

Astérisque

D. CERVEAU

Théorèmes de type Fuchs pour les tissus feuilletés

Astérisque, tome 222 (1994), p. 49-92

http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__222__49_0

© Société mathématique de France, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Théorèmes de type Fuchs pour les tissus feuilletés

D. Cerveau
IRMAR - RENNES

Après avoir rappelé des résultats pour certains bien anciens - et souvent méconnus - concernant les d -tissus sur un ouvert de \mathbf{C}^n on s'intéresse à la dynamique des 3-tissus feuilletés hexagonaux globaux. Bien souvent - c'est le cas sur les espaces projectifs - un tel objet va présenter des singularités. On se propose, moyennant des hypothèses de type Fuchs, de donner une description des feuilles comme niveaux de fonctions multivaluées de type Liouville ($\sum \lambda_i \text{Log } f_i + H$, f_i et H holomorphes). Ce travail est motivé par la description de la variété des feuilletages algébriques de codimension un sur les espaces projectifs $\mathbf{CP}(n)$.

I - Généralités

§ I.1. d -tissus sur un ouvert de \mathbf{C}^n .

Dans ce qui suit on use et abuse de la référence [C , G] ainsi que de l'exposé de Beauville au séminaire Bourbaki [B]. Tous les énoncés sont **locaux** et l'on doit entendre "quitte à diminuer l'ouvert de définition U ".

Définition 1. Un d -web ou un d -tissu \mathcal{W} sur un ouvert U de \mathbf{C}^n est la donnée de d -feuilletages holomorphes \mathcal{F}_i de codimension un en position générale. On note $\mathcal{W} = [\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d]$.

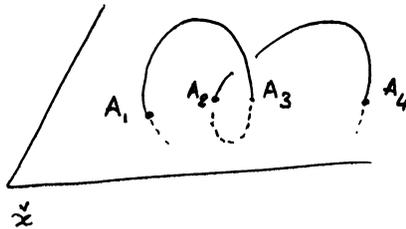
Localement chaque feuilletage \mathcal{F}_i est donné par les niveaux d'une submersion holomorphe u_i ; on note $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}(du_i)$. Si $d \leq n$, tout d -web est localement difféomorphe au d -web standard $[\mathcal{F}(dx_1), \dots, \mathcal{F}(dx_d)]$, où x_1, \dots, x_n est un système de coordonnées local de \mathbf{C}^n .

Un d -web $\mathcal{W} = [\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d]$ sur U est **linéaire** si toutes les feuilles des feuilletages \mathcal{F}_i sont les traces sur U d'hyperplans affines.

Un d -web est **linéarisable** s'il est difféomorphe à un d -web linéaire.

Exemple : web associé à une courbe algébrique.

Cet exemple est fameux. Soit $\Gamma \subset \mathbf{CP}(n)$ une courbe algébrique de degré d suffisamment générale pour que ce qui suit ait un sens. Soit \check{x}_0 un point général de l'espace dual $\check{\mathbf{CP}}(n)$; si \check{x} est voisin de \check{x}_0 , l'hyperplan \check{x} (vu dans $\mathbf{CP}(n)$) coupe la courbe Γ en d points distincts, notés $A_1(\check{x}), \dots, A_d(\check{x})$.



Par dualité ces d -points définissent d -hyperplans passant par \check{x} que l'on décide être les feuilles de notre d -web. On munit ainsi un voisinage U de \check{x}_0 d'un d -web que l'on note $\mathcal{W}(\Gamma)$; ce d -web est par construction linéaire. Si $z_i, i = 1, \dots, d$, sont des coordonnées locales près du point $A_i(\check{x}_0)$, on peut choisir les $u_i = z_i(A_i)$ comme fonctions définissant nos d -feuilletages : $\mathcal{W}(\Gamma) = [\mathcal{F}(du_1), \dots, \mathcal{F}(du_d)]$. Mais d'autres choix sont évidemment possibles ; ainsi si w est une forme différentielle holomorphe sur Γ , les fonctions :

$$\int_{A_i(\check{x}_0)}^{A_i(\check{x})} w$$

définissent pour $\check{x} \in U(\check{x}_0)$ des fonctions donnant encore nos feuilletages ; notamment :

$$(1) \quad \int_{A_i(\check{x}_0)}^{A_i(\check{x})} w = \ell_i^w(u_i(\check{x}))$$

où $\ell_i^w(t)$ est holomorphe au voisinage de $u_i(\check{x}_0)$.

Rappelons ici la fameux théorème d'Abel :

(2) La somme $\sum_{i=1}^d \int_{A_i(\check{x}_0)}^{A_i(\check{x})} w$ est indépendante de $\check{x} \in U(\check{x}_0)$.

On traduit alors (1) et (2) par :

$$(3) \quad \sum_{i=1}^d \frac{\partial \ell_i^w}{\partial t}(u_i) du_i = 0.$$

On introduit la :

Définition 2 : Soit $\mathcal{W}(\Gamma) = [\mathcal{F}(du_1), \dots, \mathcal{F}(du_d)]$ un d -web sur l'ouvert U de \mathbb{C}^n . On appelle relation abélienne une relation de la forme :

$$(4) \quad \sum_{i=1}^d f_i(u_i) du_i = 0$$

où les f_i sont holomorphes au voisinage de $u_i(x_0) \in \mathbb{C}$, $x_0 \in U$.

L'ensemble des relations abéliennes constitue un espace vectoriel $Ab(\mathcal{W})$ dont la dimension $M(\mathcal{W})$ s'appelle le rang du web \mathcal{W} .

Revenons au web $\mathcal{W}(\Gamma)$ associé à une courbe de degré d dans $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$. On peut démontrer qu'en fait toutes les relations abéliennes sont de type (3) ; une conséquence du théorème d'Abel est donc la suivante :

$$M(\mathcal{W}(\Gamma)) = g(\Gamma) \leq M(n, d)$$

où $g(\Gamma)$ est le genre de la courbe Γ et $M(n, d)$ le maximum du genre pour une courbe de degré d dans $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$ (Castelnuovo).

Dans sa thèse Chern démontre que pour un d -tissu sur un ouvert U de \mathbb{C}^n on a toujours l'inégalité :

$$M(\mathcal{W}) \leq M(n, d).$$

On voit ainsi que le maximum du rang est précisément réalisé par les d -webs linéaires $\mathcal{W}(\Gamma)$ associés aux courbes extrémales, i.e. celles ayant le genre maximum dans un degré donné.

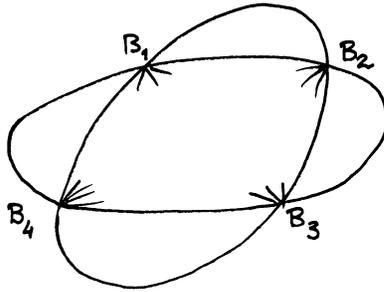
Voici pêle mèle des résultats connus concernant les d -webs linéaires et concernant la linéarisation.

Théorème 1 (Lie-Poincaré-Wirtinger-Griffiths). Soit \mathcal{W} un d -web linéaire sur $U \subset \mathbb{C}^n$ possédant au moins une relation abélienne $\sum f_i(u_i) du_i = 0$, $f_i \equiv 0$ pour tout i . Alors il existe une courbe algébrique Γ dans $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$, $U \subset \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}\mathbb{P}(n)$ tel que $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\Gamma)|_U$.

Concernant la linéarisation on a le :

Théorème 2 (Chern-Griffiths). Soit \mathcal{W} un d -web sur $U \subset \mathbb{C}^n$ de rang maximal $M(n,d)$; si $n \geq 3$ et $d \leq n+1$ ou $d \geq 2n$ alors \mathcal{W} est linéarisable.

Ainsi pour $n = 3$ et $d \neq 5$ tout d -tissus de rang maximal est linéarisable. Pour $n = 2$ le théorème est inopérant ; ainsi on peut construire un 5-tissu du complément dans $\mathbb{C}P(2)$ d'une courbe γ , de rang maximum et qui ne soit pas linéarisable. Cet exemple est dû à Bol : on se donne quatre points B_i en position générale et l'on considère le feuilletage \mathcal{F}_i dont les feuilles sont les droites passant par B_i . On ajoute à nos quatre feuilletages \mathcal{F}_i le feuilletage \mathcal{F}_5 dont les feuilles sont les coniques passant par les B_i (fig.).



On a $M(2,5) = \frac{1}{2} (5-1)(5-2) = 6$ et le 5-webs ci-dessus est effectivement de rang 6, ce qui n'est pas si facile à établir.

En dimension deux les d -tissus de rang maximal qui sont linéarisables ont été récemment classifiés par A. Hénaut dans [H].

§ I.2. Les 3-tissus en dimension deux.

Leur rang est inférieur ou égal à 1. Si l'on dispose d'une relation abélienne non triviale pour $\mathcal{W} = [\mathcal{F}(du_1), \mathcal{F}(du_2), \mathcal{F}(du_3)]$:

$$(5) \quad \ell_1(u_1)du_1 + \ell_2(u_2)du_2 + \ell_3(u_3)du_3 = 0$$

il est clair que chaque ℓ_i est non identiquement nulle. On peut alors choisir des primitives L_i de ℓ_i de sorte que

$$(6) \quad L_1 + L_2 + L_3 = 0 .$$

Visiblement en un point générique (L_1, L_2) est un difféomorphisme local. Dans les coordonnées locales $(L_1(u_1), L_2(u_2))$ le web \mathcal{W} a pour feuilles les lignes horizontales, verticales et les parallèles à la deuxième bissectrice.

Si H_1, H_2, H_3 définissent \mathcal{W} , $H_i = H_i(u_i)$, et vérifient (6) un calcul élémentaire assure que :

$$(7) \quad H_i = \lambda \cdot L_i + a_i, \quad i = 1, 2, 3$$

où $\lambda \in \mathbf{C}^*$ et $a_i \in \mathbf{C}$.

Un triplet (u_1, u_2, u_3) tel que $\mathcal{W} = [\mathcal{F}(du_1), \mathcal{F}(du_2), \mathcal{F}(du_3)]$ et vérifiant (6), s'il en existe, sera dit basique. Evidemment un triplet basique est caractérisé par deux de ses éléments et deux triplets basiques s'échangent par une transformation affine (d'après 7).

Considérons maintenant une courbe elliptique $E \subset \mathbf{CP}(2)$; le trois web linéaire $\mathcal{W}(E)$ est de rang un (théorème d'Abel) et l'associativité de la loi d'addition sur la cubique se traduit par l'hexagonalité du web $\mathcal{W}(E)$.

Définition 3. Un 3-web \mathcal{W} sur $U \subset \mathbf{C}^2$ est hexagonal si en chaque point m les "hexagones" se "referment" (cf. [B] et fig.)



Le fait remarquable est qu'un 3-tissu est hexagonal si et seulement s'il possède une relation abélienne non triviale.

La proposition suivante relie nos différentes notions :

Proposition 1. Soit $\mathcal{W} = [\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3]$ un 3-web sur un ouvert U de \mathbf{C}^2 ; soient ω_i des formes différentielles définissant \mathcal{F}_i telles que $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$; sont équivalents :

- (i) \mathcal{W} est hexagonal
- (ii) si $m \in U$, il existe u_1, u_2, u_3 et g holomorphes au voisinage de m ,

g unité, tels que :

$$w_i = g du_i$$

(iii) il existe une 1-forme holomorphe fermée Θ telle que

$$dw_i = \Theta \wedge w_i .$$

Preuve :

1) (i) \Leftrightarrow (ii) d'après la proposition 1.

2) (ii) \Leftrightarrow (iii) : supposons que l'on ait défini Θ_1 et Θ_2 vérifiant

$$dw_j = \Theta_j \wedge w_i , \quad j = 1,2, \quad i = 1,2,3$$

sur un petit ouvert $U' \subset U$. Alors

$$0 = (\Theta_1 - \Theta_2) \wedge w_i , \quad i = 1,2,3$$

et par suite $0 = \Theta_1 - \Theta_2$.

Compte tenu de cette remarque il suffit de construire Θ localement le recollement sera automatique ; au voisinage de $m \in U$, on pose :

$$\Theta = \frac{dg}{g} , \quad \text{où } g \text{ est fourni par (ii).}$$

3) (iii) \Rightarrow (ii) : soit $m \in U$; à un voisinage de m on a : $\Theta = \frac{dg}{g}$ où g est une unité.

Ecrivant $w_i = g.w'_i$ on constate que :

$$dw_i = \frac{dg}{g} \wedge w_i + g dw'_i = \frac{dg}{g} \wedge w_i .$$

Par suite les w'_i sont fermées et localement $w'_i = du_i$.

La condition $w_1 + w_2 + w_3 = 0$ fournit la relation abélienne :

$$du_1 + du_2 + du_3 = 0 .$$

§ L3. Webs globaux sur les surfaces. Structures affines.

Soit S une surface holomorphe ; on peut définir un 3-web sur la surface S par la donnée de trois feuilletages holomorphes $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ partout deux à deux transverses. Cette définition est en fait restrictive si ce n'est maladroite. Revenons en effet au web $\mathcal{W}(E)$ associé à une

courbe elliptique E . Visiblement $\mathcal{W}(E)$ se laisse définir sur $S = \mathbb{C}P(2) - E^*$, où E^* est la courbe duale de E : E^* est une sextique à neuf point cuspidaux. Il est à peu près évident que $\mathcal{W}(E)$ ne provient pas de 3-feuilletages : par un argument géométrique élémentaire on voit que

nos 3-feuilletages locaux sur un petit ouvert sont permutés lorsque l'on suit un chemin tournant autour de la sextique E^* .

Pour palier à ce fait on note $\Pi : T^d S \longrightarrow S$ le fibré vectoriel naturel dont la fibre est l'espace $\mathcal{P}(2,d)$ des polynômes homogènes de degré d en deux variables. Pour $d=1$, $T^1 S$ est le fibré cotangent de S ; soit $\mathcal{D}(2,d) \subset \mathcal{P}(2,d)$ l'hyper-surface algébrique constituée des polynômes ayant au moins une droite multiple. Introduisons l'hypersurface $\mathcal{D}is \Pi \cap \subset T^d S$ définie dans une carte trivialisante $\psi^{(d)}$ associée à une carte locale $\psi : U \longrightarrow \mathbb{C}^2$ de S :

$$\begin{array}{ccc} \Pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi^{(d)}} & \mathbb{C}^2 \times \mathcal{P}(2,d) \\ \Pi \downarrow & & \downarrow pr_1 \\ U & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

par $\mathcal{D}is \Pi \cap \Pi^{-1}(U) = \psi^{(d)-1}(\mathbb{C}^2 \times \mathcal{D}(2,d))$.

Définition 4. Un d -web \mathcal{W} sur la surface S est la donnée d'un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ par des ouverts munis de sections

$$\mathcal{W}_i : U_i \longrightarrow T^d S, \quad \Pi \circ \mathcal{W}_i = id_{U_i}$$

telles que :

- 1) l'image de \mathcal{W}_i n'est pas contenue dans $\mathcal{D}is \Pi$
- 2) $\mathcal{W}_i / U_i \cap U_j = h_{ij} \mathcal{W}_j / U_i \cap U_j$
où les $h_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ sont des unités.

L'ensemble singulier de \mathcal{W} noté $Sing \mathcal{W}$ est par définition l'ensemble analytique défini par :

$$(Sing \mathcal{W}) \cap U_i = \mathcal{W}_i^{-1}(\mathcal{D}is \Pi).$$

Le web \mathcal{W} est sans singularité ou ordinaire si $Sing \mathcal{W} = \emptyset$.

Remarques.

1) Soit \mathcal{W} un d -web sur la surface S ; si S est simplement connexe, \mathcal{W} est donné par d feuilletages \mathcal{F}_i en position générale (aux points non singuliers). L'ensemble singulier $Sing \mathcal{W}$ est constitué des singularités éventuelles des \mathcal{F}_i et des contacts entre les \mathcal{F}_i .

2) Du point de vue local il résulte de 1) que l'on retrouve la même notion que précédemment.

3) D'après 2) on peut définir la notion de feuilles locales et par prolongement analytique la notion de feuilles globales. Alors que pour un feuilletage les feuilles ne se recoupent pas c'est tout à fait possible ici... et de façon sauvage comme nous le verrons.

Désignons par S_d le groupe des permutations de l'ensemble $[1, \dots, d]$; si S est muni d'un d -web on a une action évidente de $\Pi_1(S\text{-Sing } \mathcal{W}, m)$ sur S_d définie de la façon suivante :

soient γ un lacet en $m \in S\text{-Sing } \mathcal{W}$, et U un petit voisinage simplement connexe de m ; U est muni de d -feuilletages $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d$ tels que :

$$\mathcal{W}|_U = [\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d].$$

Partant de la feuille locale $\mathcal{L}(\mathcal{F}_i)_{(m)}$ de \mathcal{F}_i passant par m on peut suivre par continuité cette feuille le long de γ ; on revient avec l'une des feuilles $\mathcal{L}(\mathcal{F}_{\sigma_\gamma(i)})_{(m)}$ de $\mathcal{W}|_U$ par m .

On note

$$\sigma : \Pi_1(S\text{-Sing } \mathcal{W}, m) \longrightarrow S_d$$

cette action et on l'appelle **monodromie primaire**. Si la monodromie primaire est triviale le d -web est donné par d -feuilletages (éventuellement singuliers) globaux.

Voici quelques exemples :

1) Soit \mathcal{W}_E le 3-web associé à une courbe elliptique ; \mathcal{W}_E est défini sur $\check{\mathbb{C}P}(2)-E^*$; la monodromie primaire

$$\sigma_E : \check{\mathbb{C}P}(2)-E^* \longrightarrow S_3$$

est surjective.

2) Soit \mathbb{C}^2 muni du 3-web $[\mathcal{F}(dx_1), \mathcal{F}(dx_2), \mathcal{F}(dx_1+dx_2)]$; si $\Lambda = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 + \mathbb{Z}w_3 + \mathbb{Z}w_4$ est un réseau le quotient \mathbb{C}^2/Λ est muni d'un 3-web hexagonal sans singularité. La monodromie primaire est triviale.

3) De même la variété de Hopf $H_\lambda = \mathbb{C}^2 - \{0\} / \lambda \text{id}$, $|\lambda| > 1$, est muni d'un 3-web hexagonal à monodromie primaire triviale.

4) Soit $P(x)$ un polynôme à une variable ; la famille de courbes :

$$(y-c)^3 = P(x)$$

est solution de l'équation différentielle :

$$y'^3 = \frac{1}{9} \frac{P'(x)^3}{P(x)^2}$$

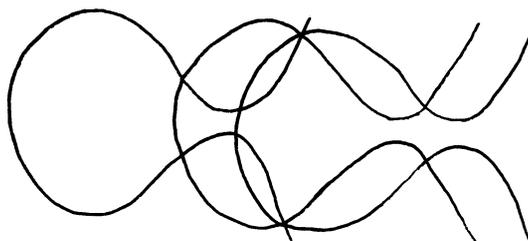
et définit un 3-web sur \mathbf{C}^2 .

Les feuilles s'obtiennent par translation parallèle à l'axe des y de la courbe :

$$y^3 = P(x) .$$

Par un point générique passent 3 feuilles distinctes ; pourtant ce web ne correspond pas à la donnée de 3 feuilletages. En fait si $\tilde{x} : D \longrightarrow X = \mathbf{C} - \{x_1, \dots, x_d\}$ est le revêtement universel de \mathbf{C} moins les racines de P le relèvement par $(\tilde{x}, y) : D \times \mathbf{C} \longrightarrow X \times \mathbf{C}$ de notre 3-web - qui est donné par " $P(x)^{2/3} dy - \frac{1}{9} P'(x) dx$ " - conduit à un unique feuilletage sur $D \times \mathbf{C}$ donné par $\tilde{P}(\tilde{x}) dy - \frac{1}{9} P'(\tilde{x}) dx$ où \tilde{P} désigne le relèvement à D de $P(x)^{2/3}$.

On notera que ce trois web est hexagonal



5) En fait toute équation différentielle $P(x, y, y') = 0$ où $P \in \mathbf{C}[x, y, z]$ est un polynôme de degré d en z conduit à un d -web sur \mathbf{C}^2 avec singularités, web qui s'étend évidemment à $\mathbf{CP}(2)$.

Considérons maintenant un 3-web hexagonal \mathcal{W} sur la surface S et soit $m \in S - \text{Sing } \mathcal{W}$ un point de base - Si U est un voisinage ouvert suffisamment petit de m , $\mathcal{W}|_U$ est donné par les niveaux de $u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{O}(U)$ tels que :

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0 .$$

D'après (7) on sait que les u_i sont définis à une transformation affine près, ce qui conduit au **principe de prolongement analytique** : si γ est un chemin d'origine m , on peut, en recouvrant γ par des ouverts U_i munis de triplets basiques, effectuer le prolongement analytique du triplet (u_1, u_2, u_3) .

En résulte une représentation de monodromie :

$$\text{Mon } \mathcal{W} : \Pi_1(S - \text{Sing } \mathcal{W}, m) \longrightarrow \text{Aff}(2)$$

du groupe de Poincaré de S -Sing \mathcal{W} dans le groupe des transformations affines de \mathbf{C}^2 . Si $\gamma(t)$ est un lacet en m , $\gamma(0) = \gamma(1) = m$, et $(\tilde{u}_1^t, \tilde{u}_2^t)$ le prolongement analytique de (u_1, u_2) le long de γ au point

$\gamma(t), (\tilde{u}_1^0, \tilde{u}_2^0) = (u_1, u_2)$, alors $\text{Mon } \mathcal{W}(\gamma)$ est défini par :

$$\text{Mon } \mathcal{W}(\gamma) (u_1, u_2) = (u_1^1, u_2^1)$$

Si le lacet γ est invariant par la monodromie primaire, ce qui est le cas si par exemple \mathcal{W} est donné par trois feuilletages, alors

$$\text{Mon } \mathcal{W}(\gamma) (u_1, u_2) = \lambda(u_1, u_2) + (a_1, a_2), \quad \lambda \in \mathbf{C}^*, \quad a_i \in \mathbf{C}.$$

Un dernier point, d'importance, est le fait qu'un web hexagonal sur la surface S muni naturellement S -Sing \mathcal{W} d'une structure affine. Les feuilles de notre web sont des droites pour cette structure. Rappelons qu'une structure affine sur une variété M^n est la donnée d'un atlas de cartes (U_i, φ_i) tel que les $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ soient des transformations affines de \mathbf{C}^n . Dans notre cas si $m \in S$ -Sing \mathcal{W} et (u_1, u_2, u_3) est un triplet basique, en m on prend par exemple comme carte en m le difféomorphisme local (u_1, u_2, u_3) à valeur dans l'hyperplan de \mathbf{C}^3 : $\{x+y+z=0\}$. On ne confondra pas cette notion de structure affine avec celle de variété affine en géométrie algébrique.

Ainsi le web hexagonal $\mathcal{W}(E)$ associé à une courbe elliptique muni $\check{\mathbb{P}\mathbf{C}(2)}-E^*$ d'une structure affine. Pour voir les droites pour cette structure affine on paramètre E au moyen de fonctions elliptiques $(P, P') = F$:

$$F : \mathbf{C}/\Lambda \longrightarrow E \subset \mathbf{CP}(2).$$

Se donner un point \check{x} de $\check{\mathbb{P}\mathbf{C}(2)}-E^*$ c'est se donner trois points alignés distincts $A_1(\check{x}), A_2(\check{x}), A_3(\check{x})$ de la cubique.

Si l'on écrit $A_i = F(u_i)$, $u_i \in \mathbf{C}/\Lambda$, finalement se donner un point de $\check{\mathbb{P}\mathbf{C}(2)}-E^*$ c'est se donner un triplet $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{C}^3 \text{ mod } \Lambda^3$ tel que :

- 1) $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ (condition d'alignement)
- 2) $u_i \neq u_j$
- 3) les u_i sont définis à permutation près.

Ainsi $\check{\mathbb{P}\mathbf{C}(2)}-E^*$ s'identifie à "l'hyperplan" Σ

$\Sigma := \{ (u_1, u_2, u_3), u_1 + u_2 + u_3 = 0 \}$
 de l'espace $\text{Sym}_3 \mathbf{C}/\Lambda$:

$$\text{Sym}_3 \mathbf{C}/\Lambda = \frac{\{(u_1, u_2, u_3) \in (\mathbf{C}/\Lambda)^3, u_i \neq u_j\}}{\{(u_1, u_2, u_3) \sim (u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, u_{\sigma(3)}) \mid \sigma \in S_3\}}$$

et la structure affine de $\check{\mathbf{P}}\mathbf{C}(2)-E^*$ est celle qu'hérite Σ de \mathbf{C}^3 .

La structure affine induite sur une surface M par un 3-web hexagonal sans singularités est une structure de similitude, i.e. les changements de cartes $\varphi : \mathbf{C}^3 \longrightarrow \mathbf{C}^2$ vérifient :

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \lambda \|x - y\|$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\|\cdot\|$ dénote la norme euclidienne sur $\mathbf{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$.

D. Fried a classé les structures de similitudes sur les variétés réelles compactes. On déduit de sa classification qu'une surface compacte complexe munie d'un 3-web sans singularité est revêtue par le tore (réel) \mathbb{T}^4 ou bien $S^3 \times S^1$ (où l'on retrouve les exemples 2) et 3) [F].

Voici quelques problèmes :

I.4. Problèmes.

I.4.1 : Soit Γ une courbe algébrique dans $\mathbf{CP}(2)$; à quelle condition peut-on munir $\mathbf{CP}(2)-\Gamma$ d'un 3-web hexagonal sans singularités ? Plus généralement sous quelle condition peut-on munir $\mathbf{CP}(2)-\Gamma$ d'une structure affine. On examinera spécialement la cas où Γ est irréductible.

I.4.2 : Classifier les d -webs (singuliers) sur $\mathbf{CP}(2)$ dont toutes les feuilles sont des courbes algébriques. Il s'agit de montrer que ces d -webs sont donnés par une famille de courbes paramétrée par $c \in \mathbf{CP}(1)$:

$$P(x, y, c) = c^d a_0(x, y) + c^{d-1} a_1(x, y) + \dots + a_d(x, y) = 0 .$$

Pour $d = 3$, classifier parmi ceux-ci, ceux qui sont hexagonaux.

I.4.3 : Soit Γ comme dans I.4.1 ; supposons que Γ soit irréductible et que les singularités de Γ soient des croisements ordinaires ; le π_1 du complément de Γ dans $\mathbf{CP}(2)$ est alors isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où $p =$

degré(Γ).

Si $\mathbf{CP}(2)-\Gamma$ est muni d'un 3-web \mathcal{W} - hexagonal ou non - la monodromie primaire :

$$\sigma : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \longrightarrow S_3$$

est déterminée par $s = \sigma(1)$, $s^p = \text{id}$.

Comme ou bien $s^2 = \text{id}$ ou bien $s^3 = \text{id}$ suivant le type de la permutation s , pour que la monodromie primaire soit non triviale il est donc nécessaire que l'entier p soit un multiple de 2 ou 3.

$$\text{Dans le cas où } s = s_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ soit}$$

$$\pi : X \longrightarrow \mathbf{CP}(2)$$

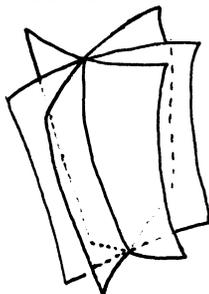
un revêtement ramifié le long de 3Γ ; alors l'image inverse de \mathcal{W} est un feuilletage $\mathcal{F}_{\Pi, \mathcal{W}}$ de X dont toutes les singularités sont dans $\pi^{-1}(\Gamma)$. Inversement si \mathcal{F} est un feuilletage de la surface X dont toutes les singularités sont sur $\pi^{-1}(\Gamma)$ l'image directe de \mathcal{F} est un 3-web dont la monodromie primaire est engendrée par s_0 . Ces remarques font penser qu'il est possible de classer les courbes nodales irréductibles dont le complément peut être muni d'un 3-web hexagonal.

II - Tissus feuilletés et variétés de feuilletages sur les espaces projectifs.

§ II.1. Définitions et premières propriétés.

La notion de tissu feuilleté a été introduite par Etienne Ghys qui classifie les variétés réelles compactes de dimension 3 munies de tels objets [G]. Nous ne parlerons ici que de 3-tissus feuilletés, et en fait d'un type particulier de 3-tissus feuilletés : ceux dont la monodromie primaire est triviale.

Le modèle local d'un 3-tissu feuilleté est la donnée d'un triplet de feuilletages $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$ obtenu par pull-back par une submersion locale $\sigma : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^2$ d'un 3-web local sur \mathbb{C}^2 . Localement les feuilletages de codimension deux $(\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j)_{i \neq j}$ coïncident avec le feuilletage par les fibres de σ ; Ghys appelle ce feuilletage de codimension deux l'axe du tissu feuilleté



Le trois tissu feuilleté \mathcal{F} est hexagonal s'il l'est en restriction à une section plane transverse à l'axe ; cette notion ne dépend pas bien entendu du choix de la section plane. Du point de vue équations de Pfaff on peut définir \mathcal{F} par trois 1-formes holomorphes w_1, w_2, w_3 telles que :

$$\begin{cases} w_i \wedge dw_i = 0 & i=1,2,3 \text{ (condition d'intégrabilité)} \\ w_1 + w_2 + w_3 = 0. \end{cases}$$

L'axe est alors défini par le système de Pfaff $\{w_1, w_2\}$.

Soit \mathcal{F} un 3-tissu feuilleté défini par w_1, w_2, w_3 comme ci-dessus : la droite de formes différentielle $t \longrightarrow w_t = tw_2 + (1-t)w_1$ est bien définie (projectivement) et ne dépend pas du choix des w_i . Comme la trois forme $w_t \wedge dw_t$ dépend quadratiquement du paramètre t et s'annule

pour $t = 0, 1, \frac{1}{2}$ elle est identiquement nulle. Est donc attaché au 3-tissu feuilleté une droite de feuilletages pivotant autour de l'axe. Si le 3-tissu feuilleté est hexagonal, alors pour n'importe quel choix de $t_1, t_2, t_3, t_i \neq t_j$, le 3-tissu défini par $w_{t_1}, w_{t_2}, w_{t_3}$ sera évidemment hexagonal. L'hexagonalité est donc en fait une propriété de la droite de feuilletages.

§ II.2. Variété des feuilletages algébriques sur les espaces projectifs complexes.

Un feuilletage holomorphe singulier \mathcal{F} de codimension un sur l'espace projectif $\mathbf{CP}(n)$ se définit par la donnée d'un ensemble algébrique $Y \subset \mathbf{CP}(n)$, $\text{cod } Y \geq 2$, et d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de $\mathbf{CP}(n) - Y$ chaque U_i étant muni d'un feuilletage holomorphe \mathcal{F}_i de codimension un, \mathcal{F}_i sans singularités, tel que :

$$\mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j} = \mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j} \quad \text{chaque fois que } U_i \cap U_j \neq \emptyset.$$

Via les théorèmes d'Hartogs et de Chow on démontre qu'un tel feuilletage \mathcal{F} est défini en coordonnées homogènes

$x = (x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$ par une 1 forme homogène :

$$w = \sum a_i(x) dx_i, \quad a_i \text{ homogènes de degré } d+1$$

avec :

- (α) $\sum x_i a_i(x) = 0$ (identité d'Euler)
- (β) $w \wedge dw = 0$ (condition de Frobenius)
- (γ) $\text{cod } S(w) \geq 2$ où $S(w) = \{ x / a_i(x) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n+1 \}$.

L'entier d est par définition le degré du feuilletage \mathcal{F} ; si $D \in \mathbf{CP}(n)$ est une droite générale, d est précisément le nombre de points de D où \mathcal{F} n'est pas transverse à D ; on dit que \mathcal{F} est un feuilletage algébrique de degré d . On note $\mathcal{F}(\mathbf{CP}(n), d)$ l'ensemble des feuilletages algébriques de degré d . Soit $\Lambda_{n,d}^1$

l'espace vectoriel des formes différentielles sur \mathbf{C}^{n+1} homogènes de degré $d+1$ satisfaisant (α) :

$$\Lambda_{n,d}^1 = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} a_i(x) dx_i, \quad a_i \text{ homogène de degré } d+1, \sum x_i a_i(x) = 0 \right\}.$$

On note $\mathcal{S}_{n,d} \subset \Lambda_{n,d}^1$ l'ensemble des formes $w \in \Lambda_{n,d}^1$ satisfaisant la condition d'intégrabilité (β) et par $\mathbf{P}\mathcal{S}_{n,d}$ l'espace $\mathcal{S}_{n,d} / \sim$ où l'équivalence

\sim est définie par :

$$w \sim w' \Leftrightarrow w = \lambda.w', \lambda \in \mathbf{C}^* .$$

Visiblement $\mathbf{P}\mathcal{J}_{n,d}$ est une intersection de quadriques dans $\mathbf{P}\Lambda_{n,d}^1$.

L'espace $\mathcal{F}(\mathbf{CP}(n), d)$ s'identifie donc naturellement à l'ouvert de Zariski $\mathbf{P}\mathcal{J}_{n,d}$ des éléments satisfaisant la condition γ . Un problème naturel si l'on veut s'intéresser à la dynamique des feuilletages holomorphes de $\mathbf{CP}(n)$ est de donner la décomposition en composantes irréductibles de la variété algébrique $\mathbf{P}\mathcal{J}_{n,d}$.

Pour $n \geq 3$ cette décomposition n'est connue que dans les cas $d = 1$ et $d = 2$!

Nous allons essayer de montrer comment la théorie des webs et plus généralement des tissus feuilletés peut aider à donner la décomposition de $\mathcal{F}(\mathbf{CP}(n), d)$ tout du moins pour de "petits" n et d . Par un trois tissu feuilleté sur $\mathbf{CP}(n)$ on entend la donnée de 3 feuilletages $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \in \mathcal{F}(\mathbf{CP}(n), d)$ tels que au voisinage d'un point générique nos trois feuilletages définissent localement un 3-tissu feuilleté.

§ II.3. Quelques composantes de la variété $\mathbf{P}\mathcal{J}_{n,d}$.

Remarquons d'abord que $\mathcal{J}_{2,d} = \Lambda_{2,d}^1$ est un espace vectoriel ; le problème de la décomposition en composantes irréductibles de $\mathbf{P}\mathcal{J}_{2,d}$ est donc trivial. Considérons $w_2 \in \mathcal{J}_{2,d}$ et soit $L : \mathbf{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{C}^3$ une submersion linéaire ; la forme pull-back L^*w_2 est visiblement un élément de $\mathcal{J}_{n,d}$. Introduisons :

$$\mathcal{J}_{n,d}^2 = \left\{ \overline{L^*w_2, w_2 \in \mathcal{J}_{2,d}, L : \mathbf{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{C}^3 \text{ submersion linéaire}} \right\}$$

où l'adhérence est prise de façon ordinaire dans $\Lambda_{n,d}^1$. On déduit sans peine de [C, L] le :

Théorème. $\mathbf{P}\mathcal{J}_{n,d}^2$ est une composante irréductible de $\mathbf{P}\mathcal{J}_{n,d}$.

La composante $\mathbf{P}\mathcal{J}_{n,d}^2$ s'appelle composante des feuilletages triviaux sur un deux plan. Considérons un élément $L^*w_2, L^*w_2 \in \mathcal{J}_{n,d}^2$; pour L et w_2 génériques $\mathcal{J}_{n,d}$ est lisse en L^*w_2 ; comme $L^*\mathcal{J}_{2,d}$ est un

espace vectoriel l'intersection $\mathcal{S}_{n,d} \cap T_{L^*w_2} \mathcal{S}_{n,d}$ de $\mathcal{S}_{n,d}$ avec son espace tangent en L^*w_2 contient un espace vectoriel de dimension $\dim \mathcal{S}_{2,d}$. Notamment une droite tracée dans cette intersection nous donne une droite de feuilletages sur $\mathbf{CP}(n)$; trois points sur cette droite conduisent à un 3-tissu feuilleté de $\mathbf{CP}(n)$, tissu feuilleté avec singularités.

Introduisons maintenant ce que l'on appelle les composantes logarithmiques. Désignons par $\mathcal{P}(n+1, \nu)$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré ν ; pour ν_1, \dots, ν_p entiers positifs tels que $\sum \nu_i = d+2$ on introduit le sous ensemble de $\mathcal{S}_{n,d}$:

$$\sum_{\nu_1, \dots, \nu_p}^{p,n,d} = \left\{ \overline{w = P_1 \dots P_p \sum \lambda_i \frac{dP_i}{P_i}, P_i \in \mathcal{P}(n+1, \nu_i), \sum \lambda_i \nu_i = 0, \lambda_i \in \mathbf{C}} \right\} .$$

où cette fois encore l'adhérence est prise au sens ordinaire. On démontre ($[\mathbf{C}_e, \mathbf{M}_a]$ dans le cas affine, $[0]$ dans le cas projectif qui nous intéresse ici) le :

Théorème. Les $\mathbb{P} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_p}^{p,n,d}$ sont des composantes irréductibles de $\mathbb{P} \mathcal{S}_{n,d}$.

Malheureusement on n'obtient pas toutes les composantes avec nos deux théorèmes comme on peut le voir dans le cas quadratique $d = 2$ ($[\mathbf{C}_e, \mathbf{M}_a]$, $[\mathbf{C}_e, \mathbf{L}]$). Prenons un point général $w \in \Sigma = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_p}^{p,n,d}$; on peut

encore exhiber des espaces linéaires dans l'intersection $\Sigma \cap T_w \Sigma$ de différentes façons d'ailleurs. Si $w = P_1 \dots P_p \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{dP_i}{P_i}$ on peut par exemple considérer la famille $Q P_2 \dots P_p \left(\lambda_1 \frac{dQ}{Q} + \sum_{i=1}^p \frac{dP_i}{P_i} \right)$,

$Q \in \mathcal{P}(n+1, \nu_1)$ ou bien lorsque $p \geq 3$ la famille $P_1 \dots P_p \sum_{i=1}^p t_i \frac{dP_i}{P_i}$ où ici

les P_i sont fixés et les t_i parcourent l'hyperplan $\sum t_i \nu_i = 0$. Si l'on prend une droite générale dans l'une de ces deux familles, puis trois points sur cette droite on construit un 3-tissu-feuilleté qui, miracle, s'avère hexagonal : c'est un exercice facile.

Nous allons voir que l'on peut en quelque sorte caractériser les composantes logarithmiques par cette propriété. C'est l'objet du chapitre suivant.

III - Théorème de Fuchs pour les tissus feuilletés et applications

Dans ce chapitre on s'intéresse à des 3-tissus feuilletés sur l'espace projectif $\mathbb{C}P(n)$; comme nous avons en vue des résultats concernant les composantes de la variété des feuilletages de degré d donné on supposera que la monodromie primaire est triviale. Nous préciserons ensuite comment adapter nos méthodes au cas général. Un tel tissu feuilleté \mathcal{W} est donc donné par trois feuilletages algébriques $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$, $\mathcal{F}_i \neq \mathcal{F}_j$, définis par les formes homogènes $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Lambda_{n,d}^1$ vérifiant l'identité d'Euler et :

$$\begin{cases} \omega_i \wedge d\omega_i = 0 \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0 \end{cases}$$

L'axe du tissu feuilleté est le feuilletage de codimension deux $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

Au tissu \mathcal{W} on associe comme précédemment la droite de feuilletages :

$$\omega_t = t\omega_2 + (1-t)\omega_1.$$

Dans toute la suite on suppose ω_1 et ω_2 choisis de façon telle que $\text{cod } S(\omega_i) \geq 2$, $i = 1, 2$.

Tous les résultats énoncés sont valables pour $n = 2$, dimension où les deux notions tissu et tissu feuilleté coïncident.

III.1. Points singuliers. Points singuliers réguliers

Soit \mathcal{W} défini par $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ comme ci-dessus ; l'ensemble singulier $\text{Sing } \mathcal{W}$ s'écrit en coordonnées projectives :

$$\text{Sing } \mathcal{W} = \{ m \in \mathbb{C}^{n+1}, \omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \}.$$

Notons que si $m \in \mathbb{C}^{n+1} - \text{Sing } \mathcal{W}$ alors l'axe du tissu feuilleté trivialise localement \mathcal{W} . ■

Lemme : Soit $m \in \mathbb{C}^{n+1} - \text{Sing } \mathcal{W}$; il existe une unique 1-forme holomorphe $\Theta_{,m}$ définie au voisinage de m telle que $d\omega_{i,m} = \Theta_{,m} \wedge \omega_{i,m}$, $i = 1, 2, 3$.

Preuve : On peut trouver des coordonnées $x = (x_1, x_2, \dots)$ au voisinage de m telles que :

$$\begin{aligned} w_1 &= g_1 dx_1 \\ w_2 &= g_2 dx_2 \end{aligned}$$

où les g_i sont des unités holomorphes au voisinage de m .

Comme w_1+w_2 doit être intégrable on a :

$$0 = (g_1 dx_1 + g_2 dx_2) \wedge (dg_1 \wedge dx_1 + dg_2 \wedge dx_2) = (g_1 dg_2 + g_2 dg_1) \wedge dx_1 \wedge dx_2.$$

La fonction holomorphe $h = \frac{g_1}{g_2}$ ne dépend donc que de x_1, x_2 .

On a :

$$dw_1 = \frac{dg_1}{g_1} \wedge w_1 = \left(\frac{dh}{h} + \frac{dg_2}{g_2} \right) \wedge w_1 = \left(\frac{\partial h}{\partial x_2} dx_2 + \frac{dg_2}{g_2} \right) \wedge w_1$$

$$dw_2 = \frac{dg_2}{g_2} \wedge w_2 = \left(\frac{\partial h}{\partial x_2} dx_2 + \frac{dg_2}{g_2} \right) \wedge w_2.$$

On pose $\Theta_{,m} = \left(\frac{\partial h}{\partial x_2} dx_2 + \frac{dg_2}{g_2} \right)$; si $\Theta'_{,m}$ vérifie encore $dw_i = \Theta'_{,m} \wedge w_i$, alors :

$$(\Theta_{,m} - \Theta'_{,m}) \wedge w_i = 0 \text{ et par suite } \Theta_{,m} = \Theta'_{,m}. \quad \blacksquare$$

D'après le lemme il existe une 1-forme Θ définie sur $\mathbb{C}^{n+1} - \text{Sing } \mathcal{W}$ vérifiant $dw_i = \Theta \wedge w_i$; il est innocent de constater que Θ s'étend de façon rationnelle à \mathbb{C}^{n+1} . Si \mathcal{W} est hexagonal Θ est fermée, ce qui est la version tissu feuilleté de § I.2 prop. 1.

Corollaire : $\text{cod Sing } \mathcal{W} = 1$.

Démonstration : Si $\text{cod Sing } \mathcal{W} = 2$, la 1 forme Θ s'étend alors holomorphiquement à tout \mathbb{C}^{n+1} (Hartogs).

Mais une identité du type

$$dw_i = \Theta \wedge w_i$$

est impossible pour des raisons de degré.

Remarque : En fait la 1-forme rationnelle Θ a ses composantes homogènes de degré -1.

Rappelons qu'une 1-forme α méromorphe sur l'espace projectif est logarithmique si α et $d\alpha$ sont à pôles simples le long d'un diviseur à

croisements normaux. Les formes logarithmiques sont fermées : on peut trouver ce résultat dans [D] ou le déduire de calculs élémentaires de $[C_e, L]$.

Introduisons l'hypersurface $\Sigma \subset \text{Sing } \mathcal{W}$ constituée de l'adhérence des points où $\text{Sing } \mathcal{W}$ est de dimension pure $n-1$.

Proposition 1 : Si Σ est à croisements normaux et Θ et $d\Theta$ à pôles simples alors Θ est fermée et \mathcal{W} est hexagonal.

Preuve : Visiblement Θ a ses pôles le long de Σ ; soit L une forme linéaire suffisamment générale pour que $\Sigma \cup (L=0)$ soit encore à croisements ordinaires. Si $R = \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ désigne le champ radial on a :

$$i_R dw_i = (d+2)w_i .$$

Par suite :

$$i_R dw_i = \Theta(R)w_i$$

implique que $\Theta(R) = d+2$. En résulte que la 1 forme α :

$$\alpha = \Theta - (d+2) \frac{dL}{L}$$

vérifie $L_R \alpha = 0 = \alpha(R)$ et définit une 1-forme sur $\mathbf{CP}(n)$ qui est visiblement logarithmique donc fermée ; il en est de même pour Θ . ■

On suppose dans la suite que \mathcal{W} est hexagonal. Soient $m_0 \in \mathbf{C}^{n+1} - \text{Sing } \mathcal{W}$ un point de base et (u_1, u_2, u_3) un triplet basique en m_0 ; par prolongement analytique on définit un triplet multiforme basique $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$, $\sum \tilde{u}_i = 0$, sur $\mathbf{C}^{n+1} - \text{Sing } \mathcal{W}$.

Nous allons décrire les \tilde{u}_i près de $\text{Sing } \mathcal{W}$.

Désignons comme précédemment par $\Sigma \subset \text{Sing } \mathcal{W}$ l'adhérence des points de $\text{Sing } \mathcal{W}$ de dimension pure $n-1$. Soit $m_0 \in (\text{Sing } \mathcal{W} - \Sigma)$; comme $\text{cod Sing } \mathcal{W}, m \geq 2$, si U est une petite boule centrée en m , on a :

$$\Pi_1(U - \text{Sing } \mathcal{W}, m) = 0 .$$

Par suite chaque détermination v_i de \tilde{u}_i est uniforme sur U et s'étend holomorphiquement à U tout entier par le théorème d'Hartogs. Ainsi le triplet basique $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ s'étend à tout $\mathbf{C}^{n+1} - \Sigma$.

Soit $\Sigma = \bigcup_{i \in I} \Sigma^i$ la décomposition en composantes irréductibles de l'hyper-surface Σ . Si m est un point générique de Σ^j les espaces $\text{Ker } w_i(m)$ sont identiques ; ils peuvent être ou bien transverses ou bien égaux à l'espace tangent $T_m \Sigma^j$.

Définition 5 : Une composante irréductible Σ^j de $\Sigma \subset \text{Sing } \mathcal{W}$ est une composante de contact transverse si en tout point générique $m \in \Sigma^j$, $T_m \Sigma^j = \text{Ker } w_i(m)$, $i = 1, 2$.

Remarque : Soit Σ^j une composante de Σ ; si Σ^j n'est pas de contact transverse alors $(\Sigma^j - \overline{(\Sigma - \Sigma^j)})$ lisse est une feuille commune des \mathcal{F}_i .

Proposition 2 : Soit Σ^j une composante de contact transverse ; soit m un point générique de Σ^j . Alors toute détermination v_i de \tilde{u}_i se prolonge holomorphiquement et uniformément au voisinage de m .

Preuve : Puisque m est générique le feuilletage \mathcal{F}_i , $i = 1, 2$, est donné au voisinage de m par les niveaux d'une submersion y_i , $y_i(m) = 0$ et $y_i^{-1}(0)$ est transverse à Σ^j en m .

Soit $m' \in y_i^{-1}(0) - \Sigma^j$ et v_i une détermination de \tilde{u}_i définie au voisinage de m' . Alors v_i se factorise dans y_i , i.e. il existe ℓ_i holomorphe tel que : $v_i = \ell_i \circ y_i$; comme $\ell_i \circ y_i$ est holomorphe dans un domaine $|y_i| \leq \varepsilon$, on étend v_i de façon uniforme au voisinage de m .

Proposition 3 : Soit Σ^j une composante de contact transverse et m un point générique de $\Sigma^j \cap \text{Sing } \mathcal{W}_{\text{lisse}}$. Alors la forme fermée rationnelle Θ est holomorphe en m .

Preuve : Supposons qu'il n'en soit pas ainsi ; alors les pôles de Θ en m coïncident avec $\Sigma_{,m}^j$. Soit x une submersion en m telle que $\Sigma_{,m}^j = (x=0)$; visiblement on a :

$$\Theta = \lambda \frac{dx}{x} + d\left(\frac{h}{x^p}\right) \text{ où } \lambda \in \mathbf{C}, h \text{ est holomorphe en } m \text{ et } p \in \mathbf{N}.$$

Mais les égalités :

$$dw_i = \Theta \wedge w_i = \left[\lambda \frac{dx}{x} + d\left(\frac{h}{x^p}\right) \right] \wedge w_i$$

impliquent que $x=0$ est feuille des \mathcal{F}_i . Ce qui est absurde. ■

On introduit l'ensemble $\Sigma' \subset \Sigma$ constitué de l'union des composantes Σ^j de Σ qui sont feuilles communes des $\mathcal{F}_i, i = 1, 2$; d'après la proposition 2 le triplet basique $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ multiforme est en fait défini sur $\mathbf{C}^{n+1} - \Sigma'$.

Soit m un point de Σ' ; comme l'ensemble singulier des $w_i, i = 1, 2$, est de codimension 2, pour m générique les \mathcal{F}_i sont réguliers en m et $\Sigma'_{,m} = \Sigma_{,m}$ est feuille des $\mathcal{F}_{i,m}$ au sens ordinaire.

Définition 6 : Soit m un point générique de Σ' ; on dit que \mathcal{W} a un contact tangentiel d'ordre 1 en m s'il existe un système de coordonnées locales y_1, \dots, y_{n+1} en m tel que :

- 1) $y_1^{-1}(0) = \Sigma'_{,m} = \Sigma_{,m} = \text{Sing } \mathcal{W}, m$
- 2) $w_1 = a_1 dy_1, a_1$ unité
- 3) $w_2 = a_2 d(y_1 \alpha), a_2$ et α unités
- 4) $dy_1 \wedge d\alpha$ n'est pas identiquement nul le long de $y_1^{-1}(0)$.

Remarque :

1) Les conditions 1, 2, 3 traduisent que le point m est non singulier pour les \mathcal{F}_i et que $\Sigma'_{,m}$ est une feuille. La condition 4 permet de contrôler le contact des feuilletages \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 le long de $\Sigma' \subset \text{Sing } \mathcal{W}$.

2) La condition 4) est intrinsèque i.e. ne dépend pas du choix des coordonnées y_1, \dots, y_{n+1} vérifiant 1,2,3.

3) Dans les coordonnées y_1, y_2, \dots, y_{n+1} , $w_1 \wedge w_2$ s'écrit :

$$w_1 \wedge w_2 = a_1 a_2 y_1 dy_1 \wedge d\alpha$$

et par conséquent $w_1 \wedge w_2$ s'annule le long de $\Sigma'_{,m}$ avec multiplicité

générique un ; c'est visiblement une caractérisation des points de contact tangentiel d'ordre 1.

L'ensemble des points de Σ' qui ont un contact tangentiel d'ordre supérieur à un constituent un sous ensemble analytique fermé de Σ' . On a la :

Proposition 4 : Soit m un point de $\Sigma' \cap \text{Sing } \mathcal{W}_{\text{lisse}}$ tel que w_1 et w_2 ne s'annulent pas en m . Alors si \mathcal{W} est à contact tangentiel d'ordre un en m , Θ est au pire à pôle simple le long de $\Sigma'_{,m}$.

Preuve : Supposons \mathcal{W} à contact tangentiel d'ordre un en m et soit y_1, \dots, y_{n+1} un système de coordonnées comme dans la définition :

$$w_1 = \alpha_1 dy_1$$

$$w_2 = \alpha_2 d(y_1 \alpha), \alpha_i \text{ unité.}$$

De $dw_i = \Theta \wedge w_i$ on tire l'existence de fonctions méromorphes α_i telles que :

$$\Theta = \frac{da_1}{a_1} + \alpha_1 w_1 = \frac{da_2}{a_2} + \alpha_2 w_2 .$$

En résulte que :

$$w_1 \wedge \frac{da_1}{a_1} = w_1 \wedge \frac{da_2}{a_2} + \alpha_2 w_1 \wedge w_2 .$$

Comme les $w_1 \wedge \frac{da_i}{a_i}$ sont holomorphes, et que $w_1 \wedge w_2$ est à zéro simple le long de $y_1 = 0$, α_2 est au pire à pôle simple le long de $y_1 = 0$; il en est évidemment de même pour Θ . ■

Définition 7 : Soit m un point de $\Sigma' \cap \text{Sing } \mathcal{W}_{\text{lisse}}$; on dit que m est un point singulier régulier de \mathcal{W} si la forme fermée rationnelle Θ est au pire à pôle simple le long de Σ' en m .

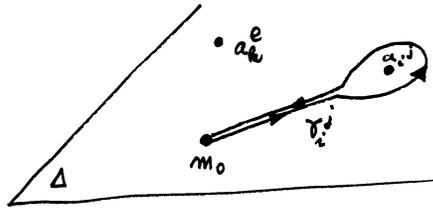
On a donc l'implication :

m point de contact tangentiel d'ordre 1 $\Rightarrow m$ singulier régulier. Les points singuliers réguliers forment un ouvert de $\text{Sing } \mathcal{W}$; si m_j appartient à une composante Σ'^j de Σ' et est singulier régulier alors presque tout point de Σ'^j est singulier régulier. Nous dirons que \mathcal{W} est à singularité régulière le long de Σ'^j .

§ III 2. Formes normales près d'un point singulier régulier.

Dans ce paragraphe nous décrivons les \tilde{u}_i près d'un point singulier régulier. Comme nous l'avons vu les \tilde{u}_i se laissent prolonger au complément de l'hypersurface Σ' formée des composantes de $\text{Sing } \mathcal{W}$ qui sont feuilles des \mathcal{F}_i .

Rappelons comment se décrit le groupe de Poincaré du complément de l'hypersurface Σ' . On se donne un point de base m_0 dans le complément de Σ' et Δ une droite générale passant par m_0 . Cette droite coupe les composantes Σ'^j de Σ' aux points a_j^i , $i = 1, \dots, \ell(j)$; on trace alors dans Δ des lacets γ_i^j d'extrémité m_0 , d'indice 1 par rapport aux points a_j^i et d'indices 0 par rapport aux autres a_k^l ; suivant Lefsetch les γ_i^j engendrent $\Pi_1(\mathbb{C}P(n) - \Sigma', m_0)$ [L].



Soient $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ une détermination fixée en m_0 du triplet basique $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$; la monodromie

$$\text{Mon } \mathcal{W} : \Pi_1(\mathbb{C}P(n) - \Sigma', m_0) \longrightarrow \text{Aff}(2)$$

est décrite par les $\text{Mon } \mathcal{W}(\gamma_i^j)$, où les γ_i^j sont définis comme ci-dessus.

Comme on l'a vu dans § I.3, si $\gamma \in \Pi_1(\mathbb{C}P(n) - \Sigma', m_0)$ l'application affine $\text{Mon } \mathcal{W}(\gamma)$ est du type :

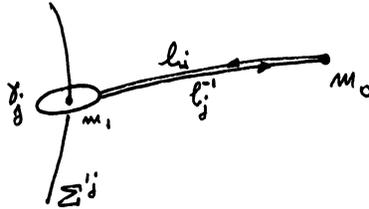
$$(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \longmapsto \lambda(\gamma)(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) + (a_1(\gamma), a_2(\gamma))$$

avec $\lambda(\gamma) \in \mathbb{C}^*$ et $a(\gamma), b(\gamma) \in \mathbb{C}$.

Définition 8 : L'élément γ est dit parabolique si $\lambda(\gamma) = 1$, hyperbolique sinon.

Nous allons travailler avec les objets suivants :

- m_0 un point de base comme ci-dessus
- m_j un point de $\Sigma' \cap \text{Sing } \mathcal{W}$ lisse
- P_j un polynôme homogène irréductible tel que $\Sigma'^j = P_j^{-1}(0)$
- V_j un petit polydisque centré en m_j
- γ_j un lacet obtenu en joignant par un chemin ℓ_j m_0 à un cercle γ'_j tracé autour de Σ'^j dans V_j , γ_j d'indice un autour de Σ'^j (on dira que γ_j est un lacet élémentaire).



- Θ la 1-forme fermée rationnelle telle que $dw_i = \Theta \wedge w_i$.

Proposition 5 : Si γ_j est parabolique, les $d\tilde{u}_i$ s'étendent par prolongement analytique le long de γ_j de façon uniforme autour de $V_j \cap \Sigma'^j$; plus précisément les \tilde{u}_i sont du type $\varepsilon_i \log P_j + f_i$ où $\varepsilon_i \in \mathbf{C}$ et $f_i \in \mathcal{O}(V_j - \Sigma'^j)$.

L'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \Theta$ est un entier ; si de plus le point m_j est singulier

régulier alors f_i s'étend méromorphiquement le long de $\Sigma'^j \cap V_j$.

Preuve : Si γ_j est parabolique, visiblement les prolongements analytiques le long de γ_j , des différentielles $d\tilde{u}_i$ sont uniformes et se laissent définir sur $V_j - \Sigma'^j$ au voisinage de m_j . En résulte l'existence de ε_i et f_i comme dans l'énoncé ; on peut préciser la nature des f_i comme suit. Localement Θ s'écrit au voisinage de m_0 :

$$\Theta = \lambda_j \frac{dP_j}{P_j} + d\left(\frac{h}{P_j^{n_j}}\right)$$

où $\lambda_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \Theta$, h est holomorphe sur V_j , $n_j \in \mathbb{N}$ et P_j ne divise pas h .

Au voisinage de m_0 on a (§ I.2 prop. 1) :

$$\begin{cases} w_i = g d\tilde{u}_i, g \text{ holomorphe au voisinage de } m_0, \text{ et} \\ \Theta = \frac{dg}{g} \end{cases}$$

Comme les $d\tilde{u}_i$ sont uniformes, g se laisse prolonger analytiquement de façon uniforme le long de γ_j et par suite sur $V_j - \Sigma^j$; nécessairement :

$$\lambda_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \Theta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \frac{dg}{g}$$

est entier.

Si m_j est un point singulier régulier, Θ est à pôle simple, donc l'entier n_j est nul. On en déduit que :

$$\Theta = \frac{dg}{g} = \lambda_j \frac{dP_j}{P_j} + dh, \quad \lambda_j \in \mathbb{Z} \text{ et } h \in \theta(V_j).$$

Par suite

$$g = P_j^{\lambda_j} \cdot U, \quad \lambda_j \in \mathbb{Z} \text{ et } U \text{ unité.}$$

De :

$$w_i = g \cdot d\tilde{u}_i = P_j^{\lambda_j} \cdot U \left(\varepsilon_j \frac{dP_j}{P_j} + df_i \right)$$

on tire que f_i est méromorphe. ■

Remarque : La façon de "joindre" m_0 à γ'_j pour construire γ_j n'importe pas dans l'énoncé ; en effet si $\tilde{\gamma}_j$ est un autre lacet obtenu en joignant m_0 à γ'_j par un chemin ℓ_j on a visiblement

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}_j} \Theta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \Theta = \lambda_j.$$

Le prolongement analytique \tilde{g} de g le long de $\tilde{\gamma}_j$ vérifie :

$$\frac{d\tilde{g}}{\tilde{g}} = \Theta = \lambda_j \frac{dP_j}{P_j} + dh, \quad \lambda_j \in \mathbb{Z}.$$

Par suite sur V_j on a :

$$\tilde{g}|_{V_j} = c_j g|_{V_j} \text{ où } c_j \in \mathbf{C}^*$$

et \tilde{g} est uniforme au voisinage de $\tilde{\gamma}_j$; il en est de même du prolongement analytique des $d\tilde{u}_i$ le long de $\tilde{\gamma}_j$. Par suite $\tilde{\gamma}_j$ est aussi parabolique.

Ainsi le fait d'être parabolique est une propriété de la composante Σ^j et non pas du lacet γ_j ; dans toute la suite on parlera de composante parabolique ou de composante hyperbolique.

On a le :

Théorème (de Fuchs pour les webs paraboliques) : Soit \mathcal{W} un web hexagonal sur $\mathbf{CP}(n)$ défini par les forme de Pfaff w_1, w_2, w_3 . Si toutes les composantes de $\Sigma' \subset \text{Sing } \mathcal{W}$ sont paraboliques et si \mathcal{W} est à singularités régulières le long de Σ' , il existe des entiers $q_j \in \mathbf{Z}$ tels que

$$d\left(\frac{w_i}{P_1^{q_1} \dots P_p^{q_p}}\right) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \text{ où } P = P_1 \dots P_p \text{ est une équation réduite de}$$

Σ' . De plus, il existe $\lambda_j(i) \in \mathbf{C}$ et h_i polynômes homogènes tels que :

$$\frac{w_i}{P_1^{q_1} \dots P_p^{q_p}} = \sum_j \lambda_j(i) \frac{dP_j}{P_j} + \frac{dh_i}{P_1^{q_1-1} \dots P_p^{q_p-1}}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\text{avec } \sum_{i=1}^3 \lambda_j(i) = 0 = \sum_{i=1}^3 h_i \text{ et } \text{degré } h_i = \text{degré } P_1^{q_1-1} \dots P_p^{q_p-1}.$$

Remarques :

1) Le feuilletage $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}(w_i)$ possède alors l'intégrale première

$$I(i) = \sum_j \lambda_j(i) \cdot \text{Log } P_j + \frac{h_i}{P_1^{q_1-1} \dots P_p^{q_p-1}}$$

ce qui justifie l'appellation théorème de Fuchs.

Il est facile de voir que les formes ω_i sont alors dans l'adhérence d'une composante de la variété des feuilletages décrite dans § II.2.

2) Le feuilletage $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(w_t)$ possède alors l'intégrale première
 $(1-t)I(2) + tI(1) = \sum [(1-t)\lambda_j(2) + t\lambda_j(1)] \text{Log } P_j + \left(\frac{(1-t)h_2 + th_1}{P_1^{q_1-1} \dots P_p^{q_p-1}} \right).$

Preuve du théorème : Soient m_0 un point de base dans le complément de Sing \mathcal{W} et γ_j des lacets comme dans la proposition 5 ; on pose

$$q_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \Theta.$$

Comme on l'a vu les q_j sont dans \mathbb{Z} . Les γ_j engendrant l'homotopie du complément de Σ' la forme différentielle $\Theta - \sum q_j \frac{dP_j}{P_j}$ est exacte dans $\mathbb{C}^{n+1} - \Sigma'$; en fait $[C_e, M_a]$:

$$\Theta = \sum q_j \int (dP_j; P_j) + d \left(\int (h; P^{s(n_1;1)} \dots P^{s(n_p;p)}) \right) \text{ où } h \text{ est holomorphe et le quotient } \frac{h}{P_1^{n_1} \dots P_p^{n_p}} \text{ est homogène de degré 0.}$$

De :

$$d\omega_i = \Theta \wedge w_i = \left[\sum q_i \frac{dP_j}{P_j} + d \left(\frac{h}{P_1^{n_1} \dots P_p^{n_p}} \right) \right] \wedge w_i$$

on déduit que la forme différentielle :

$$\frac{w_i}{P_1^{q_1-1} \dots P_p^{q_p-1} \exp \frac{h}{P_1^{n_1-1} \dots P_p^{n_p-1}}}$$

est fermée, résultat qui n'utilise pas d'ailleurs le fait que les singularités soient régulières. Si maintenant \mathcal{W} est à singularité régulière le long de Σ' alors Θ est à pôles simples et donc les n_i et h sont nuls. Dans ce cas on a :

$$d \left(\frac{w_i}{P_1^{q_1} \dots P_p^{q_p}} \right) = 0.$$

Finalement $[C_e, M_a]$ on trouve $\lambda_j(i)$ et h_i comme dans l'énoncé. ■

Remarque : Les $\lambda_j(i)$ correspondant à des indices q_j négatifs sont nuls.

Faisons maintenant une étude analogue dans le cas hyperbolique ; nous gardons les mêmes notations que précédemment. Si le lacet γ_j est hyperbolique et $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ une détermination de $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ en m_0 , la monodromie le long de γ_j est du type :

$$(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \xrightarrow{\text{Mon}(\gamma_j)} \lambda(\gamma_j) \cdot (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) + (a_1(\gamma_j), a_2(\gamma_j))$$

où cette fois $\lambda(\gamma_j) \neq 1$.

On peut voir agir la monodromie sur les différentielles $d\tilde{u}_i$ et l'on a :

$$(d\tilde{u}_1, d\tilde{u}_2) \xrightarrow{\text{Mon}(\gamma_j)} \lambda(\gamma_j) \cdot (d\tilde{u}_1, d\tilde{u}_2).$$

Par suite, si l'on écrit au voisinage de m_0 :

$$\begin{cases} \omega_i = g \cdot d\tilde{u}_i, \quad i=1,2, \quad g \text{ holomorphe au voisinage de } m_0 \\ \Theta = \frac{dg}{g} \end{cases}$$

on constate que le prolongement analytique \tilde{g} de g a pour monodromie

$$g \xrightarrow{\text{Mon}(\gamma_j)} \frac{1}{\lambda(\gamma_j)} \cdot g.$$

On pose : $\frac{1}{\lambda(\gamma_j)} = e^{2i\pi(1-\mu_j)}$ où μ_j est, pour l'instant, défini modulo \mathbb{Z} et

l'on écrit le prolongement analytique \tilde{g} dans V_j comme :

$$\tilde{g} = P_j^{1-\mu_j} \cdot U \quad \text{où } U \text{ est uniforme sur } V_j - (P_j = 0).$$

Notons que $\frac{d\tilde{g}}{\tilde{g}}$ est uniforme et :

$$\Theta = \frac{d\tilde{g}}{\tilde{g}} = (1-\mu_j) \frac{dP_j}{P_j} + \frac{dU}{U} = \lambda_j \frac{dP_j}{P_j} + d\left(\frac{h}{P_j^{n_j}}\right)$$

où : $\lambda_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \Theta$, $h \in \theta(V_j)$, $n_j \in \mathbb{N}$ et h est non divisible par P_j .

On peut maintenant choisir μ_j et U de sorte que $1-\mu_j = \lambda_j$. Evidemment si Θ est à pôle simple le long de $(P_j = 0)$, on a $n_j = 0$. Dans ce cas on aura :

$$\tilde{g} = P_j^{1-\mu_j} \cdot U \text{ où cette fois } U \in \mathcal{O}^*(V_j), U = \exp h.$$

Le prolongement analytique de \tilde{u}_i le long de γ_j dans $V_j - (P_j = 0)$ sera alors de la forme :

$$\tilde{u}_i = P_j^{1-\mu_j} \cdot W_i + c_i, \quad W_i \in \mathcal{O}(V_j - (P_j = 0)), \quad c_i \in \mathbf{C}$$

avec :

$$c_k (1 - e^{2i\pi\mu_j}) = a_k(\gamma_j), \quad k = 1, 2, \quad e^{2i\pi\mu_j} = \lambda(\gamma_j) \neq 1.$$

On a :

$$\begin{aligned} \omega_i = g \cdot d\tilde{u}_i &= P_j^{1-\mu_j} U (\mu_j P_j^{\mu_j-1} W_i dP_j + P_j^{\mu_j} dW_i) \\ &= \mu_j U W_i dP_j + U P_j dW_i. \end{aligned}$$

Afin de préciser la nature de W_i le long de $(P_j = 0)$ choisissons en m_j des coordonnées y_1, \dots, y_{n+1} telles que $y_1 = P_j$. Dans ces coordonnées w_i s'écrit :

$$w_i = \alpha_i dy_1 + y_1 \sum_{k \geq 2} \beta_{i,k} dy_k \text{ où les } \alpha_i \text{ et } \beta_{i,k} \text{ sont holomorphes.}$$

Comme :

$$w_i = \mu_j U W_i dy_1 + U y_1 dW_i$$

les W_i vérifient le système d'équations différentielles linéaires avec second membre :

$$(*) \quad \begin{cases} \mu_j W_i + y_1 \frac{\partial W_i}{\partial y_1} = \frac{\alpha_i}{U} & i = 1, 2 \\ (k) \quad \frac{\partial W_i}{\partial y_k} = \frac{\beta_{i,k}}{U}, & k = 2, \dots, n+1 \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

On remarquera que deux solutions uniformes $W_i^{(1)}$ et $W_i^{(2)}$ de ce système coïncident nécessairement ; en effet les équations (k) indiquent que $W_i^{(1)} - W_i^{(2)}$ ne dépendent que de y_1 et sont de plus solution de :

$$\mu_1 W_i + y_1 \frac{\partial W_i}{\partial y_1} = 0.$$

Comme μ_1 est non entier cette équation différentielle a pour seule solution uniforme la solution nulle et donc $W_i^{(1)} = W_i^{(2)}$.

Lorsque \mathcal{W} est à points singuliers réguliers, on sait que U est une unité holomorphe ; en résulte que le second membre de notre système est holomorphe. Puisque le système (*) possède une solution il est complètement intégrable, ce qui se traduit par les équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_\ell} \frac{\beta_{i,k}}{U} = \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\beta_{i,\ell}}{U} & k=2\dots n+1 \\ \mu_j \frac{\beta_{i,k}}{U} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\beta_{i,k}}{U} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_k} \end{cases}$$

Le théorème de Poincaré (à paramètre y_1) permet de trouver W_i'' holomorphe en y_1, \dots, y_{n+1} telle que :

$$\frac{\partial}{\partial y_\ell} W_i'' = \frac{\beta_{i,k}}{U}, \quad k = 2, \dots, n+1.$$

On cherche W_i' holomorphe solution de (*) sous la forme

$$W_i' = W_i'' + L_i(y_1)$$

soit à résoudre en L_i :

$$\mu_j L_i(y_1) + y_1 \frac{\partial L_i}{\partial y_1} = \frac{\alpha_i}{U} - \mu_j W_i'' - y_1 \frac{\partial W_i''}{\partial y_1} = H_i(y_1, \dots, y_{n+1}).$$

Mais la condition d'intégrabilité implique que $\frac{\partial H_i}{\partial y_\ell} = 0, \ell = 2 \dots n+1$.

Comme μ_j est non entier, notre équation possède une unique solution holomorphe L_i ; du fait de l'unicité on a $W_i = W_i'$ sur $V_j - (P_j=0)$ et W_i s'étend de façon holomorphe à V_j .

Nous sommes donc en mesure d'énoncer la :

Proposition 6 : Si le lacet γ_j est hyperbolique ($\lambda(\gamma_j) \neq 1$) le prolongement analytique "à V_j " des \underline{u}_i le long de γ_j est du type $P_j^{\mu_j} \cdot W_i + c_i$ où $W_i \in \mathcal{O}(V_j - (P_j=0))$ et les $c_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ vérifient :

$$(\alpha) e^{2i\pi\mu_j} = \lambda(\gamma_j), \quad \mu_j \notin \mathbb{Z} \text{ et } 1 - \mu_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \Theta$$

$$(\beta) c_i = \frac{a_i(\gamma_j)}{1 - \lambda(\gamma_j)} = \frac{a_i(\gamma_j)}{1 - e^{2i\pi\mu_j}}.$$

De plus si \mathcal{W} est à singularité régulière le long de $(P_j=0)$ alors les W_i sont holomorphes sur V_j .

On a évidemment des remarques analogues à celles suivant la proposition 5.

Remarques : Le choix du lacet élémentaire γ_j n'importe pas ; les μ_j ne dépendent que de la classe d'homologie de γ_j . Toutefois les c_i eux dépendent du choix de γ_j .

§ III . 3 . Webs hyperboliques abéliens.

Si \mathcal{W} est un 3-tissu feuilleté hexagonal parabolique, i.e. dont toutes les composantes de Σ' sont paraboliques alors l'image de

$$\text{Mon} : \Pi_1(\mathbf{CP}(n) - \Sigma', m_0) \longrightarrow \text{Aff}(2)$$

est un groupe abélien (ici un groupe de translation). Il en est de même lorsque l'intersection de Σ' avec un plan générique $\mathbf{CP}(2)$ est une courbe nodale puisque dans cette éventualité $\Pi_1(\mathbf{CP}(n) - \Sigma', m_0)$ est abélien.

Définition : Le 3-tissu feuilleté hexagonal \mathcal{W} sera dit abélien si la représentation de monodromie $\text{Mon} : \Pi_1(\mathbf{CP}(n) - \Sigma', m_0) \longrightarrow \text{Aff}(2)$ a son image abélienne.

Cette définition ne dépend évidemment pas du choix du point de base m_0 . Soit \mathcal{W} un 3-tissu feuilleté abélien hyperbolique ; on peut trouver une composante Σ'^j de Σ' et un lacet élémentaire $\gamma_j \in \Pi_1(\mathbf{CP}(n) - \Sigma', m_0)$ tel que $\lambda(\gamma_j) \neq 1$:

$$(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \xrightarrow{\text{Mon}(\gamma_j)} \lambda(\gamma_j) \cdot (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) + (a_1(\gamma_j), a_2(\gamma_j)).$$

On peut alors choisir le triplet basique $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$, $\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3 = 0$, de sorte que $a_1(\gamma_j) = a_2(\gamma_j) = 0$: il suffit pour cela d'ajouter au triplet initial les constantes

$$b_1 = \frac{a_1(\gamma_j)}{\lambda(\gamma_j) - 1}, \quad b_2 = \frac{a_2(\gamma_j)}{\lambda(\gamma_j) - 1}, \quad b_3 = -b_1 - b_2.$$

Du fait de l'abélianité on aura pour un tel triplet et tout $\gamma \in \Pi_1(\mathbf{CP}(n) - \Sigma', m_0)$:

$$(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \xrightarrow{\text{Mon}(\gamma_j)} \lambda(\gamma) \cdot (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2).$$

On a le :

Théorème (de Fuchs pour les tissus feuilletés abéliens hyperboliques).
Soit \mathcal{W} un tissu feuilleté sur $\mathbf{CP}(n)$ défini par les 1-formes w_1, w_2, w_3 . On suppose \mathcal{W} hyperbolique abélien à singularités régulières le long de Σ' et l'on désigne par $P_1 \dots P_p = 0$ une équation réduite de Σ' dans \mathbf{C}^{n+1} .

Il existe un triplet basique $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$ du type :

$$\tilde{u}_i = P_1^{\mu_1} \dots P_p^{\mu_p} Q_i$$

où les Q_i sont des polynômes homogènes tels que $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$ et les μ_j sont définis par :

$$1 - \mu_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \Theta$$

les γ_j étant des lacets élémentaires autour de $P_j = 0$.

Preuve : Supposons $\lambda(\gamma_1) \neq 1$ avec nos notations usuelles.

D'après la proposition 6 le prolongement analytique d'une détermination d'un élément d'un triplet basique suivant γ_1 est du type

$$P_1^{\mu_1} \cdot W_i + c_1$$

avec W_i holomorphe. Comme pour un choix convenable initial du triplet basique l'image du groupe de monodromie sera linéaire, on peut supposer $c_1 = 0$ et écrire $P_1^{\mu_1} W_i$ sous la forme :

$$P_1^{\mu_1} \dots P_p^{\mu_p} \cdot U_i \quad \text{où } U_i \text{ est holomorphe le long de } \gamma_1 \text{ avec } 1 - \mu_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \Theta$$

Invoquant le fait que les γ_j engendrent le groupe de Poincaré de $\mathbf{CP}(n) - \Sigma'$ et de nouveau la proposition 6 on constate que U_i s'étend de façon uniforme à $\mathbf{C}^{n+1} - \Sigma'$ et se prolonge holomorphiquement le long de la partie lisse de Σ' ; le théorème d'Hartogs permet de prolonger U_i à tout \mathbf{C}^{n+1} en une fonction holomorphe Q_i qui sera visiblement homogène. ■

Remarques :

1) Le feuilletage $\mathcal{F}(w_t) = \mathcal{F}(tw_2 + (1-t)w_1)$ possède l'intégrale première $P_1^{\mu_1} \dots P_p^{\mu_p} \cdot [tQ_2 + (1-t)Q_1]$; on peut évidemment en prendre le

logarithme :

$$\sum \mu_j \text{Log } P_j + \text{Log } (t Q_2 + (1-t) Q_1)$$

et sous cette forme on voit clairement la différence entre tissus paraboliques et tissus hyperboliques (abéliens) ; dans le cas paraboliques les points de "multi-formités" ($P_i=0$) sont fixés et les résidus λ_j dépendent linéairement de t alors que dans le contexte hyperbolique les résidus sont fixes et une branche $tQ_2 + (1-t)Q_1$ bouge.

Dans le cas hyperbolique les nombres μ_j apparaissant dans les intégrales sont directement liés aux périodes de la forme Θ alors qu'il n'en est pas ainsi dans le cas parabolique.

2) si $\mathcal{W} = \mathcal{W}(w_1, w_2, w_3)$ est abélien hyperbolique alors la droite $tw_2 + (1-t)w_2$ est située dans une certaine composante $\mathbb{P} \sum_{v'_1, \dots, v'_p}^{p', n', d'}$ de la variété $\mathbb{P}\mathcal{J}_{n, d}$.

3) Concernant les degrés des P_j et des Q_i on remarque que :

$$i_R \Theta = d+2$$

où R est le champ radial et $d+1$ est le degré des composantes des w_i .

Par suite si $v_j = \text{degré}(P_j)$ on a :

$$\sum \lambda_j v_j = d+2$$

soit :

$$\sum_{j=1}^p (1-\mu_j)v_j = d+2 .$$

Comme \tilde{u}_i est nécessairement projective on a :

$$\sum v_j \mu_j + v(Q_i) = 0$$

soit :

$$\sum v_j + v(Q_i) = d+2 .$$

Ce qui précise le point 2 : les w_i sont dans $\mathbb{P} \sum_{v'_1, \dots, v'_p, v(Q_i)}^{p+1, n, d}$.

§ III . 4. Exemples de tissus hyperboliques non abéliens.

Nous allons commencer par des exemples en dimension deux et nous allons cette fois travailler dans une carte affine \mathbf{C}^2 de $\mathbf{CP}(2)$.

On désigne par w_ν une 1-forme homogène :

$$w_\nu = a_\nu dx + b_\nu dy$$

où a_ν et b_ν sont des polynômes homogènes de degré ν ; on note $P_{\nu+1}$ le polynôme homogène :

$$P_{\nu+1} = xa_\nu + yb_\nu$$

et l'on suppose dans toute la suite que $P_{\nu+1}$ est non identiquement nul et réduit. Soit $P_{\nu+1} = \prod_{i=1}^{\nu+1} L_i$ la décomposition en facteurs irréductibles

de $P_{\nu+1}$, L_i formes linéaires ; la forme rationnelle $\frac{w_\nu}{P_{\nu+1}}$ est fermée et s'écrit :

$$\frac{w_\nu}{P_{\nu+1}} = \sum \mu_j \frac{dL_j}{L_j}, \quad \mu_j \in \mathbf{C}, \quad \sum \mu_j = 1,$$

$$\mu_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \frac{w_\nu}{P_{\nu+1}}, \quad \text{où les } \gamma_j \text{ sont des petits cycles autour de } L_j = 0.$$

Proposition 7 : Soient f_ν un polynôme homogène de degré ν et w la forme différentielle :

$$w = w_\nu + f_\nu(xdy - ydx).$$

On désigne par Θ la forme rationnelle :

$$\Theta = \sum (1 + \mu_j) \frac{dL_j}{L_j}.$$

Alors $d\omega = \Theta \wedge w$.

Preuve : Comme $\frac{w_\nu}{P_{\nu+1}} = \sum \mu_j \frac{dL_j}{L_j}$ est fermée on a :

$$dw_\nu = \frac{dP_{\nu+1}}{P_{\nu+1}} \wedge w_\nu = \left(\frac{dP_{\nu+1}}{P_{\nu+1}} + \sum \mu_j \frac{dL_j}{L_j} \right) \wedge w_\nu = \Theta \wedge w_\nu.$$

D'un autre côté :

$$d(f_\nu(xdy - ydx)) = (\nu+2)f_\nu \cdot dx \wedge dy$$

et

$$\Theta \wedge f_\nu(xdy-ydx) = f_\nu \cdot \sum_{j=1}^{\nu+1} (1+\mu_j) dx \wedge dy = (\nu+2)f_\nu \cdot dx \wedge dy = d(f_\nu(xdy-ydx)).$$

D'où le résultat. ■

Remarque : La forme Θ ne dépend pas du choix de f_ν .

Corollaire : Soient w_ν comme ci-dessus, $f_{\nu,1}, f_{\nu,2}, f_{\nu,3}$ trois polynômes homogènes de degré ν non nuls distincts tels que $f_{\nu,1} + f_{\nu,2} + f_{\nu,3} = 0$ et trois nombres complexes non nuls ε_i tels que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$. Alors les formes différentielles :

$$w_i = \varepsilon_i w_\nu + f_{\nu,i}(xdy-ydx)$$

engendrent un trois web hexagonal sur $\mathbb{CP}(2)$ à singularités régulières. Ce trois web est hyperbolique dès que l'un des μ_j est non entier. En général un tel tissu est non abélien.

Preuve : D'après la proposition 7 et la remarque seule la non abélianité est à prouver. Supposons qu'un tel web soit abélien et désignons par w_i les homogénéisées des \underline{w}_i dans \mathbb{C}^3 . D'après notre théorème de Fuchs les w_i possèderaient une intégrale première de type Liouville. Sa restriction à la carte \mathbb{C}^2 procurerait une intégrale Liouville des \underline{w}_i .

En résulterait que l'holonomie projective ($[C_e, M_a]$) de la singularité 0 des \underline{w}_i serait un groupe abélien. Mais un calcul explicite montre que générique-ment sur les μ_j et $f_{\nu,i}$ il n'en est pas ainsi (*). ■

Conjecture : Soit $\mathcal{W}^0 = \mathcal{W}(w_1, w_2, w_3)$ un 3 web sur $\mathbb{CP}(2)$, w_i comme dans le corollaire. Soit \mathcal{W} un 3 tissu feuilleté sur $\mathbb{CP}(n)$ tel que dans une certaine section plane $\mathbb{CP}(2) \rightarrow \mathbb{CP}(n)$, \mathcal{W} coïncident avec \mathcal{W}^0 , alors \mathcal{W} est trivial au-dessus de \mathcal{W}^0 .

(*) Un travail sur les webs de ce type est en cours d'élaboration par un de mes élèves Frank Loray.

§ III . 5 . Remarques sur les tissus feuilletés non hexagonaux.

Sur $\mathbf{CP}(2)$ il n'y a pas grand chose à dire puisque la donnée de deux feuilletages algébriques quelconques de même degré $\mathcal{F}(w_1)$ et $\mathcal{F}(w_2)$ conduit à un 3-tissus feuilleté : en effet $w_3 = -w_1 - w_2$ est automatiquement intégrable.

La première dimension où apparaît de façon effective la contrainte d'intégrabilité de la droite de feuilletage $tw_2 + (1-t)w_1$ est la dimension 3. Nous supposons donc $n \geq 3$. Comme d'habitude tout le discours sera fait en coordonnées homogènes sur \mathbf{C}^{n+1} . Soit donc \mathcal{W} un 3 tissu feuilleté sur $\mathbf{CP}(n)$ donné par les 1-formes $w_i, i = 1, 2, 3, \sum w_i = 0, w_1 \wedge dw_2 + w_2 \wedge dw_1 = 0$. On rappelle que l'ensemble singulier $\text{Sing } \mathcal{W} = \{m, w_1 \wedge w_2(m) = 0\}$ est nécessaire-ment de codimension m . On note toujours Θ l'unique 1-forme rationnelle, à composantes de degré -1, telle que :

$$dw_i = \Theta \wedge w_i .$$

Evidemment dans ce paragraphe on suppose Θ non fermée : $d\Theta \neq 0$; si d est le degré des feuilletages $\mathcal{F}(w_i)$ on a :

$$i_R dw_i = (d+2) w_i = i_R \Theta . w_i$$

où $R = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ est le champ radial d'Euler.

Voici quelques propriétés de Θ , pour certaines déjà rencontrées :

- 1) $d\Theta \wedge w_i = 0$ et par suite il existe α rationnelle telle que :
- 2) $d\Theta = \alpha . w_1 \wedge w_2$, degré $\alpha = -2d-4$; notamment $i_R d\Theta = 0$
- 3) la trois forme rationnelle $\Theta \wedge d\Theta$ est non identiquement nulle ; en effet :

$$i_R \Theta \wedge d\Theta = i_R \Theta . d\Theta + i_R d\Theta \wedge \Theta = (d+2) . d\Theta \neq 0 .$$

De plus :

- 4) $\Theta \wedge d\Theta = \alpha . \Theta \wedge w_1 \wedge w_2 = \alpha . dw_1 \wedge w_2 = -\alpha . dw_2 \wedge w_1$.

Proposition 7 : Si $\mathcal{W} = \mathcal{W}(w_1, w_2, w_3), w_1 + w_2 + w_3 = 0$, est un tissu feuilleté non hexagonal sur $\mathbf{CP}(n)$ il existe une fraction rationnelle R non constante telle que $w_1 \wedge w_2 \wedge dR = 0$; en particulier les feuilles de l'axe sont tracées sur des hypersurfaces de $\mathbf{CP}(n)$.

Preuve : En dérivant 4) on obtient :

$$0 = d.d\Theta = d\alpha \wedge w_1 \wedge w_2 + \alpha [dw_1 \wedge w_2 - w_1 \wedge dw_2]$$

qui conduit après multiplication par Θ à :

$$0 = d\alpha \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge \Theta .$$

Faisant agir le champ radial par produit intérieur, il vient :

$$0 = (d^0\alpha) . \alpha . w_1 \wedge w_2 \wedge \Theta - i_R \Theta . d\alpha \wedge w_1 \wedge w_2$$

soit, puisque $d^0\alpha = -2(d+2)$ et $i_R \Theta = (d+2)$:

$$0 = \left(\Theta + \frac{1}{2} \frac{d\alpha}{\alpha} \right) \wedge w_1 \wedge w_2 .$$

On peut donc trouver deux fonctions rationnelles K_1 et K_2 , degré $K_i = -(d+2)$ telles que :

$$\Theta + \frac{1}{2} \frac{d\alpha}{\alpha} = K_1 w_1 + K_2 w_2 .$$

Remarquons que, puisque Θ est supposée non fermée, les K_i ne peuvent être simultanément nuls. Pour des raisons de commodités nous supposerons K_1 et K_2 non identiquement nuls ; ce qui est loisible quitte à faire une combinaison linéaire des w_i .

Par dérivation on obtient :

$$\alpha . w_1 \wedge w_2 = d\Theta = K_1 w_1 + K_2 w_2 + dK_1 \wedge w_1 + dK_2 \wedge w_2 .$$

En multipliant par dw_1 on a :

$$0 = dK_2 \wedge w_2 \wedge dw_1 = \alpha . dK_2 \wedge \Theta \wedge w_1 \wedge w_2 .$$

De même :

$$0 = dK_1 \wedge \Theta \wedge w_1 \wedge w_2 .$$

En procédant comme précédemment par action du champ radial, on obtient :

$$\left(\Theta + \frac{dK_1}{K_1} \right) \wedge w_1 \wedge w_2 = 0 = \left(\Theta + \frac{dK_2}{K_2} \right) \wedge w_1 \wedge w_2 .$$

Finalement en éliminant Θ , on constate que :

$$0 = \left(\frac{dK_1}{K_1} - \frac{dK_2}{K_2} \right) \wedge w_1 \wedge w_2 = \left(2 \frac{dK_1}{K_1} - \frac{d\alpha}{\alpha} \right) \wedge w_1 \wedge w_2 = \left(2 \frac{dK_2}{K_2} - d\alpha \right) \wedge w_1 \wedge w_2$$

qui indique que les fonctions rationnelles $K_1/K_2, K_1^2/\alpha, K_2^2/\alpha$ satisfont

à l'énoncé. Reste tout de même à vérifier qu'elles sont non constantes !

C'est l'objet du :

Lemme : Les K_1/K_2 , K_1^2/α , K_2^2/α ne sont pas toutes constantes.

Preuve : Si tel est le cas $\alpha = c_1 K_1^2$, $K_2 = c_2 K_1$ où $c_i \in \mathbf{C}$ et :

$$\Theta + \frac{1}{2} \frac{d\alpha}{\alpha} = \Theta + \frac{dK_1}{K_1} = K_1(w_1 + c_2 w_2).$$

On a par suite :

$$d(w_1 + c_2 w_2) = \Theta \wedge (w_1 + c_2 w_2) = -\frac{dK_1}{K_1} \wedge (w_1 + c_2 w_2)$$

qui indique que la forme différentielle $K_1 \cdot (w_1 + c_2 w_2)$ est fermée et donc Θ aussi ; ce qui est absurde. ■

On note $K(\mathcal{Axe} \mathcal{W})$ l'ensemble des fractions rationnelles R vérifiant

$$dR \wedge w_1 \wedge w_2 = 0.$$

On constate que si $R \in K(\mathcal{Axe} \mathcal{W})$, R est de degré 0 et constante sur les feuilles de l'axe ; $K(\mathcal{Axe} \mathcal{W})$ est un corps non réduit aux constantes d'après la proposition 7.

On introduit l'entier $\tau(\mathcal{W})$:

$$\tau(\mathcal{W}) = \sup \{ p \in \mathbf{N} \text{ tel qu'il existe } R_1, \dots, R_p \in K(\mathcal{Axe} \mathcal{W}) \text{ vérifiant } dR_1 \wedge \dots \wedge dR_p \neq 0 \}$$

Puisque les éléments de $K(\mathcal{Axe} \mathcal{W})$ sont constants sur les feuilles de l'axe on a visiblement $1 \leq \tau(\mathcal{W}) \leq 2$. Si $\tau(\mathcal{W}) = 2$ les feuilles de l'axe sont les composantes connexes des fibres d'une application rationnelles.

Proposition 8 : Si $\tau(\mathcal{W}) = 1$, il existe $R_0 \in K(\mathcal{Axe} \mathcal{W})$ tel que $K(\mathcal{Axe} \mathcal{W}) = \mathbf{C}(R_0)$.

Preuve : Soit $\mathbf{CP}(1) \longrightarrow \mathbf{CP}(n)$ une droite générale ; les restrictions R à $\mathbf{CP}(1)$ des éléments R de $K(\mathcal{Axe} \mathcal{W})$ forment un sous corps du corps des fractions rationnelles à une variable : d'après le théorème de Luröth il existe $R_0 \in K(\mathcal{Axe} \mathcal{W})$ tel que :

$$K(\text{axe } \mathcal{W})|_{\mathbf{CP}(1)} = \mathbf{C}(R_0), \quad R_0 = R_0|_{\mathbf{CP}(1)} .$$

Si $R \in K(\text{axe } \mathcal{W})$ alors :

$$dR \wedge dR_0 = 0 \text{ puisque } \tau(\mathcal{W}) = 1$$

et

$$R_0|_{\mathbf{CP}(1)} = r(R_0|_{\mathbf{CP}(1)}) \text{ où } r \in \mathbf{C}(t) .$$

Par suite $R = r(R_0)$. ■

Remarque : On peut bien sûr définir aussi le corps $K(\text{axe } \mathcal{W})$ dans le cas hexagonal ; génériquement si \mathcal{W} est hexagonal parabolique ou hyperbolique abélien on a $K(\text{axe } \mathcal{W}) = \mathbf{C}$. On peut produire des exemples explicites de \mathcal{W} hexagonaux pour lesquels $\tau(\mathcal{W}) = 1$. Par contre je ne connais pas d'exemples de tissus feuilletés non hexagonaux tels que $\tau(\mathcal{W}) = 1$. En fait la proposition qui suit fait penser qu'il sera bien difficile d'en construire.

Proposition 9 : Soit $w_1 = P_1 \dots P_p \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{dP_i}{P_i}$ un élément de $\sum_{v_1, \dots, v_p}^{p, n, d}$, $n \geq$

3, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $P_i \neq P_j$ pour $i \neq j$ et P_j réduits. Supposons qu'il existe un tissu feuilleté \mathcal{W} tel que $\mathcal{F}(w_1)$ soit l'un des feuilletages de \mathcal{W} . Si $\tau(\mathcal{W}) = 1$, alors \mathcal{W} est hexagonal.

Preuve : Elle est un peu lourde. Il existe w_2, w_3 , $w_1 + w_2 + w_3 = 0$ tels que $\mathcal{W} = \mathcal{W}(w_1, w_2, w_3)$; pour vérifier l'hexagonalité on travaille en fait avec la droite $tw_2 + (1-t)w_1$ ce qui nous permet de supposer que w_2 est voisin de w_1 ; on en déduit que w_2 est dans $\sum_{1, \dots, v_p}^{p, n, d}$ et plus précisément

s'écrit :

$$w_2 = Q_1 \dots Q_p \sum \mu_i \frac{dQ_i}{Q_i} \text{ avec } Q_i \neq Q_j \text{ pour } i \neq j .$$

Si $P = P_1 \dots P_p$ et $Q = Q_1 \dots Q_p$ sont \mathbf{C} -colinéaire il est clair que \mathcal{W} sera hexagonal. Si tel n'est pas le cas il se peut toutefois que P et Q aient des composantes communes. On écrit P et Q sous la forme : $P = F.G$, $Q = G.H$ avec F, G, H réduits sans branches communes, l'un des F, G, H pouvant éventuellement être égal à 1.

Soit R_0 tel que $K(\mathcal{W}) = \mathbf{C}(R_0)$.

Lemme : La fraction rationnelle non constante F/H appartient à $K(\mathcal{W})$; notamment il existe $r \in \mathbf{C}(t)$ tel que $F/H = r(R_0)$.

Preuve : Remarquons que

$$\begin{cases} dw_1 = \left(\frac{dF}{F} + \frac{dG}{G} \right) \wedge w_1 \\ dw_2 = \left(\frac{dG}{G} + \frac{dH}{H} \right) \wedge w_2 \end{cases}$$

Comme $w_1 \wedge dw_2 + w_2 \wedge dw_1 = 0$ on obtient :

$$\left(\frac{dF}{F} + \frac{dH}{H} \right) \wedge w_1 \wedge w_2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{F}{H} \in K(\mathcal{W}). \quad \blacksquare$$

Remarque : Noter que nécessairement $\frac{F}{H}$ est homogène de degré 1. Par suite seule G peut être éventuellement égal à 1.

Maintenant, puisque $R_0 \in K(\mathcal{W})$ on peut trouver des fractions rationnelles A_1 et A_2 , non toutes deux nulles telles que :

$$dR_0 = A_1 \cdot \frac{w_1}{P} + A_2 \cdot \frac{w_2}{Q}.$$

Comme $\frac{w_1}{P}$ et $\frac{w_2}{Q}$ sont fermées, on a par dérivation :

$$0 = dA_1 \wedge \frac{w_1}{P} + dA_2 \wedge \frac{w_2}{Q}$$

et par suite :

$$0 = dA_1 \wedge w_1 \wedge w_2.$$

Ainsi les A_i sont aussi dans $K(\mathcal{W})$ et il existe $r_i \in \mathbf{C}(t)$ tels que : $A_i = r_i(R_0)$. Supposons A_1 non identiquement nul ; on a :

$$\frac{dR_0}{r_1(R_0)} = \frac{w_1}{P} + \frac{r_2}{r_1}(R_0) \cdot \frac{w_2}{P}.$$

Par suite, si $\frac{r_2}{r_1}$ est non constant on constate par différentiation que R_0 est intégrale première de w_2 ; mais ce discours ne dépendant pas du choix de w_2 sur la droite de feuilletages, tout élément de cette droite a

R_0 comme intégrale première : c'est impossible puisque $w_1 \wedge w_2 \neq 0$.

En résulte que $\frac{r_2}{r_1} = c \in \mathbf{C}$ et :

$$\frac{dR_0}{r_1(R_0)} = \frac{w_1}{P} + c \cdot \frac{w_2}{Q}.$$

Notons F_j, G_k, H_ℓ les composantes irréductibles de F, G, H et écrivons :

$$\frac{w_1}{P} = \sum \alpha_j \frac{dF_j}{F_j} + \sum \beta_k \frac{dG_k}{G_k}$$

$$\frac{w_2}{Q} = \sum \gamma_k \frac{dG_k}{G_k} + \sum \varepsilon_\ell \frac{dH_\ell}{H_\ell}$$

où les α_j, β_k sont pris dans la liste des λ_i et $\gamma_k, \varepsilon_\ell$ dans la liste des μ_i .
D'après le lemme il existe $r_0 \in \mathbf{C}(t)$ tel que :

$$r_0(R_0) \left(\frac{dF}{F} - \frac{dH}{H} \right) = \frac{w_1}{P} + c \frac{w_2}{Q}$$

soit encore :

$$r_0(R_0) \left(\sum \frac{dF_j}{F_j} - \sum \frac{dH_\ell}{H_\ell} \right) = \sum \alpha_j \frac{dF_j}{F_j} + \sum (\beta_k + c \cdot \gamma_k) \frac{dG_k}{G_k} + \sum c \cdot \varepsilon_\ell \frac{dH_\ell}{H_\ell}.$$

Par intégration sur des cycles élémentaires autour des $G_k = 0$ on constate que :

$$\beta_k + c \cdot \gamma_k = 0.$$

Par suite $r_0(R_0)$ ne peut avoir de pôles que le long des $F_j = 0$ et $H_\ell = 0$.
Mais pour des raisons de multiplicité $r_0(R_0)$ ne peut avoir de pôles le long des $F_j = 0$ et $H_\ell = 0$; ainsi $r_0(R_0)$ est constante : $r_0(R_0) = c_0 \in \mathbf{C}$.
Visiblement $c_0 \neq 0$.

Finalement :

$$\begin{cases} \alpha_j = c_0 = -c\varepsilon_\ell \text{ (qui implique que } c \neq 0) \\ \beta_k + c\gamma_k = 0 \end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{w_1}{F \cdot G} &= c_0 \frac{dF}{F} + \sum \beta_k \frac{dG_k}{G_k} \\ \frac{w_2}{G \cdot H} &= -\sum \frac{\beta_k}{c} \frac{dG_k}{G_k} - \frac{c_0}{c} \frac{dH}{H}. \end{aligned}$$

La droite de feuilletages $tw_2 + (1-t)w_1$ se laisse écrire :

$$\begin{aligned}
 tw_2 + (1-t)w_1 &= G \left\{ c_0 d \left[(1-t)F - \frac{t}{c}H \right] + \sum \beta_k \frac{dG_k}{G_k} \left[(1-t)F - \frac{t}{c}H \right] \right\} \\
 &= G F_t \left\{ c_0 \frac{dF_t}{F_t} + \sum \beta_k \frac{dG_k}{G_k} \right\}
 \end{aligned}$$

où $F_t = (1-t)F - \frac{t}{c}H$.

Finalemnt $tw_2 + (1-t)w_1$ possède l'intégrale première $F_t \cdot \prod G_k^{\beta_k/c_0}$,

ce qui

montre que le tissu feuilleté est hexagonal abélien. ■

Lorsque $\tau(\mathcal{W}) = 2$ il existe suivant Siegel [Si] des fractions rationnelles $Q_1, \dots, Q_s, s \geq 2$ telles que :

$$K(\mathcal{W}) = \mathbf{C}(Q_1, \dots, Q_s).$$

Moralement, il existe une surface S dont le corps des fonctions rationnelles est $K(\mathcal{W})$ munie d'un web \mathcal{W}_s et une application $P : \mathbf{CP}(n) \longrightarrow S$ telle que $\mathcal{W} = P^* \mathcal{W}_s$; cette affirmation est correcte sur un ouvert de Zariski de $\mathbf{CP}(n)$. En effet si $K(\mathcal{W}) = 2$, les feuilles de l'axe, tout du moins les feuilles génériques, sont les composantes connexes des fibres d'une application rationnelle $(R_1, R_2), R_i \in K(\mathcal{W})$ algébriquement indépendantes. On récupère une relation d'équivalence qui restreinte à un ouvert de Zariski produit par passage au quotient une variété analytique S munie effectivement d'un 3-web puisque les feuilles de \mathcal{W} sont compatibles avec la relation d'équivalence.

Si $\mathcal{W} = \mathcal{W}(w_1, w_2, w_3)$ les w_i appartiennent vraisemblablement à des composantes de type $\mathcal{S}_{n,d}^2$ où l'on substitue aux submersions

linéaires

$$L : \mathbf{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{C}^3 \text{ des fractions rationnelles.}$$

IV - Quelques exemples de tissus feuilletés avec monodromie primaire non triviale.

Soient P_j, Q_k et V des polynômes homogènes de degré respectif v_j, δ_k, v , irréductibles et sans composantes communes, $j = 1 \dots p, k = 1 \dots q$. Soient q' un entier tel que $1 \leq q' < q$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q$ des nombres complexes tels que :

$$0 = \sum_{j=1}^p \lambda_j v_j + \sum_{k=1}^q \mu_k \delta_k = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{q'} \delta_k + \frac{2}{3} \sum_{k=q'+1}^q \delta_k + v + \sum_{j=1}^p \lambda_j v_j.$$

Soit X l'hypersurface d'équation $P_1 \dots P_p \cdot Q_1 \dots Q_q = 0$; la formule

$$F = P_1^{\lambda_1} \dots P_p^{\lambda_p} \left[Q_1^{\mu_1} \dots Q_q^{\mu_q} + (Q_1 \dots Q_{q'})^{1/3} (Q_{q'+1} \dots Q_q)^{2/3} V \right] = F_1 + F_2$$

définit une fonction multiforme sur $\mathbb{C}^{n+1} - X$; cette fonction multiforme est homogène de degré 0 du fait des contraintes sur les λ et les μ . On peut calculer la monodromie de F en choisissant des lacets élémentaires α_j, β_k autour de $P_j = 0$ et $Q_k = 0$ respectivement. Si $\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$ est une détermination de F en un point base $m_0 \in \mathbb{C}^{n+1} - X$ on a :

$$\text{Mon}(\alpha_j) \cdot \underline{F} = e^{2i\pi\lambda_j} F = e^{2i\pi\lambda_j} (\underline{F}_1 + \underline{F}_2), \quad j = 1, \dots, p$$

$$\text{Mon}(\beta_k) \cdot \underline{F} = \underline{F}_1 + e^{2i\pi/3} \underline{F}_2 \quad \text{pour } k = 1 \dots q'$$

$$\text{Mon}(\beta_k) \cdot \underline{F} = \underline{F}_1 + e^{i\pi/3} \underline{F}_2 \quad \text{pour } k = 1 \dots q'.$$

Remarquant qu'il existe une relation abélienne (linéaire) entre $\underline{F}_1 + \underline{F}_2$, $\underline{F}_1 + e^{2i\pi/3} \underline{F}_2$, $\bar{\underline{F}}_1 + e^{i\pi/3} \underline{F}_2$ on munit ainsi $\mathbb{CP}(n)$ d'un trois tissu feuilleté mais avec monodromie primaire non triviale. Je pense savoir démontrer que si les λ et les μ sont choisis suffisamment génériquement alors la feuille générique est dense et se recoupe sur un ensemble dense. Il serait intéressant d'étudier la topologie de tels objets pour des p, q, v_j, δ_k petits.

Je remercie A. Hénaut qui m'a amené à réfléchir sur les webs ; J.-P. Dufour pour m'avoir invité à participer à Montpellier à un atelier tissu. Et tout particulièrement Françoise Dal'bo qui m'a initié à la géométrie affine.

Bibliographie

- [B] A. Beauville : Géométrie des tissus (d'après Chern-Griffiths) Séminaire Bourbaki 1978-79 n° 531.
- [C,L] C. Camacho, A. Lins-Neto : The topology of integrable from near a singularity. Pub. Math. I.H.E.S. n° 55 p. 5-36.
- [Ce,L] D. Cerveau, A. Lins-Neto : Holomorphic foliations in $\mathbf{CP}(2)$ having an invariant algebraic curve Ann. Inst. Fourier, t. 41; fasc. 4, 91 883-904.
- [Ce,Ma] D. Cerveau, J.-F. Mattei : Formes intégrables holomorphes singulières. Astérisque n° 97 (1982).
- [Ce,M] D. Cerveau, F. Maghous : Feuilletages algébriques de \mathbf{C}^n . C.R.A.S. Paris sér. I. 303 (1986) p. 643-645.
- [C,G] S.S. Chern, P.A. Griffiths : Abel's theorem and webs, Tahresberichte der deut. Math. Ver. 80 (1978) p. 13-110.
- [D] P. Deligne : Equations différentielles à points singuliers réguliers L.N.M 163 (1970).
- [F] D. Fried : Closed similarity manifolds. Comment. Math. Helv. 55 (1980) p. 576-582.
- [G] E. Ghys : Flots transversalement affines et tissus feuilletés. Supplément Bull. S.M.F. Mémoire n° 46 T. 119 (1991) p. 123-150.
- [H] A. Hénaut : Sur la linéarisation des tissus. Preprints Bordeaux.
- [L] Lamotke : The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz. Topology. Vol.20 (1981) p. 15-51.
- [O] Omegar : Thèse I.M.P.A. Rio.
- [Si] C.L. Siegel : Meromorphe Funktionen anf Kompakten analytischen Manning faltigkeiten, Nachr. Akad. Wiss Göttingen, 1955, p. 71-77

D. CERVEAU
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex