

Astérisque

VALÉRIE BERTHÉ

**De nouvelles preuves « automatiques » de transcendance
pour la fonction zêta de Carlitz**

Astérisque, tome 209 (1992), p. 159-168

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1992__209__159_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1992__209__159_0)

© Société mathématique de France, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

De nouvelles preuves “automatiques” de transcendance pour la fonction zêta de Carlitz

Valérie BERTHÉ

1 Introduction

Soit $\mathbf{F}_q$ le corps à q éléments, q étant une puissance entière strictement positive de p premier. On note $\mathbf{F}_q[x]$ l’anneau des polynômes à une indéterminée sur $\mathbf{F}_q$ et $\mathbf{F}_q(x)$ le corps des fractions rationnelles en x . Le complété de $\mathbf{F}_q(x)$ pour la valuation $(1/x)$ -adique, définie par $v(E) = -d^\circ E$, est le corps $\mathbf{F}_q((1/x))$ des séries formelles de Laurent, c’est-à-dire

$$\mathbf{F}_q((1/x)) = \{a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 + \frac{a_{-1}}{x} + \dots ; a_n \in \mathbf{F}_q\}.$$

En 1935, Carlitz a défini une fonction ζ , à valeurs dans $\mathbf{F}_q((1/x))$, de la façon suivante :

$$\zeta(m) = \sum_{G \in \mathbf{F}_q[x] \text{ et } G \text{ unitaire}} 1/G^m, \quad m \geq 1.$$

La fonction ζ de Carlitz est l’analogie en caractéristique finie de la fonction ζ de Riemann. Carlitz a ainsi établi dans [4] que, pour s divisible par $(q-1)$, $\zeta(s)/\Pi^s \in \mathbf{F}_q(x)$, avec

$$\Pi = \prod_{j=0}^{+\infty} (1 - \frac{x^{q^j} - x}{x^{q^{j+1}} - x}).$$

Cette propriété est l’équivalent du résultat d’Euler sur les valeurs paires de la fonction ζ de Riemann, à savoir $\zeta(2n)/\pi^{2n}$ est rationnel pour n non nul. Notons que le groupe des unités de $\mathbf{F}_q[x]$ est $\mathbf{F}_q^*$, d’ordre $q-1$, alors que le groupe multiplicatif de $\mathbf{Z}$ est de cardinal 2. Les congruences modulo 2 dans le cas complexe sont remplacées ici par des congruences modulo $q-1$.

En 1941, Wade prouve dans [12] la transcendance de Π sur $\mathbf{F}_q(x)$. On en déduit la transcendance de $\zeta(s)$ pour $s \equiv 0 \pmod{q-1}$, (valeurs “paires” de s). En 1986-87, Thakur établit dans [11] des résultats d’irrationalité pour $1 \leq s \leq q^2$ alors que Dammame montre l’irrationalité de $\zeta(s)$ pour $1 \leq s \leq q$, ([7]). En 1988, Dammame et Hellegouarch prouvent la transcendance de $\zeta(s)$ pour $1 \leq s \leq q^2$ par la méthode de Wade, ([10]). Enfin, en 1989, Dammame établit dans [8], voir aussi [9], la preuve de la transcendance de $\zeta(s)$ pour tout s . Parallèlement, Yu prouve en 1988, par une méthode utilisant les modules de Drinfeld, que pour tout entier s non nul, $\zeta(s)$ est transcendant et pour tout entier s non divisible par $q-1$, $\zeta(s)/\Pi^s$ est transcendant, (la preuve est parue dans [13]).

Par ailleurs, en 1989, Allouche donne dans [2] une preuve “élémentaire” de la transcendance de Π , c’est-à-dire qui utilise le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, (voir [5]), énoncé ci-dessous :

THÉORÈME 1 (Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy)

Soit $(u(n))_{n \in \mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{F}_q$. Il y a équivalence entre les trois conditions suivantes :

- 1) *la série formelle $\sum_{n \geq 0} u(n)x^{-n}$ est algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$,*
- 2) *l’ensemble E des sous-suites de la suite $(u(n))_{n \in \mathbf{N}}$ défini par*

$$E = \{(u(q^k n + r))_{n \in \mathbf{N}}; \quad k \geq 0; \quad 0 \leq r \leq q^k - 1\}$$

est fini,

- 3) *la suite $(u(n))_{n \in \mathbf{N}}$ est q -automatique.*

Seule l’équivalence entre les conditions 1 et 2 intervient dans nos preuves de transcendance. La condition 3 montre le lien qui existe entre le critère d’algébricité donné par la condition 2 et les automates. Rappelons, (voir [1] ou [6]), qu’un q -automate est défini par la donnée de :

- un ensemble fini d’états $S = \{i = a_1, a_2, \dots, a_d\}$, dont on a privilégié un élément i , appelé état initial,
- q applications ou “flèches” de l’ensemble des états S dans lui-même, notées $0, 1, \dots, q-1$,
- une application φ de S dans un ensemble Y , dite fonction de sortie.

Une suite $(u(n))_{n \in \mathbf{N}}$ à valeurs dans Y est dite q -automatique si elle est engendrée par un q -automate de la façon suivante: considérons un entier n , écrivons-le en base q en identifiant les chiffres de son développement aux applications $0, 1, \dots, q-1$; en lisant les chiffres de n de droite à gauche, on obtient

une application composée de S dans lui-même. Soit a_f l'image de l'état initial i par cette application, on pose alors: $u(n) = \varphi(a_f)$.

Allouche étudie, en fait, le quotient α/Π , avec

$$\alpha = \prod_{j=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^{q^j}}{x^{q^{j+1}}}\right).$$

Notons que α est algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$, il suffit de considérer α^q pour s'en convaincre.

M'inspirant du résultat d'Allouche, je donne ici une preuve "automatique" de la transcendance de $\zeta(s)/\Pi^s$ pour $1 \leq s \leq q-2$. Il est, en effet, intéressant de multiplier $\zeta(s)/\Pi^s$ par α^s . On obtient ainsi une expression simple des coefficients du développement en série formelle de $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s} \alpha^s$. L'étude des sous-suites de la forme $(u(q^k n + 1 + s(q + q^2 + \dots + q^{k-1})))_{n \in \mathbf{N}}$, avec $(u(n))_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$\frac{\zeta(s)}{\Pi^s} \alpha^s = \sum_{n \geq 0} u(n) x^{-n},$$

montre qu'il existe un nombre infini de telles suites. On déduit alors du théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, les transcendances de $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s} \alpha^s$ et de $\zeta(s)/\Pi^s$, α étant algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$.

Je vais dans une première partie de cet article me restreindre au cas où $s = 1$, puis j'indiquerai comment généraliser la méthode employée au cas où s est dans l'intervalle $[1, q-2]$.

2 Preuve de la transcendance de $\zeta(1)/\Pi$

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2 *Pour $q \neq 2$, $\zeta(1)/\Pi$ est transcendant sur $\mathbf{F}_q(x)$.*

Thakur a établi dans [11] que, pour $1 \leq s \leq q$,

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{ks} \prod_{j=1}^k \left(\frac{1}{x^{q^j} - x} \right)^s.$$

On obtient alors:

$$\frac{\alpha}{\Pi} \zeta(1) = \frac{\alpha}{\Pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{x} \right)^{q+\dots+q^k} \prod_{j=k+1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{x} \right)^{q^j-1} \right).$$

2.1 Quelques développements en série formelle

Pour appliquer le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, nous avons besoin du développement en série formelle de $\frac{\alpha}{\Pi}\zeta(1)$. On remarque que le produit

$$\prod_{j=k+1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{q^j-1}\right)$$

intervient à la fois dans les expressions de $\frac{\alpha}{\Pi}(\zeta(1) - 1)$ et de $\frac{\alpha}{\Pi}$, pour $k = 0$. Considérons donc le développement en série formelle de

$$\prod_{j=k+1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{q^j-1}\right)$$

On note que, si n s'écrit sous la forme

$$n = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \varepsilon_i (q^i - 1) \text{ avec } \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_i = 0 \text{ pour } i \text{ assez grand,}$$

une telle décomposition est unique.

Par conséquent, soit $(a_k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\prod_{j=k+1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{q^j-1}\right) = \sum_{n \geq 0} a_k(n) x^{-n}$$

Si n s'écrit :

$$n = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \varepsilon_i (q^i - 1) \text{ avec } \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_i = 0 \text{ pour } i \text{ assez grand,}$$

$$\text{alors } a_k(n) = (-1)^{\sum_{i=k+1}^{+\infty} \varepsilon_i},$$

sinon $a_k(n) = 0$.

La proposition suivante correspond au cas où $k = 0$:

PROPOSITION 1 Soit $(a(n))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\frac{\alpha}{\Pi} = \sum_{n \geq 0} a(n) x^{-n}$$

Si n s'écrit :

$$n = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k (q^k - 1) \text{ avec } \varepsilon_k = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_k = 0 \text{ pour } k \text{ assez grand,}$$

$$\text{alors } a(n) = (-1)^{\sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k},$$

sinon $a(n) = 0$.

On a, en outre,

$$\frac{\alpha}{\prod}(\zeta(1) - 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{x}\right)^{q+\dots+q^k} \sum_{n \geq 0} a_k(n) \left(\frac{1}{x}\right)^n.$$

Par conséquent,

$$\frac{\alpha}{\prod}(\zeta(1) - 1) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{x}\right)^n \sum_{1 \leq k \text{ tq } q+\dots+q^k \leq n} (-1)^k a_k(n - (q + \dots + q^k)).$$

Or on montre le lemme suivant:

LEMME 1 *Si n s'écrit sous la forme*

$$n = q + \dots + q^i + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \varepsilon_j (q^j - 1) \quad (1)$$

avec $i \geq 1, \varepsilon_j = 0$ ou $1, \varepsilon_j = 0$ pour j assez grand,

une telle décomposition est unique.

On en déduit la proposition 2:

PROPOSITION 2 *Soit $(b(n))_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par*

$$\frac{\alpha}{\prod}(\zeta(1) - 1) = \sum_{n \geq 0} b(n) x^{-n}$$

On a:

$b(n) \neq 0$ si et seulement si n s'écrit sous la forme

$$n = q + \dots + q^i + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \varepsilon_j (q^j - 1),$$

avec $i \geq 1, \varepsilon_j = 0$ ou 1 , et $\varepsilon_j = 0$ pour j assez grand.

2.2 Schéma de la preuve du théorème 2

Soit $(c(n))_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$\frac{\alpha}{\prod} \zeta(1) = \sum_{n \geq 0} c(n) x^{-n}$$

On a

$$(c(n))_{n \in \mathbf{N}} = (a(n))_{n \in \mathbf{N}} + (b(n))_{n \in \mathbf{N}}$$

Nous allons considérer les sous-suites $(c(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}$ pour $k \geq 3$ et démontrer la proposition suivante:

PROPOSITION 3 *Soit $k \geq 3$. Soit $f(k) = q^k - 1 - (1 + q + \dots + q^{k-1})$. L'indice du premier terme non nul de la sous-suite $(c(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}$ est $n = q + q^2 + \dots + q^{f(k)}$.*

Cette proposition résulte de deux lemmes concernant les sous-suites $(a(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}$, énoncés ci-dessous :

LEMME 2 *Soit $k \geq 2$. Soit $f(k) = q^k - 1 - (1 + q + \dots + q^{k-1})$. L'indice du premier terme non nul de la sous-suite $(a(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}$ est $n = q + q^2 + \dots + q^{f(k)}$.*

LEMME 3 *Soit $k \geq 3$. Soit $g(k) = q^k - 2 - (q^2 + \dots + q^{k-1})$. L'indice du premier terme non nul de la sous-suite $(b(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}$ est $n = q + q^2 + \dots + q^{g(k)}$.*

On a $f(k) < g(k)$, $\forall k \geq 3$. On rappelle, de plus, que la suite $(c(n))_{n \in \mathbf{N}}$ est définie comme la somme des suites $(a(n))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b(n))_{n \in \mathbf{N}}$. La proposition 3 résulte donc des lemmes 2 et 3.

Par ailleurs, si $q \neq 2$, la suite $(f(k))_{k \geq 3}$ est strictement croissante. Les sous-suites $(c(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}$ diffèrent alors par l'indice de leur premier terme non nul. Elles sont donc distinctes et l'ensemble

$$\{(c(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}\}$$

est infini. L'ensemble $\{(c(q^k n + r))_{n \in \mathbf{N}}; k \geq 0; 0 \leq r \leq q^k - 1\}$ est, à plus forte raison, infini. Selon le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, on en déduit la transcendance de $\frac{\alpha}{\Pi} \zeta(1)$ sur $\mathbf{F}_q(x)$ pour $q \neq 2$ et, par conséquent, celle de $\frac{\zeta(1)}{\Pi}$, ce qui achève la preuve du théorème 2.

2.3 Preuve du lemme 2

Nous donnons ici la preuve du lemme 2; on démontre le lemme 3 de manière analogue.

On pose $(\alpha_k(n))_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par :

$$\alpha_k(n) = a(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}) \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Soit $k \geq 2$. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\alpha_k(n) \neq 0$. Selon la proposition 1,

$$\exists (\varepsilon_j)_{j \in \mathbf{N}} \text{ avec } \varepsilon_j = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand, tels que}$$

$$q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1} = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j (q^j - 1),$$

c'est-à-dire

$$q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1} = \sum_{1 \leq j \leq k-1} \varepsilon_j (q^j - 1) + \sum_{l \geq k} \varepsilon_l (q^l - 1).$$

On pose $\sigma = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j$. On a

$$q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1} = \sum_{1 \leq j \leq k-1} \varepsilon_j q^j + \sum_{l \geq k} \varepsilon_l q^l - \sigma.$$

Par conséquent,

$$\exists \lambda \geq 1 \text{ tel que } \sigma = \lambda q^k + \sum_{1 \leq j \leq k-1} (\varepsilon_j - 1) q^j - 1.$$

On en déduit que

$$n = (-\lambda + \varepsilon_k) + \sum_{l > k \text{ et } \sum_{i > k} \varepsilon_i = \mathcal{S}} \varepsilon_l q^{l-k}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \mathcal{S} &= \sigma - \sum_{j \leq k} \varepsilon_j \\ &= \lambda q^k + \sum_{j=1}^{k-1} (\varepsilon_j - 1) q^j - \sum_{j \leq k} \varepsilon_j - 1. \end{aligned}$$

On vérifie réciproquement que si n s'écrit sous la forme (2), on a alors, selon la proposition 1, $\alpha_k(n) \neq 0$.

Soit $m(k)$ le plus petit m tel que $\alpha_k(m) \neq 0$, c'est-à-dire le plus petit m pouvant s'écrire sous la forme (2). On vérifie que $m(k)$ est obtenu pour

$$\lambda = 1$$

$$\varepsilon_j = 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq k-1$$

$$\varepsilon_k = 1$$

$$\varepsilon_l = 1 \text{ pour } k+1 \leq l \leq k+q^k-1-(1+\dots+q^{k-1})$$

$$\varepsilon_l = 0 \text{ pour } l > k+q^k-1-(1+\dots+q^{k-1})$$

On a alors $m(k) = q + \dots + q^{f(k)}$ avec $f(k) = q^k - 1 - (1 + \dots + q^{k-1})$, ce qui achève la preuve du lemme 2.

3 Preuve de la transcendance de $\zeta(s)/\Pi^s$

THÉOREME 3 *Pour $q \neq 2$ et $1 \leq s \leq q-2$, $\zeta(s)/\Pi^s$ est transcendant sur $\mathbf{F}_q(x)$.*

Nous nous contenterons ici d'esquisser la preuve de ce théorème, qui est faite sur le modèle de la preuve du théorème 2. On peut en trouver une démonstration détaillée dans [3]. On a vu que, pour $1 \leq s \leq q$,

$$\frac{\zeta(s)\alpha^s}{\Pi^s} = \frac{\alpha^s}{\Pi^s} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{ks} \left(\frac{1}{x}\right)^{s(q+\dots+q^k)} \prod_{j=k+1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{q^j-1}\right)^s.$$

Le produit $\prod_{j=k+1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{q^j-1}\right)^s$ joue ici encore un rôle déterminant. On a ainsi la proposition suivante:

PROPOSITION 4 *Soit $(A(n))_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par*

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s} = \sum_{n \geq 0} A(n)x^{-n}.$$

Si n s'écrit

$$n = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j (q^j - 1) \text{ avec } \mu_j \in \{0, 1, \dots, s\}, \mu_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand,}$$

$$\text{alors } A(n) = (-1)^{\sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j} \prod_{j=1}^{+\infty} \binom{s}{\mu_j} \text{ modulo } p,$$

sinon $A(n) = 0$.

Rappelons que p désigne la caractéristique de $\mathbf{F}_q$.

Les propriétés d'unicité de décomposition sont conservées pour $1 \leq s \leq q-2$.

Néanmoins, la présence du terme $\prod_{j=1}^{+\infty} \binom{s}{\mu_j}$ modulo p apporte une difficulté supplémentaire. Ce terme peut être, en effet, éventuellement nul. La proposition 3 devient alors:

PROPOSITION 5 *Soit $(C(n))_{n \in \mathbf{N}}$ définie par*

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s} \zeta(s) = \sum_{n \geq 0} C(n)x^{-n}$$

Soit $k \geq 3$. Soit $F(k) = q^k - 1 - s(1 + q + \dots + q^{k-1})$. Soient $u(k)$ et $v(k)$ les reste et quotient de la division euclidienne de $F(k)$ par s .

Soit $M(k) = s - 1 + s \sum_{1 \leq l \leq u(k)} q^l + v(k)q^{u(k)+1}$.

On a: $\forall n < M(k)$, $C(q^k n + 1 + s(q + \dots + q^{k-1})) = 0$.

On ignore donc, a priori, si $C(q^k M(k) + 1 + s(q + \dots + q^{k-1}))$ est nul ou non.

Notons que les termes $u(k)$ et $v(k)$ apparaissent lors de la minimisation de $\sum_{l>k} \mu_l$ (voir la preuve du lemme 2, section 2.3), les μ_l pouvant prendre au plus la valeur s . Selon la proposition 5, chacune des sous-suites

$$(C(q^k n + 1 + s(q + \dots + q^{k-1})))_{n \in \mathbb{N}}$$

début par au moins $M(k)$ zéros, avec $(M(k))_{k \geq 2}$ strictement croissante. Il suffit alors que les suites

$$(C(q^k n + 1 + s(q + \dots + q^{k-1})))_{n \in \mathbb{N}}$$

soient toutes non nulles pour former un ensemble infini. Or on a la proposition suivante:

PROPOSITION 6

Supposons $s \not\equiv 0 \pmod{p}$. Soit $k \geq 3$. Soit $Q(k) = -1 + s \sum_{1 \leq l \leq q^k - k} q^l$. On a

$$C(q^k Q(k) + 1 + s(q + \dots + q^{k-1})) \neq 0.$$

Par conséquent, si $s \not\equiv 0 \pmod{p}$, l'ensemble

$$\{(C(q^k n + r))_{n \in \mathbb{N}}; \quad k \geq 0; \quad 0 \leq r \leq q^k - 1\}$$

est infini. On déduit alors du théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, les transcendances de $\frac{\alpha'}{\Pi'} \zeta(s)$ et de $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s}$ sur $\mathbb{F}_q(x)$, (pour $1 \leq s \leq q - 2$ et $q \neq 2$).

Il reste alors à traiter le cas où $s \equiv 0 \pmod{p}$.

Écrivons $s = p^t r$ avec r non divisible par p . En appliquant le morphisme de Frobenius à $\zeta(r)/\Pi^r$, on obtient que $(\frac{\zeta(r)}{\Pi^r})^{p^t} = \zeta(s)/\Pi^s$. Or $\zeta(r)/\Pi^r$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(x)$.

On a donc démontré le théorème 3, à savoir: $\zeta(s)/\Pi^s$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(x)$ pour tout s tel que $1 \leq s \leq q - 2$.

Notons qu'en appliquant le morphisme de Frobenius à $\zeta(1)/\Pi$, on obtient que $\zeta(q^t)/\Pi^{q^t}$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(x)$ pour $q \neq 2$ et pour tout $t \geq 0$.

Il reste à montrer que $\zeta(s)/\Pi^s$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(x)$ pour tout s non divisible par $q - 1$. La plus grande complexité de l'expression de $\zeta(s)/\Pi^s$ pour $s > q$ pose alors des problèmes combinatoires. Il semble néanmoins raisonnable d'espérer que la méthode exposée dans cet article puisse permettre de traiter le cas général.

Bibliographie

- [1] J. -P. ALLOUCHE *Automates finis en théorie des nombres*, Expo. Math. **5** (1987), 239-266.
- [2] J. -P. ALLOUCHE *Sur la transcendance de la série formelle II*, Sémin. de Théorie des Nombres de Bordeaux **2** (1990), 103-117.
- [3] V. BERTHÉ *Fonction zêta de Carlitz et automates*, Actes du colloque Thématé, Luminy (mai 1991), à paraître.
- [4] L. CARLITZ *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Math. J. , **1** (1935), 137-168.
- [5] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE et G. RAUZY *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. Soc. Math. France **108** (1980), 401-419.
- [6] A. COBHAM *Uniform tag sequences*, Math. Systems Theory **6** (1972), 164-192.
- [7] G. DAMMAME *Irrationalité de $\zeta(s)$ dans le corps des séries formelles $\mathbb{F}_q((\frac{1}{t}))$* , C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **9**, **5** (1987), 207-212.
- [8] G. DAMMAME *Transcendance de la fonction zêta de Carlitz par la méthode de Wade*, Thèse , Caen, 1990.
- [9] G. DAMMAME et Y. HELLEGOUARCH *Transcendence of the values of the Carlitz zeta function by Wade's method*, J. Number Theory, **39**, **3** (1991), p. 257- 278.
- [10] G. DAMMAME et Y. HELLEGOUARCH *Propriétés de transcendance des valeurs de la fonction zêta de Carlitz*, C.R. Acad. Sci. Paris **307**, Série I (1988), 635-637.
- [11] D. S. THAKUR *Gauss functions and Gauss sums for function fields and periods of Drinfeld modules*, Ph. D. thesis, Harvard (Avril 1987).
- [12] L. J. WADE *Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$* , Duke Math. J. , **8** (1941), 701-720.
- [13] J. YU *Transcendence and Special Zeta Values in Characteristic p* , Annals of Mathematics, **134** (1991), 1-23.

Valérie BERTHÉ
 E. N. S.
 45 rue d'Ulm
 75005 Paris