HK] sont allés plus loin : il obtiennent assez de régularité (une dérivée dans la classe de Zygmund) pour pouvoir définir et calculer l'invariant de Godbillon-Vey (c'est heureux, car ces feuilletages sont les principaux exemples où l'invariant de Godbillon-Vey est non trivial, voir par exemple [Gh2]). En fait, leur résultat s'étend aux flots d'Anosov *de contact* en dimension 3. Un flot d'Anosov est de contact si le champ de plans $E^s \oplus E^u$ forme une structure de contact de classe C^∞ ; c'est automatique pour une flot géodésique.

Il est probable que le feuilletage stable n'est de classe C^∞ que pour les espaces localement symétriques de rang 1. Dans cette voie, Y. Benoist, P. Foulon et F. Labourie ont obtenu le résultat suivant, qui constitue une sorte de pendant à la caractérisation des espaces symétriques de rang supérieur à 1 évoquée au paragraphe précédent.

Théorème. [Y. Benoist, P. Foulon et F. Labourie], ([BFL]).— *Tout flot d'Anosov de contact sur une variété compacte, dont les directions stables et instables sont de classe C^∞ est obtenu à partir du flot géodésique d'une variété localement symétrique de rang 1 par les opérations suivantes : passage à un revêtement ou à un quotient fini, changement de paramètre de classe C^∞ .*

En fait, les seuls changements de paramètre possibles sont de la forme X changé en $X/(1 + \alpha(X))$ où α est une 1-forme fermée dont seule la classe de cohomologie joue un rôle.

Remarques. Le résultat en dimension 3 est dû à E. Ghys, [Gh1].

Il est probable que le théorème reste vrai si les feuilletages sont supposés seulement de classe C^2 . Cela a été établi en dimension 3 par S. Hurder et A. Katok [HK].

La preuve : l'idée initiale est due à M. Kanai [Kan]. Soit A la forme de contact. Sur le noyau de A , la forme symplectique dA , les sous-espaces lagrangiens E^u et E^s déterminent une forme quadratique q de signature nulle, invariante par le flot. Par conséquent, $q + A^2$ est une métrique pseudoriemannienne invariante par le flot. Ceci constitue une structure géométrique rigide.

Y. Benoist, P. Foulon et F. Labourie utilisent un résultat de M. Gromov [Gr3] sur les pseudogroupes d'isométries locales pseudoriemanniens : une orbite dense d'un tel pseudogroupe est automatiquement ouverte. Ils obtiennent une algèbre de Lie \mathcal{G} d'isométries locales. La condition d'Anosov entraîne que \mathcal{G} est semi-simple donc l'orbite ouverte et dense porte une structure modelée sur un espace homogène G/H . Un argument dynamique montre que cette structure est complète, donc V est un quotient $V = \Gamma \backslash G/H$.

Il reste à trier les paires G/H possibles. On étudie une "sphère à l'infini généralisée" $(G/H)(\infty) = G/P$ où P est parabolique maximal. La condition d'Anosov entraîne qu'au moins un élément de Γ agit sur G/P comme en courbure négative, i.e., avec un puit et une source.

Ceci conduit à une restriction sur le groupe de Lie G : si P^- est un parabolique maximal opposé à P (par le flot géodésique $X \in \mathcal{G}$), alors P^- a exactement deux orbites dans G/P , dont l'une est réduite à un point. La théorie des groupes algébriques montre que, dans ce cas, G est de rang 1.

Remarques.

Le problème plus vaste où le flot n'est pas supposé de contact est ouvert.

Si on part du flot géodésique de V , on trouve un difféomorphisme de T_1V sur le fibré unitaire T_1V' d'un espace localement symétrique qui échange les flots (le changement de paramètre est exclu dans ce cas). Ce difféomorphisme provient-il d'une isométrie de V sur V' ? La réponse est positive lorsque $\dim V = 2$, [Kat] (voir aussi le paragraphe 10) mais la question reste ouverte en dimension supérieure.

9. ENTROPIES

Ce sont des nombres qui mesurent l'instabilité exponentielle des orbites d'une transformation. Ils ont été inventés par A.N. Kolmogorov [K].

9.1. Entropie topologique Il s'agit de compter, étant donné une résolution ϵ , le nombre d'orbites de longueur n qu'on peut distinguer. Autrement dit, soit ϕ une transformation d'un espace compact M . Notons $\mathcal{O}_n \subset M^n$ l'ensemble des orbites de longueur n , muni de la distance *sup*. On compte le nombre maximal $N(n, \epsilon)$ de boules 2 à 2 disjointes de rayon $\epsilon/2$ dans l'espace métrique \mathcal{O}_n .

L'entropie topologique $h(\phi)$ est la limite

$$h(\phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N(n, \epsilon).$$

Le nombre $h(\phi)$ ne dépend pas de la distance choisie lorsque M est compact.

Pour un flot (ϕ_t) , on définit l'entropie comme étant celle de ϕ_1 .

Pour un flot géodésique, l'entropie topologique est reliée à l'exposant de croissance du volume des boules.

Théorème. [A. Manning], ([Man]).— Soit (ϕ_t) le flot géodésique d'une variété riemannienne compacte V . Pour $r > 0$ et \tilde{x} un point du revêtement universel \tilde{V} , notons $B(\tilde{x}, r)$ la boule de rayon r de centre \tilde{x} dans \tilde{V} . Alors pour tout \tilde{x} ,

$$h(\phi_1) \geq \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \log(\text{vol } B(\tilde{x}, r))$$

et l'égalité a lieu en courbure négative.

En particulier, l'entropie du flot géodésique de V ne dépend que du revêtement universel \tilde{V} de V , et on parlera librement de l'entropie de \tilde{V} . Par exemple, l'entropie de l'espace symétrique $\mathbf{K}H^m$ vaut $km + k - 2$.

En fait, en courbure négative, on a un développement asymptotique

Théorème. [G.A. Margulis], ([Mar]).— Si V est compacte à courbure négative, alors, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{V}$,

$$\text{vol } B(\tilde{x}, r) \sim c(\tilde{x})e^{hr}.$$

On peut aussi penser à l'entropie comme à la dimension de Hausdorff de la sphère à l'infini. Suivant U. Hamenstädt [Ha1], définissons une distance d_∞ sur chaque variété instable comme suit. Si p, q sont sur la même variété instable, on pose

$$d_\infty(p, q) = e^{-t}$$

où t est le réel tel que $d(\phi_t(p), \phi_t(q)) = \epsilon$.

Dans le revêtement universel, chaque variété instable s'identifie à la sphère à l'infini (privée d'un point). Les distances obtenues ainsi sur la sphère à l'infini sont deux à deux localement équivalentes.

Comparons la distance sur l'espace \mathcal{O}_n des orbites de longueur n avec d_∞ . On peut voir \mathcal{O}_n comme T_1V muni d'une distance d_n . La boule de rayon ϵ centrée en p pour la distance d_n est le produit de boules de rayon ϵ dans les directions du flot et de la feuille stable de p , par la boule de rayon e^{-n} pour d_∞ dans la feuille instable. Par conséquent, l'entropie topologique du flot géodésique est la dimension de Hausdorff de d_∞ .

Dans le cas des espaces symétriques de rang 1, la distance d_∞ est explicite. Le groupe d'isométrie est transitif sur chaque sphère, et par conséquent sur chaque horosphère. Une horosphère peut-être vue comme une orbite d'un sous-groupe de Lie nilpotent d'isométries - un \mathbf{R}^{m-1} dans le cas réel, un groupe de Heisenberg dans le cas complexe. La distance d_∞ est la distance euclidienne dans le premier cas. Dans le second, c'est une métrique de Carnot invariante, i.e. les courbes de longueur finie sont tangentes à un champ de plans non intégrable (qui correspond à l'espace propre -1 de la courbure).

On s'attend à ce que la mesure de Hausdorff h -dimensionnelle pour d_∞ joue un rôle important. C'est le cas : cette mesure a été inventée en fait par G.A. Margulis, qui en a donné les caractéristiques suivantes.

Théorème [G.A. Margulis], ([Mar]).— *Il existe une unique mesure qui se décompose localement en*

$$dt d\mu^s d\mu^u$$

où μ^s est une famille de mesures sur les variétés stables, multipliée exactement par e^{ht} par le flot. La famille $dt d\mu^s$ est une mesure transverse invariante pour le feuilletage instable.

Cette mesure a été redécouverte par R. Bowen (d'où la notation μ_{BM}).

Théorème. [R. Bowen], ([B]).— *La mesure μ_{BM} est la limite de la moyenne des mesures de Dirac le long des géodésiques fermées de longueur inférieure à t , lorsque t tend vers l'infini.*

Autrement dit, les géodésiques fermées sont équiréparties dans T_1V , mais par rapport à une mesure qui ne coïncide pas, en général, avec la mesure de Liouville.

Enfin, cette mesure μ_{BM} apparaît comme solution d'un problème variationnel. Étant donné une transformation ϕ , une mesure invariante μ donne une autre façon de compter les orbites distinctes, d'où émerge un autre nombre, l'entropie probabiliste de ϕ relativement à la mesure μ , notée $h_\mu(\phi)$.

E.I. Dinaburg [D] a montré que, en général, $h(\phi)$ est la borne supérieure des entropies des mesures invariantes. Il s'établit un parallèle avec la thermodynamique : étant donné une transformation ϕ , pensons à une mesure invariante comme décrivant l'état thermodynamique d'un système ; l'état d'équilibre est celui où l'entropie est maximale. Dans le cas des flots géodésiques à courbure négative, cette borne supérieure est

atteinte pour une unique mesure de probabilité, appelée *mesure d'entropie maximale* qui n'est autre que μ_{BM} .

La comparaison des entropies du flot géodésique entre elles et avec les invariants traditionnels de la géométrie riemannienne donne lieu à toute une série de problèmes, dont voici trois échantillons.

9.3 Cas d'égalité des entropies.

Par unicité de la mesure d'entropie maximale, l'égalité $h = h_{Liouville}$ entraîne que mesure d'entropie maximale et mesure de Liouville sont égales, et que leurs conditionnelles le long des feuilles stables sont absolument continues les unes par rapport aux autres. C'est tout un faisceau de conditions. Peuvent-elles être remplies pour une métrique non symétrique ?

La réponse n'est connue qu'en dimension 2, où elle est due à A. Katok. Dans ce cas, toute métrique g est conforme à une métrique g_0 à courbure constante, $g = f^2 g_0$, de même aire que g . On peut mesurer la distance qui sépare g de g_0 par le nombre

$$\rho = \int f \leq 1.$$

Théorème. [A. Katok], ([Kat]).— *On a les inégalités*

$$h_{Liouville}(g) \leq \rho h(g_0) \leq \rho^{-1} h(g_0) \leq h(g).$$

Voir aussi Ch. Croke et A. Fathi, [CF].

9.4. Entropie contre volume.

M. Gromov [Gr1] a posé le problème suivant : Soit V_0 un quotient compact de l'espace hyperbolique réel. Est-ce la métrique à courbure constante qui, à volume donné, minimise l'entropie topologique ?

La réponse est positive en dimension deux. Cela résulte du théorème d'A. Katok ci-dessus.

En dimension supérieure à 3, on a ce résultat partiel.

Théorème. [M. Gromov], ([Gr1]).— Soit V_0 une variété compacte à courbure -1 , d'entropie $h_0 = n - 1$. Si V est une variété riemannienne homéomorphe à V_0 , de même volume, alors l'entropie de V satisfait $h \geq c(n)h_0$ où $c(n)$ est une constante ne dépendant que de la dimension n .

La preuve repose sur le concept de *volume simplicial*, un invariant topologique des variétés qui, pour les variétés à courbure constante -1 , est proportionnel au volume. Le facteur $c(n)$ dans l'inégalité est lié au rapport entre volume d'une boule et volume d'un simplexe.

Récemment, G. Besson, G. Courtois et S. Gallot [BCG] ont tenté de remédier à cette perte en introduisant une variante du volume simplicial. Ce nombre est majoré sans perte par l'entropie, il reste à l'évaluer pour les variétés à courbure constante. Cette dernière étape n'est accomplie pour l'instant qu'en dimension 2.

Noter que, grâce aux formules de [KKK] pour les dérivées première et seconde de l'entropie, une approche variationnelle de ce problème est peut-être envisageable.

9.5. Entropie contre courbure

Si on reprend l'interprétation de l'entropie comme dimension de Hausdorff de la sphère à l'infini du revêtement universel, et si on se souvient que la normalisation $K \leq -1$ est nécessaire pour que la distance d'U. Hamenstädt satisfasse l'inégalité triangulaire, le problème de savoir quelle métrique donne une dimension de Hausdorff minimale se pose assez naturellement comme suit.

Théorème. [U. Hamenstädt], ([Ha2]).— Soit V_0 un espace localement symétrique compact, à courbure non constante et comprise entre -4 et -1 , d'entropie h_0 . Soit V une variété riemannienne compacte, à courbure sectionnelle $K \leq -1$, d'entropie h , qui a même type d'homotopie que V_0 , alors $h \geq h_0$, et si l'égalité a lieu, toute équivalence d'homotopie de V sur V_0 est homotope à une isométrie.

Remarque. L'inégalité $h \geq h_0$ apparaît dans [Pan].

La preuve. Le théorème généralise le théorème de rigidité de G.D. Mostow en rang 1 [Mostow], qui couvre le cas où l'on sait déjà que V est symétrique, et la preuve, dans sa première étape, emprunte la voie tracée par Mostow. On utilise l'homéomorphisme f entre sphères à l'infini évoqué au paragraphe 6. L'égalité des entropies entraîne que f est absolument continu sur presque toute courbe de $\tilde{V}(\infty)$. L'hypothèse $K \leq -1$ garantit que d_∞ majore la distance riemannienne, donc les courbes d_∞ -rectifiables ont presque partout une dérivée, qui engendre le long des géodésiques un champ de Jacobi de direction parallèle, mais satisfaisant $J'' + J = 0$.

On est en présence d'une condition qui rappelle la définition du rang en courbure négative ou nulle, et la seconde partie de la preuve consiste à reconstruire pas à pas la géométrie symétrique de rang un : métrique de Carnot, sous-groupes d'isométries nilpotents.

10. LE PROBLEME ISOSPECTRAL

On se pose la question suivante (cf. fin du paragraphe 8) : si deux variétés riemanniennes compactes ont des flots géodésiques conjugués, sont-elles isométriques ? La réponse est négative dans cette généralité : il existe des déformations de la sphère à géodésiques toutes fermées de longueur 2π , voir [Bes], mais la question reste ouverte en dimension plus grande que 3, dans le contexte de la courbure négative.

Elle est liée à un autre problème favori de la géométrie riemannienne, celui des variétés isospectrales : deux variétés qui ont même spectre du laplacien sont-elles isométriques ? Le lien passe par le spectre des longueurs, i.e. l'ensemble des longueurs des géodésiques fermées. En courbure négative, cet ensemble est déterminé par le spectre du laplacien, voir [Ber] à ce sujet.

Contrairement au spectre du laplacien, le spectre des longueurs peut être enrichi d'une information supplémentaire : chaque géodésique a une classe d'homotopie. C'est le spectre marqué des longueurs, i.e. la fonction

qui, à une classe d'homotopie libre, associe la plus petite longueur d'une géodésique dans cette classe, qui est invariant par conjugaison.

Sachant qu'il existe des surfaces non isométriques ayant même spectre du laplacien, le problème se pose de savoir si la donnée plus riche du spectre marqué détermine la métrique. Ce problème a été résolu en dimension 2, par Ch. Croke et J. P. Otal indépendamment (on trouvera une généralisation de leur résultat dans [CFF]).

Théorème. [C. Croke], ([C]) ; [J.P. Otal], ([O]).— Soient V, V' des variétés riemanniennes de dimension 2, à courbure négative. Si une équivalence d'homotopie de V sur V' préserve le spectre marqué des longueurs, alors elle est homotope à une isométrie.

La preuve est très élégante. L'équivalence d'homotopie induit une correspondance entre géodésiques (paragraphe 6). Il s'agit de montrer que la concourance est préservée. Si ce n'est pas le cas, l'erreur est mesurée par le défaut angulaire dans un triangle, un nombre toujours positif - d'après le théorème de Gauss-Bonnet - dont la moyenne fait intervenir les deux mesures images des mesures de Liouville de V et V' dans $G(V) = G(V')$. On montre que ces mesures sont égales en utilisant la notion d'intersection, due à F. Bonahon, [Bon]. C'est un accouplement entre mesures sur $G(V)$ qui a les propriétés suivantes :

- sur le sous-espace dense des masses de Dirac le long de géodésiques fermées, il coïncide avec l'intersection ordinaire des courbes fermées ;
- il est "non dégénéré", i.e. une mesure positive est déterminée par son intersection avec les géodésiques fermées ;
- l'intersection de la mesure de Liouville avec une géodésique fermée vaut sa longueur.

En dimensions supérieures, un résultat infinitésimal existe. La méthode, inaugurée par V. Guillemin et D. Kazhdan en dimension 2, a été étendue par Min Oo.

Théorème. [V. Guillemin et D. Kazhdan], ([GK]) ; [Min Oo], ([Min]).—
Si V a un opérateur de courbure négatif, alors les déformations isospectrales infinitésimales sont toutes triviales.

Une déformation infinitésimale est une forme quadratique, i.e. une fonction h sur T_1V quadratique sur les fibres. La condition d'isospectralité est que l'intégrale de h sur toute orbite périodique du flot X est nulle. D'après A. Livšic [L], l'équation $h = L_X q$ a une solution. Un argument inspiré de l'analyse harmonique sur $SL(2, \mathbf{R})$ montre que q est linéaire sur les fibres, i.e. h est la dérivée de Lie de la métrique par un champ de vecteurs.

BIBLIOGRAPHIE

- [A1] D.V. ANOSOV - *Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **145** (1962), 707–709, = Soviet Math. Dokl. **3** (1962), 1062–1069.
- [A2] D.V. ANOSOV - *Geodesic flows on compact manifolds of negative curvature*, Trud. Mat. Inst. Steklova **90** (1967), = Proc. Steklov Inst., Amer. Math. Soc. Trans. (1969).
- [Bal] W. BALLMANN - *Non positively curved manifolds of higher rank*, Ann. Math. **112** (1985), 597–609.
- [BB] W. BALLMANN et M. BRIN - *On the ergodicity of geodesic flows*, Ergod. Th. Dynam. Syst. **2** (1982), 311–315.
- [BBE] W. BALLMANN, M. BRIN et P. EBERLEIN - *Structure of manifolds of non positive curvature, I*, Ann. Math. **112** (1985), 171–203.
- [BBS] W. BALLMANN, M. BRIN et R. SPATZIER - *Structure of manifolds of non positive curvature, II*, Ann. Math. **112** (1985), 204–235.
- [BFL] Y. BENOIST, P. FOULON, F. LABOURIE - *Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables*, C. R. Acad. Sci. Paris **311** (1990), 351–354.
- [Ber] P. BERARD - *Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques*, Séminaire Bourbaki, mars 1989, exposé 705, Astérisque **177-**

- 178 (1989).
- [Bes] A.L. BESSE - *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse Band 98, Springer, Berlin (1973).
- [BCG] G. BESSON, G. COURTOIS, S. GALLOT - *Volume minimal des espaces localement symétriques*, Inventiones Math. **103** (1991), 415–445.
- [Bon] F. BONAHOON - *Bouts des variétés hyperboliques de dimension trois*, Ann. Math. **124** (1986), 71–158.
- [B] R. BOWEN - *Periodic orbits for hyperbolic flows*, Amer. J. of Math. **94** (1972), 1–30.
- [BS] K. BURNS et R. SPATZIER - *Manifolds of nonpositive curvature and their buildings*, Publ. Math. Inst. Haut. Et. Sci. **65** (1987), 35–59.
- [C] C. CROKE - *Rigidity for surfaces of non-positive curvature*, Comment. Math. Helvetici **65** (1990), 150–169.
- [CF] C. CROKE et A. FATHI - *An inequality between energy and intersection*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 489–494.
- [CFF] C. CROKE, A. FATHI et J. FELDMAN - *The marked length spectrum of a surface of negative curvature*, à paraître dans Topology.
- [D] E.I. DINABURG - *A connection between various entropy characterizations of dynamical systems*, Izv. Akad. Nauk. SSSR **35** (1971), 324–366.
- [E] P. EBERLEIN - *Geodesic flows on negatively curved manifolds*, I, Ann. Math **95** (1972), 492–510 ; II, Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973), 57–82.
- [EH] P. EBERLEIN et J. HEBER - *A geometric characterization of symmetric spaces of higher rank*, Publ. Math. de l'I.H.E.S. **71** (1990), 33–44.
- [EO] P. EBERLEIN, G. O'NEILL - *Visibility manifolds*, Pacific. J. Math. **46** (1973), 45–109.
- [FJ] F.T. FARRELL et L.E. JONES - *Negatively curved manifolds with exotic smooth structures*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 899–908.

- [Gh1] E. GHYS - *Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris **20** (1987), 251–270.
- [GH2] E. GHYS - *L'invariant de Godbillon-Vey*, Séminaire Bourbaki, mars 1989, exposé 706, Astérisque **177-178** (1989).
- [GH3] E. GHYS - *Les groupes hyperboliques*, Séminaire Bourbaki, mars 1990, exposé 722, Astérisque (1990).
- [Gr1] M. GROMOV - *Volume and bounded cohomology*, Publ. Math. Inst.Haut.Et.Sci. **56** (1982), 5–100.
- [Gr2] M. GROMOV - *Hyperbolic groups*, in “Essays in group theory”, éd. S.M. Gersten, M.S.R.I. Publ. n^o 8, Springer (1987).
- [Gr3] M. GROMOV - *Rigid transformation groups*, in “Géométrie différentielle”, éd. D. Bernard et Y. Choquet-Bruhat, Travaux en cours **33** (1988), 65–139, Hermann, Paris (1988).
- [GK] V. GUILLEMIN et D. KAZHDAN - *Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds*, Topology **19** (1980), 301–312.
- [H1] J. HADAMARD - *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, J. Math. Pures Appl. **4** (1898), 27–74.
- [H2] J. HADAMARD - *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles*, Bull. Soc. Math. France **24** (1901), 224–228.
- [Ha1] U. HAMENSTÄDT - *A new description of the Bowen-Margulis measure*, Ergod. Th. Dynam. Syst. **9** (1989), 455–464.
- [Ha2] U. HAMENSTÄDT - *Entropy rigidity of locally symmetric spaces of rank one*, Ann. Math. **131** (1990), 35–52.
- [Has] B. HASSELBLATT - *Regularity of the Anosov splitting and of horospheric foliations*, Prépublication, I.H.E.S. Bures-sur-Yvette (1991).
- [He1] G.A. HEDLUND - *On the metrical transitivity of the geodesics on closed surfaces of constant negative curvature*, Ann. Math. **35** (1934), 787–808.
- [He2] G.A. HEDLUND - *The dynamics of geodesic flows*, Bull. Amer. Math. Soc. **45** (1939), 241–260.
- [HP] M. HIRSCH et C. PUGH - *Stable manifolds and hyperbolic sets*, Proc. Symp. in Pure Math. **14** (1970), 133-163.

- [Hop] E. HOPF - *Statistik der Lösungen geodätischer Probleme vom un-stabilen Typus, II*, Math. Ann. **117** (1940), 590–608.
- [HK] S. HURDER et A. KATOK - *Differentiability, rigidity and Godbil-lon-Vey classes*, Publ. Inst. Haut. Et. Sci. **72** (1990), 5–61.
- [Kan] M. KANAI - *Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations*, Ergod. Th. Dynam. Syst. **8** (1988), 215–240.
- [Kat] A. KATOK - *Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics*, Erg. Th. Dynam. Syst. **8** (1988), 139–152.
- [KKK] A. KATOK, G. KNIEPER, M. POLLICOTT et H. WEISS - *Differ-entiability and entropy for Anosov flows and geodesic flows*, Bull. Amer. Math. Soc. **22** (1990), 285–293.
- [K] A.N. KOLMOGOROV - *A new metric invariant of transitive systems and automorphisms of Lebesgue spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **119** (1958), 861–864.
- [L] A. LIVŠIC - *Cohomology of dynamical systems*, Isv. Akad. Nauk SSSR **36** (1972), 1296–1320, = Math. USSR Izvestia **6** (1972), 1278–1301.
- [Man] A. MANNING - *Topological entropy for geodesic flows*, Ann. Math. **110** (1979), 567–576.
- [Mar] G.A. MARGULIS - *On some applications of ergodic theory to the study of manifolds of negative curvature*, Funkt. Anal. i Prilozhen. **3** (1969), 89–90, = Func. Anal. Appl. **3** (1969), 335–336.
- [Min] MIN OO - *Spectral rigidity for manifolds with negative curvature op-erator*, in “Nonlinear Problems in Geometry”, Contemporary Math. **51** (1986), 99–103.
- [M1] M. MORSE - *A one-to-one representation of geodesics*, Amer. J. Math. **43**, (1921), 33–51.
- [M2] M. MORSE - *Instability and transitivity*, J. Math. Pures Appl. **14** (1935), 49–71.
- [Mos] G.D. MOSTOW - *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Ann. of Math. Studies, Vol. 78, Princeton Univ. Press, Princeton (1973).
- [O] J.P. OTAL - *Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure*

- négative*, Ann. Math. **131** (1990), 151–162.
- [Pan] P. PANSU - *Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative*, Ann. Acad. Sci. Fennicae **14** (1989), 177–212.
- [PP] W. PARRY et M. POLLICOTT - *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque **187-188** (1990).
- [Pes] Ya. B. PESIN - *Geodesic flows with hyperbolic behaviour of the trajectories and objects connected with them*, Uspekhi Math. Nauk **36** (1981), 3–31 = Russian Math. Surveys **36** (1981), 1–59.
- [P] A. PREISSMANN - *Quelques propriétés globales des espaces de Riemann*, Comm. Math. Helvetici **15** (1943), 175–216.
- [S] S. SMALE - *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 747–817.
- [Y] J.C. YOCCOZ - *Polynomes quadratiques et attracteur de Hénon*, Séminaire Bourbaki, novembre 1990, exposé 734, Astérisque (1991).

Pierre PANSU

U.R.A. 169 du C.N.R.S.
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cédex

et

U.R.A. 1169 du C.N.R.S.
Mathématiques
Université Paris Sud
91405 Orsay Cédex

Astérisque

GEORGES SKANDALIS

Approche de la conjecture de Novikov par la cohomologie cyclique [d'après A. Connes, M. Gromov et H. Moscovici]

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki, exp. n° 739, p. 299-320

http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__299_0

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**APPROCHE DE LA CONJECTURE DE NOVIKOV
PAR LA COHOMOLOGIE CYCLIQUE**
[d'après A. Connes, M. Gromov et H. Moscovici]
par Georges SKANDALIS

0. INTRODUCTION

Toutes les variétés que nous considérons dans cet exposé sont supposées compactes (sans bord), orientées de classe C^∞ .

La formule de Hirzebruch [24] calcule la signature d'une variété orientée V de dimension $n = 4k$, c'est-à-dire la signature (différence entre le nombre de signes + et le nombre de signes -) de la forme quadratique associée à la forme d'intersection sur $H^{2k}(V; \mathbf{R})$. On obtient :

$$\text{sign}(V) = \langle L(V), [V] \rangle$$

où $[V] \in H_n(V; \mathbf{Z})$ désigne le cycle fondamental de la variété orientée V et $L(V) \in H^*(V; \mathbf{Q})$ est un polynôme en les classes de Pontrjagin de V , parfois appelé "classe caractéristique de Pontrjagin-Hirzebruch". En particulier, le nombre $\langle L(V), [V] \rangle$ est un invariant d'homotopie. Dans le cas des variétés simplement connexes, la signature est la seule classe caractéristique invariante d'homotopie.

Supposons à présent que la variété V n'est pas simplement connexe. Notons Γ le groupe fondamental de V et $f : V \rightarrow B\Gamma$ l'application classifiante du revêtement universel. Pour une classe de cohomologie rationnelle $x \in H^*(B\Gamma; \mathbf{Q})$, appelons "haute signature" de V le nombre $\langle L(V) \cup f^*(x), [V] \rangle$. La conjecture de Novikov ([39]) énonce l'invariance par homotopie de toutes les hautes signatures, c'est-à-dire l'égalité

$$\langle L(W) \cup (f \circ g)^*(x), [W] \rangle = \langle L(V) \cup f^*(x), [V] \rangle$$

pour toute équivalence d'homotopie $g : W \rightarrow V$ de variétés compactes orientées.

À l'aide de la dualité de Poincaré, on trouve qu'une manière équivalente d'énoncer cette conjecture est l'invariance par homotopie de la classe d'homotopie $f_*(L(V) \cap [V]) \in H_*(B\Gamma; \mathbf{Q})$.

Enfin, l'énoncé le plus naturel de cette conjecture a lieu dans la K -homologie à supports compacts (la théorie homologique duale de la K -théorie - cf. [30]) de $B\Gamma$: l'opérateur de signature de V a une classe notée σ_V dans le groupe de K -homologie $K_0(V)$ dont l'image par l'isomorphisme de Chern $\text{Ch} : K_0(V) \otimes \mathbf{Q} \rightarrow H_*(V; \mathbf{Q})$ est $L(V) \cap [V]$. La conjecture de Novikov énonce donc l'invariance par homotopie de l'image de σ_V dans $K_0(B\Gamma) \otimes \mathbf{Q}$, c'est-à-dire l'égalité, modulo la torsion, de $(f \circ g)_*(\sigma_W)$ avec $f_*(\sigma_V)$, pour toute équivalence d'homotopie $g : W \rightarrow V$ de variétés compactes orientées.

Cette conjecture reste ouverte après une vingtaine d'années. Cependant, grâce aux efforts conjugués de nombreux mathématiciens (cf. [7, 15, 25, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 40, 41, 43, 44...]), cette conjecture est maintenant établie pour de nombreuses classes de groupes Γ . La conjecture de Novikov a récemment connu de nombreux développements connexes (variétés lipschitziennes, cas équivariant pour une action de groupe compact, variétés à bord...). Citons surtout un analogue en K -théorie algébrique de la conjecture de Novikov qui vient d'être démontré par Bökstedt, Hsiang et Madsen [4]. On consultera à propos des principaux développements récents l'article d'exposition [45] de Weinberger.

Dans cet exposé, nous examinerons une approche nouvelle de cette conjecture à l'aide de la cohomologie cyclique de Connes. Les résultats que nous discuterons s'énoncent :

THÉORÈME A [13].— *La conjecture de Novikov est vraie pour les groupes hyperboliques de Gromov.*

THÉORÈME B [12].— *Tout "fibré presque plat" détermine un invariant d'homotopie.*

Le théorème B permet de redémontrer la conjecture de Novikov dans tous les cas précédemment connus, ainsi que le théorème A.

De plus, cette approche est intéressante à plus d'un titre :

a) elle est basée sur des théorèmes de l'indice très puissants et esthétiques ;

b) les méthodes développées peuvent certainement démontrer la conjecture de Novikov dans de nombreux autres cas et, en tous cas, posent des questions intéressantes ;

c) enfin, la même démarche s'applique à la conjecture de Gromov-Lawson et se transpose dans le cas où les groupes discrets sont remplacés par des feuilletages.

NOTATIONS

Soient Γ un groupe et A un anneau. Rappelons que l'ensemble des sommes finies $\sum_{g \in \Gamma} a_g g$ ($a_g \in A$) est muni d'une structure d'anneau pour laquelle on a $(ag)(bh) = (ab)(gh)$ ($a, b \in A$ et $g, h \in \Gamma$). L'anneau ainsi obtenu est noté $A[\Gamma]$.

On note $\ell^2(\Gamma)$ l'espace hilbertien formé des applications $g \rightarrow a_g$ de Γ dans \mathbf{C} telles que $\sum_{g \in \Gamma} |a_g|^2 < +\infty$. À l'opération de Γ par translation (à gauche) dans l'espace hilbertien $\ell^2(\Gamma)$ correspond une opération de l'anneau $\mathbf{C}[\Gamma]$ dans le même espace ; la \mathbf{C}^* -algèbre $\mathbf{C}^*(\Gamma)$ du groupe Γ est l'adhérence (normique) de $\mathbf{C}[\Gamma]$ dans la \mathbf{C}^* -algèbre des opérateurs continus de $\ell^2(\Gamma)$.

Signalons que l'algèbre que nous notons $\mathbf{C}^*(\Gamma)$ dans cet exposé est la \mathbf{C}^* -algèbre réduite du groupe Γ qui se note traditionnellement $\mathbf{C}_r^*(\Gamma)$.

1. LES INVARIANTS DE MISHCHENKO ET KASPAROV

a) L'invariant de Mishchenko

Un outil essentiel dans toutes les constructions liées à la conjecture de Novikov est la signature symétrique de Mishchenko :

Soit V une variété compacte (sans bord) orientée de classe C^∞ de dimension $4n$ de groupe fondamental Γ ; alors V est naturellement munie d'un fibré plat E de fibre $\mathbf{C}[\Gamma]$ obtenu par linéarisation du revêtement universel. Donnons-nous une triangulation de V . Mishchenko a montré que la forme d'intersection sur les simplexes de dimension $2n$, à coefficients dans le fibré plat E , définit un élément d'un groupe de Wall $L(\mathbf{C}[\Gamma])$ de l'anneau $\mathbf{C}[\Gamma]$ appelé signature symétrique de V et a prouvé que cet élément est invariant par homotopie ([34]).

b) L'indice dans $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$, cf. [13]

Notons $\mathcal{R} = \{(a_{m,n})_{m,n \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}}, a_{m,n} \in \mathbf{C} / \forall k \in \mathbf{N}, \sum_{m,n} (1+m+n)^k |a_{m,n}| < +\infty\}$ l'algèbre des matrices infinies à décroissance rapide.

Soit V une variété compacte (sans bord) de classe C^∞ . L'algèbre des noyaux régularisants sur V est l'espace $C^\infty(V \times V)$ des fonctions de classe C^∞ sur $V \times V$ muni du produit de convolution $(h * k)(x, y) = \int h(x, z)k(z, y) dz^{(1)}$ pour $h, k \in C^\infty(V \times V)$, $x, y \in V$. Cette algèbre est isomorphe à \mathcal{R} . En particulier, elle est indépendante de la variété V . Si E est un fibré vectoriel complexe de classe C^∞ sur V , on forme de même l'algèbre des noyaux régularisants à coefficients dans les endomorphismes de E , qui est encore isomorphe à \mathcal{R} .

Soient Γ le groupe fondamental et \tilde{V} le revêtement universel de V . Le groupe Γ opère librement et proprement sur $\tilde{V} \times \tilde{V}$ par l'action diagonale ; notons W la variété quotient $\tilde{V} \times \tilde{V} / \Gamma$ et $p : \tilde{V} \times \tilde{V} \rightarrow W$ l'application quotient. L'espace $C_c^\infty(W)$ des fonctions de classe C^∞ à support compact sur W est naturellement muni d'une structure d'algèbre : pour $h, k \in C_c^\infty(W)$ et $x, y \in \tilde{V}$, on pose $(h * k)(p(x, y)) = \int h(p(x, z))k(p(z, y)) dz^{(2)}$

Il n'est pas difficile de démontrer que l'algèbre des noyaux régularisants Γ -invariants $C_c^\infty(W)$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{R}[\Gamma] = \mathcal{R} \otimes \mathbf{C}[\Gamma]$. Cet isomorphisme n'est pas canonique. Cependant, on peut construire une

⁽¹⁾ L'intégrale est prise sur V et dz désigne une mesure régulière sur V .

⁽²⁾ L'intégrale est prise sur \tilde{V} et dz désigne une mesure régulière Γ -invariante sur \tilde{V} .

équivalence de Morita canonique entre les algèbres $C_c^\infty(W)$ et $\mathcal{R}[\Gamma]$. De ce fait, les groupes $K_0(C_c^\infty(W))$ et $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$ sont canoniquement isomorphes.

Si E est un fibré vectoriel complexe de classe C^∞ sur V , on forme de même l'algèbre des noyaux régularisants Γ -invariants à coefficients dans les endomorphismes de E , qui est encore isomorphe à $\mathcal{R}[\Gamma]$.

Soient E_+ et E_- deux fibrés vectoriels complexes de classe C^∞ sur la variété V et $D : C^\infty(V; E_+) \rightarrow C^\infty(V; E_-)$ un opérateur pseudodifférentiel elliptique, où $C^\infty(V; E_\pm)$ désigne l'espace des sections de classe C^∞ du fibré E_\pm . On peut alors relever D et sa parametrix Q en des opérateurs Γ -invariants \tilde{D} et \tilde{Q} agissant sur le revêtement universel \tilde{V} de V (cf. [1, 13]). Alors \tilde{D} et \tilde{Q} sont inverses l'un de l'autre modulo l'algèbre des noyaux régularisants Γ -invariants à coefficients dans les endomorphismes de E_\pm . On associe alors à D l'élément de $K_0(C_c^\infty(W)) = K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$ représenté par l'idempotent

$$P_D = \begin{bmatrix} (1 - \tilde{Q}\tilde{D})^2 & (1 - \tilde{Q}\tilde{D})(2 - \tilde{Q}\tilde{D})\tilde{Q} \\ \tilde{D}(1 - \tilde{Q}\tilde{D}) & 1 - (1 - \tilde{D}\tilde{Q})^2 \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} L^{-1} \in M_2(A)$$

où

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{Q} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{D} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{Q} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et A désigne l'algèbre $\mathcal{R}[\Gamma]$ avec une unité adjointe. Rappelons que si l'algèbre A est obtenue en adjoignant une unité à une algèbre sans unité J , $K_0(J)$ est le quotient de $K_0(A)$ par l'image de $K_0(\mathbf{C})$.

Remarque : Les relevés \tilde{D} et \tilde{Q} ne sont uniquement déterminés que si D et Q sont "suffisamment locaux". En général, ils ne sont déterminés qu'à un noyau régularisant Γ -invariant près. L'addition d'un tel noyau ne change pas la classe de l'idempotent P_D dans $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$.

c) Le théorème de l'indice de Kasparov et Mishchenko

Rappelons que le spectre d'un élément autoadjoint d'une C^* -algèbre A est inclus dans \mathbf{R} . Il s'ensuit que les groupes de L et K -théorie coïncident i.e. $L(A) = K_0(A)$.

L'algèbre \mathcal{R} est une sous-algèbre de la C^* -algèbre \mathcal{K} des opérateurs compacts d'un espace de Hilbert séparable. Or, pour toute C^* -algèbre A , le produit tensoriel C^* -algébrique $\mathcal{K} \otimes A$ a la même K -théorie que A .

L'image par inclusion $i : \mathbf{C}[\Gamma] \rightarrow C^*(\Gamma)$ de l'idempotent P_D associé à l'opérateur de signature définit un élément $a_V \in K_0(\mathcal{K} \otimes C^*(\Gamma)) = K_0(C^*(\Gamma))$.

THÉORÈME 1.1.—*Soit V une variété compacte orientée de groupe fondamental Γ . Notons $t_V \in K_0(C^*(\Gamma)) = L(C^*(\Gamma))$ l'image par inclusion $i : \mathbf{C}[\Gamma] \rightarrow C^*(\Gamma)$ de l'invariant de Mishchenko et $a_V \in K_0(\mathcal{K} \otimes C^*(\Gamma)) = K_0(C^*(\Gamma))$ l'image par l'inclusion $i : \mathbf{C}[\Gamma] \rightarrow C^*(\Gamma)$ de l'idempotent P_D associé à l'opérateur de signature. On a $a_V = t_V$.*

Ce théorème est énoncé dans [29] et démontré dans [30]. L'égalité $a_V = t_V$ modulo la torsion est aussi énoncée dans [36] et démontrée dans [37]. Pour une démonstration directe, cf. [27].

Rappelons que l'opérateur de signature de V détermine un élément noté $f_*(\sigma_V)$ du groupe de K -homologie à supports compacts $K_0(B\Gamma)$. Il existe un homomorphisme naturel $\beta : K_0(B\Gamma) \rightarrow K_0(C^*(\Gamma))$ ("assembly map" en K -théorie topologique) tel que $\beta(f_*(\sigma_V)) = a_V$. Comme par le théorème 1.1, l'élément a_V est un invariant d'homotopie, il en résulte :

COROLLAIRE 1.2.—*Si l'homomorphisme $\beta : K_0(B\Gamma) \rightarrow K_0(C^*(\Gamma))$ est rationnellement injectif, la conjecture de Novikov est vérifiée pour le groupe Γ .*

On dit que le groupe satisfait à la "conjecture de Novikov forte" (terminologie de J. Rosenberg [42]) si l'homomorphisme β est rationnellement injectif. Signalons que tous les groupes pour lesquels la conjecture de Novikov est établie satisfont à la conjecture de Novikov forte.

Il est aussi clair que tout homomorphisme $\phi : K_0(C^*(\Gamma)) \rightarrow \mathbf{C}$ détermine un invariant d'homotopie. C'est en grande partie cette remarque qui a conduit Kasparov à construire la K -théorie bivariante pour les C^* -algèbres.

2. COHOMOLOGIE CYCLIQUE ET COHOMOLOGIE DE GROUPES

Cohomologie cyclique

Pour une exposition de la cohomologie cyclique, nous renvoyons à [9], [16], [8]. Contentons-nous ici de rappeler les définitions qui nous seront utiles.

Soit A une algèbre sur \mathbf{C} . Rappelons qu'une n -cochaîne sur A est une application multilinéaire $\phi : A^{n+1} \rightarrow \mathbf{C}$. Le bord de Hochschild d'une n -cochaîne ϕ est la $n+1$ -cochaîne $b\phi$ donnée par la formule

$$b\phi(a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j \phi(a_0, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1} \phi(a_{n+1} a_0, a_1, \dots, a_n).$$

DÉFINITION.— Soit A une algèbre sur \mathbf{C} . Une n -cochaîne cyclique sur A est une application multilinéaire $\phi : A^{n+1} \rightarrow \mathbf{C}$ telle que :

$$\forall (a_0, a_1, \dots, a_n) \in A^{n+1} \quad , \quad \phi(a_1, \dots, a_n, a_0) = (-1)^n \phi(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

On note $C_\lambda^n(A)$ l'espace des n -cochaînes cycliques sur A .

Un n -cocycle cyclique sur A est une n -cochaîne cyclique ϕ telle que $b\phi = 0$.

On note $Z_\lambda^n(A)$ l'espace des n -cocycles cycliques sur A .

On vérifie sans peine que le bord de Hochschild d'une cochaîne cyclique est un cocycle cyclique. La cohomologie cyclique $H_\lambda^n(A)$ de A est la cohomologie du complexe des cochaînes cycliques muni du bord de Hochschild, autrement dit $H_\lambda^n(A) = Z_\lambda^n(A)/bC_\lambda^{n-1}(A)$.

Accouplement avec la K -théorie

Soit n un nombre pair et ϕ un n -cocycle cyclique sur une algèbre A . Soit B l'algèbre obtenue à partir de A en adjoignant une unité. Rappelons que B est isomorphe à $A \times \mathbf{C}$ comme \mathbf{C} -espace vectoriel et que le produit est défini par $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$ ($a, b \in A$, $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$).

Alors ϕ définit un cocycle cyclique encore noté ϕ sur B par la formule $\phi((a_0, \lambda_0), (a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)) = \phi(a_0, a_1 \cdots, a_n)$.

Notons $M_k(B)$ l'algèbre des matrices $k \times k$ à coefficients dans B . En utilisant la trace de $M_k(\mathbf{C})$, on étend le cocycle cyclique ϕ à $M_k(B)$. Soit e un idempotent de $M_k(B)$. Le nombre $\phi(e, e, \dots, e)$ ne dépend que de la classe de e dans $K_0(A)$ et de celle de ϕ dans $H_\lambda^n(A)$. On définit un accouplement entre $K_0(A)$ et $H_\lambda^n(A)$ en posant

$$\langle [\phi], [e] \rangle = c_n \phi(e, e, \dots, e)$$

où $c_n \in \mathbf{C}$ est une constante de normalisation ($c_{2m} = \frac{1}{(2\pi i)^m m!}$).

Normalisation des cocycles de groupes

Soit Γ un groupe. Un n -cocycle de groupe c sur Γ sera dit normalisé si $c(g_1, \dots, g_n) = 0$ si $g_1 \cdots g_n = 0$.

Par un argument de résolution projective, on démontre sans peine (cf. [6], [13]) :

PROPOSITION 2.1.— *Dans toute classe de cohomologie de $H^n(\Gamma, \mathbf{C})$, il y a au moins un cocycle normalisé.*

Soit c un cocycle normalisé sur le groupe Γ . On associe à c un cocycle cyclique ϕ_c sur $\mathbf{C}[\Gamma]$ qui est décrit sur la base Γ de $\mathbf{C}[\Gamma]$ par :

$$\phi_c(g_0, g_1, \dots, g_n) = c(g_1, \dots, g_n) \text{ si } g_0 g_1 \cdots g_n = 1 \text{ et } \phi_c(g_0, g_1, \dots, g_n) = 0 \text{ sinon.}$$

Remarque : En fait, on a un plongement de $H^n(\Gamma, \mathbf{C})$ dans $H_\lambda^n(\mathbf{C}[\Gamma])$. La cohomologie cyclique de $\mathbf{C}[\Gamma]$ a été calculée par Burghlelea (cf. [6]).

Extension à $\mathcal{R}[\Gamma]$. Premier théorème de l'indice

DÉFINITION 2.2.— *Soit c un n -cocycle normalisé sur le groupe Γ . On définit le cocycle cyclique ψ_c sur $\mathcal{R}[\Gamma]$ en posant :*

$$\psi_c(k_0 g_0, k_1 g_1, \dots, k_n g_n) = \text{Tr}(k_0 k_1 \cdots k_n) \phi_c(g_0, g_1, \dots, g_n)$$

pour $(k_0 k_1 \cdots, k_n) \in \mathcal{R}^{n+1}$ et $(g_0, g_1, \dots, g_n) \in \Gamma^{n+1}$ où Tr désigne la trace sur l'algèbre \mathcal{R} .

Les éléments de la forme kg ($k \in \mathcal{R}$, $g \in \Gamma$) engendrent $\mathcal{R}[\Gamma]$; on étend ψ_c à $\mathcal{R}[\Gamma]^{n+1}$ par linéarité. On vérifie sans peine que ψ_c est un cocycle cyclique. La trace Tr est donnée par la formule $\text{Tr}((a_{m,n})_{m,n \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}}) = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_{n,n}$.

Connes et Moscovici ont démontré le théorème de l'indice suivant :

THÉORÈME 2.3 (cf. [13]).—*Soient V une variété compacte, Γ son groupe fondamental, $f : V \rightarrow B\Gamma$ l'application classifiante et D un opérateur pseudodifférentiel elliptique sur V . Notons $[D]$ la classe de D dans le groupe de K -homologie $K_0(V)$, $\text{Ch}[D]$ son image dans $H_*(V)$ par l'isomorphisme de Chern et $[P_D]$ l'indice de D dans $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$. Soit c un n -cocycle normalisé sur le groupe Γ ; notons x sa classe dans $H^n(B\Gamma; \mathbf{C}) = H^n(\Gamma; \mathbf{C})$. On a alors $\langle [\psi_c], [P_D] \rangle = d_n \langle f^*(x), \text{Ch}[D] \rangle$.*

Ici, d_n est une constante non nulle ($d_{2m} = \frac{1}{(2\pi i)^m (2m)!}$).

Dans le cas du 0-cocycle $c = 1$, on retrouve comme cas particulier le théorème de l'indice à valeurs dans l'algèbre de von Neumann de Γ de ([1]).

La démonstration de ce théorème utilise les étapes suivantes :

a) Au cocycle de groupe c , on associe un cocycle d'Alexander-Spanier η sur V dont la classe de cohomologie est $f^*(x)$. En utilisant l'isomorphisme local entre les groupoïdes W et $V \times V$, on associe à tout cocycle ζ d'Alexander-Spanier un homomorphisme $f_\zeta : K_0(V) \rightarrow \mathbf{C}$ de sorte qu'on ait $\langle [\psi_c], [P_D] \rangle = f_\eta([D])$.

b) On calcule l'homomorphisme f_η ci-dessus associé au cocycle d'Alexander-Spanier η en utilisant le calcul symbolique de Getzler ([17]).

La classe $[P_D]$ n'est *a priori* pas un invariant d'homotopie. Pour démontrer l'invariance par homotopie de la haute signature associée à x , il suffit de démontrer que le nombre $\langle [\psi_c], [P_D] \rangle$ ne dépend que de l'image de P_D dans $K_0(C^*(\Gamma))$, puisque, par le théorème 1.1, cette image est un invariant d'homotopie.

Or il n'est pas raisonnable d'espérer que le cocycle cyclique ϕ_c s'étende en un cocycle cyclique de $C^*(\Gamma)$. On peut cependant dans certains cas

étendre ce cocycle cyclique à une sous-algèbre de Banach de $C^*(\Gamma)$ ayant la même K -théorie que $C^*(\Gamma)$. Pour cela, on dispose du résultat “classique” (et simple) suivant :

Lemme 2.4 (cf. e.g. [28], p. 109, exerc. 6.15).—Soit $\rho : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'algèbres de Banach unifères. Si l'image de ρ est dense dans B et que $A^{-1} = \rho^{-1}(B^{-1})$, alors ρ induit un isomorphisme en K -théorie.

Si l'homomorphisme ρ vérifie les conditions du lemme et est de plus injectif, on dit parfois que A est une sous-algèbre pleine de B .

Un cas où cette méthode s'applique est :

THÉORÈME 2.5 ([13]).—*La conjecture de Novikov est vraie pour les groupes hyperboliques de Gromov.*

Nous renvoyons à [20] et [19] pour une description des groupes hyperboliques de Gromov. Deux propriétés de ces groupes sont utilisées dans le théorème 2.5 :

a) Gromov a démontré (cf.[20]) que, si Γ est un groupe hyperbolique, toute classe de cohomologie $x \in H^n(\Gamma, \mathbf{C})$ ($n \geq 2$), est représentée par un cocycle (normalisé) borné.

b) P. de la Harpe ([22]) a généralisé aux groupes hyperboliques un estimé sur la norme de $C^*(\Gamma)$ ⁽³⁾ obtenu par Haagerup pour les groupes libres puis par Jolissaint pour les sous-groupes discrets des groupes de Lie de rang 1. On en déduit (cf.[26]) :

PROPOSITION 2.6.—*Soit Γ un groupe hyperbolique. Le complété de $\mathbf{C}[\Gamma]$ pour la norme N donnée par $N(\sum_{g \in \Gamma} a_g g) = \|\sum_{g \in \Gamma} |a_g| g\|$ est une sous-algèbre pleine A de $C^*(\Gamma)$.*

Ici, $\|\mathbf{a}\|$ désigne la norme de \mathbf{a} dans $C^*(\Gamma)$.

Soient n un nombre pair et c un n -cocycle normalisé borné sur Γ . Posons $\phi = \phi_c$.

(3) Rappelons que $C^*(\Gamma)$ désigne ici la C^* -algèbre réduite du groupe Γ .

Pour $\mathbf{a}^i = \sum_{g \in \Gamma} a_g^i g$ ($i = 0, 1, \dots, n$), on a

$$\phi(\mathbf{a}^0, \mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n) = \sum_{g_0 g_1 \dots g_n = 1} a_{g_0}^0 a_{g_1}^1 \dots a_{g_n}^n c(g_1, \dots, g_n).$$

Donc

$$|\phi(\mathbf{a}^0, \mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n)| \leq k \sum_{g_0 g_1 \dots g_n = 1} |a_{g_0}^0| |a_{g_1}^1| \dots |a_{g_n}^n| = k\tau(\mathbf{b}^0 \mathbf{b}^1 \dots \mathbf{b}^n)$$

où $\mathbf{b}^i = \sum_{g \in \Gamma} |a_g^i| g$ et $\tau\left(\sum_{g \in \Gamma} a_g g\right) = a_1$.

Il s'ensuit que $|\phi(\mathbf{a}^0, \mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n)| \leq k \|\mathbf{b}^0 \mathbf{b}^1 \dots \mathbf{b}^n\| \leq kN(\mathbf{a}^0)N(\mathbf{a}^1) \dots N(\mathbf{a}^n)$. Donc le cocycle ϕ s'étend en un cocycle cyclique sur l'algèbre A ; il définit donc un homomorphisme de $K_0(A) = K_0(C^*(\Gamma))$ dans \mathbf{C} , d'où le théorème 2.5.

L'importance de ce théorème vient de l'abondance des groupes hyperboliques (cf. [20]).

La méthode de démonstration soulève aussi de nombreuses questions :

Question 1 : L'inclusion $A \rightarrow C^*(\Gamma)$ induit-elle un isomorphisme en K -théorie pour tout groupe Γ ?

Une réponse positive à cette question impliquerait la conjecture de Novikov pour tous les cocycles de groupe bornés. Cependant, l'égalité $A^{-1} = \rho^{-1}(C^*(\Gamma)^{-1})$ semble liée au "rang 1". La réponse à la question 1 est néanmoins positive pour les groupes résolubles comme l'a montré Bost ([5]). Remarquons que, pour un groupe moyennable, la norme N est la norme $\|\cdot\|_1$, de sorte que A est l'algèbre de Banach $\ell^1(\Gamma)$.

En fait, l'estimé de [22] permet de montrer que, si le groupe Γ est hyperbolique, le complété A_n de $\mathbf{C}[\Gamma]$ pour la norme N_n donnée par $N_n(\sum_{g \in \Gamma} a_g g) = \|\sum_{g \in \Gamma} |a_g| (1 + |g|)^n g\|$ est une sous-algèbre pleine de $C^*(\Gamma)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ici, $|g|$ désigne la longueur de g relativement à un système de générateurs de Γ .

Question 2 : L'inclusion $A_n \rightarrow C^*(\Gamma)$ induit-elle un isomorphisme en K -théorie pour tout groupe Γ ?

Comme on peut toujours étendre les cocycles à croissance polynomiale à l'algèbre A_n , une réponse positive à la question 2 impliquerait la conjecture de Novikov pour tous les cocycles de groupe à croissance polynomiale.

Une façon plus générale de procéder peut être la suivante (*cf.* [10]) : étant donné un cocycle de groupe normalisé c , construire une sous-algèbre A (pouvant dépendre de c) de $C^*(\Gamma)$, ayant la même K -théorie que $C^*(\Gamma)$ à laquelle le cocycle ϕ_c s'étend. Par exemple, à l'invariant de Godbillon-Vey, correspond un 2-cocycle (cocycle de Bott-Thurston) de tout groupe Γ agissant sur le cercle par difféomorphismes préservant l'orientation (*cf.* [18]). Connes a montré ([10]) que ce cocycle définit un homomorphisme de la K -théorie de $C^*(\Gamma)$ dans \mathbf{C} d'où un invariant d'homotopie. De la même manière sont traitées toutes les classes "secondaires" de cohomologie de groupe.

3. "FIBRÉS PRESQUE PLATS"

À proprement parler, il n'y a pas de fibrés presque plats, mais des éléments de K -théorie presque plats :

DÉFINITION 3.1 ([12]).—*Soient $\alpha > 0$ un nombre réel, V une variété riemannienne compacte et E un fibré hermitien sur V . Soit ∇ une connexion unitaire sur E et $\theta = \nabla^2$ sa courbure. La connexion ∇ est dite α -plate si $\|\theta\| < \alpha$. S'il existe une connexion unitaire α -plate ∇ sur E , nous dirons que E est un fibré α -plat. Un élément de K -théorie $x \in K^0(V)$ est dit presque plat si, pour tout $\alpha > 0$, il existe des fibrés vectoriels α -plats E_{\pm} tels que x soit égal à la différence des classes de E_+ et E_- dans $K^0(V)$.*

La courbure θ est une deux forme à valeurs dans les endomorphismes de E . Comme la dimension du fibré E croît quand α tend vers 0, il est important de préciser quelle est la norme de θ considérée : si X et Y sont deux vecteurs tangents en un point x de V , la courbure définit un endomorphisme $\theta_{X,Y}$ de l'espace hilbertien E_x ; désignons par $\|\theta_{X,Y}\|$ sa norme. On pose alors $\|\theta\| = \text{Sup} \{ \|\theta_{X,Y}\| / \|X\| \leq 1 \text{ et } \|Y\| \leq 1 \}$.

On peut formuler une définition analogue pour K^1 : un élément de

$K^1(V)$ est dit presque plat si, pour tout $\alpha > 0$, il peut être représenté par une section u du fibré des automorphismes unitaires d'un fibré unitaire E muni d'une connexion unitaire α -plate ∇ tel que $\|\nabla u\| < \alpha$.

Il est clair que le produit de deux éléments presque plats de K -théorie est presque plat : si $x_i \in K^*(V_i)$ ($i = 1, 2$) est presque plat, le produit tensoriel $x_1 \otimes x_2 \in K^*(V_1 \times V_2)$ est presque plat.

3.2 Exemple : Il est facile de décrire des éléments de K^1 presque plats :

Munissons le fibré trivial de dimension N sur le cercle $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de la connexion unitaire pour laquelle le transport parallèle $v_{[s,t]}$ le long du segment orienté $[s, t]$ de \mathbf{R} soit donné, sur la base (b_0, \dots, b_{N-1}) , par $v_{[s,t]}(b_k) = e^{2i(k/N)\pi(t-s)}b_k$. Pour $t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, notons u_t l'opérateur unitaire de \mathbf{C}^N qui agit sur la base (b_0, \dots, b_{N-1}) par $u_t b_k = b_{k-1}$ si $k \neq 0$, $u_t b_0 = e^{2i\pi t}b_{N-1}$. Alors la section $t \rightarrow u_t$ représente le générateur de $K^1(\mathbf{T})$; or, pour tout t , on a $v_{[0,t]}u_0v_{[t,0]} = e^{-2i\pi t/N}u_t$ donc la section $t \rightarrow u_t$ est presque invariante par la connexion.

Il en résulte que l'élément de Bott sur \mathbf{T}^2 est un élément de K -théorie presque plat.

Les éléments de K -théorie presque plats proviennent du groupe fondamental. En effet, on démontre assez facilement :

PROPOSITION 3.3.—*Soit V une variété riemannienne simplement connexe. Toute classe de K -théorie presque plate de V est triviale. Plus précisément, il existe $\alpha > 0$ tel que tout fibré α -plat sur V soit trivial.*

THÉORÈME 3.4 ([12]).—*Soient V une variété compacte orientée et $x \in K^*(V)$ un élément de K -théorie presque plat. Alors, pour toute équivalence d'homotopie $f : W \rightarrow V$, on a $\langle \sigma_V, x \rangle = \langle \sigma_W, f^*(x) \rangle$ où σ_V (resp. σ_W) désigne la classe de l'opérateur de signature de V (resp. W) dans le groupe de K -homologie $K_*(V)$ (resp. $K_*(W)$).*

Il est possible de donner une démonstration directe de ce théorème : si $f : W \rightarrow V$ est une équivalence d'homotopie préservant l'orientation et E un fibré suffisamment plat sur V , on peut comparer directement les opérateurs de signature de V et W à coefficients dans les fibrés E et f^*E

et démontrer qu'ils ont même indice (cf. [23]).

La démonstration originale de ce théorème décrite dans [12] est moins directe, mais développe des idées très intéressantes :

- à un fibré presque plat, on associe une "presque représentation" du groupe fondamental Γ ;
- on définit l'image par une presque représentation de la signature symétrique de Mishchenko : c'est une matrice inversible autoadjointe ;
- on démontre enfin un théorème de l'indice qui stipule l'égalité entre la signature à coefficients dans le fibré presque plat du départ et la signature de cet opérateur autoadjoint.

Expliquons brièvement chacune de ces idées :

Presque représentation associée à un fibré presque plat

Soit V une variété riemannienne. Choisissons un point base x de V et, pour chaque élément du groupe fondamental Γ de V , un lacet qui le représente. Donnons-nous un fibré unitaire E sur V , muni d'une connexion unitaire ∇ . Le transport parallèle le long de ces représentants donne une application u de Γ dans le groupe des transformations unitaires de E_x . Si la connexion ∇ est plate, l'application u est une représentation. Si la connexion ∇ est α -plate, avec α suffisamment petit, l'application u est presque une représentation : étant donné $\varepsilon > 0$ et une partie finie F de Γ , il existe $\alpha > 0$ tel que si u est l'application associée à une connexion α -plate, on ait pour tout $x, y \in F$, $\|u(xy) - u(x)u(y)\| < \varepsilon$. On dit alors que l'application u est une (F, ε) -représentation.

Pour des raisons qui vont apparaître ci-dessous, on considère des presque représentations telles que $u(g^{-1}) = u(g)^*$ pour tout $g \in \Gamma$. Pour cela, on remplace u par l'application $g \rightarrow \frac{1}{2}(u(g) + u(g^{-1})^*)$. Alors u n'est plus unitaire mais reste une presque représentation (donc est presque unitaire).

Remarque : Réciproquement, on peut facilement construire une partie finie F de Γ possédant la propriété suivante : pour tout $\alpha > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, à toute (F, ε) -représentation, on peut associer un fibré α -plat. On obtient ainsi une autre façon de démontrer que l'élément de Bott de \mathbf{T}^2 est

presque plat. Enfin, soit u la (F, ε) -représentation associée à un fibré α -plat E . Alors le fibré associé est isomorphe à E . (Ceci généralise la proposition 3.3.)

Image de l'invariant de Mishchenko par une "presque représentation"

L'invariant de Mishchenko est un élément du groupe de Wall $L(\mathbf{C}[\Gamma])$ et est donc représenté par un élément autoadjoint inversible $x \in M_n(\mathbf{C}[\Gamma])$.

Soit u une application de Γ dans $M_N(\mathbf{C})$ telle que $u(g^{-1}) = u(g)^*$ pour tout $g \in \Gamma$. On déduit de u une application linéaire encore notée u de $\mathbf{C}[\Gamma]$ dans $M_N(\mathbf{C})$ en posant $u(\sum_{g \in \Gamma} a_g g) = \sum_{g \in \Gamma} a_g u(g)$. Remarquons que u est autoadjointe i.e. que $u(x^*) = u(x)^*$ pour tout $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$. Enfin, on étend u aux matrices ; on obtient ainsi une application linéaire encore notée u de $M_n(\mathbf{C}[\Gamma])$ dans $M_{nN}(\mathbf{C})$.

On démontre sans peine le résultat suivant :

Lemme 3.5.— a) Soit x un élément autoadjoint et inversible de $M_n(\mathbf{C}[\Gamma])$. Il existe une partie finie F de Γ et un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que l'image $u(x)$ par toute (F, ε) -représentation u soit inversible dans $M_{nN}(\mathbf{C})$.

b) Soient x et y deux éléments autoadjoints et inversibles de $M_n(\mathbf{C}[\Gamma])$. Si x et y définissent le même élément de $L(\mathbf{C}[\Gamma])$, il existe une partie finie F de Γ et un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $u(x)$ et $u(y)$ ont même signature par toute (F, ε) -représentation u .

Le a) résulte de ce que $u(x^{-1})u(x)$ est proche de 1. Le b) résulte sans difficulté de la définition du groupe $L(\mathbf{C}[\Gamma])$. (Ici, il s'agit de la signature de l'élément autoadjoint inversible $u(x) \in M_{nN}(\mathbf{C})$, i.e. le nombre de valeurs propres positives moins le nombre de valeurs propres négatives.)

Le théorème 3.4 résulte alors du théorème suivant :

THÉORÈME 3.6 ([12]).— Soient V une variété riemannienne compacte orientée, Γ son groupe fondamental. Notons σ_V la classe de l'opérateur de signature V dans le groupe de K -homologie $K_0(V)$. Soit $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$ un représentant de l'invariant de Mishchenko. Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour

tout fibré α -plat E , on ait $\langle \sigma_V, [E] \rangle = \text{Signature}(u(x))$, où u désigne la presque représentation associée à E .

Ici, $[E]$ désigne la classe du fibré E dans $K^0(V)$.

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème de l'indice plus général où l'opérateur de signature est remplacé par n'importe quel opérateur elliptique E . On regarde alors l'indice de D dans le groupe $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$ au lieu de $L(\mathbf{C}[\Gamma])$. On peut encore définir l'image de $x \in K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$ par une presque représentation comme dans le lemme 3.5. La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 2.3 ci-dessus. On utilise ici la cohomologie cyclique entière, qui est une généralisation naturelle de la cohomologie cyclique.

Importance du théorème 3.4.

D'après [12], on peut construire suffisamment de fibrés presque plats pour redémontrer la conjecture de Novikov dans les cas suivants :

a) si Γ est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie connexe ou le groupe fondamental d'une variété complète de courbure sectionnelle négative ou nulle [30] ;

b) si Γ est un sous-groupe discret d'un groupe algébrique sur un corps local ([32]).

De plus, ce théorème permet de donner une nouvelle démonstration de la conjecture de Novikov pour les groupes hyperboliques.

Remarques : La construction de tous les fibrés presque plats utilisés pour établir les corollaires du théorème 3.4 passe par des applications lipschitziennes propres de Γ dans \mathbf{R}^n . Or on peut faire correspondre à une telle application un élément de K -homologie de $C^*(\Gamma)^{(4)}$, donc lui associer un invariant d'homotopie. L'avantage de cette façon de procéder, outre sa simplicité est qu'elle établit en plus la conjecture de Novikov forte.

⁽⁴⁾ Cette construction m'a été signalée par A. Connes. Elle n'est pas encore publiée, mais devrait faire partie de la version "détaillée" de [12].

4. COMPLÉMENTS

Conjecture de Gromov-Lawson.

Commençons par énoncer cette conjecture :

Conjecture (cf. [21]) : Soit V une variété compacte spinorielle de courbure scalaire strictement positive. Notons Γ le groupe fondamental de V et $f : V \rightarrow B\Gamma$ l'application classifiante. Alors, pour tout $x \in H^*(B\Gamma; \mathbf{C})$, $\langle \alpha_V, f^*(x) \rangle = 0$ où $\alpha_V \in H_*(V; \mathbf{Q})$ désigne le genre \widehat{A} de V , i.e. l'image de la classe de K -homologie de l'opérateur de Dirac de V par l'isomorphisme de Chern.

On a :

a) La conjecture de Gromov-Lawson est vraie pour les groupes hyperboliques.

b) Soient V une variété compacte spinorielle de courbure scalaire strictement positive. L'indice de l'opérateur de Dirac à coefficients dans une classe de K -théorie presque plate est nul.

En fait, la conjecture de Gromov-Lawson est une conséquence de la conjecture de Novikov forte (cf. [42]), d'où le a). Le b) est presque immédiat.

Feuilletages : Conjecture de Baum-Connes

On peut transposer les méthodes décrites ci-dessus dans d'autres cadres (cf. [2]). Dans le cas des feuilletages par exemple, on s'intéresse à la généralisation suivante de la conjecture de Novikov (cf. [3]) :

Soit (V, F) une variété compacte feuilletée de classe C^∞ . Le groupoïde d'homotopie de (V, F) est le groupoïde différentiable des classes d'homotopie des chemins tracés dans les feuilles de (V, F) . Rappelons qu'une homotopie feuilletée est une homotopie $(h_t)_{t \in [0,1]} : W \rightarrow V$ telle que pour tout point $x \in W$, $h_t(x)$ reste sur une même feuille de V .

Soient (V, F) et (W, H) deux variétés compactes feuilletées de classe C^∞ .

Une application $f : W \rightarrow V$ de classe C^∞ est appelée une équivalence d'homotopie feuilletée s'il existe une application $g : V \rightarrow W$ telle que :

a) l'image par f (*resp.* g) de toute feuille de W (*resp.* V) est contenue dans une feuille de V (*resp.* W) :

b) Il existe des homotopies feuilletées reliant $g \circ f$ et $f \circ g$ à l'identité de V et W .

La conjecture de Baum-Connes s'énonce :

Conjecture (*cf.* [3]) : *Soient V une variété compacte orientée, de dimension paire et F un feuilletage sur V ; notons BG l'espace classifiant du groupoïde d'homotopie G de (V, F) et $h : V \rightarrow BG$ l'application classifiante. Alors l'image par h de σ_V dans $K_0(BG) \otimes \mathbf{Q}$ est un invariant d'homotopie feuilletée.*

Rappelons que σ_V désigne la classe dans le groupe de K -homologie $K_0(V)$ de l'opérateur de signature de V . Cette conjecture signifie que si $f : (W, H) \rightarrow (V, F)$ est une équivalence d'homotopie feuilletée préservant l'orientation, on a l'égalité de $(h \circ f)_*(\sigma_W)$ avec $h_*(\sigma_V)$ modulo la torsion.

Les deux méthodes décrites ci-dessus s'appliquent à ce cadre :

a) Un élément de $H^*(BG; \mathbf{C})$ définit un cocycle cyclique sur une algèbre (notée $C^\infty(G)$) qui joue dans ce cadre le rôle de $\mathcal{R}[\Gamma]$. On obtient une démonstration de cette conjecture pour les cocycles qui peuvent être étendus à une sous-algèbre pleine de la C^* -algèbre du feuilletage. Cette méthode est développée dans [10] où de nombreuses classes de cohomologie sont traitées (en particulier les classes de cohomologie de Gel'fand Fuchs).

b) Soient (V, F) et (W, H) deux variétés riemanniennes feuilletées orientées. Soit $f : W \rightarrow V$ une équivalence d'homotopie feuilletée préservant l'orientation. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout fibré hermitien E sur V α -plat le long de F , les signatures de V à coefficients dans E et de W à coefficients dans f^*E sont égales (*cf.* [23]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.F. ATIYAH - *Elliptic operators discrete groups and von Neumann algebras*, Astérisque **32-33** (1976), 43-72.
- [2] P. BAUM and A. CONNES - *Geometric K-theory for Lie groups and foliations*, preprint I.H.E.S. (1982).
- [3] P. BAUM and A. CONNES - *Leafwise homotopy equivalence and rational Pontrjagin classes*. in *Foliations, Advanced Studies in Pure Mathematics* **5** (1985), 1-14.
- [4] M. BÖKSTEDT, W.C. HSIANG et I. MADSEN - En préparation. Voir l'exposé de BÖKSTEDT au Congrès (ICM) de Kyoto (1990).
- [5] J.-B. BOST - *K-théorie des produits croisés et principe d'Oka*, C.R.A.S. Paris **301**, Ser. I (1985), n° 5, 189-192.
- [6] D. BURGHELEA - *The cyclic homology of groups*, Comment. Math. Helvetici **60** (1985), 354-365.
- [7] S.E. CAPPELL - *On homotopy invariance of higher signatures*, Invent. Math. **33** (1976), 171-179.
- [8] P. CARTIER - *Homologie cyclique : Rapport sur des travaux récents de Connes, Karoubi, Loday, Quillen, ...*, Sémin. Bourbaki, Février 1984, exposé n° 621, Astérisque **121-122** (1985), 123-146.
- [9] A. CONNES - *Non commutative differential geometry. Chapter I : The Chern character in K-homology. Chapter II : De Rham homology and non commutative algebra*, Publ. Math. I.H.E.S. **62** (1986), 257-360.
- [10] A. CONNES - *Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation*, in *Geometric methods in operator algebras*. H. Araki and E.G. Effros éd., Pitman Research Notes in Math. Series **123**, Longman Wiley (1986), 52-144.
- [11] A. CONNES - *Entire cyclic cohomology of Banach algebras and the character of θ -summable Fredholm modules*, K-theory **1** (1988), 519-548.
- [12] A. CONNES, M. GROMOV et H. MOSCOVICI - *Conjecture de Novikov et fibrés presque plats*, C.R.A.S. Paris **310** Ser. I (1990), 273-277.
- [13] A. CONNES and H. MOSCOVICI - *Cyclic cohomology, the Novikov*

- conjecture and fundamental groups*, *Topology* **29** (1990), 345-388.
- [14] T. FACK - *K-théorie bivariante de Kasparov*, Sémin. Bourbaki Février 1983, exposé n° 605, *Astérisque* **105-106** (1983), 149-166.
- [15] F.T. FARRELL et W.C. HSIANG - *On Novikov's conjecture for non-positively curved manifolds*. I, *Ann. Math.* **113** (1981), 199-209.
- [16] B.L. FEIGIN et B.L. TSYGAN - *Additive K-theory*
- [17] E. GETZLER - *Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem*, *Comm. Math. Phys.* **92** (1983), 163-176.
- [18] É. GHYS - *L'invariant de Godbillon-Vey*, Sémin. Bourbaki, mars 1989, Exposé n° 706, *Astérisque* **177-178** (1989), 155-182.
- [19] É. GHYS - *Les groupes hyperboliques*, Sémin. Bourbaki Mars 1990, exposé n° 722, à paraître dans *Astérisque* **189-190**.
- [20] M. GROMOV - *Hyperbolic groups*, in *Essays in group theory*. M.S.R.I. Publ. **8** (1987), 75-263.
- [21] M. GROMOV et H.B. LAWSON - *Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds*, *Publ. Math. I.H.E.S.* **58** (1983), 83-196.
- [22] P. de la HARPE - *Groupes hyperboliques, algèbres d'opérateurs et un théorème de Jolissaint*, *C.R.A.S. Paris* **307** Ser. I (1988), 771-774.
- [23] M. HILSUM et G. SKANDALIS - *Invariance par homotopie de la signature à coefficients dans un fibré presque plat (d'après Connes-Gromov-Moscovici)*, à paraître dans *J. für Crelle und Ang. Math.*
- [24] F. HIRZEBRUCH - *Topological methods in algebraic geometry*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1965).
- [25] W.C. HSIANG, H.D. REES - *Miscenko's work on Novikov's conjecture*, *Contemp. Math.* **72** (1982), 77-98.
- [26] P. JOLISSAINT - *K-groups of reduced C^* -algebras and rapidly decreasing functions on groups*, *K-theory* **2** (1989), 723-735.
- [27] J. KAMINKER and J.G. MILLER - *Homotopy invariance of the analytic signature operators over C^* -algebras*, *J. Operator Theory* **14** (1985), 113-127.
- [28] M. KAROUBI - *K-theory, an introduction*, *Grund. des Mat. Wis.*, Springer-Verlag (1978).

- [29] G.G. KASPAROV - *Topological invariants of elliptic operators I : K-homology*, Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser. Mat. **39** (1975), 796-838 ; English transl. in Math. U.S.S.R. Izv. **9** (1975), 751-792.
- [30] G.G. KASPAROV - *Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture*, Inv. Math. **91** (1988), 147-201 ; (cf. aussi : *K-theory, group C*-algebras and higher signatures*, Conspectus Parts 1 and 2, preprint Chernogolovka (1981).
- [31] G.G. KASPAROV - *Operator K-theory and its applications : elliptic operators, group representations, higher signatures, C*-extensions*, in Proc. I.C.M. conf. Warsaw 1983, PWN Elsevier (1984), 987-1000.
- [32] G.G. KASPAROV and G. SKANDALIS - *Groups acting on buildings, Operator K-theory and Novikov's conjecture*, K-theory **4** (1991), 303-337.
- [33] G. LUSZTIG - *Novikov's higher signature and families of elliptic operators*, J. of Diff. Geometry **7** (1971), 229-256.
- [34] A.S. MISHCHENKO - *Homotopy invariance of non simply connected manifolds, I : Rational invariance*, Math. U.S.S.R. Izv. **4** (1970), 509-519, traduit de Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser. Math. **34** (1970), 501-514.
- [35] A.S. MISHCHENKO - *Infinite dimensional representations of discrete groups and higher signatures*, Izv. Akad. S.S.S.R. Ser. Mat. **38** (1974), 81-106.
- [36] A.S. MISHCHENKO - *C*-algebras and K-theory*, Springer Lect. Notes in Math. vol. **763** (1979), 262-274.
- [37] A.S. MISHCHENKO and Yu.P. SOLOV'JEV - *Représentations of Banach algebras and Hirzebruch type formulae*, Mat. Sbornic **111** (1980), 209-226.
- [38] H. MOSCOVICI - *Cyclic cohomology and invariants of non-simply connected manifolds*, Proc. I.C.M. Kyoto (1990), à paraître.
- [39] S.P. NOVIKOV - *Analogues hermitiens de la K-théorie*, Actes, Congrès Intern. Math. **2** (1970), 39-45.
- [40] M. PIMSNER - *KK-groups of crossed products by groups acting on trees*, Inv. Math. **86** (1986), 603-634.
- [41] H.D. REES - *Special manifolds and Novikov's conjecture*, Topology **22**

(1983), 365-378.

- [42] J. ROSENBERG - *C**-algebras, positive scalar curvature and the Novikov conjecture, Publ. Math. I.H.E.S. **58** (1983), 409-424.
- [43] Yu.P. SOLOV'EV - Uspekhi Matem. Nauk. **31** n° 1 (1976), 261-262.
- [44] Yu.P. SOLOV'EV - Thèse. Université de Moscou (1976).
- [45] S. WEINBERGER - *Aspects of the Novikov conjecture*, Contemp. Math. **105** (1990), 281-297.

Georges SKANDALIS

UNIVERSITÉ DE PARIS 7

UFR de Mathématiques

UA 212 du CNRS

Tour 45-55 - 5e étage

2 place Jussieu

F-75251 PARIS CEDEX 05

Astérisque

JEAN-PIERRE BOURGUIGNON

Stabilité par déformation non-linéaire de la métrique de Minkowski [d'après D. Christodoulou et S. Klainerman]

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki, exp. n° 740, p. 321-358

http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__321_0

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**STABILITÉ PAR DÉFORMATION NON-LINÉAIRE
DE LA MÉTRIQUE DE MINKOWSKI**
[d'après D. Christodoulou et S. Klainerman]

par Jean-Pierre BOURGUIGNON

On doit à Henri Poincaré (*cf.* [38]) et à Hermann Minkowski (*cf.* [32] et [33]) la formulation de la Relativité Restreinte comme géométrie d'un espace vectoriel de dimension 4 muni d'une forme bilinéaire de signature $(-+++)$, d'où le nom d'*espace de Minkowski* donné à cet espace, et de *groupe de Poincaré** à son groupe d'invariance affine.

La Théorie de la Relativité Générale, introduite par Albert Einstein dans une série d'articles dont la publication commença en 1913 (*cf.* [18]) et culmina en 1916 (*cf.* [17]), interprète la Gravitation comme une modification de la géométrie locale de l'espace-temps. Elle identifie le champ de gravitation à une métrique lorentzienne, et les *équations d'Einstein*, qui sont les équations de la théorie, égalent une partie de la courbure de cette métrique (le tenseur d'Einstein, *cf.* 1.3) au tenseur d'impulsion-énergie qui se déduit des autres interactions qui ont lieu dans l'espace-temps. Ces équations sont un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires du second ordre dont tout covecteur est caractéristique. Il peut être rendu hyperbolique par choix approprié de coordonnées. Résoudre exactement ce système est un problème mathématique ardu.

* Auparavant, pour expliquer les effets de contraction sur les électrons aux grandes vitesses, Hendrik A. Lorentz avait introduit dans [31] les transformations de l'espace-temps portant aujourd'hui son nom dont Poincaré montre dans [38] qu'elles forment le groupe d'invariance de la géométrie pré-citée.

Dans \mathbf{R}^4 , toute métrique invariante par translation est une solution (triviale) de ces équations, et on peut identifier l'espace-temps à l'espace de Minkowski. Dimitri Christodoulou et Sergiu Klainerman ont donné en 1989 dans [15] une solution rigoureuse au problème de la perturbation de cette solution triviale.

THEOREME (cf. [15]).— *Toute donnée initiale de Cauchy suffisamment proche de la donnée triviale de l'espace de Minkowski et fortement asymptotiquement plate sur \mathbf{R}^3 se développe en une unique métrique lorentzienne sur \mathbf{R}^4 , solution des équations d'Einstein du vide, qui est régulière, complète et globalement hyperbolique.*

L'objet de ce rapport est de présenter ce résultat (en commençant par les différentes notions apparaissant dans le théorème). Cet énoncé est souvent interprété comme la preuve de la *stabilité non-linéaire de la métrique de Minkowski* : “stabilité” parce que la topologie de l'espace-temps n'est pas modifiée et qu'aucune singularité n'y apparaît, et on ajoute l'adjectif “non-linéaire” pour insister sur le fait que c'est bien le système des équations d'Einstein que l'on résout, et non pas une version linéarisée.

Les difficultés pour parvenir au résultat sont assez formidables, et il faut mêler de façon complexe des estimées analytiques et des idées géométriques. Comme la preuve, rédigée soigneusement dans [15], fait près de 600 pages, dans ce rapport il ne peut être question que de relever quelques-unes des idées nouvelles (tant géométriques qu'analytiques) nécessaires pour commencer le travail. En fait ce théorème fournit un prétexte pour présenter quelques-unes des tendances actuelles les plus intéressantes de la Géométrie Différentielle : outre le passage du local au global (mentionné ici seulement pour mémoire), l'étude de conditions asymptotiques sur des espaces non compacts, les propriétés particulières des espaces de basse dimension, la réémergence de la géométrie conforme, l'étude de singularités, et bien sûr les stimulations venant de problèmes de la Physique mathématique.

1. LE CADRE MATHÉMATIQUE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE*

1.1. Pour nous, un *espace-temps* désignera une variété lorentzienne (Σ, γ) de dimension 4 où γ est un champ de formes bilinéaires symétriques de signature $(-+++)$ supposé suffisamment régulier. Les vecteurs $v \in T\Sigma$ tels que $g(v, v) > 0$ sont dits *de type espace*, ceux tels que $g(v, v) = 0$ *du type lumière* (on dit aussi *isotropes*), et ceux tels que $g(v, v) < 0$ *du type temps*. De la même façon, une courbe sera dite *causale* si son vecteur-vitesse est du type temps ou lumière, une hypersurface $M \subset \Sigma$ *du type espace* si tous les vecteurs (non nuls) de TM sont du type espace.

Pour que Σ puisse modéliser un espace-temps, nous supposons que Σ est orientée et temporellement orientée. Sur une telle variété nous parlerons d'une courbe causale (identifiée à la trajectoire d'un observateur) *orientée vers le futur* (resp. *orientée vers le passé*) si son vecteur-vitesse a une orientation temporelle positive (resp. négative) ou est adhérent à des vecteurs ayant une telle orientation. Pour écarter aussi d'autres pathologies de nature causale, nous ne considérerons que le cas où l'espace-temps (Σ, γ) est *globalement hyperbolique*, i.e. nous supposons qu'il existe dans Σ une hypersurface M qui n'est coupée qu'une seule fois par toute courbe causale. Ceci signifie en particulier que Σ est difféomorphe à $M \times \mathbf{R}$.

1.2. D'un point de vue tensoriel, la géométrie lorentzienne se développe de façon tout à fait parallèle à la géométrie riemannienne. Aussi les notations que nous introduisons maintenant valent aussi bien pour les variétés riemanniennes (qui apparaîtront dans la suite) que pour les variétés lorentziennes. Dans un espace-temps (Σ, γ) , il existe une et une seule dérivation covariante ∇^γ qui soit métrique et sans torsion comme la dérivation covariante de Levi-Civita sur une variété riemannienne. Nous notons R^γ la courbure de Riemann-Christoffel de ∇^γ (rappelons que, pour

* Les introductions à la Relativité Générale accessibles à un mathématicien sont nombreuses, par exemple [22], [34], [39], et aussi [44] qui vieillit bien.

$p \in \Sigma$, $u, v, w \in T_p \Sigma$,

$$R^\gamma(u, v)w = \nabla_u^\gamma(\nabla_v^\gamma W) - \nabla_v^\gamma(\nabla_u^\gamma W) - \nabla_{[u, v]}^\gamma W$$

où U, V et W désignent des extensions au voisinage de p de u, v et w respectivement). Nous notons Ric^γ la courbure de Ricci de γ obtenue à partir de R^γ en prenant la trace de la façon suivante

$$\text{Ric}^\gamma(u, v) = \text{Trace}(w \mapsto R^\gamma(w, u)v) .$$

Nous notons enfin $\text{Scal}^\gamma = \text{Tr}_\gamma \text{Ric}^\gamma$ la courbure scalaire de γ qui est la trace de Ric^γ par rapport à γ .

Toutes les intégrations que nous aurons à faire sur Σ seront faites par rapport à la mesure canonique v_γ définie par la métrique γ .

1.3. Les équations d'Einstein sont des équations intrinsèques qui s'écrivent alors

$$(1.4) \quad \text{Ric}^\gamma - \frac{1}{2} \text{Scal}^\gamma \gamma = 8\pi T$$

où le membre de gauche est le tenseur d'Einstein de γ (qui ne dépend que de la géométrie), et où T désigne le tenseur d'impulsion-énergie déterminé par le contenu physique de l'espace-temps. Dans le cas d'un champ électromagnétique par exemple, représenté par une 2-forme différentielle extérieure ω , le tenseur impulsion-énergie T^ω s'écrit $T^\omega = \omega \cdot_\gamma \omega - \frac{1}{4} |\omega|_\gamma^2 \gamma$ (où \cdot_γ désigne le produit une fois contracté utilisant la métrique lorentzienne γ et $|\cdot|_\gamma$ la norme déduite de γ). Dans le cas du vide, nous avons bien évidemment $T \equiv 0$, et les équations d'Einstein prennent une forme plus simple puisqu'en prenant la trace de (1.4) nous obtenons $\text{Ric}^\gamma = 0$: les espaces-temps vides sont donc les espaces-temps à courbure de Ricci nulle. Une des approches possibles des équations d'Einstein du vide (due à David Hilbert, cf. [24]) est de les considérer comme l'équation aux variations à support compact de la fonctionnelle $\gamma \mapsto \mathbf{S}(\gamma) = \int_\Sigma \text{Scal}^\gamma v_\gamma$ (souvent appelée *potentiel de gravitation* de l'espace-temps).

1.5. Dans $\Sigma = \mathbf{R}^4$ rapporté au système global de coordonnées linéaires (t, x, y, z) , la métrique de Minkowski s'écrit $\epsilon = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ (on notera que (\mathbf{R}^4, ϵ) est un modèle d'espace-temps dans lequel les unités ont été choisies de telle sorte que la vitesse de la lumière soit égale à 1). On constate trivialement que la dérivation covariante associée à ϵ est la dérivation ordinaire dans \mathbf{R}^4 , et que la courbure de cette variété lorentzienne est identiquement nulle. *L'espace-temps de Minkowski est donc bien une solution globalement définie dans \mathbf{R}^4 des équations d'Einstein du vide.*

Les courbes causales issues d'un point p de l'espace-temps de Minkowski remplissent les nappes futures et passées du cône issu de p translaté du cône quadratique défini par la métrique ϵ de sommet l'origine O , soit $C^O = \{v \mid v \in \mathbf{R}^4, \epsilon(v, v) = 0\}$. Cette distribution de cônes caractérise la classe conforme de la métrique de Minkowski, i.e. la détermine à multiplication près par une fonction.

L'espace de Minkowski admet le *groupe de Poincaré* comme groupe de symétrie : c'est le produit semi-direct du *groupe de Lorentz* qui est de dimension 6 par le *groupe des translations* de \mathbf{R}^4 ce qui porte sa dimension à 10 (le maximum pour le groupe des isométries d'une variété lorentzienne de dimension 4). Le groupe des transformations conformes (quelquefois appelé *groupe de Poincaré conforme*) est, lui, de dimension 15 et contient en plus les *homothéties* et les *inversions*. Une base de son algèbre de Lie est fournie par les champs de vecteurs de \mathbf{R}^4 suivants : les 4 champs de vecteurs constants $\partial/\partial t$ (du type temps futur), $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ et $\partial/\partial z$ (tous trois du type espace) ; les 6 champs de vecteurs engendrant les transformations de Lorentz, soit $\Omega_{xt}(= t \partial/\partial x + x \partial/\partial t)$, Ω_{yt} , Ω_{zt} (dont le type dépend du point où on les considère), $\Omega_{xy}(= x \partial/\partial y - y \partial/\partial x)$, et encore Ω_{xz} et Ω_{yz} (tous de type espace) ; le champ de Liouville $L = t \partial/\partial t + x \partial/\partial x + y \partial/\partial y + z \partial/\partial z$ (de type variable) et les inverses des translations $I_t(= 2tL + (x^2 + y^2 + z^2 - t^2) \partial/\partial t)$ (du type temps futur), $I_x(= -2xL + (x^2 + y^2 + z^2 - t^2) \partial/\partial x)$, I_y et I_z (tous trois de type espace).

1.6. La fonction $t : (\mathbf{R}^4, \epsilon) \longrightarrow \mathbf{R}$ est (comme sa dénomination le suggère) une *fonction du type temps* ce qui signifie que ses surfaces de niveau sont du type espace ou que, ce qui est équivalent, sa différentielle dt vérifie $\epsilon^{-1}(dt, dt) < 0$ (pour une métrique γ , γ^{-1} désigne la métrique naturellement induite sur les covecteurs en se souvenant que sa matrice dans un système de coordonnées (x^μ) , soit $(\gamma^{\mu\nu})$, est la matrice inverse de la matrice $(\gamma_{\mu\nu})$ de γ).

Il est utile de donner l'expression de la métrique de Minkowski ϵ en introduisant les coordonnées sphériques habituelles (r, θ, φ) sur l'espace $M_0 = \{0\} \times \mathbf{R}^3$ et les fonctions $u = t - r$ et $v = t + r$. Nous avons $\epsilon = -du dv + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$. Notons (pour un usage futur) que les fonctions u et v vérifient l'équation eikonale $\epsilon^{-1}(du, du) = \epsilon^{-1}(dv, dv) = 0$ (c'est pourquoi on les appelle souvent des fonctions *optiques*), et aussi la normalisation $\epsilon^{-1}(du, dv) = -2$. Les surfaces de niveau de u sont les nappes orientées vers le futur des cônes de lumière et celles de v les nappes orientées vers la passé des mêmes cônes.

Il est à noter que les sphères pour la métrique euclidienne e_t sur M_t centrées en $O_t \in M_t$ pour $t > 0$ peuvent être obtenues comme intersection des cônes de lumière $C^{O_{t'}}$ centrés en $O_{t'} \in M_{t'}$, autrement dit comme les feuilles du feuilletage de codimension 2 défini par la fonction optique u et la fonction t .

1.7. Revenons à la description d'un espace-temps général. Pour mieux comprendre la nature des équations d'Einstein, il est utile d'écrire explicitement ce système en ayant choisi un système de coordonnées locales (x^μ) au voisinage d'un point p , soit

$$(1.8) \quad (\text{Ric}^\gamma)_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=0}^3 \gamma^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\beta}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\beta} \right) + \sum_{\alpha, \beta=0}^3 \left(\Gamma_{\mu \alpha}^\beta \Gamma_{\nu \beta}^\alpha - \Gamma_{\beta \alpha}^\beta \Gamma_{\mu \nu}^\alpha \right),$$

où les symboles de Christoffel $(\Gamma_{\mu \nu}^\alpha)$ sont reliés aux coefficients $(\gamma_{\alpha\beta})$ de

la métrique par la formule (classique)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\beta=0}^3 g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial\gamma_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial\gamma_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right).$$

Il ressort de la formule (1.8) que toute direction cotangente ξ est caractéristique puisque le symbole principal de l'opérateur qui à une métrique lorentzienne γ associe sa courbure de Ricci $\text{Ric}^{\gamma} = \rho$ s'annule pour toutes les formes bilinéaires symétriques $\xi \circ \eta$ (où η est une 1-forme arbitraire et \circ le produit symétrique). Ces directions de dégénérescence sont la trace analytique de l'action du groupe des difféomorphismes de l'espace-temps sur l'espace des métriques lorentziennes. En effet la version infinitésimale de la relation de naturalité $\text{Ric}^{\psi^*\gamma} = \psi^*(\text{Ric}^{\gamma})$ valable pour tout difféomorphisme ψ dit que, pour tout champ de vecteurs X , l'image par le linéarisé de la courbure de Ricci de $\mathcal{L}_X\gamma$ est $\mathcal{L}_X\rho$, donc un opérateur différentiel du premier ordre dans le champ de vecteurs X .

Cependant, si les coordonnées sont reliées à la métrique par la condition d'harmonicité $\sum_{\alpha,\beta=0}^3 g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = 0$ (exprimant que la carte vue comme application d'un ouvert U de (Σ, γ) dans (\mathbf{R}^4, ϵ) est harmonique), alors on voit facilement* que le seul terme contenant des dérivées secondes qui reste dans (1.8) est le premier terme dont le symbole principal s'identifie à $-\gamma^{-1}(\xi, \xi)$. Dans un tel système de coordonnées, les équations d'Einstein forment un système hyperbolique sous forme diagonale. C'est Yvonne Choquet-Bruhat qui a établi en 1952 (cf. [11]) l'existence de solutions locales du problème de Cauchy (à données sur une hypersurface du type espace) pour les équations d'Einstein en montrant justement l'existence de systèmes de coordonnées harmoniques et en s'appuyant sur la théorie des équations hyperboliques mise au point par Jean Leray (cf. [29]).

Cette nécessité d'imposer aux coordonnées des conditions impliquant la métrique (qui est l'inconnue) est une des principales difficultés dans ce

* L'idée avait déjà été formulée par Einstein.

problème. L'autre vient de ce que, pour estimer des quantités vectorielles ou tensorielles, il est nécessaire d'utiliser un produit scalaire et que celui-ci est justement défini au fur et à mesure que nous résolvons l'équation. Ceci impose d'obtenir sur la solution un contrôle extrêmement strict. Ces difficultés sont communes aux problèmes ayant trait à la courbure de Ricci (*cf.* [8] pour un rapport sur les progrès récents dans le cas riemannien). La spécificité du problème lorentzien traité ici est de ne prendre tout son sens que dans le cas d'un espace non compact, le champ cherché ayant un comportement asymptotique fixé (*cf.* 4.).

2. METRIQUES DE SCHWARZSCHILD

2.1. Il y a seulement un petit nombre de familles de solutions exactes des équations d'Einstein. Elles ont toutes des symétries particulières ou se déduisent de métriques spéciales par des constructions géométriques simples. La première famille de ces solutions à avoir été trouvée est celle des *métriques de Schwarzschild* ϵ_m^S introduite par Karl Schwarzschild en 1916 dans [42] pour modéliser le champ de gravitation à l'extérieur d'une étoile sphérique. Dans les coordonnées déjà introduites dans \mathbf{R}^4 , elles sont définies par

$$(2.2) \quad \epsilon_m^S = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

où m est une constante positive ou nulle. Bien sûr, $\epsilon_0^S = \epsilon$.

La métrique ϵ_m^S est a priori définie sur $\Sigma_m^e = \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^3 - \overline{B}_{2m})$ où B_r désigne la boule ouverte de rayon r centrée à l'origine de \mathbf{R}^3 .

En fait ϵ_m^S est aussi une solution des équations d'Einstein dans le domaine intérieur $\Sigma_m^i = \mathbf{R} \times (B_{2m} - \{0\})$. La géométrie (lorentzienne) de cette région diffère de celle de Σ_m^e car les courbes du type temps y atteignent la singularité $r = 0$ en un temps fini ce qui signifie que cet espace-temps n'est pas complet (voir 2.4. pour une discussion de ce point).

2.3. Les métriques de Schwarzschild ont les propriétés de symétrie suivantes :

- elles sont *statiques*, i.e. elles admettent un champ de vecteurs de Killing (nom traditionnel des isométries infinitésimales) du type temps dont la distribution orthogonale est intégrable. Ce champ est le gradient (pour ϵ_m^S) de la fonction t (il est même parallèle pour la dérivation covariante de Levi Civita de ϵ_m^S) ;

- elles sont à *symétrie sphérique*, i.e. elles sont invariantes par l'action du groupe SO_3 sur les variables spatiales (x, y, z) de \mathbf{R}^4 dont les orbites sont les sous-variétés à r et t constants.

Ces propriétés les caractérisent comme l'a établi George D. Birkhoff.

THEOREME (cf. [5]).- *Tout espace-temps vide statique à symétrie sphérique tel que la fonction mesurant l'aire des sphères orbites du groupe SO_3 soit régulière est un espace-temps de Schwarzschild.*

2.4. Mais le phénomène le plus intéressant a trait aux singularités de ces métriques (pour une discussion historique, cf. [25] pages 231-239). L'expression (2.2) de la métrique de Schwarzschild ϵ_m^S présente a priori deux singularités : l'une pour $r = 0$, l'autre pour $r = 2m$. Lorsque $r \rightarrow 0$ dans Σ_m^i , ϵ_m^S est bien singulière en $r = 0$ car la norme du tenseur de courbure tend vers l'infini dans cette limite.

La singularité que l'on rencontre pour $r = 2m$ est, elle, seulement apparente, et n'est qu'une singularité du système de coordonnées. Il est possible de compléter l'espace-temps en une extension maximale Σ_m^S de ϵ_m^S comme cela a été mis en évidence par Martin D. Kruskal dans [28] (pour une discussion détaillée, voir [22]). Comme Σ_m^S contient aussi bien Σ_m^e que Σ_m^i , les espaces-temps de Schwarzschild $(\Sigma_m^S, \epsilon_m^S)$ ne sont donc pas géodésiquement complets.

On peut accomplir une partie de cette extension comme suit : en définissant les coordonnées optiques $u = t - r^*$ et $v = t + r^*$ après avoir posé $r^* = r + 2m \log(r - 2m)$, on peut introduire deux régions dans lesquels l'expression de ϵ_m^S dans les variables (u, r, θ, φ) d'une part et

(v, r, θ, φ) d'autre part s'étend pour toute valeur de r . Dans ces deux régions, la sous-variété $r = 2m$ joue un rôle spécial : elle permet aux courbes du type lumière ou temps de passer de la région $r > 2m$ à la région $r < 2m$ lorsqu'elles sont dirigées vers le futur dans le premier cas, et lorsqu'elles sont dirigées vers le passé dans le second cas. C'est la formulation précise du phénomène de *trou noir* et de son symétrique temporel le *trou blanc*. La surface séparant ces différentes régions (qui fonctionne comme une membrane semi-perméable) est appelée un *horizon apparent*.

2.5. La dernière propriété des métriques de Schwarzschild qu'il convient de mettre en évidence est leur comportement à l'infini spatial. En effet, pour tout $m \geq 0$, ϵ_m^S est *asymptotiquement plate* ce qui signifie que la métrique riemannienne g_m induite sur les hypersurfaces du type espace $M_t = \{t\} \times \mathbf{R}^3$ vérifie, lorsque $r \rightarrow +\infty$, la propriété suivante : il existe une métrique euclidienne e sur M_t telle que $g_m - e = O(r^{-1})$; la différence $D^{g_m} - D^e$ des dérivations covariantes de Levi-Civita de g_m et e est $O(r^{-2})$; enfin la courbure de g_m vérifie $|R^{g_m}|_e = O(r^{-3})$.

En étudiant le comportement à l'infini, il est aussi possible de donner une interprétation de la constante m qui apparaît dans la définition de ϵ_m^S . Lorsqu'on considère une géodésique radiale $s \mapsto (r(s))$ de cette métrique, son comportement pour r assez grand est donné par l'équation différentielle $d^2r/ds^2 = -m/r^2 + O(r^{-3})$ analogue à celle d'une particule-test dans le champ de gravitation *newtonien* d'un corps de masse m . La constante m s'identifie donc à la masse de l'étoile dont nous modélisons le champ de gravitation*. Nous revenons sur le fait que la constante m doit être prise *positive* dans la section 4.

* Le fait que m semble exprimée dans une unité de longueur tient à nos choix d'unités.

3. LES EQUATIONS D'EINSTEIN COMME EQUATIONS D'EVOLUTION

3.1. Pour étudier le système hyperbolique non-linéaire des équations d'Einstein dans un espace-temps (Σ, γ) supposé globalement hyperbolique, il est naturel de considérer le problème de Cauchy pour des données non caractéristiques, i.e. sur une hypersurface du type espace. Ce point de vue a été introduit par André Lichnerowicz (cf. [30]), mais sa systématisation est souvent attribuée à Robert Arnowitt, Stanley Deser et Charles W. Misner.

Sur (Σ, γ) , prenons donc une fonction du type temps, soit t , dont le gradient pour γ est noté F , et notons $i_t : M_t \rightarrow \Sigma$ le feuilletage de Σ par les sous-variétés des points de date t que nous appellerons un feuilletage temporel. Notons encore $g_t = i_t^*(\gamma)$ la première forme fondamentale de M_t qui est une métrique riemannienne, et $k_t = -\frac{1}{2} i_t^*(\mathcal{L}_F \gamma)$ sa seconde forme fondamentale. La dérivation covariante de Levi-Civita de g_t sera notée D^t , son tenseur de courbure de Riemann-Christoffel R^t , sa courbure de Ricci Ric^t et sa courbure scalaire Scal^t . Nous omettrons de mettre l'indice 0 pour tout ce qui a trait à la date $t = 0$.

Le feuilletage temporel (M_t) permet de construire un difféomorphisme de Σ avec $\mathbf{R} \times M$ de telle sorte que $\gamma = -\phi_t^2 dt^2 + g_t$. Il est traditionnel d'appeler la fonction ϕ_t , définie sur M_t par $\phi_t = (-\gamma(F, F))^{-1/2}$, le *décalage* associé à la fonction t ("lapse function" en anglais). Il est facile de voir que $k_t = -\frac{1}{2} \phi_t^{-1} \partial g / \partial t$.

3.2. Dans cette approche, il importe de traduire la géométrie de (Σ, γ) en celle de la courbe $t \mapsto (g_t, k_t, \phi_t)$ tracée dans le produit du fibré tangent de l'espace des métriques riemanniennes sur M par un fibré trivial.

Une partie de cette traduction exprime les équations générales de structure d'une hypersurface qui donnent les composantes de la courbure de (Σ, γ) dans la décomposition $T\Sigma = \mathbf{R}.F \oplus TM$. Les équations de Gauss proviennent des composantes de R^γ ne contenant pas F , celles de Codazzi des composantes contenant F une seule fois. Hormis le tenseur

de courbure de (Σ, γ) , ces deux familles d'équations ne font intervenir que des quantités définies sur M en termes de g et de k . Une dernière famille d'équations exprime les composantes de R^γ contenant deux fois F . Celle-là fait intervenir le 1-jet de $t \mapsto k_t$.

3.3. Comme, par les équations d'Einstein, nous ne connaissons que la trace de R^γ , il nous faut prendre la trace des équations générales précédentes sauf pour la dernière qui ne faisait intervenir que Ric^γ . Les équations que l'on obtient ainsi peuvent se regrouper en deux familles : celles de la première, généralement appelées *équations d'évolution*, s'écrivent

$$(3.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = -2\phi k_t \\ \frac{\partial k}{\partial t} = -Dd\phi + \phi(\text{Ric}^t + (\text{Tr}_{g_t} k_t)k - 2k_{t \cdot g_t} k_t) ; \end{cases}$$

celles de la seconde, appelées *équations de contrainte*, s'écrivent

$$\begin{cases} \delta^{g_t} k_t - d(\text{Tr}_{g_t} k_t) = 0 \\ \text{Scal}^t - |k_t|_{g_t}^2 + (\text{Tr}_{g_t} k_t)^2 = 0 , \end{cases}$$

où δ^g désigne la codifférentielle des champs de formes bilinéaires symétriques qui est la trace de la dérivation covariante de la métrique g .

Cette terminologie mérite une explication :

- les équations d'évolution déterminent l'évolution de la courbe $t \mapsto (g_t, k_t)$ en définissant son vecteur-vitesse pour chaque temps t ;
- les équations de contrainte portent ce nom car on peut montrer que, si elles sont satisfaites sur $M = M_0$, alors elles sont satisfaites sur M_t pour tout t dans le domaine de définition de la courbe $t \mapsto (g_t, k_t)$.

3.5. Arthur M. Fischer et Jerrold E. Marsden montrent dans [19] que cette approche peut s'interpréter plus ou moins comme la recherche de géodésiques dans l'espace des métriques riemanniennes sur M avec des contraintes, d'où le nom de *formalisme hamiltonien* quelquefois donné à ce point de vue.

Ils en tirent une preuve différente du théorème d'existence locale (cf. [20]). C'est cette approche que Klainerman et Christodoulou mettent en œuvre dans [15].

3.6. Il est à noter que les équations d'évolution contiennent 13 inconnues (6 pour g_t , 6 pour k_t et 1 pour ϕ) alors que nous n'avons écrit que 12 équations. Il nous reste seulement la liberté de fixer la fonction du type temps t .

La donnée du feuilletage par les hypersurfaces M_t ne définit la fonction t qu'à un changement de variables au but près. Il semble a priori que le choix le plus naturel soit $\phi \equiv 1$. C'est celui (habituel en géométrie riemannienne) qui correspond à prendre l'exponentielle normale à une hypersurface M comme carte pour un voisinage tubulaire de M . Ici il faut prendre garde que des équations (3.4) avec $\phi \equiv 1$ découle

$$\frac{\partial(\text{Tr}_{g_t} k_t)}{\partial t} = |k_t|_{g_t}^2 \geq \frac{1}{3} (\text{Tr}_{g_t} k_t)^2$$

ce qui aboutit à une explosion en un temps fini dès que $\text{Tr}_{g_t} k_t$ est positive en au moins un point de M par le lemme de Gronwall.

Ceci conduit à faire jouer un rôle particulier aux sous-variétés M dont la seconde forme fondamentale k est à trace nulle (en géométrie lorentzienne on parle de sous-variétés *maximales*, le pendant des sous-variétés minimales de la géométrie riemannienne). Notons qu'il ressort de la deuxième équation de contrainte qu'une sous-variété maximale d'un espace-temps vide est nécessairement à courbure scalaire positive.

Christodoulou et Klainerman travaillent avec des sous-variétés maximales ce qui revient à choisir une fonction du type temps particulière. La possibilité de feuilletter l'espace-temps avec des hypersurfaces maximales de type espace, établie dans [2], permet donc de lever l'indétermination qui demeurait sur la formulation des équations d'Einstein du vide. Dans la situation qui est la leur, à savoir une perturbation de l'espace de Minkowski, il convient d'ajouter une condition à l'infini qui rend elliptique le problème dont la fonction de décalage ϕ est solution. On prend en général $\phi \rightarrow 1$ à l'infini de l'hypersurface M supposé difféomorphe

à l'extérieur d'une boule dans \mathbf{R}^3 . Ceci revient à demander que la fonction t tende vers l'abscisse curviligne des courbes intégrales du champ de vecteurs F issues de points s'éloignant indéfiniment dans M . Nous développons ce point dans la section 4.

PROPOSITION (espace-temps vide à partir d'une hypersurface maximale).— *Etant donnée une variété riemannienne (M, g) de dimension 3 et un champ de formes bilinéaires symétriques k défini sur M et vérifiant les équations de contrainte,*

$$(3.7) \quad \begin{cases} \text{Tr}_g k = 0 \\ \delta^g k = 0 \\ \text{Scal}^g = |k|_g^2, \end{cases}$$

résoudre les équations d'Einstein du vide à partir des conditions initiales (M, g, k) revient à trouver un développement de ces données initiales, i.e. une courbe $t \mapsto (g_t, k_t)$ et une courbe de fonctions $t \mapsto \phi_t$ solutions des équations d'évolution

$$(3.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = -2 \phi k_t \\ \frac{\partial k}{\partial t} = -Dd\phi + \phi (\text{Ric}^t - 2 k_{t \cdot g_t} k_t); \end{cases}$$

et de l'équation

$$\Delta_{g_t} \phi = -|k|_{g_t}^2 \phi$$

(où Δ_g désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami d'une métrique g).

L'espace-temps recherché, solution des équations d'Einstein du vide, feuilleté par des hypersurfaces maximales, s'écrit $(I \times M, -\phi_t^2 dt^2 + g_t)$ où I désigne l'intervalle d'existence de l'équation d'évolution.

4. MÉTRIQUES ASYMPTOTIQUEMENT PLATES

4.1. L'espace-temps vide recherché par Christodoulou et Klainerman est une perturbation (finie) de l'espace de Minkowski, mais ils exigent en plus de lui qu'il soit *asymptotiquement plat*. Nous avons introduit cette notion dans la section 2 à propos des métriques de Schwarzschild. En fait c'est une version un peu plus forte qu'ils utilisent dans leur travail (voir 4.5). Cette restriction est justifiée par les considérations suivantes.

Pour un espace-temps asymptotiquement plat (modélisant un système isolé), il est possible (après Arnowitt-Deser-Misner, cf. [1]) de définir sa masse*. Par définition un espace-temps asymptotiquement plat (Σ, γ) admet une hypersurface du type espace, soit (M, g) , dont une partie non compacte est difféomorphe par un difféomorphisme ψ avec l'extérieur d'une boule dans (\mathbf{R}^3, e) et y vérifie les estimations suivantes pour tout champ de vecteurs constant X dans \mathbf{R}^3 :

$$|\psi^*g - e|_e = O(r^{-1}), \quad |\mathcal{L}_X(\psi^*g)|_e = O(r^{-2}), \quad |\mathcal{L}_X\mathcal{L}_X(\psi^*g)|_e = O(r^{-3})$$

en ce qui concerne sa première forme fondamentale g , et

$$|\psi^*k|_e = O(r^{-2}), \quad |\mathcal{L}_X(\psi^*k)|_e = O(r^{-3})$$

en ce qui concerne sa seconde forme fondamentale k . Ces conditions de décroissance assurent que les tenseurs de courbure de g et de γ sont $O(r^{-3})$ le long de M .

4.2. On définit la *masse* m_g d'un espace-temps (Σ, γ) supposé asymptotiquement plat en posant

$$m_g = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r} (\delta^e(\psi^*g) - d(\text{Tr}_e \psi^*g))(N) a_e,$$

* Il peut paraître paradoxal que dans une théorie de la Gravitation comme la théorie de la Relativité Générale la notion de masse soit difficile à définir. En fait la seule notion de masse connue est globale et non additive, et ne vaut que pour les systèmes isolés. La recherche d'une définition de masse qui soit quasi-locale est toujours un des thèmes actifs de recherche en Relativité Générale.

où N désigne le champ des normales à la sphère euclidienne S_r et a_e son élément d'aire. Il est facile de voir que la masse de la métrique de Schwarzschild ϵ_m^S est précisément m .

Il existe d'autres notions de masse en Relativité Générale comme la *masse de Bondi*. Elle s'évalue aussi de façon asymptotique, mais cette fois le long de 2-sphères propagées le long de surfaces isotropes.

Une des questions majeures dans la théorie des espaces-temps asymptotiquement plats vides ou vérifiant la *condition d'énergie positive* (i.e. $T(v, v) \leq 0$ pour tout vecteur v du type temps) a été de décider si la masse était nécessairement une quantité positive. Ce problème a été résolu par Richard Schoen et Shing Tung Yau en 1978 (pour un rapport, cf. [26]).

THEOREME (de la masse positive [40], [41]).— *Si une variété riemannienne (M, g) de dimension 3 asymptotiquement plate est à courbure scalaire positive, alors $m_g \geq 0$ et $m_g = 0$ si et seulement si (M, g) est isométrique à (\mathbf{R}^3, e) .*

La preuve contenue dans [40] et [41] s'appuie sur un raisonnement par l'absurde utilisant les résultats récents sur l'existence de surfaces minimales stables dans les variétés de dimension 3 à courbure scalaire positive ou nulle. Dans [45] (rigorisé dans [36]), une preuve constructive est donnée. Il y est montré que la masse peut s'identifier à l'énergie (i.e. l'intégrale de Dirichlet) d'un champ de spineurs vérifiant des conditions asymptotiques convenables.

Une conséquence très importante de ce théorème est *l'impossibilité d'imposer à un espace-temps vide des conditions de platitude à l'infini trop fortes sans le réduire à l'espace de Minkowski*.

4.3. Suite à l'équivalence, habituelle en Relativité, entre énergie et masse, m_g est quelquefois appelée une *énergie* ce qui est justifié par les considérations suivantes.

Il est possible de définir, de façon analogue à m_g , un *moment à l'infini* P_γ pour tout espace-temps vide asymptotiquement plat, vivant naturellement dans le dual de l'algèbre de Lie du groupe des déplacements

de (\mathbf{R}^3, e) , en posant pour tout champ de Killing X

$$P_\gamma(X) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{8\pi} \int_{S_r} (\psi^* k - (\text{Tr}_e(\psi^* k)) e)(N, X) a_e .$$

L'existence des limites est une conséquence directe des hypothèses de décroissance mises dans la définition d'un espace-temps asymptotiquement plat, et de la transformation de la différence des intégrales prises sur des sphères de rayon différent en une intégrale de volume dont l'intégrand est contrôlé par les équations de contrainte (3.8).

Il est traditionnel de distinguer dans ce moment à l'infini sa partie *linéaire* P_γ^ℓ (qu'on évalue contre les champs de vecteurs constants dans \mathbf{R}^3 qui engendrent les translations) et sa partie *angulaire* P_γ^a (qu'on évalue contre les rotations infinitésimales de (\mathbf{R}^3, e)). On regroupe alors m_g et P_γ^ℓ en un quadrivecteur après s'être assuré que les définitions que nous avons données qui semblent dépendre du choix d'une carte euclidienne à l'infini n'en dépendent en fait pas à cause des hypothèses de décroissance à l'infini*. Il est à remarquer que les conditions de décroissance n'excluent pas des comportements oscillatoires de g et k à l'infini à condition qu'ils ne soient pas trop forts.

On montre, en utilisant la formulation d'évolution (3.8) des équations d'Einstein, que dans un espace-temps vide asymptotiquement plat les conditions de décroissance à l'infini persistent sur les hypersurfaces M_t et que m_g et P_γ sont conservés.

4.4. Dans [15], Christodoulou et Klainerman introduisent la définition suivante.

DEFINITION.— Des données d'espace-temps (M, g, k) sont dites *fortement asymptotiquement plates* s'il existe un nombre positif m et un difféomorphisme ψ du complémentaire d'un ensemble compact dans M avec

* Une formulation mathématique intrinsèque nécessiterait l'introduction de champs de vecteurs sur M asymptotiquement de Killing.

l'extérieur d'une boule euclidienne dans (\mathbf{R}^3, e) tel que, pour tout champ de vecteurs constant X dans \mathbf{R}^3 ,

$$(\mathcal{L}_X)^i \psi^* g = (\mathcal{L}_X)^i \left(\left(1 + \frac{2m}{r}\right) e \right) + o(r^{-\frac{3}{2}-i}) \text{ pour tout } i, 1 \leq i \leq 4,$$

$$(\mathcal{L}_X)^j \psi^* k = o(r^{-\frac{5}{2}-j}) \text{ pour tout } j, 1 \leq j \leq 3.$$

Il suit trivialement de la définition que, pour des données fortement asymptotiquement plates (M, g, k) , alors m_g et P_γ (où γ désigne le développement de (M, g, k)) sont bien définis et que $m_g = m$ et $P_\gamma^\ell = 0$. En fait cette dernière condition distingue un feuilletage temporel maximal dont la signification physique est d'être un système "à centre de gravité fixé".

5. LA GEOMETRIE CONFORME

5.1. Dans cette section, nous rassemblons un certain nombre de faits ayant trait à des propriétés de la géométrie des espaces-temps qui ne font intervenir que la classe conforme de la métrique. Ces propriétés sont importantes du point de vue physique à cause de l'interprétation d'invariance dimensionnelle des quantités invariantes conformes.

Nous avons déjà remarqué que la partie de la géométrie qui n'a trait qu'aux cônes de lumière ne dépend que de la classe conforme de la métrique lorentzienne.

Dans les espaces-temps asymptotiquement plats, il est devenu traditionnel depuis les travaux de Penrose d'ajouter à l'infini une *compactification conforme* qui pour être régulière a l'inconvénient d'exiger une décroissance de la courbure qui semble plus stricte que ce qu'il est raisonnable de demander.

5.2. Une partie de la courbure de Riemann-Christoffel R^γ d'une métrique γ ne dépend en fait que de la classe conforme de cette métrique.

Pour l'introduire, il est commode de commencer par des considérations de pure algèbre linéaire. Sur un espace vectoriel fixe V de dimen-

sion n lorentzien (ou euclidien), que nous identifions bien sûr à l'espace tangent en un point d'une variété riemannienne ou lorentzienne, on considère l'espace $\mathcal{R}V$ des tenseurs vérifiant toutes les symétries algébriques d'un tenseur de courbure. A cause des antisymétries de la courbure et de la première identité de Bianchi, il est maintenant devenu classique de voir $\mathcal{R}V$ comme l'orthogonal de $\Lambda^4 V^*$ dans $S^2 \Lambda^2 V^*$, et donc de considérer la courbure de Riemann-Christoffel comme un endomorphisme sur l'espace des 2-formes. Sous l'action du groupe orthogonal (ou de Lorentz), $\mathcal{R}V$ se scinde en trois sous-espaces irréductibles (dès que $n \geq 4$), d'où la décomposition du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel R^γ en $R^\gamma = S^\gamma + Z^\gamma + W^\gamma$ où

- i) S^γ désigne la composante correspondant à la représentation triviale qui est la courbure d'un espace à courbure constante ayant même courbure scalaire que R^γ , donc un multiple de $\text{Id}_{\Lambda^2 V}$;
- ii) Z^γ désigne la composante correspondant à une représentation isomorphe à l'espace $S_0^2 V$ des tenseurs symétriques à trace nulle de V et qui est complètement déterminée par la partie à trace nulle de la courbure de Ricci (identiquement nulle si la dimension est 2) ;
- iii) W^γ désigne la composante "restante", i.e. celle qui est dans le noyau de la contraction envoyant la courbure de Riemann-Christoffel sur la courbure de Ricci, appelée *courbure conforme de Weyl*. Les éléments de cet espace sont appelés des *tenseurs de Weyl*. Cette composante n'existe pas en dimensions 2 et 3.

En conséquence, on peut donc dire que *dans un espace-temps vide, la courbure de Riemann-Christoffel se réduit à la courbure de Weyl*.

Le point de vue précédent ne permet pas de voir pourquoi W^γ mérite le nom de *courbure conforme**. Pour cela il faut faire un changement de métrique conforme, i.e. remplacer la métrique γ par la métrique $a^2 \gamma$,

* Il est à noter qu'Hermann Weyl avait introduit le tenseur qui porte son nom lors d'une tentative (cf. [44]) d'unification de la Gravitation et de l'Electromagnétisme en généralisant la Géométrie Lorentzienne, cadre de la Relativité Générale, à une Géométrie Lorentzienne Conforme. Cette tentative a avorté.

où a est une fonction positive, et constater que $W^{a^2} \gamma = W^\gamma$, calcul qui suppose d'évaluer un certain nombre de dérivées et n'est donc pas purement algébrique*. Notons que cette formule n'est valable que pour la courbure de Weyl naturellement définie, qui est de type (3, 1), et non pour ses variantes obtenues en contractant avec la métrique ou son inverse ; des puissances de a apparaissent alors. De cette propriété découle évidemment le fait qu'en dimension 4 ou plus, une métrique γ est localement conforme à une métrique plate si et seulement si sa courbure conforme W^γ est identiquement nulle.

5.3. Dans un espace vectoriel orienté V de dimension n muni d'une métrique lorentzienne γ , une autre quantité géométrique a d'intéressantes propriétés conformes : c'est l'opérateur de Hodge $*_\gamma : \Lambda^k V^* \longrightarrow \Lambda^{n-k} V^*$ défini, pour $\alpha, \beta \in \Lambda^k V^*$, par

$$\alpha \wedge (*_\gamma \beta) = \gamma^{-k}(\alpha, \beta) v_\gamma .$$

Lorsque la dimension est 4, $*_\gamma$ est un automorphisme orthogonal de $\Lambda^2 V^*$ de carré $-\text{Id}$, donc γ définit une structure complexe. (Pour une métrique euclidienne, $*$ est au contraire une involution qui permet de définir les notions de 2-forme positive et négative fondamentales dans les théories de jauge sur les variétés de dimension 4.) En fait $*_\gamma|_{\Lambda^2 V^*}$ ne dépend que de la classe conforme de γ .

Il est possible de définir les tenseurs de Weyl en dimension 4 comme les éléments de $S^2 \Lambda^2 V^*$ à trace nulle qui commutent à $*_\gamma$, toutes conditions invariantes conformes.

5.4. Il y a une autre façon de considérer les tenseurs de courbure reposant encore sur l'exploitation de leur symétries : on peut en effet plonger $\mathcal{R}V$

* Un raisonnement purement algébrique permet cependant de prévoir le résultat. En effet la fonction a devrait être présente dans $W^{a^2} \gamma$ par l'intermédiaire de son 2-jet qui appartient à $S^2 V$, or il n'existe pas d'application équivariante sous le groupe orthogonal entre $S^2 V$ et l'espace des tenseurs de Weyl.

dans $S^2S^2V^*$ en associant à $R \in \mathcal{R}V$ l'endomorphisme $\bar{R} : h \mapsto \bar{R}(h)$ qui sur deux vecteurs v et w vaut $\bar{R}(h)(v, w) = \sum_{i,j=1}^n R_{ikj}^l h_{lm} g^{km} v^i w^j$ (cf. [10]).

De cette approche, nous tirons les deux constructions suivantes utiles pour la preuve du théorème de Christodoulou et Klainerman (à partir de maintenant, nous identifions V avec l'espace tangent d'un espace-temps).

Si f est un vecteur tangent (pris du type temps orienté vers le futur pour représenter le vecteur d'univers d'un observateur), toute 2-forme ω (modélisant un champ électro-magnétique) se décompose en ses parties *électrique* E et *magnétique* B définies respectivement par $E^\omega = i_f \omega$ et $H^\omega = i_f(*\omega)$. Par extension, on définit la *décomposition électro-magnétique* d'un tenseur de Weyl W relativement à f comme la paire de tenseurs symétriques à trace nulle (E^W, H^W) avec $E^W = \bar{W}(f \otimes f)$ et $H^W = (*\bar{W})(f \otimes f)$. On vérifie facilement que f est dans le noyau de E^W et de H^W , que l'on peut voir comme portées par l'espace normal à f ; par ailleurs ces formes déterminent W .

A tout tenseur de Weyl W , il est possible d'associer son *tenseur de Bel-Robinson* Q^W défini (cf. [4]) par

$$Q^W = \frac{1}{2} (\bar{W} \circ \bar{W} + *\bar{W} \circ *\bar{W}) .$$

On voit facilement que $Q^W \in S^4V$ et est à trace nulle comme il est montré dans [14]. De plus, pour tous vecteurs f_1 et f_2 du type temps futur, on a $Q^W(f_1, f_2, f_1, f_2) > 0$. Il est à noter que la construction qui à un tenseur de Weyl W associe son tenseur de Bel-Robinson Q^W est complètement analogue à celle qui à une 2-forme extérieure ω associe son tenseur d'impulsion-énergie T^ω (cf. 1.3), et cette analogie sera exploitée ultérieurement; de plus, si W est pris de variance $(3, 1)$, cette construction ne dépend que de la classe conforme de la métrique.

5.5. La courbure de Riemann-Christoffel R^γ d'une métrique γ quelconque vérifie aussi une identité différentielle, la *deuxième identité de Bianchi*, qui s'écrit

$$d^{D^\gamma} R^\gamma = 0 ,$$

où d^{D^γ} désigne la *différentielle extérieure des 2-formes à valeurs dans les 2-formes*. Rappelons qu'il est nécessaire d'avoir choisi une dérivation covariante pour que cette notion ait un sens (d'où l'exposant D^γ), et notons que d^{D^γ} n'est pas un opérateur de cobord exact puisque son carré fait intervenir la courbure de la métrique γ .

Il suit des équations d'Einstein du vide que

$$d^{D^\gamma}(*_\gamma R^\gamma) = 0 .$$

Comme la codifférentielle δ^γ sur l'espace des 2-formes différentielles extérieures s'écrit $\delta^\gamma = -*_\gamma \circ d \circ *_\gamma$, cette condition, combinée avec la deuxième identité de Bianchi, dit que la courbure d'un espace-temps vide est *harmonique*. Elle n'implique pas en général les équations d'Einstein*. Elle a cependant un double avantage sur elles : elle est un analogue non-linéaire des équations de Maxwell du vide (qui expriment que le champ électromagnétique ω vérifie $d\omega = 0$ et $d(*\omega) = 0$) ; elle suit de $d^{D^\gamma}W^\gamma = 0$, car un champ de Weyl W fermé en ce sens est automatiquement cofermé (cf. [7]), ce qui équivaut à dire que $*_\gamma W$ est aussi fermé.

Cette formulation souligne l'importance dans notre contexte de l'opérateur d^{D^γ} intervenant dans la deuxième identité de Bianchi dont Klainerman et Christodoulou se servent abondamment. Ils s'appuient notamment sur deux propriétés des champs de Weyl fermés (pour d^{D^γ}), liées aux changements conformes de métriques :

- si W est un champ de Weyl fermé, alors Q^W est à divergence nulle (i.e. $\delta^\gamma Q^W = 0$) ;
- si W est un champ de Weyl fermé, et si ϕ est une transformation conforme de (Σ, γ) telle que $\phi^*\gamma = a^2 \gamma$, alors $a^{-1} \phi^*W$ est un champ de Weyl fermé (noter que la dépendance non-linéaire de l'opérateur d^{D^γ} par rapport à γ intervient ici).

* mais, dans le cas riemannien, elle lui est quelquefois équivalente sous des hypothèses topologiques globales (cf. par exemple [7]).

5.6. De plus les conditions de contrainte (3.7) pour des données initiales (M, g, k) sont *conformément covariantes* au sens suivant : pour toute fonction b positive sur M , $\tilde{g} = b^4 g$, $\tilde{k} = b^{-2} k$ sont solutions des deux premières équations de contrainte exprimées avec $D^{\tilde{g}}$; cela permet de satisfaire la troisième, à partir de données initiales qui ne la satisferaient pas, en prenant b solution de l'équation scalaire

$$\Delta^g b + \frac{1}{8} \text{Scal}^g b - |k|_g^2 b^{-5} = 0 ,$$

en prenant des conditions asymptotiques sur b qui garantissent que la métrique reste asymptotiquement plate.

5.7. Il est aussi utile de voir les champs de 2-tenseurs symétriques comme des 1-formes à valeurs dans le fibré tangent. Ainsi, sur une hypersurface M du type espace, il est classique de considérer la 2-forme sur M à valeurs dans TM , appelée *tenseur de Bach*, $B^g = d^{D^g}(\text{Ric}^g - \frac{1}{4} \text{Scal}^g g)$, qu'il est commode de voir (comme M est de dimension 3) comme une 2-forme bilinéaire symétrique. Cette forme est en fait à trace nulle à cause des conséquences sur la courbure de Ricci de la deuxième identité de Bianchi. La nullité de B^g caractérise les métriques g conformément plates sur un espace de dimension 3. Ce champ est un autre exemple de champ conformément covariant, ce qui implique par exemple que le champ de Bach B^{g_t} des métriques induites sur les sous-variétés M_t par une métrique de Schwarzschild ϵ_m^S s'annule à un ordre beaucoup plus élevé à l'infini que les dérivées de g_t .

6. LES LOIS DE CONSERVATION APPROCHÉES

6.1. Le théorème d'Emmy Noether affirme que *toute symétrie d'un système dont les équations de champ expriment qu'une fonctionnelle est extrémale donne lieu à une loi de conservation.*

En Relativité Générale, un premier exemple d'application de ce théorème (donné par Einstein, cf. [17]) se présente ainsi : l'invariance par

difféomorphisme du potentiel de gravitation $\gamma \mapsto \int_{\Sigma} \text{Scal}^{\gamma} v_{\gamma}$ implique

$$(6.2) \quad \delta^{\gamma}(\text{Ric}^{\gamma} - \frac{1}{2} \text{Scal}^{\gamma} \gamma) = 0 .$$

Cette propriété (qui suit aussi de la deuxième identité de Bianchi) traduit l'inclusion de l'espace tangent à l'orbite d'une métrique sous les difféomorphismes dans le noyau de la différentielle du potentiel de gravitation sur l'espace des métriques puisque $2\delta^{\gamma}$ est l'adjoint de l'opérateur $X \mapsto \mathcal{L}_X \gamma$ qui décrit l'action infinitésimale des difféomorphismes.

D'après les équations d'Einstein, (6.2) implique que le tenseur d'impulsion-énergie T est lui aussi à divergence nulle. Il est possible d'exploiter ce fait ainsi : si X est un champ de Killing de la métrique γ (i.e. vérifie $\mathcal{L}_X \gamma = 0$ ou, ce qui est équivalent, a la partie symétrique de sa dérivée covariante nulle), alors la 1-forme différentielle $i_X T$ est à divergence nulle, ce qui implique que, si M_t désigne le développement d'une hypersurface de Cauchy M , $\int_{M_t} *_{g_t}(i_X T) = \int_{M_t} T(X, F) v_{g_t}$ est indépendant de t . Cette loi de conservation permet une estimation en fonction des données initiales. C'est précisément de cette façon, en prenant pour X le champ de Killing conforme I_t , que les estimées L^2 de décroissance des ondes électromagnétiques, solutions des équations de Maxwell dans l'espace de Minkowski, ont été obtenues par Cathleen Morawetz (cf. [35]). Ce point de vue est systématiquement employé pour les équations linéaires dans [14]. Le projet est ici d'en faire une extension non-linéaire.

6.3. Comme nous étudions des espaces-temps vides (i.e. nous prenons $T \equiv 0$), les considérations précédentes ne s'appliquent pas telles quelles. Une des idées importantes de Christodoulou et Klainerman est de substituer à T le tenseur de Bel-Robinson Q^W d'un champ de Weyl W fermé. Ils utilisent la nullité de sa codifférentielle pour déduire des estimations sur le champ étudié. Pour produire une 1-forme différentielle dont le dual (par l'opérateur de Hodge) est intégrable sur une hypersurface, il faut le contracter avec trois champs de vecteurs. Le fait que Q^W soit à trace nulle permet d'utiliser des transformations infinitésimales conformes X , encore appelées *champs de Killing conformes*, (i.e. telles que $\mathcal{L}_X \gamma$ est un

multiple de γ ce qui équivaut à annuler la partie à trace nulle de $D^\gamma X$). Par suite, pour tout champ de Weyl W fermé, et pour tous champs de Killing conformes X_1, X_2 et X_3 , $\int_{M_t} *g_t(i_{X_1}i_{X_2}i_{X_3}W)$ est indépendant de t . De plus, si les X_i sont de type temps futur, il suit des propriétés de positivité de Q^W que l'intégrale sera positive.

Pour mettre en œuvre ces résultats dans notre problème, sont encore nécessaires deux idées supplémentaires que nous introduisons maintenant.

6.4. Il faut d'abord engendrer suffisamment de champs de Weyl fermés pour obtenir les estimations souhaitées. Christodoulou et Klainerman ont recours à une modification de la dérivation de Lie \mathcal{L} augmentant sa compatibilité avec une métrique γ . Ils donnent de cette *dérivation de Lie métrique* \mathcal{L}^γ une définition calculatoire*. La propriété fondamentale de \mathcal{L}^γ est de préserver toutes les quantités intrinsèquement définies par la métrique γ : ainsi, pour tout champ de vecteurs X , $\mathcal{L}^\gamma \gamma = 0$, $\mathcal{L}^\gamma * \gamma = 0$, \mathcal{L}^γ commute aux contractions faisant intervenir γ , etc. Il suit que \mathcal{L}_X^γ préserve l'espace des champs de Weyl (qui est défini par des conditions de symétrie et de nullité de contraction) pour tout champ de vecteurs X ce qui n'était pas le cas de la dérivation de Lie ordinaire \mathcal{L}_X .

6.5. Nous pouvons aussi exploiter la covariance conforme de l'espace des champs de Weyl fermés, mentionnée en 5.6, en remarquant que, si W est un champ de Weyl fermé, alors $\mathcal{L}_X^\gamma W$ est encore un champ de Weyl fermé dès que X est un champ de Killing conforme. En présence d'un grand groupe de transformations conformes, ceci permet d'engendrer un grand nombre de champs de Weyl fermés à partir d'un. Ainsi sur un espace-temps vide (Σ, γ) , pour tous champs de Killing conformes X_1, \dots, X_ℓ , $\mathcal{L}_{X_1}^\gamma \dots \mathcal{L}_{X_\ell}^\gamma W^\gamma$ est un champ de Weyl fermé. On trouve ainsi un grand nombre de quantités conservées en suivant le développement de données

* mais une définition géométrique conceptuelle s'appuyant sur un procédé universel de comparaison des bases orthonormées de deux métriques se trouve dans [9].

initiales, par exemple

$$\int_{M_t} *g_t i_{X_1} i_{X_2} i_{X_3} Q^{\mathcal{L}_{X_4}^\gamma \mathcal{L}_{X_5}^\gamma W^\gamma}$$

où les X_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) sont des champs de Killing conformes.

6.6. L'espace-temps vide (Σ, γ) que nous voulons étudier n'a aucune raison d'avoir un groupe de transformations conformes non trivial, mais nous supposons qu'il est une perturbation de l'espace de Minkowski (\mathbf{R}^4, ϵ) qui, comme nous l'avons vu, a un groupe de transformations conformes de dimension 15. Ceci garantit que, si nous parvenons à définir sur (Σ, γ) des champs qui soient proches des champs de Killing conformes X de l'espace de Minkowski, leur *tenseur de déformation* $\mathcal{L}_X \gamma$ sera suffisamment petit.

Il reste alors à remarquer que toutes les considérations que nous avons développées précédemment en supposant que les champs étaient des champs de Killing conformes, donc solutions d'une équation homogène, peuvent être étendues sous formes d'estimations à des champs dont le tenseur des déformations est contrôlé. *Les lois de conservation établies auparavant deviennent des lois de conservation approchées*, qu'il convient peut-être d'appeler des *lois de comportement*, contrôlant les intégrales sur des hypersurfaces du type espace de certaines 1-formes déduites d'un champ de Weyl W par contraction de son tenseur de Bel-Robinson avec des champs X approximativement de Killing conformes en termes d'intégrales dans l'espace-temps de quantités quadratiques en W et linéaires en $\mathcal{L}_X \gamma$. Il faut trouver des champs dont le tenseur des déformations décroît suffisamment vite à l'infini pour que les quantités dont nous étudions le comportement au cours du temps aient leur croissance contrôlée par leur propre taille.

7. LA GEOMETRIE ISOTROPE

7.1. Pour des raisons physiques évidentes, la structure causale d'un espace-temps (Σ, γ) est fondamentale. Un sous-ensemble $S \subset \Sigma$ définit

un *sous-ensemble d'influence futur* $I^+(S)$ formé de toutes les courbes causales orientées vers le futur issues de points de S . De la même façon, on définit $I^-(S)$ le *sous-ensemble d'influence passé*. Les bords des sous-ensembles d'influence d'une sous-variété sont des hypersurfaces isotropes qui sont les surfaces de niveau d'une fonction *optique*. Les sous-ensembles d'influence d'un point $p \in \Sigma$ représentent les cônes de lumière C^p issus de ce point. Si Σ est feuilleté par des hypersurfaces du type espace M_t , alors, si $p \in M_{t_0}$, pour t voisin de t_0 , $C^p \cup M_t$ est une sphère différentiable. Inversement, à partir d'une sphère S dans M_t , on peut construire les hypersurfaces isotropes qui coupent M_t suivant S .

Nous avons vu dans l'espace de Minkowski que les notions introduites précédemment sont définies par des équations algébriques.

7.2. L'approche la plus facile à mettre en œuvre consiste à travailler avec les hypersurfaces de niveau d'une fonction optique u et de considérer le feuilletage de Σ par des surfaces $S_{t,u}$ définies par les deux fonctions t et u . Ce feuilletage remplace les sphères euclidiennes, qui étaient les orbites de l'action de SO_3 dans l'espace de Minkowski.

L'outil de base pour développer la géométrie isotrope est le choix d'une base du fibré normal à $S_{t,u}$ après avoir constaté que la métrique sur le fibré normal est de signature $(-+)$. On prend une base de vecteurs isotropes (J, K) de ce fibré dont les composantes suivant F (le gradient de t par rapport à γ) soient 1.

Il devient dès lors possible de définir les ingrédients fondamentaux pour contrôler les solutions de l'équation des ondes par analogie avec ce qui se passe dans l'espace de Minkowski, à savoir *la fonction distance* r pour laquelle on pose $r = \text{aire}(S_{t,u})/4\pi$, *une deuxième fonction optique* v définissant les cônes du passé en posant $v = u + 2r$, et deux champs de vecteurs très importants : l'analogue du champ de Liouville dans l'espace de Minkowski engendrant les dilatations $L = \frac{1}{2}(vJ + uK)$, et l'inverse des translations temporelles $I_t = \frac{1}{2}(v^2J + u^2K)$. Pour mémoire, le champ de vecteurs engendrant les translations temporelles F est relié à J et K par $F = \frac{1}{2}(J + K)$.

7.3. On peut aussi raffiner la décomposition de la courbure R^γ adaptée au feuilletage de Σ par les hypersurfaces M_t en une décomposition adaptée aux sous-variétés $S_{t,u}$. En contractant R^γ avec les vecteurs J et K , on peut définir deux champs de formes bilinéaires symétriques portées par l'espace tangent à $S_{t,u}$ (qui sont à trace nulle à cause de la nullité de la courbure de Ricci), deux 1-formes différentielles tangentes à $S_{t,u}$, et deux fonctions.

Toutes ces quantités peuvent être reliées aux expressions de la courbure adaptées au feuilletage M_t . L'importance de ce raffinement dans la décomposition tient aux taux de décroissance à l'infini différents que présentent ces différentes composantes.

8. LE THEOREME DE CHRISTODOULOU ET KLAINERMAN

8.1. La stratégie de Christodoulou et Klainerman pour prouver leur théorème consiste à se donner les instruments de comparaison avec l'espace de Minkowski, donc à construire

- un feuilletage par des hypersurfaces du type espace maximales,
- les cônes de lumière dans la direction du futur comme surfaces de niveau d'une fonction optique,
- des champs approximativement de Killing conformes pour déduire des estimations sur la courbure.

Une fois ces instruments construits, la preuve s'appuie alors sur une méthode de continuité : après avoir établi un théorème d'existence locale en temps mais globale en espace, on suppose que l'espace-temps a été défini jusqu'à un temps t_∞ au-delà duquel il ne peut être prolongé sans que des estimations sur certaines quantités géométriques soient violées. Christodoulou et Klainerman montrent qu'il n'en est en fait rien en établissant que les intégrales temporelles de quantités faisant intervenir le tenseur de Bel-Robinson de dérivées bien choisies de la courbure R^γ peuvent être contrôlées en fonction de leur valeur pour $t = 0$ ce qui produit une contradiction.

Des difficultés de plusieurs sortes apparaissent dans la mise sur pied de ce programme. Nous les passons en revue dans les paragraphes qui suivent*.

8.2. Evoquons d'abord la difficulté liée à la *nécessité de travailler dans des systèmes de coordonnées particuliers* pour rendre le problème analytiquement bien posé. L'approche la plus naïve consisterait à chercher à étendre la construction de solutions locales par résolution du problème de Cauchy hyperbolique dans des coordonnées harmoniques faite dans [11] en une construction locale en temps mais globale en espace le long d'une hypersurface. Malheureusement, Choquet-Bruhat montre dans [12] qu'une telle approche conduit à une instabilité parmi les espaces-temps asymptotiquement plats proches de l'espace de Minkowski.

Christodoulou et Klainerman ne travaillent pas dans un système de coordonnées particuliers mais *fixent seulement une fonction de type temps t dont les hypersurfaces de niveau M_t sont maximales*. Ils adoptent alors le point de vue des équations d'évolution développées dans la section 4.

8.3. La courbure de Riemann-Christoffel d'un espace-temps vide (Σ, γ) se réduit à sa courbure de Weyl W^γ qui est donc fermée. Si nous possédons des estimations de W^γ , les données initiales (g, k, ϕ) sur l'hypersurface (M, g) peuvent s'en déduire par le biais du système elliptique

$$(8.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ric}^g - k \cdot_g k = E^{W^\gamma} \\ d^{D^g} k = H^{W^\gamma} \\ \delta^g k = 0 \\ \text{Tr}_g k = 0 \end{array} \right.$$

combiné avec l'équation satisfaite par la fonction de décalage ϕ . Christo-

* Bien évidemment pour les surmonter, des calculs explicites, longs et (pour certains d'entre eux) fastidieux, sont indispensables. Il n'est pas possible de même en donner une idée dans un rapport comme celui-ci. Le lecteur devra donc se reporter à [15].

doulou et Klainerman établissent les estimations elliptiques sur les variétés de dimension 3 nécessaires pour déduire du contrôle de W^γ celui des conditions initiales sur (M, g) . Ainsi il est possible de contourner le problème du choix des coordonnées.

8.5. Pour obtenir les estimations nécessaires sur W^γ , Christodoulou et Klainerman s'appuient sur l'analyse détaillée du comportement asymptotique des solutions des équations de Bianchi dans l'espace de Minkowski qu'ils ont faites dans [14], qui est la version linéarisée du système qu'il faut étudier.

Pour cela il faut disposer d'une action d'un groupe analogue au groupe de Poincaré conforme. On fait les constructions mentionnées dans la section 7 sur la géométrie isotrope en partant de l'hypersurface M_{t_∞} supposée terminale. Grâce à la fonction optique qui doit vérifier des estimations très strictes (dont la vérification prend plus de 70 pages), on peut construire à partir d'une sphère à l'infini une action du groupe SO_3 dont les orbites sont les intersections des hypersurfaces M_t et les cônes de lumières orientés vers le passé s'appuyant sur cette sphère qui sont les surfaces de niveau de la fonction optique, puis finalement étendre cette action sous la forme d'une action du groupe de Poincaré conforme. Cette action n'a aucune raison d'être isométrique ou conforme.

Le contrôle des tenseurs des déformations des champs des vitesses associés à cette action se ramène au contrôle de la géométrie des hypersurfaces M_t et C_u . C'est là qu'apparaît une des difficultés techniques majeures (mais dont la signification physique est considérable), à savoir *la divergence logarithmique des cônes de lumière*. En effet, alors que dans l'espace de Minkowski, la variable r liée à l'aire des sphères orbites du groupe des rotations reste à distance bornée de t sur le cône C_u , dans une perturbation fortement asymptotiquement plate de masse m , nous avons

$$r - t = -2m \log t + O(1) .$$

Ce phénomène est particulier à la dimension 4. Il est directement lié au fait que le flux d'énergie qui est rayonné à l'infini est non nul. Ce flux peut se mesurer par la non-ombilicité des surfaces $S_{t,u}$.

8.6. Les quantités dont la croissance doit être contrôlée font intervenir de façon fondamentale les idées développées dans la section 6 sur les lois de conservation approchées. La courbure R^γ de l'espace-temps vide est un champ de Weyl fermé, et donc le champ de Weyl $\mathcal{L}_X^\gamma W^\gamma$ a une norme contrôlée par les tenseurs de déformations de X que nous prenons comme champ de Killing conforme approché. La 1-forme dont l'estimation s'avère cruciale est la 1-forme P définie par

$$\begin{aligned} P = & -i_{I_t+F}i_{I_t+F}i_{I_t+F}Q\mathcal{L}_\Omega^\gamma W^\gamma - i_{I_t+F}i_{I_t+F}i_{I_t+F}Q\mathcal{L}_\Omega^\gamma\mathcal{L}_\Omega^\gamma W^\gamma \\ & - i_{I_t+F}i_{I_t+F}i_{I_t+F}Q\mathcal{L}_\Omega^\gamma\mathcal{L}_F^\gamma W^\gamma - i_{I_t+F}i_{I_t+F}i_{I_t+F}Q\mathcal{L}_L^\gamma\mathcal{L}_\Omega^\gamma W^\gamma \\ & - i_{I_t+F}i_{I_t+F}i_{I_t+F}Q\mathcal{L}_F^\gamma\mathcal{L}_F^\gamma W^\gamma, \end{aligned}$$

où Ω désigne un champ de vecteurs défini par l'action de SO_3 .

Les deux quantités numériques cruciales à estimer dans la bande d'espace-temps étudiée sont $E_1 = \sup_t \int_{M_t} *_{g_t} P$ et $E_2 = \sup_u \int_{C_u} *_{g_t} P$. Il est possible de montrer que ces quantités peuvent être contrôlées par une fonction affine d'elles-mêmes dont le terme constant est déterminé par les conditions initiales. Si ce terme est pris suffisamment petit, alors on arrive à une contradiction.

8.7. Mais il faut aller plus loin et tenir compte du fait que le système étudié est vraiment non-linéaire. En particulier les estimées, qui donnent la décroissance des ondes dans l'espace de Minkowski, font maintenant intervenir des termes d'erreur qui dépendent linéairement des tenseurs de déformation des champs de Killing approchés et quadratiquement de la courbure et de ses dérivées.

L'annulation cruciale qui se produit alors est liée à la non-linéarité très particulière des équations d'Einstein qui a pour effet de faire disparaître les termes a priori dominants (qui demeurent dans d'autres équations comme celles de l'Elasticité non-linéaire ou celles des Fluides compressibles). Ce calcul est analogue à des calculs se trouvant dans [27].

8.8. Terminons cet aperçu de la preuve par quelques détails sur la condition de petitesse des conditions initiales (M, g, k) qu'utilisent Christodoulou et Klainerman. Elle contient la norme uniforme (à poids) de la courbure de Ricci, la norme H^3 sur M à poids de la partie seconde forme fondamentale k de la donnée initiale, et la norme H^1 sur M (à poids) du tenseur de Bach B^g de la partie première forme fondamentale g . Ces diverses normes sont prises en privilégiant un point $p \in M$ et une unité de longueur particuliers. La mesure finale de la donnée initiale est faite en prenant la borne inférieure de ces normes sur ces paramètres particuliers, ce qui fournit une quantité sans dimension.

9. PROBLEMES OUVERTS ET CONSEQUENCES PHYSIQUES

9.1. Très modestement, Klainerman et Christodoulou disent dans l'introduction de [15] que le résultat qu'ils obtiennent est d'une difficulté très relative si on le compare aux conjectures qui ont trait à la distribution des singularités dans un espace-temps.

La notion de singularité ne va pas de soi en Relativité Générale (*cf.* [21] et le chapitre 8 de [22]). Un espace-temps peut présenter divers types d'incomplétude, et il n'est pas sûr que les singularités du type "trou noir" ou "trou blanc" soient les seules qu'il faille répertorier. Le point de vue intrinsèque est suffisamment établi aujourd'hui pour que les singularités du seul système de coordonnées ne soient plus prises en compte (*cf.* 2.4). Un critère pour avoir une vraie singularité peut être le fait que certaines quantités scalaires formées avec la courbure tendent vers l'infini.

Même en se limitant à des singularités "géométriques", il est nécessaire de comprendre comment celles-ci apparaissent dans l'espace-temps. Stephen W. Hawking et Roger Penrose ont donné des critères assurant l'existence d'une singularité, desquels nous extrayons le suivant.

THEOREME (cf. [23]).— *Dans un espace-temps vide globalement hyperbolique, toute surface du type espace dont les vecteurs normaux isotropes déterminent une évolution future qui n'accroît pas l'aire a une géodésique causale incomplète.*

Du théorème précédent suit notamment la persistance de singularités par perturbation alors que l'on avait cru un moment qu'elles étaient liées à une trop grande symétrie provoquant une focalisation vers celles-ci.

9.2. Obtenir une description de la façon dont les singularités apparaissent en Relativité Générale (classique) est considéré comme un des problèmes majeurs du sujet. Il existe de nombreuses versions de la conjecture dite de la “censure cosmique” (cf. [3], [37], [46]), nom générique donné à diverses formulations de l'hypothèse selon laquelle ce qui a été constaté sur les métriques de Schwarzschild serait en fait un comportement universel dans les espaces-temps vides (ou non vides à condition que les interactions “physiques” qui s'y passent vérifient certaines conditions de positivité physiquement raisonnables). Nous en formulons une version dont le contenu géométrique est facile à appréhender.

CONJECTURE (de la “censure cosmique”).— *Tout espace-temps vide présentant une singularité admet une perturbation dans laquelle cette singularité est entourée par un horizon apparent.*

Il n'est pas possible d'énoncer cette conjecture sans laisser la possibilité de perturber l'espace-temps considéré car la métrique de Taub-NUT (décrite dans [22] pages 170-178) a une singularité “nue” que la conjecture exclut. Cette métrique est spatialement homogène, et ce haut degré de symétrie est censé être responsable de la singularité de cet espace-temps vide.

9.3. Une autre partie de [15] a trait au rayonnement de l'énergie gravitationnelle dans les perturbations de l'espace de Minkowski construites. Cette question est d'un intérêt physique fondamental car on ne dispose

encore aujourd'hui que de très peu d'expériences mettant en évidence des phénomènes qui pourraient être considérés comme de bons tests de cette théorie. Les tests dont nous disposons sont :

- l'avance du périhélie de Mercure (expérience qui a joué un grand rôle dans la reconnaissance de la théorie par un public plus large que celui des spécialistes),
- la déviation des rayons lumineux dans le champ de gravitation d'une étoile massive,
- la déviation vers le rouge du rayonnement de certaines étoiles s'éloignant de notre galaxie.

La détection des ondes gravitationnelles qui sont prévues par la Théorie de la Relativité Générale (*cf.* [6]) en serait une vérification supplémentaire. Cette théorie prévoit que ces ondes se déplacent à la vitesse de la lumière, et sont transversales et portées par un champ de formes bilinéaires symétriques à trace nulle. La dualité onde-particule amène à associer une particule à ces ondes, le *graviton* de spin 2 (en effet, en dimension 4, le complexifié de l'espace $S_0^2\mathbf{R}^4$ des formes bilinéaires symétriques à trace nulle sur \mathbf{R}^4 est isomorphe au complexifié de $\Lambda^+\mathbf{R}^4 \otimes \Lambda^-\mathbf{R}^4$, or $\Lambda^\pm\mathbf{R}^4 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong S^\pm\mathcal{S}^\pm$ où S^\pm désigne l'espace des demi-spineurs). La recherche de ces ondes a fait l'objet de plusieurs tentatives jusqu'ici infructueuses (*cf.* [16] et [43] pour des rapports sur ces tentatives). Le fait de pouvoir embarquer du matériel expérimental à bord de satellites offre évidemment de nouvelles perspectives. Il est donc très important de pouvoir disposer d'une bonne prédiction de ces ondes. H. Bondi a développé une théorie sur leur propagation que Christodoulou et Klainerman justifient dans le cas des espaces-temps vides qu'ils considèrent. Dans [13], Christodoulou donne des arguments s'appuyant sur [15] pour justifier que les effets non-linéaires doivent être suffisamment importants même à grande distance pour ne pouvoir être négligés devant les effets d'une théorie linéarisée ce qui souligne une nouvelle fois la nature fortement non-linéaire des équations d'Einstein.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. ARNOWITT, S. DESER, C. MISNER, *Coordinate invariance and energy expressions in General Relativity*, Phys. Rev. **122** (1961), 997-1006.
- [2] R. BARTNIK, *Existence of maximal surfaces in asymptotically flat space-times*, Commun. Math. Phys. **94** (1984), 155-175.
- [3] R. BARTNIK, *Results and conjectures in Mathematical Relativity*, Proc. Geometry and Physics, Australian Nat. Univ. **22**, 1989.
- [4] L. BEL, *Introduction d'un tenseur du quatrième ordre*, C.R. Acad. Sci. Paris **248** (1959), 1094-1096.
- [5] G.D. BIRKHOFF, *Relativity and Modern Physics*, Harvard Univ. Press, Cambridge, 1923.
- [6] H. BONDI, M.G.J. VAN DER BURG, A.W.K. METZNER, *Gravitational waves in General Relativity, VII*, Proc. Roy. Soc. London **269** (1962), 21-52.
- [7] J.P. BOURGUIGNON, *Les variétés de dimension quatre à courbure harmonique et à signature non nulle sont d'Einstein*, Inventiones Math. **63** (1981), 263-286.
- [8] J.P. BOURGUIGNON, *L'équation de la chaleur associée à la courbure de Ricci*, Séminaire Bourbaki, Exposé n° 653, Astérisque **145-146** (1987), 45-61.
- [9] J.P. BOURGUIGNON, P. GAUDUCHON, *Spineurs, opérateurs de Dirac et variations de métriques*, à paraître.
- [10] J.P. BOURGUIGNON, H. KARCHER, *Curvature operators : pinching estimates and geometric examples*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Paris **11** (1978), 71-92.
- [11] Y. CHOQUET-BRUHAT, *Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non-linéaires*, Acta Math. **88** (1952), 141-225.
- [12] Y. CHOQUET-BRUHAT, *Un théorème d'instabilité pour certaines équations hyperboliques non-linéaires*, C.R. Acad. Sci. Paris **276**, 281-284.

- [13] D. CHRISTODOULOU, *The nonlinear nature of Gravitation and gravitational wave experiments*, Preprint, Courant Institute (1990).
- [14] D. CHRISTODOULOU, S. KLAINERMAN, *Asymptotic properties of linear field equations in Minkowski space*, Commun. Pure Appl. Math. **43** (1990), 137-199.
- [15] D. CHRISTODOULOU, S. KLAINERMAN, *The global nonlinear stability of the Minkowski space*, à paraître.
- [16] A.H. COOK, *Experiments on gravitation*, in *300 years of gravitation*, S.W. Hawking et W. Israel ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1987), 51-79.
- [17] A. EINSTEIN, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Ann. Phys. **49** (1916), 769-822.
- [18] A. EINSTEIN, M. GROSSMANN, *Entwurf einer allgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*, Z. Math. Phys. **62** (1913), I. Physikalischer Teil 225-244 ; II. Mathematischer Teil, 244-261.
- [19] A. FISCHER, J.E. MARSDEN, *The Einstein equations of evolution : a geometric approach*, J. Math. Phys. **13** (1972), 546-568.
- [20] A. FISCHER, J.E. MARSDEN, *The Einstein evolution equations as a first-order symmetric hyperbolic quasilinear system*, Commun. Math. Phys. **28** (1972), 1-38.
- [21] R.P. GEROCH, *What is a singularity in General Relativity ?*, Ann. Phys. **48** (1968), 526-540.
- [22] S.W. HAWKING, G.F.R. ELLIS, *The large scale structure of space-time*, Cambridge Monographs on Math. Phys., Cambridge, 1973.
- [23] S.W. HAWKING, R. PENROSE, *The singularities of gravitational collapse and cosmology*, Proc. Roy. Soc. London **314** (1970), 529-548.
- [24] D. HILBERT, *Die Grundlagen der Physik, (Erste Mitteilung)*, Nachr. Gesellsch. Wiss. Göttingen **3** (1915), 395-407.
- [25] W. ISRAEL, *Dark stars : the evolution of an idea*, in *300 years of gravitation*, S.W. Hawking et W. Israel ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1987), 199-276.

- [26] J.L.KAZDAN, *Positive energy in General Relativity*, Séminaire Bourbaki, Exposé n° 593, Astérisque **92-93** (1982), 315-330.
- [27] S. KLAINERMAN, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations*, Lect. Appl. Math. **23** (1986), 293-326.
- [28] M.D. KRUSKAL, *Maximal extension of the Schwarzschild metric*, Phys. Rev. **119** (1960), 1743-1745.
- [29] J. LERAY, *Hyperbolic differential equations*, notes Inst. Adv. Stud., Princeton (1952).
- [30] A. LICHNEROWICZ, *Sur certains problèmes globaux relatifs au système des équations d'Einstein*, Act. Sci. Ind. **833** (1939), Hermann, Paris.
- [31] H.A. LORENTZ, *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light*, Proc. Acad. Sci. Amsterdam **6** (1904).
- [32] H. MINKOWSKI, *Space and Time*, Address at the 80th Assembly of German Natural Scientists and Physicians, Cologne (1908), in *The principle of relativity*, Dover Pub. (1952), 73-91.
- [33] H. MINKOWSKI, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*, Nachr. Gesellsch. Wissensch.. Göttingen (1908), 53.
- [34] C. MISNER, K. THORNE, J.A. WHEELER, *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.
- [35] C. MORAWETZ, *The limiting amplitude principle*, Commun. Pure Appl. Math. **15** (1962), 349-362.
- [36] T. PARKER, C. TAUBES, *On the proof by E. Witten of the positive mass conjecture*, Commun. Math. Phys. **84** (1982), 223-238.
- [37] R. PENROSE, *Unsolved problems in General Relativity*, in *Seminar in Differential Geometry*, Ann. Math. Studies **102** (1981), 631-668.
- [38] H. POINCARÉ, *Sur la dynamique de l'électron*, Rend. Circ. Mat. Palermo **21** (1906), 129-176.
- [39] R.K. SACHS, H. WU, *General Relativity for the mathematician*, Grad. Texts in Math. **48**, Springer Verlag, New York, 1977.

- [40] R. SCHOEN, S.T. YAU, *On the proof of the positive mass conjecture I*, Commun. Math. Phys. **65** (1978), 45-76.
- [41] R. SCHOEN, S.T. YAU, *On the proof of the positive mass conjecture II*, Commun. Math. Phys. **79** (1981), 231-260.
- [42] K. SCHWARZSCHILD, *Über das Gravitationsfeld eines Massen nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsber. Königl. Preuß. Akad. Wiss. (1916), 189-196.
- [43] K.S. THORNE, *Gravitational radiation*, in *300 years of gravitation*, S.W. Hawking et W. Israel ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1987), 330-458.
- [44] H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, (1920) ; *Space, Time, Matter*, Engl. version, Dover, New York, (1952).
- [45] E. WITTEN, *A new proof of the positive energy theorem*, Commun. Math. Phys **80** (1981), 381-402.
- [46] S.T. YAU, *Problems Section*, in *Seminar in Differential Geometry*, Ann. Math. Studies **102** (1981), 695-697.

Jean Pierre BOURGUIGNON

Centre de Mathématiques
U.R.A. 169 du C.N.R.S.
Ecole polytechnique
F-91128 PALAISEAU Cedex

Astérisque

JAN DENEFF

Report on Igusa's local zeta function

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 741, p. 359-386

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__359_0>

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REPORT ON IGUSA'S LOCAL ZETA FUNCTION

BY JAN DENEFF

Igusa's local zeta functions are related to the number of solutions of congruences mod p^m and to exponential sums mod p^m . This report is a survey on what is known about these zeta functions. There are several conjectures and intriguing connections with topology and singularity theory. They will be emphasized throughout the paper (especially sections 2 and 4). The case of curves is well-understood and is explained in section 5 without any calculations. Much less is known in higher dimensions, although there is by now a lot of experimental evidence (section 6) for the monodromy conjecture which relates the poles of Igusa's zeta functions to local monodromy. Relative invariants of prehomogeneous vector spaces are discussed in section 7. They provide very interesting examples which motivated the conjectures. The adelic situation is only mentioned briefly in 7.7. We will not treat the connection with Siegel-Weil formulas, but refer for this to Igusa's book [30, Chap. 4] and his survey paper [34]. At the end we briefly discuss the theory of p -adic subanalytic sets which yields very general rationality results.

1. FIRST PROPERTIES OF LOCAL ZETA FUNCTIONS

1.1 Local zeta functions

(1.1.1) Let K be a p -adic field, i.e. $[K:Q_p] < \infty$. Let R be the valuation ring of K , P the maximal ideal of R , and $\bar{K} = R/P$ the residue field of K . The cardinality of \bar{K} is denoted by q , thus $\bar{K} = F_q$. For $z \in K$, $\text{ord } z \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ denotes the valuation of z , $|z| = q^{-\text{ord } z}$, and $\text{ac}(z) = z\pi^{-\text{ord } z}$ where π is a fixed uniformizing parameter for R .

(1.1.2) Let $f(x) \in K[x]$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f \notin K$. Let $\Phi: K^n \rightarrow \mathbb{C}$ be a Schwartz-Bruhat function, i.e. a locally constant function with compact support. Finally, S.M.F.

let χ be a character of R^\times , i.e. a homomorphism $\chi : R^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ with finite image, where R^\times denotes the group of units of R . We formally put $\chi(0) = 0$.

(1.1.3) To the above data one associates Igusa's local zeta function

$$Z_\Phi(s, \chi) = Z_\Phi(s, \chi, K, f) := \int_{K^n} \Phi(x) \chi(\text{ac}f(x)) |f(x)|^s |dx| ,$$

for $s \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(s) > 0$, where $|dx|$ denotes the Haar measure on K^n so normalized that R^n has measure 1. These zeta functions were introduced by Weil [83] and their basic properties for general f were first studied by Igusa [28], [30]. We will see below that $Z_\Phi(s, \chi)$ is rational in q^{-s} , so that it extends to a meromorphic function on \mathbb{C} .

We will write Z , resp. Z_0 , instead of Z_Φ , when Φ is the characteristic function of R^n , resp. PR^n . Throughout this paper, we put $t = q^{-s}$. Note that $Z_\Phi(s, \chi)$ is a power series in t . The coefficient of t^m in a power series $P(t)$ is denoted by $\text{Coeff}_{t^m} P(t)$. We denote the trivial character by χ_{triv} and the support of Φ by $\text{Supp } \Phi$.

(1.1.4) *Remark.* Note that $\text{ac}(f(x))$ and hence also $Z_\Phi(s, \chi, K, f)$ depend on the choice of the uniformizing parameter π . More canonically one introduces

$$Z_\Phi(w, K, f) = \int_{K^n} \Phi(x) w(f(x)) |dx|$$

as a function of a quasicharacter w of K^\times (i.e. a continuous homomorphism $w : K^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$). Every quasicharacter w of K^\times is of the form $w(y) = \chi(\text{ac}(y)) |y|^s$. Thus studying $Z_\Phi(w, K, f)$ is equivalent with studying $Z_\Phi(s, \chi, K, f)$.

Sometimes it is also helpfull to think of Z_Φ as a distribution $\Phi \mapsto Z_\Phi$.

1.2 Number of solutions of congruences

(1.2.1) Suppose $f(x)$ has coefficients in R . Let N_m be the number of solutions of $f(x) \equiv 0 \pmod{P^m}$ in R/P^m and put $P(t) := \sum_{m=0}^\infty q^{-nm} N_m t^m$. The Poincaré series $P(t)$ is directly related to $Z(s, \chi_{triv})$ by the formula

$$P(t) = \frac{1 - tZ(s, \chi_{triv})}{1 - t}.$$

Indeed, since $q^{-nm} N_m$ equals the measure of $\{x \in R^n \mid \text{ord } f(x) \geq m\}$, this follows directly from

$$(1.2.2) \quad \int_{\text{ord } f(x) \geq m} \Phi(x) |dx| = Z_\Phi(0, \chi_{triv}) - \text{Coeff}_{t^m} \frac{tZ_\Phi(s, \chi_{triv})}{1 - t}.$$

To verify this last equality note that the left-hand side equals

$$\int \Phi(x)|dx| - \sum_{k \leq m-1} \int_{\text{ord } f(x)=k} \Phi(x)|dx| = Z_\Phi(0, \chi_{\text{triv}}) - \sum_{k \leq m-1} \text{Coeff}_{i,k} Z_\Phi(s, \chi_{\text{triv}}).$$

1.3 Rationality of local zeta functions

(1.3.1) *Resolutions.* Put $X = \text{Spec } K[x]$ and $D = \text{Spec } K[x]/(f(x))$. Choose an (embedded) resolution (Y, h) for $f^{-1}(0)$ over K , meaning that Y is an integral smooth closed subscheme of projective space over X , $h: Y \rightarrow X$ is the natural map, the restriction $h: Y \setminus h^{-1}(D) \rightarrow X \setminus D$ is an isomorphism, and the reduced scheme $(h^{-1}(D))_{\text{red}}$ associated to $h^{-1}(D)$ has only normal crossings (i.e. its irreducible components are smooth and intersect transversally, cf. [25]). Let $E_i, i \in T$, be the irreducible components of $(h^{-1}(D))_{\text{red}}$. These consist of the components $E_i, i \in T_s$, of the strict transform of D , and the exceptional divisors $E_i, i \in T \setminus T_s$. For each $i \in T$ let N_i be the multiplicity of E_i in the divisor of $f \circ h$ on Y and let $\nu_i - 1$ be the multiplicity of E_i in the divisor of $h^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$. The (N_i, ν_i) are called the *numerical data* of the resolution. For $i \in T$ and $I \subset T$ we consider the schemes

$$\overset{\circ}{E}_i := E_i \setminus \bigcup_{j \neq i} E_j, \quad E_I := \bigcap_{i \in I} E_i, \quad \overset{\circ}{E}_I := E_I \setminus \bigcup_{j \in T \setminus I} E_j.$$

When $I = \emptyset$, we put $E_\emptyset = Y$. Finally let $C_f \subset X$ be the singular locus of $f: X \rightarrow \mathbb{A}_K^1$.

(1.3.2) Theorem (Igusa [28],[30]). *Assume the notation of 1.1 and 1.3.1, then*

(i) $Z_\Phi(s, \chi)$ is a rational function of q^{-s} . Its poles are among the values $s = -\nu_i/N_i + 2\pi\sqrt{-1}k/N_i \log_e q$ with $k \in \mathbb{Z}$ and $i \in T$ such that the order of χ divides N_i .

(ii) If $C_f \cap \text{Supp } \Phi \subset f^{-1}(0)$, then $Z_\Phi(s, \chi) = 0$ for almost all χ .

Proof of (i). Consider the set $Y(K)$ of K -rational points of Y as a K -analytic manifold. We have

$$Z_\Phi(s, \chi) = \int_{Y(K)} (\Phi \circ h)\chi(\text{ac}(f \circ h))|f \circ h|^s |h^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)|.$$

Let $b \in Y(K)$ and $\{i \in T | b \in E_i\} = \{i_1, \dots, i_r\}$. There are local coordinates y_1, \dots, y_n for $Y(K)$ centered at b such that

$$f \circ h = \epsilon y_1^{N_{i_1}} \dots y_r^{N_{i_r}}, \quad h^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \eta y_1^{\nu_{i_1}-1} \dots y_r^{\nu_{i_r}-1} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n,$$

where ϵ and η are analytic in a neighbourhood U of b and $\epsilon(b) \neq 0$, $\eta(b) \neq 0$. Note that $|\epsilon|, |\eta|$ and $\chi(\text{ac } \epsilon)$ are constant on U when U is small enough. Because $h^{-1}(\text{Supp } \Phi)$ is compact, we see that $Z_\Phi(s, \chi)$ is a finite \mathbb{C} -linear combination of products of factors of the form q^{ks} , $k \in \mathbb{Z}$, or $\int_{\text{ord } z \geq e} \chi^{N_i}(\text{ac } z) |z|^{N_i s + \nu_i - 1} |dz|$. But this last integral is zero unless the order of χ divides N_i , in which case it is a rational function of q^{-s} with denominator $1 - q^{-N_i s - \nu_i}$. This proves (i). For (ii), see [30, p. 91-96].

Remark. The rationality of $Z_\Phi(s, \chi)$ can also be proved without the use of resolution of singularities, see [10] and section 8.

1.4. Exponential sums and integration on fibers

(1.4.1) Let Ψ be the standard additive character on K , thus, for $z \in K$, $\Psi(z) = \exp(2\pi i \text{Tr}_{K/Q_p}(z))$, where Tr denotes the trace. Weil [83] introduced the following two functions

$$E_\Phi(z) = E_\Phi(z, K, f) = \int_{K^n} \Phi(x) \Psi(zf(x)) |dx|,$$

$$F_\Phi(y) = F_\Phi(y, K, f) = \int_{f^{-1}(y)} \Phi(x) \left| \frac{dx}{df} \right|,$$

for $z \in K$ and $y \in K \setminus V_f$, where $V_f = f(C_f)$. The function $E_\Phi(z)$ is locally constant and bounded on K . One is interested in its behaviour for $|z| \rightarrow \infty$. The simplest case is when $C_f \cap \text{Supp } \Phi = \emptyset$, then $E_\Phi(z) = 0$ for $|z|$ large enough. The function $F_\Phi(y)$ is locally constant on $K \setminus V_f$ and has compact support. One is interested in its behaviour when y tends to a point of V_f . For a nice introduction, see Serre [73].

We will write E, F , resp. E_0, F_0 , instead of E_Φ, F_Φ when Φ is the characteristic function of R^n , resp. PR^n .

(1.4.2) Suppose $f(x) \in R[x]$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. If $u \in R^\times$, then obviously $E(u\pi^{-m}) = q^{-nm} \sum_{x \in (R/P^m)^n} \Psi(uf(x)/\pi^m)$, which is a classical exponential sum mod P^m .

Let $a \in R \setminus V_f$ and denote by $N_m(a)$ the number of solutions in R/P^m of the congruence $f(x) \equiv a \pmod{P^m}$. Then one verifies that $F(a) = N_m(a)/q^{(n-1)m}$, for m big enough (depending on a). This stable quotient $F(a)$ is classically known as the local singular series associated to f and a , and plays an important role in the circle method.

(1.4.3) Note that $E_\Phi(z) = \int_K F_\Phi(y)\Psi(zy)|dy|$ is the Fourier transform of $F_\Phi(y)$ on K and that $Z_\Phi(\omega, K, f) = \int_K F_\Phi(y)\omega(y)|dy|$ is the Mellin transform of $(1 - q^{-1})yF_\Phi(y)$ on K^\times . This gives the relation between exponential sums and local zeta functions. By decomposing Φ and translation one reduces to the case where $C_f \cap \text{Supp } \Phi \subset f^{-1}(0)$. Then, due to 1.3.2 (i) and (ii), the following are related by formulas (see [28], [30]):

- (i) Principal parts of the Laurent expansions of the $Z_\Phi(s, \chi)$ around their poles,
- (ii) Terms of an asymptotic expansion of $E_\Phi(z)$ as $|z| \rightarrow \infty$,
- (iii) Terms of an asymptotic expansion of $F_\Phi(y)$ as $y \rightarrow 0$.

Still more information is provided by the following.

(1.4.4) Proposition. *Let $u \in R^\times$ and $m \in \mathbb{Z}$. Then $E_\Phi(u\pi^{-m})$ equals*

$$Z_\Phi(0, \chi_{\text{triv}}) + \text{Coeff}_{t, m-1} \frac{(t-q)Z_\Phi(s, \chi_{\text{triv}})}{(q-1)(1-t)} + \sum_{\chi \neq \chi_{\text{triv}}} g_{\chi^{-1}} \chi(u) \text{Coeff}_{t, m-c(\chi)} Z_\Phi(s, \chi)$$

where $c(\chi)$ denotes the conductor of χ , i.e. the smallest $c \geq 1$ such that χ is trivial on $1 + P^c$, and g_χ denotes the Gaussian sum

$$g_\chi = (q-1)^{-1} q^{1-c(\chi)} \sum_{v \in (R/P^{c(\chi)})^\times} \chi(v) \Psi(v/\pi^{c(\chi)}).$$

Proof. Replacing f by uf we see that it suffices to prove the theorem for $u = 1$. We introduce for any $e \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ the integral

$$I_{\Phi, e}(s) = \int_{K^n} \Phi(x) \Psi(\pi^{-e} \text{ac } f(x)) |f(x)|^s |dx|.$$

Direct verification shows

$$E_\Phi(\pi^{-m}) = \int_{\text{ord } f(x) \geq m} \Phi(x) |dx| + \sum_{k \leq m-1} \text{Coeff}_{t, k} I_{\Phi, m-k}(s).$$

The proposition follows now from 1.2.2, since Fourier transformation on $(R/P^e)^\times$ yields $I_{\Phi, e}(s) = \sum_{c(\chi)=e} g_{\chi^{-1}} Z_\Phi(s, \chi)$.

(1.4.5) Corollary (Igusa [28], [30]). *Suppose that $C_f \cap \text{Supp } \Phi \subset f^{-1}(0)$. Then for $|z|$ big enough $E_\Phi(z)$ is a finite \mathbb{C} -linear combination of functions of the form $\chi(\text{ac}(z))|z|^\lambda (\log_q |z|)^\beta$ with coefficients independent of z , and with $\lambda \in \mathbb{C}$ a pole of $(s+1)Z_\Phi(s, \chi_{\text{triv}})$ or of $Z_\Phi(s, \chi)$, $\chi \neq \chi_{\text{triv}}$, and with $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \leq (\text{multiplicity of pole } \lambda) - 1$. Moreover all poles λ appear effectively in this linear combination.*

Proof. This follows from 1.3.2 (i), (ii) and 1.4.4, by writing $Z_\Phi(s, \chi)$ in partial fractions.

1.5 Igusa's conjecture on exponential sums

Let F be a number field, $f(x) \in F[x] \setminus \{0\}$ a homogeneous polynomial and $\sigma \in \mathbb{R}$. Suppose $1 < \sigma < \min \nu_i/N_i$, where the minimum is taken over all i except those with $N_i = \nu_i = 1$ and the (N_i, ν_i) are the numerical data of a fixed resolution of $f^{-1}(0)$ over F . By 1.4.5, for each p -adic completion K of F there exists $C(K) \in \mathbb{R}$ satisfying $|E(z, K, f)| \leq c(K)|z|^{-\sigma}$ for all $z \in K$.

Conjecture (Igusa [30]). *In the above inequality one can take $c(K)$ independent of K .*

This is related to the validity of a certain Poisson formula, see [30, p. 122, 170]. Igusa [27] proved the conjecture when $C_f = \{0\}$, by using Deligne's bound [8] for exponential sums over F_q , which in turn depends on the Riemann hypothesis for varieties over F_q . He also verified it for certain relative invariants of prehomogeneous vector spaces [26], [29], [30, p. 123-127]. Recently Sperber and Denef proved the conjecture for polynomials $f(x)$ which are non-degenerate with respect to their Newton polyhedron $\Delta(f)$ (see 5.3) assuming that $\Delta(f)$ has no vertex in $\{0, 1\}^n$ (and only considering toric resolutions).

1.6 The Archimedean case

Replacing K by \mathbb{R} or \mathbb{C} and Φ by a C^∞ function with compact support, one defines

$$Z_\Phi(s, K, f) = \int_{K^n} \Phi(x) |f(x)|^{\delta s} dx,$$

for $s \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(s) > 0$, where $\delta = 1$ if $K = \mathbb{R}$ and $\delta = 2$ if $K = \mathbb{C}$. One proves that $Z_\Phi(s, K, f)$ extends to a meromorphic function on \mathbb{C} whose poles are rational, either by resolution of singularities [2],[5] or by the theory of Bernstein polynomials [4].

2. MONODROMY AND BERNSTEIN POLYNOMIALS

2.1 Monodromy

(2.1.1) Let $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ be a non constant polynomial map and fix $b \in \mathbb{C}^n$ with $f(b) = a$. Let $B \subset \mathbb{C}^n$ be a small enough ball with center b . Milnor [63] proved that the restriction $f|_B$ is a locally trivial C^∞ fibration over a small enough pointed disc $A \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$ with center a . Hence the diffeomorphism type of the so called *Milnor fiber* $F_b := f^{-1}(t) \cap B$ of f around b does not depend on $t \in A$ and the counter clockwise generator of the fundamental group of A induces an automorphism T of $H^*(F_b, \mathbb{C})$ which is called the *local monodromy* of f at b . It is well known that the eigenvalues of T are roots of unity (see [22, Exposé I]). When b is an isolated critical point of f , a result of Milnor [63] states that $H^i(F_b, \mathbb{C}) = 0$ for $i \neq 0, n - 1$, and $H^0(F_b, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ with trivial monodromy action.

(2.1.2) **Theorem** (A'Campo's formula [1]). *Suppose b is an isolated critical point of f , with $f(b) = 0$, $n \geq 2$. We adopt the notation of 1.3.1 with $K = \mathbb{C}$. Then the characteristic polynomial of the monodromy action on $H^{n-1}(F_b, \mathbb{C})$ equals*

$$\left((z - 1)^{-1} \prod_{i \in T} (z^{N_i} - 1)^{\chi(\mathring{E}_i \cap h^{-1}(b))} \right)^{(-1)^{n-1}},$$

where χ denotes the Euler characteristic with respect to singular cohomology. In particular $\exp(2\pi\sqrt{-1}/k)$, for $k \in \mathbb{N}, k > 1$, is an eigenvalue of the local monodromy at b if and only if $\sum_{k|N_i} \chi(\mathring{E}_i \cap h^{-1}(b)) \neq 0$.

2.2 The Bernstein polynomial

I.N. Bernstein [4] has proved for any polynomial $f(x), x = (x_1, \dots, x_n)$, over a field K of characteristic zero, that there exist $P \in K[x, \frac{\partial}{\partial x}, s]$, and $b(s) \in K[s] \setminus \{0\}$ which satisfy the functional equation $Pf^{s+1} = b(s)f^s$. The monic polynomial $b(s)$ of smallest degree which satisfies this functional equation is called the *Bernstein polynomial* of f and will be denoted by $b_f(s)$. If f is not constant, then $s + 1$ divides $b_f(s)$. If further $f = 0$ has no singular points over the algebraic closure of K , then $b_f(s) = s + 1$. A basic theorem of Kashiwara states that all roots of $b_f(s)$ are negative rational numbers. When $K = \mathbb{R}$ or \mathbb{C} one easily verifies, using the functional equation and integration by parts, that

the poles of $Z_{\Phi}(s, K, f)$ are among the values $s = \alpha - j$ with α a root of $b_f(s)$ and $j \in \mathbb{N}$. Note however that this integration by parts does not make sense in the p -adic case.

The roots of $b_f(s)$ are related to the geometry of f . Indeed by Malgrange [58], if α is a root of $b_f(s)$ then $\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha)$ is an eigenvalue of the local monodromy of f at some point of $f^{-1}(0)$, and all eigenvalues are obtained in this way. (Note that $b_f(s)$ is the least common multiple of all local Bernstein polynomials, see e.g. [23, Lemma 2.5.2].)

Thus, in the *Archimedean* case if s is a pole of $Z_{\Phi}(s, K, f)$ then $\exp(2\pi\sqrt{-1}s)$ is an eigenvalue of monodromy. (For a direct proof in the isolated singularity case, see Malgrange [57].) Moreover, Barlet [3] has proved that each eigenvalue is obtained in this way, when $K = \mathbb{C}$. We refer to Loeser [50] for information on the exact location of the poles and to Loeser [51] for an estimate on the largest pole.

2.3 The monodromy conjecture

Motivated by the situation in the Archimedean case 2.2 and the study of concrete examples, it is natural to propose the following conjectures for any polynomial $f(x)$ over a numberfield $F \subset \mathbb{C}$.

(2.3.1) Conjecture (Igusa [36]). *For almost all p -adic completions K of F , if s is a pole of $Z(s, \chi, K, f)$, then $\operatorname{Re}(s)$ is a root of $b_f(s)$.*

This conjecture has been verified in special cases, see 5.2.5, 5.3, 7.3 and 7.4 below.

(2.3.2) Monodromy conjecture (Igusa). *For almost all p -adic completions K of F , if s is a pole of $Z(s, \chi, K, f)$, then $\exp(2\pi\sqrt{-1} \operatorname{Re}(s))$ is an eigenvalue of the local monodromy of f at some complex point of $f^{-1}(0)$.*

Note that the first conjecture implies the second by what we said above. But for the second one there is by now a massive amount of experimental evidence, see section 6. Both conjectures might be true for all p -adic completions and for Z replaced by Z_{Φ} . In most numerical examples, theorem 1.3.2 yields a very big list of candidate poles. However, due to miraculous cancellations, usually many of these candidates are no pole. This strange phenomenon would be explained by the monodromy conjecture.

Loeser [53] studied zeta functions $\int_{K^n} \Phi(x) |f_1(x)|^{s_1} \dots |f_k(x)|^{s_k} |dx|$ of several variables and formulated a conjecture on the existence of certain asymptotic expansions (generalizing 1.4.3 (iii)). Surprisingly this conjecture implies a relation between the polar locus of these zeta functions and the geometry of the discriminant of f_1, \dots, f_k . Moreover there are connections with the monodromy conjecture.

3. EXPLICIT FORMULAS

We continue to use the notation of 1.1 and 1.3.1. Reduction mod P is denoted by $\bar{}$.

(3.1) We call a Schwartz-Bruhat function Φ *residual* if $\text{Supp } \Phi \subset R$ and $\Phi(x)$ only depends on $x \pmod P$. Such Φ induces $\bar{\Phi}: \bar{K}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

(3.2) We say that the resolution (Y, h) for $f^{-1}(0)$ has *good reduction mod P* if \bar{Y} and all \bar{E}_i are smooth, $\cup_{i \in T} \bar{E}_i$ has only normal crossings, and the schemes \bar{E}_i and \bar{E}_j have no common components whenever $i \neq j$ (cf. [12]). Here the reduction mod P of any closed subscheme Z of Y is denoted by \bar{Z} and defined as the reduction mod P of the closure of Z in projective space over $\text{Spec } R[x]$. If in addition $N_i \notin P$ for all $i \in T$ then we say that the resolution has *tame good reduction*. When f and (Y, h) are defined over a number field F , we have good reduction for almost all completions K of F . When the resolution (Y, h) has good reduction we have $\bar{E}_I = \cap_{i \in I} \bar{E}_i$ and we put $\overset{\circ}{\bar{E}}_I = \bar{E}_I \setminus \cup_{j \in T \setminus I} \bar{E}_j$ and $\overset{\circ}{\bar{E}}_i = \bar{E}_i \setminus \cup_{j \neq i} \bar{E}_j$. Finally let $C_{\bar{f}}$ be the singular locus of $\bar{f}: \bar{K}^n \rightarrow \bar{K}$.

3.3 Theorem [14]. *Let $f \in R[x], \bar{f} \neq 0$. Suppose that $f^{-1}(0)$ has a resolution with tame good reduction mod P and that Φ is residual. If χ is not trivial on $1+P$ then $Z_\Phi(s, \chi)$ is constant as function of s . If moreover $C_{\bar{f}} \cap \text{Supp } \bar{\Phi} \subset \bar{f}^{-1}(0)$, then $Z_\Phi(s, \chi) = 0$.*

3.4 Theorem [12], [14]. *Let $f \in R[x], \bar{f} \neq 0$. Suppose that (Y, h) is a resolution for $f^{-1}(0)$ with good reduction mod P , and that Φ is residual. Let χ be a character of R^\times of order d which is trivial on $1+P$. Then*

$$Z_\Phi(s, \chi) = q^{-n} \sum_{\substack{ICT \\ \forall i \in I: d|N_i}} c_{I, \chi, \Phi} \prod_{i \in I} \frac{q-1}{q^{N_i s + \nu_i} - 1},$$

where $c_{I, \chi, \Phi} = \sum_{a \in \overset{\circ}{\bar{E}}_I(\bar{K})} \bar{\Phi}(a) \Omega_\chi(a)$.

Here $\Omega_\chi(a)$ is defined as follows: If $a \in \overset{\circ}{\bar{E}}_I(\bar{K})$ and $d|N_i$ for all $i \in I$ then we can write $\bar{f} \circ \bar{h} = uw^d$ with $u, u^{-1}, w \in \mathcal{O}_{\bar{Y},a}$ and we put $\Omega_\chi(a) := \chi(u(a))$.

We will write $c_{I,\chi}$, resp. $c_{I,\chi,0}$, instead of $c_{I,\chi,\Phi}$ when Φ is the characteristic function of R^n , resp. PR^n . To denote the dependence on K , we will sometimes write $c_{I,\chi,\Phi}(K)$.

3.5 Cohomological interpretation. Assume the hypothesis of 3.4 and choose a prime ℓ with $\ell \nmid q$. Note that χ induces a character of F_q^\times which we denote again by χ . Let \mathcal{L}_χ be the Kummer \bar{Q}_ℓ -sheaf on $\mathbb{A}_{F_q}^1 \setminus \{0\}$ associated to this last character (see [9, Sommes Trig.]). Put $U = \bar{Y} \setminus (\bar{f} \circ \bar{h})^{-1}(0)$. Let ν be the open immersion $\nu: U \hookrightarrow \bar{Y}$ and $\alpha: U \rightarrow \mathbb{A}_{F_q}^1 \setminus \{0\}$ the map induced by $\bar{f} \circ \bar{h}$. We define $\mathcal{F}_\chi := \nu_* \alpha^* \mathcal{L}_\chi$. It is easy to verify that \mathcal{F}_χ is lisse of rank one on $U_d := \bar{Y} \setminus \cup_{d \nmid N_i} \bar{E}_i$. Moreover, if $a \in U_d(F_q)$ then the action of the geometric Frobenius on the stalk of \mathcal{F}_χ at a is multiplication by $\Omega_\chi(a)$. Hence Grothendieck's trace formula yields

$$(3.5.1) \quad c_{I,\chi} = \sum_i (-1)^i \text{Tr}(F, H_c^i(\overset{\circ}{\bar{E}}_I \otimes F_q^a, \mathcal{F}_\chi)),$$

$$(3.5.2) \quad c_{I,\chi,0} = \sum_i (-1)^i \text{Tr}(F, H_c^i((\overset{\circ}{\bar{E}}_I \cap \bar{h}^{-1}(0)) \otimes F_q^a, \mathcal{F}_\chi)),$$

where F denotes the Frobenius and F_q^a the algebraic closure of F_q . For further use we still mention

3.6 Lemma. *The higher direct images $R^j \nu_*(\mathcal{F}_\chi|_U)$ are zero outside U_d for all $j \geq 0$. The same holds also for the open immersion $\nu_I: \overset{\circ}{\bar{E}}_I \hookrightarrow \bar{E}_I$.*

(3.7) We should also mention that Langlands [47] has given a formula, in terms of principal-value integrals, for the principal parts of the Laurent expansions of $Z_\Phi(s, \chi)$ around its poles.

4. CONSEQUENCES OF THE EXPLICIT FORMULAS

Unless stated otherwise, we keep the notation of 1.1 and 1.3.1. When χ is a character of \bar{K}^\times we denote the induced character of R^\times also by χ . We say a property holds for almost all P if it holds for almost all completions of a number

field F (all data being defined over F). For any scheme V of finite type over a field $L \subset \mathbb{C}$, we denote by $\chi(V)$ the Euler characteristic of $V(\mathbb{C})$ with respect to singular cohomology.

4.1 Degree of local zeta functions

(4.1.1) Because $Z_\Phi(s, \chi)$ is a rational function of q^{-s} we can consider its degree $\deg Z_\Phi(s, \chi)$ which is defined as the degree of the numerator minus the degree of the denominator (as polynomials in q^{-s}). If the hypothesis of theorem 3.4 holds, then it is clear from the explicit formula that $\deg Z_\Phi(s, \chi) \leq 0$. Clearly the degree is < 0 if and only if $\lim_{s \rightarrow -\infty} Z_\Phi(s, \chi) = 0$.

(4.1.2) **Proposition** [12]. *For almost all P , $\deg Z_0(s, \chi_{triv}) = 0$. If moreover f is homogeneous, then $\deg Z(s, \chi_{triv}) = -\deg f$.*

Proof. From theorem 3.4 it follows that

$$q^n \lim_{s \rightarrow -\infty} Z_0(s, \chi_{triv}) \equiv \sum_{ICT} c_{I, \chi_{triv}, 0} \equiv q^n Z_0(0, \chi_{triv}) = 1 \pmod{q}.$$

Hence $\lim_{s \rightarrow -\infty} Z_0(s, \chi_{triv}) \neq 0$. This proves the first assertion. The second assertion follows from the first by the formula $Z(s, \chi) = q^{n+s \deg f} Z_0(s, \chi)$.

(4.1.3) When $f(0) = 0$ we proved [15], using the method of vanishing cycles [22], that for almost all P and any character χ of \bar{K}^\times of order d we have

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} Z_0(s, \chi) = (1 - q)q^{-n} \sum_i (-1)^i \text{Tr}(\text{Frob}, H^i(F_0, Q_\ell)^\chi),$$

where F_0 is the Milnor fiber of \bar{f} at 0, $H^i(F_0, Q_\ell)^\chi$ denotes the component of the cohomology on which the semi-simplification of the local monodromy acts like χ , and Frob is a suitable lifting of the Frobenius. In particular this implies that $\deg Z_0(s, \chi) < 0$ when there is no eigenvalue of the local monodromy of f at 0 with order d .

4.2 The functional equation

(4.2.1) We denote by $K^{(e)}$ the unramified extension field of K of degree e , and put

$$Z(s, e, \chi) := Z(s, \chi \circ N_{K^{(e)}/K}, K^{(e)}, f),$$

where N denotes the norm. D. Meuser [61] has shown that $Z(s, e, \chi_{triv})$, as function of s and e , is a rational function of $q^{-es}, \alpha_1^e, \dots, \alpha_r^e$ for some $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in$

C. In case of good reduction, 3.4 and 3.5.1 directly imply that this remains true for $Z(s, e, \chi)$ where χ is any character of \overline{K}^\times . Because of this rationality we can canonically extend $Z(s, e, \chi)$ to a function on $\mathbb{C} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. With this notation we can state the following result of Meuser and Denef [17] (see also [62]).

(4.2.2) Theorem [17]. *If f is homogeneous, then for almost all P we have the functional equation $Z(s, -e, \chi) = q^{-es \deg f} Z(s, e, \chi^{-1})$, for all $e \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

Idea of the proof. For a homogeneous polynomial it is possible to give an explicit formula for $Z(s, \chi)$ in terms of an embedded resolution of singularities (with good reduction) of $\text{Proj } K[x]/(f(x))$. This has the advantage that the \overline{E}_I become proper. Then we can use the functional equation for the Weil zeta function of the varieties \overline{E}_I to obtain the theorem when χ is trivial. In the general case we have to use Poincaré duality for the sheaf \mathcal{F}_χ on $\overline{E}_I \cap U_d$ (notations as in 3.5). This works since its cohomology equals compactly supported cohomology because of lemma 3.6.

(4.2.3) The above functional equation takes an interesting form if $Z(s, \chi_{triv})$ is *universal*, meaning that there exists $\mathcal{Z}(u, v) \in \mathbb{Q}(u, v)$ with $Z(s, \chi_{triv}, K^{(e)}, f) = \mathcal{Z}(q^{-es}, q^{-e})$, for all $e \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. This happens often when f is a relative invariant of a reductive group (see 7.6). Note that the functional equation 4.2.2 takes the form $\mathcal{Z}(u^{-1}, v^{-1}) = u^{\deg f} \mathcal{Z}(u, v)$ whenever $Z(s, \chi_{triv})$ is universal. It was this form of the functional equation which was first conjectured by Igusa [38]. His conjecture was based on extensive calculations with relative invariants of prehomogeneous vector spaces.

4.3 Topological zeta functions

(4.3.1) To any $f \in \mathbb{C}[x]$ and $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Loeser and Denef [16] associate the "topological zeta function"

$$(4.3.1.1) \quad Z_{\text{top}}^{(d)}(s) := \sum_{\substack{ICT \\ \forall i \in I: d | N_i}} \chi(\overset{\circ}{E}_I) \prod_{i \in I} \frac{1}{N_i s + \nu_i},$$

where the notation is as in 1.3.1 (for a resolution of $f^{-1}(0)$ over \mathbb{C}). It is a remarkable fact that this expression does not depend on the chosen resolution. Until now the only known proof of this uses local zeta functions. To simplify, assume f has coefficients in a number field F . Then, for almost all P , formulas

3.4 and 3.5.1 yield

$$(4.3.1.2) \quad Z_{\text{top}}^{(d)}(s) = \lim_{e \rightarrow 0} Z(s, e, \chi),$$

when χ is a character of \overline{K}^\times of order d . This shows that $Z_{\text{top}}^{(d)}(s)$ is indeed intrinsic. The limit for $e \rightarrow 0$ makes sense because one can ℓ -adically interpolate $Z(s, e, \chi)$ as a function of e (for e divisible by a suitable number, see [16]). In particular, we have

$$(4.3.1.3) \quad \lim_{e \rightarrow 0} c_{I, \chi}(K^{(e)}) = \chi_c(\overset{\circ}{E}_I \otimes F_q^a, \mathcal{F}_\chi) = \chi(\overset{\circ}{E}_I),$$

for almost all P , where χ_c denotes the Euler characteristic with respect to ℓ -adic cohomology with compact support (cf. [41]). From (4.3.1.2) one also gets the following.

(4.3.2) Theorem [16]. *If ρ is a pole of $Z_{\text{top}}^{(d)}(s)$, then for almost all P and all characters χ of \overline{K}^\times of order d there exist infinitely many unramified extensions L of K for which ρ is a pole of $Z(s, \chi \circ N_{L/K}, L, f)$.*

Thus conjecture 2.3.1 would imply that the poles of $Z_{\text{top}}^{(d)}(s)$ are roots of the Bernstein polynomial $b_f(s)$. However, even the relation with local monodromy (implied by conjecture 2.3.2) is not yet proved.

(4.3.3) Because $Z(0, \chi_{\text{triv}}) = 1$, formula 4.3.1.2 yields $Z_{\text{top}}^{(1)}(0) = 1$. A local version of this fact together with M. Artin's approximation techniques yields the following application to analytic geometry.

(4.3.4) Theorem [16]. *Let $h: Y \rightarrow X$ be an analytic modification of compact analytic manifolds. Suppose the exceptional locus E of h has normal crossings in Y . Let $E_i, i \in T$, be the irreducible components of E and let $\overset{\circ}{E}_i, \nu_i$ be as in 1.3.1. Then*

$$\chi(h(E)) = \sum_{\emptyset \neq ICT} \chi(\overset{\circ}{E}_I) / n_I,$$

where $n_I = \prod_{i \in I} \nu_i$.

It would be interesting to find a proof of this theorem which does not use local zeta functions.

4.4 Holomorphy of $Z_\Phi(s, \chi)$ and monodromy

(4.4.1) By 1.3.2, $Z_\Phi(s, \chi)$ is holomorphic on \mathbb{C} when the order of χ divides no N_i . The N_i are not intrinsic, but the order (as root of unity) of any eigenvalue of the local monodromy on $f^{-1}(0)$ divides some N_i . Being very optimistic, we propose the following conjecture:

(4.4.2) Conjecture [15]. *For almost all P , when Φ is residual, $Z_\Phi(s, \chi)$ is holomorphic unless the order of χ divides the order of some eigenvalue of the local monodromy of f at some complex point of $f^{-1}(0)$.*

In fact, this might be true for all P and for any Φ . The following proposition shows that the conjecture is the best possible.

(4.4.3) Proposition [15]. *Suppose 0 is an isolated singularity of the hypersurface $f(x) = 0$. For almost all P if the order $d \neq 1$ of the character χ of \overline{K}^\times divides the order of some eigenvalue of the local monodromy of f at 0, then $Z_0(s, \chi \circ N_{L/K}, L, f)$ is not holomorphic on \mathbb{C} , for infinitely many unramified extensions L of K .*

Proof. From 3.4, 3.5.2 and a variant of 4.3.1.3 we get

$$(4.4.3.1) \quad \lim_{e \rightarrow 0} \text{Coeff}_{t^e m} (q^e - 1)^{-1} Z_0(s, \chi \circ N_{K^{(e)}/K}, K^{(e)}, f) = \sum_{d|N_i|m} \chi(\mathring{E}_i \cap h^{-1}(0)),$$

for all $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. The hypothesis on d and A'Campo's formula 2.1.2 imply the existence of a minimal m satisfying $d|m$ and $\sum_{N_i=m} \chi(\mathring{E}_i \cap h^{-1}(0)) \neq 0$. Then this last sum equals the right-hand side of 4.4.3.1. Hence for infinitely many e the zeta function over $K^{(e)}$ is not constant, and hence not holomorphic since its degree is ≤ 0 .

4.5 L -functions of exponential sums mod P^m

(4.5.1) The L -function of the exponential sum mod P^m of $f \in R[x]$ is defined by

$$L_m(t, K, f) := \exp \sum_{e=1}^{\infty} E(\pi^{-m}, K^{(e)}, f) \frac{t^e}{e},$$

for $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. By adapting Dwork's method [21] one can show that $L_m(t, K, f)$ is a rational function of t . In case of tame good reduction, this can also be derived directly from 1.4.4 and section 3 (if $m \geq 2$). The next theorem expresses the degree of these L -functions in terms of monodromy.

(4.5.2) Theorem. Suppose f has only isolated critical points in \mathbb{C}^n , $n \geq 2$. Then for almost all P and all $m \geq 2$ we have

$$\deg L_m(t, K, f) = (-1)^{n-1} \sum_{\alpha} \alpha^{m-1},$$

where α runs over all eigenvalues (counting multiplicities) of the monodromy action on $H^{n-1}(F_b, \mathbb{C})$ at all critical points b of f (notation of 2.1.1).

Proof. Clearly $\deg L_m(t, K, f) = -\lim_{e \rightarrow 0} E(\pi^{-m}, K^{(e)}, f)$. If $f(0) = 0$, then 1.4.4, 3.3, 4.4.3.1 and the Hasse-Davenport relation yield

$$\lim_{e \rightarrow 0} E_0(\pi^{-m}, K^{(e)}, f) = 1 - \sum_{N_i | m-1} N_i \chi(\overset{\circ}{E}_i \cap h^{-1}(0)).$$

By A'Campo's formula 2.1.2 the right side of the above equals $(-1)^n \sum_{\alpha} \alpha^{m-1}$ where α runs over all eigenvalues of $H^{n-1}(F_0, \mathbb{C})$. The theorem follows now from remark 4.5.3 below.

For $m = 1$ the theorem remains true if f has a compactification $g: Y \rightarrow \mathbb{A}^1$ with $Y \setminus \mathbb{A}^1$ a divisor with normal crossings over \mathbb{A}^1 , but it fails in general.

(4.5.3) Remark. Note the following completely elementary fact: If Φ is residual, $f \in R[x]$ and $C_{\bar{f}} \cap \text{Supp } \bar{\Phi} = \emptyset$, then $E_{\Phi}(z) = 0$ when $|z| > q$.

4.6 Non-contribution of certain E_i

Theorem [14]. Assume good reduction. Let χ be a character of \bar{K}^{\times} of order d , and $i_0 \in T$. Suppose E_{i_0} is proper, $d|N_{i_0}$ and E_{i_0} intersects no E_j with $d|N_j$, $j \neq i_0$. If $\chi(\overset{\circ}{E}_{i_0}) = 0$, then E_{i_0} does not contribute to $Z(s, \chi)$, meaning that in formula 3.4 we can restrict the summation to $I \subset T \setminus \{i_0\}$.

This is a direct consequence of 3.5.1 and a lemma stating that in the above situation $H_c^i(\overset{\circ}{E}_{i_0} \otimes F_q^a, \mathcal{F}_{\chi}) = 0$ for all $i \neq n-1$. In the special case that $\overset{\circ}{E}_{i_0}$ is affine this lemma follows from Poincaré duality because the cohomology of \mathcal{F}_{χ} on $\overset{\circ}{E}_{i_0} \otimes F_q^a$ equals compactly supported cohomology by 3.6. The general case requires more work, see [14].

5. SPECIAL POLYNOMIALS

5.1 Polynomials of the form $f(x) + g(y)$

Let $f(x) \in K[x], g(y) \in K[y], x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_m)$, and Φ_1, Φ_2 Schwartz-Bruhat functions on K^n, K^m . Put $A(s, \chi) = s + 1$ if $\chi = \chi_{triv}$ and $A(s, \chi) = 1$ otherwise. Suppose $C_f \cap \text{Supp } \Phi_1 \subset f^{-1}(0)$ and $C_g \cap \text{Supp } \Phi_2 \subset g^{-1}(0)$. Then the poles of $A(s, \chi)Z_{\Phi_1, \Phi_2}(s, \chi, K, f(x) + g(y))$ are of the form $s_1 + s_2$ with s_1 resp. s_2 , a pole of $A(s, \chi')Z_{\Phi_1}(s, \chi', K, f)$, resp. $A(s, \chi'')Z_{\Phi_2}(s, \chi'', K, g)$, for some $\chi' \chi'' = \chi$. Indeed, this follows directly from 1.4.5 and the obvious fact that $E_{\Phi_1, \Phi_2}(z, K, f(x) + g(y)) = E_{\Phi_1}(z, K, f)E_{\Phi_2}(z, K, g)$. Concerning the monodromy conjecture, note that this is in complete agreement with the result of Thom and Sebastiani [76] on the monodromy of $f(x) + g(y)$.

5.2 Polynomials in two variables

Now we will see that conjecture 2.3.1 on the relation between $Z(s, \chi)$ and $b_f(s)$ is true for any $f \in K[x_1, x_2]$. For this we use the *canonical* embedded resolution (Y, h) of $f^{-1}(0)$ over the *algebraic closure* K^a of K , and we keep the notation of 1.3.1. In particular E_j is a projective line over K^a when $j \in T \setminus T_s$. The following theorem was first proved for analytically irreducible singularities and almost all P by Strauss [74], and further extended by Meuser [60], Igusa [32] and Loeser [52] towards the general case.

(5.2.1) Theorem. *Let $f \in K[x_1, x_2]$. If s is a pole of $Z(s, \chi)$, then $\text{Re}(s) = -\nu_j/N_j$ for some $j \in T$, with $|E_j \setminus \overset{\circ}{E}_j| \geq 3$ or $j \in T_s$.*

For a converse see [79]. Usually, most $E_j \setminus \overset{\circ}{E}_j$ consist of no more than two points. This explains why so many candidate poles do not appear. All known proofs of theorem 5.2.1 are based on the following lemma.

(5.2.2) Lemma. *Fix $j \in T \setminus T_s$. Let $a_i, i \in J$, be the geometric points of $E_j \setminus \overset{\circ}{E}_j$. For $i \in J$ denote by N_i, ν_i the numerical data of the unique $E_\ell \neq E_j$ which contains a_i , and put $\alpha_i = \nu_i - N_i \nu_j / N_j$. Then*

$$\sum_{i \in J} (\alpha_i - 1) = -2, \text{ and } \sum_{i \in J} N_i \equiv 0 \pmod{N_j}.$$

The first proofs of this lemma were computational. Loeser [52] found a conceptual proof of the first formula, noting that the degree of ω in 5.2.4 below

equals -2 . We will outline in 6.1.2 a simple conceptual proof of both formulas, which is due to Veys [82].

(5.2.3) *A proof of theorem 5.2.1 (in case of tame good reduction).* For simplicity we suppose everything is defined over K . Consider the set S of all E_j with $\text{Re}(s) = -\nu_j/N_j$. Suppose the theorem is false. Then $|E_j \setminus \overset{\circ}{E}_j| \leq 2$ and $j \notin T_s$, for all $E_j \in S$. Different $E_{j_1}, E_{j_2} \in S$ are disjoint, otherwise (applying the last lemma twice) there would be another $E_{j_3} \in S$ intersecting E_{j_2} . Iterating this would contradict the finiteness of S . Let $E_j \in S$ with N_j a multiple of the order d of χ . It suffices to show that E_j does not contribute to the pole s . Suppose $E_j \setminus \overset{\circ}{E}_j$ consists of two points a_1, a_2 (similar argument for one point). If $d \nmid N_1$, then $d \nmid N_2$ by the last lemma, and E_j does not contribute because of 4.6. Thus suppose $d|N_1, d|N_2$. Then the sheaf \mathcal{F}_χ from 3.5 is locally constant and hence geometrically constant on \overline{E}_j . Thus the explicit formula of section 3 implies that the contribution of E_j to the residue of $Z(s, \chi)$ at s equals (up to a factor)

$$1 + (q^{\alpha_1} - 1)^{-1} + (q^{\alpha_2} - 1)^{-1} = (q^{\alpha_1 + \alpha_2} - 1)/(q^{\alpha_1} - 1)(q^{\alpha_2} - 1).$$

Since $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ by the last lemma, E_j does not contribute.

(5.2.4) Theorem (Loeser [52]). *Let $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ and $j \in T \setminus T_s$. If $|E_j \setminus \overset{\circ}{E}_j| \geq 3$, then $-\nu_j/N_j$ is a root of the Bernstein polynomial $b_f(s)$ of f .*

Idea of the proof. Assume the notation of 5.2.2 and put $S = \{a_i | i \in J\}$. We suppose $\alpha_i \neq 0$ for all $i \in J$. (Otherwise a different but easier argument is needed.) The residue of $(f \circ h)^{1-\nu_j/N_j} h^*(dx_1 \wedge dx_2)$ on $E_j = \mathbb{P}^1$ defines a meromorphic differential form ω with coefficients in a suitable rank one local system L on $\mathbb{P}^1 \setminus S$. We have (i) $|S| \geq 3$, (ii) ω has no zeros or poles outside S , and (iii) at each point of S the multiplicity of ω is not integral. Indeed a local calculation shows that the multiplicity of ω at a_i equals $\alpha_i - 1$ and Loeser proved by a difficult combinatorial argument that $|\alpha_i| < 1$. Then a result of Deligne and Mostow assures that ω defines a non-zero cohomology class in $H^1(\mathbb{P}^1 \setminus S, L)$. Hence there is a cycle $\gamma \in H_1(\mathbb{P}^1 \setminus S, L)$ with $\int_\gamma \omega \neq 0$. Considering a suitable étale cover of $\mathbb{P}^1 \setminus S$ and a lifting of $m\gamma$, for a suitable $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, one constructs a family of cycles $\mu(t) \in H_1(f^{-1}(t), \mathbb{C}), t \neq 0$, with

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mu(t)} f^{1-\nu_j/N_j} \frac{dx \wedge dy}{df} = \int_{m\gamma} \omega \neq 0.$$

Hence $t^{-1+\nu_j/N_j}$ appears as the dominating term in the asymptotic expansion of $\int_{\mu(t)}(dx \wedge dy)/df$. Since $\nu_j/N_j \leq 1$ (see [32]), it is well known that this implies that $-\nu_j/N_j$ is a root of $b_f(s)$.

(5.2.5) Combining theorems 5.2.1 and 5.2.4 we obtain Loeser’s result that for any $f \in K[x_1, x_2]$, if s is a pole of $Z(s, \chi)$, then $\text{Re}(s)$ is a root of $b_f(s)$.

5.3 Non-degenerate polynomials

We treat this topic only very briefly. For the notion of a polynomial which is non-degenerate with respect to its Newton polyhedron at the origin, we refer to Varchenko [78]. For such polynomials there is a very explicit embedded resolution, which is called "toric". However, this yields a set of candidate poles for $Z(s, \chi)$ which is much too big. Lichtin and Meuser [48] have determined the actual poles in case of two variables. In general, a reasonable set of candidate poles (one value of $\text{Re}(s)$ for each facet of the polyhedron) was obtained by Deneff (unpublished, see [54, Thm 5.3.1]) (the method is the same as in the real case [18, I]). Loeser [54] proved that these candidate poles are indeed roots of $b_f(s)$, if some weak additional conditions are satisfied. For several results and intriguing open problems about the largest pole ($\neq -1$), we refer to [18, II].

6. THE WORK OF VEYS

6.1 Relations between numerical data

Let $f \in \mathbb{C}[x]$ and $h: Y \rightarrow \mathbb{C}^n$ an embedded resolution of $f^{-1}(0)$ over \mathbb{C} , constructed as in [25]. Thus in particular h is a composition of blowing-up maps. Vey’s [80],[81] has developed a general theory about relations between the numerical data of resolutions, generalizing lemma 5.2.2.

Consider a fixed exceptional divisor $E = E_j, j \in T \setminus T_s$, keeping the notation 1.3.1. Let $E'_i, i \in J$, be the irreducible components of $E \setminus \overset{\circ}{E}$. For $i \in J$ denote by N_i, ν_i the numerical data of the unique $E_\ell \neq E$ which contains E'_i , and put $\alpha_i = \nu_i - N_i \nu_j / N_j$. Vey’s starting point is the following.

(6.1.1) Lemma [80] [81]. *Let K_E be the canonical divisor on E and E^2 the self-intersection divisor of E in Y . Then*

$$K_E = \sum_{i \in J} (\alpha_i - 1) E'_i \text{ in } \text{Pic} E \otimes \mathbb{Q}, \text{ and } N_j E^2 = - \sum_{i \in J} N_i E'_i \text{ in } \text{Pic} E,$$

where Pic denotes the Picard group.

Proof. By definition of the numerical data we have $\sum_{i \in T} N_i E_i = 0$ and $K_Y = \sum_{i \in T} (\nu_i - 1) E_i$ in $\text{Pic} Y$. Thus $N_j E = -\sum_{i \neq j} N_i E_i$ and the formula for $N_j E^2$ is obtained by intersecting with E . Moreover $K_Y + E = \nu_j E + \sum_{i \neq j} (\nu_i - 1) E_i$. Replacing $\nu_j E$ by $-\sum_{i \neq j} N_i \nu_j N_j^{-1} E_i$ we get $K_Y + E = \sum_{i \neq j} (\alpha_i - 1) E_i$. The expression for K_E follows now from the adjunction formula $K_E = (K_Y + E) \cdot E$.

(6.1.2) *Proof of Lemma 5.2.2.* This follows directly from the above lemma by taking degrees, since $\text{deg } K_E = -2$.

(6.1.3) We now describe some of Veys' results. There are *Basic Relations* (B1 and B2) associated to the creation of E in the resolution process, generalizing 5.2.2. And there are *Additional Relations* (A) associated to each blowing-up of the resolution that "changes" E . More precisely: the variety E in the final resolution Y is in fact obtained by a finite succession of blowing-ups

$$E^0 \xleftarrow{\pi_0} E^1 \xleftarrow{\pi_1} \dots E^i \xleftarrow{\pi_i} E^{i+1} \dots \xleftarrow{\pi_{m-2}} E^{m-1} \xleftarrow{\pi_{m-1}} E^m = E$$

with irreducible nonsingular center $\mathcal{D}_i \subset E^i$ and exceptional variety $C_{i+1} \subset E^{i+1}$ for $i = 0, \dots, m - 1$. The variety E^0 is created at some stage of the global resolution process as the exceptional variety of a blowing-up with center \mathcal{D} and is isomorphic to a projective space bundle $\Pi: E^0 \rightarrow \mathcal{D}$ over \mathcal{D} . Let $C_i, i \in J_0$, be the irreducible components of intersections of E^0 with previously created exceptional divisors in the global resolution process or with the strict transform of $f^{-1}(0)$. Then the $E'_i, i \in J$, are precisely the strict transforms of the $C_i, i \in J_0 \cup \{1, \dots, m\}$. So we put $J = J_0 \cup \{1, \dots, m\}$, $E'_i =$ strict transform of C_i . The relations A express α_i , resp. $N_i \bmod N_j$, for $i = 1, \dots, m$, in terms of α_ℓ , resp. $N_\ell \bmod N_j$, for $\ell \in J_0 \cup \{1, \dots, i - 1\}$, see [80], [81]. The relations B1 are

$$(B1) \quad \sum_{i \in J_0} d_i (\alpha_i - 1) = -k, \quad \text{and} \quad \sum_{i \in J_0} d_i N_i \equiv 0 \pmod{N_j},$$

where $k = n - \dim \mathcal{D}$ and d_i is the degree of the intersection cycle $C_i \cdot F$ on F for a general fibre $F \cong \mathbb{P}^{k-1}$ of $\Pi: E^0 \rightarrow \mathcal{D}$. The relations B2 hold in $\text{Pic } \mathcal{D}$ and are more difficult to state. They are vacuous when \mathcal{D} is a point. When $n = 3$ and \mathcal{D} is a projective curve of genus g , the relation B2 for the α_i becomes a numerical relation by taking degrees in $\text{Pic } \mathcal{D}$, namely

$$\sum_{\substack{i \in J_0 \\ d_i \neq 0}} \frac{\kappa_i}{2d_i} (\alpha_i - 1) + \sum_{\substack{i \in J_0 \\ d_i = 0}} (\alpha_i - 1) = 2g - 2,$$

where κ_i is the self-intersection number of C_i in E^0 . The proof of B1 depends on lemma 6.1.1 taking the degree of the intersection with F of the direct image in $\text{Pic}E^0$ of the divisors in $\text{Pic}E$. The proofs of relations B2 and A require more work, but are also based on 6.1.1.

6.2 Applications to the monodromy conjecture

In section 5.2 we saw two configurations $\mathring{E} = \mathring{E}_j$ which do not contribute to poles, namely \mathbb{P}^1 minus one or two points. Using his relations 6.1, Veys extended this to higher dimensions (mostly surfaces, $n = 3$), producing a long (but not exhaustive) list of configurations \mathring{E} which do not contribute to poles of $Z(s, \chi_{\text{triv}})$ (meaning that in the calculation of the residue at $s = -\nu_j/N_j$ by the explicit formula, one can omit all \mathring{E}_I with $E_I \subset E$, assuming good reduction and K big enough). When $\chi(\mathring{E}) = 0$ and $\mathring{E} \subset h^{-1}(0)$, there is no contribution in A'Campo's formula 2.1.2. Thus in view of the monodromy conjecture, one expects that such an E *usually* does not contribute to poles. For $n = 3$, Veys searched for configurations \mathring{E} with $\chi(\mathring{E}) = 0$, and proved for all but two of the ones he found that they do not contribute to poles. I consider this as very convincing evidence for the monodromy conjecture. Here are two examples of such non-contributing configurations with $E^0 = \mathbb{P}^2$. Example 1: $\mathring{E} = \mathbb{P}^2 \setminus$ (at least two lines through the same point P and another line not through P). Example 2: $\mathring{E} = \mathbb{P}^2 \setminus$ (the curves $x = 0, y = 0, z = 0$, and $y^k z = x^{k+1}$), with $k \geq 2$.

7. PREHOMOGENEOUS VECTOR SPACES

(7.1) We consider a regular prehomogeneous vector space (G, X) over K , consisting of a connected reductive algebraic subgroup G of GL_n defined over K , acting transitively on the complement U of an absolutely irreducible K -hypersurface V in $X = \mathbb{A}^n$. Let $f \in K[x]$ be an equation for V . Then f is homogeneous and $f(gx) = \nu(g)f(x)$ for all g in G where ν is a rational character of G . Thus f is a relative invariant of G . We have $(\det g)^2 = \nu(g)^{2\kappa}$ where $\kappa = n/\deg(f)$, $2\kappa \in \mathbb{N}$. Moreover the Bernstein polynomial $b_f(s)$ has degree $\deg(f)$. For all this we refer to [70]. (Actually $b_f(s)$ equals the Sato polynomial, see [23, Cor. 2.5.10].)

We will see below that the local zeta functions of such relative invariants f have very remarkable properties. This was first discovered in the Archimedean case by M. Sato and Shintani [70]. The p -adic case was first investigated by

Igusa [31]. In what follows K is p -adic field and for 7.4 and 7.5 we make the additional assumption that V has only a finite number of orbits under the action of $\ker \nu$. We first give an easy example.

(7.2) *Example.* Take for X the space of all (m, m) matrices, and $G = SL_m \times GL_m$ with action of $(g_1, g_2) \in G$ on $x \in X$ given by $g_1 x g_2^t$. Then $f(x) = \det x$, $b(s) = (s+1)(s+2)\dots(s+m)$, and $Z(s, \chi_{triv}) = \prod_{i=1}^m (1 - q^{-i}) / (1 - q^{-s-i})$. One has also examples with f the determinant (resp. Pfaffian) on the space of symmetric (resp. antisymmetric) (m, m) matrices, or with f the discriminant on the space of binary cubic forms.

(7.3) M. Sato and Kimura [69] have given a complete classification in 29 types of all K -split irreducible (as representation) regular prehomogeneous vector spaces, and Kimura [42] has determined their Bernstein polynomial. For 20 out of these 29 types¹, Igusa [26],[29],[31],[37] has explicitly calculated $Z(s, \chi_{triv})$. These are tabulated in [36]. His calculations don't use resolution of singularities, but exploit the symmetry of the group structure. In all these cases the formulas show that the real parts of the poles are indeed roots of $b_f(s)$. This was the first evidence for conjecture 2.3.1. Also it was on the basis of these formulas that Igusa conjectured proposition 4.1.2 on the degree of $Z(s, \chi_{triv})$.

(7.4) Igusa [31] has found a finite list of candidate poles for $Z_\Phi(s, \chi)$ which only involves group theoretical data associated to (G, X) . A weakened version of his result is the following.

Theorem (Igusa [31]). *If s is a pole of $Z_\Phi(s, \chi)$, then there exists $a \in V(K)$ such that $|\nu(h)|^{\kappa + \text{Re}(s)} = \Delta_H(h)$ for all $h \in H$ where H is the fixer of a in $G(K)$ and Δ_H the modulus of H (i.e. $d(h^{-1}uh) = \Delta_H(h)du$ for any Haar measure du on H).*

More recently Kimura, F. Sato and Zhu [46] proved (using microlocal analysis) that the real parts of the above candidate poles are roots of $b_f(s)$ when (G, X) is irreducible and reduced (in the sense of [69]).

(7.5) By a theorem of Borel and Serre, $U(K)$ splits into a finite number of $G(K)$ orbits, say U_1, \dots, U_ℓ . For $i = 1, \dots, \ell$ one defines the functions $Z_{i,\Phi}(s, \chi)$ in the same way as $Z_\Phi(s, \chi)$ but integrating now over U_i instead of K^n . These

¹Very recently Igusa [40] calculated $Z(s, \chi_{triv})$ for 4 more types.

are rational functions of q^{-s} (see section 8) and satisfy the following functional equations.

Theorem (Igusa [31]). *For $i = 1, \dots, \ell$ and all Φ we have*

$$Z_{i, \Phi^*}(s, \chi) = \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_{ij}(s, \chi) Z_{j, \Phi}(-s - \kappa, \chi^{-1}),$$

where Φ^* is a Fourier transform of Φ and the γ_{ij} are rational functions of q^{-s} which are independent of Φ . Moreover, 7.4 holds also for the Z_i and γ_{ij} .

In this theorem we have tacitly assumed that there exists an involution of $\text{End}(X)$ defined over K under which G is stable (one can often take transposition). For a generalization of this result, see Kimura [44]. When $\ell = 1$ the above functional equation takes a nice form. Igusa has classified the (G, X) with $\ell = 1$ when G is irreducible and K -split, and has calculated γ_{11} explicitly in these cases [33]. In the Archimedean case much more is known about the γ_{ij} , see [70].

(7.6) For the 20 types of prehomogeneous vector spaces mentioned in 7.3, Igusa [38] found that $Z(s, \chi_{triv})$ is *universal* in the sense of 4.2.3. This led him to the following conjecture.

Conjecture. *If (G, X) is defined over a number field F , then $Z(s, \chi_{triv}, f, K)$ is universal for almost all completions K of F , provided G splits over K .*

We recall from 4.2.3 that universality implies the functional equation $Z(u^{-1}, v^{-1}) = u^{\deg f} Z(u, v)$, which was first proved by Igusa [38] for the above mentioned 20 types by explicit calculation. For some more conjectures, see Gyoja [24].

(7.7) Ono [65] has shown, for any non-constant absolutely irreducible polynomial f over a number field F , that the product of $(1 - q^{-1})^{-1} Z(s, \chi_{triv})$ over all p -adic completions K of F is convergent and holomorphic for $\text{Re}(s) > 0$. In the case of irreducible regular prehomogeneous vector spaces with only finitely many *adelic* open orbits, Igusa [35] proved that this product has a meromorphic continuation to the whole s -plane and satisfies a functional equation (assuming a mild condition which was removed in [44], [45]). However, it seems very unlikely that this remains always true when there are infinitely many adelic open orbits. For some other adelic results, see Datskovsky and Wright [7].

8. INTEGRATION OVER SUBANALYTIC SETS

Igusa's result on the rationality of $Z_{\Phi}(s, \chi)$ can be much generalized. We briefly survey some of the results. As always, we assume that K, R and P are as in 1.1.

A subset S of K^n is called *semi-algebraic* if it can be described by a finite Boolean combination of conditions of the form $g(x) = 0$, or d $g(x) \leq \text{ord } h(x)$, or $\exists y \in K: g(x) = y^m$, with $g, h \in K[x], m \in \mathbb{N}$. The subset S is called *semi-analytic* if locally at each point of K^n it can be described by such conditions where we allow now g, h to be analytic functions.

Macintyre's remarkable theorem [55] states that the projection (from K^{n+k} to K^n) of a semi-algebraic set is again semi-algebraic. His proof is based on results from mathematical logic and the work of Ax-Kochen-Ersov. For different proofs, see the references in [19, (0.14)]. Iterating the operations of projection and complementation, one sees that many sets, which arise in practice, are semi-algebraic. For example, the p -adic orbits of a p -adic algebraic group action are semi-algebraic.

Using Igusa's method 1.3 one shows that $\int_S |f(x)|^s |dx|$ is a rational function of q^{-s} whenever S is semi-algebraic and bounded and $f \in K[x]$, see [10] (this extends [59]). However, this can also be proved without resolution of singularities, using p -adic cell decomposition [10] instead. This method is based on partitioning S in semi-algebraic "cells" on which $|f(x)|$ has a simple description so that the integral can be evaluated using separation of variables and induction on n . For other applications of this method, see [11] and [68].

We now return to the analytic case. The projection of a bounded semi-analytic set is not semi-analytic in general. This motivates the following definition. A subset S of K^n is called *subanalytic* if locally at each point of K^n it is the projection of some bounded semi-analytic set. If we replace K by \mathbb{R} then this agrees with the classical notion of real subanalytic sets, introduced by Lojasiewicz, Gabrielov and Hironaka [75]. Van den Dries and Denef [19] developed the theory of p -adic subanalytic sets. Some of their ideas were inspired by mathematical logic. A first basic theorem is that the complement of a subanalytic subset of K^n is again subanalytic. Another basic result is the following.

8.1 Theorem (Uniformization of p -adic subanalytic sets [19]). *Let $S \subset K^n$ be subanalytic and bounded. Then there exists a K -analytic manifold M and an*

analytic map $h: M \rightarrow K^n$, which is a composition of finitely many blowing-up maps with respect to closed submanifolds of codimension ≥ 2 , such that $h^{-1}(S)$ is semi-analytic in M .

Since integrals over semi-analytic sets can be evaluated by using Igusa's method, the above theorem yields the following.

8.2 Theorem. *Let $S \subset K^n$ be subanalytic and bounded, and $f: K^n \rightarrow K$ analytic. Then, $\int_S |f(x)|^s |dx|$ is a rational function of q^{-s} .*

Actually this remains valid when f is any function whose graph is subanalytic [13]. A first application of theorem 8.2 is the following.

8.3 Corollary [19]. *Let f be a power series over K which converges on R^n . For $m \in \mathbb{N}$, denote by A_m the cardinality of the reduction mod P^m of $V = \{x \in R^n | f(x) = 0\}$. Then $R(t) := \sum_{m=0}^{\infty} A_m t^m$ is a rational function of t .*

This corollary was conjectured by Serre and Oesterlé [72],[64] and was our main motivation to investigate p -adic subanalytic sets. Corollary 8.3 follows from 8.2 by expressing $R(t)$ in terms of the integral $\int_D |w|^s |dx| |dw|$ where $D = \{(x, w) \in R^{n+1} | \text{distance from } x \text{ to } V \text{ is } \leq |w|\}$. Note that D is indeed the projection of a semi-analytic set. We refer to Oesterlé [64] for fundamental results on the asymptotics of A_m . When f has only two variables, $R(t)$ has been explicitly calculated by Bollaerts [6].

Another application of theorem 8.2 is the following remarkable result of du Sautoy [20].

8.4 Theorem. *Let G be a compact p -adic analytic group. For $m \in \mathbb{N}$ denote by C_m the number of open subgroups of index p^m in G . Then $\sum_{m=0}^{\infty} C_m t^m$ is rational in t .*

Finally we mention some further developments. The main results about p -adic semi-algebraic and subanalytic sets are not uniform in p . Uniform versions have been obtained by Pas [66],[67] and Van den Dries [77]. Subanalytic sets in the context of rigid analytic geometry have been studied by Lipshitz [49] and Schoutens [71].

REFERENCES

- [1] N. A'CAMPO, *La fonction zêta d'une monodromie*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 233-248.
- [2] M.F. ATIYAH, *Resolution of singularities and division of distributions*, Comm. pure Appl. Math. **23** (1970), 145-150.
- [3] D. BARLET, *Contribution effective de la monodromie aux développements asymptotiques*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **17** (1984), 293-315.
- [4] I.N. BERNSTEIN, *The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter*, Funct. Anal. Appl. **6** (1972), 273-285.
- [5] I.N. BERNSTEIN and S.I. GEL'FAND, *Meromorphic property of the function P^λ* , Funct. Anal. Appl. **3** (1969), 68-69.
- [6] D. BOLLAERTS, *On the Poincaré series associated to the p -adic points on a curve*, Acta Arithmetica **LI** (1988), 9-30.
- [7] B. DATSKOVSKY and D.J. WRIGHT, *Density of discriminants of cubic extensions*, J. reine angew. Math. **386** (1988), 116-138.
- [8] P. DELIGNE, *La conjecture de Weil I*, Pub. math. I.H.E.S. **43** (1974), 273-307.
- [9] P. DELIGNE, *Cohomologie Etale (SGA 4 1/2)*, Lecture Notes in Math. **569**, Springer, Heidelberg, 1977.
- [10] J. DENEFF, *The rationality of the Poincaré series associated to the p -adic points on a variety*, Invent. Math. **77** (1984), 1-23.
- [11] J. DENEFF, *On the evaluation of certain p -adic integrals*, Séminaire de Théorie des Nombres Paris 1983-84, Progress in Math. **59**, Birkhäuser, 1985, pp. 25-47.
- [12] J. DENEFF, *On the degree of Igusa's local zeta function*, Amer. J. Math. **109** (1987), 991-1008.
- [13] J. DENEFF, *Multiplicity of the poles of the Poincaré series of a p -adic subanalytic set*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1987-1988, Exposé n° 43.
- [14] J. DENEFF, *Local zeta functions and Euler characteristics*, Duke Math. J. **63** (1991), 713-721.
- [15] J. DENEFF, *Degree of local zeta functions and monodromy*, in preparation.
- [16] J. DENEFF et F. LOESER, *Caractéristiques d'Euler-Poincaré, Fonctions zêta locales et Modifications analytiques*, to appear.
- [17] J. DENEFF and D. MEUSER, *A Functional Equation of Igusa's Local Zeta Function*, Amer. J. Math. (1991), to appear.
- [18] J. DENEFF and P. SARGOS, *Polyèdre de Newton et distribution f_+^s . I*, J. Analyse Math. **53** (1989), 201-218; *Polyèdre de Newton et distribution f_+^s . II*, to appear.
- [19] J. DENEFF and L. VAN DEN DRIES, *p -adic and real subanalytic sets*, Annals of Math. **128** (1988), 79-138.
- [20] M. DU SAUTOY, *Finitely generated groups, p -adic analytic groups, and Poincaré series*, Bull. Amer. Math. Soc. **23** (1990), 121-126.
- [21] B. DWORK, *On the rationality of the zeta function of an algebraic variety*, Amer. J. Math. **82** (1960), 631-648.
- [22] A. GROTHENDIECK, P. DELIGNE and N. KATZ, *Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique (SGA7)*, Lecture Notes in Math. **288,340** (1972-73), Springer, Heidelberg.
- [23] A. GYOJA, *Theory of Prehomogeneous Spaces*, preprint 90 pp..
- [24] A. GYOJA, *Lefschetz principle in the theory of prehomogeneous vector spaces*, preprint.
- [25] H. HIRONAKA, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. Math. **79** (1964), 109-326.
- [26] J. IGUSA, *On the arithmetic of Pfaffians*, Nagoya Math. J. **47** (1972), 169-198.
- [27] J. IGUSA, *On a certain Poisson formula*, Nagoya Math. J. **53** (1974), 211-233.

- [28] J. IGUSA, *Complex powers and asymptotic expansions I*, J. reine angew. Math. **268/269** (1974), 110-130; ; *II*, ibid **278/279** (1975), 307-321.
- [29] J. IGUSA, *Exponential sums associated with a Freudenthal quartic*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **24** (1977), 231-246.
- [30] J. IGUSA, *Lectures on forms of higher degree*, Tata Inst. Fund. Research, Bombay, 1978.
- [31] J. IGUSA, *Some results on p -adic complex powers*, Amer. J. Math. **106** (1984), 1013-1032.
- [32] J. IGUSA, *Complex powers of irreducible algebroid curves*, Geometry today, Roma 1984, Progress in Math. **60**, Birkhäuser, 1985, pp. 207-230.
- [33] J. IGUSA, *On functional equations of complex powers*, Invent. Math. **85** (1986), 1-29.
- [34] J. IGUSA, *Some aspects of the arithmetic theory of polynomials*, Discrete Groups in Geometry and Analysis, Progress in Math. **67**, Birkhäuser, 1987, pp. 20-47.
- [35] J. IGUSA, *Zeta distributions associated with some invariants*, Amer. J. Math. **109** (1987), 1-34.
- [36] J. IGUSA, *B-functions and p -adic integrals*, Algebraic Analysis, Academic Press, 1988, pp. 231-241.
- [37] J. IGUSA, *On the arithmetic of a singular invariant*, Amer. J. Math **110** (1988), 197-233.
- [38] J. IGUSA, *Universal p -adic zeta functions and their functional equations*, Amer. J. Math. **111** (1989), 671-716.
- [39] J. IGUSA, *A problem on certain p -adic zeta functions*, Israel Math. Conf. Proc. **3** (1990), 67-79.
- [40] J. IGUSA, *Local zeta functions of certain prehomogeneous vector spaces*, preprint (1991).
- [41] L. ILLUSIE, *Théorie de Brauer et caractéristique d'Euler-Poincaré (d'après P. Deligne)*, Astérisque 82-83, pp. 161-172.
- [42] T. KIMURA, *The b -functions and holonomy diagrams of irreducible regular prehomogeneous vector spaces*, Nagoya Math. J. **85** (1982), 1-80.
- [43] T. KIMURA, *Complex powers on p -adic fields and a resolution of singularities*, Algebraic Analysis, Academic Press, 1988, pp. 345-355.
- [44] T. KIMURA, *Iwasawa-Tate Theory of prehomogeneous vector spaces with $Z_a = \tau Z_m$* , preprint.
- [45] T. KIMURA and T. KOGISO, *On adelic zeta functions of prehomogeneous vector spaces with finitely many adelic open orbits*, Adv. Stud. in Pure Math. **21** (1991), 1-11.
- [46] T. KIMURA, F. SATO and X. ZHU, *On the poles of p -adic complex powers and the b -functions of prehomogeneous vector spaces*, Amer. J. Math. **122** (1990), 423-437.
- [47] R.P. LANGLANDS, *Orbital integrals on forms of $SL(3)$ I*, Amer. J. Math. **105** (1983), 465-506.
- [48] B. LICHTIN and D. MEUSER, *Poles of a local zeta function and Newton polygons*, Compositio Math. **55** (1985), 313-332.
- [49] L. LIPSHITZ, *Rigid subanalytic sets*, Amer. J. Math., to appear.
- [50] F. LOESER, *Quelques conséquences locales de la théorie de Hodge*, Ann. Institut Fourier **35** (1985), 75-92.
- [51] F. LOESER, *Une estimation asymptotique du nombre de solutions approchées d'une équation p -adique*, Invent. Math. **85** (1986), 31-38.
- [52] F. LOESER, *Fonctions d'Igusa p -adiques et polynômes de Bernstein*, Amer. J. Math. **110** (1988), 1-22.
- [53] F. LOESER, *Fonctions zêta locales d'Igusa à plusieurs variables, intégration dans les fibres, et discriminants*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **22** (1989), 435-471.
- [54] F. LOESER, *Fonctions d'Igusa p -adiques, polynômes de Bernstein, et polyèdres de Newton*, J. reine angew. Math. **412** (1990), 75-96.
- [55] A. MACINTYRE, *On definable subsets of p -adic fields*, J. Symb. Logic **41** (1976), 605-610.

- [56] A. MACINTYRE, *Rationality of p -adic Poincaré series: Uniformity in p* , Ann. Pure Appl. Logic, to appear.
- [57] B. MALGRANGE, *Intégrales asymptotiques et monodromie*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **7** (1974), 405-430.
- [58] B. MALGRANGE, *Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescence*, Astérisque **101/102** (1983), 243-267.
- [59] D. MEUSER, *On the rationality of certain generating functions*, Math. Ann. **256** (1981), 303-310.
- [60] D. MEUSER, *On the poles of a local zeta function for curves*, Invent. Math. **73** (1983), 445-465.
- [61] D. MEUSER, *The meromorphic continuation of a zeta function of Weil and Igusa type*, Invent. Math. **85** (1986), 493-514.
- [62] D. MEUSER, *On a functional equation of Igusa's local zeta function*, p -adic Analysis, Proceedings Trento 1989, Lecture Notes in Math. 1454, Springer, 1990, pp. 309-313.
- [63] J. MILNOR, *Singular points of complex hypersurfaces*, Princeton Univ. Press, 1968.
- [64] J. OESTERLÉ, *Réduction modulo p^n des sous-ensembles analytiques fermés de \mathbb{Z}_p^N* , Invent. Math. **66** (1982), 325-341.
- [65] T. ONO, *An integral attached to a hypersurface*, Amer. J. Math. **90** (1968), 1224-1236.
- [66] J. PAS, *Uniform p -adic cell decomposition and local zeta functions*, J. reine angew. Math. **399** (1989), 137-172.
- [67] J. PAS, *Cell decomposition and local zeta functions in a tower of unramified extensions of a p -adic field*, Proc. London Math. Soc. **60** (1990), 37-67.
- [68] J. PAS, *Local zeta functions and Meuser's invariant functions*, J. Number Theory **38** (1991), 278-299.
- [69] M. SATO and T. KIMURA, *A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants*, Nagoya Math. J. **65** (1977), 1-155.
- [70] M. SATO and T. SHINTANI, *On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces*, Ann. Math **100** (1974), 131-170.
- [71] H. SCHOUTENS, *Approximation and subanalytic sets over a complete valuation ring*, Ph. D thesis (Leuven 1991).
- [72] J.-P. SERRE, *Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev*, Publ. Math. I.H.E.S. **54** (1981), 123-201.
- [73] J.-P. SERRE, *Méthodes adéliques*, Résumé des cours et travaux, Collège de France (1981 - 1982), 81-89; *Collected papers III*, (1986) pp. 649-657, Springer-Verlag.
- [74] L. STRAUSS, *Poles of a two-variable p -adic complex power*, Trans. Amer. Math. Soc. **278** (1983), 481-493.
- [75] B. TEISSIER, *Théorèmes de finitude en géométrie analytique (d'après H. Hironaka)*, Séminaire Bourbaki 451 (1973-74), Lecture Notes in Math. 431, Springer, Heidelberg, 1975.
- [76] R. THOM et M. SEBASTIANI, *Un résultat sur la monodromie*, Invent. Math. **13** (1971), 90-96.
- [77] L. VAN DEN DRIES, *Analytic Ax-Kochen-Ersov Theorems*, preprint.
- [78] A. VARCHENKO, *Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals*, Funct. Anal. Appl. **10** (1976), 13-38.
- [79] W. VEYS, *On the poles of Igusa's local zeta function for curves*, J. London Math. Soc. **41** (1990), 27-32.
- [80] W. VEYS, *Relations between numerical data of an embedded resolution*, Amer. J. Math., to appear.
- [81] W. VEYS, *Congruences for numerical data of an embedded resolution*, Compositio Math., to appear.

- [82] W. VEYS, *Poles of Igusa's local zeta function and monodromy*, preprint. See also: Numerical Data of resolutions of singularities and Igusa's local zeta function , Ph. D. thesis (Leuven 1991).
- [83] A. WEIL, *Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques*, Acta Math. **113** (1965), 1-87.

JAN DENEFF
UNIVERSITY OF LEUVEN
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
CELESTIJNENLAAN 200 B
B-3001 LEUVEN
BELGIUM

Astérisque

FRANÇOIS LOESER

Polytopes secondaires et discriminants

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 742, p. 387-420

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__387_0>

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

POLYTOPES SECONDAIRES ET DISCRIMINANTS

par François LOESER

INTRODUCTION

Le but de cet exposé est d'expliquer pourquoi dans $4p^3 + 27q^2$ on a $4 = 2^2$ et $27 = 3^3$. A la suite de leurs travaux sur les fonctions hypergéométriques associées à des variétés toriques [G-K-Z 1], Gelfand, Kapranov et Zelevinsky ont introduit un nouvel objet combinatoire associé à un ensemble fini de n points A dans \mathbf{R}^k : le polytope secondaire $QQ(A)$, décrit à l'aide des triangulations * de A et plongé dans \mathbf{R}^n . Un de leur résultat principal [G-K-Z 2], que nous allons décrire dans cet exposé, est que $QQ(A)$ est le polyèdre de Newton d'un discriminant associé à A . De plus ils donnent une formule explicite pour les coefficients des monômes extrémaux de ce discriminant. En particulier ce sont toujours, au signe près, des produits d'entiers de la forme N^N . Récemment, Kapranov, Sturmfels et Zelevinsky [K-S-Z] ont donné une présentation plus conceptuelle de ces résultats en terme de dégénérescences toriques et de formes de Chow.

Le plan est le suivant. La section 1 est consacrée à la description du polytope secondaire, de ses sommets et de ses arêtes. Dans la section 2 on énonce les principaux résultats sur les polyèdres de Newton des discriminants. On donne quelques exemples classiques (pour lesquels

* de telles triangulations avaient été considérées antérieurement par O. Viro, en géométrie algébrique réelle (cf. [V]).

les résultats sont cependant nouveaux) en 3. Dans la section suivante, plus technique, on donne une interprétation géométrique du discriminant, qui permet dans la section 5 de présenter la démonstration de Gelfand, Kapranov et Zelevinsky. On expose brièvement (section 6) le lien avec les fonctions hypergéométriques. Les sections suivantes sont consacrées à l'approche récente de Kapranov, Sturmfels et Zelevinsky. Dans la section 7, on expose des généralités concernant les dégénérescences toriques et les polytopes de Chow, et dans la suivante les résultats de Sturmfels sur les idéaux toriques et les éventails de Gröbner. Ceci nous permet de présenter dans la section 9 les résultats de Kapranov, Sturmfels et Zelevinsky concernant le polytope de Chow d'une variété torique, desquels on déduit, dans la section 10, une autre démonstration des résultats principaux.

N.B. La théorie de l'élimination, des résultants et des formes de Chow a une longue histoire. Faute de compétence nous ne tenterons pas de la retracer ici. C'est donc par choix délibéré que les références données sont exclusivement modernes. Signalons cependant que l'interprétation du résultant comme déterminant d'un complexe de Koszul (cf.7.5) semble remonter, au moins en partie, à Cayley, et qu'elle a été développée dans un cadre général par E.Fischer (Über die Cayley'sche Eliminations-methode, Math. Z. 26 (1927), 497-550).

0. CONVENTIONS ET NOTATIONS

Pour $k \geq 1$, on note $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$. Si $X \subset \mathbf{R}^k$, on note $Q(X)$ l'enveloppe convexe de X .

Si M est un réseau de rang r dans \mathbf{R}^n , la forme volume associée à M sur $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ est la mesure de Lebesgue normalisée de telle sorte que le volume d'une maille du réseau soit $r!$, c'est-à-dire que le volume d'un simplexe standard soit 1.

1. POLYTOPES SECONDAIRES

1.1 Rappelons qu'un éventail dans \mathbf{R}^n est une famille finie $(C_\alpha)_{\alpha \in I}$ de cônes

polyédraux telle que :

- (i) Si C est une face de C_α , on a $C = C_\beta$ pour un $\beta \in I$.
- (ii) Quels que soient α et β dans I , $C_\alpha \cap C_\beta$ est une face de C_α et C_β .

Un éventail $(C_\alpha)_{\alpha \in I}$ est complet si $\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha = \mathbf{R}^n$. A un polytope K dans \mathbf{R}^n on associe un éventail complet $F(K)$ de la manière suivante. Pour tout point p de K , soit

$$C(K, p) = \{v \in \mathbf{R}^n ; \forall y \in K \quad \langle v, p \rangle \leq \langle v, y \rangle\},$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignant le produit scalaire euclidien usuel). Si τ est une face de K , on définit $C(K, \tau)$ comme étant égal à $C(K, p)$, pour p un point de l'intérieur relatif de τ . L'éventail $F(K)$ est la famille des $C(K, \tau)$, τ décrivant l'ensemble des faces de K .

1.2 Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ un ensemble de n points distincts de \mathbf{R}^k et $Q(A)$ l'enveloppe convexe de A , que l'on suppose de dimension $k - 1$. Une triangulation de A est par définition une triangulation simpliciale T de $Q(A)$, telle que les sommets des simplexes de T appartiennent à A . On notera $\mathcal{T}(A)$ l'ensemble des triangulations de A . Plus précisément on voit un élément T de $\mathcal{T}(A)$ comme une famille $(\sigma)_{\sigma \in T}$ d'applications strictement croissantes, $\sigma : [k] \rightarrow [n]$. On associe à σ le simplexe $\bar{\sigma}$ enveloppe convexe des $a_{\sigma(i)}$. Que T soit une triangulation de $Q(A)$ est équivalent aux deux conditions suivantes :

- (i) $\bigcup_{\sigma \in T} \bar{\sigma} = Q(A)$.
- (ii) Si σ et σ' appartiennent à T , l'intersection $\bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}'$ est soit vide, soit une face de $\bar{\sigma}$ et $\bar{\sigma}'$.

Plus loin on sera parfois amené, par abus de langage, à appeler les $\bar{\sigma}$ (et les σ) des simplexes de dimension maximale et les faces des $\bar{\sigma}$ (et des σ) des simplexes.

1.3 A une triangulation $T \in \mathcal{T}(A)$ on va associer, suivant [G-K-Z 2], un cône polyédral dans \mathbf{R}^n de la façon suivante. On identifie tout d'abord \mathbf{R}^n à \mathbf{R}^A (si $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in \mathbf{R}^n$, on écrit donc $\psi(a_i) = \psi_i$). Tout vecteur ψ de \mathbf{R}^n détermine une fonction continue $g_{T,\psi} : Q(A) \rightarrow \mathbf{R}$, affine sur chacun des simplexes $\bar{\sigma}$, $\sigma \in T$, et telle que si a_i est sommet d'un simplexe $\bar{\sigma}$, $g_{T,\psi}(a_i) = \psi(a_i)$. On définit le cône $\mathcal{C}(A, T)$ comme l'ensemble des ψ tels que :

(i) La fonction $g_{T,\psi}$ soit convexe.

(ii) Pour tout $a_i \in A$, $g_{T,\psi}(a_i) \leq \psi(a_i)$.

(Un point de A n'est pas nécessairement un sommet de T .) On vérifie que $\mathcal{F}(A) = (\mathcal{C}(A, T))_{T \in \mathcal{T}(A)}$ est un éventail complet.

1.4 On définit les subdivisions polyédrales de $Q(A)$, ayant leurs sommets dans A de façon similaire aux triangulations; ce sont des complexes polyédraux au lieu d'être des complexes simpliciaux. A tout vecteur ψ de \mathbf{R}^n associons une subdivision polyédrale Q_ψ de $Q(A)$, ayant ses sommets dans A , comme suit. Soit P_ψ l'enveloppe convexe des points (a_i, ψ_i) dans \mathbf{R}^{k+1} ; on obtient Q_ψ en projetant l'ensemble des faces compactes du convexe $P_\psi + \{0\}^k \times \mathbf{R}_+$ sur \mathbf{R}^k . Une telle subdivision polyédrale est dite régulière. Pour ψ général, Q_ψ est une triangulation. Si T est une triangulation régulière, il est clair que l'ensemble des ψ tels que $Q_\psi = T$ est égal à l'intérieur du cône $\mathcal{C}(A, T)$. On vérifie que, réciproquement, si $\mathcal{C}(A, T)$ est d'intérieur non vide, T est régulière. En général une subdivision polyédrale est régulière si et seulement si il existe une fonction continue sur $Q(A)$, affine sur chacun des polytopes de la subdivision et strictement convexe (en un sens évident).

On notera $\mathcal{T}^0(A)$ l'ensemble des triangulations régulières de A .

1.5 Tous les éventails complets ne sont pas nécessairement de la forme $F(K)$, avec K un polytope. Nous allons voir que c'est cependant le cas de l'éventail $\mathcal{F}(A)$. Notons (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbf{R}^n . On va définir, suivant [G-K-Z 2], un nouvel objet associé à A : le polytope secondaire $QQ(A)$.

DÉFINITION 1.5.1 [G-K-Z 2].—

(i) Si $T \in \mathcal{T}(A)$, on note ϕ_T le vecteur

$$\phi_T = \sum_{\sigma \in T} \text{vol}(\bar{\sigma})(e_{\sigma(1)} + \cdots + e_{\sigma(k)}).$$

(ii) On définit $QQ(A)$ comme l'enveloppe convexe des ϕ_T , $T \in \mathcal{T}(A)$.

THÉORÈME 1.5.2 [G-K-Z 2].—

Les deux éventails $F(QQ(A))$ et $\mathcal{F}(A)$ sont égaux. Plus précisément, si $T \in \mathcal{T}(A)$, on a

$$C(QQ(A), \phi_T) = C(A, T) .$$

Démonstration. Comme les deux éventails sont complets, il suffit de montrer que pour tout $T \in \mathcal{T}(A)$,

$$C(A, T) \subset C(QQ(A), \phi_T) .$$

(Remarquons en passant que cette inclusion donne directement que $\mathcal{F}(A)$ est un éventail.) Il faut montrer que si $\psi \in C(A, T)$, $\langle \psi, \phi_T \rangle \leq \langle \psi, \phi_{T'} \rangle$ pour tout $T' \in \mathcal{T}(A)$. Pour cela on remarque que, par définition même de $C(A, T)$, on a $g_{T, \psi}(x) \leq g_{T', \psi}(x)$ si $T' \in \mathcal{T}(A)$ et $x \in Q(A)$. On a donc

$$\int_{Q(A)} g_{T, \psi}(x) dx \leq \int_{Q(A)} g_{T', \psi}(x) dx .$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \int_{Q(A)} g_{T, \psi}(x) dx &= \sum_{\sigma \in T} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k g_{T, \psi}(a_{\sigma(i)}) \right) \text{vol } \bar{\sigma} \\ &= \frac{1}{k} \langle \psi, \phi_T \rangle , \end{aligned}$$

la même égalité valant pour T' . Ceci donne bien $\langle \psi, \phi_T \rangle \leq \langle \psi, \phi_{T'} \rangle$. \square

On déduit de 1.5.2 le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.5.3.— Les sommets de $QQ(A)$ sont les ϕ_T , $T \in \mathcal{T}^0(A)$.

Remarque 1.5.4. On peut étendre 1.5.3 aux faces de dimension quelconque de $QQ(A)$: les faces de $QQ(A)$ sont en bijection (en fait on a un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés) avec les subdivisions polyédrales régulières de A . Si P est une subdivision polyédrale de A on lui associe une cône $\mathcal{C}(A, P)$ défini comme pour les triangulations, et, quand P est régulière, $\mathcal{C}(A, P)$ coïncide avec le cône normal de la face de $QQ(A)$ correspondant à P ([G-K-Z-2], [B-F-S]).

1.6 Nous donnons ici une construction de $QQ(A)$ due à Billera, Filliman et Sturmfels ([B-F-S]).

A l'ensemble A on associe la matrice (n, k) dont la i -ème ligne est composée des coordonnées de a_i . Soit $\eta \in \Lambda^k \mathbf{R}^n$ le produit extérieur des colonnes. Si $\sigma : [k] \rightarrow [n]$ est strictement croissante on pose $e_\sigma = e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(k)} \in \Lambda^k \mathbf{R}^n$. On étend $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à $\Lambda^k \mathbf{R}^n$, et on pose $\varepsilon(\sigma) = \text{signe} \langle \eta, e_\sigma \rangle$. Si $T \in \mathcal{T}(A)$ on pose

$$\varphi_T = \sum_{\sigma \in T} \varepsilon(\sigma) e_\sigma .$$

On note $U(A)$ l'enveloppe convexe des φ_T , $T \in \mathcal{T}(A)$. Si T et T' sont deux triangulations distinctes, on a

$$\langle \varphi_T, \varphi_{T'} \rangle = |T \cap T'| < |T| = \langle \varphi_T, \varphi_T \rangle ,$$

ce qui prouve que les sommets de $U(A)$ sont exactement les φ_T , $T \in \mathcal{T}(A)$.

Considérons $\pi :$

$$\begin{aligned} \Lambda^k \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R}^n \\ \varphi &\rightarrow \sum_{i=1}^n \langle (e_i \lrcorner \varphi) \wedge e_i, \eta \rangle e_i, \end{aligned}$$

le produit intérieur \lrcorner étant défini par $\langle a \wedge b, c \rangle = \langle a, b \lrcorner c \rangle$. Le lien entre $U(A)$ et $QQ(A)$ est donné par :

PROPOSITION 1.6.1 [B-F-S] .—

On a l'égalité $QQ(A) = \pi(U(A))$.

1.7 Description des arêtes de $QQ(A)$

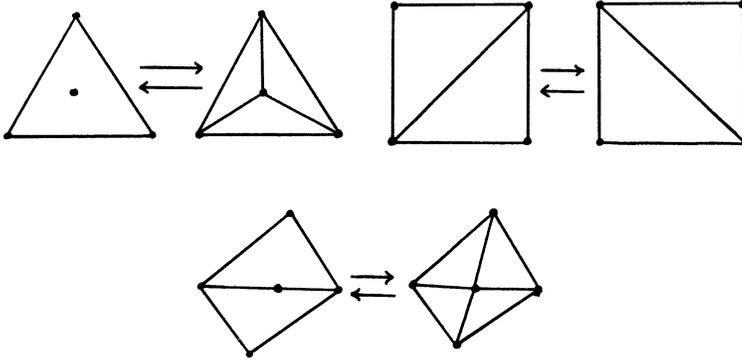
Les parties de A minimales parmi celles qui sont linéairement dépendantes sont appelées des circuits. Si Z est un circuit, $\mathcal{T}(Z)$ a exactement deux éléments notés, non canoniquement, $T_+(Z)$ et $T_-(Z)$. En effet, soit $\sum_{p \in Z} \alpha_p p = 0$ une relation linéaire non triviale entre les points de Z , $Z_+ = \{p \in Z ; \alpha_p > 0\}$ et $Z_- = \{p \in Z ; \alpha_p < 0\}$. On définit $T_+(Z)$, resp. $T_-(Z)$, comme formée des simplexes $Q(Z \setminus \{p\})$, $p \in Z_+$, resp. Z_- .

DÉFINITION 1.7.1.—

Soient $T \in \mathcal{T}(A)$, Z un circuit. On dit que T s'appuie sur Z si

- (i) Les sommets de T appartenant à $Q(Z)$ appartiennent à Z .
- (ii) Le polytope $Q(Z)$ est union de faces de simplexes de T .
- (iii) Soit $Q(I)$ un simplexe de dimension maximale de l'une des deux triangulations de $Q(Z)$. Si il existe $J \subset A \setminus Z$ tel que $Q(I \cup J)$ soit un simplexe de dimension maximale de T , alors pour tout autre simplexe de dimension maximale I' de la même triangulation de $Q(Z)$, $Q(I' \cup J)$ est un simplexe de T .

Si T s'appuie sur Z , T induit une triangulation de Z , disons $T_+(Z)$. On obtient une nouvelle triangulation de A , $s_Z(T)$, de la façon suivante : on remplace les simplexes de la forme $Q(I \cup J)$ avec $I \in T_+(Z)$, $J \subset A \setminus Z$ par les simplexes $Q(I' \cup J)$ avec $I' \in T_-(Z)$. On a $s_Z(s_Z(T)) = T$. Les dessins suivants fournissent des exemples.



Le résultat suivant décrit les arêtes de $QQ(A)$:

THÉORÈME 1.7.2 [G-K-Z 2].— Soient T et T' deux triangulations régulières de A . Les sommets ϕ_T et $\phi_{T'}$ de $QQ(A)$ sont reliés par une arête si et seulement si il existe un circuit $Z \subset A$ sur lequel s'appuient T et T' tel que $T' = s_Z(T)$.

On aura besoin en 2.5 de la définition suivante.

DÉFINITION 1.7.3.— Si $T' = s_Z(T)$, on note $S(T, T')$ l'ensemble des parties J de $A \setminus Z$ telles qu'il existe $I \subset Z$, avec $Q(I)$ simplexe de dimension maximale d'une triangulation de Z et $Q(I \cup J)$ simplexe de dimension maximale de T .

2. POLYÈDRES DE NEWTON DE DISCRIMINANTS

2.1. Dans cette section et dans les suivantes on suppose $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbf{Z}^k$. Les hypothèses suivantes seront de plus supposées satisfaites par défaut.

(*1) Il existe une forme linéaire $h : \mathbf{Z}^k \rightarrow \mathbf{Z}$ à coefficients entiers telle que $A \subset h^{-1}(1)$.

(*2) Le groupe additif $M(A)$ engendré par A est égal à \mathbf{Z}^k .

On notera $S(A)$ le semi-groupe engendré par A , et M le réseau \mathbf{Z}^k .

2.2. Le discriminant Δ_A

On note V l'espace vectoriel \mathbf{C}^n muni de coordonnées (c_1, \dots, c_n) . On identifiera V à l'espace vectoriel des polynômes $f = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i x^{a_i} \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_k]$. Soit ∇_A l'adhérence de Zariski du lieu des $f \in V$ tels qu'il existe $x_0 \in (\mathbf{C}^*)^k$ vérifiant :

$$f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0.$$

Par définition le discriminant $\Delta_A \in \mathbf{Z}[c_1, \dots, c_n]$ est le polynôme irréductible, défini au signe près, dont le lieu des zéros est égal à la réunion des composantes irréductibles de codimension 1 de ∇_A . Cette définition sera inchangée si les conditions (*) ne sont pas vérifiées.

2.3. Interprétation projective de Δ_A

L'interprétation d'un discriminant comme équation de variété duale est tout à fait classique. Nous allons la détailler dans le cas présent.

Nous noterons V^\vee le dual de V et (y_1, \dots, y_n) les coordonnées duales.

On a un morphisme :

$$i_A : (\mathbf{C}^*)^k \rightarrow V^\vee$$

$$(x_1, \dots, x_k) \rightarrow (x^{a_1}, \dots, x^{a_n}).$$

Les hypothèses (*) garantissent que i_A est une immersion. On note X_A^0 le tore $i_A((\mathbf{C}^*)^k)$ et X_A l'adhérence de Zariski de X_A^0 dans V^\vee . C'est une variété torique (non normale en général). En effet l'action de $(\mathbf{C}^*)^k$ sur X_A définie par $(y_1, \dots, y_n) \rightarrow (x^{a_1} y_1, \dots, x^{a_n} y_n)$ si $x \in (\mathbf{C}^*)^k$ prolonge l'action naturelle de $(\mathbf{C}^*)^k$ sur X_A^0 par multiplication. Algébriquement on peut voir X_A comme étant égale à $\text{Spec } \mathbf{C}[S(A)]$, le plongement de X_A dans V^\vee étant donné par :

$$\iota_A : \mathbf{C}[y_1, \dots, y_n] \rightarrow \mathbf{C}[S(A)]$$

$$y_i \rightarrow x^{a_i}.$$

La normalisée X'_A de X_A est donnée par $X'_A = \text{Spec } \mathbf{C}[\mathbf{R}_+S(A) \cap M]$. On notera I_A le noyau de ι_A . C'est l'idéal définissant X_A dans V^\vee .

Comme X_A est conique d'après (*1), elle possède une variété duale $X_A^\vee \subset V$. L'énoncé suivant est essentiellement tautologique :

PROPOSITION 2.2.1.— *On a l'égalité $X_A^\vee = \nabla_A$.*

2.4. Le discriminant E_A

Dans la situation générale, les résultats de [G-K-Z 2] concernent les discriminants E_A que nous allons définir et non les Δ_A . Nous donnons ici une définition combinatoire des E_A . Une description géométrique en sera donnée dans la section 4. En 2.6 on expliquera comment passer de E_A à Δ_A .

2.4.1. Soit τ une face de $Q(A)$. Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}\tau$ il y a deux réseaux naturels contenus l'un dans l'autre : le réseau $M(S(\tau))$ engendré par le semi-groupe $S(A) \cap \mathbf{R}\tau$ et $M \cap \mathbf{R}\tau$. On note $i(\tau, S(A))$ l'indice du premier dans le second.

Si $S \subset M$ est un semi-groupe de type fini contenant l'origine, tel que \mathbf{R}_+S soit strictement convexe, engendrant un réseau $M(S)$, et tel que $S \rightarrow M(S)$ soit injectif, on note $K_-(S) = \mathbf{R}_+S \setminus Q(S \setminus \{0\})$. On définit l'entier $u(S)$ comme le volume de $K_-(S)$ relativement au réseau $M(S)$.

Si τ est une face de $Q(A)$, on note $S(A)/\tau$ l'image de $S(A)$ dans $\mathbf{R}^k/\mathbf{R}\tau$, et $M(S(A)/\tau)$ le réseau engendré. On définit $u(\tau, S(A))$ comme étant égal à $u(S(A)/\tau)$.

2.4.2 DÉFINITION.—

(i) Si τ est une face de $Q(A)$ on pose

$$m(\tau, S(A)) = i(\tau, S(A)) \cdot u(\tau, S(A)) .$$

(ii) Le discriminant E_A est le produit, défini au signe près,

$$E_A = \prod \Delta_{A \cap \tau}^{m(\tau, S(A))} ,$$

τ parcourant l'ensemble des faces non-vides de $Q(A)$ (parmi lesquelles figure $Q(A)$).

2.5. Le résultat principal

On rappelle que si $F \in \mathbf{C}[c_1, \dots, c_n]$ est un polynôme, $F = \sum_{p \in \mathbf{N}^n} \alpha_p c^p$, le polyèdre de Newton de F , noté $\text{Nw}(F)$, est par définition l'enveloppe convexe dans \mathbf{R}^n des p tels que $\alpha_p \neq 0$. Le résultat principal de [G-K-Z 2] est le suivant.

THÉORÈME 2.5.1 [G-K-Z 2].—

- 1) Le polyèdre de Newton du discriminant E_A , $\text{Nw}(E_A)$, est égal au polytope secondaire $QQ(A)$.
- 2) Si $T \in \mathcal{T}^0(A)$, le coefficient du monôme c^{ϕ_T} dans E_A est égal à $\pm \prod_{\sigma \in T} (\text{vol } \bar{\sigma})^{\text{vol } \bar{\sigma}}$.

Ce résultat a le corollaire suivant, a priori assez surprenant : les coefficients des monômes extrémaux de E_A sont des produits d'entiers de la forme N^N avec N entier. Ceci généralise le fait que dans $4p^3 + 27q^2$, $4 = 2^2$ et $27 = 3^3$ (cf. §3).

En fait Gelfand, Kapranov et Zelevinsky ont même déterminé les changements de signe des coefficients des monômes extrémaux reliés par une arête. Avec les notations de 1.7, on a :

THÉORÈME 2.5.2 [G-K-Z 2].— Si on choisit un signe pour E_A , on peut écrire dans le 2) du théorème précédent

$$(-1)^{p(T)} \prod_{\sigma \in T} (\text{vol } \bar{\sigma})^{\text{vol } \bar{\sigma}},$$

avec $p(T) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ vérifiant la propriété suivante : si T et T' appartiennent à $\mathcal{T}^0(A)$, et si ϕ_T et $\phi_{T'}$ sont reliés par une arête de $QQ(A)$, alors

$$p(T') - p(T) = \sum_{J \in S(T, T')} k(J \cup Z) (\text{vol } Q(J \cup Z) + 1) \pmod{2},$$

avec Z le circuit sur lequel s'appuient T et T' et $k(J \cup Z)$ l'indice dans \mathbf{Z}^n du réseau engendré par $J \cup Z$.

Remarque : Dans [G-K-Z 2] la formule pour $p(T') - p(T)$ n'est pas correcte telle qu'elle est donnée ; en suivant la démonstration de [G-K-Z 2] on obtient la formule ci-dessus.

2.6. Passer de E_A à Δ_A

Si S est un semi-groupe comme en 2.4.1, on définit, suivant [K], l'entier $\nu(S) = \Sigma(-1)^{\text{codim } \tau} u(S \cap \tau)$, τ décrivant les faces du cône $\mathbf{R}_+ S$. D'après [K], on a toujours $\nu(S) \geq 0$, et $\nu(S) = 0$ si et seulement si le semi-groupe S est isomorphe à \mathbf{N}^r , $r \geq 1$. Rappelons (cf. [D]) qu'une variété torique affine de la forme $X = \text{Spec } \mathbf{C}[C \cap \mathbf{Z}^r]$, avec C un cône polyédral de dimension r , ayant l'origine comme unique sommet, est lisse si et seulement si C est de la forme $\mathbf{R}_+ v_1 + \dots + \mathbf{R}_+ v_r$ avec (v_1, \dots, v_r) une base de \mathbf{Z}^r . On déduit de cela immédiatement l'énoncé suivant :

PROPOSITION 2.6.1 [G-K-Z 2].— *Si la variété torique $X_A \subset V^\vee$ est un cône sur une variété lisse (i.e. $\mathbf{P}(X_A) \subset \mathbf{P}(V^\vee)$ est lisse), alors les $m(\tau, S(A))$ définis en 2.4 sont tous égaux à 1. Autrement dit :*

$$E_A = \pm \Pi \Delta_{A \cap \tau} ,$$

τ parcourant l'ensemble des faces non-vides de $Q(A)$.

Ce résultat va permettre, quand $\mathbf{P}(X_A)$ est lisse, de déterminer explicitement $\text{Nw}(\Delta_A)$ à partir de 2.5.

Si τ est une face de $Q(A)$, on note vol_τ la forme volume sur l'espace affine engendré par τ , normalisée par la trace du réseau \mathbf{Z}^k .

Si $T \in \mathcal{T}(A)$, on note $F_j(T)$ l'ensemble des simplexes σ de dimension j de T tels que $\bar{\sigma}$ soit contenu dans une face de dimension j de $Q(A)$, notée $\tau(\sigma)$.

On pose

$$\phi_{T,j} = \sum_{\sigma \in F_j(T)} \text{vol}_{\tau(\sigma)} \bar{\sigma} (e_{\sigma(1)} + \dots + e_{\sigma(j)}) .$$

Ainsi $\phi_{T,k}$ coïncide avec ϕ_T défini précédemment. On pose

$$\Phi_T = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \phi_{T,j} .$$

DÉFINITION 2.6.2.— On note $\tilde{T}(A)$ le quotient de $\mathcal{T}(A)$ par la relation d'équivalence $T \sim T'$ si et seulement si $\Phi_T = \Phi_{T'}$, et on note $\tilde{\mathcal{T}}^0(A) \subset \tilde{\mathcal{T}}(A)$ l'ensemble des classes d'équivalence de triangulation régulières.

On déduit de la proposition précédente et du théorème 2.5.2, le résultat suivant :

THÉORÈME 2.6.3 [G-K-Z 2].— Si $\mathbf{P}(X_A)$ est lisse alors

1) $\text{Nw}(\Delta_A)$ est l'enveloppe convexe des Φ_T , $T \in \mathcal{T}(A)$ et les sommets de $\text{Nw}(\Delta_A)$ sont les Φ_T , $T \in \mathcal{T}^0(A)$.

2) Si $T \in \mathcal{T}^0(A)$, le coefficient du monôme c^{Φ_T} dans Δ_A est égal à

$$\pm \prod_{j=0}^k \prod_{\sigma \in F_j(T)} [(\text{vol } \bar{\sigma})^{\text{vol } \bar{\sigma}}]^{(-1)^{k-i}}.$$

3. EXEMPLES

Dans tous ces exemples $\mathbf{P}(X_A)$ est lisse.

3.1 Discriminant d'un polynôme à une variable

Soit $P = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \dots + c_0$ un polynôme d'une variable. Le discriminant $D(P)$ est défini classiquement comme

$$D(P) = c_r^{2r-2} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ étant les racines de P dans une clôture algébrique. C'est un polynôme à coefficients entiers en les c_i .

Soit $A = \{a_0, \dots, a_r\}$ avec $a_i = (i, 1) \in \mathbf{R}^2$. Il est clair (exercice) que $D(P) = \pm \Delta_A$. On voit que toutes les triangulations de A sont régulières et qu'elles sont décrites par les parties de $\{1, \dots, r-1\}$. Si T est décrite par $\Omega = \{i_1, \dots, i_s\} \subset \{1, \dots, r-1\}$ avec $i_1 < \dots < i_s$, ϕ_T est le point de coordonnées dans \mathbf{R}^{r+1} :

$$x_0 = i_1, \quad x_r = r - i_s, \quad x_{i_k} = i_{k+1} - i_{k-1}, \quad x_i = 0 \quad \text{sinon},$$

avec la convention que $i_0 = 0$ et $i_{s+1} = r$.

D'après la proposition 2.6.1, $E_A = \pm c_0 c_r \Delta_A$. Les théorèmes 2.5.1 et 2.5.2 donnent maintenant directement le résultat suivant :

THÉORÈME 3.1.1 [G-K-Z 3].— *Les sommets du polyèdre de Newton de $D(P)$ sont les points de coordonnées $x_0 = i_1 - 1$, $x_r = r - i_s - 1$, $x_{i_k} = i_{k+1} - i_{k-1}$, $x_i = 0$ sinon, avec $i_1 < \dots < i_s$ décrivant l'ensemble des parties de $\{1, \dots, r-1\}$. Le coefficient du monôme associé à $i_1 < \dots < i_s$ est $\prod_{0 \leq k \leq s} (-1)^{\ell_k(\ell_k-1)/2} \ell_k^{\ell_k}$, avec $\ell_k = i_{k+1} - i_k$, en convenant que $\ell_0 = i_1$ et $\ell_s = r - i_s$.*

Le lecteur trouvera dans l'article [G-K-Z 3] une description plus détaillée de $Nw(D(P))$. Le cas de polynômes “creux” est tout à fait similaire : nous laissons le lecteur s’amuser à retrouver que le discriminant de $x^3 + px + q$ est $-(4p^3 + 27q^2)$. Remarquons qu’une formule générale simple pour les coefficients des monômes non extrémaux de $D(P)$ ne semble pas connue.

3.2. Résultant de deux polynômes à une variable

Soient m et $n \geq 1$, et $P(x) = a_0x^m + \dots + a_m$, $Q(x) = b_0x^n + \dots + b_n$ deux polynômes à une variable. Le résultant $R(P, Q)$ est par définition égal à $a_0^n b_0^m \Pi(\alpha_i - \beta_j)$, les α_i (resp. β_j) étant les racines de P (resp. Q) dans une clôture algébrique. C’est un polynôme à coefficients entiers en les a_i, b_j .

On pose $A = \{(i, 0), (j, 1) ; i \in \{0, \dots, m\}, j \in \{0, \dots, n\}\}$. On vérifie aisément que $R(P, Q) = \pm \Delta_A$. La relation d’équivalence \sim introduite en 2.6.2 sur les triangulations admet la description suivante dans le cas présent : c’est la relation d’équivalence engendrée par $T \approx T'$ si T' est obtenue à partir de T en subdivisant un triangle en deux triangles. De plus on vérifie que toutes les triangulations sont régulières. Une triangulation est dite basique si la réunion de deux triangles n’est pas un triangle. Chaque classe d’équivalence dans $\tilde{\mathcal{T}}^0(A)$ a donc un unique représentant basique. Notons $B(A)$ l’ensemble des triangulations basiques. Si $T \in B(A)$, on vérifie que le vecteur Φ_T est égal à $(p(T), q(T))$ avec $p(T) \in \mathbf{Z}^{m+1}, q(T) \in \mathbf{Z}^{n+1}$ définis comme suit : $p_i(T) = |b - c|$ s’il existe un triangle de T de sommets $(i, 0), (b, 1)$ et $(c, 1)$; sinon $p_i(T) = 0$. De même $q_j(T) = |b - c|$ s’il y a un triangle de T de sommets $(j, 1), (b, 0)$

et $(c, 0)$; sinon $q_j(T) = 0$. On déduit du théorème 2.6.3 le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2.1 [G-K-Z 3].—

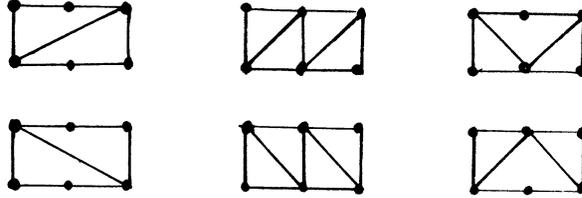
L'application $T \rightarrow (p(T), q(T))$ est une bijection entre $B(A)$ et l'ensemble des sommets de $Nw(R(P, Q))$. Les coefficients des monômes correspondants sont égaux à ± 1 .

On peut voir l'ensemble des $(p(T), q(T))$, $T \in B(A)$ comme l'ensemble des "chemins monotones" sur le réseau \mathbf{Z}^2 reliant $(0, 0)$ à (m, n) (cf [G-Z-K 3]). On peut calculer les signes des coefficients des monômes extrémaux de $R(P, Q)$: d'après ([G-K-Z 3] prop. 15) le coefficient du monôme associé à T est $(-1)^{p_1+2p_2+\dots+mp_m}$, si $p(T) = (p_0, \dots, p_m)$. On peut déduire ce résultat du théorème 2.5.2, mais la preuve dans [G-K-Z 3] est directe. En fait dans [G-K-Z 3] est donnée une formule pour tous les coefficients des monômes de $R(p, q)$ en terme de fonctions combinatoires associées au groupe symétrique.

A titre d'illustration traitons explicitement le cas $m = n = 2$. On a

$$\begin{aligned}
 R(P, Q) &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\
 &= a_0^2 b_2^2 + a_0 a_2 b_1^2 - a_0 a_1 b_1 b_2 + a_1^2 b_0 b_2 + a_2^2 b_0^2 \\
 &\quad - a_1 a_2 b_0 b_1 - 2a_0 a_2 b_0 b_2 .
 \end{aligned}$$

Excepté le dernier, tous les monômes sont des sommets de $Nw(R(P, Q))$. Il y a exactement six triangulations basiques de A qui correspondent respectivement aux monômes $a_0^2 b_2^2$, $a_0 a_1 b_1 b_2$, $a_1^2 b_0 b_2$, $a_2^2 b_0^2$, $a_1 a_2 b_0 b_1$ et $a_0 a_2 b_1^2$ (voir la figure).



3.3. Déterminants

Notons (e_1, \dots, e_m) la base canonique de \mathbf{R}^m , (f_1, \dots, f_n) celle de \mathbf{R}^n . Soit $A = \{(e_i, f_j); i \in [m], j \in [n]\}$. On vérifie facilement que le polynôme $E_A(f)$ est égal au signe près au produit des mineurs de tout ordre de la matrice (c_{ij}) si $f = \sum c_{ij} x_i y_j \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]$. Si $m = n$, $\Delta_A(f)$ est égal (au signe près) au déterminant de la matrice carrée (c_{ij}) . Cette remarque permet de définir, à la suite de Cayley, "l'hyperdéterminant d'une matrice de dimension d " [G-K-Z 5] : si A est la famille des $(e_{1,i_1}, \dots, e_{d,i_d}) \in \mathbf{R}^{n_1 + \dots + n_d}$, $i_k \in [n_k]$, $(e_{k,i_k})_{i_k \in [n_k]}$ étant la base canonique de \mathbf{R}^{n_k} , et $C = (c_{i_1, \dots, i_d})_{i_k \in [n_k]}$, on pose $\text{Det } C = \pm \Delta_A(f_C)$, f_C étant la forme multilinéaire associée à C . On montre (cf [G-K-Z 5]) que $\Delta_A(f_C) \neq \pm 1$ si et seulement si $n_k \leq \sum_{j \neq k} n_j - d$, pour tout k .

4. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE E_A

4.1. Rappels sur \det et Div [Kn-M]

Dans cette section on rappelle brièvement des constructions développées dans l'article [Kn-M], dans un cadre moins général que celui de l'article, mais plus que suffisant pour le présent exposé.

DÉFINITION 4.1.1.— *Un complexe parfait sur un schéma X est un complexe de \mathcal{O}_X -modules qui est, localement sur X , quasi-isomorphe à un complexe borné de \mathcal{O}_X -modules libres de type fini. On note Parf_X la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée de la catégorie des \mathcal{O}_X -modules dont les objets sont les complexes parfaits.*

D'après Grothendieck, Ferrand et Knudsen-Mumford [Kn-M], il existe un foncteur "déterminant" naturel qui à un objet \mathcal{F}^\cdot de Parf_X associe un \mathcal{O}_X -module libre de rang 1 noté $\det(\mathcal{F}^\cdot)$.

On suppose dans ce qui suit que X est irréductible et régulier.

Soit $\lambda : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ un morphisme de complexes bornés de \mathcal{O}_X -modules libres de type fini. On suppose que λ est un quasi-isomorphisme au point générique de X et on note $U(\lambda)$ l'ouvert sur lequel λ est un quasi-isomorphisme. En choisissant des bases des \mathcal{E}_i^j on obtient des isomorphismes

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \det(\mathcal{E}_1) \quad \text{et} \quad \det(\mathcal{E}_2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X.$$

En composant avec $\det(\lambda) : \det(\mathcal{E}_1) \rightarrow \det(\mathcal{E}_2)$ on obtient un morphisme $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ qui est un isomorphisme sur $U(\lambda)$. Il détermine donc une section s de $\Gamma(U(\lambda), \mathcal{O}_X^*)$ et $s = 0$ définit un diviseur de Cartier sur X , noté $\text{Div}(\lambda)$, indépendant des choix.

Cette construction s'étend aux morphismes $\lambda : \mathcal{F}^\cdot \rightarrow \mathcal{G}^\cdot$ dans Parf_X qui sont des quasi-isomorphismes au point générique de X . En particulier si $\mathcal{F}^\cdot \in \text{Parf}_X$ est exact au point générique de X , en appliquant ce qui précède à l'application nulle $0 \rightarrow \mathcal{F}^\cdot$, on obtient un diviseur $\text{Div} \mathcal{F}^\cdot = \text{Div}(0 \rightarrow \mathcal{F}^\cdot)$. Les propriétés de Div sont détaillées dans [Kn-M]. Une des plus importantes est la suivante :

PROPOSITION 4.1.2 [Kn-M].—

Soit \mathcal{F}^\cdot un complexe parfait de \mathcal{O}_X -modules, exact au point générique de X . Pour tout diviseur irréductible D dans X notons $\mathcal{O}_{X,D}$ l'anneau localisé de X en D et $i_D : \text{Spec } \mathcal{O}_{X,D} \rightarrow X$. L'anneau $\mathcal{O}_{X,D}$ est un anneau de valuation discrète de rang 1, et les $i_D^*(H^i(\mathcal{F}^\cdot))$ sont des $\mathcal{O}_{X,D}$ -modules de torsion ; notons $m_D^i(\mathcal{F}^\cdot)$ leur longueur et $m_D(\mathcal{F}^\cdot) = \sum (-1)^i m_D^i(\mathcal{F}^\cdot)$. On a $\text{Div}(\mathcal{F}^\cdot) = \sum m_D(\mathcal{F}^\cdot)D$.

4.2. On assouplit ici les hypothèses (*) de 2.1. On se donne un sous-ensemble fini A de \mathbf{Z}^k , $A = (a_1, \dots, a_n)$. On suppose qu'il existe une forme \mathbf{Q} -linéaire $h : \mathbf{Q}^k \rightarrow \mathbf{Q}$ telle que $A \subset h^{-1}(1)$. On se donne un semi-groupe $S \subset \mathbf{Z}^k$, de type fini contenant l'origine tel que :

- (i) Si $s \in S$ est non nul $h(s) \geq 1$.
- (ii) A est contenu dans $S \cap h^{-1}(1)$ et $\mathbf{R}_+A = \mathbf{R}_+S$.
- (iii) Le réseau $M(S)$ engendré par S est tel que $\mathbf{Z}^k/M(S)$ soit libre.

On notera $S_i = S \cap h^{-1}(i)$ et M le réseau \mathbf{Z}^k . Pour i entier positif et $p \in \mathbf{Z}$ on note

$$\Lambda^i(p) = (\Lambda^{i+k}(\mathbf{C}^k))^{S_{i+k+p}}.$$

Si $a \in A$, on a une différentielle $d_a : \Lambda^i(p) \rightarrow \Lambda^{i+1}(p)$ définie par

$$(d_a \gamma)(u) = a \wedge \gamma(u - a)$$

avec la convention $\gamma(u - a) = 0$ si $u - a \notin S_{i+k+p}$. Si $f = \sum_{j \in [n]} c_j x^{a_j}$ appartient à V , on pose $d_f = \sum_{j \in [n]} c_j d_{a_j}$. Pour chaque p , on a ainsi un complexe borné de \mathcal{O}_V -modules libres de type fini $\Lambda^\cdot(p)_V$ sur V . En fait, comme on a une structure entière sur $\Lambda^i(p)$ en posant $\Lambda^i(p)_{\mathbf{Z}} = (\Lambda^{i+k}(M))^{S_{i+k+p}}$, on définit de même un complexe borné de $\mathcal{O}_{V_{\mathbf{Z}}}$ -modules libres de type fini, $\Lambda^\cdot(p)_{V_{\mathbf{Z}}}$ sur $V_{\mathbf{Z}} = \text{Spec } \mathbf{Z}[c_j]$. Ces complexes dépendent de A, S, M , on les notera $\Lambda^\cdot(p)(A, S, M)_{V_{\mathbf{Z}}}, \dots$, si besoin est.

4.3 Dans cette section on interprète géométriquement E_A comme l'équation d'un Div associé à $\Lambda^\cdot(p)$:

THÉORÈME 4.3.1 [G-K-Z 2].—

Supposons que A vérifie les conditions (*). Alors, pour p grand, $\Lambda^i(p)(A, S(A), M)_{V_Z}$ est exact au point générique de V_Z , et $\text{Div}(\Lambda^i(p)(A, S(A), M)_{V_Z})$ est le diviseur d'équation $E_A = 0$.

Démonstration :

1) On montre que pour p grand, $\Lambda^i(p)(A, S(A), M)_V$ est exact au point générique de V et que son Div a pour équation $E_A = 0$. (Cette partie de la démonstration est valide même si A ne vérifie pas (*), en remplaçant M par le réseau engendré $M(A)$.) On peut voir $\Lambda^i = \bigoplus \Lambda^i(p)$ comme un module sur l'anneau $\mathbf{C}[S(A)]$. Il lui est donc associé un faisceau $\mathcal{F}(\Lambda^i)$ sur $X_A = \text{Spec } \mathbf{C}[S(A)]$. Soit $\pi : X'_A \rightarrow X_A$ la normalisation de X_A ($X'_A = \text{Spec } \mathbf{C}[\mathbf{R}_+ S(A) \cap M]$). Notons Z le fermé $X_A \setminus X_A^0$ (c'est la réunion des $(\mathbf{C}^*)^k$ -orbites de codimension ≥ 1) et $Z' = \pi^{-1}(Z)$. Sur la variété torique normale X'_A on dispose du faisceau des i -formes différentielles (algébriques) à pôles logarithmiques le long de Z' (défini par exemple dans [D]) noté $\Omega^i_{X'_A}(\log Z')$. On pose $\Omega^i_{X_A}(\log Z) = \pi_* \Omega^i_{X'_A}(\log Z')$. D'après la description de $\Omega^i_{X'_A}(\log Z')$ donnée dans [D] on trouve que $\Omega^i_{X_A}(\log Z)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{F}(\Lambda^i)$ sur $X_A \setminus \{0\}$ et que la graduation sur les sections de $\mathcal{F}(\Lambda^i)$ correspond à celle sur $\Omega^i_{X_A}(\log Z)$ provenant de la structure conique de X_A . De plus la différentielle df correspond au produit extérieur par df . Comme on voit directement que si $E_A(f) \neq 0$, $(\Omega^i_{X_A}(\log Z), df \wedge)$ est acyclique sur $X \setminus \{0\}$, on obtient que pour p grand, $\Lambda^i(p)(A, S(A), M)_V$ est exact au point générique de V et que le Div associé est indépendant de p . De plus ceci donne que les composantes irréductibles du Div sont de la forme $\Delta_{A \cap \tau}$ avec τ une face de $Q(A)$. On peut donc écrire pour p grand :

$$\text{Div}(\Lambda^i(p)(A, S(A), M)_V) = \Pi \Delta_{A \cap \tau}^{\mu(\tau)}.$$

Il reste à montrer que $\mu(\tau) = m(\tau, S(A))$. Pour cela on voit $(\Omega^i_X(\log Z), df \wedge)$ comme un complexe de faisceaux sur $V^V \times V$, que l'on note Ω^i . A toute face τ de $Q(A)$ est associée une sous-variété torique $X(\tau)$ dans $X_A \subset V^V$ définie par les équations $y_i = 0$ si $a_i \notin \tau$. On note T^*_τ

son espace conormal contenu dans le cotangent T^*V^\vee (par définition T_τ^* est l'adhérence du conormal aux points lisses de $X(\tau)$). On voit T_τ^* comme contenu dans $V^\vee \times V$ en identifiant $V^\vee \times V$ à T^*V^\vee . Des considérations standard de multiplicités, jointes à la proposition 4.1.2, permettent de montrer que $\mu(\tau)$ est égal à la somme alternée des multiplicités des $H^i(\Omega^\cdot)$ au point générique de T_τ^* . L'étape finale consiste à utiliser les D -modules. Notons D_{V^\vee} l'anneau des opérateurs différentiels algébriques sur V^\vee et F la filtration par l'ordre des opérateurs. On peut munir $\Omega_{X_A}(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{V^\vee}} D_{V^\vee}$ d'une différentielle naturelle d qui prolonge la différentielle extérieure $d : \Omega_{X_A}(\log Z) \rightarrow \Omega_{X_A}^{+1}(\log Z)$. On munit $\Omega_{X_A}(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{V^\vee}} D_{V^\vee}$ de la filtration

$$F_m(\Omega_{X_A}^i(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{V^\vee}} D_{V^\vee}) = \Omega_{X_A}^i(\log Z) \otimes F_{i+m}D_{V^\vee}.$$

La remarque cruciale est que $\text{gr}^F(\Omega_{X_A}(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{V^\vee}} D_{V^\vee})$ s'identifie naturellement au complexe Ω^\cdot . Ceci donne que $\mu(\tau)$ est égale à la multiplicité de T_τ^* dans le cycle caractéristique du complexe de D_{V^\vee} -modules à droite $\Omega_{X_A}(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{V^\vee}} D_{V^\vee}$, que l'on notera M^\cdot . D'autre part le complexe de De Rham analytique $\mathcal{DR}M^\cdot$ s'identifie naturellement au complexe $\Omega_{X_A}(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{X_A}} \mathcal{O}_{X_A}^{an}$ qui est quasi-isomorphe au faisceau pervers $\mathbf{R}_{i_A^\bullet} \underline{\mathbf{C}}_{X_A^0}$. On vérifie que le complexe M^\cdot est à cohomologie holonome régulière. On en déduit que le cycle caractéristique de M^\cdot est égal à celui de $\mathbf{R}_{i_A^\bullet} \underline{\mathbf{C}}_{X_A^0}$. Pour calculer le cycle caractéristique de $\mathbf{R}_{i_A^\bullet} \underline{\mathbf{C}}_{X_A^0}$ on emploie la méthode des cycles évanescents (cf J.-L. Brylinski, Séminaire Bourbaki, exposé n°585, th.4.2.8 ou V. Ginsburg, Invent. math. 84, 327-402 (1986)). La multiplicité $\mu(\tau)$ s'obtient comme suit : on prend $g : V^\vee \rightarrow \mathbf{C}$ linéaire qui s'annule sur $X(\tau)$ (la restriction de g à X_A est de la forme $\sum c_i x^{a_i}$ avec $c_i = 0$ si $a_i \notin \tau$) ; alors $\mu(\tau)$ est égale à la caractéristique d'Euler de la fibre du faisceau des cycles évanescents $\Phi_g(\mathbf{R}_{i_A^\bullet} \underline{\mathbf{C}}_{X_A^0})$ au point général de $X(\tau)$. Le fait que $\mu(\tau) = m(\tau, S(A))$ est alors essentiellement conséquence du théorème de D.Bernstein, Kouchnirenko et Hovansky (cf [K]) exprimant la caractéristique d'Euler d'une hypersurface en position générale dans une variété torique en fonction de volumes de polytopes.

2) Pour passer du résultat sur \mathbf{C} au résultat sur \mathbf{Z} , il reste à montrer que $\text{Div}(\Lambda^{\cdot}(p)(A, S(A), M)_{V_{\mathbf{Z}}})$ n'a pas de composante au-dessus d'une place finie pour $p \gg 0$. Pour cela il suffit de montrer que, avec des notations évidentes, pour tout corps fini F , $\Lambda^{\cdot}(p)(A, S(A), M)_{V_F}$ est acyclique pour $p \gg 0$ au point générique de V_F . La démonstration est la même que celle sur \mathbf{C} donnée au début de 1) (on utilise cependant ici de façon essentielle que A vérifie les conditions (*)). \square

4.4 Nous aurons besoin dans la section 5 des propriétés suivantes de $\text{Div}(\Lambda^{\cdot}(p)(A, S, M)_{V_{\mathbf{Z}}})$ quand on change S ou M .

PROPOSITION 4.4.1.— Pour $p \gg 0$, on a :

- 1) Si $M(S)$ est de rang $r < k$, $\text{Div}(\Lambda^{\cdot}(p)(A, S, M)_{V_{\mathbf{Z}}}) = \emptyset$.
- 2) Si $M(S)$ est de rang k , $\text{Div}(\Lambda^{\cdot}(p)(A, S(A), M)_{V_{\mathbf{Z}}}) = [M : M(A)]^{\text{vol}Q(A)} + \text{Div}(\Lambda^{\cdot}(p)(A, S(A), M(A))_{V_{\mathbf{Z}}})$.
- 3) Si $M(S)$ est de rang k , $\text{Div}(\Lambda^{\cdot}(p)(A, S, M)_{V_{\mathbf{Z}}}) = [M : M(A)]\text{Div}(\Lambda^{\cdot}(p)(A, S(A), M)_{V_{\mathbf{Z}}})$.

Démonstration :

1) Si on filtre $\Lambda^i M$ par $F_m(\Lambda^i M) = \Lambda^{i-m}(M(S)) \wedge \Lambda^m M$ on trouve que

$$\text{gr}_m^F \Lambda^{\cdot}(p)(A, S, M) \simeq \Lambda^{\cdot}(p)(A, S, M(S)) \binom{k-r}{m} [m]$$

où $[m]$ désigne un décalage du complexe de m à droite, et le résultat découle de

$$(1-1)^{k-r} = 0.$$

2) Il suffit de calculer directement l'influence du changement de réseau.

3) est plus délicat (voir [G-K-Z 2] Prop. 2B11). \square

COROLLAIRE 4.4.2.— Si $A = (a_1, \dots, a_k)$ est l'ensemble des sommets d'un simplexe de volume v , et si S engendre M , alors l'équation de $\text{Div}(\Lambda^{\cdot}(p)(A, S, M)_{V_{\mathbf{Z}}})$, pour $p \gg 0$, est $\pm v^v c_1^v \dots c_k^v$.

5 PREMIÈRE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.5.1

Dans cette section on expose la preuve du théorème 2.5.1. donnée dans [G-K-Z 2]. Le point essentiel est la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1.— Soient $T \in \mathcal{T}^0(A)$ et $\psi : A \rightarrow \mathbf{Z}$ appartenant à l'intérieur du cône $\mathcal{C}(A, T)$. Soient $f = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i x^{a_i} \in V$, et $f_t = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i t^{-\psi(a_i)} x^{a_i}$. On note $E_{A, \sigma}$ l'équation, définie au signe près, de $\text{Div}(\Lambda^1(p)(A \cap \sigma, S(A) \cap \mathbf{R}_+ \bar{\sigma}, M)_{V_{\mathbf{Z}}})$ pour $p \gg 0$. Alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_A(f_t)}{\prod_{\sigma \in T} E_A(f_t/A \cap \sigma)} = \pm 1 .$$

Expliquons comment on déduit le théorème de la proposition. D'après le corollaire 4.4.2, on a

$$\begin{aligned} \prod_{\sigma \in T} E_A(f_t/A \cap \sigma) &= \pm \prod_{\sigma \in T} \left[(\text{vol} \bar{\sigma})^{\text{vol} \bar{\sigma}} \left(\prod_{1 \leq i \leq k} c_{\sigma(i)} t^{-\psi(a_i)} \right)^{\text{vol} \bar{\sigma}} \right] \\ &= \pm \prod_{\sigma \in T} (\text{vol} \bar{\sigma})^{\text{vol} \bar{\sigma}} (c(t))^{\phi_T} \end{aligned}$$

avec $c(t) = (c_i t^{-\psi(a_i)})$.

On a donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_A(f_t)}{\prod_{\sigma \in T} (\text{vol} \bar{\sigma})^{\text{vol} \bar{\sigma}} (c(t))^{\phi_T}} = \pm 1 ,$$

quels que soient les c_i et quel que soit ψ appartenant à l'intérieur de $\mathcal{C}(A, T)$. On en déduit que si $U(T) = \{(c_1, \dots, c_n) ; (\log |c_1|, \dots, \log |c_n|) \in \mathcal{C}(A, T)\}$, quand (c_1, \dots, c_n) tend vers l'infini dans le domaine $U(T)$, le quotient $\frac{E_A(f_t)}{\prod_{\sigma \in T} (\text{vol} \bar{\sigma})^{\text{vol} \bar{\sigma}} c^{\phi_T}}$ a pour limite ± 1 . Ceci entraîne directement

que ϕ_T est un sommet de $\text{Nw}(E_A)$, de coefficient $\pm \prod_{\sigma \in T} (\text{vol} \bar{\sigma})^{\text{vol} \bar{\sigma}}$, et que $\mathcal{C}(A, T)$ est contenu dans $C(\text{Nw}(E_A), \phi_T)$. Mais comme la réunion des cônes $\mathcal{C}(A, T)$, $T \in \mathcal{T}^0$, est égale à \mathbf{R}^n , nécessairement $\text{Nw}(E_A) = \text{QQ}(A)$.

Démonstration de la proposition 5.1 : On considère l'anneau des séries de Laurent formelles $\mathbf{Z}((t)) = \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} F^m \mathbf{Z}((t))$ avec $F^m \mathbf{Z}((t))$ l'ensemble des séries $\sum_{i=m}^{+\infty} \alpha_i t^i$, $\alpha_i \in \mathbf{Z}$. On a $\text{gr}_F \mathbf{Z}((t)) = \mathbf{Z}[t, t^{-1}]$. Soit $\Lambda^i(p)(A, S(A), M)((t)) = \Lambda^i(p)(A, S(A), M) \otimes \mathbf{Z}((t))$ muni de la différentielle tordue $\sum_{1 \leq j \leq n} c_j d_{a_j} \otimes t^{-\psi(a_j)}$. Le Div du complexe de faisceau correspondant sur $V_{\mathbf{Z}((t))}$ est égal à $\pm E_A(f_t)$. On note $G_{T,\psi} : \mathbf{R}_+ A \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction homogène de degré 1 qui coïncide avec $g_{T,\psi}$ sur $Q(A)$. On filtre $\Lambda^i(p)(A, S(A), M)((t))$ par

$$F^m = \bigoplus_{u \in S_{i+p}} F^{m-G_{T,\psi}(u)} \mathbf{Z}((t)) \otimes \Lambda^i(\mathbf{Z}^k).$$

Cette filtration est compatible avec la différentielle.

D'après (une variante d') un théorème de Kouchnirenko ([K]), le complexe de $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -modules $\text{gr}_F(\Lambda^i(p)(A, S(A), M)((t)))$ a une résolution dont le d -ième terme est la somme sur tous les simplexes σ de codimension d de T , non contenus dans une face de $Q(A)$ de la même dimension, des $\Lambda^i(p)(A \cap \bar{\sigma}, \mathbf{R}_+ \bar{\sigma} \cap S, M)[t, t^{-1}]$ munis de la différentielle $d_{f_t/A \cap \bar{\sigma}}$. On en déduit, en utilisant 4.4.1. 1) et l'additivité de Div, que le Div associé à $\text{gr}_F(\Lambda^i(p)(A, S(A), M)((t)))$ est égal à $\sum_{\sigma \in T} \text{Div}(\Lambda^i(p)(A \cap \bar{\sigma}, \mathbf{R}_+ \bar{\sigma} \cap S, M))$ pour p grand, les Λ^i étant munis des différentielles $d_{f_t/A \cap \bar{\sigma}}$. Avec un peu de réflexion on en tire l'énoncé de la proposition. \square

6. RELATION AVEC LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

6.1 Il semble que la découverte du polytope $QQ(A)$ et de son lien avec les discriminants trouve son origine dans l'article [G-K-Z 1], où à une triangulation régulière de $Q(A)$ est associée une base de fonctions hypergéométriques, plus précisément une base de l'espace des solutions $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(H_{\gamma,A}^{an}, \mathcal{O}_V)$ pour γ général, $H_{\gamma,A}$ étant le D -module hypergéométrique défini en 6.2.

6.2 Soit A vérifiant les conditions (*). On note $L(A) \subset \mathbf{Z}^n$ le réseau des relations linéaires entières entre les éléments de A . Si $\alpha \in L(A)$ est une relation non triviale, $\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i a_i = 0$, on lui associe l'opérateur différentiel

$$\Gamma_\alpha = \prod_{\alpha_i > 0} \left(\frac{\partial}{\partial c_i} \right)^{\alpha_i} - \prod_{\alpha_i < 0} \left(\frac{\partial}{\partial c_i} \right)^{-\alpha_i}$$

sur V .

Pour $i \in [k]$, on définit

$$Z_i = \sum_{1 \leq j \leq n} a_j^i c_j \frac{\partial}{\partial c_j},$$

a_j^i étant la i -ème coordonnée de a_j .

DÉFINITION 6.2.1. — Pour $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \mathbf{C}^k$, le système hypergéométrique associé à A et à γ est le D -module $H_{\gamma,A} = D_V/I$, où I est l'idéal engendré par les Γ_α , $\alpha \in L(A)$, et les $Z_i - \gamma_i$, $i \in [k]$.

6.3 Au vecteur γ on associe un système local $\mathcal{L}_{-\gamma}$ sur le tore $(\mathbf{C}^*)^k$ de monodromie $-\gamma_i$ autour de $x_i = 0$, pour $i \in [k]$. Un des résultats principaux de l'article [G-K-Z 4] est que pour γ générique, le complexe des solutions holomorphes de $H_{\gamma,A}$, $R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H_{\gamma,A}^{an}, \mathcal{O}_V)$ coïncide avec les solutions usuelles $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H_{\gamma,A}^{an}, \mathcal{O}_V)$ et est égal au transformé de Fourier-Sato de $i_{A!} \mathcal{L}_{-\gamma}$. On en déduit (cf [G-K-Z 4]) que le cycle caractéristique de $H_{\gamma,A}$, pour γ générique, coïncide avec celui calculé en 4.3.

7. DÉGÉNÉRESCENCES TORIQUES ET POLYTOPES DE CHOW

(d'après [K-S-Z])

7.1. Soit H le tore $(\mathbf{C}^*)^n$. On considère une représentation linéaire rationnelle $\rho : H \rightarrow GL(V)$, avec V un espace vectoriel de dimension finie. On suppose que $\rho(H)$ contient les homothéties. Si $v \in V$ est un vecteur non nul, on note \underline{v} son image dans la projectif $\mathbf{P}(V)$, \overline{Hv} l'adhérence de l'orbite de v et $\overline{H\underline{v}}$ l'image de \overline{Hv} dans $\mathbf{P}(v)$. On identifie \mathbf{Z}^n au groupe des caractères de H de telle sorte que $a = (a_1, \dots, a_n)$ corresponde à $(t_1, \dots, t_n) \rightarrow \prod t_i^{a_i}$. L'espace V est somme directe des $V_a = \{v \in V ; \forall t \in H, \rho(t)v = t^a v\}$. Pour $v \in V$, on note $A(v)$ l'ensemble des poids a tels que v ait une composante non nulle sur V_a . Comme $A(v)$ ne dépend que de \underline{v} on peut écrire $A(\underline{v})$.

7.2. Un point \underline{v} de $\mathbf{P}(V)$ est une dégénérescence torique de \underline{v} s'il existe un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{C}^* \rightarrow H$ tel que, avec des abus de notation évidents, $\underline{v} = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t))\underline{v}$. Identifions λ au vecteur $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{Z}^n$, avec $\lambda(t) = (t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_n})$, et notons $\tilde{\lambda} : Q(A(\underline{v})) \rightarrow \mathbf{R}$ la forme linéaire $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_i$. On peut alors décrire les dégénérescences toriques de \underline{v} de la façon suivante. Si σ est une face de $Q(A(\underline{v}))$, on relève \underline{v} en $v = \sum_{a \in A(\underline{v})} v_a$ et on définit \underline{v}_σ comme l'image de $\sum_{a \in A(\underline{v}) \cap \sigma} v_a$ dans $\mathbf{P}(V)$. On a alors $\underline{v}_\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t))\underline{v}$ si et seulement si la forme linéaire $\tilde{\lambda}$ atteint son maximum sur la face σ . De plus l'ensemble des \underline{v}_σ , σ décrivant l'ensemble des faces de $Q(A(\underline{v}))$, est exactement l'ensemble des dégénérescences toriques de \underline{v} . On dit qu'une dégénérescence torique est maximale si elle correspond à un sommet de $Q(A(\underline{v}))$.

Exemple 7.2.1 Le groupe $GL_n(\mathbf{C})$ agit naturellement sur l'espace $V = S^d(\mathbf{C}^n)$ des polynômes homogènes de degré d en n variables. On en déduit une action de $(\mathbf{C}^*)^n$ sur V pour laquelle $Q(A(\underline{f}))$ n'est autre que le polyèdre de Newton de f .

7.3 Soit $G(k, d, n)$ l'ensemble des cycles effectifs (purement) de dimension $k - 1$ et de degré d dans $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{n-1}$. On munit $G(k, d, n)$ d'une structure de variété algébrique projective (variété de Chow). On note $G(n - k, n)$ la grassmannienne des sous espaces linéaires de dimension $n - k - 1$ dans $\mathbf{P}^{n-1} = \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{n-1}$. Si $X \subset \mathbf{P}^{n-1}$ est irréductible de dimension $k - 1$, on note $\mathcal{Z}(X) \subset G(n - k, n)$ la variété des sous espaces linéaires qui intersectent X . C'est une hypersurface irréductible dans $G(n - k, n)$. Considérons le plongement de Plücker $G(n - k, n) \hookrightarrow \mathbf{P}(V)$ avec $V = \Lambda^k((\mathbf{C}^n)^\vee)$, qui à un plan de codimension k associe le produit extérieur de k formes linéaires le définissant. Soit B l'anneau des coordonnées homogènes de $G(n - k, n)$ plongé dans $\mathbf{P}(V)$. L'application $\mathbf{C}[V] \rightarrow B$ est surjective, autrement dit, B est engendrée comme algèbre graduée par les crochets de Plücker $[i_1 i_2 \cdots i_k]$ avec $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$. La forme de Cayley de X est l'équation $R_X \in B$ de $\mathcal{Z}(X)$, définie à une constante non nulle près. Si $X = \Sigma n_i X_i$ est un cycle, les X_i étant irréductibles, on définit R_X par $R_X = \Pi R_{X_i}^{n_i}$.

On va définir maintenant le polytope de Chow de $X \in G(k, d, n)$. De l'action naturelle de $GL_n(\mathbf{C})$ sur \mathbf{P}^{n-1} on déduit une action de $H = (\mathbf{C}^*)^n$ sur $G(k, d, n)$. D'autre part $GL_n(\mathbf{C})$, et donc H , agit également sur B . Le morphisme $X \rightarrow R_X$ étant H -équivariant, on peut définir $A(R_X)$ comme en 7.2. Le polytope de Chow de X est par définition le polytope $\text{Ch}(X) = Q(A(R_X))$.

Exemples 7.3.1.

1) Si X est une hypersurface définie par une équation $f = 0$ de degré minimal, $\text{Ch}(X)$ coïncide (à translation près) avec $\text{Nw}(f)$.

2) Si X est le point de coordonnées homogènes $[x_1, \cdots, x_n]$, $\text{Ch}(X)$ est l'enveloppe convexe des vecteurs de base e_i tels que $x_i \neq 0$.

On déduit directement de 7.2 l'énoncé suivant :

PROPOSITION 7.3.2.— *L'ensemble partiellement ordonné des faces de $\text{Ch}(X)$ est isomorphe à celui des dégénérescences toriques de X dans $G(k, d, n)$.*

7.4 Pour $\sigma = (i_1, \dots, i_\ell)$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n$, on note L_σ le plan engendré par les vecteurs de base e_{i_j} dans \mathbf{C}^n et $\underline{L}_\sigma = \mathbf{P}(L_\sigma)$. On vérifie facilement l'énoncé suivant (cf. [K-S-Z]).

LEMME 7.4.1.— Une sous-variété irréductible $X \subset \mathbf{P}^{n-1}$ vérifie $\dim \text{Ch}(X) = 0$ si et seulement si X est de la forme $X = \underline{L}_\sigma$.

Compte-tenu de 7.3.2 on en déduit directement la proposition suivante.

PROPOSITION 7.4.2.— Soit $X \in G(k, d, n)$. Les sommets du polytope de Chow $\text{Ch}(X)$ sont en bijection avec les dégénérescences toriques de X de la forme $\sum_{|\sigma|=k} m_\sigma \underline{L}_\sigma$. Le sommet de $\text{Ch}(X)$ correspondant à un tel cycle est égal à

$$a = \sum_{|\sigma|=k} m_\sigma \left(\sum_{i \in \sigma} e_i \right).$$

De plus, la composante de R_X associée à a , $R_{X,a}$, est de la forme

$$R_{X,a} = C_{X,a} \prod_{|\sigma|=k} [\sigma]^{m_\sigma},$$

$C_{X,a}$ étant une constante non nulle, et $[\sigma]$ le crochet de Plücker $[i_1 \dots i_k]$, si $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$.

Remarque 7.4.3. On peut voir (cf. [K-S-Z] Th.2.8) que les variétés irréductibles X de dimension $k-1$ avec $\dim \text{Ch}(X) = 1$ sont de la forme suivante : il existe $\sigma = (i_1, \dots, i_{k+1})$, des entiers a_1, \dots, a_{k+1} premiers entre eux dans leur ensemble, vérifiant

$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 0$, tels que X soit une hypersurface dans \underline{L}_σ d'équation

$$\prod_{a_i > 0} X_i^{a_i} - C \prod_{a_i < 0} X_i^{-a_i} = 0$$

avec C une constante non nulle.

7.5. Formes de Chow et résultants

7.5.1. Notons $M_{n,k}$ les matrices complexes (n, k) et $M_{n,k}^0$ celles de rang k . On a une application naturelle $p : \mathbf{P}(M_{n,k}^0) \rightarrow G(n-k, k)$ qui à une matrice associe le sous-espace linéaire défini par les équations associées aux colonnes. Notons (c_{ij}) les coordonnées sur $M_{n,k}^0$. On a alors $p^*[i_1 \cdots i_k] = \det(c_{i_\ell j})$. On note $\tilde{R}_X = p^*R_X$. Les auteurs de [K-S-Z] appellent \tilde{R}_X le X -résultant ; nous l'appellerons forme de Chow. Il est facile de voir que $\tilde{R}_X = 0$ est l'équation de la variété duale de $X \times \mathbf{P}^{k-1}$ (via le plongement de Segre). Dans [K-S-Z] \tilde{R}_X est exprimé comme définissant le Div d'un certain complexe de Koszul. Nous allons faire le lien avec une construction de Knudsen-Mumford [Kn-M].

7.5.2. Si Y est un schéma noethérien régulier, E un \mathcal{O}_Y -module localement libre de rang n , \mathbf{P} le fibré projectif associé, $\pi : \mathbf{P} \rightarrow Y$ la projection, \mathbf{P}^\vee le fibré dual, $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ (resp $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^\vee}(1)$) le fibré tautologique sur \mathbf{P} (resp \mathbf{P}^\vee), $H \subset \mathbf{P} \times_Y \mathbf{P}^\vee$ l'hyperplan universel défini par l'annulation de δ où $\delta \in \Gamma(Y, E \otimes E^\vee) = \Gamma(\mathbf{P} \times_Y \mathbf{P}^\vee, p_1^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) \otimes p_2^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^\vee}(1))$ correspond à $1 \in \Gamma(\mathcal{O}_Y)$ via le morphisme $\mathcal{O}_Y \rightarrow E \otimes E^\vee$. Sur $\mathbf{P} \times_Y \mathbf{P}^\vee$, le complexe $K_{(1)}$:

$$0 \rightarrow p_1^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1) \otimes p_2^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^\vee}(-1) \xrightarrow{\otimes \delta} \mathcal{O}_{\mathbf{P} \times \mathbf{P}^\vee} \rightarrow 0$$

normalisé par $K_{(1)}^0 = \mathcal{O}_{\mathbf{P} \times \mathbf{P}^\vee}$, est une résolution de \mathcal{O}_H .

Sur $\mathbf{P} \times_Y (\mathbf{P}^\vee)^k$ on considère le complexe

$$K_{(k)} = \bigotimes_{i=1}^k p_{1,i}^*(K_{(1)})$$

avec $p_{1,i}$ la i -ème projection sur $\mathbf{P} \times_Y \mathbf{P}^\vee$. Soit X un sous-schéma irréductible de dimension $k-1$ de \mathbf{P} et plat sur Y . Le faisceau d'idéaux définissant X , I_X , est un complexe parfait. On pose $\mathcal{F}(r) = Lp_1^* I_X(r) \otimes^L K_{(k)}$. On voit facilement que pour tout r les $\text{Div}(Rp_{2,*}\mathcal{F}(r))$ sont définis et sont égaux. Ils définissent un diviseur sur $(\mathbf{P}^\vee)^k$ noté Chow

(X). Quand $Y = \text{Spec } \mathbf{C}$, l'image inverse d'une équation de Chow (X) par le morphisme $\mathbf{P}(M_{n,k}^0) \rightarrow (\mathbf{P}^\vee)^k$ coïncide (à constante près) avec \tilde{R}_X . On retrouve ainsi la description donnée dans [K-S-Z] : Notons $\mathbf{C}[X]_r = H^0(X, \mathcal{O}_X(r))$ et posons $K^i(r) = \mathbf{C}[X]_{i+k+r} \otimes \Lambda^{i+k} \mathbf{C}^k$. Etant donnés $\ell_1, \dots, \ell_k \in (\mathbf{C}^n)^\vee = \mathbf{C}[X]_1$, on munit $K^i(r)$ de la différentielle

$$\partial(f \otimes v) = \sum_{j=1}^k \ell_j f \otimes (e_j \wedge v).$$

On associe à ce complexe un complexe de faisceaux sur $\mathbf{P}(M_{n,k}^0)$ (resp. $(\mathbf{P}^\vee)^k$) dont le Div a pour équation \tilde{R}_X (resp. est égal à Chow (X)).

8. IDÉAUX TORIQUES ET ÉVENTAILS DE GRÖBNER (d'après Sturmfels [S])

8.1 Soit A vérifiant les conditions (*) de 2.1. Rappelons que l'on note I_A l'idéal définissant la variété torique X_A dans V^\vee . C'est le noyau de

$$\begin{aligned} \mathbf{C}[y_1, \dots, y_n] &\rightarrow \mathbf{C}[S(A)] \\ y_i &\rightarrow x^{a_i}. \end{aligned}$$

Rappelons également que $L(A)$ désigne le réseau des relations linéaires entières entre les a_i . Il est important d'observer que si α et β appartiennent à \mathbf{N}^n , $y^\alpha - y^\beta \in I_A$ si et seulement si $\alpha - \beta \in L(A)$.

Si $\alpha \in \mathbf{R}^n$ on écrit $\alpha = \alpha_+ - \alpha_-$ avec α_+ et α_- des vecteurs à coefficients positifs et à supports disjoints. Le lemme suivant est classique (cf [S] lemme 2.5)

LEMME 8.1.1.— *L'idéal I_A est engendré par les $y^{\alpha_+} - y^{\alpha_-}$, $\alpha \in L(A)$.*

8.2 A tout vecteur non nul $\psi \in \mathbf{R}^n$ est associé un préordre \leq_ψ sur $\mathbf{C}[y_1, \dots, y_n]$: si $P \in \mathbf{C}[y]$, on note $\tilde{\psi}(P)$ la borne supérieure des produits scalaires $\langle \psi, m \rangle$, m décrivant l'ensemble des exposants des monômes de P . On convient que $P \leq_\psi Q$ si et seulement si $\tilde{\psi}(P) \leq \tilde{\psi}(Q)$. D'autre part si $P \in \mathbf{C}[y]$, $\text{init}_\psi P$ est la somme des monômes de P dont l'exposant m vérifie $\langle \psi, m \rangle = \tilde{\psi}(P)$. On note $I_{A,\psi}$ l'idéal engendré par les $\text{init}_\psi P$, $P \in I_A$. Enfin on note $\mathcal{C}(I_{A,\psi}) = \{\psi' \in \mathbf{R}^n ; I_{A,\psi'} = I_{A,\psi}\}$.

A partir de ces cônes ouverts on obtient un éventail complet, l'éventail de Gröbner, noté $\mathcal{F}(I_A)$. Le résultat suivant, dû à B. Sturmfels, montre que l'éventail $\mathcal{F}(I_A)$ est plus fin que $\mathcal{F}(A)$.

THÉORÈME 8.2.1 [S].— Soit $T \in \mathcal{T}^0(A)$ une triangulation régulière, et I_T l'idéal monomial (de Stanley-Reisner) associé à T : par définition I_T est engendré par les monômes $y_{\tau_1} \cdots y_{\tau_\ell}$ tels que $(\tau_1, \dots, \tau_\ell)$ ne soit pas une face d'un simplexe de T , $\tau_1 < \dots < \tau_\ell$. Alors, pour tout vecteur ψ appartenant à l'intérieur du cône $\mathcal{C}(A, T)$, I_T est égal au radical de l'idéal $I_{A,\psi}$.

Démonstration : Montrons que I_T est contenu dans le radical de $I_{A,\psi}$. Considérons $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_\ell)$ qui n'est pas face d'un simplexe de T . Il existe alors une face d'un simplexe de T , $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ telle que $\overset{\circ}{\sigma} \cap \overset{\circ}{\tau} \neq \emptyset$, où les \circ désignent les intérieurs relatifs. Par conséquent il existe des entiers strictement positifs, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et μ_1, \dots, μ_ℓ , tels que $\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i a_{\sigma_i} = \sum_{1 \leq i \leq \ell} \mu_i a_{\tau_i}$. Le binôme $y_\tau^\mu - y_\sigma^\lambda$ appartient donc à I_A . Comme σ est face d'un simplexe de T , et non τ , on a

$$\sum_{1 \leq i \leq p} \psi_{\sigma_i} \lambda_i \leq \sum_{1 \leq i \leq \ell} \psi_{\tau_i} \mu_i,$$

car ψ appartient à l'intérieur de $\mathcal{C}(A, T)$, et donc $y_\tau^\mu = \text{init}_\psi f$, ce qui prouve que y_τ appartient au radical de $I_{A,\psi}$.

De même, pour tout binôme $y_\tau^\mu - y_\sigma^\lambda$ dans I_A , si $y_\sigma^\lambda <_\psi y_\tau^\mu$, τ ne peut être face d'un simplexe de T . On obtient ainsi, en utilisant le lemme 8.1.1, l'inclusion réciproque. \square

Remarque 8.2.2. En général $\mathcal{F}(I_A)$ est strictement plus fin que $\mathcal{F}(A)$. Ceci est lié à ce que en général les monômes engendrant $I_{A,\psi}$ sont de la forme $y_{\tau_1}^{m_1} \cdots y_{\tau_\ell}^{m_\ell}$ avec des $m_i > 1$.

9. FORMES DE CHOW DES VARIETES TORIQUES

Soit $A \subset \mathbf{Z}^k$ vérifiant les conditions (*) de 2.1. On note X_A la variété torique associée à A dans $V_{\mathbf{Z}}^{\vee} = \text{Spec } \mathbf{C}[y_1, \dots, y_n]$. En remplaçant \mathbf{C} par \mathbf{Z} , on définit X_A sur \mathbf{Z} de la même façon dans $V_{\mathbf{Z}}^{\vee} = \text{Spec } \mathbf{Z}[y_1, \dots, y_n]$. On rappelle que X_A est un cône sur $\mathbf{P}(X_A) \subset \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{n-1}$. On note $Y_A = \mathbf{P}(X_A)$. La forme de Cayley R_{Y_A} et la forme de Chow \tilde{R}_{Y_A} sont maintenant définies au signe près.

Le résultat suivant décrit le polytope de Chow de Y_A :

THÉORÈME 9.1 [K-S-Z].—

- 1) $\text{Ch}(Y_A) = QQ(A)$
- 2) Les dégénérescences toriques maximales (sur \mathbf{C}) de Y_A sont les $\sum_{\sigma \in T} \text{Vol} \bar{\sigma} \underline{L}_{\sigma}$, $T \in \mathcal{T}^0(A)$.
- 3) La composante de R_{Y_A} associée à $T \in \mathcal{T}^0(A)$ est le monôme $\pm \prod_{\sigma \in T} [\sigma]^{\text{vol} \bar{\sigma}}$.

Démonstration : 1) est conséquence directe de 2). Quant à 2) c'est une conséquence directe de 7.4.2 et 8.2.1, compte-tenu du lemme (facile) suivant.

LEMME 9.2.— Soit I un idéal monomial (engendré par des monômes) de $\mathbf{C}[y_1, \dots, y_n]$. Les composantes irréductibles de dimension $p - 1$ de $\text{Spec } \mathbf{C}[y_1, \dots, y_n]/I$ sont les \underline{L}_{σ} avec $|\sigma| = p$. Soit $\tau = \{1, \dots, n\} - \sigma$, et $\gamma : \mathbf{C}[y_1, \dots, y_n] \rightarrow \mathbf{C}[y_i]_{i \in \tau}$ obtenu en envoyant $y_i, i \in \sigma$, sur 1. La multiplicité de \underline{L}_{σ} dans $\text{Spec } \mathbf{C}[y_1, \dots, y_n]/I$ est égale au nombre de monômes en les $y_i, i \in \tau$, qui n'appartiennent pas à $\gamma(I)$.

D'après 2), la composante de R_{Y_A} associée à $T \in \mathcal{T}^0(A)$ est de la forme

$C \prod_{\sigma \in T} [\sigma]^{\text{vol} \bar{\sigma}}$. On obtient $C = \pm 1$ en remarquant que 2) reste valide sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ pour p premier. \square

10. DEUXIEME DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.5.1.

Dans cette section on explique, suivant [K-S-Z], comment retrouver les résultats de la section 2 en utilisant ceux de la section précédente sur la forme de Chow.

En comparant les complexes de Koszul des sections 4 et 7, on trouve que

$$E_A = \pm \tilde{R}_{Y_A} \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)$$

(en fait, on peut retrouver cette relation directement). Maintenant remarquons que la matrice (n, k) des coefficients de $(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k})$ a pour lignes les vecteurs $c_i a_i$. A un crochet de Plücker $[i_1 \cdots i_k]$ dans R_{Y_A} correspond via p^* le mineur $\det (c_{i_l j})$ dans \tilde{R}_{Y_A} et donc le terme $\det (a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) c_{i_1} \cdots c_{i_k}$ dans E_A . Comme $\det (a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ est le volume du simplexe $\bar{\sigma}$, avec $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$, on obtient $(\text{vol} \bar{\sigma}) c_\sigma$. On a ainsi une explication du coefficient $(\text{vol} \bar{\sigma})^{\text{vol} \bar{\sigma}}$ dans E_A : l'exposant intervient comme multiplicité, l'autre volume provenant d'un crochet de Plücker ! On obtient comme ceci le théorème 2.5.1 comme corollaire du théorème 9.1. Avec un peu plus de travail on peut obtenir le théorème 2.5.2 de façon similaire en utilisant la remarque 7.4.3.

RÉFÉRENCES :

- [B-F-S] L. BILLERA, P. FILLIMAN, B. STURMFELS, *Constructions and complexity of secondary polytopes*, Advances in Mathematics **83**, 155-179 (1990).
- [D] V.I. DANILOV, *Geometry of toric varieties*, Russian Math. Surv. **33**, 97-154 (1978).
- [G-K-Z 1] I.M. GELFAND, M.M. KAPRANOV, A.V. ZELEVINSKY, *Hypergeometric functions and toric varieties*, Funktsional. Anal. i Prilozhen **23**, 12-26 (1989) (en russe).
- [G-K-Z 2] I.M. GELFAND, M.M. KAPRANOV, A.V. ZELEVINSKY, *Discriminants of polynomials in several variables and triangulations of Newton polytopes*, Algebra i analiz **2**, 1-62 (1990) (en russe).
- [G-K-Z 3] I.M. GELFAND, M.M. KAPRANOV, A.V. ZELEVINSKY, *Newton polytopes and the classical resultant and discriminant*, Advances in Mathematics, **84**, 237-254 (1990).
- [G-K-Z 4] I.M. GELFAND, M.M. KAPRANOV, A.V. ZELEVINSKY, *Generalized Euler integrals and A-hypergeometric functions*, Advances in Mathematics, **84**, 255-271 (1990).
- [G-K-Z 5] I.M. GELFAND, M.M. KAPRANOV, A.V. ZELEVINSKY, *Projectively dual varieties and hyperdeterminants*, Doklady **305**, 1294-1298 (1989) (en russe).
- [K-S-Z] M.M. KAPRANOV, B. STURMFELS, A.V. ZELEVINSKY, *Chow polytopes and general resultants*. Preprint (1990).
- [Kn-M] F. KNUSDEN, D. MUMFORD, *The projectivity of the moduli space of stable curves I : Preliminaries on "det" and "Div"*, Math. Scand. **39**, 19-55 (1976).
- [K] A.G. KOUSHNIRENKO, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*, Invent. Math. **32**, 1-31 (1976).
- [S] B. STURMFELS, *Gröbner bases of toric varieties*, Tohoku Math. J. (à paraître).

- [V] O. VIRO, *Gluing algebraic surfaces, removing singularities, and constructing curves*, Proc. Leningrad Internat. Topology Conf. Nauka, 149-197 (1983).

Université Paris VI
URA 213 Tour 45-46
4 place Jussieu
75252 Paris cedex 05

Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
URA 169
91128 Palaiseau cedex

Astérisque

OLIVIER MATHIEU

**Bases des représentations des groupes simples complexes
[d'après Kashiwara, Lusztig, Ringel et al.]**

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 743, p. 421-442

http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__421_0

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**BASES DES REPRÉSENTATIONS
DES GROUPES SIMPLES COMPLEXES**
[d'après Kashiwara, Lusztig, Ringel et al.]

par Olivier MATHIEU

0. INTRODUCTION

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple de dimension finie sur \mathbf{C} et soit V un \mathfrak{g} -module simple de dimension finie. Il est naturel de chercher à obtenir une base explicite et canonique de V . Cherchons à poser correctement ce problème. Soit G le groupe des automorphismes de la structure (\mathfrak{g}, V) . La composante connexe G^0 de G est le produit du groupe adjoint Ad de \mathfrak{g} par le groupe \mathbf{C}^* des homothéties de V . Un tel groupe continu ne peut laisser stable une base de V . Il est donc nécessaire d'ajouter des données supplémentaires θ à la structure (\mathfrak{g}, V) pour pouvoir espérer obtenir une base explicite B de V . Une telle base B mérite d'être appelée canonique si, d'une part, la donnée supplémentaire θ est uniquement définie (à un automorphisme près) et si, d'autre part, le sous-groupe Γ de G des automorphismes qui stabilisent θ permute les éléments de B . Ces conditions peuvent s'écrire $G = \Gamma \ltimes G^0$ et $\Gamma.B = B$.

Dans ce Séminaire, nous exposerons principalement les travaux de M. Kashiwara et de G. Lusztig. La donnée supplémentaire θ qui consiste essentiellement en une présentation de \mathfrak{g} et la donnée d'un vecteur de plus haut poids x de V sera décrite dans le premier paragraphe. Puis nous donnerons les trois constructions de la base B :

- 1) la construction élémentaire de Lusztig (voir §3),
- 2) la construction topologique (suivant Lusztig, §5),
- 3) la construction élémentaire de Kashiwara (ou base cristalline, §6).

La construction élémentaire de Lusztig utilise de manière cruciale la S.M.F.

théorie des groupes quantiques (ou plus précisément la théorie des algèbres enveloppantes quantiques de Drinfeld et Jimbo). Elle est basée sur un théorème d'existence et d'unicité dont l'énoncé (mais non la preuve) est élémentaire. Avec la seule connaissance de ce théorème, il est certainement difficile d'imaginer à quoi ressemble cette base. La construction topologique, basée sur la théorie des représentations des carquois (rappelée au §2) est complètement explicite. Cette construction donne également des bases des représentations des groupes quantiques, mais elle n'utilise pas de manière essentielle la théorie quantique. La construction élémentaire de Kashiwara présente des points communs avec celle de Lusztig. Cependant, les preuves de Kashiwara sont tout à fait élémentaires.

Enfin, nous verrons que ces bases ont un bon comportement par produit tensoriel et sont liées à de nouvelles formules de multiplicités (voir §5 et §6). Par ailleurs, ces bases sont intéressantes pour la théorie des représentations des groupes algébriques en caractéristique finie.

Le problème de trouver des bases explicites de représentations des groupes simples est un problème classique qui a donné lieu à de très nombreuses contributions remarquables. Afin de contenir cet exposé dans un format raisonnable, il ne sera possible que de les mentionner très brièvement. Sans que cela soit un catalogue exhaustif, je voudrais mentionner les travaux de Hodge (bases pour $SL(n)$), la théorie monomiale standard de Lakshmibai, Musili et Seshadri [LSM] (bases pour les groupes classiques), les réseaux de Gelfand-Tselin (pour $SL(n)$), les bases combinatoires de Concini et Kazhdan [CK] (pour $SL(n)$), la construction de bonnes bases (Gelfand et Zelevinski pour $SL(n)$ (voir [BZ]), Retah et Zelevinsky pour $Sp(4)$, [M] en général), les constructions de bases pour les algèbres enveloppantes (Beilinson, Ginzburg [Gi], Lusztig, McPherson [BLM], Ringel) et les bases liées à la combinatoire de Kazhdan et Lusztig pour $SL(n)$ (Grojnowsky et Lusztig).

Mentionnons également que les bases canoniques sont définies aussi pour les algèbres de Kač-Moody symétrisables. Rappelons que la recherche de bases explicites pour les représentations des algèbres affines avaient fait l'objet de travaux nombreux liés à la théorie des opérateurs de vertex (travaux de Frenkel, Kač, Kazhdan, Lepowsky, Misra, Primc, Wilson).

1. PRÉSENTATIONS DES ALGÈBRES DE LIE SIMPLES

Soit I un graphe non orienté, c'est-à-dire la donnée d'un ensemble fini I et d'un ensemble A de paires d'éléments de I . Les éléments de I sont appelés les sommets du graphe et les paires de A les arêtes du graphe. Pour simplifier, nous supposons désormais que le graphe I est connexe. Introduisons une algèbre de Lie $g(I)$ engendrée par les éléments e_i, f_i et h_i (où i parcourt I) et définie par les relations suivantes :

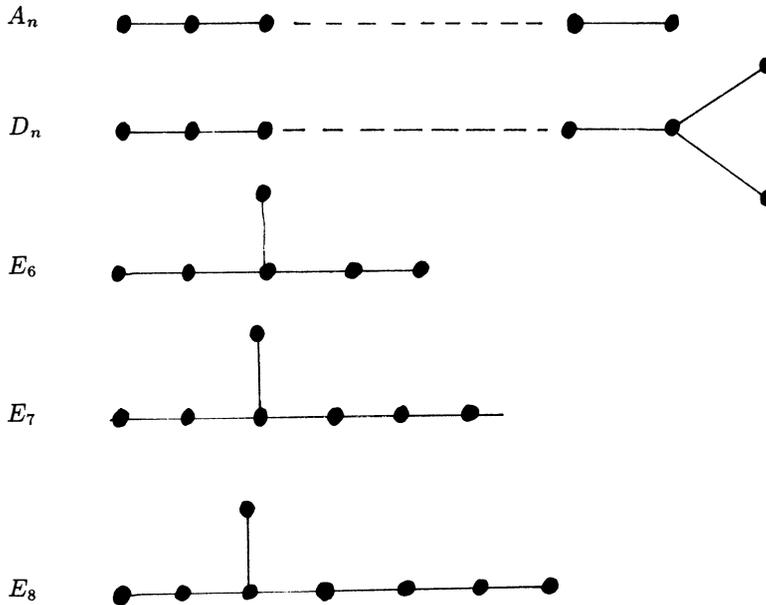
1) $[h_i, h_j] = 0,$

2) $[h_i, e_i] = 2.e_i$ et $[h_i, f_i] = -2.f_i,$

3) lorsque i et j sont distincts et $\{i, j\}$ n'est pas une arête, alors on a $[x, y] = 0$ si $x = e_i, h_i$ ou f_i et $y = e_j, f_j$ ou $h_j,$

4) lorsque i, j sont les deux sommets d'une arête, on a $[h_i, e_j] = -e_j,$
 $[h_i, f_j] = f_j, ad^2(e_i)(e_j) = 0$ et $ad^2(f_i)(f_j) = 0,$ pour tout i, j dans I .

L'algèbre de Lie $g(I)$ est en général de dimension infinie. Elle est de dimension finie si et seulement si le graphe I est de l'un des types suivants :



Ces graphes particuliers sont appelés graphes de Dynkin. Lorsque I est de type A_n , l'algèbre de Lie $g(I)$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(n+1)$. Lorsque I est de type D_n , l'algèbre de Lie $g(I)$ est isomorphe à $\mathfrak{so}(2n)$. Enfin, lorsque I est de type E_n , pour $n = 6, 7$ ou 8 , l'algèbre de Lie $g(I)$ est l'une des algèbres de Lie exceptionnelles de type E . La présentation précédente est appelée présentation de Serre. N'importe quel automorphisme τ du graphe I induit un automorphisme encore noté τ de l'algèbre de Lie $g(I)$. Par cet automorphisme, les éléments e_i, f_i, h_i sont envoyés sur les éléments e_j, f_j, h_j , si $j = \tau(i)$. Il est connu que les algèbres de Lie simples sur \mathbf{C} sont classifiées par les paires (I, τ) , où I est un graphe de Dynkin et où τ est un automorphisme de I ayant au moins un point fixe. La classification associée à la paire (I, τ) l'algèbre de Lie des points fixes de l'automorphisme τ de l'algèbre de Lie $g(I)$.

Pour simplifier, nous ne considérerons ici que le cas non tordu, c'est-à-dire le cas où l'automorphisme τ est l'identité. Cette restriction n'est pas essentielle car les bases canoniques seront invariantes sous τ dès que celui-ci stabilise la représentation donnée.

Par la théorie de Cartan et Weyl, les représentations simples de dimension finie de $g(I)$ sont classifiées par les fonctions de I dans \mathbf{N} . Pour une telle fonction v , il existe une unique représentation simple $V = L(v)$ de dimension finie qui possède un vecteur non nul x tel que $e_i \cdot x = 0$ et $h_i \cdot x = v(i) \cdot x$ pour tout élément i de I . De plus, le vecteur x est unique à un scalaire près. Le vecteur x est appelé vecteur de plus haut poids.

Soit g^+ (respectivement g^0, g^-) la sous-algèbre de Lie de $g(I)$ engendrée par les éléments e_i (respectivement par les éléments h_i, f_i) et soit U^+ (respectivement U^0, U^-) son algèbre enveloppante. Notons U l'algèbre enveloppante de $g(I)$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} g(I) &= g^+ \oplus g^0 \oplus g^- && \text{(décomposition triangulaire de Cartan)} \\ U &= U^+ \otimes U^0 \otimes U^-. \end{aligned}$$

Soit d une application de I dans \mathbf{N} . On dénote par g_d^- le sous-espace de g^- formé des combinaisons linéaires de crochets de f_i où chaque élément f_i apparaît avec la multiplicité $d(i)$ de sorte que l'on a une décomposition

$g^- = \bigoplus g_d^-$. Lorsque l'espace vectoriel g_d^- est non nul, il est de dimension exactement 1, et d est alors appelé une racine négative de $g(I)$. On note Φ^- l'ensemble des racines négatives. De même, on dénote par U_d^- le sous-espace de U^- formé des combinaisons linéaires de produits de f_i où chaque élément f_i apparaît avec la multiplicité $d(i)$, de sorte que l'on a une décomposition $U^- = \bigoplus U_d^-$. Notons Φ^+ l'ensemble des fonctions $d : I \rightarrow \mathbf{Z}$ telles que $-d$ appartient à Φ^- . Alors, on a de même $g^+ = \bigoplus_{d \in \Phi^+} g_d^-$. L'ensemble Φ^+ est appelé ensemble des racines positives et on note Φ l'ensemble de toutes les racines.

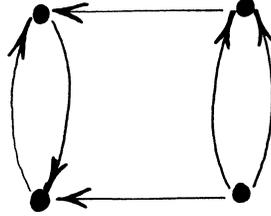
Définissons maintenant une application $\pi_v : U^- \rightarrow L(v)$ par la formule $\pi_v(u) = u.x$. Il résulte du théorème de Poincaré, Birkhoff et Witt que l'application π_v est surjective. La base canonique de $L(v)$ construite par Lusztig provient d'une base de U^- . Plus précisément, Lusztig a construit une base canonique B de U^- qui satisfait à la propriété (*) suivante :

- (*) Posons $B_v = \{u \in B \text{ tel que } \pi_v(u) \neq 0\}$. Alors, pour tout v , $\pi_v(B_v)$ est une base de $L(v)$.

Le travail de Lusztig consiste à décrire une base canonique B de U^- qui satisfait à la propriété (*). Le point essentiel est d'en donner une description explicite.

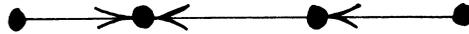
2. CARQUOIS

Un carquois C est la donnée d'un quadruplet (I, F, s, b) où I et F sont des ensembles et s et t sont des applications de F dans I . Les éléments de I sont appelés les sommets du carquois, les éléments de F les flèches et, pour tout $f \in F$, $s(f)$ et $b(f)$ sont appelés la source et le but de la flèche f . Soit k un corps. Une k -représentation E du carquois est la donnée d'une collection de k -espace vectoriel $(E)_i \in I$ et pour chaque flèche f une application linéaire $\theta(f) = E_{s(f)} \rightarrow E_{b(f)}$. Nous supposerons toujours que le carquois C est fini et nous ne considérerons que des représentations de dimension finie. Par définition, la dimension de E est la fonction $d : I \rightarrow \mathbf{N}$ donnée par $d(i) = \dim E_i$.



Un exemple de carquois avec 4 sommets et 6 flèches

Soit (I, A) un graphe. Une orientation du graphe est la donnée de deux applications $s, b : A \rightarrow I$ telles que l'on ait $a = \{s(a), b(a)\}$ pour tout arête a du graphe. Ainsi, un graphe orienté est un cas particulier de carquois.



Un exemple d'orientation du graphe A_4

Soit C un carquois. On définit de manière naturelle la notion de morphisme de représentation. La catégorie $\text{Rep}_k(C)$ des représentations (de dimension finie) du carquois C est une catégorie abélienne. Une représentation E du carquois est dite indécomposable si elle ne peut pas s'écrire comme la somme directe de deux représentations non nulles. Il est connu que toute représentation E est somme directe de représentations indécomposables et une telle décomposition est unique, à isomorphisme près. On dit que le carquois C est de type de représentation finie si C n'admet qu'un nombre fini de représentations indécomposables. Rappelons le théorème de Gabriel.

THÉORÈME 2.1 (Gabriel).— *Le carquois C est de type de représentation finie si et seulement si C est un graphe de Dynkin orienté.*

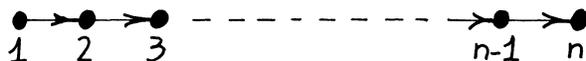
De plus, il est possible de décrire dans ce cas toutes les représentations

indécomposables de C .

THÉORÈME 2.2 (Gabriel).— Soit $C = (A, I)$ un graphe de Dynkin orienté et soit d une fonction de I dans \mathbf{N} . Si d est la dimension d'une représentation indécomposable de C , alors d est une racine négative de $g(I)$. Réciproquement, si d est une racine positive de $g(I)$, alors C admet une unique représentation indécomposable de dimension d .

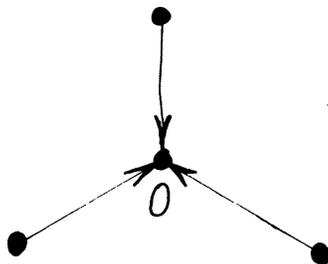
Ainsi, lorsque C est le carquois d'un graphe de Dynkin orienté I , l'application $E \mapsto \dim E$ détermine une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentation indécomposable de C sur l'ensemble des racines positives de $g(I)$.

Exemple 2.3.— Considérons l'orientation suivante du graphe de Dynkin A_n



Les racines négatives de $g(I)$ sont exactement toutes les fonctions non nulles $d : I \rightarrow \mathbf{N}$ dont les valeurs sont 0 ou 1 et dont le support $J = \{i \text{ tel que } d(i) \neq 0\}$ est connexe. Soit d une telle fonction et soit $\{r, r+1, \dots, s\}$ son support. L'unique représentation indécomposable de dimension d est un espace vectoriel $E = \bigoplus E_i$ où les espaces vectoriels E_i sont de dimension 1 si $i \in [r, s]$ et 0 sinon et la donnée d'injections $E_r \rightarrow E_{r+1} \cdots E_r \rightarrow E_{r+1}$.

Exemple 2.4.— Considérons l'orientation suivante du graphe de Dynkin D_4 :



La plus grande racine négative est la fonction d telle que $d(0) = 2$ et que ses autres valeurs sont 1. La représentation indécomposable correspondante est la donnée d'un espace vectoriel E_0 de dimension 2 (correspondant au sommet 0) et de trois droites distinctes de E_0 . C'est l'unique représentation indécomposable de dimension d car il est connu que $GL(2, k)$ agit trois fois transitivement sur la droite projective.

3. LA CONSTRUCTION ÉLÉMENTAIRE DE LUSZTIG

Dans ce paragraphe, nous allons décrire très brièvement la construction élémentaire de Lusztig. Cette section étant indépendante du reste de cet exposé, nous ne rappellerons pas toutes les définitions concernant les groupes quantiques, pour lesquelles nous pouvons renvoyer le lecteur à l'exposé de M. Rosso à ce Séminaire.

Soit I un graphe de Dynkin. On lui associe une matrice de Cartan $A = (A_{i,j})$ par les règles suivantes. Les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ sont égaux à 2. Les coefficients non diagonaux $a_{i,j}$ sont égaux à -1 si i et j sont les sommets d'une même arête et à 0 sinon. L'algèbre enveloppante quantique de Drinfeld et Jimbo est une algèbre associative U sur le corps $\mathbf{Q}(v)$ engendrée par des générateurs E_i, F_i, K_i et K_i^{-1} et complètement définie par les relations suivantes :

$$(1) \quad K_i K_j = K_j K_i \quad \text{et} \quad K_i K_i^{-1} = 1$$

$$(2) \quad K_i E_j = v^{a_{i,j}} E_j K_i \quad \text{et} \quad K_i F_j = v^{-a_{i,j}} F_j K_i$$

$$(3) \quad E_i F_j - F_j E_i = \delta_{i,j}(K_i - K_i^{-1})/(v - v^{-1})$$

$$(4) \quad E_i^2 E_j - (v + v^{-1}) E_i E_j E_i + E_j E_i^2 = 0 \text{ si } a_{i,j} = -1 \text{ et } E_j E_i = E_j E_i \text{ sinon}$$

$$(5) \quad F_i^2 F_j - (v + v^{-1}) F_i F_j F_i + F_j F_i^2 = 0 \text{ si } a_{i,j} = -1 \text{ et } F_j F_i = F_j F_i \text{ sinon.}$$

Soit σ l'involution de la \mathbf{Q} -algèbre \mathbf{U} qui envoie E_i sur E_i , F_i sur F_i , K_i sur K_i^{-1} et v sur v^{-1} . On notera \mathbf{U}^- la $\mathbf{Q}[v, v^{-1}]$ -sous-algèbre de \mathbf{U} engendrée par les éléments $F_i^{(N)}$ où $F_i^{(N)} = F_i^N / [N!]$ et $[N!] = \prod_{N \geq h \geq 1} (v^h - v^{-h}) / (v - v^{-1})$. Puis Lusztig définit certains automorphismes $T(i)$ de \mathbf{U} , pour chaque $i \in I$.

Soit ω le plus grand élément du groupe de Weyl W de l'algèbre de Lie $g(I)$, et soit N la longueur de ω . Choisissons une décomposition réduite r de ω . Cela fournit une suite i_1, \dots, i_N d'éléments de I . Pour une suite c_1, \dots, c_N d'entiers positifs, Lusztig pose

$$F^c = F_{i_1} \cdot T(i_1) F_{i_2} \cdots T(i_1) \cdots T(i_N) F_{i_N}.$$

Les éléments F^c forment une base, dite de Poincaré, Birkhoff et Witt, de la $\mathbf{Q}[v, v^{-1}]$ -algèbre \mathbf{U}^- . Comme cette base dépend du choix d'une décomposition réduite r de ω , cette base sera notée B_r . Soit \mathcal{L}_r le $\mathbf{Q}[v^{-1}]$ -module engendré par B_r .

PROPOSITION 3.1 (Lusztig).— (1) *Le $\mathbf{Q}[v^{-1}]$ -module \mathcal{L}_r , vu comme sous-espace de \mathbf{U}^+ est indépendant d'un choix d'une décomposition réduite. On pourra poser $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}$.*

(2) *Soit $\pi : \mathcal{L} \rightarrow v^{-1}\mathcal{L}$ la projection canonique. Alors $\pi(B_r)$ est une base β de $\mathcal{L}/v^{-1}\mathcal{L}$ indépendante de la décomposition réduite r .*

Bien que l'énoncé du théorème suivant soit élémentaire, la preuve utilise la théorie des carquois.

THÉORÈME 3.2 (Lusztig).— (1) *La restriction de $\pi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}/v^{-1}\mathcal{L}$ induit un isomorphisme $\rho : \mathcal{L} \cap \sigma\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}/v^{-1}\mathcal{L}$.*

(2) *Posons $\mathbf{B} = \rho^{-1}(\beta)$. Alors \mathbf{B} est une base du $\mathbf{Q}[v^{-1}]$ -module \mathcal{L} .*

Formellement, on obtient les relations définissant l'algèbre enveloppante de $g(I)$ en faisant $v = 1$ dans la présentation de l'algèbre enveloppante quantique de Jimbo et Drinfeld. Donc la base globale \mathbf{B} de \mathbf{U}^- définit une base B de U^- .

4. LES BASES DE RINGEL

Soit I un graphe de Dynkin. Choisissons une orientation de I , ce qui permet de lui associer un carquois C (voir §2). Soit k un corps et soit Ω l'ensemble des classes d'isomorphisme de k -représentations de C . Notons $\mathbf{Z}\Phi^-$ le \mathbf{Z} -module libre engendré par Φ^- . Le théorème de Gabriel (voir §2) signifie que l'on a un isomorphisme naturel $\Omega \simeq \mathbf{Z}\Phi^-$. En particulier, Ω est indépendant de k . Notons $\mathbf{C}\Omega$ l'espace vectoriel sur \mathbf{C} avec base Ω . Supposons maintenant que k soit un corps fini avec q éléments, et soit $V, V', V'' \in \Omega$. Notons $g_{V, V' V''}$ le nombre de sous-représentations de V qui sont isomorphes à V'' et dont le quotient correspondant est isomorphe à V' . Ringel [Ri] a défini une structure d'algèbre associative sur $\mathbf{C}\Omega$ en posant :

$$V' \cdot V'' = \sum_V g_{V, V' V''} V.$$

On notera que la somme ci-dessus est en fait finie. En effet, si le coefficient $g_{V, V' V''}$ est non nul, alors $\dim V = \dim V' + \dim V''$, de sorte que, pour V' et V'' donnés, seulement un nombre fini de ces coefficients sont non nuls.

THÉORÈME 4.1 (Ringel).— *Soient $V, V', V'' \in \Omega$. Alors $g_{V, V' V''}$, vue comme une fonction de q , est un polynôme en q à coefficients entiers.*

Ainsi, il est possible de définir une nouvelle structure d'algèbre associative sur $\mathbf{C}\Omega$ en posant :

$$V' \cdot V'' = \sum_V g_{V, V' V''}(1) V.$$

Soit $i \in I$. Notons F_i l'élément de Ω qui correspond à la racine simple d_i définie par $d_i(j) = \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. Un calcul aisé prouve que l'on a :

$$\begin{aligned} [F_i, F_j] &= 0 && \text{si } i, j \text{ ne sont pas les sommets d'une arête de } I, \\ \text{ad}(F_i)^2(F_j) &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

Donc, il existe un unique morphisme d'algèbre $R : U^- \rightarrow \mathbf{C}\Omega$ tel que $R(f_i) = F_i$.

THÉORÈME 4.2 (Ringel).— *Le morphisme R est un isomorphisme.*

Expliquons le principe de la preuve. Soit $d : I \rightarrow \mathbf{N}$ et choisissons un espace vectoriel F muni d'une décomposition $F = \bigoplus F_i$ telle que l'on ait $\dim F_i = d(i)$. Posons $E_d = \bigoplus \text{Hom}(F_i, F_j)$, où la somme porte sur les couples (i, j) qui sont des arêtes orientées de I . Posons $G_d = \prod \text{GL}(F_i)$. L'espace E_d s'identifie à l'espace des représentations du carquois C associé au graphe orienté I et l'ensemble quotient E_d/G_d est l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations de dimension d . Il existe une relation d'ordre partiel sur les représentations de dimension d : si V, V' sont deux telles représentations, on pose $V \leq V'$ si l'orbite sous G_d de V dans E_d est incluse dans l'adhérence de l'orbite de V' . La preuve de la surjectivité de R repose sur une induction sur d et sur l'ordre partiel précédemment défini (voir Lusztig [Lu1], section 5).

Il existe une application naturelle, la symétrisation, $\gamma : U^- \rightarrow Sg^-$ uniquement définie par la condition $\gamma(x^n) = x^n$ (cette application est en fait définie pour n'importe quelle algèbre enveloppante). L'application γ est un isomorphisme d'espace vectoriel. Notons $K(d)$ la fonction partition de Kostant, c'est-à-dire le nombre de manières d'écrire d comme une somme à coefficients entiers positifs de racines négatives. Utilisant la symétrisation γ , on obtient $\dim U_d^- = K(d)$. Notons Ω_d le sous-ensemble de Ω formé des classes de représentations indécomposables. Comme les représentations indécomposables correspondent aux racines négatives (théorème de Gabriel), le nombre d'éléments de Ω_d est également $K(d)$. Ainsi, les espaces $C\Omega_d$ et U_d^- ont même dimension. Donc R est un isomorphisme.

Ainsi, l'isomorphisme de Ringel identifie U^- avec une algèbre $C\Omega$ qui a une base naturelle, à savoir Ω . Cette base n'est pas canonique au sens de Lusztig, car elle dépend du choix d'une orientation du graphe de Dynkin. La construction de Lusztig est une modification de la construction précédente, comme nous allons le voir au paragraphe suivant.

Exemple 4.3.— Calculons la base de Ringel dans le cas où I est de type A_1 (cas où I est réduit à un point). L'algèbre de Lie $g(I)$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2)$ et a pour base les éléments e, f et h (comme il n'y a ici qu'un seul indice, nous l'avons omis des notations). Pour chaque entier d , l'espace

Ω_d est réduit à un élément. Notons $F(d)$ l'élément de U^- correspondant. Notons $g_{d,a,b}(q)$ le nombre de sous-espaces vectoriels de dimension b dans k^d dont le quotient est de dimension a . Ce nombre est toujours nul, sauf lorsque $d = a + b$, relation que nous supposons vérifiée désormais. Alors $g_{d,a,b}(q)$ est le nombre de k -points de la Grassmannienne $G(d, b)$ des espaces vectoriels de dimension b dans k^d . La décomposition de Bruhat est une décomposition de la variété $G(d, b)$ dont les strates sont isomorphes à des espaces vectoriels. On a donc $g_{d,a,b}(q) = \sum a_n q^n$ où a_n est le nombre de strates de dimension n . Comme le nombre de strates de dimension n est indépendant de la caractéristique, on voit dans ce cas que $g_{d,a,b}(q)$ est un polynôme en q . Les formules explicites pour les coefficients a_n sont compliquées, mais il est connu que le nombre total de strates est $d!/a!b!$ (c'est le nombre d'éléments de $S_d/S_a \times S_b$). Donc on a $g_{d,a,b}(1) = d!/a!b!$. De là on déduit que la base de Ringel est formée des éléments $f^n/n!$.

Remarque 4.4.— Ici, nous avons spécialisé les polynômes de Ringel

$g_{V, V', V''}(q)$ à $q = 1$. En fait, le théorème de Ringel est plus précis. Le théorème 4.1 permet de définir une structure d'algèbre sur $\mathbf{C}\Omega \otimes \mathbf{C}[q]$. Ringel a identifié cette algèbre à une sous-algèbre remarquable de l'algèbre enveloppante quantique de Jimbo et Drinfeld.

5. LA CONSTRUCTION TOPOLOGIQUE DE B

Dans ce paragraphe, on reprend les notations du paragraphe précédent. On suppose donné un graphe de Dynkin I muni d'une orientation, et on note C le carquois correspondant. La construction de B dépend du choix d'une orientation, mais non la base elle-même. Ici, le corps de base est \mathbf{C} et non un corps fini k . Soit $d : I \rightarrow \mathbf{N}$, et soit $r \in E_d$. Rappelons que le groupe G_d agit sur E_d . Notons $G_d(r)$ le stabilisateur sous G_d du point r . Il résulte de la simple connexité de I que le groupe $G_d(r)$ est connexe. Soit X la fermeture d'une orbite O de G_d dans E_d . Le complexe de cohomologie d'intersection $IC(X)$ est un faisceau pervers irréductible et G_d -équivariant de E_d . Réciproquement, il résulte de la finitude du nombre

de G_d -orbites dans E_d et de la connexité des stabilisateurs que tout faisceau pervers équivariant sur E_d est la cohomologie d'intersection de la fermeture d'une orbite.

Notons P_d l'ensemble des faisceaux pervers équivariants irréductibles de E_d , et posons $P = \coprod P_d$. Soit CP l'espace vectoriel de base P . Suivant Lusztig, il existe une structure naturelle d'algèbre associative sur CP . Pour définir la multiplication, fixons $d, d', d'' \in \mathbf{N}^I$, et considérons le diagramme suivant :

$$E_{d'} \times E_{d''} \xleftarrow{\beta} E' \xrightarrow{\beta'} E'' \xrightarrow{\beta''} E_d$$

défini comme suit. Rappelons que nous avons choisi une fois pour toutes des espaces vectoriels F, F', F'', I -gradués, de dimension respectivement d, d', d'' . Un point de E_d est par définition une représentation de C sur F . Un point de E'' est la donnée d'une représentation de C sur F et d'une sous-représentation V'' de dimension d'' . Un point de E' est la donnée d'une représentation de C sur F , d'une sous-représentation V'' de dimension d'' et de deux isomorphismes d'espaces vectoriels $\mu'' : V'' \rightarrow F''$ et $\mu' : F/V' \rightarrow F'$. Les applications β, β', β'' sont naturelles. Le groupe $G_d \times G_{d'} \times G_{d''}$ agit naturellement sur les variétés du diagramme précédent et on a :

- (a) l'application β' est un fibré principal de groupe $G_{d'} \times G_{d''}$,
- (b) l'application β est une fibration localement triviale à fibre lisse,
- (c) l'application β'' est propre.

Soit $\mathcal{P}' \in P_{d'}, \mathcal{P}'' \in P_{d''}$. Il provient des assertions (a) et (b) qu'il existe un faisceau pervers \mathcal{Q} de E'' tel que $\beta^* \mathcal{Q} = \beta^*(\mathcal{P}' \otimes \mathcal{P}'')$. Le théorème de Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber implique alors que l'on a

$$\beta_* \mathcal{Q} = \oplus \mathcal{P} \otimes A_{\mathcal{P}},$$

où \mathcal{P} parcourt P_d et où les $A_{\mathcal{P}}$ sont des espaces vectoriels gradués. La multiplication de Lusztig sur CP est alors définie par la formule suivante :

$$\mathcal{P}' \cdot \mathcal{P}'' = \sum \dim(A_{\mathcal{P}}) \mathcal{P}.$$

Pour tout $i \in I$, notons encore F_i l'unique élément de P correspondant à la racine simple d_i .

THÉORÈME 5.1 (Lusztig).— *Il existe un isomorphisme d'algèbres $L : U^- \rightarrow \mathbf{CP}$, qui envoie les générateurs f_i sur F_i .*

Comme l'algèbre \mathbf{CP} a une base naturelle (à savoir P), le théorème précédent fournit une base B de U^- . La preuve du théorème précédent repose sur des arguments similaires à ceux du théorème de Ringel. La preuve du théorème suivant est de nature complètement différente. Elle est fondée sur les résultats de Deligne sur la transformée de Fourier géométrique.

THÉORÈME 5.2 (Lusztig).— *La base B est canonique, i.e. elle ne dépend pas du choix d'une orientation du graphe de Dynkin I .*

La dimension d'un espace vectoriel est un entier positif. Le théorème suivant, qui est un corollaire immédiat de la formule définissant la multiplication dans \mathbf{CP} montre que l'approche topologique est plus précise que l'approche élémentaire :

THÉORÈME 5.3 (Lusztig).— *Le produit $b.b'$ de deux éléments de la base canonique B est une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs d'éléments de B .*

En fait, Lusztig prouve également un résultat analogue pour le coproduit [Lu3]. De plus, les espaces vectoriels $A_{\mathcal{P}}$ dans la formule définissant le produit sont \mathbf{Z} -gradués. Il est donc possible de définir une structure d'algèbre sur $\mathbf{CP} \otimes \mathbf{C}[q, q^{-1}]$. En fait, les résultats de Lusztig sont plus précis, car il identifie cette algèbre sur $\mathbf{C}[q, q^{-1}]$ avec une sous-algèbre remarquable de l'algèbre enveloppante quantique.

Soit $v : I \rightarrow \mathbf{N}$, et soit x un vecteur de plus haut poids de $L(v)$. Soit $\pi_v : U^- \rightarrow L(v)$ l'application définie par la formule $\pi_v(u) = u.x$, pour $u \in U^-$. Il résulte du théorème de Poincaré, Birkhoff et Witt que l'application π_v est surjective. Posons $B_v = \{u \in B \text{ tel que } \pi_v(u) \neq 0\}$, de sorte que $\pi_v(B_v)$ engendre l'espace vectoriel $L(v)$.

THÉORÈME 5.4 (Lusztig).— *Pour tout v , $\pi_v(B_v)$ est une base de $L(v)$.*

Dans la suite de cet exposé, on notera encore B_v la base $\pi_v(B_v)$. Soient V, V' deux $g(I)$ -modules simples de dimension finie. Le produit tensoriel $V \otimes V'$ est semi-simple. Décomposer ce produit tensoriel équivaut donc à

déterminer l'espace $\text{Hom}_{g(I)}(V \otimes V', L(v))$ pour tous les v . Il existe une unique fonction $u : I \rightarrow \mathbf{N}$ et un vecteur non nul y de V tel que $e_i \cdot y = 0$ et $h_i \cdot y = u(h_i) \cdot y$ pour tout $i \in I$ (le vecteur y , qui est un vecteur de plus haut poids, est unique à un scalaire près). De même, il existe une unique fonction $w : I \rightarrow \mathbf{Z}_-$ et un vecteur non nul z de V tel que $f_i \cdot z = 0$ et $h_i \cdot z = w(h_i) \cdot z$ pour tout $i \in I$ (le vecteur z , qui est dit "vecteur de plus bas poids" est unique à un scalaire près). Posons $L(v)[u + w, u]$ le sous-espace de $L(v)$ formé des éléments m de $L(v)$ tels que $h_i \cdot m = (u + w)(h_i) \cdot m$ et $(e_i)^{(u(h_i)+1)} \cdot m = 0$. Le lemme suivant est bien connu :

Lemme 5.5. — *L'application $\text{Hom}_{g(I)}(V \otimes V', L(v)) \rightarrow L(v)[u + w, u]$ qui envoie θ sur $\theta(y \otimes z)$ (évaluation en $y \otimes z$) est un isomorphisme.*

On voit donc l'intérêt de trouver des bases A des modules $L(v)$ telles que, pour tout $u : I \rightarrow \mathbf{N}$ et $w : I \rightarrow \mathbf{Z}_-$, $A \cap L(v)[u + w, u]$ soit une base de $L(v)[u + w, u]$. Par le lemme 5.5, de telles bases fournissent des décompositions des produits tensoriels. Une base A qui vérifie la condition ci-dessus est appelée une bonne base. L'existence des bonnes bases en général est prouvée dans [M], mais avant les travaux de Lusztig la construction explicite de bonnes bases n'était connue que pour SL_n par de Concini et Kazhdan [DK].

THÉORÈME 5.6 (Lusztig). — *La base B_v est bonne.*

Enfin, Lusztig obtient une description combinatoire des ensembles

$A \cap L(v)[u + w, u]$, ce qui lui permet de donner de nouvelles formules combinatoires pour les multiplicités des produits tensoriels et de décrire combinatoirement l'espace des covariants d'un produit tensoriel de trois modules.

6. BASES CRISTAL DE KASHIWARA ET GRAPHES COLORÉS

Soit g une algèbre de Lie simple de dimension finie. Pour la simplicité de l'exposé, nous allons supposer que l'algèbre de Lie est l'une des algèbres $g(I)$ de la section 1. En fait, la théorie de Kashiwara est définie pour toute

algèbre de Lie de Kač-Moody symétrisable, il n'y a pas de différence essentielle entre le cas particulier expliqué ci-dessous et le cas général. Dans [Ka1] [Ka2], Kashiwara donne la construction de bases de représentations simples de dimension finie de $g(I)$. Comme pour construction élémentaire de Lusztig, la construction de Kashiwara est basée de manière cruciale sur l'utilisation des algèbres enveloppantes quantiques de Drinfeld et Jimbo. Lusztig a d'ailleurs montré que les bases de Kashiwara et celles qu'il avait obtenues sont les mêmes [Lu2]. Il faut noter que les constructions et les preuves de Kashiwara sont élémentaires. Nous n'allons pas indiquer cette construction. En revanche, nous allons expliquer comment Kashiwara a utilisé ces bases pour donner une remarquable formule combinatoire pour décomposer les produits tensoriels de représentations (ces formules reposent sur une combinatoire complètement différente de la combinatoire des formules de Lusztig).

Un graphe coloré est la donnée :

- 1) d'un ensemble G , appelé ensemble de sommets,
- 2) d'un ensemble A de paires d'éléments de G . L'ensemble A est appelé ensemble des arêtes du graphe,
- 3) de deux applications, appelées source et but $s, b : A \rightarrow G$, telles que l'on ait $a = \{s(a), b(a)\}$ pour tout $a \in A$,
- 4) d'un ensemble I , dit ensemble de couleurs, et d'une application $c : A \rightarrow I$. Une arête a est dite de couleur i si $c(a) = i$.

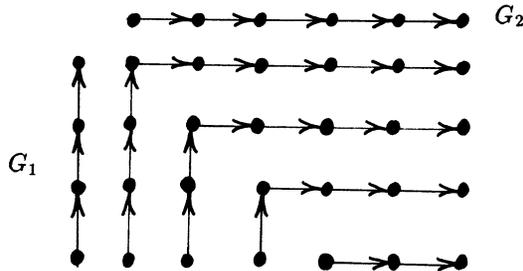
Une ficelle est un graphe non coloré et orienté du type suivant :



(exemple de ficelle de longueur 4, *i.e.* avec 5 points)

Suivant Kashiwara, on peut définir le produit tensoriel de certains graphes colorés de la manière suivante. Tout d'abord, considérons deux ensembles G_1 et G_2 munis d'une structure de graphe non coloré orienté. Supposons que G_1 et G_2 soient des ficelles. Alors, on définit sur le produit

$G_1 \times G_2$ une structure de graphe orienté non coloré. Indiquons la formule générale sur un exemple :



(produit de deux ficelles.

La première ligne représente un graphe à 4 points G_1 .

La première colonne représente un graphe à 6 points G_2)

Soit G un graphe I -coloré. Disons que G est admissible si, pour toute couleur $i \in I$, les graphes orientés obtenus en ne conservant que les arêtes de couleur i sont des unions de ficelles. Soient G_1, G_2 deux graphes colorés admissibles. Alors la formule précédente permet de définir une structure de I -graphe coloré sur le produit $G_1 \times G_2$.

Exemple 6.1.— Dans cet exemple, nous considérons des graphes avec deux couleurs a et b . Nous représenterons les arêtes de couleur a avec des traits pleins et les arêtes de couleur b avec des traits discontinus. Soit G le graphe à trois éléments de type suivant :



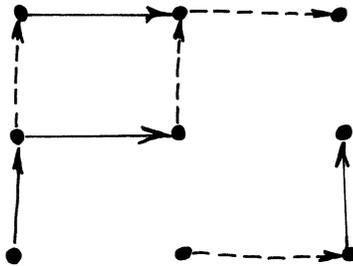
Si l'on ne retient dans G que les arêtes de couleur a , le graphe se décompose en deux ficelles :



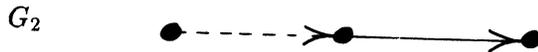
De même, si l'on ne conserve que les arêtes de couleur b , le graphe se décompose en deux ficelles :



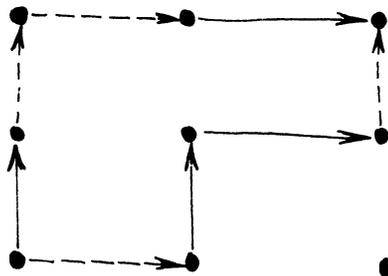
Posons $G_1 = G_2 = G$. Alors le produit $G_1 = G_2$ est le graphe à 9 points suivant :



Exemple 6.2.— Avec les mêmes conventions, le produit des graphes suivants :



est le graphe



Revenons aux représentations. Soit $v : I \rightarrow \mathbf{N}$. Soit $L(v)$ la représentation de $g(I)$ définie au §1, soit x un vecteur de plus haut poids et soit B_v sa base canonique. Kashiwara a défini de manière naturelle une structure de graphe I -coloré sur B_v . Voici une liste de propriétés du graphe de Kashiwara :

(1) Le graphe B_v est connexe.

(2) x est un point source de B_v , *i.e.* x n'est le but d'aucune arête du graphe et de plus x est l'unique point source du graphe.

(3) Le graphe est admissible.

(4) La ficelle de couleur i de source x est de longueur $v(i)$.

En fait, les assertions (1) et (2) précédentes peuvent être exprimées différemment : pour tout élément y de B_v , il existe un chemin orienté allant de x à y . On remarquera que la propriété (4) permet de retrouver v à partir du graphe.

Soit $u, v : I \rightarrow \mathbf{N}$. Rappelons que toute représentation de $g(I)$ de dimension finie est semi-simple, somme directe de certains $L(w)$. En particulier, le produit tensoriel $L(u) \otimes L(v)$ est semi-simple.

THÉORÈME 6.3 (Kashiwara).— *Le graphe produit $B_u \times B_v$ est une union disjointe de graphes B_w . En outre, le nombre de composantes connexes de $B_u \times B_v$ isomorphes à B_w est exactement la multiplicité de $L(w)$ dans $L(u) \otimes L(v)$.*

Le théorème de Kashiwara fournit donc un procédé combinatoire et algorithmique pour calculer les multiplicités des produits tensoriels. En effet, supposons connus les graphes B_u et B_v . Pour obtenir les multiplicités du produit tensoriel $L(u) \otimes L(v)$, il suffit donc de faire les calculs suivants :

(1) calculer le graphe $B_u \times B_v$ à l'aide des formules précédents,

(2) décomposer $B_u \times B_v$ en composantes connexes,

(3) pour chaque composante connexe, chercher l'unique sommet qui est une source (l'unicité de la source est affirmée par le théorème de Kashiwara),

(4) pour chaque sommet source s d'une composante connexe, associer une fonction $w_s : I \rightarrow \mathbf{N}$. La fonction w_s est définie comme suit : $w_s(i)$ est la longueur de la ficelle de couleur i dont la source est s .

Par exemple, soit V la représentation naturelle de $\mathfrak{sl}(3)$. L'exemple 6.1 calcule la décomposition de $V \otimes V$, et l'exemple 6.2 calcule la décomposition de $V \otimes V^*$. Bien entendu, ces deux exemples sont très faciles, mais il est remarquable que la méthode puisse s'appliquer à toutes les algèbres de Lie simples.

La formule de Steinberg [S] qui calcule les multiplicités des produits tensoriels est une formule générale de grande importance théorique. Cependant, cette formule contient à la fois des termes positifs et des termes négatifs. C'est pourquoi de nombreux auteurs ont cherché des formules combinatoires pour calculer les décompositions des produits tensoriels. Ici "formule combinatoire" signifie une formule qui décrit les multiplicités comme le nombre d'éléments d'un certain ensemble, mais non comme la différence du cardinal de deux ensembles. Par exemple, pour le groupe $SL(n)$, la formule de Littlewood et Richardson exprime ces multiplicités en termes de tableaux de Young. Littleman [L] a récemment généralisé cette construction pour tous les groupes classiques. Il est donc remarquable que la formule de Kashiwara soit valable pour toutes les algèbres de Lie semi-simples (y compris les algèbres de Lie exceptionnelles et en fait pour toutes les algèbres de Kač-Moody symétrisables).

(Ajout septembre 1991) Dans des travaux en préparation, six auteurs (Kashiwara, Kang, Misra, Miwa, Nakashima, Nakayashiki) décrivent combinatoirement les bases crystal des représentations des algèbres affines à l'aide de "chemin de diagrammes" [KMN1], [KMN2].

BIBLIOGRAPHIE

- [BLM] A. BEILINSON, G. LUSZTIG et R. McPHERSON - *A geometric setting for quantum groups*, Duke Math. J. **61** (1990), 655-
 [BZ] A. BERENSTEIN et A. ZELEVINSKY - *Tensor product multiplicities and convex polytopes in partition space*, preprint (1989).

- [DJM] E. DATE, M. JIMBO et T. MIWA - *Representation of $U_q \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ at $q = 0$ and the Robinson-Shensted correspondence* Phys. and Math. of strings (vol. à la mémoire de V. Kniznik) W. Sc., Singapour (1990), 185-211.
- [DK] C. DE CONCINI et D. KAZHDAN - *Special bases for S_n and GL_n* , Isr. J. Math. **40** (1981), 416-432.
- [Dr] V. DRINFELD - *Hopf algebras and the Yang-Baxter equations*, Soviet Math. Dokl. **32** (1985), 254-258.
- [Gi] V. GINZBURG - *Lagrangian constructions of the enveloping algebra of $U(\mathfrak{sl}_n)$* , preprint (1990).
- [Ji] M. JIMBO - *A q -difference of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63-69.
- [Ka1] M. KASHIWARA - *Crystallizing the q -analog of universal enveloping algebras*, Comm. Math. Phys. **133** (1990), 249-260.
- [Ka2] M. KASHIWARA - *On crystal bases of the Q -analog of universal enveloping algebras*, preprint (1990).
- [Ka3] M. KASHIWARA - *Crystallizing the q -analogue of universal enveloping algebras*, Proceedings ICM 90 (Kyoto).
- [KN] M. KASHIWARA et T. NAKASHIMA - *Crystal graphs of the q -analog of classical Lie algebras*, RIMS preprint.
- [KMN1] M. KASHIWARA, S. KANG, K. MISRA, T. MIWA, T. NAKASHIMA et S. NAKAYASHIKI - *Affine crystal and vertex models* (en préparation).
- [KMN2] M. KASHIWARA, S. KANG, K. MISRA, T. MIWA, T. NAKASHIMA et S. NAKAYASHIKI - *Perfect crystals of quantized enveloping algebras* (en préparation).
- [LMS] V. LAKSHMIBAI, C. MUSILI et C. SESHADRI - *Geometry of G/P IV*, Proc. Ind. Acad. Sc. **99** (1979), 279-362.
- [L] V. LAKSHMIBAI - *Standard monomial theory for SL_n* , preprint (1991).
- [LS] V. LAKSHMIBAI et C. SESHADRI - *Geometry of G/P V*, J. of Algebra **100** (1986), 462-557.
- [Li] P. LITTLEMAN - *A generalization of the Littlewood-Richardson rule*, preprint (1987).

- [Lu1] G. LUSZTIG - *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras I*, Journal of A.M.S. **3** (1990), 447-498.
- [Lu2] G. LUSZTIG - *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras II*, preprint (1990).
- [Lu3] G. LUSZTIG - *Quivers, perverse sheaves and quantized enveloping algebras*, preprint.
- [Lu4] G. LUSZTIG - *Quivers, perverse sheaves and quantized enveloping algebras*, preprint.
- [Ma] O. MATHIEU - *Good bases for G -modules*, Geometria Dedicata (Tits volume) **36** (1990), 51-66.
- [MM] K. MISRA et T. MIWA - *Crystal basis for the basic representation of $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$* , preprint.
- [N] T. NAKASHIMA - *A basis of symmetric tensor representations for the quantum analogue of the Lie algebras A_n, B_n, C_n, D_n* , Publ. RIMS, Kyoto Univ. **26** (1990), 723-733.
- [Ri] C. RINGEL - *Hall algebras and quantum groups*, Inv. Math. **101** (1990), 583-592.
- [St] R. STEINBERG - *A general Clebsch-Gordan theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 406-407.

Olivier MATHIEU

D.M.I. - E.N.S.

45 rue d'Ulm

F-75230 PARIS CEDEX 05

et

RUTGERS UNIVERSITY

Hill Center

NEW BRUNSWICK NJ 08903

USA

Astérisque

MARC ROSSO

Représentations des groupes quantiques

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 744, p. 443-483

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__443_0>

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES QUANTIQUES

par Marc ROSSO

1. INTRODUCTION

1.1. L'équation de Yang-Baxter est une équation portant sur des fonctions $R(\lambda, \mu)$ de variables complexes à valeurs dans les endomorphismes du produit tensoriel d'un espace vectoriel de dimension finie V par lui-même. Elle a été introduite par Yang [Yg] comme condition de factorisation de la matrice S de dispersion dans le contexte du problème quantique à n corps en dimension 1, et par Baxter [Ba1, Ba2] pour obtenir une formule explicite pour la fonction de partition de certains modèles exactement résolubles en Mécanique Statistique (méthode de la matrice de transfert). Elle joue aussi un rôle important dans les travaux sur le "scattering inverse" en théorie des systèmes complètement intégrables quantiques, principalement dûs à Faddeev et à son école de Léningrad [Fa].

Cette équation s'écrit, pour $R(\lambda, \mu)$ à valeurs dans $\text{End}(V \otimes V)$:

$$(1) \quad [R(\lambda, \mu) \otimes 1] [1 \otimes R(\lambda, \nu)] [R(\mu, \nu) \otimes 1] = \\ [1 \otimes R(\mu, \nu)] [R(\lambda, \nu) \otimes 1] [1 \otimes R(\lambda, \mu)]$$

égalité dans $\text{End}(V \otimes V \otimes V)$.

Soit $P : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ l'opérateur de symétrie : $P(x \otimes y) = y \otimes x$ pour $x, y \in V$. On réserve souvent le nom d'équation de Yang-Baxter à l'équation satisfaite par $P.R(\lambda, \mu)$. La convention ici adoptée tient à ce que les solutions de (1) qui sont constantes en (λ, μ) donnent directement des S.M.F.

représentations du groupe de tresses dans les puissances tensorielles de V , et qu'elle permet une interprétation en termes d'opérateurs d'entrelacement.

On appellera R -matrice toute solution de (1). λ, μ sont appelées paramètres spectraux.

Il y a au moins deux façons de voir comment certaines algèbres de Hopf et leurs représentations jouent un rôle dans la recherche de solutions de l'équation de Yang-Baxter.

1.2. Le schéma suivant a été proposé par Jimbo [J1] et a été utilisé par Chari-Pressley [C-P1, C-P2], Date-Jimbo-Miki-Miwa [DJMM] entre autres.

Considérons une algèbre de Hopf U et supposons que l'on ait une famille de représentations $(V, \pi_\xi)_{\xi \in S}$, indexée par une partie S de \mathbb{C}^n et satisfaisant aux propriétés suivantes :

- (i) *Pour (ξ, λ, μ) générique, $(V \otimes V \otimes V, \pi_\xi \otimes \pi_\lambda \otimes \pi_\mu)$ est indécomposable.*
- (ii) *Pour $\xi, \mu \in S$, il existe un opérateur d'entrelacement*

$$R(\xi, \mu) : V \otimes V \rightarrow V \otimes V \quad \text{entre } \pi_\xi \otimes \pi_\mu \quad \text{et} \quad \pi_\mu \otimes \pi_\xi.$$

- (iii) $R(\xi, \xi) = \text{id} \quad \forall \xi \in S.$

Alors, $R(\xi, \mu)$ satisfait à l'équation de Yang-Baxter.

1.3. Un autre point de vue est celui de la " R -matrice universelle", qui s'inscrit dans le cadre des algèbres de Hopf quasitriangulaires introduites par Drinfeld [D2] comme suit :

DÉFINITION 1.3.— *La donnée d'une algèbre de Hopf quasitriangulaire est celle d'un couple (A, R) constitué d'une algèbre de Hopf A et d'un élément inversible R de $A \otimes A$, soumis aux conditions suivantes :*

- (i) $R\Delta(x)R^{-1} = \Delta'(x) \quad \forall x \in A$

où Δ désigne le coproduit de A et Δ' le coproduit opposé.

- (ii) $(\Delta \otimes \text{id})(R) = R_{13} R_{23}$

$$(\text{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13} R_{12}$$

où, si $R = \sum a_i \otimes b_i$, on pose $R_{13} = \sum a_i \otimes 1 \otimes b_i$, $R_{23} = \sum 1 \otimes a_i \otimes b_i, \dots$

Alors, si $(V, \rho_\lambda)_{\lambda \in S}$ est une famille de représentations de A dans le même espace vectoriel de dimension finie V , $R(\lambda, \mu) = P(\rho_\lambda \otimes \rho_\mu)(R)$ satisfait à l'équation de Yang-Baxter.

De façon très générale, on pourrait définir, avec Drinfeld [D2], la catégorie des groupes quantiques comme la catégorie duale de la catégorie des algèbres de Hopf avec unité, coïunité et antipode inversible.

On s'intéresse en fait à certaines classes d'exemples qui, par l'un ou l'autre point de vue, sont reliés à l'équation de Yang-Baxter.

1.4. Kulish-Reshetikhin [Ku-R] et Sklyanin [Sk], pour le cas $Sl(2)$, puis indépendamment Drinfeld et Jimbo [D1, J2, J3] pour le cas général, ont introduit des déformations des algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie simples, ou d'algèbres de Kač-Moody symétrisables, qui sont des algèbres de Hopf quasitriangulaires.

Elles sont reliées aux solutions dites trigonométriques de l'équation de Yang-Baxter (*i.e.* $R(\lambda, \mu)$ est une fonction rationnelle de λ/μ).

Une autre classe très importante est celle des Yangiens, introduite par Drinfeld et étudiée, entre autres, par Cherednik [Ch1, Ch2], Drinfeld [D3, D4], Kirillov-Reshetikhin [K-R1], Olshanskii [O], Chari-Pressley [C-P2, C-P3].

Elles sont reliées aux solutions rationnelles de l'équation de Yang-Baxter (*i.e.* qui dépendent rationnellement de $\lambda - \mu$).

1.5. Woronowicz a proposé une autre approche à la théorie des groupes quantiques, complètement indépendante des motivations données ici, dans un cadre de C^* -algèbres [W1] [W2] [W3].

Il s'agit ici de déformer l'algèbre des fonctions sur un groupe de Lie.

Certaines complétions des duaux restreints des algèbres enveloppantes quantifiées ci-dessus fournissent de tels exemples.

Ce point de vue sera (brièvement) évoqué au numéro 5.

1.6. Faddeev, Reshetikhin et Takhtajan, s'inspirant des formules de la méthode du "scattering inverse" ont adopté une autre formulation, où l'on construit l'algèbre de Hopf et sa duale à partir de la donnée de la R -matrice [F-R-T].

1.7. Manin a proposé un point de vue en termes d'algèbres quadratiques, où le groupe quantique apparaît comme le "groupe d'automorphismes" d'un espace quantique [Ma].

1.8. Cet exposé sera essentiellement consacré aux représentations des algèbres enveloppantes quantifiées de Drinfeld et Jimbo.

Dans le point de vue de Drinfeld, l'anneau de base est l'algèbre des séries formelles $\mathbf{C}[[\hbar]]$ (ce qui permet d'exprimer la R -matrice universelle), et dans celui de Jimbo, on considère une algèbre de Hopf sur $\mathbf{C}(q)$, ou sur \mathbf{C} et dépendant d'un nombre complexe non nul q .

Lusztig a montré que l'on peut aussi définir cette déformation sur $\mathbf{Z}[q, q^{-1}]$ (en construisant un analogue de la \mathbf{Z} -forme de Kostant). Lorsqu'on spécialise q en une racine de l'unité, on obtient une modification de la définition de Jimbo. Ceci a permis à Lusztig de mettre en évidence une analogie entre la théorie des représentations modulaires d'un groupe semi-simple sur un corps algébriquement clos de caractéristique p et celle des représentations de dimension finie du groupe quantique correspondant, en une racine p -ième de l'unité. Il conjecture que, dans une large mesure, ces théories sont identiques.

L'étude des représentations aux racines de l'unité dans la définition de Jimbo présente un intérêt en physique. En effet, De Concini et Kač ont montré que, dans ce cas, l'algèbre enveloppante quantifiée a un centre très gros, et que ses représentations irréductibles de dimension maximale sont paramétrées par une variété algébrique affine de dimension égale à la dimension de l'algèbre de Lie associée. En gros, ces paramètres supplémentaires, après imposition de certaines restrictions, sont utilisés comme paramètres spectraux dans le point de vue évoqué en 1.2. (Il faut en fait considérer l'algèbre de Kač-Moody affine associée ; voir, pour plus de précisions, [B-S] [DJMM].)

Ces représentations ont aussi suscité beaucoup d'intérêt en liaison avec les théories des champs conformes rationnelles (interprétation des règles de "fusion" et des représentations de monodromie en termes de représentations de groupes quantiques à une racine de l'unité^(*)). Dans [T-K], [Koh], [D6]

(*) voir, par exemple, [A-G-S], [F-G-P], [M-R], [P-S], ...

est établie l'équivalence entre deux représentations du groupe des tresses : celle donnée par la monodromie des équations de Knizhnik-Zamolochikov et celle donnée par la R -matrice.

2. ALGÈBRES ENVELOPPANTES QUANTIFIÉES : VALEURS GÉNÉRIQUES DU PARAMÈTRE

2.1. Notations

2.1.1. Soit q une indéterminée, $\mathcal{A} = \mathbf{Z}[q, q^{-1}]$.

Pour $n \in \mathbf{Z}$ et $d \in \mathbf{N}$, soit $[n]_d = \frac{q^{dn} - q^{-dn}}{q^d - q^{-d}} \in \mathcal{A}$.

On pose $[n]_d! = [n]_d [n-1]_d \cdots [1]_d$ et $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_d = \frac{[n]_d!}{[n-j]_d! [j]_d!}$ qui est dans \mathcal{A} .

On omettra l'indice d lorsque $d = 1$.

2.1.2. Soit $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice irréductible $n \times n$ à coefficients entiers tels que : $a_{ii} = 2$, $a_{ij} \leq 0$ pour $i \neq j$ et il existe d_1, d_2, \dots, d_n relativement premiers entre eux dans $\{1, 2, 3\}$ tels que la matrice $(d_i a_{ij})$ soit symétrique définie positive.

(a_{ij}) est donc la matrice de Cartan d'une algèbre de Lie simple de dimension finie \mathcal{G} .

On pose : $q_i = q^{d_i}$.

2.1.3. Soit P un groupe abélien libre de base ω_i , $i = 1, \dots, n$. Posons $\rho = \sum_{i=1}^n \omega_i$, $\alpha_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \omega_i$ pour $j = 1, \dots, n$.

Soit $Q = \sum_i \mathbf{Z} \alpha_i$, $Q_+ = \sum_i \mathbf{Z}_+ \alpha_i$. Pour $\beta = \sum k_i \alpha_i$ dans Q , on définit sa hauteur par $ht \beta = \sum_i k_i$.

On introduit un ordre partiel sur P défini par : $\lambda \geq \mu \iff \lambda - \mu \in Q_+$.

On définit un accouplement bilinéaire $P \times Q \rightarrow \mathbf{Z}$ par : $(\omega_i, \alpha_j) = \delta_{ij} d_i$.

Soit r_i l'automorphisme de P défini par $r_i(\omega_j) = \omega_j - \delta_{ij} \alpha_i$ ($i, j = 1, \dots, n$). Alors $r_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij} \alpha_i$.

Soit W le sous-groupe de $GL(P)$ engendré par r_1, \dots, r_n . Alors Q est invariant par W , et l'accouplement ci-dessus aussi.

Posons $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et $R = W(\Pi)$, $R_+ = R \cap Q_+$. R est donc un système de racines correspondant à (a_{ij}) , W son groupe de Weyl.

2.2. Définitions (Drinfeld [D1] [D2], Jimbo [J1] [J2] [J3])

2.2.1. Soit k un corps de caractéristique nulle.

\mathcal{U} est la $k(q)$ -algèbre définie par les générateurs E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} , $1 \leq i \leq n$ et les relations :

$$(2.2.1.1) \quad K_i K_j = K_j K_i \quad ; \quad K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1.$$

$$(2.2.1.2) \quad K_i E_j K_i^{-1} = q_i^{a_{ij}} E_j \quad ; \quad K_i F_j K_i^{-1} = q_i^{-a_{ij}} F_j.$$

$$(2.2.1.3) \quad E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}.$$

$$(2.2.1.4) \quad \sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{d_i} E_i^{1-a_{ij}-s} E_j E_i^s = 0 \quad \text{pour } i \neq j.$$

$$(2.2.1.5) \quad \sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{d_i} F_i^{1-a_{ij}-s} F_j F_i^s = 0 \quad \text{pour } i \neq j.$$

\mathcal{U} est l'algèbre enveloppante quantifiée, ou groupe quantique, associée à la matrice (a_{ij}) .

\mathcal{U} est en fait une algèbre de Hopf, pour le coproduit Δ , la coüinité ε et l'antipode inversible S définis par :

$$\Delta E_i = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i \quad , \quad \Delta F_i = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i \quad , \quad \Delta K_i = K_i \otimes K_i$$

$$\varepsilon(E_i) = 0 \quad , \quad \varepsilon(F_i) = 0 \quad , \quad \varepsilon(K_i) = 1$$

$$S(E_i) = -K_i^{-1} E_i \quad , \quad S(F_i) = -F_i K_i \quad , \quad S(K_i) = K_i^{-1}.$$

On dispose de l'antiautomorphisme de k -algèbre ω et de l'automorphisme de k -algèbre φ définis par :

$$\omega(E_i) = F_i \quad , \quad \omega(F_i) = E_i \quad , \quad \omega(K_i) = K_i^{-1} \quad , \quad \omega(q) = q^{-1}$$

$$\varphi(E_i) = F_i \quad , \quad \varphi(F_i) = E_i \quad , \quad \varphi(K_i) = K_i \quad , \quad \varphi(q) = q^{-1}.$$

Introduisons enfin les analogues des puissances divisées :

$$E_i^{(s)} = \frac{E_i^s}{[s]_{d_i}!} \quad , \quad F_i^{(s)} = \frac{F_i^s}{[s]_{d_i}!}$$

ainsi que $[K_i; n] = \frac{K_i q^n - K_i^{-1} q^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}$

$$\left[\begin{matrix} K_i \\ N \end{matrix} \right] = \prod_{s=1}^N \frac{K_i q_i^{1-s} - K_i^{-1} q_i^{s-1}}{q_i^s - q_i^{-s}}.$$

Noter que $[K_i; 0] = \left[\begin{matrix} K_i \\ 1 \end{matrix} \right]$.

2.2.2. Soit \mathcal{U}^+ la sous-algèbre de \mathcal{U} engendrée par les E_i , \mathcal{U}^- celle engendrée par les F_i et \mathcal{U}^0 celle engendrée par $K_i, K_i^{-1}, 1 \leq i \leq n$.

On a alors (voir [Ro1] et [Ro5]) un $k(q)$ -isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^- \otimes \mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{U}^+.$$

2.2.3. Pour chaque $\varepsilon \in k^*$ tel que $\varepsilon^{2d_i} \neq 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$, on peut considérer la k -algèbre \mathcal{U}_ε définie par les générateurs E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} ($i = 1, \dots, n$), avec les mêmes relations que ci-dessus où l'on a remplacé q par ε .

On peut la voir comme "spécialisation" de la façon suivante : soit \mathcal{U}' la $k[q, q^{-1}]$ -sous-algèbre de \mathcal{U} engendrée par les éléments $E_i, F_i, K_i, K_i^{-1}, [K_i; 0]$. Il est immédiat d'obtenir une présentation par générateurs et relations pour \mathcal{U}' , et de voir que c'est une algèbre de Hopf (voir [DC-K]).

Alors $\mathcal{U}_\varepsilon = \mathcal{U}' / (q - \varepsilon)\mathcal{U}'$.

On définit $\mathcal{U}_\varepsilon^+, \mathcal{U}_\varepsilon^-, \mathcal{U}_\varepsilon^0$ de façon évidente. On a encore une "décomposition triangulaire" comme en 2.2.2.

Cette définition par spécialisation a encore un sens pour $\varepsilon = 1$; les éléments K_i sont centraux et le quotient de \mathcal{U}_1 par l'idéal bilatère engendré par les $K_i - 1$ ($i = 1, \dots, n$) est isomorphe à l'algèbre enveloppante universelle de la k -algèbre de Lie simple associée à la matrice (a_{ij}) .

On déduit de là que \mathcal{U}' et \mathcal{U} n'ont pas de diviseurs de 0 [DC-K1] [J-L1].

2.2.4. Voici enfin la définition de Drinfeld, que nous utiliserons au n° 3. L'anneau de base est l'algèbre des séries formelles $k[[h]]$.

\mathcal{U}_h est la $k[[h]]$ -algèbre engendrée au sens h -adique par E_i, F_i, H_i ($1 \leq i \leq n$) et les relations

$$(2.2.4.1) \quad H_i H_j - H_j H_i = 0 \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$(2.2.4.2) \quad H_i E_j - E_j H_i = a_{ij} E_i \quad , \quad H_i F_j - F_j H_i = -a_{ij} F_j$$

et des relations (2.2.4.3), (2.2.4.4), (2.2.4.5) que l'on déduit respectivement de (2.2.1.3), (2.2.1.4) et (2.2.1.5) en remplaçant K_i par $\exp(-\frac{h}{2} d_i H_i)$ et q par $\exp(-\frac{h}{2})$.

\mathcal{U}_h est une algèbre de Hopf topologique pour un coproduit, ... obtenus à partir de ceux de 2.2.1 par les mêmes substitutions. Le coproduit est à valeurs dans le produit tensoriel complété pour la topologie h -adique.

2.2.5. Pour simplifier l'exposé, on s'est limité au cas des matrices de Cartan non dégénérées. On peut aussi associer un groupe quantique à toute matrice de Cartan généralisée symétrisable et un certain nombre des résultats évoqués ci-dessous (considérant des représentations intégrables) sont encore vrais. Voir [J-L1].

2.3. Modules de Verma et modules irréductibles de dimension finie ([L1], [Ro1])

La décomposition 2.2.2 permet de développer la théorie de façon analogue à la théorie classique.

2.3.1. Soit Q_2^* le groupe des homomorphismes de Q dans $\{\pm 1\}$.

$\delta \in Q_2^*$ et $\lambda \in P$ définissent un homomorphisme d'algèbre $\lambda_\delta : \mathcal{U}^0 \rightarrow k$ par $\lambda_\delta(K_i) = \delta(\alpha_i) \cdot q^{(\lambda, \alpha_i)}$.

On peut donc considérer la représentation de dimension 1 de la sous-algèbre \mathcal{U}^0 de \mathcal{U} où E_i agit par 0 et K_i par $\lambda_\delta(K_i)$, et grâce à 2.2.2 l'induire à \mathcal{U} . On notera $M(\lambda)^\delta$ le module correspondant, appelé *module de Verma de plus haut poids λ et type δ* .

Si M est un \mathcal{U} -module, $\delta \in Q_2^*$ et $\lambda \in P$, on définit le sous-espace de poids $M^{\lambda, \delta} = \{v \in M \mid K_i v = \delta(\alpha_i) q^{(\lambda, \alpha_i)} v \text{ pour } i = 1, \dots, n\}$.

Un vecteur v de M est dit *primitif* s'il est non nul, appartient à un certain sous-espace de poids et est annulé par les E_i .

Un module est dit de plus haut poids s'il est engendré par un vecteur primitif. Un tel module est alors le quotient d'un module de Verma, et est somme directe de ses sous-espaces de poids, qui sont de dimension finie.

$M(\lambda)^\delta$ admet un unique quotient irréductible, noté $L(\lambda)^\delta$.

Quitte à tensoriser par une représentation de dimension 1, on peut supposer que $\delta(\alpha_i) = 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$, ce que l'on fera désormais. On écrira $L(\lambda)$ et $M(\lambda)$ au lieu de $L(\lambda)^1$ et $M(\lambda)^1$.

2.3.2. Le module irréductible $L(\lambda)$ est de dimension finie si et seulement si le poids λ est dominant, i.e. $(\lambda, \alpha_i) \geq 0$ pour tout i .

2.3.3. On a des résultats analogues à 2.3.1 et 2.3.2 pour \mathcal{U}_ε si ε n'est pas racine de l'unité.

2.3.4. Soit M un \mathcal{U} -module de plus haut poids $\lambda \in P$, engendré par v_0 .

On peut définir son caractère, dans l'algèbre de groupe $\mathbf{Z}[P]$, par la formule habituelle : $\text{Ch } M = \sum_{\mu \in P} \dim M^\mu \cdot e^\mu$.

On se propose de déterminer ce caractère, suivant Lusztig [L1, L5]. Soit M' le sous- \mathcal{U}' -module de M engendré par v_0 . On a alors :

i) M' est somme de ses intersections avec les sous-espaces de poids, qui sont des $k[q, q^{-1}]$ -modules libres de rang fini. Soit $M'^\mu = M^\mu \cap M'$.

ii) $k(q) \otimes_{k[q, q^{-1}]} M' \xrightarrow{\sim} M$ et $\dim_{k(q)} M^\mu = \text{rang}_{k[q, q^{-1}]} M'^\mu$.

iii) Pour $\varepsilon \in k^*$, soit $M_\varepsilon = M' \otimes_{k[q, q^{-1}]} (k[q, q^{-1}] / (q - \varepsilon))$. C'est un \mathcal{U}_ε -module, dont on définit le caractère de façon analogue à ci-dessus :

$$\text{si } M_\varepsilon^\mu = \left\{ v \in M_\varepsilon \mid K_i v = \varepsilon^{(\mu, \alpha_i)} v, \quad [K_i, 0] v = \frac{\varepsilon^{(\mu, \alpha_i)} - \varepsilon^{-(\mu, \alpha_i)}}{\varepsilon - \varepsilon^{-1}} v \right\}$$

$$\text{Ch } M_\varepsilon = \sum \dim_k M_\varepsilon^\mu \cdot e^\mu$$

et on obtient $\text{Ch } M_\varepsilon = \text{Ch } M$.

iv) En particulier, pour $\varepsilon = 1$, par extension des scalaires K_i agit par 1 et on obtient un module de plus haut poids sur l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie sur k associée à la matrice (a_{ij}) . Si, de plus, M est de dimension finie, alors ce dernier module est nécessairement irréductible et son caractère est donné par la formule d'H. Weyl.

On en déduit immédiatement que M était lui-même irréductible (puisque $\text{Ch } M = \text{Ch } L(\lambda)$).

Remarque. — Joseph et Letzter obtiennent $\text{Ch } L(\lambda)$ en montrant que, pour tout $i = 1, \dots, n$, $M(s_i \cdot \lambda)$ est un sous-module de $M(\lambda)$ ($s_i \cdot \lambda = s_i(\lambda + \rho) - \rho$) et que $L(\lambda)$ est isomorphe au quotient de $M(\lambda)$ par la somme $\sum M(s_i \cdot \lambda)$ ([J-L1]).

2.3.5. Au vu de la proposition suivante, on déduit de 2.3.4 que tout \mathcal{U} -module de dimension finie sur $k(q)$ est complètement réductible.

PROPOSITION ([Ro3]). — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) *Tout \mathcal{U} -module de dimension finie est complètement réductible.*
- ii) *Tout \mathcal{U} -module de plus haut poids et de dimension finie est irréductible.*

En effet : i) \implies ii) est classique.

Pour ii) \implies i), suivant une idée d'Armand Borel, on se ramène, en raisonnant par l'absurde, au cas d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow L(\lambda) \longrightarrow M \longrightarrow L(\mu) \longrightarrow 0,$$

où M est indécomposable et $\lambda < \mu$. Mais alors M est un module de plus haut poids de dimension finie et 2.3.4 indique qu'il est irréductible. Contradiction.

Remarques. — i) On indiquera plus bas (cf. 2.8.5) une démonstration du fait que dès que ε n'est pas une racine de l'unité, tout \mathcal{U}_ε -module de dimension finie sur k est complètement réductible.

Une preuve cohomologique de ce résultat a été donnée dans [A-P-W1].

Dans [J-L1], Joseph et Letzter ont obtenu un théorème de complète réductibilité pour certaines catégories de modules sur \mathcal{U} où \mathcal{U} est associée

à une matrice de Cartan généralisée symétrisable (et le corps de base est $k(q)$).

ii) Dans son approche sur $\mathbf{C}[[\hbar]]$, Drinfeld a montré dans [D5] qu'il existe un isomorphisme d'algèbres $\varphi : \mathcal{U}_\hbar \rightarrow U\mathcal{G} \otimes \mathbf{C}[[\hbar]]$, qui est l'identité modulo \hbar et dont la restriction au sous-espace \mathcal{H} engendré par H_1, \dots, H_n est l'identité.

De là résulte que la classification des \mathcal{U}_\hbar -modules qui sont des $\mathbf{C}[[\hbar]]$ -modules libres de type fini est la même que celle des $U\mathcal{G}$ -modules de dimension finie sur \mathbf{C} , et on obtient en particulier la formule des caractères pour les \mathcal{U}_\hbar -modules irréductibles.

2.4. Action du groupe de tresses (Voir Lusztig [L4], [L5])

Rappelons que le groupe de Weyl W est engendré par r_1, \dots, r_n , et que les relations suivantes constituent un ensemble complet de relations

$$\begin{aligned} r_i^2 &= 1 \\ r_i r_j r_i \cdots &= r_j r_i r_j \cdots \quad i \neq j \end{aligned}$$

où, dans la dernière équation, il y a 2, 3, 4 ou 6 termes dans chaque membre selon que $a_{ij} a_{ji}$ est égal à 0, 1, 2 ou 3 respectivement.

Le groupe de tresses associé B est défini par des générateurs T_1, \dots, T_n et les relations

$$T_i T_j T_i \cdots = T_j T_i T_j \cdots \quad i \neq j$$

comme ci-dessus, mais on ne suppose plus que T_i^2 vaut 1.

2.4.1. Afin de construire (voir 2.5 ci-dessous) une base à la Poincaré-Birkhoff-Witt pour \mathcal{U} , il est commode d'introduire des analogues des vecteurs de racine dans \mathcal{U}^+ et \mathcal{U}^- .

Dans la situation classique, un revêtement fini de W agit dans l'algèbre de Lie (par des automorphismes élémentaires) et on peut construire les vecteurs de racine en appliquant ces automorphismes aux vecteurs de racine simple.

Lusztig a introduit une représentation de B par automorphismes d'algèbre de \mathcal{U} (mais ne préservant pas la structure de cogèbre, ceci sera important au n° 3), qui permet de suivre la même démarche. Une autre

construction a été donnée dans Kirillov-Reshetikhin [K-R3] et Soibelman-Vaksman [So-V], Soibelman [So2, So3].

La proposition suivante se montre par calculs.

PROPOSITION.— i) *Pour chaque $i = 1, \dots, n$, il y a un unique automorphisme d'algèbre T_i de \mathcal{U} tel que :*

$$T_i E_i = -F_i K_i \quad , \quad T_i E_j = \sum_{s=0}^{-a_{ij}} (-1)^{s-a_{ij}} q_i^{-s} E_i^{(-a_{ij}-s)} E_j E_i^{(s)} \quad i \neq j$$

$$T_i F_i = -K_i^{-1} E_i \quad , \quad T_i F_j = \sum_{s=0}^{-a_{ij}} (-1)^{s-a_{ij}} q_i^s F_i^{(s)} F_j F_i^{(-a_{ij}-s)} \quad i \neq j$$

$$T_i K_j = K_j K_i^{-a_{ij}}.$$

Cet automorphisme satisfait à :

$$T_i \omega = \omega T_i$$

$$T_i^{-1} = \varphi T_i \varphi^{-1}.$$

ii) *Ces automorphismes satisfont aux relations du groupe de tresses B , si bien que si $w \in W$ et $w = r_{i_1} \cdots r_{i_k}$ est une expression réduite de w , alors l'automorphisme $T_w = T_{i_1} \cdots T_{i_k}$ de \mathcal{U} est indépendant du choix de l'expression réduite de w .*

iii) *Supposons $\beta = w \alpha_i \in R_+$, $\alpha_i \in \Pi$. Alors $T_w E_i \in \mathcal{U}^+$.*

2.5. Une base à la Poincaré-Birkhoff-Witt

On suppose ici $k = \mathbf{Q}$. On pose $\mathcal{A} = \mathbf{Z}[q, q^{-1}]$.

Soit $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ la \mathcal{A} -sous-algèbre de \mathcal{U} engendrée par les éléments $E_i^{(N)}$, $F_i^{(N)}$, K_i , K_i^{-1} ($1 \leq i \leq n$, $N \geq 0$). Soit $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^+$ (resp. $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^-$) la \mathcal{A} -sous-algèbre de $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ engendrée par les éléments $E_i^{(N)}$ (resp. $F_i^{(N)}$) pour $N \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, et $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^0$ la \mathcal{A} -sous-algèbre de $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ engendrée par les éléments $\begin{bmatrix} K_i \\ N \end{bmatrix}$, K_i , K_i^{-1} , $i = 1, \dots, n$, $N \geq 0$.

Lusztig a construit une \mathcal{A} -base de $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, qui est un analogue de la \mathbf{Z} -forme de Kostant, de la façon suivante :

Soit w_0 l'élément de plus grande longueur de W , et soit ν cette longueur. Soit \mathcal{X} l'ensemble des expressions réduites de w_0 , i.e. l'ensemble des suites $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_\nu)$ d'entiers compris entre 1 et n telles que $w_0 = r_{i_1} \cdots r_{i_\nu}$.

Une telle suite détermine un ordre total sur R_+ par :

$$\beta_1 = \alpha_{i_1} \quad , \quad \beta_2 = r_{i_1}(\alpha_{i_2}) \quad , \quad \beta_3 = r_{i_1}r_{i_2}(\alpha_{i_3}), \dots, \beta_\nu = r_{i_1} \cdots r_{i_{\nu-1}}(\alpha_{i_\nu}).$$

On introduit alors les *analogues des vecteurs de racine* par :

$$E_{\beta_s} = T_{i_1}T_{i_2} \cdots T_{i_{s-1}}(E_{i_s}) \quad , \quad F_{\beta_s} = \omega(E_{\beta_s}) = T_{i_1} \cdots T_{i_{s-1}}(F_{i_s}).$$

Pour $c = (c_1, \dots, c_\nu)$ dans \mathbf{N}^ν , posons $E_{\beta_s}^{(c_s)} = T_{i_1} \cdots T_{i_{s-1}}(E_{i_s}^{(c_s)})$ et

$$E_{\mathbf{i}}^{(c)} = E_{\beta_1}^{(c_1)} E_{\beta_2}^{(c_2)} \cdots E_{\beta_\nu}^{(c_\nu)} \quad , \quad F_{\mathbf{i}}^{(c)} = \omega(E_{\mathbf{i}}^{(c)}).$$

On a alors :

PROPOSITION (Lusztig [L5], Dyer-Lusztig [D-L]).— i) *Pour chaque \mathbf{i} dans \mathcal{X} , les éléments $E_{\mathbf{i}}^{(c)}$, $c \in \mathbf{N}^\nu$ sont dans $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^+$. Ils forment une \mathcal{A} -base de $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^+$ et une $\mathbf{Q}(q)$ -base de \mathcal{U} .*

ii) *De même, les éléments $F_{\mathbf{i}}^{(c)}$, $c \in \mathbf{N}^\nu$ forment une \mathcal{A} -base de $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^-$ et une $\mathbf{Q}(q)$ -base de \mathcal{U} .*

iii) *Les éléments : $\prod_{i=1}^n K_i^{\delta_i} \begin{bmatrix} K_i \\ n_i \end{bmatrix}$, $n_i \geq 0$, $\delta_i \in \{0, 1\}$ forment une \mathcal{A} -base de $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^0$ et une $\mathbf{Q}(q)$ -base de \mathcal{U}^0 .*

iv) *La multiplication définit un isomorphisme de \mathcal{A} -modules*

$$\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^- \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{U}_{\mathcal{A}}^0 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{U}_{\mathcal{A}}^+ \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{A}}.$$

v) *On a*

$$\mathcal{U}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathbf{Q}(q) \simeq \mathcal{U}.$$

De plus, $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ est une \mathcal{A} -algèbre de Hopf et on a :

$$\Delta(E_i^{(N)}) = \sum_{k=0}^N q_i^{k(N-k)} E_i^{(N-k)} K_i^k \otimes E_i^{(k)}$$

$$\Delta(F_i^{(N)}) = \sum_{k=0}^N q_i^{-k(N-k)} F_i^{(k)} \otimes K_i^{-k} F_i^{(N-k)}.$$

La démonstration de la proposition utilise, pour prouver l'indépendance linéaire sur $\mathbf{Q}(q)$, la spécialisation en $q = 1$ de modules irréductibles de plus haut poids assez grand (cf. 2.3.4).

Remarques.— (i) Lorsqu'on considérera \mathcal{U} ou \mathcal{U}_ε , on préférera parfois considérer les éléments $E_{\beta_s}^{c_s} = T_{i_1} \cdots T_{i_{s-1}}(E_{i_s}^{c_s})$, $E_i^c = E_{\beta_1}^{c_1} \cdots E_{\beta_\nu}^{c_\nu}$ et $F_i^c = \omega(E_i^c)$ au lieu des puissances divisées.

(ii) Si maintenant k est un corps de caractéristique nulle, la proposition fournit des bases de \mathcal{U} sur $k(q)$ et pour chaque $\varepsilon \in k^*$ tel que $\varepsilon^{2d_i} \neq 1$ pour tout i une base de \mathcal{U}_ε sur k . (On utilise, pour \mathcal{U}_ε , les éléments E_i^c et le lemme 2.6 ci-dessous.)

(iii) Les bases ci-dessus dépendent d'une expression réduite de w_0 . Lusztig [L6] et Kashiwara [Ka] ont construit une base "canonique" ou "cristalline" qui ne dépend pas d'un tel choix et qui possède des propriétés très remarquables. Je renvoie pour cela à l'exposé d'Olivier Mathieu à ce même Séminaire.

(iv) Une conséquence immédiate de la proposition est que le caractère d'un module de Verma $M(\lambda)$ sur \mathcal{U} est donné par la même formule que dans le cas classique.

Convention.— On fixera désormais une expression réduite \mathbf{i} de w_0 et on omettra l'indice \mathbf{i} .

2.6. Les analogues des vecteurs de racine E_β satisfont aux relations de quasicommutation suivantes (pour chaque expression réduite \mathbf{i} de w_0) :

Lemme ([L-S1]).— Avec les conventions de 2.5 pour l'ordre total sur R_+ , on a, pour $i < j$:

$$E_{\beta_j} E_{\beta_i} - q^{(\beta_i, \beta_j)} E_{\beta_i} E_{\beta_j} = \sum_{c \in \mathbf{N}^\nu} a_c E^c$$

où a_c est dans $k[q, q^{-1}]$, et $a_c = 0$ à moins que $c_p = 0$ pour $p \leq i$ ou $p \geq j$.

De Concini et Kač [DC-K] introduisent alors une filtration sur \mathcal{U} (respectivement sur \mathcal{U}_ε) telle que l'algèbre graduée associée soit une algèbre de quasi-polynômes (c'est-à-dire une algèbre définie par des générateurs

x_1, \dots, x_n et des relations $x_i x_j = \lambda_{ij} x_j x_i$ pour λ_{ij} non nul dans le corps de base respectif).

De ceci, ils déduisent que \mathcal{U} et \mathcal{U}_ε sont des algèbres sans diviseurs de zéros et intégralement closes au sens suivant (voir [DC-K-P], Remarque c), 6.4).

DÉFINITION ([DC-K]).— Soit A une algèbre sans diviseurs de zéros, Z son centre, $Q(Z)$ le corps des fractions de Z . Posons $Q(A) = Q(Z) \otimes_Z A$. On dit que A est intégralement close si pour tout sous-anneau B de $Q(A)$ tel que $A \subset B \subset z^{-1}A$ pour un certain z non nul dans Z , on a $B = A$.

Remarque.— Si A est commutative, ceci implique la définition usuelle.

2.7. On peut, en utilisant l'antihomomorphisme ω , introduire comme dans le cas classique, sur chaque module de Verma $M(\lambda)$ (on prend $\delta = 1$ pour simplifier les notations), une forme hermitienne contravariante au sens suivant.

Désignons par $-$ l'involution k -linéaire de $k(q)$ qui envoie q sur q^{-1} .

Une forme k -bilineaire H sur un $k(q)$ -espace vectoriel V est dite hermitienne si $H(av, w) = \bar{a}H(v, w)$, $H(v, aw) = aH(v, w)$, $H(v, w) = \overline{H(w, v)}$ pour $a \in k(q)$, v et w dans V .

Soit v_λ un vecteur de plus haut poids de $M(\lambda)$. Il y a sur $M(\lambda)$ une unique forme hermitienne H telle que :

$$H(v_\lambda, v_\lambda) = 1, \quad H(Xv, w) = H(v, \omega(X)w) \text{ pour } X \text{ dans } \mathcal{U}, v, w \text{ dans } M(\lambda).$$

Alors, comme d'habitude, des sous-espaces de poids distincts sont orthogonaux, le noyau de H est l'unique sous-module maximal propre et on va s'intéresser à la restriction H_η de H au sous-espace de poids $\lambda - \eta$, $\eta \in Q_+$. Soit $\det_\eta(\lambda)$ le déterminant de H_η dans la base $F^c v_\lambda$ introduite en 2.5, où c parcourt l'ensemble $\text{Par}(\eta) = \{(c_1, \dots, c_\nu) \in \mathbb{N}^\nu; \sum c_i \alpha_i = \eta\}$.

Notons qu'on peut interpréter chaque élément de \mathcal{U}^0 comme fonction sur P à valeurs dans $k(q)$, par : $K_\beta(\lambda) = q^{(\beta, \lambda)}$ pour $\beta \in Q$, $\lambda \in P$.

Utilisant les formules de caractères 2.3.4, 2.5 et la connaissance de la formule de Shapovalov pour le déterminant dans le cas classique, De Concini et Kač ont obtenu la formule suivante :

PROPOSITION ([DC-K]).— *On a*

$$\det_{\eta} = \prod_{\beta \in R_+} \prod_{m=1}^{\infty} \left([m]_{d_{\beta}} [K_{\beta}; (\rho, \beta) - \frac{m}{2} (\beta, \beta)] \right)^{|\text{Par}(\eta - m\beta)|},$$

où, pour $\beta \in R_+$, on pose $d_{\beta} = d_i$ si β est dans l'orbite de α_i sous l'action du groupe de Weyl W .

Ils obtiennent aussi les critères usuels d'inclusions entre modules de Verma, critères aussi obtenus dans [A-P-W1] par des méthodes cohomologiques.

2.8. Centre et homomorphisme d'Harish-Chandra

T. Tanisaki a établi un analogue de l'isomorphisme d'Harish-Chandra sur $k[[h]]$ dans [Ta]. Dans [Ro3], il est prouvé un analogue du critère d'Harish-Chandra pour les caractères centraux sur $k(q)$. L'isomorphisme d'Harish-Chandra sur $k(q)$ est établi dans [DC-K] et [J-L1].

On suivra ici De Concini et Kač, car leur construction permet une spécialisation à $\mathcal{U}_{\varepsilon}$, pour $k = \mathbf{C}$ et $\varepsilon \in \mathbf{C}^*$ lorsque ε n'est pas une racine de l'unité.

2.8.1. Soit Z le centre de \mathcal{U} . Tout élément de Z s'écrit :

$$z = \sum_{\eta \in Q_+} \sum_{k,r \in \text{Par}(\eta)} F^k \varphi_{k,r} E^r \quad , \quad \text{où } \varphi_{k,r} \in \mathcal{U}^0.$$

L'application $z \mapsto \varphi_{0,0}$ est un homomorphisme $h : Z \rightarrow \mathcal{U}^0$ appelé *homomorphisme d'Harish-Chandra*.

2.8.2. Soit $\gamma : \mathcal{U}^0 \rightarrow \mathcal{U}^0$ l'homomorphisme défini par $\gamma(K_i) = q_i K_i$. Si on voit $\varphi \in \mathcal{U}^0$ comme fonction sur P , on obtient :

$$\gamma(\varphi)(\lambda) = \varphi(\lambda + \rho) \quad , \quad \lambda \in P.$$

Le groupe Q_2^* agit sur \mathcal{U}^0 par : $\delta(K_{\beta}) = \delta(\beta)K_{\beta}$, $\delta \in Q_2^*$, $\beta \in Q$ et on obtient une action du produit semi-direct $W \times Q_2^*$ sur \mathcal{U}^0 .

Soit \widetilde{W} le sous-groupe de ce groupe engendré par les $\sigma W \sigma^{-1}$, $\sigma \in Q_2^*$ et $\mathcal{U}^{0\widetilde{W}} = \{\varphi \in \mathcal{U}^0 \mid w(\varphi) = \varphi \ \forall w \in \widetilde{W}\}$.

THÉORÈME ([DC-K] [J-L1]).— *L'application $\gamma^{-1} \circ h$ envoie Z dans $\mathcal{U}^{0\tilde{W}}$ et définit un isomorphisme de Z sur $\mathcal{U}^{0\tilde{W}}$.*

2.8.3. Idée de la preuve

a) Le fait que $\gamma^{-1} \circ h(z)$ soit dans $\mathcal{U}^{0\tilde{W}}$ pour z dans Z se prouve en considérant les inclusions entre modules de Verma.

b) De Concini et Kač construisent en fait l'isomorphisme inverse : partant de φ dans \mathcal{U}^0 , on cherche $z \in Z$ sous la forme donnée en 2.8.1 avec $\varphi_{00} = \varphi$. On cherche donc à déterminer, par récurrence sur η , la matrice $\phi_\eta := (\varphi_{k,m})_{k,m \in \text{Par}(\eta)}$. On considère le module de Verma $M(\lambda)^\delta$ et, pour chaque γ dans Q_+ , la matrice de l'opérateur $\sum_{k,m \in \text{Par}(\gamma)} F^k \varphi_{k,r} E^r$ dans la base $F^s v_\lambda$, $s \in \text{Par}(\eta)$, du sous-espace de poids $\lambda - \eta$, soit $G_\gamma(\lambda)$. Utilisant que si $z \in Z$, il doit agir dans ce sous-espace par le scalaire $\varphi(\lambda)$, on obtient une équation entre fonctions à valeurs matricielles :

$$\phi_\eta H_\eta + \sum_{\gamma < \eta} G_\gamma = \varphi \cdot I,$$

et les G_γ , $\gamma < \eta$ sont supposés connus.

Utilisant la formule en 2.7 pour le déterminant de H_η , on voit que si S désigne l'ensemble des produits d'éléments $[K_\beta; (\rho, \beta) - \frac{m}{2}(\beta, \beta)]$ pour $\beta \in Q_+$, $m \in \mathbf{N}^*$, les $\varphi_{k,m}$ cherchés sont nécessairement dans $S^{-1}\mathcal{U}$.

De Concini et Kač montrent alors que les $\varphi_{k,m}$ sont en fait dans \mathcal{U} si et seulement si $\gamma^{-1}(\varphi) \in \mathcal{U}^{0\tilde{W}}$. Des considérations de degré (en les K_i) montrent que $\varphi_{k,m}$ est nul pour k et m assez grands.

De plus, comme le z ainsi construit agit par un scalaire dans chaque module de Verma, il est dans le centre. On le notera z_φ .

2.8.4. Supposons $\varepsilon \in k^*$ non racine de l'unité. Alors pour $\varphi \in \mathcal{U}_\varepsilon^{0\tilde{W}}$, on peut "spécialiser" l'élément z_φ construit ci-dessus et on obtient, avec des notations évidentes, un isomorphisme d'Harish-Chandra

$$\gamma_\varepsilon^{-1} \circ h_\varepsilon : Z_\varepsilon \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_\varepsilon^{0\tilde{W}}.$$

2.8.5. Remarque : *Complète réductibilité des représentations de dimension finie de \mathcal{U}_ε*

En utilisant la proposition donnée en 2.3, il s'agit de montrer que le caractère d'un module de plus haut poids de dimension finie est donné par la formule de H. Weyl.

On peut recopier l'argument donné dans [Ro3] pour \mathcal{U} car 2.8.4 donne le critère d'Harish-Chandra sur les caractères infinitésimaux dès que ε n'est pas une racine de l'unité, et on connaît grâce à 2.5, remarque iv), les caractères des modules de Verma.

2.8.6. Considérons par exemple le cas $\mathcal{G} = \mathfrak{sl}(2)$. Alors l'élément central $C = \frac{Kq+K^{-1}q^{-1}}{(q-q^{-1})^2} + FE$, introduit par Jimbo dans [J2], engendre le centre de \mathcal{U} .

2.8.7. Utilisant la structure quasitriangulaire de \mathcal{U}_h (on va revenir plus en détail là-dessus au n° suivant), Drinfeld a construit dans [D5] des analogues des éléments de Casimir quadratiques. Voici comment.

Supposons pour commencer que (A, R) est une algèbre de Hopf quasitriangulaire, et $R = \sum a_i \otimes b_i$. Posons $u = \sum S(b_i) a_i$. Alors $uS(u) = S(u)u$ est dans le centre de A , et le carré de l'antipode S^2 dans A est l'automorphisme intérieur défini par u .

Supposons de plus $A = \mathcal{U}_h$. Alors S^2 est aussi l'automorphisme intérieur défini par $\exp(h\rho)$, où on voit ρ comme élément de la sous-algèbre de Cartan grâce à l'accouplement $(\ , \)$.

Ainsi $\exp(-h\rho)u = u \exp(-h\rho)$ est dans le centre de \mathcal{U}_h , et Drinfeld montre qu'il agit, dans tout \mathcal{U}_h -module de plus haut poids λ , par multiplication par : $\exp\left[-\frac{h}{2}(\lambda, \lambda + 2\rho)\right]$.

3. LA R -MATRICE UNIVERSELLE POUR \mathcal{U}_h

Dans ce numéro, on adopte la définition de Drinfeld et on se propose d'expliquer la construction de la R -matrice universelle. La formule a été obtenue pour $\mathfrak{sl}(2)$ par Drinfeld, puis pour $\mathfrak{sl}(N)$ dans [Ro2], et enfin le

cas général est dû à Kirillov-Reshetikhin [K-R3], Levendorskii-Soibelman [L-S1].

Ceci repose sur la construction du double quantique indiquée ci-dessous.

\mathcal{U}_h (ou sa sous-algèbre de Hopf topologique $\mathcal{U}_h b_+$ engendrée h -adiquement par les $E_i, H_i, 1 \leq i \leq n$) est ce que Drinfeld appelle une *QUE-algèbre*, c'est-à-dire une algèbre de Hopf topologique sur $k[[h]]$, munie de la topologie h -adique, qui est un $k[[h]]$ -module topologiquement libre et dont la "limite classique" A/hA est isomorphe à une algèbre enveloppante universelle sur k .

On peut définir le dual d'une QUE-algèbre dans la catégorie des QUE-algèbres, et c'est en ce sens qu'on l'entendra ci-dessous. Tous les produits tensoriels sont complétés au sens h -adique.

3.1. THÉORÈME ET DÉFINITION (Drinfeld [D2]).— *Soient A une algèbre de Hopf et A^0 l'algèbre de Hopf duale munie de la comultiplication opposée. Alors, il existe une unique algèbre de Hopf quasitriangulaire (cf. définition 1.3) $(D(A), R)$ telle que :*

- (i) $D(A)$ contient A et A^0 comme sous-algèbres de Hopf.
- (ii) R est l'image de l'élément canonique de $A \otimes A^0$ par le plongement $A \otimes A^0 \rightarrow D(A) \otimes D(A)$.
- (iii) L'application linéaire $A \otimes A^0 \rightarrow D(A), a \otimes b \mapsto ab$, est un isomorphisme de cogèbres.

3.2. La méthode de construction de R consiste à déduire la structure quasitriangulaire de \mathcal{U}_h de celle du double de $\mathcal{U}_h b_+$: on montre que $(\mathcal{U}_h b_+)^0$ est isomorphe, comme QUE-algèbre, à $\mathcal{U}_h b_-$ (la sous-algèbre de Hopf topologique engendrée h -adiquement par les F_i, H_i pour $1 \leq i \leq n$), et que ceci permet de construire un épimorphisme d'algèbres de Hopf $\mathcal{D}(\mathcal{U}_h b_+) \rightarrow \mathcal{U}_h$. La R -matrice universelle de \mathcal{U}_h est alors l'image par celle de $\mathcal{D}(\mathcal{U}_h b_+)$.

3.3. La formule de Drinfeld [D2] pour $\mathfrak{sl}(2)$ est (avec $q = e^{-\frac{\hbar}{2}}$)

$$\begin{aligned} R &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^2)^n}{[n]!} q^{-\frac{n(n-1)}{2}} E^n \otimes F^n \right) \text{Exp} \left(\frac{\hbar}{4} H \otimes H \right) \\ &= \text{Exp} \left(\frac{\hbar}{4} H \otimes H \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^2)^n}{[n]!} q^{-\frac{n(n-1)}{2}} \\ &\quad \left(\text{Exp} \left(\frac{\hbar}{2} H \right) \cdot E \right)^n \otimes \left(\text{Exp} \left(-\frac{\hbar}{2} H \right) \cdot F \right)^n. \end{aligned}$$

3.4. Cas général

Notons que l'on peut construire, comme en 2.5, des bases à la Poincaré-Birkhoff-Witt pour $\mathcal{U}_\hbar b_+$ ou $\mathcal{U}_\hbar b_-$, via des automorphismes T_i .

Pour établir la dualité entre $\mathcal{U}_\hbar b_+$ et $\mathcal{U}_\hbar b_-$ et calculer l'élément canonique, on peut partir d'une telle base pour $\mathcal{U}_\hbar b_+$ et chercher la base duale. Ceci nécessite de connaître $\Delta(E_\beta)$ pour chaque β dans R_+ . Or, on a déjà dit que les automorphismes d'algèbre T_i ne préservent pas la structure de cogèbre!

Cependant, en se fondant sur une autre interprétation des T_i , Kirillov-Reshetikhin et Levendorskii-Soibelman (voir aussi [So2] [So3] [So-V]) ont obtenu la formule suivante :

3.4.1. Lemme ([K-R3] [L-S1]).— *Pour tout x dans \mathcal{U}_\hbar , on a :*

$$\Delta(T_i(x)) = \tilde{R}(i)^{-1} [(T_i \otimes T_i) \Delta(x)] \tilde{R}(i)$$

où

$$\tilde{R}(i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q_i^2)^n}{[n]_{d_i}!} q_i^{-\frac{n(n-1)}{2}} \left(\text{Exp} \left(\frac{\hbar}{2} d_i H_i \right) E_i \right)^n \otimes \left(\text{Exp} \left(-\frac{\hbar}{2} d_i H_i \right) F_i \right)^n.$$

L'idée est de considérer le produit croisé de \mathcal{U}_\hbar par l'action du groupe de tresses et d'implémenter les automorphismes T_i dans chaque représentation de \mathcal{U}_\hbar .

Soit τ l'antiautomorphisme d'algèbre défini par $\tau(E_i) = F_i$, $\tau(F_i) = E_i$, $\tau(H_i) = H_i$.

Pour $\mathfrak{sl}(2)$, si ρ est une représentation de dimension finie (i.e., ici, dans un $k[[\hbar]]$ -module libre de type fini), alors $\rho \circ \tau \circ S$ est isomorphe à la contragrédiente, et Kirillov et Reshetikhin construisent, dans chaque représentation irréductible de dimension finie, un opérateur qui implémente $\tau \circ S$.

Notons que ceci revient à se donner une certaine forme linéaire w sur l'espace des coefficients des représentations de dimension finie $(\mathcal{U}_\hbar)_{\text{res}}^*$ (dual restreint).

Utilisant les relations entre les coefficients de Clebsch-Gordan pour le produit tensoriel de deux représentations irréductibles et l'image de la R -matrice dans ce même produit tensoriel, ils en déduisent :

$$\Delta(w) = R^{-1} w \otimes w.$$

L'élément implémentant l'automorphisme T est alors $\check{w} = w \text{Exp} \left(\frac{\hbar}{8} H^2 \right)$. Vaksman et Soibelman construisent directement la forme linéaire \check{w} comme coefficient d'une certaine représentation de dimension infinie de $(\mathcal{U}_\hbar)_{\text{res}}^*$.

Dans le cas général, soit $\mathcal{U}_{\hbar,i}$ la sous-algèbre de Hopf de \mathcal{U}_\hbar engendrée par E_i, F_i, H_i (isomorphe à $\mathcal{U}_\hbar \mathfrak{sl}(2)$). Composant la surjection naturelle $(\mathcal{U}_\hbar)_{\text{res}}^* \rightarrow (\mathcal{U}_{\hbar,i})_{\text{res}}^*$ avec la forme linéaire \check{w} ci-dessus, on obtient des formes linéaires \check{w}_i , et on montre que la conjugaison par \check{w}_i coïncide sur \mathcal{U}_\hbar avec l'automorphisme T_i . (Cette conjugaison a un sens dans le dual de $(\mathcal{U}_\hbar)_{\text{res}}^*$.)

De la formule ci-dessus pour $\Delta(w)$, on déduit immédiatement le lemme et on a de plus construit le produit croisé évoqué au-dessus comme sous-algèbre du dual de $(\mathcal{U}_\hbar)_{\text{res}}^*$.

3.4.2. On obtient alors que la duale de la base à la Poincaré-Birkhoff-Witt de $\mathcal{U}_\hbar b_+$ est, à un scalaire près, la base à la Poincaré-Birkhoff-Witt de $\mathcal{U}_\hbar b_-$, et la méthode du double quantique donne :

THÉORÈME ([K-R3], [L-S1]).— *On a*

$$R = \prod_{\alpha \in R_+} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - q_\alpha^2)^n}{[n]_\alpha!} q_\alpha^{-\frac{n(n-1)}{2}} E_\alpha^n \otimes F_\alpha^n \right) \cdot \text{Exp} \left(\frac{\hbar}{2} \sum_{i,j} B_{ij} H_i \otimes H_j \right),$$

où le produit est effectué suivant l'ordre total de R_+ donné par la décomposition réduite de w_0 , $q_\alpha = q_i$ si α est dans l'orbite de α_i sous l'action du groupe de Weyl et (B_{ij}) est la matrice inverse de la matrice $(d_i a_{ij})$.

4. THÉORIE QUANTIQUE DES INVARIANTS

Revenons à l'algèbre \mathcal{U}_ε , avec $k = \mathbf{C}$, ε non racine de l'unité.

Supposons que (a_{ij}) soit la matrice de Cartan d'une algèbre de Lie simple classique (*i.e.* de type A, B, C, D). La représentation fondamentale de plus haut poids ω_1 est donnée par les mêmes formules que dans le cas classique (avec la traduction évidente pour les $K_i^{\pm 1}$).

L'image de la R -matrice dans cette représentation a été donnée par Jimbo bien avant que l'on connaisse la R -matrice universelle ([J1] ; en fait, il donne même les formules pour R avec paramètre spectral et on obtient R constante par un procédé de limite convenable). Notons-la encore R .

Par exemple, pour (a_{ij}) de type A_N , on a (E_{ij} désignant les unités matricielles) :

$$R = \varepsilon \sum_{i=1}^{N+1} E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{i \neq j} E_{ij} \otimes E_{ji} + (\varepsilon - \varepsilon^{-1}) \sum_{j>i} E_{jj} \otimes E_{ii}.$$

On peut alors considérer les puissances tensorielles de la représentation fondamentale et étudier le commutant de \mathcal{U}_ε . Ce commutant contient toujours les translattées de R : $R_i = I \otimes \dots \otimes I \otimes R \otimes I \dots \otimes I$ (R agit dans les positions $(i, i+1)$), qui définissent une représentation du groupe des tresses de type A . Cette représentation se factorise à travers certaines algèbres de dimension finie et les R_i engendrent en fait tout le commutant.

DÉFINITIONS.— 1) *L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_p(\varepsilon)$ est la \mathbf{C} -algèbre associative et unitale engendrée par les éléments g_1, \dots, g_{p-1} et les relations :*

$$(H1) \quad g_i g_j = g_j g_i \quad |i - j| \geq 2$$

$$(H2) \quad g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$$

$$(H3) \quad g_i^2 = (\varepsilon - 1) g_i + \varepsilon.$$

2) *L'algèbre de Birman-Murakami-Wenzl ([B-W], [Mu]) est la \mathbf{C} -algèbre $C_p(r, \varepsilon)$ associative et unitale engendrée par les éléments g_1, \dots, g_{p-1} , supposés inversibles, et les relations :*

(H1), (H2) comme ci-dessus

définissant e_i par : $(\varepsilon - \varepsilon^{-1})(1 - e_i) = g_i - g_i^{-1}$

$$(R1) \quad e_i g_i = r^{-1} e_i$$

$$e_i g_{i-1}^{\pm 1} e_i = r^{\pm 1} e_i.$$

Ces deux algèbres peuvent être munies de traces ayant la propriété dite de Markov ([Jo], [Re1], [Tu], [We]) et jouent un rôle important dans la théorie des invariants polynomiaux d'entrelacs (polynôme HOMFLY pour la première et polynôme de Kauffman pour la deuxième).

Le résultat suivant est dû à Jimbo pour (a_{ij}) de type A ([J3]) et à Reshetikhin pour (a_{ij}) de type B, C ou D ([Re1]).

THÉORÈME.— (i) Soit (a_{ij}) de type A et (ρ, V) la représentation fondamentale de \mathcal{U}_ε . Alors les opérateurs εR_i ($1 \leq i \leq p-1$), agissant dans $V^{\otimes p}$, y définissent une représentation de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_p(\varepsilon^2)$, et les images de $\mathcal{H}_p(\varepsilon^2)$ et \mathcal{U}_ε dans $\text{End}(V^{\otimes p})$ sont exactement commutant l'une de l'autre.

(ii) Soit (a_{ij}) de type B, C ou D , et (ρ, V) la représentation fondamentale de \mathcal{U}_ε . Alors les opérateurs R_i ($1 \leq i \leq p-1$), agissant dans $V^{\otimes p}$, y définissent une représentation de l'algèbre $\mathcal{C}_n(r, \varepsilon^2)$ avec $r = \varepsilon^{2n}$ si (a_{ij}) est de type B_n , $r = -\varepsilon^{(2n-1)/2}$ si (a_{ij}) est de type D_n , $r = -\varepsilon^{-(2n+1)}$ si (a_{ij}) est de type C_n .

Les images de $\mathcal{C}_p(r, \varepsilon^2)$ et \mathcal{U}_ε dans $\text{End}(V^{\otimes p})$ sont, dans chaque cas, exactement commutant l'un de l'autre.

5. GROUPES QUANTIQUES COMPACTS DE MATRICES

Ici $k = \mathbf{C}$, ε n'est pas une racine de l'unité.

On a déjà évoqué plus haut l'algèbre de Hopf $(\mathcal{U}_h)_{\text{res}}^*$ des coefficients des représentations de dimension finie. On peut y penser comme au substitut de l'algèbre des fonctions régulières sur le groupe algébrique complexe correspondant. Dans la situation classique, c'est exactement l'algèbre des

fonctions représentatives sur le groupe compact associé, et cette algèbre est dense dans la C^* -algèbre des fonctions continues sur le groupe compact.

5.1. Woronowicz a introduit les groupes quantiques compacts de matrices comme suit ([W1] [W2]) :

DÉFINITION.— *Un groupe quantique compact de matrices est la donnée d'une C^* -algèbre A et d'une matrice $N \times N$ d'éléments de $A : u = (u_{ij})$ satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) *La sous-algèbre involutive \mathcal{A} engendrée par les éléments u_{ij} est dense dans A .*

(ii) *Il existe un morphisme de C^* -algèbres $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ tel que :*

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}.$$

(iii) *u est inversible et il existe une application linéaire antimultiplicative $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, telle que :*

$$S(S(a^*)^*) = a \quad \forall a \in \mathcal{A},$$

et la matrice $(S(u_{ij}))$ est inverse de u .

Woronowicz a montré, dans ce cadre, l'existence et l'unicité d'une mesure de Haar (*i.e.* d'un état $h \in A^*$, tel que $h.\eta = \eta.h = \eta(1).h$ pour tout $\eta \in A^*$) [W2].

Il a développé la théorie générale des représentations (unitaires) de dimension finie (*i.e.* des \mathcal{A} -comodules) et obtenu une caractérisation à la Tannaka-Krein de cette catégorie [W3].

Ceci permet, à partir des duaux $(\mathcal{U}_\varepsilon)_{\text{res}}^*$, $\varepsilon > 0$, de construire des groupes quantiques compacts de matrices ([Ro4], [So2], [An]).

L'algèbre \mathcal{U}_ε agit alors par "opérateurs différentiels tordus" dans l'algèbre \mathcal{A} .

Les représentations de l'algèbre \mathcal{A} correspondante sont étudiées en détail dans [So1, So2, L-S].

5.2. Ces groupes quantiques ont donné un cadre géométrique à la théorie des q -analogues des fonctions spéciales, en particulier des polynômes orthogonaux. Par exemple, les " q -petits polynômes de Jacobi" apparaissent

naturellement comme coefficients matriciels des représentations unitaires irréductibles du groupe quantique $SU(2)$, et les coefficients de Clebsch-Gordan s'expriment en terme des q -polynômes de Hahn.

Les équations aux différences finies satisfaites par ces polynômes sont données par l'action de l'opérateur de Casimir 2.8.6.

La mesure de Haar s'exprime grâce à l'intégrale de Jackson de q -dénombrément, et les relations d'orthogonalité des polynômes s'interprètent comme celles des coefficients de représentations par rapport à la mesure de Haar.

Voir, par exemple, [K-K], [Koo], [K-R2], [MMNNU], [So-V].

6. SPÉCIALISATION ARITHMÉTIQUE (OU RESTREINTE)

Dans ce numéro, ℓ est un entier impair, premier avec tous les coefficients de la matrice de Cartan.

$k = \mathbf{Q}$, et on pose $\mathcal{A} = \mathbf{Z}[q, q^{-1}]$.

Rappelons (*cf.* 2.5) que l'on dispose de bases à la Poincaré-Birkhoff-Witt de la \mathcal{A} -algèbre $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$.

Pour toute \mathcal{A} -algèbre A , on peut appliquer $\otimes_{\mathcal{A}} A$ et obtenir une A -algèbre \mathcal{U}_A , en particulier pour $A = \mathbf{Z}$ ou \mathbf{Q} , où q agit par 1.

Soit \mathcal{B} l'anneau quotient de \mathcal{A} par l'idéal engendré par le ℓ -ième polynôme cyclotomique. On dispose des \mathcal{B} -algèbres $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\pm}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^0$.

De même, si l'on considère le quotient B de $\mathbf{Q}[q, q^{-1}]$ par ce même polynôme cyclotomique ($\mathcal{B} \subset B$), on obtient \mathcal{U}_B , \mathcal{U}_B^{\pm} , \mathcal{U}_B^0 .

Notons encore $\overline{\mathcal{U}}_{\mathbf{Q}}$ l'algèbre enveloppante sur \mathbf{Q} de la \mathbf{Q} -algèbre de Lie simple associée à (a_{ij}) , et \overline{E}_i , \overline{F}_i , \overline{H}_i ses générateurs satisfaisant aux relations habituelles. Soit $\overline{\mathcal{U}}_{\mathbf{Z}}$ sa \mathbf{Z} -forme de Kostant, engendrée par les puissances divisées : $\overline{E}_i^{(N)} = \frac{E_i^N}{N!}$, $\overline{F}_i^{(N)} = \frac{F_i^N}{N!}$ pour $1 \leq i \leq n$, $N \geq 0$.

Si p est un nombre premier impair, soit \mathbf{F}_p le corps à p éléments. $\overline{\mathcal{U}}_{\mathbf{F}_p} = \overline{\mathcal{U}}_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_p$ est l'hyperalgèbre du groupe algébrique simple sur \mathbf{F}_p associé à (a_{ij}) .

6.1. On a $K_i^{2\ell} = 1$ dans \mathcal{U}_B ou $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ et les K_i^{ℓ} sont centraux. On notera $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$

et $\tilde{\mathcal{U}}_B$ les quotients respectifs par l'idéal bilatère engendré par les $K_i^\ell - 1$, $1 \leq i \leq n$.

De même K_i est central dans \mathcal{U}_Z ou \mathcal{U}_Q et on définit les algèbres $\tilde{\mathcal{U}}_Z$, $\tilde{\mathcal{U}}_Q$.

PROPOSITION ([L4], [L5]).— (i) $\tilde{\mathcal{U}}_Q$ et \bar{U}_Q (resp. $\tilde{\mathcal{U}}_Z$ et \bar{U}_Z) sont isomorphes comme algèbres de Hopf.

(ii) Supposons $\ell = p$. On peut identifier $\mathcal{B}/(q-1)\mathcal{B}$ à \mathbf{F}_p , ce qui fait de \mathbf{F}_p une \mathcal{B} -algèbre, et former $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{F}_p} = \tilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_p$. Alors $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{F}_p}$ et $\bar{U}_{\mathbf{F}_p}$ sont isomorphes comme algèbres de Hopf.

6.2. Soit \bar{u} la sous-algèbre de $\bar{U}_{\mathbf{F}_p}$ engendrée par $\bar{E}_i, \bar{F}_i, 1 \leq i \leq n$. C'est une algèbre de Hopf de dimension $p^{2\nu+n}$ sur \mathbf{F}_p . L'idéal bilatère de $\bar{U}_{\mathbf{F}_p}$ engendré par le noyau de l'augmentation de \bar{u} n'est autre que le noyau de l'application de Frobenius $\text{Fr} : \bar{U}_{\mathbf{F}_p} \rightarrow \bar{U}_{\mathbf{F}_p}$ (transposée de l'application de Frobenius usuelle sur l'algèbre de coefficients du groupe simple sur \mathbf{F}_p) : $\text{Fr}(\bar{E}_i^{(N)}) = \bar{E}_i^{(N/p)}$ si p divise N et 0 sinon ; $\text{Fr}(\bar{F}_i^{(N)}) = \bar{F}_i^{(N/p)}$ si p divise N et 0 sinon.

Considérons parallèlement la \mathcal{B} -sous-algèbre u de $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ engendré par $E_i, F_i, K_i, 1 \leq i \leq n$, et son quotient \tilde{u} par l'idéal bilatère engendré par les $K_i^\ell - 1$. Alors \tilde{u} est un \mathcal{B} -module libre de rang $\ell^{2\nu+n}$.

Nous allons voir qu'elle admet une interprétation analogue à \bar{u} en termes d'une "application de Frobenius en caractéristique nulle".

6.3. L'application de Frobenius en caractéristique nulle (Lusztig [L5])

THÉORÈME.— Il existe un unique morphisme de \mathcal{B} -algèbres $\tilde{\text{Fr}} : \mathcal{U}_{\mathcal{B}} \rightarrow \bar{U}_Q \otimes_Q \mathcal{B}$ tel que :

$$\begin{aligned} \tilde{\text{Fr}}(E_i^{(N)}) &= \bar{E}_i^{(N/\ell)} & \text{si } \ell \text{ divise } N & , & 0 \text{ sinon} \\ \tilde{\text{Fr}}(F_i^{(N)}) &= \bar{F}_i^{(N/\ell)} & \text{si } \ell \text{ divise } N & , & 0 \text{ sinon} \\ \tilde{\text{Fr}}(K_i) &= 1. \end{aligned}$$

Il se restreint en un morphisme de \mathcal{B} -algèbres

$$\tilde{\text{Fr}} : \mathcal{U}_{\mathcal{B}} \rightarrow \overline{\mathcal{U}}_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{B}$$

et se factorise à travers les quotients $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ et $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$.

Soit u' la \mathcal{B} -sous-algèbre de $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ engendrée par E_i, F_i, K_i pour $1 \leq i \leq n$, et u'^+ sa \mathcal{B} -sous-algèbre engendrée par les E_i .

La preuve de l'existence de $\tilde{\text{Fr}}$ repose sur une interprétation de $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}^+$ comme "produit croisé" de u'^+ par l'algèbre enveloppante $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{Q}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}} \mathcal{B}$ agissant sur u'^+ via certaines dérivations. Plus précisément : soit δ_i (resp. δ'_i) la dérivation de $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ définie par : $\delta_i(x) = E_i^{(\ell)} x - x E_i^{(\ell)}$ (resp. $\delta'_i(x) = F_i^{(\ell)} x - x F_i^{(\ell)}$).

Alors δ_i laisse u et u^+ stables, δ'_i laisse u et u^- stables.

On montre alors qu'il existe une unique structure de \mathcal{B} -algèbre sur $(\mathcal{U}_{\mathbf{Q}}^+ \otimes \mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{B}} u'^+$, qui coïncide avec les structures connues sur $\mathcal{U}_{\mathbf{Q}}^+ \otimes \mathcal{B}$ et u'^+ et telle que : $E_i x = x E_i + \delta_i(x)$, pour tout x dans u'^+ . Cette algèbre est isomorphe à $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^+$ par un isomorphisme γ envoyant $E_i \in \mathcal{U}_{\mathbf{Q}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}} \mathcal{B}$ sur $E_i^{(\ell)} \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}}^+$ et $y \in u'^+$ sur lui-même. $\tilde{\text{Fr}}$ est alors défini sur $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^+$ en utilisant γ^{-1} et en envoyant $(\mathcal{U}_{\mathbf{Q}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}} \mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{B}} u'^+$ sur $\mathcal{U}_{\mathbf{Q}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}} \mathcal{B}$ grâce à l'augmentation de u'^+ .

6.4. Le noyau de $\tilde{\text{Fr}} : \mathcal{U}_{\mathcal{B}} \rightarrow \overline{\mathcal{U}}_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{B}$ n'est autre que l'idéal bilatère engendré par l'idéal d'augmentation de l'algèbre de Hopf \tilde{u} introduite en 6.2.

6.5. Supposons ici $\ell = p$.

Appliquons le foncteur $\otimes_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_p$ à $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ et $\overline{\mathcal{U}}_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{B}$. Par 6.1, on obtient $\overline{\mathcal{U}}_{\mathbf{F}_p}$ pour chacun des deux, et $\tilde{\text{Fr}}$ devient l'application de Frobenius de 6.2.

De plus, $\tilde{u} \otimes_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_p$ est isomorphe à \bar{u} comme algèbre de Hopf sur \mathbf{F}_p .

Soit $\tilde{u}' = \tilde{u} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B}$.

PROPOSITION (Lusztig [L4]).— (i) Les \tilde{u}' -modules simples sont paramétrés par $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$.

(ii) Si M est un \tilde{u}' -module simple, alors il contient un \mathcal{B} -réseau M_0 qui est un \tilde{u} -sous-module et tel que $M_0 \otimes_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_p$ ait pour quotient le \bar{u} -module simple de même paramètre que M dans $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$.

Lusztig conjecture en fait que \bar{u} et \tilde{u} ont des théories des représentations identiques (pour p pas trop petit). En particulier, le \bar{u} -module simple associé à M ci-dessus devrait avoir la même dimension que M .

6.6. Revenons à ℓ non nécessairement premier et considérons la catégorie \mathcal{C} des \mathcal{U}_B -modules de dimension finie, sur lesquels les K_i^ℓ agissent par 1 (on peut toujours se ramener à ce cas). (Voir Lusztig [L2]).

6.6.1. Les objets simples sont classifiés par les poids dominants. En effet, si λ est un poids dominant, on dispose du \mathcal{U} -module simple $L(\lambda)$ de dimension finie sur $\mathbf{Q}(q)$ et d'un vecteur de plus haut poids v . Soit $L(\lambda)_A$ le sous- \mathcal{U}_A -module engendré par v et $N(\lambda) = L(\lambda)_A \otimes_A B$. C'est un \mathcal{U}_B -module qui a un unique quotient simple, $\mathcal{L}(\lambda)$. L'application $\lambda \mapsto \mathcal{L}(\lambda)$ est une bijection de P_+ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples de \mathcal{C} .

6.6.2. Si M est un \mathcal{U}_B -module dans \mathcal{C} et $\lambda \in P$, $\lambda = \sum k_i \omega_i$, Lusztig définit son sous-espace de poids λ par

$$M_\lambda = \left\{ v \in M \mid K_i v = q_i^{k_i} v \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} K_i \\ \ell \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} k_i \\ \ell \end{bmatrix}_{q_i} v \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

M est somme de ses sous-espaces de poids et si $M = N(\lambda)$, la dimension des sous-espaces de poids est donnée par la formule d'H. Weyl.

Ces dimensions, pour $\mathcal{L}(\lambda)$, ne sont pas connues.

De façon très analogue à ses conjectures pour les modules rationnels simples sur les groupes algébriques simples sur un corps algébriquement clos de caractéristique non nulle, Lusztig a conjecturé une formule pour les dimensions des sous-espaces de poids de $\mathcal{L}(\lambda)$, en terme des polynômes de Kazhdan-Lusztig du groupe de Weyl affine associé à (a_{ij}) ([L2]).

6.7. On est en fait ramené au cas où les coordonnées k_i du poids dominant λ sont telles que $0 \leq k_i \leq \ell - 1$ grâce à un analogue du théorème du produit tensoriel de Steinberg (Lusztig [L2]).

En effet, un poids dominant λ s'écrit de façon unique $\lambda = \lambda' + \ell\lambda''$ avec λ'' dominant et les coordonnées de λ' comprises entre 0 et $\ell - 1$. Alors $\mathcal{L}(\lambda) \simeq \mathcal{L}(\lambda') \otimes \mathcal{L}(\ell\lambda'')$ comme \mathcal{U}_B -module. En fait u' agit trivialement dans $\mathcal{L}(\ell\lambda'')$ et la représentation de \mathcal{U}_B dans $\mathcal{L}(\ell\lambda'')$ se factorise à travers

l'application de Frobenius $\tilde{\text{Fr}} : \mathcal{U}_B \rightarrow \overline{U}_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathcal{B}$, si bien que la structure des sous-espaces de poids de $\mathcal{L}(\ell\lambda')$ est connue. Par ailleurs, la restriction de $\mathcal{L}(\lambda')$ à u' reste irréductible, et tout u' -module irréductible sur lequel les K_i^ℓ agissent par 1 est obtenu une fois et une seule comme une telle restriction.

6.8. La théorie des représentations de \mathcal{U}_B est étudiée en détail dans [A-P-W1], [A-P-W2], [A-W], et [P-W] pour le cas où (a_{ij}) est de type A .

Andersen, Polo et Wen introduisent une “algèbre de coordonnées” pour \mathcal{U} , qui est un $\mathbf{Z}[q]$ -module libre, et l'utilisent pour développer une théorie générale de l'induction. En particulier, ils obtiennent des analogues du théorème de Serre, du théorème d'annulation de Kempf pour les caractères dominants et de la formule des caractères de Demazure, et définissent des filtrations à la Jantzen. Ils vérifient la conjecture de Lusztig lorsque le système de racines est de rang 2 et lorsque (a_{ij}) est de type A_3 .

Je renvoie à leurs articles pour plus de précisions.

7. SPÉCIALISATION NON RESTREINTE

Les résultats de ce numéro sont dûs à De Concini et Kač [DC-K].

$k = \mathbf{C}$, ε est une racine primitive ℓ -ième de l'unité. On pose $\ell' = \ell$ si ℓ est impair et $\ell' = \frac{1}{2}\ell$ si ℓ est pair. On suppose que $\ell' > \max\{d_i\}$.

7.1. Les éléments $E_\alpha^{\ell'}$, $F_\alpha^{\ell'}$, $K_\beta^{\ell'}$ satisfont aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} E_\alpha^{\ell'} E_\beta &= \varepsilon^{-(\alpha,\beta)\ell'} E_\beta E_\alpha^{\ell'} \quad , \quad F_\alpha^{\ell'} F_\beta = \varepsilon^{(\alpha,\beta)\ell'} F_\beta F_\alpha^{\ell'} \\ E_\alpha^{\ell'} F_\beta &= F_\beta E_\alpha^{\ell'} \quad , \quad F_\alpha^{\ell'} E_\beta = E_\beta F_\alpha^{\ell'} \\ K_\beta^{\ell'} E_\alpha &= \varepsilon^{(\alpha,\beta)\ell'} E_\alpha K_\beta^{\ell'} \quad , \quad K_\beta^{\ell'} F_\alpha = \varepsilon^{-(\alpha,\beta)\ell'} F_\alpha K_\beta^{\ell'} . \end{aligned}$$

Par conséquent, les éléments E_α^ℓ , F_α^ℓ , K_β^ℓ ($\alpha \in R_+$, $\beta \in Q$) sont dans le centre Z_ε de \mathcal{U}_ε et, dans le module de Verma $M(\lambda)$, $F_\alpha^{\ell'} v_\lambda$ engendre un sous-module de plus haut poids propre, pour chaque $\alpha \in R_+$.

On définit le \mathcal{U}_ε -module diagonal $\overline{M}(\lambda)$ comme le quotient de $M(\lambda)$ par le sous-module engendré par tous les $F_\alpha^{\ell'} v_\lambda$, $\alpha \in R_+$.

Il est immédiat que les $F_{\beta_1}^{m_1} \cdots F_{\beta_\nu}^{m_\nu} v_\lambda$, où $0 \leq m_i < \ell'$ forment une base sur \mathbf{C} de $\overline{M}(\lambda)$.

De plus, en considérant le déterminant de la forme hermitienne contravariante (que l'on peut spécialiser lorsque $|\varepsilon| = 1$), on voit que si $\lambda(K_\beta^\ell)^2 \neq 1$ pour tout β dans R_+ , alors $\overline{M}(\lambda)$ est irréductible.

7.2. Pour chaque α dans R_+ , soit $x_\alpha = E_\alpha^\ell$, $y_\alpha = F_\alpha^\ell$ et pour β dans Q , $z_\beta = K_\beta^\ell$. On s'intéresse à la sous-algèbre Z_0 de Z_ε engendrée par ces éléments, et à ses sous-algèbres Z_0^+ , Z_0^- , Z_0^0 engendrées respectivement par les x_α , y_α et z_β . On pose $z_i = z_{\alpha_i}$. Z_0^0 est l'algèbre des polynômes de Laurent en z_i, z_i^{-1} .

PROPOSITION.— (i) $Z_0 = Z_0^+ \otimes Z_0^0 \otimes Z_0^-$.

(ii) Z_0^+ (resp. Z_0^-) est une algèbre de polynômes en les x_α (resp. y_α), $\alpha \in R_+$.

(iii) \mathcal{U}_ε est un Z_0 -module libre de base $F^k K_1^{m_1} \cdots K_n^{m_n} E^r$, où

$$0 \leq m_i < \ell \quad , \quad 0 \leq k_j < \ell \quad , \quad 0 \leq r_j < \ell$$

(iv) $\mathcal{U}_\varepsilon^\pm \cap Z_\varepsilon = Z_0^\pm$.

(v) Z_0 est invariante par les automorphismes T_i .

7.3. \mathcal{U}_ε est donc un Z_0 -module noëthérien, par conséquent son sous-module Z_ε est finiment engendré sur Z_0 , donc est entier sur Z_0 . Par le théorème de la base de Hilbert, Z_ε est une algèbre finiment engendrée.

On peut donc considérer son spectre $\text{Spec } Z_\varepsilon$, i.e. la variété algébrique affine des homomorphismes d'algèbre de Z_ε vers \mathbf{C} . De même pour Z_0 . On a : $\text{Spec } Z_0 \simeq \mathbf{C}^{2\nu} \times (\mathbf{C}^*)^n$ (non canoniquement).

Soit $\text{Rep } \mathcal{U}_\varepsilon$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de dimension finie sur \mathbf{C} de \mathcal{U}_ε . On a une suite d'applications canoniques

$$\text{Rep } \mathcal{U}_\varepsilon \xrightarrow{X} \text{Spec } Z_\varepsilon \xrightarrow{\tau} \text{Spec } Z_0,$$

où X associe à chaque représentation irréductible son caractère central et τ est induite par l'inclusion $Z_0 \subset Z_\varepsilon$. Comme Z_ε est entière sur Z_0 , τ est

finie et surjective (théorème de Cohen-Seidenberg). X est surjective car si $\chi \in \text{Spec } Z_\varepsilon$ et si I^χ est l'idéal de \mathcal{U}_ε engendré par le noyau de χ , l'algèbre $\mathcal{U}_\varepsilon^\chi = \mathcal{U}_\varepsilon/I^\chi$ n'est pas réduite à $\{0\}$ (lemme de Nakayama).

7.4. On va utiliser la théorie des algèbres associatives de dimension finie pour déterminer la dimension maximale des représentations irréductibles de \mathcal{U}_ε et le degré de τ .

Rappelons que \mathcal{U}_ε n'a pas de diviseurs de 0. On peut donc considérer le corps des fractions $Q(Z_\varepsilon)$ de Z_ε et $Q(\mathcal{U}_\varepsilon) := Q(Z_\varepsilon) \otimes_{Z_\varepsilon} \mathcal{U}_\varepsilon$. C'est une algèbre à division, de dimension finie sur son centre. Soit F un sous-corps commutatif maximal de $Q(\mathcal{U}_\varepsilon)$: il contient nécessairement $Q(Z_\varepsilon)$ et si m est sa dimension sur $Q(Z_\varepsilon)$, alors la dimension de $Q(\mathcal{U}_\varepsilon)$ sur $Q(Z_\varepsilon)$ est m^2 et $F \otimes_{Q(Z_\varepsilon)} \mathcal{U}_\varepsilon$ est isomorphe à l'algèbre des matrices $m \times m$ sur F . On appellera m le degré de \mathcal{U}_ε .

Ce qui précède permet de considérer le polynôme caractéristique, la trace tr , la norme d'un élément de \mathcal{U}_ε et la forme bilinéaire $(x, y) = \text{tr}(xy)$. Comme \mathcal{U}_ε est intégralement clos, Z_ε l'est aussi et les coefficients du polynôme caractéristique d'un élément de \mathcal{U}_ε sont dans Z_ε . On définit l'idéal discriminant de \mathcal{U}_ε comme l'idéal (non nul) de Z_ε engendré par les éléments $\det((u_i, u_j), 1 \leq i, j \leq m^2)$, où u_1, \dots, u_{m^2} sont dans \mathcal{U}_ε . L'ensemble des zéros de cet idéal est une sous-variété fermée propre \mathcal{D} de $\text{Spec } Z_\varepsilon$ appelée sous-variété discriminante.

On peut alors énoncer le résultat principal.

THÉORÈME.— *Soient ℓ un entier impair, $\ell > \max \{d_i\}$ et ε une racine primitive ℓ -ième de l'unité.*

(i) *$\text{Spec } Z_\varepsilon$ est une variété algébrique affine normale et l'application $\tau : \text{Spec } Z_\varepsilon \rightarrow \text{Spec } Z_0$ est finie de degré ℓ^n .*

(ii) *si $\chi \in \text{Spec } Z_\varepsilon \setminus \mathcal{D}$, alors $X^{-1}(\chi)$ consiste en une unique (classe de) représentations irréductibles de \mathcal{U}_ε , de dimension ℓ^ν .*

7.5. Voici les étapes de la démonstration.

Utilisant les techniques d'algèbres associatives de dimension finie, De Concini et Kač commencent par montrer que, si χ n'est pas dans \mathcal{D} , alors l'algèbre $\mathcal{U}_\varepsilon^\chi$ (notation 7.3) est isomorphe à $M_m(\mathbf{C})$, et que si χ est dans \mathcal{D} ,

alors la dimension de $\mathcal{U}_\varepsilon^\chi$ est supérieure ou égale à m^2 mais la dimension de chacune de ses représentations irréductibles est strictement plus petite que m .

Il s'agit donc de déterminer m et le degré de τ .

Rappelons que l'on dispose des représentations diagonales $\overline{M}(\lambda)$, de dimension ℓ^ν et que si $\lambda(z_\alpha^2) \neq 1 \forall \alpha \in R_+$, alors $\overline{M}(\lambda)$ est irréductible. Fixons un tel λ .

Soit $H_0 \subset \text{Spec } Z_0$ défini par $x_\alpha = 0, y_\alpha = 0$ et $z_\alpha^2 \neq 1$. Alors $\tau \circ \chi(\overline{M}(\lambda)) \in H_0$, et l'image réciproque par $\tau \circ \chi$ de cet élément contient ℓ^n éléments. Par ailleurs, $\dim_{Q(Z_0)} Q(\mathcal{U}_\varepsilon) = \ell^{2\nu+n}$ (proposition 7.2 (iii)), donc $\ell^{2\nu+n} = m^2 \cdot \text{deg } \tau$, et $m \geq \ell^\nu$.

On va introduire un groupe d'automorphismes G d'une complétion $\widehat{\mathcal{U}}_\varepsilon$ de \mathcal{U}_ε , qui agit dans $\text{Rep } \mathcal{U}_\varepsilon, \text{Spec } Z_\varepsilon, \text{Spec } Z_0$ (X et τ étant équivariantes) et tel que l'orbite GH_0 contienne un ouvert métrique non vide de $\text{Spec } Z_0$. (Cette orbite est formée des images de représentations diagonales irréductibles, tordues par G , de dimension ℓ^ν . Chaque point de cette orbite a exactement ℓ^n antécédents.)

On en déduit alors $\text{deg } \tau \geq \ell^n$, d'où $\text{deg } \tau = \ell^n$ et $m = \ell^\nu$.

La construction de G se fait ainsi (il faut, ici, que ℓ soit impair) :

a) Rappelons que, dans la spécialisation à la Lusztig, on a introduit des dérivations données par le commutateur par les analogues des puissances divisées. On peut bien entendu considérer de telles dérivations pour l'algèbre \mathcal{U} sur $\mathbf{C}(q)$, et il est très remarquable que ces dérivations descendent à \mathcal{U}_ε .

Notons $e_\alpha, f_\alpha, k_{\pm\alpha}$ les dérivations associées à $E_\alpha^{(\ell)}, F_\alpha^{(\ell)}, K_{\pm\alpha}^\ell / [\ell]_{d_\beta}!$, et posons $e_i = e_{\alpha_i}, f_i = f_{\alpha_i}$. Alors, si $\alpha = w \alpha_i, w \in W$, on a $e_\alpha = T_w e_i T_w^{-1}, f_\alpha = T_w f_i T_w^{-1}$, et $e_i, f_i, k_{\pm\beta}$ sont donnés par des formules explicites.

b) On considère l'algèbre de Lie $\widehat{\mathcal{G}}$ sur Z_0 de dérivations de \mathcal{U}_ε engendrée par les $e_\alpha, f_\alpha, k_{\pm\alpha}$. Elle est normalisée par les T_i et Z_0 est invariante par $\widehat{\mathcal{G}}$.

c) Afin de pouvoir envisager le groupe d'automorphismes correspondant, il est commode de compléter Z_0 ainsi : \widehat{Z}_0 est l'algèbre des séries formelles en $x_\alpha, y_\alpha, (\alpha \in R_+), z_i$ et z_i^{-1} , qui convergent vers une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}^{2\nu} \times (\mathbf{C}^*)^n$. On pose $\widehat{\mathcal{U}}_\varepsilon = \widehat{Z}_0 \otimes_{Z_0} \mathcal{U}_\varepsilon$ et $\widehat{Z}_\varepsilon = \widehat{Z}_0 \otimes_{Z_0} Z_\varepsilon$.

Alors, pour tout $t \in \mathbf{C}$, les séries $\exp te_\alpha$, $\exp tf_\alpha$, $\exp tk_\beta$ convergent vers des automorphismes (sur \mathbf{C}) de l'algèbre \widehat{U}_ε , et on peut considérer le sous-groupe G du groupe des automorphismes de \widehat{U}_ε engendré par les automorphismes $\exp te_\alpha$, $\exp tf_\alpha$, $\exp tk_\alpha$, $\alpha \in R_+$.

\widehat{Z}_ε et \widehat{Z}_0 sont invariantes par G , si bien qu'il agit par transformations holomorphes sur $\text{Spec } Z_\varepsilon$ et $\text{Spec } Z_0$.

d) De formules explicites pour l'action de e_α , f_α dans Z_0 , on déduit que l'orbite GH_0 contient un ouvert métrique non vide de $\text{Spec } Z_0$.

7.6. L'action de G sur $\text{Spec } Z_0$ est étudiée davantage dans [DC-K-P].

7.7. Les représentations irréductibles de dimension maximale évoquées au théorème 7.4 ont été explicitées pour (a_{ij}) de type A , dans [Ar], [Ar-Ch1], [DJMM3]. Voir aussi [Ar-Ch2], [DJMM1], [DJMM2], [DJMM4].

ADDENDUM

Entre le moment où ce texte a été rédigé et celui de l'exposé oral, D. Kazhdan et G. Lusztig ont établi dans "Affine Lie algebras and quantum groups", Intern. Math. Research Notes **2** (1991), 21-29, une équivalence de catégories tensorielles entre une catégorie de représentations d'une algèbre de Lie affine et la catégorie des représentations de dimension finie d'une algèbre enveloppante quantifiée.

Ceci implique, grâce aux travaux de L. Casian et S. Kumar sur les conjectures de Kazhdan-Lusztig pour les représentations de niveau négatif des algèbres de Kač-Moody affines, la conjecture de Lusztig sur le caractère des modules simples d'une algèbre enveloppante quantifiée à une racine de l'unité (voir 6.6.2).

BIBLIOGRAPHIE

- [A-G-S] L. ALVAREZ-GAUMÉ, C. GOMEZ, G. SIERRA - *Quantum group interpretation of some conformal field theories*, prépublication CERN.
- [A-P-W1] H.H. ANDERSEN, P. POLO et WEN K. - *Representations of quantum algebras*, Invent. Math. **104** (1991), 1-60.
- [A-P-W2] H.H. ANDERSEN, P. POLO et WEN K. - *Injective modules for quantum algebras*, à paraître dans Amer. J. Math.
- [A-W] H.H. ANDERSEN, WEN K. - *Representations of quantum algebras : the mixed case*, prépublication Aarhus Universitet 1991, n° 5.
- [An] N. ANDRUSKIEWITSH - *Some exceptional compact matrix pseudo-groups*, prépublication École Polytechnique.
- [Ar] D. ARNAUDON - *Periodic and flat irreducible representations of $SU(3)_q$* , Comm. Math. Phys. **134** (1990), 523-537.
- [Ar-Ch1] D. ARNAUDON, A. CHAKRABARTI - *Periodic and partially periodic representations of $SU(N)_q$* , à paraître dans Comm. Math. Phys.
- [Ar-Ch2] D. ARNAUDON, A. CHAKRABARTI - *Flat periodic representations of $U_q(\mathcal{G})$* , prépublication École Polytechnique A023-1190.
- [B] O. BABELON - *Extended conformal algebra of Yang-Baxter equation*, Phys. Lett. **B125** (1988), 523-529.
- [Ba1] R.J. BAXTER - *Partition function of the eight-vertex lattice model*, Ann. Phys. **70** (1972), 193-228.
- [Ba2] R.J. BAXTER - *Exactly solved models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London, 1982.
- [B-S] V.V. BAZHANOV, Y.G. STROGANOV - *Chiral Potts models as a descendant of the six vertex model*, J. Stat. Phys. **51** (1990), 799-817.
- [B-M-L] A.A. BEILINSON, R. MAC PHERSON, G. LUSZTIG - *A geometric setting for the quantum deformation of GL_n* , Duke Math. J. **61** (1990).
- [Be] D. BERNARD - *Vertex operator representations of the quantum affine algebra $U_q(\text{Br}^{(1)})$* , Lett. Math. Phys. **17** (1989), 239-245.
- [B-W] J. BIRMAN, H. WENZL - *Braids, link polynomials and a new algebra*, Trans. AMS **313** (1989), 249-273.

- [Ca] P. CARTIER - *Développements récents sur les groupes de tresses ; applications à l'algèbre et à la topologie*, Sémin. Bourbaki, exp. n° 716, Astérisque **189-190** (1991), 17-67.
- [C-P1] V. CHARI, A. PRESSLEY - *Quantum affine algebras*, à paraître dans Comm. Math. Phys. (1991).
- [C-P2] V. CHARI, A. PRESSLEY - *Yangians and R-matrices*, L'Enseignement Math. **36** (1990), 267-302.
- [C-P3] V. CHARI, A. PRESSLEY - *Fundamental representations of Yangians and rational R-matrices*, à paraître dans J. für reine und angewandte Mathematik.
- [Ch1] J. CHEREDNIK - *Quantum groups as hidden symmetries of classical representation theory*, Proceed. of 17th Int. Conf. on diff. geom. methods in theoretical physics, World Scient. (1989), 47.
- [Ch2] J. CHEREDNIK - *A new interpretation of Gelfand-Tsetlin bases*, Duke Math. J. **54** (1987), 563.
- [C-G] E. CREMMER, J.-L. GERVAIS - *The quantum group structure associated with non linearly extended Virasoro algebras*, Comm. Math. Phys. **134** (1990), 619.
- [DJMM1] E. DATE, M. JIMBO, K. MIKI, T. MIWA - *New R-matrices associated with cyclic representations of $\mathcal{U}_q(A_2^{(2)})$* , prépublication RIMS **706** (1990).
- [DJMM2] E. DATE, M. JIMBO, K. MIKI, T. MIWA - *R-matrix for cyclic representations of $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(3, \mathbb{C}))$ at $q^3 = 1$* , Phys. Lett. **A148** (1990), 45-49.
- [DJMM3] E. DATE, M. JIMBO, K. MIKI, T. MIWA - *Cyclic representations of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}))$ at $q^N = 1$* , à paraître dans Public. RIMS.
- [DJMM4] E. DATE, M. JIMBO, K. MIKI, T. MIWA - *Generalized chiral Potts models and minimal cyclic representations of $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{gl}}(n, \mathbb{C}))$* , à paraître dans Comm. Math. Phys.
- [DC-K] C. DE CONCINI, V.G. KAČ - *Representations of quantum groups at roots of 1*, Colloque Dixmier 1989, 471-506, Progress in Math. **92**, Birkhäuser (1990).

- [DC-K-P] C. DE CONCINI, V.G. KAČ, C. PROCESI - *Quantum coadjoint action*, prépublication Scuola Normale Superiore Pisa, n° 95, 1991.
- [D1] V.G. DRINFELD - *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Soviet Math. Dokl. **32** (1985), 254-258.
- [D2] V.G. DRINFELD - *Quantum groups*, Proceedings ICM, Berkeley (1986), vol. 1, 798-820.
- [D3] V.G. DRINFELD - *A new realization of Yangians and quantized affine algebras*, Soviet Math. Dokl. **36** (1988), 212-216.
- [D4] V.G. DRINFELD - *Degenerate affine Hecke algebras and Yangians*, Funct. Anal. and Applic. **20** (1986), 58-60.
- [D5] V.G. DRINFELD - *On almost cocommutative Hopf algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 321-342.
- [D6] V.G. DRINFELD - *Quasi-Hopf algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 1419-1457.
- [D-L] M. DYER, G. LUSZTIG - Appendice à [L5].
- [Fa] L.D. FADDEEV - *Integrable models in $(1+1)$ -dimensional quantum field theory*, Les Houches 1982, Elsevier Science Publishers (1984).
- [F-R-T] L.D. FADDEEV, N.Y. RESHETIKHIN, L.A. TAKHTAJAN - *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 193-226.
- [Fr] J. FRÖHLICH - *Statistics of fields, the Yang-Baxter equation and the theory of knots and links*, dans "Non Perturbative Quantum Field Theory", eds. G. 't Hooft et al., Plenum Press (1988).
- [F-J] I. FRENKEL, N. JING - *Vertex representations of quantum affine algebras*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **85** (1988), 9373-9377.
- [F-G-P] P. FURLAN, A. GANCHEV, V. PETKOVA - *Quantum groups and fusion rules multiplicities*, Nucl. Phys. **B343** (1990), 205-227.
- [H] T. HAYASHI - *Q-analogues of Clifford and Weyl algebras. Spinor and oscillator representations of quantum enveloping algebras*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 129-144.
- [J1] M. JIMBO - *Quantum R-matrix for the generalized Toda system*, Comm. Math. Phys. **102** (1986), 537-547.

- [J2] M. JIMBO - *A q -difference analogue of $U(\mathcal{G})$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63-69.
- [J3] M. JIMBO - *A q -difference analogue of $U(\mathfrak{gl}(N + 1))$, Hecke algebra and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247-252.
- [Jg] N. JING - *Twisted vertex representations of quantum affine algebras*, Invent. Math. **102** (1990), 663-690.
- [Jo] V.F.R. JONES - *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. Math. **126** (1987), 335-388.
- [J-L1] A. JOSEPH, G. LETZTER - *Local finiteness of the adjoint action for quantized enveloping algebras*, à paraître dans J. of Algebra.
- [J-L2] A. JOSEPH, G. LETZTER - *Separation of variables for quantized enveloping algebras*, prépublication.
- [Ka] M. KASHIWARA - *Crystalizing the q -analogue of universal enveloping algebras*, prépublication RIMS ; *Bases cristallines*, CRAS Paris **311** (1990), 277.
- [K-R1] A.N. KIRILLOV, N.Y. RESHETIKHIN - *Yangians and Bethe ansatz*, Lett. Math. Phys. **12** (1986), 199-208.
- [K-R2] A.N. KIRILLOV, N.Y. RESHETIKHIN - *Representations of the algebra $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, q -orthogonal polynomials and invariant of links*, dans "Infinite dimensional Lie algebras and groups", ed. V.G. Kač, World Scientific, Singapore (1989).
- [K-R3] A.N. KIRILLOV, N.Y. RESHETIKHIN - *q -Weyl group and a multiplicative formula for universal R -matrices*, Comm. Math. Phys. (1991).
- [K-K] H.T. KĀELINK, T.H. KOORNWINDER - *The Clebsch-Gordan coefficients for the quantum group $SU_\mu(2)$ and q -Hahn polynomials*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. **A92** (1989), 443-456.
- [Koh] T. KOHNO - *Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations*, Ann. Inst. Fourier **37** (1987), 139-160 ; *Quantized universal enveloping algebras and braid groups*, prépublication.
- [Koo] T.H. KOORNWINDER - *Representations of the twisted $SU(2)$ quantum group and some q -hypergeometric orthogonal polynomials*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. **A92** (1989), 97-117.

- [Ku-R] P.P. KULISH, N.Y. RESHETIKHIN - *The quantum linear problem for the sine-Gordon equation and higher representations*, J. Soviet Math. **23** (1983), n° 4.
- [L-S1] S.Z. LEVENDORSKII, Y.S. SOIBELMAN - *Some applications of quantum Weyl group 1. The multiplicative formula for universal R-matrix for simple Lie algebras*, Journ. Geom. and Phys. **7** (1991), n° 4.
- [L-S2] S.Z. LEVENDORSKII, Y.S. SOIBELMAN - *Algebras of functions on compact quantum groups, Schubert cells and quantum tori*, à paraître dans Comm. Math. Phys.
- [L1] G. LUSZTIG - *Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras*, Adv. in Math. **70** (1988), 237-249.
- [L2] G. LUSZTIG - *Modular representations and quantum groups*, Contemp. Math. **82** (1989), 59-77.
- [L3] G. LUSZTIG - *On quantum groups*, J. Algebra **131** (1990), 466-475.
- [L4] G. LUSZTIG - *Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized enveloping algebras*, Journ. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 257-296.
- [L5] G. LUSZTIG - *Quantum groups at roots of 1*, Geom. Dedicata (1990).
- [L6] G. LUSZTIG - *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, I : J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447-498, II : Progress of Theor. Physics (à paraître).
- [L7] G. LUSZTIG - *Introduction to quantized enveloping algebras*, prépublication.
- [Ma] Y. MANIN - *Quantum groups and non-commutative geometry*, CRM Université de Montréal (1989).
- [MMNNU] T. MASUDA, K. MIMACHI, Y. NAKAGAMI, M. NOUMI, K. UENO - *Representations of the quantum group $SU_q(2)$ and the little q -Jacobi polynomials*, J. Funct. Analysis.
- [M-R] G. MOORE, N.Y. RESHETIKHIN - *A comment on quantum group symmetry in conformal field theory*, prépublication.
- [Mu] J. MURAKAMI - *The Kauffman polynomial of links and representation theory*, Osaka J. Math. **24** (1987), 745-758.

- [O] G.I. OLSHANSKII - *Extension of the algebra $U(\mathcal{G})$ for infinite dimensional classical Lie algebras \mathcal{G} and the Yangians $Y(\mathfrak{gl}(m))$* , Soviet Math. Dokl. **36** (1988), 569-573.
- [P-W] B. PARSHALL, J.P. WANG - *Quantum linear groups*, Memoirs of AMS, vol. 89, n° 439 (1991).
- [P-S] V. PASQUIER, H. SALEUR - *Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups*, prépublication.
- [P-W] P. PODLES, S.L. WORONOWICZ - *Quantum deformations of Lorentz group*, Comm. Math. Phys. **130** (1990), 381-431.
- [Re1] N.Y. RESHETIKHIN - *Quantized enveloping algebras, the Yang-Baxter equation and invariants of links I et II*, prépublications LOMI E-4-87 et E-17-87.
- [Re2] N.Y. RESHETIKHIN - *Quasitriangular Hopf algebras and invariants of tangles*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 491-513.
- [Re-S] N.Y. RESHETIKHIN, M. SEMENOV-TIAN-SHANSKI - *Central extensions of quantum current groups*, Lett. Math. Phys. **19** (1990), 133-143.
- [Ri] C.M. RINGEL - *Hall algebras and quantum groups*, Invent. Math. **101** (1990), 583-592.
- [R-A] P. ROCHE, D. ARNAUDON - *Irreducible representations of the quantum analogue of $SU(2)$* , Lett. Math. Phys. **17** (1989), 295-300.
- [Ro1] M. ROSSO - *Finite dimensional representations of the quantum analogue of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), 581-593.
- [Ro2] M. ROSSO - *Analogue of PBW theorem and the universal R -matrix for $\mathcal{U}_\hbar \mathfrak{sl}(N+1)$* , Comm. Math. Phys. **124** (1989), 307-318.
- [Ro3] M. ROSSO - *Analogues de la forme de Killing et du théorème d'Harish-Chandra pour les groupes quantiques*, Annales Scient. de l'École Norm. Sup. **23** (1990), 445-467.
- [Ro4] M. ROSSO - *Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif*, Duke Math. J. **61** (1990), 11-40.

- [Ro5] M. ROSSO - *Groupes quantiques, représentations linéaires et applications*, Thèse Université Paris 7 (1990).
- [Sk] E.K. SKLYANIN - *On an algebra generated by quadratic relations*, Uspekhi Mat. Nauk **40** (1985), n° 2.
- [So1] Y. SOIBELMAN - *Algebra of functions on quantum groups $SU(n)$ and Schubert cells*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **307** (1989), 41-45.
- [So2] Y. SOIBELMAN - *Algebra of functions on a compact quantum group and its representations*, Algebra and Analysis **2** (1990), n° 1.
- [So3] Y. SOIBELMAN - *Gelfand-Naimark states and quantum Weyl group for $SU(n)$* , Funct. Anal. and Applic. **24** (1990), n° 3.
- [So-V] Y. SOIBELMAN, L. VAKSMAN - *Algebra of functions on quantum group $SU(2)$* , Funct. Anal. and Applic. **22** (1988), n° 3, 1-14.
- [T] M. TAKEUCHI - *The q -bracket product and quantum enveloping algebras of classical type*, J. of Math. Soc. of Japan **42** (1990), 605-630.
- [Ta] T. TANISAKI - *Harish-Chandra isomorphisms for quantum algebras*, prépublication.
- [T-K] A. TSUCHIYA, Y. KANIE - *Vertex operators in two dimensional conformal field theory on P^1 and monodromy representations of braid groups*, Adv. Stud. in Pure Math., Vol. 16, Academic Press, Boston (1988), 297-372 et ibidem, Vol. 19 (1989), 675-682.
- [Tu] V.G. TURAEV - *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. **92** (1988), 527-553.
- [Ve] J.-L. VERDIER - *Groupes quantiques (d'après V.G. Drinfel'd)*, Sémin. Bourbaki, exp. n° 685, Astérisque **152-153** (1987), 305-319.
- [We] H. WENZL - *Quantum groups and subfactors of type B, C and D*, Comm. Math. Phys. **133** (1990), 383-432.
- [W1] S.L. WORONOWICZ - *Twisted $SU(2)$ group. An example of non-commutative differential calculus*, Publ. RIMS **23** (1987), 117-181.
- [W2] S.L. WORONOWICZ - *Compact matrix pseudogroups*, Comm. Math. Phys. **111** (1987), 613-655.
- [W3] S.L. WORONOWICZ - *Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups, Twisted $SU(N)$ group*, Invent. Math. **93** (1988), 35-76.
- [Ym] H. YAMANE - *A Poincaré-Birkhoff-Witt theorem for quantized enveloping algebras of type A_N* , Publ. RIMS **25** (1989), 503-520.

- [Yg] C.N. YANG - *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1312-1315.

Marc ROSSO

École Polytechnique

URA 169 du CNRS

Centre de Mathématiques

F-91128 PALAISEAU CEDEX

et

Miller Fellow

University of California

Department of Mathematics

University of California

BERKELEY, CA 94720 - USA

Astérisque

GUY HENNIART

Erratum à l'exposé n°711 : « Formes de Maass et représentations galoisiennes »

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), p. 485-486

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33_485_0>

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**FORMES DE MAASS
ET REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES**
[d'après Blasius, Clozel, Harris, Ramakrishnan et Taylor]

par Guy HENNIART

Le théorème de Blasius, Clozel et Ramakrishnan, énoncé au §1 de l'exposé, et annonçant l'algébricité des valeurs propres des opérateurs de Hecke pour les formes de Maass de type galoisien, ne peut à l'heure actuelle être considéré comme démontré. Leur preuve, rapportée dans l'exposé, est en effet erronée en un point subtil mais fondamental. J'ai été averti de cette erreur par une lettre, datée du 9 avril 1991, de D. Blasius et D. Ramakrishnan. Dans la suite de cet erratum, nous expliquons brièvement où se situe la faute, mais nous précisons aussi quelle part des travaux cités n'est pas touchée par cette erreur.

Rappelons le principe de la méthode utilisée : on part d'une représentation de Maass de type galoisien π (non de type diédral) et on choisit un corps quadratique imaginaire K et un caractère de Hecke algébrique (assez régulier) χ de A_K^\times/K^\times . Par changement de base de \mathbf{Q} à K , torsion par χ , puis induction automorphe de K à \mathbf{Q} , on obtient une représentation automorphe cuspidale $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}(\pi, \chi)$ de $GL_4(A_{\mathbf{Q}})$, qui provient d'une représentation $\Pi = \Pi(\pi, \chi)$ de $GSp_4(A_{\mathbf{Q}})$. Le problème est que le composant à l'infini Π_∞ de Π n'est *jamais* du type annoncé, car il appartient à un L -paquet qui ne contient aucune limite de série discrète. (Nous expliquons ce point plus bas avec plus de détails.) Les théorèmes 1, 2 et 4 de l'exposé sont donc non démontrés. Le théorème 3 (transfert de GSp_4 à GL_4 , annoncé par Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika) n'est pas affecté, mais dans notre cas, il ne fournit pas une représentation adéquate de $GSp_4(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$. Le théorème 5 (algébricité des représentations de $GSp_4(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$ qui sont limites de séries discrètes à l'infini, annoncé par Blasius, Harris et Ramakrishnan) n'est pas S.M.F.

affecté lui non plus, mais ne s'applique pas à la situation des formes de Maass.

La méthode de Blasius et Ramakrishnan exposée de 5.1 à 5.5, toujours pour la même raison, ne s'applique pas aux formes de Maass. Cependant, R. Taylor annonce qu'en suivant une méthode analogue à celle mentionnée en 5.7-5.10, il obtient des représentations galoisiennes attachées à certaines formes automorphes sur des corps quadratiques imaginaires, où un procédé d'induction automorphe permet d'obtenir des représentations de GSp_4 ayant le bon composant à l'infini.

Les résultats de 6.1 à 6.4 ne sont pas affectés, mais le programme mentionné en 6.5 semble entaché d'une erreur, pour les groupes unitaires, analogue à l'erreur pour GSp_4 .

Pour terminer, expliquons plus précisément d'où vient l'erreur dans le calcul de Π_∞ . On a donc une représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GSp}_4(\mathbf{A}_\mathbf{Q})$, puisqu'il existe un caractère ψ de $\mathbf{A}_\mathbf{Q}^\times/\mathbf{Q}^\times$ tel que la fonction $L(\tilde{\Pi}, \Lambda^2 \otimes \psi, s)$ ait un pôle en $s = 1$. Le composant $\tilde{\Pi}_\infty$ de $\tilde{\Pi}$ correspond, par la classification de Langlands, à une (classe d'équivalence de) représentation σ_∞ de $W_{\mathbf{R}}$ dans $\mathrm{GL}_4(\mathbf{C})$. Comme $\tilde{\Pi}_\infty$ provient de Π_∞ , σ_∞ est la représentation linéaire attachée à une représentation $\tilde{\sigma}_\infty : W_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbf{C})$ (qui détermine le L -paquet de Π_∞ par la classification de Langlands). Mais pour σ_∞ , il y a *deux* représentations $\tilde{\sigma}'_\infty$ et $\tilde{\sigma}''_\infty$ de $W_{\mathbf{R}}$ dans $\mathrm{GSp}_4(\mathbf{C})$, inéquivalentes, qui sont équivalentes à σ_∞ comme représentations dans $\mathrm{GL}_4(\mathbf{C})$. On a donc *a priori* deux L -paquets possibles pour π_∞ et *un seul* d'entre eux contient des limites de série discrète. Ces deux paquets sont distingués par leur similitude symplectique $W_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{C}^\times$. Mais cette similitude est donnée par le composant à l'infini du caractère ψ^{-1} . Ce caractère peut se calculer, et on trouve que dans tous les cas on tombe sur le mauvais L -paquet à l'infini !