SÉMINAIRE N. BOURBAKI

DANIEL BERTRAND

Groupes algébriques et équations différentielles linéaires

Séminaire N. Bourbaki, 1991-1992, exp. n° 750, p. 183-204.
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1991-1992__34__183_0>

Séminaire BOURBAKI
44ème année, 1991-92, n° 750

Février 1992

GROUPES ALGÉBRIQUES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

par Daniel BERTRAND

Donnant, à l'aide du théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques, une description partielle de la liste de Schwarz ([Sc]), Landau notait en 1904 : "*Es ist bemerkenswert, daß das vorliegende funktionentheoretische Problem, welches ja bekanntlich mit den verschiedensten geometrischen, analytischen, und algebraischen Sätzen in Zusammenhang gebracht werden kann, auch zur Anwendung eines rein Zahlentheoretischen Satzes Anlaß gibt* ..." ([La]).

Le problème en question consistait à dresser la liste des équations hypergéométriques de Gauss qui admettent une base de solutions algébriques, c'est-à-dire dont le groupe de monodromie est fini. Plus généralement, on peut, une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels étant donnée, chercher à déterminer le degré de transcendance du corps engendré par ses solutions. En présence de singularités irrégulières, le groupe de monodromie ne contrôle plus ce degré, mais la théorie de Galois différentielle permet de remédier à cette difficulté. (De par sa nature algébrique, elle facilite d'ailleurs également les calculs dans le cas fuchsien.)

On sait [Bl] le développement qu'a connu cette théorie entre les mains de Kolchin. Plutôt que de ses généralisations (voir [Ko], [Po]) ou de ses applications (voir par exemple [Ne], [Sn1], [Um]), c'est de techniques récemment introduites, en particulier par J.-P. Ramis et par N. Katz, pour *calculer* explicitement les groupes de Galois différentiels d'équations classiques qu'il s'agira dans cet exposé. Nous n'aurons pour les passer en revue qu'à reprendre l'énumération de Landau : méthodes géométriques au §2, analytiques au §3, algébriques au §4, enfin arithmétiques au §5 (après un §1 de rappels).

1. DÉFINITIONS (*cf.* [De]).

Soient C un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, (K, ∂) un corps différentiel de corps des constantes C, et V un espace vectoriel de dimension finie n sur K, muni d'une connexion(1). Contractée avec ∂, celle-ci fournit sur V un opérateur différentiel D donné, dans une K-base de V, par $Y \to DY = \partial Y + AY$, où A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K. Pour toute extension différentielle (L, ∂) de (K, ∂), les solutions dans L^n du système différentiel $DY = 0$ représentent les éléments de l'espace $(V \otimes L)^\partial$ des vecteurs horizontaux de la connexion $(V \otimes_K L, D \otimes \partial)$. On dit que L est une *extension de Picard-Vessiot* de K (associée à V) si les trois conditions suivantes sont réalisées : les corps des constantes de L et de K coïncident ; $(V \otimes L)^\partial \otimes_C L = V \otimes_K L$ (c'est-à-dire : $DY = 0$ admet une matrice fondamentale $U(D)$ de solutions dans L^n) ; enfin, L est engendré sur K par $(V \otimes L)^\partial$ (c'est-à-dire par les coefficients de $U(D)$). Pour une telle extension, on appelle *groupe de Galois différentiel* de L sur K (ou, par un abus de langage que justifie l'alinea suivant, de V/K) le groupe $\mathrm{Gal}_\partial(L/K)$ (ou $\mathrm{Gal}(D)$) des automorphismes de l'extension L/K qui commutent à ∂. Puisque D est linéaire, le C-espace vectoriel $V^\partial = (V \otimes L)^\partial$ en est une représentation fidèle. Comme l'aurait fait Galois, on peut interpréter les éléments de $\mathrm{Gal}(D)$ comme ceux des automorphismes de V^∂ qui, pour toute construction tensorielle(2) W du vectoriel à connexion V, laissent stables les espaces de vecteurs horizontaux des différents sous-espaces de W stables sous la connexion tensorielle correspondante (voir [Ka2], [De]). En particulier, $\mathrm{Gal}(D)$ est un sous-groupe algébrique du groupe algébrique $\mathrm{Aut}_C(V^\partial)$.

Le point de départ de la théorie de Kolchin est que, grâce à l'hypothèse fondamentale faite sur C, il existe, à isomorphisme différentiel près, une unique extension de Picard-Vessiot associée à V. Je renvoie à [Le] pour une démonstration concise de ce résultat. L'existence est un exercice d'algèbre différentielle. Le fait, plus délicat, que deux extensions de Picard-Vessiot L, L' soient liées par un isomorphisme (non unique) $i(L, L')$ découle de l'interprétation de ces isomorphismes comme C-points d'un torseur sous le C-groupe algébrique $\mathrm{Gal}_\partial(L/K)$. On trouvera une extension (et une nouvelle démonstration) de ces résultats en termes de catégories tannakiennes dans [De]. Retenons de ce point de vue l'existence, triviale, d'un foncteur fibre sur K, qui permet de voir $\mathrm{Gal}(D)$ comme une C-forme d'un sous-groupe algébrique $\mathrm{Gal}(V/K)$ du K-groupe algébrique $\mathrm{Aut}_K(V)$, défini par les "mêmes" contraintes que supra, alors que tout comme la matrice $U(D)$, les isomorphismes $i(L, L')$ sont de nature transcendante. Les expliciter, c'est-à-dire, dans le langage des groupes de monodromie, rechercher des "formules de connexions", est donc difficile, mais c'est parfois la clef du calcul de $\mathrm{Gal}(D)$. Nous en verrons des exemples aux §§ 2 et 3.

Ces divers résultats entraînent — en le précisant — l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1.— i) *La correspondance de Galois usuelle établit une bijection entre les sous-groupes algébriques de* $\mathrm{Gal}(D)$ *et les extensions différentielles intermédiaires de* L/K, *où les sous-groupes fermés normaux correspondent aux extensions de Picard-Vessiot de* K.

ii) *La catégorie des* C*-représentations rationnelles de dimension finie de* $\mathrm{Gal}(D)$ *est équivalente à celle des connexions sous-quotients des constructions de* V. *En particulier, la représentation* V^{∂} *de* $\mathrm{Gal}(D)$ *est irréductible si et seulement si la connexion de* V *l'est sur* K.

iii) *Le degré de transcendance de* L *sur* K *est égal à la dimension de* $\mathrm{Gal}(D)$. *Plus précisément,* $U(D)$ *est le point générique d'un* K*-torseur (*K*-irréductible) sous le groupe algébrique* $G(V/K)$.

2. AUTOUR DE LA MONODROMIE

On suppose ici que V provient d'un fibré à connexion holomorphe sur le complémentaire d'un ensemble fini Σ de points de la sphère de Riemann, et on désigne, pour tout élément σ de Σ, par $K_{\sigma,an}$ (resp. $K_{\sigma,f} = \widehat{K}$) le corps des fractions des germes de fonctions analytiques (resp. des séries formelles en σ). Soient $G_{\sigma,an}$ et $G_{\sigma,f}$ les *groupes de Galois analytique et formel* de V en σ, *i.e.* des connexions $V_{\sigma,an}$, $\widehat{V}$ déduites de V par extension des scalaires de $K = \mathbf{C}(\mathbf{P}_1)$ à $K_{\sigma,an}$, puis à $\widehat{K}$. Ils s'identifient (voir [Ka3], 2.7) à des sous-groupes algébriques (non normaux, en général) de $\mathrm{Gal}(D)$, et $G_{\sigma,an}$ contient l'adhérence de Zariski $M_{\sigma,an}$ du groupe de monodromie local de D en σ. On déduit du théorème 1, de l'identité entre fonctions méromorphes et fonctions rationnelles sur $\mathbf{P}_1$, et de la théorie de Fuchs :

PROPOSITION 1.— *Pour $K = \mathbf{C}(z)$ le groupe de Galois* Gal(D) *est engendré* (3) *(pour la topologie de Zariski) par ses sous-groupes analytiques locaux. De plus, $G_{\sigma,an}$, $G_{\sigma,f}$ et $M_{\sigma,an}$ se confondent lorsque σ est une singularité régulière de D.*

(Rappelons qu'une singularité σ est dite régulière si toute section horizontale est à croissance au plus polynômiale au voisinage de σ). En particulier, si Σ ne contient que des singularités régulières, Gal(D) est la clôture de Zariski "du" groupe de monodromie attaché au fibré à connexion dont provient V.

Exemple 1.— L'équation hypergéométrique de Gauss $H = H(a, b, c)$:

$$z(1-z)\partial^2 y + (c-(a+b+1)z)\partial y - aby = 0 \qquad (\partial = d/dz),$$

[ou encore : $(\theta + a)(\theta + b)y - z^{-1}\,\theta(\theta + c - 1)y = 0$ $(\theta = z\partial)$].

Ses trois singularités 0, ∞, 1 sont régulières. La méthode de Frobenius y donne donc les sous-groupes analytiques locaux. Or on connaît depuis Riemann une "formule de connexion" permettant de les comparer dans une même réalisation de Gal(H) (*cf.* [Va]). Pour a, b, c rationnels, on peut ainsi vérifier, au prix d'un calcul pénible, que la condition d'entrelacement de Katz [Ka1] (voir l'exemple 3 ci-dessous) est nécessaire et suffisante pour que $H(a, b, c)$ appartienne à la liste de Schwarz.

La situation est toute différente dans le cas des singularités irrégulières, qui va servir de test jusqu'à la fin. Rappelons tout d'abord ce qu'il en est de $\widehat{V} = V \otimes \widehat{K}$. D'après le théorème fondamental de Hukuhara-Turritin-Levelt (voir [Ka3]), il existe une extension $\widehat{L}$ de $\widehat{K}$, de degré $N \leq n!$, au-dessus de laquelle $\widehat{V}$ devient isomorphe à une extension successive de vectoriels à connexion de dimension 1. (On dispose de nombreuses démonstrations de ce théorème. La dernière en date, due à Babbitt et Varadarajan [BV1], repose sur une double récurrence sur l'ordre et sur la dimension de l'orbite de la partie la plus polaire de la matrice représentative A sous les transformations de jauge de Aut($\widehat{V}$) ; elle vient d'être étendue aux équations aux dérivées partielles par C. Sabbah [Sa].) Autrement dit, il existe un isomorphisme horizontal $\widehat{\Phi}$, défini sur $\widehat{L}$, de $\widehat{V}$ sur une connexion $(\widehat{V}_0 = \widehat{K}^n, \widehat{D}_0)$, où

$$\widehat{D}_0 = t(d/dt) - \Lambda + t^{-1}[(d/dt)Q](t^{-1}), \text{— soit } U(\widehat{D}_0) = t^{\Lambda}\exp(Q(t^{-1})) \text{ —},$$

pour une uniformisante t de $\widehat{L}$, une matrice diagonale Q de polynômes sans termes constants (appelés facteurs déterminants de $\widehat{V}$, et permutés sous l'action du groupe d'inertie $\mathrm{Gal}(\widehat{L}/\widehat{K})$), et une matrice de Jordan Λ commutant à Q (voir [Ju], p. 32, pour une forme $\widehat{K}$-rationnelle de $\widehat{\Phi}$). Les exponentielles des facteurs déterminants engendrent une extension de Picard-Vessiot de $\widehat{L}$, dont le groupe de Galois différentiel est un *tore* (dit *exponentiel*) $T_\sigma(D)$, isomorphe au groupe des caractères du $\mathbf{Z}$-module qu'ils engendrent dans $\mathbf{C}[t^{-1}]$. Fixons de plus un "opérateur de monodromie formelle" $t \to t.\exp(2i\pi/N)$. Il agit sur $T_\sigma(D)$ à travers son image dans $\mathrm{Gal}(\widehat{L}/\widehat{K})$; on note par ailleurs $M_{\sigma,f}(D)$ (*monodromie formelle* de V) la clôture de Zariski du groupe qu'il engendre dans $\mathrm{Aut}(\widehat{V}_0^\partial)$. Dans ces conditions, on peut énoncer ([Ra2], [Mi] ; voir également [Ka3], 1.4.5) :

PROPOSITION 2.— *Le groupe de Galois différentiel formel $G_{\sigma,f}(D)$ est engendré par $M_{\sigma,f}(D)$ et $T_\sigma(D)$.*

Comme $\widehat{\Phi}$ est une série en général divergente, les groupes $M_{\sigma,f}(D)$ et $M_{\sigma,an}$ n'ont aucun rapport, et il n'y a *a priori* pas de moyen naturel de ramener $G_{\sigma,f}(D)$ dans $G_{\sigma,an}(D)$. Supposons ainsi que S soit réduit à deux points $\{0,\infty\}$, de sorte que le groupe de monodromie global de D est abélien, et que 0 soit une singularité régulière. (C'est la première situation non triviale où les méthodes décrites plus bas sont couronnées de succès, et, il faut l'avouer, essentiellement la seule pour l'instant si D n'est pas fuchsien (voir [Ka4], [Ka2], 10.3, [Mi]).) Alors $G_{0,f} = G_{0,an} = M_{0,f} = M_{0,an}$ "est" le sous-groupe fermé de $M_{\infty,an}$ du groupe $G_{\infty,an} = \mathrm{Gal}(D)$ mais il n'est pas facile de l'y réaliser :

Exemple 2.— L'équation de Bessel $J = J(v)$:

$$\partial^2 y + z^{-1}\partial y + (1 - v^2 z^{-2})y = 0 \qquad (\partial = d/dz).$$

[On l'obtient à partir d'équations hypergéométriques par confluence de deux singularités ; malheureusement, les connaissances actuelles sur le comportement des groupes de Galois différentiels par spécialisation ([Ka], 2.4, [Sn3]) ne permettent pas de tirer grand chose de cette remarque.] La sous-construction "puissance extérieure maximale" (wronskien) place $\mathrm{Gal}(J)$ dans $SL(2)$. La méthode de Frobenius fournit un générateur de $G_{0,an}(J)$ unipotent non trivial pour v entier, semi-simple sinon. Par ailleurs (lemme de Hensel, voir [Ro]), les facteurs déterminants de J en ∞ sont $\pm iz$, de sorte que $T_\infty(J)$ est un tore de dimension 1, et la monodromie formelle $M_{\infty,f}$ vaut $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (qui n'a rien d'unipotent !). Ces seules informations ne suffisent en général pas à déterminer $\mathrm{Gal}(J)$ (voir [Ko2], ou plus bas, pour la réponse).

Certes, on dispose aussi, grâce à Hankel, d'une expression de la base usuelle de solutions de J :

$$J_{\pm v}(z) = z^{-\frac{1}{2}}(c_{\pm v}e^{-iz}H_v(z) + c_{\pm v}^{-1}e^{iz}H_v(-z)),$$

$$Y_v(z) = z^{-\frac{1}{2}}(c'_v e^{iz}H_v(-z) + {c'_v}^{-1}e^{-iz}H_v(-z)) \qquad \text{si } v \text{ est entier},$$

en terme d'une fonction H_v analytique sur $|\mathrm{Arg}(z)| < \pi$, y admettant au voisinage de ∞ un développement asymptotique $\widehat{H}_v$ dans $K_{\infty,f}$. Mais la "prise de développement asymptotique" de $K(H_v)$ vers $K_{\infty,f}$ *ne s'étend pas* sans précaution en un homomorphisme différentiel de $K(J_v, J'_{v'}, J_{-v}$ (ou Y_v)) vers $K_{\infty,f}(z^{\frac{1}{2}}, e^{iz})$. Ainsi, $2i\sin(z)$ vaut $S(z)e^{iz}$, où S admet $\widehat{S} = 1$ pour développement asymptotique au voisinage de ∞ sur le secteur $\mathrm{Im}(z) < 0$, mais il n'y a pas d'homomorphisme différentiel de $K(\sin(z), \cos(z))$ dans $K_{\infty,f}(e^{iz})$ envoyant Se^{iz} sur $\widehat{S}\,e^{iz} = e^{iz}$. Rien ne permet donc pour l'instant de regrouper les informations données par $M_{\infty,an}$ et par $G_{\infty,f}$.

La théorie de Ramis, que nous exposons maintenant, donne une réponse à ces différents problèmes, en inversant le sens des isomorphismes recherchés.

3. LE GROUPE DE STOKES (d'après Ramis)

Tout étant local dans ce paragraphe, nous supposons que le corps de base $K = K_{0,an}$ est le corps des fonctions méromorphes au voisinage de $\sigma = 0$. Les notations relatives à son complété formel $\widehat{K} = \mathbf{C}((z))$ sont celles du §2. Nous supposons pour simplifier que les facteurs déterminants $\{Q_1, \cdots, Q_n\}$ de $V = V_{0,an}$ n'introduisent *pas de ramification* (*i.e.* que $N = 1$), et notons $k(V) = \sup_i(d^0(Q_i))$ le rang de Katz de V. Plus sérieusement, nous nous limitons au *cas* (dit *générique*, à une seule pente pour le polygône de Newton de $\mathrm{End}(V)$) où toutes leurs différences non nulles $Q_i - Q_j$ sont de degré égal à $k = k(\mathrm{End}(V))$.

On donne d'abord un aperçu de la méthode sous forme analytique (voir [MR1], [MR2], [RS], [Si]), puis on décrit la version cohomologique qu'en ont suggérée

Deligne et Malgrange (voir [Ma2], [MR2], [BV2], [LR]). L'énoncé suivant rassemble, sous leur forme la plus classique, les clefs d'existence et d'unicité des deux approches (voir [M-R], [RS]). Un isomorphisme, de matrice représentative encore notée $\widehat{\Phi}$, de $\widehat{V}$ sur sa forme normale $\widehat{V}_0$ y est supposé fixé.

PROPOSITION 3.— *Soit B un (germe de) secteur ouvert au voisinage de 0.*

i) (Poincaré-Hukuhara-Turritin) : *si* $\mathrm{Ouv}(B) < \frac{\pi}{k}$, *il existe une matrice holomorphe Φ_B, asymptotique à $\widehat{\Phi}$ sur B, telle que*

$$U_B(D)(z) = \Phi_B(z)\, z^{\Lambda} \exp(Q(z^{-1}))$$

soit une matrice fondamentale de solutions de $DY = 0$.

ii) (Watson-Nevanlinna) : *Si* $\mathrm{Ouv}(B) > \frac{\pi}{k}$, *toute fonction holomorphe sur B, admettant une décroissance exponentielle d'ordre k en 0, est nulle.*

[Rappelons qu'une fonction f holomorphe sur B y admet un *développement asymptotique* en 0 s'il existe une série de Laurent formelle $\widehat{f} = T_B(f) = \Sigma_{v(\widehat{f}) \leq n} f_n\, z^n$ (alors unique) telle que pour tout entier $m \geq 0$,

$$R_m\, f(z) = z^{-m}\, (f(z) - \Sigma_{v(\widehat{f}) \leq n \leq m-1} f_n\, z^n)$$

reste bornée sur tout sous-secteur relativement compact de B. On a par ailleurs noté $\mathrm{Ouv}(B)$ l'angle d'ouverture de B.]

D'après Cauchy, les matrices $\Phi_B(z) = U_B(z) \exp(-Q(z^{-1}))\, z^{-\Lambda}$ vérifiant l'énoncé i) se prolongent analytiquement sur tout secteur d'angle $< 2\pi$ contenant B. En général, ce prolongement cesse d'être asymptotique à $\widehat{\Phi}$, ou même d'admettre un développement asymptotique (de sorte qu'on ne peut utiliser ii)), mais vu la relation ci-dessus, de telles discontinuités ne peuvent apparaître qu'à la traversée d'une direction d'angle θ telle que près de $z = 0$, $\mathrm{Re}(Q_i - Q_j)(z^{-1})$ change de signe au voisinage de $\mathrm{Arg}(z) = \theta$ pour un couple (i, j) au moins. On appelle *lignes de Stokes* de telles directions, et on leur associe, afin de se placer dans la situation de ii) :

- les *lignes singulières*, d'angles α tels que l'une au moins des expressions $\exp(Q_i - Q_j)(z^{-1})$ présente une décroissance (exponentielle d'ordre k) de type maximal quand z tend vers 0 sur $\mathrm{Arg}(z) = \alpha$;

- des *"bons" recouvrements* du cercle S des directions autour de 0. Dans le cas générique qui nous occupe (voir [MR2], [LR], pour le cas général), on prend par exemple la réunion, pour les différentes lignes singulières α, d'intervalles du type $B_\alpha =]\alpha - (\frac{\pi}{2k}), \alpha + (\frac{\pi}{2k}) + \delta[$, $B'_\alpha =]\alpha - (\frac{\pi}{2k}) - \delta, \alpha + (\frac{\pi}{2k})[$ bordés par des lignes de Stokes et n'en contenant pas en dehors de $b_\alpha = B'_\alpha \cap B_\alpha$ (voir [Mi], 2.3.6). On étend enfin ces notations au revêtement universel $\widetilde{S}$ de S et on identifie les intervalles de $\widetilde{S}$ aux secteurs ouverts de centre 0 qu'ils sous-tendent.

3.1. L'approche analytique

Le point de départ de cette approche est que les coefficients de $\widehat{\Phi}$ appartiennent à une sous-algèbre différentielle (stricte) de $\widehat{K}$ au-dessus de laquelle, pour tout secteur $B(d)$ d'ouverture un peu plus grande que $\frac{\pi}{k}$ et de bissectrice d non singulière, l'application $T_{B(d)}$ admet une *section* canonique (voir [Si], A.4.1.2) : les fonctions plates de son image présentent une décroissance exponentielle d'ordre k, et la proposition 3.ii) les force à être nulles. Ramis décrit cette section par un procédé de resommation $\Sigma_d = \Sigma_{k,d}$, composé d'une transformation de Borel formelle, et d'une transformation de Laplace (voir [MR2], §1), qui commute donc aux opérations algébriques et à la dérivation. Par conséquent, Σ_d est un isomorphisme d'algèbres différentielles de $K[\widehat{\Phi}]$ sur $K[\Sigma_d\,\widehat{\Phi}]$, qu'on étend facilement (voir [MR2], Prop. 9) en un isomorphisme d'algèbres différentielles de $K[\widehat{\Phi}, z^\lambda, \exp\, Q_i(z^{-1}), \mathrm{Log}\, z]$ sur $K[\Sigma_d\,\widehat{\Phi}, z^\lambda, \exp\,(Q_i(z^{-1})), \mathrm{Log}\, z]$. Pour toute direction d non singulière, la matrice $\Sigma_d\,\widehat{\Phi} = \Phi_{B(d)}$ vérifie donc les conditions de la proposition 3.i) sur $B(d)$ (dans notre cas générique, on aurait d'ailleurs pu déduire directement de 3.i) l'existence et l'unicité d'une telle solution, voir [IK][(4)]). Associons alors à chaque direction singulière ou, plus exactement (du fait de la matrice Λ), à chacun de ses représentants α dans $\widetilde{S}$ les matrices fondamentales

$$U_\alpha(D) = \Sigma_{\alpha+(\frac{\delta}{2})}(\widehat{\Phi}\, z^\Lambda \,\exp\, Q(z^{-1})) \quad , \quad U'_\alpha(D) = \Sigma_{\alpha-(\frac{\delta}{2})}(\widehat{\Phi}\, z^\Lambda \,\exp\, Q(z^{-1}))$$

de solutions de $DY = 0$ sur B_α, B'_α. Elles sont liées sur le secteur b_α par la relation $U'_\alpha(D) = U_\alpha(D)\, C_\alpha$, où la matrice unipotente C_α représente un endomorphisme canonique st_α du $\mathbf{C}$-espace V^∂ des solutions de D holomorphes sur b_α. Mais st_α est composé des isomorphismes différentiels $\Sigma^{-1}_{\alpha+(\frac{\delta}{2})}$ et $\Sigma_{\alpha-(\frac{\delta}{2})}$; c'est donc un élément du groupe de Galois différentiel de V sur K. On appellera *groupe de Stokes*

$St_\sigma(D) = St_0(D)$ (en la singularité irrégulière $\sigma = 0$) le sous-groupe algébrique de $G_{0,an}(D)$ engendré [(4)] par les st_α, où α parcourt l'ensemble des relevés à $\widetilde{S}$ des différentes directions singulières de V.

Avec la définition précédente tout au moins, le groupe de Stokes n'est en général pas normal dans $G_{0,an}$, mais $M_{0,f}$ le laisse stable par conjugaison. D'autre part, chaque isomorphisme st_α^{-1} calcule le *prolongement analytique* de la solution $U'_\alpha(D)$ de B'_α à B_α (*cf.* [DM], Prop. 6.1). En les composant le long de S, et en appliquant l'opérateur de monodromie formelle pour revenir à la détermination de l'argument initial, on obtient donc un générateur du groupe de monodromie analytique $M_{0,an}(D)$. L'incompatibilité remarquée plus haut entre $M_{0,f}$ et $M_{0,an}$ est ainsi élucidée. C'est même ce point qui avait mis Stokes sur la voie de son phénomène, comme il s'en explique dans une lettre ([St], p. 62) à sa fiancée — le mariage a néanmoins convergé. Plus généralement, Ramis établit :

THÉORÈME 2.— *Le groupe de Galois analytique local $G_{0,an}(D)$ est engendré par ses sous-groupes fermés $G_{0,f}(D)$ et $St_0(D)$ (donc aussi, si l'on préfère, par $T_{0,f}(D)$, $M_{0,an}(D)$ et $St_0(D)$).*

La démonstration de ce théorème (voir [MR2], théorème 6) repose sur le théorème 1, et le fait (équivalent à la remarque précédente) qu'une solution invariante sous le groupe de Stokes et la monodromie formelle est uniforme au voisinage de 0. Une démonstration tannakienne a également été proposée par Deligne.

3.2. L'approche cohomologique

Elle s'appuie sur la classification, à K-isomorphisme près, des K-vectoriels à connexion V munis d'un isomorphisme formel $\widehat{\Phi}$ de $\widehat{V}$ sur une forme normale fixée $\widehat{V}_0$ comme plus haut (théorème de Sibuya-Malgrange ; voir [Ma2], [Si], [BV2]). Soient A le faisceau sur S des germes de fonctions méromorphes admettant un développement asymptotique en 0, et $ST(V)$ le faisceau en groupes (non abéliens) des sections horizontales du faisceau $A \otimes \mathrm{End}(V)$ qui sont asymptotiques à l'identité. On déduit de la variante "$k = \infty$" (resp. $k = \frac{1}{2}$, ou "$k = 0$" pour $\widetilde{S}$) de la proposition 3.i) (resp. ii)) que $ST(V)$ est localement isomorphe à $ST(V_0)$[(6)], et que l'ensemble classifiant recherché pour les couples $(V, \widehat{\Phi})$ s'identifie à $H^1(S, ST(V_0))$, évidemment pointé par $(V_0, (id)^\wedge)$ — c'est à K-isomorphisme près le seul couple à ne pas présenter de phénomène de Stokes. Or $ST(V_0)$ est facile à décrire ! Ses sections au-dessus d'un secteur B (relevé dans $\widetilde{S}$) sont les matrices P_B holomorphes sur B, y admettant I pour développement asymptotique, et telles que $P_B(z)\, z^\Lambda \exp(Q(z^{-1})) = z^\Lambda \exp(Q(z^{-1}))C_B$ pour une matrice constante C_B. En particulier, $\exp(Q(z^{-1})\, C_B \exp(-Q(z^{-1}))$ doit être asymptotique à I sur B, et $ST(V_0)$ est un faisceau constant par morceaux, dont les discontinuités n'apparaissent qu'aux lignes de Stokes de V. Dans le cas générique (voir [BV2], [MR2], [LR] pour le cas général), les classes de cohomologie de $ST(V_0)$ peuvent donc être décrites univoquement par la donnée, pour chaque secteur b_α, d'une matrice constante unipotente C_α n'ayant, hors de la diagonale, de termes non nuls qu'aux indices (i,j) des facteurs déterminants attachés à la ligne singulière α.

Soit alors $\{C_\alpha\}$ une telle famille de matrices. Il lui correspond, à K-isomorphisme près, un unique couple $(V,\widehat{\Phi})$ dans $H^1(S,ST(V_0))$. Comme les "bons" recouvrements sont suffisamment fins (voir [BV2], 3.4.2), chacune des matrices $P_\alpha(z)$ correspondant (dans $\widetilde{S}$) à C_α s'écrit comme un quotient $(\Phi_\alpha)^{-1}(\Phi'_\alpha)$ de sections horizontales de $A \otimes \mathrm{Hom}(V,V_0)$ sur B_α, B'_α, asymptotiques à $\widehat{\Phi}$, et ce de façon unique (puisque l'identité est la seule section globale de $ST(V)$). En d'autres termes, on a su associer de façon canonique à $\widehat{\Phi}$ et à chaque (relevé de) direction singulière α deux matrices fondamentales de solutions $U_\alpha(D) = \Phi_\alpha(z)\, z^\Lambda \exp(Q(z^{-1}))$, $U'_\alpha(D)$, de $DY = 0$, telle que $U'_\alpha(D) = U_\alpha(D)C_\alpha$ sur b_α, d'où un élément canonique st_α de $\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(V^\partial)$ (et l'unicité de la description "analytique" montre que ce sont bien ceux de 3.1). Mais les formes normales W_0 des différentes constructions tensorielles W de V respectent leurs sous-connexions. Il en est donc de même de l'automorphisme que définit (tout au moins si ces W sont encore génériques) st_α sur les espaces W^∂ correspondants. On voit ainsi à nouveau que st_α est un élément du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(D)$. Ce point de vue permet aussi de prouver le théorème 3 : pour toute construction W de V, un $\mathbf{C}$-sous-espace X' de W^∂ stable sous $G_{0,f}(D)$ détermine une sous-connexion X_0 de la construction correspondante W_0 de V_0 ; si de plus X' est stable sous $ST_0(D)$, les restrictions à X des matrices C_α définissent un élément de $H^1(S,ST(X_0))$ que l'isomorphisme de Malgrange-Sibuya permet d'interpréter comme une sous-connexion X de W, d'espace des vecteurs horizontaux $X^\partial = X'$ (voir [LR][(7)]).

3.3. Calculs et remarques

Il reste à calculer les matrices de Stokes-Ramis C_α. Dans l'approche analytique, les opérateurs de resommation permettent d'exprimer concrètement leurs coefficients sous forme intégrale, et le théorème des résidus donne immédiatement la réponse (voir [RM1]). Quant à l'approche cohomologique, un de ses avantages est de justifier des passages à la limite : l'espace $H^1(S, ST(V_0))$ est en effet muni d'une structure naturelle de variété affine, qui en fait un espace de modules pour les classes d'isomorphismes de couples $(V, \widehat{\Phi})$ (voir [BV2], [LR]).

Exemple 2 (suite) : L'équation de Bessel $(J(v))$.

C'est (en $\sigma = \infty$) un cas générique, avec $k = 1$. Les lignes singulières (resp. les lignes de Stokes) sont les deux demi-axes imaginaires $\alpha_1 = -i$, $\alpha_2 = i$ (resp. les deux demi-axes réels), et un bon recouvrement est donné par

$$B_1 =]-2\pi, 0[\quad , \quad B_1' =]-\pi, \pi[\quad , \quad B_2 =]-\pi, \pi[\quad , \quad B_2' =]0, 2\pi[,$$

d'où $b_1 =]-\pi, 0[$, $b_2 =]0, \pi[$. Les matrices de Stokes-Ramis sont

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_i(V) & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{C}_{-i} = \begin{bmatrix} 1 & c_{-i}(v) \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où

$c_{\pm i}(v) = \mp 2 \exp(\mp 2i\pi v)\ \cos \pi v$, d'après [MR1], 3.4.12 ;

$c_{\pm i}(v) = \mp 2 \cos \pi v$, d'après [BV2], p. 94.

Il ne s'agit pas d'erreur expérimentale, mais d'un choix de base de solutions (ou d'isomorphisme $\widehat{\Phi}$) différent. (Les matrices de [MR1] sont écrites dans la base $z^{-\frac{1}{2}} e^{-iz} H_v(z)$, $z^{-\frac{1}{2}} e^{iz} H_v(-z)$; en fait $H_v = \Sigma_0(\widehat{H}_v)$, et il n'y avait finalement pas de précaution à prendre dans l'exemple 2 du §2 $\cdots$). Mais peu importe. Il suffit de savoir que $c_i(v)$ et $c_{-i}(v)$ sont non nuls pour déduire immédiatement de ces expressions que dès que v n'est pas congru à $\frac{1}{2}$ modulo $\mathbf{Z}$, le groupe de Stokes, et donc $\mathrm{Gal}(J(v))$ remplit $SL(2)$. En ce sens, la méthode est peut-être trop riche : elle fournit des "formules de connexions" exactes, là où il suffirait de connaître la position des coefficients non nuls de certaines matrices unipotentes (voir [MR1]).

On trouvera d'autres illustrations du cas générique dans [MR1] (équations hypergéométriques d'ordre 2 confluentes), et dans [DM], [Mi] (pour une vaste classe de ces équations en ordre supérieur ; voir l'exemple 3 ci-dessous). Je renvoie à [Ra2] et à [LR] pour le cas général, en signalant seulement que, du point de vue théorique, celui-ci se traite à partir d'une décomposition canonique de $\widehat{\Phi}$, indexée par les différentes pentes du polygone de Newton de End(V). L'approche analytique repose alors sur la notion fondamentale de "multisommabilité" ([MR2], [BBRS]), et nécessite en particulier une version relative de la proposition 3, ii) (voir [M-R], [Ma2]). On en déduit une filtration "Gevrey"du groupe de Galois différentiel ([Ra2]), reflétée, dans l'approche cohomologique, par une filtration du même type ([MR2], [LR]) sur le faisceau $ST(V_0)$.

Enfin, l'un des aspects les plus intéressants de la théorie de Ramis est son lien avec le groupe de *monodromie sauvage* $\pi_{1,s}$ d'un germe de voisinage ouvert épointé de l'origine (voir [MR2], §4, pp. 381, 388). Ce groupe est le produit semi-direct du groupe de monodromie usuel par un groupe qui, en cran fini, attache à un $\mathbf{Z}$-module de type fini dans l'algèbre des polynômes ramifiés en z^{-1} son groupe des caractères et un "groupe de résurgence" — groupe d'algèbre de Lie libre attaché aux diverses lignes singulières correspondantes —, dont il forme le produit semi-direct. On peut alors voir l'image de Gal(D) dans Aut(V^{∂}) comme une représentation de $\pi_{1,s}$ et en déduire ([MR2], théorème 18) une correspondance de Riemann-Hilbert généralisée entre la catégorie des $K_{0,an}$-vectoriels à connexions et celle des représentations de dimension finie de $\pi_{1,s}$. (Voir encore [MR2] pour le lien avec les travaux d'Écalle.)

4. GROUPES RÉDUCTIFS (*cf.* [Ka4], [Be])

Les résultats de ce § reposent sur les propriétés très rigides des algèbres de Lie semi-simples complexes. L'idée de les exploiter est classique (voir [Kap] et [Ko2] pour $\mathfrak{sl}(2)$, appliqué aux équations d'Airy et de Bessel). Les récents travaux de Beukers, Brownawell, Heckmann ([BBH], [BH]) et de Katz et Gabber ([Ka3], [Ka4]) lui ont donné un nouvel essor. Comme il existe déjà sur le sujet un demi-livre ([Ka4] ; la lecture de l'autre demi est également recommandée) et un rapport [Be], je serai plus bref.

Supposons que le K-vectoriel à connexion V soit irréductible ou, plus généralement, somme directe d'irréductibles. D'après le théorème 1, la représentation fidèle V^∂ de $G = \mathrm{Gal}(D)$ est alors complétement réductible, et G est un groupe réductif, produit presque direct $Z.DG$ de son centre Z, qui est de type multiplicatif, par son groupe dérivé DG. Comme on est en caractéristique nulle, toutes les représentations de G, et donc toutes les constructions de V, sont alors complétement réductibles, et on peut s'attendre à ce que la recherche des sous-connexions définissant G en soit facilitée. Par exemple (voir [BBH], [Be]), dès que DG n'est pas un groupe fini, il suffit que le carré symétrique $S^2(V)$ de V soit irréductible pour que toutes les puissances de V le soient, et DG est alors le groupe $SL(n)$ ou le groupe symplectique $Sp(n)$ tout entier.

Il est donc important de disposer de critères d'irréductibilité de V. En termes concrets, il s'agit de voir, quand V est défini par une équation différentielle $Hy = 0$, si H est irréductible dans l'anneau $K[\partial]$ des opérateurs différentiels à coefficients dans K. C'est là un problème difficile(8) (par exemple, on ne dispose pas dans l'anneau $\mathbf{C}[z, d/dz]$ d'analogue du lemme des Gauss), mais on peut parfois s'en tirer par une analyse locale. Ainsi, avec les notations du §2, si tous les facteurs déterminants de $\widehat{V}$ ont une même valuation, de dénominateur égal à n, $\widehat{V}$ est irréductible sur $\widehat{K}$, et V l'est donc aussi sur K (voir [Ka3]), 2.2.8 et 4 pour une application aux équations d'Airy généralisées).

Exemple 2 (fin) : l'équation de Bessel $J(v)$

Pour v entier, la présence d'un logarithme dans la solution Y_v, jointe à l'irrationalité de $2\frac{J'_v}{J_v}$ montre que son carré symétrique est irréductible sur $K = \mathbf{C}(z)$. Comme $\dim \mathrm{Gal}(J(v)) = \deg.\mathrm{tr}\, K(J, J', Y)/K$ est ≥ 2, DG ne peut être fini, et le marteau concluant l'alinéa précédent plaque $\mathrm{Gal}(J(v))$ sur $SL(2)$. Idem si v n'est pas demi-entier, en adaptant ce qui suit. En revanche, $\mathrm{Gal}(J(\frac{1}{2}))$ est un tore (fonctions d'Hermite).

Par ailleurs, c'est plutôt l'algèbre de Lie de G que ces méthodes permettent de cerner, ce qui conduit à étudier la restriction de la représentation V^∂ à la composante neutre G^0 de G. On dit ainsi que V est *Lie-irréductible* si cette représentation de G^0 est irréductible (autrement dit, si V est "absolument" irréductible). Voici le type d'énoncés, extraits de [Ka4] et [Be], dont on dispose alors, et qu'on déduit de la classification des algèbres de Lie semi-simples, jointe à un résultat de Gabber sur les sous-tores de leurs normalisateurs :

PROPOSITION 4.— *Soit G un sous-groupe connexe de $GL(n)$ agissant de façon irréductible sur $\mathbf{C}^n$, et normalisé par une matrice diagonale μ.*

i) *Si $\mu = (x, 1, \cdots, 1)$ est d'ordre > 2 (resp. $= 2$), alors : $DG = SL(n)$ (resp. $SL(n)$ ou $SO(n)$).*

ii) *Si $n = 7$, et μ engendre topologiquement le tore $(x, y, xy, x^{-1}, y^{-1}, (xy)^{-1}, 1)$, alors $DG = SL(7)$, ou $SO(7)$, ou G_2.*

Et en voici une illustration :

Exemple 3 ([BBH], [BH], [Ka4]) : l'équation hypergéométrique généralisée H :

$$(\theta + a_1) \cdots (\theta + a_p) y - z^{-1} (\theta + c_1 - 1) \cdots (\theta + c_q - 1) y = 0 \qquad (\theta = zd/dz).$$

Elle est irréductible si et seulement si les différences $a_i - c_j$ ne sont jamais entières. Si $q > p$, ses singularités sont $\{0, \infty\}$, et elle ne peut devenir réductible que sur une extension cyclique $\mathbf{C}(z^{\frac{1}{N}})$ de $\mathbf{C}(z)$, ce qui s'énonce encore simplement sur les paramètres (voir [Ka3], 1.2.5 pour un calcul universel de $\mathrm{Gal}(D)/\mathrm{Gal}(D)^0$) ; l'analyse est plus délicate dans le cas fuchsien $q = p$, où $\Sigma = \{0, 1, \infty\}$. Supposons d'abord H Lie-irréductible. La proposition 4.i), appliquée à G^0 et à un générateur μ de $M_{1,an}$, montre que pour $q = p$, $G = \mathrm{Gal}(H)$ contient $SO(n)$ (resp. $SL(n)$) dès $2(\Sigma_i(a_i) - \Sigma_j(c_j))$ n'est pas un entier pair (resp. un entier) ; pour $q > p$, une extension de la proposition 4, appliquée à G^0 et à un générateur topologique μ de $T_{\infty,f}$, ramène l'étude de G à celle de relations de dépendance linéaire entre des racines $(q-p)$-ièmes de l'unité. L'énoncé ii) entraîne ainsi que $\mathrm{Gal}(H)^0$ vaut G_2 pour $(p, q; \{a\}, \{c\}) = (1, 7; \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{j}{7}; 0 \leq j < 6\})$. Noter qu'une partie de ces résultats a également été établie par la méthode du §3 ; voir [DM], et [Mi], 4.8.2, pour une version tordue de ce dernier exemple.

Restreignons-nous maintenant au cas fuchsien $q = p = n$, et supposons au contraire que H ne soit pas Lie-irréductible. En général, la représentation V^∂ de G sera induite de la représentation d'un sous-groupe d'indice fini d divisant n, et l'étude de H se ramène à celle d'une équation hypergéométrique d'ordre $\frac{n}{d}$, qu'un théorème de Levelt de type Riemann-Hilbert permet d'expliciter (voir [Ka4], 3.5.4). Mais dans le cas contraire, la représentation restreinte à G^0 est isotypique non irréductible, et l'étude de $M_{1,an}$ (voir [Ka4], 3.5.7) montre qu'elle est monomiale ! Dès que le wronskien de H est une fonction algébrique, G^0 est alors trivial, et H admet une base de solutions algébriques. Beukers et Heckman, auxquels on doit cette solution du problème de Schwarz généralisé, montrent dans [BH] que ce cas se produit si et seulement si les paramètres a_i, c_j sont rationnels et si, pour tout automorphisme ξ du groupe de Galois de l'extension cyclotomique de $\mathbf{Q}$ qu'elles engendrent, les racines de l'unité $\{\xi(\mathsf{e}(a_1)), \cdots, \xi(\mathsf{e}(a_n))\}$ et $\{\xi(\mathsf{e}(c_1)), \cdots, \xi(\mathsf{e}(c_n))\}$ sont entrelacées sur le cercle unité.

Enfin, le cas où H elle-même est réductible se ramène au précédent par une technique de cohomologie galoisienne inspirée de la théorie de Kummer (voir [Bo]). (On peut également le traiter, sans discussion séparée, par les méthodes du §3 [DM].)

Signalons pour conclure que Katz introduit dans [Ka3] une filtration du groupe de Galois formel en une singularité irrégulière, qui permet de préciser l'information donnée par le tore exponentiel $T_{\sigma,f}(D)$. Par souci de symétrie, je n'en parle pas plus que des filtrations Gevrey de Ramis.

5. LA CONJECTURE DE GROTHENDIECK (d'après Katz)

La méthode que nous exposons pour finir donne, avec les notations du §1, la "K-forme" $\mathrm{Gal}(V/K)$ du groupe de Galois différentiel $\mathrm{Gal}(D)$. Elle ne nécessite en particulier aucune connaissance des foncteurs fibres de solutions du type V^{∂}. Son principal défaut (ou sa principale qualité, suivant les goûts) réside dans son caractère actuellement conjecturel.

Comme il est bien connu, toute équation différentielle intéressante est à coefficients dans $\mathbf{Q}(z)$ (des techniques standard (voir [Ka2]), permettent en tous cas de supposer les scalaires algébriques sur $\mathbf{Q}$). Soit donc V un espace vectoriel sur $K = \mathbf{Q}(z)$, de dimension n, muni d'une connexion ∇ (dans les notations du §1, $\nabla(\partial) = D$, avec, disons, $\partial = d/dz$). Pour tout nombre premier p suffisamment grand, il fournit par réduction modulo p un vectoriel à connexion (V_p, ∇_p) sur $(\mathbf{F}_p(z), \partial_p = d/dz)$. Alors (voir [Ka1] pour tout ce qui suit), $(\partial_p)^p$ est encore une dérivation de $\mathbf{F}_p(z)$, et l'élément $\psi_p(\nabla(\partial)) = (\nabla_p(\partial_p))^p - \nabla_p((\partial_p)^p)$ de $\mathrm{End}_{\mathbf{F}_p}(V_p)$ est $\mathbf{F}_p(z)$-linéaire. On l'appelle (image de ∂ par l') opérateur de *p-courbure* de la connexion ∇. Si on définit, par récurrence à partir de la matrice $A(z) = A_1$ représentant D dans une base de V sur $\mathbf{Q}(z)$, une suite de matrices par les relations $A_{k+1} = \partial A_k + AA_k$, la p-courbure est donnée dans la base correspondante de V_p sur $\mathbf{F}_p(z)$ par la réduction modulo p de la matrice $A_p(z)$.

Dans ces conditions, les vecteurs horizontaux de l'extension formelle $\widehat{V}_p$ de V_p à $\mathbf{F}_p((z))$ forment un espace vectoriel de dimension n_p sur le corps des constantes $\mathbf{F}_p((z^p))$, qui s'obtient par extension des scalaires à partir du $\mathbf{F}_p(z^p)$-espace vectoriel des vecteurs horizontaux de V_p sur $\mathbf{F}_p(z)$ (théorème de Honda), et n_p vaut n (la connexion est "intégrable") si et seulement si la p-courbure $\psi_p((\nabla(\partial))$ est nulle (théorème de Cartier). D'après le théorème d'Eisenstein, le groupe de Galois différentiel Gal(V/K) ne peut donc être fini, ou encore, son algèbre de Lie $\mathfrak{gal}(V/K)$ sur K ne peut être nulle, que si les p-courbures $\psi_p((\nabla(\partial))$ de ∇ sont nulles pour tout nombre premier suffisamment grand (voir [La]). Plus généralement, on peut définir par noethérianité la plus petite K-sous-algèbre de Lie algébrique $\mathfrak{courb}(V/K)$ de $\mathfrak{gl}(n, K)$ dont les réductions modulo p contiennent $\psi_p((\nabla(\partial))$ pour tout nombre premier p suffisamment grand. La définition même des p-courbures montre que $\mathfrak{courb}(V/K)$ est contenue dans $\mathfrak{gal}(V/K)$. La conjecture suivante, due à Katz [Ka2], généralise une conjecture de Grothendieck, qui portait sur le cas $\mathfrak{courb}(V/K) = 0$:

Conjecture.— *Les algèbres de Lie* $\mathfrak{courb}(V/K)$ *et* $\mathfrak{gal}(V/K)$ *coïncident.*

On notera l'analogie formelle de cette conjecture avec le théorème d'Ambrose-Singer [AS], en vertu duquel l'algèbre de Lie du groupe d'holonomie d'une variété riemannienne M est engendrée par les (conjugués par transport parallèle des différents endomorphismes de) courbures en toutes les places de M. Par ailleurs, Y. André [An2] attache à toute connexion sur $\mathbf{F}_p(z)$ un "schéma en groupe de Galois différentiel" non nécessairement réduit, dont la p-algèbre de Lie est engendrée par la p-courbure de la connexion. La conjecture équivaut alors à dire que Gal$(V/K)^0$ est le plus petit sous-groupe algébrique de $\mathrm{Aut}_K(V)$ dont les réductions modulo p contiennent ces sous-schémas pour presque tout p.

Considérons notre situation "test" à deux singularités $\Sigma = \{0, \infty\}$. La conjecture est alors démontrée dans [Ka2], 10.3 par réduction au cas $\mathfrak{courb}(V/K) = 0$, où elle découle de [Ka1]. Cela vaudrait la peine de la vérifier directement. Elle fournit en tous cas un lien mystérieux entre les groupes de Stokes et les p-courbures, puisque (pour ne considérer que nos exemples 2 et 3, avec $q > p$) les groupes de Galois formels ne suffisent pas à engendrer Gal$(V/K)^0$. Noter néanmoins que les logarithmes des automorphismes de Stokes sont nilpotents, alors qu'en présence de singularités irrégulières, la plupart des p-courbures ne peuvent pas l'être ([Ka2], 8.1(1)). Modulo p, les séries divergentes qui apparaissent dans les isomorphismes formels $\widehat{\Phi}$ (et qui sont responsables du phénomène de Stokes) se réduisent d'ailleurs souvent en des polynômes (exemple type : la série d'Euler $\sum_{n\geq 0}(n!)z^n$) ; seule une analyse p-adique permet d'en rendre compte (voir [Dw]).

En fait, en dehors de certaines équations à groupes de Galois unipotents ([An1], 8.1.3, [BR]), les seuls cas concrets où la conjecture de Katz a été vérifiée concernent la conjecture de Grothendieck (voir à ce propos [Ka3], 10.2), ce qui, grâce au théorème de Cartier, ne nécessite pas à proprement parler de calculer $\mathfrak{courb}(V/K)$... Outre le cas cité plus haut, il en est ainsi des équations d'ordre 1 sur $\mathbf{P}_1$ ([Ho]) ou des équations hypergéométriques ([Ka1], [BH] ; voir l'exemple 3 ci-dessus, ainsi que [Dw]). Mais une approche nouvelle a été introduite par D. et G. Chudnovsky ([CC]), à partir d'une version raffinée du critère de transcendance de Schneider-Lang. Elle leur permet de vérifier la conjecture de Grothendieck pour toutes les équations différentielles d'ordre 1 sur une surface de Riemann (de genre arbitraire), et pour les équations de Lamé (qui, comme le souligne Katz, sont des équations d'Airy sur une courbe elliptique — voir [BD], [Ch] pour la recherche des listes de Schwarz correspondantes).

Du point de vue "calcul de Gal(D) " qui nous intéresse ici, l'aspect le plus frappant de la démonstration de [CC] est qu'elle ne nécessite d'informations locales qu'en un nombre fini, *effectivement calculable*, de nombres premiers p. Grâce aux versions effectives du théorème de Chebotarev ([Se], Théorème 5), la même remarque s'appliquait d'ailleurs déjà à la preuve de Honda [Ho]. Ceci conduit à préciser la conjecture de Katz par la question suivante, qui nous servira de conclusion. Sans chercher à être intrinsèque, appelons hauteur de (V, ∇) le maximum des degrés et des hauteurs logarithmiques des coefficients d'une matrice représentative A de $\nabla(\partial)$ et de leur dénominateur commun T, et disons que ∇ a bonne réduction en p si p ne divise aucun des coefficients de T et est $> n$. La base de V implicitement choisie permet de définir la hauteur (logarithmique) $h(X)$ d'un K-sous-espace vectoriel X de V. Dans ces conditions :

(?) *Existe-t-il deux constantes effectives $c(n)$, $\kappa(n)$ vérifiant la propriété suivante ? Soient $\mathbf{h} \geq 1$ un nombre réel, ∇ une connexion sur V, de hauteur $\leq \mathbf{h}$, et X une K-droite de V telle que, pour tout nombre premier $p \leq c(n)(\mathbf{h} + h(X))^{\kappa(n)}$ de bonne réduction pour ∇, la réduction X_p de X modulo p soit stable sous $\psi_p((\nabla(\partial))$. Alors, X est stable sous* $\mathrm{Gal}(V/K)^0$.

BIBLIOGRAPHIE

(A permutations près, les sigles L.O.D.E., S.E.D., ... signifient : équations ou systèmes différentiels linéaires ordinaires.)

[An1] Y. ANDRÉ - *G-functions and geometry*, Vieweg, Asp. Math **13**, 1989.

[An2] Y. ANDRÉ - *Notes sur la théorie de Galois différentielle*, Prépubl. IHES (1989).

[AS] W. AMBROSE and I. SINGER - *A theorem on holonomy*, Trans. AMS **75** (1953), 428-443 (voir aussi : J.-P. Bourguignon, Astérisque **126** (1985), 169-183.

[BV1] D. BABBIT and V. VARADARAJAN - *Formal reduction of meromorphic D.E. : a group theoretic view*, Pacific J. Math. **108** (1983), 1-80.

[BV2] D. BABBIT and V. VARADARAJAN - *Local moduli for meromorphic D.E.*, Astérisque **169-170** (1989).

[BD] F. BALDASSARRI and B. DWORK - *On second order D.E. with algebraic solutions*, Amer. J. Math. **101** (1979), 42-76.

BBRS] W. BALSER, B. BRAAKSMA, J.-P. RAMIS and Y. SIBUYA - *Multisummability of formal power series solutions of L.O.D.E.*, Asympt. Anal. **5** (1991), 27-45.

[Be] F. BEUKERS - *Differential Galois theory*, Théorie des Nombres et Physique, Springer, à paraître.

[BBH] F. BEUKERS, D. BROWNAWELL and G. HECKMAN - *Siegel normality*, Ann. Maths **127** (1988), 279-308.

[BH] F. BEUKERS and G. HECKMAN - *Monodromy for the hypergeometric function* ${}_nF_{n-1}$, Inv. Math. **95** (1989), 325-354.

[BR] J.-P. BEZIVIN et P. ROBBA - *Rational solutions of L.D.E.*, J. Austr. Math. Soc. **46** (1989), 184-196.

[Bl] A. BLANCHARD - *Groupes algébriques et équations différentielles linéaires [d'après E. Kolchin]*, Sém. Bourbaki n° 17 (1949/50).

[Bo] K. BOUSSEL - *Groupes de Galois des équations hypergéométriques...*, CRAS Paris **309** (1989), 587-589.

[Ch] B. CHIARELLOTTO - *On Lamé operators which are pull-backs of hypergeometric ones*, Prépubl. U. Padova (1991).

[CC] D. and G. CHUDNOVSKY - *Application of Padé approximations to the Grothendieck conjecture on L.D.E.*, Springer L. N. **1135** (1984), 52-100.

[De] P. DELIGNE - *Catégories tannakiennes*, Birkhaüser Prog. Math., Grothendieck Festschrift II (1990), 111-195.

[DM] A. DUVAL et C. MITSCHI - *Matrices de Stokes et groupes de Galois des équations hypergéométriques...*, Pacific J. Math. **138** (1989), 25-56.

[Dw] B. DWORK - *Hypergeometric functions*, Oxford U.P. (1990).

[Ho] T. HONDA - *Algebraic differential equations*, Symp. Math. **24** (1981), 169-204.

[IK] Y. ILIANSHENKO and A. KHOVANSKII - *Galois groups, Stokes multipliers and a theorem of Ramis*, Funct. Anal. and Appl. **24** (1990), 286-296.

[Ju] W. JURKAT - *Meromorphe Differentialgleichungen*, Springer L.N. **637** (1978).

[Kap] I. KAPLANSKY - *An introduction to differential algebra*, Hermann (1957).

[Ka1] N. KATZ - *Algebraic solutions of differential equations ; p-curvature and the Hodge filtration*, Inv. Math. **18** (1972), 1-118.

[Ka2] N. KATZ - *A conjecture in the arithmetic theory of differential equations*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 203-239 et 347-348.

[Ka3] N. KATZ - *On the calculation of some differential Galois groups*, Inv. Math. **87** (1987), 13-61.

[Ka4] N. KATZ - *Exponential sums and differential equations*, Princeton U. Press (1990).

[Ko1] E. KOLCHIN - *Differential algebra and algebraic groups*, Acad. Press, 1973.

[Ko2] E. KOLCHIN - *Algebraic groups and algebraic dependence*, Amer. J. Math. **90** (1968), 1151-1164.

[La] E. LANDAU - *Eine Anwendung des Eisensteinsches Satz auf die Theorie der Gaussche Differentialgleichung*, Crelle **127** (1904), 92-102.

[Le] A. LEVELT - *Differential Galois theory and tensor products*, Indag. Math. **1** (1990), 439-449.

[LR] M. LODAY-RICHAUD - *Classification méromorphe locale des S.D.L. ... : phénomène de Stokes et applications*, Thèse, U. Orsay (1991).

[Ma1] B. MALGRANGE - *La classification des connexions irrégulières à une variable*, Birkhäuser Prog. Math. **37** (1983), 381-399.

[Ma2] B. MALGRANGE - *Équations différentielles à coefficients polynômiaux*, Birkhäuser Prog. Math. **96** (1991).

[M-R] B. MALGRANGE et J.-P. RAMIS - *Fonctions multisommables*, Ann. Inst. Fourier **42** (1992).

[MR1] J. MARTINET et J.-P. RAMIS - *Théorie de Galois différentielle et resommation*, Computer Algebra and Differential Equations, E. Tournier (ed.), Acad. Press (1989).

[MR2] J. MARTINET et J.-P. RAMIS - *Elementary acceleration and multisummability*, Ann. I.H.P., Phys. Th. **54** (1991), 331-401.

[Mi] C. MITSCHI - *Groupes de Galois différentiels et G-fonctions*, Computer Algebra and Diff. Eqs., M. Singer (ed.), Acad. Press (1991).

[Ne] Y. NESTERENKO - *On the algebraic independence of the components of a solution of a S.D.E.*, Math. URSS Izvestia **38** (1974), 492-512.

[Po] J.-F. POMMARET - *Differential Galois Theory*, Gordon & Breach (1982).

[Ra1] J.-P. RAMIS - *Théorèmes d'indice Gevrey pour les E.D.O.*, Mem. AMS **296** (1984).

[Ra2] J.-P. RAMIS - *Filtration Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot d'une E.D. irrégulière*, Prépubl. IMPA **45** (1985), 1-38.

[RS] J.-P. RAMIS and Y. SIBUYA - *Hukuhara's domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type*, Asymp. Anal. **2** (1989), 39-94.

[Sa] C. SABBAH - *Connexions méromorphes formelles de deux variables*, Prépubl. Éc. Polytechnique (1991).

[Sc] H. SCHWARZ - *Ueber diejenige Fälle in welchen die Gaussche hypergeometrische Reihe einer algebraische Funktion ihres 4.en Elementes darstellt*, Crelle **75** (1873), 292-335.

[Se] J.-P. SERRE - *Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev*, Publ. Math. IHES **54** (1981), 123-201.

[Si] Y. SIBUYA - *L.D.E. in the complex domain : problems of analytic continuation*, Transl. AMS, vol. **82** (1991).

[Sn1] M. SINGER - *Algebraic relations among solutions of L.D.E. : Fano's theorem*, Amer. J. Math. **110** (1988), 115-144.

[Sn2] M. SINGER - *An outline of differential Galois theory*, Computer Algebra and Differential Equations, E. Tournier (ed.), Acad. Press (1989).

[Sn3] M. SINGER - *Moduli of L.D.E. on the Riemann sphere with fixed Galois group*, Prépubl. N.C.S.U. (1991).

[St] G. STOKES - *Early letters to Lady Stokes*, Cambridge U.P. (1907) ; cité par J.-P. Ramis : *Séries divergentes et théories asymptotiques*, Journées X-UPS, 1991 (à paraître).

[Um] H. UMEMURA - *Second proof of the irreducibility of the first D.E. of Painlevé*, Nagoya Math. J. **113** (1990).

[Va] V. VARADARAJAN - *Meromorphic differential equations*, Expos. Math. **9** (1991), 97-188.

[Ajouté en octobre 1992]

(1) c'est-à-dire un homomorphisme C-linéaire de V dans $V \otimes \Omega^1_{K/C}$ vérifiant la formule de Leibniz.

(2) Par "constructions tensorielles", on entend ici les vectoriels à connexion que portent naturellement les sommes directes de V, de son dual et des produits tensoriels de leurs puissances tensorielles. Outre [De], voir à ce propos L. Breen, *Tannakian categories*, Prépubl. U. Paris 13, n° 13, 1992 (à paraître aux Proc. Symp. AMS, "Motives", Seattle, 1991).

(3) Dans cet énoncé, on suppose fixés des choix compatibles des groupes locaux dans leurs classes de conjugaison dans Gal(D) : par exemple, si on considère la représentation de Gal(D) (resp. de $G_{\sigma,an}$) attachée à un point ordinaire s de V (resp. un point σ' proche de σ), tout système de chemins de s vers chacun des points σ' fournit un tel choix.

(4) et vérifier, comme dans [IK], que ce relèvement est compatible aux constructions tensorielles, donc galoisien. Cette méthode a été développée dans le cas général par P. Deligne (lettre à J.-P. Ramis, Fév. 86) en termes des systèmes locaux I-filtrés (*cf.* [Ma1], [B-V2]) qu'il associe au couple $\{V, \widehat{\Phi}\}$.

(5) Ici encore, il convient de fixer des choix compatibles des st_α dans leurs classes de conjugaisons : pour la représentation de $G_{0,an}$ attachée à un point s voisin de 0, on peut par exemple fixer des points σ d'arguments approchant par valeurs inférieures chaque relevé à $\widetilde{S}$ des directions singulières α, et un système de chemins reliant s aux σ. La conjugaison par $\Sigma_{\arg(s)}$ permet par ailleurs de transporter $G_{0,f}(D)$ en un sous-groupe de cette représentation de $G_{0,an}$; c'est lui qui intervient dans l'énoncé du théorème 2.

(6) $(\widehat{V}_0, \widehat{D}_0)$ provient par complétion du K-vectoriel à connexion (V_0, D_0) attaché

à l'opérateur différentiel D_0"="$\widehat{D}_0$ sur $V_0 = K^n$. Noter que l'injection canonique de K dans $\widehat{K}$ se prolonge en des homomorphismes injectifs des extensions de Picard-Vessiot de V_0/K vers celles de $\widehat{V}_0/\widehat{K}$. On a fixé l'un d'eux au cours de cette partie.

(7) Voir aussi M. Loday-Richaud : *Stokes phenomenon, multisummability and differential Galois groups*, Prépubl. Orsay n° 1371, 1992, à paraître.

(8) Voir néanmoins les travaux de M. Singer (J. Symb. Comp. **11** (1991), 251-273), F. Ulmer (A.A.E.C.C. **2** (1991), 251-273) et de A. Duval et M. Loday-Richaud (A.A.E.C.C. **3** (1992), 1-36), sur l'algorithme de Kovacic.

Daniel BERTRAND

Université de Paris VI
U.F.R. de Mathématiques
Tour 46
4, place Jussieu
F-75252 PARIS CEDEX 05