

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

RICARDO PÉREZ-MARCO

## **Solution complète au problème de Siegel de linéarisation d'une application holomorphe au voisinage d'un point fixe**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1991-1992, exp. n° 753, p. 273-310.

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1991-1992\\_\\_34\\_\\_273\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1991-1992__34__273_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1991-1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION COMPLÈTE AU PROBLÈME DE SIEGEL  
DE LINÉARISATION D'UNE APPLICATION HOLOMORPHE  
AU VOISINAGE D'UN POINT FIXE  
(D'après J.-C. YOCCOZ)  
par Ricardo PÉREZ-MARCO**

On veut présenter ici les nouvelles techniques géométriques dans les problèmes de petits diviseurs en dynamique holomorphe inventées par J.-C. Yoccoz ([Y1]) pour résoudre le problème de Siegel. Il a aussi appliqué avec succès ces techniques révolutionnaires pour découvrir les conditions diophantiennes optimales dans les problèmes de linéarisation des difféomorphismes analytiques du cercle ([Y2]).

Le sujet étant abordable sans aucune difficulté à tous les non spécialistes, on a cru bon de faire pour eux (avec l'indulgence des autres) une introduction élémentaire et un petit aperçu historique. Pour une introduction plus exhaustive et une bibliographie complète on se référera au texte de M. Herman [He1].

Je remercie P. Sentenac pour son aide précieuse dans la préparation de ce texte.

**1. Dynamique holomorphe au voisinage d'un point fixe.**

Considérons un système dynamique, i.e. une application d'un espace dans lui même  $f : X \rightarrow X$ . L'étude de la dynamique de  $f$  consiste, sous sa forme la plus naïve, dans la compréhension des itérés de tout point. Une étude plus poussée concerne la classification des classes de conjugaison de  $f$  par les morphismes de  $X$ . Une première démarche serait la compréhension

de la structure des points prépériodiques (ceux qui ont une orbite finie) et la dynamique au voisinage des orbites périodiques. Or une orbite périodique n'est rien d'autre qu'un point fixe d'un certain itéré. Ceci nous mène d'une façon naturelle à l'étude de la dynamique locale en un point fixe.

En dynamique holomorphe l'espace  $X$  est muni d'une structure complexe qui est préservée par  $f$ , i.e.  $f$  est holomorphe. Ce premier programme d'étude n'est même pas achevé dans le cas où  $\dim_{\mathbf{C}} X = 1$ . Essentiellement on se limitera dans la suite à ce cas là. On placera notre point fixe à l'origine de  $\mathbf{C}$  et  $f$  sera définie dans son voisinage. Ainsi, on écrira  $f(z) = \lambda z + \sum_{n \geq 2} f_n z^n$ .

### 1.1. Notions préliminaires.

La notion dynamique la plus importante au voisinage d'un point fixe est certainement la stabilité :

**Définition (Stabilité).** *L'application  $f$  est stable en 0 si pour tout voisinage  $V$  de 0 il existe un voisinage  $U$  de 0 tel que pour  $n \geq 0$ ,  $f^n$  est défini dans  $U$  et  $f^n(U) \subset V$ .*

Clairement ceci est équivalent à l'existence d'un voisinage de 0 où les itérés positifs de  $f$  sont bien définis et forment une famille normale.

Lorsque la partie linéaire de  $f$  en 0 est non nulle ( $\lambda \neq 0$ ),  $f$  est très bien approché au voisinage de 0 par  $z \mapsto \lambda z$ . Il est naturel de se demander si la dynamique est la même. Lorsque ceci se produit on dit que  $f$  est linéarisable.

**Définition (Linéarisabilité).** *L'application  $f$  est linéarisable en 0 si  $\lambda \neq 0$  et s'il existe un changement de variables holomorphe  $z \mapsto h(z) = z + \sum_{n \geq 2} h_n z^n$  qui conjugue  $f$  à sa partie linéaire*

$$(h^{-1} \circ f \circ h)(z) = \lambda z.$$

Lorsque  $\lambda$  n'est pas racine de l'unité, l'application  $h$  est formellement uniquement déterminée par l'équation fonctionnelle. Dans ce cas, on parlera de la linéarisante de  $f$ . On notera  $R(f) \geq 0$  son rayon de convergence, avec  $R(f) = 0$  dans le cas non linéarisable, et  $h(\mathbf{D}_{R(f)})$  sera le domaine de Siegel ou de linéarisation de  $f$  (on note  $\mathbf{D}_r = \{z \in \mathbf{C}; |z| < r\}$ ).

Un fait remarquable dans le cadre holomorphe est que les notions de stabilité pour  $f$  ou  $f^{-1}$  et de linéarisabilité sont équivalentes.

**Proposition.** *Pour  $\lambda \neq 0$  et  $|\lambda| \leq 1$ ,  $f$  est linéarisable si et seulement si  $f$  est stable en 0.*

**Démonstration.** Si  $f$  est linéarisable les itérés positifs de  $f$  forment une famille normale dans le domaine de linéarisation de  $f$ . Inversement, soit  $U$  un voisinage de 0 où les itérés  $(f^n)_{n \geq 0}$  forment une famille normale. Soit

$$k_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{-i} f^i.$$

On a

$$k_n \circ f = \lambda k_n + \frac{\lambda}{n} (\lambda^{-n} f^n - \text{id}).$$

La famille  $(k_n)_{n \geq 0}$  est normale et on peut extraire une sous-suite convergente vers  $k$  et  $h = k^{-1}$  linéarise  $f$ .  $\diamond$

### 1.2. Point fixe super-attractif.

On désigne ainsi un point fixe qui est aussi un point critique, c'est à dire on a  $\lambda = 0$ . La dynamique est simple : tous les points dans un voisinage de 0 sont attirés vers l'origine. En fait on démontre facilement :

**Théorème (L. E. Böttcher [Bot]).** *Soit  $f(z) = f_n z^n + \mathcal{O}(z^{n+1})$  avec  $n \geq 2$  et  $f_n \neq 0$ . Il existe un changement de variables holomorphe  $z \mapsto h(z)$ ,  $h(0) = 0$ , qui conjugue  $f$  à  $z \mapsto z^n$ . i.e.*

$$(h^{-1} \circ f \circ h)(z) = z^n.$$

### 1.3. Point fixe attractif ou répulsif.

Ce cas correspond à  $0 < |\lambda| < 1$  (attractif) ou  $1 < |\lambda|$  (répulsif), et on a toujours linéarisabilité (appliquer le critère de stabilité à  $f$  ou à  $f^{-1}$ ).

**Théorème (G. Koenigs [Ko]).** *Soit  $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$  avec  $|\lambda| \neq 0, 1$ , alors  $f$  est linéarisable.*

### 1.4. Point fixe indifférent rationnel.

Ce cas correspond à  $|\lambda| = 1$  et  $\lambda$  racine de l'unité,  $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$  avec  $\alpha = p/q \in \mathbf{Q}$ ,  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $q \geq 1$  et  $p \wedge q = 1$ . L'étude de la dynamique est plus subtile et la linéarisabilité est plutôt rare comme le montre la proposition suivante.

**Proposition.** *L'application  $f(z) = e^{2\pi ip/q}z + \mathcal{O}(z^2)$  est linéarisable si et seulement si  $f^q = \text{id}$ .*

**Démonstration.** Si  $f^q = \text{id}$  alors  $h = \left( \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \lambda^{-i} f^i \right)^{-1}$  linéarise  $f$ . Inversement, si  $h^{-1} \circ f \circ h(z) = \lambda z$  alors  $h^{-1} \circ f^q \circ h(z) = \lambda^q z = z$  donc  $f^q = h \circ h^{-1} = \text{id}$ .  $\diamond$

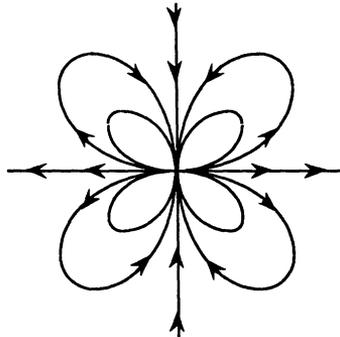


Figure 0

Par exemple, le polynôme quadratique  $P_\lambda(z) = \lambda z(1 - z)$  sera non linéarisable car  $P_\lambda^q$  est un polynôme de degré  $2^q$ . Néanmoins la dynamique topologique de  $f$  est complètement comprise depuis les travaux de Fatou et L. Leau ([Le]). Pour la classification des classes de conjugaison topologiques on se référera au travail de C. Camacho [Ca]. Les points, tout en tournant ( $f$  est proche d'une rotation rationnelle), décrivent une "fleur" comme celle de la figure. Il existe un entier  $n \geq 1$  et  $2nq$  domaines paraboliques (pétales) qui sont permutés par  $f$  avec un nombre de rotation  $p/q$  en formant  $2n$  cycles de  $q$  éléments. Sur la figure on a dessiné la dynamique de  $f^q$ .

D'après les travaux de J. Ecalle et S. M. Voronin (voir [Ec], [Vo] et

[Ma]) on a une classification complète des classes de conjugaison analytiques qui, contrairement aux cas déjà vus, est plus riche que la classification topologique.

### 1.5. Point fixe indifférent irrationnel. Le problème de Siegel.

C'est le cas qui reste à traiter, où  $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$  avec  $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ . L'application linéarisante existe toujours formellement mais cette série peut diverger à cause des problèmes de petits diviseurs causés par les bonnes approximations rationnelles de  $\alpha$ . En effet, on peut résoudre formellement  $h^{-1} \circ f \circ h(z) = \lambda z$ ,

et on trouve, avec  $h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n z^n$ ,  $h_1 = 1$ ,

$$h_n = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \left[ f_n + \sum_{p=2}^{n-1} f_p \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_p = n \\ j_i \geq 1}} h_{j_1} \dots h_{j_p} \right].$$

On soupçonne la possibilité d'instabilité de  $f$  pour des nombres  $\alpha$  très "Liouvillesques" lorsque l'on considère  $f$  comme limite d'applications  $f_n(z) = e^{2\pi i p_n/q_n} z + \mathcal{O}(z^2)$ , où  $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$  sont de bonnes approximations de  $\alpha$ . On a vu que "génériquement" un point fixe indifférent rationnel est instable. Le problème de Siegel, dit aussi problème du centre ou de l'équation fonctionnelle de Schröder, consiste à étudier l'ensemble des valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles on a toujours linéarisabilité.

Comme on le verra, le polynôme quadratique  $P_\lambda(z) = \lambda z(1-z)$  (unique à conjugaison linéaire près) joue un rôle important dans le problème de Siegel : sa dynamique reflète très fidèlement la dynamique d'un germe générique à multiplicateur  $\lambda$  fixé.

## 2. Résultats classiques sur le problème de Siegel.

Bien que l'existence d'applications non linéarisables semble être connue des mathématiciens du siècle dernier, la première trace écrite semble être due à G. A. Pfeiffer en 1917 ([Pf]). D'ailleurs, il est facile de montrer que généralement le polynôme quadratique est non linéarisable, i.e. il existe un  $G_\delta$  dense de valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles la linéarisante diverge (cf. 5.1).

Le premier à avoir mis l'accent sur l'importance de l'arithmétique de  $\alpha$  a été H. Cremer (voir [Cr]). Si  $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$  désigne la suite des réduites de  $\alpha$  (cette suite est définie dans l'annexe consacrée à l'arithmétique), il montre :

**Théorème (H. Cremer [Cr]).** *Si  $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$  satisfait la condition de Cremer,*

$$(C) \quad \sup_{n \geq 0} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} = +\infty,$$

*alors il existe  $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$  non linéarisable.*

Sa démonstration, élémentaire, consiste à construire  $f$  à partir de ses coefficients. On choisit  $|f_n| = 1$  et par récurrence l'argument de  $f_n$  égal à celui du deuxième terme de la somme entre crochets de la relation de récurrence donnant la suite  $(h_n)_{n \geq 2}$  (voir 1.5). On minore ainsi

$$|h_n| \geq \frac{1}{|\lambda^n - \lambda|} .$$

Même dans le cas où la condition  $C$  n'est pas vérifiée, ceci donne une majoration du rayon de convergence de  $h$ . Il montre aussi, par un argument simple et joli :

**Théorème (H. Cremer [Cr]).** *Si  $d \geq 2$  et  $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$  satisfait à la condition de Cremer de degré  $d$ ,*

$$(C_d) \quad \sup_{n \geq 0} \frac{\log q_{n+1}}{d^{q_n}} = +\infty,$$

alors tout germe polynômial  $P(z) = e^{2\pi i\alpha}z + \dots + a_d z^d$ ,  $a_d \neq 0$ , est non linéarisable.

Noter que  $\mathcal{C}_\infty = \bigcap_{d \geq 2} \mathcal{C}_d$ , qui est la condition qui permet d'appliquer le théorème à tout polynôme indépendamment du degré, s'écrit

$$(\mathcal{C}_\infty) \quad \sup_{n \geq 1} \frac{\log \log q_{n+1}}{q_n} = +\infty.$$

On a

$$\mathcal{C}_\infty \subset \dots \subset \mathcal{C}_3 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C} \subset \mathbf{R} - \mathbf{Q}.$$

Le problème de l'existence de valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles tout germe  $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$  serait linéarisable est délicat et est resté longtemps ouvert. Même G. Julia ([Ju]) a donné une démonstration incorrecte de leur inexistence. Le problème a été résolu de façon remarquable en 1942 par C.-L. Siegel.

**Théorème (C.-L. Siegel [Si], amélioré par A. Bruno [Br]).** Si  $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$  satisfait la condition arithmétique,

$$(\mathcal{B}) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < +\infty,$$

alors toute application  $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$  est linéarisable.

L'ensemble des nombres qui satisfont la condition arithmétique du théorème de Siegel de 1942 est de mesure de Lebesgue totale. Ce résultat est le premier à remonter les difficultés liées aux petits diviseurs. La démonstration repose sur des estimations des coefficients de la linéarisante directement à partir de la relation de récurrence de 1.5. On minore les petits diviseurs grâce à la condition diophantienne. Plus tard, dans les années 50 et 60, les nouvelles techniques, qui donnèrent les théorèmes K.A.M, ont été découvertes. Le lecteur pourra se référer au séminaire Bourbaki de J.-B. Bost [Bo] sur ce sujet.

Ces techniques s'appliquent aussi au problème de Siegel mais donnent des résultats plus grossiers quand aux estimations des domaines de linéarisation, et les conditions arithmétiques sont plus restrictives.

A propos des conditions diophantiennes, Siegel démontra la linéarisation pour des  $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$  satisfaisant à une condition diophantienne, i.e. il existe  $\gamma, \tau > 0$  tels que pour tout rationnel  $p/q$  on a

$$|\alpha - p/q| \geq \frac{\gamma}{q^\tau}.$$

En 1965, A. Bruno [Br] améliora cette condition arithmétique en raffinant la démonstration de Siegel. Simultanément et de façon indépendante, T. M. Cherry [Ch] conjectura ce résultat et l'optimalité de la condition  $\mathcal{B}$ . Il n'a pas pu démontrer sa conjecture avant sa mort mais son travail [Ch], bien que très vague, montre une remarquable compréhension de la dynamique non linéarisable.

Ce n'est qu'en 1987 que J.-C. Yoccoz dans son mémoire [Y1] a montré cette conjecture.

### 3. Nouveaux résultats.

#### 3.1. Sur le problème de Siegel.

##### 3.1.a. Préliminaire.

La partie I.3 de [Y1] contient une nouvelle démonstration du théorème de Siegel et de Bruno. Cette nouvelle démonstration géométrique donne des estimations optimales, à une constante multiplicative près, du rayon de convergence des applications linéarisantes. Le problème étant invariant par conjugaison par des homothéties, il faut, pour énoncer les résultats, normaliser les applications.

Ainsi, quitte à conjuguer  $f$  par une homothétie, on supposera  $f \in S_\alpha$ , où  $S_\alpha$  est l'ensemble des applications univalentes (holomorphes et injectives) sur le disque unité  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1$  et telles que  $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$ . Il est bien connu que l'espace  $S_\alpha$  est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. On avait noté  $R(f) \geq 0$  le rayon de convergence de l'application linéarisante, on posera

$$R(\alpha) = \inf_{f \in S_\alpha} R(f).$$

Lorsque  $\alpha \in \mathcal{B}$  on notera

$$B(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n}.$$

Si  $\alpha \notin \mathcal{B}$ ,  $B(\alpha) = +\infty$ . La différence entre la fonction  $B$  et la fonction  $\Phi$  définie dans l'annexe arithmétique est universellement bornée aux points où elles restent finies.

### 3.1.b. Les théorèmes pour les germes.

Le théorème principal de [Y1] est :

#### **Théorème.**

1. Si  $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$  est telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} = +\infty,$$

alors il existe  $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$  non linéarisable.

2. Il existe une constante universelle  $C > 0$  telle que si  $B(\alpha) < +\infty$  alors  $R(\alpha) > 0$  et

$$|B(\alpha) - \log(R(\alpha)^{-1})| \leq C.$$

La partie 1 démontre l'optimalité de la condition  $\mathcal{B}$  et la partie 2 améliore le résultat de Siegel et Bruno qui ne donne que

$$\log(R(\alpha)^{-1}) \leq C_1 B(\alpha) + C_2,$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes universelles et on peut prendre  $C_1 = 2$  (d'après [He1]).

Comme on le verra, les applications non linéarisables de la première partie du théorème sont construites en "renversant" la démonstration géométrique

du théorème de Siegel. Ceci permet d'étudier certains points de la dynamique : ces germes non linéarisables ont une suite d'orbites périodiques qui tend vers l'origine et il est démontré que les points de ces orbites se trouvent à une distance essentiellement optimale de 0 (i.e. la plus petite possible compte tenu de la période). La construction est d'une grande flexibilité. Elle permet de fixer avec liberté la dynamique de retour au voisinage de ces orbites périodiques. En particulier, on peut faire que des itérés de  $f$  soient l'identité au voisinage des orbites périodiques (mais jamais au voisinage de 0 !). Ceci lui permet de démontrer,

**Théorème.** *Si  $\alpha \notin \mathcal{B}$  il existe un ensemble non dénombrable de classes de conjugaison de germes holomorphes  $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$  sans aucune fonction entière.*

Une des motivations pour prouver l'optimalité de la condition  $\mathcal{B}$  se trouve dans l'appendice 2 de [Y1] où il est montré que la démonstration de Bruno ne peut s'appliquer au polynôme quadratique lorsque  $\alpha \notin \mathcal{B}$ . Dans l'appendice 1 on trouve un résultat isolé et intéressant qui montre que le théorème de linéarisation de Siegel (qui est valable en dimension supérieure lorsque la différentielle est diagonalisable et les valeurs propres sont distinctes, de module 1, non résonantes et satisfont des conditions diophantiennes) n'est plus vrai si la différentielle n'est pas diagonalisable.

**Théorème.** *Soient  $n \geq 2$  et  $A \in GL_n(\mathbb{C})$ . On suppose que  $A$  possède une valeur propre  $\lambda$  de module 1, et que le sous-espace caractéristique associé à  $\lambda$  diffère du sous-espace propre. Alors il existe des germes de difféomorphismes holomorphes de  $(\mathbb{C}^n, 0)$ , dont la différentielle en 0 est  $A$ , qui ne sont pas linéarisables.*

### 3.1.c. Les résultats sur le polynôme quadratique.

Avant son travail sur le théorème de Siegel, Yoccoz s'était intéressé au cas du polynôme quadratique. Déjà les résultats de H. Cremer montraient que le polynôme quadratique était en un certain sens "moins linéarisable" que les autres germes polynômiaux. Ceci a été précisé par Yoccoz :

**Théorème.** *Si  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  et le polynôme quadratique  $e^{2\pi i\alpha}z(1-z)$  est linéarisable alors tout germe  $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$  est linéarisable.*

Par ailleurs, il a aussi montré d'une façon élémentaire et indépendante du théorème de Siegel :

**Théorème.** *Le polynôme quadratique  $e^{2\pi i\alpha}z(1-z)$  est linéarisable pour un ensemble de mesure totale de valeurs de  $\alpha$ .*

Noter que ces deux derniers théorèmes ont comme corollaire le théorème de Siegel pour un ensemble de valeurs de  $\alpha$  de mesure totale. On trouvera leur démonstration

dans [Y1] et dans [Do]. La démonstration du premier théorème conjointement avec les résultats pour les germes donne ([Y1] partie II) :

**Théorème.**

1. *Si  $\alpha \notin \mathcal{B}$ , le polynôme quadratique  $P_\lambda$ ,  $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ , est non linéarisable.*
2. *Il existe une constante universelle  $C_1 > 0$ , et pour tout  $\varepsilon > 0$ , une constante  $C(\varepsilon)$ , telle que, pour  $\alpha \in \mathcal{B}$ ,*

$$(1 - \varepsilon)B(\alpha) - C(\varepsilon) \leq \log (R(P_\lambda)^{-1}) \leq B(\alpha) + C_1.$$

Ainsi la famille quadratique fournit des germes non linéarisables lorsque  $\alpha \notin \mathcal{B}$ , et si  $\alpha \in \mathcal{B}$  le rayon de convergence est presque (au facteur  $\varepsilon$  près) le plus petit possible. D'où la question naturelle ([Y1] II.1.9) :

Est-ce que  $\alpha \mapsto B(\alpha) - \log (R(P_{e^{2\pi i\alpha}})^{-1})$  est bornée sur  $\mathcal{B}$  ?

En 1989, Yoccoz a précisé la partie 1 du théorème.

**Théorème.** *Si  $\alpha \notin \mathcal{B}$  le polynôme quadratique a des orbites périodiques distinctes de 0 contenues dans tout voisinage de 0.*

On pourra trouver une démonstration dans [PM1]. Son argument s'applique aussi aux fractions rationnelles structurellement stables (en fixant le multiplicateur  $\lambda$  en 0).

Lorsque  $|\lambda| < 1$ , 0 est un point fixe attractif de  $P_\lambda$  qui est linéarisable. L'application linéarisante  $h_\lambda$  a une unique singularité  $U(\lambda)$  sur le bord de son disque de convergence qui vérifie  $h_\lambda(U(\lambda)) = 1/2$ .

Les paragraphes II.2 et II.3 de [Y1] sont consacrés à l'étude de la fonction  $\lambda \mapsto U(\lambda)$ , holomorphe et bornée sur  $\mathbf{D}$ . Il est naturel de penser que les

limites radiales de  $U$  lorsque  $\lambda \rightarrow \lambda_0 \in S^1 = \partial\mathbf{D}$  donnent des informations sur  $P_{\lambda_0}$ . En fait il montre :

**Théorème.** *Pour tout  $\lambda_0 \in S^1$  le module de la fonction  $U$  admet en  $\lambda_0$  une limite radiale qui est égale au rayon de convergence de  $h_{\lambda_0}$ .*

Ceci démontre la linéarisabilité pour p. t. valeur  $\alpha$  en appliquant le théorème de Fatou qui montre que la fonction  $U$ , qui est holomorphe et bornée dans  $\mathbf{D}$ , admet une limite radiale non nulle pour p. t. valeur du bord. Des questions très intéressantes sont posées dans [Y1] au sujet de la fonction  $U$  qui semble posséder des propriétés arithmétiques profondes.

### 3.2. Sur les difféomorphismes analytiques du cercle.

Le problème de Siegel est à rapprocher du problème de linéarisation des difféomorphismes analytiques du cercle. La relation heuristique est résumée par V. Arnold dans l'introduction de son article [Ar1] :

*"... Le problème du centre est un cas singulier d'une application du cercle dont le rayon, dans le cas singulier, est égal à zéro ..."*

(Nous décrivons en 6.1 une construction qui rend rigoureuse cette relation heuristique des deux problèmes)

Yoccoz a appliqué ses techniques géométriques aux problèmes de linéarisation des difféomorphismes analytiques du cercle.

#### 3.2.a. Préliminaire.

Soit  $f : S^1 \rightarrow S^1$  un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation; son principal invariant dynamique est son nombre de rotation,  $\rho(f) \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  défini par H. Poincaré. Lorsque  $f$  est un difféomorphisme  $C^2$ , par exemple, et  $\rho(f)$  est irrationnel alors  $f$  est topologiquement linéarisable par le théorème de Denjoy ([He2]). Il se pose la question de la régularité de la linéarisante. Lorsque  $f$  est analytique un théorème de V. Arnold ([Ar1]) (amélioré par H. Rüssmann [Ru]) montre que la linéarisante est analytique pour presque tout nombre de rotation si l'on suppose  $f$  proche d'une rotation (résultat local). M. Herman ([He2]) démontra le théorème global (sans supposer de proximité à la rotation) en classe  $C^\infty$  et analytique, résolvant ainsi une conjecture de V. Arnold. La condition diophantienne en classe  $C^\infty$  fut améliorée par

J.-C. Yoccoz ([Y3]) ce qui donna la condition diophantienne optimale. En analytique la condition arithmétique optimale était inconnue.

Dans la suite on travaillera dans le revêtement universel de  $S^1$  donné par  $E : \mathbf{R} \rightarrow S^1$ ,  $E(z) = e^{2\pi iz}$ . Pour  $\Delta > 0$  on note  $S(\alpha, \Delta)$  l'espace des difféomorphismes analytiques de  $S^1$  relevés à  $\mathbf{R}$ , de nombre de rotation  $\alpha \in \mathbf{R}$ , et qui s'étendent en une application univalente sur la bande  $\{z \in \mathbf{C}; |\operatorname{Im} z| < \Delta\}$ . L'ensemble des relevés des difféomorphismes analytiques du cercle de nombre de rotation  $\alpha$  est noté  $S(\alpha, 0) = \bigcup_{\Delta > 0} S(\alpha, \Delta)$ .

### 3.2.b. Les théorèmes sur les difféomorphismes du cercle.

On renvoi le lecteur à l'annexe arithmétique pour les définitions des conditions arithmétiques  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}(\Delta)$  et  $\mathcal{B}$ . Rappelons simplement qu'elles sont complètement explicites, que  $\mathcal{H} \subset \bigcap_{\Delta > 0} \mathcal{H}(\Delta)$  et  $\mathcal{B} = \bigcup_{\Delta > 0} \mathcal{H}(\Delta)$ . Dans ce qui suit, linéarisabilité signifie linéarisabilité analytique. On retrouve trois types de résultats dans [Y2] :

#### **Théorème global.**

1. Si  $\alpha \in \mathcal{H}$  alors tout difféomorphisme analytique du cercle de nombre de rotation  $\alpha$  est linéarisable.
2. Si  $\alpha \notin \mathcal{H}$  il existe des difféomorphismes analytiques du cercle de nombre de rotation  $\alpha$  qui ne sont pas linéarisables.

**Théorème semi-local.** Il existe  $C_0$  ( $= 3$ ) constante universelle telle que :

1. Si  $\alpha \in \mathcal{H}(\Delta - C_0)$ ,  $\Delta > C_0$ . et  $f \in S(\alpha, \Delta)$  alors  $f$  est linéarisable.
2. Si  $\alpha \notin \mathcal{H}(\Delta - C_0)$  alors il existe  $f \in S(\alpha, \Delta)$  non linéarisable.

#### **Théorème local.**

1. Si  $\alpha \in \mathcal{B}$ ,  $\Delta > \frac{1}{2\pi}\Phi(\alpha) + 3.15$  et  $f \in S(\alpha, \Delta)$  alors  $f$  est linéarisable et la linéarisante est dans  $S(1, \Delta - \frac{1}{2\pi}\Phi(\alpha) - 3.15)$ .
2. Si  $\alpha \in \mathcal{B}$ , pour tout  $0 < \delta' < \delta$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que si pour  $|\operatorname{Im} z| < \delta$ ,  $|f(z) - z - \alpha| < \varepsilon$ ; alors  $f$  est linéarisable et la linéarisante est dans  $S(1, \delta')$ .
3. Si  $\alpha \notin \mathcal{B}$  la fraction de Blaschke  $f_{a,\mu}(z) = \mu z^2 \frac{z+a}{1+az}$ ,  $a > 3$ ,  $\rho(f_{a,\mu}) = \alpha$ , est non linéarisable.

La partie 3 de ce théorème montre que la condition  $\mathcal{B}$  est ici encore optimale. La non linéarisabilité des fractions de Blaschke se déduit de la non linéarisabilité du polynôme quadratique à l'aide d'une construction de E. Ghys (voir [Gh] et [Do]).

#### 4. Les techniques.

##### 4.1. Démonstration géométrique du théorème de Siegel et de Bruno.

La démonstration est basée sur le critère dynamique de linéarisabilité : la stabilité.

A divers endroits des constantes universelles apparaîtront. Leur valeur explicite n'a aucune importance dans la discussion. On les notera  $C, C_0, C_1, \dots$  en donnant parfois le même nom à des constantes différentes.

##### 4.1.a. L'application de retour dans un secteur.

Le point de départ est la remarque suivante de A. Douady et E. Ghys (voir [Do]) : l'ensemble

$$\{\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}; \text{ tout } f(z) = e^{2\pi i\alpha} z + \mathcal{O}(z^2) \text{ est linearisable } \},$$

$$\text{est invariant sous l'action de } SL(2, \mathbf{Z}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .x = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Il suffit de montrer que cet ensemble de nombres de Siegel est invariant par  $\alpha \mapsto -\alpha^{-1}$ . La démonstration est géométrique. Considérons  $f(z) = e^{2\pi i\alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$  et un segment  $l = [0, \varepsilon]$  issu de 0. Les arcs  $l$  et  $f(l)$  forment, au voisinage de 0, un secteur que l'on peut refermer par un segment  $l'$  joignant un point de  $l$  à son image (voir figure 1).

Si l'on recolle  $l$  et  $f(l)$  par  $f$  on obtient une variété topologique à bord qui est homéomorphe à  $\overline{\mathbf{D}}$ . Il est facile de montrer que, pour la structure complexe induite, l'intérieur est biholomorphe à  $\mathbf{D}$ . L'application de retour dans le secteur recollé est bien définie et holomorphe au voisinage de 0. On obtient ainsi un germe  $g(z) = e^{2\pi i\beta} z + \mathcal{O}(z^2)$ . Il est facile de voir que  $\beta = -\alpha^{-1}$  (pour se convaincre penser au cas où  $f$  est une rotation).

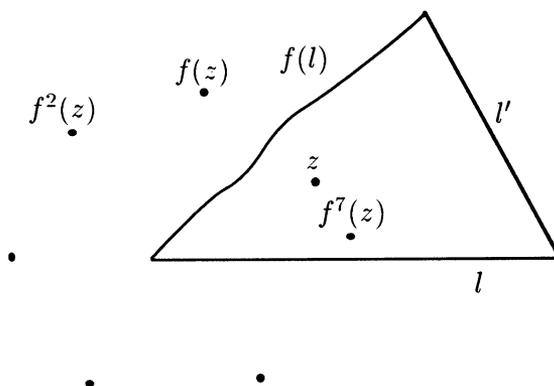


Figure 1

La dynamique de l'application de retour  $g$  est, au nombre d'itérations près, celle de  $f$ . On a  $f$  linéarisable si et seulement si  $g$  l'est. Ceci prouve l'invariance par  $SL(2, \mathbf{Z})$ . On peut dire davantage : si  $f$  a une orbite périodique proche de 0 alors  $g$  aura une orbite périodique dont on peut déterminer la période et le nombre de rotation à partir de celle de  $f$ . Aussi, si  $f$  a un "point d'instabilité", c.à.d. un point proche de 0 qui s'échappe, alors il lui correspondra un "point d'instabilité" qui s'échappera en moins d'itérations. C'est cette remarque et une réalisation quantitative de la construction précédente qui donnent le théorème de stabilité, i.e. de linéarisabilité.

On commence par normaliser  $f \in S_\alpha$ . On travaille plus aisément sur le revêtement universel de  $\mathbf{D} - \{0\}$  donné par  $E : \mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C}; \text{Im } z > 0\} \rightarrow \mathbf{D} - \{0\}$ ,  $E(z) = e^{2\pi iz}$ . L'application  $f \in S_\alpha$  se relève en  $F$  telle que  $E \circ F = f \circ E$  et

1.  $F : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{C}$  est univalente.

2.  $F(z) = z + \alpha + \phi(z)$  où  $\phi$  est  $\mathbf{Z}$ -périodique et  $\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} \phi(z) = 0$ , c'est à dire, le développement de Fourier s'écrit

$$\phi(z) = \sum_{n \geq 1} \phi_n e^{2\pi inz}.$$

On peut montrer que  $\phi$  décroît exponentiellement quand  $\text{Im } z \rightarrow +\infty$ . On note  $S(\alpha)$  l'espace de telles applications  $F$ .  $S(\alpha)$  est compact et est le

revêtement universel de  $S_\alpha$ . Pour construire l'application de retour, il faut qu'une demi-droite verticale et son image par  $F$  forment les bords d'une demi-bande verticale. En notant  $\mathbf{H}_r = \mathbf{H} + ir$ , pour  $r$  grand,  $F$  est proche de la translation  $z \mapsto z + \alpha$  dans  $\mathbf{H}_r$ . Si  $\alpha \neq 0$ , par compacité de  $S(\alpha)$ , il existe une hauteur  $t(\alpha)$  telle que, pour  $z \in \mathbf{H}_{t(\alpha)}$ , on ait l'estimation fondamentale,

$$(*) \quad |F(z) - z - \alpha| \leq \frac{\alpha}{4}.$$

On voit facilement que l'on peut prendre toujours

$$t(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} + C.$$

La plus petite valeur de  $t(\alpha)$  que l'on peut prendre de façon à satisfaire (\*) représente la hauteur des fortes non linéarités de  $F$ . Au-delà de cette hauteur  $F$  est proche de la translation  $z \mapsto z + \alpha$ . Des fortes non linéarités pour  $F$  sont, par exemple, des points fixes. A cause de l'estimation (\*) leur partie imaginaire est inférieure à  $t(\alpha)$ .

Maintenant on peut définir l'application de retour dans la demi-bande  $B$  délimitée par  $l = [it(\alpha), +i\infty[, F(l)$  et  $[it(\alpha), F(it(\alpha))]$ . Si  $z \in B$  on itère par  $F$  jusqu'à avoir  $\operatorname{Re} F^n(z) > 1$ . Si  $\operatorname{Im} z \geq t(\alpha) + C_0$  on a  $z' = F^n(z) - 1 \in B$  et  $z \mapsto z'$  est l'application de retour dans la demi-bande  $B$ . On remarquera que l'on ne s'intéresse à la valeur de  $t(\alpha)$  qu'à une constante universelle additive près, i.e. si l'on considère  $t(\alpha) + C$  au lieu de  $t(\alpha)$  la démonstration ne change pas.

En recollant les bords  $l$  et  $F(l)$  de  $B$  par  $F$  on obtient une surface de Riemann  $\mathcal{S}$  correspondant à  $\mathring{B}$  biholomorphe à  $\mathbf{D} - \{0\}$ . En considérant une uniformisation convenable de  $\mathcal{S}$  sur un voisinage de  $\mathbf{D}$ , la dynamique de retour définit une application  $g \in S_{\alpha^{-1}}$  (pour échanger  $-\alpha^{-1}$  en  $\alpha^{-1}$  on change l'orientation) qui se relève en  $G \in S(\alpha^{-1})$ . On peut alors montrer qu'aux points  $z \in \mathbf{H}$  qui s'échappent de  $\mathbf{H}$  par itération par  $F$ , il leur correspond des points  $z' \in \mathbf{C}$  qui s'échappent de  $\mathbf{H}$  par itération par  $G$ , et on contrôle  $\operatorname{Im} z'$  en fonction de  $\operatorname{Im} z$ . Plus précisément :

**Proposition.** Soit  $0 < \alpha < 1$ ,  $F \in S(\alpha)$  et  $t(\alpha) > 0$  tel que pour  $\text{Im } z \geq t(\alpha)$ ,  $|F(z) - z - \alpha| \leq \alpha/4$ . Il existe  $G \in S(\alpha^{-1})$  tel que si  $z \in \mathbf{H}$ ,  $\text{Im } z \geq t(\alpha)$ , et pour  $0 \leq i \leq n$ ,  $F^i(z) \in \mathbf{H}$ , mais  $F^n(z) \notin \mathbf{H}$ , alors il existe  $z' \in \mathbf{C}$  vérifiant :

1.  $\text{Im } z' \geq \alpha^{-1}(\text{Im } z - t(\alpha) - C_0)$ .
2. Il existe  $m$ ,  $0 \leq m < n$ , tel que  $G^m(z') \notin \mathbf{H}$ .

Les estimations du point 1 s'obtiennent en étudiant l'uniformisante de  $\mathcal{S}$  par des méthodes de fonctions univalentes ou par des estimations de modules d'anneaux inclus dans  $\mathcal{S}$ . Elles ne sont pas surprenantes : ce sont celles qu'on aurait si  $F$  était la translation  $z \mapsto z + \alpha$ , dans ce cas  $t(\alpha) = 0$  et l'uniformisation est explicite. Or à la hauteur  $t(\alpha)$ ,  $F$  est proche de cette translation, ...

#### 4.1.b. L'argument de descente infinie.

On applique maintenant, par récurrence, la construction précédente. Partons de  $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , et  $F \in S(\alpha)$ . On pose (voir annexe)  $\alpha_0 = \alpha$  et pour  $n \geq 0$ ,

$$\alpha_n^{-1} = a_{n+1} + \alpha_{n+1},$$

avec  $a_{n+1} \in \mathbf{N}^*$  et  $0 < \alpha_{n+1} < 1$ . Puis  $\beta_{-1} = 1$  et  $\beta_n = \alpha_0 \dots \alpha_n$ .

On construit une suite  $(F_n)_{n \geq 0}$  avec  $F_n \in S(\alpha_n)$ . Posons  $F_0 = F$ . Supposons construit  $F_n$ . Soit  $G_n \in S(\alpha_n^{-1})$  l'application de retour de  $F_n$  construite en 4.2.a. On pose  $F_{n+1}(z) = G_n(z) - a_{n+1}$ . Une récurrence immédiate en utilisant la proposition de 4.2.a donne :

**Proposition.** Il existe  $C_0$  constante universelle telle que si  $z_0 \in \mathbf{H}$ ,

$$\text{Im } z_0 \geq \sum_{i=0}^m \beta_{i-1} t(\alpha_i) + C_0,$$

et  $F^{n_0}(z_0) \notin \mathbf{H}$  alors il existe des points  $(z_i)_{1 \leq i \leq m}$ ,  $z_i \in \mathbf{H}$ , et  $(n_i)_{1 \leq i \leq m}$  tels que  $F_i^{n_i}(z_i) \notin \mathbf{H}$  et

$$n_0 > n_1 > \dots > n_m \geq 0.$$

D'où l'on déduit, par un argument de descente infinie,

**Théorème.** *Si l'on peut choisir la suite  $(t(\alpha_n))_{n \geq 0}$  telle que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{n-1} t(\alpha_n) < +\infty,$$

*alors  $f$  est stable en 0, donc linéarisable.*

Noter que l'on obtient un disque de rayon  $C \exp\left(-2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{n-1} t(\alpha_n)\right)$  contenu dans le domaine de stabilité.

Rappelons que l'on peut toujours prendre

$$t(\alpha_n) = \frac{1}{2\pi} \log \alpha_n^{-1} + C.$$

Puisqu'on a  $\sum_{n \geq 0} \beta_{n-1} \leq C$  (voir annexe) une constante universelle rajoutée aux  $t(\alpha_n)$  n'a aucune importance et la condition arithmétique précédente devient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} < +\infty.$$

C'est la condition  $\mathcal{B}$  (voir l'annexe arithmétique), d'où le théorème de Siegel et de Bruno. La figure 2 résume schématiquement l'idée de la démonstration.

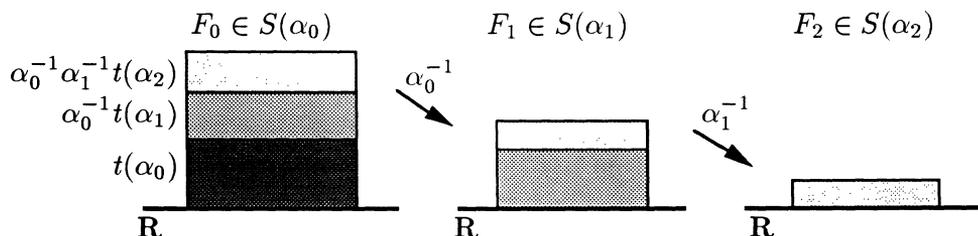


Figure 2

A chaque étape l'application de retour  $F_{n+1}$  ne se souvient de la dynamique de  $F_n$  qu'au-dessus de  $t(\alpha_n)$ . Les régions marquées, où l'information sur la dynamique est perdue, correspondent, dans le demi-plan où agit  $F = F_0$ , à des régions qui s'empilent et dont l'épaisseur est majorée par  $\beta_{n-1}(t(\alpha_n) + C)$ . Ainsi, si ces régions empilées ne dépassent pas une hauteur fixée, un point qui serait au-dessus et qui quitterait  $\mathbf{H}$  en  $n_0$  itérations par  $F$  devrait les traverser toutes. Il lui correspondrait un point qui quitterait  $\mathbf{H}$  en  $n_1$  itérations par  $F_1$ , etc ... avec

$$n_0 > n_1 > \dots \geq 0,$$

absurde.

## 4.2. Constructions de germes non linéarisables.

### 4.2.a. Le collage d'une non linéarité.

Le principe pour obtenir des conditions diophantiennes optimales est de renverser la construction de l'application de retour. Dans le passage de  $F_{n+1}$  à  $F_n$  il faut réintroduire les non linéarités de  $F_n$  au-dessous de  $t(\alpha_n)$  qui empêchaient de prendre  $t(\alpha_n)$  plus petit. La non linéarité "générique" est celle créée par des points fixes avec une dynamique comme celle de la figure 3.

Rappelons que l'estimation (\*) de 4.1.a montrait que  $t(\alpha_n) > 0$  était supérieur à la partie imaginaire des points fixes de  $F_n$ . Nous allons décrire une façon de "coller" des points fixes à  $F_{n+1}$ . Mais d'abord décrivons comment revenir de  $F_{n+1}$  à  $F_n$  sans coller de points fixes.

On part de  $G \in S(\alpha)$  et on veut construire  $F \in S(\beta)$  avec  $\beta^{-1} = a + \alpha$ ,  $0 < \alpha, \beta < 1$  et  $a \in \mathbf{N}^*$  (on rappelle que  $\alpha_n^{-1} = a_{n+1} + \alpha_{n+1}$ ). On pose  $\tilde{G}(z) = G(z) + a$ ,  $\tilde{G} \in S(a + \alpha) = S(\beta^{-1})$ . On a  $\beta^{-1} > 1$  donc au-dessus d'une hauteur  $C > 0$ ,  $\tilde{G}$  est proche de la translation  $z \mapsto z + \beta^{-1}$ , i.e. on a une demi-bande  $B'$  délimitée par  $l_1 = [iC, +i\infty[$ ,  $\tilde{G}(l_1) = l_2$  et  $[iC, \tilde{G}(iC)]$ . Lorsqu'on recolle  $l_1$  et  $l_2$  par  $\tilde{G}$  on obtient une surface de Riemann  $\mathcal{S}'$  correspondant à  $\hat{B}'$  qui est un demi-cylindre, i.e. biholomorphe à  $\mathbf{D} - \{0\}$ . La translation  $T(z) = z + 1$ , qui commute à  $\tilde{G}$ , induit une application univalente sur une

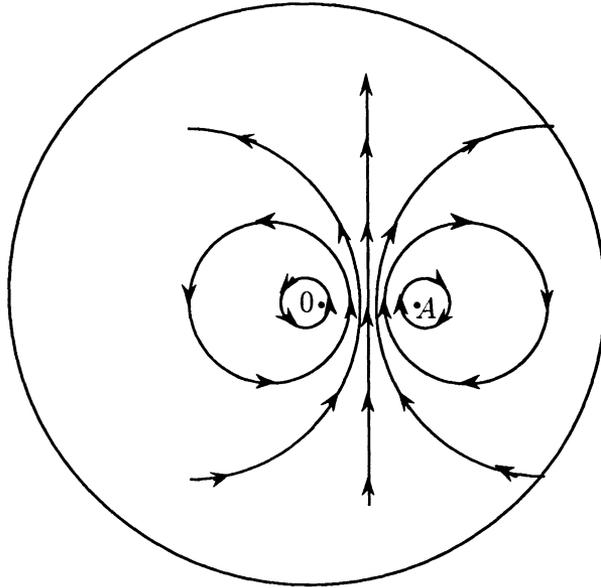


Figure 3

partie de  $S'$  qui est un voisinage de 0. Ainsi en choisissant une uniformisation  $k : S' \rightarrow \mathbf{D} - \{0\}$ , en conjugant la dynamique, en normalisant (univalence sur  $\mathbf{D}$ ) et en relevant à  $\mathbf{H}$  on obtient une dynamique  $F' \in S(\beta)$ .

Cette construction que l'on vient de décrire renverse la construction de l'application de retour mais ne colle pas de point fixe. Pour cela il faut prolonger le demi-cylindre  $S'$  en un cylindre  $S$ . On le construit en considérant la bande  $B$  délimitée par  $l_1, l_2, l_3 = ] -i\infty, iC]$  et  $l_4 = l_3 + (\tilde{G}(iC) - iC)$ , voir figure 4.

Dans la construction on a une certaine liberté : on pourrait choisir pour  $l_4$  n'importe quelle image de  $l_3$  par une application univalente proche de  $z \mapsto z + \beta^{-1}$  et qui commute à  $T$ . Ceci permet de fixer la classe de conjugaison analytique de l'application de retour au voisinage du point fixe que l'on va construire.

Maintenant, en recollant  $l_1$  et  $l_2$  comme auparavant, puis  $l_3$  et  $l_4$  par  $z \mapsto z + (\tilde{G}(iC) - iC)$  on montre facilement que l'on obtient une surface de Riemann qui est un cylindre, i.e. biholomorphe à  $\mathbf{C} - \{0\}$ . La translation  $T$

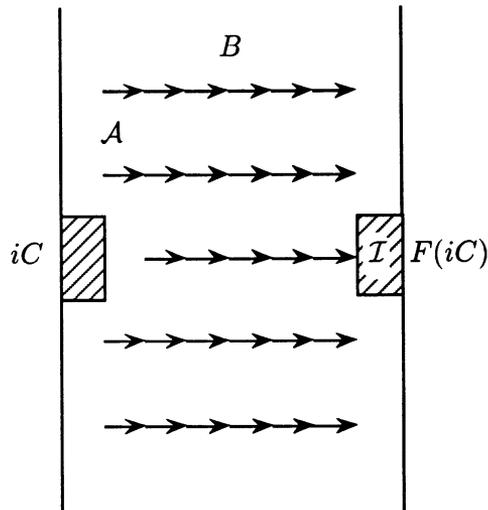


Figure 4

défini sur  $\mathcal{S}$  une dynamique univalente en dehors d'un voisinage  $\mathcal{I}$  autour du point qui correspond à  $iC$ , soit  $f : \mathcal{S} - \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S}$  (figure 5).

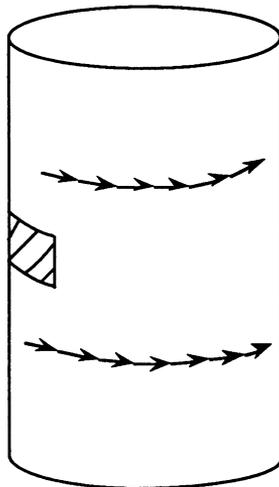


Figure 5

Comme auparavant, on uniformise  $\mathcal{S}$  par  $k : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C} - \{0, A\}$  de façon que  $k(\mathcal{I})$  reste en dehors de  $\mathbb{D}$  et que le point  $A$  soit le plus proche possible

de 0. Le point 0 correspond au bout  $+i\infty$  de  $\mathcal{S}$  et le point  $A$  au bout  $-i\infty$ . Ces conditions sont nécessaires pour que :

1. La dynamique conjuguée  $k \circ f \circ k^{-1}$  soit définie et univalente sur  $\mathbf{D}$ .
2. La non linéarité, qui correspond au point fixe  $A$ , soit collée le plus proche possible de l'origine.

A ce point des estimations sur l'uniformisante  $k$  sont nécessaires. Pour cela on considère l'anneau  $\mathcal{A}$  dessiné sur la figure 4. Une des composantes connexes de son complémentaire contient  $\mathcal{I}$  et l'autre 0 et  $A$ . Par des estimations de longueur extrémale de lacets joignant les deux bords, on montre que son module est minoré par  $\frac{1}{2\pi} \log \beta^{-1} - C$ . Si l'on choisit  $k$  telle que  $k(\mathcal{I}) \cap \mathbf{D} \neq \emptyset$  le problème extrémale de Teichmüller donne l'estimation  $|A| \leq C\alpha$ . Ainsi, lorsqu'on relève l'application  $k \circ f \circ k^{-1}$  à  $\mathbf{H}$ , on obtient  $F \in S(\beta)$  qui a un point fixe de partie imaginaire de l'ordre de  $\frac{1}{2\pi} \log \beta^{-1} - C$ . Ceci est, à une constante universelle près, la hauteur optimale à laquelle on pouvait espérer coller le point fixe. En effet, on a vu dans la partie directe que l'on pouvait toujours prendre  $t(\beta) = \frac{1}{2\pi} \log \beta^{-1} + C_0$ .

Remarquer que les estimations obtenues pour l'uniformisante ne sont pas surprenantes : ce sont celles que l'on obtiendrait si on était parti de  $G(z) = z + \alpha$ , dans ce cas on a des formules explicites pour  $k$ .

D'autre part on a complété la première construction, et  $G$  est une application de retour de  $F$  on obtient ainsi :

**Proposition.** Soit  $0 < \alpha < 1$ ,  $a \in \mathbf{N}^*$ ,  $\beta = \frac{1}{a+\alpha}$ , et  $G \in S(\alpha)$ . Il existe  $F \in S(\beta)$  telle que :

1.  $F$  a un point fixe  $z_0 \in \mathbf{H}$  avec  $\text{Im } z_0 \geq \frac{1}{2\pi} \log \beta^{-1} - C$ .
2. Si  $G$  a une orbite périodique de nombre de rotation  $p/q$ , i.e.  $G^q(z) = z + p$  avec  $q \geq 1$  et  $p \in \mathbf{Z}$ , avec

$$\text{Min}_{1 \leq i \leq q} \text{Im } G^i(z) \geq C_0,$$

alors  $F$  a une orbite périodique de nombre de rotation  $\frac{1}{a+p/q}$  et

$$\text{Min}_{1 \leq j \leq aq+p} \text{Im } F^j(z') \geq \beta \text{Min}_{1 \leq i \leq q} \text{Im } G^i(z) + \frac{1}{2\pi} \log \beta^{-1} - C_0.$$

#### 4.2.b. La récurrence et le passage à la limite.

Comme dans la partie directe, il ne reste qu'à faire une récurrence. A partir de  $0 < \alpha < 1$  on a défini la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ . On part d'un ordre  $n \geq 0$  et on pose  $F_{n,n+1} = z + \alpha_{n+1} \in S(\alpha_{n+1})$ . A cette translation on lui colle un point fixe de la façon décrite en 4.2.a pour aboutir à  $F_{n,n} \in S(\alpha_n)$ , et par récurrence on obtient  $F_{n,l} \in S(\alpha_l)$  à partir de  $F_{n,l+1}$ . En faisant une récurrence la proposition de 4.2.a donne :

**Proposition.** *Soit  $m \geq 0$ . Si  $0 \leq n \leq m$  et  $p_n/q_n$  est une bonne réduite (cf. annexe arithmétique), alors  $F_{m,0}$  a une orbite périodique de nombre de rotation  $p_n/q_n$  telle que*

$$\min_{1 \leq i \leq q_n} \operatorname{Im} F_{m,0}^i(z_n) \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^n \beta_{i-1} \log \alpha_i^{-1} - C.$$

On doit faire l'hypothèse que  $p_n/q_n$  est une bonne réduite pour récupérer le point fixe de  $F_{m,n} \in S(\alpha_n)$  en une orbite  $p_n/q_n$  de  $F_{m,0}$ . On rappelle que  $\alpha \notin \mathcal{B}$  si et seulement si l'ensemble des bonnes réduites est infini.

Finalement, on extrait une sous-suite convergente de  $(F_{n,0})_{n \geq 0} \subset S(\alpha)$ . La proposition montre que, lorsque  $\alpha \notin \mathcal{B}$ , la limite  $F$  à une suite d'orbites périodiques qui accumule 0, et est non linéarisable.

#### 4.3. Modifications pour les difféomorphismes du cercle.

Ici les démonstrations sont plus techniques et on ne va donner que quelques indications sur les nouveautés par rapport aux germes. Pour les difféomorphismes du cercle on travaille dans les espaces  $S(\alpha, \Delta)$  et on aura intérêt à penser à la droite réelle "près de  $+\infty$ " par analogie avec le cas des germes. En effet, dans les constructions, lorsque  $\Delta$  sera grand, tout se passera comme si on travaillait dans les espaces  $S(\alpha)$ . Il faudra simplement les réaliser de façon symétrique par rapport à l'axe réel.

Pour les difféomorphismes analytiques du cercle, la stabilité de  $S^1$  est encore équivalente à la linéarisabilité. Les démonstrations de linéarisabilité sont du même style que celle du théorème de Siegel et Bruno, du moins pour ce qui concerne le théorème local. On laisse au lecteur deviner la construction

de l'application de retour. Pour le théorème semi-local et global on est heurté à un nouveau problème : Que faire lorsque  $\Delta$  est petit ?

En effet, dans ce cas défavorable on n'a plus d'estimations sur les parties imaginaires des correspondances orbitales de  $F$  et de son application de retour. Dans le cas des germes holomorphes on "coupait" à une hauteur de l'ordre de  $\frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} + C_0$  lorsque  $F \in S(\alpha)$ . Pour les difféomorphismes du cercle on ne peut plus procéder de la même façon si  $\Delta \leq \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} + C_0$ . Par contre, si  $\Delta \geq \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} + C_0$  on obtient une application de retour  $G \in S(\beta, \Delta')$  avec  $\Delta' = \alpha^{-1}(\Delta - \log \alpha^{-1})$  et  $\alpha^{-1} = a + \beta$ ,  $a \in \mathbf{N}^*$ ,  $0 < \beta < 1$ . Si on peut procéder indéfiniment ainsi et obtenir une suite infinie  $(F_n)_{n \geq 0}$ , la même démonstration de stabilité que pour le théorème de Siegel s'applique car on contrôle les parties imaginaires des correspondances orbitales. Les conditions diophantiennes de linéarisabilité sont celles pour lesquelles on est heurté à la difficulté précédente un nombre fini de fois. Après ce nombre fini d'écueils on peut poursuivre la preuve habituelle.

Pour traiter les cas défavorables, Yoccoz démontre un lemme de Denjoy complexe qu'il utilise pour la construction de l'application de retour et pour obtenir une grande largeur de bande  $\Delta$ . Ainsi, dans les cas défavorables à partir de  $F_n \in S(\alpha_n, \Delta_n)$ ,  $\Delta_n < \frac{1}{2\pi} \log \alpha_n^{-1}$ , il obtient l'application de retour  $F_{n+1} \in S(\alpha_{n+1}, \Delta_{n+1})$ , avec  $\Delta_{n+1} = C e^{2\pi \Delta_n}$ . Ces formules expliquent la définition de la condition  $\mathcal{H}(\Delta)$ .

Tout ceci n'est possible que si  $F \in S(\alpha, \Delta)$  et  $\Delta$  est supérieur à une constante universelle. La première étape consiste à démontrer que l'on peut se ramener à ce cas là et partir toujours avec  $\Delta_0 \geq 1000$ . Il montre :

**Proposition.** *Soit  $f \in S(\alpha, 0)$  et  $\Delta > 0$ . Il existe  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PGL(2, \mathbf{Z})$  et une uniformisation réelle analytique  $h : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}/(f^a \circ T^b)$ , (quotient de  $\mathbf{R}$  par l'action de  $f^a \circ T^b$ ) telle que  $h^{-1} \circ (f^c \circ T^d) \circ h \in S(\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}, \Delta)$ .*

Le théorème semi-local et cette proposition montrent le théorème global. La démonstration de la proposition comporte deux étapes :

-On montre d'abord l'existence d'un  $h$  telle que  $h^{-1} \circ (f^c \circ T^d) \circ h$  soit  $C^2$  proche d'une translation sur  $\mathbf{R}$ .

-Ensuite on utilise le lemme de Denjoy complexe, dont nous épargnons

l'énoncé, qui permet de contrôler dans le plan complexe, les orbites des difféomorphismes, et obtenir de cette façon une grande largeur de bande  $\Delta > 0$ .

Dans la partie de constructions de difféomorphismes non linéarisables on a aussi à distinguer divers cas. Cependant la géométrie est toujours la même que pour les germes holomorphes : on colle des points fixes avec une surface de Riemann  $\mathcal{S}$  cylindrique.

## 5. Autres applications et extensions de ces techniques.

### 5.1. Une obstruction à la linéarisabilité : l'accumulation par des orbites périodiques.

Si  $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$ ,  $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ , est linéarisable il n'existe aucune orbite périodique, distincte de 0, dans un voisinage de l'origine. Ceci fournit dans certains cas un critère de non linéarisabilité. Illustrons ceci par un exemple.

Lorsque  $\lambda = e^{2\pi ip/q}$ ,  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $q \geq 1$ ,  $p \wedge q = 1$ , le polynôme quadratique  $P_\lambda$  a en 0 un point fixe d'ordre  $q$ , c'est à dire : une petite perturbation de  $\lambda$  en  $e^{2\pi i\alpha}$  fait naître une orbite périodique, de période  $q$ , au voisinage de 0. Ainsi, pour  $n \geq 1$ , il existe un voisinage  $U(p/q, n)$  de  $p/q$  dans  $\mathbf{R}$  tel que pour  $\alpha \in U(p/q, n)$ ,  $P_\lambda$  ait une orbite périodique, de période  $q$ , contenue dans  $\mathbf{D}_{1/n}$ . L'ensemble  $U_n = \bigcap_{p/q \in \mathbf{Q}} U(p/q, n)$  est un ouvert dense. Par le théorème de Baire on obtient un  $G_\delta$  dense,  $U = \left( \bigcap_{n \geq 1} U_n \right) \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$ , de valeurs  $\alpha$  telles que le polynôme quadratique  $P_\lambda$ ,  $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ , a une suite d'orbites périodiques qui convergent vers 0 et n'est pas linéarisable.

Ceci laisse penser que cette obstruction topologique est peut-être la seule qui empêche la linéarisabilité, c'est à dire que tout germe non linéarisable aurait une suite d'orbites périodiques qui accumulent 0. Ceci a été conjecturé par P. Sad ([Sa]) et par V. Arnold ([Ar2]) pour les difféomorphismes du cercle. J.-C. Yoccoz a dirigé ma thèse sur ce sujet. On a :

**Théorème (R. P.-M. [PM1]).**

1. Si  $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$  satisfait  $\sum_{n \geq 1} \frac{\log \log q_{n+1}}{q_n} < +\infty$  et  $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$

est non linéarisable, alors  $f$  a une suite d'orbites périodiques qui accumulent 0 dont les périodes sont une sous-suite  $(q_{n_k})_{k \geq 0}$  telle que

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\log q_{n_k+1}}{q_{n_k}} = +\infty.$$

2. Si  $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$  satisfait  $\sum_{n \geq 1} \frac{\log \log q_{n+1}}{q_n} = +\infty$  il existe  $f \in S_\alpha$  telle

que toute orbite positive  $(f^n(z))_{n \geq 0}$  contenue dans  $\mathbf{D}$  accumule 0. Donc  $f$  est non linéarisable et n'a pas d'orbites périodiques dans  $\mathbf{D} - \{0\}$ .

Dans [PM1] on a construit aussi des difféomorphismes du cercle non linéarisables et sans orbites périodiques. La condition diophantienne sur le nombre de rotation sous laquelle elle est faite est assez artificielle. Cependant, il se trouve qu'on peut récupérer de tels difféomorphismes du cercle à partir des germes holomorphes :

**Théorème (R. P.-M. [PM1], complété récemment).** Si  $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$  satisfait

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\log \log q_{n+1}}{q_n} = +\infty,$$

pour tout  $\Delta > 0$ , il existe un difféomorphisme analytique du cercle  $f$  dont un relevé est dans  $S(\alpha, \Delta)$  tel que toute orbite positive  $(f^n(z))_{n \geq 0}$  restant dans  $U = \mathbf{D}_{e^{2\pi\Delta}} - \overline{\mathbf{D}_{e^{-2\pi\Delta}}}$  accumule  $S^1$ . Donc  $f$  est non linéarisable et sans orbites périodiques dans  $U$ .

La démonstration du point 1 du théorème pour les germes holomorphes suit les mêmes lignes que la démonstration de Yoccoz du théorème de Siegel et Bruno. Il faut faire deux remarques en plus. Premièrement, à un point fixe de  $F_n \in S(\alpha_n)$  (cf. 4.1.b) correspond une orbite périodique de  $F$  de nombre de rotation  $p_n/q_n$  dont on sait minorer la partie imaginaire des points. Et en second lieu, si  $F_n \in S(\alpha_n)$  n'a pas de points fixes la hauteur des fortes non

linéarités est plus basse. On obtient l'estimation fondamentale (\*) de 5.1.a dès que

$$t(\alpha_n) = \frac{1}{2\pi} \log^+ \log \alpha_n^{-1} + C_0.$$

Le point 2 du théorème correspond à la construction de germes non linéarisables lorsque  $\alpha \notin \mathcal{B}$ . Cependant, il faut changer complètement la géométrie de la non linéarité collée. On ne cherche plus à coller des points fixes, la non linéarité voulue est synthétisée par la surface  $\mathcal{S}$  de la figure 6.

On modifie le cylindre de Yoccoz (figure 5) en faisant une coupure et collant un infini de plans d'un côté et d'autre. De façon très approximative, on peut dire que l'on a éclaté le point fixe  $A$  en un point de ramification infini.

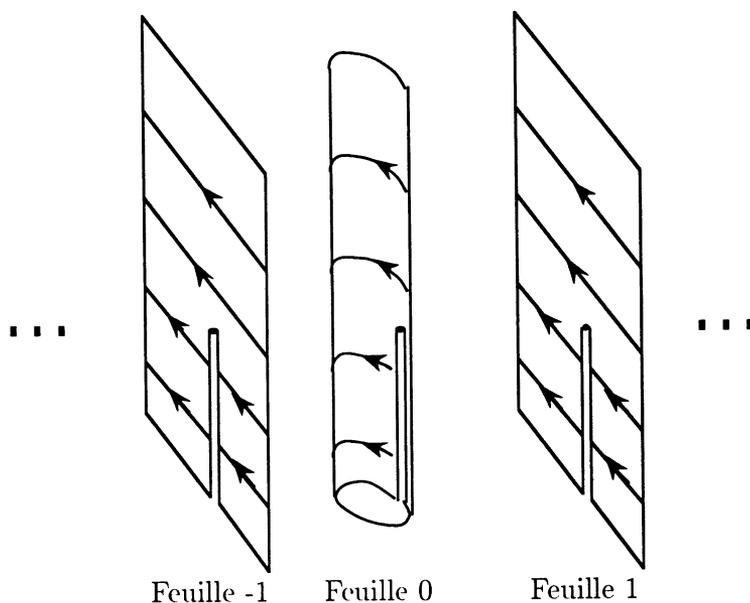


Figure 6

## 5.2. Symétries des germes non linéarisables.

Considérons le groupe de symétrie d'un germe de difféomorphisme holomorphe  $f$ ,

$$\text{Cent}(f) = \{g(z) = \mu z + \mathcal{O}(z^2); \mu \in \mathbb{C}^*, g \circ f = f \circ g\}.$$

Noter que le centralisateur de  $f$ ,  $\text{Cent}(f)$ , contient le sous-groupe formé par les itérés de  $f$  et noté  $f^{\mathbf{Z}}$ . Lorsque  $Df(0) \in \mathbf{C}^*$  n'est pas racine de l'unité,  $\text{Cent}(f)$  se plonge dans  $(\mathbf{C}^*, \cdot)$  par le morphisme injectif,

$$\begin{aligned} \text{Cent}(f) &\longrightarrow \mathbf{C}^* \\ g &\longmapsto \mu = Dg(0) \end{aligned}$$

L'étude du groupe de symétries de  $f$  généralise le problème de Siegel comme le montre la proposition suivante.

**Proposition.** *Si  $Df(0) \in \mathbf{C}^*$  n'est pas racine de l'unité,  $f$  est linéarisable si et seulement si*

$$\text{Cent}(f) = \mathbf{C}^*.$$

Dans le cas non linéarisable on a facilement :

**Proposition.** *Considérons  $f$  non linéarisable,  $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$ ,  $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ . Alors  $f^{\mathbf{Z}} \subset \text{Cent}(f) \subset S^1$  et  $\text{Cent}(f)$  est*

*-dense dans  $S^1$ ,*

*- $F_\sigma$  donc borélien dans  $S^1$ ,*

*-de mesure de Haar nulle dans  $(S^1, \cdot)$ .*

*-Si  $g \in \text{Cent}(f)$  et  $Dg(0)$  n'est pas racine de l'unité alors  $g$  est non linéarisable.*

*-Si  $g \in \text{Cent}(f)$  et  $Dg(0)$  est racine  $q^{\text{eme}}$  de l'unité alors  $g^q = \text{id}$ .*

Il se pose naturellement le problème de la structure de  $\text{Cent}(f)$  pour  $f$  non linéarisable : Quels sont les sous-groupes de  $S^1$  de la forme  $\text{Cent}(f)$  ?

J. Moser a donné certaines restrictions :

**Théorème (J. Moser [Mo]).** *Soit  $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$  et  $g \in \text{Cent}(f)$  avec  $Dg(0) = e^{2\pi i\beta}$ . Supposons qu'il existe  $\gamma, \tau > 0$  tels que pour  $q \geq 1$  et  $p \in \mathbf{Z}$ ,*

$$\text{Max}(|q\alpha - p|, |q\beta - p|) \geq \frac{\gamma}{q^\tau},$$

*alors  $f$  est linéarisable.*

M. Herman, qui a construit des centralisateurs non dénombrables pour des difféomorphismes du cercle non linéarisables en classe différentiable ([He2], voir aussi [Y4] pour d'autres résultats en classe différentiable), a demandé si de tels objets existaient en classe analytique. Ceci montrerait que des conditions diophantiennes sont nécessaires dans le théorème de Moser et donnerait des exemples de germes  $f$  tels que  $f^{\mathbf{Z}}$  ne soit pas d'indice fini dans  $\text{Cent}(f)$ . Il se trouve que la géométrie des non linéarités collées en 5.1 permet la construction de tels exemples :

**Théorème (R. P.-M. [PM2]).** *Il existe un ensemble de Cantor explicite  $K \subset \mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  et une famille commutative  $(f_t)_{t \in K}$ , tels que  $f_t \in S(t)$  et si  $t \in K \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q})/\mathbf{Z}$ ,  $f_t$  est non linéarisable.*

On obtient  $K \cap (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  dense dans  $K$ . Le Cantor  $K$  engendre un sous-groupe  $G \subset \mathbf{T}$  non dénombrable et pour  $t \in K$ ,  $G \subset \text{Cent}(f)$ . Les constructions sont assez souples pour imposer à tous les  $(f_t)_{t \in K}$  d'avoir une même suite d'orbites périodiques qui accumule 0 ou de n'avoir aucune orbite périodique distincte de 0 lorsque  $t \in K \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q})/\mathbf{Z}$ .

La construction se réalise en partant du flot des rotations et en collant des non linéarités du "type" de celles de la figure 6. A chaque collage on perd des intervalles du flot et en passant à la limite on ne garde que le compact  $K$ . Les recours utilisés pour éviter les problèmes liés au collage simultané des non linéarités à plusieurs éléments du flot, font que les nombres de  $K \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q})/\mathbf{Z}$  sont "très Liouville".

## 6. Equivalence de certains problèmes.

Les constructions de ce dernier paragraphe datent des derniers mois de 1991. Bien que non reliés directement aux techniques géométriques précédentes, on a cru bon de les mentionner puisqu'ils unifient trois problèmes de petits diviseurs. Les résultats mentionnés auparavant se transportent des uns aux autres.

### 6.1. Comment obtenir des difféomorphismes du cercle à partir de germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbf{C}, 0)$ .

Lorsque  $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$  est linéarisable ou  $\alpha \in \mathbf{Q}$  on voit facilement qu'au voisinage de 0 on a des compacts connexes  $K$  distincts de  $\{0\}$

tels que  $f(K) = K$ . Il se trouve que ceci est général :

**Théorème (R. P.-M.).** *Soit  $f \in S(\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$  et  $0 \leq r \leq 1$ . Il existe un compact connexe plein  $0 \in K \subset \overline{\mathbf{D}}_r$  tel que  $K \cap \partial\mathbf{D}_r \neq \emptyset$  et*

$$f(K) = K.$$

Le cas le plus intéressant se présente lorsque  $f$  est non linéarisable, dans ce cas la topologie de  $K$  peut être compliquée. G. Birkhoff ([Bi]) a démontré l'existence d'un tel  $K$  qui vérifie uniquement  $f(K) \subset K$ . Le théorème se démontre pour  $f$  linéarisable (ou  $\alpha \in \mathbf{Q}$ ) et puis par passage à la limite en considérant des perturbations de  $f$ .

Une fois ceci établi, on remarque que, si  $r \neq 0$ ,  $\mathbf{D} - K$  est un anneau topologiquement biholomorphe à  $\mathbf{D}_R - \overline{\mathbf{D}}$  (figure 7), soit  $h : \mathbf{D}_R - \overline{\mathbf{D}} \rightarrow \mathbf{D} - K$  une représentation conforme.

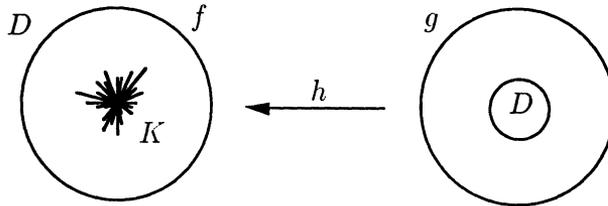


Figure 7

On conjugue  $f$  par  $h$  et on obtient  $g = h^{-1} \circ f \circ h$  qui est un homéomorphisme d'un voisinage de  $S^1$  dans  $\mathbf{D}_R - \overline{\mathbf{D}}$ . On voit facilement que  $g$  s'étend continument à  $S^1$ ,  $g(S^1) = S^1$ , puis par le principe de réflexion de Schwarz,  $g$  définit un difféomorphisme analytique de  $S^1$ . On peut montrer que  $\rho(g) = \alpha = \rho(f)$ . Il est clair que si  $g$  est linéarisable alors  $f$  l'est aussi, et si  $f$  n'a pas d'orbites périodiques distinctes de 0,  $g$  n'en a pas. Aussi, si l'on choisit  $r > 0$  très petit le difféomorphisme  $g$  obtenu s'étend de façon univalente dans un anneau autour de  $S^1$  de module aussi grand que l'on veut.

On peut ainsi transporter les résultats relatifs aux germes aux difféomorphismes du cercle et inversement. Plus précisément, les résultats directs

pour les difféomorphismes du cercle donnent les résultats correspondant pour les germes holomorphes. Exemple : le théorème local de Yoccoz pour les difféomorphismes du cercle implique le théorème de Siegel et de Bruno. Les contre-exemples construits pour les germes holomorphes en donnent d'autres pour les difféomorphismes du cercle. Exemple : si  $f$  est non linéarisable sans orbites périodiques distinctes de 0, alors  $g$  l'est aussi. On obtient que les problèmes locaux pour les difféomorphismes du cercle sont équivalents à ceux des germes holomorphes. Aussi on peut lire les théorèmes globaux pour les difféomorphismes du cercle dans le cadre des germes holomorphes ...

## 6.2. Comment obtenir des singularités de feuilletages holomorphes à partir de germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbf{C}, 0)$ .

Le procédé inverse est classique. Pour  $\alpha > 0$  on considère le feuilletage d'un voisinage de  $(\mathbf{C}^2, 0)$ , singulier à l'origine, défini par la forme

$$\omega = x(1 + \dots)dy + \alpha y(1 + \dots)dx,$$

où les points de suspensions désignent des termes d'ordre supérieur. L'axe pointé  $\{y = 0\} - \{0\}$  est une feuille. Pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, le lacet  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \{y = 0\}$ ,  $\gamma(t) = (\varepsilon e^{2\pi i t}, 0)$ , définit une holonomie (application de retour) sur un petit disque transverse à  $\{y = 0\}$  en  $(\varepsilon, 0)$ . On obtient ainsi une classe de conjugaison d'un germe holomorphe  $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$ , et on définit une application  $H_\alpha$  des classes de conjugaison par des difféomorphismes holomorphes de  $(\mathbf{C}^2, 0)$  des feuilletages de ce type dans les classes de conjugaison des germes de difféomorphismes de  $(\mathbf{C}, 0)$ .

J.-F. Mattei et R. Moussu ont montré ([M-M]) que  $H_\alpha$  était toujours injective. J. Martinet et J.-P. Ramis ont montré la surjectivité lorsque  $\alpha \in \mathbf{Q}$  et les résultats de linéarisation de A. Bruno ([Br]) donnent aussi ceci lorsque  $\alpha \in \mathcal{B}$  (il y a une seule classe de conjugaison). En fait on a :

**Théorème (J.-C. Yoccoz, R. P.-M. [Y-P-M]).**  $H_\alpha$  est surjective.

C'est à dire que l'on réalise tout germe  $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$  comme une holonomie du type précédent. La démonstration se situe au niveau de  $\mathbf{C}^2$ , revêtement universel de  $\mathbf{C}^2 - (\{x = 0\} \cup \{y = 0\})$  donné par  $E_2 : (z_1, z_2) \mapsto (e^{2\pi i z_1}, e^{2\pi i z_2})$ . On considère le feuilletage linéaire de  $\mathbf{C}^2$  donné

par  $z_2 + \alpha z_1 = \text{constante}$ . En quotientant  $\mathbf{C}^2$  par l'action de  $T_1 : (z_1, z_2) \mapsto (z_1 + 1, z_2)$  et  $T_2 : (z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_2 + 1)$ , l'image par  $E_2$  est le feuilletage linéaire donné par  $\omega = xdy + \alpha ydx$ , d'holonomie linéarisable.

Soit  $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \mathcal{O}(z^2) \in S_\alpha$  le germe que l'on veut réaliser et  $F \in S(\alpha)$  son relevé à  $\mathbf{H}$ ,  $F(z) = z + \alpha + \phi(z)$ . On réalise ce germe comme holonomie du feuilletage, induit par le feuilletage linéaire, sur la variété complexe  $M$  obtenue en recollant un domaine fondamental pour l'action de  $F_1 : (z_1, z_2) \mapsto (z_1 + 1, z_2 + \phi(z_2 + \alpha z_1))$  et  $F_2 : (z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_2 + 1)$ . On ne considère ces applications que dans une zone  $\{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; \text{Im}(z_2 + \alpha z_1) \geq C_0\} \subset \mathbf{C}^2$  où  $F_1$  et  $F_2$  sont proches de  $T_1$  et  $T_2$ . Tout le problème consiste à montrer que la variété abstraite  $M$  est encore biholomorphe à un voisinage de l'origine dans  $\mathbf{C}^2$  en retirant les axes coordonnés.

Ceci est vrai pour la structure  $C^\infty$  : on a une uniformisation  $C^\infty$  de ce type car on peut conjuguer  $F_1$  et  $F_2$  à  $T_1$  et  $T_2$  de façon  $C^\infty$ . Le défaut d'holomorphic se trouve dans une seule des coordonnées de l'uniformisation et est petit (on a un  $\bar{\partial}$  petit). Si on réalise le collage dans un domaine fondamental bien choisi de façon que  $M$  soit une variété de Stein, on peut appliquer les techniques de L. Hörmander ([Ho]) pour résoudre l'équation  $\bar{\partial}$  avec des estimées. On peut ainsi rectifier l'uniformisation  $C^\infty$  pour qu'elle devienne holomorphe. On veut conserver un feuilletage holomorphe ce qui conduit de nouveau à résoudre une deuxième équation  $\bar{\partial}$  pour la forme qui le définit.

## 7. Annexe arithmétique.

### 7.1. Développement en fraction continue usuel.

On rappelle tout d'abord le développement en fraction continue usuel (voir [La]). Si  $x$  est un nombre réel on note  $[x]$  sa partie entière et  $\{x\} = x - [x]$  sa partie décimale.

Soit  $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ . On pose  $a_0 = [\alpha] \in \mathbf{Z}$ ,  $\alpha_0 = \{\alpha\}$ , et pour  $n \geq 1$ ,

$$a_n = [\alpha_{n-1}^{-1}],$$

$$\alpha_n = \{\alpha_{n-1}^{-1}\}.$$

Puis

$$q_{-2} = p_{-1} = 1,$$

$$q_{-1} = p_{-2} = 0,$$

et pour  $n \geq 0$ ,

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},$$

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}.$$

La suite de rationnels  $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$  est constituée des réduites de  $\alpha$ . La suite des dénominateurs croit d'autant plus vite que  $\alpha$  est bien approché par des nombres rationnels. Ensuite, on définit la suite  $(\beta_n)_{n \geq -1}$  par  $\beta_{-1} = 1$  et pour  $n \geq 0$ ,

$$\beta_n = \prod_{i=0}^n \alpha_i.$$

La suite  $(\beta_n)_{n \geq 0}$  décroît toujours au moins de façon géométrique. On vérifie sans peine, pour  $n \geq -2$ ,

$$\beta_n = (-1)^n (q_n \alpha - p_n),$$

$$q_{n+1} \beta_n + q_n \beta_{n+1} = 1.$$

J.-C. Yoccoz introduit et utilise dans [Y1] et [Y2] une variante de ce développement classique. On pose  $\|x\| = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |x - p|$ , et  $\alpha_0 = \|\alpha\|$  et pour  $n \geq 1$ ,

$$\alpha_n = \|\alpha_{n-1}^{-1}\|.$$

Les  $\beta_n$  sont définis de la même façon à partir des  $\alpha_n$ . Cette variante a l'avantage qu'on a  $0 < \alpha_n < 1/2$  ce qui facilite les constructions géométriques. Si tous les  $\alpha_n$  usuels vérifient  $0 < \alpha_n < 1/2$ , les deux développements en fraction continue coïncident. Pour alléger l'exposé, on ne considère que le développement usuel. Ceci n'a de relevance que pour la définition des conditions arithmétiques pour les difféomorphismes du cercle (où l'on pensera à

prendre les  $\alpha_n$  modifiés), et pour les constantes explicites dans les énoncés des théorèmes des difféomorphismes du cercle.

On définit la fonction

$$\Phi(\alpha) = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_{i-1} \log \alpha_i^{-1}.$$

Et l'application,

$$\tau_\alpha(x) = \begin{cases} e^x & \text{pour } 0 \leq x \leq \log \alpha^{-1} \\ \alpha^{-1}(x - \log \alpha^{-1} + 1) & \text{pour } x \geq \log \alpha^{-1} \end{cases}.$$

## 7.2. Les conditions arithmétiques.

### 7.2.a. Pour les germes.

Il est facile de voir que la condition

$$\sum \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < +\infty,$$

est équivalente à

$$\Phi(\alpha) < +\infty.$$

On note  $\mathcal{B}$  les nombres vérifiant ces deux conditions. Cet ensemble est un  $F_\sigma$  de  $\mathbf{R}$ .

Pour  $C_0 > 0$  et  $0 \leq l \leq n$  on pose

$$B_{n,l} = \beta_{l-1}^{-1} \left[ \sum_{j=l}^n \beta_{j-1} \log \alpha_j^{-1} - C_0 \sum_{j=l}^n \beta_{j-1} \right].$$

On dit que  $p_n/q_n$  est une bonne réduite si pour  $0 \leq l \leq n$  on a

$$B_{n,l} \geq \log \alpha_l^{-1}.$$

Ceci signifie que  $p_n/q_n$  approche bien  $\alpha$  par rapport aux réduites précédentes. On montre sans peine que  $\alpha \notin \mathcal{B}$  si et seulement si  $\alpha$  possède une infinité de bonnes réduites.

**7.2.b. Pour les difféomorphismes du cercle.**

Soit  $\Delta > 0$ . On définit la suite  $(\Delta_n(\alpha))_{n \geq 0}$  par

$$\begin{aligned}\Delta_0(\alpha) &= 2\pi\Delta, \\ \Delta_{n+1} &= \tau_{\alpha_n}(\Delta_n(\alpha)).\end{aligned}$$

L'ensemble  $\mathcal{H}(\Delta)$  est formé par les nombres  $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$  pour lesquels à partir d'un certain rang on a  $\Delta_n(\alpha) \geq \log \alpha_n^{-1}$ . Cet ensemble est un  $F_\sigma$ , et on peut vérifier que

$$\bigcup_{\Delta > 0} \mathcal{H}(\Delta) = \mathcal{B}.$$

Finalement  $\mathcal{H}$  est formé des nombres  $\alpha$  tels que pour tout  $n \geq 0$ , on ait  $\alpha_n \in \mathcal{H}(\Delta)$ . Cet ensemble ne dépend plus de la constante  $\Delta > 0$  choisie et est invariant sous l'action de  $SL(2, \mathbf{Z})$ , i.e. il définit une condition diophantienne.  $\mathcal{H}$  est un  $F_{\sigma, \delta}$ , i.e. une intersection dénombrable de  $F_\sigma$ .

**BIBLIOGRAPHIE**

- [Ar1] V.I. ARNOLD, *Small denominators I: on the mapping of a circle into itself*, Ivestijia Akad. Nauk., serie Math, **25**, I (1961) p. 21-86 = Translations Amer. Math. Soc., 2<sup>nd</sup> series, **46**, p. 213-284.
- [Ar2] V.I. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Editions MIR, (1980), p.120.
- [Bi] G. D. BIRKHOFF, *Surface transformation and their dynamical applications*, Oeuvres complètes t.II p. 111-129.
- [Bo] J.-B. BOST, *Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens (d'après Kolmogorov, Arnold, Moser, Rüssmann, Zehnder, Herman, Pöschel, ...)*, Sémin. Bourbaki 639, 1984-85; Astérisque 133-134 (1985), p. 113-157.

- [Bot] L. E. BÖTKHER, *Les principales lois de convergence des itérés et leurs applications à l'analyse*, Izv. Kazan. Fiz-Mat. **14** (1904) (en russe).
- [Br] A.D. BRUNO, *Analytical form of differential equations*, Transactions Moscow Math. Soc. **25** (1971), p. 131-288; **26** (1972), p. 199-239.
- [Ca] C. CAMACHO, *On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields*, Astérisque 59-60 (1978), p. 83-84.
- [Cr1] H. CREMER, *Über die Iteration rationaler Funktionen*, Jahresber. Deutsch Math. Verein **33** (1925), p. 185-210.
- [Cr2] H. CREMER, *Zum Zentrumproblem*, Math. Ann. **98** (1928), p. 151-153.
- [Cr3] H. CREMER, *Über das Zentrumproblem (Mit besonderer Berücksichtigung der Lückenreihen)*, Ber. Math. Phys. Klasse der Säch. Akad. Wiss. Leipzig **82** (1930), p.243-250.
- [Cr4] H. CREMER, *Über die Schrödersche Funktionalgleichung und das Schwarzsche Eckenabbildungsproblem*, *ibid.* **84** (1932), p.291-324.
- [Cr5] H. CREMER, *Über die Häufigkeit der Nichtzentren*, Math. Ann. **115** (1938), p. 573-580.
- [Ch] T. M. CHERRY, *A singular case of iteration of an analytic functions : a contribution to the small divisor problem*, Nonlinear problems of engineering, ed. W. F. Ames, Academic Press, New York (1964), p. 29-50.
- [Do] A. DOUADY, *Disques de Siegel et anneaux de Herman*, Sémin. Bourbaki n° 677,1986-87.
- [Ec] J. ECALLE, *Les fonctions résurgentes et leurs applications*, t. I, II, III, Publications mathématiques d'Orsay 81-05, 81-06, 85-05.
- [He1] M. R. HERMAN, *Recent results and some open questions on Siegel's linéarisation theorem of germs of complex analytic diffeomorphisms of  $\mathbf{C}^n$  near a fixed point*, Proceedings VIII<sup>th</sup> Int. Conf. Math. Phys., World Scientific Publishers, Singapour (1987).

- [He2] M. R. HERMAN, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. Math. I.H.E.S. **49** (1979).
- [Ju] G. JULIA, *Oeuvres*, vol. I, Gauthiers-Villars, Paris (1969), p.231-232.
- [Gh] E. GHYS, *Transformations holomorphes au voisinage d'une courbe de Jordan*, C. R. Acad. Sc. t. 298 série I **16** (1984), p. 385-388.
- [Ko] G. KOENIGS, *Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles*, Ann. Sc. E.N.S. (3eme série) **1** (1884) supplém. p. 1-14.
- [Ho] L. HÖRMANDER, *An introduction to complex analysis in several variables*, Van Nostrand (1966).
- [La] S. LANG, *Introduction to diophantine approximations*, Addison-Wesley series in mathematics (1966).
- [Le] L. LEAU, *Etude sur les équations fonctionnelles à une ou plusieurs variables*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **11** (1897).
- [Ma] B. MALGRANGE, *Travaux d'Ecalte et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques*, Sémin. Bourbaki, exp 582 (1981), Astérisque 92-93 (1982), p. 59-73.
- [Mo] J. MOSER, *On commuting circle mappings and simultaneous Diophantine approximations.*, Math. Zeitschrift **205** (1990), p. 105-121.
- [M-M] J.-F. MATTEI, R. MOUSSU, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sc. E.N.S. **13** (1980), p. 469-523.
- [M-R] J. MARTINET, J.-P. RAMIS, *Problème de modules pour les équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Publ. Math.IHES, **55** (1982), p. 63-164
- [Pf] G. A. PFEIFFER, *On the conformal mapping of curvilinear angles. The functional equation  $\phi[f(x)] = a_1\phi(x)$* , Math. Ann. 1917
- [PM1] R. PÉREZ MARCO, *Sur la dynamique des germes de difféomorphismes holomorphes de  $(\mathbb{C}, 0)$  et des difféomorphismes analytiques du cercle*, Thèse Université de Paris-Sud, décembre 1990.

- [PM2] R. PÉREZ-MARCO, *Centralizers I : Uncountable centralizers for non linearizable holomorphic germs of  $(\mathbf{C}, 0)$* , préprint IHES (1991).
- [Ru] H. RÜSSMANN, *Kleine Nener II : Bemerkungen zur Newtonschen Methode*, Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. (1972), p. 1-10.
- [Sa] P. SAD, *A note on non linearizable analytic functions*, Bol.Soc. Bras. Mat. (1981).
- [Si] C.L. SIEGEL, *Iterations of analytic functions*, Ann. Math. **43** (1942), p. 807-812.
- [Vo] S. M. VORONIN, *Classification analytique des germes d'applications conformes  $(\mathbf{C}, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$  tangentes à l'identité*, Functional Analysis 15/1 (1981), p.1-17.
- [Y1] J.-C. YOCCOZ, *Théorème de Siegel, polynômes quadratiques et nombres de Brjuno*, préprint (1987); à paraître dans Astérisque.
- [Y2] J.-C. YOCCOZ, *Conjugaison des difféomorphismes analytiques du cercle*, A paraître dans Acta Mathematica.
- [Y3] J.-C. YOCCOZ, *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne*, Ann. Sc. E.N.S. 4eme série t. 17 (1984), p. 333-359.
- [Y4] J.-C. YOCCOZ, *Centralisateurs et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle*, Thèse d'État Université de Paris-Sud, juin 1985.
- [Y5] J.-C. YOCCOZ, *Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de  $(\mathbf{C}, 0)$* , C. R. Acad. Sci. Paris **306**, p. 55-58.
- [Y-P-M] J.-C. YOCCOZ, R. PÉREZ-MARCO, *Germes de feuilletages holomorphes à holonomie prescrite*, preprint Université de Paris-Sud 92-24, à paraître dans Astérisque.

Ricardo PÉREZ-MARCO  
Université Paris-Sud  
Math. 425 - U.R.A. 1169 du C.N.R.S.  
F-91405 ORSAY CEDEX