SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE CARTIER

Démonstration «automatique» d'identités et fonctions hypergéométriques

Séminaire N. Bourbaki, 1991-1992, exp. n° 746, p. 41-91.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1991-1992__34__41_0>

Séminaire BOURBAKI novembre 1991
44ème année, 1991-92, n°746

DÉMONSTRATION "AUTOMATIQUE" D'IDENTITÉS ET FONCTIONS HYPERGÉOMETRIQUES [d'après D. Zeilberger]

par Pierre Cartier

INTRODUCTION

Considérons la sélection suivante d'identités entre coefficients binomiaux*

$$(1) \qquad \sum_k \binom{n}{k} = 2^n \qquad \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

$$(2) \qquad \sum_k \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \qquad \sum_k (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

$$(3) \qquad \sum_k (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \binom{3n}{n}\binom{2n}{n} \qquad \text{(Dixon 1890).}$$

Les deux premières sont banales, et résultent par spécialisation de la *formule du binôme*

$$(4) \qquad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Compte tenu de la loi de symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, les deux formules (2) s'obtiennent en comparant les coefficients de monômes convenables dans les deux identités

$$(x+y)^n (x+y)^n = (x+y)^{2n}, \qquad (x+y)^{2n}(x-y)^{2n} = (x^2-y^2)^{2n}.$$

* Avec les conventions usuelles, on a $\binom{n}{k} = 0$ si $n \geq 0$ et si k n'est pas compris entre 0 et n. Toutes les séries écrites n'ont donc qu'un nombre fini de termes non nuls, et il est inutile d'écrire les bornes précises de sommation.

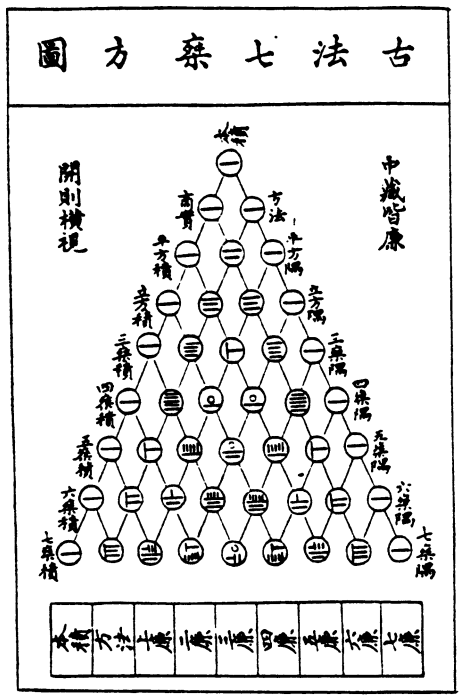
L'identité (3) de Dixon résiste à ce genre de méthodes ; il n'y a pas d'ailleurs de contrepartie portant sur $\sum_k \binom{2n}{k}^3$, ni sur les puissances d'ordre supérieur des coefficients binomiaux.

Pour beaucoup de raisonnements, on peut utiliser la formule du binôme (4) comme *définition* des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$. Comme les puissances se calculent de proche en proche selon la règle

$$(x+y)^n = (x+y)^{n-1}(x+y)\ ,$$

les coefficients binomiaux satisfont à la *formule fondamentale d'addition*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{5}$$



Le «triangle de Pascal»
dans un ouvrage chinois de Chou Chi-kié (1303).

[Extrait de Jean-Paul Collette "Histoire des mathématiques", Editions Vuibert.]

Celle-ci permet un calcul rapide au moyen de la disposition connue sous le nom du "triangle de Pascal" (et attestée en Chine autour de 1300, voir figure)

La définition par la formule du binôme conduit à une *interprétation combinatoire* :

$\binom{n}{k}$ *compte, parmi tous les mots de* n *lettres, ceux qui contiennent* k *fois* x *et* $n-k$ *fois* y.

De manière équivalente, $\binom{n}{k}$ compte le nombre de parties à k éléments dans un ensemble donné à n éléments. Du coup, les formules entre coefficients binomiaux s'interprètent en termes de décompte de structures combinatoires (graphes, arbres, tableaux, chemins, mots, ...). Dans beaucoup de cas, on a pu prouver ces formules en construisant des *bijections* effectives entre divers types de structure. C'est de cette manière que Foata et moi-même avons établi dans [E 1] la formule de Dixon, et donné diverses généralisations. Cette direction est aujourd'hui vigoureusement poursuivie par les écoles lotharingienne (autour de Foata à Strasbourg) et québécoise (autour des frères Labelle).

Dans les identités (1) à (3), le résultat de la sommation est une expression "close" décrite comme un produit de puissances a^n et de divers coefficients binomiaux. On ne peut pas toujours exprimer aussi simplement le résultat : voici d'abord une formule élémentaire

$$\sum_k \binom{n-k}{k} = F_n, \tag{6}$$

où F_n est le n-ième nombre de Fibonacci, c'est-à-dire le solution de *l'équation de récurrence*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ pour } n \geq 2,\ F_0 = F_1 = 1. \tag{7}$$

Dans sa démonstration de l'irrationnalité de $\zeta(3)$ Apéry [E 2] a dû sommer l'expression suivante

$$u_n := \sum_k \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 ; \tag{8}$$

il a réussi à établir *l'équation de récurrence*

$$(9)\quad n^3u_n - (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)u_{n-1} + (n-1)^3u_{n-2} = 0 \qquad (n \geq 2),$$

à joindre aux conditions initiales $u_0 = 1, u_1 = 5$. Apéry n'a pas indiqué sa démonstration de (9), qui fut fournie par Zagier et Cohen [E 3]. L'idée est la suivante : posons $F(n,k) = \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$; il existe alors une autre fonction $G(n,k)$ satisfaisant à l'identité

$$(10)\quad \begin{aligned} &G(n,k) - G(n,k-1) = n^3F(n,k) - \\ &- (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)F(n-1,k) + (n-1)^3F(n-2,k)\ . \end{aligned}$$

On a évidemment

$$(11)\quad u_n = \sum_k F(n,k)$$

et de plus, pour n fixé, la "somme télescopique"

$$\sum_k [G(n,k) - G(n,k-1)]$$

s'annule ; la relation (9) se déduit donc de (10) par sommation sur k. La méthode s'appelle (en anglais) "creative telescoping".

On peut démontrer de manière analogue l'identité intégrale classique :

$$(12)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ixy}e^{-\pi y^2}dy = e^{-\pi x^2}.$$

On note $F(x,y)$ la fonction à intégrer, puis l'on pose

$$(13)\quad u(x) := \int F(x,y)dy.$$

Il s'agit de prouver $u(x) = e^{-\pi x^2}$, ce qui se fait par la caractérisation suivante*

$$(14)\quad D_x u(x) + 2\pi x u(x) = 0, \qquad u(0) = 1.$$

* On note $D_x, D_y, \cdots$ la dérivation par rapport à $x, y, \cdots$

On détermine une autre fonction $G(x,y)$ telle que

$$D_xF(x,y) + 2\pi xF(x,y) = D_yG(x,y); \tag{15}$$

l'équation (14) se déduit de (15) en intégrant en y, compte tenu des deux règles fondamentales de *dérivation sous le signe intégral* et *d'intégration par parties*

$$D_x \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} D_xF(x,y)dy \tag{16}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_yG(x,y)dy = 0 \qquad \text{si} \qquad G(x,\pm\infty) = 0. \tag{17}$$

Donc, au prix de déterminer la fonction $G(x,y)$, la *formule intégrale* (12) *se ramène à une relation différentielle* (15).

Quelle est la raison du succès dans ces deux cas ? Rappelons d'abord qu'on élimine les coefficients binomiaux au profit des factorielles par la formule

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{18}$$

Puisque la factorielle $n!$ est définie par les conditions

$$n! = n.(n-1)! \text{ pour } n \geq 1, \qquad 0! = 1, \tag{19}$$

la formule (18) résulte aussitôt de la découverte fondamentale de Pascal qui peut s'exprimer ainsi :

$$\binom{n-1}{k} = \frac{n-k}{n}\binom{n}{k}, \qquad \binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k} \tag{20}$$

(la formule d'addition est un corollaire évident !). Dans l'exemple d'Apéry, on a par conséquent

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} = \left(\frac{n+k+1}{n-k+1}\right)^2 \tag{21}$$

$$\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} = \frac{1}{(k+1)^4}\left(\frac{n+k+1}{n-k}\right)^2. \tag{22}$$

Il se trouve aussi que le quotient $G(n,k)/F(n,k)$ est une fonction rationnelle

$$\frac{G(n,k)}{F(n,k)} = 4\left(\frac{n-k}{n+k}\right)^2 (2n-1)\{k(2k+1)-(2n-1)^2\}. \tag{23}$$

Pour démontrer l'identité (10) de Zagier et Cohen, on peut diviser les deux membres par $F(n,k)$ et *se ramener à un calcul trivial, mais incompréhensible, entre fonctions rationnelles de n et k.*

De manière analogue, dans l'exemple d'intégrale donné ci-dessus, les dérivées logarithmiques de la fonction $F(x,y) = e^{2\pi i x y}.e^{-\pi y^2}$ sont des fonctions rationnelles

$$\frac{D_x F(x,y)}{F(x,y)} = 2\pi i y, \qquad \frac{D_y F(x,y)}{F(x,y)} = 2\pi i(x+iy) \tag{24}$$

et la fonction $G(x,y)$ qui satisfait à l'équation différentielle (15) vérifie

$$\frac{G(x,y)}{F(x,y)} = -i\ . \tag{25}$$

La preuve de la relation différentielle (15) est donc ramenée (après division par $F(x,y)$) à celle d'une identité tout à fait élémentaire entre fonctions rationnelles de x et y. Pour achever de prouver la relation intégrale (12), il suffit de la vérifier dans le cas "initial" $x = 0$, c'est-à-dire d'établir la relation $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2} dy = 1$.

Voici pour la *phase de vérification*, mais qu'en est-il de la *phase inductive* ? Au vu de la fonction $F(n,k) = \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$, est-on certain qu'il existe une équation de récurrence du type (9) satisfaite par la somme $u_n = \sum_k F(n.k)$, et mieux, qu'il existe une fonction $G(n,k)$ satisfaisant à la relation (10). **Comment détermine-t-on explicitement l'équation de récurrence et la fonction $G(n,k)$?**

Dans une remarquable série d'articles, Zeilberger vient de donner deux réponses à ces problèmes :

- une réponse *théorique*, en utilisant la théorie des systèmes différentiels holonomes de Bernstein ;

- une réponse *pratique*, en mettant au point des algorithmes qui fournissent l'équation de récurrence et $G(n,k)$.

Toutes les relations mentionnées ci-dessus, y compris l'extraordinaire récurrence d'Apéry, sont retrouvées de manière systématique et automatique, et l'on dispose d'un outil qui permet de *découvrir* et de *démontrer* des identités d'un certain type. Le jour est sans doute proche où les formulaires classiques sur les fonctions spéciales seront remplacés par un logiciel d'interrogation performant, une extension de MAPLE par exemple.

1. MODULES HOLONOMES [C 3]

1.1. On note $\mathcal{A}_r$ l'anneau des *opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux* agissant sur les fonctions de r variables ; les constantes sont les nombres complexes. Tout opérateur s'écrit de manière unique sous la forme

$$P = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} x^\alpha D^\beta. \tag{26}$$

Les notations sont classiques :

- on note $x = (x_1, \cdots, x_r)$ le système des r variables et l'on note D_i la dérivation partielle par rapport à x_i ;

- on note $\alpha, \beta \cdots$ des éléments de $\mathbf{Z}_+^r$, c'est-à-dire des vecteurs $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ à coordonnées entières positives ;

- on pose

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r. \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r}, \qquad D^\beta = D_1^{\beta_1} \cdots D_r^{\beta_r}.$$

Dans la formule (26), il n'y a qu'un nombre fini de coefficients $c_{\alpha\beta}$ différents de 0.

L'*ordre* m de l'opérateur $P \neq 0$ est le maximum parmi les nombres $|\beta|$ pour les β tels que $c_{\alpha\beta} \neq 0$; le *symbole principal* $\sigma(P)$ de P est le polynôme $\sum_{|\beta|=m} c_{\alpha\beta} x^\alpha \xi^\beta$ en les variables $(x,\xi) = (x_1, \cdots, x_r, \xi_1, \cdots, \xi_r)$; il est homogène de degré m en ξ. Voici les règles de base :

- si P est d'ordre m et Q d'ordre n, alors PQ est d'ordre $m+n$ et le commutateur $[P,Q] = PQ - QP$ est d'ordre $\leq m+n-1$;

- on a *

$$\sigma(PQ) = \sigma(P)\sigma(Q), \qquad \sigma([P,Q]) = \{\sigma(P), \sigma(Q)\}. \tag{27}$$

Dans la dernière formule, on a utilisé le *crochet de Poisson* de deux polynômes en x, ξ défini par

$$\{F,G\} = \sum_{j=1}^{r} \left[\frac{\partial F}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial G}{\partial x_j} - \frac{\partial G}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_j} \right]. \tag{28}$$

On peut présenter les choses de manière plus algébrique. Comme algèbre sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, $\mathcal{A}_r$ est définie par les $2r$ générateurs x_i et D_j soumis aux relations

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [D_i, D_j] = 0, \quad [D_i, x_j] = \delta_{ij}. \tag{29}$$

On note $F^m = F^m\mathcal{A}_r$ l'ensemble des opérateurs d'ordre $\leq m$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, la suite (F^m) est croissante ($F^0 \subset F^1 \subset F^2 \subset \cdots$), on a $F^0 = \mathbf{C}[x_1, \cdots, x_r]$ et les règles données plus haut s'écrivent

$$F^m.F^n \subset F^{m+n}, \qquad [F^m, F^n] \subset F^{m+n-1}. \tag{30}$$

Grâce à ces propriétés, on peut définir une structure d'algèbre sur le gradué associé

$$gr^F\mathcal{A}_r = \bigoplus_{m \geq 0} F^m/F^{m-1};$$

on définit un isomorphisme de cette algèbre sur l'algèbre de polynômes $\mathbf{C}[x,\xi]$ qui associe $\sigma(P)$ à la classe de P modulo F^{m-1} (pour tout P dans F^m/F^{m-1}). L'anneau $\mathcal{A}_r$ n'est pas commutatif, mais comme l'anneau $gr^F\mathcal{A}_r$ l'est, on peut considérer que $\mathcal{A}_r$ est presque commutatif et beaucoup des propriétés des anneaux de polynômes s'étendent à $\mathcal{A}_r$.

* Dans la deuxième formule, on suppose que $[P,Q]$ est d'ordre $m+n-1$, ce qui équivaut à $\{\sigma(P), \sigma(Q)\} \neq 0$.

1.2. Nous pouvons faire opérer les opérateurs différentiels de $\mathcal{A}_r$ sur les polynômes en x, sur les fonctions de classe C^∞ définies sur $\mathbf{R}^r$ (ou sur un ouvert de $\mathbf{R}^r$), sur les fonctions analytiques dans $\mathbf{R}^r$ ou les fonctions holomorphes dans $\mathbf{C}^r$, sur divers espaces de distributions sur $\mathbf{R}^r$.

Soit par exemple f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^r$. Introduisons l'ensemble $I_f \subset \mathcal{A}_r$ formé des opérateurs différentiels $P \in \mathcal{A}_r$ tels que $Pf = 0$; c'est un *idéal à gauche* de $\mathcal{A}_r$. Les symboles principaux $\sigma(P)$ correspondant aux P dans I_f sont les éléments homogènes non nuls d'un idéal J_f de $\mathbf{C}[x,\xi]$. A cet idéal de polynômes on associe une variété algébrique dans $\mathbf{C}^{2r}$, définie par les équations

$$\sigma(P)(x,\xi) = 0 \qquad \text{pour tout } P \neq 0 \text{ dans } I_f;$$

c'est la *variété caractéristique* V_f de f.

Un théorème profond de Kashiwara - Kawai - Sato affirme que la variété V_f est *involutive* ; on en trouvera une démonstration dans l'exposé [C 11] de Malgrange à ce séminaire. Voici la signification : notons J_f^0 l'idéal des polynômes dans $\mathbf{C}[x,\xi]$ dont l'ensemble des zéros contient V_f ; d'après le théorème des zéros de Hilbert, on a $F \in J_f^0$ si et seulement si une puissance de F appartient à J_f. Alors J_f^0 *est stable par crochet de Poisson* (l'assertion correspondante pour J_f résulte aussitôt de la deuxième formule (27)).

D'après un résultat classique de géométrie symplectique, cela entraîne que *la variété V_f est de dimension au moins égale à r* : si $p = (x^{(0)}, \xi^{(0)})$ est un point lisse de V_f, l'espace tangent en p à V_f est l'orthogonal des différentielles d_pF pour F parcourant J_f^0. Mais il existe une forme bilinéaire symplectique J_p sur l'espace cotangent en p telle que

$$\{F,G\}(p) = J_p(d_pF, d_pG). \tag{31}$$

Si F et G sont dans J_f^0, il en est de même de $\{F,G\}$ par l'involutivité, d'où $J_p(d_pF, d_pG) = 0$. Ceci entraîne que l'ensemble des d_pF pour F dans J_f^0 est un espace vectoriel de dimension $\leq r$, et par dualité que l'espace tangent en p à V_f est de dimension $\geq 2r - r = r$.

1.3. On dira que la fonction (ou la distribution) f est *holonome** si la variété caractéristique V_f est de dimension r (le minimum possible).

En pratique, il est difficile de déterminer explicitement l'idéal à gauche I_f de $\mathcal{A}_r$, et encore moins les idéaux J_f et J_f^0 de $\mathbf{C}[x,\xi]$. Pour vérifier qu'une fonction f est holonome, on écrira un certain nombre d'équations différentielles

$$P_1 f = \cdots = P_m f = 0;$$

soit σ_j le symbole principal de P_j. Sur la variété V_f s'annulent les polynômes σ_j, mais aussi les crochets de Poisson $\{\sigma_j,\sigma_k\}, \{\sigma_j,\{\sigma_k,\sigma_\ell\}\}$ etc... puisque l'idéal J_f est stable par crochet de Poisson. Si l'on peut trouver assez d'équations du type $\sigma_j = 0, \{\sigma_j,\sigma_k\} = 0, \cdots$ pour que l'ensemble W des solutions dans $\mathbf{C}^{2r}$ soit de dimension $\leq r$, on aura $\dim V_f \leq \dim W \leq r$ et f est holonome.

Exemples : 1) Si $r = 1$, une fonction holonome sur $\mathbf{C}$ est une fonction qui satisfait à une équation différentielle

$$\sum_{j=0}^{m} p_j(z).D^j f(z) = 0\ , \tag{32}$$

où $p_0(z), \cdots, p_m(z)$ sont des polynômes avec $p_m \neq 0$. Le symbole correspondant est $p_m(z)\zeta^m$ et la variété caractéristique est contenue dans

$$\{\zeta = 0\} \cup \{z = z_{(1)}\} \cup \cdots \cup \{z = z_{(d)}\}\ ,$$

où $z_{(1)}, \cdots, z_{(d)}$ sont les racines du polynôme $p_m(z)$. Par exemple, la *fonction hypergéométrique de Gauss* est solution de l'équation

$$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2} + \{c - (a+b+1)z\}\frac{dF}{dz} - abF = 0;$$

elle est holonome avec la variété caractéristique

$$\{z = 0\} \cup \{z = 1\} \cup \{\zeta = 0\}$$

* Björk parle de la "classe de Bernstein" dans [C 3].

dans $\mathbf{C}^2$.

2) Un polynôme $f(z)$ sur $\mathbf{C}^r$ satisfait aux équations

$$D_1^m f = \cdots = D_r^m f = 0$$

pour m assez grand. La variété caractéristique est donc contenue dans la variété linéaire $\zeta_1 = \cdots = \zeta_r = 0$ de dimension r ; par suite, f est holonome.

3) La *distribution de Dirac* δ dans $\mathbf{R}^r$ satisfait aux relations

$$x_1\delta = \cdots = x_r\delta = 0.$$

Elle est donc holonome avec la variété caractéristique $x_1 = \cdots = x_r = 0$.

1.4. Si I est un idéal à gauche de $\mathcal{A}_r$, on appelle *variété caractéristique de* I la variété algébrique $V(I)$ dans $\mathbf{C}^{2r}$, intersection des zéros des polynômes $\sigma(P)$, où P parcourt I (et $P \neq 0$). C'est encore une variété involutive, donc de dimension $\geq r$. On dira que l'*idéal* I est *holonome* si $V(I)$ est de dimension r. Donc la fonction f est holonome si et seulement si l'idéal I_f est holonome.

Soit S un anneau de polynômes $\mathbf{C}[u_1, \cdots, u_s]$. On sait que S *est de dimension homologique* s ; autrement dit, tout S-module M de type fini admet une résolution

$$0 \to L_s \to L_{s-1} \to \cdots \to L_0 \to M \to 0,$$

où les L_i sont des S-modules projectifs de type fini, et il existe un S-module M qui n'admet pas de résolution plus courte. Il revient encore au même de dire que l'on a $\operatorname{Ext}_S^i(M, N) = 0$ pour $i > s$, quels que soient les S-modules de type fini M et N, et qu'il existe M et N tels que $\operatorname{Ext}_S^s(M, N) \neq 0$.

Soit M un S-module de type fini ; introduisons l'idéal J de S formé des p tels que $pM = 0$, puis la variété algébrique W dans $\mathbf{C}^s$ définie par les équations $p(u) = 0$, où p parcourt J (qu'on peut appeler la *variété caractéristique de* M). Notons d ou $d(M)$ la dimension de W. Un théorème classique affirme que l'on a

$$\text{(33)} \qquad \begin{cases} \operatorname{Ext}_S^j(M, S) = 0 & \text{pour} \quad 0 \leq j < s - d \\ \operatorname{Ext}_S^{s-d}(M, S) \neq 0. \end{cases}$$

Revenons à l'anneau $\mathcal{A}_r$, avec sa filtration $(F^m)_{m\geq 0}$; on convient qu'on a $F^m = 0$ pour $m < 0$. Soit alors M un $\mathcal{A}_r$-module à gauche de type fini, et soit $(u_1, \cdots, u_t)$ un système générateur ; nous choisirons aussi des entiers positifs $d_1, \cdots, d_t$ et nous poserons

$$\Gamma^m M = F^{m-d_1} \cdot u_1 + \cdots + F^{m-d_t} \cdot u_t. \tag{34}$$

La suite croissante $\Gamma^0 M \subset \Gamma^1 M \subset \cdots$ ainsi obtenue est appelée une *bonne filtration* de M ; comme on a $F^m \cdot \Gamma^n M \subset \Gamma^{n+m} M$, on peut définir le gradué associé $gr^\Gamma M = \bigoplus_{m\geq 0} \Gamma^m M/\Gamma^{m-1} M$, qui est un module sur l'anneau $gr^F \mathcal{A}_r$. Ce module est de type fini.* Comme l'anneau $gr^F \mathcal{A}_r$ est un anneau de polynômes $\mathbf{C}[x_1, \cdots, x_r, \xi_1, \cdots, \xi_r]$, ce qui précède s'applique. On introduit donc la variété caractéristique $W(gr^\Gamma M)$; compte tenu de la définition (34), on montre facilement que la variété caractéristique $W(gr^\Gamma M)$ est indépendante de Γ ; on la notera donc $W(M)$. Elle est involutive, donc de dimension $\geq r$.

En utilisant les résultats cités plus haut dans le cas où $S = \mathbf{C}[x_1, \cdots, x_r, \xi_1, \cdots, \xi_r]$, et un argument de suite spectrale lié à la filtration $(\Gamma^m M)_{m\geq 0}$, on montre qu'on a

$$\begin{cases} \operatorname{Ext}^j_{\mathcal{A}_r}(M, \mathcal{A}_r) = 0 & \text{pour} \quad 0 \leq j < 2r - d \\ \operatorname{Ext}^{2r-d}_{\mathcal{A}_r}(M, \mathcal{A}_r) \neq 0, \end{cases} \tag{35}$$

où $d = d(M)$ est la dimension de la variété caractéristique $W(M) \subset \mathbf{C}^{2r}$. Ceci donne une caractérisation de $d(M)$ indépendante de toute filtration sur l'algèbre $\mathcal{A}_r$ ou sur le $\mathcal{A}_r$-module M. On prouve aussi la relation

$$\operatorname{Ext}^j_{\mathcal{A}_r}(M, \mathcal{A}_r) = 0 \qquad \text{pour} \qquad j > r \ ,$$

et l'on en déduit assez facilement que *la dimension homologique de $\mathcal{A}_r$ est r* (et non $2r$ comme celle de $gr^F \mathcal{A}_r$).

* Cette propriété donne une caractérisation intrinsèque des "bonnes" filtrations.

On dira bien sûr que le $\mathcal{A}_r$-module M est holonome* si l'on a $d(M) = r$: il revient au même de supposer que l'on a

$$\text{(36)} \qquad \operatorname{Ext}^j_{\mathcal{A}_r}(M, \mathcal{A}_r) = 0 \qquad \text{pour} \qquad j \neq r \ .$$

Le $\mathcal{A}_r$-module à droite $\operatorname{Ext}^r_{\mathcal{A}_r}(M, \mathcal{A}_r)$ joue alors le rôle de dual pour M ; il est lui aussi holonome.

1.5. La principale innovation de Bernstein a consisté en l'introduction d'une autre filtration : $B^m = B^m\mathcal{A}_r$ se compose des opérateurs différentiels de la forme

$$\text{(37)} \qquad P = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq m} c_{\alpha\beta} x^\alpha D^\beta .$$

Autrement dit, on compte le degré total en les x_i et les D_i et non seulement le degré partiel en les D_i. On peut répéter presque mot pour mot ce qui a été énoncé pour la filtration (F^m) :

- *anneau gradué associé* $gr^B\mathcal{A}_r$, lui aussi isomorphe** à $\mathbf{C}[x_1, \cdots, x_r, \xi_1, \cdots, \xi_r]$: le B-symbole de P sera

$$\text{(38)} \qquad \sigma_B(P) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=m} c_{\alpha\beta} x^\alpha \xi^\beta$$

avec les notations de (37) ;

- *bonne B-filtration* sur un $\mathcal{A}_r$-module de type fini M donnée par

$$\text{(39)} \qquad \Delta^m M = B^{m-d_1} \cdot u_1 + \cdots + B^{m-d_t} \cdot u_t ;$$

- *gradué associé* $gr^\Delta M$: c'est un module de type fini sur $gr^B\mathcal{A}_r$;

- *variété B-caractéristique* du module $gr^\Delta M$; elle ne dépend pas de la bonne B-filtration sur M :

---

* L'idéal à gauche I de $\mathcal{A}_r$ est holonome si et seulement si le $\mathcal{A}_r$-module à gauche $\mathcal{A}_r/I$ est holonome. Si f est une fonction sur $\mathbf{R}^r$, le $\mathcal{A}_r$-module $\mathcal{A}_r/I_f$ est isomorphe à $\mathcal{A}_r \cdot f$ (ensemble des $P.f$ où P parcourt $\mathcal{A}_r$).

** La graduation utilisée dans $\mathbf{C}[x, \xi]$ sera le *degré total* en x, ξ.

- *dimension* $\delta = \delta(M)$ de la variété B-caractéristique du $\mathcal{A}_r$-module M ;

- *caractérisation de* $\delta(M)$: le plus petit entier j tel que $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}_r}(M, \mathcal{A}_r)$ soit non nul est égal à $2r - \delta(M)$.

De ce dernier résultat, on déduit que la *dimension* $d(M)$ *de la variété caractéristique de* M *est égale à la dimension* $\delta(M)$ *de la variété* B*-caractéristique* (les variétés caractéristiques sont distinctes).

La dimension $\delta = \delta(M)$ peut se calculer ainsi : si un $\mathcal{A}_r$-module de type fini M est muni d'une bonne B-filtration $(\Delta^m M)_{m \geq 0}$, chacun des espaces vectoriels $\Delta^m M / \Delta^{m-1} M$ est de dimension finie sur $\mathbf{C}$; on peut donc introduire la série de Poincaré

$$\begin{aligned} \chi_\Delta(t) &= \sum_{m \geq 0} t^m \cdot \dim \Delta^m M / \Delta^{m-1} M \\ &= (1-t) \sum_{m \geq 0} t^m \cdot \dim \Delta^m M. \end{aligned} \tag{40}$$

Comme $gr^\Delta M$ est un module gradué de type fini sur un anneau de polynômes, il est bien connu (*série de Hilbert - Samuel*) que $\chi_\Delta(t)$ est une fonction rationnelle de la forme $Q(t)/(1-t)^\delta$ où le polynôme $Q(t)$ satisfait à $Q(1) \neq 0$. De la formule (40) on déduit l'existence d'un entier m_0 et d'un polynôme $X(u)$ à coefficients rationnels tels que

$$\dim \Delta^m M = X(m) \qquad \text{pour} \qquad m \geq m_0.$$

De plus, δ *est le degré du polynôme* $X(u)$.

Tous les résultats des n° 1.4 et 1.5 se démontrent indépendamment du théorème d'involutivité de Kashiwara - Kawai - Sato. De plus, il existe une démonstration directe très simple de l'inégalité $\delta \geq r$ (voir [C 6], page 178), d'où une nouvelle preuve de l'inégalité $d \geq r$ (où d est la dimension de la variété caractéristique de M).

1.6. Concluons par un *guide pratique* des modules holonomes.

Un $\mathcal{A}_r$-module M est un module sur l'anneau de polynômes $\mathbf{C}[x_1, \cdots, x_r]$ muni d'opérateurs $\mathbf{C}$-linéaires de dérivation $D_1, \cdots, D_r$ commutant deux à

deux et satisfaisant à la *règle de Leibniz*

$$D_i(F.\Phi) = D_iF.\Phi + F.D_i\Phi \tag{41}$$

pour $1 \leq i \leq r, F$ dans $\mathbf{C}[x_1, \cdots, x_r]$ et Φ dans M. Par exemple, tout espace de fonctions ou de distributions à r variables qui est stable par multiplication par x_i et dérivation par rapport à x_i (pour $i = 1, \cdots, r$) est un $\mathcal{A}_r$-module.

Un élément Φ d'un $\mathcal{A}_r$-module M est *holonome* s'il existe une constante C satisfaisant à la condition suivante :

(H) *pour tout entier* $m \geq 0$, *le sous-espace vectoriel de* M *engendré par les éléments* $x^\alpha D^\beta \Phi$, *avec* $|\alpha| + |\beta| \leq m$, *est de dimension* $\leq C \cdot m^r$.

Les éléments holonomes d'un $\mathcal{A}_r$-module forment un sous-$\mathcal{A}_r$-module de M. Un module holonome est un $\mathcal{A}_r$-module de type fini dont tout élément est holonome.

Un *$\mathcal{A}_r$-module rationnel* est un espace vectoriel V sur le corps $\mathbf{C}(x_1, \cdots, x_r)$ des fonctions rationnelles muni d'opérateurs $\mathbf{C}$-linéaires $D_1, \cdots, D_r$ commutant deux à deux et satisfaisant à la règle de Leibniz. Soit Φ un élément holonome de V ; il existe alors des opérateurs différentiels non nuls $P_1, \cdots, P_r$ annulant Φ et de la forme suivante

$$P_i = \sum_{j=0}^{s_i} p_{ij}(x_1, \cdots, x_r) D_i^j \tag{42}$$

(les p_{ij} sont des polynômes). Le sous-espace vectoriel de V, engendré sur $\mathbf{C}(x_1, \cdots, x_r)$ par les dérivées $D^\alpha \Phi$ pour $0 \leq \alpha_1 \leq s_1, \cdots, 0 \leq \alpha_r \leq s_r$ en nombre fini, contient Φ et il est stable par les dérivations $D_1, \cdots, D_r$.

On dira qu'un élément Φ de V est *rationnellement holonome** s'il est contenu dans un sous-espace vectoriel W de dimension finie sur $\mathbf{C}(x_1, \cdots, x_r)$ stable par $D_1, \cdots, D_r$ (autrement dit, W est un sous-$\mathcal{A}_r$-module rationnel). Introduisons l'annulateur I_Φ de Φ ; c'est un idéal à gauche de $\mathcal{A}_r$ auquel

* "D-finite" dans la terminologie de Zeilberger.

est associée une variété caractéristique $V(I_\Phi)$ dans $\mathbf{C}^{2r}$ (cf n° 1.4). Alors Φ est rationnellement holonome si et seulement s'il existe un polynôme non nul $H(x_1, \cdots, x_r)$ tel que $V(I_\Phi)$ soit contenue dans la réunion de l'hypersurface $H = 0$ dans $\mathbf{C}^{2r}$ et d'une variété de dimension r. D'après l'alinéa précédent, tout élément holonome est rationnellement holonome.

2. ÉTUDE DES SUITES ET DES FONCTIONS HOLONOMES

2.1. On appelle traditionnellement *série hypergéométrique* toute série de la forme $\sum_{n\geq 0} R(n)$ où $R(0) = 1$ et $R(n+1)/R(n)$ est une fonction rationnelle de n. En décomposant la fonction rationnelle en produit de facteurs linéaires, on écrit $R(n)$ sous la forme

$$R(n) = \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!}, \tag{43}$$

avec la définition suivante (classique !)

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1), \tag{44}$$

c'est-à-dire

$$(a)_0 = 1, \qquad (a)_{n+1} = (a)_n(a+n). \tag{45}$$

La somme de la série $\sum_{n\geq 0} R(n)$ est alors ${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1 \cdots a_p \\ b_1 \cdots b_q \end{matrix} \middle| z\right)$ avec la définition classique de la *fonction hypergéométrique* [A 2] : la fonction de Gauss est la fonction

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a\ b \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n. \tag{46}$$

Sur l'espace des fonctions d'une variable entière n, on fait agir les opérateurs aux différences de la forme*

$$(Pu)(n) = \sum_{\alpha\geq 0} \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} n^\alpha u(n+\beta). \tag{47}$$

* L'entier β est positif ou négatif.

En particulier, on introduit l'opérateur de translation N par

$$(Nu)(n) = u(n+1) \tag{48}$$

et l'opérateur précédent s'écrit $P(n,N) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} n^\alpha N^\beta$. On a la relation de commutation

$$N.n = (n+1).N. \tag{49}$$

On dira qu'une suite est *holonome* s'il existe un opérateur $P(n,N)$ non nul tel que $P(n,N)u = 0$; c'est le cas de la suite hypergéométrique (43) (prendre

$$P(n,N) = (n+1)(n+b_1)\cdots(n+b_q)N - z(n+a_1)\cdots(n+a_p))$$

ou de la suite d'Apéry $u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$ (prendre

$$P(n,N) = n^3 - (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)N^{-1} + (n-1)^3 N^{-2}).$$

2.2. Tout ceci se généralise aux suites multiples, c'est-à-dire aux fonctions u à valeurs complexes définies dans $\mathbf{Z}^s$ (ou dans une partie convenable de $\mathbf{Z}^s$). On introduit les opérateurs de translation $K_1, \cdots, K_s$ par

$$(K_i u)(k_1, \cdots, k_s) = u(k_1, \cdots, k_i + 1, \cdots, k_s), \tag{50}$$

puis les opérateurs

$$P(\mathbf{k}, \mathbf{K}) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^s} \sum_{\beta \in \mathbf{Z}^s} c_{\alpha\beta} k^\alpha K^\beta \tag{51}$$

(transformant la fonction $u(k_1, \cdots, k_s)$ en la fonction

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} k_1^{\alpha_1} \cdots k_s^{\alpha_s} u(k_1 + \beta_1, \cdots, k_s + \beta_s)).$$

Les opérateurs de la forme (51) forment une algèbre $\mathcal{B}_s$ qui est définie par les générateurs $k_1, \cdots, k_s, K_1, \cdots, K_s, K_1^{-1}, \cdots, K_s^{-1}$ et les relations

$$k_i k_j = k_j k_i \tag{52}$$

$$K_iK_j = K_jK_i \tag{53}$$

$$k_iK_j = K_jk_i \qquad (\text{pour } i \neq j) \tag{54}$$

$$K_ik_i = (k_i + 1)K_i \tag{55}$$

$$K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1. \tag{56}$$

Cette algèbre n'est pas une inconnue : associons à la fonction $u : \mathbf{Z}^s \to \mathbf{C}$ la série de Laurent formelle

$$U(z_1, \cdots, z_s) = \sum_{k_1, \cdots, k_s} u(k_1, \cdots, k_s) z_1^{k_1} \cdots z_s^{k_s}. \tag{57}$$

A la fonction k_iu correspond $z_i \frac{\partial U}{\partial z_i}$ et à K_iu correspond $z_i^{-1}U$. On définit ainsi par

$$k_i \leftrightarrow z_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \qquad K_i \leftrightarrow z_i^{-1}$$

un isomorphisme entre $\mathcal{B}_s$ et le localisé de $\mathcal{A}_s$ obtenu en inversant $z_1, \cdots, z_s$.

On est ainsi amené à définir le *symbole* de $P(\mathbf{k}, \mathbf{K})$ en gardant les termes de plus haut degré m par rapport à $\mathbf{k}$:

$$\sigma(P) = \sum_{|\alpha|=m} \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} \zeta^\alpha z^{\alpha-\beta} \tag{58}$$

(polynôme en $z_1, \cdots, z_s, z_1^{-1}, \cdots, z_s^{-1}, \zeta_1, \cdots, \zeta_s$) ; à une fonction $u(k_1, \cdots, k_s)$ on associe ensuite la *variété caractéristique* V_u dans $(\mathbf{C}^\times)^s \times \mathbf{C}^s$ (coordonnées $z_1, \cdots, z_s, \zeta_1, \cdots, \zeta_s$) définie par les équations $\sigma(P)(z, \zeta) = 0$ où P parcourt l'ensemble des opérateurs tels que $P.u = 0$. Enfin, on dira que u est *holonome* si V_u est de dimension s.

Exemples : 1) On dit que u est *de type hypergéométrique* si K_iu/u est une fonction rationnelle en $k_1, \cdots, k_s$ pour $i = 1, \cdots, s$. Elle est (rationnellement) holonome.

2) On dit que u est *close* si c'est un produit de facteurs du type $(a)_{c_1k_1+\cdots+c_sk_s}^{\pm 1}$ où $c_1, \cdots, c_s$ sont des entiers donnés, et d'une fonction rationnelle. C'est un cas particulier de suite de type hypergéométrique.

3) Considérons des fonctions $u(\mathbf{k})$ définies dans $\mathbf{Z}^s$, à valeurs vectorielles dans $\mathbf{C}^N$ et satisfaisant aux équations

$$K_i u(\mathbf{k}) = A_i(\mathbf{k}).u(\mathbf{k}) \qquad (1 \leq i \leq s). \tag{59}$$

Dans cette formule $A_1(\mathbf{k}), \cdots, A_s(\mathbf{k})$ sont des matrices $N \times N$ dépendant rationnellement de $\mathbf{k}$, et l'on a les relations de compatibilité*

$$K_i A_j \cdot A_i = K_j A_i \cdot A_j. \tag{60}$$

Les composantes de $u(\mathbf{k})$ sont des suites rationnellement holonomes et le plus souvent holonomes.

2.3. On peut aussi considérer des *cas mixtes* de fonctions $u(x, \mathbf{k})$ sur $\mathbf{C}^r \times \mathbf{Z}^s$. On associe à cette fonction la série de Laurent formelle

$$U(x, z) = \sum_{k_1, \cdots, k_s} u(x, \mathbf{k}) z_1^{k_1} \cdots z_s^{k_s}, \tag{61}$$

sur laquelle on fait agir les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux en $x_1, \cdots, x_r, z_1, \cdots, z_s, z_1^{-1}, \cdots, z_s^{-1}$, d'où encore une théorie de fonctions holonomes.

Un exemple illustratif :

Posons $u(x, k) = P_k(x)$ (k-ième polynôme de Legendre). Ecrivant D pour $\frac{d}{dx}$ et K pour la translation en k, les relations classiques s'écrivent ainsi :

$$\begin{cases} Pu = 0 & \text{équation différentielle} \\ Qu = 0 & \text{récurrence} \end{cases} \tag{62}$$

* Ce système est l'analogue discret d'un système différentiel $D_i F = A_i F$, où les matrices A_i satisfont à la condition d'*intégrabilité complète*

$$D_i A_j - D_j A_i = [A_i, A_j].$$

avec

$$P = (1 - x^2)D^2 - 2xD + k(k+1) \tag{63}$$

$$Q = (k+2)K^2 - (2k+3)xK + k + 1. \tag{64}$$

On a

$$\sigma(P) = (1 - x^2)\xi^2 + z^2\zeta^2 \tag{65}$$

$$\sigma(Q) = \zeta(z + z^{-1} - 2x) \tag{66}$$

(recette : remplacer D par ξ, k par $z\zeta, K$ par z^{-1} et garder les termes de plus haut degré en (ξ, ζ)). La variété caractéristique est définie par les équations $\sigma(P) = \sigma(Q) = \{\sigma(P), \sigma(Q)\} = 0$; elle a 4 composantes toutes de dimension 2 (dans l'espace $\mathbf{C}^3 \times \mathbf{C}^\times$ de coordonnées ξ, ζ, x, z)

$$\begin{aligned} V &: 2x = z + z^{-1}, \qquad 2\zeta = \xi(z^{-2} - 1) \\ V' &: \xi = 0,\ \zeta = 0 \\ V''_+ &: x = 1,\ \zeta = 0 \\ V''_- &: x = -1,\ \zeta = 0. \end{aligned}$$

On est dans le cas holonome. Il résulte d'un théorème général sur les systèmes holonomes que les solutions du système (62) forment un espace de dimension finie ν sur $\mathbf{C}$ (ici $\nu = 4$ correspondant aux conditions initiales $u(0,0), u(0,1), Du(0,0), Du(0,1)$).

2.4. D'après la théorie générale des systèmes holonomes, les fonctions holonomes sur $\mathbf{C}^r \times \mathbf{Z}^s$ forment un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ stable par les opérateurs $x_j, D_j, k_i, K_i^{\pm 1}$. Il est aussi facile de voir que si $u(x, \mathbf{k})$ et $v(y, \mathbf{m})$ sont holonomes, il en est de même du produit $u(x, \mathbf{k})v(y, \mathbf{m})$ à variables séparées (produit tensoriel). On peut aussi faire des changements de coordonnées linéaires sur les variables continues x_j, ou les variables discrètes k_i, ou encore des translations.

Soit $\Phi(x)$ une fonction holonome sur $\mathbf{C}^r$, dont la transformée de Laplace est donnée par

$$L(\xi) = \int_c e^{-x\cdot\xi}\Phi(x)d^r x; \tag{67}$$

l'intégrale porte sur une variété réelle convenable de dimension r dans $\mathbf{C}^r$, et l'on a posé $d^r x = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r$ et $x\cdot\xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_r\xi_r$. On sait que si $P(x, D_x)$ est un opérateur à coefficients polynomiaux, la transformée de Laplace de $P(x, D_x)\Phi(x)$ est $Q(\xi, D_\xi)L(\xi)$ où l'opérateur $Q(\xi, D_\xi)$ s'obtient à partir de $P(x, D_x)$ en remplaçant x_j par $-\frac{\partial}{\partial\xi_j}$ et $\frac{\partial}{\partial x_j}$ par ξ_j. Si l'on se réfère au guide pratique (voir n° 1.6), on constate que la transformée de Laplace est une fonction holonome.*

Considérons maintenant la *spécialisation* $x_r = 0$ qui fait correspondre à une fonction $u(x_1, \cdots, x_r)$ la fonction

$$S_r u(x_1, \cdots, x_{r-1}) = u(x_1, \cdots, x_{r-1}, 0). \tag{68}$$

Supposons u holonome et soit M le $\mathcal{A}_r$-module holonome formé des fonctions Pu où P parcourt $\mathcal{A}_r$. Identifiant $\mathcal{A}_{r-1}$ à un sous-anneau de $\mathcal{A}_r$, il est clair que S_r est une application $\mathcal{A}_{r-1}$-linéaire et qu'on a $S_r(x_r v) = 0$, donc S_r définit une application $\mathcal{A}_{r-1}$-linéaire $\bar{S}_r$ du $\mathcal{A}_{r-1}$-module $M/x_r M$ dans l'espace des fonctions de $r-1$ variables. Or le *$\mathcal{A}_{r-1}$-module $M/x_r M$ est holonome* (voir [C 6], page 193), et il est clair qu'un quotient d'un $\mathcal{A}_{r-1}$-module holonome est holonome : l'image de S_r est donc un $\mathcal{A}_{r-1}$-module holonome qui contient $S_r u$. Conclusion : *la fonction $S_r u$ est holonome.*

Combinant ce résultat avec des transformations linéaires, on voit par exemple que si $u(x, y, z)$ est holonome à 3 variables, la fonction $u(x, x, y)$ est holonome à 2 variables. Du résultat sur le produit tensoriel, on déduit, par spécialisation à la diagonale, que le produit ordinaire de deux fonctions holonomes à r variables est holonome.

* De manière plus algébrique, il existe un automorphisme σ de l'algèbre $\mathcal{A}_r$ défini par $\sigma(x_j) = -D_j, \sigma(D_j) = x_j$ pour $1 \leq j \leq r$, et σ préserve la filtration de Bernstein dans $\mathcal{A}_r$.

Tous ces résultats s'étendent aux fonctions mixtes du type $u(x, \mathbf{k})$.

2.5. Disons quelques mots des q-analogues. On introduit une variable q, qu'on peut spécialiser en un nombre complexe $q \neq 0$. On opère sur des fonctions de s variables inversibles $z_1, \cdots, z_s$ au moyen des homothéties T_i :

$$T_i f(z_1, \cdots, z_s) = f(z_1, \cdots, qz_i, \cdots, z_s). \tag{69}$$

On considère l'algèbre des opérateurs de la forme

$$P = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^s} \sum_{\beta \in \mathbf{Z}^s} c_{\alpha\beta} z^\alpha T^\beta, \tag{70}$$

c'est-à-dire

$$Pf(z_1, \cdots, z_s) = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} z^\alpha f(q^{\beta_1} z_1, \cdots, q^{\beta_s} z_s). \tag{71}$$

L'algèbre ${}_q\mathcal{C}_s$ de ces opérateurs est définie par les générateurs $z_1, \cdots, z_s$, $T_1, \cdots, T_s$ et leurs inverses soumis aux relations

$$z_i z_j = z_j z_i,\ T_i T_j = T_j T_i,\ z_i T_j = T_j z_i, \text{ pour } i \neq j \tag{72}$$

$$T_i z_i = q z_i T_i. \tag{73}$$

Sabbah [D 4] vient de donner les fondements de la théorie de cette algèbre, en imitant les résultats de Bernstein. On a ainsi une filtration par le degré total en les z_j et les T_j, on définit les bonnes filtrations sur les ${}_q\mathcal{C}_s$-modules de type fini, on introduit une dimension δ dont on montre qu'elle satisfait à $\delta \geq s$ et l'on définit les modules holonomes sur ${}_q\mathcal{C}_s$ par la condition $\delta = s$.

On peut alors développer une théorie des *fonctions q-holonomes*. Par exemple, une fonction de type *q-hypergéométrique* est une fonction $F(z_1, \cdots, z_s | q)$ telle que les quotients $T_i F / F$ soient des fonctions rationnelles de $z_1, \cdots, z_s$ et q (pour $1 \leq i \leq s$). Pour une variable, on a le produit infini

$$(z; q)_\infty = \prod_{i \geq 0} (1 - q^i z) \tag{74}$$

solution de l'équation

$$\frac{(qz;q)_\infty}{(z;q)_\infty} = \frac{1}{1-z}. \tag{75}$$

On pose

$$(z;q)_n = \frac{(z;q)_\infty}{(q^n z;q)_\infty} = \prod_{i=0}^{n-1}(1-q^i z); \tag{76}$$

l'analogue des coefficients binomiaux

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}} \tag{77}$$

est un polynôme en q de degré $k(n-k)$ dont la valeur pour $q=1$ est le coefficient binomial $\binom{n}{k}$. La formule d'addition devient

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{78}$$

et l'analogue de la fonction hypergéométrique de Gauss est la fonction "hypergéométrique basique" de Heine [A 20]

$${}_2\Phi_1 \left(\begin{matrix} a & b \\ c & \end{matrix} ; q ; z \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a;q)_n (b;q)_n}{(c;q)_n (q;q)_n} z^n. \tag{79}$$

Si l'on substitue q^α à a, q^β à b et q^γ à c et qu'on fasse $q=1$, on retrouve ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \end{matrix} \middle| z \right)$.

3. INTÉGRATION ET SOMMATION DES FONCTIONS HOLONOMES

3.1. Posons $x = (x_1, \cdots, x_r)$ et $x' = (x_1, \cdots, x_{r-1})$, d'où $x = (x', x_r)$. A partir d'une fonction $\Phi(x)$, on définit par intégration une fonction

$$H(x') = \int \Phi(x', x_r) dx_r. \tag{80}$$

On peut supposer par exemple que x_r est une variable réelle et que $\Phi(x', x_r)$ pour x' fixé est nulle en dehors d'un intervalle compact. On peut aussi considérer une intégrale de Cauchy en la variable complexe x_r, ou des parties finies d'intégrales divergentes au sens de Hadamard. Dans tous ces exemples sont valables *les règles de dérivation sous le signe intégral et d'intégration par parties.*

Supposons que $\Phi(x)$ soit holonome, solution du système holonome

$$P_1(x, D)\Phi = \cdots = P_N(x, D)\Phi = 0; \tag{81}$$

autrement dit, l'idéal à gauche I de $\mathcal{A}_r$ engendré par $P_1, \cdots, P_N$ est holonome et le $\mathcal{A}_r$-module à gauche $M := \mathcal{A}_r/I$ est holonome. D'après [C 6], page 193, le $\mathcal{A}_{r-1}$-module $M/D_rM = \mathcal{A}_r/(I + D_r\mathcal{A}_r)$ est holonome. Si l'on pose

$$J = (I + D_r\mathcal{A}_r) \cap \mathcal{A}_{r-1}. \tag{82}$$

le $\mathcal{A}_{r-1}$-module $\mathcal{A}_{r-1}/J$ est holonome, car isomorphe à un sous-module de M/D_rM, et l 'idéal à gauche J de $\mathcal{A}_{r-1}$ est holonome. Or J se compose des opérateurs différentiels de la forme

$$Q(x', D') = \sum_{j=1}^{N} A_j(x, D)P_j(x, D) + D_rB(x, D) \tag{83}$$

(avec $D' = (D_1, \cdots, D_{r-1})$). D'après les équations (81), on a

$$Q(x', D')\Phi(x', x_r) = \partial\Phi_1(x', x_r)/\partial x_r \tag{84}$$

avec

$$\Phi_1(x) = B(x, D)\Phi(x). \tag{85}$$

On a alors

$$\begin{aligned} Q(x', D')H(x') &= Q(x', D') \int \Phi(x', x_r)dx_r \\ &= \int Q(x', D')\Phi(x', x_r)dx_r \\ &= \int \frac{\partial}{\partial x_r}\Phi_1(x', x_r)dx_r \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après les règles de calcul rappelées plus haut. Autrement dit, *l'intégrale* $H(x')$ *sera solution d'un système holonome*

$$Q_1(x', D')H = \cdots = Q_M(x', D')H = 0, \tag{86}$$

où chacun des opérateurs $Q_j(x', D')$ *est de la forme* (83).

3.2. *L'analogue discret* est le suivant : on considère une solution d'un système holonome

$$A_1(\mathbf{k}, \mathbf{K})u(\mathbf{k}) = \cdots = A_N(\mathbf{k}, \mathbf{K})u(\mathbf{k}) = 0 \tag{87}$$

d'équations de récurrence. On pose

$$v(k_1, \cdots, k_{r-1}) = \sum_{k_r} u(k_1, \cdots, k_{r-1}, k_r), \tag{88}$$

où, par exemple, la sommation porte sur un nombre fini de valeurs non nulles. Alors $v(\mathbf{k}')$ satisfait à un système holonome

$$B_1(\mathbf{k}', \mathbf{K}')v(\mathbf{k}') = \cdots = B_M(\mathbf{k}', \mathbf{K}')v(\mathbf{k}') = 0 \tag{89}$$

où chaque opérateur $B_i(\mathbf{k}', \mathbf{K}')$ est de la forme

$$\sum_{j=1}^{N} C_j(\mathbf{k}, \mathbf{K}).A_j(\mathbf{k}, \mathbf{K}) + (K_r - 1)D(\mathbf{k}, \mathbf{K}). \tag{90}$$

Le problème est de faire les calculs explicitement.

Par exemple, la fonction $F(n,k) = \binom{n}{k}$ est solution du système holonome $PF = P'F = 0$ avec

$$P = (n-k+1)N - (n+1)\ ,\ P' = (k+1)K - (n-k) \tag{91}$$

(on a posé $NF(n,k) = F(n+1,k)$ et $KF(n,k) = F(n,k+1)$).

Par un calcul facile, on trouve

$$(n+1)(N-2) = (K+1)P + NP' - (K-1)(Nn - n - 1).$$

Autrement dit, la fonction $v(n) = \sum_k \binom{n}{k}$ satisfait à l'équation de récurrence

$$(n+1)(v(n+1) - 2v(n)) = 0\ . \tag{92}$$

Tenant compte de la condition initiale $v(0) = 1$, ceci entraîne la réponse souhaitée $v(n) = 2^n$ pour $n \geq 0$. La méthode précédente n'est pas la plus simple pour prouver l'identité $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$, mais elle a l'avantage de conduire à des algorithmes programmables.

3.3. Nous décrirons d'abord l'algorithme "lent" de Zeilberger.

a) Utilisant les relations de commutation

$$kn = nk\ ,\ KN = NK\ ,\ kN = Nk\ ,\ nK = Kn$$

et les relations

$$Nn = (n+1)N\ ,\ Kk = (k+1)K\ , \tag{93}$$

on montre que tout opérateur $A(n,k,N,K)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$A(n,k,N,K) = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=0}^{c} a_{ij}(N,K)k^i n^j + R(n,N,K). \tag{94}$$

b) On considère deux opérateurs P et P' mis sous la forme normale précédente

$$P = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=0}^{c} a_{ij}(N,K) k^i n^j + R(n,N,K), \tag{95}$$

$$P' = \sum_{i=1}^{b'} \sum_{j=0}^{c} a'_{ij}(N,K) k^i n^j + R'(n,N,K). \tag{96}$$

c) On considère les opérateurs

$$k^{\alpha'} n^{\beta} P \quad \text{pour} \quad 0 \leq \alpha' < b' \ , \ 0 \leq \beta \leq c(b+b'-1)$$

$$k^{\alpha} n^{\beta} P' \quad \text{pour} \quad 0 \leq \alpha < b \ , \ 0 \leq \beta \leq c(b+b'-1)$$

au nombre de $\mu = (b+b')[c(b+b'-1)+1]$. Ecrivons chacun de ces μ opérateurs sous la forme normale (94) : chacun d'eux est somme d'un opérateur dépendant uniquement de n, N et K et d'une combinaison linéaire de monômes $k^i n^j$ à coefficients dans *l'anneau commutatif* des polynômes en N, K. Les monômes $k^i n^j$ qui interviennent satisfont aux inégalités

$$1 \leq i \leq b+b'-1 \ , \ 0 \leq j \leq c(b+b')$$

et leur nombre est $(b+b'-1)[c(b+b')+1]$, ce qui est égal à $\mu-1$. *Comme on a μ combinaisons linéaires à coefficients dans l'anneau commutatif* $\mathbf{C}[N,K]$ *de $\mu-1$ monômes $k^i n^j$*, il existe par l'algèbre linéaire usuelle une combinaison linéaire non nulle du type

$$\sum_{\alpha'=0}^{b'-1} \sum_{\beta=0}^{c(b+b'-1)} A_{\alpha'\beta}(N,K) k^{\alpha'} n^{\beta} P + \sum_{\alpha=0}^{b-1} \sum_{\beta=0}^{c(b+b'-1)} A'_{\alpha\beta} k^{\alpha} n^{\beta} P'$$

qui ne fasse plus intervenir les monômes $k^i n^j$, donc soit *un opérateur dépendant de n, N et k exclusivement.*

d) On a donc trouvé deux opérateurs A et A' tels que $R = AP + A'P'$ ne dépende plus de k. Que cet opérateur ne soit pas nul se vérifie au moyen

de l'hypothèse que le système $PF = P'F = 0$ est holonome, c'est-à-dire que les symboles $\sigma(P)$ et $\sigma(P')$ sont "indépendants" en un sens convenable.

e) On écrit R sous la forme $(K-1)^\lambda R'(K,N,n)$. Comme on a $PF = P'F = 0$, on a

$$(K-1)^\lambda R'(K,N,n)F = 0\ . \tag{97}$$

Cette relation signifie que la fonction $F' = R'(K,N,n)F$ est un polynôme en k. Supposons que, pour n fixé, on ait $F(n,k) = 0$ pour $|k|$ assez grand. Alors $F'(n,k)$ a la même propriété, et comme c'est un polynôme en k, on a $F'(n,k) = 0$.

f) Ecrivons l'opérateur R' sous la forme

$$R'(K,N,n) = \sum_{j=0}^{d} K^j R_j(N,n) \tag{98}$$

et posons

$$S(N,n) = \sum_{j=0}^{d} R_j(N,n); \tag{99}$$

il en découle une relation

$$R'(K,N,n) = S(N,n) + (K-1)U(K,N,n). \tag{100}$$

En conclusion, *de l'équation* $R'F = 0$, *il résulte que la fonction* $a(n) = \sum_k F(n,k)$ satisfait à l'équation de récurrence

$$S(N,n)a = 0. \tag{101}$$

3.4. L'algorithme précédent est très exigeant en temps de calcul et surtout en mémoire. Un algorithme beaucoup plus performant utilise le procédé de sommation de Gosper [C 8] que nous décrivons maintenant.

Soit $(S(k))_{k\geq 0}$ une suite de type hypergéométrique, de sorte que l'on ait

$$\frac{S(k)}{S(k-1)} = s(k) \quad \text{pour} \quad k \geq 1. \tag{102}$$

où $s(k)$ est fonction rationnelle de k. Si l'on pose

$$A(k) = S(k) - S(k-1), \tag{103}$$

la suite $(A(k))_{k\geq 0}$ est de type hypergéométrique : en effet, le quotient $a(k) = A(k)/A(k-1)$ est donné par

$$a(k) = s(k-1)\frac{s(k)-1}{s(k-1)-1}. \tag{104}$$

De même, le quotient $S(k)/A(k)$ est égal à la fonction rationnelle $s(k)/(s(k)-1)$.

Le problème de la *sommation hypergéométrique indéfinie* est le suivant : étant donnée la suite de type hypergéométrique $(A(k))_{k\geq 0}$, décider si la suite $(S(k))_{k\geq 0}$ donnée par

$$S(k) = A(0) + \cdots + A(k) \tag{105}$$

est aussi de type hypergéométrique. Comme on a évidemment la relation (104), le problème devient le suivant :

Etant donnée la fonction rationnelle $a(k)$, décider si l'équation (104) admet une solution qui soit une fonction rationnelle $s(k)$, et la calculer si possible.

On commence par écrire la fonction rationnelle $a(k) = A(k)/A(k-1)$ sous la forme

$$a(k) = \frac{p(k)}{p(k-1)}\frac{q(k)}{r(k)}\ , \tag{106}$$

où les polynômes $p(k), q(k), r(k)$ sont tels que $q(k)$ n'ait de diviseur commun non constant avec aucun des polynômes $r(k), r(k+1), r(k+2), \cdots$ [si $q(k)$ et $r(k+j)$ avaient un facteur commun non constant $u(k)$, faire la substitution

$$\begin{aligned} p(k) &\leftarrow p(k)u(k)u(k-1)\cdots u(k-j+1) \\ q(k) &\leftarrow q(k)/u(k) \\ r(k) &\leftarrow r(k)/u(k-j), \end{aligned}$$

puis recommencer si nécessaire].

Introduisons maintenant une nouvelle suite $(\varphi(k))_{k\geq 0}$ par

$$S(k) = \frac{q(k+1)}{p(k)}\varphi(k)A(k) \; ; \tag{107}$$

la relation $A(k) = S(k) - S(k-1)$ se traduit alors par l'équation

$$q(k+1)\varphi(k) - r(k)\varphi(k-1) = p(k). \tag{108}$$

Si la suite $(S(k))$ est de type hypergéométrique, on a vu que $S(k)/A(k)$, donc aussi $\varphi(k)$, est fonction rationnelle de k. Le miracle est le suivant : *si une fonction rationnelle $\varphi(k)$ est solution de l'équation (108), c'est un polynôme dont on peut majorer explicitement le degré par un entier J calculable à partir de $p(k), q(k)$ et $r(k)$.* Si l'on a $J < 0$, il n'y a pas de solution et la suite $(S(k))$ n'est pas de type hypergéométrique ; sinon on pose

$$\varphi(k) = f_0 + f_1 k + \cdots + f_J k^J \tag{109}$$

et l'équation (108) se traduit en un système d'équations linéaires pour les coefficients $f_0, \cdots, f_J$.

3.5. Posons le problème de la *sommation hypergéométrique définie.* On dispose d'une fonction $F(n,k)$ de type hypergéométrique, satisfaisant aux deux relations

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} = A(n,k) \; , \quad \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} = B(n,k) \; , \tag{110}$$

où $A(n,k)$ et $B(n,k)$ sont deux fonctions rationnelles. On cherche à déterminer des polynômes $s_0(n), \cdots, s_I(n)$ et une fonction rationnelle $R(n,k)$ satisfaisant à la relation

$$s(n,N)F(n,k) = G(n,k) - G(n,k-1) \; , \tag{111}$$

où l'on a posé

$$s(n,N) = \sum_{i=0}^{I} s_i(n)N^i \tag{112}$$

$$G(n,k) = R(n,k)F(n,k)\ . \tag{113}$$

Compte tenu des relations (110) et après division par $F(n,k)$, la relation (111) devient une identité entre fonctions rationnelles

$$\sum_{i=0}^{I} s_i(n).\prod_{j=0}^{i-1} A(n+j,k) = R(n,k) - R(n,k-1)/B(n,k-1). \tag{114}$$

En général, *la vérification de cette relation, une fois déterminés explicitement* $s_0(n),\cdots, s_I(n)$ *et* $R(n,k)$, *est tout à fait élémentaire* ; elle entraîne (sous réserve par exemple que $F(n,k)$ soit nul pour $|k|$ assez grand lorsque n est fixé) que la somme $a(n) = \sum_k F(n,k)$ vérifie l'équation de récurrence

$$\sum_{i=0}^{I} s_i(n)a(n+i) = 0. \tag{115}$$

Zeilberger dit que $R(n,k)$ *"certifie" la validité de l'équation (115).*

Pour le calcul de $s_0(n),\cdots,s_I(n),R(n,k)$, on procède comme dans l'algorithme de Gosper, en traitant n comme un paramètre, c'est-à-dire en remplaçant le corps de base $\mathbf{C}$ par le corps des fonctions rationnelles $\mathbf{C}(n)$. Donnons simplement les formules essentielles. Comme dans la méthode de Gosper, on introduit une factorisation

$$\frac{F(n+i,k)}{F(n+i,k-1)} = \frac{p_i(n,k)}{p_i(n,k-1)}\frac{q(n,k)}{r(n,k)} \tag{116}$$

avec des polynômes $p_i(n,k), q(n,k)$ et $r(n,k)$ tels que $q(n,k)$ n'ait de facteur commun avec aucun des polynômes $r(n,k+j)$ pour $j = 0,1,2,\cdots$ [on détermine d'abord $p_0(n.k), q(n,k)$ et $r(n,k)$, ce qui est toujours possible si le numérateur et le dénominateur de $B(n,k)$ sont produits de facteurs linéaires ; on utilise ensuite le fait que $F(n+i,k)/F(n,k)$ est une fonction rationnelle connue d'après (110)]. On détermine ensuite les fonctions rationnelles $s_0(n),\cdots,s_I(n)$ et $f_0(n),\cdots,f_J(n)$ satisfaisant au système d'équations linéaires (identifier les coefficients des monômes en k)

$$\sum_{j=0}^{J}\{q(n,k+1)k^j - r(n,k)(k-1)^j\}\cdot f_j(n) = \sum_{i=0}^{I} p_i(n,k).s_i(n). \tag{117}$$

On conclut en posant

$$G(n,k) = q(n,k+1)\sum_{j=0}^{J} f_j(n)k^j \cdot \frac{\sum_{i=0}^{I} s_i(n)F(n+i,k)}{\sum_{i=0}^{I} s_i(n)p_i(n,k)}. \tag{118}$$

Comme $F(n+i,k)/F(n,k)$ est une fonction rationnelle de n et k, il en est bien de même de $G(n,k)/F(n,k)$.

Exemple : $F(n,k) = 1/k!(n-k)!$.

On prend $I = 1$, et l'algorithme de Gosper garantit que $J = 0$ convient. On a alors :

$$\begin{cases} p_0(n,k) = n-k+1 \\ p_1(n,k) = 1 \\ q(n,k) = n-k+2 \\ r(n,k) = k\ . \end{cases} \tag{119}$$

Les inconnues sont s_0, s_1, f_0 et le système (117) s'écrit

$$(n-2k+1)f_0 = (n-k+1)s_0 + s_1\ : \tag{120}$$

en séparant les diverses puissances de k, ceci donne le système

$$\begin{cases} (n+1)f_0 = (n+1)s_0 + s_1 \\ 2f_0 = s_0\ . \end{cases} \tag{121}$$

Une solution est

$$f_0 = 1\ ,\ s_0 = 2\ ,\ s_1 = -(n+1),$$

d'où

$$G(n,k) = (n-k+1)\frac{2F(n,k) - (n+1)F(n+1,k)}{2(n-k+1) - (n+1)};$$

comme on a

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} = \frac{1}{n-k+1}\ , \tag{122}$$

on conclut par un calcul de fonctions rationnelles

$$\frac{G(n,k)}{F(n,k)} = 1 \ . \tag{123}$$

L'équation (111) prend dans ce cas la forme

$$2F(n,k) - (n+1)F(n+1,k) = F(n,k) - F(n,k-1). \tag{124}$$

Par sommation sur k, on voit que $a(n) = \sum_k F(n,k)$ satisfait à l'équation de récurrence

$$2a(n) - (n+1)a(n+1) = 0 \ : \tag{125}$$

ceci joint à la condition initiale $a(0) = 1$ donne la solution $a(n) = \frac{2^n}{n!}$, d'où la formule sommatoire

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{2^n}{n!}. \tag{126}$$

On a retrouvé *notre exemple favori* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

3.6. Zeilberger et Wilf sont en train de développer des algorithmes semblables pour traiter les q-analogues des fonctions de type hypergéométrique. Avec Almqvist, Zeilberger a aussi décrit des algorithmes du même genre pour déterminer les équations différentielles satisfaites par des intégrales du type $u(x) = \int v(x,y)dy$ où v est de *type hyperexponentiel.** Enfin, en s'appuyant sur les résultats préliminaires de Galligo [C 7], Takayama [C 14] a développé des techniques d'élimination dans les idéaux d'opérateurs différentiels, imitant les bases de Gröbner [C 5] pour les idéaux de polynômes. Cela lui fournit une alternative aux méthodes de Zeilberger.

* Ceci signifie que $D_x v/v$ et $D_y v/v$ sont des fonctions rationnelles.

4. SÉRIES ET FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES *

4.1. On a déjà rappelé la définition de la série hypergéométrique de Gauss $F = {}_2F_1$:

$$F\left(\begin{matrix} a & b \\ & c \end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{k\geq 0} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}; \tag{127}$$

elle a un sens pourvu que c ne soit pas un entier négatif, et la série converge pour $|z| < 1$. Elle satisfait à l'équation différentielle

$$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2} + \{c - (a+b+1)z\}\frac{dF}{dz} - abF = 0\ . \tag{128}$$

Dans certains cas particuliers, on retrouve des fonctions élémentaires, par exemple

$$F\left(\begin{matrix} a & b \\ & b \end{matrix}\middle| z\right) = (1-z)^{-a} \tag{129}$$

$$F\left(\begin{matrix} a & a+1/2 \\ & 1/2 \end{matrix}\middle| z\right) = \frac{1}{2}(1+z^{1/2})^{-2a} + \frac{1}{2}(1-z^{1/2})^{-2a}. \tag{130}$$

Les fonctions correspondant à divers paramètres a, b, c ne sont pas indépendantes ; voici par exemple la relation d'Euler

$$F\left(\begin{matrix} c-a & c-b \\ & c \end{matrix}\middle| z\right) = (1-z)^{a+b-c} F\left(\begin{matrix} a & b \\ & c \end{matrix}\middle| z\right). \tag{131}$$

Dans certains cas, on peut sommer exactement la série (127) :

$$F\left(\begin{matrix} a & b \\ & c \end{matrix}\middle| 1\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \tag{132}$$

GAUSS

* Voir [A 16] et [A 2] pour les propriétés de base des fonctions hypergéométriques, et [A 11] (chapitre 5) pour un exposé très détaillé des sommes liées aux coefficients binomiaux.

$$(133)\qquad F\left(\begin{matrix} a & b \\ 1+a-b \end{matrix}\middle| -1\right) = 2^{-a}\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1-b+\frac{a}{2})\Gamma(\frac{a+1}{2})} \quad \text{KUMMER}$$

$$(134)\qquad F\left(\begin{matrix} a & 1-a \\ & b \end{matrix}\middle| \frac{1}{2}\right) = 2^{1-b}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(b)}{\Gamma(\frac{a+b}{2})\Gamma(\frac{b-a+1}{2})}$$

$$(135)\qquad F\left(\begin{matrix} 2a & 2b \\ a+b+\frac{1}{2} \end{matrix}\middle| \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(a+b+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(b+\frac{1}{2})}.$$

Il y a deux démonstrations classiques de la formule (132) de Gauss. Tout d'abord, on a la représentation intégrale d'Euler

$$(136)\qquad F\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix}\middle| z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt$$

qui fournit le prolongement analytique de la fonction hypergéométrique dans le plan coupé le long de l'axe réel de 1 à $+\infty$. Pour $z=1$, l'intégrale se réduit à l'intégrale bêta d'Euler

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-a-1}dt,$$

donc à $\Gamma(b)\Gamma(c-b-a)/\Gamma(c-a)$. La même méthode permet d'établir les relations (133) à (135).

La deuxième démonstration utilise une équation de récurrence

$$(137)\qquad (c-a)(c-b)zF\left(\begin{matrix} a & b \\ c+1 \end{matrix}\middle| z\right) =$$

$$= c[(2c-a-b-1)z-c+1]F\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix}\middle| z\right) + c(c-1)(1-z)F\left(\begin{matrix} a & b \\ c-1 \end{matrix}\middle| z\right)$$

(vérification directe par comparaison des coefficients de z^k). En prenant la limite pour z tendant vers 1, le dernier terme disparaît, d'où

$$(138)\qquad (c-a)(c-b)F\left(\begin{matrix} a & b \\ c+1 \end{matrix}\middle| 1\right) = c(c-a-b)F\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix}\middle| 1\right).$$

Par récurrence sur l'entier $m \geq 0$, on en déduit

$$F\left(\begin{matrix} a & b \\ c & \end{matrix}\middle| 1\right) = \frac{(c-a)_m (c-b)_m}{(c)_m (c-a-b)_m} F\left(\begin{matrix} a & b \\ c+m & \end{matrix}\middle| 1\right). \tag{139}$$

On passe ensuite à la limite sur m ; il est facile de voir que $F\left(\begin{matrix} a & b \\ c+m & \end{matrix}\middle| 1\right)$ tend vers 1 lorsque m tend vers l'infini, et le développement de la fonction gamma en produit infini donne la relation

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(u_1)_m \cdots (u_p)_m}{(v_1)_m \cdots (v_p)_m} = \frac{\Gamma(v_1)\cdots\Gamma(v_p)}{\Gamma(u_1)\cdots\Gamma(u_p)} \tag{140}$$

lorsque $u_1 + \cdots + u_p$ est égal à $v_1 + \cdots + v_p$.

4.2. La formule de Gauss est particulièrement intéressante lorsque b est un entier négatif ; compte tenu de la relation de récurrence

$$\Gamma(s+n) = \Gamma(s)(s)_n \ , \tag{141}$$

la formule de Gauss se spécialise en

$$F\left(\begin{matrix} a & -n \\ c & \end{matrix}\middle| 1\right) = \frac{(c-a)_n}{(c)_n}. \tag{142}$$

Mais la série hypergéométrique se réduit à une somme finie, et après quelques manipulations, on obtient la relation

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(a)_k}{(c)_k} = \frac{(c-a)_n}{(c)_n} \ . \tag{143}$$

Il reste à faire la substitution $a \leftarrow -u, c \leftarrow v-n+1$ pour obtenir la *formule de Chu-Vandermonde*

$$\binom{u+v}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{u}{k} \binom{v}{n-k}. \tag{144}$$

Voici d'autres spécialisations de la formule (142)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n} \quad (a \leftarrow 1, c \leftarrow -n-r) \tag{145}$$

$$(146)\qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{r}{k}=(-1)^n\binom{r-1}{n}\quad (a\leftarrow 1, c\leftarrow -n+r+1).$$

A son tour, la formule de Chu-Vandermonde contient de nombreuses spécialisations, par exemple*

$$(147)\qquad \sum_k\binom{u}{m+k}\binom{v}{n-k}=\binom{u+v}{m+n}.$$

De manière analogue, la formule (133) de Kummer donne par spécialisation

$$(148)\qquad F\left(\begin{matrix}1-r-2n & -2n\\ r\end{matrix}\,\middle|\,-1\right)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\frac{(r-1)!}{(r+n-1)!},$$

et après quelques manipulations simples, on obtient la généralisation suivante de la deuxième formule (2)

$$(149)\qquad \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{r}{k}\binom{r}{2n-k}=(-1)^n\binom{r}{n}.$$

On pourrait continuer ce jeu ; **pratiquement n'importe quelle formule donnant la somme de produits de deux coefficients binomiaux s'obtient par spécialisation des formules (132) à (135).**

4.3. Pour aller plus loin, il faut introduire les séries hypergéométriques générales (voir le n° 2.1)

$$(150)\qquad {}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1\cdots a_p\\ b_1\cdots b_q\end{matrix}\,\middle|\,z\right)=\sum_{k\geq 0}\frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k\cdots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!}.$$

L'équation différentielle (128) se généralise ainsi (on pose $D=\frac{d}{dz}$ et $\vartheta=z\frac{d}{dz}$)

$$(151)\qquad D(\vartheta+b_1-1)\cdots(\vartheta+b_q-1)F=(\vartheta+a_1)\cdots(\vartheta+a_p)F\ .$$

* Voir [A 11], page 169 pour une liste plus étendue.

Cela résulte immédiatement des trois formules de dérivation :

$$(152) \qquad DF\left(\begin{matrix} a_1 \cdots a_p \\ b_1 \cdots b_q \end{matrix} \middle| z\right) = \frac{a_1 \cdots a_p}{b_1 \cdots b_q} F\left(\begin{matrix} a_1 + 1 \cdots a_p + 1 \\ b_1 + 1 \cdots b_q + 1 \end{matrix} \middle| z\right)$$

$$(153) \qquad (\vartheta + a_1) F\left(\begin{matrix} a_1 \cdots a_p \\ b_1 \cdots b_q \end{matrix} \middle| z\right) = a_1 F\left(\begin{matrix} a_1 + 1 & a_2 \cdots a_b \\ b_1 & b_2 \cdots b_q \end{matrix} \middle| z\right).$$

$$(154) \quad (\vartheta + b_1 - 1) F\left(\begin{matrix} a_1 \cdots a_p \\ b_1 \cdots b_q \end{matrix} \middle| z\right) = (b_1 - 1) F\left(\begin{matrix} a_1 & a_2 \cdots a_p \\ b_1 - 1 & b_2 \cdots b_q \end{matrix} \middle| z\right).$$

Dans la formule d'Euler (131), comparons les coefficients de z^n dans les deux membres. On obtient une relation due à PFAFF et SAALSCHÜTZ et qui s'écrit

$$(155) \qquad {}_3F_2\left(\begin{matrix} a & b & -n \\ c & a + b - c - n + 1 \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n (c-a-b)_n}.$$

Il est facile de retrouver le théorème de Gauss sur ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a\ b \\ c \end{matrix} \middle| 1\right)$ en prenant la limite pour $n \to \infty$ dans la formule de Pfaff-Saalschütz.

Nous recopions les relations les plus remarquables obtenues par sommation de séries hypergéométriques générales :

DIXON :

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a & b & c \\ & a - b + 1 & a - c + 1 \end{matrix} \middle| 1\right) =$$

$$\frac{\Gamma(\frac{a}{2} + 1)\Gamma(a - b + 1)\Gamma(a - c + 1)\Gamma(\frac{a}{2} - b - c + 1)}{\Gamma(a + 1)\Gamma(\frac{a}{2} - b + 1)\Gamma(\frac{a}{2} - c + 1)\Gamma(a - b - c + 1)}$$

WATSON :

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a & b & c \\ & \frac{1}{2}(a + b + 1) & 2c \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(c + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{a+b+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + c)}{\Gamma(\frac{a+1}{2})\Gamma(\frac{b+1}{2})\Gamma(c - \frac{a}{2} + \frac{1}{2})\Gamma(c - \frac{b}{2} + \frac{1}{2})}$$

WHIPPLE :

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a & b & c \\ & e & f \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{\pi\Gamma(e)\Gamma(f)}{2^{2c-1}\Gamma(\frac{a+e}{2})\Gamma(\frac{a+f}{2})\Gamma(\frac{b+e}{2})\Gamma(\frac{b+f}{2})}$$

(sous les hypothèses $a + b = 1$ et $e + f = 2c + 1$).

L'identité la plus impressionnante est celle de DOUGALL :

$$ {}_7F_6\left(\begin{matrix} a & \frac{a}{2}+1 & b & c & d & e & -m \\ & \frac{a}{2} & a-b+1 & a-c+1 & a-d+1 & a-e+1 & a+m+1 \end{matrix} \middle| 1 \right) $$

$$ = \frac{(a+1)_m(a-b-c+1)_m(a-b-d+1)_m(a-c-d+1)_m}{(a-b+1)_m(a-c+1)_m(a-d+1)_m(a-b-c-d+1)_m}, $$

sous l'hypothèse que m est un entier positif et que l'on a $2a + 1 = b + c + d + e - m$. Les experts savent déduire de ces formules, par spécialisation, un nombre illimité d'identités entre coefficients binomiaux.

4.4. Toutes ces relations ont des q-analogues.* On a déjà introduit le produit infini $(a;q)_\infty = \prod_{m\geq 0}(1 - aq^m)$, qui est un cousin de la fonction gamma, et le produit partiel

$$ (a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty} = \prod_{m=0}^{n-1}(1 - aq^m). \tag{156} $$

Le q-analogue de la factorielle est

$$ [n]_q! = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n} \; ; \tag{157} $$

c'est un polynôme en q de degré $n(n-1)/2$, dont la valeur pour $q = 1$ est égale à $n!$.

Le q-analogue de la fonction hypergéométrique de Gauss est donné par

$$ {}_2\Phi_1\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} ; q; z \right) = \sum_{k\geq 0} \frac{(a;q)_k(b;q)_k}{(c;q)_k(q;q)_k} z^k, \tag{158} $$

avec la généralisation évidente

$$ {}_r\Phi_s\left(\begin{matrix} a_1 \cdots a_r \\ b_1 \cdots b_s \end{matrix} ; q; z \right) = \sum_{k\geq 0} \frac{(a_1;q)_k \cdots (a_r;q)_k}{(b_1;q)_k \cdots (b_s;q)_k} \frac{z^k}{(q;q)_k}. \tag{159} $$

* Voir les livres d'Exton [A 17] et de Gasper et Rahman [A 19].

De même que la série du binôme est un cas particulier de fonction hypergéométrique

$$(160) \qquad (1-z)^{-a} = {}_1F_0\left(\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}\,\middle|\, z\right)$$

et que l'exponentielle est donnée par

$$(161) \qquad e^z = {}_0F_0\left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}\,\middle|\, z\right),$$

on introduira une série q-binomiale

$$(162) \qquad {}_1\Phi_0\left(\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; q; z\right) = \sum_{k\geq 0} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} z^k = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}$$

et une série q-exponentielle

$$(163) \qquad {}_0\Phi_0\left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}; q; z\right) = \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{(q;q)_k} = \frac{1}{(z;q)_\infty}$$

(pour retrouver le cas classique, remplacer z par $(1-q)x$ et faire tendre q vers 1).

Dans la série ${}_r\Phi_s$, si l'on remplace z par 1 et que l'un des paramètres a_i est de la forme q^{-m} (avec $m \geq 0$ entier), on obtient une somme de coefficients q-binomiaux (voir le n° 2.5). Les formules de sommation hypergéométriques (Gauss, Kummer,...) ont des q-analogues dont voici un échantillon :

GAUSS :

$${}_2\Phi_1\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix}; q; c/ab\right) = {}_2\Pi_2\left(\begin{matrix} c/a & c/b \\ c & c/ab \end{matrix}\,\middle|\, q\right)$$

KUMMER :

$${}_2\Phi_1\left(\begin{matrix} a & b \\ aq/b \end{matrix}; q; -q/b\right) = {}_1\Pi_2\left(\begin{matrix} -q \\ -q/b \quad aq/b \end{matrix}\,\middle|\, q\right) {}_2\Pi_0\left(\begin{matrix} aq & aq^2/b^2 \\ - & - \end{matrix}\,\middle|\, q^2\right)$$

PFAFF-SAALSCHÜTZ :

$$ {}_3\Phi_2\left(\begin{matrix} a & b & q^{-n} \\ & c & abc^{-1}q^{1-n} \end{matrix}; q; q\right) = \frac{(c/a;q)_n (c/b;q)_n}{(c;q)_n (c/ab;q)_n} $$

DIXON :

$$ {}_3\Phi_2\left(\begin{matrix} a^2 & b & c \\ & a^2q/b & a^2q/c \end{matrix}; q; q^2a/bc\right) = {}_4\Pi_4\left(\begin{matrix} b/a^2 & c/a^2 & q/a & bc/a \\ b/a & c/a & q/a^2 & bc/a^2 \end{matrix}\middle| q\right). $$

On a adopté la convention suivante

$$ {}_r\Pi_s\left(\begin{matrix} a_1 \cdots a_r \\ b_1 \cdots b_s \end{matrix}\middle| q\right) = \frac{(a_1;q)_\infty \cdots (a_r;q)_\infty}{(b_1;q)_\infty \cdots (b_s;q)_\infty}. \tag{164} $$

On peut spécialiser ces formules d'innombrables manières ; citons deux cas particuliers célèbres

JACOBI :

$$ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} z^n = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1+q^{2m-1}z)(1+q^{2m-1}z^{-1})(1-q^{2m})} $$

ROGERS-RAMANUJAN :

$$ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}. $$

4.5. Quel est l'apport de Zeilberger ? Je l'illustrerai sur un exemple typique, et je renverrai à [B 16] et [B 18] pour un grand nombre d'applications analogues, y compris la formule de Dougall [B 14].

Tout d'abord, la formule (3) de Dixon est le cas particulier $a = b = c = n$ d'une autre formule de Dixon (1903), à savoir

$$ \sum_k (-1)^k \binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+a}{c+k} = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!} \tag{165} $$

(a, b, c sont des entiers positifs). Ce n'est autre qu'une spécialisation de la formule hypergéométrique de Dixon :

(166)

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix}1-a-2n & 1-b-2n & -2n\\ a & b & \end{matrix}\,\middle|\,1\right) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}\frac{(a+b+2n-2)_n}{(a)_n(b)_n} . $$

Voici la démonstration de la formule (165) élaborée par Zeilberger, en collaboration avec son fidèle servant électronique Shalosh Ekhad. Posons

$$ F(n,k) = (-1)^k \frac{(n+b)!(n+c)!(b+c)!}{(n+k)!(n-k)!(b+k)!(b-k)!(c+k)!(c-k)!}, \tag{167} $$

$$ R(n) = \frac{(n+b+c)!}{n!b!c!} . \tag{168} $$

La formule à démontrer est le cas $n = a$ de la formule

$$ \sum_k F(n,k) = R(n) . \tag{169} $$

Or le cas $n = 0$ est évident, et l'on a l'équation de récurrence

$$ (n+1)R(n+1) - (n+b+c+1)R(n) = 0 . \tag{170} $$

On aura réussi si l'on découvre un compagnon $G(n,k)$ de $F(n,k)$ (les deux forment ce que les auteurs Wilf et Zeilberger appellent modestement une WZ-paire) satisfaisant à la relation

$$ (n+1)F(n+1,k) - (n+b+c+1)F(n,k) = G(n,k) - G(n,k-1). \tag{171} $$

L'ordinateur Shalosh Ekhad, utilisant les algorithmes décrits au n° 3.5, recherche une solution sous la forme

$$ G(n,k) = R(n,k)F(n,k), \tag{172} $$

où $R(n,k)$ est une fonction rationnelle. Par ailleurs, $F(n,k)$ satisfait aux deux équations de récurrence

$$ F(n+1,k) = A(n,k)F(n,k) \ , \ F(n,k+1) = B(n,k)F(n,k), \tag{173} $$

et après division par $F(n,k)$, la relation (171) s'écrit

$$(174) \qquad (n+1)A(n,k) - (n+b+c+1) = R(n,k) - \frac{R(n,k-1)}{B(n,k-1)}.$$

Les fonctions $A(n,k)$ et $B(n,k)$ sont évidemment connues :

$$(175) \qquad A(n,k) = \frac{(n+b+1)(n+c+1)}{(n+k+1)(n-k+1)}$$

$$(176) \qquad B(n,k) = -\frac{(n-k)(b-k)(c-k)}{(n+k+1)(b+k+1)(c+k+1)},$$

et l'ordinateur découvre la solution suivante à l'équation (174) :

$$(177) \qquad R(n,k) = \frac{(b-k)(c-k)}{2(n+k+1)} .$$

Une fois découverte la fonction $R(n,k)$, la vérification de l'équation (174) est triviale.

5. VERROUS ET VOIES NOUVELLES

On dispose maintenant d'un dictionnaire précis ramenant la preuve d'identités hypergéométriques (et en particulier de relations entre coefficients binomiaux) à celle d'identités entre fonctions rationnelles. Mais il resterait à organiser la masse de résultats obtenus, et à deviner les structures sous-jacentes. Au vu de quelques exemples, la clé semble être à rechercher dans une cohomologie à la de Rham de formes différentielles à coefficients fonctions rationnelles, de leurs analogues sur un réseau $\mathbf{Z}^s$ et dans la q-machine. Les modules holonomes sont intimement liés aux fibrés vectoriels munis de connexion intégrable, et il y aurait à explorer des sortes de groupes de Galois différentiels.

Dans les récurrences à une variable k, il faut distinguer souvent le *comportement asymptotique* pour k tendant vers $+\infty$, et pour k tendant vers $-\infty$; par exemple, l'équation

$$f(k+1) = (k+1)f(k)$$

a deux solutions

$$f_1(k) = k! \quad \text{pour} \quad k \geq 0$$

$$f_2(k) = \begin{cases} (-1)^{k+1}/(-k-1)! & \text{pour} \quad k < 0 \\ 0 & \text{pour} \quad k \geq 0\,. \end{cases}$$

Aomoto [D 1, D 2, D 3] a commencé à étudier ces comportements asymptotiques, aussi pour le cas d'équations du type $\frac{F(qz)}{F(z)} = a(q;z)$, et surtout à plusieurs dimensions.

La formule (165) de Dixon est le cas particulier $n = 3$ d'une formule de Dyson affirmant que, si l'on développe en série de Laurent le produit $\prod_{i \neq j}(1 - x_i/x_j)^{a_i}$ (où i, j parcourent les entiers 1 à n), le terme constant est égal à

$$\frac{(a_1 + \cdots + a_n)!}{a_1! \cdots a_n!}.$$

Ceci est le point de départ de nombreuses identités du même genre, associées aux algèbres de Lie simples : conjectures de Macdonald et Morris-Macdonald. Presque tous les cas sont aujourd'hui traîtés, mais certains (comme le cas de G_2 et de F_4) n'ont cédé qu'aux ordinateurs utilisant les méthodes de Zeilberger. Ici, on rencontre une difficulté subtile : si x, x^2, x^3, $x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3$ sont des polynômes, il n'en est plus ainsi de x^n ou de $x_1 + \cdots + x_n$ du point de vue algorithmique (pour n indéterminé).

On bute sur un autre verrou lorsque l'on veut prouver des identités ne contenant aucun paramètre ; par exemple, pour prouver à l'ordinateur la formule de Rogers-Ramanujan, il faut passer par un intermédiaire :

$$\sum_k \frac{q^{k^2}}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}} = \sum_k \frac{(-1)^k q^{(5k^2-k)/2}}{(q;q)_{n-k}(q;q)_{n+k}} \tag{178}$$

qui contient un paramètre libre n, puis faire tendre n vers l'infini.

On rencontre une difficulté analogue si l'on veut prouver des relations purement numériques. Comment prouver qu'il s'agit du même nombre π dans les formules suivantes :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \quad ?$$

Au fond, qu'est-ce qu'un nombre réel du point de vue de *l'analyse algébrique* au sens de Mikio Sato et de ses émules ? Une remarque de Métropolis et Rota est peut-être pertinente : soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres entiers à croissance polynomiale

$$|a_n| \leq Cn^k \quad (n \geq 1) \tag{179}$$

pour deux constantes $C > 0$ et $k \geq 1$. Soit $b \geq 2$ un entier. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/b^n$ converge (trivial) ; sa somme est 0 si et seulement s'il existe une autre suite (c_n) *à croissance polynomiale* et telle que

$$a_n = c_n - bc_{n-1} \ . \tag{180}$$

Voilà un nouvel exemple de somme télescopique.

Enfin, l'analogie entre sommes de Gauss et fonction gamma est bien connue. Une identité de sommes de Gauss, due à Anna Helversen-Pasotto [E 8], est en fait l'analogue de l'identité de Gauss sur ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a & b \\ & c \end{matrix}\middle| 1\right)$. Comment généraliser ceci pour les relations de Dixon, Saalschütz, etc... ? Quelle est la méthode algorithmique sous-jacente ? Y a-t-il un lien avec les faisceaux-caractères de Lusztig, ou les groupes quantiques ? Place au rêve !

BIBLIOGRAPHIE RAISONNÉE

A. Ouvrages de base

Voici les répertoires classiques pour les séries, les intégrales, les fonctions spéciales :

[1] M. ABRAMOWITZ et I. STEGUN, *Handbook of Mathematical functions*, Dover, New-York, 1965.

[2] A. ERDELYI (éditeur), *Higher transcendental functions*, 3 volumes, McGraw-Hill, New York, 1953.

[3] I. GRADSHTEYN et I. RYZHIK, *Table of integrals, series and products*, Academic Press, New York, 1980.

Quelques traités classiques, comportant une partie importante sur les fonctions hypergéométriques :

[4] P. APPELL et J. KAMPÉ DE FÉRIET, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[5] J.E. RAINVILLE, *Special functions*, MacMillan, New York, 1960.

[6] L. SLATER, *Confluent hypergeometric functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1960.

[7] E. WHITTAKER et G. WATSON, *Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1946.

Quelques bonnes références sur la combinatoire :

[8] M. AIGNER, *Combinatorial theory*, Springer, Berlin, 1979 (voir surtout le chapitre 3).

[9] G. ANDREWS, *The theory of partitions*, Addison-Wesley, Reading, 1976.

[10] L. COMTET, *Advanced Combinatorics*, Reidel, Dordrecht, 1974. ¿

[11] R. GRAHAM, D. KNUTH et O. PATASHNIK, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, 1989.

[12] D. KNUTH, *The art of computer programming*, 3 volumes, Addison-Wesley, Reading, 1968-1973.

[13] P. MACMAHON, *Combinatory analysis*, 2 volumes, Chelsea, New York, 1960 (réimpression).

[14] J. RIORDAN, *An introduction to combinatorial analysis*, John Wiley, New York, 1958.

Pour terminer, quelques exposés généraux sur les fonctions q-hypergéométriques (dites aussi "basiques") :

[15] G. ANDREWS, *q-series : Their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics and computer algebra*,

CBMS Regional Conference Lecture Series, 66, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.

[16] W. BAILEY, *Generalized hypergeometric series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1935 (réimprimé par Stechert-Hafner, New York, 1964).

[17] H. EXTON, *q-hypergeometric functions and applications*, Ellis Horwood/John Wiley, New York, 1983.

[18] N. FINE, *Basic hypergeometric series and applications*, Math. Surv. **27**, Amer. Math. Soc., Providence, 1988.

[19] G. GASPER et M. RAHMAN, *Basic hypergeometric series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[20] E. HEINE, *Handbuch der Kugelfunktionen. Theorie und Anwendung*, 2 volumes, Springer, 1898 (=Physica Verlag, Würzburg, 1961).

[21] L. SLATER, *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

B. Articles de Zeilberger et collaborateurs

[1] D. ZEILBERGER, *Sister Celine's technique and its generalizations*, J. Math. Anal. Appl. **85** (1982), 114-145.

[2] D. ZEILBERGER, *A Holonomic systems approach to special functions identities*, J. of Computational and Applied Math. **32** (1990), 321-368.

[3] D. ZEILBERGER, *A Fast Algorithm for proving terminating hypergeometric identities*, Discrete Math. **80** (1990), 207-211.

[4] D. ZEILBERGER, *The method of creative telescoping*, J. Symbolic Computation **11** (1991), 195-204.

[5] D. ZEILBERGER, *Closed Form (pun intended !)*, to appear in : "Special volume in memory of Emil Grosswald", M. Knopp, ed., Contemporary Mathematics, AMS.

[6] D. ZEILBERGER, *Three recitations on Holonomic Systems and Hypergeometric Series*, Proceedings of the Séminaire Lotharingien de combinatoire **24**, IRMA, Strasbourg, à paraître.

[7] D. ZEILBERGER, *Plain (Lagrange interpolation) proofs of Fancy (representation theory) formulas*, en préparation.

[8] S.B. EKHAD, *Short proofs of two hypergeometric summation formulas of Karlsson*, Proc. Amer. Math. Soc. **107** (1989), 1143-1144.

[9] S.B. EKHAD, *A very short proof of Dixon's theorem*, J. Comb. Theo., Series A **54** (1990), 141-142.

[10] S.B. EKHAD, *A one-line proof of the Habsieger-Zeilberger G_2 constant term identity*, J. Comput. Appl. Math. **34** (1991), 133-134.

[11] S.B. EKHAD, *Short Proof Of A "Strange" Combinatorial Identity Conjectured by Gosper*, Discrete Math. à paraître.

[12] S.B. EKHAD, *A Short, Elementary and Easy, WZ proof of the Askey-Gasper inequality that was used by de Branges in his proof of the Bieberbach conjecture*, à paraître.

[13] S.B. EKHAD and S. TRE, *A purely verification proof of the first Rogers-Ramanujan identity*, J. Comb. The. Ser. A **54** (1990), 309-311.

[14] S.B. EKHAD and D. ZEILBERGER, *A 21st century proof of Dougall's hypergeometric sum identity*, J. Math. Anal. Appl. **147** (1990), 610-611.

[15] H.S. WILF and D. ZEILBERGER, *Towards computerized proofs of identities*, Bulletin of the Amer. Math. Soc. **23** (1990), 77-83.

[16] H.S. WILF and D. ZEILBERGER, *Rational functions certify combinatorial identities*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 147-158.

[17] H.S. WILF and D. ZEILBERGER, *A general theory of multi-variate hypergeometric identities*, en préparation.

[18] H.S. WILF, *54 computer-generated proofs of binomial coefficient identities*, à paraître.

Voici enfin trois articles donnant des programmes détaillés, sous MAPLE, implémentant les algorithmes théoriques :

[19] G. ALMKVIST et D. ZEILBERGER, *The method of differentiating under the integral sign*, Journ. Symb. Computation, **10** (1990), 571-591.

[20] G. ALMKVIST et D. ZEILBERGER, *A MAPLE program that finds, and proves. recurrences and differential equations satisfied by hyperexponential definite integrals*, SIGSAM Bulletin **25** (1991),...

[21] D. ZEILBERGER, *A MAPLE program for proving hypergeometric series*, SIGSAM Bulletin **25** (1991),...

C. Algèbre des opérateurs différentiels et élimination

[1] J. BERNSTEIN, *Modules over the ring of differential operators. A study of the fundamental solutions of equations with constant coefficients*, Funk. Analisis, Akademia Nauk CCCR **5** (2) (1971), 1-16.

[2] J. BERNSTEIN, *The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter*, Funct. Anal. and Appl. **6** (1972), 273-285.

[3] J.-E. BJÖRK, *Rings of Differential Operators*, North Holland, Amsterdam, 1979.

[4] A. BOREL et al., *Algebraic D-modules*, Perspectives in Math. **2**, Academic Press, Boston, 1987.

[5] B. BUCHBERGER, *An algorithmic method in polynomial ideal theory*, N.K. Bose ed. Recents trends in multidimensional systems theory, D. Reidel Publishing Corp., 1985.

[6] F. EHLERS, *The Weyl Algebra*, Chapitre V de [4], 173-205.

[7] A. GALLIGO, *Some algorithmic questions on ideals of differential operators*, Lect. Note in Comp. Sci. **204** (1985), 413-421.

[8] R. GOSPER, *Decision procedure for indefinite hypergeometric summation*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **75** (1978), 40-42.

[9] M. KASHIWARA, *B-functions and holonomic systems*, Invent. Math. **38** (1976), 33-53.

[10] M. KASHIWARA, *Vanishing cycles sheaves and holonomic systems of differential equations*, Springer Lect. Notes in Math. **1016** (1983), 134-142.

[11] B. MALGRANGE, *L'involutivité des caractéristiques des systèmes différentiels et microdifférentiels*, Sém. Bourbaki, exposé 522, 1977-1978 (Lect. Notes in Math. **710**, 277-289).

[12] R. RISCH, *The solution of the problem in integrating in finite terms*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 605-608.

[13] N. TAKAYAMA, *Gröbner basis and the problem of contiguous relations*, Japan Journ. Appl. Math. **6** (1989), 147-160.

[14] N. TAKAYAMA, *An algorithm for constructing the integral of a module - an infinite dimensional analog of Gröbner basis*, Proceedings of ISSAC'90, A.C.M. Press.

[15] N. TAKAYAMA, *An approach to the zero recognition problem by Buchberger algorithm*, Journ. Symb. Computation,

D. Systèmes holonomes aux q-différences

[1] K. AOMOTO, *A note on holonomic q-difference systems*, Algebraic Analysis (in honor of M. Sato), M. Kashiwara and T. Kawai eds., Academic Press, (1988), 25-28.

[2] K. AOMOTO, *q-analogue of de Rham cohomology associated with Jackson integrals*, Proc. Japan Acad. **66** (1990), 161-164.

[3] K. AOMOTO, *Finiteness of a cohomology associated with certain Jackson integrals*, Tohoku J. Math. **43** (1991), 75-101.

[4] C. SABBAH, *Systèmes holonomes d'équations aux q-différences*, Prépublication Centre de Math. Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1991.

E. **Perspectives diverses**

Sur la formule de Dixon :

[1] P. CARTIER et D. FOATA, *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements*, Lect. Notes Math. vol. 85, Springer 1969.

Sur l'irrationalité de $\zeta(3)$:

[2] R. APÉRY, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Astérisque **61** (1979), 11-13.

[3] A. van des POORTEN, *A proof that Euler missed... Apery's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, Math. Intelligencer, **1** (1979), 195-203.

Sur les conjectures de Macdonald :

[4] I.G. MACDONALD, *Affine root systems and Dedekind* η*-function*, Invent. Math. **15** (1972), 91-143.

[5] I.G. MACDONALD, *Some conjectures for root systems*, SIAM Journ. Math. Anal. **13** (1982), 988-1007.

[6] D. ZEILBERGER, *Unified approach to Macdonald's root system conjectures*, SIAM Journ. Math. Anal. **19** (1988), 987-1013.

[7] F. GARVAN et G. BONNET, *Macdonald's constant term conjectures for exceptional root systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **24** (1991), 343-347.

Sur les sommes de Gauss :

[8] A. HELVERSEN-PASOTTO, *L'identité de Barnes pour les corps finis*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série A, **286** (1978), 297-300.

[9] J. GREENE et D. STANTON, *A character sum evaluation and Gaussian hypergeometric series*, Journ. Number Theory, **23** (1986), 136-148.

Pierre CARTIER
Ecole Normale Supérieure
Département de Mathématiques
et Informatique
45, rue d'Ulm
F- 75230 PARIS Cedex 05