RICARDO PÉREZ-MARCO
JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

Germes de feuilletages holomorphes à holonomie prescrite

Astérisque, tome 222 (1994), p. 345-371
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__222__345_0>

GERMES DE FEUILLETAGES HOLOMORPHES À HOLONOMIE PRESCRITE

RICARDO PÉREZ-MARCO*

JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ**

I. INTRODUCTION

Considérons au voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^2$ un germe de champ de vecteurs holomorphe, $X = X_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + X_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ s'annulant en 0. On veut étudier le feuilletage holomorphe singulier $\mathcal{F}$ défini au voisinage de 0 par l'équation différentielle:

$$\begin{cases} \dot{x} = & X_1(x,y) \\ \dot{y} = & X_2(x,y) \end{cases}$$

Son caractère dépend essentiellement des valeurs propres, notées λ_1 et λ_2, de la partie linéaire de X en 0.

Par le théorème de A. Seidenberg ([**Se**]), après un nombre fini d'éclatements on aboutit à des singularités primitives (ou irréductibles) où $\lambda_2 \neq 0$ et λ_1/λ_2 n'est pas un rationnel strictement positif. Pour ces singularités deux situations se présentent:

• Domaine de Poincaré: C'est le cas où $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbf{C}-\mathbf{R}_-$. H. Poincaré ([**Po**]) a montré que l'équation différentielle est *linéarisable* au voisinage de 0, i.e. par

*CNRS, U.R.A. 1169, Université de Paris-Sud, Dépt. de Mathématiques, Bât 425, 91405-Orsay (France).

**Université de Paris-Sud, Dépt. de Mathématiques, Bât. 425, 91405-Orsay (France).

un changement de variables holomorphe le champ X s'écrit $\lambda_1 x\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_2 y\frac{\partial}{\partial y}$. La structure du feuilletage local $\mathcal{F}$ est alors topologiquement et analytiquement déterminée.

• Domaine de Siegel: Ce cas correspond à $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbf{R}_-$. On a encore deux cas à distinguer: $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbf{Q}_-$-c'est le cas *résonant*-et $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbf{R}_- - \mathbf{Q}_-$.

L'étude du cas résonant a été complètement effectuée par J. Martinet et J.-P. Ramis (**[M-R1]** et **[M-R2]**) qui ont déterminé tous les invariants holomorphes d'un tel germe de feuilletage.

Dans le cas non résonant, on n'a pas de *résonances* (d'où la terminologie) du type:

$$\lambda_i = q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2,$$

avec $i = 1, 2$ et $q_1, q_2 \in \mathbf{N}^*$.

Ceci permet de montrer facilement que le champ X est formellement linéarisable; cependant ce changement de variables formel peut diverger à cause des problèmes de petits diviseurs. Un théorème remarquable de C.- L. Siegel (**[Si1]**,**[Si2]**) montre que la linéarisante converge lorsque $\alpha = -\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ satisfait à une condition diophantinne, i.e. il existe $\gamma, \tau > 0$ tels que pour $p/q \in \mathbf{Q}$,

$$|\alpha - p/q| \geq \frac{\gamma}{q^\tau}.$$

Cette condition sur α est de mesure de Lebesgue totale. A. Bruno a amélioré la démonstration de Siegel et obtient le résultant sous une condition arithmétique plus faible: Si $(p_n/q_n)_{n\geq 0}$ est la suite des réduites de α cette conditon s'écrit

$$(\mathcal{B}) \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < +\infty.$$

Par ailleurs il est connu qu'il existe des valeurs de $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ pour lesquelles la linéarisante peut diverger (Bruno, Ilyashenko, Pyartli). La topologie du feuilletage dans le cas non linéarisable n'est pas comprise, on va voir qu'elle peut être très complexe.

Dans la suite on se placera dans le domaine de Siegel avec $\alpha = -\lambda_2/\lambda_1 > 0$ rationnel ou irrationnel. Dans ce cadre il existe deux variétés analytiques invariantes par le champ de vecteurs X qui passent par l'origine (Briot-Bouquet [Bri], H. Dulac [Du]). Plus précisement, après un changement de variables holomorphe, le champ X s'écrit

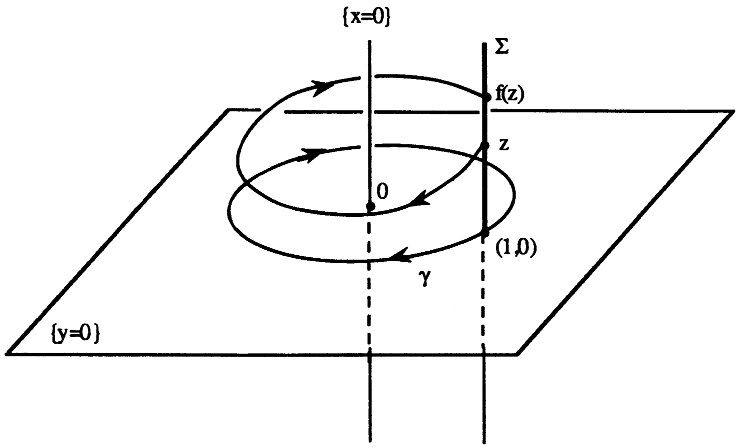
$$X = \lambda_1 x(1+\ldots)\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y(1+\ldots)\frac{\partial}{\partial y},$$

donc les axes $\{x=0\}$ et $\{y=0\}$ sont des variétés invariantes de X (une démonstration se trouve dans [M-M] appendice II). On peut alors considérer l'*holonomie* de la variété invariante $\mathcal{F}_0 = \{(x,0); x \neq 0\}$ suivant le lacet $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}^2$, $\gamma(t) = (e^{-2\pi i t}, 0)$ (quitte à conjuguer par une homothétie). Pour cela on choisit une transversale holomorphe Σ en $(1,0)$ à $\mathcal{F}_0$ (par exemple $\{x=1\}$), et on relève γ aux feuilles voisines de $\mathcal{F}_0$. L'application de retour sur Σ définit (en considérant une carte sur Σ) un germe de difféomorphisme holomorphe de $(\mathbf{C},0)$, $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$, et on montre facilement que $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$ ([M-M] p. 480 pour plus de détails).

Les choix du lacet γ dans sa classe d'homotopie dans $\mathcal{F}_0$, de la transversale Σ et de la carte sur Σ n'affectent pas la classe de conjugaison de f. De même, si on transforme le feuilletage par un germe de difféomorphisme holomorphe de $(\mathbf{C}^2,0)$, l'holonomie obtenue pour la variété invariante correspondante est encore dans la même classe que f.

En résumé, on obtient ainsi une application, notée Hol_α, définie sur l'ensemble des classes de conjugaison de germes de feuilletages holomorphes singuliers de $(\mathbf{C}^2,0)$ dans le domaine de Siegel avec $\alpha = -\lambda_2/\lambda_1 > 0$ à valeurs dans l'ensemble des classes de conjugaison des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbf{C},0)$ de partie linéaire $z \mapsto e^{2\pi i \alpha} z$.

On démontrera ici que cette application est bijective. En d'autres termes, la classification analytique de tels germes de feuilletages singuliers est la même que celle des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbf{C},0)$.



J.-F. Mattei et R. Moussu ([M-M]) ont montré que $\mathcal{F}$ est linéarisable si et seulement si f est ***linéarisable*** (i.e. conjugué par un difféomorphisme de $(\mathbf{C}, 0)$ à sa partie linéaire), et, plus généralement, que les holomomies de deux feuilletages sont conjuguées si et seulement s'ils sont eux-mêmes conjugués. La démonstration consiste à prolonger la conjugaison, définie sur les transversales, le long des feuilles. Ceci démontre l'injectivité de Hol_α pour toute valeur $\alpha > 0$.

La bijectivité est immédiate lorsque $\alpha \in \mathcal{B}$. En effet, les techniques de Siegel s'appliquent aussi pour les germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbf{C}, 0)$ pour démontrer la linéarisabilité lorsque $\alpha \in \mathcal{B}$ ([Si1], [Br]). Dans ce cas, le deux ensembles de classes de conjugaison sont réduits à un seul élément. Le cas $\alpha \in \mathbf{Q}_+^*$ a été résolu par J. Martinet et J.-P. Ramis ([M-R]) qui, à partir de la classification des germes obtenue par J. Ecalle et S.-M. Voronin (pour $\alpha \in \mathbf{Q}_+^*$, [Ec], [Vo]) ont montré qu'on pouvait réaliser tout germe holomorphe $f(z) = e^{2\pi i\alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$ comme holonomie des feuilletages considérés. Ceci prouve la surjectivité de Hol_α lorsque $\alpha \in \mathbf{Q}_+^*$.

On se propose de démontrer la surjectivité dans le cas général $\alpha > 0$:

THÉORÈME. *Pour $\alpha > 0$, tout germe holomorphe $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$ est réalisé comme holonomie d'un feuilletage défini par*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(1+\ldots) \\ \dot{y} = \alpha y(1+\ldots) \end{cases}$$

i.e. l'application Hol_α est bijective.

La démonstration n'utilise aucun résultat relatif à la structure des classes de conjugaison qui, comme on sait (voir ci-dessous), est compliquée dans le cas non linéarisable. Elle ne distingue pas le cas rationnel du cas irrationnel. Ceci donne une démonstration du théorème de Martinet et Ramis qui n'utilise pas la structure connue de la dynamique rationnelle.

Le théorème montre l'équivalence de deux problèmes. Il se trouve que celui relatif aux germes de difféomorphismes de $(\mathbf{C}, 0)$ est mieux étudié. On a déjà indiqué que pour $\alpha \in \mathcal{B}$ tout germe holomorphe $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$ est linéarisable. Le deuxième auteur a montré que cette condition arithmétique est optimale : Si $\alpha \notin \mathcal{B}$ il existe un germe holomorphe $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$ non linéarisable. D'où l'optimalité pour les feuilletages:

Corollaire 1. *Si $\alpha \notin \mathcal{B}$ il existe un feuilletage singulier défini par un germe de champ de vecteurs holomorphe $X = -x(1+\ldots)\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y(1+\ldots)\frac{\partial}{\partial y}$ non linéarisable.*

Les applications f construites dans [Yo] ont des orbites périodiques qui tendent vers l'origine et on peut fixer avec liberté la classe de conjugaison de l'application de retour au voisinage de ces orbites périodiques. Ceci fourni une grande variété de singularités de feuilletages holomorphes de topologie très complexe.

D'autres exemples sont obtenus à partir des applications $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$ sans autre orbite périodique que 0 construites par le premier auteur ([PM]) lorsque α satisfait $\sum_{n \geq 1} q_n^{-1} \log\log q_{n+1} = +\infty$. On a

Corollaire 2. *Sous la condition arithmétique précédente, il existe un feuilletage singulier défini dans un voisinage U de 0 par un germe de champ de vecteurs holomorphe $X = -x(1+\ldots)\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y(1+\ldots)\frac{\partial}{\partial y}$ non linéarisable et dont toute feuille dans $U - \{xy = 0\}$ est simplement connexe.*

Un autre résultat de [PM] montre qu'ici encore la condition arithmétique précédente est optimale pour avoir ce phénomène.

Il se pose naturellement la question de savoir quand est-ce qu'on peut réaliser globalement, par exemple dans $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$, ces feuilletages locaux. Les considérations sur les germes de difféomorphismes peuvent laisser penser que c'est le cas pour tout $\alpha \notin \mathcal{B}$ pour les feuilletages non linéarisables du corollaire 1 : Si $\alpha \notin \mathcal{B}$, $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + z^2$ est non linéarisable ([Yo]). Mais, on peut être plus sceptique quand à ceux du corollaire 2 : Pour $\alpha \notin \mathcal{B}$, le deuxième auteur a montré que $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + z^2$ a une suite d'orbites périodiques qui tendent vers 0.

On décrit ci-dessous l'idée de la démonstration du théorème faite en II.

Une facon naturelle de considérer le feuilletage singulier $\mathcal{F}$.

On a vu que dans le domaine de Siegel avec $\alpha = -\lambda_2/\lambda_1 > 0$, le feuilletage $\mathcal{F}$ est défini dans des coordonnées convenables, par :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(1 + \ldots) \\ \dot{y} = \alpha y(1 + \ldots) \end{cases}$$

La géométrie intéressante de $\mathcal{F}$ se trouve en dehors des axes invariants, i.e. dans un voisinage de 0 privé de $\{xy = 0\}$. Il est donc naturel et commode de se placer dans le revêtement universel $E : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2 - \{xy = 0\}$ défini par

$$E(z_1, z_2) = (e^{2\pi i z_1}, e^{2\pi i z_2}) = (x, y).$$

L'ouvert $\{0 < |x| < \varepsilon, 0 < |y| < \varepsilon\}$ se relève en $\{\operatorname{Im} z_1 > C, \operatorname{Im} z_2 > C\}$ (avec $\exp(-2\pi C) = \varepsilon$), et le champ en un champ

$$\begin{cases} 2\pi i \dot{z}_1 = -1 + \mathcal{O}(\exp[-2\pi \operatorname{Max}(\operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2)]) \\ 2\pi i \dot{z}_2 = \alpha + \mathcal{O}(\exp[-2\pi \operatorname{Max}(\operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2)]) \end{cases}.$$

Les feuilles du feuilletage associé sont proches de plans $\{z_2 + \alpha z_1 = \text{cte}\}$. On récupère le feuilletage $\mathcal{F}$ initial en quotientant $\mathbf{C}^2$ par T_1 et T_2,

$$T_1(z_1, z_2) = (z_1 + 1, z_2),$$
$$T_2(z_1, z_2) = (z_1, z_2 + 1),$$

et en transportant par E. Il existe un changement de variables holomorphe, proche de l'identité, $(z_1, z_2) \mapsto (w_1, w_2)$ qui rend le feuilletage linéaire et perturbe T_1 et T_2 en des applications F_1 et F_2 qui commutent et sont proches de T_1 et T_2 respectivement.

Il est donc naturel de penser qu'on peut récupérer tout feuilletage à partir du feuilletage linéaire de $\mathbf{C}^2$, $z_2 + \alpha z_1 = \text{cte}$, en quotientant un domaine approprié par deux applications F_1 et F_2 telles que ci-dessus. C'est à dire, faire passer la non linéarité dans les applications de recollement plutôt que dans le feuilletage. C'est cette idée qui est mise en oeuvre.

Comment reconstruire un feuilletage à partir de son holonomie.

Soit $\alpha > 0$. Le cas d'une holonomie linéaire est très simple. Considérons le feuilletage de $\mathbf{C}^2$ en droites complexes $z_2 + \alpha z_1 = \text{cte}$, i.e. défini par la $(1,0)$-forme $dz_2 + \alpha dz_1$. On quotiente $\mathbf{C}^2$ par les translations T_1 et T_2 définies auparavant. La $(1,0)$-forme $dz_2 + \alpha dz_1$ est invariante par T_1 et T_2, passe au quotient, et définit un feuilletage holomorphe de $\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2$. Or l'application $E : \mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2 \to \mathbf{C}^2 - \{xy = 0\}$, est un difféomorphisme holomorphe. La forme $dz_2 + \alpha dz_1$ devient $\dfrac{dy}{y} + \alpha \dfrac{dx}{x}$. On a construit ainsi le feuilletage linéaire de $\mathbf{C}^2$ définit par $xdy + \alpha ydx$, d'holonomie linéaire.

On veut réaliser de la même facon l'holonomie d'un représentant $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$ d'une classe quelconque de conjugaison. Quitte à conjuguer par une homothétie, on peut supposer f défini sur le disque unité $\mathbf{D}$ et on peut relever à $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$ vu comme revêtement de $\mathbf{D} - \{0\}$ via l'application $z \mapsto \exp(2\pi i z)$. On obtient $F : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$, $F(z) = z + \alpha + \Phi(z)$, avec Φ $\mathbf{Z}$-périodique et $\lim\limits_{\operatorname{Im} z \to +\infty} \Phi(z) = 0$. On peut supposer $||\Phi||_{C^0(\mathbf{H})}$ petit.

On considère à nouveau le feuilletage de $\mathbf{C}^2$ par les droites complexes $\{z_2 + \alpha z_1 = \text{cte}\}$. Cette fois on voudrait quotienter un domaine de $\mathbf{C}^2$ par l'action de

$$F_1(z_1, z_2) = (z_1 + 1, z_2 + \Phi(z_2 + \alpha z_1)),$$
$$F_2(z_1, z_2) = (z_1, z_2 + 1).$$

On ne considère F_1 et F_2 que dans un domaine U où $\operatorname{Im}(z_2 + \alpha z_1) > 0$ et Φ est définie et petite en valeur absolue. Donc on a $F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1$ et F_1 et F_2 sont proches respectivement de T_1 et T_2. La feuille passant par le point

$(0, z_2)$ sera identifiée avec celle contenant $(1, z_2 + \Phi(z_2))$ qui passe elle-même par le point $(0, z_2 + \alpha + \Phi(z_2)) = (0, F(z_2))$. Donc l'application de retour du lacet $\gamma(t) = (1 - t, z_2 + \Phi(z_2) + \alpha t)$, $0 \leq t \leq 1$, sur la transversale $\{z_1 = 0\}$ est précisément F.

On peut quotienter U par l'action de F_1 et F_2, et obtenir une variété complexe M. Pour poursuivre la construction il faut montrer que M est biholomorphe à un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^2$ privé de $\{xy = 0\}$. Ceci est vrai pour la structure C^∞ : En effet, on peut conjuguer de facon C^∞ F_1 et F_2 à T_1 et T_2 respectivement (II.3), ce qui revient à construire un difféomorphisme v de classe C^∞ de M dans $W \subset \mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2$. On peut aussi multiplier la forme $dz_2 + \alpha dz_1$, par une fonction de classe C^∞ pour qu'elle passe au quotient (II.3). Puis le difféomorphisme $E : \mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2 \to \mathbf{C}^2 - \{xy = 0\}$ envoi W sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^2$ privé de $\{xy = 0\}$, où l'on obtient un feuilletage de classe C^∞. Ainsi la construction en classe C^∞ est triviale.

La clé de la construction est que l'on peut perturber le difféomorphisme v en un difféomorphisme holomorphe de M dans $\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2$. Le défaut d'holomorphie de v est localisé dans une de ces coordonnées (II.3). On est amené à résoudre une équation $\bar{\partial}$ avec des estimées (II.6 et II.7). Pour cela l'outil essentiel est une variante d'un résultat de L. Hörmander ([Ho1], [Ho2]), repris dans l'appendice (III). Il faut d'abord se placer dans une variété de Stein. Or, en choisissant convenablement le bord de l'ouvert U où est réalisé le quotient, on peut construire dans M une fonction strictement plurisousharmonique, minorée et propre (II.5); donc M sera une variété de Stein (II.5). Ensuite, en utilisant que le difféomorphisme C^∞, v, de M dans W est C^4 proche de l'identité dans les coordonnées (z_1, z_2) sur U (II.4), on résout dans M une équation $\bar{\partial}$ dont la solution est petite (le défaut d'holomorphie l'est aussi, cf. estimées II.4 et II.7); ceci permet de perturber v en un difféomorphisme holomorphe $\tilde{v} : M \to \tilde{W} \subset \mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2$. Finalement $E \circ \tilde{v}$ est l'uniformisation cherchée. Il faut encore résoudre une équation $\bar{\partial}$ pour le défaut d'holomorphie de la forme C^∞ qui définit le feuilletage sur M et obtenir ainsi une $(1,0)$-forme holomorphe pour le feuilletage final (I.8).

II. Démonstration du théorème.

1. Nous rappelons les notations déjà introduites. On notera dans la suite $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}$ et $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$.

2. Fixons une fois pour toutes un nombre réel $\alpha > 0$, un nombre réel $\varepsilon \in]0,1[$, ainsi qu'une fonction $\eta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monotone de classe C^∞ vérifiant $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(t) = 0$ pour $t \geq 2/3$ et $\eta(t) = 1$ pour $t \leq 1/3$.

Nous posons $\alpha_1 = (1+\varepsilon)\alpha$, $\alpha_2 = (1-\varepsilon)\alpha$ et noterons C_1, C_2, ... des constantes ne dépendant que de ε, η, α. Donnons-nous un germe de difféomorphisme holomorphe $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$ de $(\mathbf{C}, 0)$. Quitte à conjuguer f par une homothétie, il existe un relèvement

$$z \mapsto F(z) = z + \alpha + \Phi(z)$$

de f par le revêtement $z \mapsto e^{2\pi iz}$ de $\mathbf{D}^*$ par $\mathbf{H}$, tel que F soit holomorphe et injectif dans $\mathbf{H}$, et que la fonction $\mathbf{Z}$-périodique Φ vérifie :

$$\lim_{\operatorname{Im} z \to \infty} \Phi(z) = 0,$$

et pour $0 \leq i \leq 4$, $z \in \mathbf{H}$,

$$|D^i\Phi(z)| \leq \frac{1}{2}e^{-2\pi \operatorname{Im} z}.$$

3. Posons :

$$U = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; \operatorname{Im}(z_2 + \alpha z_1) > 0\}.$$

Définissons dans U les applications :

$$F_1(z_1, z_2) = (z_1 + 1, z_2 + \Phi(z_2 + \alpha z_1)),$$
$$F_2(z_1, z_2) = (z_1, z_2 + 1).$$

On a $F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1$. On va quotienter une partie de U par l'action de F_1 et F_2.

On définit

$$v_0(z_1, z_2) = \eta(\operatorname{Re} z_1)\Phi(z_2 + \alpha z_1),$$
$$v_1(z_1, z_2) = \eta(\operatorname{Re} z_1)\log(1 + D\Phi(z_2 + \alpha z_1)).$$

On considère l'application

$$v(z_1, z_2) = (z_1, z_2 + v_0(z_1, z_2)) = (w_1, w_2),$$

puis la $(1,0)$-forme de classe C^∞ :

$$\Omega_0 = e^{v_1(z_1,z_2)}(dz_2 + \alpha dz_1).$$

D'après les estimations sur Φ dans $\mathbf{H}$, nous avons :

Lemme 1. *Soit ∂^l une dérivée partielle d'ordre inférieur ou égal à trois. Pour $i = 0, 1$ et $(z_1, z_2) \in U$, on a*

$$\left|\partial^l v_i(z_1, z_2)\right| \leq C_1 \exp[-2\pi \operatorname{Im}(z_2 + \alpha z_1)].$$

Notons $T_1 : (w_1, w_2) \mapsto (w_1 + 1, w_2)$ et $T_2 : (w_1, w_2) \mapsto (w_1, w_2 + 1)$ les translations indiquées de $\mathbf{C}^2$. Nous avons clairement :

$$v \circ F_2 = T_2 \circ v,$$
$$F_2^* \Omega_0 = \Omega_0.$$

D'après le choix de η, nous avons aussi, pour $(z_1, z_2) \in U \cap F_1^{-1}(U)$, $|\operatorname{Re} z_1| \leq 1/3$:

$$v \circ F_1 = T_1 \circ v,$$
$$F_1^* \Omega_0 = \Omega_0.$$

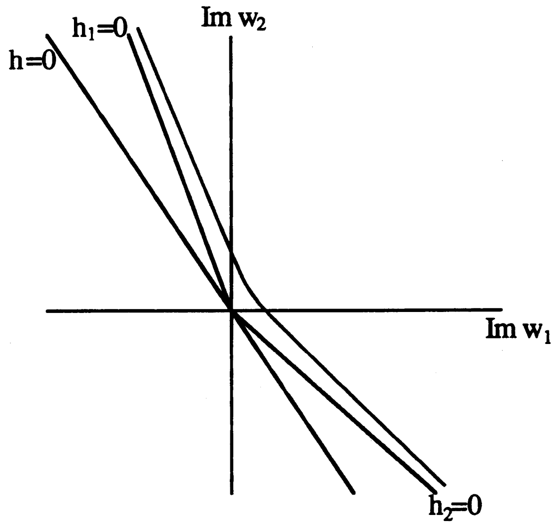
Posons alors, pour $R > 0$ (figure) :

$$V_R = \{(w_1, w_2) \in \mathbf{C}^2;\ -1/4 < \operatorname{Re} w_i < 5/4,\ \operatorname{Im}(w_2 + \alpha w_1) > 0,$$
$$\operatorname{Im}(w_2 + \alpha_1 w_1) \operatorname{Im}(w_2 + \alpha_2 w_1) > R\},$$
$$U_R = v^{-1}(V_R) \subset U.$$

La partie,

$$\{(w_1, w_2) \in \mathbf{C}^2;\ \operatorname{Im}(w_2 + \alpha w_1) > 0,\ \ \operatorname{Im}(w_2 + \alpha_1 w_1) \operatorname{Im}(w_2 + \alpha_2 w_1) = R\},$$

est invariante par T_1 et T_2. D'après les relations ci-dessus et le lemme 1, on obtient :



Lemme 2. *Supposons $R > C_2$.*

a) La restriction de v à U_R est un difféomorphisme de classe C^∞ sur V_R.

b) En quotientant U_R par F_1 et F_2, on obtient une variété complexe M_R, et v induit un difféomorphisme de classe C^∞, noté $\bar{v}$, de M_R sur $V_R/\mathbf{Z}^2$ (V_R quotienté par T_1 et T_2).

c) La forme Ω_0 définit une $(1,0)$-forme de classe C^∞ sur M_R, qu'on notera Ω_1.

4. On notera π l'application canonique de U_R dans M_R. On définit des applications de classe C^∞ dans M_R (ou U_R) par :

$$h_1(z_1,z_2) = \mathrm{Im}(z_2 + v_0(z_1,z_2) + \alpha_1 z_1) = \mathrm{Im}(w_2 + \alpha_1 w_1)$$
$$h_2(z_1,z_2) = \mathrm{Im}(z_2 + v_0(z_1,z_2) + \alpha_2 z_1) = \mathrm{Im}(w_2 + \alpha_2 w_1)$$
$$h(z_1,z_2) = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) = \mathrm{Im}(z_2 + v_0(z_1,z_2) + \alpha z_1) = \mathrm{Im}(w_2 + \alpha w_1).$$

Pour $j = 1,2$, posons $\omega_j = \partial h_j$. D'après le lemme 1, on obtient :

Lemme 3. *Supposons $R > C_3 > C_2$.*

a) Les $(1,0)$*-formes* ω_1, ω_2 *constituent en tout point de* M_R *une base de l'espace cotangent holomorphe à* M_R.

b) Posons $dV = (i/2)^2 \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 \wedge \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2$, *et notons* dV_0 *l'élément de volume canonique de* $\mathbf{C}^2$. *Dans* U_R *on a :*

$$C_4^{-1} dV_0 \leq \pi^* dV \leq C_4 dV_0.$$

c) On a

$$\begin{aligned} \partial \omega_1 &= \partial \omega_2 = 0, \\ \bar{\partial} \omega_1 &= \bar{\partial} \omega_2 = \bar{\partial} \partial \operatorname{Im} v_0 = \sum_{j,k} c_{j,k} \; \bar{\omega}_j \wedge \omega_k, \end{aligned}$$

où les $c_{j,k} \in C^\infty(M_R)$ *vérifient*

$$\begin{aligned} |c_{j,k}| &\leq C_5 e^{-2\pi h}, \\ |\partial_l c_{j,k}| &\leq C_5 e^{-2\pi h}, \\ |\bar{\partial}_l c_{j,k}| &\leq C_5 e^{-2\pi h}, \end{aligned}$$

avec $dc_{j,k} = \sum_l \partial_l c_{j,k} \; \omega_l + \sum_l \bar{\partial}_l c_{j,k} \; \bar{\omega}_l$.

5. Soit $\tilde{\psi}$ une fonction de classe C^2, à valeurs réelles, définie dans

$$\{(h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2; h_1 > 0, \quad h_2 > 0, \quad h_1 h_2 > R\}.$$

On suppose $R > C_3$, et on associe à $\tilde{\psi}$ la fonction

$$z \mapsto \psi(z) = \tilde{\psi}(h_1(z), h_2(z)),$$

définie dans M_R (ou U_R). D'après le lemme 3.a, on peut écrire

$$\partial \bar{\partial} \psi = \sum_{j,k} \psi_{j,k} \; \omega_j \wedge \bar{\omega}_k,$$

avec, d'après le lemme 3.c,

$$\psi_{j,k} = \left[\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial h_j \partial h_k} + \overline{c_{j,k}} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial h_1} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial h_2} \right) \right] \circ (h_1, h_2).$$

Considérons d'abord la fonction :

$$\tilde{\psi}^{(0)}(h_1, h_2) = -\log(h_1 h_2 - R) = -\log \rho.$$

Nous avons :

$$\frac{\partial \tilde{\psi}^{(0)}}{\partial h_1} + \frac{\partial \tilde{\psi}^{(0)}}{\partial h_2} = -2h\rho^{-1},$$
$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}^{(0)}}{\partial h_1^2} = h_2^2 \rho^{-2},$$
$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}^{(0)}}{\partial h_2^2} = h_1^2 \rho^{-2},$$
$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}^{(0)}}{\partial h_1 \partial h_2} = R\rho^{-2}.$$

Observons qu'on a, pour $(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbf{C}^2$:

$$\begin{aligned} h_2^2|\zeta_1|^2 + h_1^2|\zeta_2|^2 + R(\zeta_1\bar{\zeta_2} + \zeta_2\bar{\zeta_1}) &\geq \frac{h_1^2 h_2^2 - R^2}{h_1^2 + h_2^2}(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2), \\ &\geq (2h^2)^{-1}\rho R(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2). \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.c, on en déduit :

$$(1) \qquad \sum \psi_{j,k}^{(0)}\, \zeta_j \bar{\zeta_k} \geq \rho^{-1}\left((2h^2)^{-1}R - C_6 h e^{-2\pi h}\right)(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2).$$

De même, avec $\tilde{\psi}^{(1)}(h_1, h_2) = h_1^2 + h_2^2$ et $\tilde{\psi}^{(2)}(h_1, h_2) = -\pi(h_1 + h_2)$, nous obtenons :

$$(2) \qquad \sum \psi_{j,k}^{(1)}\, \zeta_j \bar{\zeta_k} \geq \left(2 - C_6 h e^{-2\pi h}\right)(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2),$$

$$(3) \qquad \sum \psi_{j,k}^{(2)}\, \zeta_j \bar{\zeta_k} \geq -C_6 e^{-2\pi h}(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2).$$

Lemme 4. *Pour $R > C_7 > C_3$, M_R est une variété de Stein.*

Démonstration. Soit $\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)} \in C^\infty(M_R)$. Comme on a $h > R^{1/2}$ dans M_R, la fonction ψ est, d'après les inégalités (1) et (2), strictement plurisousharmonique dans M_R si R est assez grand. Par ailleurs, pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\psi^{-1}(]-\infty, a])$ est clairement compact.$\diamondsuit$

6. Nous reprenons les notations de l'appendice, ω_1, ω_2 étant définis comme ci-dessus.

D'après le lemme 3.c, nous avons dans l'appendice (A_1) :

$$a^i_{j,k} \equiv 0,$$

$$c^1_{j,k} = c^2_{j,k} = c_{j,k},$$

et nous pouvons choisir

$$\theta_0 = \theta_1 = C_5 e^{-2\pi h}.$$

Nous allons appliquer le théorème de l'appendice, en choisissant pour ϕ la fonction associée à $\tilde{\phi} = \tilde{\psi}^{(0)} + \tilde{\psi}^{(2)}$, et en prenant :

$$\theta = (3h^2\rho)^{-1}R,$$
$$\rho = h_1 h_2 - R.$$

D'après les inégalités (1), (3) ci-dessus, nous avons effectivement, si $R > C_8 > C_7$:

$$\sum \phi_{j,k}\, \zeta_j \bar{\zeta}_k \geq (\theta + A(\theta_0^2 + \theta_1))(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2).$$

D'après la définition de η, pour $i = 0, 1$, $-\bar{\partial} v_i$ définit une $(0,1)$-forme f_i de classe C^∞ sur M_R, évidement $\bar{\partial}$-fermée. D'après le lemme 1 et le lemme 3.b, on a, pour $R > C_9 > C_8$:

$$\int_{M_R} \theta^{-1} |f_i|^2 e^{-\phi} dV \leq 1.$$

Il existe donc, d'après le théorème de l'appendice, une fonction $u_i \in C^\infty(M_R)$ vérifiant:

$$\bar{\partial} u_i = f_i, \tag{4}$$

$$\int_{M_R} |u_i|^2 \rho e^{2\pi h} dV \leq 1. \tag{5}$$

7. Posons

$$\hat{V}_R = \{(w_1, w_2) \in \mathbf{C}^2; 0 \leq \operatorname{Re} w_i \leq 1,\ \operatorname{Im}(w_2 + \alpha w_1) > 0,$$
$$\operatorname{Im}(w_2 + \alpha_i w_1) > (1 + \alpha_i)/2 + R^{1/2}\},$$
$$\tilde{V}_R = \{(w_1, w_2) \in \mathbf{C}^2; 0 \leq \operatorname{Re} w_i \leq 1,\ \operatorname{Im}(w_2 + \alpha w_1) > 0,$$
$$\operatorname{Im}(w_2 + \alpha_i w_1) > (1 + \alpha_i) + R^{1/2}\},$$
$$\hat{U}_R = v^{-1}(\hat{V}_R),$$

et pour $i = 0, 1$,

$$\tilde{v}_i = v_i + u_i \circ \pi.$$

Les applications $\tilde{v}_0$, $\tilde{v}_1$ sont holomorphes dans U_R.

Lemme 5. *Supposons $R > C_{10} > C_9$. Dans $\hat{U}_R$, on a, pour $i = 0, 1$, $j = 1, 2$:*

$$|\tilde{v}_i| \leq e^{-\pi h},$$
$$\left|\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial z_j}\right| \leq e^{-\pi h}.$$

Démonstration. Soit $z^0 \in \hat{U}_R$, et Δ le polydisque:

$$\Delta = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; |z_1 - z_1^0| < \frac{1}{10}, \quad |z_2 - z_2^0| < \frac{1}{10}\}.$$

D'après le lemme 1, on a $\Delta \subset U_R$ si R est assez grand. Pour $z \in \Delta$, et R assez grand, on a aussi

$$|h(z) - h(z_0)| \leq C_{11},$$

$$h_i(z) > \frac{1}{4}(1 + \alpha_i) + R^{1/2},$$

d'où $\rho(z) = h_1(z)h_2(z) - R > \frac{1}{2}R^{1/2}$.

Le lemme résulte donc de l'inégalité (5), du lemme 1 et des estimations de Cauchy (compte tenu du lemme 3.b).$\diamondsuit$

8. Posons :

$$\tilde{v}(z_1, z_2) = (z_1, z_2 + \tilde{v}_0(z_1, z_2)),$$
$$\tilde{\Omega}_0 = e^{\tilde{v}_1(z_1, z_2)}(dz_2 + \alpha dz_1),$$
$$\tilde{U}_R = \tilde{v}^{-1}(V_R) \cap \hat{U}_R,$$
$$\tilde{M}_R = \pi(\tilde{U}_R).$$

A partir des estimations du lemme 5, on obtient immédiatement

Lemme 6. *Supposons $R > C_{12} > C_{10}$.*

a) La restriction de $\tilde{v}$ à $\tilde{U}_R$ est un difféomorphisme biholomorphe sur $\tilde{V}_R$ et induit un difféomorphisme biholomorphe (qu'on note encore $\tilde{v}$) de $\tilde{M}_R$ sur $\tilde{V}_R/\mathbf{Z}^2 = \tilde{W}_R$.

b) *La 1-forme $\tilde{\Omega}_0$ induit une 1-forme holomorphe (encore notée $\tilde{\Omega}_0$) sur $\tilde{M}_R$. La 1-forme $\Omega_2 = (\tilde{v}^{-1})^*\tilde{\Omega}_0$ sur $\tilde{W}_R$ s'écrit:*

$$\Omega_2 = A_1(\omega_1, \omega_2)\alpha d\omega_1 + A_2(\omega_1, \omega_2)d\omega_2,$$

où les A_j vérifient:

$$|A_j(\omega_1, \omega_2) - 1| \leq C_{13}e^{-\pi Im(\omega_2 + \alpha\omega_1)}.$$

9. Les fonctions A_j étant $\mathbf{Z}^2$-périodiques, on peut écrire, d'après le lemme 6:

$$A_j(\omega_1, \omega_2) = 1 + e^{2\pi i(\omega_1+\omega_2)}B_j(\omega_1, \omega_2),$$

les fonctions B_j étant $\mathbf{Z}^2$-périodiques et bornées. Posons:

$$\begin{aligned} D_R =& \{(x,y) \in \mathbf{C}^2; |y|\,|x|^{\alpha_i} < e^{-2\pi(1+\alpha_i+R^{1/2})}\}, \\ D_R^* =& \{(x,y) \in D_R; x \neq 0, y \neq 0\}. \end{aligned}$$

et notons

$$E: (\omega_1, \omega_2) \mapsto (x,y) = (e^{2\pi i\omega_1}e^{2\pi i\omega_2}).$$

C'est un difféomorphisme biholomorphe de $\tilde{W}_R$ sur D_R^*. Avec $\tilde{B}_i = B_i \circ E$, la 1-forme $\Omega = (E^{-1})^*\Omega_2$ s'écrit:

$$\Omega = (y^{-1} + x\tilde{B}_2(x,y))dy + (x^{-1} + y\tilde{B}_1(x,y))\alpha dx.$$

Les fonctions $\tilde{B}_i$, holomorphes et bornées dans D_R^*, s'étendent en des fonctions holomorphes dans le domaine de Reinhart D_R. La 1-forme Ω est donc bien du type recherché.

10. Notons $\mathcal{F}_0$ le feuilletage holomorphe défini par $\tilde{\Omega}_0$ dans $\tilde{U}_R$, et $\mathcal{F}$ le feuilletage holomorphe défini par Ω dans D_R. Les feuilles de $\mathcal{F}_0$ sont les surfaces de niveau de la fonction $z_2 + \alpha z_1$, et $\mathcal{F}$ est l'image directe de $\mathcal{F}_0$ par $E \circ \tilde{v}$. Posons

$$\begin{aligned} &\Sigma = \{(x,y) \in D_R; x = 1\}, \\ &\Sigma^* = \Sigma - \{(1,0)\}, \\ &\Sigma_0 = \{(z_1, z_2) \in \tilde{U}_R; z_1 = 0\}, \\ &\Sigma_1 = \{(z_1, z_2) \in \tilde{U}_R; z_1 = 1\} = F_1(\Sigma_0). \end{aligned}$$

L'application $E \circ \tilde{v}/\Sigma_0$ est un revêtement universel de Σ^* par Σ_0, et $z = e^{2\pi i z_2}$ est une coordonnée sur Σ. Les points $(0, z_2)$ et $F_1(0, z_2) = (1, z_2 + \Phi(z_2))$ ont même image par $E \circ \tilde{v}$, et le point $(1, z_2 + \Phi(z_2))$ appartient à la même feuille de $\mathcal{F}_0$ que $(0, z_2 + \alpha + \Phi(z_2))$. Par conséquent, l'holonomie sur Σ de $\mathcal{F}$, correspondant au lacet $t \in [0,1] \mapsto (e^{-2\pi i t}, 0)$ de la feuille $\{y = 0\}$, est égale à F dans la coordonnée z sur Σ.

Ceci achève la démonstration du théorème.

III. Appendice.

A$_0$. Nous reproduisons ci-dessous, dans la situation particulière qui nous intéresse, des estimations L^2 dues à Hörmander ([Ho1], [Ho2]) sur l'opérateur $\bar\partial$ dans les variétés de Stein. Nous ne traitons, pour simplifier les notations, que le cas des fonctions, qui est le seul dont nous avons besoin.

A$_1$. Soit M une variété de Stein, de dimension n, munie d'une métrique hermitienne.

On suppose qu'il existe des formes $\omega_1, \dots, \omega_n$ de classe C^∞ sur M, de type $(1,0)$, formant en tout point de M une base orthonormée de l'espace cotangent holomorphe à M.

On note $dV = (i/2)^n \omega_1 \wedge \bar\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n \wedge \bar\omega_n$ l'élément de volume associé à la métrique hermitienne.

Pour une $(0,1)$-forme $f = \sum f_i \bar\omega_i$ (resp. une $(0,2)$-forme $f = \sum_{i<j} f_{i,j} \bar\omega_i \wedge \bar\omega_j$), on pose :

$$|f|^2 = \sum_i |f_i|^2 \quad (\text{resp. } |f|^2 = \sum_{i<j} |f_{i,j}|^2).$$

Pour une fonction $w \in C^\infty(M)$, on pose :

$$dw = \partial w + \bar\partial w = \sum_i \partial_i w \ \omega_i + \sum_i \bar\partial_i w \ \bar\omega_i,$$

$$\partial\bar\partial w = \sum_{j,k} w_{j,k} \ \omega_j \wedge \bar\omega_k.$$

On introduit des fonctions $a^i_{j,k}$, $c^i_{j,k} \in C^\infty(M)$ par les formules,

$$\partial\omega_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k} a^i_{j,k} \ \omega_j \wedge \omega_k, \quad a^i_{j,k} = -a^i_{k,j},$$
$$\bar\partial\omega_i = \sum_{j,k} c^i_{j,k} \ \bar\omega_j \wedge \omega_k.$$

Finalement, on se donne deux fonctions réelles θ_0, $\theta_1 \in C^0(M)$ vérifiant:

$$\begin{array}{lll} |c^i_{j,k}| \le \theta_0 & , & |a^i_{j,k}| \le \theta_0, \\ |\partial_l c^i_{j,k}| \le \theta_1 & , & |\partial_l a^i_{j,k}| \le \theta_1, \\ |\bar\partial_l c^i_{j,k}| \le \theta_1 & , & |\bar\partial_l a^i_{j,k}| \le \theta_1. \end{array}$$

A$_2$. Le résultat suivant est essentiellement du à Hörmander (cf [Ho1] p.92).

Théorème. *Il existe une constante A, ne dépendant que de la dimension n de M, possédant la propriété suivante : étant données une fonction $\theta \in C^0(M)$, strictement positive sur M, une fonction $\phi \in C^2(M)$ strictement plurisousharmonique sur M, et une $(0,1)$-forme f de classe C^∞ sur M vérifiant*

$$\sum_{j,k} \phi_{j,k}\ z_j \bar{z}_k \geq \left(\theta + A(\theta_0^2 + \theta_1)\right) \left(\sum_j |z_j|^2\right),$$

$$\int_M \theta^{-1} |f|^2 e^{-\phi} dV < +\infty, \quad \bar{\partial} f = 0,$$

il existe $u \in C^\infty(M)$ vérifiant :

$$\bar{\partial} u = f,$$

$$\int_M |u|^2 e^{-\phi} dV \leq \int_M \theta^{-1} |f|^2 e^{-\phi} dV.$$

A$_3$. On fixe jusqu'en A_7 une fonction $\phi \in C^2(M)$. Pour une forme ω de classe C^1, on pose,

$$\delta\omega = e^\phi \partial(e^{-\phi}\omega),$$

$$\bar{\delta}\omega = e^\phi \bar{\partial}(e^{-\phi}\omega).$$

Pour une fonction $w \in C^1(M)$, on pose aussi,

$$\begin{array}{llll} \delta w & = \sum \delta_i w\ \omega_i & , \quad \delta_i w & = e^\phi \partial_i (e^{-\phi} w), \\ \bar{\delta} w & = \sum \bar{\delta}_i w\ \bar{\omega}_i & , \quad \bar{\delta}_i w & = e^\phi \bar{\partial}_i (e^{-\phi} w). \end{array}$$

Lemme 1. *Pour une forme ω de classe C^2, on a :*

$$\left(\bar{\partial}\delta + \delta\bar{\partial}\right)(\omega) = \partial\bar{\partial}\phi \wedge \omega.$$

Démonstration. En effet, on a

$$\delta\omega = \partial\omega - \partial\phi \wedge \omega,$$

$$\bar{\delta}\omega = \bar{\partial}\omega - \bar{\partial}\phi \wedge \omega,$$

$$\delta\bar{\partial}\omega = \partial\bar{\partial}\omega - \partial\phi \wedge \bar{\partial}\omega,$$

$$\bar{\partial}\delta\omega = \bar{\partial}(\partial\omega - \partial\phi \wedge \omega) = \bar{\partial}\partial\omega - \bar{\partial}\partial\phi \wedge \omega + \partial\phi \wedge \bar{\partial}\omega,$$

d'où le lemme.◇

Lemme 2. *Pour $w \in C^2(M)$, on a :*

$$\phi_{j,k}\ w = (\delta_j \bar{\partial}_k - \bar{\partial}_k \delta_j)(w) + \sum_i \overline{c^i_{j,k}} \bar{\partial}_i w - \sum_i c^i_{k,j} \delta_i w.$$

Démonstration. En effet, on a :

$$\bar{\partial}\delta w = \bar{\partial}\left(\sum_i \delta_i w\ \omega_i\right) = \sum_{j,k}\left(\bar{\partial}_k \delta_j w + \sum_i c^i_{j,k}\ \delta_i w\right)\ \bar{\omega}_k \wedge \omega_j,$$

$$\delta\bar{\partial} w = \delta\left(\sum_i \bar{\partial}_i w\ \bar{\omega}_i\right) = \sum_{j,k}\left(\delta_j \bar{\partial}_k w + \sum_i \overline{c^i_{j,k}}\ \bar{\partial}_i w\right)\ \omega_j \wedge \bar{\omega}_k,$$

$$w\ \partial\bar{\partial}\phi = \sum_{j,k} \phi_{j,k} w\ \omega_j \wedge \bar{\omega}_k,$$

et on conclut d'après le lemme 1.◇

A$_4$. Pour $0 \le i \le 2$, on note D_i l'espace des $(0,i)$ formes de classe C^∞ à support compact sur M. On note $T : D_o \to D_1$ et $S : D_1 \to D_2$ l'opérateur $\bar{\partial}$. Pour $f \in D_i$, on pose :

$$||f||^2 = \int_M |f|^2 e^{-\phi} dV.$$

Pour $1 \le j \le n$, posons :

$$b_j = \sum_k (c^k_{j,k} + \overline{a^k_{j,k}}).$$

Lemme 3 (Intégration par parties). *Pour $v, w \in D_0$, on a :*

$$\int_M (\bar{\partial}_j v\ \bar{w} + v\ \overline{\delta_j w} + b_j v \bar{w}) e^{-\phi} dV = 0.$$

Démonstration. Posons

$$\omega^{(j)} = (i/2)^n \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 \wedge \ldots \wedge \omega_{j-1} \wedge \bar{\omega}_{j-1} \wedge \omega_j \wedge \omega_{j+1} \wedge \bar{\omega}_{j+1} \wedge \ldots \wedge \bar{\omega}_n.$$

On vérifie qu'on a :

$$d\omega^{(j)} = \bar{\partial}\omega^{(j)} = -b_j dV.$$

Le lemme résulte donc de la formule de Stokes appliquée à la forme $v\bar{w}e^{-\phi}\omega^{(j)}$.◇

A$_5$. Un calcul immédiat donne le :

Lemme 4. *Soit $f = \sum_i f_i\bar{\omega}_i \in D_1$. On a*

$$Sf = \sum_{j<k}\left(\bar{\partial}_j f_k - \bar{\partial}_k f_j + \sum_i \overline{a^i_{j,k}} f_i\right)\ \bar{\omega}_j \wedge \bar{\omega}_k.$$

Soit $T^* : D_1 \to D_0$ l'opérateur défini, pour $f = \sum_i f_i\bar{\omega}_i \in D_1$, par

$$T^* f = -\sum_i (\delta_i f_i + \bar{b}_i f_i).$$

Lemme 5. *Pour $v \in D_0$, $f \in D_1$, on a,*

$$< Tv, f >_{D_1} = < v, T^* f >_{D_0},$$

les produits scalaires hermitiens étant ceux associés aux normes préhilbertiennes introduites en A_4.

Cela résulte immédiatement du lemme 3 appliqué à $w = f_j$, par sommation sur j.

A$_6$. On a,

Proposition. *Il existe une constante $A > 0$, ne dépendant que de la dimension n de M, telle qu'on ait, pour $f = \sum_i f_i\bar{\omega}_i \in D_1$:*

$$\int_M e^{-\phi}\sum_{j,k}(\phi_{j,k} f_j \bar{f}_k + \frac{1}{2}|\bar{\partial}_j f_k|^2) dV \leq ||Sf||^2 + ||T^* f||^2 + A\int_M (\theta_0^2 + \theta_1)|f|^2 e^{-\phi} dV.$$

Démonstration. On désigne par $A_1, A_2, \ldots$ des constantes ne dépendant que de n. On pose :

$$B_0 = \int_M \sum_{j,k} |\bar{\partial}_j f_k|^2 \; e^{-\phi} dV,$$
$$B_1 = \int_M \theta_1 |f|^2 e^{-\phi} dV,$$
$$B_2 = \int_M \theta_0^2 |f|^2 e^{-\phi} dV.$$

D'après le lemme 4 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$(1) \qquad \int_M \sum_{j,k} |\bar{\partial}_j f_k - \bar{\partial}_k f_j|^2 \; e^{-\phi} dV \leq ||Sf||^2 + A_1 B_2 + A_2 (B_0 B_2)^{1/2}.$$

D'après le lemme 3, on a,

$$(2) \qquad \int_M \bar{b}_j f_j \overline{\delta_i f_i} e^{-\phi} dV = - \int_M (\bar{\partial}_i \bar{b}_j f_j + \bar{b}_j \bar{\partial}_i f_j + b_i \bar{b}_j f_j) \bar{f}_i e^{-\phi} dV,$$

donc on obtient, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(3) \qquad \int_M \sum_{j,k} \delta_j f_j \overline{\delta_k f_k} \; e^{-\phi} dV \leq ||T^* f||^2 + A_3 B_2 + A_4 B_1 + A_5 (B_0 B_2)^{1/2}.$$

D'après le lemme 3 on a :

$$(4) \qquad \int_M \delta_j f_j \overline{\delta_k f_k} e^{-\phi} dV = - \int_M (\bar{\partial}_k \delta_j f_j + b_k \delta_j f_j) \bar{f}_k e^{-\phi} dV.$$

En procédant comme pour (2) et (3), on obtient :

$$(5) \qquad \left| \int_M b_k \bar{f}_k \delta_j f_j e^{-\phi} dV \right| \leq A_3 B_2 + A_4 B_1 + A_5 (B_0 B_2)^{1/2}.$$

D'autre part, d'après le lemme 2, on a :

$$(6) \qquad -\bar{f}_k \bar{\partial}_k \delta_j f_j = \phi_{j,k} f_j \bar{f}_k - \bar{f}_k \delta_j \bar{\partial}_k f_j + \bar{f}_k \sum_i (c^i_{k,j} \delta_i f_j - \overline{c^i_{j,k}} \bar{\partial}_i f_j).$$

D'après le lemme 3, on a :

$$(7) \qquad - \int_M \bar{f}_k \delta_j \bar{\partial}_k f_j e^{-\phi} dV = \int_M (\bar{\partial}_k f_j \overline{\bar{\partial}_j f_k} + \bar{b}_j \bar{f}_k \bar{\partial}_k f_j) e^{-\phi} dV.$$

En rapprochant (4),(5),(6) et (7) on obtient, en procédant comme précédemment
(8)

$$\left|\int_M (\delta_j f_j \overline{\delta_k f_k} - \phi_{j,k} f_j \bar{f}_k - \bar{\partial}_k f_j \overline{\bar{\partial}_j f_k}) e^{-\phi} dV\right| \leq A_6 B_2 + A_7 B_1 + A_8 (B_0 B_2)^{1/2}.$$

Finalement, on observe que

$$\sum_{j<k} \left|\bar{\partial}_j f_k - \bar{\partial}_k f_j\right|^2 = \sum_{j,k} \left(|\bar{\partial}_j f_k|^2 - \bar{\partial}_k f_j \overline{\bar{\partial}_j f_k}\right),$$

donc en joignant (1), (2) et (8), on obtient :

$$B_0 + \int_M \left(\sum_{j,k} \phi_{j,k} f_j \bar{f}_k\right) e^{-\phi} dV \leq ||Sf||^2 + ||T^* f||^2 + A_9 B_2 + A_{10} B_1 + A_{11} (B_0 B_2)$$

Il suffit alors d'observer qu'on a $A_{11}(B_0B_2)^{1/2} \leq \frac{1}{2}(B_0 + A_{11}^2 B_2)$.◇

A₇. Pour $0 \leq i \leq 2$, notons H_i l'espace de Hilbert complété de D_i pour la norme préhilbertienne introduite en A_4; H_i est l'espace des $(0,1)$ formes f à coefficients dans L^2_{loc} telles que:

$$||f||^2 = \int_M |f|^2 e^{-\phi} dV < +\infty.$$

Nous notons encore T, T^*, S les extensions naturelles de ces opérateurs et $D(T)$, $D(T^*)$, $D(S)$ leurs domaines respectifs. D'après le lemme 5, T^* est l'adjoint de T. Le lemme suivant est repris de [Hol], p. 109.

Lemme 6. *Supposons qu'il existe une suite $(\eta_k)_{k\geq 0}$ dans D_0 satisfaisant:*
(i) Pour tout $k \geq 0$, $0 \leq \eta_k \leq 1$, $|\bar{\partial}\eta_k| \leq 1$.
(ii) Pour tout compact $K \subset M$, $\eta_k = 1$ sur K si k est assez grand.
Alors, D_1 est dense dans $D(S) \cap D(T^*)$ pour la norme :

$$|||f|||^2 = ||f||^2 + ||Sf||^2 + ||T^* f||^2.$$

A₈. On se donne maintenant θ, ϕ, f comme dans l'énoncé du théorème , ainsi qu'une fonction $s \in C^\infty(M)$, strictement plurisousharmonique sur M, telle que $M_a = s^{-1}(]-\infty, a[)$ soit relativement compact dans M pour tout réel a. On peut supposer qu'on a

$$\int_M \theta^{-1}|f|^2 e^{-\phi} dV = 1. \tag{10}$$

A₉. Donnons-nous un réel a, fixé jusqu'en A_{12}. Choisissons alors une suite $(\eta_k)_{k\geq 0}$ dans D_0 vérifiant:

(i)' Pour tout $k \geq 0$, $0 \leq \eta_k \leq 1$.

(ii)' Pour tout $k \geq 0$, $\eta_k = 1$ sur $\overline{M_{a+2}}$.

(iii)' Pour tout compact $K \subset M$, $\eta_k = 1$ sur K si k est assez grand.

Soit $h \in C^\infty(M)$ une fonction satisfaisant

(iv)' $h \geq 1$ sur M, $h = 1$ sur $\overline{M_{a+1}}$.

(v)' Pour tout $k \geq 0$, $|\bar{\partial}\eta_k| \leq h$.

Une telle fonction existe d'après (iii)'.

Posons alors $\omega'_i = h\omega_i$; introduisons sur M une nouvelle métrique hermitienne, faisant de $\omega'_1, \ldots, \omega'_n$ une base orthonormée de l'espace cotangent holomorphe à M en tout point de M.

Les hypothèses du lemme 6 sont satisfaites par la suite $(\eta_k)_{k\geq 0}$, relativement à cette nouvelle métrique. Nous notons $dV' = h^{2n}dV$ l'élément de volume relatif à cette nouvelle métrique, et θ'_0, θ'_1 des fonctions continues sur M, coincidant avec θ_0, θ_1 sur $\overline{M_{a+1}}$, qui vérifient les estimations de A_1 relatives aux formes ω'_i et à la nouvelle métrique hermitienne.

A₁₀. Soit $\theta' \in C^0(M)$ une fonction coïncidant avec θ sur $\overline{M_{a+1}}$ et vérifiant

$$0 < \operatorname*{Inf}_M \theta' < \operatorname*{Sup}_M \theta' < +\infty.$$

Posons

$$\phi' = \phi + \chi \circ s,$$

où $\chi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction de classe C^2, nulle sur $]-\infty, a]$, croissante et convexe. Nous choisissons χ croissant suffisamment rapidement pour avoir:

$$\int_M \theta'^{-1}|f|^2 e^{-\phi'} dV' \leq 1 \quad \text{(cf (10))}; \tag{11}$$

$$(12) \qquad \sum_{j,k} \phi'_{j,k} z_j \bar{z}_k \geq \left[\theta' + A(\theta'^2_0 + \theta'_1)\right] \sum_j |z_j|^2,$$

en tout point de M, avec

$$\partial\bar{\partial}\phi' = \sum_{j,k} \phi'_{j,k}\ \omega'_j \wedge \omega'_k.$$

Notons alors H'_i (pour $0 \leq i \leq 2$) l'espace de Hilbert défini en A_7, relatif à la fonction ϕ' et à la nouvelle métrique hermitienne.

$\mathbf{A_{11}}$. D'après la proposition et la propriété (12), nous avons, pour $g \in D_1$

$$(13) \qquad \int_M \theta' |g|^2 e^{-\phi'} dV' \leq ||T^* g||^2_{H'_0} + ||Sg||^2_{H'_2}.$$

D'après le lemme 6, cette inégalité est encore valable pout tout $g \in D(T^*) \cap D(S)$. Comme $\mathrm{Inf}_M\, \theta' > 0$, ceci implique (cf [Hol], p. 78) que l'image F de T est égale au noyau de S, et aussi au sous-espace (fermé) de H'_1 orthogonal au noyau de T^* (L'opérateur T^* est, bien entendu, celui relatif à la nouvelle métrique et à la fonction ϕ').

$\mathbf{A_{12}}$. D'après (12) on a $f \in H'_1$, d'où $f \in F$ puisque $\bar{\partial} f = 0$. Pour $g \in D_1$ écrivons:

$$g = g_1 + g_2, \quad g_1 \in F, \quad g_2 \in F^{\perp}.$$

Nous avons alors

$$< f, g >_{H'_1} = < f, g_1 >_{H'_1},$$
$$T^* g = T^* g_1,$$
$$S g_1 = 0.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (11), nous obtenons:

$$< f, g_1 >^2_{H'_1} \leq \int_M \theta' |g_1|^2 e^{-\phi'} dV',$$

d'où nous déduisons, grâce à (13) :

$$< f, g >^2_{H'_1} \leq ||T^* g||^2_{H'_0}.$$

On conclut qu'il existe $u \in H_0'$ vérifiant

$$\begin{aligned} ||u||_{H_0'} &\leq 1, \\ Tu &= f. \end{aligned}$$

A_{13}. On a donc obtenu, pour tout $a \in \mathbf{R}$, une fonction $u_a \in L^2_{\text{loc}}$ vérifiant $\bar{\partial} u_a = f$ au sens des distributions et

$$\int_{M_a} |u_a|^2 e^{-\phi} dV \leq 1,$$

(car $dV' = dV$ et $\phi' = \phi$ sur M_a).

Un procédé diagonal fournit alors une suite $(a_j)_{j\geq 0}$ tendant vers l'infini et une fonction $u \in L^2_{\text{loc}}$ telle que $(1_{M_a} u_{a_j})_{j\geq 0}$ converge faiblement vers $1_{M_a} u$ dans H_0, pour tout réel a. On a alors

$$\begin{aligned} \bar{\partial} u &= f, \\ \int_M |u|^2 e^{-\phi} dV &\leq 1. \end{aligned}$$

Finalement, la théorie générale (ellipticité) nous garantit que $u \in C^\infty(M)$ si f est C^∞.

BIBLIOGRAPHIE.

[Br] A.D. BRJUNO, *Analytical form of differential equations*, Transactions Moscow Math. Soc. **25** (1971), p. 131-288; **26** (1972), p. 199-239.

[Bri] BRIOT-BOUQUET, *Recherches sur les fonctions définies par des équations différentielles*, J. École polytechnique, vol. XXI, (1856), p. 134-198.

[Du] H. DULAC, *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles*, J. École polytechnique, vol. 2, sec. 9, (1904), p.1-125.

[Ec] J. ECALLE, *Les fonctions résurgentes et leurs applications*, t. I, II, III, Publications mathématiques d'Orsay 81-05, 81-06, 85-05.

[Ho1] L. HÖRMANDER, *An introduction to complex analysis in several variables*, North Holland Mathematical Library, 2eme édition, (1973).

[Ho2] L. HÖRMANDER, *L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator*, Acta Math. **113**, (1965), p. 89-152.

[M-M] J.-F. MATTEI, R. MOUSSU, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sc. E.N.S. 4eme série, t. **13** (1980), p. 469-523. Aussi, *Singularités de feuilletages holomorphes*, Journées Toulouse-Valladolid, 1990-91.

[M-R] J. MARTINET, J.-R. RAMIS, *Problèmes de modules pour les équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Publ. Math. I.H.E.S., **55** (1982), p. 63-164.

[M-R] J. MARTINET, J.-P. RAMIS, *Classification analytique des équations non linéaires résonnantes du premier ordre*, Ann. Sc. E.N.S. 4eme série, t. **16** (1983), p. 671-625.

[PM] R. PÉREZ-MARCO, *Sur la dynamique des germes de difféomorphisme holomorphes de* $(\mathbf{C}, 0)$ *et des difféomorphismes analytiques du cercle*, Thèse Université de Paris-Sud, décembre 1990.

[Po] H. POINCARÉ, *Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles*, Journal Ec. Pol. **45** cahier, (1878), p. 13-26 = Oeuvres t. I, XXXVI, Gauthier-Villars (1951).

[Se] A. SEIDENBERG, *Reduction of singularities of the differential equation* $Ady = Bdx$, Amer.J. Math. (1968), p. 248-269.

[Si1] C.L. SIEGEL, *Iterations of analytic functions*, Ann. Math.**43** (1942), p. 807-812.

[Si2] C.L. SIEGEL, *Über die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung*, Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, (1952), **5**, p. 21-30.

[Vo] S. M. VORONIN, *Classification analytique des germes d'applications conformes* $(\mathbf{C}, \mathbf{0}) \to (\mathbf{C}, \mathbf{0})$ *tangentes à l'identité*, Functional Analysis 15/1 (1981), p.1-17.

[Yo] J.-C. YOCCOZ, *Théorème de Siegel, polynômes quadratiques et nombres de Bruno*, préprint (1987).

R. Perez-Marco
Univ. Paris Sud-Orsay
Dep. de Mathematiques
91045 – Orsay – France

J.C. Yoccoz
Univ. Paris Sud-Orsay
Dep. de Mathematiques
91045 – Orsay – France