JEAN-BENOÎT BOST

**Théorie de l'intersection et théorème de Riemann-Roch arithmétiques**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1990-1991, exp. n° 731, p. 43-88.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__43_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 1990
43ème année, 1990-91, n° 731

# THÉORIE DE L'INTERSECTION ET THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH ARITHMÉTIQUES

par **Jean-Benoît BOST**

Depuis la fin du dix-neuvième siècle, l'analogie entre les corps de nombres, c'est-à-dire les extensions de degré fini de $\mathbf{Q}$, et les corps de fonctions algébriques d'une variable, c'est-à-dire les corps de fonctions rationnelles sur une courbe algébrique définie sur un corps, a joué un rôle crucial en géométrie algébrique et en arithmétique. En témoignent par exemple les travaux de Dedekind et Weber sur les courbes algébriques et le douzième problème de Hilbert.

Au cours du premier tiers de ce siècle, cette analogie s'est vue complétée par la découverte que, pour la rendre plus satisfaisante, il convenait de considérer les plongements d'un corps de nombres $K$ dans les corps archimédiens $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ (les "places à l'infini de $K$") sur le même plan que les idéaux premiers de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de $K$ et que les plongements de $K$ dans des corps $p$-adiques qui leur sont attachés. Cette découverte(1) intervient crucialement dans la définition des adèles d'un corps de nombres et, par là, a connu un immense succès.

(1) Hensel et son élève Hasse semblent les premiers à avoir compris l'importance qu'il y a à considérer simultanément toutes les places d'un corps de nombres, finies ou infinies. Toutefois, la première mention explicite de résultats globaux, mettant en jeu toutes les places d'un corps de nombres, analogues aux résultats classiques sur les surfaces de Riemann est, à notre connaissance, l'article de Weil [W1] de 1939. Un peu plus tard, dans une lettre à sa sœur ([W2], p. 252), ce dernier attribue à Hasse ou Artin la découverte du rôle des places à l'infini.

Par ailleurs, la transposition aux corps de fonctions de problèmes diophantiens, telle l'étude des points rationnels d'une variété définie sur un corps de nombres, a conduit à s'intéresser aux variétés définies sur le corps de fonctions d'une variable $k(C)$ attaché à une courbe $C$ définie sur un corps $k$. Pour étudier de telles variétés $V$, on en choisit un modèle au-dessus de $C$, *i.e.* une variété $\mathcal{V}$ munie d'un morphisme plat $\mathcal{V} \to C$, définis sur $k$, tels que $V$ soit isomorphe à la fibre générique de ce morphisme. Si $V$ est de dimension $n$ sur $k(C)$, alors $\mathcal{V}$ est de dimension $n+1$ sur $k$. C'est ainsi que l'étude des *courbes* sur $k(C)$ conduit à utiliser la théorie des *surfaces* sur $k$ (Manin, Grauert, Samuel).

Cette démarche peut être imitée dans l'étude des variétés $V$ sur un corps de nombres $K$ : un modèle de $V$ est alors un schéma $\mathcal{V}$ plat sur $\mathcal{O}_K$ tel que $\mathcal{V} \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ soit isomorphe à $V$. Si, par exemple, $V$ est une courbe, alors $\mathcal{V}$ est un schéma de dimension (absolue) 2, ce que l'on appelle une *surface arithmétique* (Schafarevitch, Lichtenbaum). Arakelov a découvert comment faire intervenir dans cette approche les places à l'infini de $K$, du moins lorsque $\mathcal{V}$ est une surface arithmétique : en faisant appel à la *géométrie hermitienne* sur la courbe analytique complexe $\mathcal{V}(\mathbf{C})$. C'est ainsi que, en munissant $\mathcal{V}(\mathbf{C})$ d'une métrique kählerienne et les fibrés en droites sur $\mathcal{V}$ (plus précisément, les fibrés en droites holomorphes sur $\mathcal{V}(\mathbf{C})$ qui s'en déduisent) d'une métrique hermitienne, Arakelov puis Faltings ont étendu aux surfaces arithmétiques les théorèmes classiques de la théorie des surfaces sur un corps (*cf.* [A1], [A2], [Fa1], [Sz], [La2], et exposé Bourbaki, n$^o$ 713). Les idées "arakeloviennes" ont joué aussi un grand rôle dans la démonstration par Faltings de la conjecture de Mordell (*cf.* exposés Bourbaki n$^o$ 616 et 619).

Dans cet exposé, nous présentons une introduction aux travaux de Gillet et Soulé qui ont généralisé cette "géométrie d'Arakelov" aux variétés de dimension arbitraire. Ils ont établi une théorie de l'intersection sur les "variétés arithmétiques" générales, ainsi qu'une théorie des classes caractéristiques pour les fibrés vectoriels hermitiens sur celles-ci. Puis ils ont démontré un "théorème de Riemann-Roch arithmétique" ([GS10]), en s'appuyant sur des travaux de Bismut et Lebeau ([BL1,2]). Dans les pages qui suivent, nous cherchons seulement à donner une idée de ces résultats, sans les présenter sous leur forme la plus générale et sans en décrire les démonstrations, qui présentent souvent des difficultés techniques considérables. (La démonstration actuelle du théorème 4.2 utilise les résultats des articles de Gillet et Soulé [GS3 à 7], Bismut, Gillet et Soulé [BGS1 à 3], Bismut [Bi1-2] et Bismut et Lebeau [BL1,2].) Nous mettons l'accent sur les définitions de base de la théorie de l'intersection et des classes caractéristiques arithmétiques, et nous ne disons à peu près rien sur les résultats d'analyse "complexe hermitienne", concernant la torsion analytique, qui jouent un rôle crucial dans les démonstrations et mériteraient à eux seuls un exposé.

La géométrie d'Arakelov en dimension supérieure a déjà connu une application spectaculaire : la nouvelle démonstration par Vojta [V] de la conjecture de Mordell. La théorie de l'intersection arithmétique joue aussi un rôle important dans les travaux récents de Faltings sur l'approximation diophantienne dans les variétés abéliennes, où celui-ci l'utilise pour attacher une hauteur aux sous-variétés de l'espace projectif ([Fa2]).

Terminons cette introduction par quelques remarques historiques.

Les définitions des groupes de Chow arithmétiques et de leur structure multiplicative étendent les définitions introduites par Arakelov ([A1]) et Deligne ([De]) pour les surfaces arithmétiques. Des cas particuliers "d'intersection arithmétique" en dimension relative $> 1$ ont été aussi considérés par Bloch ([Bl]) et Beilinson ([Be1], [Be2]). Quant au théorème de Riemann-Roch arithmétique, il généralise en dimension supérieure le travail de Faltings ([Fa1]) et Deligne ([De]) sur les surfaces arithmétiques.

Si l'on recherche les origines plus lointaines de la "géométrie arakelovienne", on peut les faire remonter aux travaux de Weil sur l'arithmétique sur les courbes et sur les variétés algébriques, où développant le point de vue "kroneckerien" en géométrie arithmétique, il introduit "hauteurs" et "distributions" (*cf.* l'article [W3] et les références qui y sont citées). Les travaux de Néron et Tate concernant les hauteurs sur les variétés abéliennes et leur décomposition locale (*cf.* par exemple [La1]), qui sont longtemps apparus comme l'archétype d'une théorie des hauteurs précisées, ont sans doute joué aussi un rôle déterminant. On ne saurait enfin sous-estimer celui de l'école russe, autour de Schafarevitch, dont est issu Arakelov (voir à ce propos les articles prospectifs de Paršin [P] et Manin [M]).

# 1. PRÉLIMINAIRES

## 1.1. Définitions et notations

**DÉFINITIONS 1.1.**— *On appelle* variété arithmétique *tout schéma intègre régulier $X$ plat et quasi-projectif sur* $\mathbf{Z}$. *On note $F_\infty$ l'involution antiholomorphe de la variété complexe $X(\mathbf{C})$ induite par la conjugaison complexe.*

*On appelle* fibré hermitien sur une variété analytique complexe $V$ *la donnée $\overline{E} = (E, h)$ d'un fibré vectoriel holomorphe $E$ sur $V$ et d'un produit scalaire hermitien $h$, de classe $C^\infty$, sur les fibres de $E$.*

*On appelle* fibré hermitien sur une variété arithmétique $X$ *la donnée $\overline{E} = (E, h)$ d'un $\mathcal{O}_X$-module localement libre $E$ sur $X$ et d'un produit scalaire hermitien $h$, de classe $C^\infty$ et invariant par $F_\infty$, sur le fibré vectoriel holomorphe $E(\mathbf{C})$ sur $X(\mathbf{C})$.*

On observera que tout schéma intègre régulier $X$ plat et quasi-projectif sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres est une variété arithmétique.

Si $\overline{E} = (E, h)$ et $\overline{E'} = (E', h')$ sont deux fibrés vectoriels hermitiens sur une variété analytique complexe ou sur une variété arithmétique, on peut former leur somme directe $\overline{E} \oplus \overline{E'} := (E \oplus E' \,,\, h \oplus h')$ — où $h \oplus h'$ désigne la somme directe orthogonale des métriques $h$ et $h'$ — et leur produit tensoriel $\overline{E} \otimes \overline{E'} := (E \otimes E' \,,\, h \otimes h')$. On désigne par $\det \overline{E}$ la puissance extérieure maximale $\det E$ de $E$ munie de la métrique $\det h$. C'est un fibré en droites hermitien. Enfin, on définit l'image inverse $f^*\overline{E}$ de $\overline{E}$ par un morphisme $f$ de variétés complexes ou de variétés arithmétiques comme $f^*E$ muni de la métrique $f^*h$ qui fait des isomorphismes $(f^*E)_x \simeq E_{f(x)}$ des isométries.

Dans la suite, nous définirons indifféremment une structure de fibré vectoriel hermitien sur un fibré vectoriel $E$ au moyen d'un produit scalaire $h$ ou au moyen d'une métrique hermitienne $\| \ \|$, reliés par $\|v\| = h(v, v)^{1/2}$.

On note $\operatorname{rg} E$ le rang d'un fibré vectoriel $E$ et on note $\alpha^{(k)}$ la composante de degré $k$ d'une forme différentielle, ou d'une classe de cohomologie, ou d'un cycle algébrique $\alpha$.

Si $K$ est un corps et $E$ est un $\mathbf{Z}$-module, on désigne par $E_K$ le produit tensoriel $E \otimes_{\mathbf{Z}} K$. Plus généralement, si $\mathcal{F}$ est un faisceau de modules sur un $\mathbf{Z}$-schéma $X$, on désigne par $X_K$ et $\mathcal{F}_K$ le $K$-schéma et le faisceau sur $X_K$ qui s'en déduisent par le changement de base $\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} \mathbf{Z}$.

### 1.2. Degré arakelovien (*cf.* [W1], [A1] et [Sz], exposé 1)

L'importance des places à l'infini des corps de nombres dans l'analogie avec les corps de fonctions se manifeste clairement lorsque, par exemple, on cherche à transposer aux corps de nombres la notion de degré d'un fibré en droites.

Soient en effet $K$ un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de $K$, et soient $\sigma_i$, $1 \leq i \leq r_1$, les plongements réels de $K$ et $\sigma_i$, $\overline{\sigma_i}$, $r_1 + 1 \leq i \leq r_1 + r_2$, les plongements complexes de $K$. Les $\sigma_i$, $1 \leq i \leq r_1 + r_2$, sont les *places à l'infini* de $K$, et l'on pose $\varepsilon_i = 1$ si $1 \leq i \leq r_1$ et $\varepsilon_i = 2$ si $r_1 < i \leq r_1 + r_2$. Soit $\overline{L} = (L, \| \ \|)$ un fibré en droites hermitien sur $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. La donnée de $L$ est équivalente à celle du $\mathcal{O}_K$-module projectif de rang 1 $\Lambda = H^0(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K; L)$. La structure hermitienne sur $L$ est la donnée d'une métrique hermitienne, invariante par $F_\infty$, sur le fibré $L_{\mathbf{C}}$ sur l'espace $X(\mathbf{C})$, dont les points sont les $[K : \mathbf{Q}]$ morphismes de $K$ vers $\mathbf{C}$ ; elle se ramène à la donnée d'une norme hermitienne $\| \ \|_i$ sur chacune des droites vectorielles complexes $\Lambda \otimes_K \mathbf{C}_{\sigma_i}$, $1 \leq i \leq r_1 + r_2$.

Soit $\mathbf{P}$ l'ensemble des idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$. Pour tout $\mathfrak{p} \in \mathbf{P}$, on note

$$N\mathfrak{p} = \# \mathcal{O}_K / \mathfrak{p}$$

sa norme et $v_{\mathfrak{p}}$ la valuation sur $K$ qui lui est associée. Utilisant que, localement sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, $L$ est isomorphe au faisceau structural, on peut encore définir $v_{\mathfrak{p}}(s)$ pour une section $s$ de $L$. Il vient alors, pour tout $s \in \Lambda \backslash \{0\}$

$$\text{(1.2.1)} \qquad \#(\Lambda/s\,\mathcal{O}_K) - \sum_{x \in X(\mathbf{C})} \log \|s(x)\|$$
$$= \sum_{\mathfrak{p} \in \mathbf{P}} v_{\mathfrak{p}}(s) \log N\mathfrak{p} - \sum_{i=1}^{r_1+r_2} \varepsilon_i \log \|s\|_i \,.$$

La formule du produit, qui affirme que pour tout $x \in K\backslash\{0\}$,

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathbf{P}} N\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(x)} \prod_{i=1}^{r_1+r_2} |\sigma_i(x)|^{-\varepsilon_i} = 1\,,$$

montre que cette expression est indépendante de $s$. C'est le *degré arakelovien* de $\overline{L}$, noté $\widehat{\deg}\,\overline{L}$.

Clairement, la partie algébrique de (1.2.1), formée du premier terme de l'un ou l'autre membre, ne possède pas cette propriété d'invariance : il faut "compactifier" le schéma affine $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ par les places à l'infini de $K$ pour que les fibrés en droites y possèdent un degré bien défini.

Plus généralement, si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, on pose

$$\widehat{\deg}\,\overline{E} = \widehat{\deg}\det\overline{E}\,.$$

Lorsque $K = \mathbf{Q}$, $\Lambda := H^0(\operatorname{Spec}\mathbf{Z}, E)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^{\operatorname{rg} E}$ et la structure hermitienne sur $\overline{E}$ définit un produit scalaire invariant par conjugaison complexe sur $\Lambda_{\mathbf{C}}$, *i.e.* une structure euclidienne sur $\Lambda_{\mathbf{R}}$ ; de plus, $\widehat{\deg}\,\overline{E}$ n'est autre que l'opposé du logarithme du covolume de $\Lambda$ dans $\Lambda_{\mathbf{R}}$ calculé au moyen de cette structure euclidienne.

Lorsque $X$ est une variété arithmétique et que $\overline{L}$ est un fibré en droites hermitien sur $X$, on définit *la hauteur relativement à* $\overline{L}$ d'un élément $x : \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K \to X$ de $X(\mathcal{O}_K)$ comme

$$h_{\overline{L}}(x) = \widehat{\deg}\,x^*\overline{L}\,.$$

Si $X = \mathbf{P}^N = \operatorname{Proj}\mathbf{Z}[X_0, \cdots, X_N]$ et si $\overline{L}$ est le fibré hermitien $\overline{\mathcal{O}(1)}$ défini comme $\mathcal{O}(1)$ muni de la métrique standard $\|\ \|$ — la fibre de $\mathcal{O}(1)$ en

$P = [x_0 : \cdots : x_N] \in \mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ est la droite $\mathrm{Hom}(\mathbf{C}(x_0, \cdots, x_N), \mathbf{C})$ et par définition

$$\|(z_i)_{0\leq i\leq N} \mapsto \sum_{i=0}^{N} z_i \overline{x_i}\| = \Big(\sum_{i=0}^{N} |x_i|^2\Big)^{1/2} \quad —$$

alors la hauteur $h_{\overline{L}}$ sur $\mathbf{P}^N(\mathcal{O}_K)$ $(= \mathbf{P}^N(K)$ par propreté) est la hauteur logarithmique usuelle : si $(x_0, \cdots, x_N) \in \mathcal{O}_K^{N+1}\backslash\{0\}$, on a

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}([x_0 : \cdots : x_N]) = \log \frac{\prod_{i=1}^{r_1+r_2} \big(\sum_{j=0}^{N} |\sigma_i(x_j)|^2\big)^{\varepsilon_i/2}}{N\big(\sum_{j=0}^{N} x_j\, \mathcal{O}_K\big)}.$$

En particulier, si $K = \mathbf{Q}$ et si $(x_0, \cdots, x_N) \in \mathbf{Z}^{N+1}\backslash\{0\}$ et sont premiers entre eux dans leur ensemble, alors

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}([x_0 : \cdots : x_N]) = \log \Big(\sum_{j=0}^{N} x_j^2\Big)^{1/2}.$$

### 1.3. Le problème de Riemann-Roch

($\alpha$) Dans sa version la plus naïve, le problème de Riemann-Roch se pose dans les termes suivants :

*Étant donnés une variété projective complexe lisse $V$ et un fibré vectoriel holomorphe $E$ sur $V$, que vaut la dimension de l'espace $H^0(V; E)$ des sections holomorphes de $E$ sur $V$ ?*

($\beta$) On sait, au moins depuis Riemann, que cette question ne possède pas de réponse simple à cause des phénomènes "d'irrégularité", *i.e.* de non-annulation des groupes de cohomologie supérieure. Le "bon problème" est plutôt :

*Calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré*

$$\chi(V; E) := \sum_{i\geq 0} (-1)^i \dim H^i(V; E).$$

Une solution à ce problème en termes d'invariants cohomologiques attachés à $V$ et $E$ est apportée par la formule

$$(1.3.1) \qquad \chi(V; E) = \int_V (\mathrm{ch}\, E \,.\, \mathrm{Td}\, T_V)^{(2n)}$$

où $n = \dim_{\mathbf{C}} V$ et où $\mathrm{Td}\, T_V$ désigne la classe de Todd du fibré tangent à $V$ et $\mathrm{ch}\, E$ le caractère de Chern de $E$. Cette formule, dont diverses variantes dans des cas particuliers où $V$ est une courbe ou une surface remontent à la fin du dix-neuvième siècle, a été établie par Hirzebruch, puis étendue par Washnitzer, puis Grothendieck (*cf.* par exemple [Fu], chap. 15). Ces derniers auteurs travaillent dans un cadre purement algébrique en utilisant la *théorie de l'intersection* sur $V$ : les fibrés vectoriels $E$ et $T_V$ ont des classes caractéristiques $\mathrm{ch}\, E$ et $\mathrm{Td}\, T_V$ dans les *groupes de Chow* $\mathrm{CH}^*(V)_{\mathbf{Q}}$ ; l'intégration sur la classe fondamentale $\int_V$ des classes de cohomologie possède une contrepartie algébrique, le *degré*

$$\begin{aligned} \deg_V : \mathrm{CH}^n(V) &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ [\sum_i n_i\, P_i] &\longmapsto \sum_i n_i\,, \end{aligned}$$

et la formule de Riemann-Roch peut s'écrire

$$\chi(V; E) = \deg_V (\mathrm{ch}\, E \,.\, \mathrm{Td}\, T_V)^{(n)}\,.$$

($\gamma$) Sous des hypothèses convenables sur $E$ (positivité,...), les groupes de cohomologie supérieure $H^i(V; E)$, $i \geq 1$, s'annulent et la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch (1.3.1) permet de calculer $\dim H^0(V; E)$. Il en va en particulier ainsi lorsque $E$ est de la forme $E_0 \otimes \mathcal{L}^n$, où $\mathcal{L}$ est un fibré en droites ample sur $V$, et que $n$ est suffisamment grand.

### 1.4. Le problème de Riemann-Roch arithmétique

La théorie de Gillet et Soulé fournit un analogue arithmétique des énoncés géométriques du paragraphe précédent.

($\alpha$) Une version arithmétique "naïve" du problème de Riemann-Roch peut être formulée comme suit :

*Soit $V$ une variété arithmétique, propre sur* $\mathrm{Spec}\, \mathbf{Z}$, *et soit* $\overline{E} = (E, \|\ \|)$ *un fibré vectoriel hermitien sur $V$. Combien existe-t-il de sections $s$ de $E$ sur $V$ telles que, sur $V(\mathbf{C})$, on ait $\|s_{\mathbf{C}}\| \leq 1$ ?*

On observera que le $\mathbf{Z}$-module $H^0(V; E)$ des sections de $E$ sur $V$ est libre et de type fini, et s'identifie à un réseau dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de

dimension finie
$$H^0(V_{\mathbf{Q}}; E_{\mathbf{Q}}) \simeq H^0(V; E) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}.$$
Les sections cherchées sont les éléments de $H^0(V_{\mathbf{Q}}; E_{\mathbf{Q}})$ qui satisfont à la fois à des conditions d'intégralité (appartenir au réseau $H^0(V; E)$) et à une condition sur leur taille archimédienne, condition qui joue le rôle "aux places à l'infini" des conditions d'intégralité.

($\beta$) On peut deviner une forme plus cohomologique du problème de Riemann-Roch arithmétique grâce à l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions, en réécrivant la formule (1.3.1) lorsque la variété projective lisse $V$ est munie d'un morphisme (plat) $\pi : V \to C$ vers une courbe projective lisse $C$.

La caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(V; E)$ peut se calculer *via* le morphisme $\pi$ : elle coïncide avec la caractéristique $\chi(C; \mathrm{R}\pi_* E)$ de l'image directe $\mathrm{R}\pi_* E$ de $E$ (dans la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux cohérents sur $C$). Or la formule de Riemann-Roch sur $C$ s'écrit

$$\chi(C; \mathrm{R}\pi_* E) = \mathrm{rg}\, \mathrm{R}\pi_* E \,.\, \int_C (\mathrm{Td}\, T_C)^{(2)} + \deg \mathrm{R}\pi_* E \,. \tag{1.4.1}$$

De plus, le rang $\mathrm{rg}\, \mathrm{R}\pi_* E$ est donné par

$$\mathrm{rg}\, \mathrm{R}\pi_* E = \chi(\pi^{-1}(y); E) \tag{1.4.2}$$

pour tout $y \in C$, et le degré $\deg \mathrm{R}\pi_* E$ est aussi le degré du fibré en droites "déterminant de l'image directe" (Grothendieck, Knudsen, Mumford ; *cf.* [KM])

$$\lambda(E) := \det \mathrm{R}\pi_* E \tag{1.4.3}$$

dont la fibre en $y \in C$ est naturellement isomorphe au produit tensoriel

$$\bigotimes_{i \geq 0} [\det H^i(\pi^{-1}(y); E)]^{(-1)^i} .$$

Posons

$$\mathrm{Td}\, V/C = \mathrm{Td}\, T_V \,.\, (\pi^* \, \mathrm{Td}\, T_C)^{-1} . \tag{1.4.4}$$

La relation (1.4.2) et la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch (1.3.1) appliquées aux fibres lisses de $\pi$ montrent que, si $n = \dim_{\mathbf{C}} V$, on a

$$\operatorname{rg} \mathrm{R}\pi_* E \,.\, \int_C (\operatorname{Td} T_C)^{(2)} = \int_V (\operatorname{ch} E \,.\, \operatorname{Td} V/C)^{(2n-2)}\, \pi^* (\operatorname{Td} T_C)^{(2)}$$

La relation (1.4.1), jointe aux égalités

$$\chi(C; \mathrm{R}\pi_* E) = \chi(V; E) \quad \text{et} \quad \deg \mathrm{R}\pi_*(E) = \deg \lambda(E),$$

montre alors que (1.3.1) est équivalente à

$$\deg \lambda(E) = \int_V (\operatorname{ch} E \,.\, \operatorname{Td} T_V)^{(2n)} - \int_V (\operatorname{ch} E \,.\, \operatorname{Td} V/C)^{(2n-2)}\, \pi_* (\operatorname{Td} T_C)^{(2)}$$

ou encore, compte tenu de (1.4.4)

$$\deg \lambda(E) = \int_V (\operatorname{ch} E \,.\, \operatorname{Td} V/C)^{(2n)} \,.$$

Une formule analogue est valable, où les classes caractéristiques sont calculées dans le groupe de Chow de $V$ :

$$\deg \lambda(E) = \deg_V (\operatorname{ch} E \,.\, \operatorname{Td} V/C)^{(n)} \,. \tag{1.4.5}$$

Cette formule est en fait un cas particulier du théorème de Riemann-Roch relatif de Grothendieck. Nous venons de montrer que, compte tenu de la formule de Riemann-Roch dans la fibre générique de $\pi$, elle est essentiellement équivalente à la formule de Riemann-Roch sur $V$ tout entier.

Dans la situation arithmétique, où $V$ est une variété arithmétique telle que $\pi : V \to \operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ soit propre et où $E$ est un faisceau cohérent localement libre sur $V$, la construction du déterminant de l'image directe $\det \mathrm{R}\pi_* E$ conserve un sens, et fournit un fibré en droite $\lambda(E)$ sur $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$, *i.e.* un $\mathbf{Z}$-module libre de rang 1, muni d'un isomorphisme canonique

$$\lambda(E) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \simeq \bigotimes_{i \geq 0} [\det H^i(V_{\mathbf{Q}}, E_{\mathbf{Q}})]^{(-1)^i} \,.$$

Ce fibré en droites possède un degré arakelovien, pourvu qu'on l'ait muni d'une métrique. Lorsque $V(\mathbf{C})$ est muni d'une métrique kählerienne et $E_{\mathbf{C}}$ d'une structure hermitienne, il y a pour cela une construction naturelle, due à Quillen, qui fait appel à la torsion analytique de Ray et Singer (*cf.* [Q], [RS]) et que nous décrirons plus loin (§4.1).

La discussion qui précède conduit à poser le problème de Riemann-Roch arithmétique dans les termes suivants :

*Calculer le degré arakelovien du fibré en droites $\lambda(E)$ muni de la métrique de Quillen déterminée par une métrique hermitienne $\|.\|_E$ sur $E_{\mathbf{C}}$ et une métrique kählerienne sur $V(\mathbf{C})$.*

Une formule pour ce degré a été conjecturée ([GS7]) puis récemment démontrée ([GS10]) par Gillet et Soulé. Leur formule est analogue à la formule de Riemann-Roch géométrique (1.4.5), mais fait appel à la théorie de l'intersection et à la théorie des classes caractéristiques arithmétiques.

## 2. THÉORIE DE L'INTERSECTION ARITHMÉTIQUE (*cf.* [GS5])

### 2.1. Courants de Green

Soit $V$ une variété analytique complexe.

On note $A^{p,q}(V)$ (resp. $\mathcal{D}^{p,q}(V)$) l'espace des formes différentielles $C^\infty$ (resp. des courants) de type $(p,q)$ sur $V$. La différentiation extérieure $d$ se décompose en $d = d' + d''$, où $d'A^{p,q}(V) \subset A^{p+1,q}(V)$ et $d''A^{p,q}(V) \subset A^{p,q+1}(V)$, et l'on pose

$$d^c = \frac{1}{4\pi i}(d' - d'').$$

On a ainsi

$$dd^c = -d^c d = -\frac{1}{2\pi i}\, d'd''.$$

On pose

$$\widetilde{A}^{p,q}(V) = A^{p,q}(V)/(d'A^{p-1,q}(V) + d''A^{p,q-1}(V))$$

et

$$\widetilde{\mathcal{D}}^{p,q}(V) = \mathcal{D}^{p,q}(V)/(d'\mathcal{D}^{p-1,q}(V) + d''\mathcal{D}^{p,q-1}(V)).$$

L'application $dd^c : \mathcal{D}^{p,q}(V) \to \mathcal{D}^{p+1,q+1}(V)$ se factorise en une application $dd^c : \widetilde{\mathcal{D}}^{p,q}(V) \to \mathcal{D}^{p+1,q+1}(V)$.

On déduit alors des propriétés classiques de la $d$- et de la $d''$-cohomologie sur une variété complexe :

**PROPOSITION 2.1.**— 1) *L'application naturelle* $\widetilde{A}^{p,q}(V) \to \widetilde{\mathcal{D}}^{p,q}(V)$ *est injective.*

2) *Pour tout* $\varphi \in \widetilde{\mathcal{D}}^{p,q}(V)$

$$dd^c\varphi \in A^{p+1,q+1}(V) \Longrightarrow \varphi \in \widetilde{A}^{p,q}(V).$$

3) *Lorsque $V$ est compacte et kählerienne, la restriction de l'application canonique $\mathcal{D}^{p,q}(V) \to \widetilde{\mathcal{D}}^{p,q}(V)$ à l'espace $\mathcal{H}^{p,q}(V)$ des formes harmoniques de type $(p,q)$ sur $V$ est injective, son image est le noyau de $dd^c$ et l'image de $dd^c$ est formée des courants $d$-exacts dans $\mathcal{D}^{p+1,q+1}(V)$.*

Si $Z$ est une sous-variété analytique complexe de $V$ de codimension $p$, on note $\delta_Z$ le courant d'intégration sur $Z$, c'est-à-dire le courant dans $\mathcal{D}^{p,p}(V)$ défini par

$$\int_V \delta_Z\,\alpha = \int_Z \alpha\,.$$

Le courant d'intégration $\delta_Z$ est encore bien défini lorsque $Z$ est un sous-ensemble analytique de $V$ de codimension $p$, même si le lieu $Z_s$ des points singuliers de $Z$ n'est pas vide. C'est l'unique courant fermé d'ordre 0 dans $\mathcal{D}^{p,p}(V)$, qui prolonge le courant $\delta_{Z\setminus Z_s}$ sur $V\setminus Z_s$. On étend par linéarité la définition de $\delta_Z$ à tous les cycles analytiques $Z$ sur $V$.

Si $f$ est une fonction méromorphe non identiquement nulle sur un sous-ensemble analytique irréductible $Z$ de $V$ de codimension $p-1$, la fonction $\log|f|^2$ est définie presque partout et est localement $L^1$ relativement à la classe de mesures sur $Z$ définie par $\delta_Z$ ; elle détermine donc un courant $\log|f|^2 . \delta_Z$ dans $\mathcal{D}^{p+1,q+1}(V)$. Ce courant satisfait à l'*équation de Poincaré-Lelong*

$$dd^c\,[\log|f|^2 . \delta_Z] = \delta_{\mathrm{div}\,f}\,, \tag{2.1.1}$$

où $\operatorname{div} f$ désigne le diviseur de $f$ (c'est un cycle analytique de codimension $p$ de $V$).

On appelle *courant de Green* pour un cycle analytique $Z$ de codimension $p$ sur $V$ tout élément $g \in \widetilde{\mathcal{D}}^{p-1,q-1}(V)$ tel que $dd^c g + \delta_Z$ soit une forme $C^\infty$. On appelle *forme de Green* pour $Z$ tout courant $g \in \mathcal{D}^{p-1,q-1}(V)$ localement $L^1$ sur $V$ et $C^\infty$ sur le complémentaire du support $|Z|$ de $Z$ tel que $dd^c g + \delta_Z$ soit une forme $C^\infty$.

La formule de Poincaré-Lelong montre que tout cycle de la forme $\operatorname{div} f$ possède un courant de Green. On peut en fait montrer que *tout cycle algébrique sur une variété quasi-projective complexe lisse possède une forme de Green.*

## 2.2. Groupes de Chow arithmétiques

Soit $X$ une variété arithmétique.

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on note $X^{(p)}$ l'ensemble des sous-schémas intègres de codimension $p$ et $Z^p(X)$ le groupe des cycles de codimension $p$ sur $X$, *i.e.* le groupe abélien libre engendré par $X^{(p)}$. On note $k(x)$ le corps résiduel d'un point $x$ de $X$ et, si $x \in X^{(p-1)}$ et $f \in k(x)^*$, on note $\operatorname{div} f$ le diviseur de $f$ ; c'est un élément de $Z^p(X)$

Le $p$-ième groupe de Chow de $X$, $\mathrm{CH}^p(X)$, est le quotient de $Z^p(X)$ par le sous-groupe $R^p(X)$ engendré par les cycles $\operatorname{div} f$, $f \in k(x)^*$, $x \in X^{(p-1)}$.

On note $\mathcal{D}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ (resp. $A^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$) le sous-espace de $\mathcal{D}^{p,p}(X(\mathbf{C}))$ (resp. $A^{p,p}(X(\mathbf{C}))$) formé des courants réels $T$ tels que $F_\infty^* T = (-1)^p T$ ; on note $\widetilde{\mathcal{D}}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ et $\widetilde{A}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ leurs images respectives dans $\widetilde{\mathcal{D}}^{p,p}(X(\mathbf{C}))$ et $\widetilde{A}^{p,p}(X(\mathbf{C}))$. On déduit aisément de la proposition 2.1 un énoncé analogue avec $X_{\mathbf{R}}$ substitué à $V$.

On appelle *cycle arithmétique de codimension $p$ sur $X$* tout couple $(Z, g) \in Z^p(X) \oplus \widetilde{\mathcal{D}}^{p-1,p-1}(X_{\mathbf{R}})$ tel que $g$ soit un courant de Green pour le cycle analytique $Z(\mathbf{C})$ sur $X(\mathbf{C})$. L'ensemble de ces cycles arithmétiques sera noté $\widehat{Z}^p(X)$. Si $x \in X^{(p-1)}$ et $f \in k(x)^*$, on note $\widehat{\operatorname{div}} f$ le cycle arithmétique $(\operatorname{div} f, [-\log |f_{\mathbf{C}}|^2 \cdot \delta_{x(\mathbf{C})}])$.

Le *$p$-ième groupe de Chow arithmétique de $X$*, $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$, est défini comme le quotient de $\hat{Z}^p(X)$ par le sous-groupe $\hat{R}^p(X)$ engendré par les éléments $\widehat{\operatorname{div}} f$, $f \in k(x)^*$, $x \in X^{(p-1)}$. On pose $\widehat{\mathrm{CH}}^*(X) = \oplus_{p\geq 0} \widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$.

On dispose de morphismes canoniques de groupes abéliens

$$\begin{array}{rcl}
\zeta : \widehat{\mathrm{CH}}^p(X) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^p(X) \\
{[(Z,g)]} & \longmapsto & [Z] \\
\omega : \widehat{\mathrm{CH}}^p(X) & \longrightarrow & \ker d \cap \ker d^c \quad (\subset A^{p,p}(X_{\mathbf{R}})) \\
{[(Z,g)]} & \longmapsto & \delta_{Z(\mathbf{C})} + dd^c g \\
a : \widetilde{A}^{p-1,p-1}(X) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^p(X) \\
\eta & \longmapsto & [(0,\eta)]\,.
\end{array}$$

Rappelons qu'au schéma $X$ sont associés, outre les groupes de Chow $\mathrm{CH}^p(X)$, des groupes $\mathrm{CH}^{p,q}(X)$ définis comme les termes $E_2^{p,-q}$ d'une certaine suite spectrale due à Quillen calculant la $K$-théorie algébrique de $X$ (*cf.* par exemple [Gil]). En particulier

$$\mathrm{CH}^{p,p-1}(X) = \frac{\ker\left(d^{p-1} : \oplus_{x\in X^{(p-1)}} k(x)^* \to \oplus_{x\in X^{(p)}} \mathbf{Z}\right)}{\operatorname{im}\left(d^{(p-2)} : \oplus_{x\in X^{(p-2)}} K_2\, k(x) \to \oplus_{x\in X^{(p-1)}} k(x)^*\right)}$$

où $d^{p-1}$ envoie $f \in k(x)^*$ sur $\operatorname{div} f$ et où $d^{p-2}$ est essentiellement le symbole modéré. On définit alors un morphisme de groupes

$$\rho : \mathrm{CH}^{p,p-1}(X) \longrightarrow \widetilde{A}^{p-1,p-1}(X_{\mathbf{R}})$$

en posant

$$\rho([(f^x)_{x\in X^{(p-1)}}]) = -\sum_{x\in X^{p-1}} \log|f^x_{\mathbf{C}}|^2\, \delta_{x(\mathbf{C})}.$$

(Cette somme appartient bien à $\widetilde{A}^{p-1,p-1}(X_{\mathbf{R}})$ d'après l'équation de Poincaré-Lelong (2.1.1) et la proposition 2.1.2), puisque $\sum_{x\in X^{p-1}} \operatorname{div} f^x = 0$. Le morphisme $\rho$ est étroitement lié au régulateur de Beilinson (*cf.* [Be1] et [GS5], §3.5.)

On note enfin $Z^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ le sous-espace de $A^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ constitué des formes fermées, $H^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ son image dans la cohomologie de de Rham de

$X(\mathbf{C})$, $h$ l'application canonique de $Z^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ sur $H^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ et $c$ l'application naturelle des groupes de Chow vers la cohomologie de de Rham

$$\begin{aligned} c : \mathrm{CH}^p(X) &\longrightarrow H^{p,p}(X_{\mathbf{R}}) \\ [Z] &\longmapsto [\delta_{Z(\mathbf{C})}]. \end{aligned}$$

On a $c \circ \zeta = h \circ \omega$. Lorsque $X_{\mathbf{Q}}$ est projective, $H^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ s'identifie avec l'image de $Z^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ dans $\widetilde{A}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ et avec l'espace $\mathcal{H}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ des formes harmoniques (relativement à une structure kählerienne sur $X(\mathbf{C})$) dans $A^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$.

On peut alors décrire le groupe de Chow arithmétique $\widehat{\mathrm{CH}}^*(X)$ au moyen de suites exactes à cinq termes :

**THÉORÈME 2.2.**— *Le diagramme suivant est une suite exacte*

$$\mathrm{CH}^{p,p-1}(X) \xrightarrow{\rho} \widetilde{A}^{p-1,p-1}(X_{\mathbf{R}}) \xrightarrow{a} \widehat{\mathrm{CH}}^p(X) \xrightarrow{\zeta} \mathrm{CH}^p(X) \longrightarrow 0. \tag{2.2.1}$$

*Lorsque $X_{\mathbf{Q}}$ est projective, il en va de même du diagramme*

$$\begin{aligned} &\mathrm{CH}^{p,p-1}(X) \xrightarrow{\rho} H^{p-1,p-1}(X_{\mathbf{R}}) \xrightarrow{a} \widehat{\mathrm{CH}}^p(X) \\ &\xrightarrow{(\zeta,-\omega)} \mathrm{CH}^p(X) \oplus Z^{p,p}(X_{\mathbf{R}}) \xrightarrow{c+h} H^{p,p}(X_{\mathbf{R}}) \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

### 2.3. Fibrés en droites hermitiens et cycles arithmétiques de codimension 1

Soit $X$ une variété arithmétique. L'ensemble $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels hermitiens de rang 1 est muni d'une structure de groupe définie par le produit tensoriel. L'élément neutre de ce groupe est $\mathcal{O}_X$ muni de la métrique triviale ($\|1\| = 1$) et l'opposé de la classe d'un fibré en droites hermitien $(L, h)$ est celle de $L^{-1}$ muni de la métrique duale de la métrique $h$.

Rappelons que si $\overline{F} = (F, \|\ \|)$ est un fibré en droites hermitien sur une variété analytique complexe $V$, sa *première forme de Chern* est l'élément de $A^{1,1}(V)$ définie localement comme

$$c_1(\overline{F}) = -dd^c \log \|s\|^2 \tag{2.3.1}$$

où $s$ désigne une section holomorphe locale non nulle de $F$ (le second membre de (2.3.1) est bien indépendant du choix de $s$, puisque le logarithme du module d'une fonction holomorphe non nulle est pluriharmonique, *i.e.* appartient à $\ker dd^c$).

Soit $\overline{L} = (L, \| \ \|)$ un fibré en droites hermitien sur une variété arithmétique $X$ et soit $s$ une section rationnelle non nulle de $L$. Cette section définit une section méromorphe $s_{\mathbf{C}}$ de $L_{\mathbf{C}}$. La fonction $\log \|s_{\mathbf{C}}\|$ est localement $L^1$ sur $X(\mathbf{C})$ et définit donc un élément de $\mathcal{D}^{0,0}(X_{\mathbf{R}})$ (*cf.* §2.1). Soient $\mathrm{div}(s) \in Z^1(X)$ le diviseur de $s$ et $c_1(\overline{L_{\mathbf{C}}}) \in A^{1,1}(X_{\mathbf{R}})$ la première forme de Chern de $(\overline{L}_{\mathbf{C}}, \| \ \|)$. Il découle alors de l'équation de Poincaré-Lelong (2.1.1) et de l'égalité (2.3.1) :

$$dd^c \log \|s_{\mathbf{C}}\|^2 = \delta_{\mathrm{div}(s_{\mathbf{C}})} - c_1(\overline{L_{\mathbf{C}}}).$$

Par conséquent, le couple $\widehat{\mathrm{div}}(s) := (\mathrm{div}(s), -\log \|s_{\mathbf{C}}\|^2)$ appartient à $\widehat{Z}^1(X)$.

La proposition suivante étend aux variétés arithmétiques la correspondance classique entre classes d'équivalence linéaire de diviseurs et classes d'isomorphisme de fibrés en droites.

**PROPOSITION 2.4.**— 1) *La classe $\hat{c}_1(\overline{L})$ de $\widehat{\mathrm{div}}(s)$ dans $\widehat{\mathrm{CH}}^1(X)$ ne dépend pas du choix de $s$.*

2) $\omega(\hat{c}_1(\overline{L})) = c_1(\overline{L}) \quad ; \quad \zeta(\hat{c}_1(\overline{L})) = c_1(L)$. (1)

3) *Si $\| \ \|$ et $\| \ \|' = e^{\varphi/2} \| \ \|$ sont deux métriques hermitiennes sur le fibré en droites $L$ sur $X$, alors*

$$\hat{c}_1(L, \| \ \|) - \hat{c}_1(L, \| \ \|') = a(\varphi). \tag{2.3.2}$$

4) *La "première classe de Chern arithmétique" $\hat{c}_1$ détermine un isomorphisme*

$$\hat{c}_1 : \widehat{\mathrm{Pic}}(X) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{CH}}^1(X).$$

Compte tenu de cet isomorphisme, la suite exacte (2.2.1) devient, lorsque $p = 1$ :

$$\mathcal{O}(X)^* \xrightarrow{\rho} A^{0,0}(X_{\mathbf{R}}) \xrightarrow{a} \widehat{\mathrm{Pic}}(X) \xrightarrow{b} \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow 0$$

(1) $c_1(L)$ désigne la première classe de Chern de $L$ dans $\mathrm{CH}^1(X)$, *i.e.* la classe d'équivalence linéaire de $\mathrm{div}(s)$.

où

$$\rho(f) = -\log |f_{\mathbf{C}}|^2$$

$$a(g) = [(\mathcal{O}_X, \| \ \|_g)] \qquad \text{où } \|1\|_g^2 = e^g$$

$$b([\overline{L}]) = [L].$$

Lorsque $X$ est le spectre de l'anneau $\mathcal{O}_K$ des entiers d'un corps de nombres $K$, cette suite exacte devient, en notant $r_1$ et $r_2$ le nombre de places réelles et complexes de $K$ et $\mathcal{C}\ell\,\mathcal{O}_K$ le groupe des classes d'idéaux de $K$,

$$\mathcal{O}_X^* \xrightarrow{\rho} \mathbf{R}^{r_1+r_2} \longrightarrow \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathcal{C}\ell\,\mathcal{O}_K \longrightarrow 0$$

et $\rho$ s'identifie au régulateur de Dirichlet.

### 2.4. Fonctorialité et structure multiplicative

Nous pouvons résumer les résultats essentiels de l'article [GS5] en l'énoncé suivant :

**THÉORÈME 2.5.**— 1) Image inverse. *Tout morphisme $f : X \to Y$ entre variétés arithmétiques détermine un morphisme de groupes abéliens $f^* : \widehat{\mathrm{CH}}^*(Y) \to \widehat{\mathrm{CH}}^*(X)$. Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont des morphismes de variétés arithmétiques, on a $f^* g^* = (g \circ f)^*$ ; jointe à la fonctorialité des groupes $\mathrm{CH}^{p,p-1}$, $\mathrm{CH}^p$, etc., cette fonctorialité fait des suites exactes (2.2.1) et (2.2.2) des suites exactes naturelles.*

2) Image directe par un morphisme propre. *Tout morphisme propre $f : X \to Y$, de dimension relative $d$, telle que $f_{\mathbf{C}} : X(\mathbf{C}) \to Y(\mathbf{C})$ soit lisse, détermine un morphisme de groupes abéliens $f_* : \widehat{\mathrm{CH}}^*(X) \to \widehat{\mathrm{CH}}^{*-d}(Y)$. La formule de projection est vérifiée :*

$$f_*(x \,.\, f^*(y)) = f_*(x) \,.\, y \,.$$

3) Structure multiplicative. *Le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\widehat{\mathrm{CH}}^*(X)_{\mathbf{Q}}$ est muni d'une structure d'algèbre unifère graduée et commutative. Cette structure multiplicative est compatible,* via *$\zeta$, avec la structure multiplicative sur $\mathrm{CH}^*(X)_{\mathbf{Q}}$ définie par l'intersection des classes de cycles algébriques, et,* via *$\omega$, avec la multiplication extérieure des formes différentielles. Elle est aussi compatible avec la fonctorialité par image inverse.*

La construction rigoureuse de ces fonctorialités et de cette structure multiplicative présente de multiples difficultés techniques. Heuristiquement, ces opérations sont définies par les formules suivantes :

- $f^*[(Z,g)] = [(f^{-1}(Z), f^*_{\mathbf{C}}\, g)]$ si $f$ rencontre $Z$ proprement, *i.e.* si $\operatorname{codim} f^{-1}(|Z|) = \operatorname{codim}|Z|$.
- $f_*[(Z,g)] = [(f_*Z, f_{\mathbf{C}*}\, g)]$.
- $[(Z_1,g_1)]\,[(Z_1,g_2)] = [Z_1 \cap Z_2\,,\, g_1 * g_2)]$ si $Z_1$ et $Z_2$ se rencontrent proprement, *i.e.* si $\operatorname{codim}|Z_1| \cap |Z_2| = \operatorname{codim}|Z_1| + \operatorname{codim}|Z_2|$. Dans cette formule $Z_1 \cap Z_2$ est le cycle de codimension $\operatorname{codim}|Z_1| + \operatorname{codim}|Z_2|$ supporté par $|Z_1| \cap |Z_2|$, dont les multiplicités sont données par la "formule des Tor" de Serre (*cf.* [Se]), et $g_1 * g_2$ le "$*$-produit" de $g_1$ et $g_2$, *i.e.* le courant de Green pour $Z_1 \cap Z_2$ "défini" en termes de représentants $\breve{g}_1$ et $\breve{g}_2$ de $g_1$ et $g_2$ par

$$(2.4.1) \quad g_1 * g_2 = \breve{g}_1\, \delta_{Z_2(\mathbf{C})} + \omega(Z_1,g_1)\, \breve{g}_2 \qquad \operatorname{mod}\, (\operatorname{im} d' + \operatorname{im} d'')\,.$$

On a en effet, formellement :

$$\begin{aligned}(2.4.2) \qquad dd^c(g_1 * g_2) &= dd^c g_1\, \delta_{Z_2(\mathbf{C})} + \omega(Z_1,g_1)\, dd^c g_2 \\ &= (-\delta_{Z_1(\mathbf{C})} + \omega(Z_1,g_1))\, \delta_{Z_2(\mathbf{C})} \\ &\qquad + \omega(Z_1,g_1)(-\delta_{Z_2(\mathbf{C})} + \omega(Z_2,g_2)) \\ &= \omega(Z_1,g_1)\, \omega(Z_2,g_2) - \delta_{Z_1(\mathbf{C}) \cap Z_2(\mathbf{C})}\,.\end{aligned}$$

Pour donner un sens à ces formules, on est confronté à deux types de difficultés :

• des *difficultés analytiques* : la formule (2.4.1) requiert, pour prendre un sens, que l'on sache définir le produit de courants $\breve{g}_1\, \delta_{Z_2(\mathbf{C})}$. En fait, Gillet et Soulé montrent que l'on peut choisir comme représentant $\breve{g}_1$ de $g_1$ une forme de Green telle que l'intégration contre la restriction de $\breve{g}_1$ à la partie lisse de $Z_2(\mathbf{C}) \backslash |Z_1(\mathbf{C})|$ définisse bien un courant et que le calcul (2.4.2) soit valable. Pour cela, ils introduisent une classe de formes de Green ayant de "bonnes" singularités (les formes de Green "de type logarithmique"), au moyen de laquelle ils établissent diverses propriétés du $*$-produit telles que sa commutativité ou son associativité.

• des *difficultés algébro-géométriques* : pour définir, par exemple, la structure multiplicative de $\widehat{\mathrm{CH}}^*(X)$ au moyen des formules ci-dessus, il faudrait disposer d'un "lemme de déplacement" qui assurerait que, quitte à remplacer deux cycles sur $X$ par des cycles rationnellement équivalents, on peut supposer qu'ils se rencontrent proprement. Il en va ainsi sur la fibre générique $X_{\mathbf{Q}}$, qui est une variété lisse quasi-projective sur $\mathbf{Q}$ à laquelle on peut appliquer le classique lemme de déplacement de Chow. Malheureusement, pour des cycles de codimension $> 1$ sur une variété arithmétique, on ne dispose pas d'un tel résultat.

Cette difficulté, qui apparaît déjà si l'on cherche à définir une structure multiplicative sur $\mathrm{CH}^*(X)$, peut être résolue après tensorisation par $\mathbf{Q}$ au moyen d'une construction $K$-théorique (*cf.* [S1], [GS4]). Soient $Z_1$ et $Z_2$ deux cycles sur $X$ de codimension $p_1$ et $p_2$, se rencontrant proprement dans $X_{\mathbf{Q}}$. Pour tout sous-schéma fermé $Y$ de $X$, notons $K_0^Y(X)$ la $K$-théorie de $X$ à support dans $Y$ et $K_0^Y(X)^{(j)}$, $j \in \mathbf{N}$, la partie de $K_0^Y(X)_{\mathbf{Q}}$ de poids $j$ pour les opérations d'Adams. Soit $[Z_i] \in K_0^{|Z_i|}(X)^{(p_i)}$ la classe de $Z_i$, et soit $Z \in Z^{p_1+p_2}(X)_{\mathbf{Q}}$ un cycle à support dans $|Z_1| \cap |Z_2|$, dont l'image dans $K_0^{|Z_1|\cap|Z_2|}(X)^{(p_1+p_2)}$ coïncide avec la composante de poids $p_1 + p_2$ du produit $[Z_1] . [Z_2]$. La classe du cycle $Z$ dans $\mathrm{CH}^{p_1+p_2}(X)_{\mathbf{Q}}$ définit alors le "produit d'intersection" des classes dans $\mathrm{CH}^*(X)$ de $Z_1$ et $Z_2$, et si $g_1$ et $g_2$ sont des courants de Green pour $Z_1(\mathbf{C})$ et $Z_2(\mathbf{C})$, le cycle arithmétique $(Z, g_1 * g_2)$ définit le produit dans $\mathrm{CH}^*(X)_{\mathbf{Q}}$ des classes dans $\mathrm{CH}^*(X)$ de $(Z_1, g_1)$ et $(Z_2, g_2)$.

Signalons que l'on peut définir dans $\widehat{\mathrm{CH}}^*(X)$ le produit de deux éléments de $\widehat{\mathrm{CH}}^*(X)$, sans tensoriser par $\mathbf{Q}$, lorsque l'un d'entre eux est de degré 1 ou lorsque $X$ est un schéma lisse sur le spectre d'un anneau d'entiers de corps de nombres (en utilisant les constructions de Fulton [Fu]).

On notera enfin les formules :

$$(2.4.3) \qquad a(\eta)C = a(\eta\,\omega(C))$$

$$(2.4.4) \qquad a(\eta)\,a(\eta') = a(dd^c\eta\,.\,\eta')$$
$$= 0 \quad \text{si } \eta \text{ ou } \eta' \text{ est } d-,\ d'- \text{ ou } d'' \text{-fermé}.$$

## 2.5. Degré arithmétique et hauteur des cycles

Lorsque $K = \mathbf{Q}$, la suite exacte (2.3.3) devient l'isomorphisme

$$a : \mathbf{R} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{CH}}^1(\operatorname{Spec} \mathbf{Z}).$$

On vérifie immédiatement que, compte tenu de l'identification

$$\widehat{\mathrm{CH}}^1(\operatorname{Spec} \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{Pic}}(\operatorname{Spec} \mathbf{Z}),$$

l'isomorphisme inverse de $2a$ associe à la classe d'un fibré en droites hermitien $\overline{L}$ sur $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ le degré arakelovien $\widehat{\deg}\, \overline{L}$. On le notera

$$\widehat{\deg} : \widehat{\mathrm{CH}}^1(\operatorname{Spec} \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}.$$

Soit $X$ une variété arithmétique tel que le morphisme $f : X \to \operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ soit *propre*, et soit $d$ la dimension relative de $f$ ($X$ est donc de dimension de Krull "absolue" $d+1$). On peut composer le degré arakelovien $\widehat{\deg}$ avec l'application

$$f_* : \widehat{\mathrm{CH}}^{d+1}(X) \longrightarrow \widehat{\mathrm{CH}}^1(\operatorname{Spec} \mathbf{Z}).$$

On obtient ainsi le *degré arithmétique*

$$\widehat{\deg}_X = \widehat{\deg} \circ f_* : \widehat{\mathrm{CH}}^{d+1}(X) \longrightarrow \mathbf{R},$$

qui est l'analogue arithmétique de l'application

$$\deg_V : \mathrm{CH}^d(V) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

définie pour toute variété propre de dimension $d$ sur un corps.

Lorsque $X$ est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres $K$, $\widehat{\deg}_X$ coïncide encore avec le degré d'Arakelov des fibrés en droites hermitiens sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. En général, un cycle arithmétique de codimension $d+1$ sur $X$ est de la forme $\left(\sum_{i=1}^N n_i\, P_i, g\right)$, où les $P_i$ sont des points fermés de $X$ et où $g \in \widetilde{A}^{d,d}(X_{\mathbf{R}})$, et son degré arithmétique est donné par

$$\widehat{\deg}_X\, [(\sum_{i=1}^N n_i\, P_i, g)] = \sum_{i=1}^N n_i \log \# k(P_i) + \frac{1}{2} \int_{X(\mathbf{C})} g.$$

Soit maintenant $\overline{L}$ un fibré en droites hermitien sur $X$. Si $Y$ est une sous-variété arithmétique de $X$, *i.e.* une variété arithmétique $Y$ munie d'une immersion fermée $i : Y \hookrightarrow X$, on pose

$$h_{\overline{L}}(Y) = \widehat{\deg}_Y \, i^* \widehat{c}_1(\overline{L})^{d'+1},$$

où $d'$ désigne la dimension relative de $Y$ sur $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$. On généralise ainsi la notion de hauteur d'un point de $X(\mathbf{Z})$ $(= X(\mathbf{Q}))$ relativement à $\overline{L}$. Cette définition peut être étendue à des cycles $Y$ dans $X$ qui ne sont pas réguliers (*cf.* §2.5). Si $Y$ est le diviseur d'une section rationnelle non identiquement nulle $s$ de $L$, alors il découle des définitions de $\widehat{\deg}_X$ et $\widehat{c}_1$ :

$$h_{\overline{L}}(Y) = h_{\overline{L}}(X) + \int_{X(\mathbf{C})} \log \|s_{\mathbf{C}}\| \, c_1(\overline{L}_{\mathbf{C}})^d.$$

Si l'on applique cette identité à $X = \mathbf{P}^N_{\mathbf{Z}}$ et à $\overline{L} = \overline{\mathcal{O}}(1)$ (*cf.* 1.2), on obtient, en notant $\omega_{FS}$ la forme de Fubini-Study $c_1(\overline{\mathcal{O}}(1)_{\mathbf{C}}) = dd^c \log \sum_{i=0}^N |z_i|^2$ sur $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ :

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathcal{O}}(1)}(\mathbf{P}^N) - h_{\overline{\mathcal{O}}(1)}(\mathbf{P}^{N-1}) &= \int_{\mathbf{P}^N(\mathbf{C})} \log \frac{|z_0|}{(|z_0|^2 + \cdots + |z_N|^2)^{1/2}} \, \omega_{FS}^N \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}\right) \end{aligned}$$

et donc, par récurrence, que la hauteur de $\mathbf{P}^N$ relativement à $\overline{\mathcal{O}}(1)$ est égale au $N$-ième nombre de Stoll (*cf.* [GS6] et [St]) :

$$h_{\overline{\mathcal{O}}(1)}(\mathbf{P}^N_{\mathbf{Z}}) = \sigma_N := \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N} \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j}.$$

On obtient aussi que si $P \in \mathbf{Z}[X_0, \cdots, X_N]$ est un polynôme homogène non nul de degré $d$ et si $Y$ est le cycle sur $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Z}}$ définie par $P = 0$, alors

$$h_{\overline{\mathcal{O}}(1)}(Y) = h_{\overline{\mathcal{O}}(1)}(\mathbf{P}^N_{\mathbf{Z}}) + \int_{\mathbf{P}^N(\mathbf{C})} \log \frac{|P(z_0, \cdots z_N)|}{\left(\sum_{i=0}^N |z_i|^2\right)^{d/2}} \, \omega_{FS}^N.$$

La hauteur $h_{\overline{\mathcal{O}}(1)}$ des variétés projectives intervient dans [Fa2] ainsi qu'en théorie de la transcendance (*cf.* [S3], [Ph]).

### 2.6. Variétés d'Arakelov

Lorsque la fibre générique d'une variété arithmétique $X$ est projective, il est naturel d'utiliser la théorie des formes harmoniques dans l'étude des courants de Green sur $X(\mathbf{C})$. C'est ce que faisait Arakelov dans son travail sur les surfaces arithmétiques. Plus généralement, cela conduit à poser :

**DÉFINITION 2.6.—** *Une variété d'Arakelov est un couple $\overline{X} = (X, \omega)$ formé d'une variété arithmétique $X$ de fibre générique $X_{\mathbf{Q}}$ projective et d'une forme de Kähler $\omega$ sur $X(\mathbf{C})$ telle que $F_\infty^* \omega = -\omega$.*

(Cette condition exprime l'invariance sous $F_\infty$ de la métrique riemannienne définie par $\omega$).

Soit donc $\overline{X}$ une variété d'Arakelov. La projection harmonique de $A^{p,p}(X(\mathbf{C}))$ vers $\mathcal{H}^{p,p}(X(\mathbf{C}))$ se factorise en une application de $\widetilde{A}^{p,p}(X(\mathbf{C}))$ vers $\mathcal{H}^{p,p}(X(\mathbf{C}))$. Nous noterons $\widetilde{\mathcal{H}}^{\perp\, p,p}(X_{\mathbf{R}})$ l'intersection avec $\widetilde{A}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ du noyau de cette application. On peut alors définir le *$p$-ième groupe de Chow-Arakelov de $\overline{X}$* comme le sous-groupe

$$\mathrm{CH}^p(\overline{X}) = \omega^{-1}(\mathcal{H}^{p,p}(X_{\mathbf{R}}))$$

de $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$. C'est en fait un facteur direct de $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$. On déduit en effet du point 3) de la proposition 2.1 que l'on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{CH}^p(\overline{X}) \oplus \widetilde{\mathcal{H}}^{\perp\, p-1,p-1}(X_{\mathbf{R}}) &\xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{CH}}^p(X) \\ c \oplus \eta &\longmapsto c + a(\eta)\,. \end{aligned}$$

La suite exacte (2.2.1) peut se réécrire sous la forme

$$\mathrm{CH}^{p,p-1}(X) \longrightarrow \mathcal{H}^{p-1,p-1}(X_{\mathbf{R}}) \xrightarrow{a} \mathrm{CH}^p(\overline{X}) \xrightarrow{\zeta} \mathrm{CH}^p(X) \longrightarrow 0\,.$$

On pose $\mathrm{CH}^*(\overline{X}) = \oplus_{p\geq 0} \mathrm{CH}^p(\overline{X})$. Lorsque $\oplus_{p\geq 0} \mathcal{H}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$ est une sous-algèbre de $\oplus_{p\geq 0} A^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$, par exemple si $X(\mathbf{C})$ est une courbe, une variété abélienne ou un espace hermitien symétrique (tel qu'un espace projectif, ou une grassmannienne), alors $\mathrm{CH}^*(\overline{X})_{\mathbf{Q}}$ est une sous-algèbre de $\widehat{\mathrm{CH}}^*(X)_{\mathbf{Q}}$. On prendra garde que ce n'est pas le cas en général — par exemple pour les espaces de drapeaux complets. Cette difficulté conduit à considérer le "gros groupe" $\widehat{\mathrm{CH}}^*(X)$ plutôt que se limiter au groupe $\mathrm{CH}^*(\overline{X})$.

Soit $Y$ un sous-schéma fermé de $X$, dont le support est de codimension $\geq p$, et soit $[Y] \in Z^p(X)$ le cycle qui lui est associé. Soit $g_Y \in \mathcal{H}^{p-1,p-1}(X_{\mathbf{R}})$ l'unique courant de Green pour $\delta_{[Y](\mathbf{C})}$ de projection harmonique nulle et tel que

$$dd^c g_Y + \delta_{[Y](\mathbf{C})} \in \mathcal{H}^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$$

(*cf.* Prop. 2.1, 3)). On définit la *classe fondamentale* $[Y]_A$ *de* $Y$ *dans* $\mathrm{CH}^p(\overline{X})$ comme la classe du cycle arithmétique $([Y], g_Y)$ (*cf.* [Fa2]).

Si $\overline{L}$ est un fibré en droites hermitiens sur $X$ tel que la forme $c_1(\overline{L_{\mathbf{C}}})$ et ses puissances soient harmoniques sur $X(\mathbf{C})$, on peut définir la hauteur relativement à $\overline{L}$ de $Y$ comme

$$h_{\overline{L}}(Y) = \widehat{\deg}_X([Y]_A \,.\, \hat{c}_1(\overline{L})^p)\,,$$

et l'on étend ainsi la définition du §2.4.

*Exemples* (*cf.* [GS6],I).— 1) Soit $\overline{\mathbf{P}}^N$ la variété d'Arakelov obtenue en munissant l'espace projectif $\mathbf{P}^N = \mathrm{Proj}\,\mathbf{Z}\,[X_0, \cdots X_N]$ de la forme de Fubini-Study $\omega_{FS}$. Notons $\mathbf{P}^k$ le sous-schéma intègre de $\mathbf{P}^N$ défini par

$$X_0 = \cdots = X_{N-k-1} = 0\,.$$

On a alors des isomorphismes

$$\begin{aligned} i_0 &: \mathrm{CH}^0(\overline{\mathbf{P}}^N) \simeq \mathbf{Z} \\ i_p &: \mathrm{CH}^p(\overline{\mathbf{P}}^N) \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{R} \qquad \text{si } 1 \leq p \leq N \\ i_{N+1} &: \mathrm{CH}^{N+1}(\overline{\mathbf{P}}^N) \simeq \mathbf{R} \end{aligned}$$

définis par

$$i_0^{-1}(n) = [(X, 0)] = n\,[\mathbf{P}^N]_A$$

$$i_p^{-1}(n \oplus \lambda) = n\,[\mathbf{P}^{N-p}]_A + a(\lambda \omega_{FS}^{p-1})$$

$$i_{N+1} = \widehat{\deg}_{\mathbf{P}_N}.$$

On a de plus, avec les notations de la fin du §2.5, si $k = 0, \cdots, N$ :

$$[\mathbf{P}^k]_A = \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{O}}(1))^{N-k} - a(2(\sigma_N - \sigma_k)\omega^{N-k-1}). \qquad (0 \leq k \leq N)$$

Ces relations, jointes aux identités (2.4.3), (2.4.4) et $\omega([\mathbf{P}^k]_A) = \omega_{FS}^{N-k}$, déterminent complètement la structure multiplicative de $\widehat{\mathrm{CH}}^*(\overline{\mathbf{P}}^N)$.

2) Plus généralement, soit $X$ une grassmannienne sur $\mathbf{Z}$ et soit $K$ un corps de nombres. Les anneaux $\mathrm{CH}^*(X)$, $\mathrm{CH}^*(X_{\mathbf{Q}})$, et $H^*(X(\mathbf{C}); \mathbf{Z})$ sont canoniquement isomorphes : ils coïncident avec l'anneau de polynômes tronqués engendré par les classes de Chern du fibré quotient canonique sur $X$. Notons le $M^*(X)$.

L'espace $X(\mathbf{C})$ possède une structure d'espace hermitien symétrique naturel, qui fait de $X$ ainsi que de $X_{\mathcal{O}_K} := X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$, une variété d'Arakelov, et l'on a un isomorphisme de groupes abéliens gradués :

$$\widehat{\mathrm{CH}}^*(\overline{X}_{\mathcal{O}_K}) \simeq M^*(X) \otimes \widehat{\mathrm{CH}}^*(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K).$$

## 3. CLASSES CARACTÉRISTIQUES ARITHMÉTIQUES

### 3.1. Classes de Bott-Chern

Soit $V$ une variété analytique complexe (lisse). Pour tout fibré vectoriel hermitien $\overline{E} = (E, h)$ sur $V$, il existe une unique connexion $\nabla_{\overline{E}}$ sur $E$ qui est unitaire et dont la composante antiholomorphe $\nabla_{\overline{E}}^{0,1}$ coïncide avec l'opérateur de Cauchy-Riemann $\overline{\partial}_E$ de $E$ (*cf.* [BC] Prop. 3.2, ou [GH] Lemma p. 73). On notera encore $K_{\overline{E}}$ la courbure $\nabla_{\overline{E}}^2$ de cette connexion ; c'est une $(1,1)$-forme sur $V$ à valeurs dans le fibré $\mathrm{End}(E)$ des endomorphismes de $E$.

Soit $\varphi \in \mathbf{Q}[[T_1, \cdots T_n]]$ une série formelle symétrique en $n$ variables, et pour tout $k \geq 0$, soit $\varphi^{(k)}$ sa composante homogène de degré $k$. On notera $\varphi^{(k)}$ l'unique application polynômiale sur les matrices complexes $n \times n$ qui soit invariante par conjugaison et qui vérifie

$$\varphi^{(k)}(M) = \varphi^{(k)}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

si $M$ est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Plus généralement, pour toute $\mathbf{Q}$-algèbre commutative $A$, cette application polynômiale "s'étend" en une application

$$\varphi^{(k)} : M_n(A) \to A.$$

Pour tout fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ sur $V$, de rang $n$, on définit

$$\varphi(\overline{E}) := \sum_{k \geq 0} \varphi^{(k)}(-\frac{1}{2\pi i} K_{\overline{E}}) \in \bigoplus_{k \geq 0} A^{k,k}(V)$$

en identifiant localement $\mathrm{End}(E)$ à $M_n(\mathbf{C})$, au moyen d'un repère $C^\infty$ de $E$, et en appliquant la discussion précédente à l'algèbre des formes différentielles de degré pair sur $V$. Notons $c_i(E)$ ($\in H^{2i}(V;\mathbf{Z})$) la $i$-ième classe de Chern de $E$ et $\sigma_i$ la $i$-ième fonction symétrique élémentaire de $T_1, \cdots, T_n$. La théorie de Chern-Weil établit que $\varphi(\overline{E})$ est une forme fermée et que si $\varphi = \psi(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$, où $\psi \in \mathbf{Q}[[X_1, , \cdots, X_n]]$, alors la classe de cohomologie de de Rham de $\varphi(\overline{E})$ coïncide avec la classe caractéristique

$$\psi(c_1(E), \cdots, c_n(E)) \in \bigoplus_{k \geq 0} H^{2k}(V;\mathbf{Q}) \quad (\subset \bigoplus_{k \geq 0} H^{2k}(V;\mathbf{R})).$$

En particulier, la classe de cohomologie de $\varphi(\overline{E})$ ne dépend pas de la métrique $h$. Plus généralement, si

$$\overline{\mathcal{E}} : 0 \to \overline{S} \to \overline{E} \to \overline{Q} \to 0$$

est une suite exacte courte de fibrés vectoriels hermitiens sur $V$ — c'est-à-dire la donnée de trois fibrés vectoriels hermitiens $\overline{S}$, $\overline{E}$ et $\overline{Q}$ sur $V$ et d'une suite exacte courte de fibrés vectoriels holomorphes

$$0 \to S \to E \to Q \to 0$$

reliant les fibrés vectoriels sous-jacents — et si $E$ est de rang $n$, alors les formes différentielles $\varphi(\overline{S}\oplus\overline{Q})$ et $\varphi(\overline{E})$ sont cohomologues. Dans leur travail sur la théorie de Nevanlinna, Bott et Chern ont montré qu'elles diffèrent en fait par une forme dans l'image de l'opérateur $dd^c$ (*cf.* [BC]). Plus précisément, on peut montrer ([BGS1], Theorem 1.2.9, [GS6] ; voir aussi [Do]) :

**THÉORÈME 3.1.**— *Soit $\varphi \in \mathbf{Q}[[T_1, \cdots, T_n]]$ une série formelle symétrique. Il est possible, de façon unique, d'associer à toute suite exacte courte*

$$\overline{\mathcal{E}} : 0 \longrightarrow \overline{S} \xrightarrow{i} \overline{E} \xrightarrow{p} \overline{Q} \longrightarrow 0$$

*de fibrés vectoriels hermitiens sur une variété analytique complexe $V$, telle que* $\operatorname{rg} E = n$, *une forme $\widetilde{\varphi}(\overline{\mathcal{E}}) \in \widetilde{A}(V)$ de sorte que*

i) $dd^c\,\widetilde{\varphi}(\overline{\mathcal{E}}) = \varphi(\overline{S} \oplus \overline{Q}) - \varphi(\overline{E})$

ii) *pour toute application holomorphe $f : W \to V$ entre variétés analytiques complexes*

$$\widetilde{\varphi}(f^*(\overline{\mathcal{E}})) = f^*(\widetilde{\varphi}(\overline{\mathcal{E}}))$$

iii) *si $\overline{\mathcal{E}}$ est scindée,* i.e. *si $\overline{\mathcal{E}}$ est de la forme*

$$0 \to \overline{S} \xrightarrow{i} \overline{S} \oplus \overline{Q} \xrightarrow{p} \overline{Q} \to 0$$

*où $i(x) = x \oplus 0$, $p(x \oplus y) = y$, alors $\widetilde{\varphi}(\overline{\mathcal{E}}) = 0$.*

Indiquons une construction de la classe $\widetilde{\varphi}$. Soit $\mathcal{O}(1)$ le fibré en droites de degré 1 sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, soit $\sigma$ une section holomorphe de $\mathcal{O}(1)$ s'annulant seulement à l'infini et soient $p_1$ et $p_2$ les projections de $X \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, respectivement sur $X$ et sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. On notera encore $S, E, Q$ et $\mathcal{O}(1)$ les fibrés $p_1^*S$, $p_1^*E$, $p_1^*Q$ et $p_2^*\mathcal{O}(1)$ sur $X \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Sur $X \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, considérons le fibré

$$S(1) = S \otimes \mathcal{O}(1)$$

et le morphisme

$$\mathrm{id} \otimes \sigma : S \longrightarrow S(1).$$

Le morphisme injectif

$$i \oplus (\mathrm{id} \otimes \sigma) : S \longrightarrow E \otimes S(1)$$

permet de construire le fibré quotient $\widetilde{E} = E \otimes S(1)/S$. Le noyau de la projection $\widetilde{E} \to E/S = Q$ s'identifie à $S(1)$ et la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow S(1) \longrightarrow \widetilde{E} \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

lorsqu'on la restreint à $X \times \{\infty\}$, s'identifie à

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow S \oplus Q \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

Soit $\widetilde{h}$ une métrique hermitienne sur $\widetilde{E}$ telle que les isomorphismes

$$\widetilde{E}_{|X\times\{0\}} \simeq E \qquad \text{et} \qquad \widetilde{E}_{|X\times\{\infty\}} \simeq S \oplus Q$$

soient des isométries. On déduit facilement de l'équation de Poincaré-Lelong que

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{\mathcal{E}}) := -\int_{pr_1} \varphi(\widetilde{E}, \widetilde{h}) \log |z|^2$$

satisfait aux conditions i), ii) et iii).

On appliquera ces constructions, outre aux fonctions symétriques $c_i = \sigma_i(T_1, \cdots T_n)$, à la classe de Chern totale $c = \sum_{i \geq 0} c_i$, au caractère de Chern

$$\mathrm{ch}(T_1, \cdots T_n) = \sum_{i=1}^{n} e^{T_i}$$

et à la classe de Todd

$$\mathrm{Td}(T_1, \cdots T_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{T_i}{1 - e^{-T_i}}\,.$$

### 3.2. Classes caractéristiques arithmétiques

Le résultat principal de [GS6], I, est le théorème suivant qui étend aux fibrés hermitiens de rang $> 1$ les constructions du §2.3, en montrant que l'on dispose d'une théorie des classes caractéristiques pour les fibrés vectoriels hermitiens sur les variétés arithmétiques compatible avec la théorie des classes caractéristiques sur les schémas (*cf.* [S1], [GS4]) et avec la théorie de Chern-Weil :

**THÉORÈME 3.2.**— *À tout fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ de rang $n$ sur une variété arithmétique $X$ et à toute série symétrique $\varphi \in \mathbf{Q}[[T_1, \cdots, T_n]]$, on peut associer une classe caractéristique $\hat{\varphi}(\overline{E}) \in \widehat{\mathrm{CH}}^*(X)_{\mathbf{Q}}$ de manière à satisfaire aux conditions suivantes :*

I. Fonctorialité. *Si $f : Y \to X$ est un morphisme entre variétés arithmétiques et si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien sur $X$, alors*

$$f^*(\hat{\varphi}(\overline{E})) = \hat{\varphi}(f^*(\overline{E})).$$

II. Normalisation. *Si $\overline{E}$ est la somme directe orthogonale de fibrés en droites $\overline{L}_1, \cdots, \overline{L}_n$, alors*

$$\hat{\varphi}(\overline{E}) = \varphi(\hat{c}_1(\overline{L}_1), \cdots, \hat{c}_1(\overline{L}_n)).$$

III. Tensorisation par un fibré en droites. *Posons*

$$\varphi(T_1 + T, \cdots, T_n + T) = \sum_{i \geq 0} \varphi_i(T_1, \cdots, T_n) T^i.$$

*Si $\overline{E}$ (resp. $\overline{L}$) est un fibré vectoriel hermitien (resp. un fibré en droites hermitien) sur $X$, alors*

$$\hat{\varphi}(\overline{E} \oplus \overline{L}) = \sum_i \hat{\varphi}_i(\overline{E}) \hat{c}_1(\overline{L})^i.$$

IV. Compatibilité aux classes caractéristiques. *Pour tout fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ sur $X$, on a, si $\varphi = \psi(\sigma_1, \cdots \sigma_n)$, où $\psi \in \mathbf{Q}[[X_1, \cdots, X_n]]$*

IV.a $\quad \omega(\hat{\varphi}(\overline{E})) = \varphi(\overline{E}_{\mathbf{C}}) \quad$ *dans* $\oplus_{p \geq 0} A^{p,p}(X_{\mathbf{R}})$

IV.b $\quad \zeta(\hat{\varphi}(\overline{E})) = \psi(c_1(E), \cdots, c_n(E)) \quad$ *dans* $\mathrm{CH}^*(X)_{\mathbf{Q}}$.

V. Compatibilité aux suites exactes courtes. *Pour toute suite exacte courte*

$$\overline{\mathcal{E}} : 0 \to \overline{S} \to \overline{E} \to \overline{Q} \to 0$$

*de fibrés vectoriels hermitiens sur $X$, on a*

$$\hat{\varphi}(\overline{S} \bigoplus \overline{Q}) - \hat{\varphi}(\overline{E}) = a(\widetilde{\varphi}(\overline{\mathcal{E}})).$$

*De plus, les propriétés* I, II, III *et* IV.a *caractérisent cette construction.*

La démonstration de ce théorème fait appel au calcul des groupes de Chow arithmétiques des grassmanniennes (*cf.* §2.5) et à un principe de scindage qui en découle (*cf.* [GS6], §3 et §4). On pourra consulter aussi [E1], [E2] pour une construction fondée sur la considération du fibré en projectif $\mathbf{P}_E$.

On dispose ainsi, dans le cadre arithmétique, de classes de Chern $\hat{c}_p(\overline{E})$ et $\hat{c}(\overline{E}) = \sum_{p\geq 0} \hat{c}_p(E)$, du caractère de Chern $\widehat{\mathrm{ch}}(\overline{E})$ et de la classe de Todd $\widehat{\mathrm{Td}}(\overline{E})$. Elles satisfont aux formules usuelles (*cf.* [GS6], I, theorem 4.8 et §4.9) :

**THÉORÈME 3.3.**— *Si $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sont deux fibrés vectoriels hermitiens sur une variété arithmétique $X$, on a*

$$\hat{c}(\overline{E} \oplus \overline{F}) = \hat{c}(\overline{E})\, \hat{c}(\overline{F}) \qquad \widehat{\mathrm{ch}}(\overline{E} \oplus \overline{F}) = \widehat{\mathrm{ch}}(\overline{E}) + \widehat{\mathrm{ch}}(\overline{F})$$

$$\widehat{\mathrm{Td}}(\overline{E} \otimes \overline{F}) = \widehat{\mathrm{Td}}(\overline{E})\, \widehat{\mathrm{Td}}(\overline{F}) \qquad \widehat{\mathrm{ch}}(\overline{E} \otimes \overline{F}) = \widehat{\mathrm{ch}}(\overline{E})\, \widehat{\mathrm{ch}}(\overline{F})$$

$$\widehat{\mathrm{ch}}^{(1)}(\overline{E}) = \hat{c}_1(\overline{E}) = \hat{c}_1(\det \overline{E})\,(\in \widehat{\mathrm{CH}}^1(X)).$$

*De plus, si $p > \mathrm{rg}\, E$, alors $\hat{c}_p(\overline{E}) = 0$.*

*Exemple.*— Soit $Q$ le fibré quotient universel sur $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Z}}$. C'est un fibré de rang $N$, que l'on munit de la métrique hermitienne faisant de l'application $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N(\mathbf{C})} \otimes \mathbf{C}^{N+1} \to Q_{\mathbf{C}}$ une isométrie partielle lorsque $\mathbf{C}^{N+1}$ est munie de la métrique hermitienne usuelle. On a alors

$$\begin{aligned}\widehat{c_p}(\overline{Q}) &= [\mathbf{P}^{N-p}]_A + a(2(\sigma_N - \sigma_{p-1} - \sigma_{N-p})\, \omega_{FS}^{p-1}) \\ &= \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{O}}(1))^p - a(2\sigma_{p-1}\, \omega_{FS}^{p-1}).\end{aligned}$$

### 3.3. $K$-théorie

Soit $X$ une variété arithmétique.

On note $\widehat{K_0}(X)$ le groupe abélien engendré par les couples $(\overline{E}, \eta)$, où $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien sur $X$ et où $\eta \in \widetilde{A}(X_{\mathbf{R}})$, soumis aux relations suivantes : pour tout $\zeta, \eta \in \widetilde{A}(X_{\mathbf{R}})$, et toute suite exacte courte de fibrés vectoriels hermitiens sur $X$

$$\overline{\mathcal{E}} : 0 \to \overline{S} \to \overline{E} \to \overline{Q} \to 0,$$

on impose

$$(\overline{S}, \zeta) \oplus (\overline{Q}, \eta) = (\overline{E}, \zeta + \eta + \widetilde{\mathrm{ch}}(\overline{\mathcal{E}})).$$

On peut décrire le groupe $\widehat{K_0}(X)$ au moyen du régulateur de Beilinson (*cf.* [Be1])

$$\rho : K_1(X) \longrightarrow \bigoplus_{p \geq 1} H_{\mathbf{Q}}^{2p-1}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(p)) \subset \widetilde{A}(X_{\mathbf{R}}).$$

**THÉORÈME 3.4** ([GS2], [GS6] II, [De]).— *On dispose de la suite exacte naturelle*

$$K_1(X) \xrightarrow{2\rho} \widetilde{A}(X_{\mathbf{R}}) \xrightarrow{\alpha} \widehat{K_0}(X) \xrightarrow{\beta} K_0(X) \longrightarrow 0$$

*où $\alpha$ et $\beta$ sont définis par $\alpha(\eta) = [(0, \eta)]$ et $\beta([(\overline{E}, \eta)]) = [E]$.*

Il existe enfin dans le cadre arithmétique un caractère de Chern qui établit un isomorphisme entre $K$-théorie et groupes de Chow rationnels :

**THÉORÈME** ([GS2], [GS6] II).— *On définit un isomorphisme de* $\mathbf{Q}$*-espaces vectoriels*

$$\widehat{\mathrm{ch}} : \widehat{K_0}(X)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{CH}}^*(X)_{\mathbf{Q}}$$

*en posant, pour chaque générateur $(\overline{E}, \eta)$ de $\widehat{K_0}(X)$,*

$$\widehat{\mathrm{ch}}([(\overline{E}, \eta)]) = \widehat{\mathrm{ch}}(\overline{E}) + a(\eta).$$

# 4. LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH ARITHMÉTIQUE

## 4.1. La métrique de Quillen

Soit $V$ une variété analytique complexe compacte de dimension $n$, munie d'une forme de Kähler $\omega$, et soit $\overline{E} = (E, \|\cdot\|_E)$ un fibré vectoriel hermitien sur $V$.

La forme $\omega$ détermine un produit scalaire hermitien $g$ sur le fibré tangent holomorphe $T_V$ de $V$, et donc sur les fibrés des formes différentielles complexes sur $V$, ainsi qu'une forme volume $\mu$ sur $V$, définis par

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial z_\beta}\right) dz_\alpha \wedge d\overline{z}_\beta$$

et

$$\mu = \frac{1}{n!}\,\omega^n .$$

On en déduit, par produit tensoriel, des produits scalaires hermitiens $\langle , \rangle$ sur les fibrés de formes différentielles à coefficients dans $E$, puis des "produits scalaires $L^2$" sur chacun des espaces $A^{0,i}(V;E)$ de formes différentielles de type $(0,i)$ à coefficients dans $E$, $C^\infty$ sur $V$, définis par

$$\langle s_1, s_2\rangle_{L^2} = \int_V \langle s_1(x), s_2(x)\rangle\, \mu(x) .$$

Le théorème de Dolbeault fournit un isomorphisme canonique (au signe près) entre le $i$-ème groupe de cohomologie $H^i(V;E)$ et le $i$-ième groupe de cohomologie du complexe $(A^{0,i}(V;E), \overline{\partial}_E)$. La théorie de Hodge identifie ce groupe de cohomologie au noyau de l'opérateur

$$\Delta_{E,i} : A^{0,i}(V;E) \longrightarrow A^{0,i}(V;E)$$

où $\Delta_{E,i}$ est défini comme la restriction à $A^{0,i}(V;E)$ de

$$\Delta_E = \overline{\partial}_E\, \overline{\partial}_E^* + \overline{\partial}_E^*\, \overline{\partial}_E$$

où $\overline{\partial}_E^*$ désigne l'adjoint de $\overline{\partial}_E$, relativement aux produits scalaires $L^2$.

En particulier, les produits scalaires $L^2$ sur les espaces $A^{0,i}(V;E)$ déterminent par restriction des produits scalaires hermitiens sur les groupes de cohomologie $H^i(V;E)$, puis, par passage aux puissances extérieures et aux produits tensoriels, un produit scalaire hermitien sur le déterminant de la cohomologie de $E$

$$\lambda(E) = \bigotimes_{i=0}^{n} [\det H^i(V;E)]^{(-1)^i} .$$

Chacun des opérateurs $\Delta_{E,i}$ est positif et elliptique. Soit $(\lambda_{i,p})_{p\in\mathbf{N}}$ la suite croissante de ses valeurs propres, répétées suivant leur multiplicité et soit

$$\zeta_i(s) = \sum_{\lambda_{i,p}\neq 0} \lambda_{i,p}^{-s}$$

la série de Dirichlet qu'elle définit. On peut montrer qu'elle converge si $Re\, s > n$ et qu'elle se prolonge en une fonction méromorphe $\zeta_i$ sur tout le plan, qui est holomorphe au voisinage de 0. La torsion analytique de Ray et Singer du fibré hermitien $\overline{E}$ est définie comme

$$\tau(V,\omega,\overline{E}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, i\, \zeta_i'(0)$$

(*cf.* [RS]). Enfin, on définit la métrique de Quillen $\| \; \|_Q$ sur $\lambda(E)$ par

$$\| \; \|_Q^2 = e^{-\tau(V,\omega,\overline{E})} \, \| \; \|_{L^2}^2 \,. \tag{4.1.3}$$

La définition de la métrique de Quillen peut être motivée par les remarques suivantes, concernant un "modèle en dimension finie" de la théorie de Hodge.

Soit

$$0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{b} E^1 \xrightarrow{b} \cdots E^n \longrightarrow 0$$

un complexe d'espaces vectoriels complexes de dimension finie. Si $H^i$ désigne le $i$-ième groupe de cohomologie de ce complexe, on dispose d'un isomorphisme canonique (au signe près)

$$I : \bigotimes_{i\geq 0} (\det H^i)^{(-1)^i} \simeq \bigotimes_{i\geq 0} (\det E^i)^{(-1)^i} .$$

Supposons de plus les $E^i$ munis de produits scalaires hermitiens. Ces derniers déterminent par passage aux puissances extérieures et aux produits tensoriels une norme sur $\otimes_{i=0}^n (\det E^i)^{(-1)^i}$. Par ailleurs, ils permettent de former l'adjoint $b^*$ de $b$, puis l'opérateur $\Delta = bb^* + b^*b$. Le noyau $\mathcal{H}^i$ de $\Delta_{|E^i}$ est inclus dans $\operatorname{Ker} b_{|E^i}$ et s'envoie isomorphiquement sur $H^i$, et l'isomorphisme $H^i \simeq \mathcal{H}^i$ ainsi défini détermine un produit scalaire hermitien sur $H^i$ par restriction à $\mathcal{H}^i$ du produit scalaire sur $E^i$, puis, par passage aux puissances extérieures et au produit tensoriel, une norme sur $\otimes_{i=0}^n (\det H^i)^{(-1)^i}$. On vérifie alors facilement que la norme de l'isomorphisme $I$ relativement à ces normes vaut

$$\|I\| = \prod_{i=0}^{n} (\det{}' \Delta_i)^{(-1)^i i/2}$$

où $\det' \Delta_i$ désigne le produit des valeurs propres non nulles de $\Delta_{|E^i}$.

Formellement, $\exp(-\zeta_i'(0))$ est le produit des valeurs propres non nulles de $\Delta_{E,i}$ ; en effet

$$-\zeta_i'(s) = \sum_{\lambda_{i,p} \neq 0} \lambda_{i,p}^{-s} \log \lambda_{i,p} \, .$$

Ainsi, la formule (4.1.3) montre que, toujours formellement, la métrique de Quillen est la métrique $L^2$ naturelle sur $\lambda(E)$, compte tenu de l'"isomorphisme"

$$\lambda(E) \simeq \text{“} \bigotimes_{i=0}^{n} (\det A^{0,i}(E))^{(-1)^i} \text{”} \, .$$

*Exemples.*— 1) Soient $V = \mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ et $\omega = \omega_{FS}$ et soit $\overline{E}$ le fibré hermitien trivial. Il vient

$$\begin{aligned} H^i(V;E) &\cong \mathbf{C} \qquad \text{si} \quad i = 0 \\ &= 0 \qquad \text{si} \quad i > 0 \end{aligned}$$

et donc $\lambda(E) \cong \mathbf{C}$. Par ailleurs, les valeurs propres des opérateurs $\Delta_{E,i}$ sont connues, et Gillet, Soulé et Zagier ont calculé la torsion analytique des espaces projectifs et ont montré (*cf.* [GS7]) que, si l'on pose

$$\rho(x) = \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

et

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{\rho(t) - \rho(0)}{t} \, dt,$$

la métrique de Quillen sur $\lambda(E)$ est donnée par

$$\log \|1\|_Q^2 = \text{coefficient de } x^N \text{ dans}$$

$$\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)^{N+1}\left[(N+1)\sum_{m\in 2\mathbf{N}+1}\left(2\zeta'(-m)+\zeta(-m)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\right)\frac{x^m}{m!}\right.$$
$$\left.-\,2\,\sigma_N\,x^{-1}-\psi(x)\right]$$

où $\zeta$ désigne la fonction zêta de Riemann.

2) Soit $E$ une courbe elliptique complexe et soit $\alpha$ une forme différentielle holomorphe non nulle sur $E$. Soit

$$\Gamma=\left\{\int_\gamma \alpha\,;\,\gamma\in H_1(M;\mathbf{Z})\right\}$$

le réseau dans $\mathbf{C}$ des périodes de $\alpha$ et soient $g_2$ et $g_3$ les invariants du réseau $\Gamma$, définis par

$$g_2=60\sum_{\gamma\in\Gamma-\{0\}}\gamma^{-4}\qquad\text{et}\qquad g_3=140\sum_{\gamma\in\Gamma-\{0\}}\gamma^{-6}\,.$$

Soit enfin $\Delta=g_2^3-27\,g_3^2$ le discriminant de $(M,\alpha)$. Le déterminant de la cohomologie $\lambda(\mathcal{O})$ du fibré $\mathcal{O}$ sur $M$ s'identifie (par dualité de Serre algébrique) à la droite vectorielle des 1-formes holomorphes sur $M$. Lorsque $T_M$ et $\mathcal{O}$ sont munis de métriques invariantes par translation, la métrique de Quillen $\|\ \|_Q$ sur $\lambda(\mathcal{O})$ qui s'en déduit vérifie

$$\|\alpha\|_Q=|\Delta|^{-1/12}.$$

Cela découle aisément de la formule limite de Kronecker appliquée au réseau dual de $\Gamma$ (voir par exemple [W4], formule (17), p. 75).

La métrique de Quillen sur le fibré déterminant associé à une *famille* de variétés analytiques compactes munies d'un fibré vectoriel holomorphe satisfait à des propriétés remarquables : elle est $C^\infty$, et sa courbure se calcule au moyen d'une formule à la Riemann-Roch-Grothendieck. Par ailleurs, la variation de métrique de Quillen sur $\lambda(E)$ par variation de la métrique sur $T_V$ et $E$ se calcule au moyen des classes de Bott-Chern (*cf.* [Q], exposé Bourbaki n° 676, [BGS1] et *infra* §4.2, exemples, 2)).

## 4.2. Le théorème de Riemann-Roch arithmétique

Soit $X$ une variété arithmétique et soit $\omega$ une forme de Kähler sur $X(\mathbf{C})$, invariante sous $F_\infty$.

Lorsque $\pi : X \to \operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ est un morphisme lisse, on dispose du fibré tangent relatif à $\pi$, $T_\pi$, qui est un fibré vectoriel bien défini sur $X$. La forme de Kähler $\omega$ sur $X(\mathbf{C})$ fait de $T_\pi$ un fibré vectoriel hermitien, qui possède une classe de Todd $\widehat{\mathrm{Td}}\,\overline{T}_\pi$ dans $\widehat{\mathrm{CH}}^*(X)_{\mathbf{Q}}$.

En général, lorsque $X$ n'est plus lisse sur $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$, $\overline{T}_X$ est encore bien défini comme "fibré vectoriel hermitien virtuel sur $X$", *i.e.* comme élément de $\widehat{K_0}(X)$ et possède toujours une classe de Todd $\widehat{\mathrm{Td}}\,\overline{T}_X$ (*cf.* [GS10]). Indiquons une construction de cette dernière. Soit $i : X \to Y$ une immersion fermée de $X$ dans une variété arithmétique $Y$ lisse sur $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ (on peut choisir par exemple $Y = \mathbf{P}^N_{\mathbf{Z}}$ avec $N$ suffisamment grand). Notons $N$ le fibré normal à $X$ dans $Y$ et $\mathcal{E}$ la suite exacte canonique sur $X(\mathbf{C})$

$$0 \longrightarrow T_{X(\mathbf{C})} \longrightarrow i^* T_{Y,\mathbf{C}} \longrightarrow N_{\mathbf{C}} \longrightarrow 0\,.$$

Munissons $T_{X(\mathbf{C})}$ de la métrique hermitienne définie par $\omega$, et $T_{Y,\mathbf{C}}$ et $N_{\mathbf{C}}$ de métriques hermitiennes. Ces métriques font de $\mathcal{E}$ une suite exacte de fibrés vectoriels hermitiens $\overline{\mathcal{E}}$. On a alors

$$\widehat{\mathrm{Td}}\,\overline{T}_\pi = i^*\widehat{\mathrm{Td}}\,\overline{T}_Y\,.\,(\widehat{\mathrm{Td}}\,\overline{N})^{-1} + a(\widetilde{\mathrm{Td}}(\overline{\mathcal{E}})\,.\,(\mathrm{Td}\,\overline{N})^{-1})\,.$$

Avant d'énoncer le théorème de Riemann-Roch de Gillet et Soulé, il nous faut encore introduire une définition (*cf.* [GS7], [GS10]).

**DÉFINITION 4.1.**— *On pose*

$$R(X) = \sum_{m\in 2\mathbf{N}+1} \left[2\zeta'(-m) + \zeta(-m)\left(1+\frac{1}{2}\cdots+\frac{1}{m}\right)\right] \frac{X^m}{m!}\,, \tag{4.2.1}$$

*et on note aussi* $\mathrm{R}$ *la classe caractéristique additive associée, à valeurs dans la cohomologie à coefficients réels.*

Rappelons que cela signifie que $\mathrm{R}$ est l'unique classe caractéristique qui associe à tout fibré vectoriel complexe $E$ sur un espace topologique raisonnable $T$ (par exemple un espace compact, ou un espace topologique possédant le type d'homotopie d'un $CW$ complexe fini) une classe $\mathrm{R}(E)$ dans $H^*(T;\mathbf{R})$ d'une manière fonctorielle, de sorte que :

- si $E_1$ et $E_2$ sont deux fibrés vectoriels sur $T$,

$$\mathrm{R}(E_1 \oplus E_2) = \mathrm{R}(E_1) \,.\, \mathrm{R}(E_2)\,.$$

- pour tout fibré $L$ en droites sur $T$

$$\mathrm{R}(L) = \mathrm{R}(c_1(L))$$

où le second membre est défini au moyen de la série (4.2.1).

Nous pouvons finalement énoncer :

**THÉORÈME 4.2** ([GS7], [GS10]).— *Soit $X$ une variété arithmétique propre sur* $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ *et soit $\overline{E} = (E, \|\ \|_E)$ un fibré vectoriel hermitien sur $X$. On suppose $X(\mathbf{C})$ muni d'une métrique kählerienne invariante sous $F_\infty$ et $\lambda(E)$ muni de la métrique de Quillen $\|\ \|_Q$ déduite de $\|\ \|_E$ et de la structure kählerienne de $X(\mathbf{C})$. On a alors :*

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}\,(\lambda(E), \|\ \|_Q) &= \widehat{\deg}_X\,(\widehat{\mathrm{ch}}\,\overline{E}\,.\,\widehat{\mathrm{Td}}\,\overline{T}_\pi) \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_{X(\mathbf{C})} \mathrm{ch}(E_{\mathbf{C}})\,.\,\mathrm{R}(T_{X(\mathbf{C})})\,.\,\mathrm{Td}(T_{X(\mathbf{C})})\,.\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Si l'on définit la classe de Chern arithmétique de $X$ comme :

$$\mathrm{Td}^A(X) = \widehat{\mathrm{Td}}(\overline{T}_\pi)\,(1 - a(\mathrm{R}(T_{X(\mathbf{C})})))\,,$$

on peut réécrire l'égalité (4.2.2) sous la forme

$$\widehat{\deg}\,(\lambda(E), \|\ \|_Q) = \widehat{\deg}_X\,(\widehat{\mathrm{ch}}\,\overline{E}\,.\,\mathrm{Td}^A X)\,.$$

Gillet et Soulé démontrent en fait un théorème plus général, valable pour des "familles", et qui permet de ne supposer $X$ régulier que dans la fibre générique $X_{\mathbf{Q}}$. Outre les résultats analytiques mentionnés plus haut et le calcul de la torsion analytique des projectifs, leur preuve fait appel à l'étude du comportement des complexes de fibrés hermitiens lors de la "construction du graphe grassmannien" de Baum, Fulton et MacPherson. Signalons aussi que Faltings a donné récemment une démonstration du théorème 4.2 plus simple quant à l'analyse.

*Exemples.*— 1) Si on applique le théorème 4.2 à $\mathbf{P}^N_{\mathbf{Z}}$ muni de $\omega_{FS}$ et au fibré hermitien trivial, on retrouve la formule du §4.1, exemples, 1). De fait, c'est le calcul de la torsion analytique des espaces projectifs qui a conduit Gillet et Soulé à introduire la classe $R$. Celle-ci intervient par un autre biais dans les travaux de Bismut ([Bi2]) et Bismut-Lebeau ([BL1,2]).

2) Si $\overline{\mathcal{E}} : 0 \to \overline{S} \to \overline{E} \to \overline{Q} \to 0$ est une suite exacte de fibrés vectoriels hermitiens sur $X$, on dispose d'un isomorphisme canonique (au signe près) entre déterminants de la cohomologie :

$$I : \lambda(E) \simeq \lambda(S) \otimes \lambda(Q).$$

En appliquant le théorème 4.2 à chacun des fibrés $S$, $E$ et $Q$, on retrouve la formule d'anomalie (*cf.* [BGS1]) qui exprime la norme de cet isomorphisme relativement aux métriques de Quillen au moyen des formes de Chern et de Bott-Chern :

$$\begin{aligned}\log \|I\|_Q &= \widehat{\deg}(\lambda(E), \| \ \|_Q) - \widehat{\deg}(\lambda(S), \| \ \|_Q) - \widehat{\deg}(\lambda(Q), \| \ \|_Q) \\ &= \widehat{\deg}_X((\widehat{\mathrm{ch}}\,\overline{E} - \widehat{\mathrm{ch}}\,\overline{S} - \widehat{\mathrm{ch}}\,\overline{Q}) \,.\, \widehat{\mathrm{Td}}\,\overline{T}_\pi) \\ &= -\widehat{\deg}_X(a\,(\widetilde{\mathrm{ch}}\,(\overline{\mathcal{E}}))\,\widehat{\mathrm{Td}}\,\overline{T}_\pi) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{X(\mathbf{C})} \widetilde{\varphi}(\overline{\mathcal{E}})\,\mathrm{Td}\,\overline{T}_{X(\mathbf{C})}.\end{aligned}$$

3) Soit $E$ une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ et soit $X$ son modèle régulier minimal sur $\mathbf{Z}$. Supposons pour simplifier que $E$ admet une réduction semi-stable sur $\mathbf{Z}$, choisissons une différentielle de Néron $\alpha$ sur $X$ et notons $\Delta$ le discriminant de $E$. Les nombres premiers où $X$ possède mauvaise réduction sont exactement ceux qui divisent $\Delta$, et, si $p$ est un tel nombre premier, le degré (sur $\mathbf{F}_p$) du cycle $Z_p$ des points singuliers de $X_{\mathbf{F}_p}$ est la valuation en $p$ de $\Delta$. Munissons $T_\pi$ de la métrique telle que $\|\alpha_{\mathbf{C}}^{-1}\| = 1$ et $\mathcal{O}_X$ de la métrique triviale. Le déterminant de la cohomologie $\lambda(\mathcal{O}_X)$ s'identifie au $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}\alpha$, et donc

$$\widehat{\deg}_X(\lambda(\mathcal{O}_X), \| \ \|_Q) = -\log \|\alpha\|_Q.$$

Soit $\overline{\omega}_\pi$ le dualisant relatif de $\pi$ muni de la métrique telle que $\|\alpha\| = 1$. C'est un fibré en droites hermitien sur $X$ trivialisé en tant que tel par $\alpha$. Par ailleurs, on montre, en explicitant l'isomorphisme entre $T_\pi$ et $\omega_\pi^{-1}$ sur la fibre générique de $\pi$, que

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{Td}}\,\overline{T}_X &= \widehat{\mathrm{Td}}\,\overline{\omega}_\pi^{-1} + \frac{1}{12}\,[(\sum_{p|\Delta} Z_p, 0)] \\ &= 1 + \frac{1}{12}\,[(\sum_{p|\Delta} Z_p, 0)]\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}_X\,[\widehat{\mathrm{ch}}(\overline{\mathcal{O}_X})\,.\,\mathrm{Td}^A X] &= \widehat{\deg}_X\,\widehat{\mathrm{Td}}\,\overline{T}_\pi \qquad \text{car } \overline{\mathcal{O}_X} \text{ et } T_{X(\mathbf{C})} \text{ sont triviaux} \\ &= \widehat{\deg}_X\,(1 + \frac{1}{12}\,[(\sum_{p|\Delta} Z_p, 0)]) \\ &= \frac{1}{12}\sum_{p|\Delta} \log p\,.\,v_p(\Delta) \\ &= \frac{1}{12}\log \Delta\,.\end{aligned}$$

Le théorème de Riemann-Roch arithmétique redonne ici la formule limite de Kronecker (*cf.* §4.1, exemples, 2)).

## 4.3. Applications

Conservons les notations du théorème et considérons en outre un fibré en droites hermitien $\overline{L}$ sur $X$.

Bismut et Vasserot ont montré ([BV]) que lorsque la forme de courbure $c_1(\overline{L}) \in A^{1,1}(X(\mathbf{C}))$ est partout strictement positive, on dispose de l'évaluation asymptotique

(4.3.1)
$$\tau(X(\mathbf{C}), \omega, \overline{E} \otimes \overline{L}^n) = \frac{1}{2(d-1)!}\,\mathrm{rg}\,E \int_{X(\mathbf{C})} c_1(L)^d\,.\,n^d \log n + O(n^d)\,,$$

lorsque $n \to +\infty$, où $d$ désigne la dimension complexe de $X(\mathbf{C})$.

Par ailleurs, le théorème 4.1 appliqué à $\overline{E} \otimes \overline{L}^n$ donne(1)

$$(4.3.2) \qquad \begin{aligned} &\widehat{\deg}\,(\lambda(E \otimes L^n),\ \|\ \|_Q) \\ &= \frac{1}{(d+1)!}\,\mathrm{rg}\,E \,.\, \widehat{\deg}_X\, \widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1} \,.\, n^{d+1} + O(n^d) \end{aligned},$$

lorsque $n \to +\infty$.

On déduit alors de (4.3.1) et (4.3.2) :

**THÉORÈME 4.3** (*cf.* [GS9]).— *Conservons les notations du théorème et considérons un fibré en droites hermitien $\overline{L}$ sur $X$, ample relativement au morphisme $\pi : X \to \operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ et tel que $c_1(\overline{L_{\mathbf{C}}}) > 0$. On a alors, en notant $d$ la dimension complexe de $X$ et $\|\ \|_{L^2}$ la norme $L^2$ la norme sur $H^0(X; E \otimes L^n)$ déduite de la métriqe kählerienne(2) $\omega$ sur $X(\mathbf{C})$ et de la structure hermitienne de $\overline{E} \otimes \overline{L}^n$ :*

(4.3.3)

$$\begin{aligned} \widehat{\deg}\,(H^0(X; E \otimes L^n),\ \|\ \|_{L^2}) = &\frac{1}{(d+1)!}\,\mathrm{rg}\,E \,.\, \widehat{\deg}_X \widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1} \,.\, n^{d+1} \\ &+ \frac{1}{4(d-1)!}\,\mathrm{rg}\,E \int_{X(\mathbf{C})} c_1(L)^d \,.\, n^d \log n + O(n^d) \end{aligned}$$

*lorsque $n \to +\infty$.*

Rappelons que si $V$ est une variété projective, disons pour simplifier sur $\mathbf{C}$, de dimension $d$, munie d'un fibré en droites ample $L$, son degré relativement à $L$ est défini comme

$$\int_V c_1(L)^d$$

et s'exprime aussi “à la Hilbert-Samuel” comme la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{d!}{n^d} \dim H^0(V; L^{\otimes n}).$$

(1) Pour établir cette évaluation asymptotique, il n'est en fait pas nécessaire de disposer du théorème 4.2 dans toute sa force. Les résultats de [GS7] suffisent.

(2) On remarquera que les deux premiers termes du membre de droite de (4.3.3) sont en fait indépendants de $\omega$.

La formule asymptotique (4.3.3) fournit une expression analogue pour la hauteur d'une variété arithmétique :

**COROLLAIRE 4.4.**— *Soit $X$ une variété arithmétique propre sur* $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$, *de dimension relative $d$* (donc de dimension absolue $d+1$), *et soit $\overline{L}$ un fibré en droites hermitien sur $X$ ample relativement au morphisme $\pi : X \to$* $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ *et tel que $c_1(\overline{L}_{\mathbf{C}}) > 0$. La hauteur $\widehat{\deg}_X \widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1}$ de $X$ relativement à $\overline{L}$ est égale à*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(d+1)!}{n^{d+1}} \widehat{\deg}(H^0(X;L^{\otimes n}), \| \|_{L^2})$$

*où $\| \|_{L^2}$ désigne la métrique $L^2$ sur $H^0(X;L^{\otimes n})$ déterminée par une métrique kählerienne*[1] *sur $X(\mathbf{C})$ et par la structure hermitienne de $\overline{L}^{\otimes n}$.*

Si l'on pose

$$h(n) = \dim_{\mathbf{C}} H^0(X(\mathbf{C}); E_{\mathbf{C}} \otimes L^n_{\mathbf{C}}),$$

le théorème de Minkowski appliqué au réseau $H^0(X; E \otimes L^n)$ montre que

$$\begin{aligned} &\#\{s \in H^0(X;E\otimes L^n) \mid \|s\|_{L^2} \leq 1\} \\ (4.3.4) \qquad &\geq \frac{\pi^{h(n)/2}}{2^{h(n)}\,\Gamma\left(\frac{h(n)}{2}+1\right)} \exp \widehat{\deg}(H^0(X;E\otimes L^n), \| \|_{L^2}). \end{aligned}$$

En combinant cette inégalité à l'estimation

$$(4.3.5) \qquad h(n) = O(n^d),$$

qui découle par exemple de la formule de Riemann-Roch sur $X(\mathbf{C})$, et à l'expression asymptotique (4.3.3), on obtient que, sous les hypothèses du théorème 4.3, lorsque de plus

$$\widehat{\deg}_X \widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1} > 0,$$

alors le fibré $E \otimes L^n$ sur $X$ admet des sections de norme archimédienne $L^2$ bornée par 1 lorsque $n$ est grand.

---

(1) indépendante de $n$, mais arbitraire.

En fait, toujours sous les hypothèses du théorème, il est possible de comparer la norme $\| \ \|_{L^2}$ sur les sections de $E_{\mathbf{C}} \otimes L^n_{\mathbf{C}}$ à la norme $\| \ \|_{L^\infty}$ définie par

$$\|s\|_{L^\infty} = \sup_{x \in X(\mathbf{C})} \|s(x)\|_{\overline{E} \otimes \overline{L}^n}. \tag{4.3.6}$$

On montre qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de $n$ telle que, pour tout $s \in H^0(X(\mathbf{C}); E \otimes L^n)$, on ait

$$\|s\|_{L^\infty} \leq C\, n^d\, \|s\|_{L^2}.$$

Les relations (4.3.3) à (4.3.6) impliquent le théorème suivant qui apporte une réponse au "problème de Riemann-Roch arithmétique naïf" du §1.4 :

**COROLLAIRE 4.5.**— *Soit $X$ une variété arithmétique propre sur* $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$, *de dimension relative $d$, soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $X$ et soit $\overline{L}$ un fibré en droites hermitien sur $X$ tel que $L$ soit ample relativement à $\pi : X \to \operatorname{Spec} \mathbf{Z}$, et que*

$$c_1(\overline{L}_{\mathbf{C}}) > 0 \quad \text{et} \quad \widehat{\deg}\, \widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1} > 0\,.$$

*On a alors*

$$\log \# \{ s \in H^0(X; E \otimes L^n) \mid \|s\|_{L^\infty} \leq 1 \} \geq \frac{1}{(d+1)!} \operatorname{rg} E \,.\, \widehat{\deg}_X\, \widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1} \,.\, n^{d+1} + O(n^d)\,.$$

Une variante de cet énoncé joue un rôle crucial dans la nouvelle démonstration par Vojta de la conjecture de Mordell [V]. Lorsque $X$ est une surface arithmétique (*i.e.* lorsque $d = 1$), cet énoncé avait été démontré, dans une version moins précise, par Faltings ([Fal]), et a été complété récemment par Shouwu Zhang sous la forme d'un "critère d'amplitude arithmétique" (*cf.* [Z]).

## BIBLIOGRAPHIE

[A1] S.J. ARAKELOV - *Intersection theory for divisors on an arithmetic surface*, Math. U.S.S.R. Izv. **8**, 1974, 1167-1189.

[A2] S.J. ARAKELOV - *Theory of intersection on an arithmetic surface*, Proc. Int. Cong. of Math., Vancouver, vol. 1, 1978, 405-408.

[Be1] A.A. BEILINSON - *Higher regulators and values of L-functions*, J. Soviet Math. **30**,1985, 2036-2070.

[Be2] A.A. BEILINSON - *Height pairings between algebraic cycles*, Contemp. Math. **67**, 1-24.

[Bi1] J.-M. BISMUT - *Superconnections currents and complex immersions*, Inventiones Math. **99**, 1990, 59-113.

[Bi2] J.-M. BISMUT - *Koszul complexes, harmonic oscillators and the Todd class*, Journal of the A.M.S. **3**, 1990, 159-256.

[BGS1] J.-M. BISMUT, H. GILLET et C. SOULÉ - *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles.* I. *Bott-Chern forms and analytic torsions* ; II *Direct images and Bott-Chern forms* ; III *Quillen metrics on holomorphic determinants*, Commun. Math. Phys. **115**, 1988, 49-78, 79-126, 301-351.

[BGS2] J.-M. BISMUT, H. GILLET et C. SOULÉ - *Complex immersions and Arakelov geometry*, Grothendieck Festschrift, Birkhäuser, 1990

[BGS3] J.-M. BISMUT, H. GILLET et C. SOULÉ - *Bott-Chern currents and complex immersions*, Duke Math. J. **60**, 1990, 255-284.

[BL1] J.-M. BISMUT et G. LEBEAU - *Immersions complexes et métriques de Quillen*, Comptes rendus Acad. Sci. Paris **309**, Série I, 1989, 487-491.

[BL2] J.-M. BISMUT et G. LEBEAU - *Complex immersions and Quillen metrics*, Preprint, Orsay, 1990, 386 p.

[BV] J.-M. BISMUT et E. VASSEROT - *The asymptotic of the Ray-Singer analytic torsion associated with high powers of a positive line bundle*, Commun. Math. Phys. **125**, 1989, 355-367.

[Bl] S. BLOCH - *Height pairings for algebraic cycles*, Proc. Luminy conference on algebraic $K$-theory, J. Pure Appl. Algebra **34**, 1984, 119-145.

[BC] R. BOTT et S.S. CHERN - *Hermitian vector bundles and the equidis-*

*tribution of zeroes of their holomorphic sections*, Acta Math. **114**, 1968, 71-112.

[De] P. DELIGNE - *Le déterminant de la cohomologie* in Current trends in arithmetical algebraic geometry (K. Ribet ed.), Contemporary Math. **67**, 1987, 93-177.

[Do] S. DONALDSON - *Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc. **50**, 1986, 1-26.

[E1] R. ELKIK - *Fibrés d'intersection et intégrales de classes de Chern*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **22**, 4ème série, 1989, 195-226.

[E2] R. ELKIK - *Métriques sur les fibrés d'intersection*, Duke Math. J. **61**, 1990, 303-328.

[Fa1] G. FALTINGS - *Calculus on arithmetic surfaces*, Annals of Math. **119**, 1984, 387-424.

[Fa2] G. FALTINGS - *Diophantine approximation on Abelian varieties*, prepint, 1989.

[Fu] W. FULTON - *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, Band 2. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1984.

[G1] H. GILLET - *Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory*, Adv. in Math. **40**, 1981, 203-289.

[G2] H. GILLET - *An introduction to higher dimensional Arakelov-theory*, Contemporary Mathematics, **67**, 209-228.

[GS1] H. GILLET et C. SOULÉ - *Intersection sur les variétés d'Arakelov*, Comptes rendus Acad. Sci. Paris, **299**, Série I, 1984, 563-566.

[GS2] H. GILLET et C. SOULÉ - *Classes caractéristiques sur les variétés d'Arakelov*, Comptes rendus Acad. Sci. Paris, **301**, Série I, 1985, 439-442.

[GS3] H. GILLET et C. SOULÉ - *Direct images of Hermitian holomorphic bundles*, Bull. A.M.S. **15**, 1986, 209-212.

[GS4] H. GILLET et C. SOULÉ - *Intersection theory using Adams operations*, Inventiones Math. **90**, 1987, 243-277.

[GS5] H. GILLET et C. SOULÉ - *Arithmetic intersection theory*, preprint I.H.E.S., 1988, à paraître aux Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.

[GS6] H. GILLET et C. SOULÉ - *Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric*, I, II, Annals of Math. **131**, 1990, 163-203.

[GS7] H. GILLET et C. SOULÉ - *Analytic torsion and the arithmetic Todd germs*, preprint I.H.E.S., 1988, à paraître dans Topology.

[GS8] H. GILLET et C. SOULÉ - *Differential characters and arithmetic intersection theory* in "Algebraic $K$-theory : connections with geometry and topology", edited by J.F. Jardine and V.P. Snaith, NATO ASI Series C, Vol. 279, Kluwer Academic Publishers, 1989, 29-68.

[GS9] H. GILLET et C. SOULÉ - *Amplitude arithmétique*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **307**, 1988, 887-890.

[GS10] H. GILLET et C. SOULÉ - *Un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck arithmétique*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **309**, Série I, 1989, 929-932.

[GH] P. GRIFFITHS et J. HARRIS - *Principles of algebraic geometry*, John Wiley and Sons, 1978.

[KM] F. KNUDSEN et D. MUMFORD - *The projectivity of the moduli space of stable curves*, I, Preliminaries on "det" and "div", Math. Scand. **39**, 1976, 19-55.

[La1] S. LANG - *Fundamentals of diophantine geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1983.

[La2] S. LANG - *Introduction to Arakelov theory*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1988.

[M] Yu.I. MANIN - *New dimensions in geometry* in Arbeitstagung Bonn 1984, Ed. by F. Hirzebruch, J. Schwermer and S. Suter, Springer Lect. Notes in Math. n° 1111, 59-101.

[P] A.N. PARŠIN - *Modular correspondences, heights and isogenies of Abelian varieties*, Trudy Mat. Inst. Steklov **132**, 1973 = Proc. Steklov Inst. Mat. **132**, 1973, 243-270.

[Ph] P. PHILIPPON - *Sur des hauteurs alternatives*, preprint, 1989.

[Q] D. QUILLEN - *Determinants of Cauchy-Riemann operators over a Riemann surface*, Funct. Anal. Appl. **14**, 1985, 31-34.

[RS] D.B. RAY et I.M. SINGER - *Analytic torsion for complex manifolds*, Annals of Math. **98**, 1973, 154-177.

[Se] J.-P. SERRE - *Algèbre locale, multiplicités*, troisième édition, Lecture Notes in Math. **11**, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[St] W. STOLL - *About the value distribution of holomorphic maps into projective space*, Acta Math. **123**, 1969, 83-114.

[Sz] L. SZPIRO - *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell*, Astérisque **127**, 1985.

[S1] C. SOULÉ - *Opérations en K-théorie algébrique*, Can. J. Math. **37**, 1985, 488-550.

[S2] C. SOULÉ - *Théorie de Nevanlinna et théorie d'Arakelov*, Astérisque **183**, 1990, 127-135.

[S3] C. SOULÉ - *Géométrie d'Arakelov et théorie des nombres transcendants*, preprint I.H.E.S., 1989.

[V] P. VOJTA - *An extension of the Thue-Siegel-Dyson-Gel'fond theorem*, preprint, 1989.

[W1] A. WEIL - *Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques*, Revue scientifique **77**, 1939, 104-106. (= Œuvres scientifiques, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, volume I, 1980, [1939a], 236-240).

[W2] A. WEIL - *Une lettre et un extrait de lettre à Simone Weil*, [1940a] in Œuvres scientifiques, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, volume I, 1980, 244-255.

[W3] A. WEIL - *Number theory and algebraic geometry*, Proc. Intern. Math. Congress, Cambridge, Mass., vol. II, 90-10 (= Œuvres scientifiques, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, volume I, 1980, [1950b], 442-452).

[W4] A. WEIL - *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **88**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[Z] S. ZHANG - *Ample Hermitian line bundles on arithmetic surfaces*, Preprint, october 1989 and may 1990.

**ADDENDUM** (septembre 1991)

Depuis l'exposé oral sont parues les publications suivantes :

[F3] G. FALTINGS - *Lectures on the arithmetic Riemann-Roch theorem*, notes by S. Zhang, preprint, 1991.

[GS11] H. GILLET et C. SOULÉ - *An arithmetic Riemann-Roch theorem*, preprint IHES, 1991.

L'article [GS11] précise et détaille les résultats des notes [GS9] et [GS10]. En particulier, il développe la machinerie nécessaire pour énoncer et établir l'analogue du théorème 4.2 lorsque $X$ n'est régulier que sur la fibre générique $X_{\mathbf{Q}}$ et complète ainsi les résultats de [GS5-7], [BGS1-3] et [BL2], qui suffisaient pour établir le théorème 4.2, où $X$ est supposé régulier (*cf.* [GS10], §3.4). En fait, comme dans la note [GS10], Gillet et Soulé considèrent une situation plus générale où $f : X \to Y$ est un morphisme projectif entre variétés arithmétiques tel que $f_{\mathbf{Q}} : X_{\mathbf{Q}} \to Y_{\mathbf{Q}}$ soit lisse, et calculent au moyen de la théorie de l'intersection arithmétique la classe $\widehat{c}_1(\lambda(\overline{E}))$ associée au déterminant de l'image directe par $f$ d'un fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ sur $X$.

Faltings établit dans [F3] un théorème relatif plus complet, qui calcule, non seulement $\widehat{c}_1(\lambda(\overline{E}))$, mais aussi les classes caractéristiques de degré supérieur de l'image directe par $f$ de $\overline{E}$ (c'est un élément de $\widehat{K_0}(Y)$, défini au moyen de "torsions analytiques supérieures" ; voir aussi [GS3] et [GS7]). Toutefois, il travaille en supposant $X$ et $Y$ réguliers.

Jean-Benoît BOST

I.H.E.S.
35 route de Chartres
F-91440 BURES-sur-YVETTE