Astérisque

EMMANUEL GIROUX

Topologie de contact en dimension 3 [autour des travaux de Yakov Eliashberg]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki, exp. n° 760, p. 7-33
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__7_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire Bourbaki
45ème année, 1992-93, n° 760

novembre 1992

TOPOLOGIE DE CONTACT EN DIMENSION 3

[autour des travaux de Yakov Eliashberg]

par **Emmanuel GIROUX**

0. Introduction.

A. Structures de contact, définition et exemples.

Une *structure de contact* sur une variété lisse de dimension 3 [(1)] est un champ C^∞ de plans tangents qui est complètement non-intégrable. Précisément, tout champ de plans tangents est (localement [(2)]) le noyau d'une 1-forme α, "conformément unique", appelée équation (de Pfaff) du champ ; la condition infinitésimale qu'on impose, dictée par le critère d'intégrabilité de Frobenius [Ar1] et indépendante du choix de α, est que la 3-forme $\alpha \wedge d\alpha$ ne s'annule en aucun point : une 1-forme vérifiant cette condition est appelée *forme de contact.* Les structures de contact forment ainsi un ouvert de l'espace des champs de plans pour la topologie C^1 fine.

La multiplication de α par une fonction f partout non nulle change $\alpha \wedge d\alpha$ en $f^2\,\alpha \wedge d\alpha$, de sorte qu'une structure de contact oriente la variété sous-jacente. Quand celle-ci est orientée a priori, les structures de contact qu'elle porte ont donc un *signe.*

On dit souvent qu'une structure de contact est un "champ de plans tordu". De fait, soit ξ un champ de plans (local) et X un champ de vecteurs non singulier contenu dans ξ. Dans des coordonnées adaptées (x, y, t) voisines de $(0, 0, 0)$, X s'écrit $\partial/\partial t$ et ξ a une équation du type $dy = p(x, y, t)\,dx$ (avec, si on veut, $p(0, 0, 0) = 0$). Alors ξ est une structure de contact si et seulement si $\partial p/\partial t$ ne s'annule pas, ce qui signifie géométriquement que, lorsqu'on suit le flot de $\partial/\partial t$, on voit les plans de ξ tourner dans les coordonnées (x, y) (le sens de rotation donne le signe de la structure). De là le théorème de Darboux : *une structure de contact n'a pas d'invariants locaux* puisqu'elle est toujours localement définie par $dy = p\,dx$ dans des coordonnées (x, y, p) convenables.

Exemples 0.1.

a) Sur $\mathbf{R}^3$ muni de coordonnées cylindriques (r, θ, z), une 1-forme d'expression $f(r)\,dz - g(r)\,d\theta$ (où g s'annule au second ordre en 0) est une forme de contact si $f\,(dg/dr) - g\,(df/dr)$ ne s'annule pas, ce qui signifie que la courbe plane

$r \mapsto (f(r), g(r))$ tourne "sans arrêt" autour de l'origine. On notera ζ_0 et ζ_1 les structures de ce type définies par :

$$\zeta_0 \ : \ dz - r^2\, d\theta = 0, \qquad\qquad \zeta_1 \ : \ \cos r\, dz - r \sin r\, d\theta = 0\,.$$

Toutes ces structures sont invariantes par translation verticale et donnent donc des structures de contact sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$. Elles sont de plus tangentes aux rayons $(\theta, z) =$ cste. Le long de ces rayons, ζ_0 pivote d'un quart de tour entre $r = 0$ et $r = \infty$ tandis que ζ_1 fait une infinité de tours.

b) Soit F une surface et $\pi \ : \ ST^\star F \to F$ le fibré des droites coorientées tangentes à F. La variété $ST^\star F$ porte une structure de contact naturelle ξ définie comme suit : un vecteur v tangent à $ST^\star F$ en (x, δ) (où x est un point de F et δ une droite tangente à F en x) appartient à ξ si le vecteur projeté $T_{(x,\delta)}\pi(v) \in TF$ est sur δ (la coorientation de δ donne celle de ξ). Si $F = \mathbf{R}^2$, x est donné par deux coordonnées (x_1, x_2) et δ est repérée par l'angle $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ de sa normale directe avec l'axe des x_1 ; une équation de ξ est alors $\cos\theta\, dx_1 + \sin\theta\, dx_2 = 0$.

c) Toute hypersurface réelle V d'une variété complexe de dimension 2 porte un champ de plans ξ naturel formé par les droites complexes tangentes à V. Quand V est orientée, on dit qu'elle est strictement pseudo-convexe si ξ est une structure de contact positive. C'est par exemple le cas pour la sphère unité de $\mathbf{C}^2$ orientée comme bord de la boule : ξ est la structure de contact usuelle sur $\mathbf{S}^3$ et sera notée ζ_0. Elle est définie, en coordonnées multipolaires $(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2)$ $(r_1^2 + r_2^2 = 1)$, par $r_1^2\, d\theta_1 + r_2^2\, d\theta_2 = 0$.

Notes.

(1) La géométrie de contact existe en toute dimension impaire, sur certains espaces, et est naturellement liée avec la physique et les géométries symplectique, riemannienne et analytique complexe [Ar3, Ar4, BFG, Bl]. Mais si ses aspects locaux ou, plus généralement, flexibles sont assez bien compris [Ar2, Au, Gra, Gro3, McD1, Ru], les contours de sa rigidité globale, qu'on souhaite "dessiner" ici en dimension 3, restent mal connus en grande dimension : on ne dispose par exemple que de résultats très partiels d'existence sur les variétés fermées (voir [El7, El8, Gei, Gro2, Lu3, Me, Mul, We]).

(2) Par commodité, dans ce texte, les champs de plans sont tous coorientés, donc définis par des équations globales déterminées à multiplication près par des fonctions positives. De même, les variétés sont toutes orientées et leur bord éventuel est coorienté par la normale sortante. Les variétés complexes, symplectiques ou de contact, sont munies de leur orientation canonique. Enfin, tout hyperplan coorienté d'un espace orienté est orienté suivant la règle : "la normale directe d'abord". Ainsi, une structure de contact ξ coorientée par une équation α est orientée par $d\alpha|_\xi$.

B. Courbes legendriennes, courbes transversales, feuilletage caractéristique des surfaces.

Si une structure de contact n'admet pas de surfaces intégrales, elle possède en revanche beaucoup de *courbes legendriennes*, c'est-à-dire de courbes tangentes en chaque point au plan de contact. En fait, on peut rendre legendrienne toute courbe en la bougeant (à extrémités fixes) par une isotopie C^0-petite.

Exemple 0.2. Soit ζ_0' la structure de contact sur $\mathbf{R}^3$ définie en coordonnées cartésiennes (x, y, p) par $dy = p\,dx$. Une courbe $t \mapsto (x(t), y(t), p(t))$ est legendrienne si, à tout instant t, $p(t)$ est la pente dy/dx de la courbe projetée $t \mapsto (x(t), y(t))$. Cette courbe projetée, qui détermine entièrement la courbe legendrienne, n'a alors aucune tangente verticale mais présente des rebroussements : on l'appelle *front d'onde* [Ar2]. Maintenant, étant donné une courbe quelconque dans $\mathbf{R}^3$, on peut approcher C^0-uniformément sa projection horizontale par un front d'onde dont la pente approche simultanément la coordonnée verticale (cf. figure 1).

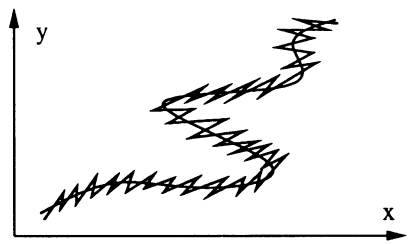


Figure 1

L'argument utilisé en **0.A** pour le théorème de Darboux permet de modéliser n'importe quelle structure de contact ξ près d'une courbe legendrienne C : elle a pour équation $dy = p\,dx$ où $C = \{(x, 0, 0)\}$. On voit alors qu'en poussant légèrement C suivant le champ de vecteurs $\partial/\partial p$ (normal à C dans ξ), on obtient des courbes $C_\varepsilon = \{(x, 0, \varepsilon)\}$ qui sont *transversales* à ξ (positivement ou négativement suivant le signe de ε). Il existe donc également beaucoup de courbes transversales et, en particulier, on peut joindre deux points quelconques par une transversale. Enfin, près d'une courbe transversale, on peut (encore avec le même argument) modéliser la structure ξ par l'équation $dz = r^2\,d\theta$, où z paramètre la courbe et (r, θ) sont des coordonnées polaires normales.

L'outil géométrique essentiel pour étudier une variété de contact (V, ξ) est fourni par les courbes legendriennes obtenues comme suit : sur toute surface F contenue dans V, la structure ξ trace un champ de droites singulier, noyau de la 1-forme qu'induit sur F n'importe quelle équation de ξ. Ses singularités sont les points, génériquement isolés, où F est tangente à ξ et ses courbes intégrales régulières sont legendriennes. Ce feuilletage, noté F_ξ, est appelé *feuilletage caractéristique* de F. De

fait, il détermine entièrement, au signe près, le germe de ξ le long de F. Ainsi, si F sépare V, deux structures de contact données de part et d'autre, dont les orientations coïncident le long de F et qui tracent sur F le même feuilletage, se recollent (après lissage) pour former une structure de contact sur V.

La non-intégrabilité de ξ ne confère aux feuilletages caractéristiques qu'une seule propriété spécifique, qui porte sur les singularités : ce sont des singularités de champs de vecteurs à divergence non nulle (voir par exemple [Gi1]). Par convention, si F est orientée par une 2-forme ω et si α_0 est la 1-forme induite par une équation α de ξ, on oriente le feuilletage F_ξ par le champ de vecteurs Y dont le produit intérieur avec ω est égal à α_0. Ce choix (contraire aux conventions de **0.A**) a le mérite suivant : en une singularité, $d\alpha|_\xi = d\alpha_0 = \mathrm{div}_\omega Y \,.\, \omega$; ainsi, la divergence de Y est positive ou négative suivant que les orientations de F et ξ coïncident ou non. Génériquement (pour un nombre quelconque de paramètres), il n'existe que trois types topologiques de singularités à divergence non nulle [Ar5] : les foyers ou nœuds (sources ou puits selon leur signe), les selles ou cols et les nœuds-selles. En référence au contexte analytique complexe (cf. exemple **0.1 c**), ces singularités sont souvent aussi appelées points (complexes) respectivement elliptiques, hyperboliques et paraboliques.

Exemples 0.3.

a) Dans $\mathbf{R}^3$, une sphère strictement convexe S de révolution autour de l'axe des z n'est tangente aux structures ζ_0 et ζ_1 (cf. exemple **0.1 a**) qu'en ses pôles. Pour ζ_0, le feuilletage caractéristique de S est toujours formé de courbes qui vont d'un pôle à l'autre. Mais pour ζ_1, le feuilletage caractéristique de S présente des orbites fermées dès que S coupe le cylindre de rayon π autour de l'axe des z : ces orbites sont précisément les cercles horizontaux de rayons $k\pi$ contenus dans S, $k = 1, 2, \ldots$ (la figure 2 représente le feuilletage d'une sphère contenue dans un cylindre de rayon inférieur à $3\pi/2$).

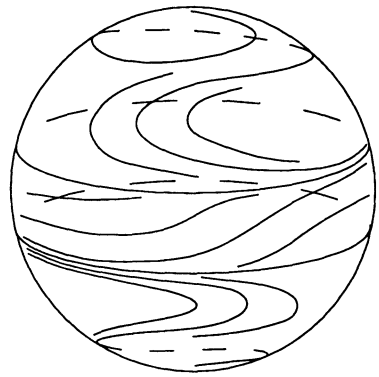


Figure 2

b) Soit F une surface de $\mathbf{R}^3$ définie par une équation régulière $f(x,y,p)=0$. Les courbes du feuilletage caractéristique de F pour ζ_0' : $dy = p\,dx$ sont les courbes intégrales de l'équation différentielle implicite $f(x,y,dy/dx)=0$ (voir [Ar5, Dav]).

C. Le problème de classification des structures de contact.

Deux structures de contact sur une variété V sont dites *isomorphes* (resp. *isotopes*) s'il existe un difféomorphisme de V (resp. un difféomorphisme de V isotope à l'identité) qui envoie l'une sur l'autre. Par exemple, sur $\mathbf{R}^3$, les structures ζ_0 : $dz = r^2\,d\theta$ et ζ_0' : $dy = p\,dx$ sont isomorphes via le changement de variables $p = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = 2y - px$.

Le problème de la classification des structures de contact à isomorphisme près sur une variété donnée, posé par S.S. Chern dans les années 60 [Ch], est encore largement ouvert. L'espoir d'une solution tient pour beaucoup à la propriété de C^1-stabilité démontrée par J.W. Gray en 1959 :

Théorème 0.4 [Gra]. *Sur une variété fermée (compacte sans bord), deux structures de contact sont isotopes si et seulement si elles sont homotopes dans l'espace des structures de contact.*

Remarque. Sur une variété compacte à bord, on a le même énoncé avec des isotopies et des homotopies relatives au bord.

L'idée est donc d'étudier d'abord le type d'homotopie de l'espace des structures de contact, ou plutôt le type d'homotopie relatif de cet espace dans celui, "bien connu", de tous les champs de plans. Sur une variété *ouverte* (i.e. dont aucune composante connexe n'est fermée), M. Gromov a montré en 1969 l'équivalence homotopique de ces deux espaces [Gro1, Gro3], d'où l'existence de structures de contact dans chaque classe d'homotopie de champs de plans. Malheureusement, le théorème de Gray ne s'applique pas : deux structures de contact homotopes n'ont a priori qu'un lien géométrique de concordance [McD1]. Sur les variétés fermées, le premier résultat a été obtenu par R. Lutz et J. Martinet en 1971 :

Théorème 0.5 [Lu1, Lu2, Ma] (voir aussi [ThWi]). *Sur une variété fermée (orientée) de dimension 3, tout champ de plans est homotope à une structure de contact.*

Le problème suivant est de savoir si deux structures de contact qui sont homotopes comme champs de plans le sont comme structures de contact.

Exemple 0.6 : *Modification de Lutz* [Lu2]. Cette modification consiste à changer une structure ξ_0 donnée sur une variété V en la "vrillant" au voisinage d'une courbe transversale fermée. Près d'une telle courbe, dans un tube $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^1$ muni de coordonnées cylindriques (r,θ,z), $r \le \varepsilon$, ξ_0 est modélisée par l'équation $dz = r^2\,d\theta$. On remplace ξ_0 dans ce tube par une structure d'équation $f(r)\,dz = g(r)\,d\theta$ (cf.

exemple **0.1 a**) où $r \mapsto (f(r), g(r))$ est une courbe dans $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ qui va de $(1,0)$ à $(1,\varepsilon^2)$ en faisant une fois le tour de l'origine dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

La structure ξ_1 ainsi obtenue est homotope à ξ_0 via les champs de plans ξ_s, $s \in [0,1]$, définis sur le tube par :

$$(1-s)(dz - r^2\,d\theta) + s\,(f(r)\,dz - g(r)\,d\theta) + s(1-s)r(\varepsilon - r)\,dr = 0$$

et égaux à ξ_0 en dehors.

Enfin, il est important d'observer que, comme dans l'exemple **0.3 a**, la variété (V, ξ_1) contient des disques (par exemple d'équation $z = \varepsilon' r^2$ dans le tube) dont le feuilletage caractéristique présente des orbites fermées.

À ce point, il est commode de donner une définition introduite par Ya. Eliashberg en 1988 et 1991. Au-delà des mots, elle établit une dichotomie qui est l'une des idées les plus fécondes de la théorie.

Définition 0.7 [El1, El2]. Soit (V, ξ) une variété de contact. On dit que ξ est *vrillée (overtwisted)* s'il existe un disque Δ de dimension 2 plongé dans V dont le feuilletage caractéristique Δ_ξ présente une orbite régulière fermée avec une seule singularité à l'intérieur, au "centre". Quand on veut spécifier ce disque, on dit que ξ est *vrillée le long de* Δ. On dit que ξ est *tendue (tight)* lorsqu'elle n'est pas vrillée.

En utilisant cette terminologie, un des résultats fondamentaux démontrés par D. Bennequin en 1982 s'énonce comme suit :

Théorème 0.8 [Ben1, Dou]. *Sur* $\mathbf{R}^3$ *et* $\mathbf{S}^3$, *la structure de contact usuelle* ζ_0 *(cf. exemples* **0.1***) est tendue.*

Ainsi, toute modification de Lutz sur ζ_0 donne une structure non isomorphe à ζ_0. Si donc le travail de D. Bennequin constitue un pas décisif dans la compréhension des structures de contact, il semble paradoxalement briser l'espoir d'une classification en faisant craindre que la multiplication des modifications de Lutz le long d'entrelacs compliqués ne conduise à des structures de plus en plus exotiques. Dans ce contexte, le théorème démontré par Ya. Eliashberg en 1988 est une heureuse et providentielle surprise :

Théorème 0.9 [El1] (cf. **1.A**). *Sur une variété fermée, deux structures de contact vrillées sont isotopes si et seulement si elles sont homotopes comme champs de plans.*

Il ne reste donc "plus qu'à" classifier les structures tendues...

D. Le monde des structures tendues.

Le premier fait établi par Ya. Eliashberg sur les structures tendues est qu'elles jouissent de propriétés communes remarquables, précisément celles découvertes par D. Bennequin dans la structure usuelle de $\mathbf{S}^3$. Il s'agit d'inégalités portant sur certains invariants des courbes legendriennes et transversales (cf. **2.D**), et qui imposent de fortes contraintes à la classe d'Euler des structures tendues vues comme fibrés vectoriels réels orientés de rang 2.

Théorème 0.10 [El2] (cf. **2.B**). *Pour une variété V fermée, les éléments du groupe $H^2(V, \mathbf{Z})$ qu'on peut réaliser comme classes d'Euler de structures tendues sur V sont en nombre fini.*

Outre cette rigidité homologique, Ya. Eliashberg montre que :

Théorème 0.11 [El2] (cf. **2.C**). *Sur $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{S}^3$, la structure usuelle ζ_0 est la seule structure tendue.*

En fait, Ya. Eliashberg montre qu'un champ de plans donné le long de $\partial\mathbf{D}^3$ s'étend en au plus une structure tendue sur $\mathbf{D}^3$ (cf. théorème **2.8**). Comme la classe d'Euler d'un champ ξ détermine la classe d'homotopie de ξ sur le 2-squelette de V, on obtient :

Théorème 0.12 [El2]. *Sur une variété fermée, les classes d'homotopie de champs de plans qui contiennent des structures tendues sont en nombre fini.*

Le problème est alors de trouver des exemples. L'outil le plus efficace pour ce faire vient de la théorie des courbes pseudo-holomorphes de M. Gromov [Gro2, El4]. Moyennant le critère qu'elle donne (cf. **3.B**) et un travail de D. Gabai, un résultat annoncé récemment par W. Thurston montre que :

Théorème 0.13 [Th3, Ga] (cf. **3.C**). *Toute variété fermée irréductible dont le second groupe d'homologie est non nul porte des structures de contact tendues.*

Quant au problème de classification, il reste largement ouvert. Ya. Eliashberg conjecture dans [El2] qu'une variété fermée ne porte qu'un nombre fini de structures tendues différentes. Ceci ne peut résulter immédiatement du théorème de finitude **0.12** car :

Théorème 0.14 [Gi2] (cf. **3.D**). *Il existe sur $\mathbf{T}^3$ des structures de contact tendues homotopes comme champs de plans mais non isomorphes.*

Pour ce qui est des variétés ouvertes, la situation semble encore plus sauvage puisque :

Théorème 0.15 [El3] (cf. **3.D**). *Il existe sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$ une famille continue de structures tendues deux à deux non isomorphes.*

1. Flexibilité des structures de contact vrillées.

A. Le théorème de classification.

Soit V une variété de dimension 3, connexe, fermée et orientée, et soit Δ un disque de dimension 2 plongé dans V. On désigne par $\mathrm{Cont}^{vr}(V,\Delta)$ l'espace des structures de contact (coorientées et positives) qui sont *vrillées le long de* Δ (cf. définition **0.7**). Par ailleurs, on note $\mathrm{Distr}(V,\Delta)$ l'espace des champs de plans (coorientés) qui sont tangents à Δ en son centre. Ces espaces sont munis de la topologie C^∞.

Théorème 1.1 [El1]. *L'inclusion* $i : \mathrm{Cont}^{vr}(V,\Delta) \longrightarrow \mathrm{Distr}(V,\Delta)$ *est une équivalence d'homotopie (faible).*

Remarques 1.2.

a) Comme l'espace des plongements du disque dans V est connexe, toute structure vrillée est isotope à une structure de $\mathrm{Cont}^{vr}(V,\Delta)$. De plus, $\mathrm{Distr}(V,\Delta)$ est, dans l'espace de tous les champs de plans (coorientés) sur V, la fibre au-dessus de la sphère $\mathbf{S}^2$ des plans orientés tangents à V au centre de Δ. Ainsi, et compte tenu du théorème de Gray (cf. **0.4**), il découle du théorème **1.1** que deux structures vrillées qui sont homotopes comme champs de plans sont isotopes (théorème **0.9**).

b) Dans [Lu1, Lu2], R. Lutz montre que $i_\star$ est surjective sur π_0. La prolifération des paramètres n'étant pas la difficulté principale, on se contente d'indiquer ici pourquoi $i_\star$ est injective sur π_0, ce qui, d'après **a**, suffit à établir le théorème **0.9**.

Il s'agit de voir que deux structures ξ_0 et ξ_1 de $\mathrm{Cont}^{vr}(V,\Delta)$ qui sont reliées par un chemin ξ_s, $s \in [0,1]$, dans $\mathrm{Distr}(V,\Delta)$ peuvent aussi être jointes dans $\mathrm{Cont}^{vr}(V,\Delta)$. On observe d'abord que, comme tous les champs ξ_s coïncident au centre de Δ, on peut les déformer pour qu'ils soient tous égaux à ξ_0 près de Δ. On peut alors sans peine trouver une boule B_0 contenant Δ et un plongement ψ de B_0 dans $\mathbf{R}^3$ qui envoie $\xi_s|_{B_0} = \xi_0|_{B_0}$ sur la structure ζ_1 d'équation $\cos r\, dz - r \sin r\, d\theta = 0$ et dont l'image $\psi(B_0)$ est une boule convexe du type $\{(r,\theta,z) \mid (z/\varepsilon)^2 + r^2 \leq (\pi+\varepsilon)^2\}$ (où ε est un nombre positif petit). Le feuilletage caractéristique de $S_0 = \partial B_0$ (cf. exemple **0.3 a**) est le double du feuilletage de Δ (avec deux orbites fermées et deux singularités, une source et un puits : voir figure **2**). Voici maintenant les étapes suivantes.

B. Où l'on laisse des trous.

Définition 1.3.

a) Dans une variété de contact, un *domaine de Darboux* est une boule qui se plonge dans la structure usuelle ζ_0 de $\mathbf{R}^3$ (d'équation $dz - r^2\, d\theta = 0$).

b) Soit ξ un champ de plans coorienté défini près d'une 2-sphère orientée S et soit S_ξ le feuilletage tracé par ξ sur S. On dit que ξ est *simple* s'il n'est tangent à

S qu'en deux "pôles", l'un, dit pôle nord, où les orientations de S et ξ coïncident et l'autre, dit pôle sud, où elles sont opposées. On dit que ξ est *presque horizontal* si, de plus, près des orbites fermées éventuelles de S_ξ, le champ ξ est toujours coorienté "du pôle sud vers le pôle nord".

Exemples 1.4. Le champ ξ_0 est simple le long de ∂B_0 mais n'est pas presque horizontal car les orbites fermées n'ont pas la bonne coorientation. Par contre, un champ de plans "constant" sur $\mathbf{R}^3$ est presque horizontal le long de toute sphère strictement convexe. Plus généralement, un champ de plans ξ sur un compact A de $\mathbf{R}^3$ est donné par son application de Gauss $G_\xi : A \to \mathbf{S}^2$. On pose : $|\xi| = \sup_{x\in A}\{\|T_x G_\xi\|\}$. Alors, *si* $|\xi| \leq k$ *et si* S *est une sphère dont toutes les courbures principales sont supérieures à* k, ξ *est presque horizontal le long de* S.

Lemme 1.5. *Par une homotopie à extrémités fixes, on peut imposer au chemin* ξ_s *les conditions suivantes :*

(i) en dehors d'un nombre fini de boules B_i *disjointes de* B_0, $1 \leq i \leq p$, *tous les champs* ξ_s *sont des structures de contact;*

(ii) le long du bord de chaque B_i, $1 \leq i \leq p$, *chaque* ξ_s *est presque horizontal;*

(iii) pour $s = 0, 1$, *toutes les boules* B_i *sont des domaines de Darboux.*

Démonstration. On construit l'homotopie carte après carte. Cela permet de travailler dans un domaine compact A de $\mathbf{R}^3$, mais relativement à un sous-domaine B près duquel les champs ξ_s sont déjà de contact (grâce aux modifications antérieures). On pave un voisinage P de A (sur lequel les ξ_s sont encore définis) par des cubes isométriques assez petits pour que les champs ξ_s soient encore de contact sur la réunion Q des cubes qui rencontrent B.

Par ailleurs, étant donné un nombre positif δ petit, on se fixe un plongement φ de $\mathbf{S}^2 \times [-1, 1]$ dans le δ-voisinage du bord du cube unité C de $\mathbf{R}^3$ ayant les propriétés suivantes :

- les sphères $\Sigma_t = \varphi(\mathbf{S}^2 \times \{t\})$ sont strictement convexes;
- Σ_{-1} est à l'extérieur de C et Σ_1 est à l'intérieur;
- les sphères Σ_t, $t \in]-1/2, 1/2[$, recouvrent le $\delta/2$-voisinage du bord de C.

Par homothétie et translation, on construit des sphères Σ_{tj} près du bord de chaque cube C_j de P. Si ces cubes sont petits, chaque champ ξ_s est presque horizontal le long des sphères Σ_{tj} car celles-ci sont très courbées. On applique alors, sur chaque couronne $\bigcup_{t\in[-1,1]} \Sigma_{tj}$ et pour tout $s \in [0, 1]$, la construction suivante.

Sur $\mathbf{S}^2 \times [-1, 1]$, soit ξ un champ de plans d'équation $\alpha_t + u_t\, dt = 0$, où les α_t sont des 1-formes et les u_t des fonctions sur $\mathbf{S}^2$. On suppose que ξ est presque

horizontal le long de chaque sphère $\mathbf{S}^2 \times \{t\}$, si bien que chaque forme α_t n'a que deux singularités (d'indice 1), l'une où u_t est positive et l'autre où u_t est négative. On rend ξ de contact sur $\mathbf{S}^2 \times [-1/2, 1/2]$ en trois étapes.

- *Modification longitudinale* : on perturbe les α_t pour que $d\alpha_0$ soit non nulle et de même signe que u_0 aux singularités de α_0.

- *Modification transversale* : on déforme les α_t pour que $\alpha_t + u_t\, dt$ soit une forme de contact pour t proche de 0. La condition de contact s'écrit :

$$u_t\, d\alpha_t + \alpha_t \wedge (du_t - \dot{\alpha}_t) > 0\,.$$

  Il s'agit donc de modifier $\dot{\alpha}_t$ près de $t = 0$ pour satisfaire cette inégalité.

- *Grossissement* : par une isotopie de $\mathbf{S}^2 \times [-1, 1]$ fixe près du bord et qui envoie $\mathbf{S}^2 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ sur $\mathbf{S}^2 \times [-1/2, 1/2]$, on propage la déformation.

On peut clairement adapter cette construction pour garder ξ inchangé sur tout compact du type $K \times [-t, t]$ près duquel il est déjà de contact. Enfin, on contrôle assez la norme des champs pour que, si les sphères Σ_{tj} sont très courbées, on puisse appliquer la construction le nombre de fois nécessaire en préservant la presque horizontalité le long des Σ_{tj}. ∎

C. Où l'on connecte les trous.

D'après le lemme **1.5**, chaque ξ_s est maintenant une structure de contact sur la variété $V' = V \setminus \bigcup_{0 \le i \le p}(B_i)$. Comme les structures de contact possèdent beaucoup de courbes transversales, il est facile, pour tout $s \in [0, 1]$ et tout $i = 1, \ldots, p$, de relier dans V' le pôle nord de ∂B_{i-1} au pôle sud de ∂B_i par un arc plongé A_{si} (directement) transversal à ξ_s. On peut de plus faire en sorte que les arcs A_{si} soient disjoints pour s fixé et qu'ils dépendent différentiablement de s pour i fixé. En effectuant, pour chaque s, la somme connexe plongée de $B_0, B_1, \ldots, B_p$ le long des arcs A_{si}, $1 \le i \le p$, on obtient une boule V_s plongée dans V.

D. Où l'on bouche le trou.

Il faut maintenant trouver un chemin ξ'_s, $s \in [0, 1]$, de structures de contact sur V_s ayant les propriétés suivantes :

(i) pour $s = 0, 1$, $\xi'_s = \xi_s|_{V_s}$;

(ii) pour tout $s \in [0, 1]$, les feuilletages tracés respectivement par ξ_s et ξ'_s sur ∂V_s sont les mêmes.

À cette fin, il importe d'observer que :

- pour chaque $s \in [0,1]$, le feuilletage $\mathcal{F}_s$ tracé par ξ_s sur ∂V_s est, en un sens évident, la "somme connexe" des feuilletages tracés sur ∂B_0, ∂B_1, ..., ∂B_p (sur un petit cylindre autour d'un arc transversal, les courbes caractéristiques vont d'un bord à l'autre en s'enroulant) ; ξ_s est donc simple le long de ∂V_s ;

- $\mathcal{F}_s$ n'a que deux orbites fermées le long desquelles ξ_s soit coorienté du pôle nord au pôle sud : ce sont celles provenant de ∂B_0 ;

- pour $s = 0, 1$, $\mathcal{F}_s$ n'a pas d'autres orbites fermées. En effet, (V_s, ξ_s) est la somme connexe de $(B_0\,,\ \xi_s = \xi_0)$ et de domaines de Darboux au bord desquels il n'y a aucune orbite fermée d'après le théorème de Bennequin. Il est alors facile de montrer que (V_0, ξ_0) et (V_1, ξ_1) sont isomorphes, comme variétés de contact, à (W, ζ_1) (cf. **1.A**).

L'observation fondamentale de Ya. Eliashberg est qu'on peut trouver dans $(\mathbf{R}^3, \zeta_1)$ une famille W_s de boules plongées, $s \in [0,1]$, telles que :

- $W_0 = W_1 = W$;

- pour tout $s \in [0,1]$, le feuilletage caractéristique de ∂W_s dans $(\mathbf{R}^3, \zeta_1)$ est topologiquement conjugué à $\mathcal{F}_s$.

Pour cela, il suffit de voir qu'en bougeant ∂W parmi les sphères de révolution, on peut faire apparaître et disparaître comme on veut, dans le feuilletage caractéristique, des orbites fermées le long desquelles ζ_1 soit coorientée du pôle sud vers le pôle nord. Ces sphères sont engendrées par la rotation autour de l'axe des z de courbes du type représenté sur la figure **3** :

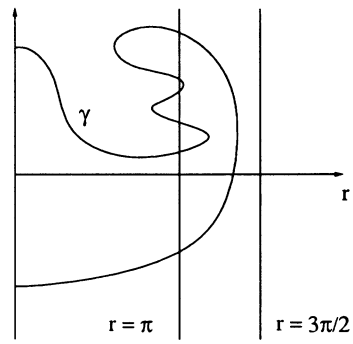


Figure 3

Légende : chaque point d'intersection de γ avec la droite $r = \pi$ donne un cycle sur le feuilletage. Les deux premiers points, en venant du pôle sud, correspondent aux cycles immuables. Le long des autres cycles, qu'on peut clairement créer et éliminer à loisir, ζ_1 est coorienté du pôle nord vers le pôle sud (sur la sphère).

2. Rigidité des structures de contact tendues.

A. Modifications de feuilletages caractéristiques par isotopies.

Soit F une surface fermée orientée. Un *feuilletage* de F désigne ici l'ensemble $\mathcal{F}$ des courbes intégrales orientées d'un champ de vecteurs (ou, dualement, d'une 1-forme). On dira que $\mathcal{F}$ est *dilatant* (resp. *contractant*) sur un domaine F' de F s'il est porté par un champ qui sort (resp. rentre) transversalement le long du bord de F' et dont le flot dilate (resp. contracte) une forme d'aire sur F'. On dira que $\mathcal{F}$ est *scindé* par une courbe fermée simple Γ (pas forcément connexe) si Γ découpe F en régions où $\mathcal{F}$ est alternativement dilatant et contractant.

On prend maintenant F plongée dans une variété de contact (V, ξ). On oriente le feuilletage caractéristique F_ξ comme en **0.B**, pour que les singularités dites *positives*, c'est-à-dire où F et ξ ont même orientation, soient à divergence positive.

Lemme 2.1 [Gi1].

a) *Tout feuilletage de F C^∞-proche de F_ξ est feuilletage caractéristique d'une surface C^∞-proche de F.*

b) *Génériquement, F contient une courbe fermée simple Γ (souvent non connexe) qui scinde F_ξ ; F possède alors un voisinage tubulaire trivialisé, $U \simeq F \times \mathbf{R}$, dans lequel ξ est $\mathbf{R}$-invariante.*

c) *Tout feuilletage de F qui est scindé par Γ est feuilletage caractéristique d'une surface isotope à F dans U.*

Démonstration.

a) On réalise le feuilletage C^∞-proche de F_ξ comme feuilletage caractéristique $F_{\xi'}$ pour une structure ξ' C^∞-proche de ξ et on applique le théorème de stabilité de Gray **0.4**.

b) Le théorème de M. Peixoto (selon lequel *les feuilletages des surfaces compactes sont génériquement de type Morse-Smale*) et le **a** montrent que F_ξ vérifie génériquement les propriétés suivantes :

- les singularités sont isolées et les orbites fermées sont non dégénérées (leur application de premier retour n'est pas tangente à l'identité) ;
- toute demi-orbite a pour ensemble limite soit une singularité, soit une orbite fermée, soit une réunion de singularités et de liaisons ;
- aucune liaison ne va d'une singularité négative à une singularité positive.

On construit alors Γ comme suit. On prend un anneau (resp. un disque) autour de chaque orbite fermée répulsive (resp. de chaque foyer répulsif, i.e. positif). On place ensuite une bande autour de la variété stable de chaque selle positive. La réunion de ces anneaux, disques et bandes, est une surface dont le bord est la courbe Γ cherchée.

Pour montrer l'existence du tube U, il suffit (principalement parce que F_ξ détermine complètement ξ près de F) de construire sur $F \times \mathbf{R}$ une structure de contact ζ qui soit $\mathbf{R}$-invariante et qui induise F_ξ comme feuilletage sur $F \times \{0\}$. On cherche une équation de ζ sous la forme $\beta + u\,dt$, où t est la coordonnée sur $\mathbf{R}$ et où β et u sont respectivement une 1-forme et une fonction sur F telles que :

- $u\,d\beta + \beta \wedge du > 0$ (condition de contact) ;
- β est une équation de F_ξ.

Or il existe sur F un champ de vecteurs Y portant F_ξ et une forme d'aire ω tels que $\mathrm{div}_\omega Y$ change de signe le long de Γ et ne s'annule pas ailleurs. On trouve alors facilement une fonction $u : F \to \mathbf{R}$, s'annulant elle aussi uniquement sur Γ, telle que $u(\mathrm{div}_\omega Y) - (Y \,.\, u)$ soit une fonction partout strictement positive. Si on note β le produit intérieur de ω par Y, on a $u\,d\beta + \beta \wedge du > 0$.

c) Tout feuilletage $\mathcal{F}$ scindé par Γ est, comme F_ξ, le feuilletage caractéristique de $F \times \{0\}$ pour une structure de contact ζ' $\mathbf{R}$-invariante sur $F \times \mathbf{R}$ et d'équation $\beta' + u\,dt = 0$: u est la même fonction que pour F_ξ car elle est essentiellement déterminée par Γ. Alors les formes $s\beta' + (1-s)\beta + u\,dt$ sont, pour $s \in [0,1]$, des formes de contact $\mathbf{R}$-invariantes sur $F \times \mathbf{R}$. Une version ad hoc du théorème de Gray montre que ζ' est isotope à ζ, ce qui permet de réaliser $\mathcal{F}$ comme feuilletage caractéristique d'une surface isotope à F dans (U, ξ). ∎

Remarque 2.2. Pour une surface F à bord, les parties **a** et **b** du lemme **2.1** s'adaptent bien (par exemple, si le bord est transversal à ξ, on trouve une courbe Γ qui ne le coupe pas). En ce qui concerne **c** on n'a plus droit au théorème de Gray. Cependant, tous les feuilletages qu'on veut voir apparaître (cf. **2.D**) se laissent réaliser dans $U \simeq F \times \mathbf{R}$ sur les graphes de fonctions "explicites" $F \to \mathbf{R}$.

Exemple 2.3. Si F_ξ contient une selle positive dont une séparatrice stable γ vient d'un foyer, on peut, par une isotopie de F, éliminer cette paire de singularités sans changer F_ξ hors d'un voisinage de γ.

B. Classe d'Euler des structures tendues.

Soit ξ une structure de contact (orientée) sur une variété V et soit F une surface fermée orientée contenue dans V. On désigne par $\mathrm{E}(\xi) \in H^2(V, \mathbf{Z})$ la classe d'Euler de ξ et par $[F] \in H_2(V)$ la classe d'homologie de F.

Théorème 2.4 [El2]. *On suppose que ξ est tendue et que F est plongée dans V. Alors :*

(i) si $F = \mathbf{S}^2$, $\mathrm{E}(\xi) \,.\, [F] = 0$;

(ii) si $F \neq \mathbf{S}^2$, $|\mathrm{E}(\xi) \,.\, [F]| \leq -\chi(F)$.

Remarque 2.5. Si V est fermée, cette inégalité confine $\mathrm{E}(\xi)$ dans un sous-ensemble fini de $H^2(V, \mathbf{Z})$ (théorème **0.10**). En effet, la torsion de H^2 est finie et chaque système générateur de H_2 se représente par des surfaces plongées.

Démonstration. Quitte à bouger F par une isotopie C^∞-petite, on peut supposer que F_ξ est scindé par une courbe Γ. Ainsi, F est divisée en deux surfaces compactes, de bord commun Γ, F^+ où F_ξ est dilatant et F^- où F_ξ est contractant. Comme les singularités dilatantes (resp. contractantes) sont celles où les orientations de F et ξ coïncident (resp. diffèrent), un argument classique [Th2] montre que $\mathrm{E}(\xi) \,.\, [F] = \chi(F^+) - \chi(F^-)$. Par ailleurs, $\chi(F) = \chi(F^+) + \chi(F^-)$. Le lemme qui suit dit que $\chi(F^+)$ et $\chi(F^-)$ sont négatifs ou nuls (sauf si $F = \mathbf{S}^2$ auquel cas $\chi(F^+) = \chi(F^-) = 1$), ce qui entraîne (i) et (ii).

Lemme 2.6. *Si une composante de $F \setminus \Gamma$ est un disque, F est une sphère et Γ est connexe (car ξ est tendue).*

Démonstration. On suppose qu'une composante de F^+ est un disque F' et que la composante contiguë F'', dans F^-, n'est pas un disque. On va montrer qu'alors ξ est vrillée en faisant apparaître dans le feuilletage caractéristique de F, par une isotopie, une orbite fermée bordant un disque qui ne contient qu'une singularité.

On note Γ_0 la composante de Γ qui sépare F' et F'', et on munit F' d'un feuilletage radial dilatant. Si le bord de F'' ne se réduit pas à Γ_0, on construit facilement sur F'' un feuilletage contractant ayant une orbite fermée (attractive) qui borde avec Γ_0 un anneau sans singularités. En recollant ces deux feuilletages avec le reste de F_ξ, on trouve un feuilletage scindé par Γ et qui présente la figure promise. D'après le lemme **2.1**, on peut le réaliser par une isotopie de F donc ξ est vrillée.

Si le bord de F'' se réduit à Γ_0, on observe que, la surface F'' n'étant pas un disque, elle admet un feuilletage contractant ayant une orbite fermée γ. On peut donc supposer que γ est déjà une orbite fermée de F''_ξ. Dans un voisinage de F du type $F \times \mathbf{R}$, où ξ est $\mathbf{R}$-invariante, on plie F le long de γ (cf. figure 4), créant ainsi dans le feuilletage caractéristique deux nouvelles orbites fermées γ' et γ'', parallèles à γ, sans ajouter de singularités. Ce feuilletage est scindé par la réunion de Γ et de deux courbes qui entourent l'orbite répulsive γ'. On a ainsi retiré à F'' un anneau, donc ajouté à son bord deux composantes, et la première procédure s'applique. ∎

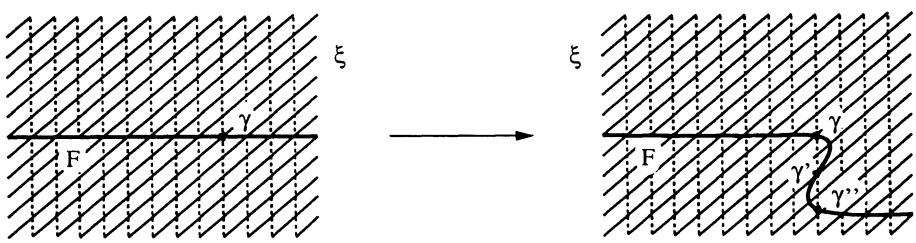


Figure 4

Remarque 2.7. Le lemme **2.6** montre que le feuilletage caractéristique d'une sphère plongée dans une structure tendue ne présente jamais d'orbites fermées (un feuilletage dilatant sur un disque n'a pas d'orbites fermées). Avec le lemme **2.1 c**, il montre également que, sur une surface orientée F différente de la sphère, on peut, par isotopie, supprimer du feuilletage caractéristique tous les foyers pour ne garder comme singularités que des selles. En particulier, tout tore est isotope à un tore transversal à ξ.

C. Classification des structures tendues sur $\mathbf{D}^3$, $\mathbf{S}^3$ et $\mathbf{R}^3$.

Théorème 2.8 [El2]. *L'espace des structures tendues sur* $\mathbf{D}^3$ *qui induisent un feuilletage donné sur le bord est faiblement contractile.*

Démonstration. On va exhiber dans cet espace un point-base et un procédé "canonique" pour joindre un point quelconque à ce point-base.

Lemme 2.9 [El2]. *Soit S une sphère orientée plongée dans une variété (V, ξ) tendue.*

a) *Il existe une fonction $f : S \to \mathbf{R}$ ayant les propriétés suivantes :*

(i) f décroît strictement sur toute orbite régulière de S_ξ et ses points critiques coïncident avec les singularités de S_ξ ;

(ii) quand on passe une selle de S_ξ dans le sens décroissant des valeurs de f, le nombre de composantes du niveau de f diminue si la selle est positive et augmente sinon.

b) *On peut plonger S dans $\mathbf{R}^3 = \{(x, y, u)\}$ de telle sorte que f soit la fonction hauteur $u|_S$ et qu'en un point critique correspondant à une singularité positive (resp. négative) de S_ξ, la normale sortante à S soit $\partial/\partial u$ (resp. $-\partial/\partial u$).*

c) *La boule B que S borde dans $\mathbf{R}^3$ porte une structure de contact bordée par S_ξ et canoniquement (à quelques choix contractiles près) définie par S_ξ.*

Démonstration.

a) On construit les niveaux de f. Les foyers positifs sont des maxima locaux de f donc les niveaux voisins sont des cercles. Il faut ensuite faire, entre ces cercles, les sommes connexes prescrites par les variétés stables des selles et ceci dans un ordre tel que (ii) soit satisfaite. Pour fixer les idées, on suppose que S_ξ n'a pas de nœuds-selles et présente exactement une liaison entre selles, allant d'une selle négative x_- à une selle positive x_+. Soit n le nombre de selles positives, donc $n+1$ le nombre de foyers positifs (cf. lemme **2.6**). Comme il n'y a pas d'orbites fermées (cf. remarque **2.7**), toute séparatrice stable d'une selle positive autre que x_+ vient d'un foyer : on fait les $n-1$ sommes connexes associées. À chaque fois, le nombre de composantes baisse sans quoi on aurait un cycle formé de foyers répulsifs et de

séparatrices de selles positives : en éliminant ces singularités par paires (cf. exemple **2.3**), on obtiendrait une orbite fermée répulsive. À la fin, le niveau de f n'a que deux composantes, C et C' et de l'une, C par exemple, part une séparatrice de x_+. Alors aucune séparatrice de x_- ne peut venir de C car sinon, par une petite perturbation du feuilletage, on pourrait détruire la liaison de selles et relier les deux séparatrices stables de x_+ à C, d'où encore un cycle formé de foyers et de selles positifs. Ainsi, les deux séparatrices stables de x_- viennent de C', de sorte que la somme connexe associée crée une composante de niveau et qu'ensuite, la somme connexe associée à x_+ en supprime une.

b) On associe à f un arbre T en identifiant à un point chaque composante connexe de chaque niveau de f ; la fonction f induit sur T une fonction qu'on peut réaliser comme fonction hauteur en plongeant T dans $\mathbf{R}^3$. On prend pour plongement de S le bord d'un voisinage régulier de T.

c) On regarde $\mathbf{R}^3$ comme l'hyperplan d'équation $v = 0$ dans $\mathbf{C}^2 = \{(x + iy, u + iv)\}$, et on cherche une fonction $h : B \to \mathbf{R}$, nulle au bord et positive à l'intérieur, telle que les droites complexes tangentes à l'hypersurface d'équation $v = h(x, y, u)$ donnent la structure voulue. Le feuilletage S_ξ détermine le 1-jet de h le long de S. On le réalise sur un collier par une fonction h_0 qui convient, puis on étend h_0 en la raccordant, par un procédé de lissage classique, avec une fonction du type $\varepsilon\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - u^2}$ (ε petit et R grand).

Ces constructions sont canoniques en ce sens qu'elles marchent avec un nombre arbitraire de paramètres. ∎

On termine maintenant comme suit. Soit ξ une structure de contact tendue sur $\mathbf{D}^3$ vue comme boule unité de $\mathbf{R}^3$. On désigne par $S_r \subset \mathbf{D}^3$ la sphère de rayon r et par B_r la boule qu'elle borde. Pour r variant de 0 à 1, on remplace $\xi|_{B_r}$ par la structure obtenue canoniquement à partir du feuilletage $S_{r,\xi}$. On obtient ainsi un chemin ξ_r, $r \in [0, 1]$, formé de structures de contact qui coïncident toutes au bord, dont l'origine ξ_0 n'est autre que ξ et dont l'extrémité est le point-base défini par $\partial\mathbf{D}^3_\xi$. ∎

Démonstration du théorème 0.11 [El2]. Pour voir que deux structures de contact tendues sur $\mathbf{S}^3$ sont isotopes, on les fait coïncider, par isotopie, sur une petite boule et on applique le théorème **2.8** à la boule complémentaire. Maintenant, pour montrer qu'une structure de contact tendue ξ sur $\mathbf{R}^3$ est isomorphe à la structure usuelle ζ_0, on procède par exhaustion (voir [ElGr] pour des arguments analogues en topologie symplectique). Pour tout $n \geq 1$, soit B_n la boule de rayon n centrée à l'origine. En appliquant une première isotopie à ξ, on peut faire en sorte que, pour tout n, les feuilletages tracés par ξ et ζ_0 sur ∂B_n soient différentiablement conjugués (lemmes **2.1** et **2.6**). D'après le théorème **2.8**, (B_n, ξ) est alors isomorphe à (B_n, ζ_0) pour tout n. Pour rendre compatibles ces isomorphismes (ou du moins une sous-suite d'entre eux) afin qu'ils engendrent un isomorphisme de $(\mathbf{R}^3, \xi)$ dans $(\mathbf{R}^3, \zeta_0)$, il reste simplement à vérifier que l'espace des plongements $(B_n, \xi) \to (\mathbf{R}^3, \zeta_0)$ est

connexe et que toute isotopie de plongements de contact se prolonge en une isotopie ambiante. ■

D. Nœuds legendriens et transversaux.

Les nœuds legendriens et transversaux ont d'abord été étudiés dans $\mathbf{S}^3$ par W. Thurston puis D. Bennequin qui ont dégagé certains invariants de nature homologique. Ya. Eliashberg a étendu leur définition comme suit.

Soit (V,ξ) une variété de contact et L (resp. K) une courbe legendrienne (resp. transversale à ξ) fermée, orientée et homologue à zéro. On se donne une surface orientée F bordée par L (resp. par K) et une section non singulière τ de $\xi|_F$. On appelle :

- *invariant de Thurston-Bennequin de* L le nombre d'enlacement $\mathrm{TB}(L)$ de L avec la courbe obtenue en poussant légèrement L suivant un champ de vecteurs normal à ξ ;
- *enroulement de* L *dans* ξ *relativement à* F le degré $\mathtt{r}(L,F)$, dans ξ orienté, de la tangente orientée à L par rapport à $\tau|_{L=\partial F}$;
- *auto-enlacement de* K *dans* ξ *relativement à* F le nombre d'enlacement $\mathtt{l}(K,F)$ de K avec la courbe obtenue en poussant K suivant τ.

Les nombres $\mathtt{r}(L,F)$ et $\mathtt{l}(K,F)$ ne dépendent en fait que de la classe d'homologie de F relativement à son bord. De plus, le choix de F est souvent clair dans le contexte ou sans importance (par exemple si la classe d'Euler de ξ est nulle) si bien qu'on écrit simplement $\mathtt{r}(L)$ et $\mathtt{l}(K)$. Enfin, quand on renverse les orientations de L et K, $\mathtt{r}(L)$ change de signe mais $\mathrm{TB}(L)$ et $\mathtt{l}(K)$ restent les mêmes.

Comme pour la classe d'Euler, il est facile de lire les invariants précédents sur le feuilletage caractéristique de F et de voir ainsi que, comme $\chi(F)$, $\mathtt{l}(K,F)$ est nécessairement un entier impair. De plus, en adaptant aux surfaces à bord les techniques utilisées en **2.A** et **2.B**, Ya. Eliashberg obtient les inégalités suivantes, que D. Bennequin avait mises en lumière dans $\mathbf{S}^3$ [Ben1] :

Théorème 2.10 : *Inégalités de Bennequin* [El4, El5]. *Si* ξ *est tendue et si* F *est plongée dans* V, *les invariants ci-dessus vérifient :*

$$\begin{aligned} \mathrm{TB}(L) &\leq -\chi(F) - |\mathtt{r}(L,F)| \\ \mathtt{l}(K,F) &\leq -\chi(F)\,. \end{aligned}$$

Exemple 2.11. Dans $\mathbf{R}^3$, la structure usuelle ζ_0 d'équation $dz - r^2\,d\theta = 0$ est partout transversale à $\partial/\partial z$, donc la projection d'un nœud legendrien L sur le plan $z = 0$ donne toujours un *diagramme* L_0. Par suite, pour que deux nœuds legendriens soient isotopes comme tels, ils doivent d'abord être *régulièrement isotopes* comme

nœuds topologiques (i.e. isotopes parmi des nœuds qui se projettent par immersion). De plus, les invariants $\mathtt{r}(L)$ et $\mathrm{TB}(L)$ sont, au signe près, l'enroulement et le nombre de Tait (somme algébrique des croisements) du diagramme L_0. Or il est bien connu que ces deux invariants caractérisent, dans une classe d'isotopie donnée, la classe d'isotopie régulière d'un nœud topologique. Le théorème qui suit est un analogue de ce fait pour les nœuds legendriens topologiquement triviaux.

Théorème 2.12 [El5]. *Dans une variété de contact tendue, deux nœuds legendriens topologiquement triviaux L et L' sont isotopes comme nœuds legendriens si et seulement si $\mathtt{r}(L) = \mathtt{r}(L')$ et $\mathrm{TB}(L) = \mathrm{TB}(L')$. De même, deux nœuds transversaux topologiquement triviaux K et K' sont isotopes comme nœuds transversaux si et seulement si $\mathtt{l}(K) = \mathtt{l}(K')$.*

Démonstration. On esquisse simplement le cas des nœuds transversaux. Les techniques de **2.A** permettent de voir que K (comme K') borde un disque D dont le feuilletage caractéristique sort transversalement le long du bord et a pour singularités exactement $n+1$ foyers positifs et n selles négatives (où $\mathtt{l}(K) = -(2n+1)$), les variétés stables de ces selles formant un arbre T n'ayant que deux extrémités. Comme on peut, par isotopie, rétracter K sur un voisinage arbitrairement petit de T dans D, il suffit de trouver une isotopie qui envoie le germe de D le long de T sur le germe analogue pour K' : c'est facile. ∎

Remarque 2.13. On peut construire sans difficulté des nœuds legendriens (resp. transversaux) topologiquement triviaux et dont les invariants TB et r (resp. l) prennent toutes les valeurs (resp. les valeurs impaires) permises par l'inégalité de Bennequin. En revanche, pour les nœuds topologiquement non triviaux, l'inégalité de Bennequin semble loin d'être optimale et, de plus, il est peu probable que le théorème **2.12** reste vrai.

3. Exemples de structures de contact tendues.

A. Structures revêtues par des structures tendues.

Le théorème de D. Bennequin donne comme premiers exemples de structures tendues les structures usuelles de $\mathbf{S}^3$ et $\mathbf{R}^3$. On en obtient d'autres en observant que toute structure qui revêt une structure vrillée est elle-même vrillée puisque la préimage d'un disque est un disque ayant même feuilletage caractéristique. Autrement dit, *toute structure revêtue par une structure tendue est tendue.*

Exemples 3.1.

a) La structure de contact naturelle sur l'espace $ST^*\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ des droites coorientées tangentes à $\mathbf{R}^2$ est définie par $\cos\theta\, dx_1 + \sin\theta\, dx_2 = 0$ (cf. exemple **0.1 b**). Son revêtement universel est donc donné par la même équation mais avec $\theta \in \mathbf{R}$. On ramène cette structure à la structure usuelle d'équation $dy -$

$p\,dx = 0$ par le changement de variables $x = \theta$, $p = -\sin\theta\, x_1 + \cos\theta\, x_2$, $y = \cos\theta\, x_1 + \sin\theta\, x_2$. Il en résulte que, pour toute surface F différente de $\mathbf{S}^2$ et $\mathbf{P}^2$, la structure naturelle sur ST^*F est tendue. Par suite, la structure de contact invariante sur $SL_2(\mathbf{R})$ (fibré tangent unitaire du disque de Poincaré) est tendue, ainsi que toutes les structures qu'on en déduit sur les quotients $SL_2(\mathbf{R})/\Gamma$.

b) Les structures naturelles sur $ST^*\mathbf{S}^2$ et $ST^*\mathbf{P}^2$ sont également tendues car revêtues par la structure usuelle de $\mathbf{S}^3$. Par ailleurs, si p et q sont des entiers premiers entre eux, $0 < q < p$, et si ν est une racine primitive p-ième de l'unité, l'application linéaire complexe $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$, $(z, w) \mapsto (\nu z, \nu^q w)$, préserve la structure ζ_0 des droites complexes tangentes à $\mathbf{S}^3$; il en résulte une structure de contact tendue sur l'espace lenticulaire $\mathbf{L}(p, q)$.

B. Structures symplectiquement remplissables.

Définition 3.2 [El1, El4]. Soit ξ un champ de plans orientés sur une variété fermée orientée V de dimension 3 (si ξ est une structure de contact, on met sur V l'orientation induite par ξ). On dit que (V, ξ) (ou simplement ξ) est *symplectiquement remplissable* s'il existe une variété symplectique compacte (W, ω) de dimension 4 pour laquelle :

(i) V est le bord orienté de W ;

(ii) $\omega|_\xi$ est positive.

Exemple 3.3. Une variété complexe compacte W (de dimension 2) à bord strictement pseudo-convexe $V = \partial W$ est toujours kählérienne [GuRo, Ben2]. Il s'en suit que la structure de contact naturelle de V (cf. exemple **0.1 c**) est symplectiquement remplissable. C'est par exemple le cas de la structure de contact usuelle sur $\mathbf{S}^3$.

Le théorème qui suit, dû à M. Gromov et Ya. Eliashberg, est une généralisation puissante du théorème de D. Bennequin :

Théorème 3.4 [Gro2, El4, Ben2]. *Toute structure de contact symplectiquement remplissable est tendue.*

Remarque. On ignore s'il existe des structures tendues qui n'admettent pas de remplissages symplectiques.

Voici maintenant un procédé pour construire des structures symplectiquement remplissables. Soit L un nœud legendrien orienté dans une variété de contact (V, ξ). Comme ξ oriente V, le fibré normal à L est orienté ; de plus, il possède une section canonique définie par ξ. Ainsi, tout champ de vecteurs ν normal à L détermine une chirurgie de Morse d'indice 2 le long de L (via "la" trivialisation normale directe qu'il induit) et cette chirurgie ne dépend que du degré k de ν par rapport à ξ : on l'appelle *k-chirurgie de V le long de L*. On montre sans trop de peine que :

Théorème 3.5 [El5, El7, We]. *Si (V,ξ) est symplectiquement remplissable, la variété V' obtenue par -1-chirurgie de V le long de L porte naturellement une structure de contact ξ' symplectiquement remplissable.*

Remarque 3.6. Si L est homologue à zéro dans V, il est clair que la topologie de V' dépend uniquement du type de L comme nœud topologique et de la valeur de l'invariant de Thurston-Bennequin $\mathrm{TB}(L)$. Cependant, la structure ξ' peut, elle, dépendre du type de L comme nœud legendrien. En particulier, l'enroulement $\mathtt{r}(L)$ peut influer sur la classe d'Euler de ξ'.

Exemple 3.7 [El5]. *Soit L un nœud legendrien orienté topologiquement trivial dans $\mathbf{S}^3$ muni de sa structure usuelle. Si $\mathrm{TB}(L) = -p$ et $\mathtt{r}(L) = q$, la -1-chirurgie de $\mathbf{S}^3$ le long de L donne l'espace lenticulaire $\mathbf{L}(p+1,1)$ muni d'une structure remplissable ξ dont la classe d'Euler vaut :*

$$\mathrm{E}(\xi) = q \pmod{p+1} \in H^2(\mathbf{L}(p+1,1),\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_{p+1}\,.$$

C. Structures de contact tendues et feuilletages tendus.

Définition 3.8. Soit V une variété fermée orientée de dimension 3 et $\mathcal{F}$ un feuilletage orienté de codimension 1 sur V.

a) On dit que $\mathcal{F}$ est *tendu (taut)* s'il existe une courbe fermée transversale à $\mathcal{F}$ qui coupe toutes les feuilles (en particulier, $\mathcal{F}$ n'a aucune composante de Reeb).

b) On dit qu'une feuille F est *de profondeur* 0 si elle est compacte, et *de profondeur* $k+1$, $k = 0, 1\ldots$, si $(\mathrm{Adh}F)\setminus F$ est formé de feuilles de profondeurs strictement inférieures et contient au moins une feuille de profondeur k. Si toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont de profondeur finie et bornée, on appelle *profondeur du feuilletage* le maximum des profondeurs de ses feuilles (voir [CaCo, Ga, He]).

Les travaux de G. Reeb, S.P. Novikov et H. Rosenberg [Ros] montrent que, si V porte un feuilletage tendu $\mathcal{F}$, ou bien V est irréductible (c'est-à-dire que toute sphère plongée dans V y borde une boule), ou bien V est $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$ et $\mathcal{F}$ est le feuilletage produit. Réciproquement :

Théorème 3.9 [Ga]. *Si V est irréductible et si $H_2(V)$ est non nul, V porte un feuilletage tendu de profondeur finie (en général peu différentiable).*

En comparant les énoncés de **2.B** avec certains résultats de [Le, Rou, Su, Th1, Th2], on note une parenté entre les structures de contact tendues et les feuilletages sans composantes de Reeb. D'ailleurs, la modification de Lutz, qui vrille les structures de contact, rappelle beaucoup l'opération qui permet d'introduire une composante de Reeb dans un feuilletage. Le théorème qui suit, annoncé récemment par W. Thurston, établit des liens concrets :

Théorème 3.10 [Th3]. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage tendu de profondeur finie sur une variété V irréductible. Il existe sur V des structures de contact positives arbitrairement C^0-proches de $\mathcal{F}$ et (pour cette raison) tendues.*

Le fil de la démonstration présentée par W. Thurston [Th3, El6] est le suivant : on définit d'abord la structure de contact près des feuilles compactes puis on l'étend successivement aux feuilles de profondeur $1, 2 \ldots$ en adaptant le procédé de diffusion mis au point par S. Altschuler [Al]. On montre que les structures sont tendues en montrant que le feuilletage $\mathcal{F}$ est *symplectiquement cobordant* (en un sens évident avec la définition **3.2**) à un feuilletage tendu $\mathcal{F}'$ de profondeur strictement inférieure sur une variété irréductible V'. Voici comment traiter le cas des feuilletages de profondeur 0, c'est-à-dire des fibrations sur le cercle.

Exemple 3.11 [Th3, El6]. *Soit V une variété fermée orientée de dimension 3 fibrée au-dessus du cercle en surfaces orientées F de genre g. On note η le champ des plans orientés tangents aux fibres.*

a) *À revêtement fini près, (V, η) est symplectiquement remplissable (cf. définition* **3.2***).*

b) *Si $g \geq 1$, il existe sur V des structures de contact positives arbitrairement C^0-proches de η, donc tendues puisque revêtues par des structures symplectiquement remplissables.*

Démonstration.

a) Le groupe modulaire de F (groupe des classes d'isotopies de difféomorphismes préservant l'orientation) a pour abélianisé un groupe cyclique fini (nul dès que $g \geq 3$ [Mum, Po]). Autrement dit, à revêtement fini près, la monodromie φ du fibré V est le produit d'un certain nombre h de commutateurs. Il en résulte que ce fibré s'étend en un fibré $\pi : W \to S$ où W est une variété compacte de dimension 4 bordée par V et S est une surface compacte orientée de genre h bordée par un cercle. De plus, il existe sur W une 2-forme *fermée* ω_0 de rang partout égal à 2 et positive sur les fibres au-dessus de S. En effet, tout difféomorphisme d'une variété fermée est isotope à un difféomorphisme isochore [Mo], de sorte qu'on peut supposer que φ et tous les difféomorphismes de sa décomposition en commutateurs préservent l'aire. Étant donné alors une forme d'aire ω sur S, la somme $\pi^\star\omega + \omega_0$ est une structure symplectique sur W qui est positive sur les fibres.

b) On regarde V comme le produit $F \times [0,1]$ dans lequel $F \times \{0\}$ et $F \times \{1\}$ sont identifiés par la monodromie φ, difféomorphisme de F bien défini seulement à isotopie près. On va définir les structures de contact voulues par des équations du type $\alpha_t + dt = 0$ où t désigne la coordonnée dans $[0,1]$, les α_t sont des 1-formes sur $F = F \times \{t\}$ et $\alpha_1 = \varphi_\star\alpha_0$. La C^0-proximité avec le champ η d'équation $dt = 0$ est mesurée par la petitesse des formes α_t et la condition de contact s'écrit $d\alpha_t - \alpha_t \wedge \dot{\alpha}_t > 0$. Cette inégalité signifie qu'aux singularités de α_t, $d\alpha_t$ doit être positive et qu'en dehors, le feuilletage défini par α_t doit tourner en fonction de t

(dans le sens indirect) assez vite pour compenser $d\alpha_t$ mais surtout d'autant plus vite qu'on veut les α_t petites (la multiplication de α_t par ε change $d\alpha_t$ en $\varepsilon\, d\alpha_t$ et $\alpha_t \wedge \dot{\alpha}_t$ en $\varepsilon^2\, \alpha_t \wedge \dot{\alpha}_t$). Il s'agit maintenant d'exhiber une forme α_0 pour laquelle on puisse trouver un bon chemin α_t entre α_0 et $\varphi_\star \alpha_0$.

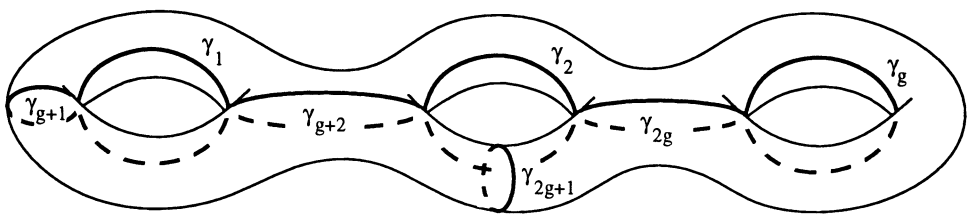


Figure 5

D'après [Hu], le groupe modulaire de F est engendré par les twists de Dehn autour des $2g+1$ courbes γ_i de la figure **5**. Soit alors α_0 une 1-forme fermée sur F n'ayant comme singularités que $2g-2$ selles et dont le feuilletage $\mathcal{F}_0$ est dessiné sur la figure **6**. La forme α_0 définit une trivialisation de la surface à bord F' obtenue en retirant à F un petit voisinage ouvert U des selles. Autour de chaque courbe γ_i, on peut trouver un anneau A_i disjoint de U et feuilleté par $\mathcal{F}_0$ en cercles parallèles au bord ou en segments allant d'un bord à l'autre. Par suite, un twist de Dehn à support dans A_i envoie $\mathcal{F}_0$ sur un feuilletage qui est homotope à $\mathcal{F}_0$ relativement à $F \setminus A_i$ et ceci parmi les feuilletages non singuliers sur A_i. Comme (à isotopie près) φ est produit de tels twists, $\alpha_1 = \varphi_\star \alpha_0$ coïncide avec α_0 hors de la réunion des anneaux A_i et définit sur F', via la trivialisation donnée par α_0, une application $h_1 : F' \to \mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ homotope à l'application constante $h_0 = 0$ donnée par α_0. Étant donné un entier n arbitrairement grand, on peut donc relever h_1 en une fonction $\tilde{h}_1 : F' \to \mathbf{R}$ égale à $-2n$ au bord et partout majorée par $-n$. On peut ainsi joindre les restrictions à F' de α_0 et α_1 par un chemin α_t tel que $-\alpha_t \wedge \dot{\alpha}_t$ soit arbitrairement grand ($d\alpha_t$ restant borné). Pour prolonger α_t à F, on observe qu'une selle étant d'indice -1, quand on fait tourner son portrait de phase de n tours dans le sens indirect, les vecteurs font en chaque point $2n$ tours dans le même sens. Enfin, on perturbe légèrement α_t pour que $d\alpha_t$ soit positive aux singularités. ∎

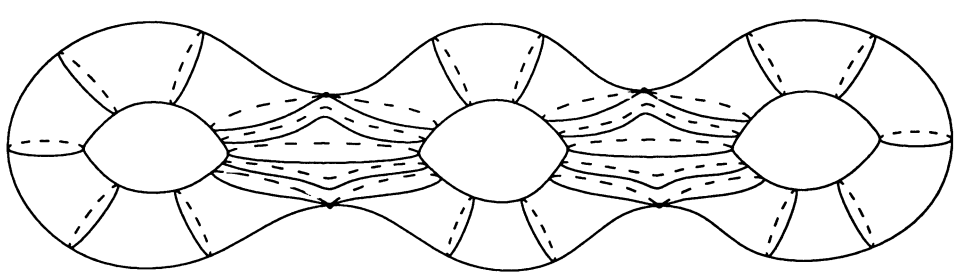


Figure 6

Remarque 3.12. Dans la preuve du **a**, on peut choisir le genre h de S arbitrairement grand et obtenir ainsi une infinité de remplissages symplectiques topologiquement différents qui ont tous un π_2 nul. Ceci contraste avec les résultats de Ya. Eliashberg et D. McDuff qui montrent que les structures usuelles sur la sphère et les espaces lenticulaires (cf. exemple **3.1 b**) n'admettent, à éclatement près, qu'un nombre fini de remplissages [El4, McD2, Ben2].

D. Exemples de structures tendues non isomorphes.

Pour clore cet exposé, voici deux résultats qui contrastent avec les théorèmes d'unicité de **2.C**. Pour tout réel positif a, on note ξ_a la structure de contact définie sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$ par $a^2r^2\,d\theta_1 + (1+r^2)\,d\theta_2 = 0$, où (r, θ_1) sont des coordonnées polaires dans $\mathbf{R}^2$ et où $\theta_2 \in \mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Chaque structure ξ_a est tendue car elle se plonge dans $(\mathbf{S}^3, \zeta_0)$: $(r, \theta_1, \theta_2) \mapsto (r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) \in \mathbf{C}^2$, où $r_1^2 + r_2^2 = 1$ et $r_1^2/r_2^2 = a^2r^2/(1+r^2)$ (l'image du plongement est le tore plein $0 \leq r_1 < a/\sqrt{1+a^2}$).

Théorème 3.13 [El3]. *Deux structures ξ_a et ξ_b sont isomorphes si et seulement si $1/a^2 - 1/b^2$ est un entier.*

Démonstration. Si $1/a^2 - 1/b^2$ est un entier k, le difféomorphisme

$$(r, \theta_1, \theta_2) \mapsto ((a/b)r, \theta_1 + k\theta_2, \theta_2)$$

envoie ξ_a sur ξ_b. Maintenant, s'il existe un difféomorphisme φ qui envoie ξ_a sur ξ_b, il induit, par son action à l'infini de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$, un isomorphisme $\psi : H^1(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}) \to H^1(\mathbf{T}^2, \mathbf{R})$ qui préserve $[d\theta_2]$ (au signe près) et envoie donc $[d\theta_1]$ sur $[d\theta_1 + k d\theta_2]$ pour un certain entier k. Pour tous c et C positifs, on pose $V_C = \{(r, \theta_1, \theta_2) \mid r > C\}$, $U_{cC} = \{(c^2r^2t, (1+r^2)t) \in \mathbf{R}^2 \mid t > 0,\ r > C\}$ et on munit $T^\star\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^2 = \{(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2)\}$ de sa structure symplectique canonique, différentielle de la forme $p_1\,d\theta_1 + p_2\,d\theta_2$. Pour tout $B > 0$, V_B contient l'image d'un certain V_A. Par *symplectisation* de $\varphi|_{V_A}$: $V_A \to V_B$ [Ar1, El3], on construit un plongement $\mathbf{T}^2 \times U_{aA} \to \mathbf{T}^2 \times U_{bB}$ qui préserve la forme $p_1\,d\theta_1 + p_2\,d\theta_2$. Un théorème de V. Benci, généralisé par J.-C. Sikorav [Si1], montre qu'alors U_{bB} contient l'image de U_{aA} par l'isomorphisme linéaire $\psi^{-1} \in GL_2(\mathbf{Z})$. Cela entraîne $1/b^2 \leq 1/a^2 - k \leq (1+B^2)/b^2B^2$ donc, en faisant tendre B vers l'infini, $k = 1/a^2 - 1/b^2$. ∎

Ce recours, via symplectisation, aux théorèmes de rigidité concernant les sous-variétés lagrangiennes exactes des espaces cotangents [Gro2, LaSi, Si1, Si2] est également à la base du résultat suivant. Pour tout $n \geq 1$, on désigne par ζ_n la structure de contact définie sur $\mathbf{T}^3 = ST^\star\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}^2 \times \mathbf{S}^1$ par $\cos(n\theta)\,dx_1 + \sin(n\theta)\,dx_2 = 0$, où $(x_1, x_2) \in \mathbf{T}^2$ et $\theta \in \mathbf{S}^1$ (la structure ζ_1 est la structure usuelle sur $ST^\star\mathbf{T}^2$). Les structures ζ_n sont toutes tendues (cf. **3.A**) et sont homotopes comme champs de plans (cf. exemple **0.6**).

Théorème 3.14 [Gi2]. *Pour $n > 1$, ζ_n n'est pas isomorphe à ζ_1.*

BIBLIOGRAPHIE

[Al] S. ALTSCHULER, *A linear contact flow for 3-dimensional manifolds*, prépublication (Camberra) 1991.

[Ar1] V.I. ARNOLD, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir 1974.

[Ar2] V.I. ARNOLD, *Singularities of caustics and wave fronts*, Kluwer 1990.

[Ar3] V.I. ARNOLD, *Contact geometry and wave propagation*, L'Ens. Math. **36** (1990), 215–266.

[Ar4] V.I. ARNOLD, *Contact geometry : the geometrical method of Gibbs's thermodynamics*, Proc. of the Gibbs Symp., D.G. Caldi et G.D. Mostow eds, Amer. Math. Soc. (1990), 163–179.

[Ar5] V.I. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Mir 1978.

[Au] M. AUDIN, *Cobordisme d'immersions lagrangiennes et legendriennes*, Travaux en Cours **20**, Hermann 1987.

[Ben1] D. BENNEQUIN, *Entrelacements et équations de Pfaff*, Soc. Math. France, Astérisque **107-108** (1983), 83–161.

[Ben2] D. BENNEQUIN, *Topologie symplectique, convexité holomorphe et structures de contact [d'après Ya. Eliashberg, D. McDuff et al.]*, Sém. Bourbaki exposé 725, Soc. Math. France, Astérisque **189-190** (1990), 285–323.

[BFG] M. BEALS, C. FEFFERMAN et R. GROSSMAN, *Strictly pseudo-convex domains in* $\mathbf{C}^n$, Bull. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 125–322.

[Bl] D. BLAIR, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Springer Lect. Notes in Math. **509** (1976).

[CaCo] J.C. CANTWELL et L.W. CONLON, *Poincaré-Bendixson's theory for leaves of codimension* 1, Trans. Amer. Math. Soc. **265** (1981), 181–209.

[Ch] S.S. CHERN, *The geometry of G-structures*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 167–219.

[Dav] A.A. DAVYDOV, *Normal forms of differential equations, unresolved in derivative*, Funct. Anal. Appl. **19** (1985), 1–10.

[Dou] A. DOUADY, *Nœuds et structures de contact en dimension* 3 *[d'après D. Bennequin]*, Sém. Bourbaki exposé 604, Soc. Math. France, Astérisque **105-106** (1983), 129–148.

[El1] YA. ELIASHBERG, *Classification of overtwisted contact structures on* 3*-manifolds*, Invent. Math. **98** (1989), 623–637.

[El2] YA. ELIASHBERG, *Contact 3-manifolds, twenty years since J. Martinet's work*, Ann. Inst. Fourier **42** (1992), 165–192.

[El3] YA. ELIASHBERG, *New invariants of open symplectic and contact manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 513–520.

[El4] YA. ELIASHBERG, *Filling by holomorphic discs and its applications*, London Math. Soc. Lect. Notes Ser. **151** (1991), 45–67.

[El5] YA. ELIASHBERG, *Legendrian and transversal knots in tight contact manifolds*, à paraître dans le livre *Topological methods in modern mathematics* (en l'honneur de J. Milnor), Publish or Perish.

[El6] YA. ELIASHBERG, communication orale privée sur des travaux récents de W. Thurston (Luminy), mai 1992.

[El7] YA. ELIASHBERG, *Topological characterization of Stein manifolds of dimension* > 2, Int. J. of Math. **1** (1990), 29–46.

[El8] YA. ELIASHBERG, *On symplectic manifolds with some contact properties*, J. Diff. Geom. **33** (1991), 233–238.

[ElGr] YA. ELIASHBERG et M. GROMOV, *Convex symplectic manifolds*, Proc. of Symp. in Pure Math. **52** (1991), 135–162.

[Ga] D. GABAI, *Foliations and the topology of 3-manifolds*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 445–503.

[Gei] H. GEIGES, *Contact structures on* $(n-1)$*-connected* $(2n+1)$*-manifolds*, Pacific J. of Math (à paraître).

[Gi1] E. GIROUX, *Convexité en topologie de contact*, Comment. Math. Helv. **66** (1991), 637–677.

[Gi2] E. GIROUX, *Une structure de contact, même tendue, est plus ou moins tordue*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. (à paraître).

[Gra] J.W. GRAY, *Some global properties of contact structures*, Ann. of Math. **69** (1959), 421–450.

[Gro1] M. GROMOV, *Stable maps of foliations into manifolds*, Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. **33** (1969), 707 734.

[Gro2] M. GROMOV, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307–347.

[Gro3] M. GROMOV, *Partial differential relations*, Springer Verlag 1986.

[GuRo] R. GUNNING et H. ROSSI, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice Hall 1965.

[He] G. HECTOR, *Architecture des feuilletages de classe* C^2, Soc. Math. France, Astérisque **107-108** (1983), 243–258.

[Hu] S. HUMPHRIES, *Generators for the mapping class group*, Springer Lect. Notes in Math. **722** (1979), 44–47.

[LaSi] F. LALONDE et J.-C. SIKORAV, *Sous-variétés lagrangiennes et lagrangiennes exactes des fibrés cotangents*, Comment. Math. Helv. **66** (1991), 18–33.

[Le] G. LEVITT, *Feuilletages des variétés de dimension* 3 *qui sont des fibrés en cercles*, Comment. Math. Helv. **53** (1978), 572–594.

[Lu1] R. LUTZ, *Sur quelques propriétés des formes différentielles en dimension* 3, thèse (Strasbourg) 1971.

[Lu2] R. LUTZ, *Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension* 3, Ann. Inst. Fourier **27** (1977), 1–15.

[Lu3] R. LUTZ, *Sur la géométrie des structures de contact invariantes*, Ann. Inst. Fourier **29** (1979), 283–303.

[Ma] J. MARTINET, *Formes de contact sur les variétés de dimension* 3, Springer Lect. Notes in Math. **209** (1971), 142–163.

[McD1] D. MCDUFF, *Applications of convex integration to symplectic and contact geometry*, Ann. Inst. Fourier **37** (1987), 107–133.

[McD2] D. MCDUFF, *The structure of rational and ruled symplectic* 4*-manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 679–712.

[Me] C. MECKERT, *Forme de contact sur la somme connexe de deux variétés de contact de dimension impaire*, Ann. Inst. Fourier **32** (1982), 251–260.

[Mo] J. MOSER, *On the volume element of a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965), 286–294.

[Mul] M.-P. MULLER, *Une structure symplectique sur* $\mathbf{R}^6$ *avec une sphère lagrangienne plongée et un champ de Liouville complet*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), 623–663.

[Mum] D. MUMFORD, *Abelian quotients of the Teichmüller modular group*, J. d'Anal. Math. **18** (1967), 227–244.

[Po] J. POWELL, *Two theorems on the mapping class group of a surface*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), 347–350.

[Ros] H. ROSENBERG, *Foliations by planes*, Topology **7** (1968), 131–138.

[Rou] R. ROUSSARIE, *Plongements dans les variétés feuilletées et classification de feuilletages sans holonomie*, Publ. Math. I.H.E.S. **43** (1973), 101–142.

[Ru] M. RUMIN, *Formes différentielles sur les variétés de contact*, thèse (Orsay) 1992.

[Si1] J.-C. SIKORAV, *Rigidité symplectique dans le cotangent de* $\mathbf{T}^n$, Duke Math. J. **59** (1989), 227–231.

[Si2] J.-C. SIKORAV, *Quelques propriétés des plongements lagrangiens*, Suppl. Bull. Soc. Math. France, Mem. No 46, **119** (1991), 151–167.

[Su] D. SULLIVAN, *A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces*, Comment. Math. Helv. **54** (1979), 218–223.

[Th1] W. THURSTON, *Foliations of manifolds which are circle-bundles*, thèse (Berkeley) 1972.

[Th2] W. THURSTON, *A norm for the homology of 3-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **339** (1986), 99 130.

[Th3] W. THURSTON, *Contact structures and foliations on 3-manifolds*, exposé oral à la West Coast Topology Conf. (Stanford), mai 1992.

[ThWi] W. THURSTON et H. WINKELNKEMPER, *On the existence of contact forms*, Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 345–347.

[We] A. WEINSTEIN, *Contact surgeries and symplectic handlebodies*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 241–251.

Emmanuel GIROUX
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
U.M.R. 128 du C.N.R.S.
Ecole Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 LYON CEDEX 07

Astérisque

PAUL-ANDRÉ MEYER

Progrès récents en calcul stochastique quantique

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki, exp. n° 761, p. 35-47
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__35_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 1992
45ème année, 1992-93, n° 761

PROGRÈS RÉCENTS EN CALCUL STOCHASTIQUE QUANTIQUE

par Paul-André MEYER

Introduction. Le calcul stochastique quantique (voir aussi l'exposé n° 672, Nov. 1986) devrait jouer en physique quantique le rôle que joue le calcul stochastique classique dans la modélisation de systèmes mécaniques perturbés par un bruit. L'objet du calcul stochastique quantique est, en un sens très général, la classification des "bruits quantiques", et l'étude de divers types d'équations d'évolution comportant un terme de bruit. La théorie, claire quant à ses idées principales depuis quelques années, a souffert au début d'insuffisances du côté de l'analyse : on ne savait traiter que le cas d'opérateurs bornés. C'est seulement depuis 1991 que la puissance des méthodes non commutatives a commencé à se comparer à celle des méthodes probabilistes classiques.

1. Calcul stochastique classique. Il s'agit d'une théorie ancienne (Ito, 1945) qui a connu encore de très grands progrès dans les années 80. Elle fournit une méthode pour construire, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ du mouvement brownien $B_t = (B_t^\alpha)$ (composantes indépendantes en nombre fini) un processus de diffusion $X_t = (X_t^i)$ au moyen d'une équation différentielle stochastique (é.d.s.) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

$$X_t = X_0 + \sum_\alpha \int_0^t a_\alpha(X_s)\, dB_s^\alpha + \int_0^t b(X_s)\, ds \ . \tag{1.1}$$

Lorsque les termes aléatoires sont absents, ce qu'on écrit est une équation différentielle ordinaire, et il est remarquable que la condition d'existence et d'unicité des solutions de (1.1) soit la même hypothèse de Lipschitz que dans le cas déterministe. Sous des conditions de Lipschitz locales (en particulier lorsque les coefficients sont différentiables), la solution existe localement, mais peut exploser en temps fini. On suppose qu'elle n'est pas explosive.

On prend en général $X_0 = x$, d'où une fonction de trois variables, $X_t(x, \omega)$, la troisième desquelles est la courbe brownienne $B_\bullet(\omega)$. On peut préciser suffisamment les ensembles négligeables en construisant la solution pour obtenir, pour

presque tout ω et tout t fixé, une application $x \longmapsto X_t(x,\omega)$. Cette application est $\mathcal{C}^\infty$ si les coefficients le sont, et définit (sous les hypothèses de Lipschitz globales) un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$.

En prenant une espérance $\mathbb{E}$ (*i.e.* en intégrant) on obtient un semi-groupe sur les fonctions

$$P_t f(x) = \mathbb{E}[\, f \circ X_t(x,\omega)\,] \ , \tag{1.2}$$

dont le générateur est l'opérateur du second ordre

$$L = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha ij} a^i_\alpha a^j_\alpha \, D_{ij} + \sum_i b^i D_i \ . \tag{1.3}$$

Un même semi-groupe (P_t) (ou un même processus de Markov admettant ce semi-groupe de transition) peut être construit au moyen d'une infinité d'é.d.s. différentes : la notion de fonction de trois variables $X(x,t,\omega)$ ci-dessus est appelée un *flot stochastique*; d'où le nom de *flot quantique,* pour la notion non-commutative que l'on trouvera plus loin.

L'équation différentielle stochastique (1.1) a un sens dans une variété E, en interprétant les X^i comme des coordonnées locales, mais cela pose des problèmes de localisation et de recollement assez délicats. Il est plus intéressant d'appliquer à l'équation (1.1) une fonction $\mathcal{C}^\infty$ arbitraire f sur E. L'application de la formule d'Ito nous donne

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_\alpha \int_0^t L_\alpha f(X_s)\, dB^\alpha_s + \int_0^t Lf(X_s)\, ds \tag{1.4}$$

avec $L_\alpha f = \sum_i a^i_\alpha D_i f$ et L comme en (1.3) (le générateur).

Une notation utile consiste à poser $dB^0_t = dt$, $L_0 = L$, et à distinguer deux types d'indices grecs : $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ qui ne prennent pas la valeur 0, et $\rho, \sigma, \tau \ldots$ qui peuvent la prendre. On s'en servira plus loin.

On transcrit alors la construction en langage algébrique : on a deux "espaces" la variété E et l'espace probabilisé Ω, qui sont représentés par deux algèbres à unité, l'algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(E)$ et l'algèbre $\mathcal{B} = L^\infty(\Omega)$ — plus précisément, le rôle du temps est décrit par une famille croissante $(\mathcal{B}_t)$ d'algèbres sur Ω. L'inconnue est une famille d'homomorphismes de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}_t$, $f \longmapsto f \circ X_t$. La donnée initiale est un homomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}_0$, $f \longmapsto f(X_0)$ (par exemple, l'homomorphisme $f \longmapsto f(x)1$). On voit bien alors le rôle différent des v.a. browniennes B^α_t, qui sont "plates" par opposition aux v.a. X_t qui sont "courbes." Les coefficients L_α et L sont des applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ (noter la perte de généralité : cela ne s'applique plus qu'aux coefficients $\mathcal{C}^\infty$). En écrivant que les applications $f \longmapsto f \circ X_t$ sont des homomorphismes, on obtient des propriétés intéressantes

1) $L_\alpha(fg) - fL_\alpha g - (L_\alpha f)\, g = 0$ (les L_α sont des dérivations de $\mathcal{A}$);
2) $L(fg) - fLg - (Lf)\, g = \sum_\alpha L_\alpha f L_\alpha g$.

Ce formalisme algébrique a l'avantage de s'étendre au cas non-commutatif.

2. Opérateurs fondamentaux. Nous allons remplacer l'algèbre $\mathcal{A}$ par une algèbre complexe à unité, munie d'une involution (tous les homomorphismes considérés respectent ces deux éléments, sans autre spécification). On suppose $\mathcal{A}$ réalisée comme algèbre d'opérateurs (bornés pour simplifier, mais $\mathcal{A}$ n'est pas une C^*-algèbre en général) sur un espace (pré)hilbertien $\mathcal{J}$, l'*espace initial* $\mathcal{J}$. Dans la situation ci-dessus, $\mathcal{J}$ pourrait être l'espace L^2 d'une "mesure de Lebesgue" sur la variété, ou mieux, l'espace des demi-densités de carré intégrable, sur lequel l'algèbre $\mathcal{C}^\infty$ opère par multiplication.

La source de "bruit non commutatif" (l'espace plat) sera l'espace de Fock Φ construit sur $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$ — la présence de $\mathbb{R}_+$ donne à cet espace une structure temporelle. La dimension de $\mathcal{K}$ est appelée la *multiplicité* : l'utilisation systématique de la multiplicité infinie est une conquête récente (thèse de Mohari). Nous fixons une base orthonormale (e^α) de $\mathcal{K}$ — bien qu'il y ait aussi des avantages à travailler sans base, cela clarifiera les choses au début. Noter l'indice en haut, qui va renverser les conventions usuelles d'algèbre linéaire : on sait (depuis Segal, 1956) que Φ est naturellement isomorphe à l'espace L^2 d'une famille de mouvements browniens indépendants (B_t^α) en bijection avec les e^α, d'où la notation.

Le vecteur vide du Fock est noté $\mathbf{1}$. Pour tout t, Φ se décompose en un produit tensoriel $\Phi_t \otimes \Phi^t$, où Φ_t s'identifie au Fock sur $L^2([0,t], \mathcal{K})$. On peut aussi considérer Φ_t comme un sous-espace $\Phi_t \otimes \mathbf{1}$ de Φ. On pose $\Psi = \mathcal{J} \otimes \Phi$, $\Psi_t = \mathcal{J} \otimes \Phi_t$. L'algèbre $\mathcal{B}_t$ sera l'algèbre des opérateurs bornés sur Ψ qui opèrent sur le premier facteur Ψ_t. Notre "diffusion" consistera en une famille d'homomorphismes $X_t : \mathcal{A} \longmapsto \mathcal{B}_t$, et on se donnera un homomorphisme initial X_0, en général $f \longmapsto f \otimes I$.

Maintenant, qu'est-ce qui remplace le mouvement brownien ? Nous avons d'abord à notre disposition les *opérateurs de création et d'annihilation* sur l'espace de Fock : En physique les opérateurs de création (notés $a^*(u)$ par les physiciens) sont indexés par $u \in \mathcal{H}$ et les opérateurs d'annihilation (notés $a(v')$) par un élément de $\mathcal{H}'$; ici on identifie linéairement $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ par le produit scalaire bilinéaire, et l'on note le créateur $a^\alpha(t)$ pour le vecteur $u = I_{[0,t]} \otimes e^\alpha$, l'annihilateur $a_\alpha(t)$ pour le covecteur $u' = I_{[0,t]} \otimes e_\alpha$ (base duale). Si l'on identifie l'espace de Fock à l'espace L^2 du brownien, l'opérateur $a_\alpha(t) + a^\alpha(t)$ se lit comme l'opérateur Q_t^α de multiplication par B_t^α.

Mais cela ne suffit pas pour faire une théorie complète : un opérateur borné M sur $\mathcal{K}$ donne lieu à un opérateur $M_t = I_{[0,t]} \otimes M$ sur $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{K}$, et par seconde quantification différentielle à un opérateur sur l'espace de Fock. Le cas le plus important pour nous est celui où M est l'opérateur $e_\beta \otimes e^\alpha$ de rang 1 : alors l'opérateur de seconde quantification différentielle correspondant est noté $a_\beta^\alpha(t)$. D'un point de vue physique, la création et l'annihilation ayant leur sens usuel,

les opérateurs a^α_β décrivent des changements d'état internes des particules (spin, isospin...).

On unifie toutes ces notations en introduisant l'indice supplémentaire 0, en notant $a^\alpha_0(t)$ et $a^0_\alpha(t)$ le créateur et l'annihilateur respectivement, et encore $a^0_0(t)$ l'opérateur de multiplication par la fonction scalaire $I_{[0,t]}$.

C'est l'ensemble de tous ces opérateurs qui vient se substituer ici au mouvement brownien. Cela peut sembler beaucoup! L'utilisation d'intégrales stochastiques faisant intervenir les opérateurs de nombre et d'échange permet déjà de s'épargner une théorie fermionique distincte de la théorie bosonique : une "transformation de Jordan–Wigner continue"permet de ramener l'une à l'autre.

3. Intégrales stochastiques. Revenons d'abord au cas classique. L'i. s. d'Ito prend la forme $\sum_\alpha \int_0^t h_\alpha(s)\, dB^\alpha_s$, où les v.a. $h_\alpha(s)$ forment un processus adapté de vecteurs ("adapté"signifie que $h_\alpha(t)$ est mesurable par rapport à la tribu du passé à l'instant t). La notation différentielle rappelle une intégrale de Stieltjes, et la règle fondamentale du calcul d'Ito est résumée dans la formule $dB^\alpha_t\, dB^\beta_t = \delta^{\alpha\beta} dt$. Si l'on ajoute l'indice 0, en convenant que $dB^0_t = dt$, la formule fondamentale ("table d'Ito") s'écrit

$$dB^\rho_t\, dB^\sigma_t = \widehat{\delta}^{\rho\sigma} dt\ , \tag{3.1}$$

où le "symbole d'Evans" $\widehat{\delta}^{\rho\sigma}$ diffère du symbole de Kronecker usuel par le fait que $\widehat{\delta}^{00} = 0$.

Ici nous allons définir l'intégrale stochastique pour une famille $\mathbf{H}$ d'opérateurs $H^\rho_\sigma(t)$ qui seront adaptés, *i.e.* $H^\rho_\sigma(t)$ agit seulement sur la partie antérieure à t de la décomposition $\Psi = \mathcal{J} \otimes \Phi = (\mathcal{J} \otimes \Phi_t) \otimes \Phi^t$,

$$I_t(\mathbf{H}) = \eta + \sum_{\rho\sigma} \int_0^t H^\rho_\sigma(s)\, da^\sigma_\rho(s)\ . \tag{3.2}$$

L'opérateur η n'agit que sur l'espace initial. Les éléments différentiels $da^\sigma_\rho(t)$ obéissent à la *table d'Evans*

$$da^\mu_\lambda(t)\, da^\sigma_\rho(t) = \widehat{\delta}^\sigma_\lambda\, da^\mu_\rho(t)\ , \tag{3.3}$$

qui implique pour les créateurs et les annihilateurs les relations de commutation canoniques.

Il faut fixer pour ces opérateurs un domaine (dense) : on choisit traditionnellement, dans les calculs sur l'espace de Fock, certaines *exponentielles* d'éléments du premier chaos, notées ici $\mathcal{E}(\mathbf{u})$; comme il y a un espace initial $\mathcal{J}$, il faut encore tensoriser avec des éléments de celui-ci : je me permettrai d'écrire $\mathcal{E}(j\mathbf{u})$ pour $j \otimes \mathcal{E}(\mathbf{u})$, afin d'économiser plusieurs parenthèses. On a donc

$$< \mathcal{E}(k\mathbf{v})\, ,\, \mathcal{E}(j\mathbf{u}) > = < k, j > e^{< \mathbf{v},\mathbf{u} >}\ . \tag{3.4}$$

Le vecteur $\mathbf{u}$ a des composantes u_α dans la base e^α, qui sont des éléments de $L^2(\mathbb{R}_+)$: nous exigerons, en multiplicité infinie, que l'ensemble $S(\mathbf{u})$ des indices des composantes non nulles (le "support"de $\mathbf{u}$) soit fini. Nous exigerons que chaque fonction $u_\alpha(t)$ soit bornée. Nous conviendrons encore que $u_0(t) \equiv 1$, et que $0 \in S(\mathbf{u})$. Nous associons à un tel vecteur exponentiel une mesure scalaire sur $\mathbb{R}_+$

$$\nu(\mathbf{u}, dt) = \| \mathbf{u}(t) \|^2 \, dt \tag{3.5}$$

(y compris la composante u_0). L'existence d'une intégrale exige deux conditions : une condition de mesurabilité et une limitation sur la taille. Nous supposons que le domaine de chaque $H^\rho_\sigma(t)$ contient les vecteurs exponentiels ci-dessus, et que les vecteurs

$$h^\rho_\sigma(t) = H^\rho_\sigma(t)\, \mathcal{E}(j\mathbf{u})$$

dépendent mesurablement de t. On pose aussi $a_0 = \eta\, \mathcal{E}(j\mathbf{u}) = \eta(j) \otimes \mathcal{E}(\mathbf{u})$. La condition la plus commode pour l'existence de l'intégrale stochastique est celle qu'ont dégagée Mohari et Sinha : *si la quantité*

$$C^2(t) = \| a_0 \|^2 + \sum_{\rho \in S(\mathbf{u}), \sigma} \int_0^t \| h^\rho_\sigma(s) \|^2 \, \nu(\mathbf{u}, ds) \tag{3.6}$$

est finie, l'intégrale stochastique $I_t(\mathbf{H})\, \mathcal{E}(j\mathbf{u})$ *existe, et l'on a*

$$\| I_t(\mathbf{H})\, \mathcal{E}(j\mathbf{u}) \|^2 \leq 2 e^{\nu(\mathbf{u},t)}\, C^2(t) \, . \tag{3.7}$$

Cela tient lieu de la formule d'isométrie classique. Une autre formule utile est la suivante : étant donné un multiindice d'ordre n, $\mu = \binom{\rho_1, \ldots, \rho_n}{\sigma_1, \ldots, \sigma_n}$, on peut définir une intégrale stochastique multiple d'une fonction $H_\mu(s_1, \ldots, s_n)$ prenant ses valeurs dans l'espace des opérateurs *sur l'espace initial* — dans le cas classique, ce serait une fonction déterministe, à la manière des i.s. multiples de Wiener–Ito :

$$I_t(H_\mu) = \int_{t > s_1 > \ldots > s_n} H_\mu(s_1, \ldots, s_n)\, da^{\sigma_1}_{\rho_1}(s_1) \ldots \, da^{\sigma_n}_{\rho_n}(s_n) \, . \tag{3.8}$$

Une telle intégrale se définit comme intégrale itérée. Puis on définit une intégrale stochastique multiple générale $I_t(\mathbf{H}) = \sum_\mu I_t(H_\mu)$ d'une famille $\mathbf{H}$ d'opérateurs H_μ du type précédent, indexée par tous les multiindices. On a alors la majoration

$$\| I_t(\mathbf{H})\, \mathcal{E}(j\mathbf{u}) \|^2 \leq \sum_n (2e^{\nu(t,\mathbf{u})})^n \tag{3.9}$$
$$\sum_{|\mu|=n} \int_{t > s_1 \ldots > s_n} \| H_\mu(s_1, \ldots s_n)\, \mathcal{E}(j\mathbf{u}) \|^2 \, \nu(\mathbf{u}, ds_1) \ldots \nu(\mathbf{u}, ds_n) \, .$$

4. E.d.s. quantiques. Nous nous posons d'abord le problème des équations linéaires : il s'agit de construire des familles d'opérateurs adaptés U_t ou V_t sur

l'espace de Fock $\Psi = \mathcal{J} \otimes \Phi$ (avec espace initial), contenant dans leur domaine les vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(j\mathbf{u})$ et satisfaisant aux équations

$$U_t = I + \sum\nolimits_\varepsilon \int_0^t U_s (L_\varepsilon \otimes I)\, da_s^\varepsilon \ , \tag{4.1}$$

$$V_t = I + \sum\nolimits_\varepsilon \int_0^t (L_\varepsilon \otimes I)\, V_s\, da_s^\varepsilon \ , \tag{4.1'}$$

que l'on appelle respectivement l'équation gauche et l'équation droite. La notation ε abrège un indice double d'Evans : $L_\varepsilon = L_\sigma^\rho$ (et on pose $L^*{}_\rho^\sigma = (L_\sigma^\rho)^*$). Les coefficients L_ε sont des opérateurs sur $\mathcal{J}$ (non nécessairement bornés, si $\mathcal{J}$ est seulement préhilbertien) ; on n'écrira plus $L_\varepsilon \otimes I$ pour leur extension au Fock, mais seulement L_ε.

Il y a deux relations entre les équations gauche et droite. D'abord, le passage à l'adjoint échange la gauche et la droite (en prenant aussi les adjoints des coefficients). D'autre part le retournement du temps à l'instant t (qui est une opération unitaire sur l'espace de Fock) échange U_t et V_t en conservant les mêmes coefficients (th. dû à J.L. Journé). C'est très important, car les difficultés se partagent équitablement entre les deux équations.

On a une écriture abrégée pour l'élément différentiel : on regroupe les coefficients de création L_α^0 en une colonne λ d'opérateurs (malgré l'indice en haut !), les coefficients d'annihilation L_0^α en une ligne $\tilde{\lambda}$, les coefficients des opérateurs de nombre et d'échange en une matrice Λ ; enfin on pose $L_0^0 = L$. Nous avons donc la matrice d'un opérateur sur $\mathcal{J} \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathcal{K})$

$$\begin{pmatrix} L & \tilde{\lambda} \\ \lambda & \Lambda \end{pmatrix}$$

et l'élément différentiel s'écrit $L dt + da_t^+(\lambda) + da_t^\circ(\Lambda) + da_t^-(\tilde{\lambda})$.

Le problème fondamental est d'abord celui de l'existence et unicité de la solution sur le domaine exponentiel, et surtout des propriétés analytiques de la solution : unitarité, ou encore contractivité. Il faut garder à l'esprit le cas particulier "déterministe" de l'équation (4.1), qui est

$$U_t = I + i \int_0^t U_s L\, ds \ ,$$

et pour lequel la condition d'unitarité est : L est autoadjoint, autrement dit symétrique, et admettant un ensemble dense de vecteurs analytiques, *i.e.* de vecteurs j pour lesquels $\| L^n j \|$ est $O(M^{-n} n!)$ pour tout M. On souhaiterait donc aboutir à un "théorème de Stone stochastique" se réduisant à celui-ci dans le cas déterministe.

Le problème a été posé, et les conditions formelles d'unitarité dégagées, dans un article fondamental de Hudson–Parthasarathy, qui l'ont aussi résolu en multiplicité finie avec coefficients bornés — ce cas ayant d'ailleurs une signification

physique (évolution d'un atome dans un champ extérieur comportant du bruit). Ensuite, Applebaum, Vincent–Smith, Fagnola, ont traité la multiplicité finie avec coefficients non bornés, dans des conditions de généralité croissante, mais sans jamais atteindre le cas limite de l'équation "déterministe" (en gros, la croissance permise dans le cas stochastique serait en $\sqrt{n!}$ au lieu de $n!$). Une étape essentielle a été franchie dans la thèse de Mohari, quand celui–ci a traité le cas de la multiplicité infinie avec coefficients bornés, puis a indiqué une condition entièrement générale pour l'*unicité* d'une solution contractive. Le théorème d'existence correspondant a alors été élaboré indépendamment par Mohari et par Fagnola.

Voici d'abord les conditions formelles sur les coefficients assurant que la solution est isométrique, co-isométrique, ou simplement contractive (ce qui assure que les opérateurs s'étendent hors du domaine exponentiel. Voici la "condition d'isométrie" (formelle) de la solution (U_t) — par retournement du temps, c'est la même chose que de dire que (V_t) est isométrique

$$(4.2) \qquad L^\rho_\sigma + (L^\sigma_\rho)^* + \sum_\alpha (L^\sigma_\alpha)^* L^\rho_\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \boxed{L^\rho_\sigma + \overset{*}{L}{}^\rho_\sigma + \sum_\alpha \overset{*}{L}{}^\alpha_\sigma L^\rho_\alpha = 0} \ .$$

La "condition de co-isométrie" (formelle) s'obtient alors par passage à l'adjoint

$$(4.3) \qquad \boxed{L^\rho_\sigma + \overset{*}{L}{}^\rho_\sigma + \sum_\alpha L^\alpha_\sigma \overset{*}{L}{}^\rho_\alpha = 0} \ ,$$

et ces deux conditions ensemble constituent la "condition (formelle) d'unitarité". Ecrivons ces conditions sans indices, en introduisant la matrice

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \overset{*}{L} + L + \tilde{\lambda}^* \lambda & \lambda^* + \tilde{\lambda} + \lambda^* \Lambda \\ \tilde{\lambda}^* + \lambda + \Lambda^* \lambda & \Lambda^* + \Lambda + \Lambda^* \Lambda \end{pmatrix} \ ,$$

La condition formelle d'isométrie est $\mathbf{L} = 0$, la condition (rigoureuse) de contractivité (introduite par Mohari) est $\mathbf{L} \leq 0$. La condition de co-isométrie est $\tilde{\mathbf{L}} = 0$, avec

$$\tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \overset{*}{L} + L + \tilde{\lambda} \lambda^* & \lambda^* + \tilde{\lambda} + \tilde{\lambda} \Lambda^* \\ \tilde{\lambda}^* + \lambda + \Lambda \tilde{\lambda} & \Lambda^* + \Lambda + \Lambda \Lambda^* \end{pmatrix} \ .$$

La condition d'unitarité $\mathbf{L} = 0 = \tilde{\mathbf{L}}$ s'analyse ainsi. D'abord, le coin en bas à droite

$$\Lambda^* + \Lambda + \Lambda^* \Lambda = 0 = \Lambda^* + \Lambda + \Lambda \Lambda^*$$

exprime que $W = I + \Lambda$ *est unitaire.* En bas à gauche

$$\tilde{\lambda}^* + \lambda + \Lambda^* \lambda = 0 = \tilde{\lambda}^* + \lambda + \Lambda \tilde{\lambda}$$

s'écrit

$$(4.4) \qquad \tilde{\lambda}^* + W^* \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \tilde{\lambda} = -\lambda^* W \quad ;$$

en haut à droite on obtient la même chose. Finalement, les équations

$$\overset{*}{L} + L + \tilde{\lambda}^* \lambda = 0 = \overset{*}{L} + L + \tilde{\lambda} \lambda^*$$

nous donnent

$$L = iH - \tfrac{1}{2}\lambda^*\lambda = iH - \tfrac{1}{2}\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}^* \ . \tag{4.5}$$

A quoi servent ces deux solutions? Supposons qu'elles soient contractives; elles permettent alors de définir des semi-groupes sur les vecteurs j de l'espace initial (point de vue de Schrödinger)

$$P_t j = E_0 U_t j \ , \tag{4.6}$$

où E_0 est l'opérateur de projection initial. De même, on a un semi-groupe sur les opérateurs (point de vue de Heisenberg)

$$\mathcal{P}_t(A) = E_0 U_t^* (A \otimes I) U_t \ , \tag{4.7}$$

(par passage à l'adjoint on aurait une définition analogue avec V_t). Cela correspond exactement à la construction classique d'un semi-groupe, rappelée en (1.2) au début, et les semi-groupes ainsi construits sont des exemples de semi-groupes (sous)-markoviens quantiques sur $\mathcal{B}(\mathcal{J})$: semi-groupes d'opérateurs normaux, complètement positifs, diminuant la trace. Voici la forme du générateur $\mathcal{L}$ de (4.7), cas particulier de (5.7) ci-dessous

$$\mathcal{L}(F) = \overset{*}{L}{}_0^0 F + F L_0^0 + \textstyle\sum_\alpha \overset{*}{L}{}_0^\alpha F L_\alpha^0 \ . \tag{4.8}$$

En particulier, dans le cas d'une évolution unitaire, en tenant compte de la structure des coefficients on obtient

$$\mathcal{L}(F) = -i[H, F] + \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_\alpha (L_\alpha^* L_\alpha F + F L_\alpha^* L_\alpha - 2 L_\alpha^* F L_\alpha) \tag{4.9}$$

qui est la "forme de Lindblad"des générateurs des semi-groupes complètement positifs sur l'espace des états d'un espace de Hilbert : un théorème célèbre de Lindblad-Gorini-Kossakowski-Sudarshan affirme que les générateurs des semi-groupes *uniformément continus* sont tous de cette forme, le cas fortement continu n'étant pas encore complètement clarifié. Même dans le cas uniformément continu, une infinité de coefficients L_α peuvent être nécessaires. Enfin, noter que l'opérateur unitaire W n'intervient pas dans le générateur.

5. Flots quantiques. Avant de donner des résultats analytiques, passons à l'autre problème, celui des *flots quantiques*, posé par R.L. Hudson, et étudié par celui-ci en collaboration avec M. Evans. Il s'agit d'une véritable généralisation des é.d.s. non linéaires d'Ito. On a ici une algèbre $\mathcal{A}$ d'opérateurs sur l'espace initial $\mathcal{J}$, qui joue le rôle de l'algèbre $\mathcal{C}^\infty$ d'une variété, et on se donne une famille d'applications $\mathbf{L}_\sigma^\rho$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$. On se donne une application X_0 de

$\mathcal{A}$ dans l'algèbre des opérateurs sur $\mathcal{J}$, identifiés à des opérateurs sur Ψ, et l'inconnue est une famille d'applications X_t de $\mathcal{A}$ dans les opérateurs sur Ψ qui n'agissent que jusqu'à l'instant t. Au lieu d'écrire $X_t(F)$ pour $F \in \mathcal{A}$, nous écrirons $F \circ X_t$ comme si X_t était une v.a. à valeurs dans E, et F une fonction sur E. L'équation du flot est alors

$$F \circ X_t = F \circ X_0 + \sum_{\rho\sigma} \int_0^t \mathbf{L}_\sigma^\rho F \circ X_s \, da_\rho^\sigma(s) \ . \tag{5.1}$$

On suppose que X_0 est un homomorphisme d'algèbre (à involution et unité, et diminuant la norme d'opérateurs : cela irait de soi si l'on travaillait sur des C^*-algèbres, mais ce n'est pas le cas en général), et on demande que les X_t en soient aussi. Comme dans le cas classiques, les coefficients $\mathbf{L}_\sigma^\rho$ doivent pour cela satisfaire à certaines conditions formelles, appelées *équations de structure*

$$\mathbf{L}_\sigma^\rho(I) = 0 \ , \tag{5.2}$$

$$(\mathbf{L}_\rho^\sigma(F))^* = \mathbf{L}_\sigma^\rho(F^*) \ , \tag{5.3}$$

$$\boxed{\mathbf{L}_\sigma^\rho(FG) - F\mathbf{L}_\sigma^\rho(G) - \mathbf{L}_\sigma^\rho(F)G = \textstyle\sum_\alpha \mathbf{L}_\sigma^\alpha(F)\mathbf{L}_\alpha^\rho(G)} \ . \tag{5.4}$$

Evans a donné le premier théorème d'existence de flots quantiques, dans le cas de coefficients bornés et en multiplicité finie. La vérification de la multiplicativité n'est absolument pas triviale, même dans ce cas simple !

Les problèmes d'é.d.s. et de flots sont étroitement liés. Considérons en effet une é.d.s. gauche admettant une solution unitaire (U_t). On définit alors une famille d'homomorphismes X_t de $\mathcal{L}(\mathcal{J})$ dans $\mathcal{L}(\Psi)$ en posant

$$F \circ X_t = U_t^* F U_t \ . \tag{5.5}$$

et par restriction à $\mathcal{A}$ on construit ainsi un flot. Plus généralement, étant donné un flot (X_t), on en définit un nouveau (Y_t) en posant

$$F \circ Y_t = U_t^* (F \circ X_t) U_t \ . \tag{5.6}$$

et cela amorce une classification des flots quantiques, qui fait intervenir des considérations de cohomologie non-commutative.

Dans le cas du flot (5.5), les coefficients du flot et ceux de l'é.d.s. sont liés par les relations

$$\boxed{\mathbf{L}_\sigma^\rho(F) = \overset{*}{L}{}_\sigma^\rho F + F L_\sigma^\rho + \textstyle\sum_\alpha \overset{*}{L}{}_\sigma^\alpha F L_\alpha^\rho} \quad (\text{en posant } \overset{*}{L}{}_\sigma^\rho = (L_\rho^\sigma)^*) \ . \tag{5.7}$$

et l'équation de structure (5.3) est exactement la condition formelle exprimant que la solution de l'é.d.s. est *co-isométrique*.

Il est intéressant de noter que l'on n'a pas besoin de traiter toute la théorie des flots, ni des opérateurs de nombre et d'échange, pour faire entrer les équations

d'Ito dans la théorie non-commutative. Considérons par exemple, sur une variété C^∞ compacte, une é.d.s. classique au sens de Stratonovitch

$$X_t = X_0 + \sum_\rho \int_0^t \xi_\rho(X_s) \star dB_s^\rho \ , \tag{5.8}$$

où les ξ_ρ sont des champs de vecteurs C^∞. Choisissons comme espace de Hilbert un espace $L^2(\mu)$ associé à une "mesure de Lebesgue" sur la variété, et associons à chaque ξ_ρ l'opérateur différentiel non homogène $K_\rho = \xi_\rho + k_\rho$ où la fonction k_ρ (dépendant de μ) fait de K_ρ un opérateur antiadjoint. Alors si l'é.d.s. à gauche

$$dU_t = U_t(\sum_\alpha K_\alpha \, dQ_t^\alpha - (K_0 + \frac{1}{2}\sum_\alpha K^\alpha K_\alpha)\, dt \,)$$

admet une solution unitaire (U_t), le flot intérieur $U_t^* f U_t$ préserve les opérateurs de multiplication et coïncide sur ceux-ci avec le flot de l'é.d.s. classique.

6. Conditions analytiques. Nous considérons d'abord l'équation droite avec des coefficients L_σ^ρ bornés. Alors une condition simple pour l'existence et l'unicité de la solution (V_t) sur le domaine exponentiel a été donnée par Mohari–Sinha sous la forme

$$\boxed{\forall j \in \mathcal{J} \quad \sum_\sigma \| L_\sigma^\rho j \|^2 \leq C_\rho^2 \| j \|^2} \ . \tag{6.1}$$

Pour traiter l'équation gauche, qui est un peu plus délicate, il faut imposer que cette condition *et* la condition duale (sommation sur ρ au lieu de σ) soient satisfaites tous deux. Mohari–Sinha montrent alors que les conditions formelles de contractivité, d'isométrie, de co-isométrie, d'unitarité entraînent bien les propriétés demandées.

Noter que ces conditions ne sont pas "intrinsèques" : elles dépendent du choix de la base orthonormale de $\mathcal{K}$; on peut interpréter (6.1) comme exprimant qu'une certaine application L^ρ de $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{J} \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathcal{K})$ est bornée pour tout ρ, et si on veut rendre cela intrinsèque, on écrira (mais en perdant un peu de généralité) qu'une certaine application de $\mathcal{J} \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathcal{K})$ dans lui-même est bornée.

La méthode de démonstration n'est pas surprenante : c'est la série de Picard combinée avec les bonnes estimations d'intégrales multiples d'opérateurs, et avec la bonne définition du domaine exponentiel pour traiter la multiplicité infinie. On obtient une formule du type suivant

$$V(t) = \sum_n \sum_{|\mu|=n} L_\mu I^\mu(t) \tag{6.2}$$

avec les notations suivantes : μ est un multiindice formé de n indices d'Evans; L_μ est un produit $L_{\rho_1}^{\sigma_1} \ldots L_{\rho_n}^{\sigma_n}$ et $I^\mu(t)$ un opérateur sur le Fock donné par une intégrale multiple

$$\int_{s_1 < \ldots < s_n < t} da_{\rho_n}^{\sigma_n} \ldots da_{\rho_1}^{\sigma_1} \ .$$

La solution de l'équation gauche est en principe du même type, mais le produit L_μ est renversé. Si l'on a unicité, la solution de l'équation droite (gauche) est un cocycle à droite (à gauche), c'est à dire satisfait à une relation

$$V_{t+s} = \Theta_t(V_s)\, V_t \quad , \quad U_{t+s} = U_t \Theta_t(U_s) \ , \tag{6.3}$$

où Θ_t est une certaine opération de décalage sur les opérateurs (introduite par Journé), qu'il est inutile de détailler ici.

On peut noter que la formule (6.2) comporte une infinité d'intégrales multiples d'opérateurs qui sont du même type, par suite des intégrations en dt : en particulier le terme le plus bas est la série exponentielle pour $P_t = e^{tL_0^0}$. On sait bien que cette série ne doit pas être traitée naïvement.

Maintenant, nous passons à des conditions sur des opérateurs non bornés. Le résultat suivant est le théorème d'unicité de Mohari : considérons l'équation gauche (U_t) avec des coefficients L_σ^ρ définis sur un domaine dense $\mathcal{D}$; supposons que la solution soit définie sur $\mathcal{D} \otimes \mathcal{E}$, soit contractive et fortement continue. Alors elle est unique sous la condition suivante : *le coefficient $L = L_0^0$ est, après fermeture, le générateur d'un semi-groupe fortement continu (P_t) de contractions.*

Le théorème d'existence correspondant est dû à Fagnola. On va faire l'hypothèse ci-dessus entraînant l'unicité, et introduire la résolvante (W_p) du semi-groupe. On va supposer aussi que la condition de contractivité formelle est satisfaite, ce qui déjà entraîne que Λ est borné. Sur les coefficients de création et d'annihilation, λ et $\tilde{\lambda}^*$, on va supposer qu'ils sont relativement bornés : qu'ils sont prolongeables à tout le domaine du générateur L, donc que λW_p et $\tilde{\lambda}^* W_p$ sont des opérateurs partout définis, que l'on suppose bornés. Alors on peut régulariser par la résolvante, appliquer le théorème de Mohari-Sinha dans le cas borné, et faire un passage à la limite faible en utilisant un argument de compacité.

Enfin, un autre remarquable théorème de Fagnola (complétant les résultats déjà anciens de Journé) montre que tout cocycle à gauche unitaire satisfaisant à une condition *nécessaire* de différentiabilité faible est solution d'une équation différentielle stochastique à coefficients non bornés du type ci-dessus.

En ce qui concerne la théorie des flots quantiques, les résultats sont encore incomplets : Mohari a donné un théorème intéressant du type "coefficients bornés, multiplicité infinie". Cependant, la théorie des é.d.s. conduit à la construction de flots associés à des opérateurs unitaires, et ceux-ci permettent d'atteindre des types très généraux d'équations d'Ito non linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

Les références *QP* renvoient aux volumes "Quantum Probability and Applications"édités par L. Accardi et W. von Waldenfels, publiés d'abord dans les Lecture Notes in M., puis chez World Scientific. Quelques articles essentiels pour l'histoire du sujet (parfois dépassés par des travaux plus récents) sont marqués d'un * .

* ACCARDI (L.), FRIGERIO (A.) and LEWIS (J.). Quantum stochastic processes, *Publ. RIMS Kyoto*, **18**, 1982, p. 94–133.

* ACCARDI (L.), JOURNÉ (J.L.) et LINDSAY (J.M.). On multidimensional markovian cocycles, *QP.IV*, p. 59–66.

APPLEBAUM (D.). 1. Quantum stochastic parallel transport on non-commutative vector bundles, *QP.III*, p. 20–36. 2. Unitary evolutions and horizontal lifts in quantum stochastic calculus, *Comm. Math. Phys.*, **140**, 1991, p. 63–80. 3. Towards a quantum theory of classical diffusions on Riemannian manifolds, *QP.VI*, p. 93–111.

* BARNETT (C.), STREATER (R.F.) et WILDE (I.F.). 1. The Ito–Clifford integral I, *J. Funct. Anal.* 48, 1982, p. 172–212. 2. — II, *J. London Math. Soc.* 27, 1983, p. 373–384. 3. — III, Markov properties of solutions to s.d.e.'s, *Comm. Math. Phys.* 89, 1983, p. 13–17. 4 —IV, a Radon–Nikodym theorem and bracket processes, *J. Oper. Th.* **11**, 1984, p. 255–271. BELAVKIN (V.P.). A quantum non adapted Ito formula and stochastic analysis in Fock scale, *J. Funct. Anal.*, **102**, 1991, p. 414–447.

CHEBOTAREV (A.M.). The theory of conservative dynamical semigroups and its applications, à paraître.

CHEBOTAREV (A.M.) et FAGNOLA (F.). Sufficient conditions for conservativity of quantum dynamical semigroups. *J. Funct. Anal.*, à paraître.

DAVIES (E.B.). *Quantum Theory of Open Systems,* Academic Press, 1976.

EVANS (M.). Existence of quantum diffusions, *Prob. Th. Rel. Fields*, **81**, 1989, p. 473–483.

EVANS (M.) et HUDSON (R.L.). * 1. Multidimensional quantum diffusions, *QP.III*, p. 69–88. 2. Perturbation of quantum diffusions, *J. London Math. Soc.*, **41**, 1992, p. 373–384.

FAGNOLA (F.). 1. On quantum stochastic differential equations with unbounded coefficients, *Prob. Theory Rel. Fields,* **86**, 1990, p. 501–516. 2. Pure birth and death processes as quantum flows in Fock space, *Sankhya, ser. A*, **53**, 1991, p. 288–297. 3. Unitarity of solutions to quantum stochastic differential equations and conservativity of the associated quantum dynamical semigroup, *QP.VII*, à paraître. 4. Chebotarev's sufficient conditions for conservativity of quantum dynamical semigroups, à paraître. 5. Diffusion processes in Fock space, à paraître. 6. Characterization of isometric and unitary weakly differentiable cocycles in Fock space, à paraître *QP.VIII*.

FAGNOLA (F.) et SINHA (K.B.). Quantum flows with unbounded structure maps and finite degrees of freedom, *J. London M. Soc.*, à paraître.

* GORINI (V.), KOSSAKOWSKI (A.) et SUDARSHAN (E.). Completely positive dynamical semigroups of n–level systems, *J. Math. Phys.*, **17**, 1976, p. 821–825.

* HUDSON (R.L.), KARANDIKAR (R.L.) et PARTHASARATHY (K.R.). Towards a theory of non commutative semimartingales adapted to brownian motion and a quantum Ito's formula, *Theory and Applications of Random Fields, Bangalore 1982,* LNCI **49**, 1983, p. 96–110.

HUDSON (R.L.) et PARTHASARATHY (K.R.). * 1. Quantum Ito's formula and stochastic evolutions, *Comm. Math. Phys.*, **93**, 1984, p. 301–303. * 2. Stochastic dilations of uniformly continuous completely positive semigroups, *Acta Appl. Math.*, **2**, 1988, p. 353–398. * 3. Unification of fermion and boson stochastic calculus, *Comm. Math. Phys.*, **104**, 1986, p. 457–470.

HUDSON (R.L.) et ROBINSON (P.). Quantum diffusions and the noncommutative torus, *Lett. Math. Phys.*, **15**, 1988, p. 47–53.

* JOURNÉ (J.L.). Structure des cocycles markoviens sur l'espace de Fock. *Prob. Theory Rel. Fields,* **75**, 1987, p. 291–316.

* LINDBLAD (G.). On the generators of quantum dynamical semigroups. *Comm. Math. Phys.*, **48**, 1976, p. 119–130.

MEYER (P.A.). *Quantum Probability for probabilists,* à paraître aux LNM, 1993.

MOHARI (A.). 1. Quantum stochastic calculus with infinite degrees of freedom and its applications. PhD thesis, ISI Delhi 1992. 2. Quantum stochastic differential equations with unbounded coefficients and dilations of Feller's minimal solution. *Sankhya, ser. A*, **53**, 1991, p. 255–287.

MOHARI (A.) et PARTHASARATHY (K.R.). 1. On a class of generalized Evans–Hudson flows related to classical Markov processes. 2. A quantum probabilistic analogue of Feller's condition for the existence of unitary Markovian cocycles in Fock space, preprint.

MOHARI (A.) et SINHA (K.B.). 1. Quantum stochastic flows with infinite degrees of freedom and countable state Markov processes. *Sankhya, ser. A*, **52**, 1990, p. 43–57.

PARTHASARATHY (K.R.). 1. *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus,* Birkhäuser, Basel 1992.

PARTHASARATHY (K.R.) et SINHA (K.B.). Boson–Fermion transformations in several dimensions, *Pramana J. Phys.*, **27**, 1986, p. 105–116. 2. Markov chains as Evans–Hudson diffusions in Fock space. *Sém. Prob. XXIV*, LNM **1426**, 1990, p. 362–369. 3. Unification of quantum noise processes in Fock space, *QP. VI*, p. 371–384.

VINCENT–SMITH (G.F.). 1. Unitary quantum stochastic evolutions, *Proc. London Math. Soc.*, **63**, 1991, p. 1–25 2. Quantum stochastic evolutions with unbounded generators, *QP. VI*, p. 465–472.

Paul-André MEYER
IRMA
Université Louis Pasteur
(Laboratoire associé au CNRS)
7 rue René Descartes
F-67084 STRASBOURG CEDEX

Astérisque

JOSEPH OESTERLÉ

Polylogarithmes

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki, exp. n° 762, p. 49-67
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__49_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 1992
45ème année, 1992-93, n° 762

POLYLOGARITHMES

par Joseph OESTERLÉ

Les polylogarithmes sont les fonctions holomorphes multivaluées Li_k que l'on obtient par prolongement analytique des séries entières $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^k$. Défini par Leibnitz en 1696, le dilogarithme Li_2 est étudié en détail par Euler en 1768. La première étude du trilogarithme est due à Landen (1780), et celle des polylogarithmes d'ordre supérieur commence vraiment avec les travaux de Kummer en 1840. Jusque vers 1975, les polylogarithmes sont essentiellement considérés sous leur aspect "fonctions spéciales" (recherche d'équations fonctionnelles, valeurs remarquables, calcul de séries et d'intégrales dans lesquelles ils interviennent, etc.). On dispose pour cette période d'une bibliographie à peu près exhaustive dans le livre de Lewin, Polylogarithms and associated functions ([Le]) ; elle inclut la liste publiée par Nielsen en 1909 des travaux antérieurs au 20ème siècle.

Dans les quinze dernières années, la théorie des polylogarithmes a véritablement explosé. Voici quelques-uns des domaines dans lesquels ils sont apparus :

— volumes de polytopes en géométrie sphérique et hyperbolique
— volumes des variétés hyperboliques de dimension 3
— description combinatoire de classes caractéristiques
— valeurs spéciales des fonctions zêta
— géométrie des configurations de points dans $\mathbf{P}_1$
— cohomologie de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$
— calcul de fonctions de Green
— intégrales itérées de Chen
— régulateurs en K-théorie algébrique
— équations différentielles à monodromie nilpotente
— problème de Hilbert sur les polyèdres équidécomposables
— complétion nilpotente de $\pi_1(\mathbf{P}_1 - \{0, 1, \infty\})$

— variation de structures de Hodge mixtes

— cohomologie motivique.

La plupart de ces aspects sont abordés dans le rapport récent de Hain sur les polylogarithmes ([Ha]) et dans le livre édité en 1991 par Lewin, intitulé Structural Properties of Polylogarithms ([POL]). On trouve à la fin de ce livre une bibliographie très complète des articles récents concernant les polylogarithmes ; il m'a paru superflu de la recopier exhaustivement ici.

Cet exposé n'a pas pour but de dresser un panorama de la théorie sous tous ces aspects, mais seulement de fournir au non-spécialiste une introduction élémentaire aux polylogarithmes. Il est souhaitable que d'autres exposés prennent la relève pour présenter les avancées des recherches dans les divers domaines que nous avons mentionnés.

1. DÉTERMINATION PRINCIPALE DES POLYLOGARITHMES

1.1. Définition

Soit k un entier ≥ 1. La *détermination principale du k-logarithme* est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} - [1, +\infty[$. Pour $|z| < 1$, elle est donnée par la formule

$$Li_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}. \tag{1}$$

L'existence du prolongement holomorphe à $\mathbf{C} - [1, +\infty[$ résulte par récurrence des relations

$$Li_1(z) = -\log(1 - z) \tag{2}$$

$$Li_k'(z) = \frac{1}{z} Li_{k-1}(z) \qquad (k \geq 2) \tag{3}$$

(où log est la détermination principale du logarithme).

1.2. Relations de distribution

Pour k et r entiers ≥ 1, on a, d'après (1)

$$Li_k(z^r) = r^{k-1} \sum_{\omega^r = 1} Li_k(\omega z) \qquad (|z| < 1). \tag{4_r}$$

1.3. Relation d'inversion

Pour tout $k \geq 1$ et tout $z \in \mathbf{C} - [0, +\infty[$, on a

$$Li_k(z) + (-1)^k \, Li_k(z^{-1}) = -\frac{(2\pi i)^k}{k!} \, B_k\Big(\frac{\log z}{2\pi i}\Big), \tag{5}$$

où B_k est le polynôme de Bernoulli de degré k et $\log z$ le logarithme de z dont la partie imaginaire appartient à $]0, 2\pi[$. Cela se déduit de (2) et (3) par récurrence sur k en remarquant que la dérivée de B_k est $k\,B_{k-1}$, que la valeur moyenne de B_k sur $[0,1]$ est nulle et que, sur le cercle unité privé du point 1, la fonction Li_k est donnée par la formule (1) et a pour valeur moyenne 0.

La relation d'inversion (5) permet de comparer les valeurs de Li_k des deux côtés de la coupure $[1, +\infty[$: on déduit de la relation $B_k(t+1) - B_k(t) = k\,t^{k-1}$ que l'on a, pour tout nombre réel $x > 1$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} (Li_k(x + i\varepsilon) - Li_k(x - i\varepsilon)) = 2\pi i \, \log^{k-1} x \,/\, (k-1)!. \tag{6}$$

La relation (5) fournit aussi un développement asymptotique de Li_k à l'infini. On a en particulier

$$|Li_k(z)| = O(\log^k |z|) \qquad (|z| \to +\infty). \tag{7}$$

1.4. Limite en 1

Supposons $k \geq 2$. Lorsque $z \in \mathbf{C} - [1, +\infty[$ tend vers 1, $Li_k(z)$ a une limite : on le déduit de (1) pour $|z| \leq 1$, puis de la relation d'inversion pour $|z| \geq 1$. Cette limite, d'après (1), est $\zeta(k)$, où ζ est la fonction zêta de Riemann. Par passage à la limite dans (5), on retrouve, pour k pair, la formule classique $2\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{k!} \, b_k$, où $b_k = B_k(0)$ est le nombre de Bernoulli d'indice k.

2. MONODROMIE DES POLYLOGARITHMES

Dans ce paragraphe, (X, x_0) désigne le revêtement universel de l'espace pointé $(\mathbf{C} - \{0,1\}, \frac{1}{2})$ et $p : X \to \mathbf{C} - \{0,1\}$ l'application canonique : les éléments de X sont les classes d'homotopie $[c]$ des chemins c d'origine $\frac{1}{2}$ dans $\mathbf{C} - \{0,1\}$, et l'on

a $p([c]) = c(1)$. *Le groupe fondamental* $G = \pi_1(\mathbf{C} - \{0,1\}, \frac{1}{2})$ *opère à gauche sur* X : si $g \in G$ est la classe d'un lacet ℓ, $g[c]$ est la classe du chemin composé ℓc.

2.1. Les polylogarithmes, fonctions multivaluées sur $\mathbf{C} - \{0,1\}$

Pour chaque entier $k \geq 1$, il existe une fonction holomorphe $\mathbf{Li_k}$ sur X dont le germe en x_0 est celui de $Li_k \circ p$: cela résulte par récurrence des relations (2) et (3). On interprète cela en disant que le k-logarithme est "*une fonction holomorphe multivaluée sur* $\mathbf{C} - \{0,1\}$". Si A est une partie de $\mathbf{C} - \{0,1\}$, toute fonction sur A de la forme $\mathbf{Li_k} \circ s$, où s est une section continue de p sur A, s'appelle *une détermination du k-logarithme sur A* et, lorsque cela ne prête pas à confusion, se note simplement Li_k.

Il est commode, si c est un chemin dans $\mathbf{C} - \{0,1\}$ d'origine $\frac{1}{2}$ et d'extrémité z, de noter $Li_k^{[c]}(z)$ le nombre complexe $\mathbf{Li_k}([c])$, et de dire que c'est *la détermination du k-logarithme au point z relative au chemin c.*

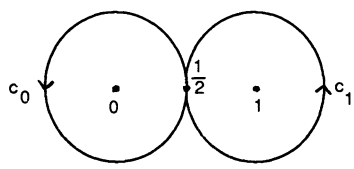
On utilise des conventions analogues en ce qui concerne la fonction logarithme.

Remarques.- 1) Pour simplifier, nous avons choisi de privilégier le point-base $\frac{1}{2}$. On peut être plus intrinsèque en faisant jouer le rôle de point-base de $\mathbf{C} - \{0,1\}$ à l'ensemble contractile $]0,1[$, ou au vecteur tangent $\frac{d}{dz}$ à l'origine.

2) L'intégrale itérée $\int_\gamma(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k)$ le long d'un chemin γ de classe C^1 dans une variété différentielle d'une suite $(\omega_1, \cdots, \omega_k)$ de formes différentielles de degré 1 est par définition $\int_{0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq 1} f_1(t_1) \cdots f_k(t_k)\, dt_1 \cdots dt_k$, où $\gamma^* \omega_j = f_j(t)dt$. Les polylogarithmes sont de telles intégrales (généralisées) : si γ est un chemin dans $\mathbf{C}$ reliant 0 à z sans repasser par 0 ni passer par 1, $\int_\gamma \left(\frac{du}{1-u}, \frac{du}{u}, \cdots, \frac{du}{u}\right)$ est une détermination de $Li_k(z)$.

2.2. Relations de monodromie

Considérons les lacets c_0, c_1 représentés ci-dessous



Leurs classes engendrent le groupe libre $G = \pi_1(\mathbf{C} - \{0,1\}, \frac{1}{2})$.

PROPOSITION 1.- *Soient z un point de $\mathbf{C} - \{0,1\}$ et c un chemin reliant $\frac{1}{2}$ à z. On a, pour $k \geq 1$, les relations de monodromie*

$$(8) \qquad Li_k^{[c_0 c]}(z) = Li_k^{[c]}(z) \qquad Li_k^{[c_1 c]}(z) = Li_k^{[c]}(z) - 2\pi i \frac{(\log^{[c]}(z))^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$(9) \qquad log^{[c_0 c]}(z) = \log^{[c]}(z) + 2\pi i \quad \log^{[c_1 c]}(z) = \log^{[c]}(z).$$

Les relations (8) résultent respectivement de (1) et (6) et les relations (9) sont bien connues.

COROLLAIRE 1.- *Soit A un secteur angulaire de $\mathbf{C}$ de sommet 0. Toute détermination du k-logarithme définie au voisinage de 0* (resp. *de ∞*) *dans A est dominée par $\log^{k-1}|z|$ (resp. $\log^k|z|$) lorsque $|z|$ tend vers 0* (resp. *vers $+\infty$*).

COROLLAIRE 2.- *Soit A un secteur angulaire de $\mathbf{C}$ de sommet 1. Toute détermination du k-logarithme définie au voisinage de 1 dans A a une limite lorsque z tend vers 1. Cette limite diffère de $\zeta(k)$ par un multiple entier de $(2\pi i)^k/(k-1)!$.*

Ces deux corollaires ont été démontrés au §1 pour la détermination principale du k-logarithme. Le cas général s'en déduit par la prop. 1.

Remarque.- Les résultats de ce numéro peuvent se déduire directement, par récurrence sur k, des relations (2) et (3).

2.3. Reformulation des relations de monodromie

Soit n un entier ≥ 0. Considérons la matrice suivante, dont les lignes et colonnes sont indexées par l'ensemble $\{0,1,\cdots,n\}$

$$(10) \qquad L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -Li_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -Li_2 & \log & \ddots & & & \vdots \\ -Li_3 & \frac{\log^2}{2!} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -Li_n & \frac{\log^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & \frac{\log^2}{2!} & \log & 1 \end{pmatrix}$$

et posons

$$(11) \qquad A_n = L_n\, r(2\pi i)$$

où $\tau(\lambda)$ est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1, \lambda, \cdots, \lambda^n)$. Si z est un point de $\mathbf{C} - \{0,1\}$ et c un chemin dans $\mathbf{C} - \{0,1\}$ reliant $\frac{1}{2}$ à z, on note $L_n^{[c]}(z)$ et $A_n^{[c]}(z)$ les déterminations de ces matrices au point z, relatives au chemin c.

La prop. 1 se reformule en disant que, pour tout élément g de $G = \pi_1(\mathbf{C} - \{0,1\}, \frac{1}{2})$, on a

$$A_n^{g[c]}(z) = A_n^{[c]}(z)\ \rho_n(g) \tag{12}$$

où ρ_n est l'homomorphisme de G dans le groupe opposé de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{Q})$ caractérisé par

$$\rho_n([c_0]) = \exp e_0 \qquad \rho_n([c_1]) = \exp e_1 \tag{13}$$

avec

$$e_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Remarque.- D'après (2) et (3), on a

$$\frac{d}{dz} L_n(z) = \left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1} \right) L_n(z) \tag{15}$$

pour toute détermination de L_n sur un ouvert de $\mathbf{C} - \{0,1\}$. Le même énoncé vaut pour A_n. Considérons l'équation différentielle $\frac{d}{dz} v = \left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1} \right) v$ (où v est une matrice-colonne à $n+1$ lignes). Le groupe $G = \pi_1(\mathbf{C} - \{0,1\}, \frac{1}{2})$ opère à droite, par monodromie, sur l'espace vectoriel des germes en $\frac{1}{2}$ de solutions. Une base de cet espace vectoriel est formée par les germes en $\frac{1}{2}$ des colonnes de la détermination principale de A_n. La représentation de monodromie dans cette base est ρ_n.

2.4. Structure du groupe de monodromie

Définissons une suite $(g_i)_{i \geq 0}$ d'éléments de G en posant $g_0 = [c_0]$, $g_1 = [c_1]$ et

$g_{i+1} = (g_0, g_i)$ ($\overset{\text{déf}}{=} g_0^{-1} g_i^{-1} g_0 g_i$) pour $i \geq 1$. Posons $G_n = G/\mathrm{Ker}\,\rho_n$ et notons $\overline{g}_i$ l'image canonique de g_i dans G_n. On a $\overline{g}_i = 0$ pour $i > n$. Les éléments $\overline{g}_i$ pour $1 \leq i \leq n$ commutent deux à deux et sont $\mathbf{Z}$-linéairement indépendants.

Supposons $n \geq 2$. Le groupe G_n est produit semi-direct du groupe (isomorphe à $\mathbf{Z}$) engendré par $\overline{g}_0$ par le groupe (isomorphe à $\mathbf{Z}^n$) engendré par $\overline{g}_1, \cdots, \overline{g}_n$. Le noyau de ρ_n est formé des éléments $g \in G$ tels que $\mathbf{Li_n}(gx) = \mathbf{Li_n}(x)$ et $\mathbf{log}(gx) = \mathbf{log}(x)$ pour tout $x \in X$; c'est le sous-groupe distingué de G engendré par g_{n+1} et les commutateurs (g_1, g_i), avec $2 \leq i \leq n$. Le groupe G_n est le plus grand quotient de G, nilpotent de classe n, dans lequel l'image canonique de g_1 centralise le groupe dérivé. Soit $(C^i(G_n))_{i \geq 1}$ la suite centrale descendante de G_n. On a $C^1(G_n) = G_n$, $C^{n+1}(G_n)$ est réduit à l'élément neutre et $C^i(G_n)$ est le sous-groupe de G_n engendré par $\overline{g}_i, \cdots, \overline{g}_n$ pour $2 \leq i \leq n$.

Les éléments $g \in G$ tels que $\mathbf{Li_n}(gx) = \mathbf{Li_n}(x)$ pour tout $x \in X$ sont ceux dont l'image dans G_n est une puissance de $\overline{g}_0$.

Remarque.- Le plus petit revêtement de $\mathbf{C} - \{0,1\}$ sur lequel "vit" le logarithme est $N_0 \backslash X$, où N_0 est le sous-groupe distingué de G engendré par g_1. Le plus petit revêtement de $\mathbf{C} - \{0,1\}$ sur lequel "vivent" le logarithme et tous les polylogarithmes est $N \backslash X$, où $N = \bigcap_{n \geq 1} \mathrm{Ker}(\rho_n)$.

Le revêtement $N \backslash X$ de $\mathbf{C} - \{0,1\}$ est galoisien, de groupe de Galois G/N. Notons H le produit semi-direct $\mathbf{Z}[t, t^{-1}] \rtimes \mathbf{Z}$, où l'action de $\mathbf{Z}$ sur le groupe additif $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ associe à $a \in \mathbf{Z}$ l'homothétie de rapport t^a dans $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$. L'homomorphisme $\varphi : G \to H$ tel que $\varphi(g_0) = (0,1)$ et $\varphi(g_1) = (1,0)$ définit par passage au quotient un isomorphisme de G/N sur H, et l'on a

$$\mathrm{Ker}\,\rho_n = \varphi^{-1}((1-t)^n \mathbf{Z}[t, t^{-1}] \times \{0\})$$

pour tout $n \geq 2$. On en déduit que $N \backslash X$ est un revêtement abélien maximal de $N_0 \backslash X$.

2.5. Variation de Tate mixte sur $\mathbf{C} - \{0,1\}$ associée

Soit V l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des vecteurs colonnes, à éléments indexés par $\{0, 1, \cdots, n\}$. Il est gradué : on a $V = \bigoplus_{j=0}^{n} V_j$, où V_j est formé des vecteurs colonnes dont les éléments d'indice $\neq j$ sont nuls. Soit $z \in \mathbf{C} - \{0,1\}$. Le sous-$\mathbf{Q}$-espace vectoriel de V engendré par les colonnes de $A(z)$ ne dépend pas de la

détermination de $A(z)$ choisie, puisque ρ_n est à valeurs dans $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{Q})$. C'est une $\mathbf{Q}$-structure sur V que l'on note $V_{\mathbf{Q}}(z)$, pour laquelle chaque sous-espace $\bigoplus_{j=k}^{n} V_j$ est rationnel sur $\mathbf{Q}$. Il existe localement des bases de $V_{\mathbf{Q}}(z)$ holomorphes en z. Si ∇ est la connexion pour laquelle elles sont horizontales (à savoir $\frac{\partial}{\partial z} - \left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1}\right)$, et s une fonction holomorphe à valeurs dans V_k, avec $k < n$, ∇s est à valeurs dans $V_k \oplus V_{k+1}$. Deligne [De] résume l'ensemble de ces propriétés en disant que l'on a une $\mathbf{Q}$-variation de Tate mixte sur $\mathbf{C} - \{0,1\}$. Sa philosophie est qu'il y a intérêt à exprimer les propriétés des polylogarithmes en termes de ces structures.

3. LA FONCTION DE BLOCH-WIGNER ET SES GÉNÉRALISATIONS

Les fonctions P_k que nous allons introduire ci-dessous jouent pour le k-logarithme un rôle analogue à celui que joue la fonction $z \mapsto \log|z|$ pour le logarithme. Elles ont été définies par Zagier ([Za]), qui les exprimait comme combinaisons linéaires de fonctions étudiées auparavant par Ramakrishnan ([Ra]) et Wojtkowiak ([Wo]). La présentation que nous en donnons ici est due à Deligne [De].

3.1. Définition des fonctions P_k

Soit z un point de $\mathbf{C} - \{0,1\}$. Reprenons les notations de 2.3. La matrice

$$T_n(z) = A_n^{[c]}(z)\,\overline{A_n^{[c]}(z)}^{-1}\,\tau(-1) \qquad \left(= L_n^{[c]}(z)\,\tau(-1)\,\overline{L_n^{[c]}(z)}^{-1}\,\tau(-1)\right), \tag{16}$$

où c est un chemin dans $\mathbf{C}-\{0,1\}$ reliant $\frac{1}{2}$ à z, ne dépend pas de c : cela résulte du fait que $\rho_n(G)$ est formé de matrices à éléments réels. La matrice $T_n(z)$ est triangulaire inférieure et unipotente, donc est l'exponentielle d'une matrice triangulaire inférieure nilpotente, notée $\log T_n(z)$. On a $\overline{T_n(z)} = \tau(-1)\,T_n(z)^{-1}\,\tau(-1)$, d'où $\overline{\log T_n(z)} = -\tau(-1)\log T_n(z)\,\tau(-1)$; cela signifie que l'élément d'indice (i,j) de $\log T_n(z)$ est réel si $i-j$ est impair, imaginaire pur si $i-j$ est pair.

L'exponentielle d'une matrice carrée de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$, où C est une matrice-colonne et D une matrice carrée, est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f(D)C & \exp(D) \end{pmatrix}$, où f est la

fonction entière $u \mapsto \frac{e^u-1}{u}$. On déduit de cela, par un calcul facile, que l'on a

$$\log T_n(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -2P_1(z) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -2P_2(z) & \log z\overline{z} & \ddots & & & \vdots \\ -2P_3(z) & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -2P_n(z) & 0 & \cdots & 0 & \log z\overline{z} & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

les nombres $P_k(z)$ étant donnés par la formule

$$P_k(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{0\le\ell<k} \frac{b_\ell}{\ell!} \log^\ell(z\overline{z})\, \mathrm{Re}(Li^{[c]}_{k-\ell}(z)) & \text{pour } k \text{ impair} \\ \displaystyle i \sum_{0\le\ell<k} \frac{b_\ell}{\ell!} \log^\ell(z\overline{z})\, \mathrm{Im}(Li^{[c]}_{k-\ell}(z)) & \text{pour } k \text{ pair,} \end{cases} \tag{18}$$

où c est un chemin quelconque reliant $\frac{1}{2}$ à z dans $\mathbf{C} - \{0,1\}$.

Exemples.- 1) On a $P_1(z) = -\log|1-z|$.

2) On a $P_2(z) = i\,D(z)$ où

$$D(z) = \mathrm{Im}\,(Li^{[c]}_2(z) + \log|z|\,\log^{[c]}(1-z)) \tag{19}$$

est une fonction dont les propriétés remarquables ont été notées pour la première fois par Bloch et Wigner (*cf.* [Bℓ1] et [Bℓ2]).

3.2. Propriétés des fonctions P_k $(k \ge 2)$

La fonction $P_k : \mathbf{C} - \{0,1\} \to i^{k-1}\,\mathbf{R}$ est analytique réelle, et l'on a

$$P_k(\overline{z}) = \overline{P_k(z)} = (-1)^{k-1} P_k(z). \tag{20}$$

Elle satisfait pour tout entier $r \ge 1$ la *relation de distribution*

$$P_k(z^r) = r^{k-1} \sum_{\omega^r=1} P_k(\omega z) \tag{21}$$

qui se déduit de (4_r) pour $|z| < 1$, et par prolongement analytique dans le cas général. Pour $k \geq 2$, elle satisfait aussi une *relation d'inversion*

$$P_k(z^{-1}) = (-1)^{k-1} P_k(z). \tag{22}$$

Celle-ci peut se déduire de (5) et (18) par un calcul quelque peu fastidieux ; elle est en fait un cas particulier d'équations fonctionnelles plus générales (*cf.* 4.3).

Il résulte des propriétés de la détermination principale du k-logarithme (§1) et de la relation d'inversion que, pour $k \geq 2$, P_k se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ en posant

$$P_k(0) = P_k(\infty) = 0 \tag{23}$$

$$P_k(1) = \begin{cases} \zeta(k) & \text{pour } k \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } k \text{ pair.} \end{cases} \tag{24}$$

3.3. Différentielle des fonctions P_k

La relation (15) permet de dériver par rapport à z la matrice $T_n(z)$ définie par la formule (16) ; on a

$$\frac{\partial}{\partial z} T_n(z) = \left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1} \right) T_n(z) \tag{25}$$

et par suite ([LIE], III, p. 202)

$$\frac{\partial}{\partial z} \log T_n(z) = g(\mathrm{ad}(\log T_n(z))) \left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1} \right), \tag{26}$$

où g est la fonction $u \mapsto \frac{u}{e^u - 1}$. Cela permet de calculer les dérivées partielles de P_k. On a, pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{\partial}{\partial z} P_k(z) = -\sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{b_\ell}{\ell!} \frac{\log^{\ell-1}(z\overline{z})}{z} P_{k-\ell}(z) + \frac{b_{k-1}}{(k-1)!} \frac{\log^{k-1}(z\overline{z})}{2(1-z)} \tag{27}$$

et, d'après (20),

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} P_k(z) = (-1)^{k-1} \overline{\frac{\partial}{\partial z} P_k(z)}. \tag{28}$$

4. ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

4.1. Le cas du dilogarithme

Outre les relations de distribution et d'inversion, le dilogarithme satisfait la *relation de réflexion*

$$Li_2(1-z) = -Li_2(z) + \frac{\pi^2}{6} - \log z \log(1-z) \tag{29}$$

et une *équation fonctionnelle à cinq termes*

$$\begin{aligned} &Li_2\left(\frac{x}{1-x}\frac{y}{1-y}\right) \\ &= Li_2\left(\frac{y}{1-x}\right) + Li_2\left(\frac{x}{1-y}\right) - Li_2(x) - Li_2(y) - \log(1-x)\log(1-y), \end{aligned} \tag{30}$$

découverte sous des formes diverses (équivalentes modulo changement de variables, inversions et réflexions) par plusieurs mathématiciens au 19ème siècle (Spence, Abel, Hill, Kummer, Schaeffer, etc.). Il convient de préciser les déterminations de Li_2 et log choisies : on prend les déterminations principales pour $z \in \mathbf{C} -]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ dans (29) et pour $|x| + |y| < 1$ dans (30). Les relations (29) et (30) se déduisent immédiatement de (2) et (3), par dérivation.

La fonction P_2 satisfait des relations analogues, dans lesquelles les termes faisant intervenir des logarithmes disparaissent :

$$P_2(1-z) = -P_2(z) \tag{31}$$

pour tout $z \in \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ et

$$P_2\left(\frac{x}{1-x}\frac{y}{1-y}\right) = P_2\left(\frac{y}{1-x}\right) + P_2\left(\frac{x}{1-y}\right) - P_2(x) - P_2(y) \tag{32}$$

pour tout couple (x, y) de points de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ distinct de $(0,1)$, $(1,0)$ et (∞, ∞). Cela se déduit par prolongement analytique et par continuité de l'expression (19) de P_2 en fonction de Li_2, de (29) et de (30). Une explication de ce phénomène sera donnée au numéro suivant.

Remarques.- 1) En combinant les relations d'inversion et de réflexion, on obtient, pour tout $z \in \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$,

$$(33)\quad P_2(z) = P_2\left(\frac{z-1}{z}\right) = P_2\left(\frac{1}{1-z}\right) = -P_2(1-z) = -P_2\left(\frac{1}{z}\right) = -P_2\left(\frac{z}{z-1}\right).$$

Cela permet de récrire (32) (après avoir effectué le changement de variables $y \mapsto 1-y$)

$$(34)\qquad P_2\left(\frac{1-y^{-1}}{1-x^{-1}}\right) - P_2\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + P_2\left(\frac{y}{x}\right) - P_2(y) + P_2(x) = 0$$

(pour (x,y) distinct de $(0,0)$, $(1,1)$ et (∞,∞)).

Rappelons que, si a, b, c, d sont quatre points distincts de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, leur birapport est le nombre complexe $r(a,b,c,d) = (a-c)(b-d)/(a-d)(b-c)$; il est invariant lorsqu'on effectue sur $\{a,b,c,d\}$ le produit de deux transpositions à supports disjoints. Posons

$$(35)\qquad \widetilde{P}_2(a,b,c,d) = P_2(r(a,b,c,d)).$$

La relation (33) signifie alors que l'on a

$$(36)\qquad \widetilde{P}_2(\sigma(a),\sigma(b),\sigma(c),\sigma(d)) = \varepsilon(\sigma)\,\widetilde{P}_2(a,b,c,d)$$

pour toute permutation σ de $\{a,b,c,d\}$ de signature $\varepsilon(\sigma)$. Vu l'invariance du birapport sous l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$, on a, pour tout $g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$,

$$(37)\qquad \widetilde{P}_2(ga,gb,gc,gd) = \widetilde{P}_2(a,b,c,d).$$

Enfin, la relation (34) se traduit de la façon suivante : si a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sont cinq points distincts de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, on a

$$(38)\qquad \sum_{i=1}^{5}(-1)^i\,\widetilde{P}_2(a_1,\cdots,\widehat{a_i},\cdots,a_5) = 0.$$

Il suffit en effet, d'après (37), de démontrer cette relation lorsque (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) est de la forme $(\infty,0,1,x,y)$ et on retrouve dans ce cas la formule (34).

2) Bloch [Bℓ1] a démontré que, à un scalaire multiplicatif près, P_2 est l'unique fonction mesurable sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ satisfaisant l'équation fonctionnelle (34).

4.2. Équations fonctionnelles du k-logarithme

Soient V une variété algébrique irréductible sur $\mathbf{C}$, K le corps de ses fonctions rationnelles et $\mathbf{Z}[K-\{0,1\}]$ le groupe des combinaisons linéaires formelles, à coefficients dans $\mathbf{Z}$, d'éléments de $K-\{0,1\}$.

Soit k un entier ≥ 2. Pour tout élément $\xi=\sum n_f[f]$ de $\mathbf{Z}[K-\{0,1\}]$, on note $\alpha_k(\xi)$ l'élément $\sum n_f \underbrace{f\otimes\cdots\otimes f}_{k-2 \text{ termes}}\otimes(f\wedge(1-f))$ de $\underbrace{K^\times\otimes_{\mathbf{Z}}\cdots\otimes_{\mathbf{Z}}K^\times}_{k-2 \text{ termes}}\otimes_{\mathbf{Z}}(K^\times\wedge K^\times)$ et $\beta_k(\xi)$ son image dans $(K^\times/\mathbf{C}^\times)\otimes_{\mathbf{Z}}\cdots\otimes_{\mathbf{Z}}(K^\times/\mathbf{C}^\times)\otimes_{\mathbf{Z}}((K^\times/\mathbf{C}^\times)\wedge(K^\times/\mathbf{C}^\times))$. On dit que ξ satisfait la condition (EF_k) s'il existe une détermination holomorphe de $\sum n_f\, Li_k\circ f$ sur un ouvert non vide de $V(\mathbf{C})$ qui peut s'exprimer comme un polynôme à coefficients complexes en des fonctions de la forme $Li_j\circ g$, avec $1\leq j<k$ et $g\in K^\times$. (Au moins localement, cette condition ne dépend pas de la détermination choisie.)

THÉORÈME 1.- *Soient k un entier ≥ 2 et $\xi=\sum n_f[f]$ un élément de $\mathbf{Z}[K-\{0,1\}]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *ξ satisfait la condition (EF_k).*

b) *On a $\beta_k(\xi)=0$.*

c) *Il existe $\xi'\in\mathbf{Z}[\mathbf{C}-\{0,1\}]$ tel que $2\alpha_k(\xi-\xi')=0$.*

THÉORÈME 2.- *Soient k un entier ≥ 2 et $\xi=\sum n_f[f]$ un élément de $\mathbf{Z}[K-\{0,1\}]$ satisfaisant les conditions équivalentes du th. 1. Soit U le plus grand ouvert de V tel que toute fonction $f\in\mathrm{Supp}(\xi)$ définisse un morphisme $U\to\mathbf{P}_1$. L'application $x\mapsto\sum n_f P_k(f(x))$, et plus généralement chacune des applications $x\mapsto\sum n_f\log^{k-\ell}(|f(x)|)\,P_\ell(f(x))$, avec $2\leq\ell\leq k$, est constante sur U.*

Le th. 1 donne des conditions nécessaires et suffisantes simples à vérifier pour qu'à $\sum n_f[f]$ corresponde une équation fonctionnelle satisfaite par Li_k. Le th. 2 explique pourquoi P_k satisfait alors à une équation fonctionnelle analogue, mais sans termes parasites faisant intervenir les Pj pour $j<k$.

Ces énoncés ne semblent pas figurer explicitement dans la littérature. Leur

démonstration est trop longue pour être développée dans cet exposé et sera publiée ailleurs. Indiquons-en les grandes lignes : on se ramène facilement au cas où V est projective et lisse. L'implication a) $\Longrightarrow$ b) se déduit alors d'un théorème de Wojtkowiak ([POL], ch. 10,th. F), dont malheureusement la preuve n'est publiée que pour $V = \mathbf{P}_1$. L'implication b) $\Longrightarrow$ c) se déduit d'un énoncé plus précis (et non trivial) : si l'on a $\beta_k(\xi) = 0$, et si a est un point de l'ouvert U considéré dans le th. 2, alors l'élément $\xi' = \sum^* n_f[f(a)]$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{C} - \{0,1\}]$ (où $\sum^*$ signifie que l'on ne somme que sur les f tels que $f(a) \notin \{0,1,\infty\}$) satisfait la relation $2\alpha_k(\xi - \xi') = 0$. L'implication c) $\Longrightarrow$ a) se déduit facilement de l'expression de Li_k comme intégrale itérée. Le théorème 2 se démontre par récurrence sur k, en utilisant l'expression de la différentielle de P_k trouvée au §3, n° 3. Les arguments sont des variantes de ceux de Zagier dans [Za], où est traité le cas $V = \mathbf{P}_1$.

Sous les hypothèses du th. 2, il est commode de noter $P_k(\xi)$ la valeur commune des expressions $\Sigma n_f P_k(f(x))$, pour $x \in U$.

4.3. **Exemples**

Soient x, y des indéterminées.

1) L'élément $[x]+(-1)^k[x^{-1}]$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{C}(x)-\{0,1\}]$ satisfait la condition (EF_k) : en effet son image par α_k

$$x \otimes \cdots \otimes x \otimes (x \wedge (1-x)) + (-1)^k x^{-1} \otimes \cdots \otimes x^{-1} \otimes (x^{-1} \wedge (1-x^{-1}))$$

est égale à $x \otimes \cdots \otimes x \otimes (x \wedge (-1))$, donc est annulée par 2. Cela fournit une démonstration de la relation d'inversion (22).

2) L'élément $[x] + [1-x]$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{C}(x) - \{0,1\}]$ satisfait la condition (EF_2).

3) Pour tout entier $r \geq 1$, l'élément $[x^r] - r^{k-1} \sum_{\omega^r=1}[\omega x]$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{C}(x)-\{0,1\}]$ satisfait la condition (EF_k).

4) L'élément $\left[\frac{1-y^{-1}}{1-x^{-1}}\right] - \left[\frac{1-y}{1-x}\right] + \left[\frac{y}{x}\right] - [y] + [x]$ satisfait la condition (EF_2) ; un calcul immédiat montre que son image par α_2 est égale à $xy \wedge (-1)$, donc annulée par 2.

5) Kummer en 1840 a découvert une équation fonctionnelle du trilogarithme ; elle correspond à l'élément $\xi = 2[x] + 2[y] + 2\left[\frac{x(1-y)}{x-1}\right] + 2\left[\frac{y(1-x)}{y-1}\right] + 2\left[\frac{1-x}{1-y}\right] + 2\left[\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right] - [xy] - \left[\frac{x}{y}\right] - \left[\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right]$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{C}(x,y) - \{0,1\}]$. On a $P_3(\xi) = 2\zeta(3)$.

Récemment, Goncharov ([Go1]) a découvert une équation fonctionnelle pour le trilogarithme, faisant intervenir 22 termes en trois indéterminées, et qui implique par spécialisation celle de Kummer.

6) Des éléments ξ non triviaux (*i.e.* ne provenant pas des exemples 1) et 2)) satisfaisant (EF_k) ont été découverts par Kummer pour $k = 4$ et 5 ; des recherches récentes sur ordinateur ont permis à Gangl d'en trouver pour $k = 6$ et 7. Pour plus de détails, on consultera le chapitre 16 et l'appendice A de [POL].

5. POLYLOGARITHMES ET VALEURS SPÉCIALES DE FONCTIONS ZÊTA

Dans ce paragraphe, F est un corps de nombres (*i.e.* une extension finie de $\mathbf{Q}$), d son degré, Σ l'ensemble de ses plongements complexes, r_1 (resp. $2r_2$) le nombre de ses plongements réels (resp. complexes non réels). On note $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]$ l'ensemble des combinaisons linéaires formelles, à coefficients dans $\mathbf{Z}$, d'éléments de $\mathbf{P}_1(F)$.

5.1. L'homomorphisme P_k^F

Soit k un entier ≥ 2. Soit $(i^{k-1}\mathbf{R})_+^\Sigma$ l'ensemble des familles $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ d'éléments de $i^{k-1}\mathbf{R}$ telles que $x_{\overline{\sigma}} = \overline{x_\sigma}$ pour tout $\sigma \in \Sigma$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension d_k, avec $d_k = r_1 + r_2$ si k est impair et $d_k = r_2$ si k est pair. D'après la formule (20), on définit un homomorphisme $P_k^F : \mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)] \to (i^{k-1}\mathbf{R})_+^\Sigma$ en posant

$$P_k^F(\Sigma\, n_x[x]) = (\sum n_x\, P_k(\sigma(x)))_{\sigma\in\Sigma}. \tag{39}$$

5.2. Les sous-groupes $\mathcal{R}_k(F)$ et $\mathcal{A}_k(F)$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]$

Nous allons définir deux familles $(\mathcal{R}_k(F))_{k\geq 1}$ et $(\mathcal{A}_k(F))_{k\geq 2}$ de sous-groupes de $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]$. Si x est un élément de $\mathbf{P}_1(F)$, l'image canonique de $[x]$ dans $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]/\mathcal{R}_k(F)$ sera notée $\{x\}_k$. On procède par récurrence :

a) $\mathcal{R}_1(F)$ est le sous-groupe de $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]$ engendré par $[0]$, $[\infty]$ et les éléments $[xy] - [x] - [y]$, pour (x, y) parcourant $F^\times \times F^\times$. Le groupe $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]/\mathcal{R}_1(F)$ s'identifie canoniquement à $F^\times$.

b) Supposons $k \geq 2$. Notons $u_2 : \mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)] \to F^\times \wedge F^\times$ l'homomorphisme défini par $u_2([x]) = \{x\}_1 \wedge \{1-x\}_1$ et, pour $k \geq 3$, notons $u_k : \mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)] \to F^\times \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]/\mathcal{R}_{k-1}(F))$ l'homomorphisme défini par $u_k([x]) = \{x\}_1 \otimes \{x\}_{k-1}$. Alors $\mathcal{A}_k(F)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]$ dont l'image par u_k est de torsion, et $\mathcal{R}_k(F)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}_k(F)$ dont l'image par P_k^F est nulle.

Remarques.- 1) L'élément [1] appartient à $\mathcal{A}_k(F)$ pour tout $k \geq 2$. Il appartient à $\mathcal{R}_k(F)$ si et seulement si k est pair ou égal à 1 (formule (24)). Les éléments [0] et $[\infty]$ appartiennent à $\mathcal{R}_k(F)$ pour tout $k \geq 1$ (formule (23)).

2) Pour tout $x \in F^\times$ et tout $k \geq 2$, $[x] + (-1)^k[x^{-1}]$ appartient à $\mathcal{R}_k(F)$. Cela résulte des définitions et de la formule (22), par récurrence sur k.

3) Supposons $k \geq 2$. Pour qu'un élément $\sum n_x[x]$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]$ appartienne à $\mathcal{A}_k(F)$ (resp. $\mathcal{R}_k(F)$), il faut et il suffit que, quels que soient les homomorphismes $v_1, \cdots, v_k$ de $F^\times$ dans $\mathbf{Z}$, on ait

$$(40) \qquad \sum n_x\, v_1(x) \cdots v_{k-2}(x)\,(v_{k-1}(x)\, v_k(1-x) - v_{k-1}(1-x)\, v_k(x)) = 0$$

et

$$(41) \qquad \sum n_x\, v_1(x) \cdots v_{k-j}(x)\, P_j(\sigma(x)) = 0$$

pour $2 \leq j < k$ (resp. $2 \leq j \leq k$) et $\sigma \in \Sigma$. Cela résulte par récurrence sur k des définitions.

5.3. La conjecture de Zagier (forme initiale)

Conjecture 1 (Zagier).- *Pour tout $k \geq 2$, l'image de $\mathcal{A}_k(F)$ par l'homomorphisme P_k^F est un réseau de $(i^{k-1}\mathbf{R})_+^\Sigma$, dont le covolume est un multiple rationnel de $|\Delta_F|^{\frac{1}{2}}\, \zeta_F(k)/\pi^{k(d-d_k)}$, où Δ_F est le discriminant et ζ_F la fonction zêta de Dedekind du corps F.*

Pour plusieurs choix du corps F et de l'entier $k \geq 2$, Zagier (*cf.* [Za] et [POL], App. A) a exhibé de grandes familles d'éléments de $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]$ qui numériquement semblent satisfaire les critères (40) et (41) d'appartenance à $\mathcal{A}_k(F)$. Il calcule les images de ces éléments par P_k^F et constate qu'elles semblent numériquement engendrer un réseau de $(i^{k-1}\mathbf{R})_+^\Sigma$, dont le covolume est un multiple de $|\Delta_F|^{\frac{1}{2}}\, \zeta_F(k)/$

$\pi^{k(d-d_k)}$ par un nombre rationnel de petits numérateur et dénominateur. Cela fournit une évidence très convaincante à la conjecture.

Remarques.- 1) En fait, Zagier a énoncé de nombreuses variantes de la conjecture 1 (*loc. cit.*).

2) Dire que $P_k^F(\mathcal{A}_k(F))$ *contient* un réseau de $(i^{k-1}\mathbf{R})_+^\Sigma$ satisfaisant aux conditions de la conjecture 1 équivaut à dire qu'il existe des ensembles $T \subset \mathcal{A}_k(F)$ et $S \subset \Sigma$ de cardinal d_k tels que la valeur absolue du déterminant $\det(P_k(\sigma(x))_{x\in T,\sigma\in S})$ soit un multiple rationnel non nul de $|\Delta_F|^{\frac{1}{2}}\,\zeta_F(k)/\pi^{k(d-d_k)}$. Dans ce cas, pour que $P_k^F(\mathcal{A}_k(F))$ soit un réseau de $(i^{k-1}\mathbf{R})_+^\Sigma$, il faut et il suffit que tous les déterminants de la forme précédente soient produits de $|\Delta_F|^{\frac{1}{2}}\,\zeta_F(k)/\pi^{k(d-d_k)}$ par des nombres rationnels à dénominateurs bornés.

3) Certains auteurs remplacent, dans la conjecture 1, $\mathcal{A}_k(F)$ par son intersection avec $\mathbf{Z}[F - \{0,1\}]$. Cela conduit à un énoncé équivalent puisque l'on a $P_k^F(0) = P_k^F(\infty) = 0$ et $P_k^F(1) = 2^{k-1}P_k^F(-1)/(1-2^{k-1})$ (formule (21) pour $r = 2$).

5.4. La conjecture de Zagier (forme K-théorique)

Soit k un entier ≥ 2. Dans [Bo], Borel définit un homomorphisme (le régulateur) du groupe de K-théorie $K_{2k-1}(F)$ dans $(i^{k-1}\mathbf{R})_+^\Sigma$, et prouve que son noyau est fini et que son image est un réseau dont le covolume est un multiple rationnel de $|\Delta_F|^{\frac{1}{2}}\,\zeta_F(k)/\pi^{k(d-d_k)}$. Notons reg le prolongement par linéarité du régulateur à $K_{2k-1}(F)_\mathbf{Q} = K_{2k-1}(F)\otimes_\mathbf{Z}\mathbf{Q}$. Il était évidemment tentant de formuler la conjecture suivante, qui implique la conjecture 1.

Conjecture 2.- *L'image de $\mathcal{A}_k(F)$ par l'homomorphisme P_k^F est un réseau (i.e. un sous-$\mathbf{Z}$-module libre de rang maximum) du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel* $\mathrm{reg}(K_{2k-1}(F)_\mathbf{Q})$.

5.5. Description conjecturale de $\mathcal{R}_k(F)$

Soient X une indéterminée, k un entier ≥ 2 et $\sum n_f[f]$ un élément de $\mathbf{Z}[F(X) - \{0,1\}]$ tel que $\sum n_f \underbrace{f\otimes\cdots\otimes f}_{k-2\text{ termes}}\otimes(f\wedge(1-f))$ soit nul dans $\underbrace{F(X)^\times\otimes_\mathbf{Z}\cdots\otimes_\mathbf{Z}F(X)^\times}_{k-2\text{ termes}}\otimes_\mathbf{Z}(F(X)^\times\wedge F(X)^\times)$. On peut alors démontrer que, quels que soient a, b dans $\mathbf{P}_1(F)$, l'élément $\sum n_f([f(a)]-[f(b)])$ appartient à

$\mathcal{R}_k(F)$. Zagier conjecture que, réciproquement, tout élément de $\mathcal{R}_k(F)$ possède un multiple de cette forme.

5.6. Les résultats

a) Pour $k = 2$, toutes les conjectures des numéros 3, 4, 5 sont des conséquences des travaux de Bloch et Suslin ([Su]).

b) Pour $k \geq 3$, il n'y a à ma connaissance aucun cas où l'on sache que l'image de $\mathcal{A}_k(F)$ par l'homomorphisme P_k^F est de type fini sur $\mathbf{Z}$ (sauf bien sûr le cas trivial où l'on a $d_k = 0$, c'est-à-dire où F est totalement réel et k pair).

c) L'image par P_k^F de $\mathcal{A}_k(F)$ contient un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{reg}(K_{2k-1}(F))$ pour $k = 3$, d'après Goncharov ([Go2] et [Go3]). Dans ce cas, la remarque 2 du n° 3 s'applique, d'où une expression de $\zeta_F(3)$ en termes de trilogarithmes d'éléments de F et de leurs conjugués.

d) On peut définir des sous-groupes $\mathcal{R}'_k(F)$ et $\mathcal{A}'_k(F)$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]$ de la même façon qu'au numéro 2, à ceci près que u_2 est remplacé par $u'_2 : \mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)] \to F^\times \otimes F^\times$ avec $u'_2([x]) = \{x\}_1 \otimes \{1-x\}_1$. Les groupes ainsi obtenus sont inclus dans $\mathcal{R}_k(F)$ et $\mathcal{A}_k(F)$ respectivement. Beilinson et Deligne ([B,D])ont annoncé que l'on a $P_k^F(\mathcal{A}'_k(F)) \subset \mathrm{reg}(K_{2k-1}(F)_{\mathbf{Q}})$ pour tout $k \geq 2$.

BIBLIOGRAPHIE

[Bℓ1] S. BLOCH - *Higher regulators, algebraic K-theory and zeta functions of elliptic curves*, Lect. Notes U.C. Irvine, 1977.

[Bℓ2] S. BLOCH - *Applications of the dilogarithm function in algebraic K-theory and algebraic geometry*, International Symposium on Algebraic Geometry, Kyoto, 1977, 103-114.

[B,D] A. BEILINSON et P. DELIGNE - *Motivic Polylogarithm and Zagier conjecture*, preprint.

[Bo] A. BOREL - *Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zêta aux points entiers*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 4 (1977), 613-636.

[De] P. DELIGNE - *Interprétation motivique de la conjecture de Zagier reliant polylogarithmes et régulateurs*, preprint.

[Go1] A.B. GONCHAROV - *The classical trilogarithm, algebraic K-theory of fields and Dedekind zeta functions*, Bull. of the AMS 29 (1991), 155-161.

[Go2] A.B. GONCHAROV - *Geometry of configurations, polylogarithms and motivic cohomology*, preprint.

[Go3] A.B. GONCHAROV - *Polylogarithms and motivic Galois groups*, preprint.

[Ha] R.M. HAIN - *Classical Polylogarithms*, preprint, 1992.

[Le] L. LEWIN - *Polylogarithms and Associated Functions*, Elsevier North-Holland, New York, 1981.

[LIE] N. BOURBAKI - *Groupes et algèbres de Lie*, éd. Hermann, 1972.

[POL] *Structural Properties of Polylogarithms* (L. Lewin editor), Math. Surveys and Monographs, Vol. 37, AMS, 1991.

[Ra] D. RAMAKRISHNAN - *Analogs of the Bloch-Wigner function for higher polylogarithms*, Applications of Algebraic K-Theory to Algebraic Geometry and Number Theory, Contemporary Math., Vol. 55 part I, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1986, 371-376.

[Su] A.A. SUSLIN - *Algebraic K-theory of fields*, Proc. Internat. Congr. Math. (Berkeley, 1986), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1987, 222-244.

[Wo] Z. WOJTKOWIAK - *A construction of analogs of the Bloch-Wigner function*, Math. Scand. **64**,1989, 140-142.

[Za] D. ZAGIER - *Polylogarithms, Dedekind zeta functions and the algebraic K-theory of fields*, in Arithmetic Algebraic Geometry, Progress in Math. 89, 1991.

Joseph OESTERLÉ

Université de Paris VI
Département de Mathématiques
Tour 45-46, 5ème étage
4 place Jussieu
F-75230 PARIS CEDEX 05

Astérisque

JEAN-JACQUES RISLER

Construction d'hypersurfaces réelles [d'après Viro]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki, exp. n° 763, p. 69-86
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__69_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 1992
45ème année, 1992-93, n° 763

CONSTRUCTION D'HYPERSURFACES RÉELLES

[d'après Viro]

par Jean-Jacques RISLER

1. INTRODUCTION

L'étude de la topologie des hypersurfaces algébriques réelles projectives et lisses a une longue histoire. Il s'agit du problème suivant : quelle peut être la topologie du plongement d'une hypersurface lisse de degré d ?

Cette question a fait l'objet d'un des problèmes de Hilbert (le 16-ième) qui posait la question pour les courbes de degré 6, et les surfaces de degré 4. Le cas des courbes de degré 6 a été résolu par Gudkov en 1969 (cf. [Gud 74]), et celui des surfaces de degré 4 par Kharlamov en 1976 ([Kha 77]). Le cas des courbes de degré 7 a été résolu par Viro (cf. plus bas), et celui des courbes de degré 8 n'est pas encore complètement élucidé. Pour des Surveys sur la question, on peut consulter [Gud 74], [A-O 79], [A' C 79], [Wi 78] ou [Vi 86].

L'étude de la topologie des variétés algébriques réelles comprend deux parties bien distinctes :

a) Décrire des "prohibitions", i.e., donner une liste (la plus complète possible) des obstructions sur les types topologiques de plongements.

b) Construire des hypersurfaces lisses de degré d donné ; si l'on peut construire tous les types topologiques non interdits par les prohibitions de a), le problème posé est considéré comme résolu.

A titre d'exemples, citons les deux fameux théorèmes de Harnack :

1.1 Théorème ([Ha 76]).— *Une courbe de degré d dans $\mathbf{RP}^2$ a au plus $\frac{(d-1)(d-2)}{2}+1$ composantes connexes.*

1.2 Théorème ([Ha 76]).— *Pour tout entier $d \geq 1$, et m tel que $1 \leq m \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$, il existe dans $\mathbf{RP}^2$ une courbe lisse de degré d avec m composantes connexes.*

Le théorème 1.1 est un résultat de type a), et le théorème 1.2 est de type b) : il résout complètement le problème du type topologique des courbes lisses de degré d, mais ne dit rien sur le type topologique du plongement. Il utilise la méthode des "petits paramètres" : on construit une courbe de degré d en perturbant légérement l'union d'une courbe de degré $d-1$ et d'une droite se coupant transversalement.

Les résultats de type a) sont nombreux et intéressants ; cependant, le sujet de cet exposé étant un résultat de type b), je ne prétends pas en faire un résumé, même succinct. Le lecteur intéressé pourra consulter [Wi 78], ou [Vi 86]. Les noms principaux dans ce domaine sont Harnack, Petrovskii, Gudkov, Arnol'd et Rokhlin, et la recherche dans ce domaine est restée très active, surtout parmi l'école russe.

Je vais dans cet exposé décrire la méthode de Viro de construction d'hypersurfaces réelles, qui procède d'un esprit très différent des méthodes "à la Harnack" employées jusqu'ici, et expliquer les applications aux courbes de degré 7.

Cette méthode apparaît dans la thèse de Viro ([Vi 83]), en cours de traduction par l'auteur. Le théorème principal est énoncé dans [Vi 84] dans le cas des courbes. Le théorème est montré dans [G-K-Z 92] sous une forme plus faible.

2. COMPACTIFICATIONS DE $(\mathbf{R}^*)^n$

Nous allons décrire deux compactifications de $(\mathbf{R}^*)^n$ associées au polytope de Newton d'un polynôme de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

Considérons une famille $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ de points entiers de $\mathbf{R}^n$, et soit Δ leur enveloppe convexe. On leur associe une application $\phi : (\mathbf{C}^*)^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ définie par

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sum_{i=0}^{N} \alpha_i |X^{\alpha_i}|}{\sum |X^{\alpha_i}|}$$

avec la notation $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $X^\alpha = x_1^{\alpha^1} \ldots x_n^{\alpha^n}$ si $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$.

Notons $\Sigma \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ le groupe engendré par les symétries de $\mathbf{R}^n$ par rapport aux hyperplans de coordonnées et $(\mathbf{R}^+)^n$ le quadrant positif ouvert de $\mathbf{R}^n$.

2.1 Lemme.— *Supposons Δ de dimension n (i.e., $\overset{\circ}{\Delta}$ non vide). Alors, si $\sigma \in \Sigma$, $\phi_{|\sigma((\mathbf{R}^+)^n)}$ est un difféomorphisme du "quadrant" $\sigma((\mathbf{R}^+)^n)$ sur $\overset{\circ}{\Delta}$.*

On peut soit montrer ce lemme directement, soit utiliser les résultats de [Ati 82] ou [G-S 82] sur l'application des moments.

L'application ϕ se factorise en effet par

$$(\mathbf{C}^*)^n \xrightarrow{\psi} (\mathbf{CP})^N \xrightarrow{g} \mathbf{R}^n$$

avec $\psi(x_1, \ldots, x_n) = [X^{\alpha_0}, \ldots, X^{\alpha_N}]$, et $g([y_0, \ldots, y_N]) = \sum_{i=0}^N \frac{\alpha_i |y_i|}{\sum |y_i|}$.

L'application g est l'application des moments correspondant à l'action du tore $(\mathbf{C}^*)^n$ sur $\mathbf{CP}^N$ définie par $t.y = [t^{\alpha_0} y_0, \ldots, t^{\alpha_N} y_N]$. L'application des moments est souvent définie par $g([y_0, \ldots, y_N]) = \sum_{i=0}^N \frac{\alpha_i |y_i|^2}{\sum |y_i|^2}$. Les résultats cités ici sont valables pour les deux cas. L'image $Y = \psi(\mathbf{C}^*)^n$ est l'orbite du point $(1, \ldots, 1)$, et il est montré dans [Ati 82] (Th. 2) que $g(\bar{Y}) = \Delta$, et que si $T_c \subset (\mathbf{C}^*)^n$ est le tore compact, g induit un homéomorphisme de $\bar{Y}/T_c$ sur Δ, et un difféomorphisme de Y/T_c sur $\overset{\circ}{\Delta}$. On en déduit immédiatement le lemme 2.1.

Pour simplifier l'exposé, nous supposerons que les α_i^j sont ≥ 0. On a alors, toujours avec l'hypothèse $\overset{\circ}{\Delta}$ non vide, une première compactification C_Δ de $(\mathbf{R}^*)^n$ égale à

$$C_\Delta = \cup_{\sigma \in \Sigma} (\sigma(\Delta))$$

définie par l'application $\tilde{\phi}$ définie comme $\tilde{\phi}(\sigma(x)) = \sigma(\phi(x))$ pour $\sigma \in \Sigma$ et $x \in \sigma((\mathbf{R}^+)^n)$.

2.2 Exemple.— Prenons $n = 2$, et pour Δ l'ensemble des monômes en (x, y) de degré $\leq d$. On trouve alors la compactification habituelle de $(\mathbf{R}^*)^2$ par un disque

(Figure 1).

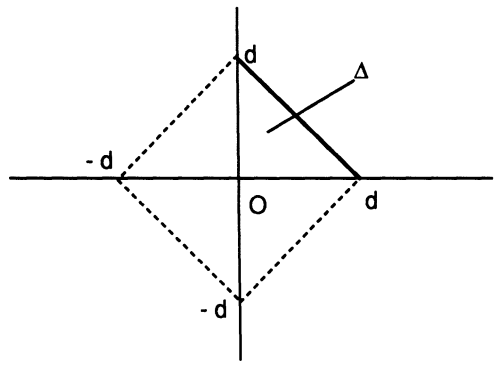


Figure 1

Viro considère une seconde compactification C'_Δ de $(\mathbf{R}^*)^n$ (mais utilise en fait surtout la première) en considérant la partie réelle de la variété torique associée au polytope Δ (cf. [Dan 78], ou [Oda 88]).

2.3 Lemme.— *C'_Δ est homéomorphe au quotient de C_Δ lorsque l'on identifie les faces de C_Δ avec la règle suivante : si Γ est une face de C_Δ, pour tout vecteur $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ à coordonnées entières orthogonal à Γ, Γ est identifiée avec la face $\sigma(\Gamma)$, σ étant la symétrie $((-1)^{\alpha_1}, \ldots, (-1)^{\alpha_n}) \in \Sigma \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$.*

2.4 Exemple : Dans le cas où Δ est le polygone de l'exemple 2.2, on trouve que C'_Δ est le plan projectif $\mathbf{RP}^2$.

La démonstration du lemme 2.3 se fait en considérant l'action du tore sur l'ouvert affine de la variété torique correspondant à la face Γ.

3. CARTE D'UN POLYNÔME

Avec les notations du §2, rappelons que si E est un ensemble de points à coordonnées entières ≥ 0 d'enveloppe convexe Δ, on a une application $\tilde{\phi} : (\mathbf{R}^*)^n \longrightarrow C_\Delta$, et que $\tilde{\phi}$ est un plongement si $\dim\Delta = n$.

3.1 Définition.— *Soit $P \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme, $Z(P) \subset \mathbf{R}^n$ l'ensemble de ses zéros, $\Delta(P)$ son polytope de Newton. Si Δ est un polytope à sommets à*

coordonnées entières ≥ 0, *on appelle* Δ*-carte de* P *la paire formée de* Δ *et de l'adhérence de* $\tilde{\phi}\big(Z(P)\cap(\mathbf{R}^*)^n\big)$ *dans* C_Δ. *Cette carte est notée* $C_\Delta(P)$.

3.2 Remarques

1) Le polytope Δ naturel pour construire la Δ-carte de P est $\Delta(P)$. Si $\Delta=\Delta(P)$, la Δ-carte de P s'appelle simplement la carte de P et est notée $C(P)$. Cependant, si $\dim\Delta = n$, on peut considérer des cartes $C_\Delta(P)$ pour d'autres polytopes. Si $\dim\Delta < n$, la carte $C_\Delta(P)$ n'a de signification que si $\Delta(P)\subset\Delta$.

2) On s'intéresse au type topologique "stratifié" des cartes au sens suivant : deux sous-ensembles C_1 et C_2 de C_Δ seront considérés comme équivalents s'il existe un difféomorphisme stratifié $h : C_\Delta \longrightarrow C_\Delta$ tel que h induise un homéomorphisme de $C_1\cap\Gamma$ sur $C_2\cap\Gamma$ pour toute face Γ de C_Δ.

3) Si Δ contient le polytope de Newton $\Delta(P)$, et si Γ est une face de Δ, notons P^Γ le polynôme "Γ-tronqué" de P, i.e., le polynôme formé à partir de P en ne gardant que les monômes correspondant à des points de Γ. On voit alors facilement que si l'on pose $\tilde{\Gamma}=\cup_{\sigma\in\Sigma}(\sigma(\Gamma))$,

$$C_\Delta(P)\cap\tilde{\Gamma} = C_\Gamma(P^\Gamma).$$

4) Supposons que $n=2$ et que P soit un trinôme ; alors la carte $C(P)$ se construit de la manière suivante : on marque le signe des monômes à chaque sommet de $\Delta(P)$; si les trois sommets ne sont pas de même signe, on trace un segment de droite joignant les deux côtés dont les sommets sont de signes opposés. Si $\sigma\in\Sigma$, on fait de même pour $\sigma(\Delta(P))$, avec la règle suivante : si $M=(\alpha_1,\alpha_n 2)$ est un sommet de $\Delta(P)$, et si $\sigma=(\varepsilon_1,\varepsilon_n 2)$, le signe de $\sigma(M)$ est celui de M multiplié par $\varepsilon_1^{\alpha_1}\varepsilon_2^{\alpha_2}$. (cf. l'exemple 3.5 ci-dessous). Ceci se généralise immédiatement à tout entier n, pour des polynômes ayant $n+1$ monômes dont le polyèdre de Newton est alors un simplexe.

3.3 Définition.— *Un polynôme* $P\in\mathbf{R}[X_1,\ldots,X_n]$ *est non dégénéré (par rapport à son polytope de Newton* Δ*) si pour toute face* Γ *de* Δ, P^Γ *est réduit, et* $Z(P^\Gamma)$ *est lisse (au sens algébrique) dans* $(\mathbf{R}^*)^n$. *(Ici,* $\overset{\circ}{\Delta}$ *est considéré comme une face de* Δ*).*

3.4 Proposition.— *Supposons* P *non dégénéré. Alors* $C(P)$ *est transverse au bord de* $C_\Delta(P)$ *(au sens des ensembles stratifiés).*

Le problème est local en un point x d'une strate du bord de C_Δ. On peut alors raisonner dans la variété torique (non nécéssairement normale) $\overline{\psi((\mathbf{R}^*)^n)}$ (notation de 2.1) au voisinage du point $\tilde{x}$ correspondant à x, auquel cas la strate passant par $\tilde{x}$ est l'orbite de $\tilde{x}$, et le polynôme P s'identifie à une forme linéaire.

Dans le cas d'une variété torique lisse (sur le corps $\mathbf{C}$), cette proposition est montrée dans [Kho 77].

3.5 Remarque : Cette proposition est vraie si l'on suppose seulement que $Z(P^\Gamma)$ est lisse pour toute face Γ de codimension ≥ 1 (i.e., $Z(P)$ peut avoir des singularités dans $(\mathbf{R}^*)^n$).

3.6 Exemple : Pour $P = X^3 - Y^2X^2 + Y^3$, la carte $C(P)$ est représentée ci-dessous.

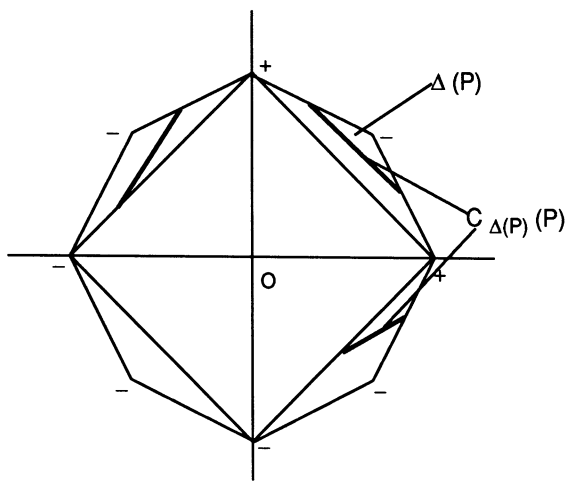


Figure 2

4. COLLAGES DE CARTES

4.1 Définition.— *Soit* $\Delta \subset \mathbf{R}^n$ *un polytope convexe à sommets entiers* > 0, $\Delta = \cup_{i\in I}\Delta_i$ *une décomposition de* Δ *par des polytopes convexes à sommets entiers. On dit que cette décomposition est régulière si* :

1) $\overset{\circ}{\Delta}_i \cap \overset{\circ}{\Delta}_j = \emptyset$ *pour* $i \neq j$.

2) $\Delta_i \cap \Delta_j$ *est une face commune à* Δ_i *et* Δ_j.

3) *Il existe une fonction affine par morceaux concave* $\nu : \Delta \longrightarrow \mathbf{R}^+$ *telle que*

a) $\nu_{|\Delta_i}$ *soit affine* $\forall i \in I$.

b) $\nu_{|\Delta_i \cup \Delta_j}$ *ne soit pas affine pour* $i \neq j$.

c) $\nu(\Delta \cap \mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}$.

Toutes les décompositions ne sont pas régulières. Un exemple classique est donné par la figure suivante (cf. [Co-He 80]).

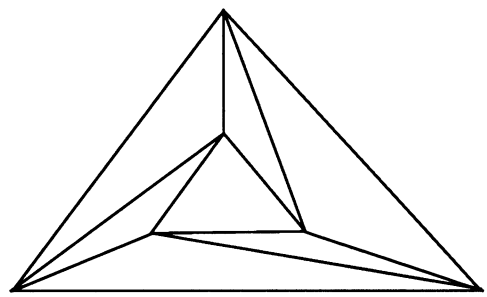


Figure 3

Considérons une décomposition régulière $\Delta = \cup \Delta_i$, et des polynômes P_i tels que :

a) $\Delta(P_i) = \Delta_i$ pour tout i.

b) Si $\Gamma = \Delta_i \cap \Delta_j$, $P_i^\Gamma = P_j^\Gamma$.

c) Les P_i sont non dégénérés.

Alors les cartes $C(P_i)$ se recollent en un ensemble contenu dans C_Δ, et les P_i en un polynôme $P = \sum_{\omega \in \mathbf{Z}^n} a_\omega X^\omega$ tel que $P^{\Delta_i} = P_i \quad \forall\, i$.

Soit $\nu : \Delta \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction concave affine par morceaux associée à la décomposition, et posons $P_T = \sum_{\omega \in \mathbf{Z}^n} a_\omega X^\omega T^{\nu(\omega)}$. On appelera P_T le "polynôme de Viro" associé à la fonction ν.

Le théorème principal de cet exposé est alors :

4.2 Théorème.— *Avec les hypothèses ci-dessus, il existe* $T_0 > 0$ *tel que pour* $t > T_0$ *le polynôme* P_t *soit non dégénéré, et la carte* $C(P_t)$ *équivalente au collage des cartes* $C(P_i)$.

Remarque : Si on remplace ν par une fonction convexe, on a le même résultat que ci-dessus, pour $0 < t < T_0$, avec T_0 assez petit.

Démonstration : Soit $G_\nu \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ le graphe de la fonction ν, et soit Δ_ν son enveloppe convexe ; Δ_ν est le polytope de Newton du polynôme P_T. Considérons dans C_{Δ_ν} la carte $C_{\Delta_\nu}(T-T_0)$ du polynôme $T-T_0$. Cette carte est une hypersurface dans C_{Δ_ν}. Alors $\lim_{T_0\to\infty}\big(C_{\Delta_\nu}(T-T_0)\big) = G_\nu$ au sens suivant : la limite de l'hyperplan tangent en un point x_{T_0} de $C_{\Delta_\nu}(T-T_0)$ qui tend vers $x \in G_\nu$ contient la face de G_ν passant par x. On peut démontrer ce fait (essentiel pour le théorème 4.2) en se restreignant à une droite passant par x et orthogonale à la face de G_ν contenant x (cette droite est l'image d'une courbe monomiale de $(\mathbf{R}^*)^n$).

Pour chaque polytope Δ_i de la décomposition de Δ, soit $\tilde{\Delta}_i$ le graphe de $\nu_{|\Delta_i}$. La projection $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}^n$ induit un isomorphisme de $\tilde{\Delta}_i$ sur Δ_i, et elle identifie les cartes $\pi\big(C_{\tilde{\Delta}_i}(P_T^{\tilde{\Delta}_i})\big)$ et $C_{\Delta_i}(P^{\Delta_i}) = C_{\Delta_i}(P_i)$. (Si $P_T^{\tilde{\Delta}_i} = \sum_{\omega\in\Delta_i} a_\omega T^{\nu(\omega)}X^\omega$, et si $\nu(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \sum \lambda_i\alpha_i - \mu$ pour $\omega = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \Delta_i$, on effectue le changement de variables $u_i = T^{\lambda_i}X_i$).

On voit donc que $C_{\Delta_\nu}(P_T) \cap G_\nu$, qui est le collage des cartes $C_{\tilde{\Delta}_i}(P_T^{\tilde{\Delta}_i})$ est équivalente au collage des cartes $C_{\Delta_i}(P_i)$.

4.3 Lemme.— *Posons* $C_{\Delta_\nu}(P_{T_0}) = C_{\Delta_\nu}(P_T) \cap C_{\Delta_\nu}(T-T_0)$ *; pour* T_0 *assez grand,* $C_{\Delta_\nu}(P_{T_0})$ *est homéomorphe à* $C_{\Delta_\nu}(P_T) \cap G_\nu$.

Le lemme résulte du fait que $C_{\Delta_\nu}(P_T)$ est transverse à G_ν (au sens stratifié) par la proposition 3.4 (cf. la remarque 3.5), et que $\lim_{T_0\to\infty} C_{\Delta_\nu}(T-T_0) = G_\nu$. Pour montrer le lemme, on peut utiliser la technique développée par M.-H. Schwartz sur les voisinages du bord des variétés à coins ([Sch 91], p. 15-21), qui permet de construire un champ de vecteurs dans un voisinage de G_ν dans Δ_ν, tangent à $C_{\Delta_\nu}(P_T)$, et transverse aux strates de G_ν.

Ceci achève la démonstration du théorème 4.2, puisque $C_{\Delta_\nu}(P_{T_0})$ se projette par π sur la carte $C_\Delta(P_{T_0})$, et que nous avons vu que $C_{\Delta_\nu}(P_T) \cap G_\nu$ se projetait par π sur le collage des cartes $C_{\Delta_i}(P_i)$.

Exemple : Prenons $n = 1$, $\Delta = [0,3] \subset \mathbf{R}$, $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, avec $\Delta_1 = [0,2]$, et $\Delta_2 = [2,3]$. Cette décomposition de Δ est régulière, et on peut poser par exemple $\nu(0) = 3, \nu(2) = 2, \nu(3) = 0$.

Posons $P_1 = 1 - X^2, P_2 = -X^2 + X^3$; le collage des cartes de P_1 et P_2 est

représenté sur la figure ci-dessous.

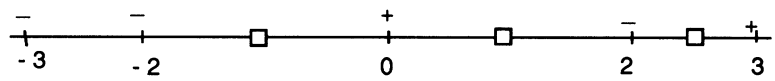


Figure 4

Le théorème 4.2 dit que pour $t > T_0$, le polynôme $P_t = X^3 - t^2X^2 + t^3$ a trois racines réelles, deux > 0, et une < 0. Le polygone Δ_ν est celui de l'exemple 3.3.

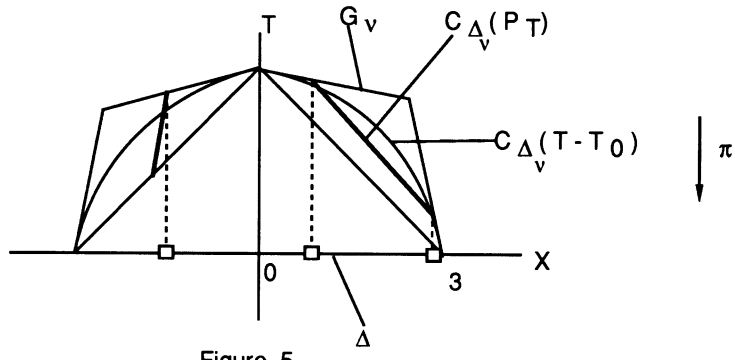


Figure 5

4.4 Remarque : On peut aussi interpréter le théorème 4.2 comme un théorème sur la "lissification" des singularités, de la manière suivante.

Soit $P(X_1, \ldots, X_n) = 0$ l'équation d'une hypersurface algébrique ayant une singularité à l'origine non dégénérée par rapport à son diagramme de Newton $N(P)$. On suppose que $N(P)$ est compact (i.e., rencontre tous les axes de coordonnées), et l'hypothèse dit que P^Γ est réduit et lisse pour toute face de $N(P)$ (toutes les faces sont ici de codimension ≥ 1, contrairement au cas global où l'on avait une face de codimension 0). Soit Δ la portion de $\mathbf{R}^n$ délimitée par $N(P)$ et les hyperplans de coordonnées ; supposons comme dans le théorème 4.2 que l'on ait une décomposition $\Delta = \cup\Delta_i$, des cartes $C(P_i)$ de polynômes P_i (de polygônes de Newton P_i) non dégénérés, et une fonction convexe ν affine par morceaux définie sur Δ. On suppose que ν vérifie les conditions de 4.2, et qu'en plus ν est nulle sur $N(P)$. On construit alors comme plus haut un polynôme $P_T(X_1, \ldots, X_n)$ tel que $P_0 = P$, et que pour T_0 assez petit et $0 < t < T_0$, l'hypersurface $P_t(X_1, \ldots, X_n) = 0$ soit lisse en 0, et que sa carte soit le collage des

cartes $C(P_i)$, et de la carte de P en dehors de Δ. (Autrement dit, on a remplacé la singularité par le collage des cartes $C(P_i)$ dans un voisinage de O, sans rien changer à l'extérieur). Nous allons en voir des exemples plus bas.

5. APPLICATIONS ET COMPLÉMENTS

a) *Lissification de la singularité* J_{10}^-.

Dans [Vi 90], Viro classifie systématiquement les lissifications de toute un série de singularités (non dégénérées), en suivant la classification d'Arnol'd (cf. [A-V-G 85]). Je prendrai ici comme exemple la singularité J_{10}^-, dont les lissifications donnent de nouveaux types topologiques de courbes algébriques, lorsque l'on utilise le théorème 4.2.

La singularité notée J_{10}^- est équivalente à la singularité formée de trois arcs de paraboles tangents (par exemple, $(Y-X^2)(Y-2X^2)(Y-3X^2)$ au voisinage de l'origine) ; elle est non dégénérée, et même quasi-homogène. Viro ([Vi 84] ou [Vi 90]) dresse une liste complète de ses lissifications (i.e., des types topologiques des "fibres de Milnor réelles") : il y en a 31. Je vais en indiquer trois seulement, obtenues par la méthode décrite ci-dessus (Viro utilise une méthode "à la Harnack").

5.1 Lemme.— *Il existe des lissifications de* J_{10}^- *avec les cartes suivantes :*

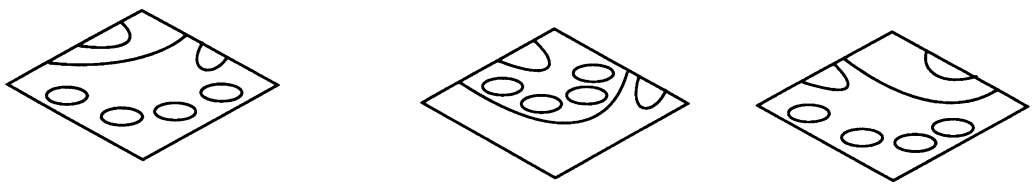


Figure 6

Indiquons par exemple comment obtenir le type c), en triangulant la partie du plan délimitée par le diagramme de Newton et les deux axes de coordonnées, en indiquant les signes des monômes, et en recollant des cartes de trinômes, comme expliqué plus haut. La triangulation est en pointillés, et la carte obtenue en traits

pleins.

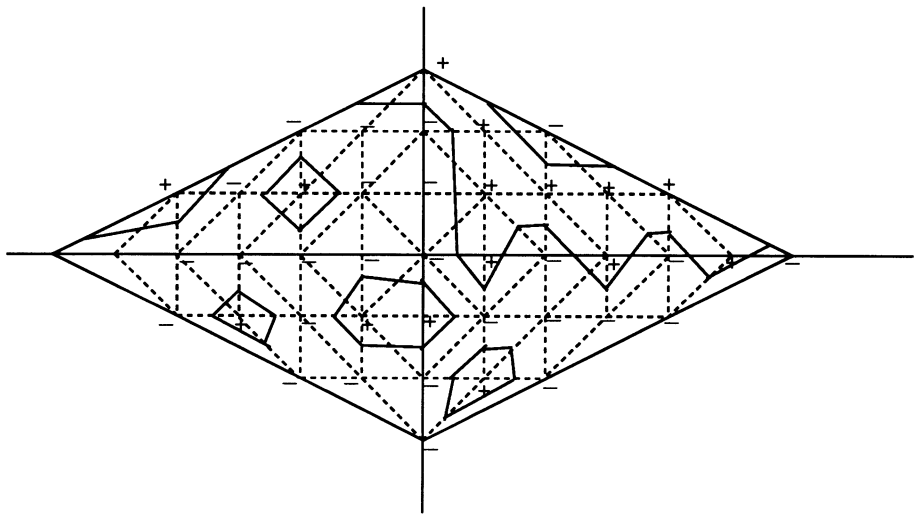


Figure 7

b) *Courbes de degré 6*

On considère maintenant les trois paraboles ci-dessus dans le plan comme une courbe de degré 6 d'équation ϕ ayant deux singularités de type J_{10}^- : l'une en 0, et l'autre à l'infini. Soit Δ le triangle de sommets (0,0), (0,6) et (6,0). Le polygone de Newton de l'équation ϕ sépare Δ en deux triangles : $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ (Figure 8).

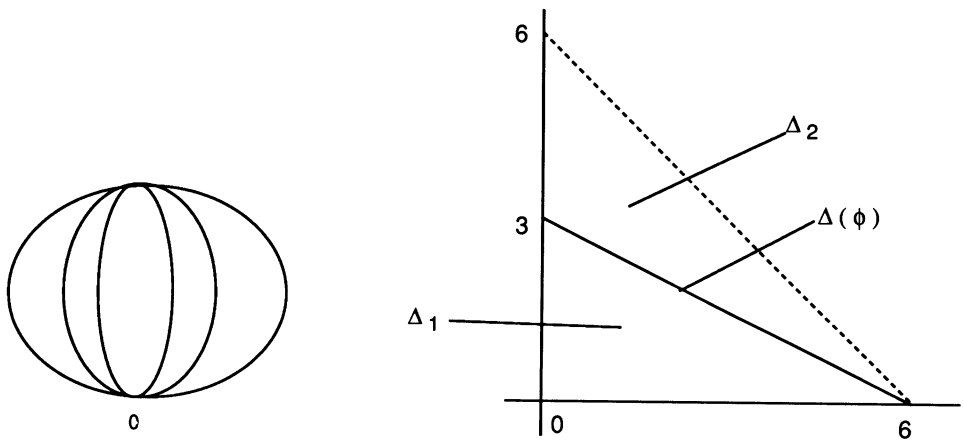


Figure 8

D'après le théorème 4.2, on peut utiliser le lemme 5.1, et recoller indépendamment des cartes de type a) ou b) dans Δ_1 et Δ_2, pour obtenir la carte d'une courbe lisse de degré 6, que l'on pourra considérer dans le disque ou dans $\mathbf{RP}^2$.

On obtient ainsi les trois types de M-courbes de degré 6 dont les schémas sont indiqués Figure 9 (il n'y a que trois types de M-courbes de degré 6).

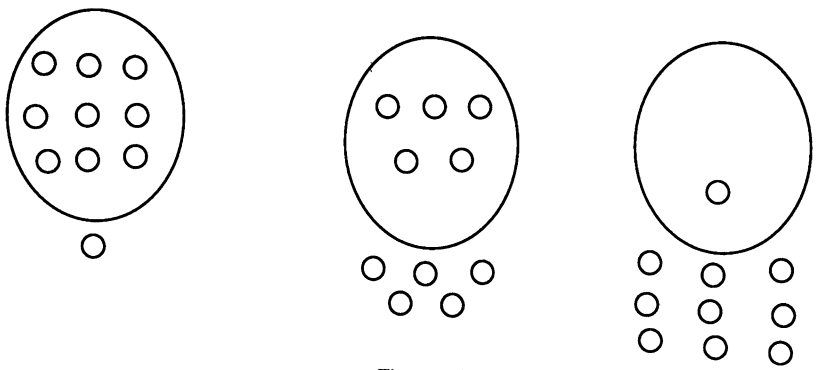


Figure 9

La courbe du milieu par exemple s'obtient en recollant une carte de type a) dans Δ_1 et une carte de type b) dans Δ_2 :

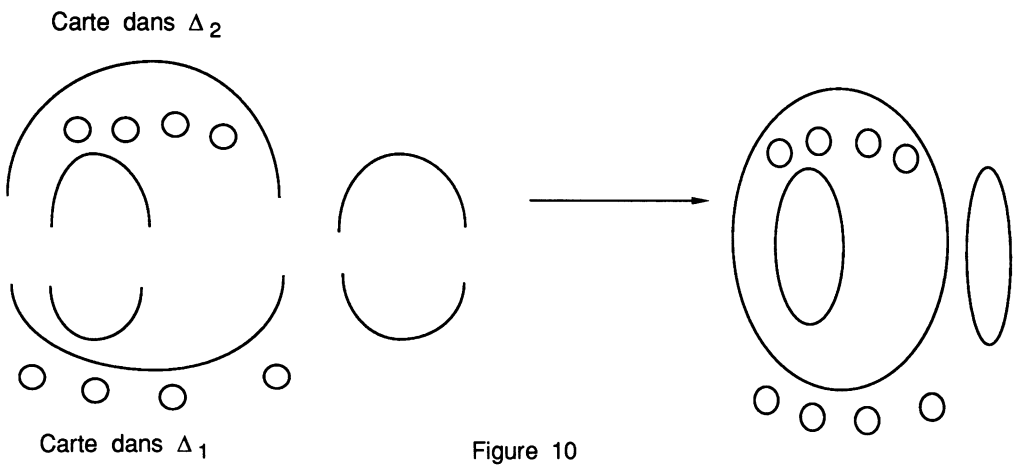


Figure 10

c) *Courbes de degré 7*

Une courbe plane lisse de degré impair a toujours une composante connexe (et une seule) homotope à une droite projective, appelée pseudo-droite. Les autres

composantes sont des ovales. Une courbe de degré 7 est réunion d'une pseudo-droite et d'au plus 15 ovales, d'après l'inégalité de Harnack. Viro a classé toutes les courbes de degré 7 en 1980. Dans la proposition suivante, qui décrit le résultat de Viro, on appelle ovale libre un ovale qui n'est contenu dans aucun autre ovale.

5.2 Proposition (Viro ; cf. [Vi 84]).— *Le type topologique du plongement d'une courbe de degré 7 est constitué d'une pseudo-droite, et d'ovales avec l'une des 121 possibilités suivantes :*

i) Un ovale contenant a ovales, et b ovales libres, avec $a+b \leq 14$ et $1 \leq a \leq 13$.

ii) α ovales libres, avec $0 \leq \alpha \leq 15$

iii) 3 ovales emboîtés.

Montrons par exemple comment construire une courbe de degré 7 de type i), avec $a = 10$, $b = 4$ (Cette courbe était inconnue jusqu'à Viro, et ne peut pas être construite par une méthode "à la Harnack").

Viro commence par construire une courbe γ de degré 7 avec deux singularités de type J_{10}^-, dont la carte est représentée (en traits pleins) Figure 11. Viro utilise une méthode "classique" pour construire la courbe γ (en partant d'une ellipse et d'une droite transverse), mais on peut aussi la construire en utilisant la méthode du collage des cartes, comme pour la courbe de la Figure 7.

En "collant" dans Δ_1 et Δ_2 (et leurs symétriques) des cartes de type b) (Figure 6), et en recollant avec la carte de γ à l'aide du théorème 4.2, on obtient une courbe de degré 7 avec $a = 10$, $b = 4$ (Figure 11).

5.3 Remarque : Toutes les courbes construites jusqu'ici par la méthode de Viro sont des "T-courbes" (T pour "Triangle"), i.e., des courbes obtenues en collant des cartes de trinômes ayant pour polygônes de Newton des triangles d'aire 1/2, comme sur la figure 7. On ne sait pas si tous les types topologiques des M-courbes peuvent être obtenus avec des T-courbes.

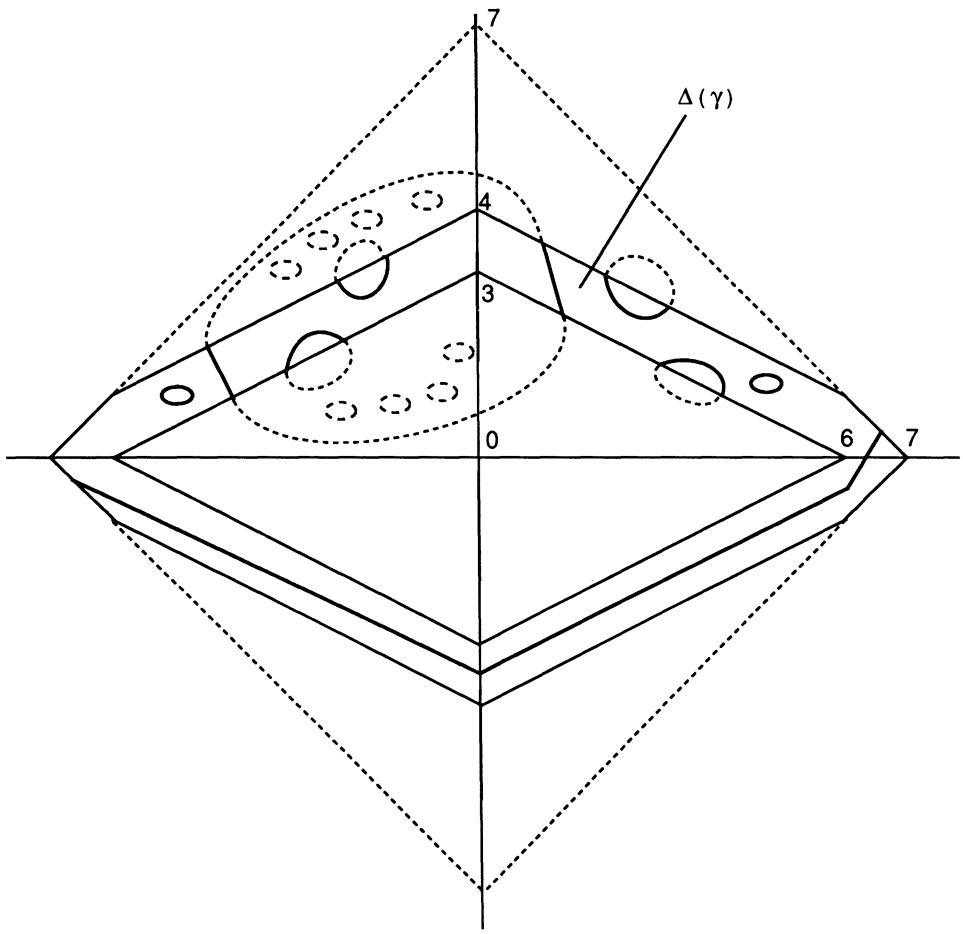


Figure 11

6. AUTRES RÉSULTATS

a) *Courbes de degré* > 7. Pour les courbes de degré 8 on pourra consulter le survey [Pol 88]. Une courbe de degré 8 a au plus 22 ovales, et le statut des M-courbes (i.e., avec 22 ovales) semble être actuellement le suivant : en tenant compte des prohibitions connues, il y a 91 possibilités de types topologiques. Parmi ces 91 possibilités, 78 ont été effectivement réalisées (avec la méthode de Viro ou des variantes), principalement par Korchagin, Shustin, et Viro. Il reste donc 13 cas à élucider.

On peut citer Korchagin (non publié) pour le degré 9, et Chislenko ([Chi 89] pour le degré 10.

b) *Généralisations de la méthode de Viro*

Shustin ([Shu 85], [Shu 92]) a généralisé la méthode de Viro au cas où l'on colle des cartes de courbes avec singularités. Il montre en particulier que, avec les hypothèses du théorème 4.2 sur la partition $\Delta = \cup\Delta_i$, on peut toujours recoller les cartes de polynômes P_i, si leurs zéros n'ont comme singularités que des points doubles ordinaires.

Dans le cas d'autres singularités, des " cusps" par exemple, il y a des contraintes sur leur nombre. Shustin montre en particulier avec cette méthode que pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq \frac{d^2-3d+4}{3}$, il existe une courbe de degré d avec k cusps (réels), i.e., k singularités dont le complexifié est topologiquement équivalent à la singularité $Y^2 - X^3 = 0$.

La méthode de Shustin consiste à remplacer les polynômes de Viro

$$P_t(X,Y) = \sum_{(i,j)\in\Delta} a_{ij} X^i Y^j t^{\nu(i,j)}$$

par des polynômes $\tilde{P}_t(X,Y) = \sum \tilde{a}_{ij}(t) X^i Y^j t^{\nu(i,j)}$ avec $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + O(t)$, les $\tilde{a}_{ij}$ étant construits de façon à préserver les singularités des polynômes P_i de départ ; l'existence des $\tilde{a}_{ij}$ est une conséquence du théorème de Riemann-Roch, comme dans le fameux théorème de Brusotti sur la lissification des singularités d'une courbe algébrique n'ayant que des points doubles ordinaires. Signalons que B. Chevallier ([Che 92]) travaille sur une autre variante de la méthode de Viro, et que D.Pecker ([Pe 92]) construit très simplement des courbes avec des points doubles ordinaires en nombre maximal.

B. Sturmfels ([St 92]) annonce une généralisation du théorème de Viro aux intersections complètes sous la forme suivante : on considère des polytopes convexes $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, pour chaque i une triangulation de Δ_i correspondant à une fonction ν_i concave affine par morceaux ($1 \leq i \leq k$). Alors, si $\Delta = \Delta_1 + \cdots + \Delta_k$ est la somme de Minkowski des Δ_i, on peut définir une subdivision du polytope Δ, correspondant à la fonction $\nu = \nu_1 + \cdots + \nu_k$, pourvu que les fonctions ν_i soient assez "génériques" ([Lee 91]) ; ceci entraîne en particulier que pour chaque i, la décomposition de Δ_i est une triangulation.

Soit pour chaque i $P_{i,T}$ un polynôme de Viro correspondant à la fonction ν_i (tel que $\Delta(P_i) = \Delta_i$). D'après le théorème 4.2, la carte $C_{\Delta_i}(P_{i,t})$ s'obtient (pour t assez grand) en recollant des cartes C_i^j définies dans les simplexes de la triangulation de Δ_i ; Sturmfels décrit un procédé combinatoire pour relever les cartes C_i^j dans Δ, tel que celles-ci se recollent (pour i fixé) en des cartes C_i équivalentes à $C_\Delta(P_{i,t})$. L'intersection des C_i est alors (pour t assez grand) une carte de l'ensemble $\cap_{i=1}^k Z(P_{i,t})$.

c) *Polytope de Newton du discriminant*

La construction de Viro est à la base de la théorie de Gelfand, Kapranov et Zelevinsky ([G-K-Z 92]) sur les $\mathcal{A}$-discriminants, même si ceux-ci l'ont développée indépendamment. La raison en est la suivante : si on fixe un ensemble de points $\mathcal{A} = (\alpha_i) \subset \mathbf{Z}^n$, chaque partition régulière $\mathcal{P}$ de leur enveloppe convexe Δ définit une famille de fonctions $\nu_\mathcal{P} : \mathcal{A} \to \mathbf{Z}$. Réciproquement, toute fonction $\nu : \mathcal{A} \to \mathbf{Z}$ définit une partition régulière de Δ, en considérant la projection de l'enveloppe convexe supérieure du graphe de ν.

D'autre part, à une fonction $\nu : \mathcal{A} \to \mathbf{Z}$ est associée une direction de droites dans l'espace des coefficients (a_i), définie par $a_i = \nu(\alpha_i)\theta$. L'ensemble des droites correspondant à une partition régulière forme alors un cône polyédral, et ce cône est d'intérieur non vide si et seulement si la partition est une triangulation. On peut alors montrer que le cône correspondant à une triangulation de Δ est contenu dans le cône dual d'un et un seul sommet du polytope de Newton du $\mathcal{A}$-discriminant (cf. [G-K-Z 92]).

d) En utilisant la méthode de Viro, I. Itenberg vient de construire une famille de courbes qui contredisent la conjecture de Ragsdale (cf. [It 93]).

BIBLIOGRAPHIE

[A'C 79] **N. A'Campo** *Sur la première partie du 16-ième problème de Hilbert*, Sem. Bourbaki 537, Lect. Notes in Math., 770, Springer, 208-227.

[A-O 79] **V.I. Arnol'd, O.A. Oleinik** *The topology of real algebraic manifolds*, Moscow Univ. Bull. 34, 5-17.

[A-V-G 85] **V.I. Arnol'd, A. N. Varshenko, S. M. Gusein-Zade**, *Singularities of differentiable maps, I*, Birkhauser.

[Ati 82] **M. F. Atiyah** *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc., 14, 1-15.

[Che 92] **B. Chevallier** *Problèmes de désingularisations maximales de courbes analytiques réelles planes*, Preprint, Un. Toulouse.

[Chi 89] **Yu. S. Chislenko** *M-curves of degree ten*, J. Soviet Math. 26, 1689-1699.

[Co-He 80] **R. Connelly, D.W. Henderson**, *A convex 3-complex not simplicially isomorphic to a strictly convex complex*, Proc. Camb. Phil. Soc. 88, 299-306.

[Dan 78] **V. I. Danilov** *The Geometry of Toric Varieties*, Russian Math. Surveys 33,2, 97-154.

[GKZ 92] **I. M. Gel'fand, M. Kapranov, A. Zelevinsky**, *Discriminants and Resultants*, Birkhäuser, à paraître.

[Gud 74] **D. A. Gudkov** *The topology of real algebraic varieties*, Russian Math. Surveys, 29, 4, 1-79.

[G-S 82] **V. Guillemin, S. Sternberg** *Convexity properties of the moment mapping*, Invent. Math. 67, 491-513.

[Ha 76] **A. Harnack** *Uber Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven*, Math. Ann. 10 (1876), 189-199.

[It 93] **I. Itenberg**, *Contre-exemples à la conjecture de Ragsdale*, CRAS, Tome 317, série I, 277-282.

[Kha 78] **V. M. Kharlamov** *The topological type of non singular surfaces in* $\mathbf{RP}^3$ *of degree four*, Funct. Anal. 10,4, 295-305.

[Kho 77] **A. G. Khovanskii** *Newton polygons and toric manifolds*, Funct. Analysis Appl. 11, 4, 289-296.

[Lee 91] **C. Lee** *Regular triangulations of convex polytopes*, in Appl. Geom. and Discrete Math., American Math. Soc., DIMACS Series 4, Providence, R.I.

[Oda 88] **T. Oda** *Convex bodies and Algebraic Geometry*, Ergeb. Math. 15, Springer-Verlag.

[Pe 92] **D. Pecker** *An imaginary construction of real curves*, Preprint, Un. Paris 6.

[Pol 88] **G. M. Polotovskii** *On the classification of non singular curves of degree 8*, Lect. Notes in Math., 1346, Springer, 455-485.

[Sch 91] **M-H. Schwartz** *Champs radiaux sur une stratification analytique*, Travaux en cours 39, Hermann.

[Shu 85] **E. I. Shustin** *Pasting of singular algebraic curves*, In: Methods of Qualitative Theory, Gorky Univ. Press, 116-128 (en Russe).

[Shu 92] **E.I. Shustin** *Plane Algebraic curves with prescribed singularities*, A paraître (Preprint, Université de Tel-Aviv).

[St 92] **B. Sturmfels** *Viro's theorem for complete intersections*, personal communication.

[Vi 83] **O. Ya. Viro** *Constructing real algebraic varieties with prescribed topology*, Thèse, LOMI, Leningrad. Traduction anglaise en cours par l'auteur.

[Vi 84] **O. Ya. Viro** *Gluing of plane real algebraic curves and constructions of curves of degrees 6 and 7*, Lect. Notes in Math. 1060, Springer, 185-200.

[Vi 86] **O. Ya. Viro** *Progress in the topology of real algebraic varieties over the last six years*, Russian Math. Surveys, 41,3, 55-82.

[Vi 90] **O. Ya. Viro** *Real algebraic plane curves: constructions with controlled topology*, Leningrad Math. J., 1,5, 1059-1134.

[Wi 78] **G. Wilson** *Hilbert's sixteenth problem*, Topology 17, 53-74.

Jean-Jacques RISLER

DMI, Ecole Normale Supérieure
45, Rue d'Ulm, 75005 Paris.

Astérisque

GEORGES SKANDALIS

Algèbres de von Neumann de groupes libres et probabilités non commutatives [d'après Voiculescu etc.]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki, exp. n° 764, p. 87-102
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__87_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 1992
45ème année, 1992 – 1993, n° 764

ALGÈBRES DE VON NEUMANN DE GROUPES LIBRES ET PROBABILITÉS NON COMMUTATIVES
[d'après VOICULESCU *etc.*]

par Georges SKANDALIS

Le but de cet exposé est de présenter quelques outils de probabilités non commutatives introduits par Voiculescu et leur application à un problème d'algèbres de von Neumann.

Les objets de base dans la théorie des algèbres de von Neumann sont les *facteurs de type* II_1 . En 1943, Murray et von Neumann ont associé à tout facteur de type II_1 un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ qu'ils ont appelé «*groupe fondamental*» de ce facteur (bien qu'il n'ait rien à voir avec le π_1 !). Ils ont montré que le groupe fondamental du facteur «hyperfini» de type II_1 est $\mathbf{R}_+^*$ ([9]). Les seuls résultats non triviaux obtenus depuis sur cet invariant sont très récents :

1. En 1980, Connes a exhibé des facteurs de type II_1 dont le groupe fondamental est dénombrable ([2]).

2. En 1991, Rădulescu, améliorant un résultat partiel de Voiculescu, a démontré que le groupe fondamental du facteur de type II_1 associé au groupe libre à une infinité de générateurs est $\mathbf{R}_+^*$ ([10]).

Le langage qui s'est avéré très utile pour l'étude de l'algèbre de von Neumann d'un groupe libre est celui des *probabilités non commutatives.* Dans ce cadre, Voiculescu a défini une notion de *liberté* de variables aléatoires, analogue non commutatif de l'indépendance. Il a donné des exemples de calculs pour des variables aléatoires libres. En particulier il a donné une formule de convolution libre calculant la distribution de la somme de deux variables aléatoires libres, basée sur un modèle d'«espace de

Fock libre», ainsi qu'un analogue «libre» du théorème de limite centrale.

Le pas décisif dans la résolution du problème du groupe fondamental de l'algèbre de von Neumann du groupe libre, est une généralisation d'un théorème de Wigner : on démontre qu'une famille de matrices hermitiennes $n \times n$ à coefficients Gaussiens indépendants, est asymptotiquement libre et fournit donc un modèle pour le groupe libre.

Nous commencerons cet exposé en rappelant certaines définitions de base de la théorie des algèbres de von Neumann ; en particulier nous rappelerons la définition d'un facteur de type II_1 , celle du «groupe fondamental» de Murray et von Neumann d'un facteur de type II_1 (§1) et celle du facteur de type II_1 associé à un groupe dénombrable (§2).

Au §3, nous donnerons la définition des variables aléatoires libres et discuterons la formule de convolution libre et le théorème de limite centrale. Ensuite, nous présenterons le modèle des matrices de grande taille à coefficients Gaussiens indépendants (§4) et son application au problème du groupe fondamental mentionné ci-dessus (§5). Enfin, nous citerons des résultats de Rădulescu et Dykema sur les algèbres de groupes libres à un nombre fini de générateurs (§6).

1. Facteurs de type II_1 et groupe fondamental de Murray et von Neumann

Soit H un espace hilbertien de genre dénombrable ; notons $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre involutive formée des opérateurs bornés de H (*i.e.* des applications linéaires continues de H dans H). Rappelons que l'*involution* de $\mathcal{L}(H)$ est l'application qui à un opérateur x associe son adjoint x^* . On appelle *commutant* d'un sous-ensemble S de $\mathcal{L}(H)$ et on note S' l'ensemble des opérateurs permutables aux éléments de S . Le commutant de S' s'appelle *bicommutant* de S et se note S'' .

On appelle *algèbre de von Neumann dans* H toute sous-algèbre involutive de $\mathcal{L}(H)$ égale à son bicommutant. L'étude des algèbres de von Neumann se réduit, par des techniques d'intégrales directes, à celle des algèbres de von Neumann dont le centre est réduit aux homothéties appelées

facteurs. Grâce à la théorie de Tomita et aux travaux de Connes, on peut se ramener à l'étude des *facteurs de type* II_1 (et de leurs automorphismes) :

DÉFINITION. — *Soit A une algèbre de von Neumann dans H . On appelle trace (finie positive) sur A une forme linéaire τ sur A telle que, pour tout $x \in A$ on ait $\tau(x^*x) = \tau(xx^*) \in \mathbf{R}_+$. La trace τ est dite fidèle si la condition $\tau(x^*x) = 0$ implique $x = 0$. Une algèbre de von Neumann est dite finie si elle possède une trace (finie, positive) fidèle. Un facteur fini de dimension (en tant qu'espace vectoriel complexe) infinie s'appelle facteur de type II_1 .*

Si un facteur possède une trace non nulle, celle-ci est unique à normalisation près et fidèle ; en général on normalise la trace en posant $\tau(1) = 1$ où l'opérateur identité de H a été noté 1 .

Soit A une algèbre de von Neumann dans l'espace hilbertien H . Un projecteur de A est un élément $p \in A$ tel que $p^2 = p^* = p$. Si p est un projecteur (non nul) de A , l'algèbre $A_p = \{ pxp \ , \ x \in A \}$ est une algèbre de von Neumann dans l'espace hilbertien pH ; si l'algèbre A est finie ou si c'est un facteur, ou si c'est un facteur de type II_1 , il en va de même pour A_p .

Deux projecteurs p et q de A sont dits *équivalents* s'il existe un élément $u \in A$ tel que $p = u^*u$ et $q = uu^*$.

Les projecteurs p et q d'un facteur M de type II_1 sont équivalents si et seulement s'ils ont même trace. En particulier, si p et q ont même trace, les facteurs M_p et M_q sont isomorphes. En fait, il est facile de voir que les facteurs M_p et M_q sont isomorphes si et seulement si le rapport des traces de p et q appartient à un sous-groupe $\mathcal{F}_M$ de $\mathbf{R}_+^*$ ([1]) appelé «*groupe fondamental*» de M par Murray et von Neumann, qui ont montré que le groupe fondamental du facteur «hyperfini» de type II_1 est $\mathbf{R}_+^*$ ([9]).

Rappelons qu'un facteur de type II_1 est dit *hyperfini* s'il est le bicommutant d'une réunion croissante d'algèbres de matrices. L'unicité (à

([1]) Si la trace de M est normalisée, l'ensemble des traces des projecteurs de M est l'intervalle $[0, 1]$; ainsi le groupe fondamental est bien défini.

isomorphisme près) d'un tel facteur a été démontrée par Murray et von Neumann ([9]).

2. Le facteur de type II_1 associé à un groupe

Soit Γ un groupe dénombrable. Notons H l'espace hilbertien $l^2(\Gamma)$ des familles indexées par Γ de carré sommable et $(e_g)_{g\in\Gamma}$ sa base hilbertienne canonique. On note λ et ρ les représentations de Γ par opérateurs de translation à gauche et à droite dans l'espace hilbertien H . Si g et h sont deux éléments de Γ on a

$$\lambda(g)(e_h) = e_{gh} = \rho(h^{-1})(e_g)$$

Il est clair que pour toute paire (g,h) d'éléments de Γ les opérateurs $\lambda(g)$ et $\rho(h)$ commutent. On appelle algèbre de von Neumann de Γ et on notera ici $W(\Gamma)$ le commutant de $\rho(\Gamma)$, *i.e.* $W(\Gamma) = \rho(\Gamma)'$.

Notons 1 l'élément neutre de Γ . L'application $x \mapsto xe_1$ est injective. En effet, si xe_1 est nul, pour tout $g \in \Gamma$ on a $xe_g = x\rho(g^{-1})e_1 = \rho(g^{-1})xe_1 = 0$. Grâce à cette observation on vérifie sans peine les faits suivants :

a) L'application $x \mapsto \langle e_1, xe_1\rangle$ est une trace fidèle sur $W(\Gamma)$, appelée *trace canonique* de $W(\Gamma)$ ([2]).

b) L'algèbre $W(\Gamma)$ est le bicommutant de $\lambda(\Gamma)$.

c) Si $\mathcal{C}$ est une classe de conjugaison finie de Γ , $\sum_{g\in\mathcal{C}} \lambda(g)$ est un élément du centre de $W(\Gamma)$. Inversement, si x est un élément du centre de $W(\Gamma)$, alors pour tout $g \in \Gamma$ on a

$$xe_1 = \lambda(g)x\lambda(g^{-1})e_1 = \lambda(g)x\rho(g)e_1 = \lambda(g)\rho(g)xe_1$$

de sorte que le vecteur xe_1 est invariant par l'action adjointe $g \mapsto \lambda(g)\rho(g)$ de Γ dans H, c'est à dire qu'il est constant sur les classes de conjugaison de Γ . Il en résulte que $W(\Gamma)$ est un facteur si et seulement si toute classe de conjugaison de Γ distincte de $\{1\}$ est infinie.

([2]) Dans nos conventions, le produit scalaire de H est linéaire en la deuxième variable et antilinéaire en la première.

On dit souvent que le groupe Γ possède la propriété CCI ou que c'est un groupe CCI, si toutes les classes de conjugaison de Γ distinctes de $\{1\}$ sont infinies. L'algèbre de von Neumann d'un tel groupe est donc un facteur de type II_1 .

La propriété CCI est très courante et facile à vérifier.

(a) Les groupes libres possèdent cette propriété.

(b) Tout réseau d'un groupe de Lie simple non compact de centre trivial possède cette propriété.

(c) «Beaucoup» de produits semi-directs et autres groupes moyennables possèdent cette propriété.

Connes a démontré (*cf.* [1]) :

THÉORÈME 2.1. — *Le facteur de type II_1 associé à tout groupe CCI moyennable est isomorphe au facteur hyperfini de type II_1 de Murray et von Neumann (donc son groupe fondamental est $\mathbf{R}_+^*$).*

Ce théorème est un cas particulier de l'équivalence entre l'hyperfinitude des algèbres de von Neumann et leur «injectivité», notion apparemment beaucoup plus faible qui est une traduction pour les algèbres de von Neumann de la moyennabilité des groupes ; il constitue un des résultats les plus profonds de la théorie des algèbres de von Neumann (*cf.* [1]).

Dans un sens, à l'autre extrémité des groupes moyennables se situent ceux qui possèdent la propriété T de Kazhdan (*cf.* [7], [3]). Nous ne rappelons pas ici la définition de cette propriété. Disons seulement que $Sl(3, \mathbf{Z})$ ainsi que tout réseau d'un groupe de Lie simple de rang réel supérieur ou égal à 2 possède cette propriété.

THÉORÈME 2.2. ([2]) — *Le groupe fondamental du facteur de type II_1 associé à un groupe CCI possédant la propriété T de Kazhdan est dénombrable.*

Esquissons très rapidement l'idée de la démonstration du théorème 2.2 :

Soit Γ un groupe possédant la propriété T de Kazhdan.

a) On démontre que le groupe des automorphismes (d'algèbre involutive) de $W(\Gamma)$ modulo les automorphismes intérieurs est dénombrable. Soit en effet α un automorphisme de $W(\Gamma)$; considérons la représentation $u_\alpha : g \mapsto \alpha(\lambda(g))\rho(g)$ de Γ dans H . Si α est suffisamment proche de l'identité, cette représentation contient la représentation triviale de Γ (par le propriété T) *i.e.* a un point fixe, d'où l'on déduit que α est intérieur.

b) Tout élément du groupe fondamental de $W(\Gamma)$ donne lieu à un automorphisme non intérieur de $W(\Gamma \times \Gamma)$, d'où le résultat, vu que $\Gamma \times \Gamma$ possède la propriété T .

Dans [8], cette même propriété T est utilisée pour construire, pour chaque $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$, un facteur M_λ de type II_1 dont le groupe fondamental est dénombrable et contient λ . En particulier, il existe un ensemble non dénombrable de facteurs M_λ deux à deux non isomorphes.

3. Probabilités non commutatives et variables aléatoires libres

L'objet de base en théorie des probabilités, est une algèbre unifère commutative (l'algèbre des variables aléatoires, *i.e.* des fonctions sur l'espace de probabilités) munie d'une forme linéaire (une mesure de probabilités).

Appelons «*espace non commutatif de probabilités*» une paire consistant d'une algèbre A unifère mais non nécessairement commutative et d'une forme linéaire $\varphi : A \to \mathbf{C}$ telle que $\varphi(1) = 1$. Les éléments de A s'appellent encore des variables aléatoires. La *distribution* d'un élément $x \in A$ est l'application qui à un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ associe $\varphi(P(x))$. Dans les exemples qui nous intéressent, l'algèbre A est une algèbre de von Neumann et φ une trace sur A . La distribution d'un élément hermitien $x \in A$ (*i.e.* $x = x^*$) est une mesure de probabilités portée par $\mathbf{R}$.

L'*indépendance* de deux sous-algèbres unifères A_1 et A_2 de l'algèbre A des variables aléatoires signifie qu'on est dans une situation de produit tensoriel. Dans un cadre non commutatif, il est naturel de considérer aussi la notion de *liberté* qui correspond au produit libre de sous-algèbres. Voiculescu a donné la définition suivante :

DÉFINITION. — *Soit (A,φ) un «espace non commutatif de probabilités». La famille $(A_\iota)_{\iota\in I}$ de sous-algèbres de A est dite libre si pour toute suite finie, $a_1 \in A_{\iota_1},\dots,a_k \in A_{\iota_k}$ satisfaisant $\varphi(a_j)=0$ (pour tout j) et $\iota_j \neq \iota_{j+1}$ (pour $j \neq k$) on a $\varphi(a_1 \dots a_k)=0$.*
La famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$ d'éléments de A est dite libre si la famille d'algèbres de polynômes $(\mathbf{C}[x_\iota])_{\iota\in I}$ est libre.

Bien sûr un exemple de sous-algèbres libres est donné par les produits libres de groupes. Soit $(\Gamma_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de groupes dénombrables indexée par l'ensemble (dénombrable) I et notons Γ le produit libre de la famille Γ_ι . Pour $\iota \in I$ l'algèbre $W(\Gamma_\iota)$ s'identifie à une sous-algèbre de $W(\Gamma)$. La famille $(W(\Gamma_\iota))_{\iota\in I}$ est une famille libre dans $(W(\Gamma),\tau)$ où τ désigne la trace canonique de $W(\Gamma)$.

Un deuxième modèle de variables aléatoires libres est le modèle de l'espace de Fock libre : soit H un espace hilbertien. L'algèbre tensorielle $E=T(H)$ est un espace préhilbertien : c'est la somme directe orthogonale $\mathbf{C}\oplus H\oplus(H\otimes H)\oplus\dots$ Notons $\Omega \in E$ le vecteur du «vide» de E *i.e.* le vecteur correspondant à l'unité $1 \in \mathbf{C}$ de l'algèbre E . Pour $x \in H$ notons ℓ_x l'application $y \mapsto x\otimes y$ de E dans E ; si $||x||=1$ l'application ℓ_x est isométrique. Notons $A(H)$ l'algèbre agissant dans E engendrée par les opérateurs de la forme ℓ_x et leur adjoint ℓ_x^* ([3]). Sur $A(H)$ considérons la forme linéaire $\varphi : T \mapsto \langle \Omega, T\Omega\rangle$. Si K est un sous-espace vectoriel de H , notons $A(K)$ la sous-algèbre de $A(H)$ engendrée par les opérateurs ℓ_x et ℓ_x^* pour $x \in K$. Si K_ι sont des sous-espaces deux à deux orthogonaux de H , la famille $A(K_\iota)$ est une famille libre dans $(A(H),\varphi)$.

Nous verrons dans les paragraphes suivants l'application des variables aléatoires libres aux problèmes d'isomorphisme des algèbres de von Neumann de groupes. Cependant, les variables aléatoires libres valent la peine d'être étudiées pour elles-mêmes comme l'a montré Voiculescu :

Il est clair que la distribution de la somme $x+y$ de deux variables aléatoires libres x et y ne dépend que de la distribution de x et y . Cela permet de définir la *convolée libre* de deux distributions μ et μ' comme la

([3]) Cet adjoint est défini sur le complété de E et laisse E invariant.

distribution de $x+y$ pour toute paire (x,y) de variables aléatoires libres de distributions respectives μ et μ' . Voiculescu a démontré :

THÉORÈME 3.1. ([14]) — *À une distribution μ associons la série formelle $G_\mu \in \mathbf{C}[[z]]$ en posant*

$$G_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X^n)\, z^{n+1}$$

Notons $H_\mu \in \mathbf{C}[[z]]$ la série réciproque pour la composition des séries (i.e. telle que $G_\mu(H_\mu(z)) = z$) et $\mathcal{R}_\mu \in \mathbf{C}[[z]]$ la série formelle telle que

$$H_\mu(z)(1 + z\mathcal{R}_\mu(z)) = z$$

Notons μ_3 la convolée libre de deux distributions μ_1 et μ_2 . On a

$$\mathcal{R}_{\mu_1} + \mathcal{R}_{\mu_2} = \mathcal{R}_{\mu_3}$$

La démonstration de ce théorème est basée sur le modèle de l'espace de Fock libre : soient x et y deux vecteurs orthogonaux de norme 1 dans H . Soient $P, Q \in \mathbf{C}[X]$ deux polynômes ([4]). Alors les variables aléatoires $\ell_x + P(\ell_x^*)$ et $\ell_y + Q(\ell_y^*)$ sont libres. Comme $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux, on montre facilement que $\ell_{x+y} + P(\ell_x^*) + Q(\ell_y^*)$ et $\ell_{x+y} + (P+Q)(\ell_x^*)$ ont même distribution ; or, il est clair que $\ell_{x+y} + (P+Q)(\ell_x^*)$ et $\ell_x + (P+Q)(\ell_x^*)$ ont même distribution. Pour établir ce théorème on montre que si la distribution de $\ell_x + P(\ell_x^*)$ est μ alors $P = \mathcal{R}_\mu$.

Voiculescu a obtenu une méthode de calcul analogue pour la distribution du produit xy de deux variables aléatoires libres x et y en fonction de celles de x et y (*cf.* [15]).

Le rôle de la loi Gaussienne est ici joué par la loi «semi-circulaire» de Wigner : c'est la distribution μ donnée par la projection de la mesure de

([4]) On peut sans rien changer dans ce calcul supposer que P et Q sont des séries formelles.

Lebesgue normalisée sur le demi-disque de rayon 1. Autrement dit, si f est une fonction sur $\mathbf{R}$ on a

$$\mu(f) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} f(t)\sqrt{1-t^2}\, dt$$

Pour tout nombre complexe α convenons d'appeler loi semi-circulaire d'ordre α l'image de la loi semi-circulaire par la multiplication par α .

Le théorème suivant est un analogue «libre» du théorème de limite centrale.

THÉORÈME 3.2. ([13]) — *Soient (A, φ) un «espace non commutatif de probabilités» et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille libre de variables aléatoires de A centrées (i.e. telles que $\varphi(a_n) = 0$). Supposons que pour tout entier k , la suite $n \mapsto \varphi(a_n^k)$ est bornée et que les moyennes de Cesaro de la suite $\varphi(a_n^2)$ convergent vers un nombre non nul α . Posons*

$$S_N = N^{-1/2} \sum_{1\leq n\leq N} a_n$$

La distribution de S_N converge vers la loi semi-circulaire d'ordre $\sqrt{\alpha}/2$.

Autrement dit, pour tout $k \in \mathbf{N}$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(S_N^k) = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right)^k \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} t^k \sqrt{1-t^2}\, dt$$

Le théorème 3.2 se déduit facilement de la formule de convolution libre (théorème 3.1 ([5])). Remarquons que si μ est une distribution semi-circulaire, alors $\mathcal{R}_\mu(z) = cz$ où c est un nombre complexe.

4. Matrices à coefficients indépendants

L'étape clé pour l'application des probabilités libres au calcul du groupe fondamental des facteurs de type II_1 est le modèle de matrices aléatoires. Voiculescu a démontré qu'une approximation d'une famille libre est donnée

([5]) Sa démonstration est cependant antérieure à celle du théorème 3.1

par toute famille $(M_\iota)_{\iota\in I}$ de matrices à coefficients (normalisés) gaussiens indépendants.

Pour donner un énoncé précis de ce résultat, introduisons quelques notations.

Soit (A,φ) un «espace non commutatif de probabilités». On suppose que A est une algèbre de von Neumann et φ un *état i.e.* une forme linéaire satisfaisant $\varphi(x^*x) \in \mathbf{R}_+$ pour tout $x \in A$. Nous dirons qu'un élément $x \in A$ est *circulaire* si $\mathrm{Re}x = \dfrac{x+x^*}{2}$ et $\mathrm{Im}x = \dfrac{x-x*}{2i}$ sont libres, ont une distribution semi-circulaire de même ordre.

Une famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$ d'éléments de A est dite *semi-circulaire*, si elle est libre et que, pour tout $\iota \in I$, la distribution de x_ι est semi-circulaire. Une famille $(y_\iota)_{\iota\in I}$ d'éléments de A est *circulaire* si la famille $(\mathrm{Re}y_\iota)_{\iota\in I}$, $(\mathrm{Im}y_\iota)_{\iota\in I}$ est libre et que pour tout $\iota \in I$, y_ι est circulaire.

Soient (B_n,φ_n) et (A,φ) des «espaces non commutatifs de probabilités». Donnons-nous, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une famille $\xi_n = (x_{(n,\iota)})_{\iota\in I}$ de variables aléatoires dans B_n . Nous dirons que la suite ξ_n converge *en distribution* vers la famille $(y_\iota)_{\iota\in I}$ de variables aléatoires dans A si pour tout élément P de l'algèbre libre $\mathbf{C}\langle(X_\iota)_{\iota\in I}\rangle$ (l'algèbre de polynômes non commutatifs en les variables $(X_\iota)_{\iota\in I}$) on a

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n\big(P((x_{(n,\iota)})_{\iota\in I})\big) = \varphi\big(P((y_\iota)_{\iota\in I})\big)$$

Fixons un espace (commutatif) de probabilités (Ω,μ) . Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons (B_n,φ_n) l'espace non commutatif de probabilités formé de l'algèbre B_n des fonctions mesurables bornées sur Ω à valeurs dans l'algèbre des matrices $n \times n$ complexes et de la forme

$$\varphi_n : f \mapsto \int \tau_n(f(\omega))d\mu(\omega)$$

où τ_n est la trace normalisée de l'algèbre des matrices $n \times n$ complexes.

THÉORÈME 4.1. ([17]) — *Donnons-nous un ensemble I et, pour tout $\iota \in I$, tout nombre entier $n \in \mathbf{N}$ et tout couple (i,j) de nombres entiers compris entre 1 et n , une variable aléatoire (commutative)*

$a(i,j;n,\iota)$ sur Ω . Supposons que les parties réelles et les parties imaginaires des variables aléatoires $a(i,j;n,\iota)$ sont Gaussiennes centrées, de variance $1/n$ et que, pour tout $n \in N$ la famille de variables aléatoires $\{\mathrm{Re}a(i,j;n,\iota)$, $\mathrm{Im}a(i,j;n,\iota)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $\iota \in I\}$ est indépendante. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $\iota \in I$, notons $Y(n,\iota) \in B_n$ la fonction qui à $\omega \in \Omega$ associe la matrice de coefficients $(a(i,j;n,\iota)(\omega))$. Notons aussi $D_n \in B_n$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux j/n $(1 \leq j \leq n)$. Alors la suite $\mathrm{Re}Y(n,\iota)_{\iota\in I}$, $\mathrm{Im}Y(n,\iota)_{\iota\in I}$, D_n converge en distribution vers une famille libre. De plus, pour tout $\iota \in I$, la distribution limite des parties réelles et imaginaires de $Y(n,\iota)$ est semi-circulaire.

Le dernier énoncé dans le théorème 4.1 est le théorème de Wigner [19,20]. On le retrouve ici comme conséquence immédiate de la liberté asymptotique de la famille $\mathrm{Re}Y(n,\iota)_{\iota\in I}$ et du théorème de limite centrale (théorème 3.2).

La démonstration de ce théorème est assez technique. Signalons que Dykema a généralisé ce théorème pour des des distributions non Gaussiennes des coefficients $a(i,j;n,\iota)$ (*cf.* [4]).

Dans un sens facile à préciser, la famille $Y(n,\iota)_{\iota\in I}$ est asymptotiquement circulaire.

Fixons un nombre entier $k \geq 1$. Appliquant le théorème 4.1 à une famille de variables aléatoires gaussiennes indépendantes $\{a(i,j;n,\iota), 1 \leq i \leq j \leq kn, \iota \in I\}$, on en déduit :

COROLLAIRE. — *Donnons-nous un état ψ sur une algèbre de von Neumann B , une sous-algèbre de von Neumann commutative D de B , un ensemble I et une famille $\mathcal{F} = \{c(i,j;\iota)$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k$, $\iota \in I\}$ de variables aléatoires de (B,ψ) ; supposons que la famille $\mathcal{F}$ est circulaire et libre avec D et que, pour tout $\iota \in I$, $\psi(c(i,j;\iota)^*c(i,j;\iota))$ est indépendant de i et j . Munissons l'algèbre de von Neumann $A = M_k(B)$ de l'état φ donné par la formule $\varphi((a_{i,j})) = 1/k \sum \psi(a_{i,i})$. Alors les matrices $(C_\iota)_{\iota\in I}$ de coefficients $c(i,j;\iota)$ forment un système circulaire, libre avec la sous-algèbre Δ de A formée des matrices diagonales à coefficients dans D .*

5. Le groupe fondamental du facteur du groupe libre à une infinité de générateurs

Rappelons qu'il y a à isomorphisme près un unique espace mesuré standard sans atomes, donc une unique algèbre de von Neumann commutative sans atomes (à prédual séparable).

Reprenons les notations du corollaire du théorème 4.1 ci-dessus. Supposons que l'algèbre D n'a pas d'atomes, que l'ensemble I est dénombrable et notons N son cardinal. Il résulte du corollaire ci-dessus que la sous-algèbre M de A engendrée par les $\mathrm{Re}\, C_\iota$ et la sous-algèbre Δ , est un modèle du facteur $W(\mathbb{F}_{N+1})$ où $\mathbb{F}_{N+1}$ désigne le groupe libre à $N+1$ générateurs. Notons p le projecteur de coefficient $1,1$ égal à 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. Alors $p \in \Delta \subset M$; on vérifie que l'algèbre réduite M_p est une algèbre engendrée par des variables aléatoires (hermitiennes) libres et on compte leur nombre. On en déduit :

THÉORÈME 5.1. ([18]) — *Soit p un projecteur de trace $1/k$ de $W(\mathbb{F}_{N+1})$. L'algèbre réduite $W(\mathbb{F}_{N+1})_p$ est isomorphe à $W(\mathbb{F}_{Nk^2+1})$.*

REMARQUE. — On voit ici une ressemblance évidente, encore assez peu comprise avec le théorème de Nielsen-Schreier, vu que $W(\mathbb{F}_{N+1})_p$ a (du moins intuitivement) un indice k^2 dans $W(\mathbb{F}_{N+1})$.

Si N est infini, il est égal à Nk^2+1 de sorte que $1/k$ appartient au groupe fondamental de $W(\mathbb{F}_N)$.

COROLLAIRE. ([18]) — *Le groupe fondamental du facteur associé au groupe libre à une infinité de générateurs contient tous les nombres positifs rationnels.*

Rădulescu a amélioré ce corollaire en démontrant :

THÉORÈME 5.2. ([10]) — *Le groupe fondamental du facteur associé au groupe libre à une infinité de générateurs est $\mathbf{R}_+^*$.*

Pour démontrer ce théorème, Rădulescu utilise la construction suivante (*cf.* [11]) :

Soit A une algèbre de von Neumann munie d'une trace *non bornée* τ ; on suppose que A engendrée par une sous-algèbre B isomorphe à l'algèbre $L^\infty(\mathbf{R})$ des fonctions mesurables bornées sur $\mathbf{R}$ et par un élément non borné X tels que :

– La restriction de la trace τ à B est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

– Pour tout projecteur p de B correspondant à la fonction caractéristique χ_T d'une partie intégrable T de $\mathbf{R}$, $\tau(p)^{-1/2}pXp$ est un élément hermitien (borné) de A_p , sa distribution est semi-circulaire relativement à la trace normalisée $\tau(p)^{-1}\tau$ de A_p ; de plus, pXp et l'algèbre B_p sont libres pour cette trace.

Pour construire une telle algèbre, on utilise le modèle de matrices Gaussiennes ci-dessus.

Soit alors t un nombre réel strictement positif. Notons p le projecteur de B correspondant à la fonction caractéristique $\chi_{[0,t]}$ de l'intervalle $[0,t]$. Pour $n \in \mathbf{N}$, notons P_n le projecteur de B correspondant à la fonction caractéristique $\chi_{[-nt,nt]}$ de l'intervalle $[-nt,nt]$. Par définition, la sous-algèbre de von Neumann A_n de A_{P_n} engendrée par B_{P_n} et P_nXP_n est isomorphe à l'algèbre $W(\mathbf{F}_2)$ du groupe libre à deux générateurs, de sorte que $(A_n)_p$ est isomorphe à $W(\mathbf{F}_{4n^2+1})$ par le théorème 5.1 ci-dessus. De plus, le système de générateurs de $(A_{n+1})_p$ contient celui de $(A_n)_p$. En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que A_p est isomorphe à l'algèbre du groupe libre à une infinité de générateurs. Remplaçant p par le projecteur q de B correspondant à la fonction caractéristique $\chi_{[0,s]}$, (où s est un autre nombre strictement positif) on trouve que A_q est isomorphe à A_p , de sorte que s/t appartient au groupe fondamental de ce facteur.

6. Facteurs des groupes libres à un nombre fini de générateurs

Le théorème 5.1 montre que, étant donnés deux nombres entiers m et n supérieurs ou égaux à 2 tels que $\frac{n-1}{m-1}$ est le carré d'un nombre rationnel, les facteurs $W(\mathbf{F}_n)$ et $W(\mathbf{F}_m)$ ont des réduites isomorphes. Rădulescu a démontré que la condition de rationnalité de $\sqrt{\frac{n-1}{m-1}}$ est superflue. Plus précisément, supposons que $n \leq m$; alors $W(\mathbf{F}_m)$ est isomorphe à $W(\mathbf{F}_n)_p$

pour tout projecteur p de $W(\mathbb{F}_n)$ de trace $\sqrt{\frac{n-1}{m-1}}$.

L'énoncé le plus satisfaisant dans cette direction (obtenu indépendamment par Dykema et Rădulescu) est le suivant :

THÉORÈME 6.1. (*cf.* [5] et [12]) — *Il existe une famille* $(A_s)_{s\in]1,+\infty[}$ *de facteurs de type* II_1 *telle que :*
a) Si s *est entier,* A_s *est isomorphe à* $W(\mathbb{F}_s)$.
b) Si s *et* t *sont deux nombres réels tels que* $1 < s \leq t$ *et* p *un projecteur de* A_s *de trace* $\sqrt{\frac{s-1}{t-1}}$ *, alors* A_t *est isomorphe à* $(A_s)_p$.
c) Le produit libre des facteurs A_s *et* A_t *est isomorphe à* A_{s+t} .

Il est clair que le groupe fondamental de A_s ne dépend pas de s . En fait ou bien ce groupe fondamental est $\{1\}$ et les A_s sont deux à deux non isomorphes, ou ce groupe fondamental est $\mathbf{R}_+^*$ et tous les A_s sont isomorphes. En effet, s'il existe deux nombres réels s et t tels que $1 < s < t$ et que A_s soit isomorphe à A_t , alors A_{s+u} serait isomorphe à A_{t+u} pour tout nombre $u > 1$ (th. 6.1.c) donc $\sqrt{\frac{s+u-1}{t+u-1}}$ appartiendrait au groupe fondamental des facteurs A_s ; ce groupe fondamental contiendrait alors $\{\sqrt{\frac{s+u-1}{t+u-1}}, u \in]1,+\infty[\} =]\sqrt{\frac{s}{t}}, 1[$ et, comme c'est un sous-groupe de $\mathbf{R}_+^*$, il serait égal à $\mathbf{R}_+^*$.

De plus, Dykema a calculé le produit libre de deux algèbres de von Neumann finies «injectives» en termes de ces A_s (*cf.* [6]). En particulier, il prouve que le facteur de type II_1 associé au produit libre de deux groupes moyennables Γ_1 et Γ_2 est isomorphe à A_s où $s = 2 - n_1^{-1} - n_2^{-1}$ où n_1 et n_2 désignent les cardinaux respectifs de Γ_1 et Γ_2 ([6]). Par exemple :

1. Le produit libre du facteur hyperfini de type II_1 par lui même est isomorphe à $A_2 = W(\mathbb{F}_2)$.

2. Le facteur de type II_1 associé au groupe $PSL(2,\mathbf{Z})$ est isomorphe à $A_{7/6}$.

([6]) On suppose, bien sûr, que n_1 et n_2 sont strictement supérieurs à 1 et qu'ils ne sont pas tous deux égaux à 2 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. CONNES : *Classification of injective factors*, Annals of Math. **104** (1976) 73-115.

[2] A. CONNES : *A factor of type II_1 with countable fundamental group.* J. Operator Theory 4 (1980) 151-153.

[3] C. DELAROCHE et A.A. KIRILLOV : *Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés.* Sém. Bourbaki 343 (1968).

[4] K. DYKEMA : *Free products of free group factors with matrix algebras and the hyperfinite II_1 factor; asymptotic freeness of non gaussian random matrices.* preprint.

[5] K. DYKEMA : *Interpolated free group factors.* preprint.

[6] K. DYKEMA : *Free products of hyperfinite von Neumann algebras and free dimension.* preprint.

[7] V.Ya GOLODETS and N.I. NESSONOV : T-property and nonisomorphic full factors of types II and III. J. Funct. Anal. **70** (1987) 80-89.

[8] D.A. KAZHDAN : *Connection of the dual space of a group and the structure of its closed subgroups.* Funct. Anal. Appl. **1** (1967) 63-65.

[9] F.J. MURRAY et J. von NEUMANN : *On rings of operators IV.* Annals of Math. **44** (1943) 716-808.

[10] F. RĂDULESCU : *The fundamental group of the von Neuman algebra of a free group with infinitely many generators is* $\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$. J.A.M.S. à paraître

[11] F. RĂDULESCU : *A one parameter group of automorphisms of $\mathcal{L}(F_\infty) \otimes B(H)$ scaling the trace.* C.R.A.S. **314** Sér. I (1992) 1027-1032.

[12] F. RĂDULESCU : *Random matrices, amalgamated free products and subfactors of the von Neuman algebra of a free group.* preprint I.H.E.S. (1991).

[13] D.V. VOICULESCU : *Symmetries of some reduced free product C*-algebras.* In "Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory". Lecture Notes in Math. **1132** Springer-Verlag (1985) 556-588.

[14] D.V. VOICULESCU : *Addition of certain non-commuting random variables.* J.F.A. **66** (1986) 323-346.

[15] D.V. VOICULESCU : *Multiplication of certain non-commuting random variables.* J. Operator Theory **18** (1987) 223-235.

[16] D.V. VOICULESCU : *Dual algebraic structures on operator algebras related to free products.* J. Operator Theory **17** (1987) 85-98.

[17] D.V. VOICULESCU : *Limit laws for random matrices and free products.* Invent. Math **104** (1991) 201-220.

[18] D.V. VOICULESCU : *Circular and semicircular systems and free product factors.* Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras and Invariant Theory, Progress in Mathematics **92**, Birkhäuser, Boston 1990.

[19] E. WIGNER : *Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimension.* Ann. of Math. **62** (1955) 548-564.

[20] E. WIGNER : *On the distribution of the roots of certain symmetric matrices.* Ann. of Math. **67** (1958) 325-327.

Georges SKANDALIS
Université Paris 7
UFR de Mathématiques
UA 212 du CNRS
Tour 45-55-5e étage
2, pl. Jussieu
F - 75251 Paris Cedex 05

Astérisque

ARNAUD BEAUVILLE

Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann [d'après A. Bolibruch]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 765, p. 103-119

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__103_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
45ème année, 1992-93, n° 765

Mars 1993

MONODROMIE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES À PÔLES SIMPLES SUR LA SPHÈRE DE RIEMANN
[d'après A. Bolibruch]

par **Arnaud BEAUVILLE**

1. Introduction

Considérons un système différentiel linéaire d'ordre n

$$(A) \qquad y'(z) = A(z)\,y(z)$$

où $A(z)\,dz$ est une forme différentielle méromorphe sur la sphère de Riemann, à valeurs dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, admettant comme seules singularités des pôles simples. Autrement dit, on a

$$A(z) = \sum_{\alpha\in\Sigma} \frac{A_\alpha}{z-\alpha}\ ,$$

où Σ est une partie finie de $\mathbf{C}$, et les A_α des matrices complexes. Pour éviter d'avoir à distinguer des cas particuliers, nous supposerons toujours que le système n'a pas de singularité à l'infini, ce qui se traduit par la relation $\sum_{\alpha\in\Sigma} A_\alpha = 0$.

Le système (A) admet des solutions globales qui sont des fonctions *multiformes* sur $\mathbf{P}^1 - \Sigma$, c'est-à-dire des fonctions holomorphes (à valeurs dans $\mathbf{C}^n$) sur le revêtement universel de $\mathbf{P}^1 - \Sigma$. Ces solutions forment un espace vectoriel S de dimension n, sur lequel le groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma, *)$ opère; la représentation $\rho : \pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma, *) \longrightarrow \mathbf{GL}(S)$ correspondante est appelée *représentation de monodromie* du système (A). Le problème que je vais considérer dans cet exposé est de savoir si *toute représentation de* $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma, *)$ *peut être réalisée comme représentation de monodromie d'un système à pôles simples.*

Ce problème a donné lieu à un certain nombre de malentendus, à commencer par son nom : il est souvent appelé *problème de Riemann* ou *problème de Riemann-Hilbert*, bien qu'il ne soit dû ni à Riemann, ni à Hilbert . Il a longtemps été considéré comme résolu, et ce n'est guère qu'il y a une dizaine d'années que les démonstrations classiques de Plemelj et Birkhoff ont été remises en question. Le mathématicien russe A. Bolibruch a récemment réglé la question en présentant une série de contre-exemples ([B1] à [B3]). Je vais présenter ici l'exemple de [B3], qui est plus simple et plus explicite.

Je remercie D. Bertrand, O. Gabber et B. Malgrange pour des commentaires qui m'ont été très utiles.

2. Un peu d'histoire

a) *Quelques généralités*

Considérons un système différentiel d'ordre n

$$y'(z) = \mathrm{A}(z)\, y(z) \tag{A}$$

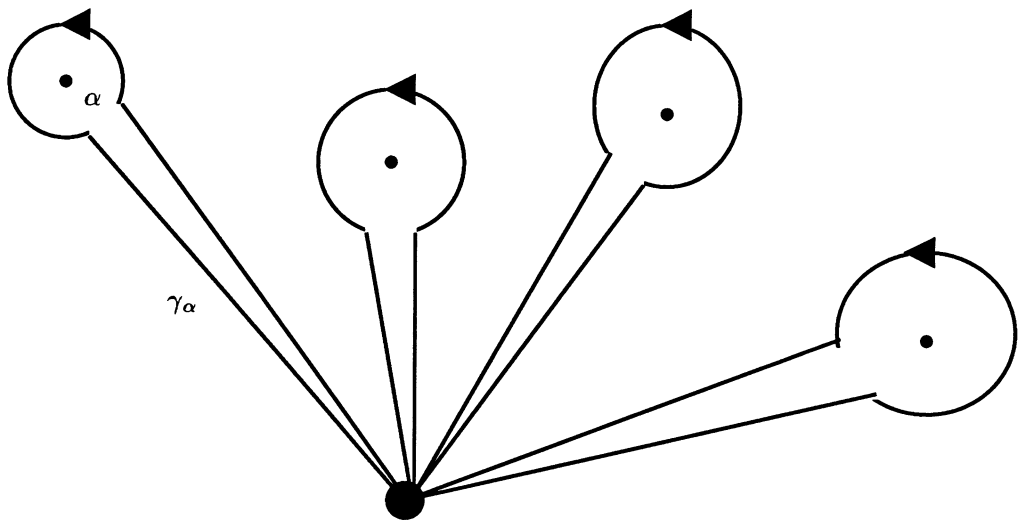
où la forme $\mathrm{A}(z)\,dz$ est méromorphe dans $\mathbf{P}^1$, et holomorphe à l'infini ; on note Σ l'ensemble de ses pôles.

Le système (A) admet un espace vectoriel S de dimension n de solutions, qui sont des fonctions multiformes sur $\mathbf{P}^1 - \Sigma$; par abus de langage, nous noterons encore $y(z)$ une telle fonction. Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ une base de S ; rappelons qu'on appelle *matrice fondamentale de solutions* de (A) associée à cette base la matrice $\mathrm{Y}(z)$ dont les colonnes sont $y_1(z), \ldots, y_n(z)$. Une telle matrice vérifie l'équation $\mathrm{Y}'(z) = \mathrm{A}(z)\,\mathrm{Y}(z)$; elle se transforme sous l'action d'un élément γ de $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$ en $\mathrm{Y}(z)\,\rho(\gamma)$, où $\rho : \pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma) \longrightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ est la représentation de monodromie de (A) dans la base $(y_1, \ldots, y_n)$.

Le groupe $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$ est engendré par les classes de lacets $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$ "tournant une fois autour de α" (voir figure page suivante), soumises à la relation $\prod_{\alpha\in\Sigma} \gamma_\alpha = 1$, pour un ordre convenable sur Σ. La représentation ρ est donc déterminée par la famille $(\mathrm{M}_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$, où M_α est la matrice de $\rho(\gamma_\alpha)$ dans la base

(1) *cf.* § 6 pour la relation avec le vingt-et-unième problème de Hilbert.

(2) J'utilise les conventions de [D], de sorte que le groupe fondamental opère *à droite* sur le revêtement universel (supposé pointé). D'autre part, j'omettrai désormais le point base dans la notation.



$(y_1, \ldots, y_n)$. Il s'agit de décider si toute famille de matrices $(M_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$ satisfaisant à $\prod_{\alpha\in\Sigma} M_\alpha = I$ peut être obtenue de cette manière.

b) *Plemelj, Birkhoff*

Le problème était certainement dans l'air au début du vingtième siècle; j'ignore quand il a été formulé explicitement pour la première fois. Il apparaît par exemple dans le livre de Schlesinger [S], qui lui consacre un chapitre entier (sous le nom de problème de Riemann) et en donne une "solution" hautement fantaisiste. Une autre solution est proposée par Plemelj [P], développant une idée de Hilbert. En 1913, G. Birkhoff donne une variante plus simple de la démonstration de Plemelj [Bi].

Plemelj et Birkhoff procèdent tous deux en 3 étapes. Suivant une idée qui remonte à Riemann, ils construisent d'abord une matrice multiforme inversible $Y(z)$ qui se transforme en $Y(z)\rho(\gamma)$ par monodromie le long d'un lacet γ. La matrice $Y'(z)Y(z)^{-1}$ est alors invariante par monodromie, donc provient d'une matrice $A(z)$ holomorphe dans $\mathbf{P}^1 - \Sigma$: ainsi $Y(z)$ est une matrice fondamentale de solutions du système $y'(z) = A(z)y(z)$, et celui-ci admet ρ comme représentation de monodromie. En outre, la matrice $Y(z)$ construite est *à croissance polynomiale* au voisinage des points de Σ (voir le § 3 pour une définition précise); cela implique qu'il en est de même de $A(z)$, qui est donc méromorphe sur $\mathbf{P}^1$. Par

définition, les singularités d'un tel système sont dites régulières (*cf.* § 3) : Plemelj et Birkhoff réalisent donc ρ comme représentation de monodromie d'un système à singularités régulières.

Un point α de Σ étant fixé, ils montrent ensuite qu'on peut choisir $Y(z)$ de manière que la matrice $A(z)$ ait un pôle simple en tous les points de $\Sigma - \{\alpha\}$. Enfin ils modifient $Y(z)$ de façon que le système ait également un pôle simple en α. C'est cette dernière étape qui est insuffisante : Plemelj comme Birkhoff supposent que la matrice M_α est diagonalisable (l'hypothèse est implicite chez Plemelj, tandis que Birkhoff affirme que "le cas général se traite de la même manière"). L'erreur de Plemelj est analysée en détail par Treibich dans [ENS].

Retenons de cet épisode malheureux que *le problème admet une solution lorsque l'une des matrices* M_α *est diagonalisable.*

c) *Lappo-Danilevskiĭ*

En 1928, le jeune mathématicien russe I. Lappo-Danilevskiĭ propose une approche tout-à-fait différente [L-D] : il écrit explicitement les solutions de (A) sous forme de séries de polylogarithmes. La méthode est si élégante que je ne résiste pas à l'envie d'en dire deux mots. Notons $\widetilde{U}$ le revêtement universel de $\mathbf{P}^1 - \Sigma$ et o son point base. Soit $\mathcal{S}(\Sigma)$ l'ensemble des suites finies d'éléments de Σ. Définissons par récurrence la fonction L_σ sur $\widetilde{U}$, pour $\sigma \in \mathcal{S}(\Sigma)$, de la façon suivante. On pose $L_\sigma(z) \equiv 1$ lorsque σ est la suite vide; si $\sigma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, on désigne par σ' la suite $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$ et on pose

$$L_\sigma(z) = \int_o^z \frac{L_{\sigma'}(u)\, du}{u - \alpha_p} .$$

Pour $\sigma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, posons $A_\sigma := A_{\alpha_p} \cdots A_{\alpha_1}$. *Alors* $Y(z) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(\Sigma)} L_\sigma(z)\, A_\sigma$ *est une matrice fondamentale de solutions de* (A) : la convergence de cette série est un exercice, la relation $Y'(z) = A(z)\, Y(z)$ est immédiate, et l'on a $Y(o) = I$. Pour $\alpha \in \Sigma$, la matrice de monodromie M_α est donc égale à $Y(o_\alpha)$, où o_α désigne le transformé de o par l'action de l'élément γ_α de $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$. On obtient

$$M_\alpha = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(\Sigma)} L_\sigma(o_\alpha)\, A_\sigma .$$

Lorsque $\sigma = (\alpha)$, on a $L_\sigma(o_\beta) = L_\sigma(o) = 0$ pour $\beta \neq \alpha$, et $L_\sigma(o_\alpha) = 2\pi i$; l'égalité précédente se réécrit donc

$$M_\alpha = I + 2\pi i A_\alpha + \sum_{\mathrm{Card}(\sigma)\geq 2} L_\sigma(o_\alpha)\, A_\sigma \ .$$

Il en résulte que l'application $(A_\alpha) \mapsto (M_\alpha)$ est analytique, et que son application tangente à l'origine est $2\pi i$ fois l'application identique. Le théorème d'inversion locale permet de conclure que *les matrices* $(M_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$ *sont les matrices de monodromie d'un système* $y'(z) = \sum_{\alpha\in\Sigma} \frac{A_\alpha}{z-\alpha}\, y(z)$ *dès qu'elles sont suffisamment proches de l'identité* (on peut aussi déduire ce résultat de l'approche de Plemelj, *cf.* l'exposé IV.3 de [ENS]).

d) *Le point de vue moderne*

Il a été introduit par Röhrl [Rö]. Soient U une surface de Riemann, E un fibré holomorphe sur U. Rappelons qu'une *connexion* (holomorphe) sur E est un opérateur différentiel d'ordre 1

$$\nabla : E \longrightarrow E \otimes \Omega^1_U$$

qui vérifie l'identité de Leibnitz $\nabla(fs) = f\nabla(s) + s \otimes df$ pour toute section s de E sur un ouvert V de U et toute fonction f holomorphe sur V (autrement dit, le symbole de ∇ est l'identité). Si $U = \mathbf{P}^1 - \Sigma$, avec $\Sigma \neq \emptyset$, le fibré E est trivial, de sorte qu'une section de E s'identifie à une fonction holomorphe $y : U \to \mathbf{C}^n$; il existe alors une application holomorphe $A : U \to \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$\nabla y(z) = \big(y'(z) - A(z)\, y(z)\big)\, dz \ .$$

Les sections horizontales de (E, ∇) (c'est-à-dire, par définition, les sections de E annulées par ∇) correspondent donc aux solutions du système différentiel $y'(z) = A(z)\, y(z)$.

Les sections horizontales multiformes (autrement dit holomorphes sur le revêtement universel de U) de (E, ∇) forment un espace vectoriel S de dimension n, sur lequel le groupe $\pi_1(U)$ opère; la représentation $\rho : \pi_1(U) \to \mathbf{GL}(S)$ est la *représentation de monodromie* associée à (E, ∇). On déduit facilement du théorème d'existence des solutions d'équations différentielles que *le foncteur qui*

associe à (E, ∇) *sa représentation de monodromie est une équivalence de la catégorie des fibrés holomorphes sur* U *munis d'une connexion sur la catégorie des représentations de* $\pi_1(U)$. On voit en particulier que toute représentation de $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$ est la représentation de monodromie d'un système $y'(z) = A(z)\,y(z)$ holomorphe en dehors de Σ – mais cela ne nous donne aucune information sur le comportement de $A(z)$ aux points de Σ.

Celui-ci a été étudié (dans un cadre beaucoup plus général) par Deligne [D]. Deligne montre qu'un couple (E, ∇) sur $\mathbf{P}^1 - \Sigma$ admet un prolongement $(\overline{E}, \overline{\nabla})$, où $\overline{E}$ est un fibré sur $\mathbf{P}^1$ et $\overline{\nabla} : \overline{E} \longrightarrow \overline{E} \otimes \Omega^1_{\mathbf{P}^1}(\Sigma)$ une connexion méromorphe, admettant au plus des pôles simples aux points de Σ. De plus, deux tels prolongements diffèrent par un isomorphisme *méromorphe* aux points de Σ.

On en déduit facilement que toute représentation de $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$ est la représentation de monodromie d'un système $y'(z) = A(z)\,y(z)$ méromorphe sur $\mathbf{P}^1$ et admettant des *singularités régulières* aux points de Σ (voir le § 3 pour une définition précise). Mais notre problème est plus subtil : il équivaut à trouver, pour tout fibré E sur $\mathbf{P}^1 - \Sigma$ muni d'une connexion ∇, un prolongement $(\overline{E}, \overline{\nabla})$ pour lequel le fibré $\overline{E}$ est *trivial*. Les résultats de Deligne ont permis à Dekkers [Dk] de prouver que *ce problème admet une solution pour* $n = 2$.

Mentionnons pour finir l'approche très différente de Sato, Miwa et Jimbo [JMS], qui utilisent la théorie quantique des champs pour construire explicitement la matrice fondamentale $Y(z)$ en fonction des matrices M_α, pourvu que celles-ci soient assez proches de l'identité.

3. L'étude locale

Notons D un disque ouvert de centre 0 dans $\mathbf{C}$, $D^* = D - \{0\}$, et $\pi : \widetilde{D^*} \to D^*$ un revêtement universel de D^*. Nous choisirons une fois pour toutes une fonction $\log z$ sur $\widetilde{D^*}$, et nous poserons $z^C := e^{(\log z)\,C}$ pour toute matrice complexe C.

On dira qu'une fonction holomorphe f sur $\widetilde{D^*}$, à valeurs vectorielles, est *à croissance polynomiale* s'il existe un nombre réel A tel qu'on ait $\lim_{z \to 0} z^{-A} f(s(z)) = 0$ pour tout secteur circulaire ouvert U d'angle $< 2\pi$ et toute section s du

revêtement π au-dessus de U. Le plus grand entier ν tel que ceci ait lieu pour tout $A < \nu$ est appelé *l'ordre* de f en 0, et noté $\nu(f)$. Toute fonction f holomorphe dans D^* et méromorphe en 0 est à croissance polynomiale, et son ordre est simplement l'ordre du zéro de f à l'origine. La fonction multiforme $z^\lambda(\log z)^k$ ($k \in \mathbf{Z}$, $\lambda \in \mathbf{C}$) est à croissance polynomiale, et son ordre est $[\Re e\, \lambda]$.

On considère dans ce paragraphe un système différentiel d'ordre n

$$y'(z) = A(z)\, y(z) \tag{A}$$

où la matrice $A(z)$ est holomorphe dans D^*.

DÉFINITION. – *On dit que le système* (A) *a une singularité régulière en* 0 *si toutes ses solutions ont une croissance polynomiale.*

Il est facile de voir qu' *un pôle simple de* $A(z)$ *est une singularité régulière* (majorer $\|y\|$ à l'aide d'une inéquation différentielle par rapport à $|z|$). La réciproque est fausse : un pôle d'ordre arbitrairement grand peut être une singularité régulière (exemple : $A(z) = \begin{pmatrix} n/z & 0 \\ 1/z^n & 0 \end{pmatrix}$). Je dois avertir le lecteur que la terminologie ne s'est imposée qu'assez récemment ; la littérature classique ([Bi], [G], [I]) réserve le nom de "singularité régulière" au cas où $A(z)$ a un pôle simple.

Choisissons une base de l'espace des solutions S de (A) ; notons $Y(z)$ la matrice fondamentale de solutions correspondante, et M la matrice de monodromie : la matrice $Y(z)$ est transformée en $Y(z)M$ par monodromie autour de l'origine. Notons L l'unique matrice carrée d'ordre n telle que $e^{2\pi i L} = M$ et que chaque valeur propre λ de L satisfasse à $0 \leq \Re e\,(\lambda) < 1$. La matrice $Y(z)\, z^{-L}$ est invariante par monodromie, donc définit une application holomorphe de D^* dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$. Comme la matrice z^L est à croissance polynomiale, on voit que *le système* (A) *admet une singularité régulière en* 0 *si et seulement si la matrice* $Y(z)\, z^{-L}$ *est méromorphe à l'origine.* Lorsque c'est le cas, les solutions de (A) sont des sommes finies de fonctions (à valeurs vectorielles) de la forme $z^\lambda(\log z)^k \varphi(z)$, avec $\lambda \in \mathbf{C}$, $k \in \mathbf{N}$ et φ holomorphe dans D.

Supposons désormais que le système (A) *admette une singularité régulière à l'origine.* L'ordre définit une filtration décroissante de l'espace S des solutions :

$$F^\nu(S) := \{y \in S \mid \nu(y) \geq \nu\}.$$

Les ordres des solutions de (A) forment donc une famille finie d'entiers (les entiers ν tels que $F^\nu \neq F^{\nu+1}$). Ecrivons ces entiers par ordre décroissant, chaque entier ν étant répété autant de fois que $\dim(F^\nu/F^{\nu+1})$. On obtient une suite $\nu^1 \geq \ldots \geq \nu^n$, la *suite des ordres* de (A) en 0. Elle est caractérisée par le fait qu'il existe une base $(y_1, \ldots, y_n)$ de S telle que $\nu(y_i) = \nu^i$, et que toute base $(u_1, \ldots, u_n)$ de S, ordonnée de façon que $\nu(u_1) \geq \ldots \geq \nu(u_n)$, vérifie $\nu(u_i) \leq \nu^i$. On notera N la matrice $\mathrm{diag}(\nu^1, \ldots, \nu^n)$.

La filtration $F^\nu(S)$ est invariante par monodromie; on en déduit aussitôt qu'on peut trouver une base $(y_1, \ldots, y_n)$ de S qui satisfait à $\nu(y_i) = \nu^i$ pour tout i, et dans laquelle la matrice de monodromie M est triangulaire supérieure. Une telle base sera appelée *base adaptée* de S en 0. Le lecteur se convaincra sans peine que la matrice $(y_1(z), \ldots, y_n(z))$ peut s'écrire dans une telle base sous la forme $V(z)\, z^N z^L$, où la matrice $V(z)$ est *holomorphe*. Le résultat suivant, qui semble dû à Gantmacher ([G], ch. XIV, § 10; voir aussi [L]) est plus subtil.

PROPOSITION 1. – *Supposons que le système* (A) *ait une singularité régulière à l'origine. Soit* $(y_1, \ldots, y_n)$ *une base adaptée de* S, *et soit* $Y(z)$ *la matrice fondamentale de solutions dont les colonnes sont* $y_1, \ldots, y_n$. *Pour que* $A(z)$ *ait au plus un pôle simple à l'origine, il faut et il suffit que l'on ait* $Y(z) = V(z)\, z^N z^L$, *où la matrice* $V(z)$ *est holomorphe et* inversible *dans* D.

Je vais me contenter ici de démontrer que la condition est suffisante, en renvoyant à [B2] ou [L] pour la nécessité. Supposons donc qu'une matrice fondamentale de solutions de (A) s'écrive $Y(z) = V(z)\, z^N z^L$, où $V(z)$ est holomorphe et inversible. En reportant dans l'égalité $Y'(z) = A(z)\, Y(z)$, on obtient

$$A(z) = V'(z)\, V(z)^{-1} + \frac{1}{z} V(z)\big(N + z^N L\, z^{-N}\big)\, V(z)^{-1} \quad (1)$$

Comme L est triangulaire supérieure, la matrice $z^N L\, z^{-N}$ est holomorphe; on conclut que $A(z)$ admet un pôle simple à l'origine. ∎

COROLLAIRE 1. – *Notons* A_0 *la matrice résidu de* $A(z)$ *en* 0. *Le nombre* $\mathrm{Tr}(A_0 - N - L)$ *est un entier positif; pour qu'il soit nul, il faut et il suffit que* $A(z)$ *ait au plus un pôle simple à l'origine.*

Soit $Y(z) = V(z)\, z^N z^L$ une matrice fondamentale de solutions correspondant à une base adaptée de S ; on a

$$\frac{d}{dz} \log\det Y(z) = \frac{d}{dz} \log\det V(z) + \frac{\mathrm{Tr}\, N}{z} + \frac{\mathrm{Tr}\, L}{z}\,.$$

Par ailleurs, on a $\frac{d}{dz}\log\det Y(z) = \operatorname{Tr} Y'(z)\,Y(z)^{-1} = \operatorname{Tr} A(z)$; en comparant les résidus à l'origine, on obtient

$$\operatorname{Tr}(A_0 - N - L) = \nu(\det V(z)) .$$

Le corollaire résulte alors de la prop. 1. ∎

Le corollaire suivant ne sera pas utilisé dans la construction du contre-exemple, mais il me semble mériter d'être mentionné :

COROLLAIRE 2. – *Supposons que* $A(z)$ *ait un pôle simple à l'origine. Soient* $\lambda^1,\dots,\lambda^n$ *les valeurs propres de* A_0, *comptées avec multiplicité, et rangées de façon que* $\Re e(\lambda^1) \geq \dots \geq \Re e(\lambda^n)$. *On a alors* $\nu^i = [\Re e(\lambda^i)]$, *et les valeurs propres de* L *sont* $\lambda^1 - \nu^1,\dots,\lambda^n - \nu^n$. *Les valeurs propres de* M *sont* $(e^{2\pi i\lambda^1},\dots,e^{2\pi i\lambda^n})$.

En multipliant par z les deux membres de l'égalité (1) et faisant tendre z vers 0, on obtient

$$A_0 = V(0)\big(N + \lim_{z\to 0} z^N L\, z^{-N}\big) V(0)^{-1} .$$

Comme la matrice L est triangulaire supérieure, on en déduit le corollaire. ∎

On prendra garde cependant que la matrice A_0 ne détermine pas la monodromie : il se peut par exemple que A_0 soit diagonalisable alors que L (ou M) ne le sont pas.

4. Le contre-exemple.

Revenons à l'étude d'un système différentiel à singularités régulières

$$y'(z) = A(z)\,y(z) , \tag{A}$$

où la forme $A(z)\,dz$ est méromorphe dans $\mathbf{P}^1$, à pôles dans Σ. Pour $\alpha \in \Sigma$, on notera $\nu_\alpha^1 \geq \dots \geq \nu_\alpha^n$ la suite des ordres de (A) en α et N_α la matrice $\operatorname{diag}(\nu_\alpha^1,\dots,\nu_\alpha^n)$; une base de S étant choisie, on notera M_α la matrice de la monodromie en α, et L_α la matrice L correspondante (§ 3). La formule des résidus permet de donner une formulation globale du cor. 1 ci-dessus :

COROLLAIRE 1′. – *On a* $\sum_{\alpha\in\Sigma} \operatorname{Tr}(N_\alpha + L_\alpha) \leq 0$; *pour que l'égalité ait lieu, il faut et il suffit que tous les pôles de* $A(z)$ *soient simples.* ∎

THÉORÈME. – *Soit* $\rho : \pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma) \longrightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ *une représentation satisfaisant aux hypothèses suivantes :*

(i) ρ *n'est pas irréductible.*

(ii) *Chacune des matrices* M_α *a une seule valeur propre* μ_α *et un seul bloc de Jordan.*

(iii) $\prod_{\alpha \in \Sigma} \mu_\alpha \neq 1$.

Alors ρ *n'est pas isomorphe à la représentation de monodromie d'un système différentiel à pôles simples.*

Supposons qu'il existe un système différentiel à pôles simples

$$y'(z) = A(z)\, y(z) \tag{A}$$

dont la représentation de monodromie $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma) \longrightarrow \mathbf{GL}(S)$ s'identifie à ρ. Soient $\overline{S}$ un sous-espace non trivial de S invariant par ρ, et p sa dimension.

Choisissons une base de S dont les p premiers vecteurs forment une base de $\overline{S}$; chacune des matrices M_α s'écrit alors

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \overline{M}_\alpha & * \\ 0 & * \end{pmatrix} .$$

Ecrivons la matrice fondamentale de solutions correspondante sous la forme

$$Y(z) = \begin{pmatrix} \overline{Y}(z) & * \\ U(z) & * \end{pmatrix} .$$

La matrice $\begin{pmatrix} \overline{Y}(z) \\ U(z) \end{pmatrix}$, étant de rang p, admet p lignes linéairement indépendantes ; en multipliant $Y(z)$ à gauche par une matrice de permutation, on peut supposer que la fonction $\det \overline{Y}(z)$ n'est pas identiquement nulle. La matrice $\overline{Y}'(z)\, \overline{Y}(z)^{-1}$ est méromorphe sur le revêtement universel de $\mathbf{P}^1 - \Sigma$, invariante par monodromie, et à croissance polynomiale aux points de Σ ; elle provient donc d'une matrice $\overline{A}(z)$ méromorphe sur $\mathbf{P}^1$. Ainsi $\overline{Y}(z)$ est une matrice fondamentale de solutions du système différentiel

$$\overline{y}'(z) = \overline{A}(z)\, \overline{y}(z) . \tag{$\overline{A}$}$$

C'est un système à singularités régulières ; ses singularités proviennent des points de Σ, et aussi de l'ensemble Σ' des zéros de $\det \overline{Y}(z)$. Aux points de Σ', toutes

les solutions sont holomorphes; par conséquent la monodromie est triviale, et les ordres sont positifs.

Soit $\alpha \in \Sigma$. La monodromie de $(\overline{A})$ en α est donnée par la matrice $\overline{M}_\alpha$; comparons les ordres de $(\overline{A})$ en α à ceux de (A). Quelle que soit la base adaptée $(y_1, \ldots, y_n)$ de S en α (§ 3), le sous-espace de S engendré par $(y_1, \ldots, y_p)$ est égal à $\overline{S}$ (c'est l'unique sous-espace de dimension p invariant par M_α), et l'on obtient une base de solutions $(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_p)$ de $(\overline{A})$ en supprimant les $n-p$ dernières coordonnées des vecteurs $y_1, \ldots, y_p$. On a $\nu_\alpha(\overline{y}_i) \geq \nu_\alpha(y_i) = \nu_\alpha^i$, et les ordres $(\overline{\nu}_\alpha^i)$ de $(\overline{A})$ en α vérifient

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\nu}_\alpha^i \geq \sum_{i=1}^{p} \nu_\alpha(\overline{y}_i) \geq \sum_{i=1}^{p} \nu_\alpha^i .$$

La matrice M_α admet pour unique valeur propre μ_α, donc L_α admet pour unique valeur propre $\lambda_\alpha := \frac{1}{2\pi i} \log \mu_\alpha$ (avec $0 \leq \Re e\, \lambda_\alpha < 1$). Le cor. 1′ donne alors

$$0 \geq \sum_{\alpha \in \Sigma} \Big(\sum_{i=1}^{p} \overline{\nu}_\alpha^i + p\lambda_\alpha \Big) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \beta \in \Sigma'}} \nu_\beta^i \geq \sum_{\alpha \in \Sigma} \Big(\sum_{i=1}^{p} \nu_\alpha^i + p\lambda_\alpha \Big) \geq \frac{p}{n} \sum_{\alpha \in \Sigma} \Big(\sum_{i=1}^{n} \nu_\alpha^i + n\lambda_\alpha \Big) = 0$$

(la dernière inégalité signifie simplement que la moyenne de $(\nu_\alpha^1, \ldots, \nu_\alpha^p)$ est supérieure à celle de $(\nu_\alpha^1, \ldots, \nu_\alpha^n)$, ce qui est clair puisqu'on a $\nu_\alpha^1 \geq \ldots \geq \nu_\alpha^n$).

Toutes ces inégalités sont donc des égalités; on en déduit qu'on a $\nu_\alpha^1 = \ldots = \nu_\alpha^n$ pour tout $\alpha \in \Sigma$, et $\sum_{\alpha \in \Sigma} (\nu_\alpha^1 + \lambda_\alpha) = 0$. Prenant l'exponentielle on obtient $\prod_{\alpha \in \Sigma} \mu_\alpha = 1$, ce qui contredit l'hypothèse (iii). ∎

Exemple. – Les hypothèses du théorème entraînent $n \geq 4$ (ρ ne peut admettre une sous-représentation ou représentation quotient de dimension 1). Pour $n \geq 4$, il est facile de trouver des exemples de représentations satisfaisant aux hypothèses du théorème. Voici celui que donne Bolibruch, avec $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$:

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_\beta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad M_\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} .$$

On a $M_\alpha M_\beta M_\gamma = I$. Il est à peu près clair que chacune de ces matrices a une seule valeur propre, avec $\mu_\alpha = \mu_\beta = 1$ et $\mu_\gamma = -1$. Il n'est guère plus difficile de voir que M_β et M_γ ont un seul bloc de Jordan. Par suite *la représentation de* $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$ *définie par ces* 3 *matrices ne peut être réalisée comme représentation de monodromie d'un système à pôles simples.*

5. Autres résultats

L'article [B2] contient une étude complète du cas $n = 3$. Donnons d'abord deux définitions. On appelle *poids* d'un système $y'(z) = A(z)\,y(z)$ l'entier positif $\gamma(A) = \sum_{\alpha\in\Sigma}(\nu_\alpha^1 - \nu_\alpha^n)$; on appelle *poids fuchsien* d'une représentation $\rho : \pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma) \longrightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$, et l'on note $\gamma(\rho)$, le minimum des poids des systèmes à pôles simples dont la représentation de monodromie est isomorphe à ρ.

Soit ρ une représentation de dimension 3 de $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$. On peut résumer comme suit les résultats principaux de [B2] :

PROPOSITION 2. – a) *Si* ρ *est irréductible, ou si l'une des matrices* M_α *admet au moins* 2 *blocs de Jordan,* ρ *est la représentation de monodromie d'un système à pôles simples.*

b) *Supposons qu'aucune des conditions de* a) *ne soient réalisées, de sorte que* ρ *admet une sous-représentation ou une représentation quotient* $\overline{\rho}$ *de dimension* 2. *Pour que* ρ *soit la représentation de monodromie d'un système à pôles simples, il faut et il suffit qu'on ait* $\gamma(\overline{\rho}) = 0$.

Lorsqu'elle est possible, la construction d'un système à pôles simples réalisant la représentation ρ requiert une analyse délicate, qui occupe la plus grosse partie de [B2]. La démonstration de l'égalité $\gamma(\overline{\rho}) = 0$ dans le cas b) lorsque ρ provient d'un système à pôles simples est essentiellement la même que celle du théorème 1.

Cette proposition a fourni à Bolibruch ses premiers contre-exemples au problème des pôles simples :

COROLLAIRE. – *Considérons le système différentiel* $y'(z) = \mathrm{A}(z)\,y(z)$, *avec*

$$\mathrm{A}(z) = \frac{1}{z^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{pmatrix} + \frac{1}{6(z+1)}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{1}{2(z-1)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3(z-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La représentation de monodromie de ce système ne peut être réalisée comme la représentation de monodromie d'un système à pôles simples.

Je vais me contenter d'indiquer les grandes lignes de la démonstration. Notons S l'espace des solutions du système, et $\rho : \pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathrm{S})$ sa représentation de monodromie. La matrice $\mathrm{A}(z)$ s'écrit sous la forme

$$\mathrm{A}(z) = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & & \\ 0 & & \overline{\mathrm{A}}(z) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur constant $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un élément de S, invariant par ρ. La représentation $\overline{\rho}$ induite par ρ sur $\mathrm{S}/\mathbf{C}e_1$ est la représentation de monodromie du système à pôles simples $\overline{y}'(z) = \overline{\mathrm{A}}(z)\,\overline{y}(z)$. Compte tenu du cor. 2 (p. 8), on a $\gamma(\overline{\mathrm{A}}) = 2$. Une analyse un peu plus fine donne en fait $\gamma(\overline{\rho}) = 2$. D'autre part, une étude locale permet de montrer que chacune des matrices de monodromie M_α n'a qu'un bloc de Jordan. Le corollaire résulte alors de la prop. 2. ∎

Plus récemment, Kostov [K] et indépendamment Bolibruch [B5] ont résolu le cas d'une représentation irréductible :

PROPOSITION 3. – *Toute représentation* irréductible *de* $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$ *est la représentation de monodromie d'un système à pôles simples.*

Les deux démonstrations sont de nature algorithmique, et passablement compliquées. O. Gabber m'a communiqué une démonstration simple et élégante. Il réalise la représentation donnée par un fibré holomorphe $\mathrm{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(a_n)$ sur $\mathbf{P}^1$, muni d'une connexion méromorphe ∇ admettant des pôles simples aux points de Σ (*cf.* § 2 d)). Il montre qu'on peut modifier (E, ∇) au voisinage

d'un point de Σ de façon à diminuer le "défaut" $\operatorname{def}(E) := n \sup_k a_k - \sum_{i=1}^{n} a_i$ (une telle manipulation ne change pas la monodromie à cause de la relation $\prod_{\alpha \in \Sigma} M_\alpha = I$). Il prouve finalement qu'on peut continuer la procédure juqu'à arriver à $\operatorname{def}(E) = 0$, grâce à la majoration $\operatorname{def}(E) \leq \frac{1}{2} n(n-1)(\operatorname{Card}(\Sigma) - 2)$ que l'on déduit facilement de l'hypothèse d'irréductibilité.

6. Autres problèmes

A toute classe d'équations différentielles est associé un problème de monodromie : peut-on réaliser toute représentation de $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$ comme représentation de monodromie d'une équation différentielle de la classe fixée ? Voici quelques exemples.

a) *Systèmes à singularités régulières*

La réponse est positive d'après Plemelj et Birkhoff, ou encore d'après la théorie de Deligne.

b) *Systèmes à pôles simples, en admettant des singularités apparentes*

Cela signifie que l'on autorise pour la matrice $A(z)$ des pôles en dehors de Σ en lesquels la monodromie est triviale (autrement dit, toutes les solutions sont méromorphes). La réponse est positive, même en n'acceptant qu'une seule singularité apparente σ ; cela résulte de nouveau, soit de Plemelj et Birkhoff (prendre $\Sigma' = \Sigma \cup \{\sigma\}$ et $M_\sigma = I$), soit de la théorie de Deligne (tout fibré sur $\mathbf{P}^1 - \{\sigma\}$ admet une base méromorphe qui est holomorphe en dehors de σ).

c) *Equations différentielles de Fuchs*

Considérons une équation différentielle

$$(E) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \,,$$

où les a_i sont des fonctions rationnelles sur $\mathbf{P}^1$. Un point singulier α de (E) est dit *régulier* si toutes les solutions de (E) sont à croissance polynomiale au voisinage de α ; on dit que (E) est une *équation de Fuchs* si toutes ses singularités sont régulières. La théorie de Fuchs donne un critère commode pour décider si l'équation (E) a une singularité régulière en α : il faut et il suffit que a_i ait au plus un pôle

d'ordre i. Un calcul très simple montre alors qu'une équation de Fuchs d'ordre n avec s points singuliers dépend de $\frac{n}{2}(ns + s - 2n)$ paramètres, alors que les représentations de dimension n de $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$ (à isomorphisme près) dépendent de $n^2(s-2)+1$ paramètres; on ne peut donc espérer obtenir n'importe quelle représentation de $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$ comme monodromie d'une telle équation.

d) *Equations différentielles de Fuchs en admettant des singularités apparentes*

C'est le vingt-et-unième des 23 problèmes proposés par Hilbert au Congrès international de Paris en 1900 :

"Prouver qu'il existe toujours une équation différentielle linéaire de la classe de Fuchs avec des singularités et un groupe de monodromie donnés."

Ce problème admet une réponse positive, qui est conséquence de a). D'après a), toute représentation de $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Sigma)$ est la monodromie d'une connexion ∇ à singularités régulières; dans une base méromorphe convenable, on peut écrire

$$\nabla = \frac{d}{dz} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix},$$

où les a_i sont des fonctions rationnelles ("existence d'un vecteur cyclique", *cf.* par exemple [D], lemme 1.3, p. 42). L'équation $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$ a alors la même monodromie que ∇, et ses singularités sont régulières; mais les a_i peuvent avoir des pôles en des points où ∇ est holomorphe, ce qui crée des singularités apparentes. Dans [B4], Bolibruch donne une majoration du nombre de singularités apparentes qu'il est nécessaire d'introduire pour réaliser de cette façon une représentation donnée; il prouve en particulier que si la représentation est irréductible, ce nombre est au plus celui prédit par le calcul des constantes (dimension de l'espace des représentations moins dimension de l'espace des équations).

(3) Bien que Hilbert ne le précise pas, le contexte montre clairement que l'équation peut avoir des singularités apparentes en d'autres points.

BIBLIOGRAPHIE

[B1] A. BOLIBRUCH : *The Riemann-Hilbert problem on the complex projective line* (en russe). Mat. Zametki **46**, 118-120 (1989).

[B2] A. BOLIBRUCH : *The Riemann-Hilbert problem.* Russian Math. Surveys **45**, 1-47 (1990).

[B3] A. BOLIBRUCH : *Fuchsian systems with reducible monodromy and the Riemann-Hilbert problem.* Lecture Notes in Math. **1520**, 139-155; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1992).

[B4] A. BOLIBRUCH : *Construction of a Fuchsian equation from a monodromy representation.* Math. Notes **48**, 1090-1099 (1990).

[B5] A. BOLIBRUCH : *On sufficient conditions for the positive solvability of the Riemann-Hilbert problem* (sic). Math. Notes **51**, 110-117 (1992).

[Bi] G. BIRKHOFF : *The generalized Hilbert problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations.* Proc. Amer. Acad. **49**, 521-568 (1913).

[D] P. DELIGNE : *Equations différentielles à points singuliers réguliers.* Lecture Notes in Math. **163**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1970).

[Dk] W. DEKKERS : *The matrix of a connection having regular singularities on a vector bundle of rank* 2 *on* $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Lecture Notes in Math. **712**, 33-43; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1979).

[ENS] *Mathématique et Physique* (Séminaire de l'ENS 79-82). Progress in Math. **37**, Birkhäuser, Boston (1983).

[G] F. GANTMACHER : *The theory of matrices,* vol. II. Chelsea, New York (1959).

[I] E. INCE : *Ordinary differential equations.* Dover, New York (1956).

[JMS] M. SATO, T. MIWA, M. JIMBO : *Holonomic quantum fields II : the Riemann-Hilbert problem.* Publ. RIMS Univ. Kyoto **15**, 201-278 (1979).

[K] V. KOSTOV : *Fuchsian linear systems on* $\mathbf{CP}^1$ *and Riemann-Hilbert's problem.* Prépublication Université de Nice (1991).

[L-D] I. LAPPO-DANILEVSKIĬ : *Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires.* Chelsea, New York (1953).

[L] A. LEVELT : *Hypergeometric functions.* Indag. Math. **23**, 361-403 (1961).

[P] J. PLEMELJ : *Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe.* Monatshefte für Math. und Physik **19**, 205-246 (1908).

[Rö] H. RÖHRL : *Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen.* Math. Annalen **133**, 1-25 (1957).

[S] L. SCHLESINGER : *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen.* Teubner, Leipzig-Berlin (1908).

Arnaud BEAUVILLE (*)
URA 752 du CNRS
Mathématiques – Bât. 425
Université Paris-Sud
F-91 405 Orsay Cedex

(*) L'auteur a bénéficié du soutien financier du projet européen "Geometry of Algebraic Varieties", Contrat n° SCI-0398-C(A).

Astérisque

LAURENT CLOZEL

Nombre de points des variétés de Shimura sur un corps fini [d'après R. Kottwitz]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 766, p. 121-149

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__121_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
45ème année, 1992-93, n° 766

Mars 1993

NOMBRE DE POINTS DES VARIÉTÉS DE SHIMURA SUR UN CORPS FINI
[d'après R. Kottwitz]

par **Laurent CLOZEL**

0. — Introduction

Il y a quelque vingt ans, Langlands [19] a esquissé un programme visant à exprimer les fonctions zêta de Hasse–Weil des variétés de Shimura en termes de fonctions L automorphes. Langlands développa ses idées dans une correspondance avec Rapoport, et les vérifia pour une famille de variétés associées à des formes de $GL(2)$ sur des corps totalement réels [21, 22]. En collaboration avec Rapoport, il formula ensuite une conjecture précise [25], qui était démontrée modulo une partie des "conjectures standard" de la géométrie algébrique.

L'objet de cet exposé est le travail de Kottwitz [17] qui démontre inconditionnellement, pour les variétés de Shimura qui décrivent des problèmes de modules de variétés abéliennes munies de quelques structures (cf. § 6), une reformulation de la conjecture de Langlands–Rapoport. Vu la définition locale de la fonction zêta de Hasse–Weil, il s'agit de décrire, en termes adaptés à la comparaison avec les facteurs locaux de fonctions L automorphes **via** la formule des traces de Selberg, les nombres de points à valeurs dans des corps finis des variétés de Shimura.

Nous avons cherché à motiver la conjecture en décrivant, dans les cas les plus simples, les idées géométriques et combinatoires qui y amènent. Une variété de Shimura est associée à un groupe réductif $G/\mathbf{Q}$. Dans le § 3, nous

traitons le cas de $G = GL(2)$: les variétés sont alors les courbes modulaires. Nous avons esquissé la démonstration dans ce cas : sous forme accessible, elle ne se trouve nulle part dans la littérature. Nous redonnons donc la démonstration "d'Ihara–Langlands" du théorème d'Eichler–Shimura.

Nous tentons ensuite de décrire les difficultés qui apparaissent pour étendre cette démonstration au cas des variétés de modules de variétés abéliennes associées à $G = GSp(g)$ (§ 4). Cela amène à la formulation de Kottwitz pour la Conjecture (§ 5, (51)). Pour ceci, on doit introduire un peu de machinerie (cohomologie galoisienne dans le groupe dual) : cette théorie a été développée par Langlands et Kottwitz depuis quinze ans, et a fait déjà l'objet d'un exposé partiel à Bourbaki [7]. Nous espérons que le problème étudié ici – et qui a motivé son développement – rend cette théorie plus naturelle.

Dans le § 6, on formule le théorème de Kottwitz. Nous n'avons pas donné la démonstration, mais nous avons indiqué rapidement la signification du théorème dans le cas du groupe symplectique.

Dans le § 7, nous discutons brièvement les questions laissées ouvertes : le problème ultime d'exprimer la fonction zêta d'une variété de Shimura à l'aide de fonctions L automorphes est loin d'être résolu. Nous décrivons les cas où la solution est complète ($\cdots$ aux bonnes places : cf. § 7). Nous n'avons pas décrit l'expression conjecturale précise (aussi due à Kottwitz) de la fonction zêta dans le cas général, car nous avons préféré expliquer le problème géométrique. Nous renvoyons à Kottwitz [16] et à l'exposé de Blasius et Rogawski [1].

Il est difficile de recenser tous les apports partiels à la solution d'un problème vieux de vingt ans. Nous avons déjà mentionné ceux de Langlands et Rapoport ; pour les groupes liés à $GL(2)$, les contributions sont nombreuses. Shimura [34] a traité le cas des courbes associées à des algèbres de quaternions sur $\mathbb{Q}$, et celui de certaines surfaces. J. Milne a reformulé les démonstrations de Langlands (pour ces groupes) à l'aide de la théorie de Honda–Tate [27, 3] ; Zink [37] a obtenu des résultats concernant les variétés de type PEL (§ 6) considérées par Kottwitz ; enfin, pour $GSp(g)$, le résultat–clé (fin du § 7) a été démontré indépendamment par Reimann–Zink [32]. Après la démonstration de Kottwitz, Milne a annoncé [28] une démonstration de la conjecture originale de Langlands–Rapoport, puis donné une démonstration pour $GSp(g)$ [29].

Le rédacteur n'est qualifié ni pour donner un exposé historique, ni pour décrire toutes les formulations du problème. Il s'excuse d'avance des omissions inévitables. Par ailleurs, les questions parallèles concernant les corps de fonctions ne sont pas mentionnées dans cet article : elles sont traitées dans l'exposé récent de Carayol [6][(0)]

NOTATIONS : Si G est un groupe linéaire algébrique sur $\mathbb{Q}$, G_{der} est son groupe dérivé, Z ou Z_G son centre. On désigne par $\widehat{G}$ la composante neutre de son groupe dual – c'est ${}^LG^0$ dans une notation plus ancienne, e.g. Borel [2] – par ${}^LG = \widehat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ son L–groupe (cf. [2]).

$\mathbb{A}$, $\mathbb{A}_E$ désigne l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$, d'un corps de nombres E.

1. — La conjecture de Hasse–Weil

Soit X une variété projective lisse de dimension d définie sur $\mathbb{Q}$. On peut choisir N tel que X s'étende en un schéma projectif et lisse sur $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{N}\right]$. Si p est premier à N, on peut alors considérer la réduction X_p de X modulo p, variété lisse et projective sur $\mathbb{F}_p$.

Sa fonction zêta (locale) est définie par

$$\log Z_p(T) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{N\alpha}{\alpha} T^{\alpha}, \quad N_\alpha = |X_p(\mathbb{F}_{p^\alpha})|. \tag{1}$$

On sait, d'après Dwork, Grothendieck et Deligne, que Z_p est une fraction rationnelle :

$$Z_p(T) = \prod_{i=0}^{2d} Z_{p,i}(T)^{(-1)^{i+1}} \tag{2}$$

où $Z_{p,i}(T) = (1 - \alpha_1 T) \cdots (1 - \alpha_{b_i} T) \in \mathbb{Z}[T]$, $|\alpha_i| = p^{1/2}$, et b_i est le i–ième nombre de Betti de $X(\mathbb{C})$.

(0) Pour la préparation de cet exposé, j'ai utilisé les notes d'un cours de Kottwitz à Orsay en 1986 (§ 3) et les notes de Laumon pour un cours que nous avons donné en commun en 1992. Je les remercie chaleureusement.

On peut alors former le produit eulérien

$$Z^N(s) = \prod_{p \nmid N} Z_p(p^{-s}). \tag{3}$$

Il est convergent, d'après l'estimée de Deligne, pour $Re\ s > d+1$. Hasse et Weil ont conjecturé que cette fonction de $s \in \mathbb{C}$ admettait une extension méromorphe au plan tout entier. On conjecture aussi (avec la définition correcte des facteurs locaux pour les $p|N$ et à la place archimédienne) que la fonction zêta totale $Z(s)$ admet une équation fonctionnelle reliant

$$Z(s) \quad \text{et} \quad Z(d+1-s). \tag{4}$$

En général on ne sait rien dire de cette conjecture. Les seuls cas où elle a pu être démontrée est celui où les représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur les espaces de cohomologie $H^i_{\text{ét}}(X \times \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$ sont abéliennes[1] [35], et les exemples "modulaires" qui vont être décrits[2].

2. — Le cas modulaire : variétés de Shimura

Le premier progrès au–delà du cas abélien est dû à Eichler et Shimura [11, 34], qui ont considéré les courbes modulaires. Soit $N \geq 3$,

$$\Gamma_0(N) = \{\gamma \in SL(2,\mathbb{Z}) : \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \pmod N\}. \tag{5}$$

La courbe complexe $Y_0(N) = \Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{h}$, où $\mathfrak{h}$ est le demi–plan de Poincaré, classifie alors les courbes elliptiques $E/\mathbb{C}$ munies d'un sous–groupe cyclique d'ordre N. Cette courbe a naturellement un modèle affine et lisse $\mathcal{Y}$ sur $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{N}\right]$. On peut la compactifier en un schéma projectif et lisse $\mathcal{X}$ sur $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{N}\right]$.

---

(1) ou "potentiellement abéliennes : cf. Deligne [10].

(2) ajouté lors de la révision finale. — En juin 1993 A. Wiles a annoncé la démonstration de la conjecture de Taniyama–Weil pour les courbes elliptiques à réduction semi–stable. Joint à la théorie d'Eichler–Shimura ceci implique la conjecture de Hasse–Weil pour ces courbes elliptiques.

Soit $S_2(\Gamma_0(N))$ l'espace des formes paraboliques de poids 2, qui s'identifie à l'espace des différentielles holomorphes sur $\mathcal{X}(\mathbb{C})$. On peut en prendre une base $\{f_i\}_{i=1,\ldots,g}$ constituée de forme propres des opérateurs de Hecke $T(p)$ pour $p\nmid N$. Considérons alors la fonction $Z_{(1)}(s) = \prod_{p\nmid N} Z_{p,1}(p^{-s})^{-1}$. Eichler et Shimura démontrèrent essentiellement l'égalité

$$Z_{(1)}^N(s) = \prod_{i=1}^{g} L^N(s, f_i) \tag{6}$$

où $L(s, f_i)$ est une fonction L de Hecke (produit eulérien de degré 2) associée à f_i et $L^N(s, f_i)$ est sa partie hors $\{N, \infty\}$. (En fait Eichler et Shimura démontraient (6) seulement pour presque tous les facteurs en $p\nmid N$; l'identité exacte (6) est due à Igusa, et l'on sait maintenant, d'après Ihara, Deligne, Langlands et Carayol, démontrer l'identité pour tous les facteurs premiers.) Comme les fonctions L de Hecke ont les propriétés usuelles (méromorphie et équation fonctionnelle) ceci démontre la Conjecture de Hasse–Weil.

Nous n'expliquons pas la démonstration d'Eichler et Shimura : voir [34]. Dans le paragraphe suivant, nous esquisserons une autre démonstration.

Les courbes modulaires sont naturellement associées au groupe $GL(2)/\mathbb{Q}$, et la généralisation naturelle de cet exemple consiste à considérer les **variétés de Shimura** associées à des groupes réductifs $G/\mathbb{Q}$.

On les définit d'abord comme variétés complexes, uniformisées par des espaces hermitiens symétriques. Soit G un groupe réductif connexe sur $\mathbb{Q}$, X l'espace symétrique de $G_{ad}(\mathbb{R})$, où G_{ad} est le groupe adjoint, $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ un sous–groupe des congruences. On **suppose** que X est hermitien symétrique, i.e., admet une structure kählérienne invariante par $G(\mathbb{R})$. On sait qu'alors $\Gamma\backslash X$ est une variété algébrique complexe, lisse pour Γ assez petit. La théorie des modèles canoniques fournit des modèles naturels des quotients $\Gamma\backslash X$ sur des corps de nombres.

Rappelons–en la formulation, d'après Deligne [8, 9], cf. aussi Milne [30]. Soit $\mathbb{S} = Res_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_m)$: c'est un tore sur $\mathbb{R}$ tel que $\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times$, $\mathbb{S}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$. Rappelons qu'une représentation de $\mathbb{S}$ sur un espace vectoriel réel V équivaut à la donnée d'une structure de Hodge réelle sur V, $z \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ opérant par $z^{-p}(\bar{z})^{-q}$ sur V_{pq}.

On suppose donné un homomorphisme $h : \mathbb{C} \to G/\mathbb{R}$. En composant, avec la représentation adjointe, on obtient alors $h \circ Ad : \mathbb{S} \to GL(\mathfrak{g})$ où $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, donc une **structure de Hodge** sur $\mathfrak{g}$. On suppose
(7i) cette structure de Hodge est de type $(-1,0)$, $(0,0)$, $(0,-1)$.
(7ii) $Ad \circ h(i)$ est une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ ($i = \sqrt{-1}$).
Il y a d'autres conditions moins essentielles [9, 30].

Soit K_∞ le centralisateur de h dans $G(\mathbb{R})$. On vérifie que K_∞ contient un sous-groupe compact maximal du groupe dérivé de $G(\mathbb{R})$. Soit $X = G(\mathbb{R})/K_\infty$ l'orbite de h par conjugaison; X est alors une réunion finie de composantes connexes qui sont des espaces hermitiens symétriques.

Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert, et soit

$$S_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K_\infty K\,. \tag{8}$$

C'est donc une réunion finie de quotients de l'espace symétrique de $G(\mathbb{R})$.

On définit alors le **corps reflex** $E(G,h)$ de la façon suivante : étendant les scalaires à $\mathbb{C}$, on déduit de h un homomorphisme $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \to G/\mathbb{C}$; soit μ_h sa première composante. A conjugaison près, μ_h est défini sur $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$. Le corps reflex $E = E(G,h) \subset \overline{\mathbb{Q}}$ est alors le corps de définition de la classe de conjugaison de μ_h. On vérifie que c'est un corps de nombres; par construction $E \subset \mathbb{C}$.

La théorie des modèles canoniques affirme alors que S_K admet un modèle (quasi-projectif, lisse pour K assez petit), canoniquement défini, sur E. Nous ne pouvons décrire ici ni le sens précis de cette assertion, ni les étapes de sa démonstration : les résultats sont dus à Shimura, Deligne, Milne, Shih et Borovoi. Cf. [30] pour un exposé détaillé.

Après que certains exemples ont été établis par Shimura, Langlands, dans les années 70, a étudié systématiquement la question suivante : exprimer la fonction zêta $Z_E(S_K)$ à l'aide de fonctions L de formes automorphes associées au groupe G. Il s'agit en général, bien sûr, d'un produit eulérien sur le corps reflex E; d'après l'analogue de (1), la question se ramène à exprimer, pour de bonnes places $\mathfrak{p}$ de E, le cardinal $N_\alpha = |S_K(k_\alpha)|$, où k_α est l'extension de degré α de $k = \mathfrak{o}_E/\mathfrak{p}$, et S_K désigne, par abus de langage, la réduction en $\mathfrak{p}$

d'un modèle convenable de S_K/E[2]. Dans le paragraphe suivant, on décrit la méthode d'Ihara et Langlands, revue par Milne et Kottwitz, pour résoudre cette question dans le cas "classique" de GL_2.

3. — Retour à $GL(2)$

Rappelons que $Y_0(N)$ classifie les courbes elliptiques sur $\mathbf{C}$ réunies d'un sous-groupe cyclique d'ordre N. Ce problème de modules garde un sens (correctement défini) sur une base (i.e., un schéma S) arbitraire. Il est représentable par un schéma $\mathcal{Y}$ affine et lisse au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$. En particulier, si k est un corps de caractéristique $p\nmid N$, $\mathcal{Y}(k)$ classifie les courbes elliptiques sur k munies d'un sous-groupe cyclique d'ordre N[3].

Soit en particulier k un corps fini de cardinal p^α, avec $p\nmid N$. On cherche à calculer $|\mathcal{Y}(k)|$.

Rappelons quelques faits sur les courbes elliptiques sur un corps fini k. Soit E une courbe elliptique sur k. Pour $\ell \neq p$, on peut considérer le dual du module de Tate, $H^1_{\text{ét}}(E, \mathbb{Z}_\ell) = H_\ell E$. Soit $\mathrm{End}(E)$ l'anneau des endomorphismes de E définis sur k, $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(E) = \mathrm{End}(E) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$. On dispose de l'endomorphisme de Frobenius $\pi_E \in \mathrm{End}(E)$. Pour $\ell \neq p$, l'application naturelle $\mathbb{Z}_\ell \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(H_\ell E)^{\pi_E}$ est un isomorphisme d'après Deuring et Tate. On dira que E et **ordinaire** si $\mathrm{End}(E)$ est commutatif; $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}} E$ est alors un corps quadratique imaginaire, que l'on notera M[4].

Le calcul de $|\mathcal{Y}(k)|$ se fait en deux étapes :

(a) On classifie les **classes d'isogénie**.

Supposons E ordinaire. Alors π_E peut être assimilé à un entier quadratique,

---

(2) La question de savoir quels premiers $\mathfrak{p}$ sont des places de bonne réduction pour un modèle convenable de S_K fait partie du problème.

(3) Pour la définition et la solution précises du problème de modules voir Katz-Mazur [13].

(4) E est ordinaire si $E \underset{k}{\times} \overline{k}$ est ordinaire (non supersingulière) ou si $E \underset{k}{\times} \overline{k}$ est supersingulière, mais $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(E) \neq \mathrm{End}_{\overline{k}} E \otimes \mathbb{Q}$.

qui a les propriétés suivantes :

(9)
(i) π_E engendre un corps quadratique imaginaire M
(ii) $\pi_E\,\overline{\pi}_E = p^\alpha$
(iii) $\pi_E \in \mathfrak{o}_{E,\ell}^\times \quad (\ell \neq p)$
(iv) Si p est décomposé en deux places $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ dans M, alors $|\pi_E|_{\mathfrak{p}} = p^\alpha$ et $|\pi_E|_{\mathfrak{p}'} = 1$ pour un choix convenable de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$.

On associe alors à la classe d'isogénie de E la classe de conjugaison elliptique dans $GL(2,\mathbb{Q})$ obtenue en plongeant M, et donc π_E, dans $M_2(\mathbb{Q})$. Les classes d'isogénie ordinaires sont alors en bijection avec les classes de conjugaison γ de $GL(2,\mathbb{Q})$ vérifiant les conditions (déduites de) (9). (Les classes d'isogénie non ordinaires correspondent à des éléments centraux).

(b) On doit ensuite compter les courbes dans une classe d'isogénie, à isomorphisme près.

Soit L l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel k, $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$ l'endomorphisme de Frobenius, $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k, i.e. l'anneau des entiers $\mathfrak{o}_L$ de L. La cohomologie cristalline $H^1_{cris}(E, W(k))$ est un $W(k)$–module libre de rang 2 muni d'un endomorphisme σ–linéaire F tel que $F^\alpha = \pi_E$. Posons

$$H^1(E,\widehat{\mathbb{Z}}) = \prod_{\ell \neq p} H^1_{\text{ét}}(E,\mathbb{Z}_\ell) \times H^1_{cris}(E, W(k)) \tag{10}$$

$$H^1(E,\mathbb{A}_f) = \prod_{\ell}{}' H^1_{\text{ét}}(E,\mathbb{Q}_\ell) \times H^1_{cris}(E, L) \tag{11}$$

où $H^1_{cris}(E,L) = H^1_{cris}(E,W(k)) \otimes L$, et le produit est un produit restreint par rappport aux réseaux (10). Le groupe $M^\times = (\mathrm{End}_{\mathbb{Q}} E)^\times$ opère diagonalement sur $H^1(E,\mathbb{A}_f)$ par transport de structure. Le fait fondamental est alors :

(12) *Il y a bijection entre l'ensemble des courbes E'/k, isogènes à E, modulo isomorphisme et l'ensemble*

$$M^\times \backslash \{(\Lambda^p, \Lambda_p)\}$$

où Λ^p *est un réseau de* $\prod_\ell{}' H^1_{ét}(E, \mathbb{Q}_\ell)$, *stable par* π_E, Λ_p *est un réseau de* $H^1_{cris}(E, L)$ *stable par* F *et* pF^{-1}, *et où l'on quotiente par l'action diagonale de* $M^\times$.

A l'aide d'un choix de bases, ceci se reformule de la façon suivante : Λ^p est un réseau dans $(\mathbb{A}_f^p)^2 = \prod_{\ell \neq p}{}' \mathbb{Q}_\ell^2$; Λ_p est un réseau dans L^2. Notons G le groupe $GL(2)$. On a une action de $G(\mathbb{A}_f^p) \times G(L)$ sur $(\mathbb{A}_f^p)^2 \times L^2$. Le Frobenius π_E opère diagonalement comme $\gamma \in G(\mathbb{Q})$.

L'endomorphisme F transporté à L^2 s'écrit sous la forme $\delta\sigma$, où $\delta \in GL(2, L)$. L'équation $F^\alpha = \pi_E$ devient

$$N(\delta) \underset{\text{def}}{=} \delta\sigma(\delta) \cdots \sigma^{\alpha-1}(\delta) = \gamma\,. \tag{13}$$

On compte donc modulo $M^\times \subset GL(2, \mathbb{Q})$ les réseaux (Λ^p, Λ_p) tels que $\gamma\Lambda^p = \Lambda^p$ et $p\Lambda_p \subset \delta\sigma\Lambda_p \subset \Lambda_p$.

Notons que nous avons pour l'instant compté les courbes E' dans la classe d'isogénie de E, en négligeant la donnée de niveau définissant $Y_0(N)$, i.e., le groupe cyclique d'ordre N. La donnée de niveau se traduit simplement par la donnée d'un sous–réseau d'indice N, à quotient cyclique, de Λ^p.

(c) On réinterprète (b) en termes de théorie des groupes. Soit :

- $dg \times dh$ = la mesure de Haar sur $G(\mathbb{A}_f^p) \times G(L)$ donnant la mesure 1 à $K_0(N)^p \times G(\mathfrak{o}_L)$, où
- $K_0(N)^p = \{g \in G(\hat{\mathbb{Z}}^p) : g \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\, N)\}$.
- φ = la fonction caractéristique de $G(\mathfrak{o}_L) \begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix} G(\mathfrak{o}_L)$.
- f^p = la fonction caractéristique de $K_0(N)^p$.

Enfin notons $\mathcal{Y}(k)(\gamma)$ le sous–ensemble de $\mathcal{Y}(k)$ formées des courbes dans la classe d'isogénie associée à γ. Un lemme facile (mais crucial) permet de réécrire le cardinal de l'ensemble des réseaux décrit en (12) :

$$|\mathcal{Y}(k)(\gamma)| = \int_{M^\times \backslash G(\mathbb{A}_f^p) \times G(L)} f^p(g^{-1}\gamma g)\varphi(h^{-1}\delta\sigma(h))dgdh \tag{14}$$

On réécrit enfin (1) de la façon suivante.

Si $f_\ell \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_\ell))$ et $\gamma \in G(\mathbb{Q}_\ell)$ est semi-simple soit

$$O_\gamma(f_\ell) = \int_{G_\gamma(\mathbb{Q}_\ell)\backslash G(\mathbb{Q}_\ell)} f_\ell(g^{-1}\gamma g)\frac{dg}{dg_\gamma} \tag{15}$$

où les mesures de Haar $dg = dg_\ell$, dg_γ doivent être spécifiées. Si $f_\infty \in C_c^\infty(G(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R}))$, Z étant le centre de G, on définit $O_\gamma(f_\infty)$ de façon analogue. Enfin posons

$$TO_\delta(\varphi) = \int_{G_{\delta,\sigma}(\mathbb{Q}_p)\backslash G(L)} \varphi(g^{-1}\delta^\sigma g)\frac{dg}{dg_{\delta,\sigma}} \tag{16}$$

(intégrale orbitale **tordue** en δ), $G_{\delta,\sigma}$ étant le $\mathbb{Q}_p$-groupe défini par l'équation $g^{-1}\delta\sigma(g) = \delta$ $(g \in G(L))$. Si on groupe tous les termes (13) correspondant aux classes d'isogénie ordinaire, on vérifie alors que l'on a

$$|\mathcal{Y}(k)_{ord}| = \sum_{\substack{\gamma \in G(\mathbb{Q}) \\ \gamma \text{ semi-simple régulier} \\ \text{mod conj.} \\ \gamma_\infty \text{ elliptique}}} v(\gamma)O_\gamma(f^p)TO_\delta(\varphi) \tag{17}$$

où l'on a posé :

$$v(\gamma) = vol(G_\gamma(\mathbb{Q})\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_f))\,;$$

le volume $v(\gamma)$ dépend du choix des mesures sur $G_\gamma(\mathbb{Q}_\ell)$, $G_{\delta,\sigma}(\mathbb{Q}_p)$ définissant les intégrales orbitales.

On n'est maintenant pas loin du côté géométrique de la formule des traces de Selberg pour $GL(2)$.

La dernière étape importante[5] consiste à remplacer l'intégrale orbitale tordue $TO_\delta(\varphi)$ par une intégrale orbitale $O_\gamma(f_\alpha)$, où $f_\alpha \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_p)//G(\mathbb{Z}_p))$. Rappelons (cf. Borel [2]) que l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_p = C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_p)//G(\mathbb{Z}_p))$ est naturellement isomorphe à une algèbre de séries de Laurent en deux variables :

$$\mathcal{H}_p \cong \mathbb{C}[Z, T, Z^{-1}, T^{-1}]^{\mathfrak{S}_2}$$

[5] La démonstration donnée ici est celle de Kottwitz, esquissée dans [14] en général et exposée par lui à Orsay en 1986 pour $GL(2)$.

$\mathfrak{S}_2$ permutant (Z,T). La fonction f_α s'envoie par l'isomorphisme sur $\widehat{f}_\alpha = (Z\ p^{1/2})^\alpha + (T\ p^{1/2})^\alpha$. Le **Lemme fondamental** (Langlands [24], Saito) affirme alors que pour $\gamma \in G(\mathbb{Q}_p)$ semi-simple régulier,

$$(18) \qquad O_\gamma(f_\alpha) = \begin{cases} TO_\delta(\varphi) & \text{s'il existe } \delta \in G(L) \text{ tel que } \gamma = N\delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

la relation $\gamma = N\delta$ étant définie en (13).

Soit enfin dg_∞ une mesure de Haar sur $G(\mathbb{R})$, f_∞ une fonction C^∞ à support compact sur $G(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R})$ telle que – pour un choix convenable de mesures –

$$(19) \qquad O_\gamma(f_\infty) = \begin{cases} 0 & \gamma \text{ semi-simple régulier non-elliptique} \\ 1 & \gamma \text{ régulier elliptique} \end{cases}$$

On peut enfin réécrire (17) sous la forme

$$(20) \qquad |\mathcal{Y}(k)_{ord}| = \sum_{\substack{\gamma \in G(\mathbb{Q}) \\ \gamma \text{ ell. reg.}}} v(\gamma) O_\gamma(f_\infty f^p f_\alpha)\,.$$

On notera que les conditions (9) sur γ résultent alors de la non-nullité de l'intégrale orbitale O_γ. Pour la condition en p, (9iv), il faut utiliser le calcul, que l'on n'a pas fait, des intégrales orbitales de f_α en les éléments semi-simples déployés de $GL(2,\mathbb{Q}_p)$.

On voit que (20) est la partie elliptique régulière du terme géométrique de la formule des traces de Selberg pour $GL(2)$ [19]. En rajoutant les points non-ordinaires, puis les points à l'infini de $\mathcal{X}(k)$, et en utilisant l'expression (1) de la fonction zêta locale, on démontre alors à l'aide de la formule des traces :

$$(21) \qquad Z_p(\mathcal{X}) = \prod_\pi L_p\left(\pi, s + \frac{1}{2}\right)^{\varepsilon(\pi_\infty) m(\pi_f)}$$

où

- $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ parcourt les représentations irréductibles de $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{A}_f)$ décomposant la partie discrète de $L^2(Z(\mathbb{R})G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$

- $\varepsilon(\pi_\infty) = tr\ \pi_\infty(f_\infty)$ est égal à

$$\begin{cases} 1 & \text{si } \pi_\infty \text{ est un caractère abélien trivial sur } Z(\mathbb{R}) \\ -1 & \text{si } \pi_\infty \text{ est la représentation de la série discrète de } G(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R}) \\ & \text{associée aux formes de poids 2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $m(\pi_f) = \dim \pi_f^{K_0(N)}$.
- $L_p(\pi, s)$ est le facteur en p de la fonction L "de Hecke" de π.

La formule (21) est équivalente à l'égalité (6) d'Eichler–Shimura : $\varepsilon(\pi_\infty) = -1$ si π est cuspidale, et donc associée à des formes modulaires paraboliques; si $\varepsilon(\pi_\infty) = 1$, π est triviale, et $L_p(\pi, s + \frac{1}{2}) = \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-s+1})}$ est le dénominateur de Z_p.

Cette démonstration est certes plus compliquée que celle d'Eichler et Shimura mais son mérite est d'être plus générale. Langlands [20, 21] l'a étendue à des groupes de la forme $G = Res_{F/\mathbb{Q}} H$, où $H = B^\times$, B étant une algèbre de quaternions sur F (y compris $M_2(F)$). Les démonstrations de Langlands ont été complétées par plusieurs auteurs. Si $B = M_2(F)$, la compactification naturelle de la variété quotient est en général singulière; si B est une algèbre à division, l'arithmétique du problème de modules est compliquée. Pour la solution de ces problèmes, on renvoie à [21, 22, 3, 27, 33].

4. — Le groupe symplectique : motivation

Nous essayons maintenant d'étendre les arguments du § 3 à des variétés plus générales. Considérons d'abord le cas où G est le groupe symplectique (en fait le groupe des similitudes symplectiques) et où la variété S_K est l'espace de modules de variétés abéliennes principalement polarisées munies d'une structure de niveau N. Plus précisément, soit

- V = l'espace $\mathbb{Z}^{2g}$ muni de la forme symplectique de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $G = GSp(V)$ le $\mathbb{Z}$–groupe tel que, pour toute $\mathbb{Z}$–algèbre commutative R,

(22) $\quad G(R) = \{g \in GL(V \otimes R) :< gv, gw >\equiv c(g) < v, w > \text{ où } c \in R^\times\}.$

On note $c : G \to \mathbb{G}_m$ l'homomorphisme de $\mathbb{Z}$–groupes défini par l'équation (22).

- $h : \mathbb{S} \to G/\mathbb{R}$ donné sur $\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times$ par $z = x + iy \longmapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$
- $N =$ un entier ≥ 3
- $K = K(N) = \{g \in G(\hat{\mathbb{Z}}) : g \equiv 1\ [N]\}$.

On considère la variété $S_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K_\infty K$, où $K_\infty = \mathbb{R}^\times U(g) \subset GSp(g)$ centralise $h(i)$. Elle a un modèle (quasi–projectif, lisse) sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$. Pour S un schéma sur lequel N est inversible, $S_K(S)$ classifie modulo isomorphisme les triplets (A, λ, η) où

(23)
$$\begin{aligned} &A = \text{variété abélienne de dimension } g \text{ sur } S \\ &\lambda = \text{polarisation principale de } A \\ &\eta = \text{structure de niveau } N \text{ sur } (A, \lambda) \end{aligned}$$

Si $S = \operatorname{Spec} k$ est le spectre d'un corps, une structure de niveau N sur (A, λ) est un isomorphisme

(24) $$\eta : V \otimes \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \longrightarrow A[N](k)$$

tel que

(25) $$< \eta v,\ \lambda(\eta w) >= \zeta < v, w >$$

pour une racine de l'unité $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_N(k)$ indépendante de (v, w). Dans (25), l'accouplement de gauche est déduit de l'accouplement naturel à valeurs dans $\boldsymbol{\mu}_N$ sur $A[N] \times \hat{A}[N]$ et de la polarisation $\lambda : A \to \hat{A}$.

Cela étant, cherchons à imiter la méthode du § 3 pour compter les points de $S_K(k)$, k étant l'extension de degré α de $\mathbb{F}_p$ pour $p \nmid N$. Nous chercherons d'abord à paramétrer les classes d'isogénie. Pour ceci, on utilise l'extension,

due à Honda et Tate, du théorème de Deuring–Tate pour les courbes elliptiques cité dans le §3(9). Soit L l'extension non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ d'anneau d'entiers $\mathfrak{o}_L$, de corps résiduel k.

Si A est une variété abélienne de dimension g sur k, on lui associe un élément $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q}) \subset GL(2g, \mathbb{Q})$ caractérisé par les conditions suivantes :

(26) (a) $c(\gamma_0) = p^\alpha$

(b) *Le polynôme caractéristique de γ_0 est égal à celui du Frobenius* Frob_{p^α} *opérant sur* $H^1(A \times \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)$ *pour tout* $\ell \neq p$.

A la différence du cas $g = 1$, ces conditions ne définissent γ_0 qu'à conjugaison près dans $G(\overline{\mathbb{Q}})$. Rappelons qu'une classe de conjugaison sous $G(\overline{\mathbb{Q}})$ d'éléments de $G(\mathbb{Q})$ est appelée une **classe de conjugaison stable** (cf. [7]). La théorie de Honda–Tate caractérise les classes de conjugaison stable ainsi obtenues :

(27) THÉORÈME (Honda–Tate [12, 36]). — *Il y a bijection entre l'ensemble des classes d'isogénie de variétés abéliennes de dimension g sur k et l'ensemble des classes de conjugaison stable d'éléments semi-simples $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q})$ telles que :*

(i) $c(\gamma_0) = p^\alpha$.

(ii) *Toute valeur propre complexe de γ_0 est de valeur absolue $\sqrt{p^\alpha}$.*

(iii) *Toute valeur propre de γ_0 est une unité ℓ-adique pour $\ell \neq p$.*

(iv) *L'image de γ_0 dans $GL(V \otimes L)$ est la norme d'un élément $\delta \in GL(V \otimes L)$ tel qu'il existe un réseau $\Lambda \subset V \otimes L$ avec $\delta\sigma\Lambda \subset \Lambda$.*

Dans la condition (iv) la norme est définie comme en (13) :

$$N\delta = \delta\sigma(\delta)\cdots\sigma^{\alpha-1}(\delta) \in GL(V \otimes L)\,. \tag{28}$$

On voit que l'étape (a) du problème, la classification des classes d'isogénie, diffère déjà du cas GL_2 : au lieu d'obtenir des classes de conjugaison, on n'obtient que des classes de conjugaison stable.

Pour l'étape (b), il faut maintenant introduire la polarisation. Rappelons que la catégorie des variétés abéliennes à isogénie près (on dira aussi : à $\mathbb{Q}$–isogénie près) sur k est la catégorie dont les objets sont les variétés abéliennes sur k et dont les morphismes sont définis par $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(A,B) = \mathrm{Hom}(A,B) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$.

Si $\widehat{A}$ est la variété duale, on a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\widehat{B},\widehat{A})$. Si $\lambda : A \to \widehat{A}$ est une polarisation et $f \in \mathrm{Hom}_0(A,B)$, soit $f^*\lambda = \widehat{f} \circ \lambda \circ f$. Une $\mathbb{Q}$–isogénie entre (A,λ) et (A',λ') est alors définie comme une $\mathbb{Q}$–isogénie $f : A \to A'$ telle que $f^*\lambda = c\lambda'$ pour un élément $c \in \mathbb{Q}^\times$.

Si R est une $\mathbb{Q}$–algèbre commutative arbitraire, on peut définir de même $\mathrm{Hom}_R(A,B) = \mathrm{Hom}(A,B) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R$. Procédant de façon analogue, on obtient les notions de **variété abélienne à R–isogénie près** et de **R–isogénie entre variété polarisées.**

L'analogue de l'étape (b) du § 3 compte alors les triplets (A',λ',η') tels que (A',λ') est $\mathbb{Q}$–isogène à (A,λ).

Soit $I = \mathrm{End}(A)^\times$: c'est un $\mathbb{Q}$–groupe défini par $I(R) = \mathrm{End}_R(A)^\times$ pour R une $\mathbb{Q}$–algèbre ; il est affine et connexe. Par ailleurs, à partir de A et d'un choix de bases de la cohomologie ℓ–adique et cristalline, on obtient comme dans le § 3 un élément (γ,δ) avec

$$\gamma \in G(\mathbb{A}_f^p),\ \gamma = (\gamma_\ell)_{\ell \neq p} \tag{29}$$

$$\delta \in G(L) \tag{30}$$

Soit $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q})$ l'élément associé à A par la théorie de Honda–Tate. Rappelons que γ_0 n'est défini que modulo $G(\overline{\mathbb{Q}})$. On a alors les relations suivantes :

(31) Si $\ell \neq p$, γ_ℓ est conjugué à γ_0 dans $G(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

(32) $N\delta \in G(L)$ est conjugué à γ_0 dans $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.

Soit enfin

f^p = la fonction caractéristique de K_N^p dans $G(\mathbb{A}_f^p)$

φ = la fonction caractéristique de $G(\mathfrak{o}_L)aG(\mathfrak{o}_L)$ dans $G(L)$, où

$$a = \begin{pmatrix} p & & & & & & \\ & p & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & p & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Le résultat est alors le suivant :

(33) *Le nombre d'éléments* $(A', \lambda', \eta') \in S_K(k)$ *dans la classe de* $\mathbb{Q}$*-isogénie de* (A, λ) *est égal à*

$$\int_{I(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f^p)\times G(L)} f^p(g^{-1}\gamma g)\varphi(h^{-1}\delta\sigma(h))dgdh\,.$$

(comme dans le §3, le groupe $I(\mathbb{Q})$ se plonge naturellement dans $G(\mathbb{A}_f^p) \times G(L)$; les mesures dg et dh sont définies comme supra).

A la différence de $GL(2)$ – cas où les polarisation peuvent être laissées implicites – on ne peut conclure à l'aide de (27) et (33). Il nous reste à décrire l'ensemble des classes de $\mathbb{Q}$–isogénie de variétés **polarisées** (A, λ) appartenant à une classe d'isogénie de variétés, caractérisée par son nombre de Weil. C'est l'étape délicate de la démonstration, qui a été complétée par Kottwitz et Riemann–Zink, à la suite du travail de Langlands et Rapoport. La démonstration consiste à introduire un invariant cohomologique $\alpha(\gamma_0, \gamma, \delta)$.

5. — L'invariant de Kottwitz, et la conjecture

Nous allons maintenant décrire l'invariant $\alpha(\gamma_0, \gamma, \delta)$ dans le cas général. Revenons aux données du §2 :

G = groupe réductif connexe sur $\mathbb{Q}$
$h : \mathbb{S} \to G\ /\mathbb{R}$
$K \subset G(\mathbb{A}_f)$
E = le corps reflex
S_K = la variété de Shimura associée, définie sur E
p = nombre premier tel que $G \underset{\mathbb{Q}}{\times} \mathbb{Q}_p$ soit non ramifié.

$G \times \mathbb{Q}_p$ provient alors par changement de base d'un schéma en groupes réductifs et plat sur $\mathbb{Z}_p$; soit $K_p = G(\mathbb{Z}_p)$. On suppose aussi que $K = K_p \times K^p$, $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$. Le corps reflex $E/\mathbb{Q}$ est alors non ramifié en p [14]. Soit $\mathfrak{p}|p$ une place de E ; il paraît naturel de supposer que $S_K \underset{E}{\times} E_\mathfrak{p}$ a un modèle projectif et lisse sur $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$[6]. Si $k = k_\alpha$ est l'extension de degré α de $k_1 = \mathfrak{o}_E/\mathfrak{p}$, on cherche une expression pour le nombre de points de $S_K(k)$. Soit $L = \text{Fract } W(k)$, $\mathfrak{o}_L = W(k)$. Nous noterons $\mathbb{Q}_p^c = \text{Fract } W(\overline{k})$ le corps valué **complet** dont le corps résiduel $\overline{k}$ est la clôture algébrique de k.

Nous ferons sur G les hypothèses simplificatrices suivantes :

(34) (i) *G_{der} est simplement connexe.*

(ii) *Soit $D = G/G_{der}$. Alors D est un tore induit : $D = \prod_i Res_{M_i/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m)$, les M_i étant des corps de nombres.*

(iii) *Les tores déployés maximaux du centre Z_G sur $\mathbb{Q}$ et sur $\mathbb{R}$ coïncident.*

Nous choisissons dorénavant une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ contenant E (par exemple la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$), une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_v$ de $\mathbb{Q}_v$ pour toute place v (pour $v = p$ nous supposons $E_\mathfrak{p} \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$; pour $v = \infty$ $\overline{\mathbb{Q}}_\infty = \mathbb{C}$) et pour tout v un plongement $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_v$ (étendant $E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_v$ si $v = p, \infty$). Pour tout v, $\Gamma_v = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_v/\mathbb{Q}_v)$ est alors un sous-groupe de $\Gamma = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Nous aurons besoin de deux résultats de cohomologie galoisienne. Le premier (voir [7]) est une reformulation de la théorie de Poitou–Tate. Soit F un corps local de caractéristique 0, T un tore sur F, $\widehat{T}$ son tore dual : $\widehat{T}$ est un tore complexe et $X_*\widehat{T} = X^*T$. Alors $\Gamma_F = Gal(\overline{F}/F)$ opère sur $\widehat{T}$, et l'on a les isomorphismes

$$H^1(F,T) = H^1(F, X^*T)^D = \pi_0(\widehat{T}^{\Gamma_F})^D \tag{35}$$

où D désigne la dualité des groupes abéliens finis et π_0 le groupe des composantes connexes.

(6) C'est vrai dans la cas décrit en 4.1 ; en général le lecteur sceptique se contentera, comme au bon vieux temps, de considérer presque tous les $\mathfrak{p}$.

Par ailleurs, notons pour un instant G un groupe réductif connexe arbitraire sur $\mathbb{Q}_p$, de groupe dérivé G_{der} simplement connexe. Soit $\widehat{G}$ son groupe dual, $D = G/G_{der}$ son cocentre : le centre $Z(\widehat{G})$ s'identifie alors à $\widehat{D}$. Soit $B(G/\mathbb{Q}_p)$ l'ensemble des classes de σ–conjugaison d'éléments de $G(\mathbb{Q}_p^c)$. Le groupe Γ_p opère naturellement sur $Z(\widehat{G})$ et l'on a :

(36) *Il existe une application naturelle*

$$v : B(G/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow X^*(Z(\widehat{G})^{\Gamma_p}).$$

C'est un isomorphisme si G est un tore.

On renvoie à Kottwitz [15], [16, §6] pour la construction de l'application (36) et la démonstration. Explicitons le cas où $G = GSp(g)$. Dans ce cas $D = \mathbb{G}_m$, l'application $G \to \mathbb{G}_m$ étant l'homomorphisme c. On a donc $X^*(Z(\widehat{G})) = \mathbb{Z}$ et l'application v se déduit de

$$\begin{aligned} G(\mathbb{Q}_p^c) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ g &\longmapsto val\ c(g). \end{aligned} \tag{37}$$

Nous considérons des triplets $(\gamma_0, \gamma, \delta) \in G(\mathbb{Q}) \times G(\mathbb{A}_f^p) \times G(L)$ soumis aux restrictions suivantes :

(38 i) $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q})$ *est semi–simple et $\mathbb{R}$–elliptique.*

Un élément de $G(\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}$–elliptique s'il est contenu dans un sous–groupe de Cartan compact modulo $Z_G(\mathbb{R})$: cf. la condition (27 (ii))

(38 ii) $\gamma = (\gamma_\ell)_{\ell \neq p}$, $\gamma_\ell \in G(\mathbb{Q}_\ell)$ *stablement conjugué à* $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q}_\ell)$ *pour tout* ℓ.

(38 iii) $\delta \in G(L)$ *est tel que* $N\delta \in G(L)$ *est stablement conjugué à* $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q}_p)$.

La norme est le norme absolue :

$$N\delta = \delta\sigma(\delta)\cdots\sigma^{\beta-1}(\delta), \quad \beta = \deg(L/\mathbb{Q}_p), \quad \sigma = \mathrm{Frob}_{L/\mathbb{Q}_p}. \tag{39}$$

On impose enfin à δ la condition supplémentaire suivante. Soit $\mu_h : \mathbb{G}_m \to G$ défini dans le §2. Soit $T \subset G$ un tore maximal contenant l'image de μ_h. Par dualité μ_h définit un caractère μ_* de $\widehat{T}$. On peut plonger $\widehat{T}$ dans $\widehat{G}$ et l'on définit μ_1 comme la restriction de μ_* à $Z(\widehat{G})^{\Gamma_p}$; on vérifie que μ_1 ne dépend alors d'aucun choix. On suppose alors

(38 iv) *L'image de δ par l'application $v : B(G/\mathbb{Q}_p) \to X^*(Z(\widehat{G})^{\Gamma_p})$ est égale à $-\mu_1$.*

Dans le cas de $GSp(g)$, le lecteur remarquera que (38 iv) résulte des conditions (32)=(38 iii) et (27 i), compte tenu de (37).

Il nous reste à définir le groupe où prendra ses valeurs l'invariant α. Nous ne le ferons que pour γ_0 **régulier** – le cas "ordinaire" du §2.

Supposons donc γ_0 régulier. Soit $I = G_{\gamma_0}$ le centralisateur de γ_0 ; c'est un tore défini sur $\mathbb{Q}$. Si on change γ_0 à l'intérieur de sa classe de conjugaison stable, on remplace I par un groupe I' canoniquement isomorphe à I sur $\mathbb{Q}$: I est donc défini à isomorphisme unique près. Soit $D = G/G_{der}$.

(39) DÉFINITION (Langlands, Kottwitz). —

$$K(I/\mathbb{Q}) = \widehat{I}^{\Gamma}\widehat{D}/\widehat{D} \subset (\widehat{I}/\widehat{D})^{\Gamma}.$$

Le groupe $K(I/\mathbb{Q})$ est **fini** : en effet γ_0 est $\mathbb{R}$–elliptique donc a fortiori $\mathbb{Q}$–elliptique, ce qui veut dire que le tore I/Z_G est anisotrope. On en déduit que le tore $\mathrm{Ker}(I \to D)$ l'est aussi. Son tore dual est $\widehat{I}/\widehat{D}$, et $(\widehat{I}/\widehat{D})^{\Gamma}$ est donc fini.

Nous allons maintenant définir $\alpha(\gamma_0, \gamma, \delta)$ comme somme d'invariants locaux.

(a) **En $\ell \neq p, \infty$.** — Rappelons le fait fondamental de la conjugaison stable (Langlands). Soit $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q}_\ell)$ semi-simple régulier. Alors

(40) LEMME (Langlands). — *Il y a bijection entre l'ensemble des éléments de $G(\mathbb{Q}_\ell)$ stablement conjugués à γ_0, modulo $G(\mathbb{Q}_\ell)$-conjugaison, et le groupe*

$$\mathrm{Ker}(H^1(\mathbb{Q}_\ell, I) \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}_\ell, G))$$

où $I = G_{\gamma_0}$.

D'après notre hypothèse (34), on a $H^1(\mathbb{Q}_\ell, G) = \{1\}$. Le couple (γ_ℓ, γ_0) détermine donc un élément α_ℓ de $H^1(\mathbb{Q}_\ell, I) = \pi_0(\hat{I}^{\Gamma_\ell})^D$ (cf. (35)). De plus, toujours d'après (34), $\hat{D}^{\Gamma_\ell}$ est connexe : ceci résulte de (35) et du fait que la cohomologie d'un tore induit est triviale. Par conséquent α_ℓ est trivial sur $\hat{D}^{\Gamma_\ell}$, donc

$$\alpha_\ell \in X^*(I^{\Gamma_\ell}\hat{D}/\hat{D}) \subset X^*(I^{\Gamma}\hat{D}/\hat{D}). \tag{41}$$

(b) **En** p. — Rappelons que $N\delta$ est conjugué à γ_0 dans $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. D'après une théorème de Steinberg il l'est alors dans $G(\mathbb{Q}_p^c)$. Soit $N\delta = c\gamma_0 c^{-1}$, $c \in G(\mathbb{Q}_p^c)$. On vérifie alors que $b = c\delta\sigma(c^{-1}) \in I(\mathbb{Q}_p^c)$. D'après (36) appliqué à I, b détermine un élément $\alpha_p \in X^*(\hat{I}^{\Gamma_p})$. Sa restriction à $\hat{D}^{\Gamma_p}$ est égale à $-\mu_1$ à cause de l'hypothèse (38 iv). On a donc

$$\alpha_p \in X^*(\hat{I}^{\Gamma_p}), \quad \alpha_p|_{\hat{D}^{\Gamma_p}} = -\mu_1 = -\mu^*|_{\hat{D}^{\Gamma_p}} \tag{42}$$

(c) **En la place** ∞. — Puisque γ_0 est $\mathbb{R}$–elliptique, on peut supposer à conjugaison près que $h(\mathbb{S}) \subset I$. Alors μ_h est un sous–groupe à un paramètre de I, que l'on identifie à un caractère de $\hat{I}$. Soit α_∞ sa restriction à $\hat{I}^{\Gamma_\infty}$. On vérifie encore que α_∞ ne dépend d'aucun choix. On a par construction :

$$\alpha_\infty \in X^*(\hat{I}^{\Gamma_\infty}), \quad \alpha_\infty|_{\hat{D}^{\Gamma_\infty}} = \mu^*|_{\hat{D}^{\Gamma_\infty}}. \tag{43}$$

On peut alors étendre les caractères α_v à $\hat{I}^{\Gamma_v}\hat{D}$ par

$$\alpha_v|_{\hat{D}} = \begin{cases} 1 & v \neq p, \infty \\ -\mu^* & v = p \\ \mu^* & v = \infty. \end{cases} \tag{44}$$

Par ailleurs, le théorème de Čebotarev implique que

$$K(I/\mathbb{Q}) = (\bigcap_v \hat{I}^{\Gamma_v}\hat{D})/\hat{D} \tag{45}$$

D'après (44), on peut alors poser :

(46) DÉFINITION. — *L'invariant de Kottwitz* $\alpha(\gamma_0, \gamma, \delta)$ *est le caractère* $\alpha_\infty + \alpha_p + \sum_\ell \alpha_\ell$ *de* $\mathcal{K}(I/\mathbb{Q})$.

Ainsi construit, l'invariant semble dépendre de quelques choix : le choix de γ_0 dans sa classe de conjugaison stable, et celui des plongements $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_v$. On vérifie qu'il n'en est rien [16, § 2].

Nous pouvons maintenant exprimer la conjecture de Kottwitz, reformulant celles de Langlands et Langlands–Rapoport. Nous admettrons qu'une construction analogue du groupe $\mathcal{K}$ et de l'invariant α est possible même pour des données $(\gamma_0, \gamma, \delta)$ non régulières (cf. [16]). Nous définissons une fonction $\varphi = \varphi_\alpha$ sur $G(L)$ de la façon suivante : soit $S \subset G$ un tore déployé maximal défini sur L ; puisque G est non ramifié on peut supposer S défini sur $\mathfrak{o}_L$. On vérifie qu'à conjugaison près on peut supposer μ_h à image dans S. Posons

$$\begin{aligned} &a = \mu_h(\varpi_L^{-1}) \\ &\varphi_\alpha = \text{fonction caractéristique de } G(\mathfrak{o}_L)\, a\, G(\mathfrak{o}_L)\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Par ailleurs, soit f^p la fonction caractéristique de K^p. Fixons des mesures de Haar dg et dh sur $G(\mathbb{A}_f^p)$, $G(L)$ de façon à donner la mesure 1 à K^p, $G(\mathfrak{o}_L)$. Si $(\gamma, \delta) \in G(\mathbb{A}_f^p) \times G(L)$, les intégrales orbitales $O_\gamma(f^p)$ et $TO_\delta(\varphi_\alpha)$ définies par (15), (16) dépendent du choix d'une mesure de Haar sur $G_\gamma(\mathbb{A}_f^p)$ et $G_{\delta,\sigma}(\mathbb{Q}_p)$. Par construction, on a pour un triplet $(\gamma_0, \gamma, \delta)$ satisfaisant nos conditions :

$$I(\mathbb{A}_f) \cong G_\gamma(\mathbb{A}_f^p) \times G_{\delta,\sigma}(\mathbb{Q}_p)\,. \tag{48}$$

L'hypothèse (34 iii) assure de plus que $I(\mathbb{Q})$ est discret à quotient compact dans $I(\mathbb{A}_f)$.

Enfin, si X est un $\mathbb{Q}$–groupe, on considère le groupe de Šafarevič :

$$\ker^1(\mathbb{Q}, X) = \ker\Big(H^1(\mathbb{Q}, X) \longrightarrow \bigoplus_v H^1(\mathbb{Q}_v, X)\Big) \tag{49}$$

Pour un triplet $(\gamma_0, \gamma, \delta)$ et un choix de mesures sur $G_\gamma(\mathbb{A}_f^p)$ et $G_{\delta,\sigma}(\mathbb{Q}_p)$, posons

$$c(\gamma_0, \gamma, \delta) = vol(I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A}_f)) \times |\ker[\ker^1(\mathbb{Q}, I) \to \ker^1(\mathbb{Q}, G)]| \tag{50}$$

On a alors :

(51) CONJECTURE (Kottwitz). —

$$|S_K(k_\alpha)| = \sum_{\substack{\gamma_0,\gamma,\delta \\ \alpha(\gamma_0,\gamma,\delta)=0}} c(\gamma_0,\gamma,\delta) O_\gamma(f^p) TO_\delta(\varphi_\alpha)\,.$$

La somme porte sur les triplets (γ_0,γ,δ) vérifiant (38); γ_0 est pris à $G(\overline{\mathbb{Q}})$–conjugaison près, γ, δ à conjugaison (resp. σ–conjugaison) près. Les coefficients $c(\gamma_0,\gamma,\delta)$ sont définis par (50) et les mesures dénominateurs des intégrales orbitales.

6. — Le théorème

Le théorème annoncé il y a cinq ans par Kottwitz (dans le cas de $Gsp(g)$, cf. [16]) et dont la démonstration a maintenant paru [17] affirme que la description conjecturale du § 5 pour le nombre de points est correcte pour certaines variétés de Shimura qui sont solutions de problèmes de modules de variétés abéliennes de type *"PEL"*, i.e., Polarisées, munies de quelques Endomorphismes et de structures de niveau (Level structures)[7].

Plus précisément, soit

B = une algèbre simple sur $\mathbb{Q}$, de centre F.

$*$ = une involution positive de B.

[Une involution est un anti–automorphisme d'ordre 2 : elle est positive si $tr_{B/\mathbb{Q}}(xx^*) > 0$ pour tout $x \in B$].

V = un B–module à gauche muni d'une forme alternée $<,>$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$ telle que $< bv, w >=< v, b^*w >$ pour $b \in B$.

Soit C l'algèbre $\mathrm{End}_B(V)$: c'est une $\mathbb{Q}$–algèbre semisimple munie d'une involution $*$ telle que $< cv, w >=< v, c^*w >$. Soit

G = le groupe de similitudes de $(V, B, < >)$. C'est donc un $\mathbb{Q}$–groupe et $G(\mathbb{Q}) = \{g \in C^\times = GL_B(V) :< gv, gw >\equiv c(g) < v, w > \text{ avec } c(g) \in \mathbb{Q}^\times\}$.

p = un nombre premier satisfaisant les conditions suivantes : $B \otimes \mathbb{Q}_p$ est un produit d'algèbre de matrices sur des extensions non ramifiées de $\mathbb{Q}_p$; il

(7) Laumon propose la traduction française *"de type PEN"*

existe un ordre maximal $\mathfrak{o}_{B,p}$ de $B_{\mathbb{Q}_p}$ est un réseau $\Lambda_p \subset V_{\mathbb{Q}_p}$ préservé par $\mathfrak{o}_{B,p}$ et autodual. Soit alors

$K_p = \{g \in G(\mathbb{Q}_p) : g\ \Lambda_p = \Lambda_p\}$
$K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$ un sous-groupe compact ouvert.
$h_0 : \mathbb{C} \to C \otimes \mathbb{R}$ un $*$-homomorphisme (l'involution $*$ sur $\mathbb{C}$ étant $z \longmapsto \overline{z}$).
$h = h_0^{-1} : \mathbb{S} \to G\ /\mathbb{R}$.

Nous avons maintenant toutes les données nécessaires pour définir $S_K = S_K(G,h)$. On vérifie que le corps reflex E est non-ramifié en p; soit $\mathfrak{p}|p$ une place de E. Kottwitz vérifie aussi que sous ces hypothèses S_K a bonne réduction en $\mathfrak{p}$ (= a un modèle lisse, que l'on notera aussi S_K, sur $\mathfrak{o}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$.).

L'algèbre C sur F est une algèbre semi-simple à involution, et $C \otimes \overline{F}$ peut être de trois types :

(A) $M_n \times M_n^{opp}$, $(x,y)^* = (y,x)$
(C) M_{2n}, l'involution étant définie par une forme symplectique non dégénérée
(D) M_{2n}, l'involution étant définie par une forme orthogonale non dégénérée.

Le résultat de Kottwitz n'est complet que dans les cas (A,C). Au centre près, G est alors un groupe unitaire (cas A) ou symplectique (cas C) sur un corps totalement réel.

(52) THÉORÈME (Kottwitz). — *Soit G le groupe de similitudes de $(V, B, <\ >)$, $K = K^p \times K_p$ comme ci-dessus. Alors, k_α étant l'extension de degré α de $k = \mathfrak{o}_E/\mathfrak{p}$,*

$$|S_k(k_\alpha)| = \sum_{\substack{\gamma_0,\gamma,\delta\ :\\ \alpha(\gamma_0,\gamma,\delta)=0}} c(\gamma_0,\gamma,\delta) O_\gamma(f^p) TO_\delta(\varphi_\alpha)\,.$$

Il n'est pas question d'esquisser ici la démonstration, difficile, et pour laquelle on renvoie à Kottwitz [17]. L'étape la plus sérieuse est celle que nous avons mentionnée à la fin du § 4, et qui est résolue à l'aide de la théorie des représentations cristallines de Fontaine–Messing. Pour le groupe $GSp(g)$, elle se ramène à la question suivante. On a vu qu'une classe de $\mathbb{Q}$–isogénie (A,λ) de variétés **polarisées** déterminait un triplet (γ_0,γ,δ). On vérifie tout d'abord

que toute classe de $\mathbb{Q}$–isogénie (A', λ') $\overline{\mathbb{Q}}$–isogène à (A_0, λ_0) détermine un élément (γ', δ'), unique à conjugaison près, compatible à γ_0 au sens de (38); la classe de $\overline{\mathbb{Q}}$–isogénie de (A, λ) est identique à la classe de $\mathbb{Q}$–isogénie de A, i.e., est paramétrée par $\gamma_0 \pmod{G(\overline{\mathbb{Q}})}$.

Cependant, il n'est pas vrai que tous les éléments (γ, δ) satisfaisant les conditions (38) proviennent d'une classe de $\mathbb{Q}$–isogénie (A', λ'). Le théorème principal dit que c'est vrai si et seulement si $\alpha(\gamma_0, \gamma, \delta) = 0$. C'est essentiellement le résultat de Reimann-Zink [32]; cf. aussi Kottwitz [17, § 18].

7. — Perspectives

7.1. — Commençons par expliquer, sous une forme idéalisée, comment l'expression (51) devrait permettre d'exprimer la fonction zêta Z_{S_K} en termes de fonctions L automorphes. Soit $\widehat{G}$ le groupe dual de G [2], $\widehat{T} \subset \widehat{G}$ un tore maximal, $\Omega = \Omega(\widehat{G}, \widehat{T})$ le groupe de Weyl absolu. Soit μ_* le caractère de $\widehat{T}$ déterminé par μ_h (cf. § 5). Il est bien défini modulo Ω, et l'orbite de μ_*^{-1} détermine une représentation irréductible V de $\widehat{G}$.

Soit par ailleurs ${}^L(G/E) = \widehat{G} \rtimes \Gamma_E$, $\Gamma_E = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$, le groupe dual de $G \underset{\mathbb{Q}}{\times} E$.

(5.3) Lemme (Langlands, Kottwitz). — *V s'étend en une représentation irréductible r de ${}^L(G/E) = \widehat{G} \rtimes \Gamma_E$.*

Soit π une représentation automorphe de $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Rappelons deux faits. D'abord, le changement de base [2] détermine alors une représentation π_E^N de $G(\mathbb{A}_E^N) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid N}{}' G(E_{\mathfrak{p}})$, N étant assez grand pour éviter les mauvaises places. On conjecture que π_E^N se complète en une représentation automorphe π_E. Par ailleurs, donnée π_E^N et la représentation r, on peut définir une fonction L automorphe $L(\pi_E^N, r, s)$. Si π_E existe, la fonction L complète $L(\pi_E, r, s)$ aura de *"bonnes"* propriétés.

La forme (51) du nombre de points suggère alors, modulo la formule des traces de Selberg[8] :

[8] L'ordre historique est inverse : (54) a suggéré les formes successives de (51) !

(54) CONJECTURE (Forme grossière!). —

$$Z_K^N(s) = \prod_\pi L(s, \pi_E^N, r)^{\varepsilon(\pi) \dim \pi_f^K} .$$

L'exposant $\varepsilon(\pi)$ devrait admettre une définition analogue du cas de $GL(2)$ (§ 3); π devrait parcourir les représentations automorphes (du spectre discret?) de $G(\mathbb{A})$.

Langlands a vite remarqué que (54) ne pouvait être vrai sous cette forme idéale. Les problèmes sont de deux ordres.

7.2. — Tout d'abord, la formule (52) n'est pas une somme d'intégrales orbitales sur les éléments $\mathbb{R}$-elliptiques $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q})$ modulo conjugaison (comme dans la formule des traces de Selberg), mais modulo conjugaison stable. Pour chaque γ_0 modulo $G(\overline{\mathbb{Q}})$, le terme correspondant ressemble à une intégrale orbitale stable (cf. [7]) mais en diffère à cause de la condition $\alpha(\gamma_0, \gamma, \delta) = 0$.

Pour comprendre le sens "automorphe" de la formule, il faut donc la stabiliser. Ceci est fait par Kottwitz dans [16, § 4] **modulo** des hypothèses d'analyse harmonique dues à Langlands, Shelstad et Kottwitz. Le résultat final est une formule conjecturale pour l'expression (52) à l'aide des (termes elliptiques des) formules des traces pour certains groupes naturellement associés à G, les "groupes endoscopiques".

Un problème aussi profond est dû au fait que la variété S_K n'est en général pas complète. Il est naturel d'en considérer la compactification minimale $\overline{S}_K$ de Baily–Borel. Celle-ci n'est pas lisse, et on considère alors les traces des opérateurs de Frobenius dans sa cohomologie d'intersection. On espère relier celles-ci aux traces des opérateurs de Hecke dans le spectre discret de $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$[9].

Kottwitz, à la suite de la description conjecturale donnée par Arthur de la décomposition de $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$, a formulé une conjecture précise dans ces termes. C'est l'objet du § 9 de [16]. On renvoie le lecteur à cet article, ainsi qu'à l'exposé qu'en ont fait Blasius et Rogawski [1].

(9) Le premier résultat de ce type est celui de Brylinski–Labesse [4].

Ces questions font l'objet de progrès rapides, mais sont loin d'être résolues. Citons deux cas importants où leur solution est complète.

Le premier est celui des variétés associées aux groupes unitaires anisotropes obtenus à partir d'involutions de seconde espèce. Plus précisément, soit

F = un corps CM, de sous–corps totalement réel F_0
D = une algèbre à division de degré n^2 sur F
$*$ = une involution de D induisant sur F l'automorphisme de Galois par rapport à F_0.

Soit G le groupe de points rationnels

$$G(\mathbb{Q}) = \{d \in D : dd^* \in \mathbb{Q}^\times\}.$$

Le théorème (52) s'applique à G, et l'on vérifie de plus que les groupes $\mathcal{K}$ de (39) – et donc les invariants α – sont triviaux. Par ailleurs G est anisotrope, et les variétés S_K complètes. Le théorème de Kottwitz implique alors que la fonction zêta de S_K (aux bonnes places) s'exprime comme produit de fonctions L automorphes. Dans certains cas (par exemple si $F_0/\mathbb{Q}$ est galoisien et si le groupe $G_1(\mathbb{R}) = \{d \in D \otimes \mathbb{R} : dd^* = 1\}$ est isomorphe à $U(n,1) \times U(n) \times \cdots \times U(n)$ – on peut en déduire une variante de la conjecture de Hasse–Weil pour ces variétés. (Ce qui manque est l'expression correcte de la fonction zêta aux mauvaises places). Voir Kottwitz [18].

Le second cas est celui des groupes unitaires à trois variables sur $\mathbb{Q}$. Il est traité en détail dans l'ouvrage collectif [25]. Dans ce cas, les problèmes combinatoires et ceux liés à la compactification peuvent être résolus (l'étude à l'infini est due à Kottwitz et Rapoport). On obtient un résultat complet, toujours aux places de bonne réduction : les traces de Frobenius dans la cohomologie d'intersection s'expriment à l'aide de la formule de Selberg, comme traces d'opérateurs de Hecke dans le spectre discret.

Terminons en remarquant que les problèmes liés à la mauvaise réduction semblent extrèmement difficiles. Ils ne sont résolus à toutes les places pour aucun groupe autre que $GL(2)$. Des résultats profonds ont été obtenus par Langlands, Zink, Rapoport. On renvoie à Rapoport [31] pour un exposé détaillé. Le but ultime, qui semble hors d'atteinte, serait d'obtenir en général un théorème aussi complet que celui de Carayol [5] pour GL_2.

BIBLIOGRAPHIE

[C] *Automorphic Forms, Representations, and L–functions*, Proceedings of the Corvallis Conference, A. Borel et W. Casselman eds, Proc. Symp. Pure Math. **33**, AMS, Providence, 1979, I, II.

[AA] *Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L–functions*, Proceedings of the Ann Arbor Conference, L. Clozel et J.S. Milne eds, Academic Press., 1990, I, II.

[1] D. Blasius et J. Rogawski. — *Zeta functions of Shimura varieties*, à paraître dans le volume de la conférence de Seattle (1991) sur les *"Motifs"*.

[2] A. Borel. — *Automorphic L–functions*, in [C], II, 27–62.

[3] L. Breen, J.–P. Labesse eds. — *Variétés de Shimura et fonctions L*, Publ. Math. Univ. Paris VII, **6**, s.d.

[4] J.–L. Brylinski et J.–P. Labesse. — *Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura*, Ann. Sci. E.N.S. (IV) **17** (1984), 361–412.

[5] H. Carayol. — *Sur les représentations ℓ–adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. E.N.S. **19** (1986), 409–468.

[6] H. Carayol. — *Variétés de Drinfel'd compactes, d'après Laumon, Rapoport et Stuhler*, Sém. Bourbaki, 1991–92, Exposé 756.

[7] L. Clozel. — *Nombres de Tamagawa des groupes semi–simples (d'après Kottwitz)*, Sém. Bourbaki, 1988–89, Exposé 702.

[8] P. Deligne. — *Travaux de Shimura*, Sém. Bourbaki, fev. 1971, Exposé 389.

[9] P. Deligne. — *Variétés de Shimura*, in [C], II, 247–290.

[10] P. Deligne. — *Motifs et groupe de Taniyama*, in Deligne, Milne, Ogus, Shih, "Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties", Springer L.N. Math. **900**, 261–279.

[11] M. Eichler. — *Quaternäre quadratische Formen and die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion*, Arch. Math. **5** (1954), 355–366.

[12] T. HONDA. — *Isogeny classes of abelian varieties over finite fields*, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 83–95.

[13] N. KATZ et B. MAZUR. — *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press., Princeton, 1985.

[14] R. KOTTWITZ. — *Shimura varieties and twisted orbital integrals*, Math. Ann. **269**, (1984), 287–300.

[15] R. KOTTWITZ. — *Isocrystals with additonal structure*, Compositio Math. **56**, (1985), 201–220.

[16] R. KOTTWITZ. — *Shimura varieties and λ-adic representations*, in [AA], I, 161–209.

[17] R. KOTTWITZ. — *Points on Shimura varieties over finite fields*, Journ. A.M.S. **5**, (1992), 373–444.

[18] R. KOTTWITZ. — *On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties*, Inv. Math., **108**, (1992), 653–665.

[19] J.-P. LABESSE. — *La formule des traces d'Arthur–Selberg*, Sém. Bourbaki, 1986, Exposé 636.

[20] R.P. LANGLANDS. — *Some contemporary problems with origins in the Jugendtraum*, in "Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems", Proc. Sympos. Pure Math. **28**, (1976), 401–418.

[21] R.P. LANGLANDS. — *Shimura varieties and the Selberg trace formula*, Can. J. Math. **29** (1977), 1292–1299.

[22] R.P. LANGLANDS. — *On the zeta-functions of some simple Shimura varieties*, Can. J. Math. **31**, (1979), 1121–1216.

[23] R.P. LANGLANDS. — *Automorphic representations, Shimura varieties and motives*, in [C], II, 205–246.

[24] R.P. LANGLANDS. — *Base change for $GL(2)$*, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press., Princeton, 1980.

[25] R.P. LANGLANDS, M. RAPOPORT. — *Shimuravarietäten und Gerben*, J. Reine Angew. Math. **378**, (1987), 113–220.

[26] R.P. LANGLANDS, D. RAMAKRISHNAN eds. — *The zêta functions of Picard Modular Surfaces*, Publ. du Centre de Recherches Mathématiques, Montréal, 1992.

[27] J.S. MILNE. — *Points on Shimura varieties* mod p, in [C], II, 165–184.

[28] J.S. MILNE. — *The conjecture of Langlands and Rapoport for Siegel modular varieties*, Bull. Amer. Math. Soc. **24**, (1991), 335–341.

[29] J.S. MILNE. — *The conjecture of Langlands and Rapoport for Siegel modular varieties*, preprint, 1990.

[30] J.S. MILNE. — *Canonical Models of (Mixed) Shimura Varieties and Automorphic Vector Bundles*, in [AA], I, 283–414.

[31] M. RAPOPORT. — *On the Bad Reduction of Shimura Varieties*, in [AA], II, 253–321.

[32] H. REIMANN, T. ZINK. — *Der Dieudonnémodul einer polarisierten abelschen Mannigfaltigkeit vom CM-typ*, Ann. of Math. **128**, (1988), 461–482.

[33] H. REIMANN, T. ZINK. — *The good reduction of Shimura varieties associated to quaternion algebras over a totally real number field*, preprint.

[34] G. SHIMURA. — *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press., 1971.

[35] Y. TANIYAMA. — *Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory*, Publ. Math. Soc. Japan, **6**, 1961.

[36] J. TATE. — *Classes d'isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini (d'après T. Honda)*, Sém. Bourbaki, 1968, Exposé 352.

[37] T. ZINK. — *Isogenieklassen von Punkten von Shimuramannigfaltigkeiten mit Werten in einem endlichen Körper*, Math. Nachr. **112**, (1983), 103–124.

Laurent CLOZEL
Bâtiment 425, Mathématiques
Université Paris-Sud
F-91405 ORSAY

Astérisque

PAUL GAUDUCHON

Variétés riemanniennes autoduales [d'après C.H. Taubes et al.]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 767, p. 151-186

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__151_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Mars 1993
45ème année, 1992-93, n° 767

VARIÉTÉS RIEMANNIENNES AUTODUALES
[d'après C.H. Taubes et al.]

par Paul GAUDUCHON

1. INTRODUCTION.

1.1. Les particularités de la géométrie différentielle de la dimension 4 reposent de façon essentielle sur la non-simplicité du groupe (spécial) orthogonal SO(4) qui, localement, est isomorphe au produit $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$, où $\mathrm{Sp}(1)$ désigne le groupe des quaternions de norme 1 (lui-même isomorphe au groupe spécial unitaire $\mathrm{SU}(2)$). Cet isomorphisme implique une relation étroite entre géométrie conforme et géométrie complexe, illustrée par la *théorie des twisteurs* de R. Penrose, cf. en particulier [Pe1], [Pe2], [Pe-Ri]. La théorie *riemannienne* des twisteurs [A-H-S], que nous présentons au §3, se propose de substituer à une variété conforme orientée $(M, [g])$ de dimension 4 une variété complexe ZM de dimension 3, fibrée sur M, de telle sorte que les points de M soient figurés par des droites projectives (complexes) de ZM et que la géométrie conforme de M soit déterminée par la seule géométrie complexe relative de ces droites dans ZM. Le modèle (plat) de cette situation est la fibration naturelle (de Hopf) de l'espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ sur la sphère S^4, directement déduite de la "correspondance de Klein" [Pe3], cf. 3.4.1. Ce modèle s'étend à toute variété conforme *autoduale*, i.e. dont le demi-tenseur de Weyl négatif W^- est identiquement nul, cf. 2.2.

1.2. La théorie des variétés autoduales, que nous présentons au §2, s'est développée parallèlement, dans le cadre twistoriel, à celle des *connexions autoduales*, définies sur un G-fibré principal P sur $(M, [g])$ où G est un groupe de Lie (compact). Le lien est établi par la "correspondance d'Atiyah-Ward" qui identifie la famille des connexions autoduales, ou *instantons*, de P à une famille de fibrés vectoriels holomorphes sur ZM. Cette correspondance a été largement exploitée, particulièrement dans le cas-modèle de S^4,

cf. [A-H-S], [At], [Do-Ve]. Les premiers exemples d'instantons sur une variété conforme non-autoduale ont été obtenus par C.H. Taubes par "greffage" d'instantons de S^4, [Ta1]. À la suite des travaux de S.K. Donaldson, et grâce, notamment, aux théorèmes d'existence de C.H. Taubes (cf. [Ta1], [Ta2]), les espaces de modules de connexions autoduales constituent un puissant instrument d'analyse de la structure différentiable des variétés de dimension 4, cf. [Hi4], [Fr-Uh], [Lw], [Do-Kr] et références incluses. On peut espérer, à la suite du Théorème (1.1), que les espaces de modules de structures conformes autoduales puissent prochainement jouer un rôle semblable.

1.3. Les variétés riemanniennes autoduales dont le tenseur de Ricci est nul, sont étudiées activement depuis la fin des années 70, sous le nom de *gravitons* (non-linéaires), comme éléments constitutifs d'une théorie quantique (euclidienne) de la gravitation. De nombreux exemples (non-compacts) ont été construits par voie directe ou twistorielle depuis la fin des années 70, cf. §2.3.4.1.

1.4 Les variétés autoduales (ou anti-autoduales) *compactes* connues se sont longtemps limités aux variétés conformes plates (telles que la sphère S^4, les tores plats T^4, le produit $S^1 \times S^3$ etc...) et aux variétés kählériennes à courbure sectionnelle holomorphe constante (telles que le plan projectif complexe $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$). En 1977, la résolution par S.T. Yau [Ya2] de la fameuse "conjecture de Calabi" a permis d'ajouter à la liste les *surfaces* $K3$ munies d'une *métrique de Calabi-Yau* (qui sont anti-autoduales), dont la forme explicite reste inconnue. La théorie des variétés autoduales connait une nouvelle impulsion vers le milieu des années 80. En 1986, Y.S. Poon construit une famille de métriques autoduales sur la somme connexe $2\,\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ de deux copies de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ et montre que cette famille décrit la totalité des métriques autoduales à courbure scalaire positive de $2\,\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ [Po1]. Peu après, A. Floer montre par voie analytique l'existence de structures conformes autoduales sur $k\,\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ pour tout k [Fl]. Plus généralement, S. Donaldson et R. Friedman donnent un critère général d'existence de structures conformes autoduales sur une somme connexe $\#M_i$ de variétés autoduales (incluant le théorème de Floer), en utilisant le formalisme twistoriel, cf. [Do-Fr] et

§3.4. Des familles *explicites* de structures conformes autoduales ont été, récemment, construites par C. LeBrun sur $k\,\mathbb{C}P^2$, pour tout k, [Le3], cf 2.3.4.2. Enfin, C.H. Taubes a montré le résultat général suivant, [Ta4] Théorème 1.1, cf. §4 :

(1.1) Théorème . *Pour toute variété M compacte orientée de dimension 4, il existe un entier k tel que la somme connexe $M\#k\,\mathbb{C}P^2$ admet une structure conforme autoduale.*

Un théorème d'existence de forme similaire, relatif aux surfaces kählériennes à courbure scalaire nulle (qui sont anti-autoduales, cf. §2.3), a été démontré récemment par C. LeBrun et M.A. Singer [Le-Si 1], cf. Théorème (2.3.4).

1.5. Le texte s'organise comme suit. La partie 2 est une revue des propriétés générales des variétés autoduales, incluant le cas des surfaces kählériennes (§2.3) ; une brève description du formalisme spinoriel propre à la dimension 4 (§2.4) ; le calcul de la variation première de W^- sous diverses formes, en particulier la forme "spinorielle" (2.5.12) utilisée dans [Ta4], cf. §4.3 (§2.5) ; le complexe elliptique associé à une structure conforme autoduale (§2.6) ; les contraintes topologiques attachées à l'autodualité dans le cas compact (§2.7). Outre les références explicitement données, la référence générale est [A-H-S], [Be1], [Be2] (et références incluses). La plupart des exemples explicitement connus, en dehors des structures conformes plates, sont mentionnés dans §2.3, y compris les *métriques de LeBrun* sur $k\mathbb{C}P^2$ qui ne sont pas kählériennes elles-mêmes mais construites à partir de métriques kählériennes. La partie 3 est consacrée à la théorie (riemannienne) des twisteurs, qui est à l'origine de l'intérêt porté aux variétés autoduales et en constitue encore un des aspects essentiels ; la référence générale pour cette partie est [A-H-S], [Be2] Ch. 13. La théorie de Donaldson-Friedman est (très brièvement) décrite dans §3.5. La partie 4 donne un schéma (simplifié à l'extrême) de la démonstration du Théorème (1.1) de Taubes figurant en [Ta4] (par commodité terminologique, nous avons substitué le "point de vue autodual" au point de vue "anti-autodual" adopté en [Ta4], motivé par la théorie des *connexions* anti-autoduales sur les variétés projectives, cf. [Do-Kr] Ch. 6).

Je remercie tous ceux qui m'ont aidé dans l'élaboration de ce texte, en

particulier J.P. Bourguignon, F. Campana, C. Margerin et C.H. Taubes. Je remercie également C. François et C. Harmide, de l'Ecole Polytechnique, pour leur amicale et compétente assistance technique.

2. VARIÉTÉS AUTODUALES.

Dans toute la suite, M désigne une variété différentiable C^∞ connexe orientée de dimension 4.

2.1 Pour toute métrique riemannienne (définie positive) g sur M, la restriction de l'opérateur $*$ de Hodge au fibré $\Lambda^2 M$ des 2-formes (réelles) est une involution, explicitée par

$$(*\psi)(e_1, e_2) = \psi(e_3, e_4), \tag{2.1.1}$$

où $\{e_1, \cdots, e_4\}$ est un repère g-orthonormé positivement orienté (quelconque) au point considéré. Cette involution ne dépend que de la classe conforme $[g]$ de g. Un élément ψ de $\Lambda^2 M$ est *autodual*, resp. *anti-autodual*, si

$$*\psi = \psi \ , \text{ resp. } * \psi = -\psi \ . \tag{2.1.2}$$

Cette définition s'étend aux 2-formes à valeurs dans un fibré vectoriel E, i.e. aux éléments du produit tensoriel $\Lambda^2 M \otimes E$, en convenant que $*$ agit trivialement sur E.
Nous notons

$$\Lambda^2 M = \Lambda^+ M \oplus \Lambda^- M \ , \tag{2.1.3}$$

la décomposition en somme directe orthogonale déterminée par $*$, où $\Lambda^+ M$, resp. $\Lambda^- M$, désigne le sous-fibré des éléments autoduaux, resp. anti-autoduaux, de $\Lambda^2 M$. Lorsque $\Lambda^2 M$ est identifié, via la métrique g, au fibré AM des endomorphismes $[g]$-antisymétriques du fibré tangent TM, (2.1.3) est une décomposition en somme directe de fibrés en algèbres de Lie, cf. (2.4.3.). En particulier, les éléments de $\Lambda^+ M$ commutent aux éléments de $\Lambda^- M$, et l'application $\phi \otimes \psi \mapsto \phi \circ \psi$ (composé d'endomorphismes) détermine un *isomorphisme* de fibrés vectoriels

$$\Lambda^+ M \otimes \Lambda^- M \mapsto S_0^2 T^* M, \tag{2.1.4}$$

du produit tensoriel $\Lambda^+M \otimes \Lambda^-M$ sur le fibré $S_0^2T^*M$ des formes bilinéaires à trace nulle (relativement à g), identifié, via g, au fibré $\mathrm{End}_{S,0}M$ des endomorphismes $[g]$-symétriques à trace nulle de TM. Tout élément a de Λ^+M ou Λ^-M, vu comme un élément de AM, satisfait

$$a \circ a = -\frac{1}{2}|a|^2 \cdot I, \tag{2.1.5}$$

où I est l'identité de TM et $|a|^2 = -\frac{1}{2}$ trace $(a \circ a)$ est le carré de la norme de a. Inversement, tout élément a de AM satisfaisant (2.1.5) est autodual ou anti-autodual. Nous obtenons ainsi, en tout point x, une identification naturelle

$$Z_x^{\pm}M = S_{\sqrt{2}}(\Lambda_x^{\pm}M), \tag{2.1.6}$$

entre la variété $Z_x^{\pm}M$ des structures complexes $[g]$-orthogonales $\pm$-orientées de T_xM et la sphère des éléments de norme $\sqrt{2}$ de $\Lambda_x^{\pm}M$ (l'orientation induite par J est celle de toute base de la forme $\{e_1, Je_1, e_3, Je_3\}$). La réunion des Z_x^+M, resp. Z_x^-M, constitue l'*espace des* (demi-)*twisteurs* (projectifs) *positifs*, resp. *négatifs*, de la variété conforme $(M, [g])$, notés respectivement Z^+M et Z^-M, cf. §2, infra.

2.2 La courbure (riemannienne) R de g est définie par

$$R(X,Y) = -D^2_{X,Y} + D^2_{Y,X}\ , \quad \forall X, Y \in T_xM, \forall x \in M\ , \tag{2.2.1}$$

où D est la connexion de Levi-Civita de g, cf. [Be2] Ch. 1. Via la métrique g, la courbure riemannienne R peut être considérée comme une section de $\Lambda^2M \otimes \Lambda^2M$ et, comme telle, vérifie les deux conditions suivantes, qui équivalent à la "première identité de Bianchi" riemannienne : (a) R est une section symétrique de $\Lambda^2M \otimes \Lambda^2M$; (b) R appartient au noyau de l'homomorphisme de $\Lambda^2M \otimes \Lambda^2M$ dans Λ^4M induit par le produit extérieur. Nous notons $\mathcal{R}$ le sous-fibré de $\Lambda^2M \otimes \Lambda^2M$, déterminé par (a) et (b).

A toute paire $\{h, k\}$ de formes bilinéaires symétriques est associée une section de $\mathcal{R}$, notée $h \owedge k$, appelée le *produit de Kulkarni-Nomizu* de h et k

(symétrique en h et k), défini par [Be2] Ch. 1 :

(2.2.2)

$$(h \owedge k)(X_1, X_2, X_3, X_4) = h(X_1, X_3)\, k(X_2, X_4) - h(X_1, X_4)\, k(X_2, X_3) - h(X_2, X_3)\, k(X_1, X_4) + h(X_2, X_4)\, k(X_1, X_3)\ .$$

La métrique g détermine une décomposition en somme directe orthogonale [S-T]

$$\mathcal{R} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathcal{W}, \tag{2.2.3}$$

où $\mathcal{U}$ est le fibré trivial de rang 1 engendré par $g \owedge g$, $\mathcal{Z}$ est le fibré de rang 9 formé des éléments de la forme $g \owedge h$, où h est à trace nulle relativement à g, et $\mathcal{W}$ est le sous-fibré de rang 10 orthogonal à $\mathcal{U} \oplus \mathcal{Z}$.

Le *tenseur de Weyl* W de g est la projection de R dans $\mathcal{W}$. Vu comme une 2-forme à valeurs dans AM, W ne dépend que de $[g]$. La composante B de R dans $\mathcal{Z}$ est égale à $\frac{1}{2}\, g \owedge \mathrm{Ric}_0$, où Ric_0 note la partie à trace nulle (relativement à g) du *tenseur de Ricci* Ric de g, défini par $\mathrm{Ric}(X_1, X_2) =$ trace $\{Y \mapsto R(X_1, Y)X_2\}$, et la composante U de R dans $\mathcal{U}$ est égale à $\frac{1}{24}$ Scal $g \owedge g$, où Scal note la *courbure scalaire* de g, égale à la trace (relativement à g) de Ric.

Considérées comme des endomorphismes symétriques de $\Lambda^2 M$, via g, les composantes B et W de la coubure R satisfont les relations :

$$* \circ B = -B \circ *\ , \quad W \circ * = * \circ W\ . \tag{2.2.4}$$

En particulier, B échange $\Lambda^+ M$ et $\Lambda^- M$, et l'espace $\mathcal{W}$ se décompose en

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}^+ \oplus \mathcal{W}^-, \tag{2.2.5}$$

où $\mathcal{W}^+$ coïncide avec $\mathcal{R} \cap (\Lambda^+ M \otimes \Lambda^+ M)$ et $\mathcal{W}^-$ avec $\mathcal{R} \cap (\Lambda^- M \otimes \Lambda^- M)$. La projection orthogonale de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{W}^+$, resp. $\mathcal{W}^-$, sera notée Π^+, resp. Π^-. Le demi-tenseur de Weyl positif $W^+ = \Pi^+(R)$, resp. négatif $W^- = \Pi^-(R)$, agit trivialement sur $\Lambda^- M$, resp. $\Lambda^+ M$, et induit un endomorphisme (symétrique) à trace nulle sur $\Lambda^+ M$, resp. $\Lambda^- M$. Il est commode de figurer les faits précédents par l'expression "matricielle" suivante de R,

relative à la décomposition (2.1.3) :

$$(2.2.6) \qquad \begin{array}{c} \\ \Lambda^+M \\ \Lambda^-M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \Lambda^+M & \Lambda^-M \end{array} \\ \begin{pmatrix} W^+ + \frac{1}{12}\,\mathrm{Scal}\, I & B \\ B & W^- + \frac{1}{12}\,\mathrm{Scal}\, I \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition : Une structure conforme riemannienne $[g]$ est *autoduale* si le demi-tenseur de Weyl négatif W^- est nul (définition similaire pour une structure conforme *anti-autoduale*).
Les structures conformes autoduales (ou anti-autoduales) constituent une extension naturelle, propre à la dimension 4, des *structures conformes plates* qui, en toute dimension supérieure à 3, sont caractérisées par l'annulation du tenseur de Weyl W.

Remarque : Une connexion linéaire ∇, sur un fibré vectoriel E, est *autoduale* si sa courbure R^∇ est autoduale en tant que 2-forme à valeurs dans le fibré End E, [A-H-S]. On lit directement sur (2.2.6) que la connexion de Levi-Civita D est autoduale si et seulement si la métrique g est autoduale *et* le tenseur de Ricci Ric est identiquement nul. De façon équivalente, D est autoduale si et seulement si la connexion induite sur Λ^-M, donc aussi sur Z^-M, est plate. Une section D-parallèle (locale) de Z^-M est une structure kählérienne (locale) sur M, relativement à la métrique g et l'orientation opposée. Ainsi, la connexion de Levi-Civita D est autoduale si et seulement si (M, g), munie de l'orientation opposée, est *localement hyper-kählérienne*, cf. [Hi5].

2.3 Le cas kählérien.

2.3.1 La variété orientée (M, g) est *kählérienne* s'il existe une section D-parallèle J de Z^+M. En particulier, la structure presque complexe J est intégrale et induit une structure complexe sur M qui fait de (M, g, J) une *surface* (complexe) *kählérienne*. L'involution $\psi(\cdot,\cdot) \mapsto \psi(\mathrm{J}\cdot, \mathrm{J}\cdot)$ de Λ^2M commute à $*$ et les sous-fibrés propres de cette involution relatifs à $+1$ et -1, notés resp. $\Lambda^{\mathrm{J},+}M$ et $\Lambda^{\mathrm{J},-}M$, sont liés à Λ^+M et Λ^-M par

$$(2.3.1) \qquad \Lambda^+M = \mathbb{R}\cdot \mathrm{J} \oplus \Lambda^{\mathrm{J},-}M, \quad \Lambda^-M = \Lambda_0^{\mathrm{J},+}M,$$

où $\mathbb{R}\cdot \mathrm{J}$ note le sous-fibré de rang 1 de $\Lambda^{\mathrm{J},+}M$ engendré par J et $\Lambda_0^{\mathrm{J},+}$ son orthogonal dans $\Lambda^{\mathrm{J},+}M$ (la décomposition (2.3.1) est algébrique et vaut pour toute section J de Z^+M). Puisque J est D-parallèle, R agit trivialement sur $\Lambda^{\mathrm{J},-}M$, i.e. est une section du sous-fibré $\mathcal{R}^{\mathrm{J}} = \mathcal{R} \cap (\Lambda^{\mathrm{J},+}M \otimes \Lambda^{\mathrm{J},+}M)$ de $\mathcal{R}$. L'action de R sur Λ^+M est alors réduite à son action sur $\mathbb{R}\cdot \mathrm{J}$, décrite par : $R(\mathrm{J}) = \frac{1}{4}$ Scal J (mod. Λ^-M) et le demi-tenseur de Weyl positif W^+ est figuré "matriciellement", relativement à la décomposition (2.3.1) de Λ^+M, par

$$(2.3.2) \qquad \begin{array}{c} \\ \mathbb{R}\cdot \mathrm{J} \\ \Lambda^{\mathrm{J},-}M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbb{R}\cdot \mathrm{J} & \Lambda^{\mathrm{J},-}M \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\,\mathrm{Scal}\, I & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12}\,\mathrm{Scal}\, I \end{pmatrix} \end{array}$$

Il en résulte directement le fait suivant :

(2.3.3) *Une surface kählérienne (M, g, J) est anti-autoduale si et seulement si la courbure scalaire de g est identiquement nulle.*

Remarque : Le fibré $\mathcal{R}^{\mathrm{J}}$ se décompose en la somme directe orthogonale $\mathcal{R}^{\mathrm{J}} = \mathcal{U}^{\mathrm{J}} \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathcal{W}^-$, où $\mathcal{U}^{\mathrm{J}} = \mathbb{R}.C$ est engendré par l'élément C dont les projections sur $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}^+$ sont respectivement égales à I et à la "matrice" $\begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. La composante U^{J} de R sur $\mathcal{U}^{\mathrm{J}}$ est alors égale à $1/12$ Scal C.

Les surfaces kählériennes fournissent de nombreux exemples de métriques autoduales ou anti-autoduales. A cause de l'existence d'une orientation priviligiée, induite par J, le distinguo entre métriques autoduales et anti-autoduales est ici essentiel. Nous obtenons les trois catégories suivantes.

2.3.2. *Surfaces kählériennes dont la classe conforme est plate.* La courbure R est alors une section de $\mathcal{Z}$. Si R n'est pas identiquement nulle, (M, g) est localement isométrique au produit $S^2 \times \mathrm{H}^2$ de la sphère ronde S^2 de courbure k et de l'espace hyperbolique H^2 de courbure $-k$, cf. [La].

2.3.3. *Surfaces kählériennes autoduales (non anti-autoduales).* Cette famille contient les surfaces kählériennes à courbure sectionnelle holomorphe constante (non-nulle), dont la courbure est une section de $\mathcal{U}^{\mathrm{J}}$. Inversement,

tout représentant compact de la famille est de ce type, [Sa] §7, [De]. L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^2$, muni d'une métrique de Fubini-Study g_{FS}, en est le seul représentant compact et simplement connexe.

2.3.4. *Surfaces kählériennes anti-autoduales.* Par (2.3.3), ce sont les surfaces kählériennes à courbure scalaire nulle. Nous distinguons les deux sous-familles suivantes.

2.3.4.1 *Surfaces kählériennes à tenseur de Ricci nul.* Cette famille est constitué des variétés localement hyper-kählériennes, cf. 2.1. Les représentants compacts et simplement-connexes sont les *surfaces* $K3$, munies d'une *métrique de Calabi-Yau*, cf. §1.4. De façon générale, ces variétés apparaissent en relativité, sous le nom d'*instantons gravitationnels*, ou *gravitons* (non-linéaires) [Pr], [E-G-H]. Les gravitons admettant un groupe de symétries égal à S^1 sont entièrement décrits, en [Gi-Ho], par une fonction harmonique positive définie sur un domaine de $\mathbb{R}^3$. Certains d'entre eux coïncident avec les gravitons construits par voie "twistorielle" en [Hi1] ; ces métriques sont *localement asymptotiquement plates* et ont un bord à l'infini difféomorphe au quotient S^3/Γ de la sphère S^3 par un groupe cyclique (fini) d'isométries. De telles variétés ont été construites en [Kr] pour tout groupe fini Γ d'isométries de S^3, par des techniques de quotients symplectiques. Une famille de dimension infinie, correspondant au cas où Γ est un groupe cyclique infini d'isométries, a été construite en [A-K-L].

2.3.4.2 *Surfaces kählériennes à courbure scalaire nulle et tenseur de Ricci non nul.* La méthode de [Gi-Ho] a été généralisée par C. LeBrun pour décrire la totalité des surfaces kählériennes à courbure scalaire nulle, admettant un groupe de symétries égal à S^1, [Le3] Prop. 1, cf. aussi [Le1], [Le2]. Un cas particulier de cette construction, obtenue à partir d'une fonction harmonique positive définie sur l'espace hyperbolique (réel) H^3 privé de k points (k quelconque), fournit une métrique kählérienne à courbure scalaire nulle, asymptotiquement plate, sur la variété obtenue en faisant éclater k points de $\mathbb{C}^2$ situés sur une même droite complexe. Par compactification, C. LeBrun obtient *une structure conforme autoduale (de type positif) sur la somme connexe* $k\,\mathbb{C}P^2$ *de* k *(quelconque) copies du plan projectif complexe* [Le3] (du point de vue différentiable, l'éclatement d'un point d'une surface

complexe équivaut à l'adjonction, par somme connexe, d'une copie de $\mathbb{C}P^2$, muni de l'orientation opposée à l'orientation naturelle, cf. [Be1] Exp. IV).

Les surfaces kählériennes *compactes* à courbure scalaire nulle (et tenseur de Ricci non-nul) restent peu connues. Il résulte de [Ya1] que la surface complexe (M, J) est obtenue par éclatement d'une surface réglée (fibrée, en droites projectives, au-dessus d'une surface de Riemann Σ_g de genre g). Inversement, nous avons le théorème suivant de C. LeBrun et M. Singer, que l'on peut considérer comme une version "kählérienne" du Théorème (1.1) :

(2.3.4) Théorème [Le-Si 1]. *Toute surface réglée de genre $g \geq 2$ admet, après éclatement d'un nombre suffisant de points, une métrique kählérienne à courbure scalaire nulle.*

La preuve repose sur les constructions évoquées précédemment, les techniques de déformations des espaces de twisteurs de surfaces kählériennes anti-autoduales et un théorème de M. Pontecorvo [Pn2] caractérisant ces espaces.
Ce résultat a été précisé récemment en [Ki-Po], cf. aussi [Le-Si 2].

2.4 Formalisme spinoriel.

Le groupe spinoriel Spin (4) est naturellement identifié au produit $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$, où $\mathrm{Sp}(1)$ est le groupe des quaternions de norme 1. Les deux *représentations spinorielles* Σ_+ et Σ_- de Spin (4) sont obtenues en composant l'action naturelle de $\mathrm{Sp}(1)$ sur $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ avec la projection sur le premier et le second facteur respectivement. Toute représentation linéaire (sur $\mathbb{C}$) de Spin (4) est une somme directe des représentations irréductibles $\Sigma_+^p \otimes \Sigma_-^q$, où Σ_+^p note la puissance tensorielle symétrique (complexe) d'ordre p de Σ_+ (convention similaire pour Σ_-^q), le jeu étant réglé par la formule de décomposition

$$\Sigma_+^p \otimes \Sigma_+^q = \Sigma_+^{p+q} \oplus \Sigma^{p+q-2} \oplus \cdots \oplus \Sigma_+^{p-q}, \quad p \geq q \,, \tag{2.4.1}$$

(formule similaire pour Σ_-).
Les espaces de (demi-) spineurs Σ_+ et Σ_- sont chacun munis d'une structure quaternionienne j et d'une structure symplectique (complexe) ω naturelles. La structure quaternionienne j induit une structure réelle sur

toute combinaison tensorielle d'ordre *pair* de Σ_+ et Σ_-. Nous conviendrons alors de noter identiquement la représentation complexe et la représentation réelle induite, qui, dans ce cas, se factorise par SO(4). La structure symplectique ω identifie chaque espace Σ_+ et Σ_- à son dual complexe, et l'espace $\mathrm{End}_0\Sigma_+$ des endomorphismes à trace nulle de Σ_+ à Σ_+^2 en identifiant tout élément A de $\mathrm{End}_0\Sigma_+$ à la forme $\mathbb{C}$-bilinéaire (symétrique) $\omega(A\cdot,\cdot)$; la représentation Σ_+^2, resp. Σ_-^2, est ainsi identifiée à la *représentation adjointe* de Sp(1) composée avec la projection de Spin (4) sur le premier facteur, resp. le second facteur.

L'action équivariante de $\mathbb{R}^4$, vu comme l'espace de représentation naturel de SO(4), sur Σ_+ et Σ_-, explicitée par

$$(2.4.2) \qquad u(\xi) = u\xi, \quad u(\eta) = -\bar{u}\eta, \qquad u \in \mathbb{R}^4 = \mathbb{H},\ \xi \in \Sigma_+,\ \eta \in \Sigma_-$$

(où le produit est effectué dans $\mathbb{H}$), induit un isomorphisme équivariant de l'algèbre de Clifford $C\ell(\mathbb{R}^4)$ sur l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathbb{H}}\Sigma$ des endomorphismes quaternioniens de $\Sigma = \Sigma_+ \oplus \Sigma_-$, pour lequel la partie paire $C\ell^0(\mathbb{R}^4)$ préserve chacun des facteurs Σ_+ et Σ_-. Nous obtenons de cette manière les identifications de représentations *(réelles)* :

$$(2.4.3) \qquad \Lambda^+\mathbb{R}^4 = \Sigma_+^2, \quad \Lambda^-\mathbb{R}^4 = \Sigma_-^2 \ .$$

Ces considérations algébriques ont une traduction géométrique immédiate lorsque M est munie d'une *structure spinorielle*, réalisée par un Spin (4)-fibré principal $\tilde{Q}$ sur M, revêtant le fibré des repères g-orthonormés positivement orientés de TM. En particulier, nous avons les identifications (fonctorielles) suivantes (de fibrés vectoriels réels) :

$$(2.4.3) \qquad TM = \Sigma_+M \otimes \Sigma_-M,\ \Lambda^+M = \Sigma_+^2M\ ,\ \Lambda^-M = \Sigma_-^2M\ ,$$

où Σ_+M, Σ_-M, etc, sont les fibrés vectoriels (réels ou complexes suivant la parité de l'exposant) associés aux représentations correspondantes de Spin(4), via $\tilde{Q}$.

De (2.4.3), (2.1.4) et (2.4.1), nous déduisons aisément les identifications suivantes des facteurs $\mathcal{Z}, \mathcal{W}^+$ et $\mathcal{W}^-$ du fibré $\mathcal{R}$ des tenseurs de courbures riemanniens :

$$(2.4.4) \qquad \mathcal{Z} = \Sigma_+^2M \otimes \Sigma_-^2M, \quad \mathcal{W}^+ = \Sigma_+^4M, \quad \mathcal{W}^- = \Sigma_-^4M\ .$$

On obtient également les identifications suivantes des fibrés de twisteurs :

$$Z^+M = \mathbb{P}(\Sigma_+M), \quad Z^-M = \mathbb{P}(\Sigma_-M)\ , \tag{2.4.5}$$

où $\mathbb{P}(\Sigma_+M)$ note le fibré en droites projectives complexes associé à Σ_+M et de même pour $\mathbb{P}(\Sigma_-M)$. L'identification se fait de la façon suivante : tout élément ξ non nul de la fibre $(\Sigma_+M)_x$ identifie l'espace tangent $T_xM = \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\Sigma_+M, \Sigma_-M)$ à l'espace vectoriel *complexe* $(\Sigma_-M)_x$ et détermine ainsi une structure complexe J de T_xM, appartenant à Z^+_xM, ne dépendant que de la droite $\mathbb{C}\cdot\xi$ dans $(\Sigma_+M)_x$. Ces isomorphismes valent encore si M n'est pas spinorielle, modulo le choix d'une structure spinorielle locale. Les identifications (2.4.5) ne dépendent pas de ce choix.

Le produit de Kulkarni-Nomizu, défini par (2.2.2), détermine un homomorphisme, noté κ, de $S^2T^*M \otimes S^2T^*M$ dans $\mathcal{R}$. La restriction de κ à $S^2_0T^*M \otimes S^2_0T^*M$ s'insère dans le diagramme commutatif suivant :

(2.4.6)

$$\begin{array}{ccccc} S^2_0T^*M \otimes S^2_0T^*M & \xrightarrow{\Pi^+\circ\kappa} & \mathcal{W}^+ & = & \Sigma^4_+M \\ \downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \Pi^{\Sigma^4_+}} & & \\ \Lambda^+M \otimes \Lambda^-M \otimes \Lambda^+M \otimes \Lambda^-M & \xrightarrow{c} & \Lambda^+M \otimes \Lambda^+M & = & \Sigma^2_+M \otimes \Sigma^2_+M \end{array}$$

où la flèche verticale descendante est déduite de (2.1.5), c est la contraction des deux facteurs Λ^-M (via la métrique), $\Pi^{\Sigma^4_+}$ est l'homomorphisme de symétrisation de $\Sigma^2_+M \otimes \Sigma^2_+$ dans Σ^4_+ qui, via les identifications faites, coïncide avec la projection naturelle de $\Lambda^+M \otimes \Lambda^+M$ sur le sous-espace des éléments symétriques à trace nulle (diagramme similaire pour Π^- en échangeant les rôles de Λ^+M et Λ^-M).

2.5 Variation du demi-tenseur de Weyl. (Nous considérons ici le demi-tenseur de Weyl négatif W^-. Le calcul de la variation de W^+ est formellement identique).

La correspondance $g \to W^- = W^-(g)$ est un opérateur différentiel (non-linéaire) opérant sur les formes bilinéaires définies positives à valeurs, suivant la variance choisie, dans $\mathcal{R}$ ou dans $\Lambda^2M \otimes \mathrm{End}M$ (fibré des endomorphismes de TM). L'opérateur linéarisé, en g, est défini par

$$L^-_g(h) = \frac{d}{dt}W^-(g+th)_{|t=0}\ , \tag{2.5.1}$$

où h est une section quelconque de S^2T^*M et t un paramètre réel (petit). L'opérateur L_g^- est invariant conforme si l'on convient qu'il opère sur les sections de $\mathrm{End}_{S,0}M$ et que $\mathcal{W}^-$ est un sous-fibré de $\Lambda^2 M \otimes AM$ (cf. Remarque suivante).

Remarque préliminaire. En raison de l'invariance, ou la covariance, conforme de W^-, nous désirons varier la seule classe conforme $[g]$, qui est entièrement déterminée par l'involution de Hodge $*$, [Do-Kr] Ch. 1. Un calcul simple montre que la variation première $\dot{*} = \frac{d}{dt}*_{t|t=0}$ de cette involution est donnée par

$$\dot{*}(\phi) = -H_0(\phi),\ \dot{*}(\psi) = H_0(\psi),\ \phi \in \Lambda^+M,\ \psi \in \Lambda^-M, \tag{2.5.2}$$

où H note l'endomorphisme $[g]$-symétrique associé à h, H_0 la partie à trace nulle de H, considérée comme un homomorphisme de Λ^+M dans Λ^-M ou de Λ^-M dans Λ^+M via l'isomorphisme (2.1.5). De cette manière, l'espace des variations premières de $[g]$ s'identifie canoniquement (sans recourir à une métrique dans $[g]$) à l'espace des sections du fibré $\mathrm{End}_{S,0}M$. Par commodité, nous adoptons dans la suite le point de vue métrique, mais nous supposerons que la variation première h de la métrique est à trace nulle, identifiée, via g, à la variation première $H = H_0$ de la structure conforme.

Nous conviendrons que la courbure R_t de g_t et ses composantes sont des sections de $\mathcal{R}$ (qui ne dépend d'aucune métrique). La projection de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{W}_t^-$ est notée Π_t^-. Les éléments relatifs à $g_0 = g$ ne sont pas indiciés. Plutôt que différentier directement $W_t^- = \Pi_t^-(R_t)$, nous considérons la racine positive $A_t := (I + tH)^{1/2}$ de $(I + tH)$ et nous substituons à R_t le tenseur $\tilde{R}_t := A_t(R_t)$ image de R_t par A_t, explicité par

$$\tilde{R}_t(X_1, X_2, X_3, X_4) = R_t(A_t^{-1}X_1, A_t^{-1}X_2, A_t^{-1}X_3, A_t^{-1}X_4)\ . \tag{2.5.3}$$

Comme A_t est une isométrie de (TM, g_t) sur (TM, g), $A_t(W_t^-)$ est égal à $\Pi^-(\widetilde{R}_t)$ pour tout t, et on a, compte-tenu de $\frac{d}{dt}A_{t|t=0} = \frac{1}{2}H$,

$$L_g^-(h) = \Pi^-\left(\frac{d}{dt}\tilde{R}_{t|t=0}\right) + \frac{1}{2}ad_H W^-\ , \tag{2.5.4}$$

où, de façon générale, l'action adjointe de $\mathrm{End}_S E$ sur $\mathcal{R}$ est la différentielle de l'action décrite par (2.5.3), i.e. est définie par

$$(\mathrm{ad}_H R)(X_1, \cdots, X_4) = -\sum_{i=1}^{4} R(X_1, \cdots, H(X_i), \cdots, X_4) \ . \tag{2.5.5}$$

Comme H est à trace nulle, le "terme additionnel" $\frac{1}{2}\,\mathrm{ad}_H W^-$ est une section du sous-fibré $\mathcal{Z}$. La variation première de R_t, donc aussi de $\tilde{R}_t$, est standard, cf. [Be2] 1.178. On a ainsi

$$\frac{d}{dt}\tilde{R}_{t|t=0} = -\frac{1}{2}\kappa(D_S^2 h) + \frac{1}{4}\,\mathrm{ad}_H R \ , \tag{2.5.6}$$

où $D_S^2 h$ est la dérivée covariante seconde symétrisée de h, vue comme une section de $S^2 T^*M \otimes S_0^2 T^*M$ et où κ est l'homomorphisme de Kulkarni-Nomizu déjà considéré (la substitution $R_t \mapsto \tilde{R}_t$ ne modifie que le terme d'ordre 0). Comme H est à trace nulle, seules contribuent de façon non triviale dans $\Pi^-(\frac{d}{dt}\tilde{R}_{t|t=0})$ la composante à trace nulle $D_{S,0}^2 h$ de $D_S^2 h$ et la composante B de R. Un calcul simple montre que l'on a :

$$\Pi^-(\mathrm{ad}_H R) = \Pi^-(\mathrm{ad}_H B) = -\Pi^-(h \owedge \mathrm{Ric}_0) \ . \tag{2.5.7}$$

Compte-tenu de (2.4.6), nous obtenons finalement l'expression suivante de L_g^- :

$$L_g^-(h) = -\frac{1}{2}(\Pi^{\Sigma^4_-} \circ c)(D_{S,0}^2 h + \frac{1}{2}\, h \otimes \mathrm{Ric}_0) + \frac{1}{2} ad_H W^- \ . \tag{2.5.8}$$

En particulier, L_g^- prend ses valeurs dans $\mathcal{W}^-$ si et seulement si la métrique g est autoduale.

Remarque. Via (2.1.4), la forme h peut être considérée comme une 2-forme autoduale à valeurs dans le fibré vectoriel $\Lambda^- M$. On a alors l'identité

$$c(D_{S,0}^2 h) = d_-^D \delta^D h \ , \tag{2.5.9}$$

où δ^D désigne la codifférentielle relative à D et d_-^D la partie anti-autoduale de la différentielle relative à D opérant sur les 1-formes à valeurs dans $\Lambda^- M$.

En effet, $d_-^D \delta^D h$ est obtenu en composant la dérivée covariante seconde $D^2 h$ de h avec l'opération algébrique décrite par le schéma suivant (où ϕ est un élément de $\Lambda^+ M, \psi$ un élément de $\Lambda^- M, \alpha, \beta$ deux éléments de T^*M en un point générique de M) :

$$\alpha \otimes \beta \otimes \phi \otimes \psi \mapsto -(\alpha \wedge \phi(\beta))_- \otimes \psi \ , \tag{2.5.10}$$

où $(\alpha \wedge \phi(\beta))_- = \frac{1}{2}(\alpha \wedge \phi(\beta) + \beta \wedge \phi(\alpha) - g(\alpha, \beta)\phi)$ désigne la composante anti-autoduale de $(\alpha \wedge \phi(\beta))$, tandis que $c(D^2_{S,0} h)$ est obtenu à partir de $D^2 h$ par l'opération :

$$\alpha \otimes \beta \otimes \phi \otimes \psi \mapsto c((\alpha \otimes \beta)_{S,0} \otimes \phi) \otimes \psi \ , \tag{2.5.11}$$

où $(\alpha \otimes \beta)_{S,0} = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha - \frac{1}{2} g(\alpha, \beta) g)$ désigne la composante symétrique à trace nulle de $\alpha \otimes \beta$. Un calcul simple montre que (2.5.10) et (2.5.11) coïncident. L'opérateur linéarisé L_g^- peut donc s'écrire sous la forme suivante [Fl], [Ta4] §5 :

$$L_g^-(h) = -\frac{1}{2} \Pi^{\Sigma^4_-}(d_-^D \delta^D h + \frac{1}{2} c(h \otimes \mathrm{Ric}_0)) + \frac{1}{2} \mathrm{ad}_H W^- \ . \tag{2.5.12}$$

2.6 Le complexe elliptique attaché à une variété autoduale.

La courbure riemannienne R, de variance quelconque, est invariante sous l'action du groupe Diff M des difféomorphismes de M, en ce sens que : $\Phi^* R(g) = R(\Phi^* g)$ pour tout difféomorphisme Φ de M. Si Φ préserve l'orientation de M, on a aussi $\Phi^* W^-(g) = W^-(\Phi^* g)$, donc aussi par dérivation (en notant $\mathcal{L}_X$ la dérivée de Lie dans la direction de X) :

$$\mathcal{L}_X W^- = L_g^-(\mathcal{L}_X g) \ , \tag{2.6.1}$$

pour toute métrique g et tout champ de vecteurs X de M. En particulier, si g est autoduale, $\mathcal{L}_X g$ appartient au noyau de L_g^- quel que soit le champ de vecteurs X, et nous obtenons, dans ce cas, le complexe d'opérateurs suivant :

$$C^\infty(TM) \xrightarrow{\delta_0^*} C^\infty\ (\mathrm{End}_{S_0} M) \xrightarrow{L_g^-} C^\infty(\mathcal{W}^-) \tag{2.6.2}$$

où $\delta_0^* X$ note la partie à trace nulle de $1/2\mathcal{L}_X g$ considérée comme une section de $\mathrm{End}_{S,0}E$, i.e. $\delta_0^* X$ est égal à la composante symétrique à trace nulle de DX. Comme tel, l'opérateur δ_0^* est invariant conforme. Pour tout α fixé non nul, dans $T_x^* M$, la suite correspondante des symboles principaux s'écrit, cf. (2.5.10),

(2.6.3)

$$X \in T_x M \mapsto (\alpha \otimes X)_{S,0} \in (\mathrm{End}_{S,0} M)_x,$$

$$\phi \otimes \psi \in (\mathrm{End}_{S,0} M)_x \mapsto -\Pi^{\Sigma^4_-}((\alpha \wedge \phi(\alpha))_- \otimes \psi) \in \mathcal{W}_x^- \ .$$

Un calcul simple montre que cette suite est exacte, i.e. que *le complexe* (2.6.2) *est elliptique.*

Remarque : La non-ellipticité de L_g^- est due à la présence du groupe de symétries Diff M qui implique la non-injectivité de son symbole principal. L'ellipticité est restaurée par l'adjonction de l'opérateur δ_0^* qui exprime l'action dérivée de Diff M. On retrouve une situation semblable pour l'équation d'autodualité des connexions, où le groupe de symétries est le *groupe de jauge*, i.e. le groupe des automorphismes du fibré principal considéré, et pour l'équation d'Einstein (riemannienne) où le groupe de symétries est encore Diff M, cf. [A-H-S], [Bo].

Les espaces de cohomologie du complexe (2.6.2) sont notés $H^0_{[g]}, H^1_{[g]}$ et $H^2_{[g]}$. L'espace $H^0_{[g]}$ est l'espace des champs de Killing conformes, i.e. des automorphismes infinitésimaux de la structure conforme $[g]$. Lorsque M est compacte, les dimensions $h^i_{[g]}$ de ces espaces sont finies. L'indice $i_{[g]} = h^0_{[g]} - h^1_{[g]} + h^2_{[g]}$ du complexe elliptique (2.6.2), calculée à l'aide de la formule d'Atiyah-Singer, est égale à $\frac{1}{2}(15\chi - 29\tau)$, où χ et τ désignent respectivement la caractéristique d'Euler-Poincaré et la signature de M (la détermination de (2.6.2) et le calcul de $i_{[g]}$ sont dus à I.M. Singer (non publié) ; un calcul détaillé de $i_{[g]}$ figure dans [Ki-Ko]).

Les éléments généraux d'une théorie des déformations des structures conformes autoduales, inspirée de la théorie de Kodaira-Spencer-Kuranishi à partir du complexe (2.6.2), se trouvent dans [Ki-Ko], [It1], [It2]. En particulier, dans le cas générique où $h^0_{[g]}$ et $h^2_{[g]}$ sont nuls, l'espace des modules $\mathcal{M}_{[g]}$ des structures autoduales sur M est, au voisinage de $[g]$, une variété

lisse de dimension $\frac{1}{2}(29\chi - 15\tau)$, où χ désigne la *caractéristique d'Euler-Poincaré* et τ la *signature* de M, [Ko-Ki].
Dans les deux exemples (non-génériques) suivants, l'espace des modules est réduit à un point (au voisinage de la structure standard).

Exemple 1. La sphère $(S^4, [g_S])$. On a

$$h^0_{[g_S]} = i_{[g_S]} = 15,\ h^1_{[g_S]} = h^2_{[g_S]} = 0\ . \tag{2.6.4}$$

Exemple 2. *Le plan projectif complexe* $(\mathbb{C}\mathrm{P}^2, [g_{FS}])$. On a

$$h^0_{[g_{FS}]} = i_{[g_{FS}]} = 8,\ h^1_{[g_{FS}]} = h^2_{[g_{FS}]} = 0\ . \tag{2.6.5}$$

Dans les deux cas, l'annulation de $h^2_{[g]}$, qui équivaut à la surjectivité de l'opérateur L^-_g, est un fait non trivial, qui joue un rôle décisif dans la démonstration du Théorème (1.1). Ce fait peut être montré, soit directement, par des techniques "à la Weitzenböck", [Ta4] Prop. 5.7, soit à partir de l'identification de $H^2_{[g]}$ à l'espace de cohomologie correspondant sur l'espace des twisteurs, [F1], [Do-Fr], cf. §3.2.2.

Remarque : Le complexe (2.6.2) est à comparer avec le complexe elliptique associé à une *connexion* autoduale ∇, définie sur un G-fibré principal P au-dessus de M, qui s'écrit :

$$\Omega^0(M, ad\ P) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(M, ad\ P) \xrightarrow{d^\nabla_-} \Omega^2(M, ad\ P)\ , \tag{2.6.6}$$

où d^∇_- est la composante anti-autoduale de la différentielle extérieure relative à ∇, opérant sur les 1-formes à valeurs dans le fibré adjoint $ad\ P$. On notera les deux différences importantes avec (2.6.2) : d^∇_- est un opérateur d'ordre 1, et les espaces $\Omega^i(M, \mathrm{ad}\ P)$ des i-formes à valeurs dans ad P sont indépendants de la connexion ∇, cf. [A-H-S].

2.7. Obstructions topologiques.

Lorsque M est compacte, les normes L^2 des composantes de la courbure riemannienne R sont liées par les relations suivantes :

$$\chi = \frac{1}{8\pi^2}\int_M (|U|^2 - |B|^2 + |W|^2)\, v_g \ , \tag{2.7.1}$$

$$\tau = \frac{1}{12\pi^2}\int_M (|W^+|^2 - |W^-|^2)\, v_g \ , \tag{2.7.2}$$

où v_g est la forme-volume définie par la métrique g et l'orientation. L'égalité (2.3.1) est la formule de Gauss-Bonnet-Chern en dimension 4 et (2.3.2) est dérivée directement de la formule de Hirzebruch

$$\tau = \frac{1}{3} < p_1(M), [M] > \tag{2.7.3}$$

(où $[M]$ désigne le générateur de $H_4(M, \mathbb{Z})$ déterminé par l'orientation), via l'expression de la classe de Pontryagin p_1 donnée par la théorie de Chern-Weil, cf. par ex. [Be1], [Be2] Ch. 6.

De (2.7.2) résultent directement les faits suivants (M compacte) :

(i) *si τ est nulle, toute structure conforme $[g]$ autoduale ou anti-autoduale est plate ;*

(ii) *si τ est positive (resp. négative), il n'existe pas de structure conforme anti-autoduale (resp. autoduale) et toute structure conforme autoduale (resp. anti-autoduale) réalise le minimum absolu de la norme L^2 du tenseur de Weyl, égal à $12\pi^2\tau$ (resp. $-12\pi^2\tau$).*

Remarque. Les normes L^2 de chacune des composantes de R, considérées comme des 2-formes à valeurs dans AM, ne dépendent que de $[g]$.

Si M est compacte, la variété conforme $(M, [g])$ est *de type positif, de type négatif* ou *de type nul* suivant que $[g]$ contient une métrique à courbure scalaire positive, négative ou identiquement nulle. On a alors :

(2.7.4) *Si (M, g) est de type positif et autoduale, resp. anti-autoduale, la forme d'intersection de M est définie-positive, resp. définie négative.*

La preuve repose sur la "formule de Weitzenböck" suivante, [Be1] Exp. XVI :

$$(2.7.5) \qquad \Delta\psi = D^*D\psi + \frac{1}{3}\,\mathrm{Scal}\cdot\psi - 2W^{\pm}(\psi), \quad \forall\psi \in C^\infty(\Lambda^{\pm}M)\ ,$$

relative à une métrique g de $[g]$, où Δ est le laplacien riemannien et D^*D le "laplacien brut" associé à la connexion de Levi-Civita D. Si $(M,[g])$ est de type positif, g peut être choisie à courbure scalaire positive et le résultat se déduit directement de (2.7.5) par contraction avec ψ et intégration sur M.

3. CONSTRUCTIONS TWISTORIELLES.

3.1 L'espace des twisteurs d'une variété autoduale.

Dans ce qui suit, nous appellerons *espace de twisteurs* de (M,g), notée simplement ZM, l'espace des demi-twisteurs (projectifs) négatifs, noté précédemment Z^-M, cf. §2.1 (la théorie pour Z^+M est similaire). Un point générique de ZM est noté J, considéré comme un élément (de carré -I) de A^-_xM, où $x = \pi(\mathrm{J})$ est la projection de J dans M (mais nous nous souviendrons que J peut être aussi regardé comme une droite complexe, notée alors ℓ, de $(\Sigma_-)_x$, cf. 2.4). L'espace tangent vertical $T^V_{\mathrm{J}}(ZM)$, tangent en J à la fibre $\pi^{-1}(x)$, coïncide avec le sous-espace des éléments de A^-_xM qui anti-commutent à J.

Nous construisons une structure presque-complexe $\mathcal{J}$ sur ZM de la façon suivante. Soit g une métrique quelconque de la classe conforme, H^D le *sous-fibré horizontal* de $T(ZM)$ déterminé par la connexion de Levi-Civita D. Nous posons :

$$(3.1.1) \qquad \mathcal{J}a = \mathrm{J}\circ a\ , \qquad \forall a \in T^V_{\mathrm{J}}(ZM) = \Lambda^{\mathrm{J},-}_xM\ ;$$

$$(3.1.2) \qquad \mathcal{J}_{|H^D_{\mathrm{J}}} = \mathrm{J}\ ,$$

via l'identification de l'espace horizontal H^D_{J} en J avec T_xM induite par π. Les deux faits suivants sont facilement vérifiés [A-H-S], cf. aussi [DV], [Ga] App. A :

(3.1.3) *$\mathcal{J}$ ne dépend pas du choix de la métrique g.*
(3.1.4) *Le tenseur de Nijenhuis, ou torsion complexe, de $\mathcal{I}$ est "égal" au demi-tenseur de Weyl négatif W^-, i.e. $\mathcal{J}$ est intégrable si et seulement si $[g]$ est autoduale.*

Nous supposons désormais que $[g]$ est autoduale. L'espace des twisteurs ZM est alors une variété complexe de dimension 3, fibrée sur M, dont les fibres sont des droites projectives complexes plongées holomorphiquement dans ZM et (globalement) préservées par la structure réelle, sans point fixe, σ de ZM définie par : $\mathrm{J} \mapsto \sigma(\mathrm{J}) := \mathrm{J}$.

Pour tout point x de M, le fibré normal $N^{(x)}$ de la fibre Z_xM dans ZM est un fibré vectoriel complexe de rang 2 dont la fibre $N^{(x)}_{\mathrm{J}}$ en J, égale au quotient $T_{\mathrm{J}}(ZM)/T^V_{\mathrm{J}}(ZM)$, est naturellement identifiée, par (3.1.2), à l'espace vectoriel complexe (T_xM, J), lui-même identifié, cf 2.4, à l'espace des homomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires de la droite complexe ℓ de $(\Sigma_-M)_x$ (identifiée à J) dans $(\Sigma_+M)_x$. Nous obtenons ainsi, via (2.4.5), l'isomorphisme canonique suivant (pour tout x) :

$$N^{(x)} = \mathcal{O}(1) \otimes (\Sigma_+M)_x \ , \tag{3.1.5}$$

où, comme il est d'usage, $\mathcal{O}(1)$ note le dual du fibré tautologique de $Z_xM = \mathbf{P}((\Sigma_-M)_x)$. Cet isomorphisme est compatible avec la structure holomorphe de $N^{(x)}$ induite par $\mathcal{J}$.

De (3.1.5) et (2.4.3) découlent directement les identifications :

$$H^0(Z_xM, N^{(x)}) = (\Sigma_-M)_x \otimes (\Sigma_+M)_x = T^{\mathbb{C}}_xM \ , \tag{3.1.6}$$

où $T^{\mathbb{C}}_xM := T_xM \otimes \mathbb{C}$ est le complexifié de T_xM, et où $H^0(Z_xM, N^{(x)})$ désigne l'espace des sections holomorphes de $N^{(x)}$. En tout point J de la fibre Z_xM, le sous-espace de $H^0(Z_xM, N^{(x)})$ des sections qui s'annulent en J est alors identifié au sous-espace $T^{0,1}_xM$ des éléments de type $(0,1)$ de $T^{\mathbb{C}}_xM$ relativement à J. Ainsi, la structure conforme de T_xM est "codée" par la géométrie complexe relative de Z_xM dans ZM de la façon suivante :
(3.1.7) *Le cône des éléments $[g]$-isotropes de $T^{\mathbb{C}}_xM$ coïncide, via* (3.1.6), *avec le cône des éléments de $H^0(Z_xM, N^{(x)})$ qui s'annulent en un point* (unique) *de Z_xM.*

Remarque. Le fibré tangent vertical $T^V(ZM)$, considéré comme un fibré vectoriel complexe de rang 1, n'est jamais un sous-fibré holomorphe de TZ mais possède une structure holomorphe, déterminée à isomorphisme près, pour laquelle $T^V(ZM)$ est isomorphe à une racine $K^{-1/2}$ du fibré anti-canonique K^{-1} de ZM. L'étude de ZM, en particulier (3.3.1) et (3.4.6), repose pour une large part sur les propriétés du système linéaire associé à $T^V(ZM)$, cf. en particulier [Hi3], [Fr-Ku], [Po1], [Do-Fr] §7.

3.2 La construction twistorielle admet la "réciproque" suivante, [Pe1], [Be2] Thm. 13.69, [Do-F1] §III (i).

(3.2.1) Théorème . *Une variété complexe de dimension 3, munie d'une structure réelle sans point fixe σ et contenant une sous-variété complexe F σ-invariante, isomorphe à la droite projective $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, dont le fibré normal dans Z est isomorphe à $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$, est, au voisinage de F, isomorphe à l'espace des twisteurs d'une variété conforme autoduale $(M, [g])$.*

L'argument repose sur la théorie des déformations relatives d'une variété complexe compacte dans une variété complexe fixée, [Ko] [Do-Fr] §II. Le fait que l'espace $H^1(F, N^F) = H^1(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1))$ soit réduit à $\{0\}$ implique que F appartient à une famille analytique à quatre paramètres complexes $M^{\mathbb{C}}$, lisse au voisinage de F, telle que l'espace tangent $T_F M^{\mathbb{C}}$ soit naturellement isomorphe à $H^0(F, N^F)$. La variété M est alors définie comme la variété des éléments réels, i.e. σ-invariants de $M^{\mathbb{C}}$, et la structure conforme $[g]$ est définie par (3.1.7). On peut montrer que ZM est fibrée sur M (au voisinage de F) et que ZM est alors identifié à l'espace des twisteurs de $(M, [g])$.
Le théorème (3.2.1) constitue un procédé effectif de construction de métriques autoduales, cf. par ex. [Hi1], [Be2] Ch. 13, [Po1], [Le3], [Kr-Ku].

Conséquence de (3.2.1) : *le fait, pour une variété complexe compacte dimension 3, d'être l'espace des twisteurs d'une variété riemannienne conforme est stable par déformation, dans la catégorie des variétés complexes admettant une structure réelle sans point fixe*, [Do-Fr], [Le-Si] Thm. 1.15.

Au niveau infinitésimal, la *correspondance de Penrose* identifie la cohomologie du complexe elliptique (2.6.2) à la partie réelle $H^i_\sigma(ZM, \Theta)$ de la

cohomologie sur ZM à valeurs dans le faisceau Θ des germes de sections holomorphes de $T(ZM)$, i.e. on a les identifications :

$$H^0_\sigma(ZM,\Theta) = H^0_{[g]},\ H^1_\sigma(ZM,\Theta) = H^1_{[g]},\ H^2_\sigma(ZM,\Theta) = H^2_{[g]},\quad H^3_\sigma(ZM,\Theta) = \{0\}\ , \tag{3.2.2}$$

[Ki-Ko] Thm. (4.1), [Fl], [Do-Fr] Prop. (3.18), [Ea-Le] §6. Cf. [E-P-W], [Ba-Ea] pour un aperçu général de la transformation de Penrose, et, dans le cadre riemannien, [At], [Hi2], [Sa].

Remarque. La démonstration de (3.2.1) montre que toute variété autoduale $(M,[g])$ admet, localement, une complexification conforme $M^{\mathbb{C}}$, en particulier est analytique.

3.3. Dans ce paragraphe, M est supposée compacte. Dans ce cas, nous notons $M^{\mathbb{C}}$ la composante connexe d'une fibre F de ZM dans *l'espace des cycles* de ZM (au sens de D. Barlet, cf. [Ca]). On a alors le résultat suivant [Ca] :

(3.2.2) *$M^{\mathbb{C}}$ est compacte si et seulement si ZM est une variété de Moishezon.*

Rappelons qu'une variété complexe (compacte) Z est *de Moishezon* si sa dimension algébrique $a(Z)$ est maximale, ici égale à 3 ; de façon équivalente, Z est dominée par une variété projective. Un espace de twisteurs (compact) ZM est de Moishezon si et seulement s'il appartient à *la classe $\mathcal{C}$ de Fujiki*, i.e. est dominé par une variété kählérienne, [Ca].

De façon générale, le type algébrique de ZM est étroitement lié au type de $(M,[g])$ défini en 2.7. En particulier, si $(M,[g])$ est de type négatif, $a(ZM)$ est égal à 0 ; de façon précise, ZM n'admet alors aucun diviseur non-trivial [Vi], [Ga]. Si $(M,[g])$ est de type zéro, $a(ZM)$ est égal à 0 ou 1, [Pn2]. Dans le cas opposé, où $a(ZM)$ est égal à 3 - $(M,[g])$ est alors de type positif, [Po2] - on a le résultat bien connu suivant de N. Hitchin [Hi3], cf. aussi [Fr-Ku] :

$$\begin{aligned} ZM \text{ est une variété projective} &\Leftrightarrow (M,[g]) = (S^4,[g_S]) \text{ ou } (\mathbf{C}P^2,[g_{FS}]) \\ &\Leftrightarrow ZM \text{ est kählérienne}\ . \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

L'argument repose sur l'étude du système linéaire de $T^V(ZM)$, cf. §2.1 Remarque.
Nous avons aussi le résultat suivant de F. Campana [Ca] :

$$ZM \text{ est une variété de Moishezon} \Rightarrow \quad M \text{est homéomorphe à } \tau\,\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \ , \tag{3.3.2}$$
$$(\text{difféomorphe, si } \tau \leq 3,\ [\mathrm{Po1}]) \ .$$

Démonstration : On peut déduire de (3.2.2) que M est simplement-connexe [Ca]. Comme $[g]$ est de type positif, la forme d'intersection de M est définie-positive par (2.7.4). Le résultat est alors une conséquence de [Do] et [Fr].

Remarque. On déduit aisément de (3.3.1) que (S^4, g_S) et $(\mathbb{C}\mathrm{P}^2, g_{FS})$ sont les seules variétés riemanniennes compactes autoduales, d'Einstein (i.e. $\mathrm{Ric}_0 \equiv 0$) à courbure scalaire positive, cf. [Be2] Th. 13.13.

3.4. Exemples

3.4.1. *Le cas plat (conforme)* : Considérons un espace vectoriel complexe T de dimension 4 (*l'espace des twisteurs vectoriels*) muni d'une structure quaternionienne j. Soit $\tilde{G} = G(2, T)$ la grassmannienne des 2-plans complexes de T, munie de la structure réelle induite par j. La sphère S^4 est réalisée comme la variété des éléments réels de $\tilde{G}$, i.e. comme la droite projective quaternionienne $\mathbb{H}P(T, j)$ constituées des droites quaternioniennes, ou 2-plans j-invariants de T. Pour chaque élément x de S^4, l'espace tangent T_xM est identifié à l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(x, T/x)$ des homomorphismes $\mathbb{H}$-linéaires de x dans T/x et la structure conforme standard de S^4 se déduit directement de cette identification. En outre, les droites quaternioniennes x et T/x s'identifient respectivement aux fibres en x des fibrés de spineurs $\Sigma_- S^4$ et $\Sigma_+ S^4$ (si l'orientation de S^4 est convenablement choisie). L'espace des twisteurs $Z(S^4)$ est ainsi identifié à l'espace projectif complexe $\mathbb{P}(T)$, la projection twistorielle associant à toute droite complexe ξ de T la droite quaternionienne $\pi(\xi)$ engendrée par ξ et $\xi j := \sigma(\xi)$. La grassmannienne $\tilde{G}$, vue comme la variété des droites projectives complexes de $\mathbb{P}(T)$, coïncide avec la variété $(S^4)^{\mathbb{C}}$ évoquée en 3.3 (modèle de Klein).

Le modèle plat ainsi esquissé est à l'origine de la théorie de R. Penrose, cf. [Pe1] : chaque point de l'univers complexifié $\tilde{G}$ est figuré par une droite projective dans l'espace des twisteurs $\mathbb{P}(T)$ et la géométrie conforme (holomorphe) de $\tilde{G}$ est remplacée par la géométrie d'incidence dans $\mathbb{P}(T)$, en ce sens que deux points de $\tilde{G}$ appartiennent à une même géodésique nulle si et seulement si les droites projectives correspondantes se rencontrent dans $\mathbb{P}(T)$.

3.4.2. Le plan euclidien conforme $\mathbb{R}^4$ se déduit de S^4 en choisisant dans S^4 un "point à l'infini" x_∞ et un "point-origine" x_0. L'espace des twisteurs $Z(\mathbb{R}^4)$ est alors égal à $\mathbb{P}(T) - \mathbb{P}(x_\infty)$ et, comme tel, est naturellement identifié, comme variété complexe, à l'espace total du fibré $\mathcal{O}(1) \otimes x_\infty$ sur la droite projective complexe $\mathbb{P}(x_0)$, la projection (holomorphe) p de $Z(\mathbb{R}^4)$ sur $\mathbb{P}(x_0)$ étant induite par la projection de T sur x_0 parallèlement à x_∞. La variété $(\mathbb{R}^4)^{\mathbb{C}}$ est l'espace des sections holomorphes de p.

3.4.3. On déduit de même une identification naturelle de $Z(\mathbb{R}^4 - \{0\})$ avec l'espace total, privé de la section nulle, du fibré $\mathcal{O}(1,-1)$ sur la surface complexe $\mathbb{P}(x_0) \otimes \mathbb{P}(x_\infty)$, où $\mathcal{O}(1,-1)$ note le produit tensoriel externe de $\mathcal{O}(1)$ et $\mathcal{O}(-1)$ définis respectivement sur $\mathbb{P}(x_0)$ et $\mathbb{P}(x_\infty)$. L'espace $\mathcal{O}(1,-1)$ lui-même s'identifie alors à la variété obtenue à partir de $Z(\mathbb{R}^4)$ en *éclatant* la fibre $\mathbb{P}(x_0)$ en l'origine.

3.4.4. *Variétés dont la connexion de Levi-Civita est autoduale.* L'espace des twisteurs de ces variétés admet, au voisinage de chaque fibre F de la fibration twistorielle, une projection holomorphe p sur F, induite par le transport parallèle suivant D (qui est plate sur $\Lambda^- M$, cf. 2.1). Les fibres de p sont alors les variétés intégrales de la distribution horizontale H^D sur ZM, et, pour tout élément J de $F = Z^-_{x_0} M, p^{-1}(\mathrm{J})$ est (localement) une copie de M, munie de la structure kählérienne déduite de J par transport parallèle.

Cette description vaut pour $\mathbb{R}^4$, cf. 3.4.2, pour les tores plats T^4, pour les surfaces $K3$ (munie de l'orientation opposée), cf. §2.3 (cf. [To] pour une preuve "twistorielle" de l'existence des métriques de Calabi - Yau sur une surface $K3$).

3.4.5. *Le plan projectif complexe.* Soit E un espace vectoriel complexe hermitien de dimension 3. Pour tout point x du plan projectif complexe $\mathbb{P}(E)$, l'espace tangent $T_x\mathbb{P}(E)$ est naturellement identifié à l'espace Hom $(x, x^\perp)$ des homomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires de la droite complexe x dans le 2-plan orthogonal $x^\perp$. Toute droite complexe ℓ de $x^\perp$ détermine une droite complexe Hom (x, ℓ) dans $T_x\mathbb{P}(E)$, donc une structure complexe orthogonale de $T_x\mathbb{P}(E)$ négativement-orientée. Nous identifions ainsi l'espace des twisteurs $Z(\mathbb{P}(E))$ avec la variété des drapeaux $\mathbb{D}(E)$ de E, dont les points sont les paires (x, ℓ) constituées d'une droite complexe de E et d'un plan complexe de E contenant x, muni de sa structure complexe ordinaire ; la projection twistorielle associe à (x, ℓ) la droite complexe $\pi((x, \ell)) = \ell \cap x^\perp$. Les éléments "à distance finie" de $(\mathbb{P}(E))^{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(E^*)$ sont les paires (y, ξ) telles que la droite y n'est pas contenue dans le 2-plan ξ : la droite projective correspondante dans $\mathbb{D}(E)$ est constituée des drapeaux (x, ℓ) tels que x est contenu dans ξ et ℓ contient y. Les éléments "à l'infini" sont les paires (y, ξ) où y est contenue dans ξ : le cycle correspondant est la somme des deux droites projectives suivantes de $\mathbb{D}(E)$: l'ensemble des drapeaux (x, ℓ) tels que x est contenu dans ξ, resp. ℓ contient y.

3.4.6. *Sommes connexes* $k\,\mathbb{C}\mathrm{P}^2$. Les structures conformes autoduales de type positif sur $2\,\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ ont été construites en [Po1] à partir de leurs espaces de twisteurs, obtenus par "petites déformations" de l'intersection (singulière) de deux quadriques dans l'espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathrm{P}^5$, cf. aussi [Hu]. Les métriques construites en [Le3] sur $k\,\mathbb{C}\mathrm{P}P^2$, $\forall k \geq 0$, cf. 2.3.4.2, peuvent être également obtenus par voie "twistorielle", de façon similaire, [Le3] §7, cf. aussi [Kr-Ku].

Tous les espaces de twisteurs ainsi construits sont des variétés de Moishezon. Toutefois, les espaces de twisteurs des structures conformes autoduales sur $k\,\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ sont, à partir de $k = 5$, génériquement de dimension algébrique égale à 0, [Do-Fr], cf. aussi [Po2] pour une étude approfondie des cas $k = 3, 4$.

3.5. Sommes connexes de variétés auto-duales (d'après [Do-Fr]).

Il résulte aisément de §4.1, infra, que la somme connexe de deux variétés conformes plates admet une structure conforme plate. Dans [Do-Fr], S. Donaldson et R. Friedman donnent des conditions suffisantes pour l'existence de métriques autoduales sur la somme connexe de deux variétés (compactes) autoduales (M_1, g_1) et (M_2, g_2). Soit $M_1 \# M_2$ la somme connexe en les points x_1 et x_2 ; la première étape de [Do-Fr] consiste à fabriquer un "espace des twisteurs" singulier Z obtenu en faisant éclater les fibres twistorielles $Z_{x_1} M_1$ et $Z_{x_2} M_2$ dans $Z(M_1)$ et $Z(M_2)$ et en identifiant les quadriques ainsi obtenues (cf. (3.4.3)) au moyen de I_λ, cf. infra §4.1 pour les notations.

Une *déformation standard* (de dimension 1) de Z est une variété complexe $\mathcal{X}$, munie d'une structure réelle sans point fixe σ, et une application holomorphe propre réelle p de $\mathcal{X}$ sur un voisinage ouvert S de 0 dans $\mathbb{C}$ telles que : (i) $p^{-1}(0) = Z$ et la restriction de σ à Z coïncide avec la structure réelle de Z ; (ii) au voisinage de tout point de $Z, \mathcal{X}$ admet un système de coordonnées complexes pour lequel p s'écrit $(z_1, z_2, z_3, z_4) \to z_1 z_2$, [Do-Fr] Def. (4.4). On a alors :

(3.5.1) Théorème *([Do-Fr] Th. 4.5). Si $p : \mathcal{X} \to S$ est une déformation standard de Z, pour tout s suffisamment proche de 0 dans S, $p^{-1}(s)$ est l'espace des twisteurs d'une structure conforme autoduale sur la somme connexe $M_1 \# M_2$.*

Une telle déformation standard existe, en particulier, lorsque les espaces $H^2_{g_1}$ et $H^2_{g_2}$ sont réduits à $\{0\}$, [Do-Fr] Thm. (6.6). On retrouve ainsi, par (2.6.5), le théorème de Floer montrant l'existence de métriques autoduales sur $k\,\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ pour tout k, cf. Introduction. On peut aussi déduire de (3.5.1) l'existence de métriques autoduales sur les sommes connexes $n\underline{K3} \# (2n+1)\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, pour tout n, où $\underline{K3}$ désigne une surface $K3$ munie de l'orientation opposée, [Do-Fr] Th. (6.25).

4. LE THÉORÈME DE TAUBES

La démonstration du Théorème (1.1) donnée en [Ta4] est d'une grande complexité, dont nous ne pouvons rendre compte dans ces Notes. Nous nous bornons à en donner quelques idées générales, déjà partiellement présentes en [Ta3], en commençant par une description précise de l'opération *somme connexe* (telle qu'elle figure en [Ta4] §3), sur laquelle repose la démonstration entière.

4.1. Sommes connexes.

Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés riemanniennes connexes orientées de dimension 4. La construction de la somme connexe $M_1 \# M_2$ requiert les données suivantes [Ta4] §3 : (a) un point x_1 de M_1, un repère g_1-orthonormé, positivement orienté, e_1 de $T_{x_1}M_1$, déterminant une *carte exponentielle* $\phi_1 : V_1 \subset \mathbb{R}^4 \to M_1$ centrée en x_1, où V_1 est une boule ouverte de $\mathbb{R}^4$ (données similaires pour M_2) ; (b) trois paramètres réel positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda$, $\lambda > \frac{3}{2}\varepsilon_1\varepsilon_2$, tels que les anneaux $A_1 = \{u \in \mathbb{R}^4 | \varepsilon_1 < |u| < \lambda/\varepsilon_2\}$ et $A_2 = \{v \in \mathbb{R}^4 | \varepsilon_2 < |v| < \lambda/\varepsilon_1\}$ soient contenus respectivement dans V_1 et V_2. La variété (orientée) $M_1 \# M_2$ est obtenue en enlevant de M_1 la boule (fermée) $\widetilde{B}(x_1; \varepsilon_1)$ et de M_2 la boule $\widetilde{B}(x_2; \varepsilon_2)$, et en identifiant l'anneau $\widetilde{A}_1 = \phi_1(A_1)$ à l'anneau $\widetilde{A}_2 = \phi_2(A_2)$ par le difféomorphisme $\psi_\lambda = \phi_2 \circ I_\lambda \circ \phi_1^{-1}$, où I_λ est l'inversion-symétrie définie par $I_\lambda(u) = \lambda/u$ (où $u \neq 0$ est considéré comme un quaternion). La construction d'une structure conforme $[g]$ sur $M_1 \# M_2$ dépend, en outre, du choix (fixé une fois pour toutes) d'une fonction de troncature β de $[0, \infty)$ sur $[0, 1]$, telle que β est nulle sur le segment $[0, 6/5]$ et égale à 1 sur la demi-droite $[4/3, \infty]$ (par exemple). La structure conforme g est alors définie comme suit :

(i) sur $M_1 - \widetilde{B}(x_1; \lambda/\varepsilon_2)$, $[g]$ est représentée par g_1 et, sur $M_2 - \widetilde{B}(x_2; \lambda/\varepsilon_1)$ par g_2 ;

(ii) sur $\widetilde{A}_1$ et $\widetilde{A}_2$, identifiés par ψ_λ, $[g]$ est représentée respectivement par les métriques $\hat{g}_1$ et $\hat{g}_2$, conformes entre elles via ψ_λ, définies (dans les cartes ϕ_1 et ϕ_2) par

$$\hat{g}_1 = g_E + \beta(|u|/\varepsilon_1)\, m_{g_1} + \frac{|u|^4}{\lambda^2} I_\lambda^*(\beta(\lambda/|u|\varepsilon_2)\, m_{g_2}) \ , \tag{4.1.1}$$

$$\hat{g}_2 = g_E + \frac{|v|^4}{\lambda^2} I_\lambda^*(\beta(\lambda/\varepsilon_1|v|)\, m_{g_1}) + \beta(|v|/\varepsilon_2) m_{g_2} \ , \tag{4.1.2}$$

où g_E est la métrique plate de $\mathbb{R}^4$ et $g_1 = g_E + m_{g_1}$, resp. $g_2 = g_E + m_{g_2}$, dans la carte ϕ_1, resp. ϕ_2.

La structure conforme $[g]$ peut être décrite, de façon alternative (en brisant la symétrie entre M_1 et M_2) en considérant les deux ouverts U_1 et U_2 de $M_1 \# M_2$ définis comme suit (pour λ/ε_1 petit) : $U_2 = M_2 - \widetilde{B}(x_2; 16\lambda/\varepsilon_1)$ et U_1 est le complémentaire, dans $M_1 \# M_2$, de $M_2 - \widetilde{B}(x_2; 32\lambda/\varepsilon_1)$, identifié, par ψ_λ, à $M_1 - \widetilde{B}(x_1; \varepsilon_1/32)$. La structure conforme $[g]$ est alors représentée, sur U_2, par la métrique g_2 et, sur $U_1 = M_1 - \widetilde{B}(x_1; \varepsilon_1/32)$, par la métrique égale à g_1 sur $M_1 - \widetilde{B}(x_1; \lambda/\varepsilon_2)$ et, sur $\widetilde{B}(x_1; \lambda/\varepsilon_2) - \widetilde{B}(x_1; \varepsilon_1/32)$, à la métrique $\hat{g}_1'$ définie, dans la carte ϕ_1, par :

$$\hat{g}_1' = g_E + \beta(|u|/\varepsilon_1)\, m_{g_1} + \beta(256|u|/\varepsilon_1) \frac{|u|^4}{\lambda^2} I_\lambda^*(\beta(\lambda/|u|\varepsilon_2)\, m_{g_2}) \ . \tag{4.1.3}$$

Cette description de $[g]$ convient particulièrement à la situation considérée par Taubes, où (M_1, g_1) est une variété riemannienne compacte (orientée, de dimension 4) quelconque, à laquelle on ajoute, par somme connexe, k copies de $(\mathbb{CP}^2, g_{FS})$ en k points distincts de M_1 (les paramètres sont choisis de telle sorte que $\lambda/\varepsilon_2 := \varepsilon$ soit le même pour tous les points et les points sont distants les uns des autres d'au moins 2ε). La structure conforme $[g]$ est alors décrite par les données locales $\{(U_0, \hat{g}_0), (U_i, \hat{g}_i)\}, 1 \leq i \leq k$, où $\{U_0, U_i\}$ constitue un recouvrement ouvert de $M_1 \# \mathbb{CP}^2 \# \cdots \# \mathbb{CP}^2$, chaque $(U_i, \hat{g}_i)$ est un ouvert de $(\mathbb{CP}^2, g_{FS}), U_0$ est identifié à un ouvert de M_1, la métrique $\hat{g}_0$ est égale à g_1 sur $M_1 - \widetilde{B}(x_i; \varepsilon)$ et est définie par (4.3) sur chaque boule $\widetilde{B}(x_i; \varepsilon)$; en particulier, $\hat{g}_0$ est conforme à $\hat{g}_i = g_{FS}$ sur $U_0 \cap U_i$ (et les U_i sont mutuellement disjoints), cf. [Ta4] §6.

4.2. Soit x_1 un point de M_1 où le demi-tenseur de Weyl négatif $W^-[g_1]$ n'est pas nul. La construction de [Ta4] repose sur le fait qu'on peut "diminuer" W^- par somme connexe en x_1 avec $(\mathbb{C}P^2, g_{FS})$. De façon plus précise, cf. [Ta4] Prop.3.5, il existe une constante universelle $\delta, 0 < \delta < 1$, telle que, si les paramètres $(e_1, e_2, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de la somme connexe sont convenablement choisis, on a l'inégalité

$$||W^-[g]|| < (1-\delta)||W^-[g_1]|| \ , \tag{4.2.1}$$

où $||.||$ est une norme appropriée sur la boule $B = B(x_1; \varepsilon = \lambda/\varepsilon_2)$ (notations de 4.1). Le fait essentiel, à ce stade de la construction, est que le *même* δ vaut pour tout ε assez petit.
On montre ensuite, [Ta4] Prop.3.7, que (4.2.1) peut être "globalisé" (avec une constante δ différente, mais encore universelle) en opérant la somme connexe (avec des paramètres convenablement choisis) en un nombre de points suffisamment grand de M_1.

4.3. L'opération précédente, répétée un nombre suffisant de fois, permet de réduire l'équation : $W^-[g+h] = 0$ à une perturbation de l'équation linéraire $\widetilde{L}_g^-(h) := \Pi_g^- \circ L_g^-(h)$, où g note une métrique de $M_N = M \# N\mathbb{C}P^2$ (N grand) et h une section de $S^2T^*M_N$, cf. §2.5.
Une difficulté du problème linéaire est la non-ellipticité de l'opérateur différentiel L_g^-.
Cette difficulté est résolue en [Ta4] §5 par la construction suivante, fondée sur la forme (2.5.12) de L_g^-. Considérons l'opérateur différentiel elliptique du premier ordre $P : C^\infty(\Lambda^+M_N \otimes \Lambda^-M_N) \oplus C^\infty(\Lambda^-M_N) \to C^\infty(T^*M_N \otimes \Lambda^-M_N)$ défini par :

$$P((\xi, \psi)) = \delta^D \xi + D\psi \ , \tag{4.3.1}$$

où ξ est vu comme une 2-forme (autoduale) à valeurs dans Λ^-M. Soit w une section de $\mathcal{W}^-$, solution de l'équation :

$$\Pi^{\Sigma^4_-}[d_-^D \delta^D w + \frac{1}{2} c(h \otimes \ \mathrm{Ric}_0) - d_-^D v - d_-^D D\psi] = Q \ , \tag{4.3.2}$$

où $\delta^D w = v + \delta^D h + D\psi$ est la décomposition de Hodge de $\delta^D w$ relative à P (v est un élément du noyau de l'adjoint P^* dans $C^\infty(T^*M_N \otimes \Lambda^-M_N)$).

Alors, h satisfait clairement l'équation $\widetilde{L}_g^-(h) = Q$. Celle-ci a été ainsi remplacée par l'équation elliptique (4.3.2) en w, où v, h, ψ sont considérées comme des fonctions de w déterminées par la décomposition de Hodge, [Ta4] §5 (d).
Une seconde difficulté, qui n'est surmontée qu'au prix d'un affinement substantiel de la théorie elliptique (linéaire) [Ta4] §4, est la nécessité d'obtenir des estimés a priori concernant la norme C^0 de h ($g + h$ doit être une métrique).

4.4. Une structure conforme peut être cherchée sous la forme d'une famille de métriques locales, comme est donnée $[g]$ elle-même sur M_N, cf. §4.1. Cette liberté permet de substituer à la seule équation $\widetilde{L}_g^-(h) = Q$, où g est une métrique (globale) dans $[g]$, une *famille* d'équations locales :

$$\widetilde{L}_{\hat{g}_0}^-(h_0) = Q_0,\ \widetilde{L}_{\hat{g}_i}^-(h_i) = Q_i,\ i = 1, \cdots, N\ , \tag{4.4.1}$$

(notations de 4.1), où les Q_0, Q_i sont des données locales conformément liées entre elles (ainsi que les h_0, h_i). La réussite de cette stratégie, cf. aussi [Do-Kr] Ch. 7.2, repose sur la possibilité de "globaliser" chacune des équations locales de (4.4.1) en une équation définie sur M, pour la première, et sur $\mathbf{C}P^2$ pour les N autres, sous la forme suivante :

$$\widetilde{L}_{g_M}^-(\hat{h}_0) = \hat{Q}_0,\ L_{g_{FS}}^-(\hat{h}_i) = \hat{Q}_i,\ i = 1, \cdots, N\ , \tag{4.4.2}$$

où $g_M = g_1$ est la métrique initiale de $M = M_1$ et où les $\hat{Q}_0, \hat{Q}_i$ sont explicitement liés aux Q_0, Q_i, (ainsi qu'aux $\hat{h}_0, \hat{h}_i$) et les h_0, h_i aux solutions $\hat{h}_0, \hat{h}_i$, [Ta4] §6.
Du fait de la surjectivité de $L_{g_{FS}}^-$, cf. (2.6.5), les N équations $L_{g_{FS}}^-(\hat{h}_i) = \hat{Q}_i$ sont résolubles pour tout $\hat{Q}_i$, et les normes des solutions sont contrôlée par la théorie générale développée en [Ta4] §§4,5. L'opérateur $\widetilde{L}_{g_M}^-$ n'est pas surjectif en général, mais l'équation $\Pi_E(L_{g_M}^-(\hat{h}_0) - \hat{Q}_0) = 0$ est résoluble (pour tout $\hat{Q}_0$) pour E assez grand, où Π_E note la projection L^2-orthogonale sur la somme des espaces propres du laplacien D^*D (relatif à g_M) associés aux valeurs propres supérieures à E, [Ta4] §§2,6 (avec contrôle similaire sur les normes). L'équations résiduelle $(1 - \Pi_E)(L_{g_M}(\hat{h}_0) - \hat{Q}_0) = 0$, portant

sur un nombre fini d'inconnues, est résolue par une ultime adjonction de copies de $\mathbb{C}P^2$ ("cokernel step"), [Ta4] §§2,9.

4.5. Le théorème (1.1) se déduit de la "théorie linéaire" esquissée en 4.3, 4.4 par un argument de point fixe, [Ta4] §§8,9.

4.6. Une conséquence immédiate de (1.1) est le résultat suivant :

(4.6.1) Corollaire *Tout groupe* Γ *de présentation finie peut être réalisé comme le groupe fondamental d'une variété complexe compacte de dimension 3.*

Démonstration. Le groupe Γ peut être réalisé comme le groupe fondamental d'une variété M (réelle) compacte, orientée, de dimension 4. Le groupe fondamental de M est égal à celui de $M\#k\mathbb{C}P^2$, pour tout k, et celui de $M\#k\mathbb{C}P^2$ est égal à celui de son espace des twisteurs, qui est un fibré en sphères S^2. □

4.7. Remarque. Comme il est bien connu, il existe, au contraire, des groupes de présentation finie qui ne peuvent pas être réalisés comme le groupe fondamental d'une variété compacte *kählérienne* de dimension 3, cf. par exemple [Si] et références incluses.

4.8. Note. Le fait que tout groupe de représentation finie est réalisable comme le groupe fondamental d'une variété compacte orientée de dimension 4 est "folklorique". L'argument suivant m'a été communiqué par J. Lannes. La classe des groupes de présentation finie est la plus petite classe T des groupes vérifiant les trois propriétés suivantes :

(T1) le groupe Z appartient à T ;

(T2) le coproduit de deux groupes appartenant à T appartient à T ;

(T3) pour tout groupe G appartenant à T et tout élément r de G, le quotient de G par le sous-groupe normal engendré par r appartient à T.

On vérifie aisément que la classe des groupes fondamentaux des variétés compactes, orientées, de dimension 4 satisfait (T1), (T2) (sommes connexes), et (T3) (chirurgie autour d'un représentant de r). □

Références

[A-K-L] M. Anderson, P.B. Kronheimer, C. LeBrun. *Complete Ricci-flat Kähler manifolds of infinite topological type.* Comm. Math. Phys. 125 (1989), 643-660.

[At] M.F. Atiyah. *The geometry of Yang-Mills fields.* Lezioni Fermiane. Scuola Superiore Pisa. 1979.

[A-H-S] M.F. Atiyah, N.J. Hitchin, I.M. Singer. *Self-duality in four-dimensional Riemannian Geometry.* Proc. R. Soc. Lond. A362 (1978), 425-461.

[Ba-Ea] R.J. Baston, M.G. Eastwood. *The Penrose Transform. Its Interaction with Representation Theory.* Clarendon Press. Oxford. 1989.

[Be1] A.L. Besse. *Géométrie riemannienne en dimension 4* (1981). Cedic-F. Nathan.

[Be2] A.L. Besse. *Einstein manifolds.* Ergebnisse der Math. 10, 1987, Springer.

[Bo] J.P. Bourguignon. *Stabilité par déformation non-linéaire de la métrique de Minkowski.* Séminaire Bourbaki n°740 Juin 1991 Astérisque 201-202-209.

[Ca] F. Campana. *On twistor spaces of the class $\mathcal{C}$.* J. Diff. Geom. 33 (1991), 541-549.

[De] A. Derdzinski. *Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four.* Comp. Math. 49 (1983), 405-433.

[Do] S.K. Donaldson. *An application of gauge theory to four-dimensional topology.* J. Diff. Geom. 18 (1983), 279-315.

[Do-Kr] S.K. Donaldson, P.B. Kronheimer. *The Geometry of Four-Manifolds.* Clarendon Press. Oxford. 1990.

[Do-Ve] A. Douady - J.L. Verdier. *Les équations de Yang-Mills* Séminaire ENS 77-78, Astérisque 71-72.

[DV] M. Dubois-Violette. *Structures complexes au-dessus des variétés, applications.* dans : "Mathématiques et physique" Séminaire de l'E.N.S. 79-82, Ed. L. Boutet de Monvel, A. Douady, J.L. Verdier. Prog. in Math. 37 (1983) Birkhäuser. (1981).

[Do-Fr] S.K. Donaldson, R. Friedman. *Connected sum of self-dual manifolds and deformations of singular spaces.* Nonlinearity 2 (1989), 197-239.

[Ea-Le] M.G. Eastwood - C. LeBrun. *Fattening complex manifolds : curvature and Kodaira-Spencer maps.* J. Geom. Phys.8 (1992), 123-146.

[E-P-W] M.G. Eastwood, R. Penrose, R.O. Wells, Jr. *Cohomology and massless fields.* Comm. Math. Phys. 78 (1981), 305-351.

[E-G-H] T. Eguchi, P.B. Gilkey, A.J. Hanson. *Gravitation, Gauge theories and Differential Geometry.* Phys. Reports 66 (1980), 215-397.

[Fl] A. Floer. *Self-dual conformal structures on $\ell\mathbb{C}P^2$.* J. Diff. Geom. 33 (1991), 551-573.

[Fr] M.H. Freedman. *The topology of four-dimensional manifolds.* J. Diff. Geom. 17 (1992), 357-454.

[Fr-Ku] T. Friedrich - H. Kurke. *Compact four-dimensional self-dual Einstein manifolds with positive scalar curvature.* MathNachr. 106 (1982), 271-299.

[Fr-Uh] D.S. Fried - K.K. Uhlenbeck. *Instantons and four-manifolds* MSRI Publ. Vol. 1 (1984). Springer.

[Ga] P. Gauduchon. *Structures de Weyl et théorèmes d'annulation sur une variété conforme autoduale.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa XVIII (1991), 563-629.

[Gi-Ha] G.W. Gibbons - S.W. Hawking. *Gravitational multi-instantons.* Phys. Lett. B. 78 (1978), 430-432.

[Hi1] N.J. Hitchin. *Polygons and Gravitons.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 83, (1979), 465-476.

[Hi2] N.J. Hitchin. *Linear field equations on self-dual spaces.* Proc. R. Soc. Lond. A370 (1980), 173-191.

[Hi3] N.J. Hitchin. *Kählerian Twistor Spaces* Proc. R. Soc. Lond. 43 (1981), 133-150.

[Hi4] N.J. Hitchin. *The Yang-Mills equation and the topology of four-manifolds* [d'après S.K. Donaldson], Séminaire Bourbaki n° 606, fév. 1983 Astérique 105-106.

[Hi5] N.J. Hitchin. *Hyperkähler manifolds.* Séminaire Bourbaki n°748 nov. 1991.

[Hu] J. Hurtubise. *The intersection of two quadrics in* $\mathbb{P}_5(\mathbb{C})$ *as a twistor space.* Ann. Glob. Analysis Geom. Vol. 3 (1985), 185-195.

[It1] M. Itoh. *Half-conformally Flat Structures and the Deformation Obstruction Space.* A paraître dans Math. J. Tsukuba.

[It2] M. Itoh. *Moduli of Half Conformally Flat Structures.* A paraître aux Math. Ann..

[Ko] K. Kodaira. *A theorem of completness of characteristic systems for analytic families of compact submanifolds of a complex manifold.* Ann. of Math. 75 (1962), 146-162.

[Ki-Ko] A.D. King - D. Kotschick. *The deformation theory of anti-self-dual conformal structures.* Math. Ann. 294 (1992), 591-609.

[Ki-Po] J. Kim - M. Pontecorvo. *A new method of constructing scalar-flat Kähler metrics* (1993). Preprint.

[Kr-Ku] B. Kreussler - H. Kurke. *Twistor spaces over the connected sum of 3 projective planes.* Comp. Math. 82 (1992), 25-55.

[Ku] H. Kurke. *Classification of twistor spaces with a pencil of surfaces of degree 1*, I. A paraître aux Math. Nachr.

[La] J. Lafontaine. *Remarques sur les variétés conformément plates.* Math. Ann. 259 (1982), 313-319.

[Le1] C. LeBrun. *Scalar-flat Kähler matrics.* J. reine angew. Math. 420 (1991), 161-172.

[Le2] C. LeBrun. *Explicit self-dual metrics on* $\mathbb{C}\mathrm{P}^2\#\cdots\#\mathbb{C}\mathrm{P}^2$. J. Diff. Geom. 34 (1991), 233-253.

[Le3] C. LeBrun. *Asymptotically-Flat Scalar Kähler Surfaces.* Preprint.

[Le-Si 1] C. LeBrun - M.A. Singer. *Existence and Deformation Theory for Scalar-Flat Kähler Metrics on Compact Complex Surfaces.* Inv. Math. 112 (1993), 273-313.

[Le-Si 2] C. LeBrun - M.A. Singer. *A Kummer-type construction of self-dual 4-manifolds (1993).* Preprint.

[Lw] H. Blaine Lawson, Jr. *The theory of gauge fields in four dimensions.* CBMS 58 (1985).

[Pe1] R. Penrose. *Non-linear gravitons and curved twistor theory.* Gen. Relativity Grav. 7 (1976), 31-52.

[Pe2] R. Penrose. *The complex Geometry of the Natural Word.* Proc. Intern. Congress Math. Helsinki, (1978).

[Pe3] R. Penrose. *On the origin of twistor theory.* in : Gravitation and Geometry, in honour of I. Robinson, ed. W. Rindler and A. Trautman. Bibliopolis, Naples (1987).

[Pe-Ri] R. Penrose - W. Rindler. *Spinors and Space-time 1,2.* Cambridge U. Press (1984-1986).

[Po1] Y.S. Poon. *Compact self-dual manifolds with positive scalar curvature.* J. Diff. Geom. 24 (1986), 97-132.

[Po2] Y.S. Poon. *Algebraic dimension of twistor spaces.* Math. Ann. 282 (1988), 621-627.

[Pn1] M. Pontecorvo. *Algebraic dimension of twistor spaces and scalar curvature of anti-self-dual metrics.* Math. Ann. 291 (1991), 113-122.

[Pn2] M. Pontecorvo. *Twistor spaces of anti-self-dual Hermitian surfaces.* Trans. Am. Math. Soc. 331 (1992), 653-661.

[Pr] M.J. Perry. *Gravitational instantons,* in : Seminar on Differential Geometry, Ed. S.T. Yau (1982), Princeton U. Press 102.

[Sa] S. Salamon. *Topics in four-dimensional Riemannian Geometry.* Geometry Seminar "Luigi Bianchi" (1982). Ed.E. Vesentini. LNM 1022. Springer.

[Si] C.T. Simpson. *Higgs bundles and local systems.* Publ. math. IHES n°75 (1992), 5-95.

[Si-Th] I.M. Singer - J.A. Thorpe. *The curvature of 4-dimensional Einstein spaces.* Global Analysis. Papers in honour of K. Kodaira. Ed. D.C. Spencer and S.I. Iyanaga (1969) Princeton Math. Series 29.

[Ta1] C.H. Taubes. *Self-dual Yang-Mills connections on non-self-dual 4-manifolds.* J. Diff. Geom. 17 (1982), 139-170.

[Ta2] C.H. Taubes. *Self-dual connections on 4-manifolds with indefinite intersection metrics.* J. Diff. Geom. 19 (1984), 517-560.

[Ta3] C.H. Taubes. *The stable topology of self-dual moduli spaces.* J. Diff. Geom. 29 (1989), 163-230.

[Ta4] C.H. Taubes. *The existence of anti-self-dual conformal structures.* J. Diff. Geom. 36 (1992), 163-253.

[TN] Twistor Newsletter (périodique). Mathematical Institute. Oxford.

[To] P. Topiwalla. *A new proof of the existence of Kähler-Einstein metrics on $K3$,* I, II. Inv. Math. 89 (1987), 425-454.

[Vi] M. Ville. *Twistor examples of algebraic dimension zero threefolds.* Inv. Math. 10 (1991), 537-546.

[Ya1] S.T. Yau. *On the Curvature of Compact Hermitian Manifolds.* Inv. Math. 25 (1974), 213-239.

[Ya2] S.T. Yau. *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA 74 (1977), 1798-1799.

Paul GAUDUCHON
Centre de Mathématiques
U.R.A. 169 du C.N.R.S.
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex

Astérisque

EDUARD LOOIJENGA

Intersection theory on Deligne-Mumford compactifications [after Witten et Kontsevich]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 768, p. 187-212

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__187_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Mars 1993

45ème année, 1992-93, n° 768

INTERSECTION THEORY ON DELIGNE–MUMFORD COMPACTIFICATIONS [after Witten and Kontsevich]

by **Eduard LOOIJENGA**

A MATHEMATICIAN'S APOLOGY

Physicists have developed two approaches to quantum gravity in dimension two. One involves an a priori ill-defined integral over all conformal structures on a surface which after a suitable renormalization procedure produces a well-defined integral over moduli spaces of curves. In another they consider a weighted average over piecewise flat metrics on that surface and take a suitable limit of such expressions. The belief that these two approaches yield the same answer led Witten to make a number of conjectures about the intersection numbers of certain natural classes that live on the moduli space of stable pointed curves. One of these conjectures has been rigourously proved by Kontsevich.

In this talk I will mainly focus on Kontsevich' proof and on some results that are immediately related to it. For lack of competence I have not discussed the physical part of the story and as a result, this account is a rather one-sided one. This is regrettable, since developments of the last decade have taught geometers that the imagery and intuition that comes with quantum field theory is a powerful heuristic tool for their field, too. (I leave it to the reader to speculate whether an algebraic geometer would have ever come up with the Witten conjecture.) An overview which does the physical background more justice is the one by Dijkgraaf [3]. That paper also contains a more complete list of references.

I thank the participants of the Geyer–Harder Arbeitsgemeinschaft April 1993 for their remarks on an earlier version of this manuscript.

1. THE WITTEN CONJECTURE

Let us agree that an *n-pointed* curve is a complex projective curve with n given ordered distinct points on its smooth part. The isomorphism classes of smooth n-pointed curves of genus g are naturally parametrized by a variety $\mathcal{M}_g^n$ * of dimension $3g-3+n$, assuming, as we always will, that $n \geq 3$ if $g = 0$, and $n \geq 1$ if $g = 1$. An n-pointed curve $(\Sigma; x_1, \ldots, x_n)$ is said to be *stable* if is has only simple crossings as singularities and has finite automorphism group. (The last condition is equivalent to: the normalization of every irreducible component of genus zero must contain at least three distinct points that map to a singular point or to an x_i.) According to Deligne–Mumford–Knudsen, a projective completion $\overline{\mathcal{M}}_g^n$ of $\mathcal{M}_g^n$ is obtained by including the isomorphism classes of stable n-pointed curves of arithmetic genus g. This completion is in a natural way an orbifold, i.e., is locally in a natural way the quotient of a smooth space by a finite group. By taking the cotangent space at the i-th point we obtain a line bundle $\mathcal{L}_i$ (in the orbifold sense) over $\overline{\mathcal{M}}_g^n$ $(i = 1, \ldots, n)$. Denote its first (rational) Chern class by τ_i. For every sequence $(d_1, \ldots, d_n)$ of nonnegative integers we have a "characteristic number"

$$\langle \tau_{d_1} \tau_{d_2} \cdots \tau_{d_n} \rangle_g := \int_{\overline{\mathcal{M}}_g^n} \tau_1^{d_1} \tau_2^{d_2} \ldots \tau_n^{d_n}.$$

Since we are in an orbifold setting, this is a rational number, not necessarily an integer. By a theorem of Arakelov $\langle \tau_{d_1} \tau_{d_2} \cdots \tau_{d_n} \rangle_g$ is always ≥ 0. Of course it vanishes when $\sum_i d_i \neq 3g-3+n$. One may interpret these numbers as follows: the topological vector bundle underlying $\oplus_i \mathcal{L}_i$ has a classifying map $\overline{\mathcal{M}}_g^n \to BU$. Knowing the image of the fundamental class is equivalent to knowing the $\langle \tau_{d_1} \tau_{d_2} \cdots \tau_{d_n} \rangle_g$'s.

Witten [22] conjectured a formula for these characteristic numbers, which he expressed in terms of the generating function

$$\sum_{g,n} \frac{1}{n!} \sum_{(d_1,\ldots,d_n)} \langle \tau_{d_1} \tau_{d_2} \cdots \tau_{d_n} \rangle_g t_{d_1} t_{d_2} \ldots t_{d_n}.$$

The conjecture is easier to state if we pass to the variables $T_1, T_2, \ldots$, where $t_i = (2i+1)!! T_{2i+1}$ (recall that $(2i+1)!! = (2i+1)(2i-1)\cdots.3.1$). We denote the

* Some authors denote this variety by $\mathcal{M}_{g,n}$. Our notation is in agreement with the topologist's use of Γ_g^n for the corresponding mapping class group (whereas $\Gamma_{g,n}$ refers to a different—but closely related—group).

resulting expression by $F(T_1, T_2, \ldots)$. Thus F is independent of the T_{2i}'s. Witten's conjecture—now a theorem of Kontsevich—says:

Theorem 1 [16] *The expansion* $\exp(F) \in \mathbf{Q}[[T_1, T_2, T_3, \ldots]]$ *is the* τ*-function for the KdV hierarchy whose initial value (all times zero) is* $(d/dx)^2 + 2x$.

A more informative statement is given in theorem 10. We shall recall the definition of a τ-function in section 5. Such functions have already turned up in the theory of Riemann surfaces through the Krichever construction, but thus far no relation between the two appearances has been found.

Preceding the proof of this conjecture, Kontsevich had obtained an explicit expansion of $\exp(F)$. To state it, choose a positive integer N, let $\mathcal{H}_N$ be the space of hermitian $N \times N$-matrices, and let $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathcal{H}_N$ be positive definite. Then $\operatorname{tr}(\Lambda X^2)$ defines a positive definite inner product on $\mathcal{H}_N$, and there is a unique Gaussian probability measure $d\mu_\Lambda$ on $\mathcal{H}_N$ of the form $d\mu \exp \operatorname{tr}(-\frac{1}{2}\Lambda X^2)$, where $d\mu$ is a Haar measure.

Theorem 2 [15] *If we substitute* $T_k = \frac{1}{k}\operatorname{tr}((-\Lambda)^{-k})$, *then* $\exp(F)$ *is the asymptotic expansion at* $\Lambda = \operatorname{diag}(\infty, \ldots, \infty)$ *of*

$$\int_{\mathcal{H}_N} d\mu_\Lambda(X) \exp \operatorname{tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{6} X^3\right).$$

Since for $k = 1, \ldots, N$, the expressions $\frac{1}{k}\operatorname{tr}(\Lambda^k)$ are formally independent, and since we may choose N as large as we want, this equality completely determines F. As we will see in section 5, it is quite natural for a τ-function to make a substitution as above. We therefore make it a rule to set for any automorphism X of a finite dimensional vector space,

$$T_k(X) := \frac{1}{k}\operatorname{tr}(X^{-k}), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

(These are called the *Miwa coordinates.*)

There is yet another characterization, more suited for the purpose of computing the coefficients of $\exp(F)$, which says that F satisfies certain differential

equations. Define L_n, $n \geq -1$ by

$$L_{-1} := \tfrac{1}{4}T_1^2 - \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial T_1} + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(k+2)T_{k+2}\frac{\partial}{\partial T_k},$$

$$L_0 := -\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial T_3} + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}kT_k\frac{\partial}{\partial T_k} + \tfrac{1}{16},$$

$$L_n := -\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial T_{2n+3}} + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}kT_k\frac{\partial}{\partial T_{2n+k}} + \tfrac{1}{4}\sum_{i+j=2n}\frac{\partial^2}{\partial T_i \partial T_j}, \quad (n \geq 1).$$

One verifies that they satisfy the relations $[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m}$. So their linear span is a Lie algebra, and $L_n \mapsto -z^{n+1}d/dz$ establishes an isomorphism of this Lie algebra with the Lie algebra of algebraic vector fields on the affine line.

Theorem 3 [4],[6] *The function F is annihilated by the operators L_n, $n \geq -1$.*

The observation that L_{-1} and L_0 kill F was made by Witten; as we will see below this has a simple algebro-geometric origin. The annihilation by L_{-1} is called the *string equation*. Dijkgraaf and the Verlindes [4], and independently, Fukama–Kawai–Nakayama [6], showed that the annihilation by the other L_k's is a formal consequence of the string equation and the property that $\exp(F)$ is a τ-function. Subsequently other variants of their proof have appeared; the proof that we will sketch in section 6 is basically that of Kac–Schwartz [13].

If we write out these differential equations, we find recursive relations among the coefficients of F which determine F up to scalar factor. So this property of F is useful for doing explicit calculations.

The numbers $\langle \tau_{d_1}\tau_{d_2}\cdots\tau_{d_n}\rangle_g$ can be expressed by means of the "tautological" classes on $\overline{\mathcal{M}}_g^0$. To see this, we first observe that there is a morphism

$$\pi : \overline{\mathcal{M}}_g^{\geq 1} \to \overline{\mathcal{M}}_g^{\geq 0}.$$

which forgets the last point [14]. (Here $\mathcal{M}_g^{\geq s}$ denotes the disjoint union of the $\mathcal{M}_g^k$, $k \geq s$.) To be concrete, notice that if $(\Sigma; x_1, \ldots, x_{n+1})$ is a stable pointed curve, then so is $(\Sigma; x_1, \ldots, x_n)$ unless the irreducible component C containing x_{n+1} is a smooth rational curve which contains exactly two special points other than x_{n+1}, i.e., C meets the other components in 1 (resp. 2) points and contains

precisely one (resp. no) $x_i \neq x_{n+1}$. In either case collapsing C to a point yields a stable n-pointed curve of the same arithmetic genus. This pointed curve then represents the image of $(\Sigma; x_1, \ldots, x_{n+1})$ under π. The inverse procedure shows us that over $\overline{\mathcal{M}}_g^n$ the morphism π comes with n sections $x_1, \ldots, x_n$; this restriction can be regarded as the universal n-pointed genus g-curve (again, in an orbifold sense).

Let K be the first Chern class of the relative dualizing sheaf of π, so that $\tau_i = x_i^* K$ on $\overline{\mathcal{M}}_g^{\geq i}$. The integration of $\tau_1^{d_1}\tau_2^{d_2}\ldots\tau_{n+1}^{d_{n+1}}$ over $\overline{\mathcal{M}}_g^{n+1}$ can first be carried out over the fibres of π, and then over $\overline{\mathcal{M}}_g^n$. A somewhat delicate (but not really difficult) computation gives the following equality of rational cohomology classes on $\overline{\mathcal{M}}_g^n$:

(1)

$$\pi_*(\tau_1^{d_1}\tau_2^{d_2}\ldots\tau_{n+1}^{d_{n+1}}) = \tau_1^{d_1}\tau_2^{d_2}\ldots\tau_n^{d_n}\pi_*(K^{d_{n+1}}) + \sum_{\{i:d_i+d_{n+1}>0\}} \tau_1^{d_1}\tau_2^{d_2}\ldots\tau_i^{d_i+d_{n+1}-1}\ldots\tau_n^{d_n}.$$

In fact, one can show with induction on n that if we integrate $\tau_1^{d_1}\tau_2^{d_2}\ldots\tau_{n+1}^{d_{n+1}}$ along the fibres of $\pi^{n+1}: \overline{\mathcal{M}}_g^{n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_g^0$, the resulting class on $\overline{\mathcal{M}}_g^0$ is a polynomial in the tautological classes $\kappa_i := \pi_*(K^{i+1})|\overline{\mathcal{M}}_g^0$. It should be worthwhile to exhibit this polynomial and to express theorem 2 accordingly.

If we take $d_{n+1} = 0$ resp. 1 in (1) we get

$$\pi_*(\tau_1^{d_1}\tau_2^{d_2}\ldots\tau_n^{d_n}) = \sum_{\{i:d_i+d_{n+1}>0\}} \tau_1^{d_1}\tau_2^{d_2}\ldots\tau_i^{d_i-1}\tau_n^{d_n} \quad \text{resp.}$$

$$\pi_*(\tau_1^{d_1}\tau_2^{d_2}\ldots\tau_n^{d_n}\tau_{n+1}) = (2g-2+n)\tau_1^{d_1}\tau_2^{d_2}\ldots\tau_n^{d_n}.$$

These give rise to relations that express the fact that F is annihilated by the differential operators L_{-1} and L_0. Since the Lie algebra spanned by the L_k's is generated by L_{-1} and L_2, theorem 3 would follow if one could somehow directly show that $L_2(F) = 0$.

2. A CELLULAR DECOMPOSITION

A *ribbon graph* is a finite graph without isolated vertices such that for every vertex a cyclic order on its set of outgoing edges is given. This cyclic structure is

often depicted by a general projection of the graph in an oriented plane such that the cyclic structure is induced by the orientation of the plane. If we take a regular neighborhood of the image and then separate it near the self-intersections we obtain an oriented surface which contains the graph as a deformation retract and has the property that the cyclic structure at the vertices comes from the orientation of the surface. If the graph is connected, then the classification of surfaces implies that the surface will be homeomorphic to a closed oriented surface of a certain genus minus a finite number of points. Each of the removed points determines a circular oriented graph Z made up of oriented edges of Γ and a graph map $Z \to \Gamma$. We call the pair $(Z, Z \to \Gamma)$ a *boundary cycle* of the ribbon graph. Each oriented edge of Γ becomes after orientation part of a unique boundary cycle.

It is worthwhile to proceed more formally. Given a ribbon graph Γ, let $A = A(\Gamma)$ denote the set of oriented edges of Γ. This set has two distinguished automorphisms σ_0, σ_1: the first sends the oriented edge a leaving the vertex p to its successor (with respect to the cyclic ordering on the set of oriented edges leaving p) and the second is the involution that reverses orientation. (Conversely, a finite set A coming with an automorphism σ_0 and a fixed point free involution σ_1 defines a ribbon graph.) Put $\sigma_2 := (\sigma_1\sigma_0)^{-1}$, and denote the set of orbits of σ_i in A by Γ_i. Then for $i = 0, 1, 2$, Γ_i bijectively labels the set of vertices of Γ, resp. the set of edges of Γ, resp. the set of boundary cycles of Γ. If $(Z_i \to \Gamma)_{i\in\Gamma_2}$ is the set of boundary cycles, then we define the space $F(\Gamma)$ as what we get by attaching the cylinders $Z_i \times \mathbf{R}_{\geq 0}$ to Γ via the attaching map $Z_i \times \{0\} \cong Z_i \to \Gamma$. This is a piecewise-linear oriented surface which contains Γ as a deformation retract.

A *metric* on Γ is simply a map l which assigns to every edge a positive real number l_s. Such a metric induces a metric in every boundary cycle Z_i. If we give $Z_i \times \mathbf{R}_{\geq 0}$ the product metric, then $F(\Gamma)$ becomes a metric space. This metric is Riemannian except at the vertices of Γ. But it is easily seen that the underlying conformal structure extends over $F(\Gamma)$ (uniquely), and so turns $F(\Gamma)$ into a Riemann surface. By examining this structure on a halfcylinder we see immediately that as a Riemann surface, $F(\Gamma)$ is isomorphic to a compact Riemann surface minus a finite set of points.

Let $\mathcal{G}_g^n$ denote the set of isomorphism classes of connected ribbon graphs of genus g with n numbered boundary cycles and with the property that every vertex has degree ≥ 3. The formula for the euler characteristic $2 - 2g - n = |\Gamma_0| - |\Gamma_1|$

and the inequality $|\Gamma_0| \leq \frac{2}{3}|\Gamma_1|$ imply that this is a finite set. Let $\mathcal{M}_g^{n,\mathrm{comb}}$ denote the set of isomorphism classes of the same objects endowed with metrics. We have a decomposition

$$\mathcal{M}_g^{n,\mathrm{comb}} = \bigcup_{\Gamma \in \mathcal{G}_g^n} e(\Gamma), \quad \text{with} \quad e(\Gamma) := \mathrm{Aut}\,(\Gamma)\backslash \mathbf{R}_{>0}^{\Gamma_1}.$$

The set $\mathcal{M}_g^{n,\mathrm{comb}}$ has a natural topology. It is locally compact Hausdorff, and if (Γ, l) is a metrized graph, $s \in \Gamma_1$ a non-loop, and $l(t)$ the metric which differs from l in that it assigns the value tl_s to s, then letting t go to zero makes $(\Gamma, l(t))$ go to the metrized graph obtained from (Γ, l) by collapsing the edge s. (In fact, these properties characterize the topology.) As a space, $\mathcal{M}_g^{n,\mathrm{comb}}$ has the structure of a topological orbifold.

The codimension of the "orbicell" $e(\Gamma)$ in $\mathcal{M}_g^{n,\mathrm{comb}}$ is $\sum_{v \in \Gamma_0}(\deg(v) - 3)$. In particular, the cells of top dimension are labeled by the graphs Γ whose vertices all have degree 3. The dual of such a Γ in the closed surface $\overline{F}(\Gamma)$ is a triangulation of $\overline{F}(\Gamma)$ with n vertices. So these cells are also labeled by the isomorphism classes of triangulations of a closed oriented genus g surface with n vertices.

Let $p_i : \mathcal{M}_g^{n,\mathrm{comb}} \to \mathbf{R}_{>0}$ assign to a (Γ, l) the length of the i-th boundary cycle. This is a piecewise linear function. The earlier discussion furnishes a map $\mathcal{M}_g^{n,\mathrm{comb}} \to \mathcal{M}_g^n$. Combining these defines a map

$$h : \mathcal{M}_g^{n,\mathrm{comb}} \to \mathcal{M}_g^n \times \mathbf{R}_{>0}^n.$$

Theorem 5 *The map h is a homeomorphism of orbifolds.*

The proof of this theorem is based on results of Jenkins and Strebel [20] on the trajectory structure of a quadratic differential. Whereas these results date back to the sixties (see also [10]), the observation that they lead to a stratication of Teichmüller space (because they imply the existence of the inverse of h) was only made around 1981, and was the result of an interaction between mainly Harer, Mumford and Thurston. (It appeared in [9] as Theorem 1.3.) Penner later gave an alternate approach based on hyperbolic geometry and introduced the ribbon graph description of the cells [18].

There is a natural extension $\overline{\mathcal{M}}_g^{n,\mathrm{comb}} \supset \mathcal{M}_g^{n,\mathrm{comb}}$. It is defined in a similar manner as $\mathcal{M}_g^{n,\mathrm{comb}}$; only now we allow more edges to have zero length, but we

insist that the length of each boundary cycle remains positive. To be more precise, let for $\Gamma \in \mathcal{G}_g^n$, $\overline{e}(\Gamma)$ be the space of $\mathrm{Aut}\,(\Gamma)$-orbits in the space of $l : \Gamma_1 \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ with the property that each boundary cycle has positive length. Then $\overline{\mathcal{M}}_g^{n,\mathrm{comb}}$ is the space obtained by glueing these orbit spaces together via the maps induced by collapsing edges of zero length. It is a locally compact Hausdorff space that comes with a projection $p : \overline{\mathcal{M}}_g^{n,\mathrm{comb}} \to \mathbf{R}_{>0}^n$. This projection is proper and has the structure of a cellular bundle. A description of the points of $\overline{\mathcal{M}}_g^{n,\mathrm{comb}}$ is implicit in the following theorem (which is stated in [16] without proof).

Theorem 6 [16] *The inverse of the homeomorphism of theorem 5 extends to an identification mapping* $\overline{\mathcal{M}}_g^n \times \mathbf{R}_{>0}^n \to \overline{\mathcal{M}}_g^{n,\mathrm{comb}}$. *Two n-pointed stable curves together with a fixed* $p \in \mathbf{R}_{>0}^n$ *map to the same element of* $\overline{\mathcal{M}}_g^{n,\mathrm{comb}}$ *if and only if there exists a homeomorphism between them that takes the i-th point to the i-th point, and is complex-analytic on every irreducible component that contains one of the* (n) *distinguished points.*

In the above description the $U(1)$-bundle associated to the line bundle $\mathcal{L}_i$ is easy to give: the fibre over (Γ, l) is given by the i-th boundary cycle. This allows Kontsevich to give a an explicit representative of its first Chern class as a piecewise smooth form ω_i. Its restriction to the cell $e(\Gamma)$ is given as follows: number the edges of the i-th boundary cycle of Γ in a cyclic oriented order $s_0 \ldots, s_{k-1}$ and let $l_j : e(\Gamma) \to \mathbf{R}_{>0}$ be the length of s_j so that $p_i = \sum_j l_j$. Then the restriction of ω_i to the cell $e(\Gamma)$ will be

$$\omega_i(\Gamma) := \sum_{j<j'} d(l_j/p_i) \wedge d(l_{j'}/p_i)$$

It is easily seen that this form only depends on Γ, and that $\omega_i(\Gamma)$ induces on a cell $e(\Gamma')$ in the closure of $e(\Gamma)$ the form $\omega_i(\Gamma')$.

Consider the piecewise smooth 2-form

$$\Omega := \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \omega_i.$$

The restriction of Ω to any fibre of $p|e(\Gamma)$ is a nondegenerate symplectic form with *constant* coefficients. Thus we obtain an orientation of the fibres of $p|e(\Gamma)$ and hence also of $e(\Gamma)$ itself. We give $e(\Gamma)$ this orientation.

Suppose that $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots)$ is a sequence of nonnegative integers which are zero for almost all k. Let Γ be a connected ribbon graph with n boundary cycles with the property that its number of degree l vertices is zero if l even or 1 and equal to m_k if $l = 2k+1 \geq 3$. Then clearly

$$
\begin{aligned}
|\Gamma_0| &= \sum_k m_k, \\
\dim e(\Gamma) = |\Gamma_1| &= \frac{1}{2}\sum_k m_k(2k+1),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

and so

$$
\operatorname{codim} e(\Gamma) = 6g - 6 + 3n - \dim e(\Gamma) = 2|\Gamma_1| - 3|\Gamma_0| = 2\sum_k m_k(k-1)
$$

The collection of such Γ defines a chain on $\overline{\mathcal{M}}_g^{n,\mathrm{comb}}$ with closed support. The following lemma is not difficult to prove.

Lemma $\overline{\mathcal{M}}_g^{n,\mathrm{comb}}(\mathbf{m})$ *is a cycle in degree* $\frac{1}{2}\sum_k m_k(2k+1)$ *with closed support.*

So $\overline{\mathcal{M}}_g^{n,\mathrm{comb}}(\mathbf{m})$ defines via h a class with closed support on $\overline{\mathcal{M}}_g^n \times \mathbf{R}^n_{>0}$. This corresponds to a class $Z_g^n(\mathbf{m})$ on $\overline{\mathcal{M}}_g^n$ in a degree which is n units smaller. Its Poincaré dual defines a cohomology class on $\overline{\mathcal{M}}_g^n$ of degree $2\sum_k m_k(k-1)$. In this way we produce in a given degree as many elements as we get as pull-backs of monomials of the Mumford–Miller–Morita classes. Kontsevich conjectures that the former are linear combinations of the latter. In particular, the single classes in degree 2 should be proportional, and this has been verified by Penner.

Using these cycles we may form

$$
\langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle_{\mathbf{m},g} := \int_{Z_g^n(\mathbf{m})} \tau_1^{d_1} \cdots \tau_n^{d_n}
$$

and a corresponding generating function

$$
\sum_{g,n} \frac{1}{n!} \sum_{d_1,\ldots,d_n} \sum_{s_1,s_2,\ldots} \langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle_{\mathbf{m},g} t_{d_1} t_{d_2} \ldots t_{d_n} s_1^{m_1} s_2^{m_2} \cdots .
$$

Let $\tilde{F} \in \mathbf{Q}[[T_1, T_2, \ldots; s_1, s_2, \ldots]]$ be the expansion obtained by making the substitution $t_i = (2i+1)!!T_{2i+1}$. It reduces to Witten's generating function F if we put $s_1 = 1$ and $s_i = 0$ for $i > 1$, for clearly

$$\pm F(T_1, T_2, \ldots) = \tilde{F}(T_1, T_2, \ldots; 1, 0, 0, \ldots),$$

where the sign is the degree of of h, and by comparing the signs of the coefficients on both sides, we see that in fact the plus sign holds. Kontsevich proved a corresponding result for $\tilde{F}$, thus generalizing theorem 2:

Theorem 7 [16] *We have*

$$\exp \tilde{F}(T_1(-\Lambda), T_2(-\Lambda), \ldots; s_1, s_2, \ldots) = \langle \exp \operatorname{tr}\big(\sqrt{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\tfrac{-1}{2})^k s_k \frac{X^{2k+1}}{2k+1}\big) \rangle_{\Lambda},$$

where $T_k(\Lambda) = \frac{1}{k} \operatorname{tr}(\Lambda^{-k})$.

This will be proved in section 4.

Remark. Grothendieck [7] has made the amazing observation that there is a natural action of the Galois group $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ on the set of isomorphism classes of ribbon graphs. It is defined as follows. Given a ribbon graph Γ, then triangulate $\overline{F}(\Gamma)$ by regarding $\overline{F}(\Gamma)$ as obtained from Γ by putting a cone (in the simplicial category) over each boundary cycle. If we metrize Γ by assigning to each edge unit length, then we get a distinguished complex structure on $F(\Gamma)$ and its compactification $\overline{F}(\Gamma)$ (and hence also a distinguished element of the orbicell $e(\Gamma)$ if Γ is connected). Denote the corresponding Riemann surfaces by $X(\Gamma)$ resp. $\overline{X}(\Gamma)$. Let $I \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ the closed interval containing 0 whose end points are ∞ and 1. There is a unique holomorphic map $f_\Gamma : \overline{X}(\Gamma) \to \mathbf{P}^1$ which maps the vertices of Γ to 0, the midpoints of the edges of Γ to 1, the points of $\overline{X}(\Gamma) - X(\Gamma)$ to ∞ and the interior of every triangle conformally onto the complement of I. Notice that (i) f_Γ is unramified over $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ and (ii) that every point over $1 \in \mathbf{P}^1$ has ramification index 2. The connected components of $f_\Gamma^{-1}(\mathbf{P}^1 - I)$ are naturally indexed by the elements of $A(\Gamma)$ and via this labeling the permutations σ_0 resp. σ_1 simply correspond to the monodromy of the covering along a simple loop around 0 resp. 1; in particular the group generated by these two elements can be identified with the monodromy group of f_Γ.

Conversely, any covering of $\mathbf{P}^1$ with properties (i) and (ii) is thus obtained and the isomorphism type of the corresponding ribbon graph is unique. Since $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ is a normal $\mathbf{Q}$-scheme, the Galois group $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ "acts" on the profinite completion of its fundamental group via outer automorphisms. This induces an action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ on the set of isomorphism classes of the coverings of $\mathbf{P}^1$ unramified over $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$. It is easily seen that the set of isomorphism classes of coverings of $\mathbf{P}^1$ satisfying (ii) is stable under this action and so we obtain in fact an action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ on the set of isomorphism classes of ribbon graphs. It turns out to be quite difficult to make this action explicit [19].

3. KONTSEVICH' MAIN IDENTITY

The form Ω introduced in the previous section is closed relative p and its pull-back under the map h represents the smooth family of classes $\sum_i p_i^2 \tau_i$. So integration of $\exp(\Omega)$ over the fibres of $p|\mathcal{M}_g^{n,\mathrm{comb}}(\mathbf{m})$ is the function on $\mathbf{R}_{>0}^n$ defined by

$$\int_{p_*} \frac{1}{d!}\Omega^d | \mathcal{M}_g^n(\mathbf{m}) = \sum_{\sum d_i = d} \langle \tau_{d_1}\tau_{d_2}\cdots\tau_{d_n}\rangle_{\mathbf{m},g} \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^{2d_i}}{d_i!}, \tag{3}$$

where d must be half the degree of $Z_g^n(\mathbf{m})$. We apply to both sides the Laplace transform $\int_{\mathbf{R}_{>0}^n} dp_1 \cdots dp_n \exp(-\sum_i \lambda_i p_i)$ $(\lambda_i > 0)$. The right-hand side becomes

$$\begin{aligned} &\sum_{\sum d_i = d} \langle \tau_{d_1}\tau_{d_2}\cdots\tau_{d_n}\rangle_{\mathbf{m},g} \prod_i \frac{(2d_i)!}{d_i!} \lambda_i^{-(2d_i+1)} \\ &= 2^d \sum_{\sum d_i = d} \langle \tau_{d_1}\tau_{d_2}\cdots\tau_{d_n}\rangle_{\mathbf{m},g} \prod_i (2d_i - 1)!! \lambda_i^{-(2d_i+1)}. \end{aligned} \tag{4}$$

The Laplace transform of the left-hand side of (3) gets a contribution $I(\Gamma)$ for each open cell $e(\Gamma)$ in $\mathcal{M}_g^n(\mathbf{m})$. It is easy to see from the definition of $\Omega(\Gamma)$ that $\frac{1}{d!} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \wedge \Omega^d(\Gamma)$ has constant coefficients. So this is a constant times the natural measure on $e(\Gamma)$ defined by its coordinates l_s, $s \in \Gamma_1$. A rather intricate computation shows that this constant is equal to 2^{2d+1-g}. Given an edge s of Γ,

then each orientation of s makes it part of a boundary cycle; if these have number i and i', let $\lambda_s := \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_{i'})$. Thus

$$\sum_i \lambda_i p_i = 2 \sum_{s \in \Gamma_1} \lambda_s l_s$$

and hence

$$I(\Gamma) = \frac{1}{|\mathrm{Aut}\,(\Gamma)|} 2^{d+1-g-|\Gamma_1|} \prod_{s \in \Gamma_1} \lambda_s^{-1}.$$

Using the identities $2d = |\Gamma_1| - n$, $2 - 2g = |\Gamma_0| - |\Gamma_1| + n$ and the formulas (2) we get the following beautiful identity:

$$(5) \quad \sum_{\sum d_i = d} \langle \tau_{d_1} \tau_{d_2} \cdots \tau_{d_n} \rangle_{\mathbf{m},g} \prod_i (2d_i - 1)!! \lambda_i^{-(2d_i+1)} = \sum_\Gamma \frac{2^{-(\sum_k m_k k)}}{|\mathrm{Aut}\,(\Gamma)|} \prod_{s \in \Gamma_1} \lambda_s^{-1},$$

where on the right the sum is over the open cells of $\mathcal{M}_g^n(\mathbf{m})$. This equality implies the remarkable fact that the right-hand side is a polynomial in the variables λ_i^{-1}.

We now wish to vary g, n and $\mathbf{m}$. For this, we fix a positive integer N, and express the above equality in variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ as follows. For every map $i : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, N\}$ write down the above equality with variables $\lambda_{i(1)}, \ldots, \lambda_{i(n)}$, and sum over all such maps i. On the right-hand side this will then an amount to a sum over connected ribbon graphs of genus g with n numbered boundary cycles together with a map from the set of boundary cycles to $\{1, \ldots, N\}$. To this last datum we shall refer by saying that the ribbon graph is *N-colored*. If we do not care about the numbering of the boundary cycles, then we must divide by $n!$. Summation over g and n then gives

$$\tilde{F}(T_1(\Lambda), T_2(\Lambda), \ldots; s_1, s_2, \ldots) = \sum_\Gamma \frac{1}{|\mathrm{Aut}\,(\Gamma)|} \prod_{s \in \Gamma_1} \lambda_s^{-1} \cdot \prod_k (2^{-k} s_k)^{m_k}.$$

Since $\sum_k m_k(2k+1) = 2|\Gamma_1|$, we find

Theorem 8 [16] *The expression $\tilde{F}(T_1(-\Lambda), T_2(-\Lambda), \ldots; s_1, s_2, \ldots)$ is equal to*

$$\sum_\Gamma \frac{1}{|\mathrm{Aut}\,(\Gamma)|} \prod_{s \in \Gamma_1} \lambda_s^{-1} \cdot \prod_k ((-2)^{-k} \sqrt{-1} s_k)^{\mathrm{vrt}_{2k+1}(\Gamma)},$$

where the sum is over all isomorphism classes of connected N-colored ribbon graphs whose vertices have odd degree ≥ 3, and $\mathrm{vrt}_l(\Gamma)$ denotes the number of vertices of Γ of degree l.

All other properties of $\tilde{F}$ and F will be proved via this identity. Notice that since $T_1, \ldots, T_N$ are formally independent expressions, this theorem enables us to compute the coefficients of $\tilde{F}$ inductively.

4. A HERMITIAN ONE-MATRIX MODEL

Let E be a euclidean space of dimension d. Then there is a unique Gaussian probability measure $d\mu_E$ on E of the form $d\mu \exp(-\frac{1}{2}x \cdot x)$, where $d\mu$ is a Haar measure. If f is a function on E which is integrable with respect to this measure, then we write $\langle f \rangle$ for $\int f \, d\mu_E$. Wick's lemma gives the value of $\langle f \rangle$ in case f is a product of linear forms.

Let $\gamma : \mathrm{Hom}(E, \mathbf{C}) \times \mathrm{Hom}(E, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ be the $\mathbf{C}$-bilinear extension of the inner product on the dual of E.

Wick's lemma *Given a collection $\{\phi_a \in \mathrm{Hom}(E, \mathbf{C})\}_{a \in A}$, where A is a finite set, then*

$$\langle \prod_a \phi_a \rangle = \sum_P \prod_{\{a,a'\} \in P} \gamma(\phi_a, \phi_{a'}),$$

where the sum is taken over all pairings P on A.

(A *pairing* on A is a partition of A in two-element subsets.) So if $|A|$ is odd, then $\langle \prod_a \phi_a \rangle = 0$. For the (elementary) proof, we refer to [1].

We shall apply this to the case where the underlying vector space is the space $\mathcal{H}_N$ of hermitian endomorphisms of $\mathbf{C}^N$. The matrix coefficients $X_{i,j}$ make up a $\mathbf{C}$-basis of $\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_N, \mathbf{C})$ and satisfy $\overline{X}_{i,j} = X_{j,i}$. The inner product on $\mathcal{H}_N$ shall depend on a positive diagonal matrix $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ in $\mathcal{H}_N$ and is given by $\mathrm{tr}(\Lambda X^2)$. The equality $\mathrm{tr}(\Lambda X^2) = \sum_{i,j} \lambda_i X_{i,j} X_{j,i} = \sum_{i,j} \lambda_i |X_{i,j}|^2$ shows that this form is positive definite. We also find that

$$\gamma(X_{i,j}, X_{k,l}) = \frac{2}{\lambda_i + \lambda_j} \delta_{i,l} \delta_{j,k}. \tag{6}$$

With the help of Wick's lemma we are going to compute

$$\langle \exp \operatorname{tr}\Big(\sum_{k\geq 1} \frac{u_k X^k}{k}\Big)\rangle_\Lambda$$

as a formal expansion in the u_k's. First notice that

$$\operatorname{tr}(X^k) = \sum_\alpha X_{\alpha(0),\alpha(1)} X_{\alpha(1),\alpha(2)} \cdots X_{\alpha(k-1),\alpha(0)} ,$$

where the sum is over all maps α from the cyclic group $\mathbf{Z}/k$ to $\underline{N}$. (An underlined positive integer stands for the set of positive integers smaller or equal to it.)

More generally, an expression of the form $\operatorname{tr}(X^1)^{d_1} \operatorname{tr}(X^2)^{d_2} \cdots \operatorname{tr}(X^K)^{d_K}$ can be written out as a sum of monomials in the $X_{i,j}$'s naturally labeled by the set of maps $\phi : \cup_{k=1}^K \underline{d_k} \times \mathbf{Z}/k \to \underline{N}$. To be precise, put $A := \cup_{k=1}^K \underline{d_k} \times \mathbf{Z}/k$ and denote the automorphism of A that sends (i,j) to $(i,j+1)$ by σ_0. Given $\phi : A \to \underline{N}$, let $\phi_a := X_{\phi(a),\phi\sigma_0(a)}$, where $a \in A$. Then the expression at issue is the sum (over ϕ) of the monomials $\prod_{a\in A} \phi_a$.

According to Wick's lemma

$$\langle \prod_{a\in A} \phi_a \rangle_\Lambda = \sum_P \prod_{\{a,a'\}\in P} \gamma(\phi_a, \phi_{a'}), \tag{7}$$

where the sum runs over all pairings P on A. A pairing P on A is the same thing as a fixed point free involution on A, and as we explained in section 2, it therefore determines with σ_0 a ribbon graph $\Gamma(P)$ whose set of oriented edges is bijectively labeled by the elements of A. Notice that this graph has exactly d_k vertices of degree k. Formula (6) shows that the general term of the right-hand side of (7) can be nonzero only if the following condition is fulfilled: if P pairs a and a', then $\phi(a) = \phi\sigma_0(a')$ and $\phi(a') = \phi\sigma_0(a)$; the value then being the reciprocal of the average of $\lambda_{\phi(a)}$ and $\lambda_{\phi(a')}$. In terms of the ribbon graph, this means that ϕ factors through an N-coloring $\bar{\phi}$ of its boundary cycles and thus defines an N-colored ribbon graph $\Gamma(P,\bar{\phi})$. Any N-colored ribbon graph with d_k vertices of degree k is so obtained.

How often do we get the same colored ribbon graph? To answer this, consider the group G of permutations of the index set A that commute with σ_0. It can be identified with the direct product of semi-direct products

$$\prod_{k=1}^K (S_{v_k} . (\mathbf{Z}/k)^{d_k}).$$

In particular, it has order $\prod_k d_k! k^{d_k}$. This group acts on in an obvious way on the set of pairs $(P, \bar{\phi})$ as above. It is easy to see that two pairs define isomorphic colored ribbon graphs iff they are in the same G-orbit of $(P, \bar{\phi})$. Moreover, the G-stabilizer of $(P, \bar{\phi})$ can be identified with the automorphism group of $\Gamma(P, \bar{\phi})$. Applying this to the expansion

$$\langle \exp \operatorname{tr}\left(\sum_{k\geq 1} \frac{u_k X^k}{k}\right)\rangle_\Lambda = \sum_{(d_1,d_2\ldots)} \left(\prod_k \frac{u_k^{d_k}}{d_k! k^{d_k}}\right)\left\langle \prod_k \operatorname{tr}^{d_k}(X^k)\right\rangle_\Lambda,$$

we find:

Theorem 9 [16]

$$\langle \exp \operatorname{tr}\left(\sum_{k\geq 1} \frac{u_k X^k}{k}\right)\rangle_\Lambda = \sum_\Gamma \frac{1}{|\mathrm{Aut}\,(\Gamma)|} \prod_{s\in\Gamma_1} \lambda_s^{-1} \prod_{k\geq 1} u_k^{\mathrm{vrt}_k(\Gamma)},$$

where the sum is over all isomorphism classes of N-colored ribbon graphs and $\mathrm{vrt}_k(\Gamma)$ is the number of vertices of Γ of degree k. If we limit the summation in the right-hand side to connected graphs, then we get the logarithm of the left-hand side.

The last clause follows in a straightforward manner from the first. The expansion converges if we take the u_k's purely imaginary and almost all zero. Combining this theorem with 8 proves theorem 7.

Matrix models were introduced in physics by 't Hooft. Bessis–Itzykson–Zuber [1] gave it a simple mathematical treatment. The matrix model discussed here (due to Kontsevich) generalizes their work (these authors took $\Lambda = \mathbf{1}$).

5. THE KdV AND GELFAND–DIKII HIERARCHIES

This section will very briefly review some aspects of the KdV hierarchies. A nice introduction to the subject is the paper by Segal–Wilson [21]. (But in this paper the definition of the relevant Grassmannian differs from the one used here in that these authors impose an L_2-condition.) Fix an integer $p \geq 2$ and consider a general monic differential operator of order p

$$L = \partial^p + \sum_{i=0}^{p-1} u_{p-i}(x)\partial^i$$

in a single variable x with smooth coefficients u_i (∂ stands for differentiation). Conjugating L with respect to the multiplication by a suitable function makes the coefficient u_1 disappear; we shall therefore assume that this is already the case. We ask ourselves which monic differential operators P_k of order k have the property that $[P_k, L]$ is of order $\leq p-2$. This is easily answered in terms of pseudo-differential operators: First find a pseudo-differential operator K of the form $1+\sum_{i=1}^{\infty} k_i(x)\partial^{-i}$ such that $L = K\partial^p K^{-1}$. Then $Q := K\partial K^{-1}$ is a p-th root of L which has the form $\partial+\sum_{i=1}^{\infty} q_i(x)\partial^{-i}$. Write Q^k as a sum of a differential operator $(Q^k)_+$ and a pseudo differential operator $(Q^k)_-$ of order ≤ -1. In the equality

$$[(Q^k)_+, L] = [L, (Q^k)_-]$$

the left-hand side is a differential operator and the right-hand side has order $\leq p-2$. Hence $P_k := (Q^k)_+$ solves our problem. Notice that if k is a multiple of p, then $P_k = L^{k/p}$, so that $[P_k, L] = 0$. The p-th *Gelfand–Dikii hierarchy* is the system of differental equations

$$\frac{\partial L}{\partial T_k} = [P_k, L] \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

(For $p = 2$ this is also called the *Korteweg–de Vries* hierarchy.) Here we ask for solutions $u_i = u_i(x; T_1, T_2, \ldots)$, $i = 1, \ldots, p-2$. Each member of the system should be thought of as a vector field on the (infinite-dimensional) affine space of monic differential operators of order p without ∂^{p-1}-term. We can only hope for a solution of the above system if these vector fields commute, but this turns out to be the case. It is clear that a solution $L(\mathbf{T})$ of (8) will not depend on the variables T_{kp}, $k = 1, 2, \ldots$. Since $P_1 = \partial$, the flow defined by the T_1-variable is given by translation $x \mapsto x + T_1$. So we may write $u_i = u_i(x + T_1, T_2, \ldots)$.

There is beautiful geometric method, initiated by M. Sato, which converts this into a system of commuting vector fields on an infinite Grassmannian that comes at least formally already in integrated form. In one direction (which we will not describe) one attaches to L a space $V(L)$ of eigenfunctions on the spectrum of L which is invariant under multiplication by the function λ^p.

In the opposite direction one proceeds as follows. Consider complex-linear subspaces V of the algebra of Laurent expansions in λ^{-1}, $\mathbf{C}((\lambda^{-1}))$, which admit a basis $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ such that for k sufficiently large the expansion of f_k ends with λ^k

(or equivalently, such that the projection $V \to \mathbf{C}[\lambda]$ which omits the polar part be Fredholm of zero index). The collection of these subspaces is called the *Sato Grassmannian*. Let us denote it by Gr and let Gr^0 be the set of $V \in Gr$ with the property that V supplements $\lambda^{-1}\mathbf{C}[[\lambda^{-1}]]$, or equivalently, that V admits a basis $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ (a "standard basis") such that the expansion of f_k ends with λ^k for *all* k; it is the "big cell" of Gr. We will see in a moment that the complement $Gr - Gr^0$ is very much like a divisor in Gr.

For $\mathbf{T} = (T_1, T_2, T_3, \ldots)$, let $M(\mathbf{T})$ be the operator in $\mathbf{C}((\lambda^{-1}))$ given by multiplication by $\exp(\sum_{k=1}^{\infty} T_k \lambda^k)$. This operator is defined whenever $M(\mathbf{T}) \in \mathbf{C}((\lambda^{-1}))$; this is so when $M(\mathbf{T})$ is the expansion at ∞ of a rational function. This defines in a formal sense an action of $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ on $\mathbf{C}((\lambda^{-1}))$; it is this action we were alluding to. The passage from this formal action to a solution of the Gelfand–Dikii hierarachy is somewhat indirect.

Let us first define the τ-fuction of a $V \in Gr^0$. If $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ is a standard basis of $V \in Gr^0$, then clearly, $(M(-\mathbf{T})(f_k))_k$ is a basis of $M(-\mathbf{T})(V)$. One defines $\tau_V(\mathbf{T})$ as the determinant of the $\mathbf{C}[\lambda]$-parts of $(M(-\mathbf{T})(f_k))_k$ with respect to the basis $(\lambda^k)_{k \geq 0}$ of $\mathbf{C}[\lambda]$; as the notation indicates this is independent of the choice of a basis. Of course, τ_V is here not defined as a function, but as a formal expansion in $\mathbf{T}$ (and even that is not immediately clear). Notice that the constant term of τ_V equals 1. Saying that $M(-\mathbf{T})(V) \notin Gr^0$ is equivalent to $\tau_V(\mathbf{T}) = 0$ (when this makes sense). The function τ_V is characterized by the following property:

Lemma *For $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, we have*

$$\tau_V(-T_k(\Lambda)_{k \geq 1}) = \frac{\det(f_{i-1}(\lambda_j))}{\det(\lambda_j^{i-1})}.$$

The case $N = 1$ is Lemma 5.15 of [21] and the proof of the general assertion is outlined in [16].

One associates to τ_V in a canonical way a formal family of formal pseudo differential operators $Q(\mathbf{T})$ with $Q(\mathbf{T})_+ = \partial$ and such that for all k,

$$\frac{\partial Q}{\partial T_k} = [Q_+^k, Q].$$

If V is stable under multiplication by λ^p, then this property is preserved under the flow, $L := Q^p$ is a formal differential operator, and $L(\mathbf{T})$ satisfies (8). Both $\tau_V(\mathbf{T})$ and $L(\mathbf{T})$) will be independent of $T_p, T_{2p}, \ldots$.

The coefficients of L can be expressed explicitly in terms of τ. For instance, if $p = 2$, then

$$L(\mathbf{T}) = \partial^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \log \tau_V(T_1 + x, T_2, T_3, \ldots). \tag{9}$$

In general one has the formula

$$\operatorname{Res}(Q^k) = \frac{\partial^2}{\partial T_1 \partial T_k} \log \tau_V(T_1 + x, T_2, T_3, \ldots), \quad k = 1, 2\ldots. \tag{10}$$

(The residue of a pseudo differential operator is simply the coefficient of ∂^{-1}.) For $k = 1, \ldots, p-1$, $\operatorname{Res}(Q^k)$ is of the form $\frac{p-k}{p}u_{k+1}$ plus a differential polynomial in the u_l, $l < k$, so that the coefficients of L can be computed inductively from this.

6. A CONSTRUCTION OF τ-FUNCTIONS

We shall describe a rather general procedure for constructing τ-functions. It is due to Kontsevich and leads to a proof that the expression in theorem 2 defines a τ-function. Let be given $u, v \in \mathbf{R}[x]$. Then the integral

$$a(x) := \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \sqrt{-1}(xu(y) + v(y)), \quad x \in \mathbf{R},$$

converges in the sense that the integral over $[-n, n]$ has a finite limit as $n \to \infty$). An alternative way to give this integral a meaning is to move the path of integration in the complex domain according to the method of steepest descend; the corresponding integral will then converge absolutely. It is in this sense that similar integrals appearing here are to be understood. An N-variable analogue of a is

$$A(\mathbf{x}) := \int_{\mathcal{H}_N} dY \exp \operatorname{tr}\sqrt{-1}(\mathbf{x}u(Y) + v(Y)), \quad \mathbf{x} = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_N) \in \mathcal{H}_N$$

Remarkably, this integral can be reduced to an expression involving only a and its derivatives. To see this, we make the substitution $Y = U\mathbf{y}U^{-1}$, where U is unitary and $\mathbf{y} = \operatorname{diag}(y_1, \ldots, y_N)$. The corresponding jacobian is $dU d\mathbf{y}\, \Delta(\mathbf{y})^2$, where dU

is a Haar measure on U_N. An ancient formula due to Harish-Chandra [8] states that

$$\Delta(\mathbf{x})\Delta(\mathbf{y})\int_{U_N} dU \exp \mathrm{tr}\sqrt{-1}(U\mathbf{y}U^{-1}\mathbf{x}) = \text{const}\,.\det(\exp(\sqrt{-1}x_iy_j)),$$

where const stands (here as well as below) for an expression which only depends on N and

$$\Delta(\mathbf{x}) = \det(x_i^{j-1}) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_N} \mathrm{sign}(\sigma)x_1^{\sigma(1)-1}\cdots x_N^{\sigma(N)-1}$$

is the Vandermonde determinant. Feeding this into the integral gives

$$A(\mathbf{x}) = \text{const}\,.\Delta(\mathbf{x})^{-1}\int_{\mathbf{R}^N} d\mathbf{y}\,\Delta(\mathbf{y})\det(\exp(\sqrt{-1}x_ju(y_i))\exp \mathrm{tr}\, v(\mathbf{y})$$

If we develop the determinants, the variables separate and the right-hand side becomes

(11)

$$\begin{aligned}&\text{const}\,.\Delta(\mathbf{x})^{-1}\sum_{\sigma,\tau\in\mathcal{S}_N}\mathrm{sign}(\sigma\tau)\prod_{i=1}^{N}\int dy_i\, y_i^{\tau(i)-1}\exp\sqrt{-1}(x_{\sigma(i)}u(y_i)+v(y_i))\\ =&\text{const}\,.\Delta(\mathbf{x})^{-1}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_N}\mathrm{sign}(\sigma)a_0(x_{\sigma(1)})\cdots a_{N-1}(x_{\sigma(N)})\\ =&\text{const}\,.\det(x_i^{j-1})^{-1}\det(a_{j-1}(x_i)),\end{aligned}$$

where

$$a_k(x) := \int_{-\infty}^{\infty} dy\, y^k \exp\sqrt{-1}(xu(y)+v(y)). \tag{12}$$

This makes $A(-\mathbf{x})$ resemble a matricial τ-function. (To be one, the expansion of a_k in x^{-1} should begin with x^k.)

Now take $u(y) = y$, $v(y) = \frac{1}{3}y^3$, so that

$$a(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \exp\sqrt{-1}(yx + \frac{y^3}{3}).$$

(Moving the line of integration over a positive distance in the upper half plane will make the integral converge absolutely.) This the classical Airy function. It clearly satisfies the differential equation $a''(x) = xa(x)$ and we have

$$a_k(x) = (-\sqrt{-1}\frac{d}{dx})^k a(x).$$

It can be written (for x real and positive) as

$$a(x) = x^{-\frac{1}{4}} \exp(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) f(x^{\frac{3}{2}}),$$

where f has an asymptotic expansion at $+\infty$ of the form

$$f(x) \asymp f_0 + f_1 x^{-1} + f_2 x^{-2} \cdots$$

with $f_0 \neq 0$. (NB: This expansion has no positive radius of convergence.)

A simple estimate shows that in the integral defining $A(\mathbf{x})$ the domain of integration may be replaced by $\mathcal{H}_N + \mathbf{x}\sqrt{-1}$ when $\mathbf{x} \geq 0$. If we make the substitution $Y \mapsto 2^{-\frac{1}{3}}Y + \mathbf{x}\sqrt{-1}$ and take $\mathbf{x} := 2^{\frac{1}{3}}\Lambda$, where now $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_N) > 0$, we find

$$A(2^{-\frac{2}{3}}\Lambda^2) = \exp \mathrm{tr}(-\frac{1}{3}\Lambda^3) \int_{\mathcal{H}_N} dY \exp \mathrm{tr}(-\frac{1}{2}\Lambda Y^2 + \frac{\sqrt{-1}}{6}Y^3). \tag{13}$$

The integral on the left can be expressed in terms of $\exp F(-\mathbf{T}(\Lambda))$, with $T_k(\Lambda) = \frac{1}{k}\mathrm{tr}\,(\Lambda^{-k})$. Following theorem 2,

$$\exp F(-T(\Lambda)) = \frac{\int_{\mathcal{H}_N} dY \exp \mathrm{tr}\left(-\frac{\Lambda Y^2}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{6}Y^3\right)}{\int_{\mathcal{H}_N} dY \exp \mathrm{tr}\left(-\frac{\Lambda Y^2}{2}\right)}. \tag{14}$$

The denominator appearing on the right hand is the Gaussian integral associated to the quadratic form $\sum_{i<j}(\lambda_i + \lambda_j)|X_{ij}|^2 + \sum_i \lambda_i X_{ii}^2$, and so proportional to

$$\prod_{i<j} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \prod_i \lambda_i^{-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta(\Lambda)}{\Delta(\Lambda^2)} \prod_i \lambda_i^{-\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

The formulas (11)–(15) imply that

$$\exp F(-T(\Lambda)) = \mathrm{const}\,.\,\det(\lambda_i^{j-1})^{-1} \det(z_{j-1}(\lambda_i)), \tag{16}$$

where

$$z_k(\lambda) = c_k \lambda^{\frac{1}{2}} \exp(\frac{1}{3}\lambda^3) a^{(k)}(2^{-\frac{2}{3}}\lambda^2), \quad \mathrm{Re}(\lambda) > 0, \tag{17}$$

with c_k a nonzero constant that we are still free to choose. Notice that $z_0(\lambda)$ is proportional to $f(2^{-1}\lambda^3)$. In particular, its asymptotic expansion at ∞ is in $\mathbf{C}[[\lambda^{-3}]]$ and has nonzero constant term. We choose c_0 such that its constant term equals 1 and we set $z(\lambda) := z_0(\lambda)$. Let us now identify a simple recursive relationship between the functions z_k. The pull-back of d/dx under $x = c\lambda^2$ is the vector field $(2c\lambda)^{-1}d/d\lambda$. From this we readily deduce that the Airy equation amounts to the property that $a(2^{-\frac{2}{3}}\lambda^2)$ is annihilated by the operator $(\lambda^{-1}d/d\lambda)^2 - \lambda^2$. So if we put

$$D := \lambda^{\frac{1}{2}} \exp(\tfrac{1}{3}\lambda^3)\big(-\lambda^{-1}\frac{d}{d\lambda}\big)\lambda^{-\frac{1}{2}} \exp(-\tfrac{1}{3}\lambda^3) = -\lambda^{-1}\frac{d}{d\lambda} + \tfrac{1}{2}\lambda^{-2} + \lambda,$$

then $D(z_k)$ is proportional to z_{k+1} and $D^2(z) = \lambda^2 z$. This allows us to take $z_{2k}(\lambda) := \lambda^{2k} z(\lambda)$ and $z_{2k+1}(\lambda) := \lambda^{2k}(Dz)(\lambda)$. Notice that the asymptotic expansion of z_k at ∞ is of the form λ^k plus lower powers of λ. Since F has no constant term, a comparison of the constant terms in both sides of (16) reveals that the constant in (16) must be 1. In particular we have for $N = 1$:

$$z(\lambda) = \exp F(-(\frac{\lambda^{-k}}{k})_k) = (\frac{\lambda}{2\pi})^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(-\frac{\lambda y^2}{2} + \frac{\sqrt{-1}y^3}{6}), \quad \mathrm{Re}(\lambda) > 0. \tag{18}$$

This proves most of

Theorem 10 *The function* $\exp F$ *is the* τ*-function for the* $\mathbf{C}[\lambda^2]$*-submodule of* $\mathbf{C}((\lambda^{-1}))$ *generated by* z *and* Dz*, where* z *is given by* (18) *and*

$$D = -\lambda^{-1}\frac{d}{d\lambda} + \frac{1}{2}\lambda^{-2} + \lambda.$$

The corresponding KdV hierarchy has initial value $\partial^2 + 2x$.

For the last property we first observe that $\langle \tau_0 \cdots \tau_0 \rangle$ is equal to 1 if there are three factors (the contribution from the three-pointed Riemann sphere) and zero else. This implies that $F(T_1, 0, 0, \ldots) = \frac{1}{6}T_1^3$. Now apply formula (9).

If we put $D_k := \frac{1}{2}\lambda^{2k+2}D$, $k \geq -1$, then it is easily verified that $[D_k, D_l] = (l-k)D_{k+l}$. So their linear span is a Lie algebra $\mathcal{L}$ isomorphic to the Lie algebra of algebraic vector fields of the affine line. This Lie algebra acts on the Sato Grassmannian, and on the space of τ functions. This action can be made explicit by means of the *boson-fermion* correspondence (see [12]). It turns out that this transforms $\mathcal{L}$ into the linear span of the L_k's. The fact that each element of $\mathcal{L}$ maps V properly into itself (with zero determinant), implies that the L_k's must kill its τ-function $\exp(F)$, which proves theorem 3. (This argument is due to Kac–Schwartz [13].)

The method described in this section for producing τ-functions has been discovered by Kontsevich. Theorem 10 as stated here can be found in Itzykson–Zuber [11].

7. FURTHER RESULTS AND CONJECTURES

After Kontsevich had proved theorem 2, Witten conjectured that the derivatives of $\exp(F)$ should admit a similar description. That conjecture has been recently proved by Di Franceso–Itzykson–Zuber and reads as follows:

Theorem 11 [5] *There is a* $\mathbf{Q}$*-linear isomorphism*

$$P \in \mathbf{Q}[\partial/\partial T_1, \partial/\partial T_3, \partial/\partial T_5 \ldots] \mapsto Q_P \in \mathbf{Q}[T_1, T_3, T_5, \ldots]$$

such that

$$P(\exp(F(T_k(-\Lambda)_k)) = \langle Q_P(\operatorname{tr} X, \operatorname{tr} X^2, \ldots)\exp \operatorname{tr}(\frac{\sqrt{-1}X^3}{6})\rangle_\Lambda$$

and the degree of Q_P *is the order of* P.

Their proof is algebraic.

Witten [24],[25] has also proposed a generalization of his conjecture which relates Gelfand–Dikii hierarchies of order $p \geq 2$ with intersection theory on certain Galois coverings of Deligne–Mumford compactifications.

Start with integers $k_1, \ldots k_n \in \{0, 1, \ldots, p-2\}$ and an integer $g \geq 0$ such that $2g - 2 - \sum_i k_i$ is divisible by p. Let $(\Sigma; x_1, \ldots, x_n)$ be a pointed curve of

genus g. Then the line bundle $\omega_\Sigma(-\sum k_i(x_i))$ is divisible in $Pic(\Sigma)$ by p. Up to isomorphism there are p^{2g} pth roots of this line bundle and they are simply transitively permuted by an action of $H_1(\Sigma; \mathbf{Z}/p)$. Let $\mathcal{T}$ be one such root. If $\mathcal{T}$ has no nonzero sections (which is often the case), then by Riemann–Roch, $\tilde{V} := H^0(\Sigma, \mathcal{T}^* \otimes \omega)$ will be a vector space of dimension

$$d := \frac{p-2}{p}(g-1) + \sum_i \frac{k_i}{p}.$$

If we only fix the isomorphism class of $\mathcal{T}$, then $\tilde{V}$ is unique up to scalar multiplication by a p-th root of unity, and so the orbit space $V := \tilde{V}/\mu_p$ is unique up to unique isomorphism. We shall regard V as a vector space in the orbifold sense.

We now vary $(\Sigma; x_1, \ldots, x_n; \mathcal{T})$. Let $\mathcal{M}'$ denote the moduli space of n-pointed genus g curves $(\Sigma; x_1, \ldots, x_n)$ equipped with an isomorphism class of a pth root of $\omega(-\sum k_i(x_i))$. This is a covering over $\mathcal{M}_g^n$ of degree p^{2g}. The orbivector spaces V define an orbivector bundle $\mathcal{V}$ of rank d over a Zariski open part of $\mathcal{M}'$. Let $\overline{\mathcal{M}}'$ be the normalization of $\mathcal{M}'$ over $\overline{\mathcal{M}}_g^n$. Index theory suggests a way of extending its euler class to a class defined on $\overline{\mathcal{M}}'$ [25]. Let us denote the direct image of this class on $\overline{\mathcal{M}}_g^n$ by

$$e(p; k_1, \ldots, k_n) \in H^{2d}(\overline{\mathcal{M}}_g^n; \mathbf{Q}).$$

By bringing these euler classes into the game we produce many more characteristic numbers: put

$$\langle \tau_{d_1+k_1/p} \cdots \tau_{d_n+k_n/p} \rangle_{p,g} := p^{-g} \int_{\overline{\mathcal{M}}_g^n} \tau_1^{d_1} \cdots \tau_n^{d_n} e(p; k_1, \ldots, k_n),$$

and form the generating function

$$\sum_{g,n} \frac{1}{n!} \sum \langle \tau_{d_1+k_1/p} \cdots \tau_{d_n+k_n/p} \rangle_{p,g} t_{d_1+k_1/p} \cdots t_{d_n+k_n/p}.$$

We pass to the variables T_i by means of the substitution

$$t_{d+k/p} = (k+1)(p+k+1)(2p+k+1)\cdots(dp+k+1)T_{dp+k+1}.$$

The resulting expression F_p is independent of T_m if m is a multiple of p. It can be verified that $F_2 = F$, and so the truth of the following conjecture will generalize theorem 1:

Conjecture (Witten) The expansion $\exp(F_p)$ is the τ-function of the Gelfand–Dikii hierarchy whose initial value is $\partial^p + px$.

This means that if we define inductively $u_k(x + T_1, T_2, T_3 \ldots)$ by formula (10) ($k = 2, \ldots p$), then the corresponding operator $L(\mathbf{T})$ satisfies the Gelfand–Dikii equations (8). Witten has shown that F_p satisfies a string equation. He also analyzed the situation for $g = 0$. Kontsevich noticed that one can write down the matricial τ-function associated to the operator $\partial^p + px$ in a form generalizing theorem 2. In addition, one can specify differential operators analogous to the L_n's, that annihilate this τ-function, see [3].

Penner [18] reinterpreted the Harer–Zagier calculation of the orbifold euler characteristic of $\mathcal{M}_g^n$ in terms of a matrix model. Although this matrix model is not of the type considered here, it may be thought of as the matrix model corresponding to the case $p = -1$. (Kontsevich gives in an appendix to [16] a short proof of this formula.)

Let us finally mention that the expression F_p is related to the Lie algebra A_{p-1} (so that the original conjecture is related to A_1). One expects that for every simple Lie algebra there is a Witten expansion whose exponential is a τ-function of the KP-hierarchy.

References

1. D. Bessis, C. Itzykson, J.-B. Zuber: Quantum field theory techniques in graphical enumeration, *Adv. Appl. Math.* **1** (1980), 109–157.
2. P. Deligne, D. Mumford: The irreducibility of the space of curves of given genus, **36** (1969), 431–451.
3. R. Dijkgraaf: Intersection theory, integrable hierarchies and topological field theories, *preprint IAS Princeton* (1991).
4. R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde: Loop equations and Virasoro constraints in nonperturbative two-dimensional quantum gravity, *Nucl. Phys.* **B 348** (1991), 435–456.
5. P. Di Francesco, C. Itzykson, J.-B. Zuber: Polynomial Averages in the Kontsevich model, *Comm. Math. Phys.* **151** (1993), 193–219.
6. M. Fukama, H. Kawai, R. Nakayama: Continuum Schwinger–Dyson equations and universal structures in two-dimensional quantum gravity: conformal gauge, *Int. J. Mod. Phys.* **A6** (1991), 1385–1406.

7. A. Grothendieck: Esquisse d'un programme, *preprint* (1984).
8. Harish-Chandra: Differential operators on a semisimple Lie algebra, *Am. J. Math.* **79** (1957), 87–120.
9. J.L. Harer: The virtual cohomological dimension of the mapping class group, *Invent. Math.* **84** (1986), 157–176.
10. J. Hubbard, H. Masur: Quadratic differentials and foliations, *Acta Math.* **142** (1979), 221-274.
11. C. Itzykson, J.-B. Zuber: Combinatorics of the modular group II, the Kontsevich integrals, *Int. J. Mod. Phys.* **A 7** (1992), 5661–5705.
12. V.G. Kac: *Infinite dimensional Lie algebras* (3rd edition), Cambridge U.P., Cambridge, (1990).
13. V.G. Kac, A. Schwartz: Geometric interpretation of the partition function of $2D$ gravity, *Phys. Lett.* **257** (1991), 329–334.
14. F.F. Knudsen: The projectivity of the moduli space of stable curves II, III, *Math. Scand.* **52** (1983), 161–212.
15. M. Kontsevich: Intersection theory on the moduli space of curves, *Funct. Anal. and Appl.* **25** (1991), 123–128.
16. M. Kontsevich: Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function, *Comm. Math. Phys.* **147** (1992), 1–23.
17. D. Mumford: Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves, in *Arithmetic and Geometry II*, M. Artin, J. Tate eds. Birkhäuser PM 36 (1983), 271–328.
18. R.C. Penner: Perturbative series and the moduli space of punctured surfaces, *J. Diff. Geom.* **27** (1988), 35–53.
19. G.B. Shabat, V.A. Voedodsky: Drawing curves over number fields, in *The Grothendieck Festschrift III*, P. Cartier *et al.* eds. Birkhäuser PM 88 (1990), 199–227.
20. K. Strebel: *Quadratic differentials*, Springer, Berlin, (1984).
21. G.B. Segal, G. Wilson: Loop groups and equations of KdV type, *Publ. Math. IHES* **61** (1985), 5–65.
22. E. Witten: Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space, *Surveys in Diff. Geom.* **1** (1991), 243–310.
23. E. Witten: On the Kontsevich model and other model and other models of two dimensional gravity, *preprint IAS Princeton* (1991).

24. E. Witten: The N matrix model and gauged WZW models, *Nucl. Phys.* **B371** (1992), 191–245.
25. E. Witten: Algebraic geometry associated with matrix models of two dimensional gravity, *preprint IAS Princeton* (1991).

Eduard LOOIJENGA
Mathematics Department
University of Utrecht
P.O. Box 80.010
NL–3508 TA Utrecht, The Netherlands
email: looijenga@math.ruu.nl

Astérisque

PIERRE VOGEL

Invariants de Vassiliev des nœuds [d'après D. Bar-Natan, M. Kontsevich et V.A. Vassiliev]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 769, p. 213-232

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__213_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
45ème année, 1992-93, n° 769

Mars 1993

INVARIANTS DE VASSILIEV DES NŒUDS
[d'après D. Bar-Natan, M. Kontsevich et V.A. Vassiliev]

par **Pierre VOGEL**

La théorie des invariants de Vassiliev a été introduite par V. A. Vassiliev [V1] en 1989. Considérons l'espace de toutes les applications différentiables du cercle S^1 dans l'espace usuel $\mathbf{R}^3$. On peut voir l'espace des nœuds comme le complémentaire dans cet espace de l'espace des fonctions singulières appelé discriminant. A l'aide d'une technique de désingularisation, Vassiliev transforme ce discriminant en un espace naturellement stratifié où chaque strate a une topologie relativement simple, ce qui produit une suite spectrale (la suite spectrale de Vassiliev) dont l'aboutissement est un certain anneau d'invariants de nœuds appelés invariants de Vassiliev. La convergence de cette suite spectrale est une question largement ouverte, mais Vassiliev donne une description du premier terme de celle-ci en terme de nœuds ayant un certain nombre de singularités.

Reprenant ensuite des idées implicitement contenues dans les papiers de Vassiliev ([V1] [V2]), J. S. Birman et X-S. Lin [BL] proposent une définition directe des invariants de Vassiliev, en terme de nœuds singuliers particuliers, et montrent, entre autre que la plupart des invariants connus comme les polynômes de Jones [J], de Kauffman [KA] et le polynôme HOMFLY [F] s'expriment en termes d'invariants de Vassiliev.

Les invariants de Vassiliev forment une suite croissante d'anneaux commutatifs de type fini, et dualement on obtient une filtration décroissante de l'anneau librement engendré par les nœuds. La question de savoir si cette filtration sépare les nœuds est toujours ouverte. Quoi qu'il en soit, la compréhension de cette filtration ou du gradué associé s'avère fondamentale en théorie des nœuds.

Les travaux de Bar-Natan et de Kontsevich en 1992 sont à cet égard particulièrement riches de résultats que l'on peut schématiser ainsi:

— Construction d'une algèbre de Hopf en terme de certains diagrammes (diagrammes de Feynman). C'est une algèbre graduée, de type fini en chaque degré, définie en terme de générateurs (les diagrammes) et de certaines relations

— Description d'un morphisme naturel surjectif de cette algèbre de Hopf sur

le gradué associé à l'algèbre des nœuds

— Construction d'une intégrale (intégrale de Kontsevich) qui associe à chaque nœud un élément du complété de l'algèbre des diagrammes, montrant ainsi que la $\mathbf{R}$-algèbre des nœuds complétée par la filtration de Vassiliev est isomorphe au complété de l'algèbre sur $\mathbf{R}$ des diagrammes de Feynman. Cette intégrale est en quelque sorte l'invariant de Vassiliev universel.

L'étude des nœuds est donc en très grande partie ramenée à l'étude de cette algèbre de diagrammes.

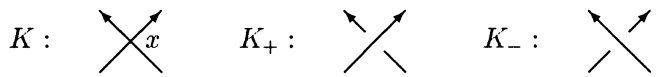
1. INVARIANTS DE VASSILIEV

1.1. Invariants de nœuds

Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des nœuds orientés, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'isotopie d'applications différentiables injectives du cercle S^1 dans $\mathbf{R}^3$. Les éléments de $\mathcal{N}$ seront dorénavant appelé des nœuds. Un *invariant de nœuds* à valeur dans un groupe abélien E est une application de $\mathcal{N}$ dans E. L'ensemble de ces invariants sera noté $\mathcal{I}(\mathcal{N}, E)$. Si A est un anneau, $\mathcal{I}(\mathcal{N}, A)$ est une A-algèbre.

On appellera *nœud singulier* une application différentiable de S^1 dans $\mathbf{R}^3$ n'ayant ni point singulier ni point triple et n'ayant que des points doubles simples. L'espace des nœuds singuliers ayant p points doubles sera noté $\mathcal{E}_p$.

Soit K un nœud singulier et x un point double de K. On peut modifier légèrement K au voisinage de x pour supprimer ce point double. On obtient de ce fait, suivant la modification faite (dite positive ou négative), deux nouveaux nœuds singulier K_+ et K_- comme l'illustre le dessin suivant:



Lemme 1. – *Soit I un invariant de nœuds. Alors I s'étend de façon unique en une fonction définie sur tous les nœuds singuliers et vérifiant la propriété suivante:*

Si K est un nœud singulier, et si K_+ et K_- sont les nœuds singuliers obtenus comme ci-dessus, on a:

$$I(K) = I(K_+) - I(K_-) \tag{1}$$

L'extension de l'application se détermine de la façon suivante:

Si K est un nœud singulier, on pose:

$$I(K) = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}(K)} \varepsilon(\alpha) I(K_\alpha)$$

où la somme se fait sur l'ensemble $\mathcal{F}(K)$ des fonctions qui à chaque point double de K associe un élément de $\{+1, -1\}$. Le symbole K_α désigne le nœud K modifié en chaque point double x de façon positive ou négative suivant le signe de $\alpha(x)$ et $\varepsilon(\alpha)$ est le produit des nombres $\alpha(x)$.

1.2. Définition

Soit I un invariant de nœuds. On dit que I est un *invariant de Vassiliev* de degré inférieur ou égal à n si I est nul sur tout nœud singulier ayant au moins $n+1$ points doubles.

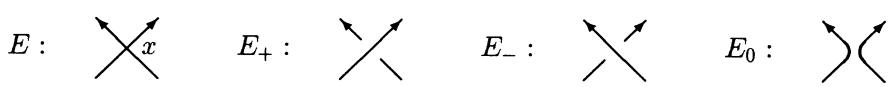
Remarque. – On peut également considérer des invariants sur des entrelacs (objets géométriques formés de plusieurs nœuds disjoint). On définit alors comme plus haut des entrelacs singuliers et une version pour entrelacs du lemme 1 reste valable. On peut ainsi généraliser la notion d'invariant de Vassiliev pour les entrelacs.

Remarque. – Tout invariant de Vassiliev de degré 0 est évidemment constant, la formule (1) devenant pour un tel invariant I:

$$I(K_+) = I(K_-)$$

Il en est de même pour les invariants de Vassiliev de degré 1. Mais ce n'est plus vrai au-delà.

Il y a en fait énormément d'invariants de Vassiliev. Ainsi, tous les invariants polynomiaux de nœuds provenant d'algèbres de Lie, comme le polynôme de Jones [J], le polynôme HOMFLY [F] ou le polynôme de Kauffman [KA], ont, après un changement de variable adéquat, comme coefficients des invariants de Vassiliev [BL]. Considérons, par exemple le cas du polynôme de Conway ∇ qui est une spécialisation particulière du polynôme HOMFLY. Il s'agit d'un polynôme en t associé à tout entrelacs (orienté) possédant la propriété suivante: si E est un entrelacs singulier possédant un seul point double, les modifications positive et négative de E au voisinage de celui-ci produisent deux entrelacs E_+ et E_-, mais on obtient également un autre entrelacs E_0:



Le polynôme de Conway vérifie alors la relation suivante:

$$\nabla(E_+) - \nabla(E_-) = t\nabla(E_0) \tag{2}$$

Proposition 2. (Bar-Natan [BN1][BL]) – *Le $n^{\text{ième}}$ cœfficient du polynôme de Conway est un invariant de Vassiliev de degré n.*

En effet la formule (2) implique que si E est un entrelacs singulier avec $n+1$ points doubles, le polynôme $\nabla(E)$ est égal à $t^{n+1}\nabla(E')$ où E' est un entrelacs qui se déduit de E ce qui implique le résultat.

1.3. Définition

Soient $n \geq 0$ un entier et E un ensemble. On notera $V_n(E)$ l'ensemble des invariants de Vassiliev à valeurs dans E, de degré $\leq n$.

Proposition 3. – *Soit A un anneau intègre. Alors les A-module $V_n(A)$ forment une suite croissante de sous-modules libres de type fini de $\mathcal{I}(\mathcal{N}, A)$:*

$$V_0(A) \subset V_1(A) \subset V_2(A) \subset \ldots \subset \mathcal{I}(\mathcal{N}, A)$$

De plus on a pour tout p et q: $V_p(A).V_q(A) \subset V_{p+q}$

Si A n'est pas intègre, $V_n(A)$ n'est pas nécessairement libre de type fini, mais dans tous les cas $V_n(A)$ est isomorphe à un module $\mathrm{Hom}(M, A)$ où M est un $\mathbf{Z}$-module de type fini. Il est clair que l'ensemble $V(A) = \cup V_n(A)$ des invariants de Vassiliev n'est pas l'anneau $\mathcal{I}(\mathcal{N}, A)$ de tous les invariants de nœuds, ne serait-ce que pour des questions de cardinal. On peut cependant poser la conjecture suivante:

Conjecture A . – *Les invariants de Vassiliev distinguent tous les nœuds.*

2. L'ALGÈBRE DES NŒUDS

Soit $\Lambda = \mathbf{Z}[\mathcal{N}]$ le $\mathbf{Z}$-module libre de base $\mathcal{N}$. L'opération de somme connexe qui connecte deux nœuds mis préalablement dans deux demi-espaces disjoints, induit sur $\mathcal{N}$ une structure de monoïde commutatif unitaire et par conséquent sur Λ une structure d'algèbre sur $\mathbf{Z}$. De plus l'application $K \mapsto K \otimes K$ définit une comultiplication Δ de Λ dans $\Lambda \otimes \Lambda$ qui est un morphisme d'algèbre coassociatif et cocommutatif. De ce fait Λ est une algèbre de Hopf (sans toutefois posséder d'antipode).

Un invariant I de nœuds à valeur dans un anneau A est clairement une application linéaire de Λ dans A, et l'extension de I à tous les nœuds peut se voir de la façon suivante:

Soit K un nœud singulier. Alors l'élément $[K] = \Sigma_{\alpha \in \mathcal{F}(K)} \epsilon(\alpha) K_\alpha$ est un élément de Λ et $I(K) = I([K])$ est clairement défini.

Notation. – On désignera par I_n le sous-module de Λ engendré par les classes des nœuds singuliers de $\mathcal{E}_n$.

On peut également considérer l'inclusion $i : \mathcal{N} \subset \Lambda$ comme l'invariant de nœuds universel et $[K]$ n'est autre que l'élément $i(K)$. De plus, pour tout entier n, l'application canonique i_n de $\mathcal{N}$ dans Λ/I_{n+1} est l'invariant de Vassiliev de degré $\leq n$ universel. On a donc pour tout $n \geq 0$:

$$V_n(A) = \mathrm{Hom}(\Lambda/I_{n+1}, A)$$

Proposition 4. – *Les sous-modules I_n forment une filtration de Λ compatible avec la structure d'algèbre de Hopf:*

$$\Lambda = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$$

$$\forall\, p, q \qquad I_p\, I_q \subset I_{p+q}$$

$$\forall\, n \quad \Delta(I_n) \subset \bigoplus_{p+q=n} I_p \otimes I_q$$

Soit $G\Lambda = \oplus G_n\Lambda = \oplus I_n/I_{n+1}$ le gradué associé à la filtration $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$. $G\Lambda$ est une algèbre de Hopf graduée sur $\mathbf{Z}$.

Proposition 5. – *$G\Lambda$ est une algèbre de Hopf graduée, de type fini sur $\mathbf{Z}$ en chaque degré, et l'algèbre $G\Lambda \otimes \mathbf{Q}$ est une algèbre de polynômes en des générateurs homogènes.*

Mis à part le fait que $G\Lambda$ est de type fini en chaque degré, et qui sera montré dans la partie suivante, la proposition 5 est clairement conséquence de la proposition 4, et celle-ci se montre en exprimant KK' et $\Delta(K)$ lorsque K et K' sont des nœuds singuliers. Le cas du produit est simple et KK' s'exprime de la même façon que dans le cas des vrai nœuds. Le cas du coproduit est plus technique, mais on a la formule:

$$\Delta(K) = \sum_{\alpha \geq 0} K_\alpha \otimes K_{\alpha - 1} \tag{3}$$

où α parcours l'ensemble des fonctions de l'ensemble D des points doubles de K dans $\{0, 1\}$, et où, lorsque β est une fonction de D dans $\{-1, 0, +1\}$, K_β désigne

le nœud K modifié de façon positive là où β vaut $+1$, de façon négative là où β vaut -1 et non modifié ailleurs.

Comme dans toute algèbre de Hopf graduée commutative et cocommutative, on obtient un système de générateurs polynomiaux en prenant une base homogène de l'espace vectoriel des éléments primitifs, c'est-à-dire des éléments x de $G\Lambda \otimes \mathbf{Q}$ vérifiant: $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$.

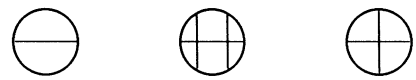
Les résultats de la partie 1 sont clairement conséquences de ces deux propositions, et la conjecture A est impliquée par la conjecture plus forte suivante:

Conjecture B . – *L'intersection des modules I_n est nulle.*

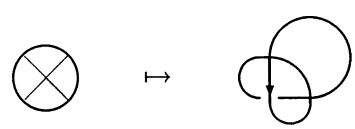
3. LES DIAGRAMMES DE CORDES

3.1. Définition

On appelle *diagramme de cordes* la figure formée par un cercle orienté et un nombre fini de cordes de ce cercle ne se rencontrant pas sur le cercle. Plus précisément on appellera diagramme de cordes une classe d'isomorphisme de telles figures. L'ensemble des diagrammes de cordes sera noté $\mathcal{D}^c$. Cet ensemble est gradué par le nombre de cordes et l'ensemble $\mathcal{D}^c_n$ des diagrammes de cordes munis de n cordes est un ensemble fini.



Considérons un diagramme de corde $D \in \mathcal{D}^c_n$. Ce diagramme est représenté par des cordes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ du cercle standard. Soient x_i et y_i les extrémités de c_i. Alors il existe une unique classe d'homotopie régulière d'immersion $[f]$ du cercle standard dans $\mathbf{R}^3$ prenant pour chaque i la même valeur en x_i et en y_i. Chaque représentant f de $[f]$ qui est injectif en dehors de ces points et qui définit ainsi un nœud singulier à n points doubles induit un élément K de I_n. On passe d'un tel représentant f à un autre en faisant passer un certain nombre de fois une branche du cercle de part et d'autre d'une autre. L'élément K de I_n est donc bien défini modulo le sous-module engendré par les éléments $L - L'$ où L' est obtenu à partir du nœud singulier à n points doubles L en faisant une modification du type: dessous-dessus $\mapsto$ dessus-dessous, c'est-à-dire modulo I_{n+1}.



Cette construction définit ainsi une application $\varphi : \mathcal{D}_n^c \to G_n\Lambda$, et l'application induite de $\mathbf{Z}[\mathcal{D}_n^c]$ dans $G_n\Lambda$ est clairement surjective, ce qui montre que $G_n\Lambda$ est un $\mathbf{Z}$-module de type fini.

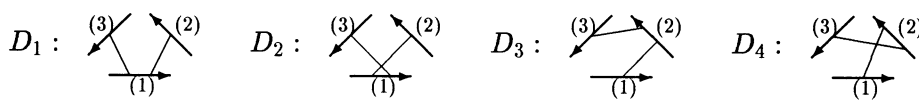
3.2. La relation des quatre termes (4T)

Proposition 5. – *L'application φ vérifie les propriétés suivantes:*

— *Soit δ_1 le seul diagramme à une corde. Alors:*

$$\varphi(\delta_1) = 0 \tag{4}$$

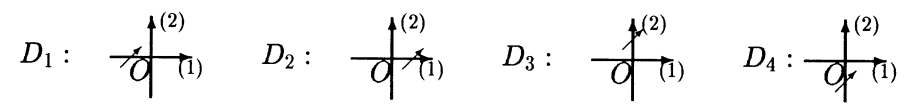
— *Soit D_1, D_2, D_3, D_4 quatre diagrammes de cordes qui ne diffèrent qu'en trois parties du cercle et en deux cordes, et qui ont, en ces trois parties du cercle, les formes suivantes:*



Alors on a:

$$\varphi(D_1) - \varphi(D_2) = \varphi(D_3) - \varphi(D_4) \tag{4T}$$

Soit K_1 un nœud singulier correspondant au diagramme D_1. Les deux parties (1) et (2) du cercle donnent deux parties d'axes orientés sécants en O dans $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^3$. On peut alors choisir des nœuds singuliers K_2, K_3 et K_4 correspondant au diagrammes D_2, D_3, D_4 et qui ne diffèrent de K_1 que par le fait que la partie (3) du cercle traverse le plan $\mathbf{R}^2$ en l'un ou l'autre des axes et d'un côté ou de l'autre de O. La formule (4T) est alors conséquence de (1) appliqué à l'invariant universel $i : \mathcal{N} \to \Lambda$.



3.3. L'algèbre des diagrammes de cordes

On désigne par $\mathcal{A}$ le $\mathbf{Z}$-module gradué, quotient de $\oplus\mathbf{Z}[\mathcal{D}_n^c]$ par les relations de type (4T), c'est-à-dire les relations:

$$D_1 - D_2 - D_3 + D_4 \equiv 0$$

où D_1, D_2, D_3, D_4 sont des diagrammes de cordes considérés dans la proposition 5.

Théorème 6. – *Le module gradué $\mathcal{A}$ est une algèbre de Hopf graduée commutative et cocommutative et l'application φ induit un épimorphisme d'algèbre de Hopf de l'algèbre réduite quotient $\mathcal{A}^r = \mathcal{A}/(\delta_1)$ sur l'algèbre $G\Lambda$.*

La comultiplication $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ est suggérée par la formule (3). Elle est donc définie par:

$$\Delta(D) = \sum D' \otimes D''$$

où D' est obtenu en enlevant un certain nombre de cordes à D, et D'' en enlevant les autres, la somme portant sur toutes ces possibilités.

La multiplication de deux diagrammes de cordes D et D' est obtenue en faisant la somme connexe de D et D' en deux points des cercles non situés sur les cordes. L'ambiguïté de cette multiplication disparait dans le quotient $\mathcal{A}$ de $\oplus\mathbf{Z}[\mathcal{D}_n^c]$.

Remarque. – L'algèbre $\mathcal{A} \otimes \mathbf{Q}$ est une algèbre de polynômes en des variables formant une base de l'espace vectoriel des éléments primitifs. Des calculs fait sur ordinateur donnent pour les nombres d_n de variables de degré n, les valeurs suivantes:

$$d_1 = 1 \quad d_2 = 1 \quad d_3 = 1 \quad d_4 = 2 \quad d_5 = 3 \quad d_6 = 5 \quad d_7 = 8 \quad d_8 = 12 \quad d_9 = 18$$

Ces calculs montrent également qu'en petit degré, $\mathcal{A}$ est libre sur $\mathbf{Z}$.

3.4. Le cas des nœuds parallélisés

On peut développer une théorie semblable à celle-ci pour les nœuds parallélisés. On obtient ainsi une algèbre de nœuds $\tilde{\Lambda}$ qui est une algèbre de Hopf filtrée et un gradué associé $G\tilde{\Lambda}$. Ces algèbres sont en fait des algèbres sur $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$, la multiplication par t désignant le changement de parallélisation qui augmente l'auto-intersection de 1, ou, ce qui revient au même, le produit par le nœud parallélisé trivial d'auto-intersection 1. On vérifie que $G\tilde{\Lambda}$ est une algèbre sur $\mathbf{Z}[t]/t^2$.

En ce qui concerne l'application $\tilde{\varphi}$ qui correspond à φ, on doit la préciser de la façon suivante:

Si D est un diagramme de cordes, on définit $\varphi(D)$ comme un nœud singulier représenté par un diagramme dans le plan possédant des points doubles et des croisements (positifs ou négatifs). Ce nœud singulier est parallélisé en choisissant un des vecteurs normaux normal au plan. On précise alors le choix de $\tilde{\varphi}(D)$ en imposant qu'il y ait autant de croisements positifs que de croisements négatifs.

Il est clair que dans cette nouvelle théorie, la relation (1) n'est plus vérifiée, l'élément $\varphi(\delta_1)$ étant égal à $t - t^{-1}$. La relation (4T) reste par contre valable.

Théorème 7. – *L'application $\tilde{\varphi}$ induit un épimorphisme d'algèbre de Hopf de $\mathcal{A} \otimes \mathbf{Z}[t]/t^2$ sur $G\tilde{\Lambda}$.*

Les applications φ et $\tilde{\varphi}$ sont extrêmement importantes dans l'étude des nœuds à cause du théorème de Kontsevich:

Théorème 8. [BN2] – *Les applications $\varphi' : \mathcal{A}^r \to G\Lambda$ et $\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \otimes \mathbf{Z}[t]/t^2 \to G\tilde{\Lambda}$ ont des noyaux finis en chaque degré.*

Conjecture C . – *Les applications $\varphi' : \mathcal{A}^r \to G\Lambda$ et $\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \otimes \mathbf{Z}[t]/t^2 \to G\tilde{\Lambda}$ sont des isomorphismes.*

Le théorème de Kontsevich montre en fait que cette conjecture est impliquée par la conjecture plus forte suivante:

Conjecture D . – *L'algèbre $\mathcal{A}$ est sans torsion.*

4. AUTRES DESCRIPTIONS DE L'ALGÈBRE $\mathcal{A}$

4.1. Diagrammes trivalents

On appelle *diagramme trivalent* ou *diagramme de Feynman* un graphe fini trivalent connexe D muni des données suivantes:

— un sous graphe $\Gamma \subset D$ homéomorphe au cercle et appelé cercle de D.

— une orientation de Γ.

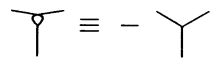
— un ordre cyclique sur l'ensemble des trois arètes issues de chaque sommet de D.

En pratique, on représente un diagramme trivalent à l'aide d'une immersion regulière de D dans le plan, qui soit un plongement direct sur Γ et qui soit compatible en chaque sommet avec les ordres cycliques et l'orientation du plan. Ainsi un diagramme de corde n'est-il rien d'autre qu'un diagramme trivalent dont tous les sommets sont sur le cercle.

On notera $\mathcal{D}^t$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de diagrammes trivalents. L'ensemble $\mathcal{D}^c$ est inclus dans $\mathcal{D}^t$.

Théorème 9. [BN2] – *L'inclusion $\mathcal{D}^c \subset \mathcal{D}^t$ induit un isomorphisme de l'algèbre $\mathcal{A}$ sur le $\mathbf{Z}$-module quotient de $\mathbf{Z}[\mathcal{D}^t]$ par les relations suivantes:*

— Si D' est obtenu à partir d'un diagramme trivalent D en changeant l'ordre cyclique en un sommet, on a la relation d'antisymétrie: $D' \equiv -D$

(AS) 

— *Si trois diagrammes trivalents D, D' et D'' ne diffèrent qu'en les sous-graphes suivant:*

D :  D' :  D'' : 

on a:

(IHX) $$D \equiv D' - D''$$

Le produit sur les diagrammes trivalents se définit comme pour les diagrammes de cordes en faisant la somme connexe de deux diagrammes trivalents en deux points réguliers des cercles. Quant à la comultiplication, on a la formule suivante:

$$\Delta(D) = \sum D' \otimes D''$$

où D' est obtenu à partir du diagramme trivalent D muni de son cercle Γ, en ôtant à D un certain nombre de composantes de $D - \Gamma$, et D'' en enlevant les autres composantes, la somme étant faite sur tous les découpages possibles de ce type.

Il en résulte que si $D - \Gamma$ est connexe, l'élément correspondant au diagramme D dans l'algèbre $\mathcal{A}$ est primitif.

Théorème 10. – *Le module $\mathcal{PA}$ des éléments primitifs de l'algèbre $\mathcal{A}$ est engendré par les classes de diagrammes trivalents dont le complémentaire du cercle est connexe. De plus $\mathcal{PA}$ engendre $\mathcal{A}$ comme algèbre.*

Question. – L'algèbre $\mathcal{A}$ est-elle isomorphe à l'algèbre symétrique $S\mathcal{PA}$? Ceci est vrai rationnellement. C'est donc vrai si $\mathcal{PA}$ est sans torsion.

4.2 Les diagrammes trivalents libres

On appelle *diagramme trivalent libre* un graphe fini dont tous les sommets sont trivalents ou monovalent, muni en chaque sommet trivalent d'un ordre cyclique sur les sommets qui en sont issue, et tel que chaque composante connexe contienne un sommet monovalent.

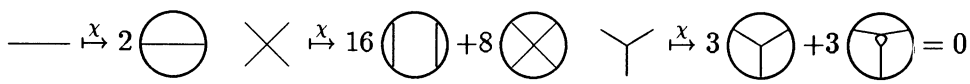
Comme ci-dessus, on représentera un tel diagramme à l'aide d'une immersion générique dans le plan qui soit compatible avec les ordres cycliques et l'orientation du plan.



On notera $\mathcal{B}$ le $\mathbf{Z}$-module engendré par les diagrammes trivalents libres avec comme relations la relation d'anti-symétrie (AS) et la relation (IHX). Ce module s'envoie dans $\mathcal{A}$ de la façon suivante:

Soit Δ un diagramme trivalent libre. Soit $X = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ ses sommets monovalents. Si α est une bijection de X sur l'ensemble des racines p-ièmes de l'unité, on peut recoller Γ et le cercle unité de $\mathbf{C}$ via α et obtenir un diagramme trivalent D_α. On pose alors:

$$\chi(\Delta) = \sum_\alpha D_\alpha$$



Théorème 11. (Kontsevich, [BN2]) – *L'application χ induit un isomorphisme rationnel de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$. De plus χ induit un isomorphisme rationnel du sous-module de $\mathcal{B}$ engendré par les diagrammes trivalents libres connexes dans le sous-module des éléments primitifs de $\mathcal{A}$.*

On peut définir sur $\mathcal{B}$ une structure d'algèbre de Hopf, le produit étant donné par la somme disjointe et les diagrammes trivalents libres connexes étant les éléments primitifs. On vérifie alors que l'application χ respecte le coproduit, ce qui explique la deuxième partie du théorème.

5. L'INTÉGRALE DE KONTSEVICH

Une méthode standard pour construire des invariants de nœuds est de construire des représentations des groupes de tresses. Or une tresse n'est autre qu'un chemin dans l'espace de configuration des parties finies de $\mathbf{C}$. Un moyen pour obtenir une représentation d'un groupe de tresse est alors de choisir une connexion plate sur cet espace de configuration et de prendre sa monodromie.

La méthode de Kontsevich va être, entre autre, de choisir un fibré et une connexion plate étroitement liés à l'algèbre $\mathcal{A}$, puis de montrer que la forme intégrale de la monodromie s'étend au cas d'un nœud.

5.1. Définition

Soit P et Q deux ensembles finis, chaque élément de P et de Q étant muni d'un signe. Ces deux ensembles peuvent donc être considérés comme des variétés orientées de dimension 0. Soit C un cobordisme orienté de P vers Q. On appellera *C-cobordisme trivalent* un graphe fini D dont tous les sommets sont d'ordre 1 ou 3, contenant une triangulation de C, et muni en chaque sommet

trivalent d'un ordre cyclique sur l'ensemble des arètes qui en sont issues, et tel que:

— l'ensemble des sommets monovalents de D est égal à $P \cup Q$ c'est-à-dire au bord de C

— toute composante connexe de D rencontre C

Notations. — Soit C un cobordisme orienté de dimension 1. On notera $\mathcal{A}(C)$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel engendré par les C-diagrammes trivalents, quotienté par les relations (AS) et (IHX).

On notera $\mathcal{A}^r(C)$ le quotient de $\mathcal{A}(C)$ par la relation suivante:

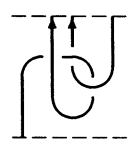
— Si D est un C-diagramme trivalent contenant deux arètes ayant les mêmes sommets, une seule étant dans C, on a: $D \equiv 0$.

Ces deux espaces vectoriels sont gradués par la moitié du nombre de sommets trivalents. On notera $\overline{\mathcal{A}^r}(C)$ le complété de $\mathcal{A}^r(C)$ correspondant.

Remarques — Il est clair que $\mathcal{A}(S^1)$ est isomorphe à $\mathcal{A} \otimes \mathbf{C}$ et que $\mathcal{A}^r(S^1)$ est isomorphe à $\mathcal{A}^r \otimes \mathbf{C}$.

Soient C' un cobordisme de P vers Q et C'' un cobordisme de Q vers R. On peut recoller C' et C'' le long de Q et obtenir un cobordisme $C = C'.C''$ de P vers R. On a alors un morphisme de recollement μ de $\overline{\mathcal{A}^r}(C') \otimes \overline{\mathcal{A}^r}(C'')$ dans $\overline{\mathcal{A}^r}(C)$. Ce morphisme μ est associatif. On le notera simplement: $x \otimes y \mapsto \mu(x \otimes y) = xy$.

On appellera *cobordisme noué* de P vers Q un cobordisme orienté (de dimension 1) C de P vers Q plongé dans $\mathbf{C} \times I$ (I étant un intervalle [a, b] de $\mathbf{R}$), rencontrant transversalement $\mathbf{C} \times \{a\}$ en P et $\mathbf{C} \times \{b\}$ en Q.



5.2. La connection de Knizhnik-Zamolodchikov

Soit, pour tout p et q, P_{pq} un ensemble fini à $p+q$ éléments, les p premiers étant muni d'un signe + et les autres d'un signe −. Soit $\mathcal{E}_{pq}$ l'espace des parties de $\mathbf{C}$ avec signes isomorphes à P_{pq}. La famille des espaces vectoriels $\overline{\mathcal{A}^r}(C)$ où C est un cobordisme trivial de P_{pq} vers un élément $P \in \mathcal{E}_{pq}$ définit un fibré vectoriel sur $\mathcal{E}_{pq}$ d'algèbre structurelle $\overline{\mathcal{A}^r}(P_{pq} \times I)$. Comme ce fibré est naturellement plat, une connection sur $\mathcal{E}_{pq}$ est simplement une forme différentielle sur $\mathcal{E}_{pq}$ qui en chaque $P \in \mathcal{E}_{pq}$ prend ses valeurs dans l'algèbre $\overline{\mathcal{A}^r}(P \times I)$ des endomorphismes de la fibre.

Définition. — La connection de Knizhnik-Zamolodchikov formelle est définie par la formule:

$$\Omega(P) = \sum_{\{x,y\}\subset P} \varepsilon_x \varepsilon_y \Omega_{xy} \omega_{xy}$$

où ε désigne le signe, où Ω_{xy} est l'élément de $\overline{\mathcal{A}^r}(P \times I)$ obtenu en rajoutant à $P \times I$ une arète joignant $x \times I$ et $y \times I$, l'ordre cyclique en chaque sommet trivalent z étant: branche de $P \times I$ arrivant en z, branche de $P \times I$ partant de z, arète rajoutée; et où ω_{xy} est la forme différentielle suivante:

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2i\pi} \frac{dy - dx}{y - x}$$

Proposition 12. — *La connection de Knizhnik-Zamolodchikov formelle est plate.*

On a clairement: $d\Omega = 0$. Le calcul de $\Omega \wedge \Omega$ donne:

$$\Omega \wedge \Omega = \sum_{\{x,y,z\}\subset P} W(x,y,z)$$

avec:

$$W(x,y,z) = \sum \varepsilon_y \varepsilon_z (\Omega_{xy}\Omega_{xz}\omega_{xy} \wedge \omega_{xz} + \Omega_{xz}\Omega_{xy}\omega_{xz} \wedge \omega_{xy})$$

où la somme porte sur les trois permutations cycliques.

Or la formule (IHX) montre que $\Omega_{xy}\Omega_{xz} - \Omega_{xz}\Omega_{xy}$ est égal à l'élément $\varepsilon_x \Omega_{xyz}$, Ω_{xyz}étant représenté par le cobordisme trivalent obtenu en rajoutant à $P \times I$ trois arètes a_x, a_y et a_z connectés à $\{x\} \times I$, $\{y\} \times I$ et $\{z\} \times I$ et connectés ensemble en un sommet trivalent, l'ordre cyclique en ce sommet étant: a_x, a_y puis a_z.

On a alors:

$$W(x,y,z) = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \Omega_{xyz} \sum \omega_{xy} \wedge \omega_{xz} = 0$$

et la courbure $d\Omega + \Omega \wedge \Omega$ est nulle.

5.3. L'intégrale de Kontsevich

Soit T une tresse munie d'une orientation quelconque. On peut voir T comme un chemin γ de $[0,1]$ dans un espace $\mathcal{E}_{pq}$ et l'on détermine la monodromie de la connection Ω par la formule [CH]:

$$Z(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Delta_n} \gamma^*(\Omega)(t_1) \wedge \gamma^*(\Omega)(t_2) \wedge \ldots \wedge \gamma^*(\Omega)(t_n)$$

où Δ_n est le simplexe: $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq 1$

Soit $C \subset \mathbf{C} \times I$ un cobordisme noué tel que la fonction cote f soit de Morse sur C. Un tel cobordisme noué sera appelé *cobordisme noué de Morse*. Si t est une valeur régulière de f, la projection de $f^{-1}(t)$ sur $\mathbf{C}$ est un élément $\gamma(t)$ de l'espace $\mathcal{E}_* = \amalg \mathcal{E}_{pq}$. Si maintenant $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq 1$ sont n valeurs régulières, la forme différentielle $\gamma^*(\Omega)(t_1) \wedge \gamma^*(\Omega)(t_2) \wedge \ldots \wedge \gamma^*(\Omega)(t_n)$ a un sens en prenant ses valeurs dans $\overline{\mathcal{A}^r}(P \times I)$ où P est l'union disjointe des ensembles $\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)$. Et le plongement standard de $P \times I$ dans le cobordisme C induit une forme différentielle à valeur dans $\overline{\mathcal{A}^r}(C)$ que l'on notera $\Omega_C(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Cette forme est définie sur un ouvert dense $U(C)$ du simplexe Δ_n, complémentaire d'une partie négligeable de Δ_n.

Théorème 13. — *Soit C un cobordisme noué de Morse. Alors chacune des intégrales*

$$\int_{\Delta_n} \Omega_C(t_1, t_2, \ldots t_n) \tag{5}$$

est absolument convergente. De plus l'élément de $\overline{\mathcal{A}^r}(C)$:

$$Z(C) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Delta_n} \Omega_C(t_1, t_2, \ldots, t_n) \tag{6}$$

ne dépend que de la classe d'isotopie de C parmi les cobordismes noués de Morse à bord fixé.

Soit D un C-diagramme trivalent qui n'est pas nul dans $\overline{\mathcal{A}^r}(C)$. Alors le coefficient (potentiel) de D dans l'intégrale (5) est une somme d'expressions de la forme:

$$\int \frac{dz_{i_1} - dz'_{j_1}}{z_{i_1} - z'_{j_1}} \wedge \ldots \frac{dz_{i_n} - dz'_{j_n}}{z_{i_n} - z'_{j_n}}$$

où (z_{i_k}, t_k) et (z'_{j_k}, t_k) sont des points de C à cotes $t_1, \ldots, t_n$ croissantes et non critiques. Pour montrer la convergence d'une telle intégrale, on se ramène, grâce au théorème de Fubini, au cas où toutes les cotes sont dans un intervalle $[a, b]$ dont seule une des extrémités (par exemple a) est critique. Une étude précise dans ce cas montre que le seul cas de divergence possible est lorsque (z_{i_1}, t_1) et (z'_{j_1}, t_1) sont sur la même branche de C avec un point critique au milieu, de valeur critique a. Mais cette situation n'est pas possible car sinon D serait nul dans $\overline{\mathcal{A}^r}(C)$.

Une étude plus précise d'une telle intégrale montre que si une branche de C a un point critique de valeur critique a et que cette branche rencontre $\mathbf{C} \times]a, b]$ en deux courbes proches, l'intégrale est petite. Par conséquent, Z(C) ne dépend dans ce cas que très peu de la cote critique a. Comme il est facile de montrer, comme dans le cas d'une monodromie, que $Z(C)$ ne dépend que de la classe

d'isotopie de C parmi les cobordismes noués de Morse à valeurs critiques fixées et à bord fixé, on en déduit que $Z(C)$ ne dépend pas non plus des cotes critiques.



Le nombre $Z(C)$ n'est malheureusement pas un invariant d'isotopie. Pour avoir un tel tel invariant, il faut le modifier, ce que l'on va faire dans le cas des nœuds où la situation est plus simple.

Soit K un nœud de Morse, c'est à dire un nœud dans $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ dont la cote est de Morse. Le nœud K est un cobordisme noué de Morse à bord vide, et $Z(K)$ est défini dans $\overline{\mathcal{A}^r}(S^1)$ qui n'est autre que le complété $\overline{\mathcal{A}^r}$ de $\mathcal{A}^r \otimes \mathbf{C}$.

Soit K_0 le nœud de Morse trivial dont la fonction cote n'a que 4 points critiques. Alors $Z(K_0)$ est une série dont le terme constant est égal à 1 et est donc inversible dans $\overline{\mathcal{A}^r}$.

Théorème 14. — *Soit K un nœud de Morse dont la fonction cote a $2p$ points critiques. Alors l'élément*

$$\widetilde{Z}(K) = Z(K_0)^{-p+1} Z(K) \tag{7}$$

de $\overline{\mathcal{A}^r}$ ne dépend que de la classe d'isotopie du nœud K et $\widetilde{Z}$ est un morphisme d'algèbre de Hopf de l'algèbre des nœuds Λ dans l'algèbre $\overline{\mathcal{A}^r}$.

De plus, si K est un nœud singulier correspondant à un diagramme de cordes D à n cordes, $\widetilde{Z}(K)$ est de valuation n et sa composante en degré n est égale à la classe de D.

Il est facile de vérifier que si l'on modifie un nœud de Morse K en rajoutant deux points critiques, l'élément $Z(K)$ est multiplié par un certain élément Z de $\overline{\mathcal{A}^r}$, indépendant de K. Cet élément est donc nécessairement égal à $Z(K_0)$.

Ainsi $\widetilde{Z}$ induit un morphisme de l'algèbre des nœuds Λ dans $\overline{\mathcal{A}^r}$ compatible avec les deux opérations d'algèbres de Hopf, comme on peut le voir par un calcul direct.

Soit maintenant K un nœud singulier à n points doubles. On peut supposer que K est inclus dans $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ et que les points doubles ont, par la fonction cote, des images distinctes et différentes des valeurs critiques. De la même façon que l'on a défini des nœuds singuliers, on peut définir des cobordismes noués singuliers et prolonger l'invariant Z sur ces objets. On peut donc considérer K comme un composé de plusieurs cobordismes noués singuliers dont au moins n

d'entre eux ont la forme suivante: toutes les branches sont standards sauf deux qui se coupent de façon standard.



Soit X un tel cobordisme singulier. L'élément $Z(X)$ est la différence de deux séries dont les termes constants sont égaux à 1. Le terme de degré 1 se calcule aisément. Il est représenté par le cobordisme trivalent obtenu en remplaçant le point double de X par une arète. On en déduit que $Z(K)$ est une série de valuation n et que le terme de degré n est le terme voulu.

Ceci montre en particulier que l'application $\widetilde{Z}$ de l'algèbre des nœuds Λ dans $\overline{\mathcal{A}^r}$ est compatible avec les filtrations et induit une application graduée de $G\Lambda$ dans $\overline{\mathcal{A}^r}$ dont la composée par $\varphi' : \mathcal{A}^r \to G\Lambda$ est rationnellement injective.

Remarque. — L'invariant $\widetilde{Z}$ prend en fait des valeurs réelles. Pour montrer cela, on prend l'image d'un nœud K par l'application $(z,t) \mapsto (\overline{z}, -t)$. On obtient un nœud equivalent mais son invariant est conjugué.

Remarque. — L'application qui à un nœud parallélisé K associe l'expression $t^n[K]$, où n est l'auto-enlacement de K et $[K]$ la classe du nœud K dans Λ, induit un isomorphisme d'algèbre de Hopf de $\tilde{\Lambda}$ sur l'algèbre de Hopf $\Lambda[t,t^{-1}]$ (où t est primitif). Comme l'application quotient de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}^r$ se relève de façon unique en un isomorphisme d'algèbre de Hopf gradué de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}^r[\delta_1]$ qui envoie δ_1 en δ_1, l'application $\widetilde{Z}$ se relève en un morphisme d'algèbre de Hopf filtré de $\tilde{\Lambda}$ dans l'algèbre $\overline{\mathcal{A}}$ complétée de $\mathcal{A} \otimes \mathbf{C}$. Ce relevé n'est pas unique, il dépend de l'image de t.

Question. — Peut-on décrire explicitement un tel relèvement à l'aide d'une intégrale?

6. CONSTRUCTIONS D'INVARIANTS DE NŒUDS

Le théorème de Kontsevich donne une application de l'algèbre des nœuds Λ dans $\overline{\mathcal{A}^r}$ et toute forme linéaire de $\mathcal{A}^r_n$ dans $\mathbf{R}$ produit un invariant de Vassiliev de degré n. Ainsi toute application de l'ensemble $\mathcal{D}^t_n$ des diagrammes trivalents à $2n$ sommets, dans $\mathbf{R}$, compatible avec les relations (AS) et (IHX) et qui annule tout diagramme trivalent possédant deux arètes de mêmes sommets dont l'une seulement est dans le cercle, donne un invariant de Vassiliev de degré n. Un telle application est appelé *système de poids de degré* n.

6.1. Représentations d'algèbres de Lie

Soit L une algèbre de Lie (réelle ou complexe) de dimension finie, t une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur L, invariante par la représentation adjointe (par exemple la forme de Killing si L est semi-simple). Soit E une représentation de L de dimension finie.

Un tel triple (L, t, E) va produire, pour tout entier n un système de poids de degré n.

Le crochet de Lie de L peut être vu comme un élément de $L^* \otimes L^* \otimes L$, et l'isomorphisme de L sur L^* induit par t donne un élément ω de $L^* \otimes L^* \otimes L^*$ qui est totalement antisymétrique.

Le produit scalaire t sur $L \otimes L$ induit, via l'isomorphisme $L \simeq L^*$, un forme bilinéaire t^* sur L^*.

La représentation E de L est donné par un élément ω' de $L^* \otimes E^* \otimes E \simeq \mathrm{Hom}(L \otimes E, E)$.

Soit D un diagramme trivalent. Pour tout sommet x de D, on note w_x le tenseur ω' si x est sur le cercle et ω sinon. De même on note V_x l'espace vectoriel $L^* \otimes E^* \otimes E$ si x est sur le cercle et $L^* \otimes L^* \otimes L^*$ sinon. Ainsi pour tout sommet x de D, w_x est un élément de V_x. Le produit tensoriel w_D de tous ces tenseurs appartient à l'espace vectoriel $V_D = \bigotimes_x V_x$.

D'autre part chaque arète a de D permet de contracter les tenseurs de V_D de la façon suivante:

Choisissons tout d'abord l'ordre cyclique en chaque sommet du cercle de façon à avoir en premier l'arète non contenue dans le cercle. Si l'arète a est sur le cercle, notons x son origine et y son extrémité. On peut évaluer la composante E de V_x avec la composante E^* de V_y. Sinon notons x et y ses extrémités. Soit i (resp. j) le numéro de a dans l'ordre cyclique des arètes issues de x (resp. de y). On peut alors contracter le i-ième facteur L^* de V_x avec le j-ième facteur L^* de V_y par t^*.

Le produit tensoriel de toutes ces contractions définit une forme linéaire T sur V_D, et on pose:

$$I_{(L,t,E)}(D) = T(w_D)$$

Théorème 15. (Bar-Natan [BN1] [BN2]) — *L'application $I_{(L,t,E)}$ induit pour tout n un système de poids de degré n, et produit donc une suite d'invariants de Vassiliev.*

La relation (AS) résulte du fait que le tenseur est totalement antisymétrique et la relation (IHX) se déduit de la relation de Jacobi.

6.2. Surfaces marquées

Définition. — Une *surface marquée* est une surface Σ compacte à bord munie d'un nombre fini de vecteurs tangents en des points distincts de $\partial\Sigma$, chaque composante de Σ ayant au moins un vecteur sur son bord. On notera $\mathcal{S}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel engendré par les classes d'isomorphisme de surfaces marquées.

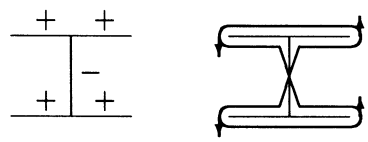
L'espace vectoriel $\mathcal{S}$ est gradué de la façon suivante: si Σ est une surface marquée, on définit le degré de Σ comme étant le nombre de vecteurs diminué de la caractéristique d'Euler de la surface. De plus, l'union disjointe des surfaces induit sur $\mathcal{S}$ une structure d'algèbre graduée, et en prenant comme éléments primitifs les surfaces connexes, $\mathcal{S}$ devient une algèbre de Hopf.

Théorème 16. (Bar-Natan [BN2], Kontsevich) — *Il existe une application naturelle graduée Φ^r de l'algèbre $\mathcal{A}^r$ dans $\mathcal{S}$ compatible avec la comultiplication. Cette application induit pour tout entier n, un invariant de Vassiliev à valeur dans $\mathcal{S}_n$.*

L'application Φ^r se construit de la façon suivante: Soit Δ un diagramme trivalent libre. Soit α une application de l'ensemble des arêtes de Δ dans $\{-1,1\}$. On obtient alors une surface Σ_α en procédant comme suit:

On épaissit Δ en une surface à bord en ajoutant en chaque sommet x de Δ un petit disque D_x orienté (de façon compatible avec l'ordre cyclique si x est trivalent), et en connectant deux disques correspondant à deux sommets x et y d'une arête a en rajoutant une bande contenant l'arête, le recollement étant compatible ou non avec les orientations de D_x et D_y suivant que $\alpha(a)$ et égal ou non à 1. On obtient ainsi une surface Σ_α contenant Δ et qui s'envoie dans le plan par une application f qui est une immersion partout sauf près des milieux des arêtes a telles que $\alpha(a) = -1$.

On marque alors la surface Σ_α en mettant sur le bord de chaque disque D_x correspondant à un sommet monovalent, un vecteur tangent direct.



On pose ensuite:

$$\Psi(\Delta) = \sum_\alpha (\prod_a \alpha(a))\Sigma_\alpha$$

On vérifie que Ψ est compatible avec les relations (AS) et (IHX) et induit une application toujours notée Ψ de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{S}$, et Ψ est clairement un morphisme d'algèbre de Hopf. Comme $\mathcal{B}$ est rationnellement isomorphe à $\mathcal{A}$, on en déduit une application graduée Φ de l'algèbre $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{S}$. Or rationnellement, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^r$

sont des algèbres de polynômes, $\mathcal{A}^r$ étant le quotient de $\mathcal{A}$ par l'idéal engendré par le générateur δ_1 de degré 1. On peut alors prendre une section $s : \mathcal{A}^r \to \mathcal{A}$ de l'application quotient en envoyant chaque générateur en lui-même sauf δ_1 que l'on envoie en 0, et l'application $\Phi^r = \Phi \circ s$ donne, en chaque degré, un système de poids, et donc un invariant de Vassiliev. Comme l'isomorphisme rationnel de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{A}$ et s respectent la comultiplication, Ψ^r la respecte également.

BIBLIOGRAPHIE

[BL] J. S. BIRMAN et X. S. LIN – *Knots polynomials and Vassiliev's invariants*, Invent. Math. **111**, 1993, 225–270.

[BN1] D. BAR-NATAN – *Weights of Feynman diagrams and the Vassiliev knot invariants*, preprint 1991.

[BN2] D. BAR-NATAN – *On the Vassiliev knot invariants*, preprint 1992.

[BN3] D. BAR-NATAN – *Vassiliev homotopy string link invariants*, preprint 1992.

[CH] K. T. CHEN –*Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc. **83**, 1977, 831–879.

[CO] J. H. CONWAY –*An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties*, Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon, New-York 1970, 329–358.

[D] C. DAY –*Vassiliev invariants for links*, preprint 1992.

[F] P. FREYD, J. HOSTE, W. B. R. LICKORISH, K. MILLETT, A. OCNEANU et D. YETTER – *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc. **12**, 1985, 239–246.

[J] V. F. R. JONES – *A polynomial invariant for knots via Von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **12**, 1985, 103–111.

[KA] L. H. KAUFFMAN – *An invariant of regular isotopy*, Trans. Amer. Math. Soc **312**, 1990, 417–471.

[KO] M. KONTSEVICH – *Graphs, homotopical algebra and low-dimensional topology*, preprint 1992.

[KZ] V. G. KNIZHNIK et A. B. ZAMOLODCHIKOV – *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions*, Nucl. Phys. **B247**, 1984, 83–103.

[L] X. S. LIN – *Vertex models, quantum groups and Vassiliev's knot invariants*, preprint 1991.

[P] S. PIUNIKHINE – *Weignts of Feynman diagrams, link polynomials and Vassiliev knot invariants*, preprint 1992.

[S] A. B. SOSSINSKY – *Feynman diagrams and Vassiliev invariants*, IHES M/92/13, preprint 1992.

[T] V. G. TURAEV – *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. **92**, 1988, 527–553.

[V1] V. A. VASSILIEV – *Cohomology of knot spaces*, Theory of Singularities and its Applications (V. I. Arnold, éd.), Amer. Math. Soc., Providence, 1990.

[V2] V. A. VASSILIEV – Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications, Trans. of Math. Mono. **98**, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.

Pierre VOGEL
Université de Paris VII
Département de Mathématiques
Tour 45-55, 5ième étage
2, place Jussieu
F-75251 PARIS CÉDEX 05

Astérisque

DANIEL BENNEQUIN

L'instanton gordien [d'après P.B. Kronheimer et T.S. Mrowka]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 770, p. 233-277

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__233_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Juin 1993
45ème année, 1992-93, n° 770

L'INSTANTON GORDIEN
[d'après P.B. Kronheimer et T.S. Mrowka]

par **Daniel BENNEQUIN**

La voie royale qui mène à la topologie des variétés de dimension 4 est l'auto-dualité des connexions (unitaires) sur les fibrés vectoriels (complexes de rang 2) ; S.K. Donaldson, puis A. Floer, ont démontré qu'elle est au moins aussi efficace que la variable complexe en dimension 2 (Cauchy, Riemann) et la géométrie hyperbolique en dimension 3 (W. Thurston). Les nœuds des espaces à trois dimensions posent des questions qui se formulent naturellement avec quatre dimensions ; en empruntant la voie auto-duale, P.B. Kronheimer et T.S. Mrowka ont résolu quelques problèmes majeurs de théorie classique des nœuds : ils parviennent à cerner la forme des classes d'homologie de dimension 2 en dimension 4.

1. ANTI-DUALITÉ SINGULIÈRE

1.1. Anti-dualité et chirurgie

Soient X une variété sur $\mathbf{R}$ lisse orientée de dimension 4 et P un fibré principal de groupe G au-dessus de X, soient $\mathbf{g}$ une métrique riemannienne sur X et $*$ l'opérateur étoile de Hodge sur les formes extérieures ($\alpha \wedge *\beta = (\alpha, \beta)\mathrm{vol}_X$) ; une connexion ∇ sur P est *auto-duale* (resp. *anti-auto-duale*) si sa courbure F, forme de degré 2 à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, vérifie $*F = F$ (resp. $*F = -F$). Avec des coordonnées euclidiennes x_1, x_2, x_3, x_4 en un point de X, l'anti-auto-dualité (ou anti-dualité, surnommée ASD) s'écrit

$$F_{12} + F_{34} = 0 \quad , \quad F_{14} + F_{23} = 0 \quad , \quad F_{13} + F_{42} = 0,$$

sur les composantes de F. Un renversement de l'orientation de X échange SD et ASD. C'est à cause de l'interprétation holomorphe qu'on accorde la préférence à

l'anti-dualité : supposons $G = U_r(\mathbf{C})$ et notons E le fibré vectoriel complexe de rang r associé à P ; quelle que soit la structure complexe $\mathbf{J}$, compatible avec $\mathbf{g}$, qu'on mette sur X, ∇ est ASD si et seulement si F est purement de type $(1,1)$ et primitive, c'est-à-dire perpendiculaire à la 2-forme ω définie par $\omega(u,v) = \mathbf{g}(\mathbf{J}u, v)$. Donc, si ∇ est anti-duale, sa "partie anti-linéaire" $\nabla^{0,1}$ donne à E une structure holomorphe ; et inversement si E possède une structure analytique complexe, la condition pour que l'unique connexion unitaire compatible ∇ (définie par $A = A'' - {}^t\bar{A}''$ en trivialisation locale) soit ASD est $F.\omega = 0$ (condition d'Hermite-Einstein) (*cf.* [H], [Ga]).

Seules comptent la structure conforme et l'orientation de X.

Nous appellerons *instanton* toute connexion anti-auto-duale. Les deux qualités primordiales de l'instanton sont l'action et la dimension.

L'*action* d'une connexion unitaire est $-\frac{1}{8\pi^2}\int_X Tr(F \wedge *F)$. Lorsque X est fermée (*i.e.* compacte sans bord), la théorie de Chern-Weil dit que $\frac{1}{2\pi i} Tr\, F$ représente la classe entière $c_1(E)$ et que $\frac{1}{8\pi^2} Tr(F \wedge F)$ représente la classe rationnelle $-\frac{1}{2} p_1(E) = c_2(E) - \frac{1}{2} c_1^2(E)$; l'action des connexions ASD sur E est minimale. (La courbure de la connexion projective associée à ∇ est $F^0 = F - \frac{1}{r} Tr\, F.id_E$, et la forme $\frac{1}{8\pi^2} Tr(F^0 \wedge F^0)$ représente $c_2 - \left(\frac{r-1}{2r}\right)c_1^2 = \frac{1}{r} c_2(End\, E)$.)

Sur X fermée, de caractéristique d'Euler χ_X et de signature σ_X, l'ensemble $\mathcal{M}(X;P)$ des classes d'équivalence de jauges d'instantons possède une *dimension virtuelle*, notée $2d$ égale à $-p_1(\mathrm{Ad}_{\mathbf{C}} P) - \frac{1}{2}\dim G(\chi_X + \sigma_X)$ (*c.f.* [A.H.S]).

Dans cet exposé, nous ne rencontrerons que les groupes U_2, SU_2 et $PU_2 = SO_3$. Pour SO_3, on définira l'action en identifiant so_3 à su_2.

Lorsque X est fermée, la valeur de l'action, $k = -\frac{1}{4} p_1(\mathrm{Ad}P)$, est dans $\frac{1}{4}\mathbf{Z}$, elle est dans $\frac{1}{2}\mathbf{Z}$ si $G = U_2$ et dans $\mathbf{Z}$ si $G = SU_2$. On appelle k le *nombre d'instantons.* Supposons X connexe ; si b_1 désigne le premier nombre de Betti de X et b_2^+ (resp. b_2^-) le nombre de carrés positifs (resp. négatifs) d'une réduction de Gauss de la forme d'intersection sur $H_2(X, \mathbf{R})$, on a $\sigma_X = b_2^+ - b_2^-$, et $\chi_X = 2 - 2b_1 + b_2^+ + b_2^-$, donc pour $G = SU_2$ ou SO_3

$$2d = 8k - 3(1 + b_2^+ - b_1). \tag{1}$$

Pour une métrique $\mathbf{g}$ générique (C^2) (et pour k assez grand), l'ensemble $\mathcal{M}^*$ des instantons irréductibles est une variété de dimension $2d$ (*cf.* [F.U.], [D.K.]).

(Qu'avec suffisamment d'action, $\mathcal{M}$ soit non vide vient de Taubes, 1982.)

Donaldson eut l'idée de se servir de la cohomologie de $\mathcal{M}$ pour distinguer entre des variétés de dimension 4 que le type d'homotopie ne distinguait pas :

Notons $\mathcal{A}$ l'espace affine des connexions sur P, $\mathcal{G}$ le groupe de jauge et $\mathcal{B}$ le quotient $\mathcal{A}/\mathcal{G}$. Puisqu'il faut choisir un cadre fonctionnel, les régularités Sobolev $H^s = L^2_s$, $s \geq 2$ pour $\mathcal{A}$ et $s \geq 3$ pour $\mathcal{G}$ conviennent. Soient $\mathcal{A}^*$ les irréductibles (isotropie centrale) et $\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^*/\mathcal{G}$. Le groupe $\mathcal{G}$ agit continûment sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$, l'espace $\mathcal{B}$ est séparé et $\mathcal{B}^*$ est une variété de Banach. Le fibré principal universel sur $\mathcal{A}^* \times X$ descend en un SO_3 fibré $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{B}^* \times X$ (dit "fibré adjoint universel") ; sa *classe fondamentale* est $\mu = -\frac{1}{4}\, p_1(\mathcal{P}) \in H^4(\mathcal{B}^* \times X, \mathbf{Q})$.

Supposons X connexe et simplement connexe, et $G = SU_2$. La cohomologie rationnelle de $\mathcal{B}^*$ est engendrée par les produits obliques μ/h (intégration dans les fibres ou "slant-produit") de μ avec les classes d'homologie de X ; c'est une algèbre symétrique $\mathbf{C}[u] \otimes S(H_2(X))$, où $u = \mu/\{x\}$, $x \in X$ (Thom, Borel, Serre, *cf.* [D.K.]). Un choix d'orientation β de $H^2_+(X, \mathbf{R})$ oriente $\mathcal{M}$ (Donaldson [D2]), mais $\mathcal{M}$ n'est pas compacte et on voit mal comment définir une classe d'homologie $[\mathcal{M}]$ dans $H_*(\mathcal{B})$. Cependant, dans [D4], pour b_2^+ impair ≥ 3 et pour les grandes valeurs de k, avec $h \in H_2(X)$, Donaldson donne un sens invariant aux expressions

$$q_{k,(\beta)}(h) = (\mu/h)^d \,.\, [\mathcal{M}_k]_\beta. \tag{2}$$

(On doit choisir b_2^+ impair pour que d soit entier ; le "domaine stable" des grands k est $4k > 3(1 + b_2^+)$; et invariant signifie indépendant de la métrique $\mathbf{g}$. Le § 3.2 donnera des précisions et des généralisations.

Donaldson définit aussi des invariants pour $G = SO_3$ dépendant d'un relèvement $\widetilde{P}$ de P à U_2 : $q_{k,w;(\beta),(c)}$, où $w = w_2(P)$, $c = c_1(\widetilde{P})$.)

Les $q_k \in S^d(H_2(X))$ s'appellent *polynômes de Donaldson* (pour SU_2) ; grâce à eux, la topologie de dimension 4 a déjà fait d'énormes progrès.

D'une part, il y a des propriétés d'*annulation* :

Si l'on peut décomposer X en somme connexe $X_1 \# X_2$ telle que $b_2^+(X_1) > 0$ et $b_2^+(X_2) > 0$, alors tous les q_k sont nuls.

D'autre part, des propriétés de *positivité* :

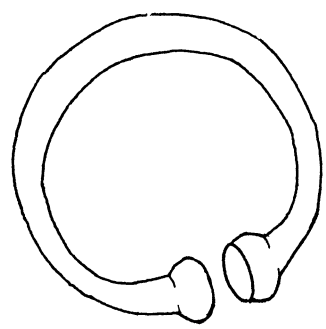
Si X est une surface projective complexe connexe, simplement connexe et de genre géométrique $p_g = \frac{1}{2}(b_2^+ - 1)$ strictement positif, et si H est une section

hyperplane de X, alors dès que k est assez grand (et avec le bon choix de β), $q_k(H) > 0$.

Par suite, quand une surface projective X (1-connexe, de genre géométrique > 0) se décompose en $X_1 \# X_2$, la forme d'intersection d'un des facteurs doit être définie négative (c'est donc une forme diagonale sur $\mathbf{Z}$, $\oplus_{\ell \leq b_2}(-1)_\ell$, d'après [D1]).

En appliquant ce résultat à des revêtements ramifiés, Donaldson obtient un théorème sur les courbes algébriques ([D5]) :

Soient X une surface projective simplement connexe et C une courbe algébrique lisse sur X, *ample* (*i.e.* les sections d'un fibré $\mathcal{O}_X(nC)$, $n > 0$ donnent un plongement projectif de X), alors il est impossible de trouver un disque plongé dans $X \backslash C$ qui simplifie C par chirurgie.



1.2. Genre et monodromie

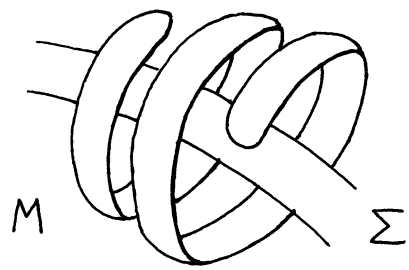
Énoncé du problème : étant donnée une classe d'homologie entière h de degré deux de X, comprendre le plus petit genre possible g_h d'une surface orientée connexe plongée Σ dans la classe h.

Kronheimer ([K1], 1990) eut l'idée d'utiliser des connexions ∇' définies seulement sur $X' = X \backslash \Sigma$, d'actions finies et anti-auto-duales sur X'.

Pour de tels "instantons singuliers", L.M. et R.J. Sibner (*cf.* [S & S]) ont prouvé l'existence d'une holonomie limite M autour de Σ, constante (à conjugaison près) le long de Σ.

Supposons $G = SU_2$. Les valeurs propres de M sont $\exp(\pm 2\pi i\alpha)$ avec $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$. De plus, si la courbure F' de ∇' est L^p avec $p > 2$, la connexion ∇' induit un prolongement lisse E de E' sur X (unique à isomorphisme près) et

une décomposition en $L \oplus \overline{L}$ le long de Σ, selon les directions propres asymptotiques de M (voir [S & S] et O. Biquard [B.1 & 2]). (F' se prolonge en une forme C^∞, F à valeur dans $\mathfrak{g}$, qui n'est pas en général une forme de courbure.) Il arrive donc, en plus de α, deux nombres entiers $k = c_2(E).X$ et $\ell = -c_1(L).\Sigma$, qui sont des invariants topologiques du paysage.



(Atiyah, [A.1], avait remarqué que les instantons singuliers à symétrie de révolution autour de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^4$, s'interprètent comme des "monopoles magnétiques", au sens de Prasad et Sommerfield, sur l'espace hyperbolique H^3 de courbure -1 ; la composante angulaire de ∇' est le "champ de Higgs", le nombre α est la masse, le nombre ℓ la charge magnétique et k la charge de Yang-Mills, donnée par l'action de la connexion induite sur H^3.)

Si n désigne l'auto-intersection $\Sigma.\Sigma$ de Σ en homologie, l'action de ∇' est

$$-\frac{1}{8\pi^2}\int_X Tr(F' \wedge *F') = k + 2\alpha\ell - n\alpha^2. \tag{3}$$

Dans [K.M.1], P.B. Kronheimer et T.S. Mrowka mettent en place la théorie elliptique nécessaire (*cf.* § 1.3) :

la dimension formelle de l'espace $\mathcal{M}^\alpha_{k,\ell}(X, \Sigma)$ des SU_2-instantons singuliers de *masse* α, de *nombre d'instanton* k et de *nombre de monopole* ℓ est égale à

$$2d = 8k + 4\ell - (2g - 2) - 3(1 + b_2^+ - b_1). \tag{4}$$

(Lorsque $G = SO_3$, le fibré vectoriel réel V' de rang 3 associé à P' se prolonge en V sur X avec une réduction le long de Σ du groupe structural à SO_2 :

$V_{|\Sigma} = \mathbf{1} \oplus K$. On définit alors $k = -\frac{1}{4}\, p_1(V) \in \frac{1}{4}\,\mathbf{Z}$, et $\ell = -\frac{1}{2}\, e(K) \in \frac{1}{2}\,\mathbf{Z}$. Les valeurs propres de $M_{\mathbf{C}}$ sont 1, et $\exp \pm 4\pi i\alpha$.

Rappelons que sur une variété de dimension 4, un SO_3-fibré est classifié par p_1 et w_2 soumis à la seule relation $w_2^2 \equiv p_1 \bmod 4$ (Dold et Whitney, 1959). Si $w \in H^2(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est la deuxième classe de Stiefel-Whitney de V, on a dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, $k \equiv -\frac{1}{4}\, w^2$ et $\ell \equiv -\frac{1}{2}\, w.\Sigma$.

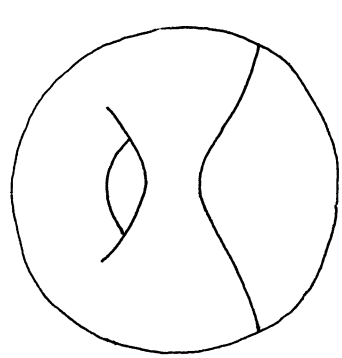
Les formules (3) et (4) marchent aussi pour $G = SO_3$ et pour l'espace $\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell;w}(X, \Sigma; P)$.)

Dans [K.M.2], sont définis les polynômes $q_{k,\ell}$ dans $S^d(H_2(X \backslash \Sigma))$ et pour eux est établi un mécanisme analogue à celui de [D.4] d'annulation et de positivité qui entraîne :

THÉORÈME A (Kronheimer et Mrowka, [K.M.1 & 2]).—*Soit X une variété de dimension 4, lisse, compacte, orientée, connexe, simplement connexe, avec b_2^+ impair ≥ 3, telle que les polynômes de Donaldson, q_k, soient non nuls pour une infinité de valeurs de k ; soit Σ une surface orientée connexe plongée dans X d'auto-intersection n qui n'est ni une sphère homotope à zéro, ni une sphère exceptionnelle (i.e. d'auto-intersection -1) ; alors le genre de Σ est minoré par $1 + \frac{1}{2}\, n$. (Autrement dit : $\chi_\Sigma + \Sigma.\Sigma \leq 0$.)*

En passant par les courbes algébriques tracées sur une surface $K3$, Kronheimer et Mrowka en déduisent :

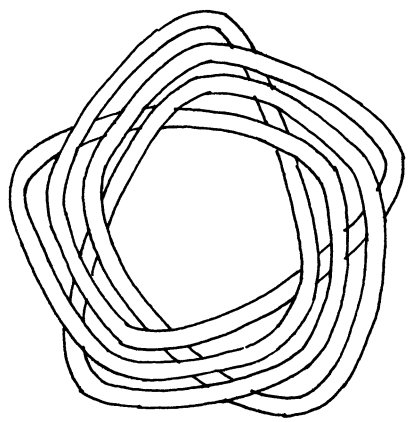
COROLLAIRE 1 (Conjecture du genre semi-locale).—*Soient C une courbe algébrique lisse dans $\mathbf{C}^2$ transverse à la sphère S^3 de rayon 1 et Γ l'entrelacs $S^3 \cap C$, alors toute surface orientée plongée V dans la boule B^4 s'appuyant sur Γ vérifie $\chi_V \leq \chi_{C \cap B}$.*



COROLLAIRE 2 (Conjecture de Milnor).—*Soient δ le nombre de points doubles ordinaires concentrés en une singularité isolée irréductible de courbe plane et u le nombre gordien du nœud qu'on obtient en coupant la courbe par une petite sphère autour du point singulier ; alors $u \geq \delta$.*

Donc $u = \delta$ d'après Pinkham.

Par exemple : le nombre gordien du nœud torique (p, q), avec p et q premiers entre eux, obtenu à partir de la singularité de $x^p = y^q$ en 0 dans $\mathbf{C}^2$, est égal à $\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$. (Voir [B.W.] et [Mi].)



Conjecture (Folklore, *cf.* [Ki]).— Pour toute courbe algébrique lisse irréductible C dans une surface projective X et pour toute surface orientée plongée connexe S homologue à C, le genre de S est supérieur au genre de C.

Lorsque $X = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, c'est une *conjecture de Thom.*

Le problème est encore ouvert, mais en faisant appel à des travaux récents de Friedman, Morgan et O'Grady, et en raffinant leur technique, Kronheimer et Mrowka s'approchent de la solution :

THÉORÈME B (Kronheimer, [K.3]).—*Soit X une surface projective connexe et simplement connexe, de type général, de genre géométrique impair (i.e. $b_2^+ \equiv 3 \bmod 4$), telle que le système linéaire canonique du modèle minimal de X contienne une courbe lisse ; alors toute courbe algébrique lisse connexe dans X d'auto-intersection strictement positive réalise le minimum du genre dans sa classe d'homologie.*

Au § 4, nous écrirons d'autres résultats dans cette direction, nous parlerons du genre minimal g_h pour X et h "quelconques" et nous verrons comment le problème se rattache aux calculs explicites des polynômes de Donaldson.

1.3. Instantons logarithmiques

En premier lieu, Kronheimer et Mrowka trouvent un bon cadre analytique (fonctionnel et géométrique) pour installer les espaces de modules d'instantons singuliers.

D'abord il apparaît nécessaire de considérer des métriques $\mathbf{g}$ sur X également singulières le long de Σ ;

en coordonnées locales, (u, v) euclidiennes le long de Σ et (r, θ) polaires transversalement à Σ, et pour un nombre réel $\nu \geq 1$, $\mathbf{g}$ sera une perturbation de classe C^2 du modèle "cônique"

$$du^2 + dv^2 + dr^2 + \frac{r^2}{\nu^2}\, d\theta^2.$$

(Ce modèle est conforme à $S^2 \times H^3_\nu$, produit d'un cercle par un espace hyperbolique de courbure $-\frac{1}{\nu}$. Les $\mathbf{g}^\nu$ furent introduites dans le sujet par S. Wang, à la suite de l'étude quasi-conforme de S. Donaldson et D. Sullivan ; [W] et [D.S.].)

Si ν est un nombre entier, $\mathbf{g}$ se remonte en une métrique lisse (C^2) sur une *variété pliée* $\widetilde{X}$ le long de Σ ; les cartes de $\widetilde{X}$ sont celles de X sur $X' = X \backslash \Sigma$, mais près de Σ, $(u, v, r, \frac{\theta}{\nu})$, $\theta \in [0, 2\pi\nu]$, servent de coordonnées (*cf.* § 2, n° 1).

Comme ces métriques sont à distance bornée des métriques lisses, les espaces L^p sont les mêmes pour elles et pour les lisses.

Pour définir les espaces affines de SU_2-connexions "logarithmiques", on se donne un fibré complexe de rang deux hermitien E sur X, décomposé en somme directe $L \oplus \overline{L}$ le long de Σ, un nombre $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ et un modèle ∇_0^α de SU_2-connexion, C^∞ hors de Σ, prenant la forme

$$i\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} d\theta + O(1)$$

au voisinage de tout point de Σ. Dès lors, $\mathcal{A}^{\alpha,p}$ désigne l'ensemble des SU_2-connexions ∇' sur $X \backslash \Sigma$, telles que $\nabla' - \nabla_0^\alpha$ soit L^p et à dérivée L^p selon ∇_0^α pour $p > 2$.

Cela entraîne que ∇' est d'action finie, à courbure L^p. La condition sur $A = \nabla' - \nabla_0^\alpha$ est du type "Sobolev à poids" : près d'un point de Σ, dans une trivialisation locale de E' où ∇_0^α est asymptotiquement diagonale, les coefficients diagonaux de A sont dans L_1^p (une dérivée dans L^p) et les coefficients hors de la diagonale sont L_1^p et rL^p. Pour le groupe de jauge $\mathcal{G}^{\alpha,p}$ (ou plutôt $\mathcal{G}^p$), on exige deux dérivées suivant ∇_0^α dans L^p (diagonale L_2^p et hors diagonale L_2^p, rL_1^p et r^2L^p). $\mathcal{B}^{\alpha,p}$ sera le quotient de $\mathcal{A}^{\alpha,p}$ par $\mathcal{G}^{\alpha,p}$.

En "jauge diagonale", la monodromie limite est $\exp 2\pi i \begin{pmatrix} -\alpha & \\ & \alpha \end{pmatrix}$. La direction propre de $\exp(-2\pi i\alpha)$ donne le fibré en droites complexes L sur Σ.

(Pour $G = SO_3$, on se donne un fibré en $\mathbf{R}^3$ orienté V, et une décomposition $\mathbf{1} \oplus K$ le long de Σ, avec orientation de K ; le modèle de la singularité est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha \\ 0 & -2\alpha & 0 \end{pmatrix} d\theta + O(1),$$

en jauge convenable le long de Σ.

Si V est fibré adjoint d'un fibré hermitien E, cassé en $L_1 \oplus L_2$ sur Σ ; en tant que O_2-fibré on a $K = L_1 \otimes L_2^{-1}$.

Dans la suite, on n'expose que le cas de $G = SU_2$.)

L'anti-auto-dualité est écrite par rapport à l'une des métriques $\mathbf{g}^\nu$; mais on désignera par $\mathcal{M}_{k,\ell}^\alpha(X,\Sigma)$ l'ensemble des instantons logarithmiques de nombres α, k, ℓ, en sous-entendant le choix de la métrique.

Les espaces $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$ sont indépendants du choix de ∇_0^α (et de $\mathbf{g}$), à E, L, p et α donnés. L'action de $\mathcal{G}$ est lisse, $\mathcal{B}$ est séparé et $\mathcal{B}^*$, le complémentaire des classes réductibles (stabilisateur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$), est une variété banachique.

Pour $2 < p < 2+\varepsilon_1$, et $\alpha \in]\varepsilon_2, \frac{1}{2} - \varepsilon_2[$, ε_1, ε_2 petits > 0, $\mathcal{M}_{k,\ell}^\alpha$ est indépendant de p (et représenté par des connexions lisses sur X'). Au-dessus de $I_\varepsilon = [\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon]$, en faisant varier α, on a un cobordisme entre les modules logarithmiques $\mathcal{M}^\varepsilon$ et $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$.

Si b_2^+ est > 0 et si $\mathbf{g}$ est générique (en topologie C^2, une modification de $\mathbf{g}$ sur un petit ouvert de X suffit), il n'y a pas de connexions réductibles dans les $\mathcal{M}^\alpha$, sauf peut-être des connexions plates.

L'action est égale à $k + 2\alpha\ell - \alpha^2 n$ (où $n = \Sigma.\Sigma$). Et la dimension de $\mathcal{M}_{k,\ell}^\alpha(X,\Sigma)$, *si elle est non-vide*, est donnée par la formule (4). (Peut-être qu'une

manière plus éclairante d'écrire l'indice est de faire intervenir le nombre $d_\Sigma^K = \frac{1}{2}(2g-2+1-b_1+b_2^+)$ qui est la dimension sur $\mathbf{C}$ des formes de troisième espèce à pôle simple sur une courbe lisse Σ lorsque X est une surface projective (Kodaira 1950) ; alors

$$2d = 8k + 4(\ell + g - 1) - 6\,d_\Sigma^K.) \tag{5}$$

Ce que recouvrent ces théorèmes : des estimées L_s^p à poids des multiplications par $d\theta$, les comparaisons des Sobolev définis par ∇_0^α et des Sobolev à poids, l'analyse de Wang [W] et Donaldson-Sullivan [D.S.] pour estimer les normes de $d_A^-.Q_A : \Omega_2^+(\mathfrak{g}) \to \Omega_2^-(\mathfrak{g})$ où Q_A inverse à droite $d_A^+ : \Omega^1(\mathfrak{g}) \to \Omega_+^2(\mathfrak{g})$ dans le cas local $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^4$.

Il est également utile de disposer de l'alternative hilbertienne ; espaces H_α^s $(= L^2_{s,\nabla_0^\alpha})$ pour les connexions, avec $s \geq 2$ et H_α^{s+1} pour les changements de jauge ; ce qui donne d'autres espaces $\widehat{\mathcal{A}}^{\alpha;s}$, $\widehat{\mathcal{G}}^{\alpha;s}$, $\widehat{\mathcal{B}}^{\alpha;s}$. Et de travailler avec des valeurs rationnelles, $\nu \in \mathbf{N}$ et $\alpha = a/\nu$, $a \in \mathbf{N}$; car les éléments de $\mathcal{A}^\alpha$ deviennent d'authentiques connexions pliées sur des variétés pliées compactes et la théorie de Fredholm s'applique (par exemple pour obtenir l'indice). Si ν est assez grand, $(\nu > s/\varepsilon)$, des résultats analogues à ceux du cadre L^p $(p > 2)$ sont vrais dans le cadre H^s sur I_ε. Les L^p sont cependant nécessaires pour interpoller entre les valeurs rationnelles de α.

A part ces résultats de généricité, le point fondamental est un théorème de "compacité faible", à la Uhlenbeck :

$(X, \Sigma$ et E, L sont fixes), soient α_n une suite qui converge vers α dans $]0, \frac{1}{2}[$ et $\mathbf{g}_n^{\nu_n}$ une suite de métriques côniques qui converge vers $\mathbf{g}^\nu$, pour ν assez grand ; soit ∇_n' une suite de connexions ASD par rapport aux $\mathbf{g}_n$, de masses α_n ; il existe des nombres k', ℓ' et une connexion ∇' dans $\mathcal{M}_{k',\ell'}^\alpha$, des points x_i, $i \in I$, de $X \backslash \Sigma$ et z_j, $j \in J$, de Σ en nombres finis, une sous-suite ∇'_{n_m} et des transformations de jauges g_m, tels que $g_m \nabla'_{n_m} g_m^{-1}$ converge vers ∇' sur tout compact de X' qui exclut les x_i et z_j, et il existe des entiers k_i, $i \in I$, k_j, ℓ_j, $j \in J$ tels que la suite de densités $|F'_{n_m}|^2$ converge sur X vers $|F'|^2 + 8\pi^2 \sum_i k_i\,\delta_{x_i} + 8\pi^2 \sum_j (k_j + 2\alpha\ell_j)\,\delta_{z_j}$. Et *surtout*, le plus important est qu'on peut assurer (pour ν grand)

$$\forall i \in I,\ k_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall j \in J,\ k_j \geq 0 \quad \text{et} \quad k_j + \ell_j \geq 0.$$

Car, vue la formule (4), cela implique que toute perte d'action $k'' + 2\alpha\ell''$ dans une "bulle", fait baisser la dimension des modules de $8k'' + 4\ell'' \geq 0$.

(Lorsque α s'approche de 0 ou de $\frac{1}{2}$, le contrôle des k_j, ℓ_j réclame des ν de plus en plus grands ; et c'est là le principal avantage des métriques côniques.)

1.4. Plan de démonstration du Théorème A

L'observation qui est au départ de la preuve :

Supposons g impair et prenons $\ell = \frac{g-1}{2}$; quand $\alpha = \frac{1}{2} - \varepsilon$ est voisin de $\frac{1}{2}$, l'action d'un instanton singulier est $\kappa = k + \frac{1}{4}(2g-2-n) + O(\varepsilon)$; par conséquent, si $2g - 2 < n$, on a $\kappa < k$ lorsque α s'approche de $\frac{1}{2}$.

De plus, si $2\ell = g - 1$, quel que soit α entre 0 et $\frac{1}{2}$, la dimension virtuelle de $\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell}(X, \Sigma)$, donnée par (4), est indépendante de g et de ℓ et vaut le $2d$ de la formule (1).

D'où le mécanisme de la preuve : si $2\ell = g - 1$,

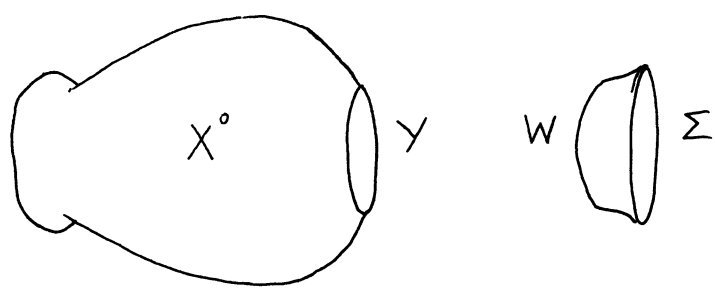
1) quand α est voisin de 0 et que q_k n'est pas identiquement nul, il existe des instantons singuliers ;

2) quand α est voisin de $\frac{1}{2}$, sous l'hypothèse absurde $2g - 2 < n$, il n'y a plus d'instanton singulier ;

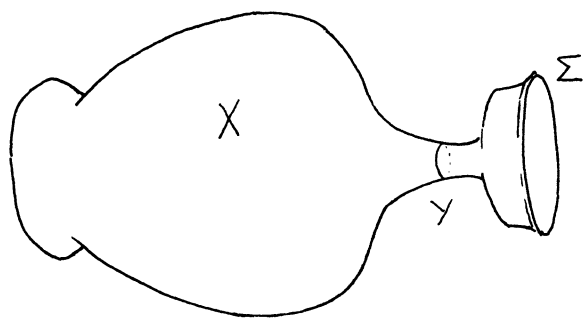
3) entre 0 et $\frac{1}{2}$, les instantons singuliers ne peuvent pas se sauver.

Comme les espaces $\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell}$ sont non-compacts, dépendent de α, de $\mathbf{g}^{\nu}$, etc., le point 3 réclame un bon *instrument de mesure* : ce sera le polynôme de Donaldson "logarithmique" $q_{k,\ell}$.

Pour les points 1 et 2, la stratégie est l'*excision* : on découpe X en deux morceaux, X^0 et W^0, le long d'une hypersurface Y au bord d'un voisinage tubulaire de Σ ; W^0 contenant Σ.



On définit des espaces de modules d'instantons d'actions finies convenables $\mathcal{M}(X^0)$ et $\mathcal{M}(W^0,\Sigma)$ (*cf.*§ 3.1) et on cherche à décrire $\mathcal{M}(X,\Sigma)$ avec une partie du produit $\mathcal{M}(X^0)\times\mathcal{M}(W^0,\Sigma)$. La relation sera seulement "asymptotique" : quand la métrique sur X étrangle Y assez fort. Mais les invariants de Donaldson, adaptés comme il faut, permettent de la prolonger à toutes les métriques.



Le point 1 est le théorème d'existence (ou de positivité) : Kronheimer et Mrowka considèrent la surface réglée W qui compactifie W^0 (*cf.* § 2.3) et, pour α proche de 0, identifient un point de $\mathcal{M}^{\alpha}_{0,\ell}(W,\Sigma)$ avec une classe de drapeau holomorphe sur Σ. C'est la partie "géométrie algébrique" (§ 2), elle donne l'allure des instantons logarithmiques au voisinage de Σ (fibrés pliés ou structures paraboliques) : quand $\ell=\frac{1}{2}(g-1)$, il y a 2^g fois plus d'instantons logarithmiques locaux que d'instantons ordinaires sur W.

Sous certaines hypothèses ($n=\Sigma.\Sigma>0$, $4g>n+8$, $2d>4k,\cdots$), il est possible de préciser le rapport entre $\mathcal{M}(X)$ et $\mathcal{M}(X^0)$, ou entre $\mathcal{M}(W,\Sigma)$ et $\mathcal{M}(W^0,\Sigma)$. Par exemple, $q_k=q_k^0$ sur l'image de $H_2(X\backslash\Sigma)$ dans $H_2(X)$.

Avec d'autres restrictions encore ($\alpha\sim 0$, $n\not\equiv 0\ mod.4$, $\pi_1(X\backslash\Sigma)=0\cdots$), Kronheimer et Mrowka font l'analyse du recollement des instantons : c'est le "Mayer-Vietoris fort" du § 3.4. De là vient l'égalité $q_{k,\ell}=2^g q_k^0$. Un autre contrôle de convergence forte démontre le point 2 (théorème d'annulation).

En mettant bout à bout, on obtient des cas particuliers du théorème A ; des arguments topologiques en déduisent le cas général (§ 3.4).

Dans ce plan, les étapes sont très techniques, les principaux écueils sont des théories entières à développer, et il faut admirer Kronheimer et Mrowka pour avoir si bien navigué entre les difficultés.

2. UNE SURFACE RÉGLÉE PLIÉE

2.1. Variétés et fibrés pliés ("orbifolds")

L'unique modèle de *variété pliée* qui intervient est $(w,z) \overset{p_\nu}{\mapsto} (w,z^\nu)$, $\nu \in \mathbf{N}$, $\nu \geq 1$, de $\mathbf{C}^2$ dans $\mathbf{C}^2$; on note H le groupe $\mathbf{Z}/\nu\mathbf{Z}$.

Une structure pliée sur un ensemble X est un atlas de *cartes pliées compatibles*. Une carte est un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U} & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & \widetilde{U}' \\ \downarrow & & \downarrow p' \\ X \supset U & \xrightarrow{\varphi} & U' \end{array}$$

où U est un sous-ensemble de X, $\widetilde{U}'$ un ouvert de $\mathbf{C}^2$ saturé pour l'action de H, p' la restriction de p_ν, $U' = p'(\widetilde{U}')$, φ et $\widetilde{\varphi}$ des bijections ; donc H agit sur $\widetilde{U}$ et $U = \widetilde{U}/H$. La compatibilité est l'existence de diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U}'_{ij} & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_{ji}} & \widetilde{U}'_{ji} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi_i(U_i \cap U_j) = U'_{ij} & \xrightarrow{\varphi_j \varphi_i^{-1}} & U'_{ji} = \varphi_j(U_i \cap U_j) \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont des isomorphismes (on a le choix entre isomorphismes holomorphes, ou C^∞ sur $\mathbf{R}$, ou continus, ou etc.).

Les morphismes se définissent comme pour les variétés ; on a aussi des *faisceaux pliés* (à la Grothendieck : par exactitude de suites d'ensembles). Le passage aux invariants sous H fait un foncteur oubli vers les variétés et les faisceaux dessus.

Les *fibrés vectoriels* (ou principaux) *pliés* sont définis par des *cocycles pliés* : des fonctions de transition $\widetilde{g}_{ij} : \widetilde{U}_{ij} \times_{U_{ij}} \widetilde{U}_{ji} \to GL$, ($C^\omega_{\mathbf{C}}$, $C^\infty_{\mathbf{R}}$ ou C^0 selon) satisfaisant à $\widetilde{g}_{ij}(x_i,x_j)\widetilde{g}_{jk}(x_j,x_k) = \widetilde{g}_{ik}(x_i,x_k)$, $\forall i,j,k$, lorsque x_i, x_j, x_k ont même image dans X, et $\widetilde{g}_{ii}(x,x) = 1$, $\forall i$, $\forall x \in \widetilde{U}_i$. Les *diviseurs* $\widetilde{f}_i$ vérifient $\widetilde{g}_{ij}(x,y) = \widetilde{f}_i(x)\widetilde{f}_j^{-1}(y)$; en particulier, $\widetilde{f}_i(x) = \widetilde{g}_{ii}(x,x^\gamma)\widetilde{f}_i(x^\gamma)$, $\forall \gamma \in H$.

Les fibrés s'identifient aux faisceaux localement libres.

Dans notre cas, le lieu du pli est la surface Σ^2 dans la variété X^4, et l'on notera $\widetilde{X}$ la variété pliée.

Supposons $\widetilde{X}$ analytique complexe ; si $\widetilde{E}$ est un fibré vectoriel holomorphe plié de rang r sur $\widetilde{X}$, il existe des nombres entiers ≥ 0 et $< \nu$, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_r$ et un diviseur matriciel pour $\widetilde{E}$ qui s'écrit localement $\begin{pmatrix} z^{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & z^{a_r} \end{pmatrix} F_i(w, z^\nu)$; les nombres a_i sont des invariants *locaux* de $\widetilde{E}$ le long de Σ.

Exemple.— A tout entier a est associé le fibré en droites plié $\widetilde{\mathcal{O}}(a\Sigma)$ dont les sections locales $\widetilde{s}$ sont les fonctions sur $\widetilde{U}$ telles que $div(\widetilde{s}) + a\Sigma \geq 0$. Le faisceau des invariants de $\widetilde{\mathcal{O}}(a\Sigma)$ sur X est $\mathcal{O}(m\Sigma)$ si $m \leq \frac{a}{\nu} < m+1$. Et $\widetilde{\mathcal{O}}(a\Sigma)$ est localement isomorphe à $\widetilde{\mathcal{O}}(a'\Sigma)$ si et seulement si a est congru à a' modulo ν. Un isomorphisme global entraîne $a = a'$ dans $\mathbf{Z}$.

En choisissant une métrique kählérienne pliée $\widetilde{\omega}$ sur $\widetilde{X}$, on peut définir le *degré* des fibrés en droite pliés $\widetilde{L}$:

à l'aide d'une connexion (pliée unitaire) de courbure $\widetilde{F}$

$$\deg_{\widetilde{X},\widetilde{\omega}} \widetilde{L} = \frac{1}{2\pi i} \int_X \widetilde{F} \wedge \widetilde{\omega}$$

(la convention d'intégration est $\frac{1}{\nu} \int_{\widetilde{U}}$ sur les cartes ramifiées).

Avec cette notion, on définit la *stabilité* (resp. *semi-stabilité*) des fibrés holomorphes ; par exemple, pour un SL_2-fibré $\widetilde{E}$, cela signifie qu'il n'y a pas de morphisme analytique plié non nul d'un fibré en droites holomorphe plié de degré ≥ 0 (resp. > 0) dans $\widetilde{E}$.

D'autre part, quel que soit $a \in \mathbf{N}$, entre 0 et $\frac{\nu}{2}$, pour $\alpha = a/\nu$, on peut voir $\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell}(X, \Sigma)$ comme un ensemble de classes de connexions pliées anti-auto-duales sur $\widetilde{X}$. Ainsi à chaque instanton logarithmique (de masse a/ν), on associe une structure de fibré holomorphe plié sur $\widetilde{E}$ (un relèvement de E dépendant de L).

B.F. Steer et A.J. Wren, étendant un célèbre résultat de Donaldson (*cf.* [D6], [Ma]), démontrent que cette correspondance établit une équivalence entre SL_2-fibrés stables pliés d'invariants (k, ℓ, a) et instantons irréductibles sur (X, Σ) de nombres (k, ℓ, α). (De plus, comme dans le cas lisse, un instanton réductible correspond à un fibré semi-stable, sous sa forme décomposée.)

(Si on travaillait avec des SO_3-instantons dont la classe w_2 est réduction d'une classe c de type $(1,1)$, on trouverait des fibrés holomorphes avec $c_1 = c$.)

2.2. Fibrés paraboliques

Continuons avec une courbe lisse dans une surface complexe. Le pas suivant est d'identifier $\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell}(X,\Sigma)$ à un ensemble de fibrés holomorphes sur X munis de structures paraboliques sur Σ.

La définition des *structures paraboliques* généralise celle qu'ont donnée Mehta et Seshadri en dimension 1 sur $\mathbf{C}$ (*cf.* [L]) :

Soit E un fibré holomorphe sur X ; une structure parabolique sur E au-dessus de Σ est la donnée d'une filtration de $E_{|\Sigma}$ par des sous-fibrés holomorphes

$$E_{|\Sigma} = F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_p \supset 0,$$

et d'une suite de poids entre deux nombres réels qui diffèrent de 1 :

$$\rho \leq \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_p < \rho + 1.$$

Les morphismes $u : E \to E'$ demandent que $\mu'_j \leq \mu_i$ force $u_{|\Sigma}(F_i) \subset F'_j$.

O. Biquard ([Bi.2]) vient de démontrer l'existence d'une équivalence de catégories entre :

(i) la catégorie des fibrés holomorphes hermitiens sur $X \backslash \Sigma$, à courbure L^p, pour un $p > 2$, avec pour morphismes les applications holomorphes bornées ;

(ii) celle des fibrés holomorphes sur X, avec structure parabolique sur Σ.

(La correspondance est donnée par la croissance des sections : les sections analytiques locales à valeur dans F_i le long de Σ vérifient $|s(z)| = O(r^{\mu_i})$.)

Ici nous n'aurons affaire qu'à des SL_2-fibrés E (déterminant trivialisé) et à des fibrés en droites. La filtration des SL_2-fibrés sera du type $E_{|\Sigma} \supset L \supset 0$ et les poids seront $-\alpha < \alpha$ (avec $\rho = -\frac{1}{2}$).

Lorsque X est munie d'une métrique kählérienne ω (même à singularité cônique), on peut définir le *degré parabolique* des fibrés en droites paraboliques (L', β') :

il suffit de choisir une connexion unitaire de L' qui définit une première forme de Chern c'_1 et de poser

$$\deg \mathrm{par}(L', \beta') = (c'_1 + \beta' \Sigma).\omega.$$

On dit qu'un SL_2-fibré parabolique E est *stable* (paraboliquement) si pour tout morphisme parabolique $L' \to E$ non nul, le degré parabolique de L' est < 0. (De même semi-stable, avec ≤ 0.)

Si ω est lisse ($\nu = 1$) et que Σ est un diviseur ample, O. Biquard ([Bi.2]) déduit de son équivalence de catégories un résultat conjecturé par Kronheimer ([K.1]) : il y a une bijection naturelle entre l'espace des instantons irréductibles $\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell}{}^{*}$ et l'espace des fibrés holomorphes stables (E, L, α) modulo équivalence parabolique tels que $c_2(E).X = k$, et $c_1(L).\Sigma = -\ell$.

Pour les métriques côniques avec $\nu \in \mathbf{N}^{\times}$ et pour $\alpha = a/\nu$, $a \in \mathbf{N}$, $0 < a < \nu/2$, Kronheimer et Mrowka, s'inspirant de Furuta & Steer, et de Steer & Wren, construisent une bijection "naturelle" entre SL_2-fibrés paraboliques (E, L, α) sur (X, Σ) et SL_2-fibrés holomorphes pliés d'invariants (ℓ, a) sur $\widetilde{X}$. Cette bijection est compatible avec une correspondance naturelle entre fibrés en droites paraboliques (L, β), où $\beta = b/\nu$, $b \in \mathbf{N}$, $-\frac{1}{2} < \beta < \frac{1}{2}$, et fibrés en droites pliés de poids b, *qui respecte les degrés.* (Attention à un décalage de $[\frac{\nu}{2}]$, partie entière de $\frac{\nu}{2}$; le fibré parabolique concerné est $(\widetilde{L} \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}([\frac{\nu}{2}]\Sigma))^{H}$.)

En raccordant avec le n° 1, on obtient une équivalence entre :

(i) les instantons logarithmiques irréductibles de (X, Σ), pour une métrique ω cônique avec angle d'ouverture $2\pi/\nu$, et nombres (k, ℓ, α), où $\alpha = a/\nu$, $a \in \mathbf{N}$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$;

(ii) les SL_2-fibrés paraboliques stables (E, L, α) sur (X, Σ) (pour la même métrique ω), avec $c_2(E).X = k$, $c_1(L).\Sigma = -\ell$.

De plus, Kronheimer et Mrowka démontrent que les structures différentiables sur les modules se correspondent bien, y compris aux points singuliers : quasi-isomorphismes entre les complexes définissant les espaces tangents (d'un côté la $\frac{1}{2}$-signature tordue de Atiyah, Hirzebruch, de l'autre Kodaira-Spencer, Kuranishi).

2.3. Les espaces Σ-logarithmiques locaux : $\mathcal{M}^{\alpha}_{0,\ell,(g,n,\nu)}$

Les données sont : une surface de Riemann lisse compacte Σ de genre g (≥ 2) et trois entiers $n > 0$, $\ell > 0$, $\nu > 0$. Le premier entier est le degré d'un fibré en droite complexe N sur Σ, le second est aussi le degré d'un fibré en droite L^{-1}, mais ici s'arrête la symétrie : N est le voisinage de Σ dans la complétion projective $W = \mathbf{P}(\mathbf{1} \oplus N)$ et L^{-1}, donc L, reste un fibré le long de Σ.

W est une surface réglée au-dessus de Σ ; on note Σ' la section à l'infini et C la fibre de $W \to \Sigma$. En homologie, $\Sigma' \sim \Sigma - nC$, $\Sigma.\Sigma = n$, $\Sigma'.\Sigma' = -n$, $\Sigma.C = 1$, $C.C = 0$. On a $b_1 = 2g$ et $b_2^+ = 1$.

On ne va pas considérer sur W des métriques génériques mais des métriques de *variété kählérienne pliée* ; c'est ici que ν intervient. Par exemple, soit f C^∞ sur W, constante près de Σ', valant $r^{2/\nu}$ près de Σ, et soit ω_0 la 2-forme d'une métrique de Kähler lisse sur W ; on peut prendre $\omega = \omega_0 + \varepsilon i d' d'' f$. Cette forme définit une classe de cohomologie dans $H^2(W, \mathbf{R})$, la même que celle de ω_0. Si ε est petit > 0, ω est $(1,1)$-strictement-positive.

On suppose que les relevées $\widetilde{\omega}$ sur les voisinages ramifiés $(\widetilde{U} \xrightarrow{p_\nu} U)$ le long de Σ sont lisses. Et on note $[\omega] = \beta(\Sigma + tC)$ dans $H^2(W)$ en sous-entendant la dualité de Poincaré ; alors $\beta > 0$ et $n + 2t > 0$ (car $\omega.\omega > 0$).

L'objet de nos attentions est $\mathcal{M}^\alpha_{0,\ell'}(W, \Sigma)$ avec $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\ell' \in \mathbf{Z}$, $\ell' \leq \ell$ (connexions ASD, SU_2, de masse α et charge ℓ' sur le fibré topologiquement trivial).

Comme l'action vaut $2\alpha\ell' - \alpha^2 n$, $\mathcal{M}^\alpha_{0,\ell'}(W, \Sigma)$ est vide dès que $\ell' \leq 0$.

De plus, un petit lacet autour de Σ étant toujours homotope à zéro dans W, il n'y a pas de connexions plates avec $\alpha \neq 0$.

Pour qu'il y ait une connexion réductible dans $\mathcal{M}$, il faut (et il suffit) que l'on trouve une connexion d'holonomie $\exp(-2\pi i\alpha)$ sur un fibré L', avec $c_1.\Sigma = -\ell'$ et courbure harmonique (ASD) (co-) homologue à $c_1 + \alpha\Sigma$. L'annulation de k dit que $c_1^2 = 0$. En écrivant tout ça pour $c_1 = \lambda\Sigma + \mu C$ $(\lambda, \mu \in \mathbf{Z})$, on découvre que, soit $\lambda \neq 0$ et alors $\mu = \ell'$ et $n\lambda + 2\ell' = 0$, soit $\lambda = 0$ et alors $\mu = -\ell' = -\alpha(n+t)$. On élimine la première éventualité avec $n > 2\ell$ et la seconde avec $\alpha < \frac{1}{n+t}$. Sous ces deux hypothèses, on a donc $\mathcal{M}^\alpha_{k,\ell'} = (\mathcal{M}^\alpha_{k,\ell'})^*$.

Pour ce qui est de la compacité, on suppose α suffisamment petit pour que $\frac{1}{n} > 2\alpha\ell - \alpha^2 n$ (par exemple $\alpha < \frac{1}{2n\ell}$) ; il y a alors tellement peu d'actions disponibles que la proposition de la fin du n° 3, §1 (valable si ν est assez grand) interdit tout accident du nombre d'instantons : dans une suite d'éléments de $\mathcal{M}^\alpha_{0,\ell'}$ les seuls accidents sont des explosions le long de Σ perdant $2\alpha\ell_i$ $(0 \leq \ell_i \leq \ell')$ quantité d'action. En tout cas, la suite de connexions converge sur un voisinage N' de Σ'.

Enfin, quitte à restreindre encore plus la quantité d'action, on assure que les réductions le long de Σ' sont de degré 0. Comme ℓ' est supposé > 0, on n'aura

aucune possibilité de réduction. D'où une application de restriction r' bien définie de $\mathcal{M}^{\alpha}_{0,\ell'}(X,\Sigma)$ dans $\mathcal{B}^{*}_{\Sigma'}$, espace des classes de connexions irréductibles sur $E_{|\Sigma'}$.

Tout ceci se fait en fixant une fois pour toutes la métrique lisse sur un voisinage de Σ'.

2.4. Fonctions Théta d'ordre 2

Donnons-nous sur (W_n,Σ_g) un fibré parabolique (E,L,α), avec $c_2(E)=0$, $c_1(L).\Sigma=-\ell$, $\alpha=a/\nu$, $a\in\mathbf{N}$.

La proposition suivante de [KM.2] est décisive :

Si $\alpha>0$ est assez petit ($<\frac{1}{n}$ et $<\frac{1}{n+t}$), (E,L,α) est paraboliquement stable si et seulement si E est semi-stable ; et alors E provient d'un fibré semi-stable sur Σ.

(Ici la semi-stabilité de E est à prendre au sens classique de Narasimhan et Seshadri, *cf.* [D6]. La démonstration est surtout faite d'arithmétique élémentaire.)

Ainsi Kronheimer et Mrowka ramènent le calcul de $\mathcal{M}^{\alpha}_{0,\ell}$ à un problème de géométrie algébrique pure : trouver les sous-fibrés holomorphes L de degré $-\ell$ de $E_{|\Sigma}$.

Notons $\overline{\mathcal{M}}^{\alpha}_{0,\ell}=\cup_{\ell'\leq\ell}\mathcal{M}^{\alpha}_{0,\ell'}$ le quotient de la compactification d'Uhlenbeck de $\mathcal{M}^{\alpha}_{0,\ell}$ par oubli des bulles. K. & M. prouvent d'abord que $\mathcal{M}^{\alpha}_{0,\ell'}$ est lisse, quel que soit $\ell'\leq\ell$. Puis que l'opération r' de restriction à Σ' envoie $\overline{\mathcal{M}}^{\alpha}_{0,\ell}$ dans $\mathcal{SU}_g$, espace des modules de SL_2-fibrés semi-stables sur Σ'.

Enfin, supposons g impair ; lorsque $\ell=\dfrac{g-1}{2}$, les deux espaces de modules $\overline{\mathcal{M}}^{\alpha}_{0,\ell}$ et $\mathcal{SU}_g$ ont la même dimension : $6g-6$ sur $\mathbf{R}$, et :

THÉORÈME.— *Le degré de* $r':\overline{\mathcal{M}}^{\alpha}_{0,\ell}\to\mathcal{SU}_g$ *est* 2^g.

(*Remarque* : r' est holomorphe, le degré compte le nombre de points au-dessus d'un point générique.)

(La raison du 2^g : laissons L parcourir la jacobienne $J_{-\ell}(\Sigma')$ des fibrés en droite de degré $-\ell$; le théorème des familles d'Atiyah-Singer donne

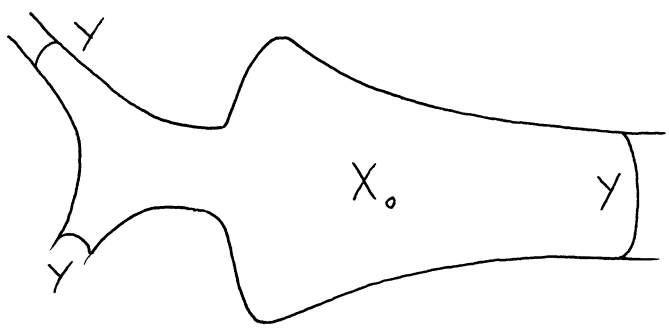
$$ch(-\mathrm{Ind}(d''_{L^{-1}\otimes E}))=2(g-1-\ell)+2\Theta,$$

donc la g-ième classe de Chern de $-\mathrm{Ind}(d''_{L^{-1}\otimes E})$, évaluée sur $[J_{-\ell}]$ vaut 2^g. Et, lorsque $\ell = (g-1)/2$, cela s'interprète comme l'existence, génériquement, de 2^g sous-fibrés L de degré $-\ell$ de E.)

3. SUITES DE MAYER-VIETORIS

3.1. Bouts cylindriques

Soit X^0 une variété de dimension 4 sur $\mathbf{R}$ lisse et orientée mais non-compacte ; on suppose qu'il existe une pièce compacte X_0 dans X^0 de bord Y (variété fermée lisse orientée de dimension 3) et un difféomorphisme de X^0 sur $X_0 \cup_Y (Y \times [0,\infty[)$. On munit X^0 d'une métrique complète $\mathbf{g}$ qui induit sur $Y \times [0,\infty[$ le produit d'une métrique sur Y par la métrique de la demi-droite réelle.



C. Taubes, A. Floer, J.W. Morgan, T.S. Mrowka et T. Ruberman... (*cf.* [T] et [M.M.R.]) ont analysé les connexions ASD *d'action finie* ∇^0 au-dessus de X^0 sur un fibré principal P pour $G = SU_2$ ou SO_3 ; la première information est que la restriction de ∇^0 aux $Y_R = Y \times \{R\}$, modulo équivalence de jauge, converge vers une connexion plate C^∞ au-dessus de Y lorsque R tend vers l'infini (*cf.* l'exposé de J.-C. Sikorav [Si]).

Si $G = SU_2$, P est trivial. Si $G = SO_3$, il se peut que P_Y ne soit pas trivial. Toutefois, si le groupe structural de P se relève à U_2 sur $Y \times [0,\infty[$, l'hypothèse d'action finie entraîne $w_2(P_Y) = 0$ et par conséquent P_Y trivial.

Pour simplifier l'exposé, on supposera donc $w_2(P_Y) = 0$, et on choisira une trivialisation $P_Y = Y \times G$.

Notons $\mathcal{M}(Y;G)$ l'espace des modules de G-connexions plates modulo transformations de jauges sur $Y \times G$. C'est le quotient de l'espace des représentations de $\pi_1(Y)$ dans G par l'action adjointe de G.

Les connexions sur le fibré trivial $Y \times G$ peuvent s'identifier à des formes différentielles A à valeurs dans $\mathfrak{g}$; elles ont un invariant de jauge, défini modulo $\mathbf{Z}$, l'intégrale de Chern-Simons :

$$CS(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int_Y Tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A).$$

Si κ est l'action de ∇^0 sur X^0 et A la limite de ∇^0 à l'infini, la différence $\kappa - CS(A)$ est un nombre entier. L'ensemble $\mathcal{M}(Y)$ est le lieu critique de CS dans $\mathcal{B}_Y = \Omega^1(Y,\mathfrak{g})/C^\infty(Y,G)$, donc la fonction CS est localement constante sur $\mathcal{M}(Y)$. Nous écrirons $CS_{\mathcal{R}}$ sa valeur sur une composante connexe $\mathcal{R}$ et $\mathcal{M}_{\kappa,\mathcal{R}}(X^0;G)$ désignera l'ensemble des classes d'instantons sur X^0 d'action κ dont la limite est dans $\mathcal{R}$. Quand on ne fixe pas $\mathcal{R}$ ou κ, on l'enlève des indices.

Au-dessus de Y, soit B_Y l'opérateur $\begin{pmatrix} 0 & \overrightarrow{\text{div}} \\ \overrightarrow{\text{grad}} & \overrightarrow{\text{rot}} \end{pmatrix}$ de $\Omega^0_Y \oplus \Omega^2_Y$ dans lui-même ; à chaque connexion plate A sur $Y \times G$ sont associés les systèmes locaux $\mathrm{ad}\, A$ et $\mathrm{ad}_{\mathbf{C}}\, A$ sur $Y \times \mathfrak{g}$ et $Y \times (\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C})$ et les opérateurs $B_Y(\mathrm{ad}\, A)$ et $B_Y(\mathrm{ad}_{\mathbf{C}}\, A)$ sur les formes tordues. La dualité $*_Y$ identifie l'espace tangent (de Zariski) en A à $\mathcal{M}(Y)$ avec le noyau de la restriction de $B_Y(\mathrm{ad}\, A)$ à $\Omega^2_Y(\mathfrak{g})$.

Dans [A.P.S.], Atiyah, Patodi et Singer ont défini les invariants η d'asymétrie spectrale de B_Y et de ses versions tordues ; ils ont démontré entre autres que la quantité

$$\rho_Y(\mathrm{ad}_{\mathbf{C}}\, A) = \eta_{B_Y(\mathrm{ad}_{\mathbf{C}}\, A)}(0) - 3\eta_{B_Y}(0)$$

est indépendante de la métrique sur Y. On peut voir ρ_Y comme la signature (renormalisée) du Hessien de la fonctionnelle de Chern-Simons au point $\mathrm{ad}_{\mathbf{C}}\, A$, une mesure de "l'asymétrie du rotationnel tordu".

Notons $h_Y(\mathrm{ad}\, A)$ la dimension du noyau de $B_Y(\mathrm{ad}\, A)$, χ^0 la caractéristique d'Euler de X^0 et σ^0 la signature de X^0, c'est-à-dire la signature de la forme d'intersection sur l'image de $H^2_{\mathrm{comp}}(X^0)$ dans $H^2(X^0)$ (représentée par les formes harmoniques L^2). Comme on peut lire dans [T] et [M.M.R.], les théorèmes d'indices de [A.P.S.] calculent la dimension virtuelle de $\mathcal{M}_{\kappa,\mathcal{R}}(X^0)$ en un point ∇^0 de

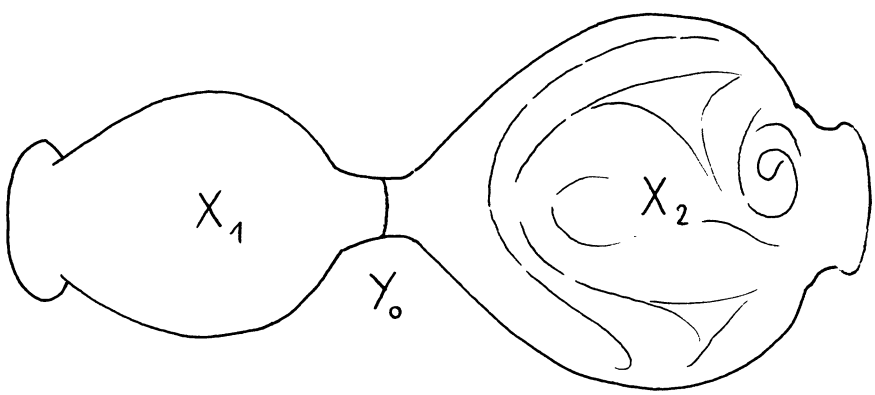
limite A :

$$2d_{\kappa,\mathcal{R}} = 8\kappa - \frac{3}{2}(\chi^0 + \sigma^0) + \frac{1}{2}h_Y(\mathrm{ad}\, A) + \frac{1}{2}\rho_Y(\mathrm{ad}_{\mathbf{C}}\, A). \tag{6}$$

(L'opérateur aux variations ASD de ∇ est $-(d^\nabla)^* + (d^\nabla)^+$ depuis le domaine des formes $\Omega^1_{X^0}(\mathfrak{g})$ qui convergent L^2_1 sur $Y \times [0,\infty[$ vers un élément du noyau de $B_Y(\mathrm{ad}\, A)$, à valeurs dans les formes L^2 de $\Omega^0_{X^0}(\mathfrak{g}) \oplus \Omega^{2,+}_{X^0}(\mathfrak{g})$; il est isomorphe à un opérateur de demi-signature tordu $d^\nabla + (d^\nabla)^* : \Omega^-_-(\mathfrak{g}) \to \Omega^+_+(\mathfrak{g})$, où Ω^-_- (resp. Ω^+_+) désigne l'espace des formes impaires (resp. paires) sur X^0 qui sont vecteurs propres pour -1 (resp. $+1$) de l'opérateur $\tau = i^{p(p-1)+\ell} *$ de Atiyah sur $\oplus_p \Omega^p(X^{2\ell})$.

Le long de $Y \times [0,\infty[$, en coordonnées (y,t), l'opérateur $-(d^\nabla)^* + (d^\nabla)^+$ prend la forme $\partial_t + B_Y(\mathrm{ad}\, A) + O(\frac{1}{t})$ dans une trivialisation convenable de P lorsque $t \to \infty$.)

Soient X une variété *fermée* orientée de dimension 4 et Y une sous-variété orientée de dimension 3 de X qui sépare X en deux sous-variétés compactes à bord X_1 et X_2 : $X = X_1 \cup_Y X_2$. Dans [M.M.R.], on trouve le comportement des instantons sur X lorsque la métrique $\mathbf{g}$ de X dégénère en rendant Y minuscule. Comme les équations d'anti-dualité sont invariantes conformes, on peut formuler l'hypothèse sur $\mathbf{g}$ en disant que Y devient la section centrale Y_0 d'un tube de plus en plus long $Y \times]-R, R[$, $R \to \infty$, et que les métriques sur les intérieurs X^0_1 et X^0_2 convergent vers des métriques complètes $\mathbf{g}^0_1$ et $\mathbf{g}^0_2$ "à bouts cylindriques".



Les théorèmes sont analogues à ceux de Donaldson pour les sommes connexes :

Soit ∇_n une suite d'instantons sur X, de nombre d'instanton k, associés à une suite de métriques $\mathbf{g}_n$ du type décrit, il existe des points x_i, $i \in I$ en nombre fini, des nombres entiers positifs k_i et une sous-suite ∇_{n_m}, tels que, à transformations de jauges près,la suite ∇_{n_m} converge sur tout compact de X qui évite Y et les x_i vers un instanton ∇_1^0 sur X_1^0 et un autre ∇_2^0 sur X_2^0 ; de plus, sur $X \backslash Y$, $|F_{n_m}|^2$ tend vers $|F_1^0|^2 + |F_2^0|^2 + 8\pi^2 \Sigma k_i \, \delta x_i$.

Nous dirons que la convergence ∇_{n_m} est *forte sur* Y (ou forte à l'encolure) si le bilan d'action à la limite ne fait apparaître aucune perte en Y, c'est-à-dire si

$$k = \kappa_1^0 + \kappa_2^0 + \Sigma k_i.$$

Et qu'elle est *forte sur* X si elle est forte sur Y et que tous les k_i sont nuls.

Inversement, [M.M.R.], [T] montrent comment on peut "recoller" des instantons de X_1^0 et X_2^0 quand ils donnent la même limite dans $\mathcal{M}(Y)$, sous certaines hypothèses de transversalité.

La description précise de ces recollements faisait l'objet de la thèse de T. Mrowka en 1989 (*cf.* [M]).

On a des résultats complets lorsque Y est fibrée en cercles sur une surface de Riemann (Σ) ; ce qui est suffisant pour les plans de Kronheimer et Mrowka (*cf.* 1.4). La théorie générale réclame sans doute de comprendre l'homologie de Floer des variétés de dimension 3 quelconques (*cf.* § 3.3).

Kronheimer et Mrowka dans [K.M.2] étendent l'analyse au cas où, dans l'un des X_i, on place une singularité logarithmique Σ. Et dans [K.3], Kronheimer traite un cas particulier où Σ coupe transversalement Y ($Y = S^3$, $\alpha = \frac{1}{4}$; on peut alors interpréter avec des SO_3-instantons pliés).

3.2. Précisions sur les polynômes de Donaldson

Soient X une variété fermée orientée de dimension 4 et P un fibré principal en SU_2 sur X. La lettre E désigne le fibré vectoriel de rang 2 associé. Pour chaque foncteur contravariant, $\mathcal{C}$, naturel pour les isomorphismes de couples (X, P), et chaque sous-variété Z de X, on notera $\mathcal{C}_Z$ la restriction à Z (de $\mathcal{C}(X, P)$).

Soient $h \in H_2(X^4, \mathbf{Z})$ et S une surface de Riemann plongée dans la classe h ; la clé de la définition par Donaldson des invariants $q_k(h)$ est de localiser les classes $\mu/h \in H^2(\mathcal{B}_X^*)$ au voisinage de S (où $\mu = -\frac{1}{4} p_1(\mathcal{P}) \in H^4(\mathcal{B}^* \times X, \mathbf{Q})$).

Fixons une métrique riemannienne $\mathbf{g}$ sur X, choisissons un fibré en droite holomorphe L' de degré $g-1$ sur S, par exemple une "structure spin" $L' = \sqrt{K_S}$; et considérons la famille universelle d'opérateurs de Dirac tordus $\partial\!\!\!/_A$: $\Omega^0(E_S \otimes L') \to \Omega^1(E_S \otimes L')$, $A \in \mathcal{A}_S$. On en déduit un fibré-déterminant-dual $\widetilde{\mathcal{L}}_S = (\Lambda^{\max} \operatorname{Ker} \partial\!\!\!/_A)^{-1} \otimes (\Lambda^{\max} \operatorname{Coker} \partial\!\!\!/_A)$ sur $\mathcal{A}_S$ qui est $\mathcal{G}_S$-équivariant ; ce fibré descend en un fibré $\mathcal{L}_S$ sur $(\mathcal{B}_S)^*$ (classes d'irréductibles le long de S). Notons N un voisinage tubulaire de S dans X ; on peut rappeler $\mathcal{L}_S$ sur la partie $\mathcal{B}_N^{**}$ de $(\mathcal{B}_N)^*$ que la restriction envoie dans $(\mathcal{B}_S)^*$. Il se trouve que le fibré $\mathcal{L}_N$ ainsi obtenu se prolonge (de façon unique à isomorphisme près) sur $(\mathcal{B}_N)^*$ et même sur $\mathcal{B}_N^+$, ensemble des connexions sur N qui peuvent être réductibles, mais dont les facteurs irréductibles sont de degré 0. L'espace $\mathcal{B}_N^+$ contient un voisinage dans $\mathcal{B}_N$ de la connexion triviale. Notons que P_N est trivialisable, si bien qu'on peut supposer $\mathcal{B}_N^+$ et $\mathcal{L}_N$ indépendants de k. Depuis l'ouvert de $\mathcal{B}_X$ que la restriction $r_{X,N}$ envoie dans $\mathcal{B}_N^+$, on peut encore étendre $r_{X,N}^*(\mathcal{L}_N)$ en un fibré $r^*(\mathcal{L}_N)$ sur $\mathcal{B}_X^*$. D'après le théorème de l'indice des familles, la première classe de Chern $c_1(r^*\mathcal{L}_N)$ n'est autre que μ/h (*cf.* [D.3] et [D.K.]). En particulier μ/h est une classe entière.

Le fibré $\mathcal{L}_S$ arrive avec un diviseur de sauts Θ_S (une section C^∞ canonique), mais comme on tient à la transversalité, on le perturbe en choisissant une section générique (C^∞ hilbertienne) t_S. Faisons en sorte que le lieu des zéros $\mathcal{V}_N$ de la section rappelée sur $\mathcal{B}_N^+$ évite un voisinage de la connexion triviale. La sous-variété de codimension deux $r_{X,N}^*(\mathcal{V}_N)$ de $\mathcal{B}_X^*$ est duale de Poincaré de μ/h. On dit qu'elle constitue un ensemble de *connexions spéciales* sur S.

Supposons $b_2^+ - b_1$ impair afin que la dimension $2d = 8k - 3(1 + b_2^+ - b_1)$ de $\mathcal{M}_k(X)$ soit paire. Choisissons une orientation d'homologie $\beta \in \Lambda^{\max} H^1(X, \mathbf{R}) \otimes (\Lambda^{\max} H_+^2(X, \mathbf{R}))^{-1}$ de façon à ce que tous les $\mathcal{M}_k$, $k \in \mathbf{N}$ soient orientés en même temps ([D.2]).

Pour définir les $q_k(h)$, $k \in \mathbf{N}$, on choisit d représentants lisses $S_1, \cdots, S_d$ de h, en position générale, et des voisinages $N_1, \cdots, N_d$ et puis des sections $t_1, \cdots, t_d$ de $\mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_d$. Soient $\mathcal{V}_1^k, \cdots, \mathcal{V}_d^k$ les images réciproques r_{X,N_i}^{-1} $(t_i^{-1}(0))$ dans $\mathcal{B}_{X,k}^*$. Comme les instantons réductibles sur un ouvert non-vide sont globalement réductibles (*cf.* [D.K.]), les intersections $\mathcal{K}_d = \mathcal{M}_k^* \cap \mathcal{V}_1^k \cap \cdots \cap \mathcal{V}_d^k$ sont bien définies et forment des ensembles discrets pour des t_i génériques.

Supposons $b_2^+ > 1$ et choisissons la métrique $\mathbf{g}$ en sorte que $\mathcal{M}_k$ soit égal à

$\mathcal{M}_k^*$ et soit lisse. Lorsque X est simplement connexe et que $4k \geq 1 + 3(1 + b_2^+)$, Donaldson démontre (dans [D.4]) que $\mathcal{K}_d$ est fini et que le compte algébrique ne dépend d'aucun choix ($\mathbf{g}$, S, etc.) ; c'est un invariant C^∞ de X, h, β noté $q_{k,(\beta)}(h)$.

La principale raison des restrictions sur X et k est la présence désagréable des connexions plates, où la dimension virtuelle est souvent moins grande que la vraie dimension. Déjà Donaldson ([D.4]) avait remarqué que les invariants définis avec $G = SO_3$ et des fibrés à deuxième classe de Stiefel-Whitney non-nulle sont plus maniables.

(La pratique des SO_3-instantons a été initiée par Fintushel et Stern en 1984, *cf.* [F.S.]. Voir aussi Kotschick [Ko].)

Morgan et Mrowka ont imaginé un stratagème pour élargir la définition des invariants : par éclatement de points dans X ([M.M]). L'opération s'avère non seulement pratique, mais aussi métaphysiquement correcte, car en "théorie topologique des champs", seules comptent les amplitudes (des nombres) associées aux opérateurs (des figures) et pas les représentations choisies (espaces de modules) qui les donnent, *cf.* [Wi].

Éloignons-nous un instant du cadre SU_2 : P_1 est un fibré en groupe U_2 sur une variété fermée orientée de dimension 4, X_1 ; et si E_1 est le fibré de rang 2 hermitien associé, on suppose qu'il existe une sphère S^2 dans X_1 avec $c_1(E_1).S^2$ *impair*. Comme espace $\mathcal{A}_1$, on prend les connexions *projectives* sur P_1, c'est-à-dire qu'on passe à PU_2 opérant sur $\mathbf{P}^1$. Il revient au même de considérer le fibré V_1 associé à la représentation adjointe de SU_2 sur su_2 ou bien la représentation ordinaire de SO_3 sur $\mathbf{R}^3$, en identifiant $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ à $\mathbf{P}^1$. (Ce qu'on perd est une phase dans chaque direction de E_1.) Le w_2 de V_1 est la réduction modulo 2 de c_1 et l'action des instantons est donnée par $k_1 = -\frac{1}{4}\, p_1(V_1)$. (On a $w_2^2 \equiv p_1(4)$.) Mais (petite subtilité), pour le groupe de jauge $\mathcal{G}_1$, on demande qu'il existe un relèvement aux automorphismes de E_1 de déterminant 1. Si bien que $\mathcal{B}_1^* = \mathcal{A}_1^*/\mathcal{G}_1$ est un revêtement fini du $\mathcal{B}^*$ qu'on aurait en gardant toutes les transformations de jauge SO_3.

Les espaces d'instantons $\mathcal{M}_{k_1,c_1}$ sont orientés par un choix β_1 d'orientation de l'homologie (Akbulut, Mrowka, Ruan) (car on a choisi un relèvement entier de w_2). Pour toute classe entière $c \in H^2(X, \mathbf{Z})$, on a $\mathcal{M}_{k_1,c_1} \approx \mathcal{M}_{k_1,c_1+2c}$. (Changer β en $(-1)^{c^2}\beta$ pour avoir l'orientation.)

La dimension $2d_1$ est encore donnée par la formule (1).

La nouvelle sympathique est que, si $b_2^+ > 1$, $\mathcal{M}_{k_1,c_1}$ se compactifie bien selon Uhlenbeck en une "variété stratifiée" $\overline{\mathcal{M}}_{k_1,c_1}$. Les dimensions des strates descendent de 4 en 4, donc l'évaluation sur $[\mathcal{M}_{k_1,c_1}]$ des classes de cohomologie de $\mathcal{B}_1^*$ de degré $2d_1$ ne pose pas de problème. (Le point important est que l'hypothèse sur $c_1(E_1)$ assure l'absence de connexions plates dans $\overline{\mathcal{M}}$.)

La cohomologie rationnelle de $\mathcal{B}_1^*$ est engendrée par les classes μ_1/v, produits obliques de $\mu_1 = -\frac{1}{4}\,p_1(\mathcal{P}_1)$, où $\mathcal{P}_1 = \mathcal{A}_1^* \times P_1/\mathcal{G}_1$, avec les classes d'homologie de X ; on peut définir des fonctions multilinéaires

$$q_{k_1,c_1}(v_1, v_2, \cdots) = (\mu_1/v_1)(\mu_1/v_2)\cdots[\mathcal{M}_{k_1,c_1}]$$

sur l'homologie rationnelle de X_1. En particulier, des polynômes de Donaldson généralisés sur $H_2(X_1; \mathbf{Q})$:

$$q_{k_1,c_1}(h_1) = (\mu_1/h_1)^{d_1}\,[\mathcal{M}_{k_1,c_1}]. \tag{7}$$

Pour passer au cas général, ou revenir à SU_2, juste on éclate un point dans X : $X_1 = X_1 \# \overline{\mathbf{P}}^2$, $P_1 = P \# P_{(e)}$, où $P_{(e)}$ est le fibré sur le projectif retourné $\overline{\mathbf{P}}^2$ avec $c_2 = 0$ et c_1 duale de la sphère exceptionnelle $\overline{\mathbf{P}}^1 = -e$ (retournée aussi), et l'on *définit* :

$$q_k(h) = \frac{1}{2}\,(\mu_1/e)\,(\mu_1/h)^d\,[\mathcal{M}_{k+\frac{1}{4},c_1}]. \tag{8}$$

Il résulte d'un travail de Kotschick [Ko] que cela étend la définition des polynômes de Donaldson SU_2 à toute valeur de k et à toute variété X non nécessairement simplement connexe, de nombre $b_2^+ > 1$ (avec $b_2^+ - b_1$ impair).

Observons que q_k se prolonge en fonction multilinéaire sur toute l'homologie rationelle de X, symétrique sur l'homologie paire et antisymétrique sur l'homologie impaire. Si $d = 4k - \frac{3}{2}(1 + b_2^+ - b_1)$, on écrira aussi φ_d pour q_k.

3.3. Cohomologie non-abélienne

Il existe de multiples voies d'extension des invariants polynomiaux.

D'abord, D. Kotschick a montré comment faire si $b_2^+ = 1$ (*cf.* [Ko]), les polynômes $\Phi_{d,C}^X$ dépendant de chambres dans $H^2(X, \mathbf{R})$).

Puis, comme la cohomologie *entière* de $\mathcal{B}_X^*$ est bien plus riche que sa cohomologie rationnelle, S. Donaldson s'est soucié des invariants de torsion (*cf.* [D.T.], invariants modulo 2).

Voilà déjà cinq ou six ans que Donaldson sait définir les polynômes pour certaines variétés ouvertes X^0 : lorsque X^0 est à bout cylindrique $Y\times]0,\infty[$ et que Y est réunion de sphères d'homologie entière ($H_1(Y,\mathbf{Z})=0$) (*cf.* [A2]) :

A. Floer a construit une théorie "d'homologie d'instantons" $HF_*(Y;G)$ (*cf.* [Fl], [Si]) en régularisant l'homologie de Morse de la fonction CS sur $\mathcal{B}_Y^*$. (On peut faire *comme si* $\mathcal{M}(Y;G)$ était un ensemble fini et que l'opérateur de bord était une matrice ∂_Y de type $(\mathcal{M}(Y)\times\mathcal{M}(Y))$ dont les coefficients comptent avec les bons signes les instantons d'action finie et "de dimension 1" sur $Y\times\mathbf{R}$.) Le changement de CS en $-CS$ identifie $HF(-Y)$ (orientation renversée de Y) au dual de $HF(Y)$. Lorsque $Y=Y_1\sqcup Y_2$ (réunion disjointe) $HF(Y)=HF(Y_1)\otimes HF(Y_2)$.

Pour $\mathcal{R}\in\mathcal{M}(Y)^*$ et $h\in H_2(X^0,\mathbf{Q})$, S. Donaldson donne un sens invariant C^∞ au nombre algébrique d'intersection $q_{\kappa,\mathcal{R}}(h)$ de $\mathcal{M}_{\kappa,\mathcal{R}}(X^0)$ avec des ensembles transverses de connexions spéciales pour h, à condition de supposer κ assez grand.

Il s'avère que $q_\kappa(h)$ définit une classe de cohomologie de Floer de Y (une fonction de $\mathcal{R}$ qui est un cocycle).

Cela généralise la construction des morphismes en homologie de Floer, $HF(Y_1)\to HF(Y_2)$, à partir des cobordismes orientés de dimension 4 entre Y_1 et Y_2 (*cf.* [Fl], [D.T.], [Si]).

Lorsque $X^0=X_1^0\cup_{Y'}X_2^0$ est obtenue en recollant deux variétés à bouts cylindriques le long d'une partie Y' de leurs bouts (d'homologies sphériques), on a $S^d(H_2(X^0))=\oplus_{d_1+d_2=d}S^{d_1}(H_2(X_1^0))\otimes S^{d_2}(H_2(X_2^0))$, et, en contractant par la dualité $HF(Y')\otimes HF(-Y')\to\mathbf{Q}$, la formule suivante est vraie à coefficients dans $HF(\partial X^0)$:

$$\varphi_d^{X^0}=\sum_{d_1+d_2=d}\langle\varphi_{d_1}^{X_1^0},\varphi_{d_2}^{X_2^0}\rangle. \tag{9}$$

Ce résultat généralise le théorème du § 1.1 sur les sommes connexes ; il est à l'origine de l'invention par Atiyah, Segal et Witten des "théories topologiques des champs" (*cf.* [A2], [A3], [Wi]).

(L'intérêt de la décomposition suivant les sphères d'homologie vient d'une proposition de M. Freedmann et L. Taylor (1977) : si la forme d'intersection Q de

X^4 (fermée et simplement connexe) est une somme directe orthogonale $Q_1 \oplus Q_2$, il existe une sphère d'homologie Y découpant X en deux morceaux X_1 et X_2 dont les formes d'intersection sont équivalentes à Q_1 et Q_2. Ainsi on peut espérer calculer les q_k par découpages et collages.)

Les maîtres d'instantons, Donaldson, Braam, Fukaya, Furuta,Taubes, Mrowka et al. (*cf.* [B.D.]) sont en passe de définir l'homologie de Floer de toutes les variétés fermées, orientées de dimension 3.

Afin d'étendre la formule (9), l'idéal serait une théorie $HF(Y;G)$ formée à partir des classes de cohomologie de $\mathcal{M}(Y;G)$.

En tout cas, Kronheimer et Mrowka exposent dans [K.M.2] la construction de polynômes q_k^0 sur $H_2(X^0)$ associés à certaines composantes $\mathcal{R}$ de $\mathcal{M}(Y;SU_2)$, lorsque Y est fibrée en cercle sur une surface, avec toutefois des restrictions sur la topologie de Y et sur k (*cf.* §3.4).

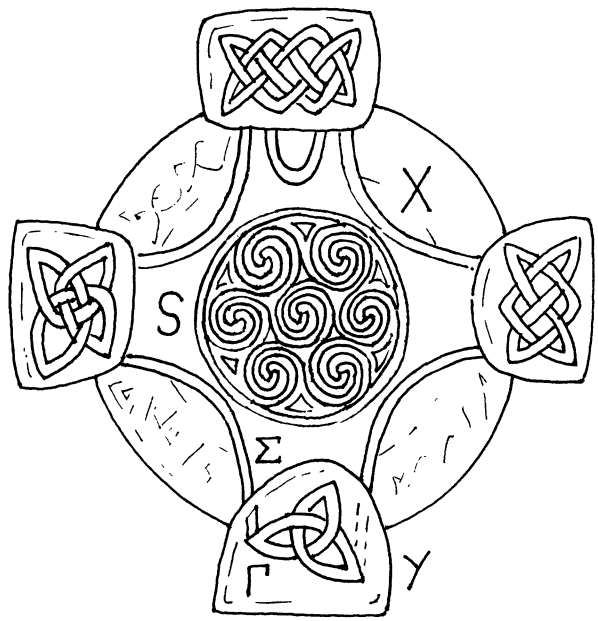
A présent, avec l'introduction des surfaces Σ dans X et des instantons singuliers s'offre une nouvelle direction :

Pour X fermée, [K.M.2] contient la définition de polynômes $q_{k,\ell}$ de degré $d_{k,\ell}$ sur $H_2(X\backslash\Sigma)$ (le d de la formule (4)). Cela passe par les modules logarithmiques $\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell}(X,\Sigma;SU_2)$, pour des métriques $\mathbf{g}^{\nu}$ pointues (ν grand), et il faut supposer l'absence de connexions plates sur $X\backslash\Sigma$ pour $\alpha \neq 0, \frac{1}{2}$. Pour ν et k grands, Kronheimer et Mrowka démontrent que $q_{k,\ell}$ est indépendant de α et de $\mathbf{g}^{\nu}$.

Ensuite, suivant les idées de Kotschick et Morgan & Mrowka, ils peuvent enlever l'hypothèse ad-hoc sur les connexions plates ; dans [K2], on trouvera des $q^{X,\Sigma}_{k,\ell} \in S^d(H_2(X))$, pour Σ *immergée*, avec les seules hypothèses $b_2^+ > 1$ et $b_2^+ - b_1$ impair (*cf.* §4 2).

(Notons aussi la contrepartie du nombre de monopoles ℓ : il est possible d'enrichir $q_{k,\ell}$ en utilisant la classe d'Euler d'une réduction du fibré adjoint universel le long de $\mathcal{B}^{*,\alpha} \times \Sigma$, *cf.* §4.3.)

Le pas suivant est trop tentant : introduire des entrelacs Γ dans les variétés de dimension 3 et définir une homologie de Floer "logarithmique" $HF_*(Y,\Gamma;G)$; en passant par les modules de connexions plates sur $Y\backslash\Gamma$ avec holonomie autour de Γ. Et pour toute paire (X^0,Σ^0) de bord (Y,Γ), définir un polynôme sur $H_2(X^0)$ à valeur dans $HF^*(Y,\Gamma;G)$, satisfaisant à des formules de recollements comme (9), et caetera.



Dans [K2], le début de ce programme est réalisé avec $G = SU_2$, $\alpha = \frac{1}{4}$, $Y = S^3$ et Γ réunion d'un ou deux cercles non noués. Kronheimer y souligne la nécessité de fixer une parallélisation du fibré normal à Γ dans Y. Bonjour Mr Jones. (Les nombres qui remplacent k et ℓ ne sont plus entiers. Ils dépendent de l'holonomie sur un parallèle de Γ et de la valeur de CS : si $n = \Sigma^0.\Sigma^0$, si $\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma^0}\omega$, ω courbure résiduelle sur Σ dans la direction L, on a $k = \kappa - 2\alpha\ell + n\alpha^2$ et $\ell = \lambda + n\alpha$.)

On peut décorer la figure avec des couleurs d'algèbre moderne. Et penser que derrière la réussite des instantons se profile une théorie nouvelle de cohomologie non-abélienne.

Le cadre serait celui de la cohomologie à valeurs dans des faisceaux de groupes, suivant la méthode de Čech, développée par J. Frenkel et P. Dedecker (*cf.* [F] et [De]), étendue aux topos de A. Grothendieck et J.-L. Verdier par J. Giraud (*cf.* [Gi]). Il ne s'agit plus d'anneaux de cohomologie mais d'objets pointés ; certains sont familiers en géométrie analytique, par exemple le H^1 peut décrire des classes d'isomorphisme de fibrés holomorphes.

En topologie, avec le faisceau des fonctions localement constantes de X dans

G, le H^1 est un espace de classes de systèmes locaux ; si X est une variété, on trouve les classes d'équivalence de représentations de $\pi_1(X)$ dans G. Pour les variétés de dimension 2 et 3, il est peu probable que l'on doive aller plus loin (Top $\Longleftrightarrow$ C^∞ (Cerf et Moïse) et le π_1 détient tous les secrets (Poincaré, Stallings)). Mais pour les variétés de dimension 4, on peut attendre autre chose avec des coefficients déduits d'un fibré principal non trivial. Même pour X simplement connexe, la théorie devrait être intéressante.

La thèse, implicite dans les travaux de Donaldson, Kronheimer, Mrowka et al., est que les espaces $\mathcal{M}(X;P)$ de modules ASD jouent le rôle d'une *cohomologie "chirale" non-abélienne de degré* 1. Les seuls "défauts" sont le fixage de jauge ($\mathcal{M}$ dépend du choix d'une structure conforme) et les problèmes de domaines qui s'ensuivent (les flèches ne sont qu'asymptotiques, pour des métriques dégénérées).

Par exemple, le bord du § 3.1, $\mathcal{M}(X^0) \to \mathcal{M}(Y)$ vaut une application de restriction $H^1(X_0) \to H^1(Y)$.

T.S. Mrowka s'est penché sur l'inverse de la flèche du milieu dans une suite de Mayer-Vietoris pour les modules de connexions anti-duales, analogue à :

$$H^0(Y) \longrightarrow H^1(X) \longrightarrow H^1(X_1) \times H^1(X_2) \longrightarrow H^1(Y).$$

C'était le sujet du § 3.1. Lorsque P est trivial, la suite de Mayer-Vietoris non-abélienne corrrespond au théorème de Van Kampen.

Dans le cadre analytique complexe, la restriction des fibrés stables (resp. semi-stables) à une surface de Riemann plongée "générale" Σ dans une surface projective X donne une flèche $\mathcal{M}(X;SU_2) \to \mathcal{M}(\Sigma) = \mathcal{SU}_\Sigma$ (Mehta, Ramanathan).

Enfin, une partie du § 2 repose sur la comparaison de $\mathcal{M}(\mathbf{P}(\mathbf{1} \oplus N))$ avec $\mathcal{M}(\Sigma)$; on peut voir ça comme un isomorphisme de Thom ou un analogue de la périodicité de Bott en K-théorie comme la présente Atiyah dans [A.4].

Problème : Découvrir un *site* $\mathcal{S}_X$ et un *lien* $\mathcal{L}_P$ sur ce site (*cf.* [Gi] ou SGA4), naturellement associés à une variété X de dimension ≤ 4 et à un fibré principal P sur X, dont la cohomologie $H^*(\mathcal{S}_X;\mathcal{L}_P)$ notée $\mathcal{H}^*(X;P)$ corresponde par un analogue non-abélien de "Hodge-de Rham-Kodaira" aux modules ASD.

On peut essayer de formuler quelques axiomes pour la cohomologie $\mathcal{H}^*(X;P)$ et pour des objets de cohomologie relative $\mathcal{H}^*(X,Y;P)$:

(1) Naturalité pour les difféomorphismes.

(2) Fonctorialité pour les restrictions et suites exactes de paires.

(3) Avec P trivial et $(Y = \emptyset)$, on souhaite rencontrer les représentations du groupe fondamental.

(4) Excision ; par exemple, une suite de Mayer-Vietoris de correspondances d'ensembles pointés : $\mathcal{H}^0(Y) \to \mathcal{H}^1(X) \to \mathcal{H}^1(X_1) \times \mathcal{H}^1(X_2) \rightrightarrows \mathcal{H}^1(Y)$.

(5) Des suites exactes longues associées aux suites exactes courtes de coefficients.

(6) Ce qui tient lieu d'axiome de la *dimension* :

Les $\mathcal{H}^i(X, Y)$ sont munis de topologies satisfaisant à une forme de dualité de Poincaré ; par exemple, si X^4 est fermée et $G = SU_2$, avec $k = -\frac{1}{4}p_1(\mathrm{Ad}\, P)$, l'homologie rationnelle de $\mathcal{H}^1(X; P)$ est nulle en degré $> 2d = 8k - \frac{3}{2}(\chi + \sigma)$, il y a une classe fondamentale $\mu_{\mathcal{H}} \in H_{2d}(\mathcal{H}^1(X; P))$, etc.

(7) Un axiome d'*action* ; en particulier, pour X^4 fermée et $G = SU_2$, on demande une classe $\mu_{\mathcal{P}} \in H^4(X \times \mathcal{H}^1(X; P))$. De manière à disposer de "plongements d'Abel" en cohomologie : $\alpha : H^*(X) \longrightarrow H^*(\mathcal{H}^1(X))$; définis par $\alpha(h) = \mu_{\mathcal{P}}/(h \cap \mu_X)$ (ici μ_X est la classe fondamentale de X dans $H_4(X)$).

Les classes $\alpha(h_1) \cup \cdots \cup \alpha(h_m) \cap \mu_{\mathcal{H}}$ sont censées reconnaître les polynômes de Donaldson.

Les exigences portent sur la cohomologie ordinaire de la cohomologie non-abélienne. La version à bord met en jeu la cohomologie de Floer qui est une cohomologie (au sens des instantons) de la cohomologie (ordinaire) de la cohomologie (au sens non-abélien).

Remarque.— On voit bien les propriétés de dualité en théorie ASD : considérons une surface S dans X^4 ; soient $X(k)$ un sous-ensemble de $\mathcal{M}_k$ constitué d'instantons concentrés près des k-uples de points $\{x_1, \cdots, x_k\}$ de X, "à la Taubes", et $S(k)$ le sous-ensemble de ceux dont un centre x_i au moins appartient à S ; Donaldson et Kronheimer [D.K.], prolongeant une remarque de Taubes, montrent que $S(k)$ est duale de Poincaré de l'image réciproque de μ/S dans $H^2(X(k); \mathbf{Z})$. Ainsi, l'intersection des surfaces dans X avec S se prolonge aux "surfaces d'instantons" quelconques.

Ce point de vue pose quelques questions sur les modules d'instantons :
par exemple, y a-t-il un transfert pour les revêtements finis ?
Ou encore, qu'est-ce qui correspond aux cocycles de degré 2 ?

Les travaux de Kronheimer et Mrowka montrent qu'il faudrait aussi définir des objets de cohomologie "logarithmiques" $\mathcal{H}(X, \Sigma; P)$, comme ceux de Hyodo, Kato, Fontaine et Illusie pour les structures logarithmiques en Géométrie Arithmétique (*cf.* [I]). A propos, est-ce qu'un problème répond à la conjecture du genre sur une surface arithmétique ?

Une dernière remarque : si l'on se demande pourquoi la cohomologie non-abélienne de degré 1 dit quelque chose sur le genre des classes d'homologie de degré 2, on peut se rappeler qu'en 1941 H. Hopf démontrait que le groupe de Poincaré détermine les classes dans H_2 qui n'ont pas de représentant sphérique. En se servant des fibrés non triviaux sur une variété de dimension 4, [M.M.R.] et [K.M.1 & 2] arrivent à déterminer des classes qui ne peuvent pas être représentées par des sphères C^∞ plongées.

3.4. Convergences fortes

Revenons, avec Kronheimer et Mrowka, aux $\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell}(X, \Sigma)$, instantons logarithmiques pour SU_2, singuliers le long d'une surface connexe de genre $g \geq 2$ et d'auto-intersection $n > 0$.

L'idée pour évaluer les polynômes $q_{k,\ell}$ est d'extirper Σ de X en pinçant très fort sur le bord Y d'un voisinage tubulaire N de Σ dans X.

Comme au § 2.3, on notera $W = \mathbf{P}(\mathbf{1} \oplus N)$, Σ' la section à l'infini dans W, N' un voisinage tubulaire de Σ' dans W. Ainsi, $X = X \backslash N \cup_Y W \backslash N'$.

La variété Y est fibrée en cercles sur Σ (classe d'Euler n), et les composantes connexes de $\mathcal{M}(Y)$ sont de trois sortes :

d'abord une grosse $\mathcal{R}_+$, de dimension $6g - 6$, qui s'identifie à $\mathcal{SU}_g$, vu comme espace des classes d'équivalence de représentations de $\pi_1(\Sigma)$ dans SU_2 ; elle vient des représentations de $\pi_1(Y)$ qui sont triviales sur la fibre S^1 de $Y \to \Sigma$;

une deuxième (aussi grosse) $\mathcal{R}_-$, qui vient des représentations de $\pi_1(Y)$ où la fibre S^1 va sur $-Id$; on peut aussi l'identifier à $\mathcal{SU}_g$ si n est pair ;

et puis des "petites" composantes $\mathcal{R}_m$ où S^1 se représente par un élément d'ordre n, de valeurs propres $\exp(\pm 2\pi i \frac{m}{n})$, $0 < m < \frac{n}{2}$) ; elles correspondent à des représentations réductibles de $\pi_1(Y)$. Et l'on peut identifier chaque $\mathcal{R}_m$ à la jacobienne de Σ.

On a $CS(\mathcal{R}_+) \equiv 0$ mod.1, $CS(\mathcal{R}_-) \equiv \frac{n}{4}$ mod.1, $CS(\mathcal{R}_m) \equiv \frac{m^2}{n}$ mod.1.

Maintenant, le cheminement des arguments de Kronheimer et Mrowka :

a) la dimension de $\mathcal{M}_{\kappa,\mathcal{R}_\pm}(X\backslash N)$ est égale à $2d = 8k - 3(1 + b_2^+ - b_1)$. Mais si $4g > 6 + n$, la dimension des autres $\mathcal{M}_{\kappa,\mathcal{R}_m}(X\backslash N)$ est strictement inférieure. (Cela vient de (6).)

b) (Ceci est le point technique, "Mayer-Vietoris fort", le plus important.)

Lorsque $b_2^+ > 1$, que $X\backslash\Sigma$ est simplement connexe, que $\Sigma.\Sigma = n$ n'est pas congru à 0 modulo 4, que $4g > 6 + n$, et que k est dans le domaine stable ($2d > 4k$), alors pour α petit ($2\alpha\ell - n\alpha^2 < \frac{1}{n}$) et ν grand, la convergence d'une suite d'instantons de $\mathcal{M}^\alpha_{k,\ell}(X,\Sigma)$ quand Y s'écrase ne peut être que *forte sur tout* X, et les instantons limites ∇_1^0 sur $X\backslash N$ et ∇_2^0 sur $W\backslash N'$ appartiennent respectivement à $\mathcal{M}_{k,\mathcal{R}_+}(X\backslash N)$ et à $\mathcal{M}_{0,\ell}(W\backslash N',\Sigma)$.

($n \not\equiv 0 \bmod 4$ est là pour éliminer les limites $\mathcal{R}_-$, et $\pi_1(X\backslash\Sigma) = 0$ pour éviter les connexions plates.)

c) Si $n > 0$, $4g > 8 + n$, et $2d > 4k$, on peut définir des polynômes de Donaldson q_k^0 sur $H_2(X\backslash\Sigma;\mathbf{Q})$, via les espaces $\mathcal{M}_{k,\mathcal{R}_+}(X\backslash N)$.

d) Sous les mêmes hypothèses, sur $H_2(X\backslash\Sigma;\mathbf{Q})$,

$$q_k = q_k^0.$$

En particulier, $q_k^0(h)$ ne dépend que de l'image de h dans $H_2(X;\mathbf{Q})$.

e) Lorsque $\ell = \dfrac{g-1}{2}$;

$$q_{k,\ell} = 2^g q_k^0.$$

(Comparaison de l'application de restriction $\mathcal{M}^\alpha_{0,\ell}(W,\Sigma) \to \mathcal{SU}_{\Sigma'}$, et de l'application de bord $\mathcal{M}^\alpha_{0,\ell;\mathcal{R}_+}(W\backslash\Sigma',\Sigma) \to \mathcal{R}_+$.)

Supposons $\ell = \dfrac{g-1}{2}$ (donc g impair) ;

lorsque α s'approche de $\frac{1}{2}$, si jamais on avait $2g - 2 < n$, on aurait $k + 2\alpha\ell - \alpha^2 n < k$.

Un nouveau contrôle de convergence forte (argument de comptage) montre que $q_{k,\ell}$ devrait s'annuler pour les grands k. D'où :

THÉORÈME [KM.2].— *Si X est simplement connexe, avec b_2^+ impair ≥ 3, que $X\backslash\Sigma$ est simplement connexe, que $n = \Sigma.\Sigma$ est strictement positif et non-congru*

à 0 modulo 4, que g, le genre de Σ, est impair ≥ 3 ; si de plus $\frac{1}{2}n+2<2g-2<n$; alors, pour k grand, les polynômes de Donaldson (pour SU_2), q_k, s'annulent identiquement sur l'orthogonal de Σ dans $H_2(X;\mathbf{Z})$.

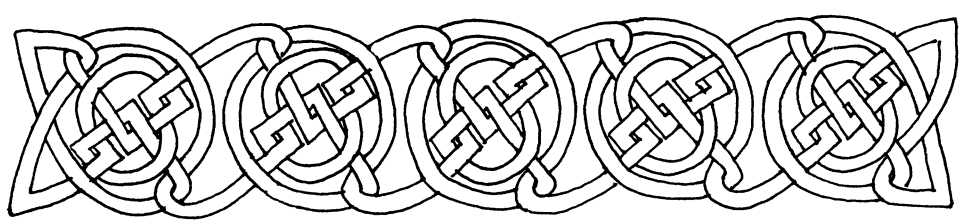
De là, on déduit le théorème A :

Supposons d'abord que $n=\Sigma.\Sigma$, soit >0 ; prenons λ exemplaires de Σ, $\lambda\in\mathbf{N}^\times$ et mettons-les en position générale avec uniquement des points doubles positifs, puis transformons chaque point double en une anse simple (modèle $xy=0$ devient $xy=\varepsilon$ dans $\mathbf{C}^2$) ; on obtient ainsi une surface plongée Σ_λ homologue à $\lambda\Sigma$; notons g_λ son genre et n_λ son auto-intersection. On a $2-2g_\lambda=\lambda(2-2g)-\lambda(\lambda-1)n$ et $n_\lambda=\lambda^2 n$, donc $2g_\lambda-2-n_\lambda=\lambda(2g-2-n)$. Et si λ est assez grand, $2g_\lambda-2>\frac{1}{2}n_\lambda+2$.

En éclatant un point de Σ_λ, on passe à Σ'_λ dans $X'=X\#\overline{\mathbf{P}}^2$, et $X'\backslash\Sigma'_\lambda$ est simplement connexe. Σ'_λ a le même genre que Σ_λ, et son auto-intersection est $n'_\lambda=n_\lambda-1$. Si λ est pair, on a $n'_\lambda\not\equiv 0 \bmod 4$. Si g_λ n'est pas impair, on ajoute une petite anse à Σ'_λ sans changer sa classe d'homologie. Le b_2^+ de X' est le même que celui de X et d'après [D4], pour toute classe $h\in H_2(X)$, on a $q_k^{X'}(h)=q_k^X(h)$. Supposons à présent $2g-2<n$, la différence $2g_\lambda-2-n_\lambda$ tend vers $-\infty$. Notons (e) le diviseur exceptionnel de $\overline{\mathbf{P}}^2$; d'après le théorème précédent, les polynômes $q_k^{X'}$ s'annulent pour toutes les valeurs de k assez grandes dans tous les hyperplans orthogonaux dans $H_2(X')$ aux classes $\lambda\Sigma-(e)$. On aura donc $q_k\equiv 0$.

Si jamais $n=0$ et $g=0$, mais Σ non homologue à zéro, on choisit une surface T orientée plongée qui coupe Σ en μ points d'intersection tous positifs et on remplace Σ par la somme de T et de λ exemplaires "parallèles" de Σ ; après chirurgie, on trouve S_λ avec $S_\lambda.S_\lambda=TT+2\lambda\mu$ et genre $(S_\lambda)=$ genre $(T)+\lambda\mu-\lambda$. Pour λ grand, on a $2g_S-2<S.S$ et on est ramené au cas précédent.

Ces arguments rendent manifeste la nature asymptotique de l'inégalité $2g-2\geq n$.



4. LA FORME DE L'HOMOLOGIE

4.1. Problème du genre

Soit X une variété lisse orientée simplement connexe de dimension 4.

Soit h un élément de $H_2(X, \mathbf{Z})$; il existe toujours une surface Σ lisse, connexe et orientée représentant h ; on s'interroge beaucoup sur le genre minimum g_h que Σ peut avoir.

Il y a peu de temps, la meilleure estimation de g_h était celle de Rokhlin, Hsiang et Sczarba (1971 ; obtenue grâce au théorème de la signature équivariante) :

par exemple, si h est divisible par 2, en notant $n = h.h$, on a $g_h \geq \frac{1}{4}n - b_2^+$ (et en retournant l'orientation $g_h \geq -\frac{1}{4}n - b_2^-$).

(L'inégalité avec $2b_2^+$ à la place de b_2^+ s'obtient juste en écrivant $b_2(Z) \geq \sigma(Z)$ pour le revêtement double branché Z le long de Σ.)

Pour $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, si h est de degré $d = 2m$, cela donne $g_h \geq m^2 - 1$. La *conjecture de Thom* dans ce cas donnerait $g_h \geq 2m^2 - 3m + 1$. On voit qu'asymptotiquement il manque un facteur 2.

Plus généralement (*cf.* § 1.2), on conjecture que si X est une surface projective complexe, toute courbe algébrique lisse réalise le minimum du genre dans sa classe d'homologie.

D'après la formule d'adjonction, si K est la classe canonique de X, cela s'énonce :

pour les surfaces Σ dans les classes algébriquement réalisables

$$2g - 2 \geq \Sigma.\Sigma + K.\Sigma.$$

Le théorème A de Kronheimer et Mrowka dit seulement $2g - 2 \geq \Sigma.\Sigma$, mais il concerne toutes les surfaces Σ à l'exception des sphères homologues à 0 et des sphères d'auto-intersection -1.

Le théorème A est optimal lorsque X est une surface $K3$ puisqu'alors K est homologue à 0.

Notons que cela suffit pour démontrer la conjecture du genre semi-locale (corollaire 1, § 1.2). En effet, si C est une courbe algébrique lisse dans $\mathbf{C}^2$ transverse à la sphère S^3, on choisit une courbe algébrique lisse D dans $\mathbf{C}^2$ de degré 6, transverse à C évitant la boule B^4, et on regarde l'image réciproque C' de C dans

le revêtement double ramifié X' le long de D. Comme X' est une surface $K3$, on ne peut trouver de surface orientée de genre inférieur à celui de C' qui lui soit homologue. Or, c'est ce qui arriverait si l'on pouvait trouver une surface orientée plongée V dans B^4 s'appuyant sur $C \cap S^3$ et vérifiant $\chi_V > \chi_{C \cap B}$.

Kronheimer et Mrowka ne sont pas les premiers à attaquer le problème du genre à l'aide des équations d'anti-dualité. Il y eut R. Friedman et J.W. Morgan ([F.M.1]) pour exclure des représentants sphériques dans les surfaces de Dolgachev. Ensuite, Morgan, Mrowka et Ruberman ([M.M.R.]) démontrèrent (en utilisant les instantons à bouts cylindriques) que sous les hypothèses du théorème A, toute sphère essentielle doit être d'auto-intersection strictement négative et tout tore plongé d'auto-intersection inférieure ou égale à 1. (P. Lisca [Li] a montré comment passer de 1 à 0 dans le cas du tore pour certaines surfaces X.)

En couplant les méthodes classiques de revêtements branchés avec des arguments de théorie de jauge, D. Kotschick et C. Matič ([Ko.Ma]) ont obtenu des résultats qui ne sont pas couverts par le théorème A. Par exemple : dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ pour h de degré $d = 2(2\ell + 1)$, $\ell \geq 1$, on a $g_h \geq (2\ell + 1)^2 + 1$. Cela confirme la conjecture de Thom jusqu'au degré 6.

Ils montrent aussi que les résultats de [D.5] subsistent si au lieu de supposer $C.C > 0$, on suppose la classe de C divisible dans $H_2(X; \mathbf{Z})$.

Mais c'est encore avec les instantons logarithmiques qu'on remporte les plus grands succès.

4.2. Croisements positifs

Pour démontrer le théorème B du § 1.2 (qui implique la conjecture du genre pour un grand nombre de surfaces projectives de topologies différentes), il faut comprendre la nature des invariants polynomiaux $q_{k,\ell}^{X,\Sigma}$ attachés aux surfaces dans X (*cf.* § 3.3).

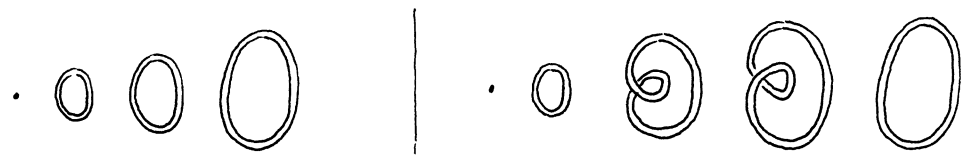
Ce que Kronheimer met en évidence dans [K.2], c'est qu'ils sont loin de détecter le type d'isotopie de Σ dans X ; ce sont en fait des invariants homotopiques de Σ :

Kronheimer commence par étendre la définition des $q_{k,\ell}^{X,\Sigma}$ sur $H_2(X)$ aux surfaces Σ *immergées* à points doubles ordinaires (pour cela, il passe par les SO_3-instantons sur des éclatements de X). Ensuite, il examine comment les $q_{k,\ell}^{X,\Sigma}$

changent à travers une homotopie de Σ.

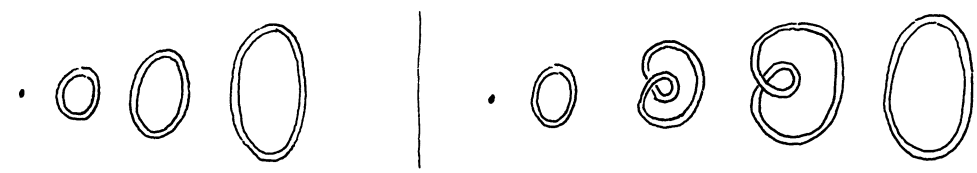
Il suffit de considérer les trois cas "élémentaires" :

(I) une *torsion positive*, introduisant un nouveau point double d'intersection positive

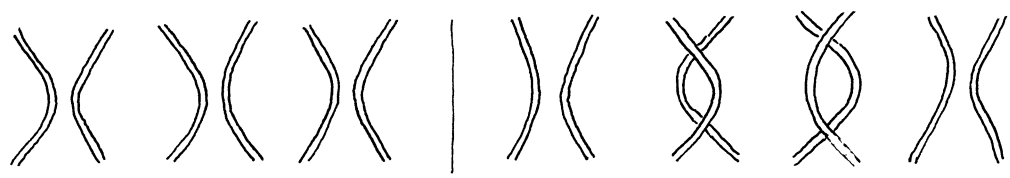


(Ce dessin représente le film local de Σ avant et après.)

(II) une *torsion négative*, introduisant un point double négatif



(III) une *traversée* ("finger move"), introduisant un point double positif et un négatif.



Posons $\varepsilon = -1$ dans les cas (I) et (III), $\varepsilon = 0$ dans le cas (II) ; la relation suivante est vraie entre les polynômes de (X, Σ) avant et après l'accident :

$$q_{k,\ell}^{\text{nouveau}} = q_{k,\ell}^{\text{ancien}} + \varepsilon\, q_{k-1,\ell+2}^{\text{ancien}}. \tag{10}$$

(Kronheimer la démontre par excision en découpant X par une petite sphère enfermant un ou deux disques sur Σ.)

Moralité : si l'on définit avec Kronheimer

$$R_d^{\Sigma}(s) = 2^{-g(\Sigma)} \sum_{d=d_{k,\ell}} s^{-\ell}\, q_{k,\ell}^{X,\Sigma}, \tag{11}$$

fonction génératrice des invariants, et si l'on note n_+ le nombre de croisements positifs de Σ, il vient :

THÉORÈME.— $(1-s^2)^{n_+} R_d(s)$ *est invariant par homotopie de* Σ.

(La série R_d est un polynôme de Laurent en s car les $q_{k,\ell}^{X,\Sigma}$ sont nuls si $k<0$ ou $k+\ell < \frac{1}{4}\,\Sigma.\Sigma$; généralisation du théorème d'annulation du § 3.4.)

Soit m_+ l'ordre d'annulation de R_d en $s=1$; du théorème on déduit que $n_+ - m_+$ est un invariant d'homotopie.

Supposons par exemple que Σ soit immergée avec $R_d(1) \neq 0$ (*i.e.* $m_+ = 0$) et avec un seul point double positif (*i.e.* $n_+ = 1$). Alors toute surface homotope à Σ présentera encore un point double positif au moins. En effet, si $\Sigma' \sim \Sigma$, on a $n'_+ = m'_+ + 1$ et $m'_+ \geq 0$.

Partant de là, dans [K2], Kronheimer indique un plan de positivité-annulation (utilisant [K.M.2]) pour aboutir au résultat suivant :

THÉORÈME.— *Soit* X, *surface projective complexe simplement connexe, telle qu'il existe une classe* $\alpha \in H^2(X,\mathbf{C})$ *de type* $(2,0)$ *vérifiant* $q_k^X(\alpha+\overline{\alpha}) > 0$ *pour une infinité de valeurs de* k, *soit* C *une courbe algébrique lisse connexe dans* X *telle que* $C.C > 0$. *Alors* C *réalise le minimum du genre dans sa classe d'homologie.*

Avec O'Grady [0'G1] (si les polynômes qu'il définit de façon algébrique sont stablement les mêmes que ceux de Donaldson), on obtient le théorème B.

4.3. Invariance homologique

L'espace des classes d'équivalence de jauge d'instantons logarithmiques irréductibles $\mathcal{B}^{\alpha,*}_{X,\Sigma}$ possède des classes de cohomologie associées aux points de X et à ceux de Σ :

Si μ est la classe fondamentale $-\frac{1}{4}\,p_1(\mathcal{P})$ dans $H^4(\mathcal{B}^{\alpha,*}_{X,\Sigma} \times X)$ (*cf.*§ 1.1) et si $x \in X$, il y a la classe $\nu_x = \mu/\{x\}$;

Si $\mathcal{Q}$ est la réduction SO_2 de $\mathcal{P}$ le long de $\mathcal{B}^{\alpha,*}_{X,\Sigma} \times \Sigma$, et si $\varepsilon = -\frac{1}{2}\,e(Q)$ dans $H^2(\mathcal{B}^{\alpha,*}_{X,\Sigma} \times \Sigma)$ (classe d'Euler), pour $y \in \Sigma$, il y a aussi $\varepsilon_y = \varepsilon/\{y\}$. ($\varepsilon^2 = -\nu$.)

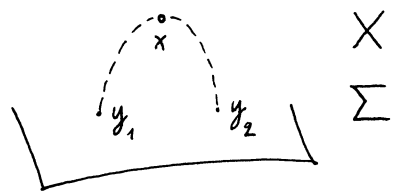
Étant donnés $x_1, \cdots, x_u$ des points de X, $y_1, \cdots, y_v$ des points de Σ, et des classes $h_1, \cdots, h_w$ dans $H_2(X, \mathbf{Z})$, on définit

$$q_{k,\ell}(x_1, \cdots, y_1, \cdots, h_1, \cdots) = \nu_{x_1} \cdots \varepsilon_{y_1} \cdots \mu / h_1 \cdots [\mathcal{M}^{\alpha}_{k,\ell}]. \tag{12}$$

On notera $i^X(x)$ (resp. $i^\Sigma(y)$) le produit intérieur par ν_x (resp. ε_y).

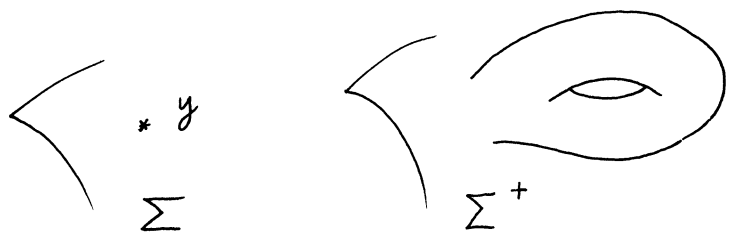
[K.2] établit des formules de récurrence entre les $q_{k,\ell}$; par exemple

$$i^X(x)\, q_{k,\ell} = q_{k,\ell-1} + q_{k-1,\ell+1} - i^\Sigma(y_1) i^\Sigma(y_2)\, q_{k,\ell}.$$



Ou bien, quand on ajoute une anse

$$q^{X,\Sigma^+}_{k,\ell} = -2\, i^\Sigma(y)\, q^{X,\Sigma}_{k,\ell}.$$



Kronheimer introduit alors une *hypothèse* sur l'ensemble des polynômes de Donaldson :

$$i^X(x_1) i^X(x_2)\, q_{k,\ell} = 4 q_{k-1,\ell}. \tag{13}$$

Il appelle *de type simple* toute variété X qui satisfait à (13) quels que soient $\Sigma, k, \ell, x_1, x_2$.

Les intersections complètes de grands degrés sont de type simple ; conjecturalement, *toute* variété (simplement connexe ?) de dimension 4 est de type simple.

La convention

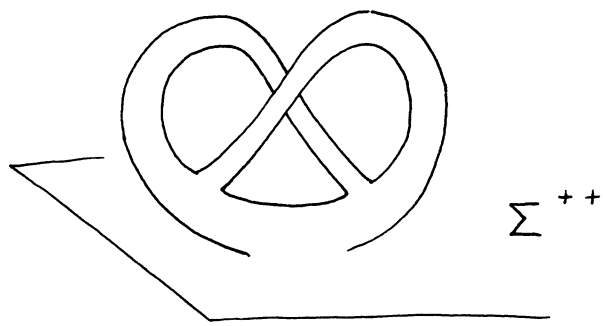
$$q_{k-\frac{1}{2},\ell} = \frac{1}{2} i^X(x)\, q_{k,\ell}, \tag{14}$$

$x \in X \backslash \Sigma$, permet de définir une série R modifiée :

$$S_d(s) = 2^{-g} \sum_{\substack{d_{k,\ell}=d \\ k\in\frac{1}{2}\mathbf{Z},\ell\in\mathbf{Z}}} s^{-\ell}\, q_{k,\ell}. \tag{15}$$

Si X est simple, $(1-s^2)^{n_+} S_d(s)$ est invariant par homotopie et se transforme facilement par addition d'une anse de genre 2 :

$$S_d^{++}(s) = (s^{-1} - 2 + s)\, S_d(s). \tag{16}$$



Notons ℓ_+ l'ordre d'annulation de S_d en $s = 1$; le nombre $\gamma = g + n_+ - \ell_+$ est un invariant *homologique* de Σ (peut-être dépendant de d et de la parité de g). La proposition de Kronheimer est que : γ est une borne inférieure de g_h.

Avec des restrictions sur la parité de g, la divisibilité de Σ... Kronheimer annonce le théorème suivant :

si X est une intersection complète de genre géométrique impair et si C est une courbe algébrique lisse dans X d'auto-intersection strictement positive, le nombre γ est égal au genre de C.

Ainsi, la fonction sur $H_2(X, \mathbf{Z})$ définie par :

$$J(h) = 2\gamma(h) - 2 - h.h$$

apparaît comme un substitut de l'intersection avec la classe canonique sur toute variété de type simple.

4.4. Les classes "basiques"

Notons $Q \in S^2(H_2(X,\mathbf{Q}))$ la forme quadratique d'intersection et identifions toute classe $L \in H_2(X,\mathbf{Q})$ avec la forme linéaire $h \mapsto L.h$ sur $H_2(X,\mathbf{Q})$.

Lorsque X est une intersection complète ou bien une surface minimale elliptique simplement connexe, R. Friedman, B. Moishezon et J.W. Morgan avaient repéré en 1987 que les polynômes q_k^X sont fonctions de Q et de K (classe canonique de X) ([F.M.M.]). En particulier, la direction de K dans $H_2(X;\mathbf{R})$ est un invariant de la structure différentielle réelle de ces surfaces.

Les q_k^X ne sont connus que dans peu de cas. Cependant, Friedman et Morgan les ont calculés lorsque X est une surface $K3$ ([F.M.], [O'G2], [M.O'G]) :

$$q_{2i}^{(K3)} = (2i-1)!!\ Q^i.$$

Dans [K.M.3], Kronheimer et Mrowka annoncent d'autres calculs complets : avec la convention $q_{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\, i^X(x) q_k$, on définit $\varphi_d = q_k$ pour $d = d_k \equiv \frac{1}{2}(1 + b_2^+)$ mod.2 (et l'on pose $\varphi_d = 0$ pour les autres valeurs de d).

Quel que soit $h \in H_2(X)$, on écrit :

$$\varphi(h) = \sum_d \frac{\varphi_d(h)}{d!}.$$

D'après Kronheimer et Mrowka, lorsque X est de type simple et simplement connexe, il existe des classes $K_1, \cdots, K_p$ dans $H_2(X,\mathbf{Z})$ et des nombres rationnels $a_1, \cdots, a_p$ (non nuls) tels que

$$\varphi = e^{\frac{1}{2}Q} \Sigma\, a_i\, e^{K_i}.$$

Exemples : pour une surface $K3$, on a $\varphi = e^{\frac{1}{2}Q}$;

pour une surface $K3$ éclatée en un point, $K3 \# \overline{\mathbf{P}}^2$, on a $\varphi = e^{\frac{1}{2}Q} \operatorname{ch} E$, où E est le diviseur exceptionnel dans $\overline{\mathbf{P}}^2$;

pour une surface elliptique minimale simplement connexe, sans fibre multiple,

$$\varphi = e^{\frac{1}{2}Q} (\operatorname{sh} F)^{p_g - 1},$$

où p_g est le genre géométrique (supposé ≥ 1) et F la classe d'une fibre elliptique générique. (Voir aussi [M.O'G].)

Enfin, la dernière annonce :

THÉORÈME C (Kronheimer et Mrowka, [K.M.3]).—*Si X est de type simple et simplement connexe, avec b_2^+ impair ≥ 3 ; pour toute surface connexe orientée plongée Σ de genre g, d'auto-intersection strictement positive, on a* :

$$2g - 2 \geq \Sigma.\Sigma + \max_i |K_i \,.\, \Sigma|.$$

La fonction $F(h) = \max_i |K_i \,.\, h|$ (certainement égale au J du § 4.3) apparaît dans le développement asymptotique de $\log \varphi(\lambda h)$ quand λ tend vers l'infini :

$$\log \varphi = \frac{1}{2} Q + F + O(1).$$

Il va de soi que les manques du texte ne tiennent qu'à moi. Je tiens quand même à remercier P.B. Kronheimer pour ses lettres et les participants du Séminaire de contact à Strasbourg où l'on a beaucoup parlé d'instantons. Et surtout je me rappelle tous les moments passés avec Marcus Slupinski et Manfred Preissendörfer autour de l'anti-dualité.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] M.F. ATIYAH - *Magnetic monopoles in hyperbolic spaces, Vector bundles on algebraic varieties*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1984), 1-33.

[A2] M.F. ATIYAH - *New invariants of 3 and 4-dimensional manifolds*, in "Symposium on the mathematical heritage of Hermann-Weyl", University of North Carolina, Ed. R. Wells & al. (1987).

[A3] M.F. ATIYAH - *The Jones-Witten invariant of knots*, Sém. Bourbaki, exp. n° 715, novembre 1989, Astérisque **189-190** (1990), 7-16.

[A4] M.F. ATIYAH - *K-theory*, Benjamin, New York (1967).

[AHS] M.F. ATIYAH, N.J. HITCHIN and I.M. SINGER - *Self-duality in four dimensional Riemannian Geometry*, Proc. Royal Soc. London **362** (1978), 425-461.

[APS] M.F. ATIYAH, V.K. PATODI and I.M. SINGER - *Spectral asymmetry and Riemannian Geometry*, I, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), 43-69. II, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **78** (1975), 405-432. III, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **79** (1976), 71-99.

[B1] O. BIQUARD - *Fibrés holomorphes et connexions singulières sur une courbe ouverte*, Thèse, École Polytechnique (1991).

[B2] O. BIQUARD - *Sur les fibrés paraboliques sur une surface complexe*, preprint (février 1993).

[BD] P.J. BRAAM and S.K. DONALDSON - *Fukaya-Floer homology and gluing formulae for polynomial invariants*, Preprint.

[BW] M. BOILEAU et C. WEBER - *Le problème de J. Milnor sur le nombre gordien des nœuds algébriques*, Ens. Math. **30** (1984), 173-222.

[De] P. DEDECKER - *Sur la cohomologie non-abélienne*, I, Canad. J. Math. (1960), 231-251 ; II , Canad. J. Math. (1963), 84-93.

[D1] S.K. DONALDSON - *An application of gauge theory to four dimensional topology*, J. of Diff. Geometry **18** (1983), 279-315.

[D2] S.K. DONALDSON - *The orientation of Yang-Mills moduli spaces and 4-manifold topology*, J. of Diff. Geometry **26** (1987), 397-428.

[D3] S.K. DONALDSON - *Connexions, cohomology and the intersection forms of four-manifolds*, J. of Diff. Geometry **24** (1986), 275-341.

[D4] S.K. DONALDSON - *Polynomial invariants for smooth four-manifolds*, Topology **29** (1990), 257-315.

[D5] S.K. DONALDSON - *Complex curves and surgery*, Publ. Math. IHES **68** (1989), 91-97.

[D6] S.K. DONALDSON - *Anti-self-dual Yang-Mills connections on complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc. **3** (1985), 1-26.

[DK] S.K. DONALDSON and P.B. KRONHEIMER - *The geometry of four-manifolds*, Oxford University Press (1990).

[DS] S.K. DONALDSON and D.P. SULLIVAN - *Quasiconformal four-manifolds*, Acta Math. **163** (1990), 181-252.

[DT] S.K. DONALDSON and C.B. THOMAS - *Geometry of low-dimensional manifolds*, I. *Gauge theory and algebraic surfaces*, London Math. Soc., Lecture Notes series **150**, Cambridge University Press (1990).

[Fℓ] A. FLOER - *An instanton-invariant for 3-manifolds*, Comm. Math. Phys. **118** (1980), 215-240.

[FM] R. FRIEDMAN and J.L. MORGAN - *Complex versus differentiable classification of algebraic surfaces*, Topology Appl. **32**, North Holland (1989), 135-139.

[FMM] R. FRIEDMAN, J.L. MORGAN and B. MOISHEZON- *On the C^∞ invariance of the canonical class of certain algebraic surfaces*, B.A.M.S. **17** (1987), 283-286.

[FS] R. FINTUSHEL and R. STERN - *$SO(3)$-connections on the topology of four-manifolds*, J. Diff. Geom. **20**, North Holland (1984), 523-539.

[FU] D.S. FREED and K.K. UHLENBECK - *Instantons and four-manifolds*, M.S.R.I. Publications, Vol. 1, Springer (1984).

[Fr] J. FRENKEL - *Cohomologie non-abélienne et espaces fibrés*, Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 135-218.

[Ga] P. GAUDUCHON - *Variétés riemanniennes autoduales [d'après C.H. Taubes et al.]*, Sém. Bourbaki, exp. n° 767, mars 1993, Astérisque (à paraître).

[Gi] J. GIRAUD - *Cohomologie non-abélienne*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1971).

[H] N. HITCHIN - *The Yang-Mills equation and the topology of 4-manifolds [after Simon K. Donaldson]*, Sém. Bourbaki, exp. n° 606, février 1983, Astérisque **105-106** (1983),167-178.

[I] L. ILLUSIE - *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique [d'après G. Faltings, J.-M. Fontaine et al.]*, Sém. Bourbaki, exp. n° 726, juin 1990, Astérisque **189-190** (1990), 325-374.

[Ki] R. KIRBY - *Problems in low-dimensional topology*, Proc. Symp. Pure Math. **32** (1978), 273-322.

[Ko] D. KOTSCHICK - *$SO(3)$-invariants for 4-manifolds with $b_2^+ = 1$*, Proc. London Math. Soc. **63** (1991), 426-448.

[KoMa] D. KOTSCHICK and G. MATIČ - *Embedded surfaces in four-manifolds, branched covers and $SO(3)$-invariants*, Preprint Bâle (1993).

[K1] P.B. KRONHEIMER - *Embedded surfaces in 4-manifolds*, Proc. Intern. Congr. Mathematicians, Kyoto 1990, Springer, Vol. I (1991), 527-539.

[K2] P.B. KRONHEIMER - *An obstruction to removing intersection points in immersed surfaces*, preprint Oxford (mars 1993).

[K3] P.B. KRONHEIMER - *The genus-minimizing property of algebraic curves*, preprint, à paraître au Bull. Amer. Math. Soc.

[KM1] P.B. KRONHEIMER and T.S. MROWKA - *Gauge theory for embedded surfaces*, I, preprint (novembre 1991), à paraître dans Topology.

[KM2] P.B. KRONHEIMER and T.S. MROWKA - *Gauge theory for embedded surfaces*, II, preprint (août 1992), à paraître dans Topology.

[KM3] P.B. KRONHEIMER and T.S. MROWKA - *Recurrence relations and asymptotics for four-manifold invariants*, preprint (mai 1993), à paraître au Bull. Amer. Math. Soc.

[L] J. LE POTIER - *Fibrés de Higgs et systèmes locaux*, Sém. Bourbaki, exp. n° 737, novembre 1990, Astérisque **201-202-203** (1991), 221-268.

[Li] P. LISCA - *On Tori embedded in four-manifolds*, J. Diff. Geometry **38** (1993), 13-37.

[Ma] C. MARGERIN - *Fibrés stables et métriques d'Hermite-Einstein [d'après S.K. Donaldson-K.K. Uhlenbeck-S.T. Yau]*, Sém. Bourbaki, exp. n° 683 (juin 1987), Astérisque **152-153** (1987), 263-283.

[Mi] J. MILNOR - *Singular points on complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies **61**, Princeton University Press (1968).

[MM] J.W. MORGAN and T.S. MROWKA - *A note on Donaldson's polynomial invariants*, Int. Math. Research Notices **10** (1992), 223-230.

[MMR] J.W. MORGAN, T.S. MROWKA and D. RUBERMAN - *The L^2-moduli space and a vanishing theorem for Donaldson polynomial invariants*, preprint (1992).

[MO'G] J.W. MORGAN and K.G. O'GRADY - *Differential topology of complex surfaces (Elliptic surfaces with $p_g = 1$: smooth classification)*, L.N. in Math. **1545**, Springer Verlag (1993).

[M] T.S. MROWKA - *A Mayer-Vietoris Principle for Yang-Mills Moduli Spaces*, Ph.D. thesis, Berkeley (1989).

[O'G1] K.G. O'GRADY - *Algebro-geometric analogues of Donaldson's polynomials*, Invent. Math. **107** (1992), 351-395.

[O'G2] K.G. O'GRADY - *Donaldson's polynomials for $K3$-surfaces*, J. of Diff. Geom. **35** (1992), 415-427.

[SS] L.M. SIBNER and R.J. SIBNER - *Classification of Singular Sobolev Connections by Their Holonomy*, Commun. Math. Phys. **144** (1992), 337-350.

[H] J.-C. SIKORAV - *Homologie associée à une fonctionnelle [d'après A. Floer]*, Sém. Bourbaki, exp. n° 733, novembre 1990, Astérisque **201-202-203** (1991), 115-141.

[T] C.H. TAUBES - *L^2-moduli spaces on manifolds with cylindrical ends*, Preprint (1990).

[W] S. WANG - *Moduli spaces over manifolds with involutions*, Math. Annalen (1993), 119-138.

[Wi] E. WITTEN - *Topological Quantum Field Theory*, C.M.P. (1988), 353-386.

Daniel BENNEQUIN

Université Louis Pasteur
I.R.M.A.
7 rue René Descartes
F-67084 STRASBOURG CEDEX

et, à partir de septembre 1993,

Université de Paris VII
UFR de Mathématiques
Tour 45-55 - 5ème étage
2, place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05

Astérisque

MARCEL BERGER

Systoles et applications selon Gromov

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 771, p. 279-310

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__279_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Juin 1993
45ème année, 1992-93, n° 771

SYSTOLES ET APPLICATIONS SELON GROMOV

par **Marcel BERGER**

1. Définition et remarques
2. Les systoles des espaces standards
   A. La 1-systole des tores plats
   B. Les $(2; 2r)$-systoles des tores plats
   C. Les systoles des espaces projectifs standards
3. Un programme naturel
4. Le cas des surfaces : $d = 2$ et $k = 1$
   A. Le cas du tore
   B. Les surfaces de genre plus grand : l'échec de la théorie classique
   C. Les résultats de Gromov
   D. Pot-pourri
5. Le cas d quelconque mais toujours $k = 1$
   A. Le résultat de Gromov
   B. Pot-pourri

5 $\frac{1}{2}$. Complainte des systoles

6. Les contre-exemples de Gromov
7. Les systoles se vengent de leurs échecs
   A. Caractériser les jacobiennes parmi les tores plats
   B. Mesurer le défaut de kählérianité d'une métrique riemannienne
8. Pourquoi les systoles à $k > 1$ sont inaccessibles ; les systoles stables

Le présent texte se veut une introduction aux trois textes de base sur le sujet, à savoir (Gromov 1983), (Gromov 1992 b) et (Gromov 1993). En fait, le second texte est une introduction au sujet tout en présentant de nombreux résultats nouveaux.

Cependant nous pensons qu'une introduction supplémentaire n'est peut-être pas de trop. Nous nous sommes donc efforcés d'insister sur le départ de la théorie, les exemples les plus simples et l'architecture générale. En contrepartie, les théorèmes principaux seront certes énoncés mais on ne donnera qu'une très vague idée de ce qui "fait marcher les choses". En effet, ces résultats sont extrêmement difficiles à démontrer, entre autres parce qu'il s'agit d'un sujet pratiquement vierge et pour lequel il n'existait aucune technique avant (Gromov 1983).

On ne considère que des variétés riemanniennes compactes notées (M, g), *où* M *est une variété de dimension toujours* notée *par* d *et* g *désigne la métrique riemannienne considérée sur* M.

1. DÉFINITION ET REMARQUES

DÉFINITION.— *Pour tout entier* k *entre* 1 *et* d, *on appelle* k-systole *de la variété riemannienne compacte* (M, g) *de dimension* d *la borne inférieure du volume* k*-dimensionnel de tous les* k*-cycles singuliers entiers de* M *qui ne sont pas homologues à zéro dans* M. *La* notation *utilisée est* $Sys_k(g)$. *On simplifiera la notation* Sys_1 *en* Sys *"tout court". Les cycles considérés seront toujours, sauf mention explicite du contraire, des cycles* entiers.

Par souci de simplification, on ne considérera (sauf mention explicite du contraire) que des variétés *orientables.*

Le cas $k = d$ est simple (et fondamental) : la d-systole est simplement le *volume* total $\mathrm{Vol}(g)$ de (M, g).

D'abord quelques remarques. Pour commencer, il n'y a de k-systole que si l'homologie entière de degré k de M est non nulle. Ensuite cela n'a guère de sens de calculer la valeur exacte d'une systole pour une (M, g) générale. Dans le cas $k = 1$, on sait certes qu'elle est réalisée par une géodésique périodique (donc la plus courte parmi les courbes non homologues à zéro) et ce sera important dans la suite. Pour les k plus grands, on tombe d'abord sur le problème de représentation des classes d'homologie par de sous-variétés. Rappelons qu'en toute généralité une k-classe d'homologie n'est pas toujours réalisable par une sous-variété, mais que c'est toujours possible pour k allant de 1 à 6. Sur cette question, voir (Thom 1954).

S'il y a réalisation des classes d'homologie par des sous-variétés, on tombe ensuite sur la question de réaliser la valeur de la systole par telle ou telle sous-variété. Ceci est étroitement lié à la question générale des sous-variétés *minima*. On rencontrera ce problème dans la section 7.A.

Par contre, si les valeurs exactes des systoles n'ont guère de sens dans le cas général, ce qui est intéressant c'est de rechercher s'il existe entre les différentes systoles des *inégalités universelles* (*i.e.* indépendantes de g, mais dépendant seulement de M par exemple). Et c'est la recherche de ces *inégalités a priori* qui fait l'objet du présent exposé. En particulier typiquement, on n'impose absolument aucune condition sur la courbure, quelle qu'elle soit, des structures riemanniennes considérées.

Une grande partie des résultats de Gromov sont valables dans le cas plus général des variétés finslériennes, voir (Gromov 1983).

Une dernière remarque : on pourrait penser à considérer l'homotopie au lieu de l'homologie. Nous préférons ne pas compliquer l'entrée du lecteur dans ce sujet assez nouveau, et reporter cette question à plus bas dans le courant du texte lorsque l'occasion s'en présentera.

2. LES SYSTOLES DES ESPACES STANDARDS

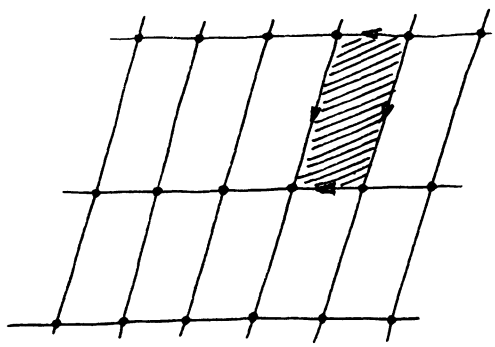
Le calcul des systoles de *variétés riemanniennes standards* est évidemment du plus grand intérêt. C'est par cela que nous allons commencer, ce qui permettra au lecteur de faire connaissance avec les systoles, objets apparemment tout simples à définir, mais pratiquement peu familiers. Le terme de variétés riemanniennes standards est vague. Pour nous, ce sera : les tores plats et les espaces symétriques de rang un (munis de leur métrique canonique), c'est-à-dire (exceptées les sphères) les différents espaces projectifs $\mathbf{K}P^n$ de dimension projective n, ceci pour un corps de base qui peut être $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ et $\mathbf{Ca}$: ils sont, en tant que variétés réelles, de dimensions respectives n, $2n$, $4n$ et 16. Pour le dernier cas, celui du plan projectif sur les octaves de Cayley $\mathbf{Ca}$, rappelons que $\mathbf{Ca}$ n'est pas un corps. Quant aux sphères, si elles sont absentes, c'est justement qu'elles n'ont pas de systoles, à part leur seul volume, puisque leur homologie est triviale excepté en dimensions 0 et d.

On va voir que le calcul désiré est plus subtil qu'il n'y pourrait paraître au premier abord.

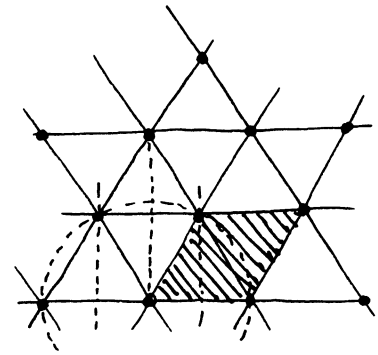
A. La 1-systole des tores plats

Les tores plats sont les variétés riemanniennes quotients de l'espace euclidien standard $\mathbf{R}^d$ par les translations d'un réseau Λ de $\mathbf{R}^d$. On les *notera* (T^d, Λ). Deux tores plats sont isométriques, c'est-à-dire isomorphes en tant que variétés riemanniennes, si et seulement si les réseaux Λ et Λ' qui les définissent sont déductibles l'un de l'autre par une isométrie de $\mathbf{R}^d$. Les géodésiques d'un tore plat sont les projections des géodésiques de l'espace euclidien, à savoir les droites. Puisque les courbes non-homologues à zéro dans T^d se relèvent en des courbes joignant deux points de $\mathbf{R}^d$ déduits l'un de l'autre par un élément non nul de Λ, il en résulte donc que la 1-systole de (T^d, Λ) est égale à la borne inférieure des normes des éléments non nuls de Λ :

$$Sys(T^d, \Lambda) = Sys_1(T^d, \Lambda) = \inf \{ \|\lambda\| \, : \, \lambda \in \Lambda \backslash 0 \}$$



tore quelconque



tore équilatéral

On devrait donc dès à présent être à même de résoudre la question de la relation intersystolique universelle *pour les tores plats* entre $Sys(T^d, \Lambda)$ et $Sys_d(T^d, \Lambda)$: en effet, on connaît la 1-systole mais aussi le volume : $\mathrm{Vol}(T^d, \Lambda) = \det(\Lambda)$, le *déterminant* du réseau Λ. Et on a bien l'intuition en effet que le volume (le déterminant) ne peut pas être trop petit quand tous les éléments non nuls du réseau ne sont pas trop petits.

En fait, cette question apparemment naïve est l'une des questions clef des mathématiques. Elle est à la base de la théorie géométrique des nombres. Par ailleurs, trouver le Λ qui donne le meilleur rapport $\det^{1/d}(\Lambda)/Sys(\Lambda)$ n'est rien moins que trouver l'empilement de sphères en dimension d le plus dense possible (à l'intérieur certes de l'ensemble des empilements de sphères associés à des réseaux). Pour ceci, voir (Oesterlé 1990).

La situation actuelle de cette question est la suivante. Nous exprimerons la valeur exacte de ce meilleur rapport plutôt sous la forme de la plus grande 1-systole possible pour un réseau de déterminant égal à 1 : nous *noterons* $c(d)$ cette valeur. La valeur exacte de $c(d)$ n'est connue aujourd'hui que pour $d = 2, \cdots, 8$. Pour $d = 2$, c'est le réseau équilatéral figuré ci-dessus qui la fournit. Pour les dimensions plus grandes, on ne connaît que des bornes, à savoir d'abord l'encadrement classique :

$$\left(\frac{2}{\beta(d)}\right)^{\frac{1}{6}} \leq c(d) \leq \sqrt{2}\left(\frac{d+2}{\beta(d)}\right)^{\frac{1}{d}},$$

où l'on a *noté* $\beta(d)$ le volume de la boule unité de $\mathbf{R}^d$. Avec la valeur classique $\beta(d) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}$ et la formule de Stirling, on déduit un comportement asymptotique de $c(d)$ pour d grand :

$$\left(\frac{1}{2\pi e}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{c(d)}{\sqrt{d}} \leq \left(\frac{1}{\pi e}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci a été amélioré récemment à droite en $\left(\frac{1,744}{2\pi e}\right)^{\frac{1}{2}}$. Mais on ne sait pas si $\frac{c(d)}{\sqrt{d}}$ tend vers une limite ou non lorsque d tend vers l'infini. En conclusion, $c(d)$ se comporte asymptotiquement comme $\sqrt{d}$ et l'on a pour la constante correspondante un rapport d'encadrement voisin de l'unité. En particulier le réseau *cubique* $\mathbf{Z}^d$ est tout à fait atypique pour la question étudiée. Dans la littérature, les encadrements ci-dessus sont habituellement désignés sous le nom de théorème de Minkowski-Hlawka : une référence de base est (Gruber and Lekerkerker 1987), voir chap. 6, §38 où ce qui est appelée constante d'Hermite et désignée par $\gamma(d)$ n'est autre que le carré $\gamma(d) = c^2(d)$ (voir aussi le supplément au chapitre 6 de cette même référence et, plus précisément (Kabajanski and Levenstein 1978)). La référence la plus récente pour la borne à droite est (Ball 1992) mais l'amélioration obtenue sur

les précédentes se lit, non pas sur $c(d)$, mais seulement sur sa puissance $\frac{d}{2}$-ième. Une autre référence essentielle est (Conway and Sloane 1988). Mentionnons enfin qu'il est très difficile de construire explicitement des réseaux avec $c(d)$ grand, voir toujours (Oesterlé 1990) et que, en tout cas, on ne sait pas en construire avec la densité optimale donnée par la borne inférieure ci-dessus ; or c'est un problème pratique très important de trouver des empilements de sphères très denses.

En résumé, d'une part un réseau ne peut jamais être trop "serré", mais il y a aussi en toutes dimensions des réseaux très "serrés".

L'égalité précédente signifie que pour tout tore plat, on a une inégalité systolique de la forme :

$$\frac{\mathrm{Vol}^{\frac{1}{d}}}{Sys} \geq * \, d^{\frac{1}{2}}$$

et elle est optimale quant au fait que la dimension d y figure par sa racine carrée.

Dans tout le texte, $*$ signifiera une constante universelle et $*(\cdot)$ une constante ne dépendant que de l'argument qui figure entre les parenthèses.

B. Les 2-systoles de rang $2r$ des tores plats

Pour tous les tores plats de dimension d et pour tous les entiers k, il est facile de voir que l'on a une inégalité optimale de la forme :

$$\frac{\mathrm{Vol}^{\frac{k}{d}}}{Sys_k} \geq * \, d^{\frac{k}{2}}$$

obtenue essentiellement pour des cycles associés à des produits extérieurs de la forme $\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_k$.

Restreignons-nous maintenant aux 2-systoles. La définition de la systole permet des cycles donnés par une somme de produits extérieurs convenables $\lambda_1 \wedge \lambda_2 + \lambda_3 \wedge \lambda_4 + \cdots$. Ce sont des cycles qui *s'étalent* plus ou moins dans le tore. Dans (Gromov 1992 b), on introduit les définitions suivantes : le *rang* d'une classe d'homologie $h \in H_2(M)$ d'une variété compacte M est le rang de la 2-forme alternée h^* que h définit sur $H^1(M; \mathbf{R})$ par la formule :

$$h^*(\alpha, \beta) = \langle \alpha \cup \beta, h \rangle \text{ où } \cup \text{ désigne le cup-produit.}$$

Ce rang est donc toujours pair et on *note* $Sys_{2;2r}(M,g)$ (pour une variété riemannienne quelconque) la 2-systole *de rang* $2r$ de (M,g), c'est-à-dire, par définition, la borne inférieure des aires pour g des 2-cycles de M qui sont de rang exactement $2r$. Exemple : lorsqu'un cycle est représenté par une surface sans singularité et de genre γ, le rang de la classe d'homologie dans M de la classe fondamentale de cette surface ne pourra pas dépasser 2γ.

On trouvera dans (Gromov 1992 b) le calcul montrant que pour le tore plat associé au réseau cubique $\mathbf{Z}^d$: $Sys_{2;2r} = r$ pour tout r allant de 1 à partie entière de $\frac{d}{2}$. Le calcul est fait "à la Wirtinger", technique sur laquelle nous reviendrons dans le paragraphe C ci-dessous et dans 7.B.

On y trouvera aussi le fait qu'il n'y a pas d'inégalité systolique universelle pour les tores plats et pour leurs $(2;2r)$-systoles lorsque r est fixé : par exemple, pour le tore plat "rectangulaire" de côtés $(1;1;1;\varepsilon)$, le volume vaut ε, tandis que la $(2;4)$-systole vaut $1+\varepsilon$ et donc le rapport à étudier peut être aussi petit que voulu.

Le comportement des $(2;2r)$-systoles sur l'espace des tores plats est un problème très difficile, voir la fin du §2 de (Gromov 1992 b). On trouvera plus bas en 6.A des faits essentiels les concernant pour le cas des dimensions paires $d = 2\gamma$ et les $(2;2\gamma)$-systoles.

C. Les systoles des espaces projectifs standards

Nous considérons les $\mathbf{K}P^n$ *munis de leur métrique riemannienne canonique.* Leur volume étant connu, ce qu'il faut, c'est calculer leurs systoles. On doit à Chern (communication personnelle à l'auteur en 1962) les façons de les calculer. Nous exposons ce que l'on peut trouver en détail dans (Berger 1972) et aussi en partie dans (Gromov 1992b).

Les résultats sont ceux attendus : les systoles sont atteintes et ce, exactement et seulement par les sous-espaces projectifs de toute dimension. Mais les démonstrations sont loin d'être faciles.

Nous commençons avec le projectif réel $\mathbf{R}P^d$: il possède une systole pour toute dimension $1,\cdots,d$ à condition de travailler en homologie modulo 2 quand nécessaire. Pour $k=1$, puisque l'on sait que la systole est réalisée par une géodésique périodique et que celles-ci ne sont autres que les droites projectives, on a donc gagné : $Sys_1 = \pi$. Mais dès $k=2$, même si l'on savait

que la systole est réalisée par une sous-variété minima, on est loin d'avoir une classification de ces sous-variétés de $\mathbf{R}P^d$ (et la même remarque s'applique pour les autres $\mathbf{K}P^n$). On utilise alors la géométrie intégrale : l'espace de tous les sous-espaces projectifs de dimension $d-k$ est muni d'une mesure canonique. Celle-ci permet de calculer le volume d'une sous-variété de dimension k de $\mathbf{R}P^d$ comme la moyenne du nombre de points d'intersection avec ces sous-espaces projectifs. Puisque la topologie force à se rencontrer toute paire formée d'un cycle homologue à un sous-espace projectif de dimension k et d'un sous-espace projectif de dimension $d-k$, on voit que la k-systole est bornée inférieurement par le volume (canonique) de $\mathbf{K}P^k$ et que la borne est atteinte exactement par tout sous-espace de dimension k. Toutes ces valeurs sont $\mathrm{Vol}(\mathbf{K}P^k) = (1/2)\,\mathrm{Vol}(S^k) = \frac{k}{2}\,\beta(k)$.

Le volume de $\mathbf{C}P^n$ (toujours muni de sa métrique standard) vaut ("depuis" Elie Cartan) $\frac{\pi^n}{n!}$ et il est héréditaire pour les sous-espaces projectifs. Pour calculer la $2k$-systole, la méthode ici consiste à utiliser l'inégalité de Wirtinger pour la 2-forme canonique ω de $\mathbf{C}P^n$, le théorème de Stokes, le théorème de de Rham et le fait que ω est fermée. Explicitons ceci, pour simplifier, dans le cas $k=2$; alors l'inégalité de Wirtinger dit que $|\omega(x,y)| \leq 1$ pour tout couple x, y orthonormé de vecteurs tangents (l'égalité ayant lieu si et seulement si x, y définissent une droite complexe). La 2-homologie de $\mathbf{C}P^n$ est engendrée par la droite projective complexe $\mathbf{C}P^1$; soit donc S une surface (un 2-cycle) de $\mathbf{C}P^n$ homologue à $\mathbf{C}P^1$. On aura

$$\int_S \omega = \int_{\mathbf{C}P^1} \omega = \pi = \int_S \omega(x,y)\,ds \leq \int_S |\omega(x,y)|\,ds \leq \int_S ds = \mathrm{Aire}(S)$$

et l'égalité est atteinte pour les droites projectives et pour elles seulement. Plus généralement, on aura :

$$Sys_{2k}(\mathbf{C}P^n; \text{standard}) = \frac{\pi^k}{k!} \qquad (k = 1, \cdots, n).$$

Pour la 4-systole par exemple (classe de $\mathbf{C}P^2$), on travaillera avec la 4-forme $\frac{\omega \wedge \omega}{2}$, etc.

Pour les projectifs restants, les quaternioniens $\mathbf{H}P^n$ et le plan projectif des octaves de Cayley $\mathbf{Ca}\,P^2$, il suffit de montrer que la 4-forme canonique de $\mathbf{H}P^n$ et ses puissances extérieures, ainsi que la 8-forme canonique de $\mathbf{Ca}\,P^2$, vérifient une inégalité généralisant celle de Wirtinger. Ceci est fait dans (Berger 1972). On en déduit la valeur des $4k$-systoles pour $\mathbf{H}P^n$ et pour $\mathbf{Ca}\,P^2$ le fait que la 8-systole est le volume de $\mathbf{Ca}\,P^1$. Les valeurs de ces volumes figurent dans (Berger 1965 ; Berger 1972 ; Berger and others 1971 ; Besse 1978). Voir aussi (Gromov 1992 b).

3. UN PROGRAMME NATUREL

Ce programme m'a été suggéré par René Thom en 1962 dans la bibliothèque de mathématiques de Strasbourg lorsqu'y arriva l'article de Blatter dont il va être question bientôt. Il s'agit de celui mentionné plus haut : trouver des inégalités entre différentes systoles qui soient absolument indépendantes de toute métrique riemannienne sur la variété considérée.

La question générale est à plusieurs niveaux : on considère une variété M ayant une k-homologie non triviale.

Q 1 : *a-t-on une inégalité* $\mathrm{Vol}^{k/d}(g)/Sys_k(g) \geq$ *constante positive et valable pour toute* g *sur* M?

Q 2 : *quelle est la meilleure constante possible*?

Q 3 : *est-elle atteinte et, si oui, étudier les* g *et les cycles correspondants.*

Remarquons d'abord que la question n'a pas de sens en trop grande généralité. L'exemple de base est le produit de deux sphères $M = S^k \times S^h$ avec $d = k + h$ et $k \neq h$. En effet, considérons sur M des métriques produit $g = (g', g'')$: la k-systole de M vaudra $\mathrm{Vol}(S^k, g')$ tandis que $\mathrm{Vol}(M) = \mathrm{Vol}(S^k) \times \mathrm{Vol}(S^h)$ et il n'y a qu'à prendre des (S^h, g'') de volume très petit en gardant $\mathrm{Vol}(S^k, g')$ fixe pour avoir un rapport dans Q 1 aussi petit que l'on veut.

La philosophie de cet exemple est importante : les choses ne peuvent pas marcher parce que la classe fondamentale de $M^k \times M^h$ n'est pas "engendrée" par la topologie de dimension k ($k \neq h$!). Par contre la question se pose pour une question de type Q 1, mais portant sur le rapport ci-dessous :

$$\text{Q 4 : } \frac{\mathrm{Vol}(g)}{Sys_k(g) \times Sys_h(g)} \geq \text{constante positive.}$$

Les questions ci-dessus semblent aussi raisonnables et pour une seule systole au dénominateur, pour :

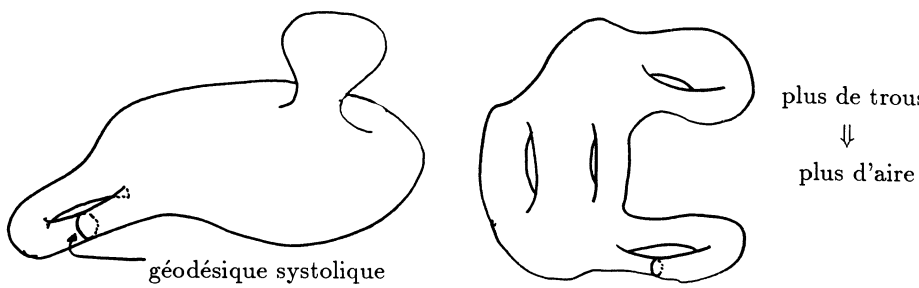
- les tores (toutes d et tous k)
- les quotients compacts des espaces hyperboliques (toutes d et tous k), ce qui comprend en particulier toutes les surfaces compactes ($d = 2$ et $k = 1$)
- les produits $M^k \times \cdots \times M^k$ pour $d = pk$ et Sys_k
- les $\mathbf{K}P^n$ pour tous $\mathbf{K}$, tous n et tous k multiples entiers de la dimension réelle du corps $\mathbf{K}$.

Et pour plusieurs systoles au dénominateur, toutes les variétés produits. Mais on peut aussi étudier les quotients du type Q 4 ci-dessus pour les $\mathbf{K}P^n$ avec les indices de systoles convenables.

Dans la suite, nous allons donner ce qui nous semble être les résultats principaux obtenus jusqu'à ce jour pour ce programme. Nous ne serons pas exhaustifs et nous renvoyons le lecteur à (Gromov 1983 ; Gromov 1992 b ; Gromov 1993). À part quelques cas très simples, nous ne pourrons donner aucune démonstration, celles-ci étant à la fois très profondes et très techniques.

4. LE CAS DES SURFACES $d = 2$ ET $k = 1$

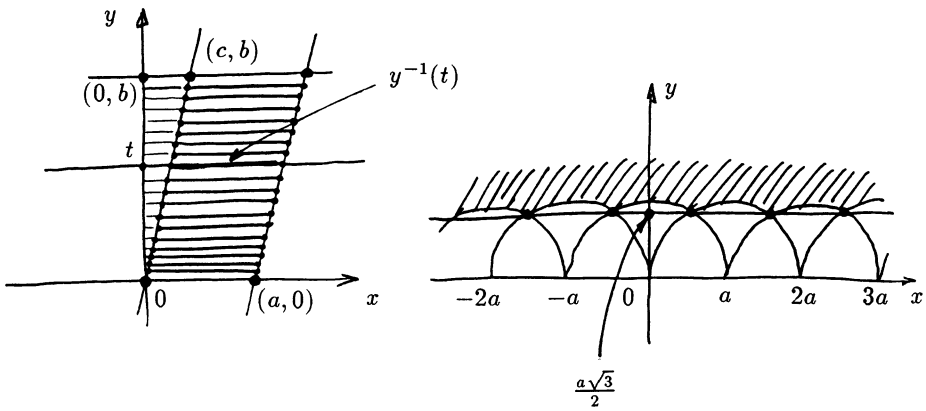
A. Le cas du tore



Le dessin ci-dessus montre qu'il est assez intuitif d'espérer, au moins pour les métriques plongées dans $\mathbf{R}^3$, une inégalité du type Q 1 pour le tore T^2. En fait, on a un résultat optimal pour Q 1, Q 2 et Q 3 et qui semble avoir été le premier du domaine qui nous intéresse :

THÉORÈME (Loewer, 1949, non publié).— *Pour toute métrique riemannienne g sur le tore T^2, on a* $\text{Aire}(g)/Sys^2(g) \geq \sqrt{3}/2$ *et l'égalité a lieu si et seulement si (T^2, g) est un tore plat équilatéral.*

On utilise la représentation conforme : il existe toujours sur T^2 une structure plate g_0 telle que $g = f \cdot g_0$ pour une fonction f convenable.



On choisit, pour engendrer le réseau définissant le tore Λ, deux vecteurs $(a, 0)$ et (c, b), où le vecteur $(a, 0)$ est de longueur minima. On considère la bande de courbes fermées figurant sur le dessin, courbes qui réalisent la systole de g_0. Ce sont de bonnes candidates pour travailler : on va faire la moyenne de leur longueur, cette fois-ci pour $f \cdot g_0$, en remarquant que chacune de ces courbes a, par définition, une longueur supérieure ou égale à $Sys(g)$:

$$\int_0^b \text{long}(y^{-1}(t))dt = \int_0^b \int_0^a f^{\frac{1}{2}}\, dt\, dx > b \cdot Sys(g).$$

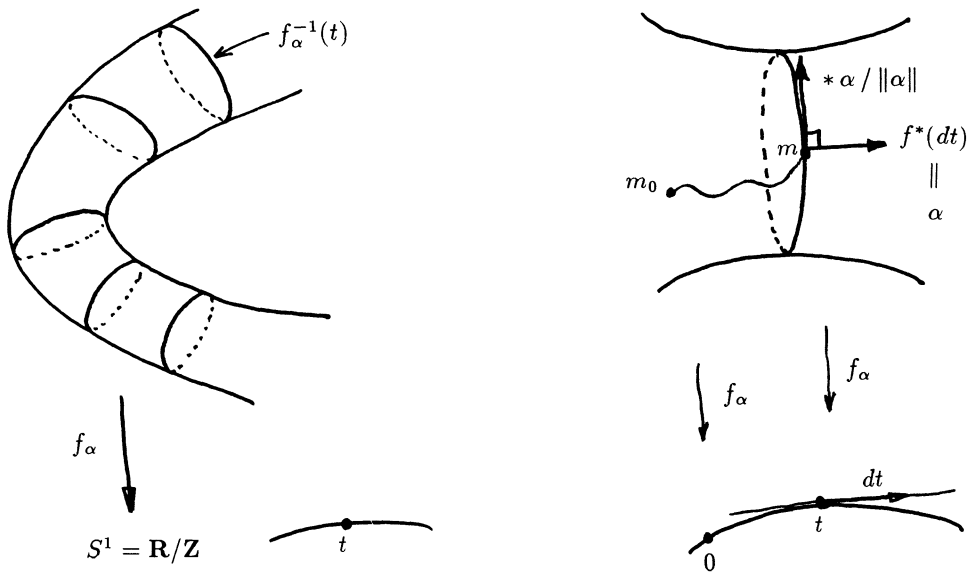
Puisque l'on a $\text{Aire}(g) = \int_0^a \int_0^b f\, dx\, dt$, l'inégalité de Schwarz fournit $\text{Aire}(g)/Sys^2(g) \geq \frac{b}{a}$. Par le choix de a et le dessin, on voit que $b \geq a\frac{\sqrt{3}}{2}$ et que l'égalité a lieu seulement pour le tore équilatéral.

B. Le cas des surfaces de genre plus grand : l'échec de la théorie classique

Les dessins ci-dessus semblent montrer que l'on peut espérer pour les surfaces compactes *orientables* une inégalité du type Q 1, mais avec en outre une constante qui devrait augmenter avec le genre γ (le nombre de trous) de la surface en question. En fait, cet espoir n'est pas complètement dans les nuages, puisque la théorie de la représentation conforme s'applique toujours à de telles surfaces.

C'est cette représentation conforme qu'ont utilisée Accola et Blatter indépendamment l'un

de l'autre dans les années 60 : (Accola 1960), (Blatter 1961). Voici, un peu nettoyé, ce qu'ils ont obtenu. Il est plus simple de ne retenir de la représentation conforme que les formes harmoniques (théorie de Hodge). Ici donc M est une surface compacte orientable de genre γ munie d'une métrique riemannienne g. Pour remplacer la bande de courbes utilisée plus haut dans le cas du tore, il faut trouver une famille de courbes non homologues à zéro et estimer leurs longueurs. Pour ce faire, on considère une 1-forme différentielle fermée α qui soit à périodes entières. Fixant un point m_0 de M, on fabrique une application $f_\alpha : M \to S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ en intégrant α le long d'un chemin quelconque joignant m_0 à m. En effet, l'image dans $\mathbf{R}$ ne dépend pas du chemin choisi lorsqu'on le bouge un peu parce que α est fermée et si l'on bouge beaucoup le chemin, le résultat sera à prendre modulo les entiers, parce que α est à périodes entières.



Si en outre α n'est pas une différentielle exacte, alors toutes les images inverses $f_\alpha^{-1}(t)$ seront non homologues à zéro et donc de longueur supérieure ou égale à $Sys(g)$. Calculons donc la valeur moyenne de la longueur des courbes $f_\alpha^{-1}(t)$ pour t parcourant S^1. On a seulement à remarquer que l'élément de longueur le long de la courbe $f_\alpha^{-1}(t)$ est $*\alpha/\|\alpha\|$ tandis que l'élément d'aire de g est $(*\alpha \wedge \alpha)/\|\alpha\|^2$: ici on a désigné, selon l'usage, par $*\alpha$ la 1-forme adjointe de α, c'est-à-dire ici celle déduite de α par rotation de $+\frac{\pi}{2}$ pour g. On a donc via l'inégalité de Schwarz :

$$Sys(g) \leq \int_{S^1} \operatorname{long}(f_\alpha^{-1}(t))dt = \int_{S^1} \int_{f_\alpha^{-1}(t)} \frac{*\alpha \wedge \alpha}{\|\alpha\|} = \int_M \frac{*\alpha \wedge \alpha}{\|\alpha\|} \leq \text{Aire}^{\frac{1}{2}} \cdot N(\alpha),$$

où

$$N^2(\alpha) = \int_M *\alpha \wedge \alpha \quad \text{est la norme } L^2 \text{ de la 1-forme } \alpha.$$

Finalement

$$\frac{\text{Aire}(g)}{Sys^2(g)} \geq \frac{1}{N^2(\alpha)}.$$

Puisque ce qui précède est valable pour toute telle α, pour gagner il suffit donc d'être sûrs de pouvoir trouver, parmi les formes α considérées, une qui soit de norme $N(\alpha)$ assez petite. Ces α parcourent la cohomologie entière $H^1(M;\mathbf{Z})\backslash 0$ non nulle de M qui est de dimension réelle égale au double 2γ du genre de M. En outre, dans une classe donnée, le minimum de $N(\alpha)$ est atteint exactement par la 1-forme harmonique correspondante. L'espace des 1-formes harmoniques est un espace euclidien $\mathcal{H}^1(M;g)$ de dimension réelle 2γ, espace dans lequel les formes entières forment un réseau Λ.

La topologie des surfaces compactes montre que le réseau Λ est toujours de déterminant égal à 1. D'après les propriétés de théorie géométrique des nombres rappelés en 2.A sur les 1-systoles des tores plats, on voit donc que, prenant d'abord des formes α harmoniques pour minimiser $N(\alpha)$, le mieux que l'on puisse espérer en toute généralité est (Accola et Blatter) :

quelle que soit (M,g) de genre γ, et pour toute métrique riemannienne g sur elle, on a toujours

$$\frac{\text{Aire}(g)}{Sys^2(g)} \geq * \frac{1}{\gamma}.$$

On peut donc considérer ce résultat comme un échec (relatif) : en effet, nous tenons ferme à notre intuition que la constante obtenue doit grandir avec le genre (alias le nombre de trous). C'est l'un des rares cas où, pour étudier les surfaces, la méthode classique (usage de la représentation conforme, etc.) est un échec. Nous allons voir que, au contraire, ce sont des techniques de géométrie pure, plus ou moins sophistiquées, qui permettent de gagner.

C. Les résultats de Gromov

Gromov a démontré des résultats à deux niveaux. Le premier est :

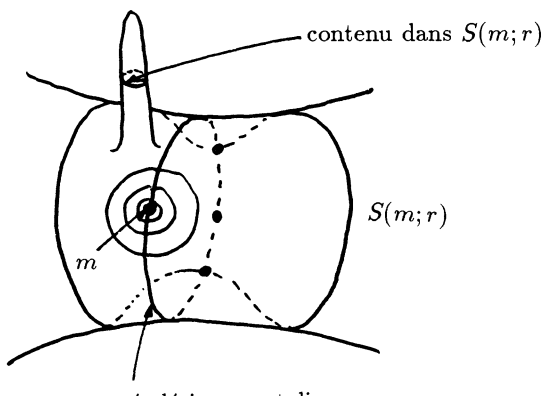
THÉORÈME ((Gromov 1983), p. 50).— *Pour une surface de genre γ et pour toute métrique riemannienne g sur elle, on a toujours*

$$\frac{\text{Aire}(g)}{Sys^2(g)} \geq * \gamma^{\frac{1}{2}}.$$

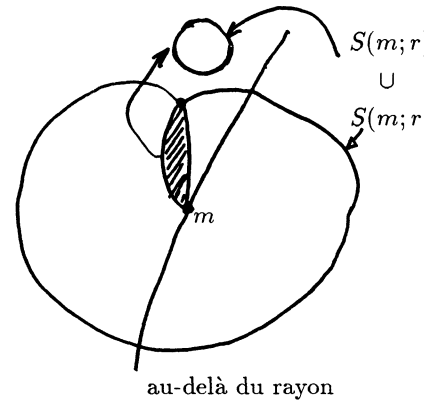
Ce premier niveau est accessible et consiste à partir du "truc de Hebda" (Hebda 1982). On désigne par c une plus petite géodésique périodique non homologue à zéro et par un point quelconque $m \in c$. Alors le disque métrique $B(m; Sys(g)/2)$ possède une aire vérifiant :

$$\text{Aire}(B(m; Sys(g)/2) \geq \frac{1}{2} Sys^2(g).$$

L'idée est de calculer cette aire du disque comme intégrale de la longueur des cercles métriques $S(m;r)$ pour r allant de 0 à $Sys(g)/2$. La définition de la systole et le choix de la géodésique périodique c montrent que chacun de ces cercles a une longueur $\geq 4r$ parce qu'il est composé de deux morceaux chacun de longueur $\geq 2r$. On fera bien attention à ce que ce raisonnement n'est pas entièrement trivial lorsque r dépasse le rayon d'injectivité de g, c'est-à-dire lorsque l'application exponentielle de (M, g) en m et restreinte à la boule euclidienne de rayon r dans T_{mM} n'est plus nécessairement un difféomorphisme.



géodésique systolique



au-delà du rayon d'injectivité en m

Hebda démontrait donc ainsi que l'on a toujours, quel que soit le genre : $\text{Aire}(g)/Sys^2(g) \geq *$. Pour aller plus loin, Gromov introduit un ensemble de 2γ géodésiques périodiques constituant une base convenable de l'homologie de M et les recouvre avec des boules qui soient toutes justiciables du truc de Hebda. Si le nombre de ces boules est N, la construction est telle que $N(N-1)/2 \geq \gamma$. Ceci fournit bien finalement une constante en $\gamma^{1/2}$.

Le second théorème est :

THÉORÈME ((Gromov 1992 b), section 2.C).— *Pour une surface de genre γ et pour toute métrique riemannienne g sur elle, on a toujours*

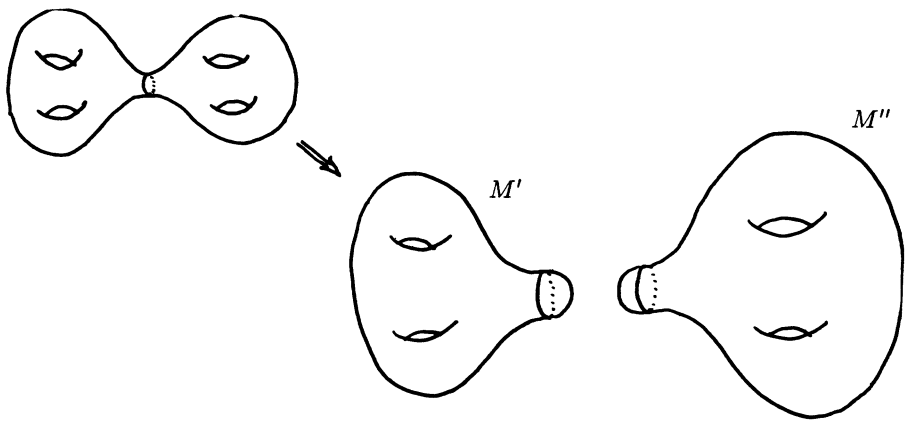
$$\frac{\text{Aire}(g)}{Sys^2(g)} \geq * \frac{\gamma}{\log^2 \gamma}.$$

Ce résultat est d'un tout autre niveau de profondeur et de difficulté. En fait, il est assez simple une fois connu le résultat analogue mais pour la *systole homotopique* Sys_π : celle-ci est la borne inférieure des courbes fermées non contractiles, *i.e.* non homotopes à zéro dans la surface considérée. Dans (Gromov 1983), 6.4.D' (à corriger avec la section 2.C de (Gromov 1992 b)), Gromov démontre le :

THÉORÈME.— *Pour une surface de genre γ et pour toute métrique riemannienne g sur elle, on a toujours*

$$\frac{\text{Aire}(g)}{Sys_\pi^2(g)} \geq * \frac{\gamma}{\log^2 \gamma}.$$

Ce théorème est optimal (Gromov, à paraître).



Passer de la systole homotopique Sys_π à la systole homologique Sys n'est pas trop difficile et fait dans (Gromov 1992 b), section 2.C. On procède par récurrence sur le genre. On considère une courbe réalisant la systole homotopique : si elle divise la surface en deux surfaces M' et M'', on ferme chacune de ces surfaces par des hémisphères d'équateur la géodésique périodique donnant la systole. À chacune de ces surfaces (de genre plus petit que γ), on applique l'hypothèse de récurrence, ce qui est possible parce que la quantité $\frac{\gamma}{\log^2 \gamma}$ se comporte bien additivement. Le départ de la récurrence est assuré précisément par le théorème de Loewner, puisqu'alors homologie et homotopie coïncident. Reste donc à démontrer le résultat pour la systole homotopique.

C'est ce résultat qui est extrêmement difficile et nécessite une connaissance approfondie de la première moitié de (Gromov 1983). Il y faut la technique du "filling", qui est aussi à la base de la démonstration du théorème de la section 5.A ci-dessous.

On se sert d'abord de la notion de *volume simplicial, noté* $\|M\|$, pour la surface M. Une excellente référence pour cet invariant est (Benedetti and Petronio 1992) où d'ailleurs le volume simplicial est appelé *norme de Gromov*. Pour les surfaces de genre γ, il vaut exactement $4(\gamma - 1)$.

Rappelons que ce volume (aire pour les surfaces !) simplicial est la borne inférieure de la somme des valeurs absolues des coefficients r_i pour les représentations de la classe fondamentale de M comme un cycle *réel* $\sum_i r_i c_i$. On sait donc d'une part que pour notre surface de genre donné, $\sum_i |r_i|$ ne peut pas être trop petit. D'autre part, si nous partons d'un cycle $\sum_i r_i c_i$ représentant la classe fondamentale de M : on a $\text{Aire}(g) = \sum_i |r_i| \,\text{Aire}(c_i)$. L'idée est de trouver une telle écriture de telle sorte que les c_i aient des aires toutes assez grandes. Si l'on pouvait appliquer à chaque c_i le truc de Hebda, on trouverait pour ces aires une borne inférieure en $* \, Sys^2(g)$. Malheureusement, les choses sont loin d'être aussi simples et d'ailleurs ne peuvent pas l'être vu l'optimalité du résultat. Gromov utilise une opération très technique qu'il appelle *diffusion* et fait sur elle des calculs difficiles, le tout fonctionnant sur le revêtement universel de (M, g) et basé en outre sur les résultats de la technique du "filling".

Le résultat de cette diffusion fournit, pour l'ensemble de la chaîne diffusée, un résultat final de la forme :

$$\sum_i |r_i| \leq * \frac{\text{Aire}(g)}{Sys^2(g)} \left(\log \frac{\text{Aire}(g)}{Sys^2(g)} \right)^2 ,$$

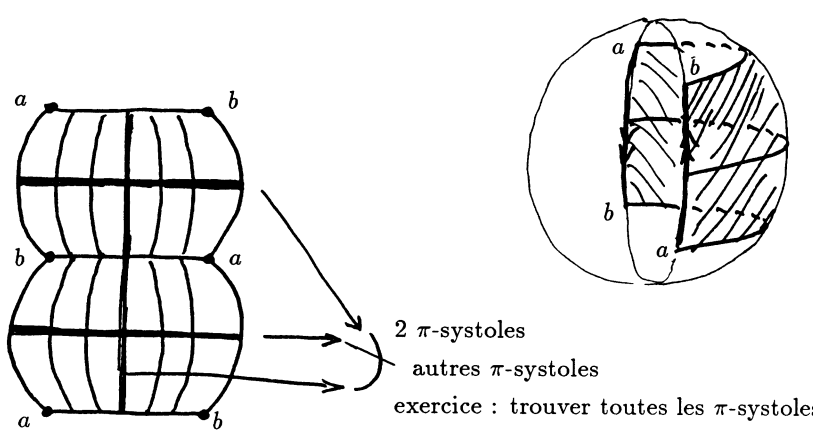
ce qui suffit pour le théorème annoncé, vue la valeur de $\|M\|$. Pour tout ceci, nous renvoyons le lecteur à la section 6 de (Gromov 1983).

D. Pot-pourri

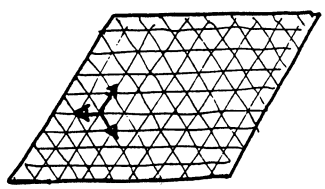
Pour le lecteur trop curieux pour avoir la patience de se reporter aux textes fondateurs, nous citons rapidement les réponses connues ou ouvertes aux questions naturelles qu'il serait en droit de se poser.

D'abord les résultats ci-dessus pour un genre quelconque restent valables sans modification d'énoncé pour les surfaces non orientables. Ceci ne présente pas de difficulté supplémentaire : voir (Gromov 1992 b).

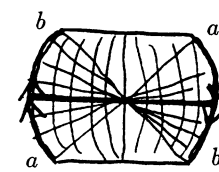
En genre petit, pour le projectif réel et la bouteille de Klein, les questions Q 1, Q 2, Q 3 sont complètement résolues. Pour le projectif réel RP^2, la borne inférieure optimale est celle de la métrique standard et atteinte seulement pour elle : (Pu 1952) (on gagne avec la représentation conforme et le groupe de Möbius). Pour la bouteille de Klein, c'est l'occasion de réaliser la difficulté du problème des systoles : la meilleure borne n'est pas obtenue pour la bouteille de Klein plate carrée, mais cette borne est connue. Elle n'est jamais atteinte pour une métrique riemannienne au sens "lisse" mais correspond à une bouteille de Klein ayant une singularité le long d'une courbe fermée. On l'obtient en recollant le long de leur courbe frontière deux copies d'un ruban de Möbius obtenu comme quotient par l'antipodie de la partie de la sphère standard qui est celle des latitudes variant de -45° à +45° : (Bavard 1988) et voir aussi (Gromov 1992 b), section 2.C, remark b.



Ce sont les seules surfaces pour lesquelles on ait actuellement mieux que les résultats généraux de Gromov. En particulier, le premier cas qui se pose est celui de la surface de genre *deux*. Le lecteur pourra d'abord se convaincre lui-même que les métriques à courbure négative constante ne sont jamais optimales. En fait, le raisonnement qui vient d'être laissé au lecteur montre, sans trop de peine, qu'une métrique optimale sur une surface quelconque doit être telle que, par chaque point, il passe au moins deux géodésiques périodiques, réalisant la systole. Vérifiez que c'est bien le cas pour le tore plat équilatéral, le projectif réel standard et la bouteille de Klein optimale qui vient d'être décrite.



les trois bandes du tore plat équilatéral,
elles se coupent à 3 fois $\frac{2\pi}{3}$



identifiez  avec 

La situation actuelle est la suivante. Dans (Gromov 1983), section 5, on trouvera un théorème d'existence d'une métrique extrémale. Mais ces métriques sont très sauvages. Calabi, dans (Calabi 1993), a étudié les métriques extrémales, supposées être assez lisses par morceaux. Le calcul des variations fournit une équation du genre Monge-Ampère, mais plus délicate. On pourra aussi consulter (Bryant 1994). Quoi qu'il en soit, il est probable que les métriques extrémales présentent (en genre supérieur ou égal à 2) à la fois des régions à courbure positive, des régions à courbure nulle et des régions à courbure négative. Et soient, en fin de compte, des objets extrêmement complexes.

5. LE CAS DES DIMENSIONS d PLUS GRANDES QUE 2 MAIS TOUJOURS POUR LES 1-SYSTOLES

A. Le résultat de Gromov

Nous avons vu en 3 que la question n'avait de sens que pour les variétés telles que leur 1-cohomologie "engendre" la classe fondamentale. Et que, en outre, les candidats naturels étaient les tores, les quotients hyperboliques compacts et les projectifs réels. Aucun résultat n'apparut sur le sujet avant (Gromov 1983). Dans ce texte, on trouve le résultat fondamental suivant, mais valable seulement pour la systole *homotypique* Sys_π :

THÉORÈME.— *Pour toute variété* essentielle *de dimension d et pour toute métrique riemannienne g sur une telle variété, on a toujours* $\frac{\mathrm{Vol}(g)}{Sys^d_\pi(g)} > *(d)$.

La définition des variétés essentielles se fait en deux temps. Dans le premier, on définit (on rappelle ce que sont) les variétés *asphériques* : ce sont celles qui sont revêtues par un espace contractile ou, ce qui revient au même, celles dont tous les groupes d'homotopie sont nuls après la dimension 1. Les variétés essentielles sont celles qui admettent une application dans une variété asphérique telle que l'image de leur classe fondamentale, au niveau de l'homologie, ne soit pas nulle. Tous les condidats cités plus haut sont essentiels. C'est évident pour les tores et les quotients hyperboliques compacts. Par contre, pour le projectif réel, il faudra le plonger dans $\mathbf{R}P^\infty$, qui est bien asphérique et de groupe fondamental $\mathbf{Z}^2$ mais de dimension infinie. On en a aussi beaucoup d'autres, parce que la somme connexe de n'importe quelle variété avec une variété essentielle reste essentielle.

On remarquera que cette notion de variété essentielle est beaucoup plus restrictive que celle qui consiste seulement à demander que, via la dualité de Poincaré, la 1-homologie engendre la classe fondamentale. Dès que le groupe fondamental est égal à son commutateur, la 1-homologie est nulle et donc il n'y a même pas du tout de systole. Ceci peut arriver même pour des quotients hyperboliques compacts.

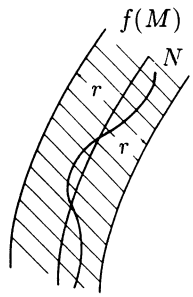
Voici brièvement les points clefs de la démonstration, dont la maîtrise totale est pour les happy few. On plonge (M, g) dans l'espace de Banach $C^{born}(M) = \mathbf{C}(M)$, formé par toutes les fonctions bornées sur M : à l'aide de la métrique par l'application $f : m \to d(m, \cdot)$ où d est la fonction distance sur (M, g). La propriété essentielle de cette application est

d'être une *isométrie*, non pas comme au sens commun du plongement des variétés riemanniennes dans les $\mathbf{R}^N$, mais vraiment pour la métrique induite, c'est-à-dire que $d_{(M,g)}(m,n) = d_{\mathbf{C}(M)}(f(m), f(n))$ pour tous les m, n dans (M, g). C'est bien pour avoir une telle propriété qu'il faut aller en dimension infinie.

Cependant, on continue à voir les choses, pour aider l'intuition, comme si l'on était en dimension finie. On considère la sous-variété $f(M)$ de $\mathbf{C}(M)$. L'idée centrale est d'introduire la notion de *rayon de remplissage* $RR(f(M))$ (filling radius). C'est le nombre réel r le plus petit possible tel que $f(M)$ soit un bord dans le sous-ensemble de $\mathbf{C}(M)$ formé des points de $f(M)$ qui sont à une distance de $f(M)$ pas plus grande que r. On conjugue maintenant les deux résultats suivants.

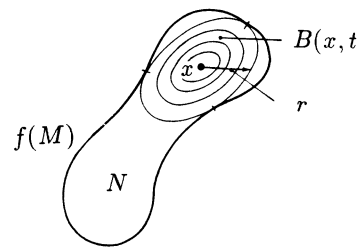
D'abord, pour toute variété M quelconque (essentielle ou non), on a toujours l'inégalité :

$$\mathrm{Vol}(g) > *(d)\,(RR(f(M))^d.$$



$B(f(M), r)$

ici $f(M)$ n'est pas un bord dans $B(f(M), r)$

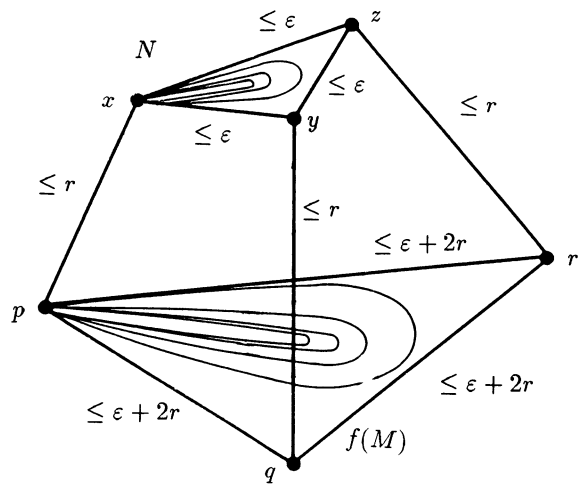


ici $f(M)$ est un bord dans $B(f(M), r)$

Il faut effectuer un certain travail technique, mais l'idée est de remplir, dans $\mathbf{C}(M)$, la sous-variété $f(M)$ considérée comme un bord, par une sous-variété *minimale* N. Maintenant, d'abord il existe dans cette N un point x qui est à une distance de chaque point du bord $f(M)$ au moins égale à $r = RR(f(M))$; on peut donc remplir N par des sphères successives de rayons allant de 0 à au moins r. Puis, comme N est minimale, le volume de ces sphères croît suffisamment vite ; finalement, le volume total de N est au moins égal à celui de la boule de rayon r dans N, donc est supérieur ou égal à $*(d)\, r^{d+1}$. Mais maintenant $\mathrm{Vol}(g) = \mathrm{Vol}(f(M)) \geq *(d)\, \mathrm{Vol}^{d/d+1}(N)$ à cause de l'inégalité isopérimétrique pour les sous-variétés minima à bords.

On utilise maintenant le fait que M est essentielle pour voir que :

$$r \geq \frac{1}{6}\, Sys(g).$$



On procède par contradiction : pour toute M et si $r < \frac{1}{6}\, Sys(g)$, on peut d'abord rétracter N sur $f(M)$ au niveau du 2-squelette comme suit : on prend une triangulation de N par des simplexes dont toutes les arêtes soient plus petites que $\varepsilon = \frac{1}{6}\,(Sys(g) - r)$. Pour tout triangle concerné (x, y, z) de N, on choisit des points (p, q, r) dans $f(M)$ à distance $\leq r$. Puisque $f(M)$ est vraiment isométrique à M, le périmètre de (p, q, r) sera inférieur à $3(2\varepsilon + r) < Sys(g)$. C'est dire, par définition de $Sys(g)$, que la courbe fermée que constitue le périmètre de (p, q, r) est contractible dans M. Cette contraction s'étend (on est dans un espace vectoriel) en une contraction du triangle (x, y, z). Et comme M est essentielle, on en déduit que N se rétracte sur $f(M)$, contredisant ainsi la définition de $r = RR(f(M))$.

B. Pot-pourri

On trouvera dans (Gromov 1983 ; Gromov 1992 b) différents résultats précisant le théorème précédent, en particulier des améliorations de la constante $*(d)$ qui y figure lorsque l'on sait plus de choses sur M, par exemple sur ses nombres de Betti. Mais comme (aujourd'hui !) on sait seulement que $*(d)$ est de l'ordre de "au moins" $\frac{1}{d^{d^2}}$, la complainte ci-dessous reste justifiée.

Mais il y a surtout la question de remplacer la systole homotopique par la systole homologique lorsque l'on sait que la 1-homologie engendre la classe fondamentale. Évidemment si H_1 et π_1 coïncident, c'est terminé, par exemple pour les tores. À notre connaissance, il n'existe aucun résultat actuellement pour de telles variétés lorsque π_1 est différent de H_1.

5 $\frac{1}{2}$. COMPLAINTE DES SYSTOLES

Voici la triple complainte des systoles :

Pour les 1-systoles et les dimensions plus grandes que 2, on ne connaît aucune variété pour laquelle on aurait une réponse à Q 2 (puis Q 3). Ceci que ce soit pour la systole homotopique ou pour la systole homologique. C'est ainsi que, dès le tore T^3 et le projectif réel $\mathbf{R}P^3$, on n'a pas la moindre idée si oui ou non la meilleure constante correspond, pour le tore, à la métrique plate la plus serrée, pour le projectif réel à la structure standard.

Comme dit plus haut, on n'a pas de résultat général pour la 1-systole homologique.

Pour les k-systoles, avec n'importe quel $k > 1$ et quelles que soient les variétés considérées, il est probable (voir la section suivante) qu'il ne peut exister aucun résultat général (que ce soit de type Q 1 ou Q 4), c'est-à-dire valable pour toute métrique riemannienne sur une telle variété.

Les seuls résultats partiels connus sont, à notre connaissance, d'abord un résultat sur $\mathbf{C}P^2$ s'appliquant à toute g suffisamment voisine de la standard et qui dit que :

$$\frac{\mathrm{Vol}(g)}{Sys_2(g)} \geq \frac{\frac{\pi^2}{2}}{\pi^2}$$

qui est la valeur pour la métrique standard ; en outre, cette valeur n'est atteinte, à l'intérieur des métriques spéciales considérées, que si ces métriques sont ce que Gromov appelle quasi-kählériennes : voir (Gromov 1992 b), section 4.A. La démonstration est très chère : elle n'utilise rien moins que la théorie de Hodge, celle des courbes pseudo-holomorphes de Gromov et enfin l'existence d'une transformation de Radon valable sur $\mathbf{C}P^2$ pour toute métrique voisine assez de la standard

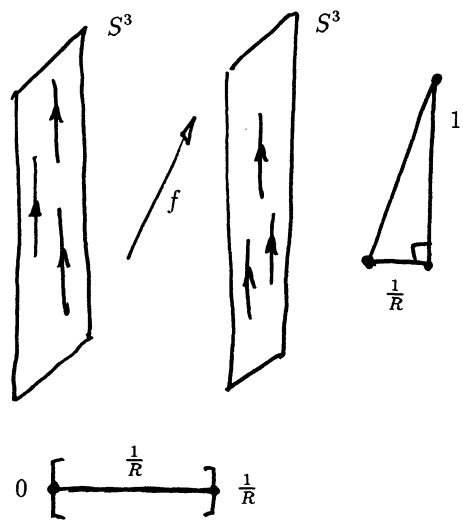
et portant sur la famille des courbes pseudo-holomorphes, famille qui généralise à de telles métriques la famille de toutes les droites projectives de $\mathbf{C}P^2$.

On verra ensuite dans 6.B que les systoles paires sont accessibles dans le cas restreint des métriques kälhériennes.

Voir aussi les systoles stables dans la dernière section.

6. LES CONTRE-EXEMPLES DE GROMOV

Gromov est actuellement en train de construire des contre-exemples (voir (Gromov 1993)) et il semble fort possible que, dès qu'une 2-au moins systole est en jeu, alors toute inégalité générale soit impossible, ceci quelle que soit la variété considérée. Nous présentons ici les premiers contre-exemples obtenus.



Le premier est $S^1 \times S^3$. Pour tout réel R, on considère la sphère S^3 de rayon R et l'intervalle $[0, \frac{1}{R}]$. Sur S^3, on considère l'isométrie f consistant à faire tourner chaque fibre de Hopf d'une longueur égale à 1. Enfin on considère sur $S^1 \times S^3$ la métrique g obtenue en recollant les deux extrémités de $S^3 \times [0, \frac{1}{R}]$ à l'aide de l'isométrie f. Le théorème de Pythagore montre que la 1-systole vaut $(1 + \frac{1}{R^2})^{\frac{1}{2}}$. La valeur de la 3-systole est R^3, ceci est laissé au lecteur en exercice. Comme le volume total vaut $R^3 \times R^{-1} = R^2$, le rapport $\mathrm{Vol}(g)/Sys_1(g) \times Sys_3(g)$ tend vers

zéro quand R tend vers l'infini.

Cette méthode ne marche pas pour $S^2 \times S^1$ parce que S^2 ne possède pas d'isométries sans point fixe et homotope à l'identité. La question Q 4 est ouverte aujourd'hui pour $S^2 \times S^1$.

On reprend maintenant le contre-exemple ci-dessus pour $S^3 \times S^1$ et on en fait le produit par la sphère S^2 de rayon $R^{-\frac{3}{2}}$. On obtient ainsi sur $S^3 \times S^1 \times S^2$ des métriques avec $Sys_1 > 1$ et $Sys_5 > 1$ tandis que le volume est aussi petit que l'on veut.

Puis sur l'exemple ci-dessus, on pratique le long d'une fibre $S^1 \times S^2$ une chirurgie convenable pour en faire $S^1 \times S^5$. Si l'on est assez soigneux pour la métrique lors de la chirurgie, on trouve ainsi sur $S^1 \times S^5$ des métriques à volume aussi petit que l'on veut avec toujours $Sys_1 > 1$ et $Sys_5 > 1$.

Enfin on fait le produit de l'exemple précédent par la sphère S^4 de rayon égal à 1. Une chirurgie métrique convenable le long d'une fibre $S^5 \times S^1$ le transforme en une métrique sur $S^5 \times S^5$ à volume aussi petit que l'on veut tandis que toujours $Sys_5 > 1$.

Pour l'instant, et pour les $S^k \times S^k$ avec k plus petit que 5, on devra se contenter des systoles stables, introduites plus bas dans la section 8.

7. LES SYSTOLES SE VENGENT DE LEURS ÉCHECS

A. Caractériser les jacobiennes parmi les tores plats

Parmi les tores plats, on en trouve de spéciaux, les jacobiennes des surfaces riemanniennes. Rappelons brièvement ce qu'elles sont. On part d'une surface compacte orientée M de genre γ, que l'on munit d'une métrique riemannienne g. En fait, la seule chose qui va être nécessaire pour définir sa *jacobienne, notée* $J(M)$, c'est la structure conforme de (M, g), c'est-à-dire la seule donnée de la rotation de $+\frac{\pi}{2}$. Mais cette fois-ci, au lieu de considérer une seule forme α à périodes entières, on les considère toutes ensemble. Comme elles ont une base de cardinal 2γ, on voit que l'on arrive dans le tore $T^{2\gamma} = (S^1)^{2\gamma}$. Mais il faut préciser comment le faire de façon intrinsèque. Voici une façon : les applications f_α dans 4.B sont linéaires en α, donc on obtient une forme linéaire sur $H^1(M; \mathbf{R})$ qui fournit, grâce à la dualité de Poincaré, un élément de $H_1(M; \mathbf{R})$. Finalement, l'application obtenue est dans

le tore plat égal au quotient $\frac{H_1(M;\mathbf{R})}{H_1(M;\mathbf{Z})} = J(M)$. Elle n'est évidemment définie qu'à une translation près.

Mais il faut maintenant aussi définir sur $H_1(M;\mathbf{R})$ une structure euclidienne. Pour nous, en vue de 4.B, le plus simple est de l'identifier avec $H^1(M;\mathbf{R})$ et d'identifier $H^1(M;\mathbf{R})$ avec l'espace $\mathcal{H}^1(M)$ des formes harmoniques sur M (ces formes harmoniques ne dépendent que de la structure conforme), espace où la norme euclidienne est celle notée N en 4.B. Et, dans cet espace vectoriel réel, on trouve le réseau $\Lambda = \mathcal{H}^1(M;\mathbf{Z})$ des formes harmoniques à périodes entières. Rappelons encore une fois que ces réseaux sont toujours (pour les surfaces) de déterminant égal à 1.

En résumé, à chaque surface orientable M, de genre γ et munie d'une structure conforme, est associé un tore plat $(T^{2\gamma};\Lambda)$ et un plongement (canonique à une translation près) $f : M \to T^{2\gamma}$. Comme on le verra amplement bientôt, de tels réseaux Λ sont très particuliers. Les géomètres algébriques, entre autres, ont depuis longtemps recherché (et trouvé) des critères pour caractériser ces réseaux parmi l'ensemble de tous les réseaux de dimension 2γ. Ces critères sont toujours de l'ordre de la géométrie algébrique ou, à la rigueur, de l'algèbre. Les systoles vont nous donner des réponses géométriques particulièrement simples.

Le premier résultat est (Buser and Sarnak 1992) :

THÉORÈME.— *Quelle que soit la surface de genre γ et quelle que soit sa structure conforme, la 1-systole de sa jacobienne vérifie toujours :*

$$Sys < *(\log(\gamma+1))^{\frac{1}{2}}.$$

Comme on a vu en 2.A que, pour des réseaux de déterminant égal à 1, la 1-systole peut atteindre $\sqrt{\gamma}$, on voit ici un fort élément de distinction pour les jacobiennes. La démonstration de Buser et Sarnak est une belle construction géométrique d'un collier convenable.

Dans (Gromov 1992 b), Gromov va beaucoup plus loin, puisqu'il réussit à donner une *caractérisation* complète des jacobiennes par leurs $(2;2\gamma)$-systoles (voir la définition en 2.B), à savoir :

THÉORÈME.— *Pour tout tore plat de dimension 2γ et de déterminant égal à 1, on a $Sys_{2;2\gamma} \geq \gamma$ et l'égalité si et seulement si ce tore plat est une jacobienne*

ou une limite de jacobiennes.

Remarquer d'abord qu'il faut absolument prendre la $(2; 2\gamma)$-systole, parce que (déjà remarqué 2.B), pour caractériser une jacobienne en tant que tore plat, il faut y considérer des surfaces qui *s'étalent complètement dedans.*

Gromov donne deux démonstrations : la première utilisant de la géométrie algébrique ; la seconde est trop jolie pour être passée sous silence. On réalise la systole $(2; 2\gamma)$ par une surface minima S du tore $T^{2\gamma}$ considéré (on a vu, dans la section 1, que toute classe de 2-homologie est toujours réalisable par une surface). Sur S, les coordonnées "cycliques" du tore déterminent des fonctions harmoniques parce que S est minima ou encore, des 1-formes harmoniques, à savoir les différentielles de ces coordonnées. Comme ces mêmes formes harmoniques fournissent essentiellement l'application canonique de S dans sa jacobienne $J(S)$, on obtient finalement une application affine $m : J(S) \to T^{2\gamma}$.

Maintenant, ou S est de genre exactement γ, ou est de genre plus grand (elle ne peut pas être de genre plus petit de par la définition de la $(2; 2\gamma)$-systole en 2.B). Le cas de genre plus grand se traite à part et c'est lui qui fournit des limites de jacobiennes. Dans le cas de genre exactement γ, l'application m est un isomorphisme affine et on calcule la restriction à S de l'énergie de l'application affine obtenue $m : J(S) \to T^{2\gamma}$; c'est $\frac{1}{2}\,\mathrm{trace}(m'^{*}m')$ où m' désigne la différentielle de m. Mais, dans notre situation, les déterminants sont égaux à 1 à la fois pour $J(S)$ et pour $T^{2\gamma}$, ce qui force l'égalité $\det(m') = 1$. Enfin, l'aire de S est égale à l'énergie de m restreinte à S parce que, en dimension 2, énergie et aire coïncident pour les applications minima et conformes. L'inégalité de Newton implique donc l'inégalité demandée. Et s'il y a égalité, c'est que m' est l'identité, ce qu'il fallait démontrer.

En fait, il peut y avoir des singularités (*cf.* la section 1) mais ici, comme $k = 2$, les choses sont raisonnables, voir les remarques de la section 2.E de (Gromov 1992 b).

Remarque.— On trouvera dans (Gromov 1992 b) des considérations complémentaires sur les questions que soulèvent naturellement les deux résultats ci-dessus, en particulier les rapports avec le théorème de Matsusaka.

B. Mesurer le défaut de kählérianité d'une métrique riemannienne

Dans l'espace de toutes les métriques riemanniennes sur une variété compacte donnée M et dans le cas où M admet au moins une métrique riemannienne kählérienne, comment mesurer de façon géométrique simple, par un invariant le plus robuste possible, *combien loin des métriques kählériennes* se trouve une métrique g?

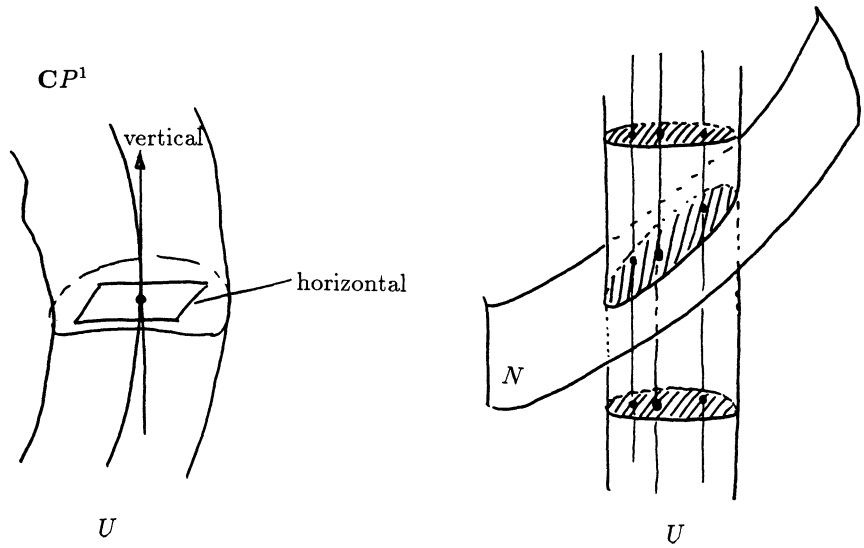
Dans (Gromov 1992 a ; Gromov 1992 b) on trouve une réponse à cette question, basée sur les systoles. Nous allons la donner dans le cas le plus simple, celui de $\mathbf{C}P^3$. Le cas général (mais l'idée de base est dans ce qui suit) et beaucoup d'autres choses sont à trouver dans ces deux références.

Lemme.— Pour toute métrique kählérienne sur $\mathbf{C}P^3$:

$$\frac{\mathrm{Vol}^2}{Sys_4^3} = \frac{\left(\frac{\pi^3}{3!}\right)^2}{\left(\frac{\pi^2}{2!}\right)^3}.$$

On travaille comme en 2.C : le calcul qui y est fait reste valable pour toute métrique kählérienne g sur $\mathbf{C}P^3$ parce que l'inégalité de Wirtinger est valable pour toute métrique kählérienne. Mais attention ! Il faudra, pour trouver toujours l'analogue d'une "droite projective complexe" dans cette métrique kählérienne "abstraite", utiliser le grand théorème de Hirzebruch-Kodaira-Yau qui dit que toutes les structures kählériennes sur $\mathbf{C}P^n$ (pour tout n) sont équivalentes au sens le plus fort : elles sont bi-holomorphes.

Et voici comment la 4-systole se venge maintenant (Gromov 1992 a ; Gromov 1992 b). On part de la métrique standard g sur $\mathbf{C}P^3$ et on considère un voisinage tubulaire quelconque U d'une droite projective D (par exemple $\mathbf{C}P^1$ si vous voulez). On modifie la métrique g en g_ε comme suit : sur U on peut écrire de façon naturelle $g = g_{hor} \oplus g_{ver}$ où la partie verticale est celle tangente à D. On pose $g_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\, g_{hor} \oplus \varepsilon^2\, g_{ver}$, ce qui ne change rien au volume total.



Maintenant le fibré normal de D dans $\mathbf{C}P^3$ est trivial (et ceci est très général, voir encore les références (Gromov 1992 a) et (Thom 1954)). Considérons une sous-variété N de dimension 4 de $\mathbf{C}P^3$ qui soit non-homologue à zéro et donc de la classe de $\mathbf{C}P^2$. Cela la force à rencontrer toute sous-variété homologue à $\mathbf{C}P^1$ et donc toutes les fibres du voisinage tubulaire U, puisque ce voisinage est un produit. Et comme une projection orthogonale ne peut que diminuer les volumes, on voit que le volume de N sera toujours supérieur au volume d'une section horizontale de U, soit une constante multipliée par ε^{-1}. En conclusion, pour ces g_ε, le rapport $\mathrm{Vol}^2(g_\varepsilon)/Sys_4^3(g_\varepsilon)$ peut être aussi petit que l'on veut. Ce rapport systolique est donc un scalaire qui mesure très bien le défaut de kählérianité.

On trouvera dans (Bourguignon and others 1993) une autre très belle estimation de la kählérianité : pour toute métrique kählérienne g sur $\mathbf{C}P^n$, de volume total égal à celui de $\frac{\pi^n}{n!}$ de la métrique standard, la première valeur propre non nulle du laplacien vérifie $\lambda_1 \leq 4(n+1)$, valeur qui est la valeur standard. Or (Colbois et Dodziuk 1993), on sait construire, sur toute variété compacte, des métriques de volume égal à 1 et de λ_1 aussi grande que l'on veut. Bien noter que λ_1 (à cause de sa caractérisation minimax) est un invariant C^0, donc idéalement robuste lui aussi.

8. POURQUOI LES SYSTOLES À $k > 1$ SONT INACCESSIBLES : LES SYSTOLES STABLES

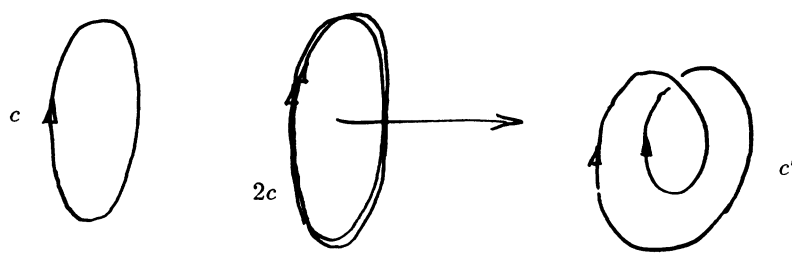
Pour les courbes et les 1-systoles, nous avons utilisé la représentation conforme, mais aussi dans 4.B (même si ce fut un échec) les 1-formes différentielles fermées, le théorème de Stokes et le théorème de de Rham, etc. C'est aussi le cas pour les métriques kählériennes. Bref on a pu *calculer*. Mais de tels calculs sont systématiquement voués à l'échec dès que k est plus grand que 1 parce qu'une k-forme alternée n'est pas, en général, décomposable.

On peut en échange utiliser les formes différentielles de degré quelconque, le théorème de Stokes et le théorème de de Rham mais il faut alors affaiblir la notion de systole en celle de *systole stable*. Voici, expliqué très vite, ce que l'on fait et qui figure en détail dans (Gromov and others 1981), chapitre 4.

Dans tout ce qui suit, on est comme toujours dans une variété riemannienne compacte $(M; g)$.

Une autre raison pour la difficulté qu'il y a à utiliser les formes différentielles est que celles-ci vivent plutôt dans la cohomologie réelle $H^k(M; \mathbf{R})$ que dans la cohomologie entière. Considérons l'accouplement $\int_a \omega$ entre une classe $a \in H_k(M; \mathbf{Z})$ et $\omega \in \eta \in H^k(M; \mathbf{R})$ et définissons une norme $\|a\|_{\mathbf{Z}} = \inf \{\mathrm{Vol}_k(N) : N \in a\}$. Le drame, découvert par Morse dès 1924, est que, en général :

$$\frac{1}{2} \|2N\|_{\mathbf{Z}} < \|N\|_{\mathbf{Z}}, \text{ etc.}$$



c' a une longueur inférieure au double de la longueur de c

Ce phénomène commence dès la dimension 1 : dans une variété riemannienne où $d > 2$, lorsque l'on prend une géodésique périodique c, il peut arriver que

la géodésique c parcourue deux fois admette des courbes voisines qui soient de longueur strictement plus petites que le double de la longueur de c. Et ainsi de suite : voir un exemple dû à Almgren dans (Federer 1974). On trouvera même dans (Lawson 1975) des exemples de classes d'homologie "non stables" pour les tores plats.

Si donc l'on définit, de façon évidente, la norme réelle $\|a\|_{\mathbf{R}}$ pour la classe a considérée comme un élément de $H_k(M;\mathbf{R})$, Federer a montré le fait essentiel (voir (Federer 1974) ou (Gromov and others 1981)) :

$$\|a\|_{\mathbf{R}} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \|ma\|_{\mathbf{Z}} \qquad (m \text{ entier positif}).$$

On est donc conduit à définir la *k-systole stable* $Stb\,Sys_k$ comme la plus petite des normes $\|a\|_{\mathbf{R}}$ des éléments non nuls de $H_k(M;\mathbf{R})$. Gromov démontre alors, grâce aux théorèmes précédents et en utilisant des inégalités "à la Wirtinger" ainsi que le calcul différentiel classique, un résultat général de la forme :

THÉORÈME.— *Dès que la classe duale de la classe fondamentale est un cup-produit convenable de classes de cohomologie de degrés inférieurs, alors il existe une inégalité systolique universelle pour le volume et les systoles stables correspondantes.*

Comme les cohomologies de $\mathbf{C}P^n$ sont toutes de dimension égale à 1, le résultat est particulièrement simple pour $\mathbf{C}P^n$ car on obtient alors les mêmes constantes que dans le cas kählérien. Prenons-en seulement un exemple : pour toute g sur $\mathbf{C}P^n$, on a toujours :

$$\frac{\mathrm{Vol}(g)}{Stb\,Sys_2^n(g)} \geq \frac{1}{n!}.$$

Un autre exemple plaisant : pour toute g sur le produit de n sphères $S^k \times \cdots \times S^k$, on a toujours :

$$\frac{\mathrm{Vol}(g)}{Stb\,Sys_k^n(g)} \geq *(k,n).$$

La constante en k et n obtenue correspond à des résultats de dualité en théorie des convexes. Il s'agit de minorer le produit du volume d'un convexe symétrique

par rapport à l'origine par le volume de son dual (appelé souvent aussi polaire). La meilleure valeur n'est pas connue dès que $k \geq 2$ et $n \geq 2$; c'est un problème très difficile de la théorie des convexes, ouvert en partie. Voir par exemple le résultat récent de (Bourgain and Milman 1987).

BIBLIOGRAPHIE

R. ACCOLA - *Differential and extremal lengths on Riemann surfaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **46** (1960), 540-543.

K. BALL - *A lower bound for the optimal density of lattice packings*, Duke Math. Journal **68** (1992), 217-222 in Research Notices.

C. BAVARD - *Inégalités isosystoliques conformes pour la bouteille de Klein*, Geometriae Dedicata (1988), 146-166.

R. BENEDETTI and C. PETRONIO - *Lectures on hyperbolic geometry*, Universitext, Springer, 1992.

M. BERGER - *Lecture on geodesics in Riemannian Geometry*, Tata Institute of Fundamental Research, 1965.

M. BERGER - *"Du côté de chez Pu"*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **5** (1972), 1-44.

M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET - *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1971.

A. BESSE - *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer, 1978.

C. BLATTER - *Über Extremallänge auf geschlossenen Flächen*, Comment. Math. Helvetici **35** (1961), 153-168.

J. BOURGAIN and V. MILMAN - *New volume ratio properties for convex symmetric bodies in* $\mathbf{R}^n$, Inventiones Math. **88** (1987), 319-340.

J.-P. BOURGUIGNON, P. LI and S.T. YAU - *Upper bound of the first eigenvalue for algebraic submanifolds*, à paraître (1993).

R. BRYANT - *On extremal graphs with specified Lagrangians* **in** Recent advances in differential geometry, Symposia Mathematica, INDAM (Roma), 1994.

P. BUSER and P. SARNAK - *On the period matrix of a Riemann surface of large genus*, 1992.

E. CALABI - *Extremal isosystolic metrics for compact surfaces*, à paraître, 1993.

B. COLBOIS and J. DODZIUK - *Riemannian metrics with large* λ_1, à paraître (1993).

J.H. CONWAY and N.J.A. SLOANE - *Shere Packings, Lattices and Groups*, Springer, 1988.

H. FEDERER - *Real flat chains, cochains and variational problems*, Indiana Univ. Math. J. **24**, 1974, 351-407.

M. GROMOV - *Filling Riemannian manifolds*, J. of Diff. Geometry **18** (1983), 1-147.

M. GROMOV - *Metric invariants of Kähler manifolds*, preprint IHES (1992a).

M. GROMOV - *Systoles and intersystolic inequalities* (1992 b).

M. GROMOV - À paraître (1993).

M. GROMOV, J. LAFONTAINE et P. PANSU - *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cedic-Nathan, 1981.

P. GRUBER and C. LEKERKERKER - *Geometry of numbers*, North-Holland, 1987.

J. HEBDA - *Some lower bounds for the area of surfaces*, Invent. Math. **65** (1982), 485-491.

G. KABAJANSKI and V. LEVENSTEIN - *Bounds for packings on a sphere and in space*, Problems of Information Transmission **14** (1978), 1-17.

B. LAWSON - *The stable homology of a flat torus*, Math. Scand. **36** (1975), 49-73.

J. OESTERLÉ - *Empilements de sphères*, Astérisque, Séminaire Bourbaki **189-190** (1990), 375-398.

P. PU - *Some inequalities in certain nonorientable manifolds*, Pacific J. Math. **2** (1952), 55-71.

R. THOM - *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv. **28** (1954), 17-86.

Marcel BERGER
I.H.E.S.
35, route de Chartres
F-91440 BURES-sur-YVETTE

Astérisque

JEAN-LOUIS CATHELINEAU

Homologie du groupe linéaire et polylogarithmes [d'après A.B. Goncharov et d'autres]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 772, p. 311-341

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__311_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
45ème année, 1992-93, n° 772

Juin 1993

HOMOLOGIE DU GROUPE LINÉAIRE ET POLYLOGARITHMES
[d'après A.B. Goncharov et d'autres]

par **Jean-Louis CATHELINEAU**

1 INTRODUCTION

Ce rapport, qui prolonge l'exposé 762 de J. Oesterlé au séminaire Bourbaki de novembre 1992 sur les polylogarithmes, a pour but d'introduire au travail de Goncharov sur la conjecture de Zagier. Avant de rappeler cette conjecture précisons quelques notations; si F est un corps de nombres, on note r_1 (resp. $2r_2$) le nombre de plongements réels (resp. non réels) de F dans $\mathbf{C}$; d est le degré de F et Δ_F son discriminant; on pose pour $n \geq 2$, $d_n = r_1 + r_2$, si n est impair et $d_n = r_2$, si n est pair. On a la

Conjecture de Zagier [59,60] *Soit F un corps de nombres et ζ_F la fonction zêta de F, pour $n \geq 2$*

$$\zeta_F(n) = q_n R_n \frac{\pi^{n(d-d_n)}}{|\Delta_F|^{\frac{1}{2}}}, \tag{1}$$

où q_n est un rationnel non nul et R_n est une somme de produits de valeurs de la fonction n-logarithme de Bloch-Wigner généralisée prises en des éléments de F et de leurs conjugués.

Théorème 1 *La conjecture de Zagier est vraie pour n égal à 2 et 3.*

Zagier a prouvé le cas $n = 2$ à partir de calculs de volumes de variétés hyperboliques de dimension trois [59], mais cette approche ne semble pas se prolonger à $n \geq 3$. Un autre point de vue, dont l'origine remonte à un travail de Bloch [6], consiste à ramener la conjecture à un théorème profond de A. Borel. Ce dernier a construit pour tout corps de nombres une application, le *régulateur de Borel*

$$r_{Bor} : K_{2n-1}(F) \longrightarrow \mathbf{R}^{d_n},$$

où $K_{2n-1}(F)$ est un groupe de K-théorie algébrique du corps F. Le résultat suivant peut être vu comme une généralisation à $n \geq 2$ d'un classique théorème de Dirichlet

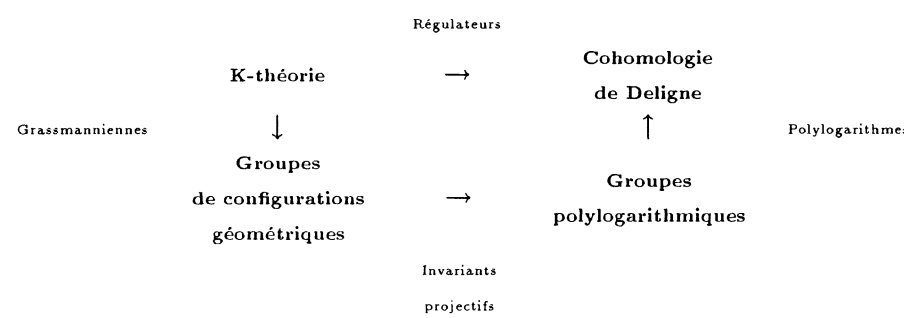
Théorème 2 (Borel [9]) *Pour $n \geq 2$ le régulateur de Borel induit un isomorphisme de $K_{2n-1}(F)/\text{tors}$ sur un réseau de $\mathbf{R}^{d_n}$ dont le covolume est égal, à un facteur de $\mathbf{Q}^\times$ près, à*

$$\frac{\zeta_F(n)|\Delta_F|^{\frac{1}{2}}}{\pi^{n(d-d_n)}}.$$

Le problème fondamental est alors d'exprimer le régulateur de Borel à l'aide des polylogarithmes. Pour $n = 2$, on peut retrouver ainsi la conjecture de Zagier, comme conséquence de travaux de Bloch, Suslin et Dupont [6,53, 16,30]. Le travail de Goncharov concerne le cas $n = 3$. Pour $n = 2$, le dilogarithme apparaît assez naturellement dans des calculs de volumes, mais l'intervention du trilogarithme dans le cas $n = 3$ reste encore assez mystérieuse et la méthode de Goncharov ne se généralise pas immédiatement à $n \geq 4$.

L'intérêt du travail de Goncharov ne réside pas seulement dans le résultat obtenu sur la conjecture de Zagier, mais aussi dans les méthodes et les outils utilisés. Citons le problème des identités fonctionnelles pour les n-logarithmes, des questions abstraites touchant à l'homologie du groupe linéaire et à la K-théorie algébrique des corps, mais aussi des aspects élémentaires de géométrie projective, réminiscents du troisième problème de Hilbert en géométrie hyperbolique [12,19]. En particulier, un rôle crucial est joué par un invariant des configurations de 6 points du plan projectif introduit par Goncharov, le trirapport, qui généralise le classique birapport.

On peut schématiser l'approche de Goncharov par le tableau suivant qui renvoie à divers points abordés dans ces pages



A part une courte annonce au B.A.M.S. parue en 1991, les travaux de Goncharov n'existent encore qu'à l'état de preprints, principalement deux longs articles [26,27] ayant un caractère prospectif assez marqué. Je me suis surtout inspiré dans ce qui suit du dernier qui doit paraître aux proceedings de la conférence de Seattle de 1991 sur les motifs. Je n'ai pas abordé les aspects motiviques de la conjecture de Zagier [2,3,15]; cela mériterait un autre exposé.

J'ai aussi évoqué l'intéressant travail de Yang [58] qui prouve une variante de la conjecture de Zagier pour $n = 3$, où le trilogarithme de Bloch-Wigner est remplacé par celui de Hain-MacPherson. Il est probable qu'en poussant un peu les résultats de Yang le trirapport apparaisse et que l'on retrouve exactement la conjecture de Zagier sous la forme énoncée ci-dessus.

Notations. F sera toujours un corps infini. Si A est un sous-anneau de $\mathbf{C}$, on pose $A(n) = (2i\pi)^n A$. Si M est un $\mathbf{Z}$-module, on note $M_{\mathbf{Q}}$ le produit tensoriel $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

2 K-THÉORIE DES CORPS

2.1 Homologie du groupe linéaire général et K-théorie

Rappelons que le groupe linéaire général $GL(F)$ d'un corps F est la limite inductive du système

$$GL(m, F) \longrightarrow GL(m+1, F)$$

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $H_*(GL(F), \mathbf{Q})$ l'homologie du groupe discret $GL(F)$ à coefficients dans le $GL(F)$-module trivial $\mathbf{Q}$; c'est aussi l'homologie singulière de l'espace classifiant $BGL(F)$ du groupe $GL(F)$. Il est classique [39] que $H_*(GL(F), \mathbf{Q})$ a une structure d'algèbre de Hopf commutative et cocommutative, dont le produit provient de l'opération de somme directe sur les matrices et le coproduit de la diagonale $BGL(F) \to BGL(F) \times BGL(F)$, et que comme telle c'est une algèbre graduée commutative libre engendrée par l'espace de ses éléments primitifs $Prim\, H_*(GL(F), \mathbf{Q})$. On définit alors les groupes de K-théorie rationnelle de F par

$$K_n(F)_{\mathbf{Q}} := Prim\, H_n(GL(F), \mathbf{Q}),\ n \geq 1.$$

Par un théorème de Milnor-Moore [42], on sait que ces groupes coïncident rationnellement avec les groupes de K-théorie algébrique $K_n(F)$ définis par

Quillen, i.e. $K_n(F)_{\mathbf{Q}} = K_n(F) \otimes \mathbf{Q}$, où $K_n(F) := \pi_n(BGL(F)^+)$ est le n-ième groupe d'homotopie de l'espace $BGL(F)^+$ obtenu à partir de $BGL(F)$. par la construction + de Quillen [39] .

2.2 Filtrations sur la K-théorie

On dispose sur chaque $K_n(F)_{\mathbf{Q}}$ de deux filtrations.

La γ-filtration provient d'opérations du type d'Adams ψ^k [33,37,49], induites par les puissances extérieures des matrices sur $H_*(GL(F), \mathbf{Q})$. C'est une filtration décroissante

$$K_n(F)_{\mathbf{Q}} = K_n^{1)}(F) \supset K_n^{2)}(F) \supset ... \supset K_n^{i)}(F) \supset ...$$

Par un théorème de Soulé [49], $K_n^{n+1)}(F) = 0$. Le gradué associé s'identifie alors canoniquement à la décomposition d' Adams de $K_n(F)_{\mathbf{Q}}$

$$K_n(F)_{\mathbf{Q}} = \bigoplus_{i=0}^{n} K_n^{(i)}(F),$$

où $K_n^{(i)}(F)$ est le sous-espace propre de $K_n(F)_{\mathbf{Q}}$ de valeur propre k^i pour l'opération d'Adams ψ^k ($k \geq 2$). On a $K_n^{(1)}(F) = 0$ pour $n \geq 2$ et Beilinson et Soulé [1,49] ont conjecturé que $K_n^{(i)}(F) = 0$ pour $i \leq \left[\frac{n}{2}\right]$.

La filtration par le rang est la filtration croissante

$$\{0\} = K_n^{[0}(F) \subset K_n^{[1}(F) \subset ... \subset K_n^{[i}(F) \subset ...$$

obtenue en posant pour $i \geq 1$

$$K_n^{[i}(F) = Im\{H_n(GL(i, F), \mathbf{Q}) \to H_n(GL(F), \mathbf{Q})\} \cap K_n(F)_{\mathbf{Q}}.$$

Par un théorème de stabilité de Suslin [51], les applications $H_n(GL(N, F), \mathbf{Q}) \to H_n(GL(F), \mathbf{Q})$ sont des isomorphismes pour $N \geq n$, par suite $K_n^{[n}(F) = K_n(F)_{\mathbf{Q}}$. On pose

$$K_n^{[i]}(F) = K_n^{[i}(F)/K_n^{[i-1}(F).$$

2.3 Conjecture du rang

Suslin a conjecturé que la γ-filtration et la filtration par le rang sont opposées, c'est à dire que pour tout i

$$K_n(F)_{\mathbf{Q}} = K_n^{[i}(F) \bigoplus K_n^{i+1)}(F),$$

ou encore que pour tout i la composée

$$K_n^{[i}(F) \longrightarrow K_n(F) \longrightarrow K_n^{(i)}(F),$$

où la deuxième flèche est la projection dans la décomposition d'Adams, se factorise en un isomorphisme $K_n^{[i]}(F) \longrightarrow K_n^{(i)}(F)$. Cette conjecture est démontrée dans les cas suivants

- $n \leq 3$, F corps infini (Suslin [53], voir aussi Gerdes [24]).
- n quelconque, F corps de nombres distinct de $\mathbf{Q}$ (Yang [57]).
- $n = 5$, $F = \mathbf{Q}$ (Goncharov [27]).

D'autre part, c'est une conséquence de résultats de Suslin et Soulé [51,49] que l'on a des isomorphismes

$$K_n^{[n]}(F) \xrightarrow{\cong} K_n^{(n)}(F) \xrightarrow{\cong} K_n^M(F)_{\mathbf{Q}},$$

où $K_*^M(F)$ désigne la K-théorie de Milnor. Rappelons que $K_*^M(F)$ est l'algèbre quotient de l'algèbre tensorielle sur $\mathbf{Z}$ du groupe multiplicatif $F^\times$ de F par l'idéal bilatère engendré par les $a \otimes (1-a)$, où $a \neq 0, 1$ [41].

2.4 Point de vue cohomologique sur la K-théorie des corps

On peut disposer les composantes de la décomposition d' Adams de la K-théorie de F sur un tableau où $K_{2j-i}^{(j)}(F)$ est à la place (i,j)

$$\begin{array}{cccccc} \vdots & \vdots & & & \vdots \\ K_{2n-1}^{(n)}(F) & K_{2n-2}^{(n)}(F) & \cdots & \cdots & K_n^{(n)}(F) \\ \vdots & \vdots & & & \\ K_5^{(3)}(F) & K_4^{(3)}(F) & K_3^{(3)}(F) & & \\ K_3^{(2)}(F) & K_2^{(2)}(F) & & & \\ K_1^{(1)}(F) & & & & \end{array} \tag{2}$$

On a omis d'écrire les composantes conjecturées nulles par Beilinson et Soulé.

D'après un cas particulier d'une conjecture de Beilinson [1], chaque ligne du tableau (2) devrait apparaître comme la cohomologie d'un complexe de $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels $\mathcal{C}^\bullet(F,n)$, i.e. $K_{2n-*}^{(n)}(F) = H^*(\mathcal{C}^\bullet(F,n))$. Plusieurs candidats ont été proposés pour ces complexes, en particulier ceux de Bloch liés aux cycles d'ordre supérieur [8]. Dans le paragraphe suivant, nous donnons en (3) ceux introduits par Goncharov en liaison avec la conjecture de Zagier et pour lesquels on n'a de résultats que pour $n \leq 3$.

Rappelons que la fonction n-logarithme Li_n est la fonction "multiforme" associée à la série entière $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^n}$. Plusieurs observations suggèrent que dans le tableau (2), Li_n est naturellement apparentée à la diagonale $K_*^{(*-n+1)}(F)$.

En particulier le logarithme est lié à la K-théorie de Milnor : par exemple on le constate sur les symboles de Tate [54] qui sont donnés par des différentielles logarithmiques ainsi que sur les symboles de Dennis et Stein [40]. Bloch [6] a introduit le dilogarithme dans l'étude du groupe $K_3^{(2)}(F)$ et Beilinson [2] a construit des éléments dans le groupe $K_{2n+1}(F)$ d'un corps cyclotomique dont la non-trivialité est testée par Li_n (voir aussi [3]).

Théorème 2.4.1 (Beilinson) *Pour un corps de nombres F, $K_{2j-i}^{(j)}(F) = 0$ si $i \neq 1$, d'où $K_{2n-1}(F)_{\mathbf{Q}} = K_{2n-1}^{(n)}(F)$.*

Pour la preuve, voir le paragraphe 8.2. D'après ce résultat la première colonne est tout ce qui reste du tableau (2) lorsque F est un corps de nombres.

3 GROUPES POLYLOGARITHMIQUES

On se propose d'introduire pour tout corps infini F, des groupes $\mathcal{B}_n(F)$ dont les relations de définition sont liées, lorsque $F = \mathbf{C}$, aux identités fonctionnelles vérifiées par les polylogarithmes.

3.1 Définition des groupes $\mathcal{B}_n(F)$

La définition de $\mathcal{B}_n(F)$ $(n \geq 1)$ se fait par récurrence, simultanément avec celle de sous-groupes $\mathcal{A}_n(F)$ $(n \geq 2)$ et $\mathcal{R}_n(F)$ de $\mathbf{Z}[F^\times]$ qui sont très voisins de groupes considérés dans ([44] 5.2) pour les corps de nombres.

Si $\mathcal{R}_n(F)$ est défini, on pose $\mathcal{B}_n(F) = \mathbf{Z}[F^\times]/\mathcal{R}_n(F)$; de plus on note δ_2 le morphisme $\mathbf{Z}[F^\times] \to (\bigwedge^2 F^\times), [x] \mapsto (1-x) \wedge x$, et pour $n \geq 2$, δ_n le morphisme $\mathbf{Z}[F^\times] \to (\mathcal{B}_{n-1}(F) \otimes F^\times), [x] \mapsto \{x\}_{n-1} \otimes x$, où $\{x\}_n$ est la classe de x dans $\mathcal{B}_n(F)$.

Par définition, $\mathcal{R}_1(F)$ est engendré par les $[xy] - [x] - [y]$, d'où $\mathcal{B}_1(F) \cong F^\times$. Pour $n \geq 2$, $\mathcal{A}_n(F) := Ker\delta_n$. On définit $\mathcal{R}_n(F)$ comme le sous-groupe de $\mathbf{Z}[F^\times]$ engendré par les éléments de la forme $\sum n_i([f_i(0)] - [f_i(1)])$, où les f_i sont des fractions rationnelles en l'indéterminée X telles que $\sum n_i[f_i] \in \mathcal{A}_n(F(X))$, avec la convention $[0] = [\infty] = 0$.

On a $\delta_n(\mathcal{R}_n(F)) = 0$ [26], ce qui permet d'obtenir un complexe, où $\mathcal{B}_n(F)$ est placé en degré 1

$$(3) \qquad \mathcal{B}_n(F) \xrightarrow{\delta} \mathcal{B}_{n-1}(F) \otimes F^\times \xrightarrow{\delta} \mathcal{B}_{n-2}(F) \otimes \bigwedge^2 F^\times \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \mathcal{B}_2(F) \otimes \bigwedge^{n-2} F^\times \xrightarrow{\delta} \bigwedge^n F^\times,$$

et où : $\delta(\{x\}_{n-i} \otimes y_1 \wedge \ldots \wedge y_i) = \{x\}_{n-i-1} \otimes x \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_i$, $\delta(\{x\}_2 \otimes y_1 \wedge \ldots \wedge y_{n-2}) = (1-x) \wedge x \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_{n-2}$.

Le complexe (3) a été introduit par Goncharov : dans la suite, on le note $\Gamma^\bullet(F,n)$; on a $H^n(\Gamma^\bullet(F,n)_{\mathbf{Q}}) \cong K_n^M(F)_{\mathbf{Q}}$. Goncharov conjecture que $H^*(\Gamma^\bullet(F,n)_{\mathbf{Q}}) \cong K^{(n)}_{2n-*}(F)$. Le complexe $\Gamma^\bullet(F,1)$ se réduit à $F^\times$. On a $H^1(\Gamma^\bullet(F,2)_{\mathbf{Q}}) \cong K_3^{(2)}(F) \cong K_3^{[2]}(F)$; c'est une conséquence de résultats de Suslin [53] (voir aussi Dupont et Sah [19]). Goncharov a construit, pour tout corps infini F et $i = 1,2$, des morphismes $K^{[3]}_{6-i}(F) \to H^i(\Gamma^\bullet(F,3)_{\mathbf{Q}})$ qu'il conjecture être des isomorphismes.

3.2 Rapport avec les polylogarithmes

Pour $n \geq 1$, notons $\mathcal{D}_n$ la fonction de Bloch-Wigner généralisée $\mathbf{C} \to \mathbf{R}(n-1)$. On a $\mathcal{D}_1 = \log|\ |$,

$$\mathcal{D}_2(z) = i(\mathrm{Im}(Li_2(z) + \log|z|\log(1-z))),$$

$$\mathcal{D}_3(z) = \mathrm{Re}(Li_3(z) - \log|z|Li_2(z) - \frac{1}{3}\log^2|z|\log(1-z)),$$

où les valeurs ne dépendent pas du chemin de $\mathbf{C}\backslash\{0,1\}$ joignant $\frac{1}{2}$ à z. Pour $n > 3$, $\mathcal{D}_n$ est la fonction notée P_n dans ([44], 3.1).

Théorème 3.2.1 ([27]) *Le morphisme de groupes abéliens*

$$\mathbf{Z}[\mathbf{C}^\times] \longrightarrow \mathbf{R}(n-1)$$

$$[z] \mapsto \mathcal{D}_n(z)$$

est nul sur $\mathcal{R}_n(\mathbf{C})$, d'où un morphisme $\tilde{\mathcal{D}}_n : \mathcal{B}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{R}(n-1)$.

Ce résultat est une variante du théorème 2 de [44].

Pour un corps F quelconque, on a dans $\mathcal{B}_2(F)$ les relations $2\{1\} = 0$, $\{x\} + \{1-x\} = 0$, $2(\{x\} + (-1)\{x^{-1}\}) = 0$ et

$$\{x\} - \{y\} + \{y/x\} - \{(1-y)/(1-x)\} + \{(1-y^{-1})/(1-x^{-1})\} = 0\,;$$

on appelle cette dernière relation l'*identité du dilogarithme.*

3.3 Les groupes $\mathbf{B}_n(F)$

On note dans la suite $\mathbf{B}_n(F)$ le groupe $H^1(\Gamma^\bullet(F,n)) = \mathcal{A}_n(F)/\mathcal{R}_n(F)$. Pour $n = 2$, il est très voisin de celui appelé groupe de Bloch dans Suslin [52], mais cette terminologie a été galvaudée dans la littérature et prête à confusion. On devrait avoir pour un corps de nombres $\mathbf{B}_n(F)_{\mathbf{Q}} \cong K_{2n-1}(F)_{\mathbf{Q}}$. Noter

que l'élément $\{1\} \in \mathbf{B}_n(\mathbf{C})_{\mathbf{Q}}$ est nul pour n pair, mais ne l'est pas pour n impair, car dans ce cas $\mathcal{D}_n(1) = \zeta(n) \neq 0$ [44].

On démontre par récurrence en utilisant la définition de $\mathcal{B}_n(F)$ que, pour $n \geq 2$, les morphismes naturels $\mathbf{B}_n(F) \to \mathbf{B}_n(F(X))$ sont des isomorphismes. D'autre part Bloch a observé que les images par $\tilde{\mathcal{D}}_2$ des groupes $\mathbf{B}_2(\mathbf{C})$ et $\mathbf{B}_2(\overline{\mathbf{Q}})$ sont les mêmes, où $\overline{\mathbf{Q}}$ est la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$. Ceci suggère l'importante conjecture : *Si F_0 désigne la clôture algébrique dans F du corps premier de F, on a :* $\mathbf{B}_n(F_0) \xrightarrow{\cong} \mathbf{B}_n(F)$.

On peut préciser le facteur R_n de la formule (1) dans la *conjecture de Zagier.* Il devrait être de la forme suivante : $R_n = \det(\tilde{\mathcal{D}}_n(\tilde{\sigma}_i(a_j))_{1\leq i,j\leq d_n}$ où $\tilde{\sigma}_i : \mathcal{B}_n(F) \longrightarrow \mathcal{B}_n(\mathbf{C})$ est le morphisme associé au plongement σ_i de F dans $\mathbf{C}$, les plongements σ_i sont numérotés de telle sorte que $\overline{\sigma}_{r_1+r_2+l} = \sigma_l$ pour $l = 1, ..., r_2$ et les a_j pour $j = 1, ..., d_n$ sont des éléments de $\mathbf{B}_n(F)$ dont les images dans $\mathbf{B}_n(F)_{\mathbf{Q}} \cong K_{2n-1}(F)_{\mathbf{Q}}$ forment une $\mathbf{Q}$-base.

4 GROUPES DE CONFIGURATIONS GÉOMÉTRIQUES

4.1 Les groupes $Q_n(F)$

Pour F un corps, on pose $Q_1(F) = F^{\times}$ et pour $n \geq 2$, on considère le groupe $Q_n(F)$ engendré par les symboles $\langle a_1, ..., a_{2n}\rangle$, où les a_i sont en position générale dans l'espace projectif $\mathbf{P}^{n-1}(F)$, soumis aux relations

1. (antisymétrie) Pour toute permutation σ de $\{1, 2, ..., n\}$,

$$\langle a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(2n)}\rangle = (-1)^{\epsilon_\sigma}\langle a_1, ..., a_{2n}\rangle.$$

2. (invariance) Pour toute transformation projective $g \in PGL(n, F)$,

$$\langle g(a_1), ..., g(a_{2n})\rangle = \langle a_1, ..., a_{2n}\rangle.$$

3. (découpage) Pour toute famille $(a_i)_{i=1,...,2n+1}$ en position générale,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^i \langle a_1, ..., \hat{a}_i, ..., a_{2n+1}\rangle = 0.$$

4.2 Comparaison des groupes $Q_2(F)$ et $\mathcal{B}_2(F)$

Le problème de la comparaison des groupes $Q_n(F)$ et $\mathcal{B}_n(F)$ semble être au coeur de la conjecture de Zagier. Examinons le cas où $n = 2$.

Théorème 4.2.1 *Les groupes $Q_2(F)$ et $\mathcal{B}_2(F)$ sont isomorphes à 2 et 3-torsion près.*

La preuve passe par des groupes intermédiaires. Soit $\mathcal{P}(F)$ le groupe engendré par les symboles $[x]$, $x \in F^\times$, $x \neq 1$ soumis aux relations

1. $[x] + [x^{-1}] = 0$,
2. $[x] + [1-x] = 0$,
3. $[x] - [y] + [y/x] - [(1-y)/(1-x)] + [(1-y^{-1})/(1-x^{-1})] = 0$, $x \neq y$.

Notons de plus $\mathcal{P}_2(F)$ le groupe défini de façon analogue, en ne retenant que la relation 3.

Lemme 4.2.2 *On a un isomorphisme*

$$Q_2(F) \longrightarrow \mathcal{P}(F)$$

$$\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle \mapsto [\tilde{r}_2(a_1, a_2; a_3, a_4)],$$

où $\tilde{r}_2(a_1, a_2; a_3, a_4)$ est le birapport de quatre points de $\mathbf{P}^1(F)$.

Preuve: c'est un exercice sur le birapport. A invariance projective près, cinq points $a_1, ..., a_5$ de $P^1(F)$ sont équivalents à $\infty, 0, 1, x, y$. Dans la correspondance $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle \mapsto [\tilde{r}_2(a_1, a_2; a_3, a_4)]$, la relation de découpage devient alors la relation du dilogarithme. De plus les relations 1. et 2. sont liées à l'antisymétrie des symboles $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$. ∎

Lemme 4.2.3 *Le morphisme naturel $\mathcal{P}_2(F) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] \longrightarrow \mathcal{P}(F) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$ est un isomorphisme.*

Preuve : Suslin a montré [53] que l'on a dans $\mathcal{P}_2(F)$ les relations $2([x] + [x^{-1}]) = 0$ et $6([x] + [1-x]) = 0$. ∎

Comme la relation de définition de $\mathcal{P}_2(F)$ est vérifiée dans $\mathcal{B}_2(F)$, on a un morphisme canonique

$$\mathcal{P}_2(F) \to \mathcal{B}_2(F),\ [x] \mapsto \{x\}.$$

Lemme 4.2.4 *Le morphisme induit $\lambda : \mathcal{P}_2(F) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \longrightarrow \mathcal{B}_2(F) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ est un isomorphisme.*

Preuve : il suffit de voir que λ est injectif. Si $a \in F$, il existe un morphisme $s_a : \mathcal{P}_2(F(X)) \longrightarrow \mathcal{P}_2(F)$, tel que $s_a(f) = [f(a)]$, si $f(a) \neq 0, \infty$ et $s_a(f) = 0$, sinon. D'autre part, si $\mathbf{B}(F) := Ker\{\mathcal{P}_2(F) \to (F^\times \otimes_{\mathbf{Z}} F^\times)/ < x \otimes y + y \otimes x >, [x] \mapsto x \otimes (1-x)\}$, le morphisme canonique $i : \mathbf{B}(F) \to \mathbf{B}(F(X))$ est bijectif d'après Suslin [52]. Il en résulte que $s_a|_{\mathbf{B}(F(X))}$ est l'inverse de i. L'injectivité de λ vient alors de la forme des relations de définition de $\mathcal{B}_2(F)$. ∎

Les groupes $Q_2(\mathbf{C})$ et $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ ont été considérés par J. Dupont et C.H. Sah [19] dans l'étude des groupes de polyèdres, à découpages et isométries près, de l'espace hyperbolique $\mathcal{H}^3$ de dimension 3 (troisième problème de Hilbert). Si on prend pour modèle de $\mathcal{H}^3$ le demi-espace de Poincaré $\mathbf{C} \times \mathbf{R}_{>0}$, l'horizon de $\mathcal{H}^3$ s'identifie à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et le groupe $Q_2(\mathbf{C})$ s'identifie à un groupe de polyèdres, à découpages et isométries près, engendré par les tétraèdres idéaux, i.e. dont tous les sommets sont à l'horizon de $\mathcal{H}^3$.

4.3 Le groupes des paires de simplexes de $\mathbf{P}^{n-1}(F)$

Dans [4] Beilinson, Goncharov, Schechtman et Varchenko étudient les variantes suivantes des groupes $Q_n(F)$. Disons qu'un simplexe de $\mathbf{P}^{n-1}(F)$ est la donnée de n points en position générale et que deux simplexes sont admissibles s'ils n'ont pas de face commune.

On définit le groupe $A_{n-1}(F)$ comme le groupe engendré par les symboles $\langle a_1, ..., a_n; b_1, ..., b_n \rangle$, où $(a_i)_i$ et $(b_i)_i$ sont deux simplexes admissibles, soumis aux relations

1. (antisymétrie) Pour toute permutation σ de $\{1, 2, ..., n\}$,

$$\langle a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)}; b_1, ..., b_n \rangle = \langle a_1, ..., a_n; b_{\sigma(1)}, ..., b_{\sigma(n)} \rangle$$
$$= (-1)^{\epsilon_\sigma} \langle a_1, ..., a_n; b_1, ..., b_n \rangle.$$

2. (invariance) Pour toute transformation projective $g \in PGL(n, F)$,

$$\langle g(a_1), ..., g(a_n); g(b_1), ..., g(b_n) \rangle = \langle a_1, ..., a_n; b_1, ..., b_n \rangle.$$

3. (découpage)

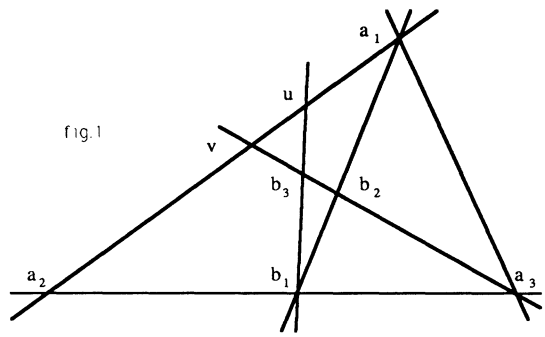
$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \langle a_1, ..., \hat{a}_i, ..., a_{n+1}; b_1, ..., b_n \rangle = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \langle a_1, ..., a_n; b_1, ..., \hat{b}_i, ..., b_{n+1} \rangle = 0.$$

Dans [4] ces groupes sont reliés aux groupes $Q_n(F)$, à la K-théorie de Milnor et aux polylogarithmes de Aomoto. En particulier, $A_1(F)$ s'identifie à $F^\times$ à l'aide du birapport et il existe un isomorphisme, à 2-torsion près, du groupe $A_2(F)$ des paires de triangles de $\mathbf{P}^2(F)$ avec le groupe $Q_2(F) \oplus S^2 F^\times$, où S^2 est la puissance symétrique.

En fait, le groupe $A_2(F)$ est engendré par les configurations géométriques de la figure 1

fig. 1



Une telle configuration ne dépend que du birapport $\tilde{r}_2(a_1, a_2; u, v) = t$, notons la $\delta(t)$. Lorsque $F = \mathbf{C}$, le dilogarithme de Aomoto de la paire de triangles $\langle a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3 \rangle$ est l'intégrale $\int_\Delta \omega$, où Δ est le triangle (b_1, b_2, b_3) et ω est la 2-forme

$$\omega = \frac{df_2}{f_2} \wedge \frac{df_3}{f_3} + \frac{df_3}{f_3} \wedge \frac{df_1}{f_1} + \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2},$$

les f_i étant des équations des côtés du triangle (a_1, a_2, a_3). Le dilogarithme de Aomoto de $\delta(t)$ est donné par le dilogarithme classique de t. A travers une comultiplication d'origine géométrique $A_2(F) \to A_2(F) \otimes A_2(F)$ (voir [4] pour plus de détails), la configuration $\delta(t)$ devient l'élément $t \otimes (1-t)$ de $F^\times \otimes F^\times$: cela amène à une intéressante description géométrique de la K-théorie de Milnor. Pour une autre approche géométrique de la K-théorie de Milnor, voir le paragraphe 6.2.

5 INVARIANTS PROJECTIFS

5.1 Le n-rapport ($n \geq 2$)

Notons $\check{\mathbf{P}}^n(F)$ le dual projectif de $\mathbf{P}^n(F)$. Si $(a_1, ..., a_n; \varphi_1, ..., \varphi_n)$ est un élément de $(\mathbf{P}^{n-1}(F))^n \times (\check{\mathbf{P}}^{n-1}(F))^n$ tel que $\vec{\varphi}_i(\vec{a}_j) \neq 0$, où $\vec{(\ )}$ désigne un

représentant vectoriel, on pose

$$[a_1, ..., a_n; \varphi_1, ..., \varphi_n] = \frac{\vec{\varphi}_1(\vec{a}_1)\vec{\varphi}_2(\vec{a}_2)...\vec{\varphi}_n(\vec{a}_n)}{\vec{\varphi}_1(\vec{a}_2)\vec{\varphi}_2(\vec{a}_3)...\vec{\varphi}_n(\vec{a}_1)}.$$

C'est un invariant projectif tel que

$$[a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)}; \varphi_{\sigma(1)}, ..., \varphi_{\sigma(n)}] = [a_1, ..., a_n; \varphi_1, ..., \varphi_n],$$

pour tout élément σ du groupe engendré par le cycle $(12...n)$.

Si $(a_1, ..., a_n; b_1, ..., b_n)$ sont $2n$ points de $\mathbf{P}^{n-1}(F)$ en position générale, on note φ_i l'élément de $\check{\mathbf{P}}^{n-1}(F)$ correspondant dans la dualité à l'hyperplan $< b_1, ..., b_{n-1} >$ si $i = 1$, et à $< b_1, ..., \hat{b}_{i-1}, ..., b_n >$ sinon. Noter que l'on peut prendre $\vec{\varphi}_i(v) = \text{dét}(\vec{b}_1, ..., \hat{b}_{i-1}, ..., \vec{b}_n, v)$, où dét est le déterminant dans la base canonique. On pose

$$\tilde{r}_n(a_1, ..., a_n; b_1, ..., b_n) = [a_1, ..., a_n; \varphi_1, ..., \varphi_n].$$

Pour $n = 2$, c'est le birapport classique. On appellera $\tilde{r}_n$ le n-rapport.

5.2 Interprétation géométrique du n-rapport

Rappelons qu'une petite catégorie est une catégorie dont les objets forment un ensemble et qu'un groupoïde est une petite catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes.

Pour $n \geq 3$, on considère le groupoïde $\mathcal{G}_n$ défini par générateurs et relations comme suit : les objets de $\mathcal{G}_n$ sont les points de $\mathbf{P}^{n-1}(F)$; l'ensemble des générateurs est constitué des flèches $f = x \xrightarrow{\alpha} y$, où $x \neq y$ et α est un point de la droite $\langle x, y \rangle$ distinct de x et y; les relations sont celles du type $h = g \circ f$ où $f = x \xrightarrow{\alpha} y$, $g = y \xrightarrow{\beta} z$ et $h = x \xrightarrow{\gamma} z$ sont comme sur la figure 2, i.e. x, y et z sont en position générale et γ est l'intersection des droites $\langle x, z \rangle$ et $\langle \alpha, \beta \rangle$.

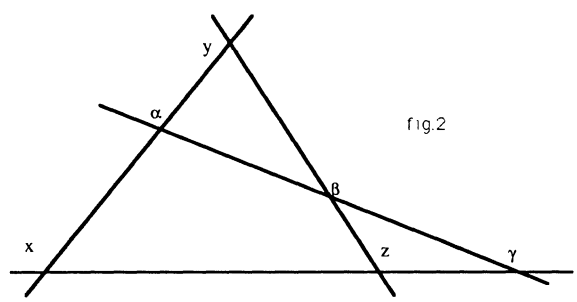


fig.2

Proposition 5.2.1 *Pour tout $x \in \mathbf{P}^{n-1}(F)$, le groupe $Aut(x)$ des automorphismes de x dans le groupoïde $\mathcal{G}_n$ s'identifie naturellement à $F^\times$.*

Pour $f = x \xrightarrow{\alpha} y$ et $g = y \xrightarrow{\beta} z$, $g \circ f \in Aut(x) = F^\times$ n'est autre que le birapport $\tilde{r}_2(x, y; \alpha, \beta)$ et tout élément de $PGL(n, F)$ induit un automorphisme du groupoïde $\mathcal{G}_n$.

Le n-rapport s'interprète comme suit dans le groupoïde $\mathcal{G}_n$: pour $(a_1, ..., a_n; \varphi_1, ..., \varphi_n)$ comme ci-dessus, soit P_i l'hyperplan associé à φ_i dans la dualité et $f_i = a_i \xrightarrow{\alpha_i} a_{i+1}$, où $\alpha_i = \langle a_i, a_{i+1} \rangle \cap P_i\varphi_i$. On a exactement

$$[a_1, ..., a_n; \varphi_1, ..., \varphi_n] = f_n \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_1.$$

Pour ce point de vue sur le birapport voir [13].

5.3 Le n-rapport antisymétrisé

Soit $\mathbf{Z}[F^\times]$ l'algèbre du groupe multiplicatif de F, pour $2n$ points $(a_1, ..., a_{2n})$ en position générale de $\mathbf{P}^{n-1}(F)$, on considère l'invariant projectif à valeurs dans $\mathbf{Z}[F^\times]$

$$r_n(a_1, ..., a_{2n}) = (-1)^n \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} (-1)^{\epsilon_\sigma} [\tilde{r}_n(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)}; a_{\sigma(n+1)}, ..., a_{\sigma(2n)})].$$

On notera $\mathbf{r}_n$ l'invariant analogue à valeur dans $\mathcal{B}_n(F)$.

Pour $n = 3$, cet invariant a été introduit par Goncharov, à la suite d'une suggestion de Zagier. On obtient $\mathbf{r}_3$ en antisymétrisant dans $\mathcal{B}_3(F)$ l'expression

$$\frac{\text{dét}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4)\text{dét}(\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_5)\text{dét}(\vec{a}_3, \vec{a}_1, \vec{a}_6)}{\text{dét}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_5)\text{dét}(\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_6)\text{dét}(\vec{a}_3, \vec{a}_1, \vec{a}_4)}.$$

Qu'est-ce que le 1-rapport? Soit pour $n \geq 2$, $2n$ vecteurs $(v_1, ..., v_{2n})$ en position générale de F^n, posons $\mathbf{r}'_n(v_1, ..., v_{2n}) = \mathbf{r}_n(\bar{v}_1, ..., \bar{v}_{2n})$ où les $\bar{\ }$ sont les classes dans $\mathbf{P}^{n-1}(F)$. L'expression de ce n-rapport de $2n$ vecteurs à l'aide du déterminant garde un sens pour $n = 1$; le 1-rapport $\mathbf{r}'_1(a, b)$ de deux éléments non nuls et distincts de F est alors l'élément $-\{\frac{a}{b}\} + \{\frac{b}{a}\} = 2\{\frac{b}{a}\} = \{(\frac{b}{a})^2\}$ de $\mathcal{B}_1(F) \cong F^\times$. Compte-tenu des relations $2(\{x\} + \{x^{-1}\}) = 0$ et $\{x\} + \{1 - x\} = 0$ dans $\mathcal{B}_2(F)$, et du comportement du birapport $\tilde{r}_2$ par permutation, on a aussi la relation $\mathbf{r}_2(a_1, a_2, a_3, a_4) = 24\{\tilde{r}_2(a_1, a_2; a_3, a_4)\}$ à 2-torsion près.

5.4 Comparaison des groupes $Q_3(F)$ et $\mathcal{B}_3(F)$

Théorème 5.4.1 *La relation*

$$\sum_{i=1}^{7}(-1)^i r_3(a_1, ..., \hat{a}_i, ..., a_7) = 0, \tag{4}$$

est vérifiée dans $\mathcal{B}_3(F)$, *d'où l'existence d'un morphisme surjectif*

$$Q_3(F) \longrightarrow \mathcal{B}_3(F). \tag{5}$$

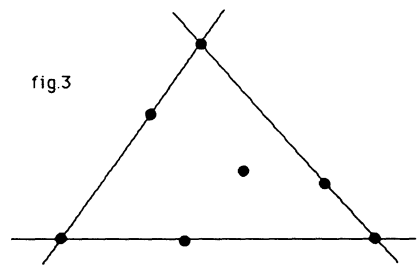
On montre ce résultat au paragraphe suivant. Problème : le morphisme (5) est-il un isomorphisme rationnellement?

Corollaire 5.4.2 *Lorsque* $F = \mathbf{C}$, $\mathcal{D}_3$ *vérifie l'identité fonctionnelle*

$$\sum_{i=1}^{7}(-1)^i \tilde{\mathcal{D}}_3(\mathbf{r}_3(a_1, ..., \hat{a}_i, ..., a_7)) = 0.$$

Pour préciser le rapport entre les groupes $Q_n(F)$ et $\mathcal{B}_n(F)$, Goncharov a aussi considéré des groupes $Q'_n(F)$, analogues aux $Q_n(F)$, engendrés par des symboles $\langle a_1, ..., a_{2n}\rangle$ où l'on admet les configurations qui sont stables au sens de Mumford [43] : pour $n = 3$, la condition est que les a_i soient distincts et que quatre d'entre eux ne soient jamais alignés. Le groupe $\mathcal{P}_3(F)$, défini comme le quotient de $\mathbf{Z}[F^\times]$ par les relations (4) (où les a_i sont en position générale), est alors isomorphe (voir [26]) au quotient de $Q'_3(F)$ par une relation compliquée qualifiée de "mystérieuse" par Goncharov; on en déduit un morphisme $Q'_3(F) \to \mathcal{B}_3(F)$. De ce point de vue, la configuration stable à 7 points, dans $\mathbf{P}^2(F)$, de la figure 3

fig.3



est alors liée, comme on le verra en 6.4, à une identité fonctionnelle à trois variables pour le trilogarithme, qui redonne par spécialisation une identité classique dûe à Kummer [26,44].

6 COMPLEXES GRASSMANNIENS

6.1 Le complexe de Suslin

Notons $\tilde{C}_m(n)$ le $\mathbf{Z}$-module libre de générateurs les $(m+1)$-uplets $(v_0, v_1, ..., v_m)$ de vecteurs de F^n en position générale. On forme un complexe de $\mathbf{Z}$-modules

$$\cdots \xrightarrow{d} \tilde{C}_m(n) \xrightarrow{d} \tilde{C}_{m-1}(n) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \tilde{C}_0(n),$$

en définissant la différentielle d sur les générateurs par

$$d((v_0, v_1, ..., v_m)) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i (v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_m).$$

D'autre part, les $\tilde{C}_m(n)$ sont des $GL(n,F)$-modules par l'action diagonale sur $(v_0, v_1, ..., v_m)$. Si F est un corps infini, ce complexe muni de l'augmentation $e : \tilde{C}_0(n) \to \mathbf{Z}$, $e(\sum n_i v^i) = \sum n_i$, est une résolution acyclique de $\mathbf{Z}$ en tant que $GL(n,F)$-module trivial. Par un argument d'algèbre homologique standard, on en déduit un morphisme

$$\theta_* : H_*(GL(n,F), \mathbf{Z}) \longrightarrow H_*(C_\bullet(n)), \tag{6}$$

où $C_m(n) = \tilde{C}_m(n) \otimes_{\mathbf{Z}[GL(n,F)]} \mathbf{Z}$ est le groupe des coinvariants de $\tilde{C}_m(n)$ sous l'action de $GL(n,F)$.

On peut décrire ce morphisme de la manière suivante [58] : soit $E_\bullet GL(n,F) \longrightarrow B_\bullet GL(n,F)$ le fibré simplicial universel standard et v un vecteur non nul de F^n. On considère l'ensemble simplicial $E^{\text{gén}}_\bullet GL(n,F)$ obtenu à partir de $E_\bullet GL(n,F)$ en ne retenant que les simplexes $(g_0, g_1, ..., g_s)$ v-génériques au sens que $g_0(v), g_1(v), ..., g_s(v)$ sont en position générale dans F^n. Soit alors $B^{\text{gén}}_\bullet GL(n,F)$ l'image de $E^{\text{gén}}_\bullet GL(n,F)$ dans $B_\bullet GL(n,F)$, on prouve que $B^{\text{gén}}_\bullet GL(n,F) \hookrightarrow B_\bullet GL(n,F)$ induit un isomorphisme en homologie. On en déduit que le morphisme ci-dessus provient du morphisme $GL(n,F)$-équivariant du complexe singulier de $E^{\text{gén}}_\bullet GL(n,F)$ vers $C_\bullet(n)$ donné par

$$(g_0, g_1, ..., g_s) \mapsto (g_0(v), g_1(v), ..., g_s(v)).$$

$C_m(n)$ s'identifie au $\mathbf{Z}$-module libre engendré par les configurations de $m+1$ vecteurs de F^n en position générale : par configuration, on entend une orbite sous l'action de $GL(n,F)$. Noter que le groupe $Q_n(F)$ est un quotient de $C_{2n-1}(n)$.

Le complexe $(C_\bullet(n), d)$ a été introduit par Suslin [51] dans l'étude de la stabilité de l'homologie du groupe linéaire. Il est très voisin d'un complexe introduit par Gelfand et MacPherson [22].

6.2 Le complexe grassmannien

Dans $\mathbf{P}^r(F)$ identifié aux droites de F^{r+1}, on considère le simplexe "canonique" dont les sommets sont les droites engendrées par les vecteurs de la base canonique $(e_i)_i$ de F^{r+1}.

On note $G_q^n(F)$ la grassmannienne des sous-espaces projectifs de codimension n de $\mathbf{P}^{n+q}(F)$ qui sont transverses à toutes les faces du simplexe canonique. Soit $\mathbf{Z}G_q^n(F)$ le $\mathbf{Z}$-module libre d'ensemble de générateurs $G_q^n(F)$, on obtient un complexe

$$(7) \qquad \cdots \xrightarrow{\partial} \mathbf{Z}G_q^n(F) \xrightarrow{\partial} \mathbf{Z}G_{q-1}^n(F) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \mathbf{Z}G_0^n(F),$$

où pour $L \in G_q^n(F)$, $\partial L = \sum_{i=0}^{n+q+1} L \cap \langle s_0, ..., \hat{s}_i, ..., s_{n+q} \rangle$; ici la face $\langle s_0, ..., \hat{s}_i, ..., s_{n+q} \rangle$ est canoniquement identifiée à $\mathbf{P}^{n+q-1}(F)$ muni de son simplexe canonique. Noter que $G_0^n(F) \cong (F^\times)^n$.

Proposition 6.2.1 *Le complexe tronqué*

$$\cdots \xrightarrow{d} C_{n+q}(n) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} C_n(n)$$

s'identifie naturellement au complexe (7).

Preuve : si $(v_0, v_1, ..., v_{n+q})$ est un générateur de $\tilde{C}_{n+q}(n)$, le noyau de l'application linéaire $F^{n+q+1} \longrightarrow F^n$, $e_i \mapsto v_i$, ne dépend que de la configuration associée à $(v_0, v_1, ..., v_{n+q})$ et définit un élément de $G_q^n(F)$. On en déduit une bijection de $C_{n+q}(n)$ sur $\mathbf{Z}G_q^n(F)$ qui commute aux différentielles. L'inverse s'obtient comme suit : si V est un sous-espace de codimension n de F^{n+q+1}, les classes dans F^{n+q+1}/V des vecteurs de la base canonique de F^{n+q+1} définissent sans ambiguité une configuration de $p+q+1$ vecteurs de F^n en position générale. ∎

Il existe une variante affine du complexe grassmannien apparaissant comme quotient de celui-ci et dont l'homologie en degré zéro donne une intéressante présentation géométrique de la K-théorie de Milnor [23]. Ceci est aussi lié au travail de Suslin sur la stabilité de l'homologie du groupe linéaire où la K-théorie de Milnor apparaît comme première obstruction à la stabilité [51].

6.3 Morphisme du complexe grassmannien vers le complexe de Goncharov

Un des points cruciaux du travail de Goncharov est lié à l'existence d'un diagramme commutatif

$$(8) \qquad \begin{array}{ccccccc} C_6(3) & \xrightarrow{d} & C_5(3) & \xrightarrow{d} & C_4(3) & \xrightarrow{d} & C_3(3) \\ \downarrow & & \downarrow \phi_5 & & \downarrow \phi_4 & & \downarrow \phi_3 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}_3(F) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{B}_2(F) \otimes F^\times & \xrightarrow{\delta} & \bigwedge^3 F^\times \end{array}$$

Définissons les applications ϕ_i. Soit (v_0, v_1, v_2, v_3), la configuration associée aux quatre vecteurs de F^3 : v_0, v_1, v_2, v_3. En coordonnées, cette configuration est représentée par une matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

On a alors $\phi_3((v_0, v_1, v_2, v_3)) = a \wedge b \wedge c$. On obtient une définition sans coordonnées en antisymétrisant sur $\{0, 1, 2, 3\}$ l'expression $\det(v_0, v_1, v_2) \wedge \det(v_0, v_1, v_3) \wedge \det(v_0, v_2, v_3)$; noter que cette expression ne dépend que de la configuration (v_0, v_1, v_2, v_3).

On définit $\phi_4((v_0, v_1, v_2, v_3, v_4))$ comme l'antisymétrisé de $\frac{1}{2}\{r(\bar{v}_0|\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)\}_2 \otimes \det(v_0, v_2, v_3)$, où $r(\cdots)$ désigne le birapport des quatre droites de $\mathbf{P}^2(F)$: $\langle \bar{v}_0, \bar{v}_i \rangle$, $i = 1, ..., 4$. Cette expression est bien un invariant des configurations. Cela résulte du fait que la relation du dilogarithme est vérifiée dans $\mathcal{B}_2(F)$: on voit facilement que c'est une conséquence de la relation

$$\sum_{i=0}^{4} (-1)^i \{r(\bar{v}_0|\bar{v}_1, ..., \hat{\bar{v}}_i, ..., \bar{v}_4)\}_2 = 0;$$

mais si l'on considère la conique passant par les cinq points $\bar{v}_i$ comme un exemplaire de $\mathbf{P}^1(F)$, cette dernière relation est exactement celle du dilogarithme.

Enfin, on pose $\phi_5((v_0, ..., v_5)) = \mathbf{r}_3(\bar{v}_0, ..., \bar{v}_5)$.

Le fait que, dans le diagramme (8), le carré de droite commute est un exercice. La commutativité de celui du milieu utilise de façon astucieuse l'interprétation géométrique du trirapport (voir [27]) : une généralisation des arguments utilisés à ce propos, au cas où $n > 3$, ne semble pas évidente. Enfin le point clef est la relation $\phi_5 \circ d = 0$ qui donne, comme sous-produit, la fameuse identité fonctionnelle du trilogarithme découverte par Goncharov [26,27].

6.4 Identité fonctionnelle explicite pour le trilogarithme

Preuve du théorème 5.4.1 : posons $\hat{\phi}_5((v_0, ..., v_5)) = r_3(\bar{v}_0, ..., \bar{v}_5) \in \mathbf{Z}[F^\times]$. De la relation $\phi_4 \circ d = \delta \circ \phi_5$, on déduit

$$\delta \circ \hat{\phi}_5 \circ d = \phi_4 \circ d \circ d = 0,$$

d'où la relation dans $\mathcal{B}_2(F) \otimes F^\times$

$$\delta \circ (\sum_{i=0}^{6} (-1)^i \hat{\phi}_5((v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_6))) = 0.$$

Compte tenu de la relation qui précède et de la définition du groupe $\mathcal{R}_3(F)$, si l'on considère l'expression $\sum_{i=0}^{6}(-1)^i\hat{\phi}_5((v_0,...,\hat{v}_i,...,v_6))$ comme une expression rationnelle en les coordonnées des vecteurs v_i et que par une suite de spécialisations cette expression devienne nulle alors c'est que

$$\sum_{i=0}^{6}(-1)^i\hat{\phi}_5((v_0,...,\hat{v}_i,...,v_6)) \in \mathcal{R}_3(F).$$

C'est ce que fait effectivement Goncharov, en deux étapes : on peut d'abord se ramener à une expression qui correspond géométriquement à la configuration dégénérée de la figure 3 donnée en coordonnées par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & b & 1 \end{bmatrix}.$$

Goncharov a calculé cette expression $R(a,b,c)$. On a

$$R(a,b,c) = \sum_{\text{cyclique}} \left(\{ca-a+1\} + \left\{\frac{ca-a+1}{ca}\right\} + \{c\} + \left\{\frac{bc-c+1}{(ca-a+1)b}\right\} \right.$$

$$\left. - \left\{\frac{ca-a+1}{c}\right\} + \left\{\frac{(bc-c+1)a}{ca-a+1}\right\} - \left\{\frac{bc-c+1}{(ca-a+1)bc}\right\} - \{1\} \right) + \{-abc\},$$

où $\sum_{\text{cyclique}} f(a,b,c) = f(a,b,c) + f(b,c,a) + f(c,a,b)$. Si on effectue sur $R(a,b,c)$ les spécialisations $a=b$, puis $b=1$ et $c=0$, on obtient 0, d'où le théorème 5.4.1. ∎

Corollaire 6.4.1 *Le trilogarithme $\mathcal{D}_3$ vérifie l'identité fonctionnelle*

$$\tilde{\mathcal{D}}_3(R(a,b,c)) = 0.$$

C'est une conséquence de la définition 3.1 et de ce qui précède pour $F = \mathbf{C}$. ∎

Remarquons que l'on a un diagramme analogue à (8) pour $n = 1, 2$. Dans le cas $n = 1$, c'est trivial; pour $n = 2$, il prend la forme

$$\begin{array}{ccccc} C_4(2) & \xrightarrow{d} & C_3(2) & \xrightarrow{d} & C_2(2) \\ \downarrow & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \phi_2 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}_2(F) & \xrightarrow{\delta} & \bigwedge^2 F^\times \end{array}$$

où ϕ_3 s'écrit à l'aide du birapport.

Pour $n = 1, 2, 3$, on en déduit un morphisme $H_{2n-1}(C_\bullet(n)) \longrightarrow \mathbf{B}_n(F)$. En le composant avec le θ_* de (6), on en déduit pour $n = 1, 2, 3$ un morphisme

$$\rho_n : H_{2n-1}(GL(n,F), \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{B}_n(F). \tag{9}$$

7 LE RÉGULATEUR DE BOREL

7.1 La classe de Borel

Dans la suite, N désigne un entier assez grand et toujours $\geq n$. Précisons les notations de divers invariants homologiques attachés à $GL(N,\mathbf{C})$ que nous utiliserons dans la suite. On note $GL(N,\mathbf{C})^\delta$ le groupe $GL(N,\mathbf{C})$ considéré comme groupe discret. Le groupe $H^*(GL(N,\mathbf{C})^\delta, A(n))$ désigne la cohomologie au sens d'Eilenberg-MacLane, à coefficients dans le module trivial $A(n)$ où A est un sous-anneau de $\mathbf{C}$: elle coïncide avec la cohomologie singulière du classifiant $BGL(N,\mathbf{C})^\delta$.

On note $H^*_{cont}(GL(N,\mathbf{C}), A(n))$ la cohomologie de Van-Est des cochaînes continues du groupe topologique $GL(N,\mathbf{C})$. $H^*(BGL(N,\mathbf{C}), A(n))$ désigne la cohomologie singulière de l'espace topologique simplicial $BGL(N,\mathbf{C})$, mais on rencontrera aussi la cohomologie singulière de $GL(N,\mathbf{C})$ considéré comme espace topologique, notée $H^*_{sing}(GL(N,\mathbf{C}), A(n))$.

Proposition 7.1.1 *Il existe un isomorphisme canonique*

$$H^*_{sing}(GL(N,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n)) \xrightarrow{\cong} H^*_{cont}(GL(N,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n-1)).$$

La preuve combine plusieurs isomorphismes. Le groupe unitaire $U(N,\mathbf{C})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL(N,\mathbf{C})$, $GL(N,\mathbf{C})/U(N,\mathbf{C})$ est donc contractile et on obtient un isomorphisme

$$H^*_{sing}(GL(N,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n)) \xrightarrow{\cong} H^*_{sing}(U(N,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n)).$$

Comme $U(N,\mathbf{C})$ est compact, les groupes $H^*_{sing}(U(N,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n))$ sont isomorphes aux groupes de cohomologie $H^*(u(N,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n))$ de l'algèbre de Lie $u(N,\mathbf{C})$.

D'autre part, le classique "unitarian trick" de Weyl donne une suite d'isomorphismes sur les homologies relatives d'algèbres de Lie

$$H^*(u(N,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n+1)) \xrightarrow{\cong} H^*(gl(N,\mathbf{C}),\mathbf{C}) \xrightarrow{\cong} H^*(gl(N,\mathbf{C})\times gl(N,\mathbf{C}), gl(N,\mathbf{C});\mathbf{C})$$

$$\xrightarrow{\cong} H^*(gl(N,\mathbf{C})\otimes\mathbf{C}, u(N,\mathbf{C})\otimes\mathbf{C};\mathbf{C}) \xrightarrow{\cong} H^*(gl(N,\mathbf{C}), u(N,\mathbf{C});\mathbf{R}(n)),$$

où $gl(N,\mathbf{C})$ est considérée comme sous-algèbre de Lie de $gl(N,\mathbf{C})\times gl(N,\mathbf{C})$ par l'application : $x \mapsto (x,\bar{x})$.

Enfin, Un théorème de Van-Est [56], utilisant l'action de $GL(N,\mathbf{C})$ dans le complexe de de Rham de $GL(N,\mathbf{C})/U(N,\mathbf{C})$, fournit un isomorphisme

$$H^*(gl(N,\mathbf{C}), u(N,\mathbf{C});\mathbf{R}(n)) \xrightarrow{\cong} H^*_{cont}(GL(N,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n)).$$

On sait d'après [16] que cet isomorphisme s'explicite à l'aide d'une application de l'espace des formes différentielles invariantes sur $GL(N,\mathbf{C})/U(N,\mathbf{C})$ à valeurs dans les cochaînes continues homogènes sur $GL(N,\mathbf{C})$

$$\omega \mapsto \left((g_0,...,g_n) \mapsto \int_{\Delta(g_0,...,g_n)} \omega \right),$$

où Δ est une certaine opération associant à $(g_0,...,g_n)$ un n-simplexe singulier de l'espace homogène $GL(N,\mathbf{C})/U(N,\mathbf{C})$ de sommets $g_0e,...,g_ne$, où e est fixé.

En combinant tous ces isomorphismes, on en déduit la proposition. ∎

Il est classique que $H^*_{sing}(GL(N,\mathbf{C}),\mathbf{C}) \cong \bigwedge^*_{\mathbf{C}}(u_1,u_2,...,u_N)$, l'algèbre extérieure sur des générateurs u_i de degré $2i-1$ et que

$$H^*_{sing}(BGL(N,\mathbf{C}),\mathbf{C}) \cong \mathbf{C}[c_1,c_2,...,c_N],$$

où $c_i \in H^{2i}_{sing}(BGL(N,\mathbf{C}),\mathbf{Z}(i))$ est la $i^{ème}$ classe de Chern universelle (avec la convention de normalisation des géomètres algébristes). On peut alors normaliser les u_i de telle sorte que la transgression dans la suite spectrale de Serre du $GL(N,\mathbf{C})$-fibré principal universel sur $GL(N,\mathbf{C})$ [11] envoie u_i sur c_i.

On définit la *classe de Borel* relative à N comme l'image b'_n de u_n par l'isomorphisme $H^{2n-1}_{sing}(GL(N,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n)) \xrightarrow{\cong} H^{2n-1}_{cont}(GL(N,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n-1))$ de la proposition. Toutes ces classes se correspondent et nous utiliserons une seule notation. La *classe de Borel universelle* b_n est la classe de $H^{2n-1}(BGL(\mathbf{C})^\delta,\mathbf{R}(n-1))$ obtenue à partir de b'_n par la suite d'applications

$$H^{2n-1}_{cont}(GL(N,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n-1)) \longrightarrow H^{2n-1}(GL(N,\mathbf{C})^\delta,\mathbf{R}(n-1)) \xleftarrow{\cong} H^{2n-1}(GL(\mathbf{C})^\delta,\mathbf{R}(n-1)),$$

où le dernier isomorphisme provient de la stabilité.

7.2 Le régulateur de Borel

Définissons le régulateur de Borel. La classe de Borel universelle $b_n \in H^{2n-1}(BGL(\mathbf{C})^\delta,\mathbf{R}(n-1))$ induit un morphisme $H_{2n-1}(BGL(\mathbf{C})^\delta,\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{R}(n-1)$ qui, composée avec le morphisme de Hurewicz

$$K_{2n-1}(\mathbf{C}) \cong \pi_{2n-1}(BGL(\mathbf{C})^+) \longrightarrow H_{2n-1}(BGL(\mathbf{C})^+,\mathbf{Z}) \cong H_{2n-1}(BGL(\mathbf{C})^\delta,\mathbf{Z}),$$

donne une application "régulateur"

$$\lambda : K_{2n-1}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{R}(n-1).$$

Dans la situation $n = 1$ on retrouve l'application $\log|\ |$ utilisée dans le classique plongement multiplicatif de Dirichlet.

Pour F un corps de nombres, notons Σ l'ensemble des plongements de F dans $\mathbf{C}$. Borel considère le morphisme

$$K_{2n-1}(F) \xrightarrow{\prod_{\sigma\in\Sigma}\sigma} \prod_{\sigma\in\Sigma} K_{2n-1}(\mathbf{C}) \xrightarrow{\prod\lambda} (\mathbf{R}(n-1))^d.$$

Le comportement de la classe de Borel, sous l'action de la conjugaison, montre que l'on peut considérer cette application comme un morphisme

$$r_{Bor} : K_{2n-1}(F) \longrightarrow \mathbf{R}^{d_n},$$

où $\mathbf{R}^{d_n}$ est identifié aux éléments $(x_\sigma)_\sigma \in (\mathbf{R}(n-1))^d$ tels que $\overline{x_\sigma} = x_{\overline{\sigma}}$ de manière compatible avec la $\mathbf{Q}$-structure provenant de l'injection de $\mathbf{Q}(n-1)$ dans $\mathbf{R}(n-1)$: c'est le *régulateur de Borel.*

8 LE RÉGULATEUR DE BEILINSON

8.1 Cohomologie de Deligne : quelques morphismes utiles [14,20]

Pour X est une variété complexe lisse quasi-projective, on note $\overline{X}$ une complétion de X par des diviseurs à croisements normaux, et on pose $D = \overline{X}\backslash X$.

Soit $\mathcal{A}^\bullet(\overline{X}, \log D)$ le complexe de de Rham des C^∞-formes différentielles à valeurs complexes, à singularités logarithmiques le long de D. On a $\mathcal{A}^m(\overline{X}, \log D) = \oplus_{p+q=m} \mathcal{A}^{p,q}(\overline{X}, \log D)$, où $\mathcal{A}^{p,q}$ désigne les formes de type (p,q). Soit $F^n\mathcal{A}^m = \oplus_{p+q=m, p\geq n} \mathcal{A}^{p,q}$ la filtration de Hodge. Pour A un sous-anneau de $\mathbf{C}$ notons $S^\bullet(X, \mathbf{C}/A(n))$ le complexe des chaînes singulières sur X. Considérons le morphisme de complexes donné par l'intégration des formes

$$F^n\mathcal{A}^\bullet(\overline{X}, \log D) \longrightarrow \mathcal{A}^\bullet(X) \xrightarrow{\int} S^\bullet(X, \mathbf{C}/A(n)),$$

la cohomologie de Deligne-Beilinson est définie par

$$H^*_{\mathcal{D}}(X, A(n)) := H^*(\text{cône}[F^n\mathcal{A}^\bullet(\overline{X}, \log D) \longrightarrow S^\bullet(X, \mathbf{C}/A(n))][-1]).$$

Si $A = \mathbf{R}$, on peut donner de cette définition la variante suivante. Soit $F^n\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D)$ le complexe de de Rham des faisceaux de formes méromorphes sur $\overline{X}$ à pôles logarithmiques le long de D

$$0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \Omega^n_{\overline{X}}(\log D) \longrightarrow \Omega^{n+1}_{\overline{X}}(\log D) \longrightarrow \cdots$$

Notons d'autre part $\underline{B}_X^\bullet$ les faisceaux de formes différentielles réelles et posons $\underline{B}_X^\bullet(n) = (2\pi i)^n \underline{B}_X^\bullet$. On a un morphisme de complexes de faisceaux provenant de $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}/\mathbf{R}(n) \cong \mathbf{R}(n-1)$

$$F^n\Omega_{\overline{X}}^\bullet(\log D) \longrightarrow \underline{B}_X^\bullet(n-1).$$

$H_{\mathcal{D}}^\bullet(X, \mathbf{R}(n))$ est alors l'hypercohomologie du complexe de faisceaux

$$\underline{\mathbf{R}(n)}_X := \text{cône}[F^n\Omega_{\overline{X}}^\bullet(\log D) \longrightarrow \underline{B}_X^\bullet(n-1)][-1].$$

Ces définitions se prolongent aux variétés simpliciales complexes quasi-projectives, en particulier à $BGL(N, \mathbf{C})$ et $BGL(N, \mathbf{C})^\delta$. La proposition suivante sera utile pour relier certaines classes intervenant dans la définition des régulateurs de Borel et de Beilinson (voir le diagramme (11)).

Proposition 8.1.1 *1. Le morphisme naturel*

$$H^{*-1}(BGL(N, \mathbf{C})^\delta, \mathbf{C}/A(n)) \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^*(BGL(N, \mathbf{C})^\delta, A(n))$$

est un isomorphisme.

2. On a un isomorphisme

$$H_{\mathcal{D}}^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{Z}(n)) \longrightarrow H^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{Z}(n)).$$

3. On a un morphisme naturel

$$H_{\mathcal{D}}^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{R}(n)) \longrightarrow H_{\text{cont}}^{2n-1}(GL(N, \mathbf{C}), \mathbf{R}(n-1)).$$

Le *1.* résulte de la longue suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}(X, \mathbf{C}/A(n)) \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^k(X, A(n)) \longrightarrow F^nH^k(X, \mathbf{C}) \longrightarrow \cdots$$

appliquée à $X = BGL(m, \mathbf{C})^\delta$. Dans le *2.*, $F^nH^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{C})$ est engendré par l'image de la classe de Chern $c_n \in H^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{Z}(n))$ et de plus

$$H^{2n-1}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{C}/\mathbf{Z}(n)) = H^{2n}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{C}/\mathbf{Z}(n)) = 0.$$

Enfin le morphisme de la cohomologie de Deligne vers la cohomologie des cochaînes continues vient de la projection

$$\underline{\mathbf{R}(n)}_X \longrightarrow \underline{B}_X^0(n-1)[-1].$$

8.2 Comparaison des régulateurs de Borel et de Beilinson

Revenons à la cohomologie de Deligne-Beilinson. Si X est une variété quasi-projective lisse sur $\mathbf{Q}$ et F un corps de caractéristique nulle, on note $X_F = X \times_{Spec\,\mathbf{Q}} Spec\,F$ la variété obtenue par changement de base. On définit

$$H^*_{\mathcal{D}}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n)) := H^*_{\mathcal{D}}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{R}(n))^{Gal(\mathbf{C}/\mathbf{R})}$$

On a de plus $H^1_{\mathcal{D}}(Spec\,\mathbf{C}, \mathbf{R}(n)) = \mathbf{R}(n-1)$ et $H^i_{\mathcal{D}}(Spec\,\mathbf{C}, \mathbf{R}(n)) = 0$ pour $i \neq 1$. Considérons maintenant un corps de nombres F, on a

$$H^1_{\mathcal{D}}((Spec\,F)_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n)) = \left(\bigoplus_{\sigma\in\Sigma} H^1_{\mathcal{D}}(Spec\,\mathbf{C}, \mathbf{R}(n))\right)^{Gal(\mathbf{C}/\mathbf{R})}$$

et ce groupe coïncide avec l'ensemble des suites $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ d'éléments de $\mathbf{R}(n-1)$, vérifiant $x_{\overline{\sigma}} = \overline{x_\sigma}$ pour tout $\sigma \in \Sigma$. Il en résulte que $H^1_{\mathcal{D}}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n))$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension d_n. On pourra donc considérer le régulateur de Borel comme étant à valeurs dans $H^1_{\mathcal{D}}((Spec\,F)_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n))$.

On dispose de classes de Chern en cohomologie de Deligne [1,48,20], les classes de Chern-Beilinson. A l'aide de la classe de Chern-Beilinson $c^B_n \in H^{2n}_{\mathcal{D}}(BGL(N, \mathbf{C}), \mathbf{R}(n))$ du fibré universel sur $BGL(N, \mathbf{C})$, on construit [48, 50] des morphismes

$$c_{i,n} : K_i(X) \longrightarrow H^{2n-i}_{\mathcal{D}}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n)), \tag{10}$$

où $K_i(X)$ est la K-théorie au sens des schémas [45]. Si $X = Spec\,F$ il reste un seul morphisme non trivial qui est le *régulateur de Beilinson*

$$r_{Bei} : K_{2n-1}(F) \longrightarrow H^1_{\mathcal{D}}((Spec\,F)_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n)).$$

Le théorème qui suit était connu de Beilinson avec un coefficient de proportionnalité rationnel (modulo des éléments décomposables) [1,47]. Dupont, Hain et Zucker [18] ont mis un point final au problème de la comparaison des deux régulateurs r_{Bor} et r_{Bei}.

Théorème 8.2.1 ([18]) *Le régulateur de Borel est le double du régulateur de Beilinson.*

La preuve se ramène à la comparaison des classes de Borel et de Chern-Beilinson. Pour les détails, utilisant intensivement les techniques simpliciales, voir l'article [18]. Le diagramme qui suit éclaire les relations entre les différentes classes de cohomologie sous-jacentes à la question

$$
\begin{array}{ccccc}
c_n^B \in & H^{2n}_{\mathcal{D}}(BGL(N,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n)) & \xrightarrow{\cong} & H^{2n}(BGL(N,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n)) & \ni c_n \\
 & \downarrow & \searrow & & \\
'c_n^B \in & H^{2n}_{\mathcal{D}}(BGL(N,\mathbf{C})^\delta,\mathbf{R}(n)) & & H^{2n}(BGL(N,\mathbf{C}),\underline{B}^0(n-1)[-1]) & \\
 & \uparrow\cong & & \| & \\
\tfrac{1}{2}b_n \in & H^{2n-1}(BGL(N,\mathbf{C})^\delta,\mathbf{R}(n-1)) & \leftarrow & H^{2n-1}_{cont}(GL(N,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n-1)) & \ni \tfrac{1}{2}b'_n
\end{array}
\tag{11}
$$

Dans ce diagramme commutatif, les morphismes sont ceux de la proposition 8.1.1 et toutes les classes se correspondent. Rappelons que c_n et c_n^B sont les classes de Chern et de Chern-Beilinson du fibré universel sur $BGL(N,\mathbf{C})$ et on a noté $'c_n^B$ la classe de Chern-Beilinson du fibré plat canonique sur $BGL(N,\mathbf{C})^\delta$.

En fait Dupont, Hain et Zucker ne comparent pas directement les classes de Borel et Beilinson mais les relient à la classe de Cheeger-Simons $\hat{c}_n$ du fibré plat universel sur $BGL(\mathbf{C})^\delta$. Rappelons que $\hat{c}_n$ est un élément de $H^{2n-1}(BGL(\mathbf{C})^\delta,\mathbf{C}/\mathbf{Z}(n))$ qui relève la classe de Chern entière correspondante du fibré plat canonique sur $BGL(\mathbf{C})^\delta$. Le diagramme suivant, où toutes les classes se correspondent, situe la relation entre $\hat{c}_n$ et les classes de Chern entières.

$$
\begin{array}{ccccc}
\hat{c}_n \in H^{2n-1}(BGL(N,\mathbf{C})^\delta,\mathbf{C}/\mathbf{Z}(n)) & \longrightarrow & {}'c_n \in H^{2n}(BGL(N,\mathbf{C})^\delta,\mathbf{Z}(n)) & \leftarrow & c_n \in H^{2n}(BGL(N,\mathbf{C}),\mathbf{Z}(n)) \\
 & \cong\searrow & & & \uparrow\cong \\
 & & {}'c_n^B \in H^{2n}_{\mathcal{D}}(BGL(N,\mathbf{C})^\delta,\mathbf{Z}(n)) & \leftarrow & c_n^B \in H^{2n}_{\mathcal{D}}(BGL(N,\mathbf{C}),\mathbf{Z}(n))
\end{array}
$$

Preuve du théorème 2.4.1 Le morphisme $c_{i,n}$ de (10) transforme l'opération d'Adams ψ^k en la multiplication par k^n : voir par exemple [48]. Le théorème 2.4.1 résulte alors immédiatement du théorème de Borel et du fait que $r_{Bor} = 2r_{Bei}$. ∎

9 LA CONJECTURE DE ZAGIER

9.1 Classe de Borel et polylogarithmes

Un problème intéressant est celui de d'expliciter la classe de Borel $b'_n \in H^{2n-1}_{cont}(GL(n,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n-1))$ à l'aide d'un cocycle, sinon continu, au moins mesurable et localement borné; on sait que, sur un groupe localement compact, la cohomologie continue coïncide avec la cohomologie des cochaînes mesurables et localement bornées. Il est remarquable que pour $n = 1, 2, 3$, il soit possible d'exprimer un tel cocyle à l'aide du n-logarithme $\mathcal{D}_n$ et du n-rapport $\mathbf{r}_n$.

Théorème 9.1.1 *On a pour $n = 1, 2, 3$ un diagramme commutatif à un facteur de $\mathbf{Q}^\times$ près*

$$H_{2n-1}(BGL(n,\mathbf{C})^\delta, \mathbf{Q}) \begin{array}{c} \overset{f_n}{\nearrow} \\ \\ \underset{\rho_n}{\searrow} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{R}(n-1) \\ \uparrow \tilde{\mathcal{D}}_n \\ \mathbf{B}_n(F)_\mathbf{Q} \end{array}$$

où, $\overset{f_n}{\to}$ est la flèche associée à la classe de $H^{2n-1}(GL(n,\mathbf{C})^\delta, \mathbf{R}(n-1))$ image de b'_n par le morphisme $GL(n,\mathbf{C})^\delta \longrightarrow GL(n,\mathbf{C})$ et ρ_n a été défini en (9).

Pour $n = 1$, b'_1 est donné par le cocycle continu associé au morphisme $\mathbf{C}^\times \longrightarrow \mathbf{R}, z \mapsto \log|z|$.

Si $n = 2$, reprenons la description du groupe $B_2(F)$ du 4.2 à l'aide des tétraèdres idéaux de l'espace hyperbolique de dimension 3. La fonction de Bloch-Wigner $\mathcal{D}_2$ induit un morphisme

$$B_2(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{R}(1)$$

$$\langle a_1, a_2, a_3, a_4\rangle \mapsto \mathcal{D}_2([\tilde{r}_2(a_1, a_2; a_3, a_4)]),$$

et $\mathcal{D}_2([\tilde{r}_2(a_1, a_2; a_3, a_4)])$ n'est autre que le volume du tétraèdre idéal de sommets a_1, a_2, a_3, a_4 à un facteur $\sqrt{-1}$ près. b'_n est alors représenté par le 3-cocycle continu donné sous forme homogène par $(g_0, g_1, g_2, g_3) \mapsto \mathcal{D}_2(\tilde{r}_2(g_0(\infty), g_1(\infty); g_2(\infty), g_3(\infty))$. Cette classe de cohomologie continue a été introduite par Bloch et Wigner [7] (voir aussi [16] et [30]).

Lorsque $n = 3$, le théorème est dû à Goncharov. Une classe analogue a été construite par Yang en collaboration avec Hain, en utilisant les polylogarithmes au sens de Gelfand, Hain et MacPherson [58]. Mais la construction de cette classe ne fait pas apparaître le 3-rapport, bien qu'il soit sans doute implicite dans la construction.

La classe de cohomologie associée à $\tilde{\mathcal{D}}_3 \circ \rho_3$ est représentée par le cocycle mesurable donné en notation homogène par $\tilde{\mathcal{D}}_3(\mathbf{r}_3(g_1 v, ..., g_6 v))$, si $(g_1, ..., g_6)$ est v-générique et par 0, sinon (le choix de $v \neq 0$ est arbitraire); c'est un cocycle d'après 5.4.2 . Soit $g \in H^5_{cont}(GL(3,\mathbf{C}), \mathbf{R}(2))$ la classe de cohomologie continue ainsi obtenue, pour prouver qu'elle coïncide à un facteur de $\mathbf{Q}^\times$ près avec la classe de Borel b'_n, Goncharov la relève en une classe $\tilde{g} \in H^6_\mathcal{D}(BGL(3,\mathbf{C}), \mathbf{R}(3))$ (voir le diagramme (11)) par des formules explicites faisant intervenir le logarithme et le dilogarithme. Il peut alors comparer la classe $\tilde{g}$ à la classe de Chern-Beilinson $c_n^B \in H^6_\mathcal{D}(BGL(3,\mathbf{C}), \mathbf{R}(3))$; cela utilise la totalité du diagramme (8).

9.2 Preuve de la conjecture de Zagier pour $n = 3$

Pour $n = 3$ on associe à g par la suite d'applications

$$H^5_{cont}(GL(3,\mathbf{C}),\mathbf{R}(2)) \xleftarrow{\cong} H^5_{cont}(GL(5,\mathbf{C}),\mathbf{R}(2)) \longrightarrow H^5(GL(5,\mathbf{C})^\delta,\mathbf{R}(2)) \xleftarrow{\cong} H^5(GL(\mathbf{C})^\delta,\mathbf{R}(2)),$$

une classe de $H^5(GL(\mathbf{C})^\delta, \mathbf{R}(2))$; on en déduit pour tout corps de nombres, comme dans la construction du régulateur de Borel, une application régulateur

$$r_g : K_5(\mathbf{F}) \longrightarrow H^1_{\mathcal{D}}((Spec\, F)_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(3))$$

qui coïncide à un facteur de $\mathbf{Q}^\times$-près avec le régulateur de Borel.

En combinant cela avec le théorème de Borel et la conjecture du rang pour K_5, vraie d'après Yang [57] pour un corps de nombre distinct de $\mathbf{Q}$, on obtient la conjecture de Zagier pour $n = 3$ et $F \neq \mathbf{Q}$. On retrouve aussi facilement le cas $n = 2$.

Goncharov prouve la conjecture de Zagier pour $n = 3$ sans utiliser la conjecture du rang et en fait la redémontre y compris pour $F = \mathbf{Q}$; cela résulte entre autres du théorème suivant

Théorème 9.2.1 *Pour tout corps infini F le morphisme $\rho_3 : H_5(GL(3,F),\mathbf{Q}) \longrightarrow H^1(\Gamma^\bullet(F,3))_{\mathbf{Q}}$ vérifie $\rho_3|_{H_5(GL(2,F),\mathbf{Q})} = 0$.*

Il se prolonge en un morphisme $\rho'_3 : H_5(GL(5,F),\mathbf{Q}) \longrightarrow H^1(\Gamma^\bullet(F,3))_{\mathbf{Q}}$ satisfaisant à $Im\ \rho_3 = Im\ \rho'_3$.

Si $\mathbf{F} = \mathbf{C}$, la classe de cohomologie associée à $\tilde{\mathcal{D}}_3 \circ \rho'_3$ provient d'une classe de cohomologie continue correspondant à g dans l'isomorphisme restriction $H^5_{cont}(GL(5,\mathbf{C}),\mathbf{R}(2)) \longrightarrow H^5_{cont}(GL(3,\mathbf{C}),\mathbf{R}(2))$.

La preuve de ce théorème utilise la construction de bicomplexes "grassmanniens" dont l'origine remonte à Suslin [53] et des arguments de dualité sur les configurations en géométrie projective. Quoique non explicite chez Goncharov, le dernier point paraît essentiel à la preuve de la conjecture du rang pour K_5.

9.3 La conjecture du rang pour K_5 d'un corps de nombres

Montrons comment le théorème 9.2.1 combiné avec le théorème de Borel et le théorème 2.4.1 entraîne la conjecture du rang pour $n = 5$ et tous les corps de nombres. On sait par 2.4.1 que $K_5(F) = K_5^{(3)}(F)$; d'autre part il résulte de 9.2.1 que $r_g(K_5^{[5]}(F)) = r_g(K_5^{[3]}(F))$ et $r_g(K_5^{[2]}(F)) = 0$. Comme le régulateur de Borel défini sur $K_5(F)_{\mathbf{Q}}$ est injectif, on en déduit $K_5^{[2]}(F) = 0$ et $K_5^{[5]}(F) = K_5^{[3]}(F)$ et par suite le gradué associé à la filtration par le rang se réduit à $K_5^{[3]}(F) \cong K_5^{(3)}(F)$.

9.4 Un mot sur l'approche de Yang

Dans leur approche de la conjecture de Zagier pour $n = 2, 3$, Hain et Yang [58] utilisent les polylogarithmes à la Gelfand-Hain-MacPherson [31]. Soit $\mathbf{G}_q^n(\mathbf{C})$ la grassmannienne $G_q^n(\mathbf{C})$, considérée comme variété complexe. On a (voir les paragraphes 6.1 et 6.2; on renvoie à [58] pour la définition précise de $H^*(\mathbf{G}^n_{\bullet -n}(\mathbf{C}), \mathbf{R}(n)))$ un morphisme "simplicial" $B^{\text{gén}}GL(n, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{G}^n_{\bullet -n}(\mathbf{C})$ qui induit un diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
c_n^B \in H_{\mathcal{D}}^{2n}(BGL(n,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n)) & \longrightarrow & c_n \in H^{2n}(BGL(n,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n)) & & \\
\downarrow & \searrow & & \searrow & \\
H^{2n-1}_{\text{cont}}(GL(n,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n-1)) & \longleftarrow & H_{\mathcal{D}}^{2n}(B^{\text{gén}}GL(n,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n)) & \longrightarrow & H^{2n}(B^{\text{gén}}GL(n,\mathbf{C}),\mathbf{R}(n)) \\
\uparrow & \nearrow & & \nearrow & \\
H_{\mathcal{D}}^{2n}(\mathbf{G}^n_{\bullet -n}(\mathbf{C}),\mathbf{R}(n)) & \longrightarrow & [Vol] \in H^{2n}(\mathbf{G}^n_{\bullet -n}(\mathbf{C}),\mathbf{R}(n)) & &
\end{array}$$

La forme $\frac{dz_1}{z_1} \wedge ... \wedge \frac{dz_n}{z_n}$ sur $\mathbf{G}_0^n(\mathbf{C}) \cong (\mathbf{C}^\times)^n$ définit [31] une classe notée $[Vol]$ de $H^{2n}(\mathbf{G}^n_{\bullet -n}(\mathbf{C}), \mathbf{R}(n))$. Un relèvement de cette classe dans $H_{\mathcal{D}}^{2n}(\mathbf{G}^n_{\bullet -n}(\mathbf{C}), \mathbf{R}(n))$ lorqu'il existe est appelé par Yang classe de Bloch-Wigner. C'est un théorème de Hain, MacPherson et Yang qu'un tel relèvement existe pour $n \leq 3$. Une classe de Bloch-Wigner fournit une classe de cohomologie continue dans $H^{2n-1}_{\text{cont}}(GL(n, \mathbf{C}), \mathbf{R}(n-1))$ que l'on veut comparer à la classe de Borel. Là encore il est plus aisé de considérer la classe de Chern-Beilinson c_n^B et on est alors ramené à relier la classe $[Vol]$ à la classe de Chern c_n, ce qui peut se faire essentiellement à travers $B^{\text{gén}}GL(n, \mathbf{C})$ [58].

La bibliographie qui suit contient quelques références non citées dans le texte mais en relation étroite avec le sujet.

Bibliographie

[1] A.A. Beilinson, *Higher regulators and values of L-functions*, Sovr. Probl. Math., 24 (1984), 181-238.

[2] A.A. Beilinson, *Polylogarithms and cyclotomic elements*, preprint.

[3] A. A. Beilinson, P. Deligne, *Motivic polylogarithms and Zagier conjecture*, preprint.

[4] A. A. Beilinson, A. B. Goncharov, V. V. Schechtman, A. N. Varchenko, *Projective geometry and algebraic K-theory*, Leningrad math. Jo. 2 (1991), 523-576.

[5] A.A. Beilinson, R. MacPherson, V.V. Schechtman, *Notes on motivic cohomology*, Duke Math. J., 54 (1987), 679-710.

[6] S. Bloch, *Higher regulators, algebraic K-theory and zeta functions of elliptic curves*, Lect. notes, Irvine, 1977.

[7] S. Bloch, *Applications of the dilogarithm function in algebraic K-theory and algebraic geometry*, Proc. Int. Symp. Alg. Geom., Kyoto (1977) 1-14.

[8] S. Bloch, *Algebraic cycles and algebraic K-theory*, Adv. in Math., 6 (1986), 267-304.

[9] A. Borel, *Cohomologie de SL_2 et valeurs de fonctions zêta aux points entiers*, Ann. Ec. Norm. Sup. Pisa, 4 (1974), 613-636.

[10] A. Borel, *Stable real cohomology of arithmetic groups*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 7 (1974), 235-274.

[11] H. Cartan, *La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal*, Colloque de topologie, Liège (1950), 57-71.

[12] P. Cartier, *Décomposition des polyèdres, le point sur le troisième problème de Hilbert*, Sém. Bourbaki 1984/85, exp. 646, Astérique 133/134 (1986), 261-288.

[13] J.L. Cathelineau, *Birapport et groupoïdes*, preprint.

[14] P. Deligne, *Théorie de Hodge III*, Publ. Math. IHES, 44 (1974), 5-27.

[15] P. Deligne, *Interprétation motivique de la conjecture de Zagier reliant polylogarithmes et régulateurs*, preprint 1990.

[16] J. Dupont, *The dilogarithm as a characteristic class for flat bundles*, J. of Pure and Appl. Alg., 44 (1987), 137-164.

[17] J. Dupont, *Characteristic classes for flat bundles and their formulas*, preprint, Aarhus 1993.

[18] J. Dupont, R. Hain, S. Zucker, *Regulators and characteristic classes of flat bundles*, preprint Aarhus 1992.

[19] J. Dupont, C. H. Sah, *Scissors congruences II*, Jo. Pure Appl. Alg., 25 (1982), 159-195.

[20] H. Esnault, E. Viehweg, *Deligne-Beilinson cohomology*, in Beilinson's conjectures on special values of L-functions, 43-81, Perspectives in Math. 1988, Acad. Press.

[21] A. Gabrielov, I.M. Gelfand, M.H. Losik, *Combinatorial calculation of characteristic classes*, Funct. Anal. i Priloz. 9 (1975), (1) 54-55, (2) 12-28, (3) 5-26.

[22] I. M. Gelfand, R. MacPherson, *Geometry in grassmannians and a generalization of the dilogarithm*, Adv. in Math. 44 (1982), 279-312.

[23] W. Gerdes, *Affine grassmannian homology and the homology of the general linear groups*, Duke Math. J., (1) 62 (1991), 85-103.

[24] W. Gerdes, *The linearization of higher Chow cycles of dimension one*, Duke Math. J., (1) 62 (1991), 105-109.

[25] A.B. Goncharov, *The classical polylogarithm, algebraic K-theory of fields and Dedekind zeta functions*, Bull. A. M. S., (1) 29 (1991), 155-161.

[26] A.B. Goncharov, *Geometry of configurations, polylogarithms and motivic cohomology*, preprint Max Planck Inst. 1992.

[27] A.B. Goncharov, *Polylogarithms and motivic Galois groups*, Proc. of the Seattle conf. on motives, Seattle july 1991, preprint.

[28] A.B. Goncharov, *Explicit construction of characteristic classes*, preprint Max Planck Inst. 1992.

[29] S. Govindachar, *Explicit weight two motivic cohomology complexes and algebraic K-theory*, K-theory, 6 (1992), 387-430.

[30] R. Hain, *Classical polylogarithms*, preprint.

[31] R. Hain, R. MacPherson, *Higher logarithms*, Illinois J. of Math., 34 (1990), 392-475.

[32] M. Hanamura, R. MacPherson, *Geometric construction of polylogarithms*, Duke Math. J., 70 (1993) 481-515.

[33] H. Hiller, *λ-ring and algebraic K-theory*, J. of Pure and Appl. Alg., 20 (1981), 241-266.

[34] W. Hulsbergen, *Conjectures in arithmetic algebraic geometry, a survey*, Aspects of Math., Vieweg 1992.

[35] K. Igusa, *The Borel regulator map on pictures*, preprint.

[36] M. Karoubi, *Classes caractéristiques de fibrés feuilletés, holomorphes ou algébriques*, preprint Univ. Paris VII, 52 (1993).

[37] C. Kratzer, *λ-structure en K-théorie algébrique*, Comm. Math. Helv., 55 (1980), 233-254.

[38] S. Lichtenbaum, *The construction of weight two arithmetic cohomology*, Inv. Math., 88 (1987), 183-215.

[39] J.L. Loday, *K-théorie algébrique et représentations de groupes*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., (4) 9 (1976), 309-377.

[40] J.L. Loday, *Symboles en K-théorie algébrique d'ordre supérieur*, Comptes rendus Acad. Sci. Paris, 292 (1981), 863-866.

[41] J. Milnor, *Algebraic K-theory and quadratic forms*, Inv. Math., 9 (1970), 318-344.

[42] J. Milnor, J. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math., (2) 81 (1965), 211-264.

[43] D. Mumford, *Projective invariants of projective structures and applications*, Proc. Int. Cong. of Math. 1962, Stockholm, 526-530.

[44] J. Oesterlé, *Polylogarithmes*, Sém. Bourbaki, 762 (1992-93).

[45] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory I*, Springer Lect. Notes in Math., 341 (1973), 85-197.

[46] D. Ramakrishnan, *Regulators, algebraic cycles and values of L-functions*, Contemp. Math., 83 (1989), 183-310.

[47] M. Rapoport, *Comparison of the regulator of Beilinson and of Borel*, in Beilinson's conjectures on special values of L-functions, 169-192, Perspectives in Math. 1988, Acad. Press.

[48] P. Schneider, *Introduction to the Beilinson Conjectures*, in Beilinson's conjectures on special values of L-functions, 1-35, Perspectives in Math. 1988, Acad. Press.

[49] Ch. Soulé, *Opérations en K-théorie algébrique*, Canad. J. of Math., 27 (1985), 488-550.

[50] Ch. Soulé, *Régulateurs*, Sém. Bourbaki 1984/85, exp. 644, Astérique 133/134 (1986), 237-253.

[51] A.A. Suslin, *Homology of GL_n, characteristic classes and Milnor K-theory*, Springer Lect. Notes in Math., 1046 (1989), 357-375.

[52] A.A. Suslin, *Algebraic K-theory of fields*, Proc. Int. Cong. of Math. 1986, Berkeley, 222-243.

[53] A.A. Suslin, *K_3 of a field and the Bloch group*, Proc. Steklov inst. of Math., 4 (1991), 217-239.

[54] J. Tate, *Symbols in Arithmetic*, Actes Cong. Int. Nice, 1970, tome 1, 201-211, Gauthier-Villars 1971.

[55] B. Totaro, *Milnor K-theory is the simplest part of algebraic K-theory*, K-theory, 6 (1992), 177-189.

[56] W.T. Van Est, *Group cohomology and Lie algebra cohomology in Lie groups*, Indag. Math., 15 (1953), 484-504.

[57] J. Yang, *On the real cohomology of arithmetic groups and the rank conjecture for number fields*, Ann. Ecole Norm. Sup., 25 (1992), 287-306.

[58] J. Yang, *The Hain-MacPherson third logarithm, the third Borel regulator and the values of Dedekind zeta function at 3*, preprint.

[59] D. Zagier, *Hyperbolic manifolds and special values of Dedekind zeta functions*, Inv. Math., 83 (1986), 285-301.

[60] D. Zagier, *Polylogarithms, Dedekind zeta functions and the algebraic K-theory of fields*, Proc. Texel Conf. on Arithm. Alg. Geometry 1989, Birkhäuser, Boston (1991), 391-430.

Jean-Louis CATHELINEAU
Laboratoire Jean Dieudonné
URA CNRS 168
Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 2

Astérisque

MICHEL LEDOUX

Inégalités isopérimétriques en analyse et probabilités

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 773, p. 343-375

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__343_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
45ème année, 1992-93, n° 773

Juin 1993

INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES EN ANALYSE ET PROBABILITÉS

par Michel LEDOUX

Les développements modernes de l'utilisation des inégalités isopérimétriques en analyse et probabilités trouvent leur origine en théorie locale des espaces de Banach, avec la démonstration de V. D. Milman [Mi1] (*voïr* aussi [F-L-M]), au début des années soixante-dix, du fameux théorème de A. Dvoretzky [Dv] sur les sections presque sphériques des corps convexes (*cf.* [Mi3]) Cette démonstration (présentée dans l'exposé de B. Maurey [Ma2]) s'appuie en effet sur l'inégalité isopérimétrique sur les sphères due à P. Lévy [Lé] et E. Schmidt [Sc], généralisée aux variétés riemanniennes à courbure de Ricci positive par M. Gromov [Gr1]. Outre son apport fonctionnel, V. D. Milman en dégage le principe général de concentration de la mesure qui a permis le développement et l'extension des idées isopérimétriques au delà de leur cadre géométrique propre habituel. Ce principe a éclairé de façon décisive plusieurs aspects géométriques en théorie locale des espaces de Banach (*voir* [M-S], [Mi2], [Pi3]...) et s'est révélé comme un outil majeur du calcul des probabilités dans les espaces de Banach [L-T2]. En particulier, M. Talagrand a tiré au cours des dernières années, dans de multiples applications probabilistes (mesures gaussiennes de dimension infinie, processus gaussiens, mesure de Wiener), toute la force de la version gaussienne de l'inégalité de Lévy-Gromov. Simultanément, et dans une remarquable série de travaux, il établit de nouvelles inégalités isopérimétriques et de concentration dans des produits d'espaces probabilisés par une analyse, très novatrice, de la notion isopérimétrique traditionnelle de grossissement. Ces inégalités, répondant à l'origine à des questions sur les évaluations et les propriétés limites des sommes de variables aléatoires vectorielles indépendantes, ouvrent aujourd'hui l'isopérimétrie sur un vaste champ d'applications. Outre le calcul des probabilités dans les espaces de Banach, celles-ci concernent à ce jour de nombreux domaines des probabilités, vectorielles, géométriques et combinatoires. La majeure partie de cet exposé est consacrée aux résultats de M. Talagrand sur les inégalités isopérimétriques et de concen-

tration des mesures gaussiennes et produits.

Dans une seconde partie, nous esquissons plus brièvement quelques idées sur des approches fonctionnelles du phénomène de concentration de la mesure et de l'isopérimétrie des opérateurs différentiels du second ordre de l'analyse et des probabilités (chaînes de Markov, laplacien des variétés riemanniennes, générateur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener, liens avec l'hypercontractivité). L'étude du théorème de Dvoretzky a en effet motivé parallèlement la recherche de démonstrations simplifiées de la concentration sphérique ou gaussienne. B. Maurey et G. Pisier [Pi1], [Pi3] ont ainsi découvert un argument simple suffisant au principe de démonstration proposé par V. D. Milman. Dans un cadre riemannien par exemple, cette méthode se traduit directement sur la courbure et le semigroupe de la chaleur, rejoignant les travaux de N. Varopoulos [Va3], [Va4], [V-SC-C] sur l'isopérimétrie et les estimations du noyau de la chaleur sur les variétés riemanniennes et les groupes de Lie. Par ces développements isopérimétriques, on voit ainsi interagir inégalités fonctionnelles, théorie des semigroupes, probabilités et géométrie.

L'inégalité isopérimétrique de Lévy-Gromov a joué, dans les développements qui nous occupent, un rôle important au carrefour de la géométrie riemannienne et euclidienne (par son application au théorème de Dvoretzky), de l'analyse, et des probabilités (par l'intermédiaire de sa version limite gaussienne). Soit V une variété riemannienne compacte connexe de dimension $N \geq 2$, d sa métrique riemannienne et μ sa mesure riemannienne normalisée. La mesure de surface correspondante sera notée abusivement de la même façon. Désignons par $R(V)$ l'infimum du tenseur de Ricci $\mathrm{Ric}(\cdot,\cdot)$ de V sur tous les vecteurs tangents de longueur un. Rappelons que si S_r^N est la sphère de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^{N+1}$, $R(S_r^N) = (N-1)/r^2$. On désigne ci-dessous par σ_r^N la mesure invariante par rotation normalisée sur S_r^N.

THÉORÈME 1. *Supposons que $R(V) = R > 0$ et associons à V la variété S_r^N de courbure constante égale à R (i.e. r vérifie $R(S_r^N) = (N-1)/r^2 = R$). Soit A une partie mesurable de V à bord ∂A suffisamment régulier et soit B une calotte sphérique ou boule géodésique de S_r^N de même mesure $\sigma_r^N(B) = \mu(A)$. Alors,*

$$\mu(\partial A) \geq \sigma_r^N(\partial B). \tag{1}$$

La démonstration de E. Schmidt [Sc] (qui ne concerne que les sphères) fait appel aux délicates techniques de symétrisation au sens de Steiner (pour des

démonstrations plus accessibles, *voir* [F-L-M], [Ben]). La démonstration de P. Lévy [Lé] (pour les surfaces à courbure positive) et M. Gromov [Gr1], [M-S], [G-H-L] (pour les variétés riemanniennes à courbure positive) s'appuie sur l'existence d'hypersurfaces minimales et sur les outils plus modernes de courants intégraux. L'égalité dans (1) ne peut avoir lieu que si V est une sphère elle-même et A une boule géodésique sur cette sphère, élément extrémal du problème isopérimétrique. Notons par ailleurs que le théorème 1, appliqué à des ensembles dont le diamètre tend vers 0, inclut l'inégalité isopérimétrique euclidienne classique indiquant, qu'à volume donné, les boules réalisent le minimum de surface.

Il est une formulation équivalente, mais peut-être moins connue, du théorème 1 à l'aide de voisinages qui présente l'avantage d'éviter les considérations de bord et de mesure de surface. Si A est une partie de V, on désigne par A_u son voisinage (ou grossissement isopérimétrique) pour la métrique d d'ordre $u \geq 0$, soit $A_u = \{x \in V;\ d(x, A) \leq u\}$. Une version du théorème 1 ([F-L-M]) indique alors que pour tout $u \geq 0$,

$$\mu(A_u) \geq \sigma_r^N(B_u). \tag{2}$$

Le lien entre (1) et (2) est fourni par une formule de contenu de Minkowski [B-Z], [Os]. C'est de cette formulation de l'isopérimétrie que V. D. Milman a dégagé le principe de concentration en s'intéressant à l'inégalité (2) pour des grandes valeurs de u plutôt que des valeurs infinitésimales. Dans le cadre du théorème de Lévy-Gromov, si A est de mesure suffisamment grande, par exemple $\mu(A) \geq \frac{1}{2}$, alors, en vertu du calcul explicite du voisinage d'une calotte de volume moitié, on voit que, pour tout $u \geq 0$,

$$\mu(A_u) \geq 1 - \exp\Big(-R\frac{u^2}{2}\Big), \tag{3}$$

soit un contrôle gaussien du complémentaire du voisinage d'ordre u de A uniformément en les ensembles A tels que $\mu(A) \geq \frac{1}{2}$, pour donc des valeurs de u relativement grandes. Autrement dit, A_u recouvre rapidement tout l'espace (au sens de la mesure). De façon essentiellement équivalente, si f est une fonction lipschitzienne sur V et si m est une médiane de f pour μ (*i.e.* $\mu(\{f \geq m\}) \geq \frac{1}{2}$ et $\mu(\{f \leq m\}) \geq \frac{1}{2}$), pour tout $u \geq 0$,

$$\mu\big(\{|f - m| \leq u\}\big) \geq 1 - 2\exp\big(-Ru^2/2\|f\|_{\mathrm{Lip}}^2\big). \tag{4}$$

Ainsi, f se concentre autour d'une valeur (moyenne) avec forte probabilité suivant le rapport $R/\|f\|_{\mathrm{Lip}}^2$. Ce phénomène, dont nous verrons qu'il a un caractère très général, a été rassemblé dans la littérature (*cf.* [M-S]) sous le nom de phénomène de concentration de la mesure.

Les estimées précédentes sont particulièrement intéressantes pour des familles de mesures comme par exemple les mesures σ_1^N sur les sphères unités S_1^N lorsque N devient grand pour lesquelles (4) par exemple s'écrit

$$\sigma_1^N\big(\{|f-m| \leq u\}\big) \geq 1 - 2\exp\big(-(N-1)u^2/\|f\|_{\mathrm{Lip}}^2\big).$$

C'est de ce jeu entre N grand, u de l'ordre de $1/\sqrt{N}$, et les tailles respectives de m et $\|f\|_{\mathrm{Lip}}$ pour f la jauge du convexe que V. D. Milman tire alors l'information nécessaire pour choisir au hasard des sections euclidiennes du convexe et démontrer de la sorte le théorème de Dvoretzky (*voir* [Ma2] et les références qui y sont citées).

Une fois formulé abstraitement sur un espace métrique (polonais) (X,d) muni d'une mesure de probabilité μ (ou d'une famille de mesures de probabilités), le phénomène de concentration de la mesure se traduit sur la fonction de concentration

$$\alpha(u) = \alpha\big((X,d;\mu);u\big) = \inf\big\{\mu(A_u);\ A \subset X, \mu(A) \geq \tfrac{1}{2}\big\}, \quad u \geq 0.$$

Il est remarquable que cette fonction de concentration puisse être contrôlée dans un très grand nombre de situations, le plus souvent par une décroissance gaussienne, comme plus haut. Si les arguments isopérimétriques font partie des outils privilégiés utilisés pour évaluer une fonction de concentration, le fait de s'intéresser ici aux grossissements A_u pour les grandes valeurs de u plutôt les valeurs infinitésimales (ce qui constitue réellement le problème isopérimétrique) rend l'étude du phénomène de concentration bien souvent assez différente de celle de l'isopérimétrie. En particulier, les techniques de réarrangement n'y sont pas souveraines et la structure plus large y offre plus de possibilités. Cette distinction se retrouve également dans le champ des applications. Divers outils nouveaux se sont ainsi développés. M. Gromov et V. D. Milman [G-M] ont par exemple démontré que si X est une variété riemannienne compacte, pour tout $u \geq 0$,

$$\alpha(u) \geq 1 - C\exp\big(-c\sqrt{\lambda_1}u\big)$$

(avec $C = \frac{3}{4}$ et $c = \log(\frac{3}{2})$) où λ_1 est la première valeur propre non triviale du laplacien sur X. Ils développent également diverses applications topologiques de la concentration dont certains théorèmes de points fixes. Du côté probabiliste, des inégalités de martingales mises en évidence par B. Maurey [Ma1] sont mises à profit en théorie locale des espaces de Banach (construction de sous-suites symétriques [Ma1], extensions du théorème de Dvoretzky, *voir* [Ma2], [M-S], [Pi1]). L'idée principale consiste ici à représenter, pour une bonne fonction f, la différence $f - \mathbb{E}(f)$ sous la forme d'une somme de différences de martingale

$d_i = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})$ pour une certaine filtration (finie) $(\mathcal{F}_i)_i$. Les raisonnements classiques sur les sommes de variables aléatoires indépendantes montrent de la même façon que si $\sum_i \|d_i\|_\infty^2 \leq 1$, pour tout $u \geq 0$,

$$\mathbb{P}\big(\{|f - \mathbb{E}(f)| \leq u\}\big) \geq 1 - 2e^{-u^2/2} \tag{5}$$

(*voir* [Az], [Ma1]). Un corollaire en est la concentration de la mesure de Haar μ sur $\{0,1\}^n$ muni de la distance de Hamming de la forme

$$\alpha(u) \geq 1 - C\exp\Big(-\frac{u^2}{Cn}\Big)$$

pour une certaine constante numérique $C > 0$. Ce résultat peut être établi à partir de la connaissance des éléments extrémaux de l'isopérimétrie ([Ha], [W-W]), mais V. D. Milman et G. Schechtman [M-S] le déduisent de l'inégalité (5). Ce même outil est utilisé pour étudier la concentration du groupe symétrique [Ma1].

Par ailleurs, la traduction gaussienne de l'inégalité de Lévy-Gromov et de son phénomène de concentration associé s'est révélée comme l'un des outils les plus puissants du calcul des probabilités dans les espaces de Banach. M. Talagrand en développe ainsi, lors de ces dernières années, de nombreuses conséquences à l'étude des mesures gaussiennes de dimension finie ou infinie dont nous présentons les aspects principaux ci-dessous. Mais, face aux questions laissées en suspens, notamment dans l'étude des sommes de variables aléatoires vectorielles indépendantes et de leurs propriétés limites, M. Talagrand invente alors de nouvelles inégalités isopérimétriques et de concentration dans des produits d'espaces de probabilités. Il analyse la propriété de concentration en étudiant des notions de voisinages et de grossissements dans ces structures, sortant en particulier du cadre métrique et géométrique classique. Ces inégalités abstraites sont démontrées par un principe simple, mais puissant, de récurrence sur le nombre de coordonnées. Il y a quelques mois, par un examen systématique de la méthode, M. Talagrand a enrichi encore ses résultats et ses applications qui touchent aujourd'hui à de nombreux thèmes probabilistes. Nous présentons, dans la première partie, les inégalités de M. Talagrand et quelques unes de leurs importantes applications.

Dans la deuxième partie de cet exposé, nous examinons quelques idées fonctionnelles permettant d'établir des propriétés isopérimétriques et de concentration. Ces idées ont aussi pour source l'étude du théorème de Dvoretzky. B. Maurey et G. Pisier [Pi1] (voir aussi [Pi2] sur les transformées de Riesz gaussiennes) ont en effet remarqué comment l'invariance par rotation sphérique ou gaussienne pouvait être mise à profit pour démontrer de façon simple la propriété de concentration nécessaire au théorème de Dvoretzky. Formulée dans le cadre de l'inégalité

de Lévy-Gromov, cette remarque fait appel à des outils de semigroupes et des inégalités fonctionnelles. À titre d'introduction, nous présentons brièvement cette démonstration sous la forme de la proposition suivante – cette proposition nous servira également pour une approche élémentaire de la concentration gaussienne –. La traduction fonctionnelle de la courbure à l'aide de la formule de Bochner et du semigroupe de la chaleur qui y est utilisée est à rapprocher des travaux de P. Li et S.-T. Yau [L-Y] et N. Varopoulos [Va5] sur les inégalités de Harnack paraboliques et, plus généralement, les estimations du noyau de la chaleur sur les variétés et les groupes de Lie dont nous développerons les aspects isopérimétriques dûs à N. Varopoulos [Va4], [Va5], [V-SC-C].

PROPOSITION 2. *Soit V comme dans le théorème 1 avec $R(V) = R > 0$; soit f une fonction lipschitzienne sur V telle que $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$ et de moyenne nulle. Alors, pour tout réel λ,*

$$\int \exp(\lambda f)\, d\mu \leq \exp\bigl(\lambda^2/2R\bigr).$$

Il est aisé de se convaincre avec l'inégalité de Tchebitcheff que le contenu de cette proposition est essentiellement équivalent à (4) (avec moyenne au lieu de médiane) et (3).

Démonstration. (*cf.* [Led2]) Soit ∇ le gradient sur V et Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami. D'après la formule de Bochner [B-G-M], pour toute fonction suffisamment régulière f sur V,

$$\frac{1}{2}\Delta\bigl(|\nabla f|^2\bigr) - \nabla f \cdot \nabla(\Delta f) = \mathrm{Ric}\,(\nabla f, \nabla f) + \bigl\|\mathrm{Hess}\,(f)\bigr\|_2^2.$$

En particulier,

$$\frac{1}{2}\Delta\bigl(|\nabla f|^2\bigr) - \nabla f \cdot \nabla(\Delta f) \geq R\,|\nabla f|^2 + \frac{1}{N}\,(\Delta f)^2. \tag{6}$$

De cette inégalité où interviennent courbure et dimension, nous userons seulement de la version sans terme dimensionnel

$$\frac{1}{2}\Delta\bigl(|\nabla f|^2\bigr) - \nabla f \cdot \nabla(\Delta f) \geq R\,|\nabla f|^2. \tag{7}$$

Considérons alors le semigroupe de la chaleur $P_t = \mathrm{e}^{t\Delta}$, $t \geq 0$, sur V et fixons f suffisamment régulière. Pour tout $s > 0$ fixé, soit $F(t) = P_t(|\nabla(P_{s-t} f)|^2)$, $t \leq s$.

En vertu de l'inégalité (7) appliquée à $P_{s-t}f$, $F'(t) \geq 2RF(t)$, $t \leq s$. Ainsi, la fonction $e^{-2Rt}F(t)$ est croissante sur l'intervalle $[0,s]$. Donc, pour tout $s \geq 0$,

$$|\nabla(P_s f)|^2 \leq e^{-2Rs} P_s(|\nabla f|^2). \tag{8}$$

Cette relation, en fait équivalente à (7), exprime une propriété de commutation entre les actions respectives du semigroupe et du gradient. C'est d'elle uniquement dont nous nous servons pour établir la proposition. Soit en effet une fonction régulière f sur V telle que $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$ et $\int f\,d\mu = 0$. Pour tout λ fixé, posons $G(s) = \int \exp(\lambda P_s f)\,d\mu$, $s \geq 0$. Comme $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$, notons que, en vertu de (8), $|\nabla(P_s f)|^2 \leq e^{-2Rs}$ pour tout s. Il vient, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} G(t) = 1 - \int_t^\infty G'(s)\,ds &= 1 - \lambda \int_t^\infty \left(\int \Delta(P_s f) \exp(\lambda P_s f)\,d\mu \right) ds \\ &= 1 + \lambda^2 \int_t^\infty \left(\int |\nabla(P_s f)|^2 \exp(\lambda P_s f)\,d\mu \right) ds \\ &\leq 1 + \lambda^2 \int_t^\infty e^{-2Rs} G(s)\,ds \end{aligned}$$

où nous avons utilisé une intégration par parties en la variable spatiale. Par itération, $G(0) \leq \exp(\lambda^2/2R)$, ce qui fournit le résultat pour toute f régulière, mais en général aussi par une approximation simple. La proposition est établie.

I. Concentration de la mesure et inégalités isopérimétriques dans les espaces produits d'après M. Talagrand

1. La concentration gaussienne

L'inégalité isopérimétrique gaussienne peut être considérée comme la version à l'infini de l'inégalité isopérimétrique sur les sphères S_r^N lorsque la dimension N et le rayon r tendent tous deux vers l'infini dans le rapport géométrique ($R(S_r^N) = (N-1)/r^2$) et probabiliste $r^2 = N$. C'est en effet une propriété ancienne attribuée (mais de façon erronée semble-t-il [D-F]) à H. Poincaré suivant laquelle la mesure gaussienne standard peut être obtenue comme limite des mesures uniformes $\sigma_{\sqrt{N}}^N$ sur les sphères $S_{\sqrt{N}}^N$ (convenablement projetées). Plus précisément, soit γ_n la mesure gaussienne canonique sur $\mathbb{R}^n$ de densité par rapport à la mesure de Lebesgue $(2\pi)^{-n/2}\exp(-|x|^2/2)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Alors, pour tout borélien A de $\mathbb{R}^n$, $\gamma_n(A)$ est la limite de $\sigma_{\sqrt{N}}^N(\Pi_{N+1,n}^{-1}(A))$ quand N tend vers l'infini, où $\Pi_{N+1,n}$ est la projection de $\mathbb{R}^{N+1}$ sur $\mathbb{R}^n$ ($N \geq n$). Cette propriété

a fait dire à H. P. McKean [MK] que la mesure de Wiener s'interprétait comme la mesure uniforme sur une sphère de dimension infinie et de rayon racine carrée de l'infini.

À l'aide de cette observation, C. Borell [Bo1] et V. N. Sudakov et B. S. Tsirel'son [S-T] déduisent indépendamment en 1974 la version gaussienne de l'isopérimétrie sur les sphères. Les grossissements isopérimétriques s'entendent ici simplement par rapport à la métrique euclidienne. Autrement dit, et pour des comparaisons futures, si $A \subset \mathbb{R}^n$ et $u \geq 0$, $A_u = A + B_2(0,u)$ où $B_2(0,u)$ est la boule euclidienne de centre l'origine et de rayon u.

THÉORÈME 3. *Soit A un borélien de $\mathbb{R}^n$ et soit H un demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n ; \langle x,h\rangle \leq a\}$, $|h| = 1$, $a \in \mathbb{R}$, de même mesure gaussienne que A : $\gamma_n(H) = \gamma_n(A)$; alors, pour tout $u \geq 0$,*

$$\gamma_n(A_u) \geq \gamma_n(H_u).$$

Les demi-espaces sont ainsi les éléments extrémaux de l'isopérimétrie gaussienne ; ils apparaissent en effet simplement comme la limite de Poincaré des calottes sphériques extrémales sur les sphères. Une démonstration plus intrinsèque, mais qui reste néanmoins délicate, du théorème 3 a été donnée par A. Ehrhard [Eh1], [Eh3] à partir d'une technique de symétrisation de Steiner adaptée à la mesure gaussienne.

En vertu de l'invariance par rotation gaussienne et du caractère produit de γ_n, la mesure gaussienne d'un demi-espace se calcule en fait en dimension 1, de sorte que l'isopérimétrie gaussienne est indépendante de la dimension, un trait souvent caractéristique du cadre gaussien. De fait, si Φ désigne la fonction de répartition de γ_1,

$$\Phi(t) = \gamma_1(]-\infty,t]) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

le théorème 3 s'exprime de façon équivalente par l'implication suivante : si $\gamma_n(A) = \Phi(a)$ (ou seulement $\geq$) pour un $a \in \mathbb{R}$, pour tout $u \geq 0$,

$$\gamma_n(A_u) \geq \Phi(a+u). \tag{9}$$

Sous cette forme se déduit immédiatement le phénomène de concentration pour γ_n : si $\gamma_n(A) \geq \frac{1}{2}$, on peut choisir $a = 0$ et, pour tout $u \geq 0$,

$$\gamma_n(A_u) \geq \Phi(u) \geq 1 - \mathrm{e}^{-u^2/2}.$$

Pour les fonctions, si f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ avec $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$ et si m est une médiane de f pour γ_n, pour tout $u \geq 0$,

$$\gamma_n\big(\{|f-m| \leq u\}\big) \geq 1 - 2\mathrm{e}^{-u^2/2}. \tag{10}$$

Cette concentration gaussienne peut être utilisée avec avantage en lieu et place de celle des sphères dans la démonstration du théorème de Dvoretzky [Pi1], [Pi3].

Si nous avons déduit la concentration (10) de l'isopérimétrie elle-même, elle peut aussi, bien entendu, s'établir directement par le schéma de la proposition 2. Il suffit d'y remplacer le semigroupe de la chaleur par le semigroupe gaussien $(U_t)_{t\geq 0}$, dit d'Hermite ou d'Ornstein-Uhlenbeck, de représentation intégrale (formule de Mehler)

$$U_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\big(\mathrm{e}^{-t} + (1-\mathrm{e}^{-2t})^{1/2} y\big)\, d\gamma_n(y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0.$$

Son générateur L est donné par $Lf(x) = \Delta f(x) - \langle x, \nabla f(x)\rangle$ pour toute fonction régulière f sur $\mathbb{R}^n$. Il vérifie trivialement la relation de commutation $\nabla U_t f = \mathrm{e}^{-t} U_t(\nabla f)$ nécessaire à la démonstration de la proposition 2. Cette commutation exprime de façon équivalente une formule de Bochner pour le générateur du second ordre L de dimension infinie ($N = \infty$) et de courbure constante égale à 1 (limite de $R(S^N_{\sqrt{N}})$ quand N tend vers l'infini) par l'inégalité (*cf.* (6) ou (7))

$$\frac{1}{2} L\big(|\nabla f|^2\big) - \nabla f \cdot \nabla(Lf) \geq (Lf)^2$$

pour toute bonne fonction f. La géométrie du générateur de Markov L est donc purement de dimension infinie, même sur un espace de dimension finie. Les conséquences abstraites de ces observations sont à l'origine de l'étude par D. Bakry et M. Émery des diffusions hypercontractives sous des hypothèses de courbure et dimension (inégalité (6)) de générateurs de Markov [B-É], [Ba].

D'un point de vue probabiliste, la démonstration de la proposition 2 pour γ_n revient à écrire une formule d'Itô ainsi que l'a noté B. Maurey [Pi1]. Pour toute fonction f suffisamment régulière sur $\mathbb{R}^n$,

$$f(B_1) - \mathbb{E} f(B_1) = \int_0^1 \nabla P_{1-t} f(B_t) \cdot dB_t$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $(P_t)_{t\geq 0}$ son semigroupe associé (le semigroupe de la chaleur). Il ne reste plus qu'à noter que l'intégrale stochastique a même loi que β_T où $(\beta_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien linéaire

et $T = \int_0^1 |\nabla P_{1-t} f(B_t)|^2 \, dt$. Ainsi, pour toute fonction lipschitzienne f telle que $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$, $T \leq 1$ presque sûrement et, si $u \geq 0$,

$$\mathbb{P}\big(\{f(B_1) - \mathbb{E}f(B_1) \geq u\}\big) \leq \mathbb{P}\big(\{\max_{0 \leq t \leq 1} \beta_t \geq u\}\big) \leq \mathrm{e}^{-u^2/2}$$

Bien que présentée ci-dessus pour la mesure gaussienne canonique de dimension finie, la forme même de (9) autorise, par des procédés tout à fait standard, l'extension de l'isopérimétrie et de sa concentration aux mesures gaussiennes (quelconques) de dimension infinie. C'est en effet en dimension finie qu'est concentrée toute la quintessence de l'isopérimétrie (et de bien d'autres propriétés) gaussiennes, son adaptation en dimension infinie reposant simplement sur une approximation finie-dimensionnelle convenable. Soit par exemple $(E, \mathcal{H}, \mu)$ un espace de Wiener abstrait, c'est-à-dire un espace de Banach réel séparable E muni d'une mesure gaussienne (centrée) μ d'espace de Hilbert autoreproduisant $\mathcal{H} \subset E$. De façon plus précise, la factorisation $E' \xrightarrow{i} \mathrm{L}^2(\mu) \xrightarrow{{}^t i} E$ où i est l'injection canonique définit un sous-espace hilbertien $\mathcal{H} = {}^t i(\mathrm{L}^2(\mu))$ appelé espace autoreproduisant de μ. Alors (*voir* [Bo1]), si $\mu(A) \geq \Phi(a)$, pour tout $u \geq 0$,

$$\mu_*(A_u) \geq \Phi(a + u), \tag{11}$$

où le grossissement A_u est entendu ici au sens de l'espace autoreproduisant comme la somme de Minkowski $A_u = A + B_{\mathcal{H}}(0, u)$, $B_{\mathcal{H}}(0, u)$ étant la boule de $\mathcal{H}$ de centre 0 et de rayon u. L'utilisation de la mesure intérieure μ_* est rendue nécessaire par le possible manque de mesurabilité de $A + B_{\mathcal{H}}(0, u)$. Il est à noter que si le support de μ est de dimension infinie, $\mu(\mathcal{H}) = 0$, rendant ainsi l'énoncé (11) plus surprenant peut-être que son analogue de dimension finie.

L'inégalité isopérimétrique gaussienne – et plus particulièrement la concentration associée – apparaît à ce jour comme la clef dans la compréhension de nombreuses questions touchant aux mesures et processus gaussiens. Mentionnons quelques unes de ses applications les plus frappantes. Historiquement, l'étude de l'intégrabilité des normes de vecteurs gaussiens a été un thème important d'investigation. Après la découverte de l'intégrabilité exponentielle par H. S. Landau et L. A. Shepp [L-S] (avec une démonstration déjà d'inspiration isopérimétrique) et X. Fernique [Fer1] (que l'on peut faire remonter en fait aux travaux de J.-P. Kahane sur les séries de Rademacher aléatoires [Ka]), l'outil isopérimétrique a jeté un éclairage décisif. Soit comme précédemment μ une mesure gaussienne centrée sur un espace de Banach réel séparable $(E, \|\cdot\|)$; soit m tel que $\mu(\{x; \|x\| \leq m\}) \geq \frac{1}{2}$ et appliquons (11) à $A = \{x; \|x\| \leq m\}$ pour lequel on peut alors choisir $a = 0$. Or, $A_u \subset \{x; \|x\| \leq m + \sigma u\}$ où

$$\sigma = \sup_{x \in B_{\mathcal{H}}(0,1)} \|x\| \qquad \left(= \sup_{\xi \in E', \|\xi\| \leq 1} \left(\int \xi(x)^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \right)$$

de sorte que, pour tout $u \geq 0$,

$$\mu\big(\{x;\ \|x\| \leq m + \sigma u\}\big) \geq 1 - \mathrm{e}^{-u^2/2}. \tag{12}$$

Le même argument appliqué à $A = \{x;\ \|x\| \geq m\}$ pour m une médiane fournit une formule de concentration de la norme autour de m.

Une inégalité similaire s'obtient bien entendu de la même façon à partir de la version gaussienne de dimension infinie de la proposition 2. Il suffit d'y remplacer médiane par moyenne. Le raisonnement s'applique de la même façon aux fonctions f sur E lipschitziennes au sens de $\mathcal{H}$, c'est-à-dire telle que $|f(x+h) - f(x)| \leq |h|$ pour tout $x \in E$ et tout $h \in \mathcal{H}$.

Comme conséquence de (12), $\int \exp(\alpha\|x\|^2)\, d\mu(x) < \infty$ si et seulement si $\alpha < 1/2\sigma^2$, ou, autrement dit,

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{u^2} \log \mu\big(\{x;\ \|x\| \geq u\}\big) = -\frac{1}{2\sigma^2}. \tag{13}$$

Mais (12) nous apprend en fait beaucoup plus par le jeu entre les deux paramètres m et σ, le premier étant en général beaucoup plus grand que le second. (Comme sur les sphères, c'est de ce jeu dont sont issues les démonstrations gaussiennnes du théorème de Dvoretzky [Pi1].)

Cette application simple cache en fait quelque peu toute la puissance de l'outil isopérimétrique. M. Talagrand [Ta1] a ainsi démontré, par un choix plus judicieux de l'ensemble A doublé d'un argument d'approximation en dimension finie, que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout u assez grand,

$$\mu\big(\{x;\ \|x\| \leq \varepsilon + \sigma u\}\big) \geq 1 - \exp\Big(-\frac{u^2}{2} + \varepsilon u\Big). \tag{14}$$

Un remarquable résultat d'A. Ehrhard [Eh1] indique que la fonction sur $[0, \infty[$, $F(u) = \Phi^{-1}(\mu(x; \|x\| \leq u))$ est concave. Alors que (13) exprime que l'on a $\lim_{u\to\infty} F(u)/u = 1/\sigma$, (14) s'interprète par le fait que $\lim_{u\to\infty}[F(u) - (u/\sigma)] = 0$. Autrement dit, la droite u/σ est asymptote à l'infini de F.

L'inégalité isopérimétrique et la concentration gaussiennes peuvent également être mises à profit dans le contexte des grandes déviations [Ch], [BA-L], [Led2]. Si $A \subset E$, soit $I(A) = \inf\{\frac{1}{2}|h|^2; h \in A \cap \mathcal{H}\}$ la fonctionnelle de grandes déviations associée à la mesure gaussienne μ sur $(E, \|\cdot\|; \mathcal{H})$. Considérons alors une partie fermée A de E et r tel que $0 < r < I(A)$; par définition de $I(A)$, $A \cap B_{\mathcal{H}}(0, \sqrt{2r}) = \emptyset$. Comme A est fermée et les boules de $\mathcal{H}$ sont compactes dans $(E, \|\cdot\|)$, il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait encore $A \cap \big[B_{\mathcal{H}}(0, \sqrt{2r}) + B_E(0, \delta)\big] = \emptyset$

(où $B_E(0,\delta)$ est la boule de centre l'origine et de rayon δ pour la norme $\|\cdot\|$ sur E). Il est immédiat alors par (11) que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$\mu(\varepsilon^{-1}A) \leq \mu\big(\big[B_{\mathcal{H}}(0,\varepsilon^{-1}\sqrt{2r}) + B_E(0,\varepsilon^{-1}\delta)\big]^c\big) \leq \mathrm{e}^{-r/\varepsilon^2},$$

soit la borne supérieure des grandes déviations (qui généralise (13))

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu(\varepsilon^{-1}A) \leq -I(A).$$

Outre son caractère élémentaire, cette approche permet de préciser le rôle de la topologie dans les grandes déviations gaussiennes et de s'en affranchir dans des extensions purement mesurables [BA-L].

Récemment, M. Talagrand a approfondit divers aspects de la concentration gaussienne. Outre [Ta4] et [Ta11], c'est ainsi qu'il analyse, de deux façons distinctes, la géométrie des ensembles A pour lesquels le principe général de concentration peut être précisé, et parfois considérablement amélioré. En effet, s'il y a extrémalité sur les demi-espaces, ce n'est plus le cas pour des ensembles, par exemple, convexes et symétriques. Pour ceux-ci, M. Talagrand [Ta12] démontre le théorème suivant.

THÉORÈME 4. *Soit A un ensemble convexe et symétrique (par rapport à l'origine) de $\mathbb{R}^n$; supposons que le polaire A° de A puisse être recouvert par N ensembles $(T_i)_{1\leq i\leq N}$ tels que $\int \sup_{y\in T_i}\langle x,y\rangle\, d\gamma_n(x) \leq \frac{1}{2}$; alors, pour tout $u \geq 0$,*

$$\gamma_n(A_u) \geq 1 - 4N\log(\mathrm{e}u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}.$$

Cet énoncé admet, comme précédemment, une version analogue pour des mesures gaussiennes quelconques de dimension infinie. Mettre à profit ce résultat revient à estimer les nombres (d'entropie) N. M. Talagrand fournit plusieurs exemples de calcul. Une de ses applications concerne la mesure de Wiener μ sur $C([0,1])$ pour laquelle il démontre à partir du théorème 4 (en fait directement dans [Ta10] pour l'application à la vitesse de convergence dans la loi du logarithme itéré de Strassen) que si U est la boule unité de $C([0,1])$ pour la norme uniforme, pour tous $\varepsilon > 0$ et $u \geq 0$ et une certaine constante numérique $C > 0$,

$$\mu\big(\varepsilon U + B_{\mathcal{H}}(0,u)\big) \geq 1 - \exp\left(\frac{C}{\varepsilon^2} - \frac{\varepsilon u}{2} - \frac{u^2}{2}\right).$$

Des estimations similaires ont lieu pour d'autres normes sur l'espace de Wiener, comme par exemple les normes hölderiennes. Par rapport à la concentration,

l'ensemble εU a ici une mesure très petite. Ce résultat est étroitement lié aux comportements des mesures gaussiennes pour les petites boules et à la récente importante découverte de J. Kuelbs et W. Li [K-L] liant ces comportements (une nouvelle fois à travers l'isopérimétrie) aux nombres d'entropie apparaissant dans le théorème 4, qui peuvent alors être contrôlés par la fonction $\gamma_n(\varepsilon A)$, $0 < \varepsilon \leq 1$ (*voir* [Ta12]).

Dans une autre direction, M. Talagrand [Ta7] observe qu'il y a parfois intérêt à sortir tout à fait du cadre gaussien (parallèlement à ses travaux sur les mesures produits). Il remplace ainsi la loi gaussienne standard sur $\mathbb{R}$ par la loi μ_1 de densité $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ et examine les propriétés isopérimétriques des lois produits μ_n sur $\mathbb{R}^n$ (*voir* aussi [Ta15], [Ma3]). Il met en évidence pour ces mesures une inégalité isopérimétrique pour un grossissement qui n'est plus euclidien, mais un mélange approprié entre la distance euclidienne et la distance de la norme ℓ_1. Ce résultat a constitué une phase importante de l'évolution abstraite de son approche.

THÉORÈME 5. *Il existe une constante numérique $c > 0$ ayant la propriété suivante : si A est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$, et si $\mu_n(A) = \mu_1(]-\infty, a])$, $a \in \mathbb{R}$, alors, pour tout $u \geq 0$,*

$$\mu_n\big(A + \sqrt{u}\, B_2 + u\, B_1\big) \geq \mu_1\big(]-\infty, a + cu]\big)$$

où B_1 et B_2 sont respectivement les boules unités de $\mathbb{R}^n$ pour les normes ℓ_1 et ℓ_2. En particulier, si $\mu_n(A) \geq \frac{1}{2}$,

$$\mu_n\big(A + \sqrt{u}\, B_2 + u\, B_1\big) \geq 1 - e^{-cu}.$$

La géométrie (complexe !) du grossissement $\sqrt{u}\, B_2 + u\, B_1$ a plusieurs conséquences importantes, même donc au cadre gaussien. En effet, par un principe de contraction (*cf.* [Pi1]), le théorème 5 peut préciser dans certains cas le phénomène de concentration gaussien. Par exemple, on peut déduire du théorème 5 que si A est un cube de $\mathbb{R}^n$ de la forme $A = \{x;\ |x_i| \leq \sqrt{\log n},\ i = 1, \ldots, n\}$, et si $\sqrt{\log n}$ est beaucoup plus grand que u,

$$\gamma_n(A_u) \geq 1 - \exp\left(-\frac{u^2}{C} \cdot \frac{\sqrt{\log n}}{u}\right),$$

ce qui se vérifie bien sûr directement.

Parmi les autres applications de l'isopérimétrie et de la concentration gaussiennes développées au cours de la décennie passée, mentionnons les remarquables travaux de C. Borell [Bo2], [Bo3] sur l'intégrabilité et les comportements des

queues des éléments des chaos de Wiener ainsi que les liens étroits avec les propriétés hypercontractives qu'il met de cette façon en évidence (*voir* aussi [Eh4], [Led3]), l'étude de la géométrie de la mesure gaussienne [Eh2], [Eh3], [Bo4], les applications à l'analyse sur l'espace de Wiener [Fa1], [Fa2]. Citons également l'application à la caractérisation de M. Talagrand de la bornitude et la continuité des processus gaussiens par les mesures majorantes [Ta2] (*voir* l'exposé [Fer2]). M. Talagrand en fournit lui-même [Ta8] une nouvelle démonstration simplifiée grâce à l'outil isopérimétrique, qui ouvre la possibilité de minorations hors du cadre gaussien [Ta6], [Ta14].

2. Mesures produits

Motivé par le cadre produit gaussien et des problèmes ouverts sur les sommes de variables aléatoires vectorielles indépendantes, M. Talagrand s'interroge, dès 1986, sur les propriétés isopérimétriques dans des produits d'espaces de probabilités. Une mesure gaussienne sur un espace de Banach séparable E est en effet la loi d'une série convergente $\sum_i g_i x_i$ où (g_i) est une suite orthogaussienne et les x_i sont éléments de E. Il est naturel d'examiner alors d'autres suites que la suite gaussienne, en particulier une suite de variables de Rademacher, ou plus généralement des séries convergentes $\sum_i X_i$ où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E. L'un des premiers exemples examinés par M. Talagrand est celui de la mesure uniforme sur $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$ pour lequel il améliore la concentration avec un énoncé indépendant de la dimension, et il invente surtout une méthode de démonstration par récurrence sur la dimension [Ta3]. C'est cette méthode entièrement nouvelle qui lui permet de dégager des inégalités isopérimétriques et de concentration dans une structure produit abstraite.

Soit (Ω, Σ, μ) un espace probabilisé et soit P la mesure produit $\mu^{\otimes n}$ sur Ω^n. Un point x de Ω^n a pour coordonnées $x = (x_1, \ldots, x_n)$. (Il est aisé de se convaincre que l'on ne gagne pas en généralité, dans les résultats qui vont suivre, à considérer des produits $\left(\Pi_{i=1}^n \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^n \mu_i\right)$ où les facteurs ne sont pas nécessairement identiques.)

La distance de Hamming sur Ω^n est donnée par $d(x,y) = \mathrm{Card}\{1 \leq i \leq n;\ x_i \neq y_i\}$. La fonction de concentration α de Ω^n pour la distance d vérifie, pour toute mesure produit P,

$$\alpha(u) \geq 1 - C\exp\left(-\frac{u^2}{Cn}\right) \tag{15}$$

où $C > 0$ est numérique. Ce résultat s'interprète en disant que si $P(A) \geq \frac{1}{2}$, pour la plupart des éléments x de Ω^n, il existe $y \in A$ à distance de l'ordre de

$\sqrt{n}$. Dans le cas de l'espace à deux points, le résultat précédent se déduit d'une inégalité isopérimétrique [Ha], [W-W]. Une démonstration utilisant l'inégalité de martingales (5) est présentée dans [M-S] (*voir* aussi [MD] pour une version avec meilleure constante). M. Talagrand en donne une démonstration élémentaire par récurrence sur n. Si A est une partie de Ω^n et x est un point de Ω^n, désignons par $\varphi_A^1(x)$ la distance de Hamming de x à A définie donc par

$$\varphi_A^1(x) = \inf\{k \geq 0;\ \exists y \in A,\ \mathrm{Card}\{1 \leq i \leq n;\ x_i \neq y_i\} \leq k\}.$$

M. Talagrand [Ta15] démontre que pour tout $\lambda > 0$,

$$\int e^{\lambda \varphi_A^1}\, dP \leq \frac{1}{P(A)} e^{n\lambda^2/4}. \tag{16}$$

En particulier, d'après l'inégalité de Tchebitcheff, pour tout entier k,

$$P(\{\varphi_A^1 \leq k\}) \geq 1 - \frac{1}{P(A)} e^{-k^2/n},$$

soit la concentration (15). Le raisonnement s'applique de la même façon à toutes les métriques de Hamming $d_a(x,y) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{\{x_i \neq y_i\}}$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, avec $|a|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$ en lieu et place de n dans le second membre de (16). Le résultat peut aussi se renforcer lorsque l'on s'intéresse de façon plus générale à d'autres fonctions de la probabilité de A dans le second membre de cette inégalité, comme par exemple $P(A)^{-\gamma}$; après une optimisation en $\gamma > 0$, M. Talagrand obtient ainsi que pour $k \geq \left(\frac{n}{2} \log \frac{1}{P(A)}\right)^{1/2}$,

$$P(\{\varphi_A^1 \leq k\}) \geq 1 - \exp\left(-\frac{2}{n}\left[k - \left(\frac{n}{2} \log \frac{1}{P(A)}\right)^{1/2}\right]^2\right),$$

inégalité qui présente l'avantage de se rapprocher du meilleur exposant $-2k^2/n$.

Notons que diverses questions de mesurabilité se posent sur φ_A^1 ; celles-ci ne sont en aucun cas essentielles et seront ignorées dans ce qui suit (en supposant par exemple Ω fini).

L'écriture précédente de φ_A^1 ouvre la possibilité de mesurer de façons très variées la proximité (ou l'éloignement) d'un point x d'un ensemble A. En particulier, elle permet de s'affranchir du cadre métrique. C'est ainsi, qu'outre la fonction φ_A^1, qui exprime en quelque sorte le contrôle d'un point x de Ω^n par un seul point de A, M. Talagrand imagine deux autres contrôles, ou fonctions de grossissements, principaux : un contrôle par plusieurs points (non métrique) et un contrôle par enveloppe convexe.

Si q est un entier ≥ 2 et $A^1, \ldots, A^q$ sont des parties de Ω^n, posons, pour tout élément $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de Ω^n,

$$\varphi^q(x) = \varphi^q_{A^1,\ldots,A^q}(x) = \inf\big\{k \geq 0;\ \exists y^1 \in A^1, \ldots, \exists y^q \in A^q \text{ tels que } \mathrm{Card}\big\{1 \leq i \leq n;\ x_i \notin \{y_i^1, \ldots, y_i^q\}\big\} \leq k\big\}.$$

En choisissant tous les A^i identiques à un même A, $\varphi^q(x) \leq k$ indique que les coordonnées de x peuvent être copiées, sauf peut-être pour k d'entre elles, par les coordonnées de q éléments de A. En adoptant à nouveau un raisonnement de récurrence sur le nombre de coordonnées, M. Talagrand démontre le théorème suivant [Ta15].

THÉORÈME 6. *Avec les notations précédentes,*

$$\int q^{\varphi^q(x)}\, dP(x) \leq \prod_{i=1}^{q} \frac{1}{P(A^i)}.$$

En particulier, pour tout entier k,

$$P\big(\{\varphi^q \leq k\}\big) \geq 1 - q^{-k} \prod_{i=1}^{q} \frac{1}{P(A^i)}.$$

Dans la pratique, q est le plus souvent fixé, par exemple égal à 2, et l'on voit ainsi comment contrôler par un ensemble A fixé au départ des échantillons arbitraires avec une décroissance exponentielle de la probabilité en le nombre de coordonnées négligées. Ce théorème, le premier établi par M. Talagrand (avec à l'origine une démonstration beaucoup plus délicate basée sur des arguments plus classiques de réarrangements [Ta5]), a permis de résoudre de nombreux problèmes en probabilités dans les espaces de Banach. Il est à la genèse, avec [Ta3], des développements abstraits qui suivent (*voir*, pour un historique, [Ta15], [L-T2]). Pour illustrer son emploi, soit S une somme $X_1 + \cdots + X_n$ de variables aléatoires indépendantes et positives sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On se place donc sur $[0, \infty[^n$ muni du produit P des lois des X_i. Soit $A = \big\{\sum_{i=1}^n x_i \leq m\big\}$ avec m choisi de sorte que, par exemple, $P(A) \geq \frac{1}{2}$; soit $\varphi^q = \varphi^q_{A,\ldots,A}$. Si $x \in \{\varphi^q \leq k\}$, il existe $y^1, \ldots, y^q \in A$ tels que $\mathrm{Card}\, I \leq k$ où $I = \{1 \leq i \leq n;\ x_i \notin \{y_i^1, \ldots, y_i^q\}\}$. Considérons une partition $(J_j)_{j \leq q}$ de $\{1, \ldots, n\} \backslash I$ telle que $x_i = y_i^j$ si $i \in J_j$. Alors,

$$\sum_{i \notin I} x_i = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i \in J_j} y_i^j \leq qm$$

où nous avons fait usage d'une propriété cruciale de monotonie compte tenu de la positivité des x_i. Il s'ensuit que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq qm + \sum_{i=1}^{k} x_i^*$$

où $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ est le réarrangé décroissant de l'échantillon $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Alors, en vertu du théorème 6, pour tous k, q entiers,

$$\mathbb{P}\big(\{S \geq qm + k\}\big) \leq 2^q q^{-(k+1)} + \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{k} X_i^* \geq k\right\}\right).$$

Joint à un argument de symétrisation pour retrouver la propriété de monotonie (développé à l'origine dans l'étude de la loi du logarithme itéré [L-T1]), cette approche gouverne aujourd'hui les estimations de normes de sommes de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un espace de Banach – dont les arguments de martingales (par exemple (5)) ne peuvent rendre compte – et constitue le principe général d'évaluation de ces sommes. Il étend à ce cadre diverses estimations de type gaussien et précise souvent des résultats scalaires plus anciens. Nous renvoyons à [L-T2] pour de plus amples détails.

Le contrôle par enveloppe convexe est assez différent des précédents. En première approche, il peut être défini par la distance $\varphi_A^c(x) = \sup_{|a|=1} d_a(x, A)$. Cette écriture cache cependant les propriétés de convexité de la fonctionnelle φ_A^c essentielles à son analyse. Pour une partie $A \subset \Omega^n$ et $x \in \Omega^n$, soit

$$U_A(x) = \big\{s = (s_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{0,1\}^n;\ \exists y \in A \text{ tel que } y_i = x_i \text{ si } s_i = 0\big\}.$$

On désigne par $V_A(x)$ l'enveloppe convexe de $U_A(x)$ en tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Il est à noter que $0 \in V_A(x)$ si et seulement si $x \in A$. Il est alors naturel de mesurer la distance de x à A par la distance euclidienne de 0 à $V_A(x)$. En vertu du théorème de Hahn-Banach, celle-ci est alors égale à $\varphi_A^c(x)$. La fonctionnelle $\varphi_A^c(x)$ mesure donc la distance de x à A uniformément en les métriques de Hamming d_a, $|a| = 1$. M. Talagrand [Ta9], [Ta15] étend la concentration (15) à cette uniformité dans un énoncé indépendant de la dimension.

THÉORÈME 7. *Pour tout sous-ensemble A de Ω^n, et toute probabilité produit P,*

$$\int \exp\Big(\frac{1}{4}\,(\varphi_A^c)^2\Big)\,dP \leq \frac{1}{P(A)}\,.$$

En particulier, pour tout $u \geq 0$,

$$P\big(\{\varphi_A^c \leq u\}\big) \geq 1 - \frac{1}{P(A)}\,\mathrm{e}^{-u^2/4}.$$

Pour illustrer le principe général des démonstrations par récurrence, esquissons celle du théorème 7. La difficulté réside le plus souvent dans la mise en place de la bonne hypothèse de récurrence, représentée par les formes intégrales des diverses inégalités que nous avons énoncées.

Démonstration. Le cas $n = 1$ est aisé. Pour passer de n à $n+1$, soit A un sous-ensemble de Ω^{n+1} et B sa projection sur Ω^n ; soit en outre, pour $\omega \in \Omega$, $A(\omega)$ la coupe de A suivant ω. Si $x \in \Omega^n$ et $\omega \in \Omega$, on pose $z = (x,\omega)$. L'observation fondamentale est la suivante : si $s \in U_{A(\omega)}(x)$, alors $(s,0) \in U_A(z)$, et si $t \in U_B(x)$, alors $(t,1) \in U_A(z)$. Il s'ensuit que pour $s \in V_{A(\omega)}(x)$, $t \in V_B(x)$ et $0 \leq \lambda \leq 1$, $(\lambda s + (1-\lambda)t, 1-\lambda) \in V_A(z)$. Par définition de φ_A^c et convexité du carré,

$$\varphi_A^c(z)^2 \leq (1-\lambda)^2 + \lambda \varphi_{A(\omega)}^c(x)^2 + (1-\lambda)\varphi_B^c(x)^2.$$

En vertu de l'inégalité de Hölder et de l'hypothèse de récurrence, pour tout ω de Ω,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^n} \exp\Big(\frac{1}{4}\big(\varphi_A^c(x,\omega)\big)^2\Big) dP(x) \\
&\qquad \leq \mathrm{e}^{(1-\lambda)^2/4} \left(\int_{\Omega^n} \exp\Big(\frac{1}{4}\big(\varphi_{A(\omega)}^c\big)^2\Big) dP\right)^{\lambda} \left(\int_{\Omega^n} \exp\Big(\frac{1}{4}\big(\varphi_B^c\big)^2\Big) dP\right)^{1-\lambda} \\
&\qquad \leq \mathrm{e}^{(1-\lambda)^2/4} \left(\frac{1}{P(A(\omega))}\right)^{\lambda} \left(\frac{1}{P(B)}\right)^{1-\lambda} \\
&\qquad \leq \frac{1}{P(B)}\, \mathrm{e}^{(1-\lambda)^2/4} \left(\frac{P(A(\omega))}{P(B)}\right)^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

Une optimisation en λ fournit alors

$$\int_{\Omega^n} \exp\Big(\frac{1}{4}\big(\varphi_A^c(x,\omega)\big)^2\Big) dP(x) \leq \frac{1}{P(B)} \left(2 - \frac{P(A(\omega))}{P(B}\right).$$

Enfin, par une intégration par rapport à ω et le théorème de Fubini,

$$\int_{\Omega^{n+1}} \exp\Big(\frac{1}{4}\big(\varphi_A^c(x,\omega)\big)^2\Big) dP(x) d\mu(\omega) \leq \frac{1}{P(B)} \left(2 - \frac{P \otimes \mu(A)}{P(B)}\right) \leq \frac{1}{P \otimes \mu(A)}.$$

Le théorème est établi.

Il est aisé de vérifier que si $\Omega = [0,1]$, et si d_A est la distance (euclidienne) à $\mathrm{Conv}(A)$, alors $d_A \leq \varphi_A^c$. Soit f une fonction convexe sur $[0,1]^n$ telle que $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$, et soit m est une médiane de f pour P et $A = \{f \leq m\}$. Par convexité de f, $f \leq m$ sur $\mathrm{Conv}(A)$. Par ailleurs, comme $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$, $f(x) \leq m+u$

pour tout x tel que $d_A(x) \leq u$. En raisonnant de la même façon avec l'ensemble $\{f \leq m - u\}$, on conclut alors du théorème 7 que

$$P\big(\{|f - m| \leq u\}\big) \geq 1 - 4\,\mathrm{e}^{-u^2/4} \tag{17}$$

pour tout $u \geq 0$ et toute probabilité sous-jacente μ sur $[0,1]$. La constante 4 dans l'exponentielle peut être améliorée comme précédemment pour approcher 2. Cette concentration est similaire à la concentration gaussienne, avec toutefois f convexe. Elle s'applique en particulier aux normes de moyennes aléatoires $\sum_i \varphi_i x_i$ à coefficients x_i dans un espace de Banach E où les φ_i sont des variables réelles indépendantes uniformément bornées (en particulier un jeu de pile ou face) pour lesquelles l'inégalité (17) permet de préciser les théorèmes pionniers d'intégrabilité et d'équivalences de moments de Khintchine-Kahane [Ka]. De façon précise, si $\|\varphi_i\|_\infty \leq 1$ pour tout i et si $S = \sum_i \varphi_i x_i$ converge presque sûrement, pour tout $u \geq 0$,

$$\mathbb{P}\big(\{\big|\|S\| - m\big| \leq u\}\big) \geq 1 - 4\,\mathrm{e}^{-u^2/16\sigma^2}$$

où m est une médiane de $\|S\|$ et $\sigma = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \big(\sum_i \xi(x_i)^2\big)^{1/2}$. Cet énoncé est l'analogue exact de la formule (12) pour les séries gaussiennes et certifie ainsi la puissance des arguments du théorème 7 vis-à-vis des techniques de l'isopérimétrie gaussienne. Dans l'exemple de l'espace à deux points, la méthode de démonstration par récurrence sur le nombre de coordonnées est peut-être à rapprocher des techniques d'hypercontractivité [Gro], [Be] dont les aspects "mesure de surface" sont considérées dans [Ta13] par analogie avec l'exemple gaussien [Led3].

Le théorème 7 sur l'enveloppe convexe φ^c contient d'une certaine façon les deux énoncés précédents sur le contrôle par un ou un nombre fini de points. Une version du théorème 7 peut être utilisée afin de retrouver les applications aux sommes de variables aléatoires indépendantes déduites précédemment de l'examen de la fonctionnelle φ^q [Ta9]. Celle-ci nécessite cependant une forme plus abstraite de φ^c où la distance euclidienne de 0 à $V_A(x)$ est remplacée par une nouvelle fonction non nécessairement métrique.

Cette ligne d'étude s'inscrit dans les tous derniers développements de M. Talagrand [Ta15] où celui-ci analyse de façon systématique les fonctions de proximités φ^1, φ^q et φ^c par l'introduction d'un concept de pénalité. En effet, dans un contrôle par un point par exemple, les coordonnées qui diffèrent sont comptées pour 1 alors qu'un poids adapté permet de préciser ce contrôle de manière plus fine. Posons, pour une fonction positive h sur $\Omega \times \Omega$ telle que $h(\omega,\omega) = 0$, et $A \subset \Omega^n$, $x \in \Omega^n$,

$$\varphi_A^{1,h}(x) = \inf\left\{\sum_{i=1}^n h(x_i, y_i);\ y \in A\right\}.$$

Le choix de $h(\omega,\omega') = 1$ si $\omega \neq \omega'$ correspond donc à la distance de Hamming ou contrôle par un point φ_A^1, la nouvelle fonction $\varphi_A^{1,h}$ imposant une pénalité variable sur les coordonnées de x et y qui diffèrent. On peut alors reprendre toute l'étude précédente de ce point de vue et en déduire divers énoncés suivant les hypothèses sur la fonction h. Un résultat typique est le suivant. Posons, pour tout $B \subset \Omega$, et tout $\omega \in \Omega$, $h(\omega,B) = \inf\{h(\omega,\omega');\ \omega' \in B\}$. Supposons que

$$\int \mathrm{e}^{2h(\omega,B)}\, d\mu(\omega) \leq \frac{\mathrm{e}}{\mu(B)}\,.$$

Alors, pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\int \mathrm{e}^{\lambda\varphi_A^{1,h}}\, dP \leq \frac{1}{P(A)}\,\mathrm{e}^{Cn\lambda^2}$$

où $C > 0$ est numérique. Par rapport à (16) et la distance de Hamming φ_A^1, on apprécie sur cet énoncé le degré supplémentaire de liberté et de souplesse pour les applications. Les extensions portent également sur la fonction de la probabilité $P(A)$ à droite de l'inégalité précédente, en lien avec les hypothèses sur h : plus la dépendance en $P(A)$ est générale, plus les hypothèses sur h peuvent être affaiblies. Certaines conséquences abstraites de cette nouvelle idée présentent de grandes similitudes avec des inégalités probabilistes classiques, binomiales ou de Bernstein. Outre les preuves unifiées par récurrence, l'on voit aussi comment une propriété de concentration sur chacun des facteurs (Ω,μ) se transfère en quelque sorte à l'espace produit (Ω^n,P). En particulier, le résultat précédent s'avère efficace lorsque Ω lui-même est déjà un produit. Ces méthodes de pénalités permettent également de retrouver le difficile théorème 5 (*voir* aussi l'approche de B. Maurey [Ma3]).

Les fonctions de pénalité (ou fonctions d'interaction) utilisées sont variées (sur $\mathbb{R}$ par exemple, $h(\omega,\omega') = |\omega - \omega'|$ ou $h(\omega,\omega') = (\omega,\omega')^+$). L'un des traits frappants des résultats de M. Talagrand est le caractère dissymétrique des hypothèses faites sur ω et ω' dans h, autrement dit sur le point x que l'on veut contrôler et le point y qui contrôle ; si elle ne dépend que de la première coordonnée, h doit être bornée, si elle ne dépend que de la seconde, des propriétés d'intégrabilité (relativement à μ) assez faibles sont suffisantes.

Ces développements s'effectuent également sur les fonctionnelles φ^q et φ^c, avec le plus de profit sans doute sur cette dernière. Pour une fonction positive h comme précédemment, soit à présent, pour $A \subset \Omega^n$ et $x \in \Omega$,

$$U_A(x) = \big\{s = (s_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}_+^n;\ \exists y \in A \text{ tel que } s_i \geq h(x_i,y_i) \text{ pour tout } i = 1,\ldots,n\big\}.$$

$V_A(x)$ est l'enveloppe convexe de $U_A(x)$. Pour mesurer la "distance" de 0 à $V_A(x)$, on considère une fonction ψ sur $\mathbb{R}$ avec $\psi(0) = 0$ telle que $\psi(t) \leq t^2$ si $t \leq 1$ et $\psi(t) \geq t$ si $t \geq 1$. (Ce choix est à rapprocher du théorème 5.) Puis, soit

$$\varphi_A^{c,h,\psi}(x) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} \psi(s_i);\ s = (s_i)_{1 \leq i \leq n} \in V_A(x) \right\}.$$

La distance φ^c correspondait donc simplement à $h(\omega, \omega') = 1$ si $\omega \neq \omega'$ et $\psi(t) = t^2$. Toujours par récurrence sur la dimension, M. Talagrand établit alors une forme générale du théorème 7 en montrant que, pour une certaine constante $\alpha > 0$,

$$\int \exp\left(\alpha\, \varphi_A^{c,h,\psi}\right) \leq \exp\left(\theta(P(A))\right)$$

sous diverses hypothèses liant les paramètres μ, h et ψ à la fonction θ de la probabilité de A. La démonstration est bien plus délicate compte tenu du degré de la généralité.

Cette étude abstraite systématique est justifiée par les larges applications proposées par M. Talagrand ; elles s'étendent aujourd'hui à de multiples cadres probabilistes et combinatoires. Le plus souvent, les résultats de M. Talagrand proposent une propriété de concentration chaque fois qu'une valeur moyenne a été mise auparavant en évidence (l'analyse de cette valeur moyenne est un autre sujet d'étude). Esquissons par exemple son application aux premiers temps de passage en percolation. Soit (G, E) un graphe de sommets G et d'arêtes E ; supposons donnée, sur une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, une famille $(X_e)_{e \in E}$ de variables aléatoires positives indépendantes, de même loi qu'une variable X. X_e représente le temps de passage par l'arête e. Soit $\mathcal{T}$ une famille de parties (finies) de E, et, pour $T \in \mathcal{T}$, $X_T = \sum_{e \in T} X_e$. Si T est composée d'arêtes contigües, X_T s'interprète comme le temps de passage par ce chemin T. Posons $Z_{\mathcal{T}} = \inf_{T \in \mathcal{T}} X_T$ et $R = \sup_{T \in \mathcal{T}} \mathrm{Card}(T)$, et désignons par m une médiane de $Z_{\mathcal{T}}$. Comme corollaire de sa version avec pénalités du théorème 7, M. Talagrand [Ta15] établit le résultat suivant.

THÉORÈME 8. *Il existe une constante numérique $c > 0$ telle que si $\mathbb{E}(e^{cX}) \leq 2$, alors, pour tout $u \geq 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\{|Z_{\mathcal{T}} - m| \leq u\}\right) \geq 1 - 4\exp\left(-c\,\min\left(\frac{u^2}{R}, u\right)\right).$$

Lorsque G est $\mathbb{Z}^2$ et E les côtés joignant deux points adjacents, et $\mathcal{T} = \mathcal{T}_n$ est l'ensemble des chemins ne se recoupant pas joignant l'origine au point $(0, n)$,

et pour $0 \leq X \leq 1$ presque sûrement, H. Kesten [Ke] a démontré comment se ramener, lorsque $\mathbb{P}(\{X = 0\}) < \frac{1}{2}$ (percolation), aux chemins de longueur plus petite qu'un multiple de n. Joint à ce résultat, le théorème 8 permet alors de conclure que

$$\mathbb{P}\big(\{|Z_{T_n} - m| \leq u\}\big) \geq 1 - 5\exp\Big(-\frac{u^2}{Cn}\Big)$$

pour tout $u \leq n/C$ où C est une constante indépendante de n. Cette estimation précise le résultat de H. Kesten [Ke] comportant un exposant de la forme $u/C\sqrt{n}$ et basé sur des arguments de martingales.

Outre les sommes de variables aléatoires vectorielles indépendantes (qui restent l'appli- cation la plus délicate de ces résultats), les autres applications proposées par M. Talagrand portent sur des questions de sous-suites aléatoires, graphes aléatoires, probabilités géométriques... Nous renvoyons le lecteur à son important projet en préparation [Ta15] pour plus de détails.

II. Approches fonctionnelles de l'isopérimétrie

Les paragraphes précédents présentent diverses inégalités isopérimétriques dont le cadre, comme les modalités d'approche, sont éloignées des techniques géométriques habituelles, en particulier les réarrangements. Dans cette seconde partie, nous reprenons un cadre isopérimétrique plus traditionnel, en retournant en particulier aux inégalités infinitésimales, pour lequel des techniques fonctionnelles, cette fois-ci, vont être mises à profit à l'image de la démonstration de la proposition 2. Cette proposition fournit en effet une démonstration fonctionnelle élémentaire de la concentration sur les sphères basée sur le semigroupe de la chaleur, la formule de Bochner et la courbure de Ricci, en s'appuyant essentiellement sur une traduction fonctionnelle de cette courbure. Ces outils, utilisés de façon rudimentaire, rejoignent les résultats de N. Varopoulos sur les inégalités isopérimétriques et les estimations du noyau de la chaleur sur les variétés riemanniennes et les groupes de Lie qu'il a développées ces dernières années. Dans cette dernière partie, nous voudrions simplement aborder ce lien en illustrant le (court) chemin qu'il reste parcourir d'un point de vue fonctionnel pour passer de la démonstration simple de la concentration à une forme de l'isopérimétrie. Nous présentons ainsi des résultats de N. Varopoulos [Va4], [Va5], [V-SC-C] dans le cadre des variétés riemanniennes à courbure de Ricci positive ou nulle.

Il est maintenant bien connu ([C-L-Y], [Va1]) qu'une inégalité isopérimétrique sur une variété riemannienne, par exemple, force un contrôle du noyau de la chaleur. Plus précisément, soit par exemple V une variété riemannienne complète et connexe de dimension N, non compacte ; soit en outre Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur V et $(P_t)_{t\geq 0}$ le semigroupe de la chaleur de noyau $p_t(x, y)$.

THÉORÈME 9. *Supposons qu'il existe $n > 1$ et $C > 0$ tels que pour tout partie compacte A de V à bord ∂A régulier,*

$$\mathrm{vol}(A)^{(n-1)/n} \leq C\,\mathrm{vol}(\partial A). \tag{18}$$

Alors, pour une certaine constante $C > 0$,

$$p_t(x,y) \leq \frac{C}{t^{n/2}} \tag{19}$$

pour tout $t > 0$ et tous $x, y \in V$. En outre, pour tout $\delta > 0$, il existe $C_\delta > 0$ telle que

$$p_t(x,y) \leq \frac{C_\delta}{t^{n/2}} \exp\left(-\frac{d(x,y)^2}{4(1+\delta)t^2}\right) \tag{20}$$

pour tout $t > 0$ et tous $x, y \in V$.

Le schéma de la démonstration est particulièrement instructif. Il consiste à comparer chacune des propriétés (18) et (19) sur l'échelle des inégalités de Sobolev. Par la formule de la coaire [Fe], [Os],(18) équivaut à dire que pour toute fonction f de classe C^∞ à support compact sur V,

$$\|f\|_{n/n-1} \leq C\big\||\nabla f|\big\|_1. \tag{21}$$

En vertu de l'inégalité de Hölder (remplacer f positive par f^α), cette inégalité est la plus forte dans la famille des inégalités de Sobolev. Elle implique en particulier (supposer $n > 2$) l'inégalité de Sobolev au niveau L^2 (pour le gradient) qui s'exprime, après une intégration par parties, comme

$$\|f\|^2_{2n/n-2} \leq C\big\||\nabla f|\big\|_2^2 = C\int f(-\Delta f)\,dx \tag{22}$$

pour toute fonction f de $C_o^\infty(V)$. La constante $C > 0$ peut varier, ici et ci-dessous, d'une ligne à l'autre. Plutôt que le gradient, cette inégalité concerne donc le laplacien Δ. Or, l'un des points de départ des travaux de N. Varopoulos [Va2] est l'équivalence formelle, dans un cadre abstrait de semigroupes, de cette dernière inégalité de Sobolev (22) et de la décroissance du semigroupe de la chaleur (ou de son noyau)

$$\|P_t f\|_\infty \leq \frac{C}{t^{n/2}}\,\|f\|_1, \quad t > 0, \quad f \in C_o^\infty(V). \tag{23}$$

Ce résultat, inspiré de travaux de J. Nash [Na] et J. Moser [Mo] sur la régularité des solutions des équations différentielles paraboliques, constitue ici le pont entre analyse et géométrie. Diverses techniques permettent alors de passer de cette estimation uniforme aux estimations gaussiennes (20) de $p_t(x,y)$ pour $x \neq y$ (*voir* [Da], [L-Y], [Va5]...). Le théorème peut aussi être localisé en temps petit (à partir d'une inégalité isopérimétrique sur les ensembles de petit volume), ou en temps grand [C-F] (ensembles de grand volume).

Réciproquement, il est possible, dans certains cas, de renverser le cheminement de la démonstration précédente et de déduire d'un comportement (uniforme) du noyau de la chaleur des propriétés isopérimétriques sur V. Plaçons-nous, pour plus de simplicité, dans le cadre d'une variété à courbure de Ricci positive ou nulle. (Bien qu'a posteriori, ce cadre est quelque peu restrictif – les variétés à courbure positive ou nulle vérifiant l'isopérimétrie ont un comportement, du volume des boules par exemple, assez rigide –, il s'agit simplement d'illustrer ici l'enchaînement des idées.) D'après l'esquisse de la démonstration du théorème 9, il convient de comprendre ce qui doit être ajouté à une inégalité de Sobolev au niveau L^2 (22) pour atteindre le niveau L^1 (21) et donc l'isopérimétrie. Le maillon manquant est fourni ici par la courbure et une inégalité fondamentale démontrée par P. Li et S.-T. Yau [L-Y] dans leur étude des inégalités de Harnark paraboliques. Comme la proposition 2, cette inégalité est une certaine traduction fonctionnelle sur le semigroupe de la chaleur de la formule de Bochner. Sa démonstration repose uniquement sur l'inégalité de courbure et dimension (6). Nous n'énonçons que la forme dans les variétés à courbure de Ricci positive ou nulle.

PROPOSITION 10. *Soit V une variété riemannienne de dimension N et de courbure de Ricci ≥ 0 et soit $(P_t)_{t\geq 0}$ le semigroupe de la chaleur sur V ; pour toute fonction f strictement positive de $C_o^\infty(V)$ et tout $t > 0$,*

$$\frac{|\nabla P_t f|^2}{(P_t f)^2} - \frac{\Delta P_t f}{P_t f} \leq \frac{N}{2t}. \tag{24}$$

Comme l'a montré N. Varopoulos [Va5], on déduit sans trop de peine de l'inégalité ponctuelle (24) que, pour toute f régulière et tout $t > 0$,

$$\big\| |\nabla P_t f| \big\|_\infty \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|f\|_\infty \tag{25}$$

pour une certaine constante C ne dépendant que de la dimension N. En effet, d'après (24), $(\Delta P_t f)^- \leq N(2t)^{-1} P_t f$ de sorte que $\|\Delta P_t f\|_1 \leq N t^{-1} \|f\|_1$. Par

dualité, c'est donc que $\|\Delta P_t f\|_\infty \leq N t^{-1} \|f\|_\infty$ qui, utilisé à nouveau dans (24), fournit immédiatement (25).

Le contrôle (25) du gradient du semigroupe en $\sqrt{t}$ est l'ingrédient crucial qui, joint à la décroissance (23), permet d'atteindre l'isopérimétrie. Notons que l'information dimensionnelle est uniquement contenue dans la décroissance (23) et que (25) en est en quelque sorte indépendante. L'inégalité (25) montre, par dualité, que, pour toute fonction f de $C_o^\infty(V)$ et tout $t > 0$,

$$\|f - P_t f\|_1 \leq C\sqrt{t}\, \big\| |\nabla f| \big\|_1.$$

En effet (*cf.* [Led4]), pour toute fonction régulière g telle que $\|g\|_\infty \leq 1$,

$$\begin{aligned}\int g\,(f - P_t f)\,dx &= -\int_0^t \left(\int g\,\Delta P_s f\,dx\right) ds \\ &= -\int_0^t \left(\int \Delta P_s g\, f\,dx\right) ds \\ &= \int_0^t \left(\int \nabla P_s g \cdot \nabla f\,dx\right) ds \leq \int_0^t \|\nabla P_s g\|_\infty \big\| |\nabla f| \big\|_1\, ds.\end{aligned}$$

Soit alors A une partie compacte de V à bord ∂A suffisamment régulier. En appliquant l'inégalité précédente à une suite de fonctions régulières approchant la fonction indicatrice χ_A de A, il vient, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}C\sqrt{t}\,\mathrm{vol}(\partial A) &\geq \big\|\chi_A - P_t(\chi_A)\big\|_1 \\ &= 2\left[\mathrm{vol}(A) - \int_A P_t(\chi_A)\,dx\right] = 2\big[\mathrm{vol}(A) - \big\|P_{t/2}(\chi_A)\big\|_2^2\big].\end{aligned}$$

Cette chaîne d'inégalités fournit le passage avec la théorie L^2 puisque si (23) a lieu, par une interpolation évidente, $\|P_t f\|_2 \leq C t^{-n/4} \|f\|_1$, $t > 0$, et donc

$$C\sqrt{t}\,\mathrm{vol}\,(\partial A) \geq 2\left[\mathrm{vol}(A) - \frac{C}{t^{n/2}}\,\mathrm{vol}(A)^2\right].$$

Il ne reste plus qu'à optimiser en t pour en déduire que pour une certaine constante $C > 0$,

$$\mathrm{vol}(A)^{(n-1)/n} \leq C\,\mathrm{vol}(\partial A), \tag{26}$$

soit l'isopérimétrie annoncée. Nous avons ainsi établi le théorème suivant [Va5].

THÉORÈME 11. *Soit V une variété riemannienne de courbure de Ricci ≥ 0 ; si, pour un $n > 1$ et une constante $C > 0$,*

$$p_t(x,y) \leq \frac{C}{t^{n/2}}$$

uniformément en $t > 0$ et $x, y \in V$, alors, pour une certaine constante $C > 0$ et tout ensemble compact A de V à bord ∂A suffisamment régulier

$$\mathrm{vol}(A)^{(n-1)/n} \leq C\,\mathrm{vol}(\partial A).$$

Cette démonstration élémentaire, qui présente même quelque intérêt dans le cas euclidien, ne fournit guère de renseignements sur la meilleure constante C dans (26), et donc par exemple sur le caractère extrémal des boules dans $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas de $\mathbb{R}^n$, on peut en fait démontrer qu'il existe une version de (25) avec meilleure constante et que la perte de précision se fait au niveau de la décroissance (23). Pour que la démonstration précédente fournisse la meilleure constante dans le cas euclidien, il convient de remplacer (23) par le fait que le semigroupe de la chaleur croît en norme L^2 par réarrangement isopérimétrique, c'est-à-dire

$$\left\|P_t(\chi_A)\right\|_2 \leq \left\|P_t(\chi_B)\right\|_2 \tag{27}$$

pour tout $t > 0$ et tout compact A de même volume qu'une boule B. La propriété (27) a été établie par A. Baernstein et B. A. Taylor [B-T], [Bae] par l'intermédiaire des outils de symétrisation isopérimétrique ; les observations élémentaires précédentes démontrent son équivalence formelle avec l'isopérimétrie. On peut s'interroger sur la signification de ces observations dans une variété riemannienne.

Notons que cette approche fonctionnelle peut également être développée dans le cadre de l'isopérimétrie gaussienne (9). Il est facile de se convaincre, à partir des arguments de la proposition 2, que le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck $(U_t)_{t\geq 0}$ vérifie une propriété de type (25). Intrinsèquement de dimension infinie au sens de la géométrie des semigroupes de Markov, il n'est cependant d'aucune décroissance polynômiale n. L'analogue de cette décroissance est la propriété d'hypercontractivité de $(U_t)_{t\geq 0}$ [Ne], équivalente à l'inégalité de Sobolev logarithmique de Gross [Gro] (version de dimension infinie des inégalités de Sobolev usuelles), qui, utilisée dans le schéma précédent, permet d'accéder à l'isopérimétrie gaussienne (*voir* [Led3]).

À l'équivalence précédente s'ajoute la minoration $V(x,r) \geq Cr^{-n}$ du volume des boules de centre x et de rayon $r > 0$, renforçant ainsi les liens entre analyse

et géométrie. En fait, en vertu des inégalités de Harnack, le noyau $p_t(x,x)$ est gouverné par $V(x,\sqrt{t})^{-1/2}$ [L-Y], [Va5] (*voir* aussi [Da]). Cette minoration se déduit aisément de l'isopérimétrie, un peu plus difficilement du contrôle (19) du noyau de la chaleur. La double équivalence précédente dans les variétés à courbure de Ricci positive ou nulle ne subsiste cependant plus, sauf localement [L-Y], en courbure seulement minorée : il existe [Va5] une variété dont les boules ont un volume exponentiel mais pour laquelle $p_t(x,x)$ est de l'ordre de t^{-1} ; il existe également [C-L] une variété dans laquelle $\sup_{x,y} p_t(x,y) \leq Ct^{-n/2}$ mais où l'isopérimétrie de dimension correspondante est en défaut (pour les ensembles de grand volume).

Le cadre initial des travaux de N. Varopoulos [Va2], [Va3], [Va4], [V-SC-C] est celui des groupes discrets (finiment engendré) ou de leur version continue, les groupes de Lie. Dans ce cadre, les résultats de N. Varopoulos (*voir* [Va6]) conduisent à une classification des groupes suivant la croissance du volume des boules. Soit par exemple G un groupe de Lie connexe unimodulaire et $\{X_1,\ldots,X_k\}$ un système de champs de vecteurs invariants à gauche engendrant l'algèbre de Lie de G. Soit $V(r)$ le volume des boules de rayon r pour la distance de contrôle associée aux champs $X_1,\ldots,X_k$, $V(r)$ ne dépendant pas ici du centre. Le volume à l'infini est à croissance soit polynômiale, soit exponentielle [Gu], et localement à croissance polynômiale [N-S-W]. La conclusion principale [Va4] est alors l'équivalence entre une croissance du volume $V(r) \geq Cr^d$, $r > 0$, une inégalité isopérimétrique

$$\|f\|_{d/d-1} \leq C \sum_{i=1}^{k} \|X_i f\|_1, \quad f \in C_o^\infty(G),$$

et une estimation du noyau $p_t(e) \leq Ct^{-d/2}$, $t > 0$, où e est l'élément neutre de G et p_t la solution fondamentale de l'équation de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{k} X_i^2 = 0$. L'étape importante est à nouveau l'équivalence formelle entre la décroissance de $p_t(e)$ et une inégalité de Sobolev. L'isopérimétrie se déduit d'une estimation des dérivées spatiales du noyau issue d'une inégalité de Harnack [SC1]. Par rapport à la situation riemannienne, cette description complète est plus de nature harmonique que potentielle [Va5].

Pour les groupes discrets, ces résultats s'interprètent de façon directe sur les chaînes de Markov des probabilistes et le comportement des marches aléatoires. Soit G un groupe discret finiment engendré et soit μ une mesure de probabilité symétrique sur G de support fini et générateur. Le comportement du volume est décrit par les travaux de M. Gromov [Gr2]. En croissance polynômiale, le comportement des puissances de convolution $\mu^{*k}(e)$ est alors gouverné par le volume : si $V(r) \geq Cr^d$, alors, pour tout k, $\mu^{*k}(e) \leq Ck^{-d/2}$. Cette description résout en particulier la conjecture dite de Kesten et les seuls groupes récurrents

sont ainsi les extensions finies de $\{0\}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$. La situation est plus complexe en croissance superpolynômiale. Des résultats nouveaux de T. Coulhon et L. Saloff-Coste [C-SC] utilisent, plutôt que le semigroupe lui-même, des familles d'inégalités de Poincaré à l'échelle sur les boules (*cf.* [Bu]), déjà utilisées avec profit dans [SC2]. Nous renvoyons au traité [V-SC-C] pour une discussion et des références complètes.

Bibliographie

[Az] K. Azuma. Weighted sums of certain dependent random variables. Tohoku Math. J. 19, 357–367 (1967).

[Bae] A. Baernstein II. Integral means, univalent functions and circular symmetrization. Acta Math. 133, 139–169 (1974).

[B-T] A. Baernstein II, B. A. Taylor. Spherical rearrangements, subharmonic functions and *-functions in n-space. Duke Math. J. 43, 245–268 (1976).

[Ba] D. Bakry. L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes. École d'Été de Probabilités de St-Flour 1992. Lecture Notes in Math.. Springer-Verlag. À paraître.

[B-É] D. Bakry, M. Émery. Diffusions hypercontractives. Séminaire de Probabilités XIX. Lecture Notes in Math. 1123, 175–206 (1985). Springer-Verlag.

[Be] W. Beckner. Inequalities in Fourier analysis. Ann. Math. 102, 159–182 (1975).

[BA-L] G. Ben Arous, M. Ledoux. Schilder's large deviation principle without topology. Asymptotic problems in probability theory : Wiener functionals and asymptotics. Pitman Research Notes in Math. Series 284, 107–121 (1993). Longman.

[Ben] Y. Benyamini. Two point symmetrization, the isoperimetric inequality on the sphere and some applications. Texas Functional Analysis Seminar 1983-84. The University of Texas (1984).

[B-B-G] P. Bérard, G. Besson, S. Gallot. Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov. Invent. Math. 80, 295–308 (1985).

[B-G-M] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet. Le spectre d'une variété riemannienne. Lecture Notes in Math. 194 (1971). Springer-Verlag.

[Bo1] C. Borell. The Brunn-Minskowski inequality in Gauss space. Invent. Math. 30, 207–216 (1975).

[Bo2] C. Borell. Tail probabilities in Gauss space. Vector Space Measures and Applications, Dublin 1977. Lecture Notes in Math. 644, 71–82 (1978). Springer-Verlag.

[Bo3] C. Borell. On polynomials chaos and integrability. Prob. Math. Statist. 3, 191–203 (1984).

[Bo4] C. Borell. Geometric bounds on the Ornstein-Uhlenbeck process. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Gebiete 70, 1–13 (1985).

[B-Z] Y. D. Burago, V. A. Zalgaller. Geometric inequalities. Springer-Verlag (1988). Pre- mière édition (en russe) : Nauka (1980).

[Bu] P. Buser. A note on the isoperimetric constant. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 15, 213–230 (1982).

[C-F] I. Chavel, E. Feldman. Modified isoperimetric constants, and large time heat diffusion in Riemannian manifold. Duke Math. J. 64, 473–499 (1991).

[C-L-Y] S. Cheng, P. Li, S.-T. Yau. On the upper estimate of the heat kernel on a complete Riemannian manifold. Amer. J. Math. 156, 153–201 (1986).

[Ch] S. Chevet. Gaussian measures and large deviations. Probability in Banach spaces IV. Lecture Notes in Math. 990, 30–46 (1983). Springer-Verlag.

[Co] T. Coulhon. Sobolev inequalities on graphs and on manifolds. Harmonic Analysis and Discrete Potential Theory, 207–214 (1991). Plenum Press.

[C-L] T. Coulhon, M. Ledoux. Isopérimétrie, décroissance du noyau de la chaleur et transformées de Riesz : un contre-exemple (1992). À paraître in Ark. för Math..

[C-SC] T. Coulhon, L. Saloff-Coste. Isopérimétrie pour les groupes et les variétés (1992). À paraître in Rev. Ibero Americana.

[Da] E. B. Davies. Heat kernels and spectral theory. Cambridge Univ. Press (1989).

[Dv] A. Dvoretzky. Some results on convex bodies and Banach spaces. Proc. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem, 123–160 (1961).

[D-F] P. Diaconis, D. Freedman. A dozen de Finetti-style results in search of a theory. Ann. Inst. H. Poincaré 23, 397–423 (1987).

[Eh1] A. Ehrhard. Symétrisation dans l'espace de Gauss. Math. Scand. 53, 281–301 (1983).

[Eh2] A. Ehrhard. Inégalités isopérimétriques et intégrales de Dirichlet gaussiennes. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 17, 317–332 (1984).

[Eh3] A. Ehrhard. Eléments extrémaux pour les inégalités de Brunn-Minskowski gaussiennes. Ann. Inst. H. Poincaré 22, 149–168 (1986).

[Eh4] A. Ehrhard. Sur l'inégalité de Sobolev logarithmique de Gross. Séminaire de Probabilités XVIII. Lecture Notes in Math. 1059, 194–196 (1984). Springer-Verlag.

[Fa1] S. Fang. Isoperimetric inequalities on the Wiener space. Bull. Sc. Math. 112, 345-355 (1988).

[Fa2] S. Fang. Grandes déviations pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Prépublication (1991).

[Fe] H. Federer. Geometric measure theory. Springer-Verlag (1969).

[Fer1] X. Fernique. Intégrabilité des vecteurs gaussiens. C. R. Acad. Sci. Paris 270, 1698–1699 (1970).

[Fer2] X. Fernique. Fonctions aléatoires gaussiennes, les résultats récents de M. Talagrand. Séminaire Bourbaki, exp. 660. Astérisque 145-146, 177–186 (1987).

[F-L-M] T. Figiel, J. Lindenstrauss, V. D. Milman. The dimensions of almost spherical sections of convex bodies. Acta Math. 139, 52–94 (1977).

[G-H-L] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine. Riemannian Geometry. Deuxième édition, Springer-Verlag (1990).

[Gr1] M. Gromov. Paul Lévy's isoperimetric inequality. Prépublication I.H.E.S. (1980).

[Gr2] M. Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. Publ. Math. I.H.E.S. 53, 53–78 (1981).

[G-M] M. Gromov, V. D. Milman. A topological application of the isoperimetric inequality. Amer. J. Math. 105, 843–854 (1983).

[Gro] L. Gross. Logarithmic Sobolev inequalities. Amer. J. Math. 97, 1061–1083 (1975).

[Gu] Y. Guivarc'h. Croissance polynômiale et périodes des fonctions harmoniques. Bull. Soc. Math. France 101, 333–379 (1973).

[Ha] L. H. Harper. Optimal numbering and isoperimetric problems on graphs. J. Comb. Th. 1, 385–393 (1966).

[Ka] J.-P. Kahane. Some random series of functions. Heath Math. Monographs (1968). Deuxième édition : Cambridge Univ. Press (1985).

[Ke] H. Kesten. On the speed of convergence in first-passage percolation (1991). À paraître in Ann. Appl. Probability.

[K-L] J. Kuelbs, W. Li. Metric entropy and the small ball problem for Gaussian measures (1992). À paraître in J. Funct. Anal..

[L-S] H. J. Landau, L. A. Shepp. On the supremum of a Gaussian process. Sankhyà A32, 369–378 (1970).

[Led1] M. Ledoux. A note on large deviations for Wiener chaos. Séminaire de Probabilités XXIV. Lecture Notes in Math. 1426, 1–14, Springer-Verlag (1990).

[Led2] M. Ledoux. A heat semigroup approach to concentration on the sphere and on a compact Riemannian manifold. Geometric and Funct. Anal. 2, 221–224 (1992).

[Led3] M. Ledoux. Semigroup proofs of the isoperimetric inequality in Euclidean and Gauss space (1992). À paraître in Bull. Sc. math..

[Led4] M. Ledoux. A simple analytic proof of an inequality by P. Buser (1992). À paraître in Proc. Amer. Math. Soc..

[L-T1] M. Ledoux, M. Talagrand. Characterization of the law of the iterated logarithm in Banach spaces. Ann. Probability 16, 1242–1264 (1988).

[L-T2] M. Ledoux, M. Talagrand. Probability in Banach spaces (Isoperimetry and processes). Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag (1991).

[Lé] P. Lévy. Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars (1951).

[L-Y] P. Li, S.-T. Yau. On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. Acta Math. 156, 153–201 (1986).

[MD] C. J. H. McDiarmid. On the method of bounded differences. Twelfth British Combinatorial Conference. Surveys in Combinatorics, 148–188 (1989). Cambrige Univ. Press.

[MK] H. P. McKean. Geometry of differential space. Ann. Probability 1, 197–206 (1973).

[Ma1] B. Maurey. Constructions de suites symétriques. C. R. Acad. Sci. Paris 288, 679–681 (1979).

[Ma2] B. Maurey. Sous-espaces ℓ^p des espaces de Banach. Séminaire Bourbaki, exp. 608. Astérisque 105-106, 199–216 (1983).

[Ma3] B. Maurey. Some deviations inequalities. Geometric and Funct. Anal. 1, 188–197 (1991).

[Mi1] V. D. Milman. New proof of the theorem of Dvoretzky on sections of convex bodies. Funct. Anal. Appl. 5, 28–37 (1971).

[Mi2] V. D. Milman. The heritage of P. Lévy in geometrical functional analysis. Colloque Paul Lévy sur les processus stochastiques. Astérisque 157-158, 273–302 (1988).

[Mi3] V. D. Milman. Dvoretzky's theorem - Thirty years later (Survey). Geometric and Funct. Anal. 2, 455–479 (1992).

[M-S] V. D. Milman, G. Schechtman. Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces. Lecture Notes in Math. 1200 (1986). Springer-Verlag.

[Mo] J. Moser. On Harnack's theorem for elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 14, 557–591 (1961).

[N-S-W] A. Nagel, E. Stein, M. Wainger. Balls and metrics defined by vector fields. Acta Math. 155, 103–147 (1985).

[Na] J. Nash. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math. 80, 931–954 (1958).

[Ne] E. Nelson. The free Markov field. J. Funct. Anal. 12, 211–227 (1973).

[Os] R. Osserman. The isoperimetric inequality. Bull. Amer. Math. Soc. 84, 1182–1238 (1978).

[Pi1] G. Pisier. Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces. Probability and Analysis, Varenna (Italy) 1985. Lecture Notes in Math. 1206, 167–241 (1986). Springer-Verlag.

[Pi2] G. Pisier. Riesz transforms : a simpler analytic proof of P. A. Meyer inequality. Séminaire de Probabilités XXII. Lecture Notes in Math. 1321, 485–501, Springer-Verlag (1988).

[Pi3] G. Pisier. The volume of convex bodies and Banach space geometry. Cambridge Univ. Press (1989).

[SC1] L. Saloff-Coste. Analyse sur les groupes de Lie à croissance polynômiale. Ark. för Math. 28, 315–331 (1990).

[SC2] L. Saloff-Coste. A note on Poincaré, Sobolev and Harnack inequalities. Duke Math. J. 65, 27-38 (1992).

[Sc] E. Schmidt. Die Brunn-Minkowskische Ungleichung und ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie. Math. Nach. 1, 81–157 (1948).

[S-T] V. N. Sudakov, B. S. Tsirel'son. Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures. J. Soviet. Math. 9, 9–18 (1978); translated from Zap. Nauch. Sem. L.O.M.I. 41, 14–24 (1974).

[Ta1] M. Talagrand. Sur l'intégrabilité des vecteurs gaussiens. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Gebiete 68, 1–8 (1984).

[Ta2] M. Talagrand. Regularity of Gaussian processes. Acta Math. 159, 99–149 (1987).

[Ta3] M. Talagrand. An isoperimetric theorem on the cube and the Khintchine-Kahane inequalities. Proc. Amer. Math. Soc. 104, 905–909 (1988).

[Ta4] M. Talagrand. Small tails for the supremum of a Gaussian process. Ann. Inst. H. Poincaré 24, 307–315 (1988).

[Ta5] M. Talagrand. Isoperimetry and integrability of the sum of independent Banach space valued random variables. Ann. Probability 17, 1546–1570 (1989).

[Ta6] M. Talagrand. Supremum of some canonical processes (1990). À paraître in J. Amer. Math. Soc..

[Ta7] M. Talagrand. A new isoperimetric inequality and the concentration of measure phenomenon. Geometric Aspects of Functional Analysis, Israel Seminar 1989-90. Lecture Notes in Math. 1469, 94–124 (1991). Springer-Verlag.

[Ta8] M. Talagrand. Simple proof of the majorizing measure theorem. Geometric and Funct. Anal. 2, 118–125 (1992).

[Ta9] M. Talagrand. A new isoperimetric inequality for product measure and the tails of sums of independent random variables. Geometric and Funct. Anal. 1, 211-223 (1991).

[Ta10] M. Talagrand. On the rate of clustering in Strassen's law of the iterated logarithm. Probability in Banach spaces 8. Progress in Probability 30, 339–351 (1992). Birkhäuser.

[Ta11] M. Talagrand. Sharper bounds for Gaussian and empirical processes (1992). À paraître in Ann. Probability.

[Ta12] M. Talagrand. New Gaussian estimates for enlarged balls (1992). À paraître in Geometric and Funct. Anal..

[Ta13] M. Talagrand. Isoperimetry, logarithmic Sobolev inequalities on the discrete cube, and Margulis' graph connectivity theorem (1992). À paraître.

[Ta14] M. Talagrand. Regularity of infinitely divisible processes. Ann. Probability 21, 362–432 (1993).

[Ta15] M. Talagrand. Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product spaces. En préparation (1993).

[Va1] N. Varopoulos. Une généralisation du théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev pour les espaces de Dirichlet. C. R. Acad. Sci. Paris 299, 651–654 (1984).

[Va2] N. Varopoulos. Hardy-Littlewood theory for semigroups. J. Funct. Anal. 63, 240–260 (1985).

[Va3] N. Varopoulos. Isoperimetric inequalities and Markov chains. J. Funct. Anal. 63, 215–239 (1985).

[Va4] N. Varopoulos. Analysis on Lie groups. J. Funct. Anal. 76, 346–410 (1988).

[Va5] N. Varopoulos. Small time Gaussian estimates of heat diffusion kernels. Part I : The semigroup technique. Bull. Sc. math. 113, 253–277 (1989).

[Va6] N. Varopoulos. Analysis and geometry on groups. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyoto (1990), vol. II, 951–957 (1991). Springer-Verlag.

[V-SC-C] N. Varopoulos, L. Saloff-Coste, T. Coulhon. Analysis and geometry on groups. Cambridge Univ. Press (1992).

[W-W] D. L. Wang, P. Wang. Extremal configurations on a discrete torus and a generalization of the generalized Macaulay theorem. Siam J. Appl. Math. 33, 55–59 (1977).

Michel LEDOUX

Université Paul-Sabatier

Département de Mathématiques

Laboratoire de Statistique et Probabilités

Bâtiment 1R1

118, route de Narbonne

31062 Toulouse, France

Astérisque

CLAUDE VITERBO

Orbites périodiques dans le problème des trois corps

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 774, p. 377-393

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__377_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Juin 1993
45ème année, 1992-93, n° 774

ORBITES PÉRIODIQUES DANS LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

par **Claude VITERBO**

1. INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de présenter les résultats récents de A. Bahri et P. Rabinowitz sur l'existence d'orbites périodiques du problème des trois corps, suivant une approche variationnelle. La question remonte au moins à Poincaré, qui espérait pouvoir utiliser de telles trajectoires pour approcher une trajectoire simple. Ce point de vue n'a pas vraiment abouti, mais les orbites périodiques se sont tout de même révélées précieuses pour comprendre la dynamique des systèmes Hamiltoniens (voir [C], [V2]).

La méthode de Bahri et Rabinowitz est variationnelle. Classiquement, en effet, on cherche des solutions périodiques de

$$\ddot{q} + \nabla V(t,q) = 0$$

pour un potentiel de classe C^2, V en étudiant les points critiques de $\Phi(q) = \int_0^T [\dot{q}^2 - V(t,q)]dt$. Sous l'hypothèse que V tende vers $-\infty$ avec $|q|$, Φ atteint toujours un minimum, d'où une solution périodique de période T de notre équation.

Le résultat est déjà en défaut si par exemple $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0$ et $V < 0$. Le minimum est alors 0, mais il n'est atteint par aucun q. Ce type de problème a été étudié par Ambrosetti et Coti-Zelati vers 1986-89. Puis les recherches se sont orientées vers des problèmes plus proches de la mécanique céleste. Le cas de potentiels de la forme $1/|x|^\alpha$ fut alors abordé (cf. [A-CZ 1], [A-CZ 2], [A-CZ 3], [B-R 1], [Gr]), pour lesquels V a une singularité en un point. Le cas abordé par Bahri et Rabinowitz est plus difficile, en ce que V est de la forme $V(q) = \sum_{i,j=1;j\neq i}^{3} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$, et donc possède une variété singulière (union de sous-espaces linéaires) de singularités. En réalité, c'est moins le problème des trois corps

classique que nous tentons d'exposer, que les méthodes variationnelles utilisées pour le traiter. Celles-ci ont une portée bien plus générale, en particulier l'étude des "points critiques à l'infini" due à Bahri et Coron (voir [B-C 1], [B-C 2], [B-C 3]). Pour d'autres méthodes pour traiter les défauts de compacité en calcul des variations on se référera au séminaire Bourbaki de H. Brézis ([Br]) et à l'article de P.L. Lions ([L]).

Un mot enfin pour justifier l'introduction dans la section 2 des bases de ce que l'on appelle la théorie de Conley. Les raisons en sont multiples. Cette théorie est devenu un outil presque indispensable dans les aspects topologiques du calcul des variations. Elle permet lorsqu'on se donne une fonction sur une variété, de donner un sens précis à des phrases du type "contribution des points critiques contenus dans un ouvert, à la topologie de la variété ". Elle s'applique aussi à des champs de vecteurs qui ne soient pas des gradients, et enfin, elle peut être simple ou sophistiquée, suivant le niveau de finesse requis par les applications, mais est toujours d'une grande beauté. Pour tout ce que nous ne pouvons dire sur ce sujet, nous référons à [Co 1] et sa bibliographie.

Malheureusement, nous devons exclure les autres méthodes, comme par exemple l'étude des configuration centrales (pour lesquelles on réfère aux travaux de Moeckel, McGehee, etc..) ou utilisant d'une manière ou d'une autre les symétries du potentiel Newtonien. Notons d'ailleurs que la méthode variationnelle se simplifie dans ce cas (voir [CZ 1], [S-T] et la section 4) De même, nous ne traitons pas des méthodes perturbatives, utilisées déjà par Poincaré, dans le cas où l'une des trois masses est petite. Nous verrons cependant, dans la section 4, que les résultats de mécanique céleste classique ne sont pas sans conséquences sur l'approche variationnelle.

1. Introduction.
2. Théorie de Conley et points critiques à l'infini.
3. Le problème des trois corps: étude variationnelle.
4. Autres résultats. Quelques remarques sur les solutions singulières.
5. Références.

L'auteur remercie A. Ambrosetti, A. Bahri, J.-M. Coron, G.F. Dall'Antonio, et S. Terracini pour de nombreuses discussions sur le sujet de cet exposé, V.I. Arnold et Michael Hermann pour leurs remarques lors de l'exposé. Toutefois les erreurs

ou omissions (en particulier bibliographiques) n'ont d'autre cause que l'ignorance de l'auteur.

2. THÉORIE DE CONLEY ET POINTS CRITIQUES À L'INFINI

Un outil commode pour présenter l'étude des problème variationnels, avec ou sans compacité, est la théorie de Conley (cf. [Co 1]). En particulier nous allons l'utiliser ici pour présenter la théorie des points critiques à l'infini d'A.Bahri et J.M. Coron. Qu'il soit clair que ce n'est rien d'autre qu'un langage commode pour décrire leurs idées. La théorie de Conley (comme celle des points critiques à l'infini) a d'autres applications que celle décrites ici.

Soit X un champ de vecteurs que nous supposerons être un pseudogradient d'une fonction f sur une variété M, c'est-à-dire que l'on a

$$df(x)X(x) \geq |df(x)|^2$$

(en particulier les points critiques de f coïncident avec les zéros de X, et en dehors de ces points, f croît strictement le long des lignes de gradient). Soit U un ouvert à bord de M. On appelle ensemble invariant maximal de X dans U, et on note S_U le plus grand sous-ensemble de U invariant par le flot de X. Dans le cas qui nous occupe, cet ensemble coïncide avec l'ensemble des points critiques de f dans U et des trajectoires de gradient les connectant (orbites hétéroclines de X) contenues dans U[1]. On note $\partial^- U$ l'ensemble des points du bord où X est sortant, et on l'appelle ensemble sortant de U. On note alors $I(U)$ l'espace topologique (pointé) $U/\partial^- U$.

PROPOSITION 1. *Si U est relativement compact, et si $S = S_U$ ne rencontre pas ∂U, alors le type d'homotopie de $I(U)$ ne dépend pas de U, mais seulement de S. On appelle alors $I(U)$ l'indice de Conley de S, et on note par abus de langage $I(S)$.*

Remarque: Si U vérifie les hypothèses de la proposition, on dira que c'est un bloc isolant pour S (cf. figure 1).

[1] L'ensemble maximal invariant et l'indice de Conley sont définis pour tout champ de vecteurs, dans le cas d'un champ de gradient la seule simplification vient de l'identification de l' ensemble maximal invariant

La démonstration n'est pas difficile. On peut toujours supposer que $U \subset V$, car U et V contiennent un voisinage de S. On utilise alors les trajectoires de X pour envoyer $\partial^- U$ sur $\partial^- V$ (en effet une trajectoire partant de $\partial^- U$ sort aussi de V, sinon elle s'accumulerait sur un point de S_V qui ne serait pas dans S_U, contrairement à l'hypothèse $S_U = S_V$), et donc obtenir une application de $I(U)$ dans $I(V)$. L'inverse se construit de façon analogue en construisant d'abord une application de $V/\partial^- V$ dans lui-même en envoyant les trajectoires restant hors de U, qui sortent (sinon elles finiraient sur $S_U \subset U$) sur le "point" de $V/\partial^- V$. On peut alors remplacer V par le sous-ensemble de V dont la trajectoire rencontre U. Ceci fait, on suit le flot pour envoyer V sur la réunion de U et de l'ensemble des trajectoires partant de $\partial^- U$ que l'on identifie à $\partial^- U \times [0,1]$. On obtient donc une application

$$V/\partial^- V \to (U \cup \partial^- U \times [0,1]/\partial^- U \times [0,1])$$

mais l'ensemble de droite a le type d'homotopie de $U/\partial^- U$. On vérifie ensuite aisément que les deux applications sont homotopiquement inverses l'une de l'autre.

Donnons quelques exemples:

A. Si S est vide, $\partial^- U$ est un rétracte de U (suivre les lignes du flot) et donc $I(S)$ a le type d'homotopie d'un point.

B. Soit x_0 un point critique isolé de f, que l'on suppose non dégénéré. Son indice de Morse est alors le nombre de valeurs propres négatives de $d^2 f(x_0)$. Il est facile de voir que si l'on prend un voisinage suffisamment petit de x_0 c'est un bloc isolant, et son indice est $D^k/S^{k-1} = S^k$ (voir figure 2, où $\partial^- U$ est en trait épais).

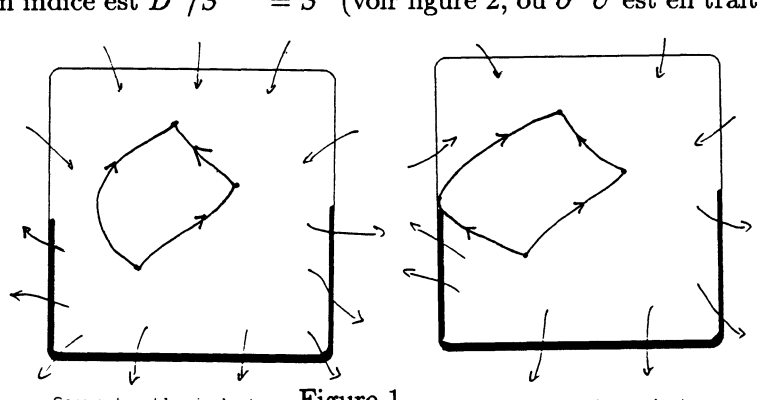


Figure 1

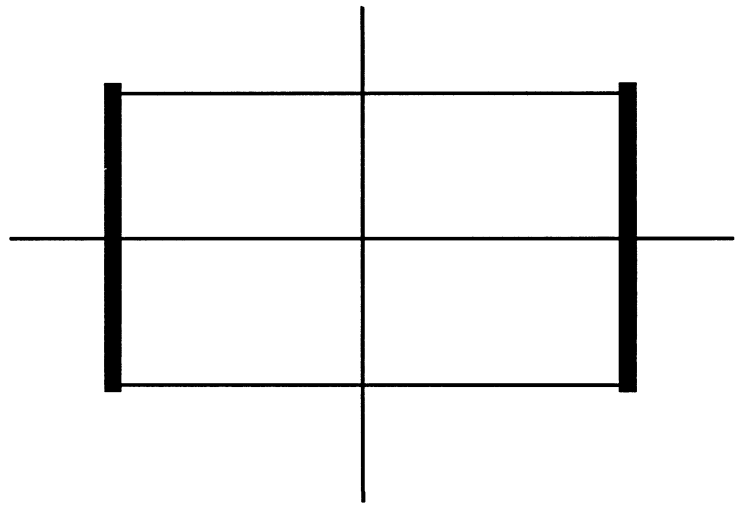


Figure 2

C. Supposons M compacte, et soient a, b deux niveaux réguliers de f (c'est-à-dire ne contenant pas de point critique). On note M^c le sous niveau de c, $M^c = \{x \in M \mid f(x) \leq c\}$. Alors $M^b - M^a$ est un bloc isolant pour l'ensemble des points critiques entre a et b, et des trajectoires le connectant. On a alors $I(U) = M^b/M^a$. En général, on détecte les points critiques de f par les changements de topologie de $b \to M^b$.

Dans son aspect le plus raffiné, la théorie de Conley tient aussi compte de la classe d'homotopie de $I(U) \to I(V)$ (bien que ce soient des équivalences d' homotopie, elles ne sont pas toutes homotopes entre elles). Cela permet parfois de mettre en évidence des bifurcations (i.e. changement de topologie de S_U). Mais très souvent, on oublie même le type d'homotopie de $I(U)$, pour ne retenir que son homologie.

On se place à nouveau dans le cadre de l'exemple C, mais on ne suppose plus M compacte. Supposons d'abord qu'en dehors d'un compact, toutes les trajectoires commençant dans $M^b - M^a$, finissent dans $M^a \cup \{$ l'ensemble des points critiques de $f\}$. Alors la proposition s'applique encore à $U = M^b - M^a$, car il suffit de l'appliquer au domaine U de la figure 2, qui lui est compact. On vérifie sans difficulté que la condition de Palais-Smale que l'on va rappeler entraîne justement la propriété ci-dessus. La condition de Palais-Smale s'énonce comme suit:

Soit (x_n) une suite de E telle que $df(x_n) \to 0$ et $f(x_n) \to c$ alors (x_n) converge. Donc, si $x(t) = -\nabla f(x(t))$, aucune demi-trajectoire infinie $(\{x(t) \mid t \geq t_0\})$ ne reste dans une région où f est bornée.

Un cas plus difficile est celui où certaines trajectoires de $M^b - M^a$ restent indéfiniment dans $M^b - M^a$ sans tendre vers un point critique. Elles tendent alors nécessairement vers l'infini, et on dira que $M^b - M^a$ contient des points critiques à l'infini. Il faut en particulier noter que M^b/M^a peut fort bien être non trivial (i.e. ne pas avoir le type d'homotopie d'un point), alors que $M^b - M^a$ ne contient pas de vrai point critique. Ceci est une situation fort déplaisante, car c'est aux vrais points critiques que l'on s'intéresse.

L'idée fondamentale de Bahri et Coron, (cf. [Br] pour les méthodes antérieures) est de séparer la contribution topologique des points critiques "à distance finie" de celle des "points critiques à l'infini". Si on sait montrer que la contribution des points critiques à l'infini ne suffit pas à expliquer la topologie de M^b/M^a il y aura nécessairement des points critiques à distance finie. C'est ce qui a lieu dans un certain nombre de cas, en particulier les résultats de Bahri-Coron sur la conjecture de Kazhdan-Warner, et les résultats sur le problème des trois corps que nous allons exposer dans le prochain paragraphe. Nous alllons conclure ce paragraphe, en expliquant comment on peut séparer les contributions des deux types de points critiques. Pour cela nous devons considérer le cas de deux blocs isolants U et V, dont la réunion W est aussi un bloc isolant. On souhaite comparer $I(U)$, $I(V)$ et $I(W)$. Il nous faut une hypothèse supplémentaire, à savoir qu'il n'y a pas à la fois une trajectoire reliant un point critique de U à un point critique de V et vice-versa. On supposera pour simplifier que seul le premier cas est permis. Alors, on a

PROPOSITION 2([Co 1] p.60-62). *Il existe une suite d'applications*

$$I(U) \to I(W) \to I(V) \to \Sigma I(U) \to \Sigma I(W) \to ...$$

qui induit en homologie une suite exacte longue

$$\ldots \to H_k(U, \partial^- U) \to H_k(W, \partial^- W) \to H_k(V, \partial^- V) \to H_{k+1}(U, \partial^- U) \to \ldots$$

Remarques: (1) Les deux propositions citées ci-dessus sont les ingrédients essentiels d'une démonstration très simple, due à Floer, de l'identité entre l'homologie du complexe de Thom-Smale-Witten et l'homologie de la variété. (cf. [F])

(2) Il est important de remarquer que le résultat ci-dessus reste vrai si par exemple V et W ne sont pas compacts, pourvu que U le soit. On voit alors que les hypothèses ci-dessus seront par exemple satisfaites si U contient l'ensemble des points critiques dans $M^{c+\epsilon} - M^{c-\epsilon}$ où c est un niveau correspondant à un changement de topologie des sous-niveaux de f, et V le complémentaire de U dans $M^{c+\epsilon} - M^{c-\epsilon}$. On voit alors que la suite exacte ci-dessus relie la contribution homologique des points critiques à distance finie et de ceux à l'infini, avec la topologie de $M^{c+\epsilon}/M^{c-\epsilon}$ (voir figure 3).

(3) La proposition 2 permet de majorer la dimension de $H_k(W, \partial^- W)$ en fonction de celles de $H_k(U, \partial^- U)$ et de $H_k(V, \partial^- V)$. Cette majoration est utilisée dans la démonstration de Bahri et Rabinowitz.

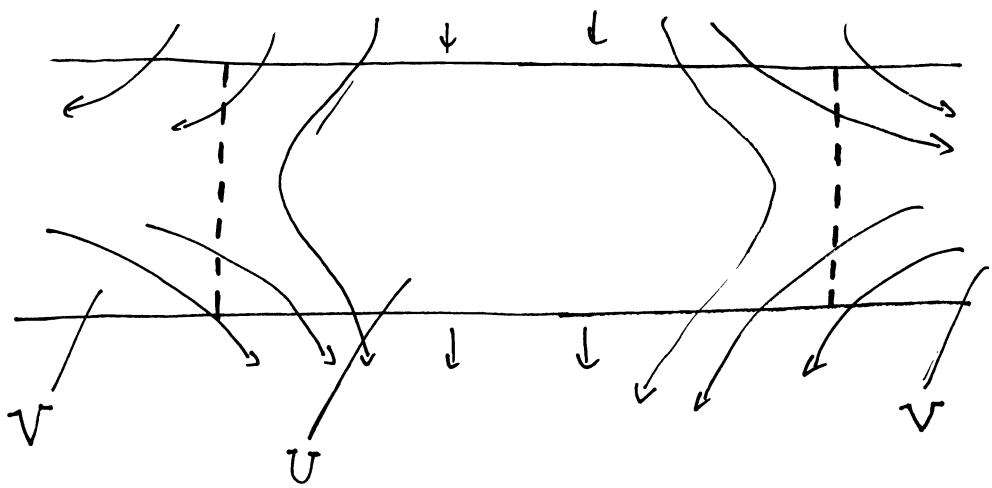


Figure 3

3. LE PROBLÈME DES TROIS CORPS. ÉTUDE VARIATIONNELLE

Pour cette section, la référence implicite est [B-R 2]. Le problème des N corps est l'équation d'un système de N masses m_j en interaction donnée par le potentiel Newtonien

$$V(q_1, \dots, q_N) = \sum_{i,j=1; j\neq i}^{N} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$$

Comme notre raisonnement est indépendant des m_i, nous supposerons $m_i = 1$. Plus généralement, on étudiera le cas où le potentiel n'est pas du type Newtonien, mais du type dit de "strong force" (introduit dans [G]), c'est-à-dire $V(q_1, \dots, q_N) = \sum_{i,j=1; j\neq i}^{N} V_{i,j}(q_i - q_j)$ (éventuellement $V_{i,j}$ pourra aussi dépendre du temps) et on suppose que $V_{i,j}$ vérifie les conditions suivantes:

(V_1) $V_{i,j} \in C^2(\mathbf{R}^l - \{0\}, \mathbf{R})$

(V_2) $V_{i,j} < 0$

(V_3) $V_{i,j}(q)$ et $V'_{i,j}(q)$ tendent vers 0 lorsque $|q|$ tend vers ∞

(V_4) $V_{i,j}(q)$ tend vers $-\infty$ lorsque q tend vers 0

(V_5) pour tout $M > 0$ il existe $R > 0$ tel que pour $|q| > R$ on a $V'_{i,j}(q) \cdot q > M|V_{i,j}(q)|$

(V_6) il existe $U_{i,j}$ dans $C^1(\mathbf{R}^l - \{0\}, \mathbf{R})$ tel que $U_{i,j}(q)$ tende vers ∞ lorsque q tend vers 0, et $|U'_{i,j}|^2 \leq -V_{i,j}$.

Alors que les hypothèses (V_1) à (V_5) sont satisfaites par tout potentiel de la forme $V_{i,j}(q) = \frac{1}{|q|^\alpha}$ l'hypothèse (V_6) dite de "strong force" n'est vérifiée par de tels potentiels que si $\alpha \geq 2$. On ne peut donc traiter directement du potentiel Newtonien, qui sera justiciable d'un passage à la limite.

Dans la suite de cette section, on supposera sauf mention explicite du contraire, les hypothèses (V_1) à (V_6) vérifiées. On pourra aussi supposer que V dépend de t et est T-périodique en t.

Ecrivons maintenant le problème de la recherche d'orbites périodiques de période T sous forme variationnelle; ce sont les points critiques de la fonctionnelle

$$\Phi(q) = \int_0^T [\dot{q}^2 - V(q)]dt.$$

Enonçons maintenant le résultat principal de Bahri et Rabinowitz.

THÉORÈME. *Sous les hypothèses (V_1) à (V_6), (E) a une suite infinie de solutions distinctes. Plus précisément la fonctionnelle Φ a une suite non bornée de valeurs critiques.*

C'est ce théorème dont nous allons essayer d'évoquer la démonstration.

La principale conséquence de (V_6) est que les points critiques de Φ sont des solutions qui ne passent pas par une collision, c'est-à-dire qu'à tout instant t on a $\forall i \neq j \; q_i(t) \neq q_j(t)$. Plus précisément, on a

PROPOSITION 3.1. *Pour tout $c > 0$ il existe $\delta(c) > 0$ tel que si $\Phi(q) \leq c$ on a* $\inf_{t\in[0,T]} |q_j(t) - q_k(t)| > \delta(c)$

En voici la démonstration.

$$c \geq \int_s^t V_{i,j}(q_i - q_j)dt \geq \int_s^t \nabla U_{i,j}(q_i - q_j)dt \geq$$

$$1/2c \int_s^t \left|\nabla U_{i,j}(q_i - q_j)\right|^2 dt \int_s^t |\dot{q}_i - \dot{q}_j|^2 dt$$

car $\int |\dot{q}_i|^2 dt \leq c$. D'où

$$\int_s^t \nabla U_{i,j}(q_i - q_j)(\dot{q}_i - \dot{q}_j)dt \leq 2c^2$$

soit

$$\left|U_{i,j}(q_i(t) - q_j(t)) - U_{i,j}(q_i(s) - q_j(s))\right|^2 \leq 2c^2$$

Comme d'après (V_4) on peut trouver s tel que $|q_i(s) - q_j(s)| \geq \delta_1(c)$, et même, à moins que cette inégalité ne soit stricte pour tout s (auquel cas notre proposition est vérifiée), on peut trouver s pour lequel l'égalité ait lieu; on aura

$$\left|U_{i,j}(q_i(t) - q_j(t))\right| \leq \sqrt{2}c + \sup_{|x|=\delta_1(c)} U_{i,j}(x)$$

et on conclut par (V_6).

On en tire plusieures conséquences. Tout d'abord Φ et le flot de son gradient sont définis sur ΛF_3 où on pose $F_k = \{(q_1, \ldots, q_k) \; | \forall i \neq j \; q_i \neq q_j\}$ et ΛF_k est l'espace des lacets $W^{1,2}$ dans F_k.

Une autre remarque importante est que le problème possède une symétrie par translation dans $\mathbf{R}^l$. Modulo cette symétrie, les points critiques sous un niveau donné sont bornés dans $W^{1,2}$ en fonction du niveau:

PROPOSITION 3.2. *Pour tout M il existe $C(M)$ tel que si $\Phi(q) \leq M$ il existe $v(q) \in \mathbf{R}^l$ tel que $|q - v(q)|_{W^{1,2}} \leq C(M)$.*

Remarque: La proposition ci-dessus n'est plus vraie si on essaie de remplacer la condition $D\Phi(q) = 0$ par $|D\Phi(q)| \leq \epsilon_0$, comme on va le voir ici.

Il est clair que Φ ne vérifie pas la condition de Palais-Smale. En effet, supposons $N = 3$, soient $(q_1(t), q_2(t))$ une solution périodique du problème des deux corps correspondant aux potentiels $W(q_1, q_2) = V_{1,2}(q_1 - q_2) + V_{2,1}(q_2 - q_1)$ et $q_3(t) = v_3 + \epsilon(t)$ où c tend vers l'infini et $\epsilon(t)$ est petit dans $W^{1,2}$. Alors $\nabla\Phi(q) = \ddot{q}_3 + \nabla V_{1,3}(q_1(t) - q_3(t)) + \nabla V_{2,3}(q_2(t) - q_3(t)), \nabla V_{2,3}(q_2(t) - q_3(t)), \nabla V_{1,3}(q_1(t) - q_3(t))$. Comme $|q_1 - q_3|$ et $|q_2 - q_3|$ tendent vers l'infini, on a grâce à $(V3)$ que les termes en $\nabla V_{1,3}(q_1(t) - q_3(t))$ et $\nabla V_{2,3}(q_2(t) - q_3(t))$ tendent vers 0. Comme $\ddot{q}_3$ tend aussi vers 0, notre suite sera donc bien une suite violant la condition de Palais-Smale.
Remarque: Un exemple encore plus simple est obtenu en faisant s'éloigner les trois corps l'un de l'autre de façon à avoir $q_j(t) = v_j + \epsilon(t)$ avec $|v_j - v_i| \to \infty$ pour $i \neq j$. Ces deux exemples seront réutilisés dans la suite. En fait on montre qu'il n'y a essentiellement pas d'autre suite violant les hypothèses de Palais-Smale. En effet:

PROPOSITION 3.3. *Soit $q_j^k(t); j \in \{1,2,3\}, k \in \mathbf{N}$ une suite telle que $D\Phi(q^k) \to 0$ et $\Phi(q^k)$ reste bornée. Alors après extraction d'une sous-suite, l'un des trois cas suivants est vérifié:*

1. *Il existe une suite de v_j^k constantes de $\mathbf{R}^l$ telles que l'on ait $q_j^k - v_j^k \to 0$ et alors $\Phi(q^k) \to 0$*
2. *Il existe un indice $i \in \{1,2,3\}$ une suite $v^k \in \mathbf{R}^l$ telle que $|q_i^k - v_k| \to \infty$ et si $\{j,r\} = \{1,2,3\} - \{i\}$, $q_j^k - v^k \to w_j$, $q_r^k - v^k \to w_r$ où w_1, w_2 sont solution du problème des deux corps associé.*
3. *Il existe une suite $v^k \in \mathbf{R}^l$ telle que pour tout i, $q_i^k - v^k \to w_i$ et $w = (w_1, w_2, w_3)$ est une solution du problème initial.*

Notons que le troisième cas est une simple conséquence de l'existence d'un groupe de symétries non-compact $\mathbf{R}^l$, opérant par translation. Les cas 1 et 2 se généralisent pour un nombre supérieur de corps de la façon suivante. Une suite violant Palais-Smale s'obtient en considérant p problèmes indépendants à $N_1, \ldots, N_p$ corps où $N_1 + \ldots N_p = N$ et en éloignant des solutions périodiques de chaque problème, afin que leurs distances mutuelles tendent vers l'infini. Le cas

1 correspond à la séparation du problème des trois corps en trois problèmes à un corps, et le cas 2 à sa décomposition en un problème à un corps et un problème à deux corps.

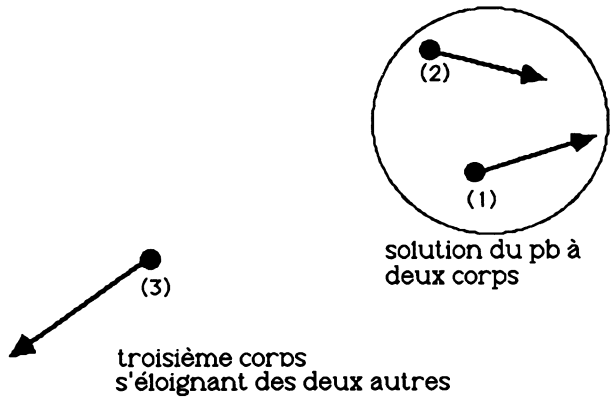


Figure 4

Commençons par étudier les niveau de Φ proches de 0 (qui est l'infimum de Φ). Dans ce cas seuls des points critiques à l'infini apparaissent. Leur contribution est décrite par la

PROPOSITION 3.4. *Le type d'homotopie de* Φ^ϵ *est celui de* $\mathcal{V}_\epsilon = \{(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbf{R}^l)^3 \mid -V(x_1, x_2, x_3) \leq -\epsilon\}$ *pour* ϵ *assez petit.*

Pour cela, on pose $q_\lambda = \lambda[q] + \exp(1+(\lambda-2)^{-1})(q-[q])$. L'application $q_2 = 2[q]$, $\lambda \to \Phi(q_\lambda)$ a une dérivée négative. On vérifie aisément que $\lambda \to q_\lambda$ réalise une rétraction par déformation de Φ^ϵ sur un ensemble de constantes ayant le type d'homotopie de $\mathcal{V}_\epsilon$ (grâce à (V_5)).

Le principe de la démonstration du théorème 1 est le suivant. On vient de voir que Φ^ϵ a le type d'homotopie d'un ensemble de dimension finie. En particulier son homologie s'annule en dimension assez grande. Convenons de dire qu'un ensemble a une homologie "bornée" si $\dim H_k(X)$ reste borné lorsque k tend vers l'infini. On montre alors que la contribution des points critiques à l'infini crée seulement une homologie bornée. Or les résultats de Sullivan et Vigué-Poirrier sur l'homologie de l'espace des lacets montrent que l'homologie de ΛF_3 n'est pas bornée. Il doit donc exister d'autres points critiques. On va maintenant énoncer ce que Bahri et

Rabinowitz appellent un lemme de Morse à l'infini. Il s'agit de comprendre le flot de $\nabla\Phi$ près de l'infini pour, en utilisant la terminologie de la section 2, pouvoir calculer l'indice de Conley des points critiques à l'infini.

On supposera d'abord être dans le cas 2 et que $|q_1^k - q_2^k|$ reste borné alors que $\dot{q}_3^k$ tend vers 0. En d'autres termes, (q_1^k, q_2^k) tend, modulo une translation vers une solution du problème des deux corps, alors que q_3^k s'éloigne de plus en plus de q_1^k, q_2^k. Il n'est pas difficile de voir que $v_k = [\frac{q_1^k+q_2^k}{2}]$. On effectue alors le changement de variables $(q_1, q_2, q_3) \Longrightarrow (q_1, q_2, Q_3)$ où

$$Q_3 = [\frac{q_1+q_2}{2}] + \frac{1}{\lambda}(q_3 - [q_3]) + \lambda([q_3 - \frac{q_1+q_2}{2}])$$

où $\lambda = \lambda(q)$ est l'unique λ tel que

$$\Phi(q) = \Phi_{1,2}(q_1, q_2) + \frac{1}{2}\int_0^T |\dot{Q}_3|^2 + \frac{1}{1 + \left|[Q_3 - \frac{q_1+q_2}{2}]\right|^2}$$

et $\Phi_{1,2}$ la fonctionnelle d'action du problème à deux corps associé. Ce changement de variable est bien défini dans le domaine où

$$|q_1 - v|_{L^\infty} + |q_2 - v|_{L^\infty} \leq C$$

pour un $v \in \mathbf{R}^l$ et

$$\frac{1}{2}\int_0^T |\dot{q}_3|^2 + \frac{1}{1 + \left|[q_3 - \frac{q_1+q_2}{2}]\right|^2} \leq \alpha(C).$$

On voit alors que dans les coordonnées (q_1, q_2, Q_3) la fonctionnelle I se découple en deux termes, dont l'un est $\Phi_{1,2}$ et l'autre tend vers son minimum lorsque Q_3 "tend vers une constante infinie" . On peut alors utiliser la suite exacte de la section 1 pour estimer la contribution des points critiques à l'infini à l'homologie de Φ^M. Ce sera au plus $\dim_k \Phi^\epsilon + 3\dim H_k(\Lambda F_2) + 3\dim H_{k-l+1}(\Lambda F_2)$ (le facteur 3 vient des trois valeurs possibles de i dans 3.3 (2), et on a deux termes $\dim H_k(\Lambda F_2) + \dim H_{k-l+1}(\Lambda F_2) = \dim H_k(\Lambda F_2 \times S^{l-1})$ car les "constantes à l'infini " sont paramétrées par le complémentaire d'une boule, qui a le type d'homotopie de la sphère de $\mathbf{R}^l$). Mais $\dim H_k(\Lambda F_3)$ croît exponentiellement, d'où une contradiction. Si on admet qu'un point critique isolé ne peut contribuer une homologie non bornée, on voit plus précisément qu'un nombre fini de points critiques de Φ ne suffiront pas à combler l'écart.

4. AUTRES RÉSULTATS, REMARQUES SUR LES SOLUTIONS SINGULIÈRES

Tout d'abord, disons que la méthode exposée ci-dessus permet en fait de montrer qu'il y a une suite non bornée de valeurs critiques de Φ, dont l'indice de Morse est aussi non borné. D'autre part, on peut aussi étudier le problème à énergie fixée, c'est-à-dire que l'on se donne *a priori* la valeur de $1/2|\dot{q}|^2 + V(q)$ cette quantité restant automatiquement constante sur une solution de (E). Les résultats obtenus dans le cas de potentiels homogènes sont analogues au cas à période fixée (cf [B-DO] et [A-CZ 5]). Le cas d'un potentiel quelconque reste ouvert (voir cependant [M-T 2]). Cependant on peut légitimement se demander si l'infinité de solutions trouvées n'est pas simplement obtenue à partir d'une solution "elliptique non dégénérée" par application du théorème de Birkhoff-Lewis (voir [Kl]). En utilisant le fait que (contrairement à une idée répandue) la démonstration du théorème de Birkhoff-Lewis est variationnelle, A. Bahri démontre dans un autre article ([Ba 2]) que la contribution variationnelle de ces orbites ne peut suffire, ce qui écarte le cas évoqué.

Ensuite on peut étudier les cas d'un potentiel newtonien. La méthode consiste à approcher $1/|x|$ par $1/|x| + \epsilon(x)/|x|^2$ (avec $\epsilon(x)$ à support compact et C^1 petite) se ramenant ainsi au cas de "strong force". La difficulté est alors bien sûr d'étudier la limite des solutions q_ϵ pour $\epsilon \to 0$ et aussi d'avoir une définition satisfaisante de solution singulière. Ce n'est pas tout à fait le cas aujourd'hui, cependant il est clair qu'une telle solution

(i) en dehors des singularités de q qui forment un ensemble $\mathcal{S}$ de mesure nulle q est C^2

(ii) $-\int_0^T V(q(t))dt$ est finie

(iii) la conservation de l'énergie doit être satisfaite sur toute la trajectoire, c'est-à-dire que $|\dot{q}|^2 + V(q)$ est constante (et pas seulement constante entre deux collisions).

Les solutions trouvées ci-dessus vérifient bien les conditions (i) à (iii), mais il n'est pas tout à fait clair qu'une telle notion de solution généralisée soit "réaliste" (en particulier aucune condition autre que (iii) ne lie ce qui se passe avant et après une collision, on peut par exemple rebrousser chemin). Une fois ce résultat obtenu, on espère trouver de telles orbites avec un nombre borné (éventuellement par 0!)

de collisions. Les premiers résultats faisaient appel à une symétrie du potentiel (par exemple on suppose $V(-x) = V(x)$) pour formuler le problème autrement (p.ex. au lieu de chercher les solutions T-périodiques de $\ddot{q} + \nabla V(q) = 0$, on cherche les solutions anti $T/2$-périodiques, i.e. $q(t+T/2) = -q(t)$). La formulation variationnelle de ce problème vérifie plus souvent la condition de Palais-Smale, en particulier, on voit que les suites que nous avons décrites section 3 ne peuvent vérifier cette condition d'antisymétrie même si V est symétrique. Dans ce cas on trouve des solutions en résolvant un simple problème de minimisation: celui de Φ sur l'espace des q antisymétriques. Nous référons à [C-Z 1],[S-T] et [DA] pour plus de détails et des résultats précis.

Dans le cas général, il est possible de borner le nombre de collisions en fonction de l'indice de Morse de la solution, qui est la dimension de la somme des espaces propres associés à une valeur propre strictement négative de

$$\Phi''(x) = \int_0^1 |\dot{q}|^2 - V''(x)(q,q)$$

Dans le cas où V a une unique singularité en 0 du type $1/|x|$ pour de telles orbites, Tanaka ([Ta 2]) a démontré l'estimation suivante:

PROPOSITION. *Soit ν le nombre de collisions de la solution x, alors l'indice de Morse de Φ en x est minoré par $(N-2)\nu i(\alpha)$, où $i(\alpha)$ est un entier tel que $i(\alpha) = 1$ pour α dans $]0,1]$, et $i(\alpha) \geq 2$ pour $\alpha > 1$.*

D'autre part, il est possible de montrer qu'un point critique contribuant à l'homologie k-dimensionnelle de la variété ambiante a nécessairement pour indice k avec une erreur bornée par sa nullité (définie comme $\ker \Phi''$). On peut donc majorer l'indice de Morse d'un point critique, si on sait par quelle classe d'homologie il a été obtenu (cf. [B-L 1] [V]).

La méthode de démonstration de la proposition consiste à étudier le comportement de x au voisinage d'une singularité, et d'en déduire sa contribution à l'indice de Morse de Φ. Le cas de problème à trois corps est plus difficile, car le lieu singulier de V n'est pas réduit à un point: c'est une sous variété singulière de $(\mathbf{R}^l)^3$, et en général on ne connaît pas le comportement d'une solution lorsque l'on approche d'une singularité, sauf si l'on s'approche d'une collision triple. Ce cas propre au problème des trois corps a été étudié par Sundman (cf. [Su]), qui a montré en

particulier que lors d'une triple collision le mouvement est asymptotiquement contenu dans un plan. Des résultats de Dell'Antonio ([DA]) montrent qu'une telle solution a un indice de Morse suffisamment élevé pour pouvoir garantir l'existence de solutions sans triple collision. Le cas des doubles collisions reste ouvert, bien que l'on sache trouver des solutions telles que le nombre de telles collisions soit borné.

Enfin des travaux récents de Mlle Riahi d'une part ([R]), et de Majer-Terracini d'autre part ([M-T 3]), étendent les résultats de la section 3 au cas du problème à N corps $N \geq 3$. Il semble que la méthode de [R] soit très proche de celle exposée, celle de [M-T] étant légèrement différente. En particulier dans [M-T] on est amené à comparer les topologies des applications naturelles $\Lambda F_N \to \Lambda F_N - 1$ pour montrer que la topologie de ΛF_N ne peut être épuisée par un nombre fini d'espaces ayant la topologie de ΛF_{N-1}.

BIBLIOGRAPHIE

[A-CZ 1] Ambrosetti, A. and Coti-Zelati, V., *Critical points with lack of compactness and applications to singular dynamical systems,*, Annali Mat. Pura Appl. **149** (1987), 237–259.

[A-CZ 2] Ambrosetti, A. and Coti-Zelati, V., *Periodic solutions of singular dynamical systems*, in "Periodic solutions of Hamiltonian systems and related topics," P.H Rabinowitz et al eds, Nato ASI Series, Reidel, 1987, pp. 1–10.

[A-CZ 3] Ambrosetti, A. and Coti-Zelati, V., *Noncollision orbits for a class of Keplerian like potentials*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **5** (1988), 287–295.

[A-CZ 4] Ambrosetti, A. and Coti-Zelati, V., *Perturbation of hamiltonian systems with Keplerian potentials*, Math. Zeitschrift **201** (1989), 227–242.

[A-CZ 5] Ambrosetti, A. and Coti-Zelati, V., *Closed orbits of fixed energy for a class of n-body problems*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **9** (1992), 187–200.

[A-CZ 6] Ambrosetti, A. and Coti-Zelati, V., "Periodic solutions of singular Lagrangian systems," Birkhaüser, 1993.

[B] Bahri,A.,, *Variational contribution of periodic orbits obtained by the Birkhoff--Lewis method*, preprint, Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick, N.J. 08903, U.S.A..

[B-C 1] Bahri,A., Coron, J-M., *Une théorie des points critiques à l'infini pour l'équation de Yamabe et le problème de Kazdan-Warner*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **300** (1985), 513–516.

[**B-C 2**] Bahri,A., Coron, J-M., *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain*, Comm. Pure and Appl. Math. **41** (1988), 253–294.

[**B-C 3**] Bahri,A., Coron, J-M., *The scalar-curvature problem on the standard three-dimensional sphere.*—, J. Funct. Anal. **95** (1991), 106–172.

[**B-L 1**] Bahri,A., Lions,P.L., *Remarques sur la théorie variationelle des points critiques et applications*, C.R. Acad.Sci.,Paris **301** (1985), p. 145-147.

[**B-L 2**] Bahri, A. and Lions, P.L., *Morse index of some min-max critical points I. Applications to multiplicity results*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 1027–1037.

[**B-D'O**] Bahri, A. et D'Onofrio, B., *Exponential growth of the number of periodic orbits for three body type problems*, Maghreb Math. Rev. **1** (1992), 1–14.

[**B-R 1**] Bahri, A. et Rabinowitz, P., *A minmax method for a class of Hamiltonian systems with singular potentials*, J. Functional Anal. **8** (1989), 561–649.

[**B-R 2**] Bahri, A. et Rabinowitz, P., *Periodic solutions of Hamiltonian systems of three-body type*, Ann. Inst. Poincaré Analyse Non Linéaire **82** (1991), 412–428.

[**B-CZ**] Bessi, U. et Coti-Zelati, V., *Symmetries and non-collision closed orbits for planar N-Body type problems*, Non Linear Anal. TMA **16** (1991), 587–598.

[**Bi**] Birkhoff, G., "Dynamical systems,", Amer. Math. Soc., Providence,R.I., 1924.

[**Br**] Brézis, H., *Points critiques dans les problèmes variationnels sans compacité*, Séminaire Bourbaki, Exposé 698, Astérisque **161-162** (1988), 239-256.

[**Co**] Conley,C.C., "Isolated Invariant Sets and their Morse Index," C.B.M.S. Reg. Conf. Series in Math. n^o 38, Amer. Math. Soc., Providence,R.I., 1978.

[**CZ 1**] Coti-Zelati, V., *Periodic solutions for N-body type problems*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **7** (1990), 477–492.

[**CZ 2**] Coti-Zelati, V., *A class of periodic solutions of the N-body problem*, Cel. Mech. and Dyn. Astr. **46** (1989), 177–186.

[**DA**] Dell'Antonio, G., *Finding non-collision periodic solutions to a perturbed N-body Kepler problem*, preprint Dip. di Matematica Univ. Roma "La Sapienza".

[**F**] Floer,A., *Witten's complex and infinite-dimensional Morse theory*, J. of Differential Geom. **30** (1989), 207–221..

[**G**] Gordon, W., *Conservative dynamical systems involving strong forces*, Trans. Amer. Math. Soc. **204** (1975), 113–135.

[**Gr**] Greco, C., *Periodic solutions of a class of singular Hamiltonian systems*, Nonlinear Analysis **12** (1988), 259–269.

[**K**] Klingenberg, W., "Lectures on Closed Geodesics," Grundlehren der Math. Wissenschaften, Band 230, Springer–Verlag, Berlin- Heidelberg- NewYork, 1978.

[**L**] Lions, P.L., *The concentration compactness principle in the calculus of Variations (Part 1 and 2)*, Revista Matematica Iberoamericana **1** (1985), 45 and 145.

[**M-T 1**] Majer, P. et Teracini, S., *Periodic solutions to some n-body type problems*, Arch. Rat. Mech. Anal. (to appear).

[**M-T 2**] Majer, P. et Teracini, S., *Periodic solutions to some n-body type problems: the fixed energy case*, Duke Math. Jour. (to appear).

[**M-T 3**] Majer, P. et Teracini, S., *Multiple periodic solutions to some N-body type problems via a collision index*, preprint, Dip. di Matematica del Politecnico di Milano, Pzza L. da Vinci 32, Milano.

[**R**] Riahi, H., *Periodic orbits of n-body type problems*, PhD dissertation, Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswik, N.J. 08903, U.S.A..

[**S-T**] Serra, E. et Teracini, S., *Collisionless periodic solutions to some three-body problems*, Arch. Rat. Mech. Anal. **120** (1992), 305–325.

[**Si-M**] Siegel, C.,L. et Moser, J., "Lectures on celestial mechanics," Springer-Verlag, 1971.

[**Su**] Sundman, Acta Soc. Sci. Fenn. **35** (1909).

[**Su-VP**] Sullivan, D., Vigué-Poirrier, M., *The homology theory of the closed geodesic problems*, Jour. of Differential Geometry **11** (1976), 633–644.

[**Ta 1**] Tanaka, K., *Morse indices at critical points related to the symmetric mountain pass theorem and applications*, Comm. Partial Diff. Eq. **14** (1989), 99–128.

[**Ta 2**] Tanaka, K., *Non-collision solutions for a second order singular Hamiltonian system with weak force*, preprint.

[**V**] Viterbo,C., *Indice de Morse des points critiques obtenus par minimax*, Annales de l'Institut Henri Poincaré: Analyse non linéaire **5** (1988), 221–225.

Claude VITERBO

URA 1169 du CNRS
Département de Mathématiques, Bât. 425
Université de Paris-Sud
F-91405 ORSAY CEDEX

et

D.M.I.
École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
F-75230 PARIS CEDEX 05