Astérisque

L. BARBIERI-VIALE

Cicli di codimensione 2 su varietà unirazionali complesse

Astérisque, tome 226 (1994), p. 13-41

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__226__13_0>

CICLI DI CODIMENSIONE 2 SU VARIETÀ UNIRAZIONALI COMPLESSE

L. BARBIERI-VIALE

Premessa

Sia X una varietà algebrica proiettiva e non-singolare. Un problema generale in teoria dei cicli è quello di determinare la "struttura" dei gruppi abeliani nell'estensione

$$0 \to A^i(X) \to CH^i(X) \to NS^i(X) \to 0$$

ovvero il gruppo di Chow $CH^i(X)$ dei cicli di codimensione i modulo equivalenza razionale, il suo sottogruppo $A^i(X)$ dei cicli che sono algebricamente equivalenti a zero ed il gruppo di Néron-Severi $NS^i(X)$. I metodi che affrontano tale problema hanno oggi in comune il fatto d'interpretare i cicli mediante "classi di coomologia"; ad esempio, per una varietà complessa, P.A. Griffiths ha definito un toro complesso $J^i(X)$ ed un'applicazione $\theta^i : A^i(X) \to J^i(X)$, inoltre si ha sempre la mappa ciclo $c\ell^i : NS^i(X) \to H^{i,i}_{\mathbf{Z}}$ nel gruppo di Hodge delle classi intere di tipo (i,i), ma sfortunatamente queste applicazioni non sono surgettive né iniettive, in generale. Per $i = 2$ ed X *unirazionale* o un *fibrato in coniche su una superficie* S. Bloch [7, Prop.1.7 e Prop.1.9] ha mostrato che θ^2 è un'isogenia: ma, come conseguenza del teorema di Merkur'ev-Suslin in K-teoria, si ha (cf. [18, §1.3]) che θ^2 è iniettiva sulla torsione quindi θ^2 è un isomorfismo nelle ipotesi precedenti e, come si vedrà nel seguito, $c\ell^2$ è iniettiva.
S. Bloch e D. Quillen [26] hanno ottenuto una mappa ciclo $CH^i(X) \xrightarrow{\simeq} H^i(X, \mathcal{K}_i)$ che identifica i gruppi di Chow alla coomologia di Zariski dei

fasci associati ai gruppi di K-teoria algebrica; questo fatto, valido anche per $NS^i(X)$ mediante altre teorie coomologiche (si veda l'Introduzione), permette "magiche" applicazioni (ad esempio che i 2-cicli di n-torsione sono in numero finito per X definita su campi finiti o separabilmente chiusi, si veda [14]).
Se $i = 0, 1, \dim X$ ed X è definita su un campo algebricamente chiuso si ha che (a parte il fatto generale che $A^i(X)$ è un gruppo divisibile): per $i = 0$, $A^0(X) = 0$ e $CH^0(X) = NS^0(X) = X\mathbf{Z}$; per $i = \dim X$ si ha ancora $NS_0(X) \cong \mathbf{Z}$ e $A_0(X)_{tors} \cong CH_0(X)_{tors}$ s'identifica alla torsione della varietà di Albanese $Alb(X)$ per un teorema di Roitman; se inoltre X è unirazionale allora $A_0(X) = Alb(X) = 0$ e $CH_0(X) \cong \mathbf{Z}$.
Per $i = 1$ l'estensione

$$0 \to A^1(X) \to CH^1(X) \to NS^1(X) \to 0$$

è tale che $A^1(X)$ è rappresentabile da una varietà abeliana, $CH^1(X) \cong \mathrm{Pic}\,(X)$ e $NS^1(X)$ è finitamente generato. Si pone dunque il problema di ottenere il gruppo $CH^i(X)$ come estensione di una varietà abeliana mediante un gruppo finitamente generato. Un tale risultato è falso, in generale, per $i \geq 2$ ed i gruppi $A^i(X)$ e $NS^i(X)$ ma vi sono, ovvie e meno ovvie, condizioni su X affinchè ciò sia vero. S. Bloch e J. Murre [10] hanno posto il problema della "rappresentabilità" di $A^i(X)$ studiando alcuni esempi di varietà di Fano; il motivo della "semplicità" di queste costruzioni è il risultato di S. Bloch [7, Prop.1.7] che $A^2(X)$ è "rappresentabile" se X è unirazionale. Altrettanto semplicemente, sotto questa ipotesi, si può vedere che $NS^2(X)$ è finitamente generato.

Introduzione

Sia X una varietà algebrica complessa. Sia X_{an} lo spazio analitico associato e consideriamo le teorie coomologiche $H^*(X) \stackrel{\text{def}}{=} H^*(X_{an}, A)$ che corrispondono ai fasci costanti $A = \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}/n, \mathbf{C}$ ovvero la coomologia singolare a coefficienti in A; ad esempio, per $A = \mathbf{Q}$ si ha $H^*(X_{an}, \mathbf{Q}) = H^*(X_{an}, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}$ mentre per $A = \mathbf{Z}/n$ si ottiene $H^*(X_{an}, \mathbf{Z}/n) \cong$

$H^*(X_{ét}, \mathbf{Z}/n)$ la coomologia étale del fascio delle radici n-esime di 1. Per una tale varietà X fissata, consideriamo inoltre i fasci $\mathcal{H}^*_X(A)$ su X con la topologia di Zariski, associati ai prefasci $U \rightsquigarrow H^*(U_{an}, A)$.
L'obiettivo di questo testo è di raccogliere, sinteticamente, i principali risultati riguardanti i fasci $\mathcal{H}^*$, di esemplificare alcune applicazioni allo studio dei cicli algebrici sulle varietà algebriche complesse proiettive e non-singolari e di porre diverse questioni. Ad esempio, mentre i gruppi di coomologia $H^*(X)$ non sono in generale invarianti birazionali, le sezioni globali dei fasci $\mathcal{H}^*_X(A)$ hanno questa proprietà ed inoltre sono nulle se X è razionale; questo suggerisce il loro impiego nello studio di problemi di razionalità. Una costruzione di J.-L. Colliot-Thélène ed M. Ojanguren [15, §3] permette di trovare varietà unirazionali di dimensione ≥ 6, con invariante di Artin-Mumford nullo i.e. $H^3(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors} = 0$, tali che $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/2)) \neq 0$ e quindi non-razionali, ma sono sconosciuti tali esempi in dimensione inferiore a 6: mostriamo qui (cf. Teorema 5.2) che non esistono in dimensione 3 se la congettura di Hodge a *coefficienti interi* è vera per le classi di tipo $(2,2)$ su X.
Grazie a Bloch ed Ogus [11, Cor.7.4] il gruppo $H^p(X, \mathcal{H}^p_X(A))$ si identifica al gruppo di Néron-Severi $NS^p(X) \otimes A$ degli A-cicli di codimensione p modulo equivalenza algebrica. Sfruttando l'esistenza di un "misterioso" omomorfismo $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z})) \xrightarrow{\partial} NS^2(X)$ che ha come immagine il gruppo di Griffiths $G^2(X)$, è possibile mostrare [3] che $\partial \neq 0$, ovvero $G^2(X) \neq 0$, è una condizione sufficiente per la non unirazionalità di X. Infatti, se X è unirazionale, si dimostra [3] che $H^0(X, \mathcal{H}^i_X(\mathbf{Z})) = 0$ per $i = 1, 2, 3$ e si congettura tale annullamento per ogni $i \neq 0$ (§4, §7).
L'annullamento di $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}))$ ha diverse conseguenze in teoria dei cicli. Ad esempio, implica la finitezza di $CH^2(X)/n$; inoltre, consente d'interpretare il gruppo $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n))$, per una varietà 3-dimensionale, mediante i 2-cicli trascendenti di n-torsione ovvero: ${}_n(H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/NS^2(X))$; la non nullità di $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n))$ equivale

all'esistenza di una classe ζ di Hodge *intera* di tipo $(2,2)$ non algebrica. Discutiamo alcuni esempi di varietà di Fano in cui ciò non può avvenire e mostriamo che $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z})) = 0$ se X è un fibrato in coniche su una superficie; in questo caso si ha pure $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n)) = 0$ per ogni n. Si ha dunque, in questi esempi, che tutti i cicli di Hodge sono algebrici. Infine, per X un fibrato in coniche su una superficie S tale che $A^2(S)$ sia "rappresentabile" o una varietà unirazionale mostriamo che la mappa ciclo

$$c\ell^2_{\mathcal{D}} : CH^2(X) \to H^4_{\mathcal{D}}(X, \mathbf{Z}(2))$$

in coomologia di Deligne-Beilinson è iniettiva; inoltre, ha conucleo finito se ad esempio $\dim X = 3$ (§6).
Ben lontano dal risultare esauriente, questa esposizione si propone di catturare l'interesse per le problematiche che nascono naturali e promettenti attorno a tali metodologie.
Queste note si avvalgono di generose e corroboranti conversazioni con S. Bloch, J.-L. Colliot-Thélène (che ha inoltre letto e commentato la versione preliminare) e V. Srinivas ai quali rivolgo i miei più sentiti ringraziamenti. Sono infine debitore di oculati suggerimenti da parte di P. Francia, C. Pedrini e S. Verra in occasione di un seminario "genovese".

Notazioni

Se G è un gruppo (o fascio) abeliano indichiamo: ${}_nG$ e G/n rispettivamente il nucleo ed il conucleo della moltiplicazione per n in G. Indichiamo $T(G)$ il 'modulo di Tate' di G, ovvero il limite inverso degli ${}_nG$, e G_{tors} il sottogruppo di torsione, ovvero il limite diretto. Indichiamo $\widehat{\mathbf{Z}}$ il completamento profinito di $\mathbf{Z}$. Le varietà sono algebriche, irriducibili e sempre definite su $\mathbf{C}$ se non specificato altrimenti; per una tale varietà X indichiamo X_{an} lo spazio analitico con la topologia usuale e $X_{ét}$ il sito étale di X. Denotiamo $K(X)$ il campo delle funzioni razionali su X.

1 I fasci $\mathcal{H}^*$

Sia X una varietà algebrica complessa, ovvero uno schema integro di tipo finito su $\mathbf{C}$; lo spazio topologico soggiacente ha dunque la topologia di Zariski. Sia $\omega : X_{an} \to X$ l'applicazione continua indotta dal fatto che ogni aperto di Zariski è analitico. Sia A un fascio costante su X_{an} e sia $R^q\omega_*A$ per $q \geq 0$ l'immagine diretta superiore di A su X. La sua spiga in un punto $x \in X$ risulta essere il limite di $H^q(U_{an}, A)$ al variare di U intorno aperto di Zariski di x; ad esempio, per $q = 0$, si ha $\omega_*A = A$ il fascio costante su X. Se $q > \dim X$ allora $R^q\omega_*A = 0$ poichè per U affine si ha che U_{an} è uno spazio di Stein e quindi $H^q(U_{an}, A) = 0$ se $q > \dim U$. Inoltre si ha la sequenza spettrale di Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q\omega_*A) \Rightarrow H^{p+q}(X_{an}, A)$$

che risulta di tipo locale-globale; infatti, per quanto osservato, gli $R^q\omega_*A$ s'identificano ai fasci $\mathcal{H}_X^*(A)$ associati ai prefasci (per la topologia di Zariski) $U \rightsquigarrow H^*(U_{an}, A)$ su X e dunque

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A)) \Rightarrow H^{p+q}(X) \tag{1}$$

dove s'intende $H^*(X) \stackrel{\text{def}}{=} H^*(X_{an}, A)$. Si hanno termini $E_2^{p,q}$ possibilmente non nulli per $0 \leq p, q \leq \dim X$.

Elenchiamo le principali proprietà dei gruppi $H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A))$ quando X è non-singolare (anche riducibile purché equidimensionale) e $A = \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}/n, \mathbf{C}$ nei seguenti:

Teorema 1.1 *Nelle ipotesi e notazioni precedenti si ha:*

1. $H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A)) = 0$ *se* $p > q$.
2. *Ogni morfismo* $f : X \to Y$ *induce una mappa d'immagine inversa*

$$f^* : H^p(Y, \mathcal{H}_Y^q(A)) \to H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A))$$

3. *Se* $f : X \to Y$ *è un morfismo proprio tra varietà non-singolari allora* f *induce un omomorfismo d'immagine diretta*

$$f_* : H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A)) \to H^{p+d}(Y, \mathcal{H}_Y^{q+d}(A))$$

dove $d = \dim Y - \dim X$.

4. *Si ha un prodotto d'intersezione:*

$$\cdot : H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A)) \otimes H^r(X, \mathcal{H}_X^s(A)) \to H^{p+r}(X, \mathcal{H}_X^{q+s}(A))$$

indotto dal prodotto "cup" sui fasci

$$\mathcal{H}_X^q(A) \otimes \mathcal{H}_X^s(A) \to \mathcal{H}_X^{q+s}(A)$$

Questo prodotto munisce il gruppo bigraduato

$$\bigoplus_{p,q} H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A))$$

di una struttura di anello commutativo con identità 1_X *la sezione identità del fascio costante* $A \cong \mathcal{H}_X^0(A)$.

5. *Se* $f : X \to Y$ *è un morfismo proprio tra varietà non-singolari si ha una formula di proiezione*

$$f_*(f^*(y) \cdot x) = y \cdot f_*(x)$$

dove $x \in H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A))$ *e* $y \in H^r(Y, \mathcal{H}_Y^s(A))$. *Se* $\dim X = \dim Y$ *e* $d = [K(X) : K(Y)]$ *è il grado di* f *allora* $f_*(1_X) = d \cdot 1_Y$.

6. *Se* $Z \subset X$ *è un chiuso non-singolare di codimensione pura* c

$$H_Z^p(X, \mathcal{H}_X^q(A)) \cong H^{p-c}(Z, \mathcal{H}_Z^{q-c}(A))$$

si ha dunque la sequenza esatta lunga

$$\to H^{p-1}(X - Z, \mathcal{H}^q) \to H^{p-c}(Z, \mathcal{H}^{q-c}) \to H^p(X, \mathcal{H}^q) \to \cdots$$

7. *Sia* $\pi : \mathbf{A}_X^n \to X$ *la proiezione canonica. Allora* π *induce un isomorfismo*

$$\pi^* : H^p(X, \mathcal{H}^q(A)) \cong H^p(\mathbf{A}_X^n, \mathcal{H}^q(A))$$

8. Sia $\mathbf{P}^n_X$ *lo spazio proiettivo su* X*:*

$$H^p(\mathbf{P}^n_X, \mathcal{H}^q(A)) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} H^{p-i}(X, \mathcal{H}^{q-i}_X(A))$$

Dimostrazione La *1.* (=[11, Cor.6.2]) si ottiene dalla risoluzione aritmetica [11, (4.2.2)] di $\mathcal{H}^q(A)$. La *2.* e la *4.* sono immediate. Le restanti proprietà sono dimostrate in [4] (cf. [3]): *3.* per [4, §5.3], *5.* per [4, §5.4], *6.* =[4, Lemma 3.1] *7.* =[4, Lemma 3.4] e *8.* =[4, Theorem 2]. ●

Dalla teoria di Bloch-Ogus [11, §4] è possibile identificare – nella categoria derivata – il fascio $\mathcal{H}^q(A)$ ad una sua risoluzione fiacca (detta di Gersten o aritmetica) di lunghezza q, ovvero il complesso di Cousin di $\mathcal{H}^q(A)$ (nella terminologia di [23, Def. p.238] il fascio $\mathcal{H}^q(A)$ è di Cohen-Macaulay rispetto alla filtrazione per codimensione); dunque le proprietà elencate sono conseguenza delle analoghe proprietà delle teorie coomologiche H^* come restano indotte sul complesso di Cousin. Ad esempio, sia $H^q(K(X)) \stackrel{\text{def}}{=} (R^q\omega_*A)_\eta$ la spiga nel punto generico: il fascio $\mathcal{H}^q_X(A)$ è un sottofascio del fascio costante $H^q(K(X))$, che è il primo termine del complesso di Cousin. Ma inoltre: sia $f : X \to Y$ un morfismo allora si ha un morfismo di fasci $f^\natural : \mathcal{H}^q_Y(A) \to f_*\mathcal{H}^q_X(A)$; se f è proprio e $d = \dim Y - \dim X$ si ha pure un morfismo nella categoria derivata $f_\natural : Rf_*\mathcal{H}^q_X(A) \to \mathcal{H}^{q+d}_Y(A)[d]$. Se $d = 0$, ovvero f è genericamente finito, allora $f_\natural \circ f^\natural = \deg f$ (tra fasci). Se f è birazionale $H^q(K(X)) \cong H^q(K(Y))$ e quindi:

Teorema 1.2 *Se* $f : X \to Y$ *è un morfismo proprio e birazionale tra varietà non-singolari allora* $f^\natural$ *induce l'isomorfismo*

$$\mathcal{H}^q_Y(A) \cong f_*\mathcal{H}^q_X(A)$$

ovvero: le sezioni globali dei fasci $\mathcal{H}^q(A)$ *sono invarianti birazionali per varietà proiettive non-singolari.*

Dimostrazione Vedere [15, §1], [16, §1.3] per il caso $A = \mathbf{Z}/n$ e [3], [4, §2] in generale. ●

Infine, poichè $H^p(X, \mathcal{H}^q_X(A)) = 0$ per $p > q$, da un calcolo immediato con la sequenza spettrale (1) si ha una "mappa ciclo"

$$H^p(X, \mathcal{H}^p_X(A)) \to H^{2p}(X)$$

Teorema 1.3 (Formula di Bloch) *Se X è proiettiva e non-singolare si ha un isomorfismo*

$$\gamma^p : H^p(X, \mathcal{H}^p_X(A)) \cong NS^p(X) \otimes A$$

dove $NS^p(X)$ è il gruppo di Néron-Severi dei cicli di codimensione p modulo equivalenza algebrica. Il prodotto d'intersezione coincide, via γ^p, con la "classica" intersezione dei cicli così come la mappa ciclo s'identifica alla mappa ciclo $c\ell^p : NS^p(X) \otimes A \to H^{2p}(X)$.

Dimostrazione Vedere: [11, §7] per l'isomorfismo γ e la compatibilità con $c\ell$ e [4, Theorem 3] per la compatibilità tra i prodotti d'intersezione. •

Analoghi risultati valgono per i gruppi di $\mathcal{K}$-coomologia associati alla K-teoria di Quillen [26] o per teorie coomologiche che soddisfano gli assiomi in [4, §6.1-3] ovvero, in parole povere, soddisfino gli assiomi di Bloch-Ogus [11, §1], siano munite di un prodotto "cup" e siano omotopicamente invarianti (senza menzionare le compatibilità di rito).

2 Razionalità e unirazionalità

Consideriamo una varietà X proiettiva e non-singolare. Come semplice e diretta conseguenza dei risultati del §1 si ha che gl'invarianti birazionali (cf. Teorema 1.2) $H^0(X, \mathcal{H}^p_X(A))$ sono nulli per le varietà razionali ($p \neq 0$). Infatti, se X è razionale, $H^0(X, \mathcal{H}^p_X(A)) \cong H^0(\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}, \mathcal{H}^p(A))$ e quest'ultimo, per il Teorema 1.1, risulta essere $H^p(\mathrm{Spec}\, \mathbf{C}_{an}, A)$ ovvero la coomologia dello spazio puntiforme.

Proposizione 2.1 *Sia $f : X \dashrightarrow Y$ un'applicazione razionale dominante tra varietà liscie e proiettive della stessa dimensione. Sia $d = \deg f$ il suo grado. Se $H^0(Y, \mathcal{H}_Y^p(A))$ è senza d-torsione allora*

$$H^0(Y, \mathcal{H}_Y^p(A)) \subset H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A))$$

Se $H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A)) = 0$ allora $H^0(Y, \mathcal{H}_Y^p(A))$ è un gruppo di d-torsione. Se $H^0(Y, \mathcal{H}_Y^p(A))$ è d-divisibile allora è un quoziente di $H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A))$.

Dimostrazione In virtù dell'eliminazione dell'indeterminazione di una applicazione razionale ed il Teorema 1.2 possiamo supporre che $f : X \to Y$ sia un morfismo genericamente finito di grado d. Dalla formula di proiezione (cf. Teorema 1.1) si ha che

$$H^0(Y, \mathcal{H}_Y^p(A)) \xrightarrow{f^*} H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A)) \xrightarrow{f_*} H^0(Y, \mathcal{H}_Y^p(A))$$

è la moltiplicazione per d da cui la tesi (ad esempio, se è iniettiva allora f^* è iniettiva). •

Corollario 2.2 *Se X è unirazionale e $p \neq 0$ $H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A))$ è un gruppo di n-torsione per qualche $n > 0$.*

Il precedente Corollario 2.2 vale anche per X dominata da $\mathbf{P}_Y^N$ se $p > \dim Y$ ma Y non necessariamente razionale.
Come mi ha fatto osservare P. Francia il Corollario 2.2 stabilisce una limitazione al grado delle mappe razionali dominanti $\mathbf{P}^{\dim X} \dashrightarrow X$; ma resta oscuro il suo significato geometrico.

3 Cicli trascendenti, gruppo di Brauer e invariante di Artin-Mumford

Sia X una varietà liscia (eventualmente non completa) su $\mathbf{C}$ e consideriamo il fascio $\mathcal{H}_X^1(A)$. Dalla sequenza spettrale locale-globale (cf.§1) si ha che

$$H^0(X, \mathcal{H}_X^1(A)) = H^1(X_{an}, A) \tag{2}$$

è un'invariante globale ben noto.

$A = \mathbf{Z}$ Allora $H^1(X_{an}, \mathbf{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(X_{an})_{ab}, \mathbf{Z})$ è senza torsione e dunque pure $\mathcal{H}^1_X(\mathbf{Z})$ è senza torsione; l'annullamento di questo gruppo per X proiettiva unirazionale, come conseguenza del §2, è in sintonia con il risultato di Serre [28] che infatti $\pi_1(X_{an}) = 0$.

$A = \mathbf{Z}/n$ Allora, dalla teoria di Kummer per X completa, si ha

$$H^1(X_{an}, \mathbf{Z}/n) \cong {}_n\mathrm{Pic}(X)$$

che si annulla se X è unirazionale per Serre [28, 'torsione di Severi'].

Dunque il passo successivo riguarda le sezioni globali di $\mathcal{H}^2_X(A)$; anche in questo caso ritroviamo fatti ben noti. Infatti $H^i(X, \mathcal{H}^1) = 0$ se $i > 1$ e quindi abbiamo una sequenza esatta corta

$$0 \to H^1(X, \mathcal{H}^1_X(A)) \to H^2(X) \to H^0(X, \mathcal{H}^2_X(A)) \to 0 \tag{3}$$

Se X è proiettiva e non-singolare si ha che $H^1(X, \mathcal{H}^1_X(\mathbf{Z})) \cong NS^1(X)$ per il Teorema 1.3 ed il "Teorema di Lefschetz" garantisce un isomorfismo

$$H^1(X, \mathcal{H}^1_X(\mathbf{Z})) \cong H^{1,1}_{\mathbf{Z}}$$

dove $H^{1,1}_{\mathbf{Z}} = \mathrm{Ker}(H^2(X_{an}, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X))$ sono i cicli di Hodge di tipo $(1,1)$. Analogamente $H^1(X, \mathcal{H}^1_X(\mathbf{Z}/n)) \cong \mathrm{Pic}(X)/n$. Sia

$$H^2_{\mathbf{Z}} \overset{\mathrm{def}}{\cong} \mathrm{Im}(H^2(X_{an}, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X)) \cong H^2(X_{an}, \mathbf{Z})/NS^1(X)$$

il reticolo dei 'cicli trascendenti' e $H^2(X_{\acute{e}t}, \mathbf{G}_m)$ il gruppo di Brauer coomologico [22, II. Remarque 2.7]. Per il seguente risultato si veda [5, Cor.2] e [17, Lemma 1.1].

Proposizione 3.1 *Sia X non-singolare. Si hanno isomorfismi*

$$H^0(X, \mathcal{H}^2(\mathbf{Z}/n)) \cong {}_nH^2(X_{\acute{e}t}, \mathbf{G}_m)$$

per ogni $n \neq 0$. Se inoltre X è proiettiva si ha

$$H^0(X, \mathcal{H}^2(\mathbf{Z})) \cong H^2_{\mathbf{Z}}$$

Dimostrazione Conseguenza della sequenza esatta (3), il Teorema 1.3 e – rispettivamente – la sequenza esponenziale e di Kummer. Ad esempio per $A = \mathbf{Z}$ si ha un isomorfismo di sequenze esatte corte:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & NS^1(X) & \to & H^2(X_{an},\mathbf{Z}) & \to & H^2_{\mathbf{z}} & \to & 0 \\ & & \cong\downarrow & & \| & & & & \\ 0 & \to & H^1(X,\mathcal{H}^1_X(\mathbf{Z})) & \to & H^2(X_{an},\mathbf{Z}) & \to & H^0(X,\mathcal{H}^2_X(\mathbf{Z})) & \to & 0 \end{array}$$

•

Dalla Proposizione 3.1 segue che $H^0(X,\mathcal{H}^2(\mathbf{Z}))$ è senza torsione, poichè $H^2_{\mathbf{z}}$ è un reticolo. In effetti si ha il seguente (vedi [5, Cor.3]).

Lemma 3.2 *Sia X uno schema algebrico su $\mathbf{C}$. Allora il fascio $\mathcal{H}^2(\mathbf{Z})$ è senza torsione.*

Dimostrazione Si consideri la sequenza esatta di fasci $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{n} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n \to 0$ su X_{an}. Si ottiene la sequenza esatta di fasci indotta dalle immagini dirette superiori rispetto a $\omega : X_{an} \to X$

$$\mathcal{H}^1(\mathbf{Z}) \xrightarrow{p} \mathcal{H}^1(\mathbf{Z}/n) \to {}_n\mathcal{H}^2(\mathbf{Z}) \to 0$$

Occorre e basta provare che p è un epimorfismo. Si ha un morfismo canonico $\mathcal{O}^*_X \to \mathcal{H}^1_X(\mathbf{Z})$ indotto dalla sequenza esponenziale ed un isomorfismo $\mathcal{H}^1(\mathbf{Z}/n) \cong \mathcal{O}^*_X/n$ indotto dalla sequenza di Kummer (cf. [5, §1]). Componendo con p si ottiene la proiezione $\mathcal{O}^*_X \to \mathcal{O}^*_X/n$ e quindi la tesi. •

Mostriamo la seguente:

Proposizione 3.3 *Sia X proiettiva e non-singolare. Per ogni intero positivo n si ha una sequenza esatta*

$$0 \to H^2_{\mathbf{z}}/n \to {}_nH^2(X_{ét},\mathbf{G}_{\mathsf{m}}) \to {}_nH^3(X_{an},\mathbf{Z}) \to 0$$

Dimostrazione Sia n un intero positivo; allora per la natura topologica della prima classe di Chern (ad esempio cf. [SGA5 Exposé

VII, 3.8]) si ha che il seguente

$$\begin{array}{ccc} Pic(X) & \xrightarrow{c\ell} & H^2(X_{an},\mathbf{Z}) \\ \cong\downarrow & & \downarrow \\ H^1(X_{\acute{e}t},\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) & \to & H^2(X_{\acute{e}t},\mathbf{Z}/n) \end{array}$$

è commutativo (dopo aver fissato una radice primitiva n-esima di 1). Quindi si ottiene il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & NS^1(X)/n & \to & H^2(X_{an},\mathbf{Z})/n & \to & H^2_{\mathbf{Z}}/n & \to & 0 \\ & & \wr| & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & Pic(X)/n & \to & H^2(X_{\acute{e}t},\mathbf{Z}/n) & \to & {}_nH^2(X_{\acute{e}t},\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) & \to & 0 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & {}_nH^3(X_{an},\mathbf{Z}) & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

dove: la riga superiore è esatta poiché $H^2_{\mathbf{Z}}$ è senza torsione, mentre quella centrale è ottenuta dalla sequenza esatta di Kummer su $X_{\acute{e}t}$; l'isomorfismo verticale di sinistra è indotto per divisibilità, la sequenza esatta verticale dal teorema dei coefficienti universali via l'isomorfismo $H^2(X_{an},\mathbf{Z}/n) \cong H^2(X_{\acute{e}t},\mathbf{Z}/n)$. La sequenza esatta si ricava per caccia al diagramma. •

Corollario 3.4 (Artin-Mumford) *Il gruppo $H^3(X_{an},\mathbf{Z})_{tors}$ è un invariante birazionale di X proiettiva e non-singolare ed è nullo se X è razionale.*

Dimostrazione Dalle Proposizioni 3.3, 3.1 si ha che ${}_nH^3(X_{an},\mathbf{Z})$ è quoziente d'invarianti birazionali, nulli per le varietà razionali. •

La tesi del Corollario 3.4 compare nell'articolo di Artin e Mumford [2, Prop.1] con un'altra dimostrazione e la versione ℓ-adica è essenzialmente [22, III.(8.9) p.146]; Artin e Mumford hanno mostrato l'esistenza di una varietà unirazionale non-razionale poichè $H^3(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors} \neq 0$. Considerando il fascio $\mathcal{O}_c$ delle funzioni continue a valori complessi si può mostrare (utilizzando la sequenza esponeziale) un isomorfismo $H^2(X_{an}, \mathcal{O}_c^*) \cong H^3(X_{an}, \mathbf{Z})$ (cf. [22, I.p.49-50]) e inoltre, per un teorema di Serre (si veda [22, I.Theor. 1.6]), si ha che il gruppo di Brauer "topologico" $Br_c(X_{an})$ s'identifica a $H^2(X_{an}, \mathcal{O}_c^*)_{tors}$ dunque: $H^3(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors} \cong Br_c(X_{an})$.

Corollario 3.5 *Sia X proiettiva e non-singolare e sia r il rango di $H^2_{\mathbf{Z}}$.*

1. Si ha un isomorfismo:

$$\widehat{\mathbf{Z}}^{\oplus r} \cong T(H^2(X_{\acute{e}t}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}))$$

2. Si ha $r = 0$ se e solo se

$$H^2(X_{\acute{e}t}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \cong Br_c(X_{an})$$

Dimostrazione Passando al limite inverso nella sequenza esatta della Proposizione 3.3, poichè $T(H^3(X_{an}, \mathbf{Z})) = 0$ si ha la *1.* Inoltre $H^2_{\mathbf{Z}}/n$ è zero se e solo se $r = 0$ e passando al limite diretto nella sequenza esatta della Proposizione 3.3 si ottiene la *2.* •

Osservazione:

1. Ricordiamo che se X è liscia allora $H^2(X_{\acute{e}t}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ è di torsione; si ha $H^2(X_{\acute{e}t}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) = Br_c(X_{an}) = 0$ se X è razionale come conseguenza dei Teoremi 1.1, 1.2 (cf.§2). Inoltre, per ogni X, il fatto che $H^2(X_{\acute{e}t}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})_{tors}$ s'identifichi al gruppo di Brauer delle classi di algebre di Azumaya su $X_{\acute{e}t}$ è stato recentemente annunciato da O.Gabber.

2. Se X è una *superficie* proiettiva e non-singolare su $\mathbf{C}$ la torsione di $H^3(X_{an}, \mathbf{Z})$ s'identifica alla 'torsione di Severi' i.e. $NS(X)_{tors}$. Inoltre, la sequenza spettrale locale globale (1) ha tutti i differenziali nulli ed i gruppi $H^p(X, \mathcal{H}^q(A))$ sono completamente determinati mediante invarianti noti; ad esempio, $H^2(X, \mathcal{H}^2(A)) \cong$

$NS^2(X) \otimes A \cong H^4(X) \cong A$ e $H^1(X, \mathcal{H}^2(A)) \cong H^3(X)$. Se $A = \mathbf{Z}$ abbiamo che $H^3(X_{an}, \mathbf{Z})/n \cong H^3(X_{ét}, \mathbf{Z}/n)$ e

$$H^3(X_{an}, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \cong CH_0(X)_{tors} \cong Alb(X)_{tors}$$

per il Teorema di Roitman-Bloch.

4 $\mathcal{H}^3$ e gruppo di Griffiths

Per ogni chiuso $Z \subset X$ di codimensione ≥ 1 si consideri la sequenza esatta lunga della coppia (X, Z)

$$\cdots \to H^{p-1}(X - Z) \to H^p_Z(X) \to H^p(X) \xrightarrow{\kappa_p} H^p(X - Z) \to \cdots$$

Denotiamo $H^p(K(X)) \stackrel{\text{def}}{=} (R^p\omega_* A)_\eta = \varinjlim_{Z} H^p(X - Z)$. Passando al limite diretto al variare di Z e sfruttando la formula di proiezione si ha:

Teorema 4.1 (Grothendieck [22, III.(9.7) p.157]) *L'immagine di*

$$\kappa_p : H^p(X) \to H^p(K(X))$$

è un'invariante birazionale di X proiettiva e non-singolare.

Inoltre, come abbiamo già osservato nel §1 si ha: $H^0(X, \mathcal{H}^p_X(A)) \subset H^p(K(X))$ e considerando l'omomorfismo canonico $\rho_p : H^p(X) \to H^0(X, \mathcal{H}^p_X(A))$ si ottiene una fattorizzazione

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{H}^p_X(A)) & \hookrightarrow & H^p(K(X)) \\ {\scriptstyle \rho_p} \nwarrow & & \nearrow {\scriptstyle \kappa_p} \\ & H^p(X) & \end{array}$$

che identifica l'immagine di ρ_p a quella di κ_p.

Corollario 4.2 *Il conucleo di ρ_p è un'invariante birazionale di X proiettiva e non-singolare.*

Dimostrazione Conseguenza dei Teoremi 1.2, 4.1. •

Bisogna ricordare che ρ_p è surgettivo per $p = 0,1,2$ come abbiamo mostrato nel §3, mentre non lo è, in generale, se $p = 3$. Infatti, dalla sequenza spettrale locale-globale si ottiene una sequenza esatta (cf. [11, (8.2)])

$$H^3(X) \xrightarrow{\rho_3} H^0(X,\mathcal{H}^3(A)) \to NS^2(X)\otimes A \xrightarrow{c\ell^2} H^4(X) \qquad (4)$$

avendo identificato $H^2(X,\mathcal{H}^2(A)) \cong NS^2(X)\otimes A$ per il Teorema 1.3. Quindi si ha che il conucleo di ρ_3 per $A = \mathbf{Z}$ è il gruppo di Griffiths $G^2(X)$ dei cicli omologicamente banali di codimensione 2 modulo equivalenza algebrica.

Si ha il seguente risultato di Bloch-Srinivas [12, p.1240] (conseguenza del Teorema di Merkur'ev-Suslin in K-teoria dei campi) :

Lemma 4.3 *Sia X non-singolare. Il fascio $\mathcal{H}^3(\mathbf{Z})$ è senza torsione.*

Dimostrazione Sfruttando la sequenza esatta di fasci (indotta dalle immagini dirette superiori di $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{n} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n \to 0$ rispetto a $\omega : X_{an} \to X$)

$$\mathcal{H}^2(\mathbf{Z}) \xrightarrow{p} \mathcal{H}^2(\mathbf{Z}/n) \to {}_n\mathcal{H}^3(\mathbf{Z}) \to 0$$

ci si riduce a provare che p è un epimorfismo (cf. Lemma 3.2). Sfruttando $\mathcal{O}_X^* \to \mathcal{H}_X^1(\mathbf{Z})$ indotto dalla sequenza esponenziale (cf. [5, §1]) si ha il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}_X^*\otimes\mathcal{O}_X^* & \to & \mathcal{H}_X^1(\mathbf{Z})\otimes\mathcal{H}_X^1(\mathbf{Z}) & \to & \mathcal{H}_X^2(\mathbf{Z}) \\
{\scriptstyle sym}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle p} \\
\mathcal{K}_2 & \xrightarrow{q} & \mathcal{K}_2/n & \xrightarrow{res} & \mathcal{H}_X^2(\mathbf{Z}/n)
\end{array}$$

dove $\mathcal{K}_2$ è il fascio associato al funtore di K-teoria di Quillen-Milnor che localmente è generato da 'simboli' ovvero sym è epi; q è la proiezione canonica e res è l'isomorfismo di Merkur'ev-Suslin. Dunque la composta di sym, q e res è epi e quindi p è epi. •

Dal Lemma ed il Corollario 2.2 segue che le sezioni globali di $\mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z})$ sono nulle se X è unirazionale (proiettiva e non-singolare su $\mathbf{C}$) ovvero, più in generale, se X è dominata da $\mathbf{P}^n_S$ dove S ha dimensione ≤ 2.

Corollario 4.4 *Il gruppo di Griffiths $G^2(X)$ è un invariante birazionale ed è nullo se X è unirazionale.*

Corollario 4.5 *Se X è unirazionale allora $NS^2(X)$ è finitamente generato e quindi $CH^2(X)/n$ è finito.*

Osservazione: Analogamente, i precedenti Corollari 4.4 e 4.5 sono validi per $X/\mathbf{C}$ dominata da $\mathbf{P}^n_S$ dove S ha dimensione ≤ 2, ad esempio i fibrati in coniche su superficie (vedi Esempio 2 nel §5). Il Corollario 4.5 estende facilmente ad X/k dove k è un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero (cf. §7.2). Infine, J.-L.Colliot-Thélène mi ha comunicato che la finitezza di $CH^2(X)/n$ risulta ancora, con un altra dimostrazione, se X è definita sui reali o i p-adici. Per la finitezza di $CH^2(X)/n$ ma dim$X = 3$ si veda inoltre [25, Prop.4.4].

5 Varietà di dimensione 3

In questo paragrafo consideriamo esclusivamente varietà proiettive non-singolari di dimensione 3. Se X ha dimensione 3 allora la sequenza spettrale locale-globale consente di identificare il conucleo della mappa ciclo ovvero si ha una sequenza esatta

$$NS^2(X) \otimes A \xrightarrow{c\ell^2} H^4(X) \to H^1(X, \mathcal{H}^3_X(A)) \to 0$$

In effetti, a questo fine, è sufficiente che $H^0(X, \mathcal{H}^4_X(A)) = 0$. Per dim$X = 3$ si ha inoltre che (cf.[2, §1])

$$H^4(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors} \cong H^3(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors}$$

e che $H^2(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z})) \cong H^5(X_{an}, \mathbf{Z})$ si annulla se X è semplicemente connessa.

Se $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z})) = 0$ allora $NS^2(X) \subseteq H^4(X_{an}, \mathbf{Z})$ ed in particolare

$$NS^2(X)_{tors} \subseteq H^3(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors} \tag{5}$$

Diremo che l'invariante di Artin-Mumford è *algebrico* se nella (5) vale l'uguaglianza (cf. §7).
Se X è unirazionale allora $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z})) = 0$ (cf.§4) e si ha un criterio puramente geometrico di non-razionalità:

Corollario 5.1 *Se X è unirazionale (proiettiva e non-singolare) di dimensione 3 ed esistono: un ciclo C di codimensione 2 non algebricamente equivalente a zero, ed un intero $n \neq 0$, tali che nC è algebricamente equivalente a zero allora X non è razionale.*

Non mi sono noti, a parte l'esempio di Artin-Mumford, esempi nelle ipotesi del precedente Corollario (cf. §7 e Esempio 2 per i fibrati in coniche); è naturale domandarsi se la torsione del gruppo di Brauer nel recente esempio di Dolgachev-Gross [19] sia algebrica.
Si consideri la mappa canonica $\varepsilon : H^4(X_{an}, \mathbf{Z}) \to H^4(X_{an}, \mathbf{C})$. Poniamo per definizione

$$H^{2,2}_{\mathbf{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/\varepsilon(\alpha) \in H^{2,2}\}$$

ovvero: $H^{2,2}_{\mathbf{z}}$ è il gruppo di Hodge delle classi *intere* di tipo $(2,2)$ (nota: $H^{2,2}_{\mathbf{z}}$ contiene anche la torsione).
Nell'ipotesi che $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z})) = 0$ (oppure $G^2(X) = 0$) si ha effettivamente $NS^2(X) \subseteq H^{2,2}_{\mathbf{z}}$.

Teorema 5.2 *Sia X una varietà (proiettiva e non-singolare) di dimensione 3 tale che*

$$H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z})) = 0$$

Allora ($n \neq 0$):

$$H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n)) \cong {}_n(H^{2,2}_{\mathbf{z}}/NS^2(X))$$

è un gruppo finito, nullo per quasi tutti gli $n \in \mathbf{Z}$, ed esiste N tale che

$$H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/N)) \cong H^{2,2}_{\mathbf{z}}/NS^2(X).$$

Dimostrazione Per dim$X = 3$ è valida la congettura di Hodge, ovvero $c\ell^2 \otimes \mathbf{Q} : NS^2(X) \otimes \mathbf{Q} \to H^{2,2}_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q}$ è surgettiva e inoltre $H^{2,2}_{\mathbf{Z}}/NS^2(X)$ è finitamente generato, quindi: $(H^{2,2}_{\mathbf{Z}}/NS^2(X)) \otimes \mathbf{Q} = 0$ implica che $H^{2,2}_{\mathbf{Z}}/NS^2(X)$ è un gruppo *finito*. Dunque, basta mostrare che per ogni $n \neq 0$ il sottogruppo degli elementi di n-torsione di $H^{2,2}_{\mathbf{Z}}/NS^2(X)$ s'identifica a $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n))$ da cui l'esistenza di $N \gg 0$ come sopra segue banalmente.

Lemma 5.3 *Se X ha dimensione* 3 *e* $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z})) = 0$ *allora*

$$H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n)) \cong {}_nH^1(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}))$$

Dimostrazione *del Lemma.* Poichè ${}_n\mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}) = \mathcal{H}^4_X(\mathbf{Z}) = 0$ si ha una sequenza esatta di fasci (cf. Lemma 4.3)

$$0 \to \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}) \xrightarrow{n} \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}) \to \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n) \to 0$$

Siccome $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z})) = 0$ si ha che in cooomologia

$$0 \to H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n)) \to H^1(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z})) \xrightarrow{n} H^1(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}))$$

•

Poiché $H^1(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z})) \cong H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/NS^2(X)$ dal Lemma segue che la n-torsione del quoziente s'identifica a $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n))$; inoltre si ha una sequenza esatta, indotta dalla fattorizzazione della mappa ciclo

$$0 \to H^{2,2}_{\mathbf{Z}}/NS^2(X) \to H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/NS^2(X) \to H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/H^{2,2}_{\mathbf{Z}} \to 0$$

Quindi basta mostrare che $H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/H^{2,2}_{\mathbf{Z}}$ è senza torsione. Si consideri la decomposizione di Hodge $H^4(X_{an}, \mathbf{C}) \cong H^{1,3} \oplus H^{2,2} \oplus H^{3,1}$ e la mappa canonica $\varepsilon : H^4(X_{an}, \mathbf{Z}) \to H^4(X_{an}, \mathbf{C})$. In quanto $H^{2,2}_{\mathbf{Z}} = \{\alpha \in H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/\varepsilon(\alpha) \in H^{2,2}\}$ se $\alpha \in H^4(X_{an}, \mathbf{Z})$ è tale che $n\alpha \in H^{2,2}_{\mathbf{Z}}$ allora $\varepsilon(n\alpha) = n\varepsilon(\alpha) \in H^{2,2}$ e quindi le componenti in $H^{1,3}$ e $H^{3,1}$ di $n\varepsilon(\alpha)$ sono nulle; ma $H^{1,3}$ e $H^{3,1}$ sono $\mathbf{C}$-spazi vettoriali da cui $\varepsilon(\alpha) \in H^{2,2}$ ovvero $\alpha \in H^{2,2}_{\mathbf{Z}}$. •

Corollario 5.4 *Nelle ipotesi del Teorema 5.2, la congettura di Hodge è valida per il gruppo di Hodge $H^{2,2}_{\mathbf{Z}}$ ovvero la classe ciclo è l'isomorfismo*

$$NS^2(X) \cong H^{2,2}_{\mathbf{Z}}$$

se e solo se *si ha che*

$$H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n)) = 0$$

per ogni $n \in \mathbf{Z}$.

Osservazione: Atiyah-Hirzebruch [1] hanno mostrato esempi di classi di torsione in coomologia pari che sono non-algebriche; una questione interessante per tali esempi è stabilire se si ha l'annullamento di $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}))$. Infatti nelle ipotesi del Teorema 5.2, mediante il sottogruppo

$$\frac{H^4(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors}}{NS^2(X)_{tors}} \subset H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n))$$

si avrebbe una sezione globale non-nulla per qualche n. D'altra parte, se l'invariante di Artin-Mumford è nullo i.e. $H^4(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors} = 0$, si potrebbe ancora avere $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n)) \neq 0$ per qualche n.
Se X è unirazionale di dimensione 3 allora si ha che $H^{1,3} = H^{3,1} = 0$ (cf. [2, §1]) e quindi $H^{2,2}_{\mathbf{Z}} = H^4(X_{an}, \mathbf{Z})$. Inoltre, il quoziente

$$H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/c\ell^2(NS^2(X))$$

s'identifica al gruppo finito $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n))$ per qualche $n \neq 0$.

Nei seguenti esempi si discutono casi in cui $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n)) = 0$; sono sconosciuti, nelle ipotesi del Teorema 5.2, controesempi a questo annullamento.

Esempio 1: *(Varietà di Fano)* Sia X una varietà di Fano (ovvero con sistema anticanonico ampio) unirazionale di prima specie, cioè $\operatorname{Pic} X = H\mathbf{Z}$, con invariante di Artin-Mumford nullo. Abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} NS^2(X)\otimes NS^1(X) & \to & NS^3(X)\cong \mathbf{Z} \\ \downarrow & & \cong\downarrow \\ H^4(X_{an},\mathbf{Z})\otimes H^2(X_{an},\mathbf{Z}) & \to & H^6(X_{an},\mathbf{Z})\cong \mathbf{Z} \end{array}$$

indotto dai prodotti d'intersezione e le mappe ciclo. Dalle nostre ipotesi segue che $NS^1(X) \cong H^2(X_{an},\mathbf{Z}) \cong H\mathbf{Z}$, $NS^2(X) = C\mathbf{Z}$ e $H^4(X_{an},\mathbf{Z}) = T\mathbf{Z}$; la mappa ciclo $c\ell^2 : NS^2(X) \to H^4(X_{an},\mathbf{Z})$ è dunque la moltiplicazione per un intero ovvero $c\ell^2(C) = nT$. Diciamo che C è una "cicloretta" se $C\cdot H = \mp 1$. Come mi ha fatto osservare V. Srinivas, dalla commutatività del diagramma, ed il fatto che $T\cdot H = \mp 1$ per dualità di Poincarè, segue che $c\ell^2$ è un isomorfismo se e solo se C è una cicloretta. Questo, per il Teorema 5.2, risulta ancora equivalente all'annullarsi di $H^0(X,\mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n))$.
Se $H = -K_X$ ovvero X ha indice 1 allora esiste una cicloretta, ed infatti una retta, per un teorema di Shokurov ("Congettura di Fano"). Restano le varietà di Fano di indice 2 (indice 4 e 3 sono razionali) oppure con secondo numero di Betti ≥ 2.

Esempio 2: *(Fibrati in coniche)* Nella terminologia di Bloch [7, Def.1.8 p.10] un fibrato in coniche su una superficie S è una varietà X ed una mappa razionale $\pi : X \dashrightarrow S$ tale che la fibra geometrica generica è isomorfa a $\mathbf{P}^1$. Ovvero, esiste un morfismo genericamente finito (di grado 2) $f : S' \to S$ tale che il prodotto fibrato $X\times_S S'$ è birazionale a $\mathbf{P}^1_{S'}$. Si ha dunque una applicazione razionale dominante $\varphi : \mathbf{P}^1_{S'} \dashrightarrow X$. Mediante un numero finito di scoppiamenti possiamo eliminare l'indeterminazione di φ. Siccome si ha $H^0(P^1_{S'},\mathcal{H}^3(A)) \cong H^0(S',\mathcal{H}^3(A)) = 0$ per questioni dimensionali, ne consegue che il gruppo $H^0(X,\mathcal{H}^3_X(A))$ è di 2-torsione. Se $A = \mathbf{Z}$ è quindi nullo. Per il Teorema 5.2 si ha l'esistenza di $N \gg 0$ tale che $H^0(X,\mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/N)) \cong H^{2,2}_{\mathbf{Z}}/NS^2(X)$ ma $2H^0(X,\mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/N)) = 0$ e quindi si può porre $N = 2$. Per quanto precede, il risultato di Colliot-Thélène [13] che dimostra $H^0(X,\mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/2)) = 0$ ci permette di concludere che (cf.

Corollario 5.4)

$$NS^2(X) \cong H^{2,2}_{\mathbf{Z}}$$

in particolare: l'invariante di Artin-Mumford è ***algebrico*** per i fibrati in coniche.

L'iniettività della mappa ciclo veniva dimostrata in una lettera di Bloch a Beauville [8] per riduzione ad un aperto U di S e provando che $\pi : V \to U$ induce l'isomorfismo $\pi_* : NS^2(V) \cong NS^1(U)$; sarebbe interessante stabilire se $NS^2(X)_{tors} \cong NS^1(S)_{tors}$.

In generale, per $\pi : X \dashrightarrow S$ con fibra geometrica generica $\mathbf{P}^n$ si ha $H^0(X, \mathcal{H}^3(\mathbf{Z})) = 0$, analogamente.

Per un fibrato in coniche ordinario nel senso di A. Beauville [6, Def.1.3 p.322] si ha che $H^3(X_{an}, \mathbf{Z})$ non ha torsione [6, Theor.2.1.(i)]).

Esempio 3: Se $\pi : X \to Y$ è un morfismo piatto tale che esiste un aperto denso $U \subset Y$ per cui $\pi : \mathbf{P}^n_U \to U$ è la proiezione canonica allora $H^0(X, \mathcal{H}^i(A)) = 0$ per $i > \dim Y$ ed $A = \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}/n, \mathbf{C}$: infatti si ha

$$H^0(X, \mathcal{H}^i(A)) \subset H^0(\mathbf{P}^n_U, \mathcal{H}^i(A)) \cong H^0(U, \mathcal{H}^i(A)) = 0$$

se $i > \dim U$.

Esempio 4: Sia X una varietà di dimensione 3, possibilmente non-unirazionale, che contiene una superficie S, chiusa e liscia, e supponiamo $H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0$. Allora $H^0(S, \mathcal{H}^2_S(\mathbf{Z})) = 0$ e quindi

$$H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z})) = H^0(X - S, \mathcal{H}^3(\mathbf{Z}))$$

(cf. §1, §3). Se inoltre $U = X - S$ è affine allora la sequenza esatta

$$H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z})) \xrightarrow{p} NS^2(U) \to H^4(U_{an}, \mathbf{Z}) = 0$$

regala la proiezione p. Dunque, se $NS^2(X - S) \neq 0$ allora X *non* è unirazionale (esiste un tale esempio!?). In questa situazione si ha comunque una sequenza esatta

$$NS^1(S) \to NS^2(X) \to NS^2(X - S) \to 0$$

ed un quadrato commutativo

$$\begin{array}{ccc} NS^1(S) & \rightarrow & NS^2(X) \\ c\ell^1 \downarrow & & \downarrow c\ell^2 \\ H^2(S) & \xrightarrow{\sigma} & H^4(X) \end{array}$$

nel quale σ e $c\ell^1$ sono surgettive (poichè $H^4(X-S) = H^2(S,\mathcal{O}_S) = 0$) e quindi $c\ell^2$ è surgettiva ovvero $H^4(X) \cong H^{2,2}$. Se X è unirazionale allora $c\ell^2$ è un isomorfismo e si ha $NS^2(X-S) = H^0(X,\mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n)) = 0$. Questa situazione si verifica per alcune varietà di Fano dove S è infatti una superficie di Del Pezzo.

6 Coomologia di Deligne-Beilinson

Ricordiamo (vedere [20] e [24] per una esposizione dettagliata) che i gruppi $H^q_{\mathcal{D}}(X,\mathbf{Z}(p))$ di coomologia di Deligne-Beilinson sono definiti, per X proiettiva e non-singolare su $\mathbf{C}$, come l'ipercoomologia di X_{an} a coefficienti nel complesso di De Rham troncato

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}(p) \rightarrow \mathcal{O}_{X_{an}} \rightarrow \Omega^1 \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega^{p-1} \rightarrow 0$$

dove $\mathbf{Z}(p) \stackrel{\text{def}}{=} (2i\pi)^p\mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$. Ad esempio, si ha $H^2_{\mathcal{D}}(X,\mathbf{Z}(1)) \cong \mathrm{Pic}\,(X)$. I gruppi $H^{2p}_{\mathcal{D}}(X,\mathbf{Z}(p))$ estendono le jacobiane intermedie $J^p(X)$ mediante i cicli di Hodge $H^{p,p}_{\mathbf{Z}}$ ovvero si ha una sequenza esatta corta

$$0 \rightarrow J^p(X) \rightarrow H^{2p}_{\mathcal{D}}(X,\mathbf{Z}(p)) \rightarrow H^{p,p}_{\mathbf{Z}} \rightarrow 0$$

La definizione di $H^*_{\mathcal{D}}(X,\mathbf{Z}(\cdot))$ si estende alle varietà quasi-proiettive considerando una "buona" compattificazione ed il complesso di De Rham logaritmico troncato; si ottiene (cf. [21], [24, Theor.1.19]) una teoria di dualità di Poincaré con supporti nel senso di Bloch-Ogus [11, §1]. Di conseguenza si hanno risultati analoghi a quelli del §1 per i fasci $\mathcal{H}^*_{\mathcal{D}}(\cdot)$ ed in particolare (cf. [21], [3], [4, A.3]):

1. Si ha $H^p(X,\mathcal{H}^p_{\mathcal{D}}(p)) \cong CH^p(X)$.

2. Si ha una mappa ciclo $c\ell^p_{\mathcal{D}} : CH^p(X) \rightarrow H^{2p}_{\mathcal{D}}(X,\mathbf{Z}(p))$.

3. I gruppi delle sezioni globali $H^0(X, \mathcal{H}^q_{\mathcal{D}}(p))$ sono invarianti birazionali che, se X è razionale, s'identificano a
$$H^q_{\mathcal{D}}(\mathrm{Spec}\mathbf{C}, \mathbf{Z}(p)) = \mathbf{H}^q(\mathrm{Spec}\mathbf{C}, \mathbf{Z}(p) \hookrightarrow \mathbf{C})$$

E inoltre:

Teorema 6.1 *Sia X proiettiva e non-singolare su $\mathbf{C}$. Si ha un morfismo di estensioni*
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A^p(X) & \to & CH^p(X) & \to & NS^p(X) & \to & 0 \\ & & \theta^p \downarrow & & c\ell^p_{\mathcal{D}} \downarrow & & \downarrow c\ell^p & & \\ 0 & \to & J^p(X) & \to & H^{2p}_{\mathcal{D}}(X, \mathbf{Z}(p)) & \to & H^{p,p}_{\mathbf{Z}} & \to & 0 \end{array}$$
dove θ^p è la mappa di Abel-Jacobi e $c\ell^p$ è l'usuale classe ciclo.

Dimostrazione Ad esempio: [24, §1.21, Lemma 1.22] (cf. [20, §7] e [21]). •

Corollario 6.2 *Sia X proiettiva e non-singolare su $\mathbf{C}$.*

1. *Il gruppo dei 2-cicli omologicamente nulli che hanno classe di Abel-Jacobi nulla modulo equivalenza razionale (ovvero il nucleo di $c\ell^2_{\mathcal{D}} : CH^2(X) \to H^4_{\mathcal{D}}(X, \mathbf{Z}(2))$) è un invariante birazionale.*
2. *Il sottogruppo dei 2-cicli algebricamente nulli che hanno classe di Abel-Jacobi nulla modulo equivalenza razionale (ovvero il nucleo di $\theta^2 : A^2(X) \to J^2(X)$) è un invariante birazionale.*

Questi invarianti birazionali sono nulli per le varietà unirazionali. Infatti, sia X unirazionale oppure un fibrato in coniche su una superficie S nel senso che: $\pi : X \dashrightarrow S$ con fibra geometrica generica $\mathbf{P}^1$ ed inoltre assumiamo che $A^2(S)$ sia "rappresentabile" (cf. [7, Def.1.1]) ovvero $\theta^2 : A^2(S) \cong J^2(S)$ (si confronti l'Esempio 2); sotto queste ipotesi S. Bloch [7, Prop.1.9] ha mostrato che la mappa $\theta^2 : A^2(X) \to J^2(X)$ è surgettiva con nucleo finito. In effetti, si ha ([18, §1.3]) che θ^2 é iniettiva sulla torsione quindi θ^2 è un isomorfismo nelle ipotesi precedenti. Utilizzando i risultati dei §4, §5 si ha:

Corollario 6.3 *Nelle ipotesi precedenti la mappa ciclo*

$$c\ell^2_{\mathcal{D}} : CH^2(X) \hookrightarrow H^4_{\mathcal{D}}(X, \mathbf{Z}(2))$$

è iniettiva. Inoltre la congettura di Hodge per le classi razionali di tipo $(2,2)$ *è vera se e solo se* $c\ell^2_{\mathcal{D}}$ *ha conucleo finito; in questo caso si ha un isomorfismo*

$$c\ell^2_{\mathcal{D}} \otimes \mathbf{Q} : CH^2(X) \otimes \mathbf{Q} \cong H^4_{\mathcal{D}}(X, \mathbf{Z}(2)) \otimes \mathbf{Q}$$

Dimostrazione Per il Teorema 6.1 ed $H^0(X, \mathcal{H}^3(\mathbf{Z})) = 0$ si ha che $c\ell^2$ è iniettiva e quindi $\ker c\ell^2_{\mathcal{D}} = \ker\theta^2 = 0$. Inoltre, il conucleo di $c\ell^2_{\mathcal{D}}$ s'identifica a $H^{2,2}_{\mathbf{Z}}/NS^2(X)$ che è finitamente generato. Se $(H^{2,2}_{\mathbf{Z}}/NS^2(X)) \otimes \mathbf{Q} = 0$ allora la congettura di Hodge è vera e si ha che $H^{2,2}_{\mathbf{Z}}/NS^2(X)$ è un gruppo finito (e viceversa). •

Osservazione: Ogni varietà 3-dimensionale, come sopra, soddisfa le ipotesi del Corollario 6.3. Se X è razionale di dimensione 3 allora la mappa ciclo $c\ell^2_{\mathcal{D}}$ è già un isomorfismo su $\mathbf{Z}$. Infatti, la nullità del nucleo ed il conucleo di $c\ell^2_{\mathcal{D}}$ è birazionale in X.

Conformemente a Soulé-Beilinson (cf. [24, 3.5 p.343]), i gruppi di coomologia motivica $H^j_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(i)) \stackrel{\text{def}}{=} K^{(i)}_{2i-j}(X)$ sono definiti come i $\mathbf{Q}$-autospazi $K^{(i)}_*$ associati alle operazioni di Adams sui gruppi $K_*(X) \otimes \mathbf{Q}$ di alta K-teoria di Quillen [26]. Una definizione equivalente di coomologia motivica, dovuta a Soulé, utilizza l'isomorfismo $K^{(i)}_j(X) \cong gr^i_\gamma K_j(X) \otimes \mathbf{Q}$ (il graduato associato alla γ-filtrazione). In particolare ($j = 2i$) si ha $H^{2i}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(i)) \cong CH^i(X) \otimes \mathbf{Q}$ da un calcolo diretto con la sequenza spettrale di Brown-Gersten, infatti: $gr^i_\gamma K_0(X) \otimes \mathbf{Q} \cong gr^i_{top} K_0(X) \otimes \mathbf{Q} \cong CH^i(X) \otimes \mathbf{Q}$ dove 'top' indica la filtrazione per codimensione del supporto. Inoltre Beilinson ha definito dei "regolatori" $r_{\mathcal{D}} : H^j_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(i)) \to H^j_{\mathcal{D}}(X, \mathbf{Q}(i))$ che s'identificano alla mappa ciclo $c\ell_{\mathcal{D}} \otimes \mathbf{Q}$ per $j = 2i$ (vedere [24, Lemma 3.8.b)]). Nelle ipotesi del Corollario 6.3 si ha che, almeno nel caso $X/\mathbf{C}$, il regolatore

$$r_{\mathcal{D}} : H^4_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(2)) \xrightarrow{\cong} H^4_{\mathcal{D}}(X, \mathbf{Q}(2))$$

è un isomorfismo.

7 Alcune questioni

Si hanno in generale, per una varietà algebrica definita su un campo k arbitrario, le seguenti questioni.

7.1 $k = \mathbf{C}$

Sempre supponendo X proiettiva e non-singolare su $\mathbf{C}$. Oltre al problema fondamentale di mostrare l'annullamento o meno dell'invariante $H^0(X, \mathcal{H}^3(\mathbf{Z}/n))$ per le varietà 3-dimensionali unirazionali, e quindi di discutere nuovi esempi (fibrati in Del Pezzo, in curve ellittiche, etc.), sarebbe interessante stabilire se l'invariante di Artin-Mumford è sempre algebrico. Per le varietà di dimensione ≥ 4 si attende la seguente:

Congettura 1 *Se X è unirazionale allora le sezioni globali di $\mathcal{H}^i_X(\mathbf{Z})$ sono nulle anche per $i \geq 4$.*

Infatti è ragionevole che i fasci $\mathcal{H}^i_X(\mathbf{Z})$ siano sempre senza torsione (cf. [9, p.50-51]).
Ad esempio, se X ha dimensione ≥ 4 ed il fascio $\mathcal{H}^4_X(\mathbf{Z})$ è senza torsione allora, per X unirazionale, si ha analogamente al §5, che: $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n))$ è la n-torsione del quoziente $H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/NS^2(X)$.
Infine, è naturale domandarsi:

Problema 1 *Quali gruppi di Griffiths $G^r(X)$ sono invarianti birazionali? Per quali r si ha $G^r(X) = 0$ se X è unirazionale?*

Gli esempi conosciuti sembrano indicare che $G^2(X)$ è non finitamente generato o nullo. S. Bloch congettura che sia un gruppo divisibile mentre vi sono esempi di C. Schoen [27] di ipersuperfici V in $\mathbf{P}^{2r}$ tali che ${}_2G^r(V) \neq 0$.

7.2 $k = \bar{k}$

Sia X una varietà algebrica completa e non-singolare su un campo k algebricamente chiuso arbitrario. Il gruppo di Griffiths $G^2(X_k)$ è definito (cf. [27], [12]) come quoziente dei cicli con classe ℓ-adica nulla (per ogni $\ell \neq \mathrm{char}k$) modulo equivalenza algebrica.

Congettura 2 *$G^2(X_k)$ è un invariante birazionale che si annulla per X unirazionale su k (a meno forse di p-torsione per $p = \mathrm{char}k > 0$).*

Per quanto riguarda la finita generazione di $NS^2(X)$ poco è conosciuto in generale; se X è unirazionale allora $NS^2(X)$ è finitamente generato, almeno in caratteristica zero: infatti, la n-torsione di $NS^2(X)$ è un gruppo finito (infatti lo è la n-torsione di $CH^2(X)$ per Merkur'ev-Suslin) e se $f : Y \to X$ è genericamente finito ed Y è razionale allora la moltiplicazione per il grado di f in $NS^2(X)$ si fattorizza per $NS^2(Y)$ che è finitamente generato.
In quanto $NS^2(X)/n \cong CH^2(X)/n$ dalla finita generazione del gruppo $NS^2(X)$ si ottiene la finitezza di $CH^2(X)/n$.
Per X unirazionale di dimensione 3 (se $G^2(X_k) = 0$) l'esistenza di cicli di torsione in $NS^2(X)$ implica la non-razionalità di X.

7.3 k qualunque

Al fine di controllare il gruppo $CH^2(X)/n$ ricordiamo il seguente problema posto da Colliot-Thélène [14, §3.3.2 p. 14], [16, Question 1) §3.1 p.92].

Problema 2 *Se X (proiettiva non-singolare) ha un k-punto razionale allora la mappa ciclo*

$$CH^2(X)/n \to H^4(X_{\acute{e}t}, \mu_n^{\otimes 2})$$

è iniettiva?

Il problema è aperto anche su $\mathbf{C}$. Se X è definita su $\mathbf{C}$, nelle ipotesi del Teorema 5.2, si ha una parziale risposta al Problema 2. Infatti, se ad esempio $H^4(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors} = 0$, si ha una sequenza esatta

$$0 \to H^{2,2}_{\mathbf{Z}}/NS^2(X) \to CH^2(X)/n \to H^4(X_{\acute{e}t}, \mu_n^{\otimes 2})$$

per qualche $n \gg 0$.

Per quanto concerne $NS^2(X)$ sembra auspicabile trovare condizioni su k affinchè la seguente questione abbia risposta affermativa.

Problema 3 *Se X è geometricamente unirazionale (ovvero lo diviene mediante una estesione algebrica di k) allora $NS^2(X)$ è finitamente generato?*

Ancora, dalla finitezza di $A^2(X)/n$ segue la finitezza di $CH^2(X)/n$.

Bibliografia

[1] M.F.Atiyah, F.Hirzebruch: Analytic cycles on complex manifolds, *Topology* **1** (1962), 25-45.

[2] M.Artin, D.Mumford: Some elementary examples of unirational varieties which are not rational, *Proc. London Math. Soc.* **25** (1972), 75-95.

[3] L.Barbieri-Viale: Des invariants birationnels associés aux théories cohomologiques, *C.R.Acad.Sci.Paris* **315** Série I (1992), 1259-1262.

[4] L.Barbieri-Viale: $\mathcal{H}$-cohomologies versus algebraic cycles, typescript, 1994.

[5] L.Barbieri-Viale, V.Srinivas: On the Néron-Severi group of a singular variety, *J. reine angew. Math.* **435** (1993) 65–82.

[6] A.Beauville: Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* **10** (1977), 309-391.

[7] S.BLOCH: An example in the theory of algebraic cycles, in *Springer* LNM **551** (1976).

[8] S.BLOCH: Lettera a A. Beauville, 1977.

[9] S.BLOCH: Lectures on algebraic cycles, *Duke University*, 1980.

[10] S.BLOCH, J.MURRE: On the Chow group of certain types of Fano threefolds, *Compositio Math.* **39** (1979), 47-105.

[11] S.BLOCH, A.OGUS: Gersten's conjecture and the homology of schemes, *Ann.Sci.Ecole Norm.Sup.* **7** (1974), 181-202.

[12] S.BLOCH, V.SRINIVAS: Remarks on correspondences and algebraic cycles, *Amer. J. Math.* **105** (1983), 1235-1253.

[13] J.-L.COLLIOT-THÉLÈNE: Comunicazione ad Oberwolfach, Luglio 1989 (in appendice a R.PARIMALA: Witt groups vis-à-vis Chow groups, preprint.)

[14] J.-L.COLLIOT-THÉLÈNE: Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique, in Arithmetic Algebraic Geometry (Corso CIME, 1991) *Springer* LNM **1553** 1-49.

[15] J.-L.COLLIOT-THÉLÈNE , M. OJANGUREN: Variétés unirationnelles non rationnelles: au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford, *Invent. Math.* **97** (1989), 141-158.

[16] J.-L.COLLIOT-THÉLÈNE, R.PARIMALA: Real components of algebraic varieties and étale cohomology, *Invent. Math.* **101** (1990), 81-99.

[17] J.-L.COLLIOT-THÉLÈNE, W.RASKIND: $\mathcal{K}_2$-cohomology and the second Chow group, *Math. Ann.* **270** (1985), 165-199.

[18] J.-L.COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J.SANSUC, C.SOULÉ: Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, *Duke Math. J.* **50** (1983), 763-801.

[19] I.DOLGACHEV, M.GROSS: Elliptic three-folds I: Ogg-Shafarevich theory, preprint, 1992.

[20] H.ESNAULT, E.VIEHWEG: Deligne-Beilinson cohomology, in *Beilinson's conjectures on special values of L-functions*, Academic Press Perspectives in Math. **4** (1987), 43-92.

[21] H.GILLET: Deligne homology and the Abel-Jacobi maps, *Bull. AMS* **10** (1984), 285-288.

[22] A.GROTHENDIECK: Le groupe de Brauer: I, II, III, in *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, North Holland, Amsterdam, 1968.

[23] R.HARTSHORNE: *Residues and Duality*, Springer LNM **20** (1966).

[24] U.JANNSEN: Deligne homology, Hodge-$\mathcal{D}$-conjecture and motives, in *Beilinson's conjectures on special values of L-functions*, Academic Press Perspectives in Math. **4** (1987), 43-92.

[25] R.PARIMALA: Witt groups of affine threefolds, *Duke Math.J.* **57** (1988), 947-954.

[26] D.QUILLEN: Higher algebraic K-theory: I, in *Springer* LNM **341** (1973).

[27] C.SCHOEN: Some examples of torsion in the Griffiths group, *Math. Annalen* **293** (1992), 651-679.

[28] J.-P.SERRE: On the fundamental group of a unirational variety, *J. London Math. Soc.* **34** (1959), 481-484.

LUCA BARBIERI-VIALE
UNIVERSITÀ DI GENOVA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
VIA L.B.ALBERTI, 4
GENOVA 16132 - ITALIA