Astérisque

ADRIEN DOUADY

Prolongement de mouvements holomorphes

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki, exp. n° 775, p. 7-20
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__7_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 1993
46ème année, 1993-94, n° 775

PROLONGEMENT DE MOUVEMENTS HOLOMORPHES
[d'après Słodkowski et autres]

par **Adrien DOUADY**

INTRODUCTION

Si Λ, X et Y sont trois ensembles, une application $\phi : \Lambda \times X \to \Lambda \times Y$ *au-dessus de* Λ est une application telle que $p_Y \circ \phi = p_X$, où $p_X : \Lambda \times X \to \Lambda$ et $p_Y : \Lambda \times Y \to \Lambda$ sont les projections. Nous l'écrivons $(\lambda, x) \mapsto (\lambda, \phi_\lambda(x)) = (\lambda, \phi^x(\lambda))$. Soient Λ une variété $\mathbf{C}$-analytique connexe munie d'un point de base λ_0 et X une partie de $\overline{\mathbf{C}}$. Un *mouvement holomorphe* de X paramétré par Λ est une application $\phi : \Lambda \times X \to \Lambda \times \overline{\mathbf{C}}$ telle que :

(i) $\phi_{\lambda_0} : X \to \mathbf{C}$ est l'injection canonique ;

(ii) ϕ est injective (*i.e.* $\forall \lambda$, ϕ_λ est injective) ;

(iii) $(\forall x \in X)$, $\phi^x : \Lambda \to \overline{\mathbf{C}}$ est $\mathbf{C}$-analytique.

On ne suppose pas X fermé. On ne suppose pas non plus ϕ continue, mais nous allons voir que c'est automatique ("λ-lemma" de Mañe-Sad-Sullivan, § 1).

On dit que ϕ est normalisé si 0, 1, ∞ appartiennent à X et sont des points fixes de ϕ_λ pour tout λ. Soit ϕ un mouvement holomorphe quelconque de X (avec $\# X \geq 3$). Choisissons 3 points distincts a, b, c de X et pour tout λ, notons g_λ la transformation de Mœbius qui envoie $(\phi_\lambda(a), \phi_\lambda(b), \phi_\lambda(c))$ en $(0, 1, \infty)$. Alors, $(g_\lambda \circ \phi_\lambda \circ g_{\lambda_0}^{-1})_{\lambda \in \Lambda}$ est un mouvement holomorphe de $\phi_{\lambda_0}(X)$ qu'on appelle le *normalisé* de ϕ (à partir de (a, b, c)). Pour la plupart des questions concernant les mouvements holomorphes, on peut se restreindre à ceux qui sont normalisés.

Question : *Peut-on toujours prolonger un mouvement holomorphe ϕ de X en un mouvement holomorphe de $\overline{\mathbf{C}}$?* :

La réponse est *non* en général, mais *oui* si Λ est le disque unité $\mathbf{D}$: c'est le

Théorème de Słodkowski.

Nous donnons ici (§ 3 à 7) une démonstration de ce théorème qui suit l'idée de la démonstration originale de Słodkowski, mais la présentation est différente.

Nous indiquons ensuite deux contre-exemples, un avec $\# X = 4$, $\Lambda = M_{0,4} = \mathbf{C} - \{0, 1\}$ (§ 9), un autre dû à Hubbard avec $\# X = 5$, $\Lambda = T_{0,5}$ (espace de Teichmüller), pour montrer qu'on ne sauve pas la situation en supposant Λ simplement connexe (§ 10). Ce résultat n'est pas explicitement dans la thèse de Hubbard. Il s'agit d'une variante établie par Earle et Kra lors d'une réécriture.

Mentionnons un résultat de Bers-Royden pour Λ de dimension quelconque :

THÉORÈME.— *Si Λ est la boule-unité ouverte d'un espace normé E sur $\mathbf{C}$, pour tout mouvement holomorphe ϕ de $X \subset \overline{\mathbf{C}}$ paramétré par Λ, on peut trouver un mouvement de $\overline{\mathbf{C}}$ paramétré par la boule de rayon $\frac{1}{3}$ qui coïncide avec ϕ là où ils sont tous deux définis.*

Sullivan-Thurston ont obtenu indépendamment un résultat un peu moins précis. Bers et Royden ont écrit la démonstration dans le cas $\Lambda = \mathbf{D}$ (aujourd'hui périmé par le résultat de Słodkowski), mais leur démonstration s'étend au cas d'un espace vectoriel normé E quelconque, de dimension finie ou banachique.

Nous tenons à remercier Marguerite Flexor et Bodil Branner pour leur participation à la rédaction de cet exposé.

1. PROLONGEMENT A LA FERMETURE

THÉORÈME 1 ("Λ-lemma" de Mañe-Sad-Sullivan).— *Soit $\phi : \Lambda \times X \to \Lambda \times \overline{\mathbf{C}}$ un mouvement holomorphe d'une partie X de $\overline{\mathbf{C}}$. Alors, ϕ est continue et se prolonge en une application continue $\widehat{\phi} : \Lambda \times \overline{X} \to \Lambda \times \overline{\mathbf{C}}$ qui est un mouvement holomorphe de la fermeture $\overline{X}$ de X.*

Lemme.— Soit x un point de $\overline{X}$ et (x_n) une suite de points de X tendant vers x. Les fonctions $\phi^{x_n} : \Lambda \to \overline{\mathbf{C}}$ tendent, uniformément sur tout compact de Λ, vers une fonction $\widehat{\phi}^x : \Lambda \to \overline{\mathbf{C}}$, indépendante de la suite (x_n) choisie.

Démonstration.— On peut supposer ϕ normalisé et $x \neq \infty$. Les fonctions ϕ^{x_n} évitent $\{0, 1, \infty\}$ ou sont constantes. Elles forment donc une famille normale, et

on peut en extraire une suite ayant une limite f. Si (x_n) et (y_n) sont deux suites tendant vers x telles que ϕ^{x_n} et ϕ^{y_n} aient des limites f et g, la fonction $\phi^{y_n} - \phi^{x_n}$ tend vers $g - f$, mais elle est à valeurs dans $\mathbf{C}^*$ ou identiquement nulle, et il en est de même de $g - f$. Comme $g(\lambda_0) = f(\lambda_0) = x$, on a $g = f$. Le lemme en résulte.

cqfd.

Démonstration du théorème.— Pour $x \in X$, on a $\widehat{\phi}^x = \phi^x$. On peut en effet prendre $x_n = x$ pour tout n. Il résulte du lemme que ϕ est continue. L'application $\widehat{\phi} : (\lambda, x) \mapsto (\lambda, \widehat{\phi}(\lambda))$ est injective. En effet, pour $x \neq y$, si (x_n) et (y_n) tendent vers x et y respectivement, $\phi^{y_n} - \phi^{x_n}$ ne s'annule pas, donc $\widehat{\phi}^y - \widehat{\phi}^x$ ne s'annule pas ou est identiquement 0. Comme elle ne s'annule pas en λ_0, elle ne s'annule nulle part. Par suite, $\widehat{\phi}$ est un mouvement holomorphe de $\overline{X}$, et il résulte du lemme appliqué à $\widehat{\phi}$ que $\widehat{\phi}$ est continue.

cqfd.

Mañe, Sad et Sullivan ont également établi que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application $\widehat{\phi}_\lambda$ se prolonge en une application quasi-conforme $\overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$. Nous obtiendrons ce résultat au § 8 comme conséquence du théorème de Słodkowski.

2. MOUVEMENT HOLOMORPHE DES ENSEMBLES DE JULIA

Nous donnons à titre d'application le résultat pour lequel le théorème 1 a été démontré par Mañe-Sad-Sullivan. Si $f : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ est une fraction rationnelle, l'*ensemble de Julia* $J(f)$ est la fermeture de l'ensemble des points périodiques répulsifs.

COROLLAIRE DU THÉORÈME 1.— *Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille $\mathbf{C}$-analytique d'applications rationnelles paramétrée par une variété $\mathbf{C}$-analytique Λ. Soit S la fermeture de l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$ tels que f_λ admette un cycle indifférent et soit U une composante connexe de $\Lambda - S$. Alors pour λ_0 et λ_1 dans U, les ensembles de Julia $J(f_{\lambda_0})$ et $J(f_{\lambda_1})$ sont homéomorphes.*

Démonstration.— Soit Λ' un ouvert simplement connexe de u contenant λ_0 et λ_1. Pour tout k, notons $\mathcal{X}_k$ l'ensemble des $(\lambda, z) \in \Lambda' \times \overline{\mathbf{C}}$ tels que $f_\lambda^k(z) = z$. Un tel point z est toujours racine simple de l'équation $f^k(z) - z = 0$, car sinon

on aurait $(f^k)'(z) = 1$ et f admettrait un cycle indifférent. Par suite, $\mathcal{X}_k$ est un revêtement de Λ'. Comme Λ' est simplement connexe, ce revêtement est trivial et définit un mouvement holomorphe de $X_k = \mathcal{X}_k(\lambda_0)$. L'ensemble $\mathcal{X}_k^*$ des $(\lambda, z) \in \mathcal{X}_k$ avec z répulsif est un sous-revêtement (puisque les points périodiques indifférents sont interdits), d'où un mouvement holomorphe de $X_k^* = \mathcal{X}_k^*(\lambda_0)$. En prenant la réunion sur tous les k, on obtient un mouvement holomorphe $\phi : \Lambda' \times X^* \to \Lambda' \times \overline{\mathbf{C}}$ de l'ensemble des points périodiques répulsifs tel que $\phi_\lambda(X^*)$ soit l'ensemble des points périodiques répulsifs de f_λ. D'après le théorème 1, ϕ se prolonge en un mouvement holomorphe $\widehat{\phi} : \Lambda' \times J(f_{\lambda_0}) \to \Lambda' \times \overline{\mathbf{C}}$ de l'ensemble de Julia f_{λ_0} tel que $\widehat{\phi}_\lambda(J(f_{\lambda_0})) = J(f_\lambda)$ pour $\lambda \in \Lambda$. En échangeant les rôles de λ_0 et λ, on voit que $\widehat{\phi}_\lambda$ est un homéomorphisme.

cqfd.

Remarques : 1) L'homéomorphisme $\widehat{\phi}_{\lambda_1} : J(f_{\lambda_0}) \to J(f_{\lambda_1})$ est compatible avec la dynamique, autrement dit il conjugue $f_{\lambda_0} : J(f_{\lambda_0}) \to J(f_{\lambda_0})$ à $f_{\lambda_1} : J(f_{\lambda_1}) \to J(f_{\lambda_1})$. En outre, d'après la Prop. 5 du § 8, il se prolonge en un homéomorphisme quasi-conforme de $\overline{\mathbf{C}}$ sur lui-même (qu'on ne peut peut-être pas choisir compatible avec la dynamique).

2) Mañe, Sad et Sullivan considèrent également le cas où il y aurait des points périodiques indifférents persistants. On obtient un résultat un peu meilleur en prenant pour S la fermeture de l'ensemble des λ pour lesquels f_λ admet un cycle indifférent *non persistant.*

2. THÉORÈME DE SŁODKOWSKI ET VARIANTES

$\mathbf{D}$ désigne le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$, muni de 0 comme point de base, $\mathbf{D}_r$ (resp. $\overline{\mathbf{D}}_r$) est le disque ouvert (resp. fermé) de rayon r.

THÉORÈME 2 (Słodkowski).— *Soit X une partie de $\overline{\mathbf{C}}$. Tout mouvement holomorphe de X paramétré par $\mathbf{D}$ admet un prolongement en un mouvement holomorphe de $\overline{\mathbf{C}}$ paramétré par $\mathbf{D}$.*

Nous allons établir au § 7 une variante, finie et avec un peu de perte, du Th. 2.

THÉORÈME 2'.— *Soit X une partie finie de $\overline{\mathbf{C}}$ contenant $\{0,\infty\}$ et $\phi : \mathbf{D}_r \times X \to \mathbf{D}_r \times \overline{\mathbf{C}}$ un mouvement holomorphe de X paramétré par $\mathbf{D}_r$ avec $r > 1$, coïncidant avec l'identité sur $\mathbf{D}_r \times \{0,\infty\}$. Il existe alors un mouvement holomorphe $\widehat{\phi} : \mathbf{D} \times \overline{\mathbf{C}} \to \mathbf{D} \times \overline{\mathbf{C}}$ de $\overline{\mathbf{C}}$ paramétré par $\mathbf{D}$, qui coïncide avec ϕ sur $\mathbf{D} \times X$, et qui est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty_{\mathbf{R}}$.*

Démonstration du Th. 2 à partir du Th. 2'.— Soient X une partie quelconque de $\overline{\mathbf{C}}$ et $\phi : \mathbf{D} \times X \to \mathbf{D} \times \overline{\mathbf{C}}$ un mouvement holomorphe de X, que nous supposons normalisé. Soient (X_n) une suite croissante de parties finies de X telles que $X_\infty = \cup X_n$ soit dense dans X, et Y un ensemble dénombrable dense dans $\overline{\mathbf{C}}$ contenant X_∞. On suppose $X_0 \supset \{0,1,\infty\}$. Soit (ρ_n) une suite tendant vers 1, avec $\rho_n < 1$ pour tout n.

Par le Th. 2', on peut trouver pour chaque n un mouvement holomorphe $\widehat{\phi}_n$ de $\overline{\mathbf{C}}$ paramétré par D_{ρ_n}, coïncidant avec ϕ sur $\mathbf{D}_{\rho_n} \times X_n$. Pour $y \in Y$, les fonctions $\widehat{\phi}^y_n : \mathbf{D}_{\rho_n} \to \overline{\mathbf{C}}$ forment une famille normale. Par un procédé diagonal, on peut trouver une suite (n_k) telle que $\widehat{\phi}^y_{n_k}$ converge vers une fonction $\widehat{\phi}^y : \mathbf{D} \to \overline{\mathbf{C}}$ pour tout $y \in Y$. On définit ainsi un mouvement holomorphe $\widehat{\phi}$ de Y paramétré par $\mathbf{D}$. Pour $y \in X_\infty$, on a $\widehat{\phi}^y_n = \phi^y | \mathbf{D}_{\rho_n}$ pour n assez grand, donc $\widehat{\phi}^y = \phi^y$. En vertu du Th. 1, $\widehat{\phi}$ se prolonge en un mouvement holomorphe, que nous notons encore $\widehat{\phi}$, de $\overline{\mathbf{C}}$ paramétré par Λ, et $\widehat{\phi} = \phi$ sur X.

cqfd.

4. TRIVIALITÉ $\mathcal{C}^\infty$

Nous commençons la démonstration du Th. 2', qui sera achevée au § 7. Nous nous plaçons donc dans les hypothèses et avec les notations de ce théorème. Nous supposons en outre ϕ normalisé.

PROPOSITION 1.— *On peut trouver un difféomorphisme $F : \mathbf{D}_r \times \overline{\mathbf{C}} \to \mathbf{D}_r \times \overline{\mathbf{C}}$ de classe $\mathcal{C}^\infty_{\mathbf{R}}$ au-dessus de $\mathbf{D}_r$, coïncidant avec l'identité au voisinage de $\mathbf{D}_r \times \{0,\infty\}$, tel que $F \circ \phi : \mathbf{D}_r \times X \to \mathbf{D}_r \times \overline{\mathbf{C}}$ soit l'injection canonique.*

Démonstration.— Grâce à une partition de l'unité, construisons $f_1 : \mathbf{D}_r \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f_1(0,z) = z$ pour $z \in \mathbf{C}$, et $f_1(\phi(\lambda,x)) = x$ pour

$(\lambda, x) \in \mathbf{D}_r \times X$, $f_1(\lambda, z) = z$ sur un voisinage de $\mathbf{D}_r \times \{0, \infty\}$. Posons $F_1(s, z) = ((\lambda, f_1(\lambda, z))$. On a $F_1 \circ \phi = r$ sur $\mathbf{D}_r \times X$. Il existe $r_1 > 0$ tel que F_1 induise un difféomorphisme de $\mathbf{D}_{r_1} \times \mathbf{C}$ sur lui-même.

Soit ξ_0 le champ de vecteurs sur $\mathbf{D}_{r_1} \times \mathbf{C}$ défini par $\xi(\lambda, z) = (-\lambda, 0)$, soit ξ_1 le champ image directe de ξ_0 par F_1 sur $\mathbf{D}_{r_1} \times \mathbf{C}$, et construisons un champ de vecteurs ξ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{D}_r \times \mathbf{C}$ coïncidant avec ξ_1 sur $\mathbf{D}_{r_1} \times \mathbf{C}$ et avec ξ_0 au voisinage de $\mathbf{D}_r \times \{0, \infty\}$, et tangent à $\phi(\mathbf{D}_r \times X)$. Définissons $f : \mathbf{D}_r \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ par $f(\lambda, x) = f_1(\exp t\xi(\lambda, z))$ pour t grand. L'application $F(\lambda, z) \mapsto (\lambda, f(\lambda, z))$ répond à la question.

cqfd.

Pour la suite de la démonstration du Th. 2', nous fixons un tel difféomorphisme F. Nous définissons le *F-rayon* passant par un point (λ, z) de $\Lambda \times \mathbf{C}^*$ comme l'image réciproque par F du rayon $\{\lambda, e^t F_\lambda(z)\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ passant par $F(\lambda, z)$, et le *F-argument* de (λ, z) comme $\mathrm{Arg}(F_\lambda(z))$.

5. UN ESPACE DE SOBOLEV

Nous aimerions définir une loi d'évolution sur l'espace $\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ des fonctions holomorphes au voisinage de $\overline{\mathbf{D}}$. Pour cela, il faut résoudre une équation différentielle, mais l'espace $\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ n'est pas un espace de Banach et cela mène à des difficultés. Nous allons donc le remplacer par un espace de Banach, et même de Hilbert.

Pour $s \geq 1$, notons $\mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ l'espace des fonctions $f : z \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n z_n$ telles que $(n^s a_n) \in \ell^2(\mathbf{C})$. C'est un espace de Hilbert. Les fonctions de $\mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ sont de classe $\mathcal{C}^{[s]-1}$ sur $\overline{\mathbf{D}}$ et holomorphes sur $\mathbf{D}$. L'espace $\mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ est stable par Log des fonctions ne s'annulant pas sur $\overline{\mathbf{D}}$, et par exp.

Notons $\mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{R})$ l'espace des fonctions $u : S^1 \to \mathbf{R}$ de la forme $z \mapsto \sum_{n \geq \mathbf{Z}} a_n z_n$ avec $(n^s a_n) \in \ell^2(\mathbf{Z}; \mathbf{C})$, $a_{-n} = \overline{a}_n$. On pose $\mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{C}) = \{u + iv \,|\, u, v \in \mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{R})\}$. Pour $f \in \mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$, on a $f_{|S^1} \in \mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{C})$, et pour $u \in \mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{R})$, on obtient une fonction $u + iv \in \mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ en prolongeant u par une fonction harmonique et en prenant pour v une fonction harmonique conjuguée.

Soient $s \geq 1$ et $u \in \mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{R})$. Pour $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a $\phi \circ u \in \mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{R})$. Si Σ est une variété et $\phi : \Sigma \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$,

l'application $\sigma \mapsto \phi_\sigma \circ u$ de Σ dans $\mathcal{H}^s(S^1;\mathbf{R})$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Nous utiliserons la propriété suivante :

PROPOSITION 2.— *Soit $u \in \mathcal{H}^s(S^1;\mathbf{C})$ une fonction ne s'annulant pas et admettant un prolongement continu $\overline{\mathbf{D}} \to \mathbf{C}^*$. Il existe alors une fonction $v \in \mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ unique, telle que $v(z)/u(z) \in \mathbf{R}_+^*$ pour $|z| = 1$ et $v(1) = u(1)$. La fonction v ne s'annule pas sur $\overline{\mathbf{D}}$. L'application $u \mapsto v$ est une application $\mathcal{C}^\infty_{\mathbf{R}}$ d'un ouvert de $\mathcal{H}^s(S^1;\mathbf{C})$ dans $\mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$.*

Démonstration.— Le nombre complexe $u(z)$ fait 0 tour autour de 0 quand z parcourt S^1. Si v répond à la question, il en est de même de $v(z)$ et v ne s'annule pas sur $\overline{\mathbf{D}}$.

Mettons u sous forme $e^{U_1+iU_2}$. On a U_1 et U_2 dans $\mathcal{H}^s(S^1;\mathbf{R})$. On obtient $v = e^{V_1+iV_2} \in \mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ en prenant pour V_2 la fonction harmonique $\overline{\mathbf{D}} \to \mathbf{R}$ prolongeant U_2 et pour V_1 la fonction harmonique conjuguée à $-V_2$ telle que $V_1(1) = U_1(1)$. Il est clair que c'est la seule solution, et la dépendance $\mathcal{C}^\infty$ résulte des propriétés mentionnées plus haut.

cqfd.

6. UNE LOI D'ÉVOLUTION

Reprenons les notations du Th. 2' et soit F comme au § 4.

PROPOSITION 3.— *Soit $f \in \mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ une fonction ne s'annulant pas. Il existe une unique famille $(f_t)_{t\in\mathbf{R}}$ de fonctions de $\mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ telle que*

(i) $f_0 = f$;

(ii) $t \mapsto f_t$ *soit une application $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$* ;

(iii) *pour $\lambda \in S^1$, le point $(\lambda, f_t(\lambda))$ parcoure le F-rayon passant par $(\lambda, f(\lambda))$* ;

(iv) $F_1(f_t(1)) = e^t \cdot F_1(f(1))$.

Les fonctions f_t ne s'annulent pas sur $\overline{\mathbf{D}}$.

Démonstration.— Notons ξ le champ de vecteur vertical radial sur $\mathbf{D}_r \times \mathbf{C}$ défini par $\xi(\lambda, z) = (0, z)$, de sorte que $\exp t\xi(\lambda, z) = (\lambda, e^t z)$. Notons η le champ de vecteurs $F^*\xi$ sur $\mathbf{D}_r \times \mathbf{C}$. Le champ de vecteurs η est tangent aux F-rayons.

Définissons $u_f : \overline{\mathbf{D}} \to \mathcal{C}$ par $\eta(\lambda, f(\lambda)) = (0, u_f(\lambda))$. Autrement dit,

$$u_f(\lambda) = (T_{f(\lambda)} F_\lambda)^{-1}(F_\lambda(f(\lambda))).$$

On a $u_{f|S^1} \in \mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{C})$, et l'application $f \mapsto u_f$ de $\mathcal{H}^s\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ dans $\mathcal{H}^s(S^1; \mathbf{C})$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Les conditions (ii), (iii), (iv) équivalent à l'équation différentielle

$$\frac{df_t}{dt} = v_{f_t},$$

où v_f est la fonction associée à u_f par la Prop. 2. La Prop. 3 résulte alors du théorème d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$.

cqfd.

Nous dirons que la fonction f_t est obtenue en laissant évoluer f pendant le temps t, et nous la noterons $E_t(f)$. On a $E_{t_1+t_2}(f) = E_{t_1}(E_{t_2}(f))$. Il existe $r > 0$ tel que $E_t(f) = e^t f$ pour $t \leq 0$ si $\|f\|_{L^\infty} \leq r$ et $E_t(f) = e^t f$ pour $t \geq 0$ si $(\forall z \in \overline{\mathbf{D}})$ $|f(z)| \geq \frac{1}{r}$.

Pour f fixée, quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$, pour tout $\lambda \in S^1$, le point $(\lambda, f_t(\lambda))$ parcourt le F-rayon passant par $(\lambda, f(\lambda))$ de façon monotone de 0 à ∞, avec une vitesse minorée dans la couronne $r \leq |z| \leq \frac{1}{r}$. La fonction $E_t(f)$ tend vers 0 (resp. vers ∞) quand $t \to -\infty$ (resp. $+\infty$), uniformément sur $\overline{\mathbf{D}}$.

Si $f \in \mathcal{C}^\infty\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$, *i.e.* est de classe $\mathcal{C}^\infty_{\mathbf{R}}$ et holomorphe sur $\overline{\mathbf{D}}$, on peut la considérer comme dans $\mathcal{H}^s\mathcal{O}$ pour tout s, et $f_t = E_t(f)$ ne dépend pas du s choisi pour la définition. On a $E_t(f) \in \mathcal{C}^\infty\mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$, et $(t, \lambda) \mapsto f_t(\lambda)$ est $\mathcal{C}^\infty$.

7. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2'

Pour $z \in \mathbf{C}^*$, notons Ψ^z la fonction obtenue en laissant évoluer pendant le temps τ (suivant la loi définie au § 6) la fonction constante $e^{-\tau} z$, le temps τ étant choisi suffisamment grand pour que $|e^{-\tau} z| \leq r$. La fonction Ψ^z ainsi définie ne dépend pas du choix de τ sous cette réserve. On définit ainsi une application $\Psi : \overline{\mathbf{D}} \times \mathbf{C}^* \to \overline{\mathbf{D}} \times \mathbf{C}^*$ au-dessus de $\overline{\mathbf{D}}$, de classe $\mathcal{C}^\infty_{\mathbf{R}}$, holomorphe en λ pour $\lambda \in \mathbf{D}$. On pose $\Psi^0(\lambda) = 0$ et $\phi^\infty(\lambda) = \infty$ pour tout λ.

PROPOSITION 4.— *L'application* $\Psi : \overline{\mathbf{D}} \times \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{D}} \times \overline{\mathbf{C}}$ *est un difféomorphisme qui coïncide avec l'identité au voisinage de* $\overline{\mathbf{D}} \times \{0, \infty\}$, *et avec* ϕ *sur* $\overline{\mathbf{D}} \times X$.

Démonstration.— Il est clair que $\Psi^z = z$ si $|z| \leq r$ (on peut alors prendre $\tau = 0$). Montrons qu'il en est de même pour $|z|$ assez grand. Choisissons $\zeta = re^{i\theta} \in S^1_r$. Le F-argument de $(\lambda, E_\tau(\zeta)(\lambda))$ est θ pour tout $\lambda \in S^1$ et tout τ. Pour τ assez grand, c'est l'argument au sens ordinaire de $E_\tau(\zeta)(\lambda)$. La fonction $E_\tau(\zeta)$ est donc constante et sa valeur est celle obtenue pour $\lambda = 1$, c'est $e^\tau \zeta$. On a donc $\Psi^z(\lambda) = z$ pour $z = e^\tau re^{i\theta}$, θ quelconque, τ assez grand (*i.e.* $\tau \geq \tau_0$ qu'on peut prendre indépendant de θ).

Pour $x \in X - \{0, \infty\}$, montrons que $\Psi^x = \phi^x$. Le F-argument de ϕ^x est constant, égal à $\operatorname{Arg} x$ par construction de F. Pour tout τ, le F-argument de $(\lambda, E_{-\tau}(\phi^x)(\lambda))$ est constant pour $\lambda \in S^1$. Mais pour τ assez grand, c'est l'argument au sens ordinaire, donc $E_{-\tau}\, \phi^x$ est constant et sa valeur est $e^{-\tau} F^x(1) = e^{-\tau} x$. Par suite, $\phi^x = E_\tau(e^{-\tau} x) = \Psi^x$.

Montrons que Ψ est un difféomorphisme local. Soit $z \in \mathbf{C}^*$ et posons $f = \Psi^z = E_\tau(e^{-\tau} z)$ (τ grand). Donnons à z une variation infinitésimale $D_z = \alpha$ non nulle et soit $g = Df \in \mathcal{O}(\overline{\mathbf{D}})$ la variation infinitésimale correspondante de f ("infinitésimale" signifie seulement que $\alpha \mapsto g$ est l'application linéaire tangente à $z \mapsto \Psi^z$). Il faut montrer que g est une fonction qui ne s'annule pas sur $\overline{\mathbf{D}}$. La variation infinitésimale de $e^{-\tau} z$ est $e^{-\tau} \alpha$ (on fixe τ). Si α est un vecteur radical sortant (resp. rentrant), pour $\lambda \in S^1$, le vecteur $g(\lambda)$ est tangent en $f(\lambda)$ au F-rayon passant par $(\lambda, f(\lambda))$, non nul en direction de ∞ (resp. de 0). Par suite, $g(\lambda)$ fait 0 tour autour de 0 quand λ parcourt S^1, et g ne s'annule pas sur $\overline{\mathbf{D}}$. Si α pointe à gauche (resp. à droite) par rapport au rayon, pour tout $\lambda \in S^1$, le vecteur $g(\lambda)$ pointe à gauche (resp. à droite) par rapport à la tangente au F-rayon passant par $(\lambda, f(\lambda))$, et encore $g(\lambda)$ fait 0 tour et g ne s'annule pas sur $\overline{\mathbf{D}}$. Pour tout $\lambda \in \overline{\mathbf{D}}$, Ψ_λ induit un difféomorphisme local $\mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$ qui coïncide avec l'identité au voisinage de 0 et ∞, et on a $\Psi_\lambda(0) = 0$, $\Psi_\lambda(\infty) = \infty$; l'application Ψ_λ est donc un difféomorphisme de $\mathbf{C}$.

cqfd.

Démonstration du Théorème 2'.— L'application $\Psi : \mathbf{D} \times \overline{\mathbf{C}} \to \mathbf{D} \times \overline{\mathbf{C}}$ est un difféomorphisme au-dessus de $\mathbf{D}$, injectif bien sûr, et holomorphe en λ. Mais

Ψ_0 n'est pas nécessairement l'identité de $\overline{\mathbf{C}}$. On a cependant $\Psi_0(x) = x$ pour $x \in X$. Posons $\widehat{\phi}(\lambda, z) = \Psi(\lambda, \Psi_0^{-1}(z))$. Alors $\widehat{\phi}_0 = \mathrm{Id}_{\overline{\mathbf{C}}}$, et $\widehat{\phi}$ est un mouvement holomorphe de $\overline{\mathbf{C}}$ qui est un difféomorphisme de $\mathbf{D} \times \overline{\mathbf{C}}$ et qui induit ϕ sur $\mathbf{D} \times X$.

cqfd.

8. PROPRIÉTÉS DE QUASI-CONFORMITÉ

PROPOSITION 5.— *Soit $\phi : \mathbf{D} \times \overline{\mathbf{C}} \to \mathbf{D} \times \overline{\mathbf{C}}$ un mouvement holomorphe de $\overline{\mathbf{C}}$. Alors pour $\lambda \in D$, l'application ϕ_λ est quasi-conforme de rapport K avec $K = \frac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|}$.*

Démonstration.— On peut supposer ϕ normalisé. Supposons d'abord que ϕ est en outre un difféomorphisme $\mathcal{C}^1_{\mathbf{R}}$. Pour tout $z \in \mathbf{C}^*$, $\mu(\lambda, z) = \overline{\partial}\,\phi_\lambda / \partial\,\phi_\lambda(z)$ est un fonction holomorphe de λ à valeur dans $\mathbf{D}$, nulle en 0, donc $|\mu(\lambda, z)| \leq \lambda$, d'où la propriété.

Dans le cas général, la démonstration faite au § 3 montre qu'il existe un ensemble dénombrable Y dense dans $\overline{\mathbf{C}}$ et une suite (ϕ_n) de mouvements holomorphes de $\overline{\mathbf{C}}$ qui sont des difféomorphismes $\mathcal{C}^\infty$, telle que $\phi_n^y \to \phi^y$. Pour $\lambda \in \mathbf{D}$, les $\phi_{n,\lambda}$ sont K-quasi-conformes avec un K indépendant de n. Ils forment donc une famille équicontinue, par suite $\phi_{n,\lambda} \to \phi_\lambda$ uniformément et ϕ_λ est K-quasi-conforme avec $K = \frac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|}$.

cqfd.

9. UN CONTRE-EXEMPLE AVEC Λ DE DIMENSION 1

Un mouvement holomorphe $\phi : \Lambda \times X \to \Lambda \times \overline{\mathbf{C}}$ est *maximal* s'il ne peut être prolongé en un mouvement holomorphe d'un ensemble Y contenant X strictement. Le théorème de Słodkowski dit qu'un mouvement holomorphe paramétré par $\mathbf{D}$ ne peut être maximal que si c'est un mouvement de $\overline{\mathbf{C}}$ tout entier.

Dans ce paragraphe et le suivant, nous donnons deux exemples de mouvements holomorphes maximaux avec X fini. Le premier est le mouvement holomorphe normalisé universel avec $\#\ X = 4$:

On prend $\Lambda = \overline{\mathbf{C}} - \{0, 1, \infty\} = \mathbf{C} - \{0, 1\}$, λ_0 un point quelconque de Λ (par

exemple $\lambda_0 = 2$), $X = \{0, 1, \infty, \lambda_0\}$, ϕ normalisé avec $\phi^{\lambda_0}(\lambda) = \lambda$. Montrer que ce mouvement holomorphe est maximal revient à démontrer :

PROPOSITION 6.— *Il n'existe pas de fonction holomorphe $f : \Lambda \to \Lambda$ sans point fixe.*

Démonstration.— Supposons que f soit une telle fonction. La fonction f, évitant 0, 1 et ∞, ne peut avoir en 0, 1 ou ∞ une singularité essentielle. C'est donc une fraction rationnelle et elle définit une application encore notée $f : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$. Cette application ne peut être constante avec une valeur $\lambda_1 \in \Lambda$, car elle aurait un point fixe en λ_1. Elle est donc surjective. On a $f^{-1}(\{0, 1, \infty\}) \subset \{0, 1, \infty\}$, donc f induit une bijection de $\{0, 1, \infty\}$ sur lui-même. L'application $f : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ a nécessairement au moins un point fixe, il est nécessairement dans $\{0, 1, \infty\}$, et quitte à conjuguer par un automorphisme de $\overline{\mathbf{C}}$, on peut supposer que c'est ∞. On a alors $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$, donc f est un polynôme. Notons d son degré. On a $f(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$. Si $d = 1$, f est l'identité ou $z \mapsto 1 - z$, mais tous deux admettent $\frac{1}{2}$ comme point fixe. Si $d \geq 2$, $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ sont tous deux réduits à un point, donc la dérivée f' a un zéro d'ordre $d - 1$ en 0 et un autre en 1, ce qui est impossible car $2d - 2 > d - 1$.

cqfd.

Le revêtement universel $\widetilde{\Lambda}$ de Λ est isomorphe à $\mathbf{D}$. Notons ϖ la projection $\widetilde{\Lambda} \to \Lambda$. Il résulte du théorème 2 que le mouvement $\widetilde{\phi} : \widetilde{\Lambda} \times X \to \widetilde{\Lambda} \times \overline{\mathbf{C}}$ obtenu en remontant ϕ à $\widetilde{\Lambda}$ peut se prolonger en un mouvement holomorphe $\widehat{\phi}$ de $\overline{\mathbf{C}}$ paramétré par $\widetilde{\Lambda}$. On peut en fait définir explicitement un tel prolongement :

Posons $A = \{(\lambda, x, y) \in \Lambda \times \overline{\mathbf{C}} \times \overline{\mathbf{C}} \mid y^2 = x.(x-1)/(x-\lambda)\}$. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, la surface de Riemann $A(\lambda) = \{(x, y) \mid (\lambda, x, y) \in A\}$ s'identifie à $\mathbf{C}/\Gamma_\lambda$ où Γ_λ est un réseau dans $\mathbf{C}$. On peut choisir Γ_λ dépendant de façon holomorphe de λ. En remontant à $\widetilde{\Lambda}$, on obtient une variété $\widetilde{A}$ au-dessus de $\widetilde{\Lambda}$ avec $\widetilde{A}(\widetilde{\lambda}) = A(\lambda) = \mathbf{C}/\Gamma_\lambda$ pour $\widetilde{\lambda} \in \widetilde{\Lambda}$ et $\lambda = \varpi(\widetilde{\lambda})$. On peut choisir de façon continue – et donc holomorphe – pour chaque $\widetilde{\lambda} \in \widetilde{\Lambda}$ une base $(\alpha(\widetilde{\lambda}), \beta(\widetilde{\lambda}))$ de $\Gamma_{\widetilde{\lambda}} = \Gamma_{\varpi(\widetilde{\lambda})}$. On obtient alors une trivialisation horizontale analytique $\Psi : \widetilde{\Lambda} \times A(\lambda_0) \to \widetilde{A}$ par

$$\Psi(\widetilde{\lambda}, u.\alpha(\lambda_0) + v.\beta(\lambda_0)) = (\widetilde{\lambda}, u.\alpha(\lambda) + v.\beta(\lambda)),$$

$(u, v) \in \mathbf{T}^2$. La relation d'équivalence définie sur A par la projection

$(\lambda, x, y) \mapsto (\lambda, x)$ de A sur $\Lambda \times \overline{\mathbf{C}}$ est celle qui identifie (λ, w) à $(\lambda, -w)$ pour $w \in \mathbf{C}/\Gamma_\lambda$. De même, pour la projection $\widetilde{A} \to \widetilde{\Lambda} \times \overline{\mathbf{C}}$. L'application Ψ, étant compatible avec cette relation d'équivalence, descend en une application $\widetilde{\phi} : \widetilde{\Lambda} \times \overline{\mathbf{C}} \to \widetilde{\Lambda} \times \overline{\mathbf{C}}$ qui est le mouvement holomorphe cherché.

10. SECTIONS DES ESPACES DE TEICHMÜLLER

Pour $k \geq 3$, notons $\mathcal{M}_{0,k}$ l'espace modulaire pour le genre 0 avec k points marqués numérotés, *i.e.* l'espace des injections normalisées $i \mapsto z_i$ de $\{1, \cdots, k\}$ dans $\overline{\mathbf{C}}$ ("normalisées" signifie $(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \infty)$). L'espace $\mathcal{M}_{0,k}$ s'identifie à $(\mathbf{C} - \{0,1\})^{k-3} - \bigcup_{1 \leq i < j \leq k-3} H_{i,j}$, où $H_{i,j}$ est l'hyperplan diagonal défini par $z_i = z_j$. En particulier, $\mathcal{M}_{0,4} = \mathbf{C} - \{0,1\}$.

Notons $\mathcal{T}_{0,k}$ l'espace de Teichmüller revêtement universel de $\mathcal{M}_{0,k}$. L'oubli des derniers points définit pour $k' > k$ des projections $p_k^{k'} : \mathcal{M}_{0,k'} \to \mathcal{M}_{0,k}$ et $\widetilde{p}_k^{k'} : \mathcal{T}_{0,k'} \to \mathcal{T}_{0,k}$.

On a vu au § 9 (Prop. 6) que p_4^5 n'a pas de section holomorphe $\mathcal{M}_{0,4} \to \mathcal{M}_{0,5}$, mais $\widetilde{p}_4^5 : \mathcal{T}_{0,5} \to \mathcal{T}_{0,4}$ est une fibration qui admet une trivialisation horizontalement analytique $\mathcal{T}_{0,4} \times (\mathbf{C} - \{0,1,2\})^\sim \to \mathcal{T}_{0,5}$ (relevant $\widehat{\phi} : \mathcal{T}_{0,4} \times (\mathbf{C} - \{0,1,2\}) \to \mathcal{T}_{0,4} \times \overline{\mathbf{C}} - \phi(\mathcal{T}_{0,4} \times X)$).

PROPOSITION 7 (Hubbard, Earle-Kra).— *Pour $k' > k \geq 5$, la projection $\widetilde{p}_k^{k'} : \mathcal{T}_{0,k'} \to \mathcal{T}_{0,k}$ n'a pas de section holomorphe.*

COROLLAIRE.— *Pour $k \geq 5$, le mouvement holomorphe universel de $\{0, 1, 2, \cdots, k-2, \infty\}$ paramétré par $\mathcal{T}_{0,5}$ est maximal.*

Dans sa thèse, J.H. Hubbard examine les relations entre espaces de Teichmüller. Notons $\mathcal{T}_{g,k}$ l'espace de Teichmüller pour le genre g avec k points marqués et, pour $k' \geq k$, considérons la projection $\widetilde{p}_{g,k}^{g,k'} : \mathcal{T}_{g,k'} \to \mathcal{T}_{g,k}$. Hubbard démontre les résultats suivants :

- Pour $g \geq 3$, aucune projection $\widetilde{p}_{g,k}^{g,k'}$ avec $k' > k$ n'admet de section holomorphe.
- Pour $g = 2$, on a des sections holomorphes $\mathcal{T}_{2,0} \to \mathcal{T}_{2,k'}$ pour $k' \geq 6$ définies par les points de Weierstrass. A part ça, aucune projection $\widetilde{p}_{2,k}^{2,k'}$ avec $k' > k$

n'a de section holomorphe.

- Pour $g = 1$, $\widetilde{p}_{1,0}^{1,1}$ est un isomorphisme et $\widetilde{p}_{1,1}^{1,2}$ admet une trivialisation horizontalement analytique, d'où des sections de $\widetilde{p}_{1,1}^{1,k'}$ pour tout k'. Pour $k' > k \geq 2$, la projection $\widetilde{p}_{1,k}^{1,k'}$ n'a pas de section holomorphe.

La méthode de Hubbard est la suivante. Soit S une surface de Riemann compacte de genre g et $A = \{a_1, \cdots, a_k\}$ où $a_1, \cdots, a_k$ sont k points distincts de S. L'espace cotangent à $\mathcal{T}_{g,k}$ au point $[S, A]$ s'identifie à l'espace $Q(S, A)$ des formes quadratiques holomorphes sur $S - A$ ayant aux points de A au pire des pôles simples. Par un théorème de Royden, la norme L^1 sur $Q(S, A)$ est la norme duale de la norme de Kobayashi sur l'espace tangent à $\mathcal{T}_{g,k}$. Une condition nécessaire pour qu'il existe une section $\sigma : \mathcal{T}_{g,k} \to \mathcal{T}_{g,k'}$ avec $\sigma([S, A]) = [S, A']$ est qu'il existe une projection de norme 1 de $Q(S, A')$ sur $Q(S, A)$. Pour $k' = k + 1$, cela signifie qu'il existe $q' \in Q(S, A')$ non nul tel que $\forall q \in Q(S, A)$, $D_q \mathcal{N}(q') = 0$, où $\mathcal{N}$ est la norme L^1 et $D_q \mathcal{N}$ sa différentielle en q. Cette différentielle est donnée par : $D_q \mathcal{N}(q') = \mathcal{R}e \int_S \frac{\overline{q}}{|q|} q'$. La relation $D_q \mathcal{N}(q') = D_{iq} \mathcal{N}(q') = 0$ s'écrit donc $\int_S \frac{\overline{q}}{|q|} q' = 0$.

Cette méthode peut s'appliquer en genre 0 pour démontrer la Prop. 7. Il suffit d'établir :

Lemme.— Soient $A \subset A' \subset \overline{\mathbf{C}}$ avec $\# A = k \geq 5$, $A' = A \cup \{a'\}$, $a' \notin A$. Pour $q' \in Q(\overline{\mathbf{C}}, A)$, l'application $q \mapsto \int_{\overline{\mathbf{C}}} \frac{\overline{q}}{|q|} q'$ de $Q(\overline{\mathbf{C}}, A)$ dans $\overline{\mathbf{C}}$ n'est pas identiquement nulle.

Démonstration.— Si $q' \in Q(A)$, on peut prendre $q = q'$. Supposons que q' ait effectivement un pôle en a', et soit (q_α) une famille analytique de formes appartenant à $Q(A)$, paramétrée par un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$, telle que q_α ait un zéro en $a' + \alpha$. Alors $\int \frac{\overline{q}_\alpha}{q_\alpha} q'$ est de la forme $C \iint_D \frac{\overline{z-\alpha}}{|z-\alpha|} \frac{1}{z}\, dxdy + h(\alpha)$ où C est une constante $\neq 0$ et $h(\alpha)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty_{\mathbf{R}}$ de α. On peut remplacer $\iint_D \frac{\overline{z-\alpha}}{|z-\alpha|} \frac{1}{z}\, dxdy$ par $\iint_D \frac{\overline{z}}{|z|} \frac{1}{z-\alpha}\, dxdy = \frac{-2M}{3} \frac{\overline{\alpha}^2}{|\alpha|}$ qui a en 0 une singularité qui ne peut être compensée.

cqfd.

Les mouvements holomorphes maximaux décrits ci-dessus sont des mouvements d'un ensemble X fini, donc non connexe. Les théorèmes de Hubbard men-

tionnés plus haut permettent de construire un mouvement holomorphe maximal de $\overline{\mathbf{D}}$ paramétré par $\mathcal{T}_3$ (qui est de dimension 6).

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. ASTALA and G.J. MARTIN - *Holomorphic motions*, Preprint University of Helsinki and University of Auckland (1993).

[2] L. BERS and H.L. ROYDEN - *Holomorphic families of injections*, Acta Math. **157** (1986), 259-286.

[3] C.J. EARLE and I. KRA - *On holomorphic mappings between Teichmüller spaces*, Contributions to Analysis, Academic Press (New York) (1974), 107-124.

[4] J. HUBBARD - *Sur les sections analytiques de la courbe universelle de Teichmüller*, Mem. Am. Math. Soc. **4** (1976).

[5] R. MAÑE, P. SAD and D. SULLIVAN - *On the dynamics of rational maps*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **16** (1983), 193-217.

[6] Z. SŁODKOWSKI - *Holomorphic motions and polynomial hulls*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 347-355.

[7] Z. SŁODKOWSKI - *Invariant extensions of holomorphic motions*, Abstract N° 873-30-234 in : Abstracts of the Papers Presented to the Amer. Math. Soc. **13** (1992), 259.

[8] Z. SŁODKOWSKI - *Extensions of holomorphic motions*, Preprint IHES/M/92/96.

[9] D. SULLIVAN and W.P. THURSTON - *Extending holomorphic motions*, Acta Math. **157** (1986), 243-257.

Adrien DOUADY

Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 405
F-91405 ORSAY CEDEX

Astérisque

JEAN LANNES

Théorie homotopique des groupes de Lie

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki, exp. n° 776, p. 21-45

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__21_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 1993
46éme année, 1993-94, n°776

THÉORIE HOMOTOPIQUE DES GROUPES DE LIE
[d'après W.G. Dwyer et C.W. Wilkerson]

par **Jean LANNES**

0. INTRODUCTION

Un groupe de Lie compact possède la propriété suivante : c'est un espace de lacets (voir ci-après) dont l'homologie modulo un nombre premier p est de dimension finie. De tels espaces sont à peu de choses près ce que Dwyer et Wilkerson appellent des groupes p-compacts. Ils montrent que ces objets partagent une grande partie de la riche structure interne des groupes de Lie (tores maximaux, groupe de Weyl,...) et entreprennent leur classification [DW3][DW4][DW5]. Cet exposé est un rapport sur leur travail ; il porte essentiellement sur l'article [DW3].

Précisons quelques-unes des notions évoquées ci-dessus.

Définition 0.1. Un *espace de lacets* X est la donnée d'un triplet (X, BX, e) où X est un espace, BX un espace pointé connexe, et $e : X \to \Omega BX$ une équivalence d'homotopie de X sur l'espace ΩBX des lacets pointés de BX.

Avec cette définition un groupe topologique X est bien un espace de lacets. En effet soit BX l'espace classifiant de X alors il existe une application canonique $X \to \Omega BX$ qui est une équivalence d'homotopie. Ceci justifie la notation BX de la définition 0.1.

Définition 0.2. Un *groupe p-compact* X est un espace de lacets dont l'homologie modulo p est de dimension finie et qui satisfait en outre la condition (technique) suivante :

(C) Le groupe $\pi_0 X$ est un p-groupe fini et les groupes abéliens $\pi_n X, n \geq 1$, sont des modules de type fini sur $\mathbf{Z}_p$.

Variante de la condition (C), *p-complété d'un espace*

Dans [BK] Bousfield et Kan construisent un endofoncteur $X \mapsto \widehat{X}$ de la catégorie des espaces, appelé *p-complétion* (l'espace $\widehat{X}$ est appelé le *p-complété* de l'espace X) et une application naturelle $\eta_X : X \to \widehat{X}$. Dans le cas où X est simplement connexe et où les groupes d'homotopie de X sont de type fini, les groupes d'homotopie de $\widehat{X}$ sont les p-complétés de ceux de X : $\pi_n\widehat{X} = \mathbf{Z}_p \otimes \pi_n X$. On dit que X est *p-complet* si η_X est une équivalence d'homotopie.

Voici quelques-unes des propriétés de la p-complétion des espaces :

- La p-complétion préserve à homotopie près les sommes disjointes arbitraires et les produits finis.

- Une application $f : X \to Y$ qui induit un isomorphisme en homologie modulo p induit une équivalence d'homotopie $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$. Plus généralement si f induit en homologie modulo p une application n-connexe (c'est-à-dire bijective en degré strictement inférieur à n et surjective en degré n) alors $\widehat{f}$ est également n-connexe ; en particulier si $\widetilde{H}_k(X; \mathbf{F}_p)$ est nul pour $k \leq n$ alors $\widehat{X}$ est n-connexe (prendre pour Y le point qui est p-complet).

- L'application η_X induit "très souvent" un isomorphisme en homologie modulo p ; on dit alors que X est *p-bon*. C'est le cas, quand X est connexe, sous l'une des hypothèses suivantes : $H_1(X; \mathbf{F}_p) = 0$; $\pi_1 X$ fini ; X nilpotent.

- Si X est connexe et si $\pi_1 X$ est un p-groupe fini alors les espaces $\Omega(\widehat{X})$ et $(\Omega X)\widehat{\ }$ ont le même type d'homotopie.

On peut maintenant reformuler la condition (C) de l'une des deux façons suivantes :

(C-bis) L'espace X est p-complet et le groupe $\pi_0 X$ est un p-groupe fini.

(C-ter) L'espace BX est p-complet.

Exemples exotiques de groupes p-compacts

Si X est groupe de Lie compact, disons connexe, alors le p-complété $\widehat{X}$ est un groupe p-compact. Pour p impair la proposition suivante, dûe à D. Sullivan, donne des exemples de groupes p-compacts qui ne sont pas de cette forme.

Proposition 0.— *Soient p un nombre premier impair et n un entier qui divise $p-1$. Alors le p-complété de la sphère S^{2n-1} possède une structure de groupe p-compact.*

Démonstration. Soit W l'unique sous-groupe de $\mathbf{Z}_p^\times$ de cardinal n (qui s'identifie *via* la réduction modulo p à l'unique sous-groupe de $\mathbf{F}_p^\times$ de cardinal n). Le groupe W opère sur l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbf{Z}_p, 2)$ si bien que l'on peut considérer la construction de Borel $Y = EW \times_W K(\mathbf{Z}_p, 2)$ (la notation EW désigne comme à l'ordinaire l'espace total du W-fibré principal universel). On vérifie alors que l'espace $X = \Omega\widehat{Y}$ a le type d'homotopie du p-complété de S^{2n-1}. Donnons quelques détails. Comme le cardinal de W est premier à p on a $H^*(Y;\mathbf{F}_p) \cong (H^*(K(\mathbf{Z}_p,2);\mathbf{F}_p))^W$; $H^*(K(\mathbf{Z}_p,2);\mathbf{F}_p)$ est l'algèbre de polynômes $\mathbf{F}_p[v]$ sur un générateur v de degré 2, $H^*(Y;\mathbf{F}_p)$ est l'algèbre de polynômes $\mathbf{F}_p[v^n]$. Comme $H^1(Y;\mathbf{F}_p)$ est nul on a $H^*(\widehat{Y};\mathbf{F}_p) \cong H^*(Y;\mathbf{F}_p)$. Ce qui précède montre que la cohomologie modulo p de X est celle de S^{2n-1} et les propriétés de la p-complétion impliquent finalement que X a bien le type d'homotopie du p-complété de S^{2n-1} (qui est p-complet).

On montre que la structure de groupe p-compact de $(S^{2n-1})\widehat{}$ exhibée ci-dessus est "unique" [DMW2] ; on montre en fait que si la cohomologie modulo p d'un espace p-complet Z est isomorphe à celle de l'espace Y qui apparaît ci-dessus alors il existe une application $Y \to Z$ qui réalise cet isomorphisme. Cette unicité est le type-même de sous-produit de la théorie que nous allons exposer, voir 6.1.

Il est beaucoup plus difficile d'exhiber un groupe 2-compact qui ne soit pas le 2-complété d'un groupe de Lie compact. En fait l'on n'en connaissait pas jusqu'à ce que Dwyer et Wilkerson, à la fin des années 80, construisent un remarquable groupe 2-compact $DI(4)$ [DW2] (qui mériterait peut-être le nom de G_3 ?) dont nous reparlerons un peu en 6.2.

1. THÉORIE NON ORTHODOXE DES TORES MAXIMAUX DES GROUPES DE LIE COMPACTS

La théorie des tores maximaux des groupes p-compacts que développent Dwyer et Wilkerson est l'analogue d'une théorie (non orthodoxe) des tores maximaux d'un groupe de Lie compact X dont les étapes sont décrites ci-dessous ; pour pouvoir s'étendre aux groupes p-compacts cette théorie non orthodoxe doit être la plus "homotopique" (et même "p-homotopique") possible.

1.1. Première étape

On montre qu'il existe dans la composante connexe d'un groupe de Lie compact non discret des éléments d'ordre p.

Méthode : Faire apparaître les homomorphismes de groupes comme les points fixes d'une action du groupe source.

Un élément dont le carré est l'élément neutre n'est rien d'autre qu'un point fixe de l'involution de X, $x \mapsto x^{-1}$. La généralisation de cette observation est la suivante. Soient G et X deux groupes (par groupe on entend dans cet exposé, sauf mention expresse du contraire, groupe topologique ou simplicial). On note $\mathrm{Hom}(G,X)$ l'espace des homomorphismes de G dans X et $\mathrm{Map}(G,X)$ l'espace de toutes les applications de G dans X ; $\mathrm{Map}(G,X)$ est un groupe et le sous-espace formé des applications constantes en est un sous-groupe qui s'identifie à X. Le groupe G opère naturellement sur l'espace $\mathrm{Map}(G,X)$ et sur l'espace homogène $\mathrm{Map}(G,X)/X$. L'espace $\mathrm{Hom}(G,X)$ s'identifie à l'espace des points fixes de cette action de G sur $\mathrm{Map}(G,X)/X$:

$$\text{(F)} \qquad \mathrm{Hom}(G,X) = (\mathrm{Map}\ (G,X)/X)^G\ .$$

On peut vérifier cette affirmation de la façon suivante. L'espace homogène $\mathrm{Map}(G,X)/X$ s'identifie à l'espace $\mathrm{Map}_*(G,X)$ des applications pointées de G dans X, c'est-à-dire l'espace des applications envoyant élément neutre sur élément neutre ; l'action de G sur $\mathrm{Map}_*(G,X)$ se traduit alors par

$$(g\cdot\rho)(\gamma) = \rho(\gamma g)(\rho(g))^{-1}\ .$$

Voici maintenant une version "relative" de la formule (F). Soient H un sous-groupe de G et σ un homomorphisme de H dans X. On note $\mathrm{Hom}^\sigma(G,X)$ le sous-espace de $\mathrm{Hom}(G,X)$ formé des homomorphismes

prolongeant σ et $\mathrm{Map}^{\sigma}(G,X)$ le sous-espace de $\mathrm{Map}(G,X)$ formé des applications H-équivariantes, H opérant sur X *via* σ ; soit $\mathrm{Hom}^{\sigma}(G,X)$ le sous-espace de $\mathrm{Hom}(G,X)$ formé des homomorphismes prolongeant σ. On a comme précédemment

$$\mathrm{Hom}^{\sigma}(G,X) = (\mathrm{Map}^{\sigma}(G,X)/X)^{G} .$$

Revenons maintenant au problème des éléments d'ordre p d'un groupe de Lie compact connexe non trivial.

Pour montrer qu'il existe des éléments d'ordre p on invoque l'un des deux théorèmes de points fixes suivants (on laisse au lecteur le soin de préciser ce que l'on entend par "action raisonnable" dans les deux énoncés ci-dessous, par exemple une action différentiable sur une variété compacte est raisonnable).

Théorème 1.1.1.— *Soit X un complexe fini muni d'une action raisonnable d'un p-groupe fini G. Alors la caractéristique d'Euler de X^G est congrue modulo p à la caractéristique d'Euler de X :*

$$\chi(X^G) \equiv \chi(X) \bmod p .$$

Théorème 1.1.2.— *Soit X un complexe fini muni d'une action raisonnable d'un groupe cyclique fini G. Alors la caractéristique d'Euler de X^G est égale au nombre de Lefschetz de l'action d'un générateur g de G sur $H^*(X;\mathbf{Q})$:*

$$\chi(X^G) = \Lambda(g) .$$

Observation. Un argument élémentaire de théorie de Galois montre que le nombre de Lefschetz $\Lambda(g)$ est indépendant du générateur g de G ; on le notera $\Lambda(X;G)$ ci-après.

Si l'on veut montrer qu'un groupe de Lie compact connexe non trivial X possède des éléments d'ordre p en invoquant le théorème 1.1.1 il faut calculer $\chi(X)$. On va montrer de façon "homotopique" que cette caractéristique est nulle si la cohomologie modulo p de X est non triviale.

Comme X est un groupe la cohomologie rationnelle $H^*(X;\mathbf{Q})$ est une algèbre de Hopf. Puisque $H^*(X;\mathbf{Q})$ est de dimension finie c'est une algèbre extérieure sur des générateurs primitifs de degré impair, $e_1, e_2, \cdots, e_r$; l'entier r s'appelle le rang rationnel de X (bien sûr r sera au bout du compte le rang du groupe de Lie X au sens habituel).

Lemme 1.1.3.— *Si $H^*(X;\mathbf{F}_p)$ est non trivial alors il en est de même pour $H^*(X;\mathbf{Q})$.*

Démonstration. Supposons par exemple $p = 2$, la démonstration est analogue dans le cas $p > 2$. A nouveau $H^*(X;\mathbf{F}_2)$ est une algèbre de Hopf ; cette fois l'algèbre sous-jacente est isomorphe à un produit tensoriel (fini et non vide) d'algèbres de la forme $\mathbf{F}_2[u]/u^{2^h}$ (avec $h > 0$). On en déduit que $\chi(X)$ est pair.

Scholie 1.1.4.— *Si $H^*(X;\mathbf{F}_p)$ est non trivial alors le rang rationnel de X est non nul et sa caractéristique est nulle.*

Le théorème 1.1.1 montre maintenant que l'espace $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/p, X)$ est non réduit à l'homomorphisme trivial. On a en effet

$$\chi(\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/p, X)) \equiv \chi(\mathrm{Map}(\mathbf{Z}/p, X)/X) \bmod p$$

et

$$\chi(\mathrm{Map}(\mathbf{Z}/p, X)/X) = \chi(X^{p-1}) = 0 \ .$$

Si l'on veut invoquer le théorème 1.1.2 il faut calculer le nombre de Lefschetz $\Lambda(\mathrm{Map}(\mathbf{Z}/p, X)/X; \mathbf{Z}/p)$.

Lemme 1.1.5.— *Le nombre de Lefschetz $\Lambda(\mathrm{Map}(\mathbf{Z}/p, X)/X; \mathbf{Z}/p)$ est égal à p^r, r désignant le rang rationnel de X.*

Démonstration. Pour simplifier on suppose $p = 2$. L'involution $a : X \to X$, $x \mapsto x^{-1}$, induit l'antipode de l'algèbre de Hopf $H^*(X;\mathbf{Q})$. On a donc $a^* e_i = -e_i$ et le nombre de Lefschetz de a est 2^r.

1.2 Deuxième étape

On montre que tout homomorphisme de $\mathbf{Z}/p$ dans X (il s'agit toujours d'un groupe de Lie compact connexe, disons non trivial) se prolonge en un homomorphisme de $\mathbf{Z}/p^\infty$ dans X (la notation $\mathbf{Z}/p^\infty$ désigne la limite inductive des groupes $\mathbf{Z}/p^n$).

On suppose encore $p = 2$. On doit montrer que tout homomorphisme de $\mathbf{Z}/2^n$ se prolonge à $\mathbf{Z}/2^{n+1}$, en d'autres termes, que tout élément x de X tel que x^{2^n} est l'élément neutre est un carré ou encore que l'application

$b : X \to X$, $y \mapsto xy^{-1}$, possède un point fixe. Pour cela on applique à nouveau le théorème 1.1.2. Puisque $b \circ b$ est la conjugaison par x, b définit une action de $\mathbf{Z}/2^{n+1}$ sur X. Puisque X est connexe les applications a et b sont homotopes et le nombre de Lefschetz de b est toujours 2^r.

1.3. Troisième étape

On considère l'adhérence de l'image d'un monomorphisme de $\mathbf{Z}/p^\infty$ dans X (de tels monomorphismes existent d'aprés les deux premières étapes). Cette adhérence est un sous-groupe, disons A, non trivial connexe abélien (connexe parce que tout homomorphisme de $\mathbf{Z}/p^\infty$ dans un groupe fini est trivial).

1.4. Quatrième étape

On considère le centralisateur dans X de A, disons C, et le quotient $Y = C/A$. La dimension du groupe de Lie Y est strictement inférieure à celle de X si bien que l'on peut supposer par récurrence que Y possède un tore maximal U ; on vérifie alors que l'image inverse T de U dans X est un tore maximal.

1.5. Cinquième étape

Soit N le normalisateur dans X de T ; puisque T est un tore maximal le quotient $W = N/T$ est un groupe fini (discret). On observe que l'espace des points fixes de l'action de T sur X/T s'identifie à W. En appliquant le théorème 1.5 ci-dessous on en déduit que la caractéristique d'Euler de X/T est égale au cardinal de W.

Théorème 1.5.— *Soit X un complexe fini muni d'une action raisonnable d'un tore T. Alors la caractéristique d'Euler de X^T est égale à la caractéristique d'Euler de X :*

$$\chi(X^T) = \chi(X) \ .$$

La même méthode montre que tous les tores maximaux de X sont conjugués.

1.6. Sixième étape

On montre que si X est connexe alors T est son propre centralisateur.

Dans le cas contraire le monomorphisme $T \hookrightarrow X$ s'étend en un monomorphisme $T \times G \hookrightarrow X$, G désignant un groupe cyclique, disons d'ordre un nombre premier p. On a :

- $\chi((X/T)^{T\times G}) = \chi((X/T)^G)$ d'aprés 1.5 puisque l'espace de points fixes $(X/T)^{T\times G}$ s'identifie à l'espace de points fixes $((X/T)^G)^T$;

- $\chi((X/T)^G) = \Lambda(X/T; G)$ d'aprés 1.1.2 ;

- $\Lambda(X/T; G) = \chi(X/T)$ puisque X est connexe.

Il en résulte que l'espace $(X/T)^{T\times G}$ est non vide. Il existe donc un monomorphisme de $T \times G$ dans T (induit par une conjugaison dans X). Ce qui est absurde.

1.7. Septième étape

On prouve l'isomorphisme $H^*(BX; \mathbf{Q}) \cong (H^*(BT; \mathbf{Q}))^W$; on prouve au passage que le rang rationnel et le rang d'un tore maximal coïncident. On en déduit que si X est connexe alors W est un groupe fini engendré par des réflexions qui laissent invariant un réseau.

On pose $R = H^*(BX; \mathbf{Q})$ et $S = H^*(BT; \mathbf{Q})$; R est un anneau de polynômes à r générateurs de degrés pairs, r désignant le rang rationnel de X (parce que $H^*(X; \mathbf{Q})$ est une algèbre extérieure sur des générateurs primitifs de degré impair), et S est un anneau de polynômes à s générateurs de degré 2, s désignant le rang du tore T. On note $\varphi : R \to S$ l'homomorphisme d'anneaux induit par l'application $BT \to BX$; S est un R-module *via* φ. On fait les observations suivantes :

- La suite spectrale de Serre de la fibration $X/T \to BT \to BX$ montre que S est un R-module de type fini (on utilise ici que R est noethérien).

- Puisque la caractéristique de X/T est non nulle l'existence du transfert de Becker-Gottlieb pour la fibration $X/T \to BT \to BX$ montre que φ est injectif. Un argument de degré de transcendance (ou de dimension de Krull) montre alors $r = s$. Un argument d'algèbre commutative montre ensuite que S est un R-module libre (voir par exemple [Ma]

Theorem 23.1). On en déduit $H^*(X/T;\mathbf{Q}) \cong \mathbf{Q} \otimes_R S$. Cet isomorphisme montre que $H^*(X/T;\mathbf{Q})$ est concentrée en degrés pairs. On a donc $\dim_{\mathbf{Q}} H^*(X/T;\mathbf{Q}) = \chi(X/T)$ et la dimension du R-module libre S est égale au cardinal de W. Enfin un peu de théorie de Galois montre que le monomorphisme $H^*(BX;\mathbf{Q}) \hookrightarrow (H^*(BT;\mathbf{Q}))^W$ est un isomorphisme.

L'étape précédente montre que si X est connexe W s'identifie à un sous-groupe d'automorphismes de $H^2(BT;\mathbf{Z})$; le fait que l'anneau d'invariants $(H^*(BT;\mathbf{Q}))^W$ est polynomial implique que ce sous-groupe est engendré par des réflexions (voir par exemple [Bo] Ch. 5, §5, n° 5.5).

1.8. Étape supplémentaire

On termine ce paragraphe en décrivant une méthode non orthodoxe pour montrer que la cohomologie modulo p du classifiant d'un groupe de Lie compact est noethérienne (c'est-à-dire engendrée comme $\mathbf{F}_p$-algèbre par un nombre fini d'éléments).

Soit N_p l'image inverse dans N d'un p-groupe de Sylow de W. On montre tout d'abord que $H^*(BN_p;\mathbf{F}_p)$ est noethérienne (à coup de suites spectrales de Serre...la méthode de Venkov est interdite !). On en déduit ensuite que $H^*(BX;\mathbf{F}_p)$ est noethériennne en utilisant le transfert de Becker-Gottlieb de la fibration $X/N_p \to BN_p \to BX$ et le lemme suivant (que l'on peut appliquer parce que la caractéristique d'Euler de X/N_p est première à p) :

Lemme 1.8.— *Soit $f : R_1 \to R_2$ un homomorphisme d'anneaux gradués commutatifs. On suppose que R_2 est noethérien et qu'il existe un homomorphisme de R_1-modules $g : R_2 \to R_1$ tel que le composé $g \circ f$ soit l'identité de R_1. Alors R_1 est noethérien.*

2. THÉORÈMES DE POINTS FIXES HOMOTOPIQUES

La stratégie de Dwyer et Wilkerson nécessite le remplacement des théorèmes de points fixes du §1 par des théorèmes de points fixes homotopiques.

La notion de point fixe homotopique

Soit X un espace muni d'une action d'un groupe G. On définit l'espace des points fixes homotopiques X^{hG} de cette action comme l'espace fonctionnel $\mathrm{Map}^G(EG, X)$ des applications G-équivariantes de EG dans X (rappelons que EG désigne l'espace total du G-fibré principal universel dont la base BG est le classifiant de G). On note X_{hG} le quotient homotopique, c'est-à-dire la construction de Borel $EG \times_G X$. On vérifie que l'application évidente de X^{hG} dans l'espace de sections $\Gamma(X_{hG} \to BG)$ de la projection de X_{hG} vers BG est un homéomorphisme.

Cohomologie modulo p de l'espace des points fixes homotopiques d'une action d'un p-groupe abélien élémentaire

On fixe un nombre premier p. Pour allèger la notation on désigne simplement par $H^*(-)$ la cohomologie modulo p d'un espace. Cette cohomologie est le type même de ce que l'on appelle une algèbre instable sur l'agèbre de Steenrod modulo p ou A-algèbre instable (voir par exemple [La]) ; la catégorie des A-algèbres instables est notée $\mathcal{K}$.

Soit maintenant V un p-groupe abélien élémentaire (*i.e.* un groupe isomorphe à $(\mathbf{Z}/p)^s$ pour un certain entier s).

La A-algèbre instable $H^*(X_{hV})$ est munie d'un homomorphisme de A-algèbres instables $H^*BV \to H^*(X_{hV})$ (induit par la projection $X_{hV} \to BV$) en d'autres termes $H^*(X_{hV})$ est un objet de la catégorie des A-algèbres instables au-dessous de H^*BV que l'on note $H^*BV \downarrow \mathcal{K}$.

L'application d'évaluation $e : BV \times X^{hV} = BV \times \Gamma(X_{hV} \to BV) \to X_{hV}$ est une application d'espaces au-dessus de BV ; elle induit donc un $(H^*BV \downarrow \mathcal{K})$-morphisme $H^*(e) : H^*(X_{hV}) \to H^*(BV \times X^{hV}) = H^*BV \otimes H^*X^{hV}$. Par "general nonsense" le foncteur $\mathcal{K} \to H^*BV \downarrow \mathcal{K}$, $L \mapsto H^*BV \otimes L$, admet un adjoint à droite que l'on note $\mathrm{Fix}_V : H^*BV \downarrow \mathcal{K} \to \mathcal{K}$. On a donc tout fait pour avoir un $\mathcal{K}$-morphisme naturel $\nu_{X,V} : \mathrm{Fix}_V H^*(X_{hV}) \to H^*X^{hV}$, à savoir l'adjoint de $H^*(e)$. On montre dans [La] Ch. 4 que $\nu_{X,V}$ est "souvent" un isomorphisme. Par exemple :

Théorème 2.1.— *Soit X un V-espace. On suppose que X et X^{hV} sont p-complets et que H^*X et $\mathrm{Fix}_V H^*(X_{hV})$ sont de dimension finie en chaque degré. Alors le $\mathcal{K}$-morphisme naturel*

$$\nu_{X,V} : \mathrm{Fix}_V H^*(X_{hV}) \to H^* X^{hV}$$

est un isomorphisme.

Théorie de Smith pour les points fixes homotopiques d'une action d'un groupe cyclique d'ordre p

Etant donné les applications que l'on a en vue on se limite maintenant au cas où V est cyclique d'ordre p.

On note c_V un élément non nul de H^1BV pour $p = 2$ et de H^2BV pour $p > 2$. Le théorème suivant ([DW1], pour une démonstration concurrente voir [LZ]) est un analogue algèbrique du théorème de localisation de la théorie de Smith classique pour les V-actions :

Théorème 2.2.— *Soit K une A-algèbre instable au-dessous de H^*BV qui est de type fini comme H^*BV-module. Alors la A-algèbre instable $\mathrm{Fix}_V K$ est de dimension finie et le localisé*

$$K[c_V^{-1}] \to H^*BV[c_V^{-1}] \otimes \mathrm{Fix}_V K$$

du $\mathcal{K}$-morphisme $K \to H^*BV \otimes \mathrm{Fix}_V K$ adjoint de l'identité de K est un isomorphisme.

Pour abréger les énoncés on dira ci-dessous qu'un espace ou une paire d'espaces sont *p-finis* si leur homologie modulo p est de dimension finie. Les théorèmes 2.1 et 2.2 impliquent le théorème suivant (l'application d'évaluation e permet de parler de la "paire" $(X_{hV}, BV \times X^{hV})$) :

Théorème 2.3.— *Soit X un espace muni d'une action d'un groupe V cyclique d'ordre p. On suppose que X est p-fini et que X et X^{hV} sont p-complets. Alors l'espace X^{hV} et la paire $(X_{hV}, BV \times X^{hV})$ sont p-finis.*

Version homotopique des théorèmes 1.1.1, 1.1.2, et 1.5.

Le théorème 2.3 conduit à une version homotopique des théorèmes 1.1.1 et 1.1.2. Pour pouvoir énoncer la version homotopique de 1.1.2 il nous faut introduire au préalable le substitut adéquat de la cohomologie rationnelle. On pose :

$$H^*_{\mathbf{Q}_p}(X) = \mathbf{Q} \otimes H^*(X; \mathbf{Z}_p) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} H^*(X; \mathbf{Z}_p) \ .$$

(Attention $H^*_{\mathbf{Q}_p}$ diffère en général de $H^*(X; \mathbf{Q}_q)$ ou de $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Q}} H^*(X; \mathbf{Q})$!) L'utilité dans le contexte présent du foncteur $H^*_{\mathbf{Q}_p}(-)$ tient au lemme suivant dont la démonstration est laissée en exercice au lecteur :

Lemme-Définition 2.4.— *Si une paire d'espace (X, Y) est p-finie, alors $H^*_{\mathbf{Q}_p}(X, Y)$ est de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ et la caractéristique d'Euler du $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel gradué $H^*(X, Y)$ est égale à celle du $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel gradué $H^*_{\mathbf{Q}_p}(X, Y)$:*

$$\chi(H^*(X, Y)) = \chi(H^*_{\mathbf{Q}_p}(X, Y)) \ .$$

La valeur commune de ces caractéristiques d'Euler est appelée la caractéristique d'Euler de la paire (X, Y) et notée $\chi(X, Y)$.

Théorème 2.5.— *Soit X un espace p-fini muni d'une action d'un p-groupe fini G. On suppose que pour tout sous-groupe K de G l'espace X^{hK} est p-complet. Alors l'espace X^{hG} est p-fini et sa caractéristique d'Euler est congrue modulo p à celle de X :*

$$\chi(X^{hG}) \equiv \chi(X) \bmod p \ .$$

Théorème 2.6.— *Soit X un espace p-fini muni d'une action d'un p-groupe fini cyclique G. On suppose que pour tout sous-groupe K de G l'espace X^{hK} est p-complet. Alors l'espace X^{hG} est p-fini et sa caractéristique d'Euler est égale au nombre de Lefschetz de l'action d'un générateur de G sur $H^*_{\mathbf{Q}_p}(X)$:*

$$\chi(X^{hG}) = \Lambda(X; G) \ .$$

Démonstration de 2.5 *et* 2.6 *dans le cas où* G *est cyclique d'ordre* p.

Le fait que X^{hG} est p-fini est déjà contenu dans 2.3, il reste donc à vérifier les affirmations concernant la caractéristique d'Euler de X^{hG}. On montre d'abord

$$\text{(R)} \qquad \chi(H^*(EG \times X, EG \times X^{hG})) = p\chi(H^*(X_{hG}, BG \times X^{hG})) \ .$$

Pour cela on considère $H^*(EG \times X, EG \times X^{hG})$ comme la cohomologie à coefficients locaux $H^*(X_{hG}, BG \times X^{hG}; \mathbf{F}_p[G])$, on filtre $\mathbf{F}_p[G]$ par les puissances de l'idéal d'augmentation, et on utilise "l'additivité de la caractéristique d'Euler". Toujours grâce à cette additivité on obtient

$$\chi(X) - \chi(X^{hG}) = p\chi(X_{hG}, BG \times X^{hG}) \ .$$

En utilisant l'isomorphisme

$$H^*_{\mathbf{Q}_p}(X_{hG}, BG \times X^{hG}) \cong (H^*_{\mathbf{Q}_p}(EG \times X, EG \times X^{hG}))^G$$

on a ensuite

$$p\chi(H^*_{\mathbf{Q}_p}(X_{hG}, BG \times X^{hG})) =$$

$$\chi(H^*_{\mathbf{Q}_p}(EG \times X, EG \times X^{hG})) + (p-1)\Lambda(EG \times X, EG \times X^{hG}; G) \ ,$$

$\Lambda(EG \times X, EG \times X^{hG}; G)$ désignant le nombre de Lefschetz de l'action d'un générateur de G sur $H^*_{\mathbf{Q}_p}(EG \times X, EG \times X^{hG})$. En utilisant 2.4 et en comparant avec la relation (R) ci-dessus, on a

$$\Lambda(EG \times X, EG \times X^{hG}; G) = 0 \ .$$

Par "additivité du nombre de Lefschetz" on obtient

$$\chi(X^{hG}) = \Lambda(X; G) \ .$$

Enfin Dwyer et Wilkerson proposent la version homotopique suivante de 1.5 qui est essentiellement conséquence de 2.6 :

Théorème 2.7.— *Soit* X *un espace* p*-fini muni d'une action du groupe discret* $\Theta = (\mathbf{Z}/p^\infty)^s$. *On suppose que pour tout sous-groupe fini* K *de* Θ *l'espace* X^{hK} *est* p*-complet. Alors pour tout sous-groupe fini* K *de* Θ *l'espace* X^{hK} *est* p*-fini et sa caractéristique d'Euler est égale à* $\chi(X)$. *Si* $\chi(X)$ *est non nulle alors l'espace* $X^{h\Theta}$ *est non vide.*

3. DICTIONNAIRE THÉORIE CLASSIQUE-THÉORIE HOMOTOPIQUE

On pose les définitions qui permettent de traduire le §1 en termes de groupes p-compacts. Pour 3.1 et 3.3 on procède de la façon suivante. On interprète tout d'abord les définitions de la théorie des groupes en termes de points fixes (voir par exemple le début du §1). On identifie ensuite les espaces de points fixes homotopiques correspondants. Le résultat conduit aux définitions de la théorie homotopique.

3.1. Homomorphismes

Un *homomorphisme* $f : G \to X$ d'espaces de lacets est une application pointée $Bf : BG \to BX$. Deux homomorphismes $f, g : G \to X$ sont *conjugués* si Bf et Bg sont librement homotopes, c'est-à-dire homotopes en tant qu'applications non pointées. Un homomorphisme f est un *isomorphisme* si Bf est une équivalence d'homotopie et est *trivial* si Bf est homotope à l'application triviale.

Motivations

Voici une motivation de la définition ci-dessus d'homomorphisme d'espaces de lacets. Soient G et X deux groupes. On a vu au §1 que l'espace $\mathrm{Hom}(G, X)$ s'interprète comme l'espace de points fixes $(\mathrm{Map}(G, X)/X)^G$. Posons donc :

$$h\mathrm{Hom}(G, X) = (\mathrm{Map}(G, X)/X)^{hG} .$$

On peut voir $h\mathrm{Hom}(G, X)$ comme l'espace des applications $\xi : G \times EG \to X$ vérifiant

$$\xi(gh, w) = \xi(g, hw)\xi(h, w)$$

ou encore comme l'espace des homomorphismes croisés du groupe G dans le groupe $\mathrm{Map}(EG, X)$ muni de l'action de G induite par l'action de G sur EG. Soit $\mathrm{Map}_*(BG, BX)$ l'espace des applications pointées de BG dans BX ; on vérifie que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(G, X) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_*(BG, BX) \\ \downarrow & & \downarrow \\ h\mathrm{Hom}(G, X) & \longrightarrow & F(G, X) \end{array}$$

dans lequel :

- la flèche horizontale du haut et la flèche verticale de gauche sont les applications évidentes ;

- la flèche horizontale du bas et la flèche verticale de droite sont des équivalences d'homotopie dont le but commun $F(G,X)$ est un espace qui dépend fonctoriellement des groupes G et X.

Justifions maintenant la définition d'homomorphismes d'espaces de lacets conjugués. L'application $\mathrm{Hom}(G,X) \to \mathrm{Map}_*(BG,BX)$ est X-équivariante si l'on munit les espaces $\mathrm{Hom}(G,X)$ et $\mathrm{Map}_*(BG,BX)$ des actions induites par l'action par conjugaison de X sur lui-même. Le quotient homotopique $(\mathrm{Map}_*(BG,BX))_{hX}$ a le type d'homotopie de l'espace $\mathrm{Map}(BG,BX)$.

(En fait on peut choisir un modèle pour EX de telle sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

- l'espace EX est un groupe, X en est un sous-groupe, BX est l'espace homogène EX/X (ou $X\backslash EX$) ;

- la restriction à X de l'action de EX sur BX coïncide avec celle induite par l'action par conjugaison de X sur lui-même ;

- pour tout espace S l'inclusion $\mathrm{Map}_*(S,BX) \hookrightarrow \mathrm{Map}(S,BX)$ induit un homéomorphisme $EX \times_X \mathrm{Map}_*(S,BX) \to \mathrm{Map}(S,BX)$.)

3.2. Espaces homogènes, monomorphismes

Soit $f : G \to X$ un homomorphisme d'espaces de lacets. *L'espace homogène* $X/f(G)$ (ou X/G si f est implicite) est défini comme la fibre homotopique de l'application $Bf : BG \to BX$. Dans le cas où G et X sont des groupes p-compacts on dit que f est un *monomorphisme* (resp. *épimorphisme*) si X/G (resp. $\Omega(X/G)$) est p-fini. On dit que $1 \to X' \to X \to X'' \to 1$ est une *suite exacte* de groupes p-compacts si la suite $BX' \to BX \to BX''$ est fibrée ; dans ce cas $X' \to X$ est un monomorphisme et $X \to X''$ est un épimorphisme.

Exercice. Vérifier qu'un homomorphisme de groupes p-compacts qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme est un isomorphisme.

Motivation

Soit $f : G \to X$ un homomorphisme de groupes. La fibre homotopique de l'application Bf a le type d'homotopie, de l'espace homogène usuel $X/f(G)$ si f est injectif, de l'espace classifiant $B(Ker f)$ si f est surjectif.

Remarque. Une fois démontré que la cohomologie modulo p du classifiant d'un groupe p-compact est noethérienne (théorème 4.12) on dispose de la caractérisation suivante des monomorphismes de groupes p-compacts :

Proposition 3.2.— *Un homomorphisme $f : G \to X$ de groupes p-compacts est un monomorphisme si et seulement si $H^*(BG; \mathbf{F}_p)$ est de type fini comme $H^*(BX; \mathbf{F}_p)$-module via $(Bf)^*$.*

3.3. Centralisateurs

Soit $f : G \to X$ un homomorphisme d'espaces de lacets. *Le centralisateur* de $f(G)$ (ou de f) dans X, que l'on note $C_X(f(G))$ (ou simplement $C_X(G)$ si f est implicite), est l'espace $\Omega_{Bf}\,\mathrm{Map}(BG, BX)$ des lacets de $\mathrm{Map}(BG, BX)$ d'origine Bf ; l'espace classifiant $BC_X(f(G))$ est la composante connexe de Bf dans $\mathrm{Map}(BG, BX)$. L'évaluation au point base de BG fournit un homomorphisme $C_X(f(G)) \to X$; on dit que f est *central* si cet homomorphisme est un isomorphisme. On dit qu'un espace de lacets A est *abélien* si l'identité de A est un homomorphisme central.

Motivation

Soit X un groupe. On sait que l'espace des lacets libres $\mathrm{Map}(S^1, BX)$ a le type d'homotopie de la construction de Borel $EX \times_X X$, X opérant sur lui-même par conjugaison. Voici une manière de s'en convaincre. On choisit à nouveau un bon modèle pour EX (voir plus haut). Alors l'équivalence d'homotopie $X \to \Omega BX = \mathrm{Map}_*(S^1, BX)$ est X-équivariante, X opérant sur lui-même par conjugaison et sur ΩBX par l'action induite, et l'on a un diagramme de fibrés de groupe structural X :

$$\begin{array}{ccccc} EX \times_X X & \longrightarrow & EX \times_X \mathrm{Map}_*(S^1, BX) & = & \mathrm{Map}(S^1, BX) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ BX & \xrightarrow{Id} & BX & & \end{array}$$

dans ce diagramme, la flèche horizontale du haut est une équivalence d'homotopie et la flèche verticale de droite, vue comme une application de $\mathrm{Map}(S^1, BX)$ dans BX , est l'évaluation au point base.

Soit maintenant $\rho : G \to X$ un homomorphisme de groupes. L'action par conjugaison de X sur lui-même induit *via* ρ une action de G sur X ; l'espace des points fixes X^G (qui est un groupe) est le centralisateur de

$\rho(G)$ dans X. L'espace des points fixes homotopiques X^{hG} s'identifie au sous-espace de $\mathrm{Map}(BG, EX \times_X X)$ "formé des applications qui relèvent $B\rho$" ; on a donc une équivalence d'homotopie naturelle entre X^{hG} et le sous- espace de $\mathrm{Map}(BG, \mathrm{Map}(S^1, BX))$ "formé des applications qui relèvent $B\rho$", c'est-à-dire l'espace de lacets $\Omega_{B\rho}\ \mathrm{Map}(BG, BX)$.

4. RÉSULTATS DE LA THÉORIE DES TORES MAXIMAUX DES GROUPES p-COMPACTS

Comme nous l'avons déjà dit, Dwyer et Wilkerson obtiennent ces résultats en remplaçant dans la théorie décrite au §1 les théorèmes de points fixes par les théorèmes de points fixes homotopiques. Signalons qu'ils doivent développer au passage une version cohomologique *ad hoc* du transfert de Becker-Gottlieb pour les fibrations à fibre p-finie ([DW3] 9.12) car les versions habituelles supposent que la fibre est un complexe fini ; pour diverses généralisations voir [Dw]. Signalons également que si l'on suppose que l'algèbre $H^*(BX; \mathbf{F}_p)$ est intègre et de degré de transcendance fini sur $\mathbf{F}_p$ (ce qui est le cas en particulier si $H^*(BX; \mathbf{F}_p)$ est une algèbre de polynômes), et que p est impair, alors l'essentiel de la théorie se trouve déjà dans [DMW2] où sont abordées en outre les questions de classification (voir §5).

Proposition 4.1.— *Soit X un groupe p-compact connexe non trivial, alors il existe un homomorphisme non trivial de $\mathbf{Z}/p$ dans X.*

(*Démonstration pour $p = 2$.* On se convainc tout d'abord de ce que l'espace $\mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}/2, BX)$ a le type d'homotopie de l'espace des points fixes homotopiques de l'involution de ΩBX qui a un lacet fait correspondre son inverse. On applique ensuite les théorèmes 2.5 ou 2.6. On sait donc que la caractéristique d'Euler $\chi(\mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}/2, BX))$ est différente de 1. Or la composante connexe dans $\mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}/2, BX)$ de l'application triviale est contractile. En effet l'espace de lacets, en l'application triviale, de cette composante a le type d'homotopie de l'espace $\mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}/2, X)$ qui est contractile d'aprés [Mi]. On observera au passage que ceci signifie que l'homomorphisme trivial de $\mathbf{Z}/2$ dans X est central ... ce qui est rassurant !)

Proposition 4.2.— *Soit X un groupe p-compact connexe, alors tout homomorphisme de $\mathbf{Z}/p^n$ dans X se prolonge à $\mathbf{Z}/p^{n+1}$.*

Définition 4.3. Un *tore p-compact* de rang s est un groupe p-compact tel que BT est un espace d'Eilenberg-MacLane de type $K((\mathbf{Z}_p)^s, 2)$.

L'énoncé de définition 4.5 nécessite la proposition suivante dont l'analogue classique est une trivialité :

Proposition 4.4.— *Soit $f : T \to X$ un homomorphisme d'un tore p-compact dans un groupe p-compact. Alors f se relève canoniquement en un homomorphisme $\widetilde{f} : T \to C_X(f(T))$ de T dans le centralisateur de $f(T)$.*

Définition 4.5. Un *tore maximal* pour un groupe p-compact X est la donnée d'un tore p-compact T et d'un monomorphisme $i : T \to X$ tel que l'espace homogène $C_X(i(T))/\widetilde{i}(T)$ est homotopiquement discret (on dit qu'un espace est *homotopiquement discret* si chacune de ses composantes est contractile).

Théorème 4.6.— *Tout groupe p-compact possède un tore maximal "unique à conjugaison près".*

Comme dans le contexte classique l'unicité à conjugaison près est un cas particulier de l'énoncé suivant.

Proposition 4.7.— *Soient X un groupe p-compact, $i : T \to X$ un tore maximal, et $f : T' \to X$ un homomorphisme d'un tore p-compact dans X. Alors il existe un homomorphisme $g : T' \to T$ tel que $i \circ g$ et f soient conjugués.*

Proposition 4.8.— *Un tore maximal d'un groupe p-compact connexe est son propre centralisateur : l'homomorphisme $\widetilde{i} : T \to C_X(i(T))$ de la définition 4.5 est un isomorphisme.*

Définition 4.9. Soient X un groupe p-compact et $i : T \to X$ un tore maximal. Si $Bi : BT \to BX$ est une fibration *l'espace de Weyl* $\mathcal{W}_T(X)$ est défini comme l'espace des applications w de BT dans BT vérifiant $w \circ Bi = Bi$; dans le cas général $\mathcal{W}_T(X)$ est défini en remplaçant au préalable Bi par une fibration. La composition des applications fait de $\mathcal{W}_T(X)$ un monoïde (topologique).

Proposition-Définition 4.10.— *Soient X un groupe p-compact et $i : T \to X$ un tore maximal, alors l'espace de Weyl $\mathcal{W}_T(X)$ est homotopiquement discret et le monoïde discret $\pi_0\mathcal{W}_T(X)$ est un groupe fini. Ce groupe est noté $W_T(X)$. A automorphisme intérieur près $W_T(X)$ est indépendant du choix de T ; pour cette raison $W_T(X)$ est appelé le groupe de Weyl de X.*

Le rang rationnel r d'un groupe p-compact X est défini comme dans le cas des groupes de Lie compact : l'algèbre de Hopf $H^*_{\mathbf{Q}_p}(X)$ est une algèbre extérieure sur r générateurs primitifs de degré impair et l'algèbre $H^*_{\mathbf{Q}_p}(BX)$ est une algèbre de polynômes sur r générateurs de degré pair.

Théorème 4.11.— *Soient X un groupe p-compact et $i : T \to X$ un tore maximal.*

(a) Le rang s de T est égal au rang rationnel r de X.

(b) Si X est connexe, l'homomorphisme

$$W_T(X) \to \mathrm{Aut}(H^2(BT; \mathbf{Z}_p)) \approx GL_s(\mathbf{Z}_p)$$

induit par l'action de $\mathcal{W}_T(X)$ sur BT (on suppose que Bi est une fibration) est un monomorphisme dont l'image est un sous-groupe fini engendré par des pseudo-réflexions.

(c) L'homomorphisme

$$H^*_{\mathbf{Q}_p}(BX) \to (H^*_{\mathbf{Q}_p}(BT))^{W_T(X)}$$

induit par Bi est un isomorphisme.

Remarque. Soit X un groupe de Lie compact connexe. Il résulte par exemple du théorème ci-dessus que le groupe de Weyl du groupe p-compact $\widehat{X}$ coïncide avec celui de X (et est donc indépendant de p).

Théorème 4.12.— *Soit X un groupe p-compact. Alors la $\mathbf{F}_p$-algèbre $H^*(BX; \mathbf{F}_p)$ est engendrée par un nombre fini d'éléments.*

5. LE PROBLÈME DE LA CLASSIFICATION DES GROUPES p-COMPACTS

Les recherches dans ce domaine ne sont pas actuellement terminées. Le lecteur est donc invité à redoubler d'esprit critique lors de la lecture de ce paragraphe.

Soient X un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal de X, et N le normalisateur de T dans X. On sait que la classe d'isomorphisme de X est déterminée par celle de N (pour le cas où X est semi-simple voir [CWW]), aussi est-on amené à faire une conjecture analogue dans le contexte des groupes p-compacts.

Définition 5.1. Soient X un groupe p-compact et $i : T \to X$ un tore maximal. On note $B\mathcal{N}(T)$ la construction de Borel de l'action de $W_T(X)$ sur BT. *Le normalisateur* de T, noté $\mathcal{N}(T)$, est l'espace de lacets $\Omega B\mathcal{N}(T)$.

(Attention, si $W_T(X)$ n'est pas un p-groupe fini alors $\mathcal{N}(T)$ n'est pas un groupe p-compact.)

Conjecture 5.2. Soient X un groupe p-compact connexe et $i : T \to X$ un tore maximal. La classe d'isomorphisme de X est déterminée par celle du normalisateur $\mathcal{N}(T)$, c'est-à-dire par le type d'homotopie de l'espace $B\mathcal{N}(T)$.

L'espace $B\mathcal{N}(T)$ est à homotopie près l'espace total d'une fibration de base $BW_T(X)$ et de fibre BT ; son type d'homotopie est donc déterminé par une classe γ appartenant à $H^3(W_T(X); H_2(BT; \mathbf{Z}))$. On observe que l'on a un isomorphisme canonique $H^3(W_T(X); H_2(BT; \mathbf{Z})) \cong H^2(W_T(X); \Theta)$, Θ désignant le groupe discret $H_2(BT; \mathbf{Z}/p^\infty) \approx (\mathbf{Z}/p^\infty)^r$ qui doit être considéré comme "une approximation discrète" de T (voir [DW3] §6). La donnée de γ est donc équivalente à celle d'une extension de groupes discrets $1 \to \Theta \to \Gamma \to W_T(X) \to 1$ (que l'on note encore γ) ; il est à noter que la donnée de Γ détermine à son tour l'extension γ car Θ peut être caractérisé comme le plus petit sous-groupe (normal) de Γ d'indice fini.

On associe donc à un p-groupe compact X un triplet $(L(X), W(X), \gamma(X))$ du type (L, W, γ) suivant :

- L est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de dimension finie, on pose $L(X) = H_2(BT;\mathbf{Z}) \cong \pi_1 T$;

- W est un sous-groupe fini de $\mathrm{Aut}(L)$ engendré par des pseudo-réflexions, $W(X)$ est le groupe de Weyl de X ;

- γ est un élément de $H^2(W;(\mathbf{Z}/p^\infty) \otimes L)$, $\gamma(X)$ est l'unique k-invariant de $B\mathcal{N}(T)$.

On peut maintenant reformuler la conjecture 5.2 de la façon suivante :

Conjecture 5.2 bis. Soient X un groupe p-compact connexe et $i : T \to X$ un tore maximal. La classe d'isomorphisme de X est déterminée par celle du triplet $(L(X), W(X), \gamma(X))$.

Si l'on croit à cette conjecture alors le programme est le suivant :

- déterminer les triplets (L, W, γ) qui correspondent à des groupes p-compacts ;

- vérifier qu'un tel triplet est réalisé par un seul groupe p-compact (à isomorphisme près).

Oublions l'extension γ. Le couple (L, W) est "somme directe" de couples "irréductibles" dont la liste (à isomorphisme près) a été faite par Clark et Ewing [CE] (le point de départ de Clark et Ewing est la classification par Shepard et Todd des sous-groupes finis des $GL_n(\mathbf{C})$ engendrés par des pseudo-réflexions [ST]). Il n'existe qu'un nombre fini de classes irréductibles (L, W) en plus de celles correspondant aux groupes de Lie compacts connexes simples. Pour $p = 2$ il n'en existe qu'une qui est réalisée par le groupe 2-compact $DI(4)$; on conjecture en fait que tout groupe 2-compact connexe est isomorphe au produit du 2-complété d'un groupe de Lie compact connexe par un certain nombre de copies de $DI(4)$ (pour un pas dans cette direction voir [DW4]). Pour $p > 2$ il semble aussi que toutes les classes irréductibles (L, W) "exotiques" soient réalisables (C. Xu, Aguadé-Broto-Notbohm-Oliver).

Revenons à l'extension γ. Il résulte de [Ti] que si X est le p-complété d'un groupe de Lie compact connexe alors γ (resp. 2γ) est nul pour p impair (resp. pair). Selon Dwyer et Wilkerson l'analyse des classes irréductibles (L, W) exotiques semble montrer que γ est encore nulle dans le cas des groupes p-compacts connexes pour p impair.

Terminons ce paragraphe en énoncant le théorème ci-dessous qui découle facilement de la théorie du §4 et qui confirme la conjecture 5.2 bis dans le cas particulier où p ne divise pas l'ordre de W (il est à observer que pour $p = 2$ cette condition implique en fait que W est trivial).

Théorème 5.3.— *Si p ne divise pas l'ordre de W alors BX a le type d'homotopie du p-complété de la construction de Borel $EW \times_W K(L, 2)$.*

Remarque. Si p ne divise pas l'ordre de W alors $H^*(BX; \mathbf{F}_p)$ est isomorphe à l'algèbre d'invariants $(H^*(K(L, 2); \mathbf{F}_p))^W$. Dwyer, Miller, et Wilkerson montrent dans [DMW2] que si la cohomologie modulo p d'un espace Y est isomorphe comme A-algèbre instable à $(H^*(K(L, 2); \mathbf{F}_p))^W$ alors la p-complétion de Y a le type d'homotopie de celle de $EW \times_W K(L, 2)$.

6. ILLUSTRATIONS

6.1. Sur les sphères dont le p-complété admet une structure de groupe p-compact

Soit S^m une sphère dont le p-complété admet une structure de groupe p-compact de classifiant B. Nécessairement m est impair, $m = 2n - 1$, par exemple parce que $H^*_{\mathbf{Q}_p}(S^m) = \mathbf{Q}_p[e]/e^2$ admet une structure d'algèbre de Hopf ; on a $H^*_{\mathbf{Q}_p}(B) \cong \mathbf{Q}_p[x]$ avec x de degré $2n$. Le rang rationnel est 1, le groupe de Weyl W est donc un sous-groupe fini de $\mathbf{Z}_p^\times$. L'isomorphisme $H^*_{\mathbf{Q}_p}(B) \cong (H^*_{\mathbf{Q}_p}(K(\mathbf{Z}_p, 2)))^W$ montre que n est égal au cardinal de W. On distingue alors les cas $p > 2$ et $p = 2$.

Pour $p > 2$ le cardinal de W est premier à p si bien que l'on peut appliquer 5.3. On retrouve les exemples de Sullivan : B a le type d'homotopie du p-complété de la construction de Borel $EW \times_W K(\mathbf{Z}_p, 2)$.

Pour $p = 2$ l'entier n prend les valeurs 1 et 2 . Dans les deux cas la structure de groupe 2-compact correspondante est la 2-complétée de la structure de groupe de Lie de S^{2n-1}. Le cas $n = 1$ est trivial puisque B est par définition un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbf{Z}_2, 2)$. Le cas $n = 2$ nécessite le joli résultat de [DMW1] : un espace 2-complet dont la cohomologie modulo 2 est isomorphe à celle de BS^3 a le type d'homotopie du 2-complété de BS^3.

6.2. Sur le groupe 2-compact $DI(4)$

Le groupe 2-compact $DI(4)$ construit par Dwyer et Wilkerson dans [DW2] est le dernier d'une série de quatre groupes 2-compacts. Les trois premiers sont les 2-complétés des groupes de Lie compacts, $X_0 = \mathbf{Z}/2$, $X_1 = SO(3)$, $X_2 = G_2$. On pose $X_3 = DI(4)$; $DI(4)$ n'est pas le 2-complété d'un groupe de Lie compact. Les X_n, $0 \leq n \leq 3$, possèdent les propriétés ci-après (dans le cas de $DI(4)$ on se permet les abus de langage suggérés par le §3 et même davantage, en particulier chaque fois que l'on parle d'action du groupe de Weyl sur le tore maximal le puriste aura intérêt à remplacer celui-ci par son approximation discrète $\Theta = H_2(BT; \mathbf{Z}/p^\infty) \cong \mathbf{Z}/p^\infty \otimes \pi_1 T$; pour alléger la notation on supprime ci-dessous l'indice n) :

- Le rang de X est n.

- Soit F le sous-groupe d'un tore maximal T formé des éléments dont le carré est l'élement neutre (on a donc $F \approx (\mathbf{Z}/2)^n$). Le tore T est d'indice 2 dans le centralisateur $C_X(F)$, l'action du quotient $C_X(F)/T$ sur T correspond à l'involution $t \mapsto t^{-1}$, et l'extension $1 \to T \to C_X(F) \to C_X(F)/T \to 1$ est triviale.

L'action du groupe de Weyl W sur F induit un épimorphisme de W sur $\mathrm{Aut}(F)$ dont le noyau est $C_X(F)/T$.

L'extension :

$$\text{(A)} \qquad 1 \to C_X(F)/T \to W \to \mathrm{Aut}(F) \to 1$$

est scindée pour $n = 3$ grâce au déterminant $W \to \{\pm 1\} \subset \mathbf{Z}_2^\times$, on a donc alors un isomorphisme $W \approx SL_3(\mathbf{F}_2) \times \{\pm 1\}$ (ce groupe est le sujet de l'exercice 4 de [Bo] Ch. 5, §5 où l'on demande notamment de montrer qu'il n'est pas un groupe de Coxeter). Le fait que l'action tautologique de $\mathrm{Aut}(F)$ sur F se prolonge en une action de $\mathrm{Aut}(F)$ sur T ("préservant l'orientation") se traduit par l'existence d'un homomorphisme $SL_3(\mathbf{F}_2) \to SL_3(\mathbf{Z}_2)$ qui est une section de la réduction modulo 2, $SL_3(\mathbf{Z}_2) \to SL_3(\mathbf{F}_2)$. Signalons que (A) est également scindable pour $n = 2$.

- La restriction à F de l'extension $1 \to T \to C_X(F) \to C_X(F)/T \to 1$ fournit un sous-groupe E de $C_X(F)$ isomorphe à $(\mathbf{Z}/2)^{n+1}$. On a cette fois : $C_X(E) = E$. Soit $N_X(E)$ le normalisateur de E dans X. L'application canonique $N_X(E)/E \to \mathrm{Aut}(E)$ est un isomorphisme. L'inclusion de E dans X induit un isomorphisme

$$H^*(BX; \mathbf{F}_2) \cong (H^*(BE; \mathbf{F}_2))^{\mathrm{Aut}(E)} .$$

(Cet isomorphisme explique la notation $DI(4)$: $H^*(BDI(4);\mathbf{F}_2)$ est l'algèbre de Dickson d'ordre 4.)

- Tous les éléments d'ordre 2 de X sont conjugués. Soit G le centralisateur d'un tel élément alors la caractéristique d'Euler de l'espace homogène X/G est $2^n - 1$ (ici l'on suppose n non nul).

Pour $n = 3$ le groupe 2-compact G est isomorphe au 2-complété de Spin(7).

Quelques informations sur la construction de $BDI(4)$

L'espace $BDI(4)$ est construit comme la limite directe homotopique d'un foncteur contravariant α défini sur une certaine catégorie $\mathcal{C}$ et à valeurs dans la catégorie des espaces. Les objets de la catégorie $\mathcal{C}$ sont les 2-groupes abéliens élémentaires $E_k = (\mathbf{Z}/2)^k, 1 \leq k \leq 4$, et ses morphismes sont les monomorphismes de groupes de E_k dans E_ℓ. Le type d'homotopie de $\alpha(E_k)$ est celui du 2-complété du classifiant du centralisateur dans Spin(7) d'un sous-groupe contenant le centre et isomorphe à E_k (en particulier $\alpha(E_1)$ a le type d'homotopie du 2-complété de $B\mathrm{Spin}(7)$ et $\alpha(E_4)$ celui de BE_4). La possibilité de définir α sur $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(E_3)$ tient à l'existence de la section $SL_3(\mathbf{F}_2) \to SL_3(\mathbf{Z}_2)$ de la réduction modulo 2 évoquée ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

[BK] A. K. Bousfield et D. M. Kan, Homotopy limits, Completions, and Localizations, *Springer L. N. M.*, **304**, 1972.

[Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Ch. 4, 5 et 6, Hermann, Paris, (1968).

[CWW] M. Curtis, A. Wiederhold and B. Williams, Normalizers of Maximal Tori, *Springer L.N.M.*, **418** (1974), 31-47.

[DMW1] W. G. Dwyer, H. R. Miller and C. W. Wilkerson, The Homotopic Uniqueness of BS^3, Algebraic Topology Barcelona, 1986 (proceedings), *Springer L.N.M.*, **1298** (1987), 90-105.

[DMW2] W. G. Dwyer, H. R. Miller and C. W. Wilkerson, Homotopical Uniqueness of Classifying Spaces, *Topology*, **31** (1992), 29-45.

[Dw] W. G. Dwyer, Transfer maps for fibrations, preprint 1993.

[DW1] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson, Smith theory and the functor T, *Comm. Math. Helv.*, **66** (1991), 1-17.

[DW2] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson, A new finite loop space at the prime two, *J. Amer. Math. Soc.*, **6** (1993), 37-63.

[DW3] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson, Homotopy fixed points methods for Lie groups and finite loop spaces, *Annals of Math.*, **139** (1994), 395-442.

[DW4] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson, The center of a p-compact group, preprint 1993.

[DW5] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson, Products of small finite loop spaces at the prime 2 , preprint 1993.

[CE] A. Clark and J. Ewing, The realization of polynomial algebras as cohomology rings, *Pacific J. Math.*, **50** (1974), 425-434.

[La] J. Lannes, Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire, *Publ. Math. I. H. E. S.*, **75** (1992), 135-244.

[LZ] J. Lannes et S. Zarati, Théorie de Smith algébrique et classification des $H^*V - \mathcal{U}$-injectifs, *Prépublication Mathématique de l'Université Paris VII*, **42** (1992).

[Ma] H. Matsumara, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **8**.

[Mi] H. R. Miller, The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces, *Annals of Math.*, **120** (1984), 39-87.

[ST] G. C. Shephard and J. A. Todd, Finite unitary reflection groups, Canadian J. Math., **6** (1954) 274-304.

[Ti] J. Tits, Normalisateurs de tores I. Groupes de Coxeter étendus., *J. of Algebra*, **4** (1966), 96-116.

Jean LANNES
URA 169 et 212 du CNRS
Université Denis Diderot
Département de Mathématiques
Tour 45-55, 5ème étage
2, place Jussieu
F-75251 PARIS Cedex 05

Astérisque

OLIVIER MATHIEU

Équations de Knizhnik-Zamolodchikov et théorie des représentations

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki, exp. n° 777, p. 47-67
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__47_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 1993
46ème année, 1993-94, n° 777

ÉQUATIONS DE KNIZHNIK-ZAMOLODCHIKOV ET THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

par **Olivier MATHIEU**

INTRODUCTION

Les équations de Knizhnik-Zamolodchikov sont des équations aux différences totales de la forme $d\Phi = \omega.\Phi$ avec $\omega = \sum_{0\leq i<j\leq n} X_{i,j}(d(z_i - z_j))/(z_i - z_j)$, où $X_{i,j}$ sont des matrices à coefficients constants opérant sur un certain espace W. De plus W est un produit tensoriel de m représentations d'une algèbre de Lie semi-simple et les matrices $X_{i,j}$ s'obtiennent comme des combinaisons d'actions d'éléments de Casimir.

Ces équations apparaissent dans les travaux de Knizhnik, Zamolodchikov **[KZ]**, Belavin, Poliakov, Zamolodchikov **[BPZ]** comme des équations satisfaites par certaines fonctions de corrélation (en théorie conforme des champs en genre 0).

D'après les travaux de Drinfeld, Kohno et Jimbo, la monodromie de ces équations peut être calculée à l'aide de R-matrices associées aux représentations des groupes quantiques.

Récemment Kazhdan et Lusztig ont établi un théorème d'équivalence de catégories entre représentations de groupes quantiques et représentations d'algèbres de Kač-Moody de niveau négatif à l'aide de constructions inspirées de la théorie conforme des champs. En fait de telles équivalences de catégorie avaient été suggérées dans les travaux de Moore, Seiberg, Drinfeld et autres, mais uniquement pour des catégories de représentations de niveau positif. Ce résultat de Kazhdan et Lusztig est un pas crucial vers la solution du problème classique de déterminer les dimensions (et plus généralement les caractères) des représentations simples des groupes algébriques en caractéristique finie.

Remerciements : Je tiens à remercier G. Georgiev et J. Lepowsky pour les conversations que nous avons eues.

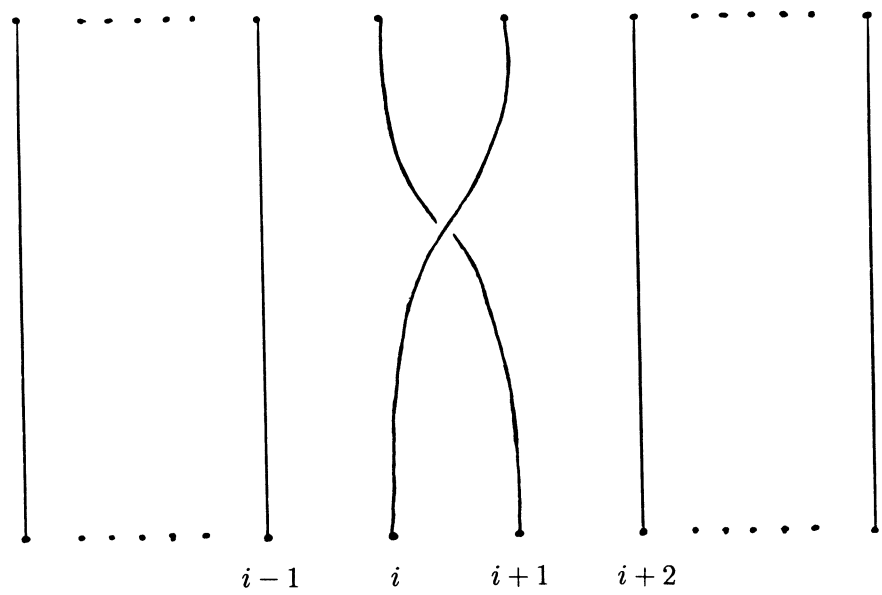
1. CALCULS DE QUELQUES REPRÉSENTATIONS DE MONODROMIE DU GROUPE DES TRESSES

Soit Y_n l'espace de tous les sous-ensembles à n-éléments de $\mathbf{C}$ et posons $X_n = \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbf{C} | z_i \neq z_j \text{pour } i \neq j\}$. Le groupe fondamental de Y_n admet la présentation suivante, due à E. Artin.

Générateurs : $S_1, ..., S_{n-1}$.

Relations : $S_i S_j S_i = S_j S_i S_j$ pour $i = j \pm 1$, $S_i S_j = S_j S_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

Si on choisit $\{1, ..., n\}$ comme point base de Y_n, alors le générateur S_i est réalisé par un chemin qui échange la position de i et de $i + 1$, comme indiqué sur le dessin.



Ce dessin suggère d'ailleurs le nom classique de groupe de tresses pour B_n. Notons aussi que les générateurs de B_n sont tous dans la même classe de conjugaison. Par exemple le calcul suivant prouve que S_1 et S_2 sont conjugués.

$$\begin{aligned}(S_1 S_2 S_1) S_2 (S_1 S_2 S_1)^{-1} &= S_1 (S_2 S_1 S_2) (S_1 S_2 S_1)^{-1} \\ &= S_1 (S_1 S_2 S_1) (S_1 S_2 S_1)^{-1} \\ &= S_1.\end{aligned}$$

L'application naturelle $\pi : X_n \to Y_n, (z_1, ..., z_n) \mapsto \{z_1, ..., z_n\}$ est un revêtement galoisien de groupe S_n (le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments). Le groupe fondamental de X_n, *i.e.* le noyau du morphisme $B_n \to S_n$ est appelé le groupe des tresses pures et noté P_n. Le groupe P_n est engendré par S_1^2 et ses conjugués. Plus précisément pour $i < j$, posons $\Gamma_{i,j} = (S_i S_{i+1} ... S_{j-1})$ $S_j^2 (S_i S_{i+1} ... S_{j-1})^{-1}$. Alors P_n est engendré par ces $(n(n-1)/2)$ générateurs $\Gamma_{i,j}$.

Soit W un espace vectoriel complexe de dimension finie et une collection d'endomorphismes $(X_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$. Alors la forme $\omega = \sum_{i<j} X_{i,j}(d(z_i - z_j))/(z_i - z_j)$ à valeurs dans $End(W)$ définit une connexion sur le fibré trivial $W \times X_n$ au-dessus de X_n. Un calcul simple prouve :

Lemme 1.1 (Kohno).— *La connexion donnée par ω est plate si et seulement si on a :*

$$[X_{i,j}, X_{i,k} + X_{j,k}] = [X_{i,j} + X_{j,k}, X_{j,k}] = 0 \quad \textit{pour } i < j < k, \textit{ et}$$
$$[X_{i,j}, X_{k,\ell}] = 0 \quad \textit{pour } i, j, k, \ell \textit{ tous distincts.}$$

Signalons une réciproque au lemme précédent. Considérons, dans l'algèbre $\mathbf{C} \ll x_{i,j} \gg$ des séries formelles en les variables non-commutatives $(x_{i,j})_{1 \leq i < j \leq j}$, l'idéal engendré par les éléments suivants :

$$[x_{i,j}, x_{i,k} + x_{j,k}] = [x_{i,j} + x_{j,k}, x_{j,k}] = 0 \quad \text{pour } i < j < k, \text{ et}$$
$$[x_{i,j}, x_{k,\ell}] = 0 \quad \text{pour } i, j, k, \ell \text{ tous distincts.}$$

Notons $\mathcal{A}$ l'algèbre quotient. Pour tout ℓ, notons $\mathcal{A}_\ell$ le sous-espace des éléments de la forme $P(x_{i,j})$, où P est un polynôme non-commutatif homogène de degré ℓ. Comme les relations définissant $\mathcal{A}$ sont homogènes de degré deux, on a $\mathcal{A} = \prod_{\ell \geq 0} \mathcal{A}_\ell$ et $\mathcal{A}_i . \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$. Pour tout entier m, notons μ_m l'application $\mathcal{A}_1^{\otimes m} \to \mathcal{A}_m, (a_1, a_2, ..., a_m) \mapsto a_1 . a_2 ... a_m$.

Considérons $\omega = \sum_{i<j} x_{i,j}(d(z_i - z_j))/(z_i - z_j)$ comme une 1-forme sur X_n à valeur dans $\mathcal{A}_1$. Pour tout entier m, $\omega^{\otimes m}$ est une m-forme sur $(X_n)^m$ à valeur dans $\mathcal{A}_1^{\otimes m}$, et $\mu_m(\omega^{\otimes m})$ est à valeur dans $\mathcal{A}_m$. Pour tout chemin $\gamma : [0,1] \to X_n, t \mapsto \gamma(t))$, notons $\gamma_m : I_m \to (X_n)^m, (t_1, ..., t_m) \mapsto (\gamma(t_1), \cdots, \gamma(t_m))$, où I_m est le m-simplexe $\{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_m \leq 1\}$.

Choisissons un point base p pour X_n. Définissons une application $\phi : P_n \to \mathcal{A}$ par la formule suivante :

$\phi(g) = \sum_{m\geq 0} \int_{\gamma_m} \mu_m(\omega^{\otimes m})$, où γ est n'importe quel lacet représentant $g \in P_n$.

Le terme de droite de la formule précédente est l'expression de la monodromie en terme d'intégrales itérées de Chen. En fait, cette formule n'est qu'une reformulation de la technique des itérées successives de Picard (de la forme $\Phi_0 = 1$ et $\Phi_{n+1} = \Phi_n + \int_\gamma \omega.\Phi_n$).

D'après ce qui précède, ϕ est un morphisme du groupe P_n dans le groupe multiplicatif des éléments de $\mathcal{A}$ de la forme $1 + \sum_{i>0} p_i$, $(p_i \in A_i)$.

Soit I l'idéal d'augmentation de $\mathbf{C}[P_n]$, et notons $\mathcal{B}$ le complété de $\mathbf{C}[P_n]$ relatif aux puissances de I (i.e. $\mathcal{B} = \text{lim.proj.}\mathbf{C}[P_n]/I^m$).

THÉORÈME 1.2 (Aomoto, Hain, Kohno).— *Le morphisme ϕ induit un isomorphisme $\psi : B \to A$. De plus, $\phi : P_n \to \mathcal{A}$ est injective.*

Paraphrasons le théorème 1.2. Rappelons la construction du complexifié de la complétion pronilpotente d'un groupe discret. Soit G un groupe discret (que l'on supposera de type fini pour éviter les détails techniques). Supposons d'abord que G soit nilpotent. On peut associer un groupe de Lie nilpotent $G(\mathbf{C})$ et un morphisme $\tau : G \to G(\mathbf{C})$. La paire $(G(\mathbf{C}), \tau)$ est caractérisée par la propriété universelle suivante. Toute représentation complexe de dimension finie $\rho : G \to GL(W)$ telle que $\rho(g)$ soit nilpotente pour tout $g \in G$ s'étend uniquement en une représentation du groupe de Lie $G(\mathbf{C})$. Lorsque G est un groupe commutatif, on a $G(\mathbf{C}) = G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$. Pour un groupe G quelconque, on peut considérer la suite centrale descendante : $\cdots G_{m+1} \subset G_m \subset \cdots \subset G_1 = (G,G) \subset G$. Notons $G^{pro.nil.}(\mathbf{C})$ la limite projective des $G/G_m(\mathbf{C})$. Le groupe obtenu est une limite projective de groupes de Lie nilpotents.

Soit $\mathcal{L}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{A}$ engendrée par les générateurs $x_{i,j}$, et soit $\overline{\mathcal{L}}$ sa fermeture dans $\mathcal{A}$. Notons que les relations définissant $\mathcal{A}$ sont dans $\mathcal{L}$. Donc $\mathcal{A}$ est l'algèbre enveloppante topologique de $\mathcal{L}$. Essentiellement le théorème 1.2. signifie que l'algèbre de Lie du complété pronilpotent $P_n^{pro.nil}(\mathbf{C})$ de P_n est isomorphe à l'algèbre de Lie $\overline{\mathcal{L}}$. De plus l'application $P_n \to P_n^{pro.nil}(\mathbf{C})$ est injective.

Le théorème 1.2 ne concerne que les représentations nilpotentes du groupe

P_n. Néanmoins en utilisant l'injectivité de l'application $\phi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{A}$, Kohno en déduit le résultat suivant (un analogue multidimensionel du XXIème problème de Hilbert).

THÉORÈME 1.3 (Kohno).— *Soit $\rho : P_n \to GL(N)$ une représentation de P_n telle que $1 - \rho(\Gamma_{i,j})$ est suffisamment petit pour tout $1 \leq i < j \leq n$. Alors on peut trouver des matrices $N \times N$ à coefficients constants $X_{i,j}$ telles que la connexion $\omega = \sum_{i<j} X_{i,j}(d(z_i - z_j))/(z_i - z_j)$ soit plate et de monodromie ρ.*

Le théorème 1.3 réduit essentiellement le problème de trouver des représentations linéaires des groupes de tresses pures à celui de trouver des endomorphismes $X_{i,j}$ d'un espace vectoriel W satisfaisant aux relations

$$(1) \qquad \begin{aligned} [X_{i,j}, X_{i,k} + X_{j,k}] = [X_{i,j} + X_{j,k}, X_{j,k}] = 0 \quad & \text{pour } i < j < k, \text{ et} \\ [X_{i,j}, X_{k,l}] = 0 \quad & \text{pour } i, j, k, \ell \text{ tous distincts.} \end{aligned}$$

De plus la représentation obtenue s'étendra au groupe des tresses B_n, dès que l'on disposera en plus d'une représentation $\pi : S_n \to W$ compatible aux endomorphimes $X_{i,j}$ (*i.e.* $\pi(w)X_{i,j}\pi(w^{-1}) = X_{w(i),w(j)}$ pour tout $w \in W$).

La théorie des algèbres de Lie fournit des solutions à ce problème. Nous allons maintenant décrire les plus simples de telles solutions.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie, $U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante et $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ la comultiplication. Rappelons que Δ est un morphisme d'algèbre tel que $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

Pour tous entiers $0 < i < j \leq n$, notons $\Theta_{i,j}$ le morphisme de $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ défini par $\Theta_{i,j}(a \otimes b) = 1 \otimes 1.... \otimes a.... \otimes b \otimes 1...$, où a et b sont en position i et j. Pour $R \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$, posons $R_{i,j} = \Theta_{i,j}(R)$. Notons que l'on a $[R_{1,2}, R_{2,3}] \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Supposons donné un élément $R \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ qui, pour simplifier, sera supposé symétrique, *i.e.* invariant par l'échange des facteurs dans $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Supposons de plus que l'on ait :

$$(2) \qquad [R_{1,2}, R_{1,3} + R_{2,3}] = 0.$$

Soit $W = V_1 \otimes V_2 ... \otimes V_n$ une représentation de $\mathfrak{g}^n$. Alors les endomorphismes $X_{i,j}$ définis par l'action des $R_{i,j}$ seront une solution du problème posé.

Il y a une solution remarquable à ce problème lorsque l'algèbre de Lie possède un produit scalaire non dégénéré (symétrique) invariant κ. En effet, choisissons une base orthonormée e_α et posons $t = \sum e_\alpha \otimes e_\alpha \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Lemme 1.4 (Drinfeld).— *On a* $[t_{1,2}, t_{1,3} + t_{2,3}] = 0$.

Indiquons la preuve, qui est très courte. Puisque t est le tenseur qui définit la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}^*$ inverse de κ, ce tenseur est invariant sous l'action diagonale. On a donc $[\Delta(x), t] = 0$, pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Or on a $t_{1,3} + t_{2,3} = \sum e_\alpha \otimes 1 \otimes e_\alpha + 1 \otimes e_\alpha \otimes e_\alpha = \sum \Delta_{1,2}(e_\alpha) \otimes e_\alpha$, d'où le lemme.

Lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple et κ la forme de Killing, l'équation aux dérivées totales $d\Phi = \omega.\Phi$ associée à cette connexion (*i.e.* l'équation aux dérivées partielles des sections horizontales) est appelée équation de Knizhnik et Zamolodchikov.

Donnons d'abord un exemple de construction de représentations du groupe de tresses comme monodromie de ces équations.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie $sl(N)$. Dans ce cas la forme κ est la forme de Killing $x, y \mapsto 2(N-1)tr(xy)$. Soit V la représentation naturelle de dimension N et soit $W = V^{\otimes n}$. Soit λ un paramètre complexe. Sur le fibré $W \times X_n$, considérons la connexion $\omega = \lambda \sum_{i<j} t_{i,j}(d(z_i - z_j))/(z_i - z_j)$. Notons que la connexion est invariante par S_n donc le fibré à connexion (W, ω) provient de Y_n. Ainsi la monodromie définit une représentation du groupe des tresses B_n.

Cette monodromie peut être explicitement calculée, à l'aide de représentations d'algèbres de Hecke.

Soit q un nombre complexe non nul, et supposons fixée une base $E_1, \cdots, E_m$ de V. Tout d'abord, définissons l'opérateur $R^q : V \otimes V \to V \otimes V$ par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} &R^q(E_i \otimes E_i) = q.E_i \otimes E_i, \\ &R^q(E_i \otimes E_j) = (E_j \otimes E_i) + (q - q^{-1})\,.\,E_i \otimes E_j \quad \text{si } i > j \quad \text{et} \\ &R^q(E_i \otimes E_j) = E_i \otimes E_j \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{si } i < j. \end{aligned}$$

Cette matrice est appelée matrice de Lieb et Temperley.

THÉORÈME 1.5 (Kohno).— *Pour une valeur générique de* λ, *il existe un automorphisme linéaire* S *de* W *tel que la monodromie de la connexion* ω *est donnée par*

$S_i \mapsto q^{\nu}.S^{-1}R^q_{i,i+1}S$, *pour* $q = e^{i\pi.\lambda}$ *et* $\nu = (N-1)/2.N$

Indiquons la preuve de ce théorème, basée sur les propriétés élémentaires des algèbres de Hecke. Rappelons que l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n(q)$ admet la présentation suivante :

Générateurs : $T_1, ..., T_{n-1}$.
Relations : $T_iT_jT_i = T_jT_iT_j$ pour $i = j \pm 1$
$T_iT_j = T_jT_i$ pour $|i-j| \geq 2$
$(T_i - q)(T_i + q^{-1}) = 0$.

Pour tout i, $1 \leq i < n$, soit s_i la transposition de S_n qui échange i et $i+1$. Ces transpositions engendrent le groupe S_n. Une décomposition $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ d'un élement w de S_n est dite décomposition réduite si on ne peut écrire w comme un produit de ℓ transposition s_i avec $\ell < k$. Soit $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ une décomposition réduite d'un élement w de S_n. L'élément $T_w = T_{s_{i_1}} \cdots T_{s_{i_k}}$ est indépendant de la décomposition choisie et la famille $(T_w)_{w \in W}$ est une base de l'algèbre de Hecke (en particulier sa dimension est finie et vaut $n!$). Pour $q = 1$, l'algèbre de Hecke est isomorphe à $\mathbf{C}[S_n]$. Cette dernière est une algèbre de matrice et n'admet que des déformations triviales. Donc au moins pour q générique (en fait, comme l'a montré Tits pour q non racine de l'unité), $\mathcal{H}_n(q)$ est isomorphe à $\mathbf{C}[S_n]$. Pour la preuve du théorème, seule l'existence d'un tel isomorphisme est nécessaire.

Un calcul simple montre que $T_i \mapsto R^q_{i,i+1}$ fournit une représentation de $\mathcal{H}_n(q)$ sur $V^{\otimes m}$. Comme à $q = 1$ la représentation obtenue est la représentation standard de S_n, on en déduit de même que, pour q générique, la représentation obtenue est conjuguée à la représentation standard.

La présentation de l'algèbre de Hecke se déduit de celle de $\mathbf{C}[P_n]$ uniquement en ajoutant la dernière relation quadratique. Notons que cette relation signifie que, dans toute représentation, T_i agit comme un opérateur diagonalisable avec seulement deux valeurs propres $\pm q^{\mp 1}$ (du moins si $q \neq \pm i$). Par conséquent une représentation U du groupe de tresses provient d'une représentation de l'algèbre de Hecke exactement quand S_1 agit de manière semi-simple avec au plus deux valeurs propres. En effet on pourra trouver alors deux nombres μ et q tels que ces deux valeurs propres soient $\mu.q$ et $-\mu.q^{-1}$, et la représentation factorisera à travers le morphisme $\mathbf{C}[P_n] \to \mathcal{H}_n(q), S_i \mapsto \mu^{-1}.T_i$.

Reste donc à prouver que dans la représentation de monodromie ρ associée à

la connexion ω l'opérateur $\rho(S_1)$ a bien la propriété indiquée. Soit X' le quotient de X_n obtenu en identifiant $(z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n)$ et $(z_2, z_1, z_3, \cdots, z_n)$. Le revêtement $X_n \to X'$ est galoisien de groupe $\{1, s_1\}$. De plus $\rho(S_1)$ est la monodromie locale autour de l'hypersurface $(z_1 - z_2)^2 = 0$ dans X'. Le résidu de la connexion le long de cette hypersurface est $1/2\lambda.t_{1,2}$. Or $V \otimes V$ se décompose en deux représentations irréductibles sous l'action de $sl(N)$, à savoir $V \otimes V = S^2V \oplus \Lambda^2 V$. Comme t agit scalairement sur chaque composante, on en déduit que l'action de $t_{1,2}$ sur W est semi-simple et ne possède que deux valeurs propres, proportionelles à λ. Pour λ générique, la différence de ces valeurs propres n'est pas entière, et donc $\rho(S_1)$ est conjuguée à $\exp(i\pi.t_{1,2})$, ce qui démontre la semi-simplicité et qu'il n'y a au plus que deux valeurs propres. Enfin pour déterminer explicitement la valeur de q et le facteur q^ν, il suffit de calculer explicitement ces valeurs propres. C.Q.F.D.

Remarque.— La présentation usuelle de l'algèbre de Hecke est légèrement différente. En général, la relation quadratique est sous la forme $T_i^2 + (1-q).T_i + q = 0$, ou $(T_i + 1)(T_i - q) = 0$. Cette présentation est essentiellement la même. En effet, si l'on pose $q' = q^{1/2}$ et $T_i' = q'^{-1}.T_i$, on obtient $(T_i' - q')(T_i' + q'^{-1}) = 0$.

Soient maintenant $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie arbitraire, V une représentation irréductible et $W = V^{\otimes n}$. La forme de Killing $x, y \in \mathfrak{g} \mapsto tr(ad(x) \circ ad(y))$ permet de définir le tenseur t de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. A nouveau on considère la connexion $\omega = \lambda \sum_{i<j} t_{i,j}(d(z_i - z_j))/(z_i - z_j)$ sur le fibré $W \times X_n$ au-dessus de X_n. Comme ce fibré et sa connexion sont S_n invariants, ils proviennent de Y_n et la monodromie définit une représentation ρ de B_n sur W. Pour identifier cette représentation, nous allons à nouveau utiliser une matrice R. Cette matrice R sera une solution d'une équation de Yang et Baxter obtenue à l'aide de la théorie des groupes quantiques.

Soit $R \in GL(V \otimes V)$. Alors $R_{1,2} = R \otimes id$ et $R_{2,3} = id \otimes R$ sont des automorphismes de $V \otimes V \otimes V$. Les solutions de l'équation de Yang-Baxter sont les matrices R satisfaisant à :

$$R_{1,2} \circ R_{2,3} \circ R_{1,2} = R_{2,3} \circ R_{1,2} \circ R_{2,3}.$$

À toute solution R de l'équation de Yang et Baxter, on peut associer une représentation θ de B_n sur $V^{\otimes n}$ en posant $\theta(S_i) = R_{i,i+1}$, où $R_{i,i+1}(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes R(v_i \otimes v_{i+1}) \otimes v_{i+2} \otimes \cdots$. Il est clair que cela fournit

une représentation de B_n car les relations de tresses sont dans ce cas exactement équivalentes à l'équation de Yang et Baxter.

Soit $U_q(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante quantique de $\mathfrak{g}$, définie par Jimbo et Drinfeld. Drinfeld a défini un élément $\mathcal{R}$ appartenant à une certaine complétion de $U_q(\mathfrak{g} \otimes U_q(\mathfrak{g}))$. L'action de $\mathfrak{g}$ sur V peut être déformée en une représentation de $U_q(\mathfrak{g})$. Notons R^q l'automorphisme de $V \otimes V$ défini par $R^q = \sigma \circ \mathcal{R}$, où $\sigma : V \otimes V \to V \otimes V$ dénote l'échange des deux facteurs.

THÉORÈME 1.6 (Drinfeld).— *L'automorphisme R^q est une solution de l'équation de Yang et Baxter.*

THÉORÈME (Kohno).— *Pour λ générique et $q = \exp(i\pi.\lambda)$ la représentation de monodromie ρ de B_n sur W et la représentation déduite de la solution R_q de l'équation de Yang et Baxter sont équivalentes.*

Cette matrice R_q n'est pas aussi explicite que dans le cas où V est la représentation de base de $sl(N)$. Dans de nombreux cas, elle a été calculée explicitement par Jimbo.

2. ÉQUATION DE KNIZHNIK ET ZAMOLODCHIKOV

L'algèbre W des champs de vecteurs à coefficients réguliers sur $\mathbf{C}^*$ a pour base $(L_m = -z^{m+1}d/dz)_{m\in\mathbf{Z}}$ et l'on a $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}$. L'algèbre de Virasoro *Vir* est une extension centrale de cette algèbre. Elle a pour base $(L_m)_{m\in\mathbf{Z}}, \mathbf{c}$ et les crochets sont donnés par $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \delta_{m,-n}(m^3 - m)/12.\mathbf{c}$ et $[\mathbf{c}, L_m] = 0$. Notons aussi que $L_n \mapsto L_{-n}$ induit une anti-involution t de *Vir*.

Donnons d'abord une définition de champ primaire, du moins la plus usuelle dans la littérature de la physique mathématique. Soient V et U deux représentations de l'algèbre de Virasoro. On supposera que U et V sont pré-hilbertiens, de sorte que U et V soient des représentations pré-unitaires pour la sous-algèbre de Lie des points fixes de $-t$. On appelle champ primaire d'anomalie a un opérateur $\Phi(z) : U \to V$ tel que $[L_m, \Phi(z)] = (z^{m+1}d/dz + a(m+1)z^m).\Phi(z)$. En fait, ces opérateurs $\Phi(z)$ peuvent avoir un domaine de définition vide, mais leurs coefficients matriciaux sont bien définis. En d'autres termes pour u, v dans un certain sous-espace dense de $U \times V$, le coefficient matriciel associé est bien défini. Ce coefficient

est noté $< v|\Phi(z)|u >$. Ces coefficients matriciaux sont supposés être des fonctions holomorphes multivaluées. Dans les exemples donnés plus bas, les champs $\Phi(z)$ seront décrits comme des séries formelles en z et en z^{-1}.

Décrivons d'abord les représentations de l'algèbre de Virasoro qui nous intéresse. L'algèbre de Virasoro Vir a une graduation naturelle, $Vir = \oplus_{n\in\mathbf{Z}} Vir_n$ (où $Vir_n = \mathbf{C}.L_n$ pour $n \neq 0$ et $Vir_0 = \mathbf{C}.L_0 \oplus \mathbf{C}.\mathbf{c}$). Posons $Vir^+ = \oplus_{n>0} Vir_n$ et $\mathcal{B}^+ = Vir^+ \oplus Vir_0$. Soit h, c deux scalaires. Notons $\mathbf{C}_{h,c}$ le $\mathcal{B}^+$-module de dimension un pour lequel Vir^+ agit trivialement, et L_0, $\mathbf{c}$ agissent par multiplication par h et c respectivement. Soit $V_{h,c}$ le Vir-module induit. Ce module (appelé module de Verma) possède un unique quotient simple $L_{h,c}$. Pour certaines valeurs de c, le module $L_{h,c}$ est pré-unitarisable.

Exemple 2.1.— Donnons un exemple évident de champ primaire. Soit $V = L_{h,c}$ un module simple unitarisable. Définissons le champ primaire $\Phi(z) : V \to V$ par la formule $\Phi(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} z^{-2-n}.L_n$. Ce champ est d'anomalie -2. Un champ donné sous la forme d'une série formelle à la fois en z et z^{-1} est appelé un opérateur vertex.

Notons que, pour tout $v \in V$, on a $L_m.v = 0$ pour m suffisamment grand. Par conséquent $\Phi(z).v$ est une série de Laurent en z^{-1} (*i.e.* est une série formelle en z^{-1} et un polynôme en z). Il existe une graduation naturelle du module V, $V = \oplus_n V_n$ compatible avec la graduation de Vir telle que $V_0 = \mathbf{C}_{h,c}$, et $V_n = 0$ pour $n > 0$. Considérons le sous-module $V' = \oplus(V_n)^*$ dans V^*. Alors pour tout $v \in V, v' \in V'$, le coefficient matriciel $\langle v'|\Phi(z)|v\rangle$ est un polynôme de Laurent bien défini.

L'intérêt des champs primaires est d'intervenir dans la théorie des représentations des algèbres de Kač-Moody affines. Dans les quelques paragraphes qui suivent, nous allons d'abord rappeler leur définition et la construction de leurs représentations. Nous verrons ensuite comment construire des champs primaires dans ce cas.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie. Soit $\mathcal{L}$ l'extension centrale de l'algèbre de Lie $L(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}[t, t^{-1}]$ définie par le cocycle $C(f(t), g(t)) = Res|_{t=0}\kappa(f(t)dg(t))$, pour tous $f(t), g(t) \in L(\mathfrak{g})$. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, posons $x(n) = x \otimes t^n$. Ainsi l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est engendrée par les $x(n)$ et un certain

élément central encore noté $\mathbf{c}$ et les crochets de Lie sont donnés par la formule :

$$[x(n), y(m)] = [x, y](n+m) + m.\delta_{m,-n}\mathbf{c}.$$

Malheureusement la théorie des algèbres de Lie simples requiert un certain nombre (élevé) de notations et définitions que je vais rappeler maintenant. Choisissons une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ (*i.e.* l'algèbre de Lie d'un tore maximal H du groupe simplement connexe G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$) et une sous-algèbre de Borel (*i.e.* résoluble maximale) contenant $\mathfrak{h}$. Un tel choix est unique à isomorphisme près et l'on pose $\mathfrak{n} = [b, b]$. On note P le groupe des caractères de H. Via la différentielle, P s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{h}^*$. L'action de H sur $\mathfrak{n}$ est diagonalisable, et les caractères des sous-représentations de dimension un sont appelés les racines positives. Les racines correspondant aux caractères de $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ sont appelées indécomposables et notées $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$. Le centre de $\mathfrak{n}$ est de dimension 1 et le caractère correspondant sera noté α_0. La restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{h}$ est non dégénérée. Pour toute racine α, il existe donc un unique élément $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ tel que $h \in \mathfrak{h} \mapsto h - \alpha(h)h_\alpha$ soit une reflexion hyperplane orthogonale. Cet élément est appelé la coracine associée à α. Quand α est l'une des racines α_i, la coracine correspondante sera notée simplement h_i. Notons que les $(h_i)_{0<i\leq\ell}$ forment une base de $\mathfrak{h}^*$ et que l'on a $h_0 = \sum_{0<i\leq\ell} m_i h_i$ où les m_i sont des entiers > 0. Posons $g = 1 + \sum_i m_i$ (nombre de Coxeter dual).

Posons $P^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \lambda(h_i) \in \mathbf{N} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq \ell\}$. Toute représentation simple L de dimension finie de $\mathfrak{g}$ contient un unique vecteur v (à un multiple près) tel que $\mathfrak{n}.v = 0$. On a $h.v = \lambda(h).v$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$ pour un certain $\lambda = \lambda(L) \in P^+$. Le poids λ est appelé plus haut poids de la représentation L et l'application $L \mapsto \lambda(L)$ est une bijection de l'ensemble des représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$ sur P^+ (E. Cartan). On note la bijection inverse $\lambda \mapsto L(\lambda)$. On notera que les représentations simples sont classifiées par la donnée de ℓ entiers ≥ 0 $\lambda(h_1), \cdots, \lambda(h_\ell)$.

Revenons aux algèbres affines. Comme pour l'algèbre de Virasoro, l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est graduée, $\mathcal{L} = \oplus \mathcal{L}_n$ (où $\mathcal{L}_n = \mathfrak{g} \otimes t^n$ pour $n \neq 0$ et $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g} \oplus \mathbf{C}.\mathbf{c}$). Posons $\mathcal{L}^+ = \oplus_{n>0} \mathcal{L}_n$, $\mathcal{P} = \mathcal{L}^+ \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathbf{C}.\mathbf{c}$. Soit $\lambda \in P^+$ et $\ell \in \mathbf{C}$. Considérons $L(\lambda)$ comme un $\mathcal{P}$-module, pour lequel l'action de $\mathcal{L}^+$ est triviale, et $\mathbf{c}$ qui agit comme le scalaire ℓ. Soit $V_\ell(\lambda)$ le module induit à $\mathcal{L}$ (module de Verma généralisé)

et soit $L_\ell(\lambda)$ l'unique quotient irréductible de $V_\ell(\lambda)$ (en fait cette définition n'est pas correcte quand $\ell + g = 0$, cas que nous ne considérerons pas ici : dans cette section on aura $\ell > 0$, tandis que dans la section suivante, on aura $\ell + g < 0$). L'élément central $\mathbf{c}$ agit sur $L_\ell(\lambda)$ comme $\ell.id$ et ce nombre ℓ est appelé le niveau de la représentation. Plus généralement une représentation est dite de niveau ℓ si $\mathbf{c}$ y agit comme le scalaire ℓ. Une représentation ρ de $\mathcal{L}$ est dite intégrable si $\rho(x(m))$ est localement nilpotent pour tout élément ad-nilpotent $x \in \mathfrak{g}$ et tout $m \in \mathbf{Z}$.

Lemme 2.2. (V. Kač).— *La représentation $L_\ell(\lambda)$ est intégrable si et seulement si ℓ est un entier et l'on a :*

$$\sum_i \lambda(h_i) \leq \ell.$$

Dans cette section nous supposerons désormais que les couples (λ, ℓ) satisfont aux conditions du lemme de Kač. Notons $\mathcal{O}_\ell^{int}$ la catégorie de tous les $\mathcal{L}$-modules intégrables de niveau ℓ de longueur finie et pour lesquels $\mathcal{L}^+$ agit de manière localement nilpotente (*i.e.* tous les sous-$\mathcal{L}^+$-modules cycliques sont de dimension finie et nilpotente). Ce lemme indique la nécessité de considérer l'extension centrale $\mathcal{L}$ de $L(\mathfrak{g})$. En effet tout module intégrable de niveau 0 de la catégorie $\mathcal{O}$ est trivial. Rappelons aussi :

THÉORÈME 2.3 (Deodhar, Gabber, Kač).— *Toute représentation de $\mathcal{O}_\ell^{int}$ est somme directe de modules $L_\ell(\lambda)$. En particulier, cette catégorie est semi-simple avec un nombre fini d'objets simples.*

Notons Δ le simplexe de tous les ℓ-uplets de nombres réels $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)$ avec $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \cdots, \lambda_\ell \geq 0$ et $\sum_i a_i \lambda_i \leq \ell$. Alors les représentations simples dans $\mathcal{O}_\ell^{int}$ sont exactement paramétrées par les points à coordonnées entières du simplexe $\ell.\Delta$. On notera cet ensemble fini $\mathcal{P}_\ell$.

Le théorème suivant a été prouvé par de nombreux auteurs. Notons aussi t l'anti-involution de $\mathcal{L}$, $t : x(n) \mapsto x(-n)$.

THÉORÈME 2.4 (Garland, Kač, Lepowsky...).— *Tout module intégrable $L_\ell(\lambda)$ est pré-unitarisable relativement à l'anti-involution t.*

Notons que l'algèbre de Virasoro agit comme une algèbre de dérivation de $\mathcal{L}$.

Le produit semi-direct $Vir \times \mathcal{L}$ est appelé algèbre de courant. Les représentations $L_\ell(\lambda)$ s'étendent en des représentations de l'algèbre de courant. Ce fait n'est pas difficile à montrer par une preuve abstraite, mais Shugawara a trouvé une remarquable formule explicite pour cette action. Décrivons maintenant cette formule explicite. Pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$, définissons le produit ordre normal de $x(n)$ et $y(m)$ en posant :

$$: x(n)y(m) := \begin{cases} x(n)y(m) & \text{si } n < m, \\ y(m)x(n) & \text{si } m > n, \\ 1/2(x(n)y(m) + y(m)x(n)) & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Choisissons une base orthonormée e_α pour $\mathfrak{g}$. Posons $2(\ell + g).L_n = \oplus_{n \in \mathbf{Z}, \alpha} : e_\alpha(-k), e_\alpha(n+k)$. Soit $M \in \mathcal{O}_\ell^{int}$ et $v \in M$. Comme on a $e_\alpha(n).v = 0$ pour tout $n \gg 0$, la somme calculant $L_n.v$ est en fait finie. Ainsi L_k agit sur M.

THÉORÈME 2.5 (Sugawara) *L'action des opérateurs L_k sur n'importe quelle représentation $M \in \mathcal{O}_\ell^{int}$ définit une représentation de l'algèbre de Virasoro. Combinée avec l'action de $\mathcal{L}$, on obtient ainsi une représentation de l'algèbre de courant.*

Soient $\pi : \mathfrak{g} \to End(V)$ une représentation simple de dimension finie et soient $L, M \in \mathcal{O}_\ell^{int}$. Un opérateur $\Phi(u, z) : L \to M$ est appelé primaire de type π s'il satisfait les conditions suivantes:

- $\Phi(u, z)$ est linéaire en $u \in V$;
- $[X(m), \Phi(u, z)] = z^m.\Phi(X.u, z)$, pour tout $X \in \mathfrak{g}$;
- $[L_m, \Phi(z)] = (z^{m+1}d/dz + (a(\pi)/(l+g))(m+1)z^m).\Phi(z)$,

où $a(\pi)$ est l'unique valeur propre du Casimir sur V.

Pour tout nombre b, notons M_b l'action de l'algèbre de Virasoro pour laquelle L_m agit comme $b.z^m - z^{m+1}d/dz$. De même, étant donné une représentation V de dimension finie de $\mathfrak{g}$, on peut définir une représentation $M_b(V)$ de l'algèbre de courant sur l'espace $V \otimes \mathbf{C}[t, t^{-1}]$ en faisant agir les éléments $X(n)$ de $\mathcal{L}$ comme $X \otimes t^n$ et les éléments L_m de Vir comme $b.z^m - z^{m+1}d/dz$.

Considérons des champs donnés sous la forme $\Phi(z) = \sum_n z^{-1-n}\Phi_n$ d'une série formelle en z et z^{-1}, des représentations U, V de Vir pour lesquelles l'action de L_0 est semi-simple et avec des valeurs propres dont la partie réelle est bornée

supérieurement. Par une construction inverse à celle de l'exemple 2.1, on voit qu'un champ primaire d'anomalie a, $\Phi(z) : U \to V$ s'identifie à un morphisme de Vir-module $\Phi : M_{a-1} \otimes U \to V$. De même un champ primaire $\Phi(z,u) : M \to N$ de type $\rho : \mathfrak{g} \to End(V)$ entre deux modules M, N dans $\mathcal{O}_\ell^{int}$ s'identifie à un morphisme pour l'algèbre de courant $\Phi : L_b(V) \otimes M \to N$, avec $b = ((a(\pi)/(\ell+g)) - 1$.

Etant donnée une représentation $L_\ell(\lambda)$ de $\mathcal{L}$, le vecteur "vide" est un vecteur non nul v de $L(\lambda) \subset L_\ell(\lambda)$ et tel que $\mathfrak{n}.v = 0$. Choisissons n représentations simples V_i de $\mathfrak{g}$, $(n+1)$ poids $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$ dans $\mathcal{P}_\ell$, et n champs primaires de type V_i $\Phi_i(u,z) : L_\ell(\lambda_i) \to L_\ell(\lambda_{i+1})$, et posons $W = (V_n \otimes \cdots \otimes V_1)^*$.

THÉORÈME 2.6 (Knizhnik et Zamolodchikov).— *La fonction à n points $\langle vide|\Phi_n(u_n,z_n) \circ \cdots \circ \Phi_1(u_1,z_1)|vide\rangle$ est une solution multivaluée de l'équation de Knizhnik et Zamolodchikov avec paramètre $1/(\ell+g)$.*

Du point de vue strictement mathématique, la procédure pour définir le produit $\Phi_n(u_n,z_n) \circ \cdots \circ \Phi_1(u_1,z_1)$ est difficile à justifier. Cette construction a été rigoureusement décrite dans le travail de Tsuchiya, Kanie **[TK]**, Tsuchiya, Kanie et Yamada **[TKY]**, au moins dans des cas importants.

Notons $Y_\ell(\lambda,\mu,\nu)$ l'ensemble des champs primaires $\Phi(u,z) : L_\ell(\mu) \to L_\ell(\nu)$ de type $L(\lambda)$. Si l'on écrit ce champ sous la forme d'une série formelle en z et z^{-1}, alors le terme de degré zéro (appelé terme initial) définit un morphisme de $L(\lambda) \otimes L(\mu) \to L(\nu)$. De plus, si le terme initial est nul, alors le champ est nul. Donc on peut considérer que l'on a : $Y_\ell(\lambda,\mu,\nu) \subset Hom_G(L(\lambda) \otimes L(\mu), L(\nu)$. Posons $dim(Y_\ell(\lambda,\mu,\nu) = V_{\lambda,\mu}^\nu$ et $dim(Hom_G(L(\lambda) \otimes L(\mu), L(\nu)) = K_{\lambda,\mu}^\nu$. Il résulte des propriétés usuelles du produit tensoriel des représentations que les coefficients (bien connus) $K_{\lambda,\mu}^\nu$ sont les constantes de structures d'une algèbre associative. Il a été constaté que les constantes $V_{\lambda,\mu}^\nu$ forment aussi les constantes de structures d'une algèbre associative. Aussi Moore et Seiberg ont-ils eu l'idée que la catégorie $\mathcal{O}_\ell^{int}$ a une structure de catégorie tensorielle, liée aux groupes quantiques. Signalons aussi un cas particulier où l'une des formules de Verlinde calcule explicitement ces nombres : on a pour tous $\lambda, \mu, \nu \in \mathcal{P}_\ell$

$$V_{\lambda,\mu}^\nu = \Sigma_{w \in W_\ell / W} \, \epsilon(w) . K_{\lambda,\mu}^{w^{-1}(\nu+\rho)-\rho},$$

où W (respectivement W_ℓ) désigne le groupe de Weyl affine. Ces faits sont maintenant établis (voir **[TK]**, **[TUY]**).

Signalons que dans [**GM**] on calcule certaines multiplicités de décomposition de produits tensoriels de représentations modulaires de groupes de Chevalley et on observe que ces multiplicités sont les nombres $V^{\nu}_{\lambda,\mu}$ dans le cas de groupes de type ADE. Dans le cas de groupes de type non ADE, les multiplicités sont données par une formule identique, avec un autre groupe de Weyl affine. Cette coïncidence est complètement élucidée par les équivalences de catégories prouvées par Kazhdan et Lusztig et le travail de Finkelberg (voir [**KL**][**F**]).

3. TRAVAUX DE KAZHDAN ET LUSZTIG

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type ADE, soit $G(\mathbf{C})$ le groupe connexe et simplement connexe, et soit $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie affine associée à $\mathfrak{g}$ (voir section 3 pour la définition). Pour un complexe κ notons $\mathcal{O}$ la catégorie de toute les représentations M de $\mathcal{L}$ qui satisfont aux propriétés suivantes :

(1) M est de longueur finie et de niveau $\kappa - g$,

(2) l'action de $\mathcal{L}^+$ est localement nilpotente,

(3) comme $\mathfrak{g}$-module, M s'intègre à G.

En fait, Kazhdan et Lusztig s'intéressent principalement au cas où κ est un nombre rationnel < 0. Dans ce cas, la catégorie $\mathcal{O}_\kappa$ ne contient aucune représentation intégrable.

Voici quelques résultats principaux des travaux récents de Kazhdan et Lusztig.

THÉORÈME 3.1 [KL2] .— *(κ rationnel $\ll 0$) Il existe une équivalence de catégorie entre $\mathcal{O}_\kappa$ et la catégorie des représentations du groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$ à $q = e^{i\pi/\kappa}$.*

Ce résultat s'inscrit dans le programme de Lusztig pour résoudre le problème suivant. Soit $\mathbf{F}$ la clôture algébrique d'un corps à p-éléments et soit $G(F)$ le groupe algébrique sur $\mathbf{F}$ "analogue" à $G(\mathbf{C})$ (pour fixer les idées, si $G(\mathbf{C}) = SL_n(\mathbf{C})$, alors $G(\mathbf{F}) = SL_n(\mathbf{F})$). Les représentations (sur $\mathbf{F}$) rationnelles irréductibles de $G(\mathbf{F})$ sont classifiées par le même ensemble P^+ qu'en caractéristique 0. En fait la correspondance de Cartan, qui, à une représentation simple L, associe son plus haut poids $\lambda(L)$, est construite comme en caractéristique 0, à ceci près qu'il convient de

remplacer les algèbres de Lie par les groupes correspondants. Notons $(L_p(\lambda))_{\lambda \in P^+}$ ces représentations. Aux développements très récents près, peu de choses étaient connues au sujet de ces représentations simples. Par exemple la dimension de ces représentations n'était pas connue. En fait, on cherche plus généralement à connaître les caractères de ces représentations, c'est-à-dire les valeurs propres et les multiplicités de l'action d'un élément générique de $G(\mathbf{F})$. Bien que la formule de Weyl (*i.e.* la formule analogue en caractéristique 0) ait été établie depuis longtemps, en caractéristique finie même l'énoncé d'une conjecture a été un problème ouvert jusqu'en 1980 quand Lusztig a énoncé sa conjecture basée sur la combinatoire des polynômes de Kazhdan-Lusztig **[L1]**.

Précisons que, dans l'énoncé de sa conjecture, Lusztig donne une borne explicite inférieure sur p (essentiellement p doit être au moins de la taille de g^2). En 1988 Lusztig a proposé le programme suivant pour prouver sa conjecture.

Première étape. Rappelons que les problèmes analogues en caractéristique zéro sont bien connus (formule de Weyl). Le module $L(\lambda)$ peut être défini sur $\mathbf{Z}$. Soit $L_0(\lambda)$ une $\mathbf{Z}$-forme de ce module. Alors $\mathbf{F}_p \otimes_{\mathbf{Z}} L_0(\lambda)$ contient $L_p(\lambda)$ comme sous-quotient. En particulier on a $dim\, L_p(\lambda) \leq dim\, L(\lambda)$. De plus pour beaucoup de λ cette dimension est strictement inférieure. Donc il est impossible de "remonter" $L_p(\lambda)$ en caractéristique zéro. Or Lusztig a prouvé que lorsque q est une racine de l'unité, la réduction modulo p d'une certaine forme de $U_q(\mathfrak{g})$ est exactement l'(hyper-)algèbre ordinaire de $G(\mathbf{F})$. D'où la première étape proposée par Lusztig est de relever en caractéristique zéro les représentations de $G(\mathbf{F})$ en des représentations de l'algèbre enveloppante quantique à une racine p-ième de l'unité (plus précisement pas toutes les représentations car cela serait impossible, mais au moins celles qui sont restreintes, *i.e.* celles dont le plus haut poids satisfait à $0 \leq \lambda(h_i) \leq (p-1)$). Cette étape a été résolue récemment par Andersen, Jantzen et Soergel **[AJS]**, mais avec une borne inférieure pour p non explicite.

Deuxième étape. Prouver une équivalence entre représentations de groupes quantiques aux racines ℓ-ièmes de l'identité et les représentations de niveau $-\ell - g$ de l'algèbre de Kač-Moody affine associée. Pour des algèbres de Lie de type ADE, cela est couvert par le théorème 3.1. De plus, le preprint **[L2]** explique comment modifier **[KL1]** pour prouver le théorème 3.1 en général.

Troisième étape. Prouver une formule de caractères pour les représentations

des algèbres de Lie affines au niveau négatif. Une contribution est apportée dans un preprint de Casian [**C**]. En fait [**C**] annonce ce résultat, mais un point de la preuve est encore l'objet de discussions d'experts(1).

Donnons quelques détails sur la preuve du théorème 3.1. qui est le résultat principal d'une série de cinq articles [**KL**]. Notons que la catégorie des représentations d'un groupe quantique est naturellement une catégorie tensorielle (de plus tressée). Le point crucial est de démontrer *a priori* que la catégorie $\mathcal{O}_k$ est une catégorie tensorielle (tressée). Notons que le produit tensoriel ordinaire de deux représentations de niveau $\kappa - g$ est de niveau $2\kappa - 2g$. Donc pour définir un produit tensoriel sur $\mathcal{O}_\kappa$, il est nécessaire d'utiliser une nouvelle approche.

Comme indiqué au précédent paragraphe, des structures de produits tensoriels extra-ordinaires avaient été dégagées pour les catégories de représentations intégrables, en particulier de niveau ≥ 0. Le fait qu'on puisse définir un produit tensoriel en niveau négatif semblait inattendu.

Indiquons brièvement la construction du produit tensoriel $T(U_1, U_2)$ de deux modules $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_\kappa$.

Définissons d'abord la notion de vecteur lisse. Soit M une représentation arbitraire de $\mathcal{L}$. Un vecteur v est dit lisse si le $\mathcal{P}$-module N engendré par v est de dimension finie et qu'en outre N est un $\mathcal{L}^+$-module nilpotent. Le sous-espace des vecteurs lisses est un $\mathcal{L}$-module et de plus on peut étendre l'action à l'algèbre de Lie $\overline{\mathcal{L}} = \mathbf{C}.\mathbf{c} \oplus \mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}[t^{-1}, t]]$ (où $\mathbf{C}[t^{-1}, t]$ désigne le corps des séries de Laurent). Rappelons que le corps des fonctions rationnelles sur $\mathbf{P}^1$ est isomorphe à $\mathbf{C}(z)$. En outre tous les autres générateurs y de ce corps se déduisent de z par une homographie, *i.e.* $y = (ax + b)/(cx + d)$. Ces générateurs forment une variété de dimension 3 et les paramètres en un point qui sont des générateurs du corps en forment une sous-variété de dimension deux. Appelons ces paramètres spéciaux.

Le produit tensoriel modifié n'est pas intrinsèque. Il dépend du choix de trois points p_1, p_2 et P sur $\mathbf{P}^1$ et du choix de paramètres spéciaux $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon$ en chacun de ces points. De manière imagée, on va placer U_1 en p_1, U_2 en p_2 et "à l'arrivée" on

(1) Ajout octobre 94 : les formules de caractères au niveau négatif sont maintenant prouvées dans le preprint suivant :
M. KASHIWARA ET T. TANISAKI - *Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras at the negative level*, RIMS preprint 983 (juin 94).

va obtenir le produit tensoriel placé en P.

Soit A l'anneau des fonctions régulières sur $\mathbf{P}^1 \setminus \{p_1, p_2, P\}$. Notons $\Gamma = \mathfrak{g} \otimes A \oplus \mathbf{C}.\mathbf{c}$ l'extension centrale de $\mathfrak{g} \otimes R$ définie par n'importe lequel des deux 2-cocycles suivants (qui sont égaux par la formule des résidus) :

$$(X \otimes f, Y \otimes g) \mapsto \kappa(x,y)(Res_{p_1}(fdg) + Res_{p_2}(fdg)$$

$$(X \otimes f, Y \otimes g) \mapsto -\kappa(x,y)(Res_{p_1}(fdg),$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $f, g \in A$.

Pour $f \in A$, notons f_1, f_2, F les séries de Laurent en t telles que $f_1(\epsilon_1) = f_2(\epsilon_2) = F(\epsilon) = f(t)$ (autrement dit f_1, f_2, F sont les développements en séries de Laurent de f aux points p_1, p_2 et P).

Posons $\overline{\mathcal{L}}_{1,2} = (\overline{\mathcal{L}} \oplus \overline{\mathcal{L}})/\mathbf{C}.(\mathbf{c}, -\mathbf{c})$. Nous noterons encore $\mathbf{c}$ l'elément de $\overline{\mathcal{L}}_{1,2}$ qui est l'image de $\mathbf{c}, 0$. Définissons $a : \Gamma \to \overline{\mathcal{L}}_{1,2}$ et $b : \Gamma \to \overline{\mathcal{L}}$ par les formules suivantes :

$$a(X \otimes f(t)) = (X \otimes f_1(t), X \otimes f_2(t)),$$

$$a(\mathbf{c}) = \mathbf{c},$$

$$b(X \otimes f(t)) = X \otimes F(t)\ ,\ b(\mathbf{c}) = -\mathbf{c}.$$

Soit F_1 l'idéal d'augmentation $\overline{\mathcal{L}}^+.U(\overline{\mathcal{L}}^+)$ de $U(\overline{\mathcal{L}}^+)$. Définissons une filtration décroissante F_n de $U(\overline{\mathcal{L}}^+)$ par les formules récurrentes $F_0 = U(\overline{\mathcal{L}}^+)$ et $F_{n+1} = F_1.F_n$ pour $n \geq 0$ (cette filtration est simplement la filtration par les puissances de l'idéal d'augmentation). Posons $G_n = b^{-1}(F_n)$. Posons aussi $\lambda = \kappa - g$.

La construction du produit tensoriel extraordinaire est la suivante. Posons $W = U_1 \otimes U_2$. Puisque U_1 et U_2 sont des $\mathcal{L}$-modules lisses de même niveau λ, W est un $\overline{\mathcal{L}}_{1,2}$-module, donc un Γ-module (utiliser le morphisme a). Le niveau de ce module est λ. Considérons maintenant $\widehat{W} = lim.proj.W/G_n.W$. Le morphisme $b : \Gamma \to \overline{\mathcal{L}}$ est simplement le morphisme de complétion de Γ au point P. Par une démonstration un peu analogue (mais un peu plus compliquée) du fait que les vecteurs lisses forment une sous-représentation, on montre que $\widehat{W}$ est naturellement un $\overline{\mathcal{L}}$-module. Ainsi $\widehat{W}$ est un $\mathcal{L}$-module. Son niveau est maintenant $-\lambda$. Tordant le module par l'involution $-t$, on obtient un module $(\widehat{W})^{-t}$ de niveau λ.

Par définition le produit tensoriel extraordinaire de U_1 et de U_2 est le sous-module des vecteurs lisses de $(\widehat{W})^{-t}$.

Pour vérifier des conditions de compatibilité du produit ainsi défini, Kazhdan et Lusztig sont conduits à définir des produits tensoriels extraordinaires d'un nombre arbitraire de représentations et plusieurs places "à l'arrivée" situées sur plusieurs copies de $\mathbf{P}^1$. Nous omettrons cette définition plus générale.

Pour décrire les contraintes de commutativité et d'associativité, Kazhdan et Lusztig construisent des fibrés à connexion qui généralisent les connexions de Knizhnik et Zamolodchikov. Les variétés sur lesquelles sont définis ces fibrés ne sont plus des espaces X_n, mais des espaces du type suivant :

Ensemble Z_n formé de $(2n+1)$-uplets $P, z_1, ..., z_n, \epsilon_1, ..., \epsilon_n$ modulo l'action de $SL(2)$, où $P, z_1, ..., z_n$ sont $(n+1)$-points distincts de $\mathbf{P}^1$, et où $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ sont des coordonnées spéciales en $z_1, ..., z_n$. Partant de n représentations, Kazhdan et Lusztig définissent un espace de covariant (de leur produit tensoriel). Cet espace de covariant est un module sur l'algèbre des fonctions régulières sur Z_n. Les opérateurs de Sugawara sont alors utilisés pour construire une connexion sur ce fibré. Cela montre que ce module est celui des sections d'un fibré vectoriel. Ceci montre déjà que le produit tensoriel extraordinaire ne dépend pas des choix faits (mais non canoniquement). Ensuite, Kazhdan et Lusztig ont à construire des contraintes de commutativité et associativité.

BIBLIOGRAPHIE

[A] H.H. ANDERSEN - *Quantum groups, invariants of 3-manifolds and semi-simple tensor categories*, Preprint.

[AJS] H.H. ANDERSEN, J.C. JANTZEN and W. SOERGEL - *Representation of quantum groups at p-root of unity and of semi-simple groups in characteristic p : independence of p*, Astérisque **220** (1994).

[Ao1] K. AOMOTO - *Fonctions hyperlogarithmiques et groupes de monodromie unipotent*, J. Fac. Sc. Tokyo, **25** (1978) 149-156.

[Ao2] K. AOMOTO - *Gauss-Manin connection of integrals of different products*, J. Fac. Sc. Tokyo, **39** (1987) 191-208.

[BPZ] A.A. BELAVIN, A.N. POLYAKOV and A.B. ZAMOLODCHIKOV - *Infinite conformal symmetries in two-dimensional conformal field theory*, Nucl. Phys.

B, **241** (1984) 333-380.

[C] L. CASIAN - *Kazhdan-Lusztig conjecture in the negative level case (Kač-Moody Lie algebras of affine type)*, Preprint.

[D] V.G. DRINFELD - *On almost cocommutative Hopf algebras*, Algebra and Analysis **1** (1987) 30-46.

[FSV] B.L. FEIGIN, V.V. SCHECHTMAN and A.N. VARCHENKO - *On algebraic equations satisfied by correlators in the Wess-Zumino-Witten model*, Letter Mat. Phys. **20** (1990) 291-297.

[F] M. FINKELBERG - *Fusion categories*, Harvard P.H.D. (Mai 1993).

[J1] M. JIMBO - *Quantum R-matrix for the generalized Todda system*, Comm. Math. Phys. **102** (1986) 537-547.

[J2] M. JIMBO: *Quantum R-matrix related to the generalized Todda lattice*, Lect. Notes Phys., Springer Verlag **246** (1986).

[G] C. GAWĘDZKI - *Conformal field theory*, Sém. Bourbaki, exp. n° 704, novembre 1988, Astérisque **177-178** (1989), 95-126.

[GM1] G. GEORGIEV et O. MATHIEU - *Catégorie de fusion pour les groupes de Chevalley*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, **315** (1992) 659-662.

[GM2] G. GEORGIEV et O. MATHIEU - *Fusion category for Chevalley groups*, Proceedings de la conf. Conformal field theory, Mount Holliock, Juin 1992 (À paraître).

[G] P. GODDARD - *Meromorphic conformal field theory*, Preprint.

[HL] Y.Z. HUANG and J. LEPOWSKY - *Towards a theory for tensor products for representations of a vertex operator algebra*, Proc. 20th International Conference on Differential Geometry Methods in Theoritical Physics, New York 1991, ed. S. Catto and A. Rocha Carridi, World Sc., Singapore, **1** (1992) 344-354.

[K] V.G. KAČ - *Infinite dimensional Lie algebras*, Birkhaüser, Prog. Math. **44** (1983).

[KR] V.G. KAČ and A.K.RAINA - *Highest weights representations of infinite dimensional Lie algebras*, World Sc., Singapore. Adv. Ser. Math. Phys. **2** (1988).

[KL1] D. KAZHDAN G. LUSZTIG - *Affine Lie algebras and quantum groups,* Int. Math. Research Notices, Duke Math. J. **62** (1991) 21-29.

[KL2] D. KAZHDAN G. LUSZTIG - *Tensor structures arising from affine Lie algebras* (Preprint en 5 parties).

[KnZ] V.G. KNIZHNIK and A.B. ZAMOLODCHIKOV - *Current algebras and Wess-Zumino model in two dimensions*, Nucl. Phys. B **247** (1984) 83-103.

[K1] T. KOHNO - *Hecke algebra representations of braid groups and classical Yang-Baxter equations.* Comtemp. Math **78** (1988) 339-363.

[K2] T. KOHNO - *Monodromy representations of braid groups and classical Yang-Baxter equations*, Ann. Ins. Fourrier **37** (1987) 139-160.

[L1] G. LUSZTIG - *Some problems in the representation theory of finite groups*, Proc. Symp. Pure Math. **36** (1980) 185-203.

[L2] G. LUSZTIG - *Monodromic system on affine flag manifolds*, Preprint.

[MS] G. MOORE and N. SEIBERG - *Classical and quantum conformal field theory*, Comm. Math. Phys. **123** (1988) 177-254.

[R] M. ROSSO - *Représentations irréductibles du q-analogue de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie*, C.R.A.S. **305** (1987) 587-590.

[SV] V.V. SCHECHTMAN and A.N. VARCHENKO - *Hypergeometric solutions of Knizhnik-Zamolodchikov equations*, Letters Math. Phys. **20** (1990) 279-283.

[TK] A. TSUCHIYA and Y. KANIE - *Vertex operators in conformal field theory on* $\mathbf{P}^1$ *and monodromy representations of braid groups*, Adv. Study in Pure Math. **19** (1989) 459-565.

[TUY] A. TSUCHIYA, K. UENO and Y. YAMADA - *Conformal field theory on universal family of stable curve with gauges symmetries*, Adv. Studies in Pures Math. *19* (1989) 459-565.

[V] E. VERLINDE - *Fusion rules and modular transformations in* $2D$*-conformal field theory*, Nucl. Phys. B **300** (1988) 360-375.

[W] E. WITTEN - *Quantum field theory, Grassmannians and algebraic curves*, Comm. Math. Phys. **113** (1987) 529

Olivier MATHIEU

UA 1 du CNRS
Université Louis Pasteur
I.R.M.A.
7, rue René Descartes
F-67084 STRASBOURG CEDEX

Astérisque

PIERRE PANSU

Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki, exp. n° 778, p. 69-105
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__69_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 1993
46ème année, 1993-94, n° 778

SOUS-GROUPES DISCRETS DES GROUPES DE LIE : RIGIDITÉ, ARITHMÉTICITÉ

par **Pierre PANSU**

1. INTRODUCTION

On s'intéresse aux pavages en géométrie hyperbolique, et, plus généralement, dans les géométries attachées aux groupes de Lie semi-simples. Si la forme du pavé fondamental peut connaître d'infinies variations (cf. l'oeuvre de M. Escher), le groupe de symétrie d'un pavage, sous-groupe discret dans un groupe de Lie, est relativement rigide. En ce sens, la géométrie affine plane compte seulement 17 types de pavages. La géométrie hyperbolique plane, en revanche, comporte une infinité de types de pavages, la plupart étant déformables. En dimension supérieure, il existe encore une infinité de pavages, bien qu'ils soient plus difficiles à construire. Toutefois, ces pavages ne sont pas déformables.

A mesure que la dimension (et la complexité du groupe de Lie concerné) augmente, on s'attend à ce que les sous-groupes discrets présentent des propriétés de rigidité de plus en plus frappantes. En fait, il existe assez peu de résultats généraux. Ce qui fait l'intérêt du sujet, c'est plutôt la diversité des techniques employées : théorie ergodique, géométrie différentielle, analyse non linéaire. L'objet du présent exposé est de donner un aperçu de quelques unes de ces techniques.

Les développements récents apportent un éclairage nouveau sur un problème ancien : caracériser les groupes fondamentaux des variétés projectives complexes. En un sens, le groupe fondamental est un invariant transcendant. Toutefois, ses représentations de dimension finie sont à nouveau des objets algébriques (fibrés de Higgs). Les propriétés particulières des représentations et des espaces de représentations mises ainsi en évidence sont autant de contraintes sur le groupe

fondamental.

Je tiens à remercier A. Beauville et H.C. ImHof pour leur aide, ainsi que V. Le Dret pour la mise au point finale du texte.

1.1. Les différents types de rigidité.

Commençons par décrire, sur une famille d'exemples élémentaires, ce qu'on entend par rigidité.

La figure 1 ci-contre représente un pavage du plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$. Le pavé fondamental est un triangle dont les angles valent $\pi/2$, $\pi/4$ et $\pi/6$. Tout triangle d'angles π/p, π/q et π/r où p, q et r sont des entiers tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$ pave le plan hyperbolique, accréditant l'idée que la géométrie hyperbolique est très riche en pavages, plus riche en tout cas que les géométries euclidienne ou elliptique (sphérique).

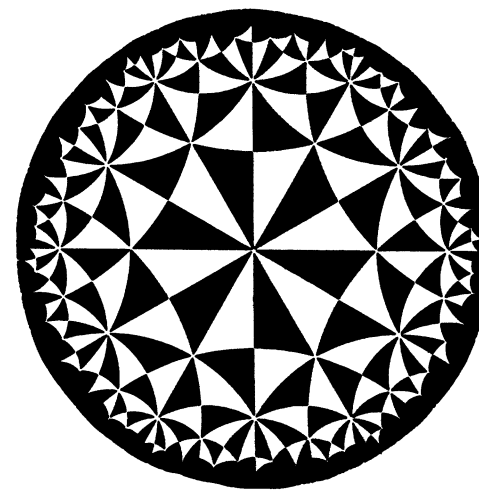


Figure 1

Le groupe des symétries de ce pavage est noté $T(p,q,r)$. Il est engendré par les réflexions s_{pq}, s_{qr} et s_{rp} par rapport aux côtés d'un seul pavé, sujettes aux six relations $s_{pq}^2=1$, $(s_{pq}s_{qr})^q=1$, etc... Le groupe $T(2,4,6)$ est *rigide* au sens suivant : tout sous-groupe d'isométries du plan hyperbolique isomorphe, en tant que groupe abstrait, à $T(2,4,6)$, est engendré par les réflexions par rapport aux côtés d'un triangle, et par conséquent, conjugué à $T(2,4,6)$ dans le groupe Isom $(\mathbf{H}^2)$ des isométries du plan hyperbolique.

Cette propriété s'étend en partie aux dimensions supérieures. Les actions isométriques de $T(2,4,6)$ sur l'espace hyperbolique de dimension n se rangent en trois catégories :

- ou bien il y a un point fixé par tous les éléments de $T(2,4,6)$;

dans ce cas l'image de $T(2,4,6)$ est contenue dans un sous-groupe compact du groupe Isom $(\mathbf{H}^n)$;

- ou bien il y a un point à l'infini fixé par tous les éléments de $T(2,4,6)$;

dans ce cas l'image de $T(2,4,6)$ est contenue dans un sous-groupe fermé connexe non réductif du groupe $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$;

- ou bien l'action laisse invariant un plan hyperbolique et préserve un pavage de ce plan par des triangles ;

dans ce cas l'image de $T(2,4,6)$ est contenue dans un sous-groupe isomorphe au produit de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^2)$ et d'un sous-groupe compact de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$, de façon qu'en projetant sur le facteur $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^2)$, on retrouve $T(p,q,r)$.

On dit que le groupe $T(2,4,6)$ est *superrigide* pour les groupes $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$.

Ce phénomène de rigidité est plutôt exceptionnel en dimension 2. Lorsque r tend vers $+\infty$, le triangle d'angles π/p, π/q et π/r converge vers un triangle d'angles π/p, π/q, dont un sommet est à l'infini, mais dont l'aire reste finie (elle vaut $\pi(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$). Ce triangle pave le plan hyperbolique, et son groupe de symétrie $T(p,q,\infty)$ a simplement perdu une relation. Ce groupe n'est plus rigide. En effet, le sous-groupe (non discret) engendré par les réflexions par rapport aux côtés d'un triangle d'angles π/p, π/q et π/r où r est irrationnel engendrent un groupe isomorphe à $T(p,q,\infty)$.

Toutefois, la rigidité persiste sous des hypothèses supplémentaires : un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^2)$ isomorphe à $T(p,q,\infty)$ qui admet un domaine fondamental d'aire finie est conjugué à $T(p,q,\infty)$. On parle de rigidité à *la Mostow*.

Evidemment, la superrigidité est aussi en défaut. On peut même construire des sous-groupes de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^3)$ isomorphes à $T(p,q,\infty)$ qui ne laissent invariant ni point, ni point à l'infini, ni plan.

Même la rigidité à la Mostow est l'exception en dimension 2. A isométrie près, un hexagone à angles droits dépend de trois paramètres continus, les longueurs de 3 côtés non contigus. Par conséquent, le groupe Γ, d'indice 12 dans $T(2,4,6)$, engendré par les réflexions par rapport aux côtés de l'hexagone, réunion de 12 triangles de la figure 1, peut-être déformé continûment, tout en conservant un domaine fondamental compact.

Enfin, pour un sous-groupe d'indice 4 Γ' de Γ, l'espace des orbites est une surface de genre 2. Le théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe établit un dictionnaire entre surfaces de Riemann compactes de genre ≥ 2 et sous-groupes discrets sans torsion de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^2)$ préservant l'orientation et admettant un do-

maine fondamental compact (à conjugaison près). Par conséquent, un groupe dont l'espace des orbites est une surface compacte est toujours déformable.

1.2. De l'espace hyperbolique aux espaces symétriques.

Donnons maintenant un aperçu de l'histoire de la rigidité des pavages.

C'est A. Selberg qui, a la fin des années 50, a eu l'intuition que les pavages de l'espace hyperbolique sont rigides. C'était le moment où K. Kodaira développait la théorie des déformations de variétés complexes. En adaptant la méthode de Kodaira aux déformations de variétés riemanniennes compactes à courbure constante, E. Calabi a pu prouver leur *rigidité locale*, (non publié, voir toutefois [C]). En termes de groupes discrets, cela signifie que si Γ est un sous-groupe discret sans torsion de Isom $(\mathbf{H}^n)$ dont l'espace des orbites est compact, tout sous-groupe de Isom $(\mathbf{H}^n)$ suffisamment voisin de Γ lui est conjugué.

En 1960, E. Calabi et E. Vesentini ont étendu cette propriété aux groupes d'isométries des domaines symétriques de $\mathbf{C}^n$, [C-V].

Cette généralisation est naturelle à plus d'un titre.

En 1925, E. Cartan menait de front deux entreprises de classification. D'une part celle des groupes de Lie simples, d'autre part, celle des variétés riemanniennes symétriques. Une variété riemannienne est dite *symétrique* si chaque point est un point fixe isolé d'au moins une isométrie. E. Cartan a découvert deux classifications parallèles. Entre autres, il établit un dictionnaire entre variétés symétriques à courbure négative ou nulle mais non nulle et groupes de Lie semi-simples sans facteurs compacts. Si M est une variété symétrique non plate, son groupe d'isométries est semi-simple. Inversement, si G est un groupe de Lie semi-simple sans facteurs compacts, et K un sous-groupe compact maximal, alors l'espace homogène G/K admet une métrique riemannienne G-invariante, essentiellement unique, dont la courbure est négative ou nulle.

L'espace hyperbolique est symétrique, et son groupe d'isométries Isom $(\mathbf{H}^n) = PO(n,1)$ est presque simple, formé de deux composantes connexes du groupe orthogonal d'une forme quadratique réelle de signature $(n,1)$.

Une variété riemannienne est dite *localement symétrique* si son revêtement universel est symétrique. L'étude des variétés riemanniennes localement symétriques à courbure négative ou nulle s'identifie donc à celle des sous-groupes discrets

sans torsion des groupes de Lie semi-simples sans facteurs compacts. Désormais, on désignera par *réseau* un sous-groupe discret d'un groupe de Lie dont l'espace des orbites est une variété de volume fini. Si l'espace des orbites est compact, on parlera de *réseau uniforme*. Un réseau dans un produit de groupes est dit *irréductible* si sa projection dans chacun des facteurs est dense.

Le résultat de E. Calabi et E. Vesentini affirme la rigidité locale des réseaux uniformes dans certains groupes de Lie semi-simples. Le cas général est dû à A. Weil, [W], pour les réseaux uniformes, à H. Garland, [Ga1], pour les réseaux non uniformes.

1.3 THÉORÈME .– *Soit G un groupe de Lie semi-simple sans facteurs compacts. Soit Γ un réseau irréductible de G. Supposons G distinct de (i.e. non isogène à) $Sl(2,\mathbf{C})$ ou $Sl(2,\mathbf{R})$ ($\neq Sl(2,\mathbf{R})$ suffit si Γ est uniforme). Alors toute déformation continue de Γ dans G est triviale, i.e., obtenue en appliquant à Γ une famille continue d'automorphismes intérieurs de G.*

1.4. Superrigidité en rang ≥ 2.

En 1966, G.D. Mostow établit la forme de rigidité qui porte son nom pour les sous-groupes discrets cocompacts de $\mathrm{Isom}\,(\mathbf{H}^n)$, $n \geq 3$, [M1]. En 1971, il parvient à étendre sa méthode aux autres espaces symétriques à courbure sectionnelle strictement négative, [M2], puis au cas général, [M3].

1.5 THÉORÈME [M3].– *Soit G un groupe de Lie semi-simple sans facteurs de dimension 3. Soient Γ et Γ' deux réseaux irréductibles de G. Tout isomorphisme $\Gamma \to \Gamma'$ provient d'un automorphisme de G.*

Autrement dit, on peut reconstruire le groupe de Lie G à partir du réseau Γ. En fait, la relation entre le groupe de Lie et ses réseaux est encore plus profonde comme en témoigne la superrigidité, découverte par G.A. Margulis en 1974 (la résolution du problème des sous-groupes de congruence, [B-M-S], entrainait dès 1967 des cas particuliers de superrigidité).

Le résultat de G.A. Margulis concerne les groupes discrets d'isométries des espaces symétriques de rang au moins égal à deux. Cela recouvre la plupart des cas, mais pas l'espace hyperbolique.

Le *rang réel* d'un espace symétrique M est la dimension maximale d'un sous-espace totalement géodésique de M isométrique à l'espace euclidien. M est à courbure sectionnelle strictement négative si et seulement si son rang est égal à un. Alors son groupe d'isométries est dans la (courte) liste suivante : $PO(n,1)$, $n \geq 2$, $PU(n,1)$, $n \geq 1$, $Sp(n,1)$, $n \geq 1$, F_4^{-20}. Les espaces symétriques correspondants sont l'espace hyperbolique et ses variantes où le corps de base $\mathbf{R}$ est remplacé par les complexes $\mathbf{C}$, les quaternions $\mathbf{H}$ ou les octaves de Cayley $\mathbf{Ca}$.

1.6 THÉORÈME [Ma2], [Ma3], voir aussi [T3].- *Soit* $\mathbf{K}$ *un corps local de caractéristique zéro. Soit* H *un groupe algébrique semi-simple sur* $\mathbf{K}$. *Soit* G *un groupe de Lie semi-simple sans facteurs compacts, dont l'espace symétrique a un rang réel* ≥ 2. *Soit* Γ *un réseau irréductible de* G. *Soit* $\pi : \Gamma \to H$ *un homomorphisme dont l'image est Zariski dense dans* H. *Alors* π *s'obtient en composant un plongement de* Γ *dans un produit* $G \times L$ *(où* L *est un sous-groupe compact de* H*) avec un homomorphisme* $G \times L \to H$. *En particulier, si* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, π *s'étend en un homomorphisme de* G *dans* H. *Si* $K \neq \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$, *l'image de* π *est relativement compacte dans* H.

Géométriquement, la superrigidité par rapport aux groupes semi-simples sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ signifie ceci : si N est une variété localement symétrique compacte, et $M \subset N$ une sous-variété qui admet une métrique localement symétrique de rang ≥ 2, alors M est homotope à une sous-variété totalement géodésique. Elle est en défaut pour les sous-groupes de $PO(n,1)$. En effet, on peut construire des variétés à courbure constante qui contiennent des hypersurfaces totalement géodésiques "brisées", voir en 2.7.

La superrigidité de Γ par rapport aux groupes semi-simples sur les corps p-adiques, combinée avec le cas de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$, entraîne que Γ est essentiellement obtenu par la seule construction générale connue : prendre les matrices à coefficients entiers dans une représentation linéaire du groupe ambiant G définie sur $\mathbf{Q}$. On voit ainsi que la superrigidité (sur $\mathbf{R}$ du moins) ne s'étend pas aux sous-groupes de $PU(n,1)$ pour $n = 2$, 3. En effet, ces groupes admettent des sous-groupes "non arithmétiques", voir en 2.6.

1.7. Superrigidité en rang un.

Dès 1974, il était naturel de penser que la superrigidité devait s'étendre aux familles restantes $Sp(n,1)$, $n \geq 2$, et F_4^{-20}. Une autre propriété liée aux représentations, la propriété (T) de Kazhdan, avait fait apparaître une coupure au sein des espaces de rang un. Elle est en défaut exactement pour les groupes $PO(n,1)$ et $PU(n,1)$.

En 1990, K. Corlette a démontré que les sous-groupes de $Sp(n,1)$, $n \geq 2$, et de F_4^{-20} sont superrigides par rapport aux groupes réductifs sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. M. Gromov et R. Schoen ont étendu sa méthode au cas des représentations sur les corps p-adiques, et la propriété d'arithméticité en résulte. Cette méthode ramène la superrigidité à un théorème d'annulation relatif aux applications harmoniques entre espaces symétriques (resp. immeubles). Elle repose sur une formule à la Bochner. Celle de K. Corlette s'applique en fait à une classe plus vaste d'espaces symétriques, ceux qui admettent une forme différentielle invariante "rigide". Récemment, N. Mok, Y.T. Siu et S.K. Yeung ont proposé une autre formule qui couvre toutes les situations où la superrigidité est connue.

1.8. Groupes kählériens.

La méthode précédente permet d'analyser une représentation du groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte. Au lieu d'entraîner sa rigidité, le théorème d'annulation lui assigne un objet holomorphe : un fibré de Higgs (N. Hitchin, [H]). Ce procédé est vu comme une version non abélienne de l'isomorphisme entre cohomologie de Dolbeault et de de Rham. La décomposition de Hodge se traduit par une action du groupe $\mathbf{C}^*$ sur l'espace des représentations (C. Simpson, [Si1]). L'étude des points fixes de cette action apporte des informations sur la topologie de l'espace des représentations.

L'exposé ne suivra pas l'ordre chronologique mais plutôt quelques lignes directrices.

- Comment construire des réseaux ;
- le rôle croissant de la théorie ergodique ;
- intégration par parties.

2. CONSTRUCTION DE SOUS-GROUPES DISCRETS

2.1. Groupes engendrés par réflexions.

Soit P un polyèdre convexe de l'espace hyperbolique de dimension n. Le groupe engendré par les réflexions par rapport aux faces de P est discret si et seulement si les angles diédraux (i.e., le long des faces de codimension 2) sont de la forme $2\pi/p$ avec p entier.

En dimension 3, de tels polyèdres sont fréquents. En effet, le théorème d'Andreev [A] affirme l'existence et l'unicité d'un polyèdre dont le type combinatoire (triangulation de la sphère) et d'angles diédraux donnés (pourvu que les angles ne soient pas trop grands). Un décompte des paramètres montre que ce théorème ne peut s'étendre en dimensions supérieures.

De fait, la dimension la plus élevée des exemples connus est 21, R. Borcherds [Bo]. Un théorème de A.G. Khovanskii et M.N. Prokhorov affirme qu'aucun polyèdre de volume fini ne peut paver l'espace hyperbolique H^n par réflexions si $n \geq 996$, [Kh], [Pr].

2.2. Cas de l'espace hyperbolique complexe.

Il possède des réflexions complexes, i.e., des isométries qui fixent un hyperplan complexe et sont d'ordre fini. G.D. Mostow a construit des réseaux engendrés par réflexions complexes dans $PU(n,1)$ pour $n \leq 9$, [M5]. Certains des espaces quotients ont une interprétation comme espace de modules de configurations de points sur $\mathbf{C}P^1$, [D-M], ou de métriques à singularités coniques sur $\mathbf{C}P^1$, [Th2].

2.3. Autres constructions.

En dimension 2, on a encore deux autres façons de construire des surfaces à courbure constante à partir de pièces élémentaires.

La première (plomberie) consiste à emboîter des pantalons à bord géodésique. En dimension supérieure, cette méthode n'a pas été exploitée systématiquement (voir cependant en 2.6).

La seconde (ébénisterie) consiste à coller bord à bord des triangles géodésiques idéaux. Cette méthode s'étend à la dimension 3. Elle permet de munir le complémentaire de nombreux noeuds et enlacements de S^3 d'une structure hyperbolique,

voir [Th1]. Là encore, il y a peu d'espoir d'obtenir des exemples de grande dimension.

2.4. Groupes arithmétiques.

Le miracle est qu'il existe une construction générale. Elle consiste à s'appuyer sur l'existence du réseau $Sl(N,\mathbf{Z})$ de $Sl(N,\mathbf{R})$. Elle s'applique à tous les groupes de Lie semi-simples réels G. En effet, à isogénie près, G se plonge (de multiples façons) dans $Sl(N,\mathbf{R})$, comme lieu des zéros communs à des polynomes à coefficients rationnels. Alors $\Gamma = G \cap Sl(N,\mathbf{Z})$ est un réseau de G, voir [B3].

Exemple : Soit q une forme quadratique entière sur $\mathbf{R}^N$, de signature $(1, N-1)$. Alors $\Gamma = O(q) \cap Sl(N,\mathbf{Z})$ est un réseau de $G = O(q)$. On voit aisément que Γ est uniforme si et seulement si q ne représente par zéro. Malheureusement, cela ne se produit jamais si $N \geq 4$.

Modifions la construction. Réalisons $G' = O(N) \times O(N-1,1)$ comme groupe de matrices $2N \times 2N$ défini sur $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ comme suit : G' est le sous-groupe qui préserve la décomposition $\mathbf{R}^{2N} = \mathbf{R}^N \oplus \mathbf{R}^N$ et la forme quadratique $q(x,y) = q_+(x) + q_-(y)$ où $q_\pm(x) = \sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 \pm \sqrt{2}x_N^2$. Alors $\Gamma = G' \cap Sl(N,\mathbf{Z}(\sqrt{2}))$ est un réseau de G'. En effet, si $\Phi(x,y) = (x+\sqrt{2}y, x-\sqrt{2}y)$, alors $\Phi^{-1}G'\Phi$ est défini sur $\mathbf{Q}$ et $\Phi^{-1}\Gamma\Phi = \Phi^{-1}G'\Phi \cap Sl(2N,\mathbf{Z})$. Comme q ne représente pas zéro sur $\mathbf{Z}^{2N}$, Γ est uniforme. Sa projection sur le facteur $O(N-1,1)$ est un réseau uniforme.

2.5 DÉFINITION .– *Soit G un groupe de Lie semi-simple réel. Un sous-groupe Γ de G est dit* arithmétique *s'il admet un sous-groupe d'indice fini obtenu comme suit : On réalise un produit $G \times L$ (où L est un groupe de Lie compact) comme sous-groupe de $Sl(N,\mathbf{R})$ défini sur $\mathbf{Q}$, on prend la projection dans G du sous-groupe des matrices à coefficients entiers de $G \times K$.*

Cette construction permet d'obtenir des réseaux uniformes et non uniformes dans tous les groupes de Lie semi-simples, [B2].

2.6. Groupes non arithmétiques.

Il existe des critères d'arithméticité pour les groupes engendrés par réflexions, voir [V] dans le cas hyperbolique réel et [D-M] dans le cas hyperbolique complexe.

On trouve ainsi des exemples non arithmétiques dans $PO(n,1)$ pour $n \leq 10$ (O.P. Ruzmanov, [Ru]) ainsi que dans $PU(n,1)$ pour $n \leq 3$, [D-M].

M. Gromov et I. Piatetskii-Shapiro [G-P] construisent des variétés à courbure constante non arithmétiques en toute dimension, par le procédé d'hybridation contre nature. On part de deux variétés arithmétiques V_1 et V_2 qui possèdent une symétrie, et telles que le lieu des points fixes, des hypersurfaces H_1 et H_2, soient isométriques. La variété V obtenue en recollant une moitié de V_1 à une moitié de V_2 le long de H n'est pas arithmétique en général. Le critère d'arithméticité utilisé est le suivant : dans une variété arithmétique, toute surface immergée totalement géodésiquement qui contient au moins deux géodésiques fermées est fermée.

2.7. Groupes non superrigides.

Hypersurfaces totalement géodésiques brisées. Les variétés construites en 2.4 possèdent un groupe D_4 de symétrie qui les divisent en 4 parts de gâteau. Le bord de chaque part constitue un plongement non totalement géodésique d'une variété à courbure constante dans une autre.

Pliage. On peut plier continûment un n-plan de H^n dans H^{n+1} le long d'une collection de $n-1$-plans. Si la collection est invariante par un réseau Γ de Isom $(\mathbf{H}^n)$, on obtient une déformation continue non triviale de Γ dans Isom $(\mathbf{H}^{n+1})$, [Th1].

3. BORDS À L'INFINI

Dans ce paragraphe, on explique l'enchaînement d'idées qui, de A. Selberg à G.D. Mostow et G.A. Margulis, culmine avec le théorème d'arithméticité des réseaux en rang ≥ 2.

3.1. L'approche de A. Selberg.

Vers 1958, A. Selberg a constaté que les réseaux uniformes de $Sl(n,\mathbf{R})$, $n \geq 3$, n'ont pas de déformations continues non triviales. Il me semble que son argument est, pour l'essentiel, valable pour un réseau uniforme Γ d'un groupe semi-simple G dont l'espace symétrique a un rang $r \geq 2$.

Il repose sur l'étude des sous-groupes abéliens libres maximaux de Γ. Un argument de densité ramène le problème à montrer que, dans une déformation, les centralisateurs Γ_a des éléments $a \in \Gamma$ suffisamment hyperboliques restent conjugués à eux-mêmes. Or chaque quotient $\Gamma_a \backslash G_a$ est compact, donc Γ_a est un réseau dans $G_a = \mathbf{R}^r$. Dans G_a, il y a un sous-ensemble μ (une réunion d'hyperplans, les murs des chambres de Weyl) formé des b tels que $\dim G_b > r$. L'intersection $\mu \cap \Gamma_a = \{b \in \Gamma_a \ ; \ \Gamma_b$ n'est pas abélien$\}$ est un invariant du groupe abstrait Γ. Ne pouvant traverser les murs des chambres de Weyl, le réseau Γ_a reste homothétique à lui-même dans une déformation continue.

3.2. Remarque.

Si on pouvait affirmer que pour suffisamment de a, $\mu \cap \Gamma_a$ est non vide, on pourrait s'affranchir du raisonnement par continuité, et établir la rigidité à la Mostow. L'idée de G.D. Mostow est d'étendre la correspondance entre centralisateurs Γ_a équipés de leurs murs $\mu \cap \Gamma_a$ (en général triviaux), induite par un isomorphisme de réseaux à tous les centralisateurs G_g d'éléments hyperboliques réguliers g de G équipés de leurs murs μ non triviaux.

3.3. Rigidité à la Mostow.

Donnons un aperçu de la preuve du théorème 1.5 dans le cas de réseaux uniformes.

Les centralisateurs d'éléments hyperboliques réguliers ont une traduction géométrique dans l'espace symétrique G/K : ce sont les *plats*, i.e., les sous-espaces plats totalement géodésiques maximaux. Etant donné un point m d'un plat P, les autres plats passant par m découpent P en *chambres de Weyl.* Deux chambres de Weyl sont dites *asymptotes* si chacune reste dans un voisinage de largeur bornée de l'autre. L'espace des classes d'équivalence de chambres de Weyl est appelé la *frontière maximale* de G, et notée G/P. C'est le plus grand espace homogène compact de G. Lorsque la courbure est strictement négative, $G/K \cup G/P$ est homéomorphe à un disque fermé (voir la figure 1).

Etant donné un réseau Γ, les classes de chambres de Weyl portées par un plat laissé invariant par un sous-groupe de rang r de Γ forment un ensemble dense dans la frontière maximale. Si $h : \Gamma \to \Gamma'$ est un isomorphisme, il induit une

bijection entre sous-ensembles denses de G/P, qu'on parvient à prolonger en un homéomorphisme ∂h.

Lorsque le rang de G/K est au moins 2, on conclut en utilisant une caractérisation de l'action de G sur G/P due à J. Tits [T2]. En effet, ∂h préserve les relations d'incidence entre plats, et les seules symétries de cette "géométrie d'incidence" sont les éléments de G.

En rang un, il n'y a pas de géométrie d'incidence au bord, mais une géométrie conforme. Il est classique que les prolongements au bord d'isométries de H^n, $n \geq 3$, sont caractérisés par la propriété d'être *conformes*, i.e., différentiables avec une différentielle qui préserve les angles. Dans ce cas, le défaut de conformité est mesuré par une fonction Γ-invariante sur un espace homogène compact de $\mathrm{Isom}\,(\mathbf{H}^n)$ (c'est ici que le cas de H^2 se distingue). L'ergodicité de Γ sur cet espace (F.I. Mautner) force ∂h a être conforme.

3.4. Commentaire.

De la méthode de G.D. Mostow, deux aspects seront repris dans les développements ultérieurs. D'abord l'idée qu'on sait reconnaître, parmi les applications entre des espaces homogènes de G, même peu régulières, celles qui sont induites par un élément de G. Ensuite, l'ergodicité de l'action d'un réseau Γ dans un espace homogène G/Q exprime que des objets Γ-invariants sont automatiquement G-invariants, et c'est un bon point de départ vers la superrigidité.

3.5. Remarque.

L'argument de G.D. Mostow a un aspect dynamique : la dynamique topologique de l'action d'un réseau sur le bord détermine le réseau à conjugaison près. On connaît peu d'exemples d'actions différentiables de réseaux sur des variétés compactes. On peut considérer l'étude de ces actions comme une généralisation de l'étude des représentations de dimension finie des réseaux et on s'attend a des phénomènes de rigidité analogues, voir [K-L].

3.6. Bords de groupes discrets.

Pour exprimer la relation profonde entre un réseau uniforme et le groupe de Lie qui le contient, G.A. Margulis a dégagé le concept de *quasiisométrie* entre espaces

métriques (application bilipschitzienne entre sous-ensembles discrets). M. Gromov a mis en évidence un grand nombre d'invariants de quasiisométrie des groupes discrets. C'est dans le cadre des espaces métriques hyperboliques (généralisation de la courbure strictement négative) que cette notion est la plus utile. M. Gromov attache à un tel espace un bord à l'infini, fonctoriel sous les quasiisométries, et qui porte une géométrie "quasiconforme". Ce bord est le principal outil d'investigation des groupes hyperboliques, [G1].

3.7. Preuve topologique.

M. Gromov a donné une preuve de la rigidité à la Mostow des réseaux de Isom $(\mathbf{H}^n)$ qui repose sur une caractérisation des isométries au moyen des simplexes idéaux réguliers, et sur l'invariance topologique du volume des variétés à courbure constante, voir [Th].

3.8. Groupes géométriquement finis.

Un groupe d'isométries de H^3 est dit *géométriquement fini* s'il possède un polyèdre fondamental qui n'a qu'un nombre fini de faces. Pour un tel groupe Γ, l'espace des orbites $\Gamma \backslash H^3$ n'est pas en général compact, mais il a un bord à l'infini qui est une surface de type topologique fini, munie d'une structure conforme. Les déformations de Γ dans Isom $(\mathbf{H}^3)$ sont exactement paramétrées par les structures conformes sur le bord à l'infini. Ce résultat, qu'on peut voir comme une forme de la rigidité à la Mostow, joue un rôle essentiel dans le théorème d'hyperbolisation de W. Thurston, [Th].

3.9. Superrigidité.

Le mot est dû à G.D. Mostow.

Echafaudant à partir des idées de G.D. Mostow, la preuve de G.A. Margulis apporte un ingrédient supplémentaire, les propriétés spécifiques des actions algébriques de groupes algébriques sur des variétés algébriques. Naïvement, la Zariski densité d'un réseau Γ dans G (A. Borel) exprime à nouveau que les fonctions Γ-invariantes sont automatiquement G-invariantes, et cela a aussi à voir avec la superrigidité.

La stratégie consiste à produire des objets dans des espaces très vastes, en vertus de principes généraux, puis à prouver leur régularité grâce à l'ergodicité de l'action d'un réseau sur tout espace homogène. Les espaces vastes sont

- l'espace $\mathcal{M}(V)$ des mesures de probabilité sur une variété algébrique V ;
- l'espace $F(X,V)$ des applications mesurables d'un espace mesuré X dans V.

Du point de vue de la dynamique d'une action algébrique, ces espaces sont aussi bons que des variétés algébriques : si H agit sur V, les stabilisateurs des points de $\mathcal{M}(V)$ ou de $F(X,V)$ sont des sous-groupes algébriques (à un compact près), et les quotients $\mathcal{M}(V)/H$ et $F(X,V)/H$ ont une bonne structure borélienne.

3.10. La preuve.

D'après [Z]. Soit Γ un réseau irréductible de G et $\pi : G \to H$ un homomorphisme Zariski dense.

1) Construction d'une application mesurable Γ-equivariante de G/P dans un espace homogène de H. Le sous-groupe P étant moyennable, il a un point fixe ϕ dans le convexe faiblement compact des applications mesurables Γ-équivariantes de G dans $\mathcal{M}(V)$, où V est le bord de H. Projetée dans l'espace des orbites $\mathcal{M}(V)/H$, cette application est Γ-invariante donc constante. ϕ est donc à valeurs dans une seule orbite, notée W, de H.

2) Caractérisation des homomorphismes. En général, les applications $f : G \to W$ qui sont les orbites pour un homomorphisme $G \to H$ correspondent aux points fixes de G dans l'espace quotient $F(G,W)/H$. Si Γ agissait ergodiquement sur G, on conclurait immédiatement que ϕ provient d'un homomorphisme $G \to H$. Evidemment, ce n'est pas vrai, mais ce raisonnement s'applique si on remplace G par un sous-groupe C de G qui commute avec un sous-groupe T de P : l'application ϕ induit une application $G/T \to F(C,W)/H$, qui est Γ-invariante donc constante. Par conséquent, le long de chaque orbite de C, ϕ est un homomorphisme, donc analytique. Si de plus C est unipotent, alors ϕ est polynomiale.

3) Avec des sous-groupes unipotents centralisant des éléments singuliers de P, on obtient un système de coordonnées rationnel du bord G/P (c'est impossible en rang 1). L'application ϕ, polynomiale le long des axes de coordonnées, est globalement rationnelle. On en déduit que l'adhérence de Zariski du graphe de π dans $G \times H$ est le graphe d'un homomorphisme de G dans H prolongeant π.

3.11. Remarques.

Le cadre naturel du théorème de G.A. Margulis est la théorie des groupes algébriques sur les corps locaux. La méthode s'étend naturellement au cas où G est un produit de groupes simples sur $\mathbf{R}$ et les $\mathbf{Q}_p$, voir [Ma3].

H. Furstenberg a proposé une méthode plus géométrique pour la première étape. L'idée est qu'une vaste classe de marches aléatoires sur G ont pour frontière de Poisson le bord G/P. Cette classe inclut les marches concentrées sur des sous-groupes pourvu qu'ils soient Zariski denses, voir [F]. N. A'Campo et M. Burger proposent dans [A-B] une preuve plus intuitive : l'argument décisif est, comme dans Selberg et Mostow, le fait qu'on peut relier deux éléments hyperboliques réguliers de G par une chaîne d'éléments hyperboliques qui commutent deux à deux.

Il existe deux résultats de superrigidité en rang 1 qui utilisent la première partie du raisonnement de G.A. Margulis. W. Thurston, [Th], montre que toute application de degré non nul entre variétés compactes à courbure constante est homotope à un revêtement isométrique. D. Toledo, [To], montre qu'un homomorphisme d'un groupe de surface dans $U(n,1)$ de première classe de Chern maximale passe par $U(n-1) \times U(1,1)$.

3.12. Arithméticité.

Voici comment G.A. Margulis montre qu'un réseau superrigide est arithmétique, [Ma1].

a. D'après A. Selberg (voir en 4.3), on peut supposer que, dans une représentation de G définie sur $\mathbf{Q}$, les coefficients de matrices de Γ sont algébriques. En fait, comme Γ a un nombre fini de générateurs, dans une extension $\mathbf{K}$ de degré d de $\mathbf{Q}$. Quitte à plonger $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{Q}^d$, on se ramène au cas où G est un facteur d'un produit $G \times G'$, sous-groupe de $Sl(N, \mathbf{R})$ défini sur $\mathbf{Q}$, et $\Gamma \subset Sl(N, \mathbf{Q})$.

b. La superrigidité de Γ par rapport à G' entraîne que G' est compact.

c. Pour chaque nombre premier p, l'image de Γ dans $Sl(N, \mathbf{Q}_p)$ est relativement compacte (superrigidité par rapport à $Sl(N, \mathbf{Q}_p)$), donc un sous-groupe d'indice fini a son image dans $Sl(N, \mathbf{Z}_p)$. On conclut que $\Gamma \cap Sl(N, \mathbf{Z})$ est d'indice fini dans Γ.

3.13. Remarques.

1. Dans une certaine mesure, les groupes algébriques sur $\mathbf{Q}$ sont tous connus, J. Tits, [T1]. On peut donc dire que le théorème d'arithméticité constitue une classification, à commensurabilité près, des réseaux dans les groupes semi-simples de rang ≥ 2.

2. Dans les exemples connus de réseaux non arithmétiques, c'est l'étape b qui est en défaut. Pour chacun de ces exemples, le groupe Γ est un sous-groupe d'un réseau arithmétique irréductible d'un produit $G \times G'$, où G' est non compact, mais dont la projection sur G est néanmoins discrète. Voir par exemple [C-W].

4. INTEGRATION PAR PARTIES

C'est une autre manière de montrer que certains objets Γ-invariants sont forcément G-invariants. Dans ce paragraphe, on explique les fondements de la méthode, et ses applications à des problèmes linéaires : rigidité locale de représentations, annulation de cohomologie, propriété (T) de D. Kazhdan.

4.1. La formule de Bochner.

Plaçons nous dans le cas simple où $G = \mathbf{R}^n$ et $\Gamma = \mathbf{Z}^n$. Si f est une fonction Γ-invariante sur G, alors en intégrant par parties le carré de la norme des dérivées secondes, on trouve

$$\int_{\Gamma\backslash G} |\Delta f|^2 - |D^2 f| = 0.$$

Si f est harmonique, on conclut que f est linéaire puis constante, i.e., G-invariante.

La formule s'étend aux 1-formes α (et pas seulement $\alpha = df$). Sur une variété compacte non plate, un terme en courbure (la courbure de Ricci) apparaît, c'est la formule de S. Bochner :

$$\int_M |d\alpha|^2 + |\delta\alpha| - |D\alpha|^2 = \int_M Ricci(\alpha, \alpha)$$

où D est la connexion de Levi-Civita.

La formule se généralise au cas des formes à valeurs dans un fibré E muni d'une connexion orthogonale D.

$$(1) \qquad \int_M |d^D\alpha|^2 + |\delta^D\alpha| - |D\alpha|^2 = \int_M Ricci(\alpha,\alpha) - \mathrm{tr}(\alpha^* R^E)$$

où R^E est la courbure du fibré (E,D), qui, prenant ses valeurs dans $End(E)$, est ramenée dans $End(TM)$ au moyen de $\alpha \in Hom(TM,E)$. Même lorsque la courbure de Ricci est négative (c'est toujours le cas pour les espaces symétriques non compacts), la formule peut donner des résultats à condition que la courbure de E soit suffisamment positive.

Lorsque le fibré E est donné avec une connexion ∇ non orthogonale, on applique la formule à la partie antisymétrique D de ∇, qui est une connexion orthogonale.

4.2. L'approche cohomologique de la rigidité locale.

Soit Γ un groupe discret, et $\pi : \Gamma \to G$ un homomorphisme dans un groupe de Lie semi-simple. Les déformations infinitésimales de π sont mesurées par $H^1(\Gamma, Lie(G)_\pi)$. Si Γ est le groupe fondamental d'une variété asphérique N, la représentation π composée avec la représentation adjointe détermine un fibré E sur N muni d'une connexion plate ∇, et on peut calculer $H^1(\Gamma, Lie(G)_\pi) = H^1(N,E)$ au moyen du complexe des formes différentielles à valeurs dans E. On choisit une métrique sur E (cela revient à choisir une application équivariante de $\tilde{N}$ dans G/K). Si N est compacte, chaque classe de cohomologie contient une unique 1-forme harmonique, i.e., dans $\ker d^\nabla \cap \ker \delta^\nabla$.

La preuve du théorème de rigidité infinitésimale d'A. Weil (dont A. Weil attribue la paternité à E. Calabi) consiste à montrer que toute 1-forme harmonique est nulle en appliquant la formule de S. Bochner. Il faut calculer la courbure de la connexion unitaire D sur le fibré E. Celui-ci s'identifie à $TM \oplus KM$ où $M = G/K$ est l'espace symétrique de G, KM est l'algèbre de Lie de K vue comme un sous-espace de $End(TM)$, est D n'est autre que la connexion de Levi-Civita de M. Si on décompose $\alpha = \beta + \gamma$ où β (resp. γ) est à valeurs dans TM (resp. KM), alors

$$(2) \qquad \mathrm{tr}(\alpha^* R^E) = 2\langle \overset{\circ}{R}\, \beta, \beta\rangle + 2\mathrm{tr}(\hat{R} \circ [\gamma \wedge \gamma])$$

(ici, $\overset{\circ}{R}$ et $\hat{R}$ sont les deux manières de faire d'un tenseur de courbure un endomorphisme symétrique de $End(TM)$; $\hat{R}$, qui est nul sur les endomorphismes symétriques, s'appelle traditionnellement l'opérateur de courbure).

A. Weil choisit évidemment $N = \pi(\Gamma) \setminus M$ et vérifie que, sauf dans le cas où M est de dimension 2, les deux termes de (2) compensent largement la courbure de Ricci ainsi que la contribution de $d^D\alpha$ et $\delta^D\alpha$ (qui ne sont pas nuls).

La méthode, qui s'appuie seulement sur la compensation entre la courbure de G/K et celle de N, devrait s'appliquer à l'étude des représentations du groupe fondamental de variétés non localement symétriques.

4.3. Algébricité.

A. Selberg remarque que l'annulation de $H^1(\Gamma, Lie(G)_\pi)$ entraîne qu'on peut plonger G dans $Sl(N, \mathbf{C})$ de façon que les matrices des éléments de Γ aient des coefficients algébriques sur $\mathbf{Q}$. En effet, réalisons G comme les points réels d'un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$, et soit $G^{\mathbf{C}}$ le groupe de ses points complexes. L'espace des représentations $X^{\mathbf{C}} = Hom(\Gamma, G^{\mathbf{C}})$ est un ensemble analytique complexe, sur lequel le groupe $G^{\mathbf{C}}$ agit par conjugaison. Soit $\pi : \Gamma \to G$ un homomorphisme. Son orbite $G^{\mathbf{C}}\pi$ est une sous-variété lisse. Si $H^1(\Gamma, Lie(G^{\mathbf{C}})_\pi) = H^1(\Gamma, Lie(G)_\pi) \otimes \mathbf{C} = 0$, alors l'orbite et $X^{\mathbf{C}}$ ont même espace tangent de Zariski, donc $G^{\mathbf{C}}\pi$ est ouvert dans $X^{\mathbf{C}}$. D'après le Nullstellensatz, les points algébriques sur $\mathbf{Q}$ de $X^{\mathbf{C}}$ sont denses dans $X^{\mathbf{C}}$, donc, à conjugaison près, $\pi \in X^{\overline{\mathbf{Q}}}$.

4.4. La formule de Matsushima.

En lisant A. Weil, Y. Matsushima a découvert une variante de la formule de Bochner qui permet d'obtenir des résultats d'annulation plus fins. La présentation qu'on va en donner est due à N. Mok, Y.T. Siu et S.K. Yeung.

En contemplant la formule (2), on a envie d'intégrer par parties une expression comme $\langle \overset{\circ}{R}\, \beta, \beta \rangle$. Sur un espace localement symétrique, ça se passe bien parce que le tenseur de courbure est parallèle. Rappelons qu'un *tenseur de courbure* sur un espace vectoriel V est un 4-tenseur covariant qui possède les mêmes symétries que

le tenseur de courbure d'une variété riemannienne (rendu covariant), à savoir

$$Q(X,Y,Z,T) = -Q(Y,X,Z,T) = Q(Z,T,X,Y)$$
$$Q(X,Y,Z,T) + Q(Y,Z,X,T) + Q(Z,X,Y,T) = 0.$$

En présence d'une métrique g sur V, on fait agir Q sur les 1-formes et les 2-tenseurs comme suit : $Q(\alpha) = g_{km}Q^{ijkl}\alpha^m \in \Lambda^2 V^* \otimes V^*$ et $\overset{\circ}{Q}\ \tau = g_{km}g_{ln}Q^{ikjl}\tau^{mn} \in V^* \otimes V^*$. Enfin, il existe un unique tenseur de courbure, noté I tel que $\overset{\circ}{I}$ soit l'identité ($-I$ est le tenseur de courbure de l'espace hyperbolique).

4.5 PROPOSITION .– *Soit M une variété riemannienne compacte, R son tenseur de courbure, E un fibré vectoriel sur M muni d'une métrique et d'une connexion orthogonale D. Soit α une 1-forme sur M à valeurs dans E. Soit Q un tenseur de courbure parallèle sur M. On a (intégration par parties)*

$$\int_M \langle \overset{\circ}{Q}\ D\alpha, D\alpha\rangle = \frac{1}{2}\int_M \left(\langle Q, \alpha^* R^E\rangle + \langle Q(\alpha), R(\alpha)\rangle\right). \tag{3}$$

Sur toute variété riemannienne, on peut transplanter le tenseur I et il est parallèle. En faisant $Q = I$, on retrouve la formule (1). En général, I est le seul tenseur de courbure parallèle. En effet, pour une variété riemannienne générique, le groupe d'holonomie de la connexion de Levi-Civita est $SO(n)$ ou $O(n)$, qui ne laisse invariante qu'une droite de tenseurs de courbure.

Les variétés localement symétriques sont caractérisées par le fait que leur tenseur de courbure est parallèle. On peut donc prendre pour Q une combinaison de I et de R. Sur une variété localement symétrique *localement irréductible* (i.e., le revêtement universel n'est pas un produit riemannien, ou, ce qui revient au même, son groupe d'isométries est simple), le terme $\langle Q(\alpha), R(\alpha)\rangle$ est automatiquement proportionnel à $\langle Q, R\rangle|\alpha|^2$. Dans ce cas, pour des formes scalaires et si $Q = R_\perp$ est la composante de I orthogonale au tenseur de courbure, la formule (3) devient simplement

$$\int_M \langle \overset{\circ}{R}_\perp\ D\alpha, D\alpha\rangle = 0.$$

4.6 COROLLAIRE .– *Si Γ est un réseau uniforme d'un groupe de Lie semi-simple distinct de $SO(n,1)$ ou $SU(n,1)$, alors $H^1(\Gamma, \mathbf{R}) = 0$.*

En effet, si α est une 1-forme harmonique, $D\alpha$ est symétrique à trace nulle. Or $\overset{\circ}{R}_\perp$ est défini positif dans tous les cas indiqués dans l'énoncé. Cette propriété algébrique résulte des efforts de E. Calabi, E. Vesentini [C-V], A. Borel [B1], Y. Matsushima et S. Kaneyuki, T. Nagano [K-N] (et sans doute d'autres encore). On trouve que $D\alpha = 0$, et enfin $\alpha = 0$.

4.7. Remarques.

1. La méthode s'étend aux formes de degré supérieur, voir le livre [B-W].

2. Une preuve conceptuelle de la positivité de $\overset{\circ}{R}_\perp$ est souhaitable.

3. H. Garland, [Ga2], a découvert une sorte de version simpliciale de la méthode de Y. Matsushima. Elle s'applique avec succès aux quotients compacts des immeubles de Tits associés aux groupes semi-simples sur $\mathbf{Q}_p$, et fournit un théorème d'annulation de cohomologie pour les réseaux. En particulier, $H^1(\Gamma, \mathbf{R}) = 0$ dès que l'immeuble est de dimension ≥ 2 (et p assez grand, sinon, voir [B-W]).

4.8. La propriété (T) de Kazhdan.

En 1968, D. Kazhdan, a découvert une autre manière de montrer la nullité de $H^1(\Gamma, \mathbf{R})$ lorsque Γ est un réseau dans un groupe de Lie semi-simple de rang ≥ 2. Le point remarquable est le fait que la propriété suivante

(T) *La représentation triviale est isolée dans l'espace des représentations unitaires de G*

est vraie simultanément pour G et pour un réseau Γ de G. Clairement, la propriété T pour les représentations de dimension 1 entraîne que $H^1(\Gamma, \mathbf{R}) = 0$.

D. Kazhdan a prouvé que les groupes de Lie semi-simples de rang ≥ 2 possèdent la propriété (T) ([K], [D-K]). Les groupes $Sp(n,1)$, $n \geq 2$ et F_4^{-20} l'ont aussi (B. Kostant).

L'analyse de l'espace tangent à l'espace des représentations unitaires de Γ conduit à la formulation équivalente : (T) $\Leftrightarrow H^1(\Gamma, \pi) = 0$ pour toute représentation unitaire π de Γ. Cette annulation est aussi une conséquence de la formule de

Y. Matsushima (3). En effet, π définit un fibré unitaire plat (E, ∇) (en général de dimension infinie) sur $M = \Gamma \setminus G/K$, et $H^1(\Gamma, \pi) = 0$ se calcule au moyen des formes différentielles L^2 à valeurs dans E. De $\int \langle \overset{\circ}{R}_\perp D\alpha, D\alpha \rangle = 0$, et avec $\overset{\circ}{R}_\perp \gg 0$, on tire une inégalité de la forme $|D\alpha|^2 \leq C\,(\| d\alpha \|^2 + \| \delta\alpha \|^2)$. En particulier, le laplacien est inversible sur L^2, et on peut résoudre l'équation cohomologique $d\beta = \alpha$ par $\beta = \delta\Delta^{-1}\alpha$. Le même argument, s'appuyant sur les résultats de H. Garland, prouve la propriété (T) pour les réseaux des groupes semi-simples p-adiques.

4.9. Le cas de $SO(n,1)$ et de $SU(n,1)$.

Ces groupes n'ont pas la propriété (T). En un certain sens, ils sont incompatibles avec (T) : tout homomorphisme d'un groupe possédant la propriété (T) dans $SO(n,1)$ ou $SU(n,1)$ a une image relativement compacte, voir le livre [H-V].

4.10. Tenseurs de courbure parallèles.

On peut se demander si il y a d'autres candidats que I et R à mettre dans la formule (3). En général non.

Pour un espace symétrique $M = G/K$, l'holonomie de la connexion de Levi-Civita est exactement $adK \subset End(TM)$. Les objets parallèles sur M correspondent aux objets adK -invariants sur $End(TM)$. Comme un tenseur de courbure peut être vu comme une forme quadratique sur $\Lambda^2 TM$, la dimension $d(M)$ de l'espace des tenseurs de courbure parallèle est inférieure au nombre de composantes irréductibles dans la décomposition de $End(TM)$ sous K. Visiblement, $Lie(K)$ est un sous-espace invariant. Dans le cas où G est simple, il s'avère, [W-Z], que son orthogonal est toujours irréductible. Par conséquent, $d(M)$ ne dépend que du nombre de facteurs simples dans K. Il vient

$d(M) = 2$ en général ;

$d(M) = 1$ pour l'espace hyperbolique ;

$d(M) = 3$ si M est hermitien ($K = U(1)K'$) ou quaternionien ($K = Sp(1)K'$) avec les exceptions suivantes ;

$d(M) = 4$ si M est dual d'une grassmannienne (alors K a trois facteurs simples).

Les tenseurs parallèles autres que I et R joueront effectivement un rôle dans la preuve de la superrigidité, voir en 5.1.

4.11. Variétés non symétriques.

D'après M. Berger, parmi les sous-groupes de $O(n)$, il n'y a qu'un petit nombre de choix possibles pour l'holonomie d'une variété riemannienne qui n'est pas localement un produit riemannien. Seules trois familles peuvent avoir une courbure de Ricci non nulle : $SO(n)$, $U(n/2)$ et $Sp(n/4)Sp(1)$. Les variétés à holonomie $U(n/2)$ sont les variétés *kählériennes*. Elles portent un tenseur de courbure parallèle $I_{\mathbf{C}}$, transplanté de l'espace projectif complexe. Quand on fait $Q = (I_{\mathbf{C}})_{\perp}$ dans la formule (3), on démontre la fameuse décomposition de Hodge

$$H^1(M, \mathbf{R}) = H^0(M, \Omega^1) + \overline{H^0(M, \Omega^1)}.$$

En effet, comme $\langle \overset{\circ}{Q}\, D\alpha, D\alpha \rangle = |d''\alpha^{1,0}|^2$, si α est harmonique, alors sa composante de type $(1,0)$ est holomorphe.

Les variétés à holonomie $Sp(n/4)Sp(1)$ sont les variétés *quaternion-kählériennes*, plus rares. Elles portent un tenseur de courbure parallèle $I_{\mathbf{H}}$, transplanté de l'espace projectif quaternionien. Quand on fait $Q = (I_{\mathbf{H}})_{\perp}$ dans la formule (3), on prouve que $H^1(M, \mathbf{R}) = 0$.

5. APPLICATIONS HARMONIQUES

Dans ce paragraphe, on explique comment la méthode d'intégration par parties peut s'appliquer à des problèmes non linéaires comme la superrigidité ou l'arithméticité.

Dès 1964, J. Eells et J. Sampson ont proposé d'utiliser les applications harmoniques pour étudier les homomorphismes d'un groupe discret dans le groupe d'isométries d'une variété à courbure négative ou nulle. Ce n'est qu'en 1980 que Y.T. Siu est parvenu à donner par cette méthode une preuve de la rigidité à la Mostow des réseaux de certains espaces symétriques hermitiens, [Siu]. Depuis, N. Mok a obtenu une preuve de la superrigidité des réseaux des espaces symétriques

hermitiens, [Mok]. La grande nouveauté est que cette méthode permet d'étendre la superrigidité aux espaces de rang 1, non couverts par le théorème de Margulis, K. Corlette [Co2]. Depuis, J. Jost et S.T.Yau [J-Y] et N. Mok, Y.T. Siu et S.K. Yeung [M-S-Y] ont trouvé des preuves qui couvrent tous les cas. C'est cette dernière qu'on va exposer en détail.

Le principe est simple, et imite la démarche de Bochner pour l'annulation de cohomologie. Soit M une variété compacte dont le revêtement universel est contractile, soit Γ son groupe fondamental. Soit N une variété simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle, H son groupe d'isométries et $\pi : \Gamma \to H$ un homomorphisme. Typiquement, $N = H/L$ est un espace symétrique.

1) (De Rham) On représente π par une classe d'homotopie d'applications $M \to \pi(\Gamma) \setminus N$ (si $\pi(\Gamma)$ n'est pas discret, il vaut mieux parler d'applications équivariantes $\tilde{M} \to N$).

2) (Hodge) On choisit un représentant harmonique, i.e., qui minimise l'énergie $\int |df|^2$. Une telle application existe par exemple lorsque $\pi(\Gamma)$ est discret cocompact dans N, J. Eells et J. Sampson, [E-S]. En fait, elle existe si et seulement si $\pi(\Gamma)$ est "réductif" (c'est une notion riemannienne, due à F. Labourie [La] ; lorsque $N = H/L$ est un espace symétrique, $\pi(\Gamma)$ est "réductif" si et seulement si son adhérence de Zariski réelle dans H est réductive, K. Corlette, [Co1]). Comme dans la situation linéaire (cohomologie de de Rham), c'est la convexité de l'énergie, conséquence de la courbure sectionnelle négative ou nulle, qui garantit l'existence d'un minimum.

3) Caractérisation des homomorphismes qui s'étendent. Supposons que Γ est un réseau de G, que $M = \Gamma \setminus G/K$ et $N = H/L$ sont localement symétriques. Alors π s'étend en un homomorphisme de G dans H (éventuellement à un groupe compact près) si et seulement si il existe une application équivariante et *totalement géodésique* de $\tilde{M}$ dans N. Une application $f : M \to N$ est totalement géodésique si elle envoie géodésique dans géodésique. Si on voit la différentielle de f comme une 1-forme à valeurs dans le fibré f^*TN, muni de la connexion ramenée de celle de N, on a

$$f \text{ est totalement géodésique} \Leftrightarrow Ddf = 0, \quad f \text{ est harmonique} \Leftrightarrow \operatorname{tr} Ddf = 0.$$

Par conséquent, la superrigidité est ramenée à un théorème d'annulation pour Ddf, lorsque df est une 1-forme harmonique à valeurs dans $E = f^*TN$.

4) Formule à la Bochner. Elle dépend des auteurs.

K. Corlette [Co2] exploite l'existence (pour certains espaces localement symétriques) de formes différentielles parallèles. Il s'appuie sur la propriété suivante. Si C désigne l'opérateur sur les formes différentielles de multiplication de Clifford par une forme parallèle ω, alors C commute avec l'opérateur différentiel $d + \delta$. Pour une 1-forme harmonique α, on a

$$\int_M |dC\alpha|^2 = -\int_M \langle dC\alpha, \delta C\alpha\rangle = 0.$$

Le noyau de l'opérateur (algébrique) $D\alpha \mapsto dC\alpha$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe du groupe linéaire qui laisse invariante la forme parallèle ω. Dans le cas de l'espace hyperbolique quaternionien (resp. de Cayley), ω est une 4-forme (resp. une 8-forme) dont le stabilisateur est compact. On conclut que, lorsque α est fermée, $dC\alpha = 0 \Rightarrow D\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$. L'argument s'étend aux applications harmoniques à valeurs dans une variété à opérateur de courbure négatif.

N. Mok, Y.T. Siu et S.K. Yeung utilisent la formule (3), qui prend dans ce cas particulier la forme suivante

$$\int_M \langle \mathring{Q}\, Ddf, Ddf\rangle = \frac{1}{2}\int_M \left(\langle Q, R\rangle |df|^2 + \langle Q, f^*R^N\rangle\right). \tag{4}$$

Noter que $T = f^*R^N$ est un tenseur de courbure sur M.

Il reste à choisir un tenseur de courbure parallèle Q qui rende le premier membre positif ou nul et le second négatif ou nul. Ce point est traité avec une remarquable élégance dans [M-S-Y]. Les hypothèses faites sur la courbure de l'espace d'arrivée sont optimales. Lorsque M est de rang ≥ 2, on suppose simplement que la courbure sectionnelle est négative ou nulle. Lorsque M est de rang un, on fait une hypothèse plus forte (mais qui est satisfaite aussi par les espaces symétriques) qui porte sur la courbure sectionnelle *complexe*, i.e., les expressions de la forme $R(X, Y, \overline{X}, \overline{Y})$ où $X, Y \in TN \otimes \mathbf{C}$.

5.1 THÉORÈME [M-S-Y].– *Soit M un espace symétrique qui n'est ni un espace hyperbolique ni un espace hyperbolique complexe. Il existe un tenseur de courbure parallèle Q tel que i) $\overset{\circ}{Q} \gg 0$; ii) pour tout tenseur de courbure T à courbure sectionnelle négative ou nulle, (resp. à courbure sectionnelle complexe négative ou nulle si M est de rang un), $\langle Q, T\rangle \leq 0$.*

Preuve. Etant donnés deux vecteurs $X, Y \in TM \otimes \mathbf{C}$, on note $S = S(X,Y)$ le tenseur de courbure tel que $\hat{S}$ soit le projecteur orthogonal sur la droite engendrée par $X \wedge Y$ dans $\Lambda^2 TM \otimes \mathbf{C}$, composé avec la conjugaison. Soit Q le tenseur obtenu en moyennant S sur K. Il est K-invariant donc parallèle, et pour tout tenseur de courbure T, on calcule

$$\langle Q, T\rangle = \int_K \Re e T(kX, kY, \overline{kX}, \overline{kY})\, dk.$$

est une moyenne de courbures sectionnelles complexes. Si M est de rang 1, on peut choisir X et Y dans un plan complexe de courbure nulle (prendre X, $Y \in T^{1,0} H^2_{\mathbf{C}}$ pour un $H^2_{\mathbf{C}} \subset H^n_{\mathbf{H}}$ ou $H^2_{\mathbf{C}a}$ totalement géodésique). Alors les $\langle Q, T\rangle$, moyennes de courbures sectionnelles complexes, sont négatifs ou nuls. On a aussi $\langle Q, R\rangle = 0$ et $\langle Q, I\rangle = 1$. Comme dans ce cas, $d(M) = 2$, Q est un multiple positif de $R_\perp$ et la positivité de $\overset{\circ}{Q}$ a été mentionnée en 3.7.

Si M est de rang ≥ 2, on peut choisir X et Y dans un plan réel de courbure nulle. Alors $\langle Q, R\rangle = 0$ et les $\langle Q, T\rangle$, moyennes de courbures sectionnelles réelles, sont négatifs ou nuls. Si $d(M) = 2$, on conclut comme précédemment. Sinon, on détermine Q explicitement grâce à ses produits scalaires avec des tenseurs invariants connus, mais des vérifications supplémentaires sont nécessaires.

5.2 COROLLAIRE .– *Soit M un espace symétrique qui n'est ni un espace hyperbolique ni un espace hyperbolique complexe. Soit Γ un groupe discret, cocompact, irréductible d'isométries de M. Soit N une variété riemannienne à courbure sectionnelle (resp. complexe si M est de rang 1) négative ou nulle. On suppose que Γ agit par isométries sur N. Alors toute application harmonique équivariante $M \to N$ est totalement géodésique. En particulier, Γ est superrigide pour les groupes semi-simples réels.*

Une mention particulière pour le cas où M est un produit. Si $M = M_1 \times M_2$, on peut ramener sur M les tenseurs de courbure canoniques I_{M_i} des facteurs. On obtient deux tenseurs de courbure parallèles I_1 et I_2, et $Q = I - I_1 - I_2$ n'est pas nul. Avec ce choix de Q, la formule (4) montre que $Ddf(X,Y) = 0$ si X et Y sont tangents à des facteurs différents. Alors la métrique induite par f sur un facteur est parallèle (donc invariante) dans la direction de l'autre facteur. On conclut par densité que cette métrique est invariante par les isométries de M, i.e., que f est une homothétie sur chaque facteur.

5.3. Réseaux non uniformes.

Le théorème d'existence d'applications harmoniques équivariantes s'étend au cas des sources non compactes, pourvu qu'il existe au moins une application équivariante d'énergie finie. C'est sans doute le cas pour la plupart des variétés localement symétriques de volume fini, mais peut-être pas pour toutes.

5.4. Synthèse des deux approches.

Dans [G2], M. Gromov propose une sorte de synthèse de l'approche ergodique et de l'approche utilisant les applications harmoniques. Il développe la théorie des applications harmoniques le long des feuilles d'un feuilletage. La méthode s'applique aux feuilletages suivants.

Le feuilletage de $\Gamma\backslash G$ par les orbites d'un tore déployé sur $\mathbf{R}$ (i.e., le feuilletage du fibré des repères d'un espace localement symétrique de rang ≥ 2 par les plats).

Le feuilletage de $\Gamma \setminus Sp(n,1)$ par les orbites de $SU(2,1) \subset Sp(n,1)$.

5.5. Applications harmoniques et immeubles.

La méthode des applications harmoniques permettre aussi d'obtenir la superrigidité par rapport aux groupes p-adiques. C'est M. Gromov qui a lancé cette idée dans les années 1980, elle a été concrétisée récemment par R. Schoen.

La courbure négative ou nulle joue un rôle essentiel dans la discussion qui précède. Cet aspect se généralise aux groupes semi-simples sur les corps p-adiques. F. Bruhat et J. Tits [B-T] attachent à tout groupe semi-simple G sur un corps

muni d'une valuation discrète un complexe simplicial X, son immeuble, qui a les propriétés suivantes :

1. G agit par isométries sur X ;
2. X est à courbure négative ou nulle au sens suivant : la fonction distance, restreinte à deux géodésiques parcourues à vitesse constante, est convexe ;
3. deux simplexes adjacents sont contenus dans un sous complexe totalement géodésique et isométrique à un espace euclidien.

M. Gromov et R. Schoen, [G-S], ont développé une théorie des applications harmoniques d'une variété riemannienne dans un espace métrique de ce type. Pour une application lipschitzienne $M \to X$, on a une constante de Lipschitz locale, et peut définir l'énergie par $\int Lip_u(x)^2\, dx$. Sous la seule hypothèse 2., ils démontrent une estimée a priori sur Lip_u d'où ils déduisent l'existence d'une application harmonique lipschitzienne dans toute classe d'homotopie. Sous l'hypothèse 3., ils obtiennent un résultat de régularité spectaculaire. Disons que $u : M \to X$ est *régulière* en $x \in M$ si, au voisinage de x, u est composée d'une application harmonique de M dans $\mathbf{R}^k$ et d'un plongement isométrique de $\mathbf{R}^k$ dans X. Alors *toute application harmonique $M \to X$ est régulière en dehors d'un sous-ensemble de M de codimension au moins deux.* La preuve, qui met en oeuvre des idées classiques dans une situation très dépouillée, est une splendide leçon d'analyse non linéaire.

Cette propriété de régularité suffit pour rendre possible l'intégration par parties qui démontre la formule (4). Si la variété M est un quotient de $H^n_{\mathbf{H}}$, $n \geq 2$ ou de $H^n_{\mathbf{Ca}}$, on conclut que toute application harmonique équivariante est constante.

5.6 THÉORÈME (M. Gromov, R. Schoen).- *Soit Γ un réseau de $Sp(n,1)$, $n \geq 2$ ou de F_4^{-20}. Toute action isométrique "réductive" de Γ sur un complexe simplicial satisfaisant 2. et 3. fixe un point. Par conséquent, Γ est superrigide pour les groupes semi-simples p-adiques. En particulier, il est arithmétique.*

Les problèmes de superrigidité et d'arithméticité tracent une ligne de séparation au milieu des groupes algébriques réels de rang un. Une tel ligne n'existe pas sur les corps non archimédiens : dans ce cas, tous les groupes de rang un admettent (massivement) des réseaux non arithmétiques, voir [Lu].

6. GROUPES KÄHLERIENS

La méthode d'intégration par partie s'applique encore lorsque la source, au lieu d'être localement symétrique, est seulement kählérienne.

Dans ce paragraphe, on va décrire quelques conséquences d'une variante du théorème d'annulation 5.2 où la source est une variété kählérienne compacte M. Etant donné une application $f : M \to N$, on note $d'f$ la composante de df sur $\Lambda^{1,0}M \otimes f^*TN$. La connexion de Levi-Civita sur ce fibré se décompose aussi en $D' + D''$ où $D''d'f \in \Lambda^{0,1}M \otimes \Lambda^{1,0}M \otimes f^*TN$. Comme on l'a vu en 4.12, M porte un tenseur parallèle $I_{\mathbf{C}}$, copie du tenseur de courbure de l'espace projectif complexe. Posant $Q = (I_{\mathbf{C}})_\perp$, on a $\langle \overset{\circ}{Q}\, Ddf, Ddf\rangle = |D''d'f|^2$. En appliquant la formule (4), il vient

6.1 THÉORÈME (Y.T. Siu [Siu], J. Sampson [Sa]).– *Soit M une variété riemannienne compacte, N une variété riemannienne à courbure sectionnelle complexe négative ou nulle (par exemple, un espace symétrique) sur laquelle agit le groupe fondamental de M, et $f : \tilde{M} \to N$ une application harmonique équivariante. Alors f est* pluriharmonique, *i.e., $D''d'f = 0$. De plus, la courbure sectionnelle complexe de N est nulle sur l'image de $d'f$ et de $d''f$.*

Lorsque $N = G/K$ est un espace symétrique, le tenseur de courbure est essentiellement le crochet sur $TN = \mathbf{p} \subset Lie(G)$ et la condition sur la courbure sectionnelle complexe signifie que l'image de $d''f$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathbf{p} \otimes \mathbf{C}$. Le nombre $z(N)$, dimension maximale d'une sous-algèbre abélienne de $\mathbf{p} \otimes \mathbf{C}$, majore donc le rang d'une application harmonique de source kählérienne, et par suite, la dimension des classes de cohomologies réalisables par des applications de source kählérienne. Par exemple, $z(H^n) = 2$, et un réseau de H^n, $n \geq 3$ n'est isomorphe au groupe fondamental d'aucune variété kählérienne compacte (J. Sampson).

Entre autres majorations de $z(N)$, J. Carlson et D. Toledo, [C-T], montrent que $z(N) \leq \dim N/2$ avec égalité seulement lorsque N est hermitien, auquel cas les seules sous-algèbres abéliennes de dimension maximale sont $\mathbf{p}^{1,0}$ et $\mathbf{p}^{0,1}$. Cela donne une preuve du théorème de Y.T. Siu : *Une application harmonique d'une variété kählérienne dans un espace localement symétrique hermitien, dont l'image*

est d'intérieur non vide, est holomorphe ou antiholomorphe. Avec l'invariance biholomorphe de la métrique symétrique, on obtient par exemple la rigidité de Mostow pour les espaces localement symétriques hermitiens.

La même méthode donne des résultats de superrigidité locale. Par exemple (K. Corlette, voir [Co1]), un réseau cocompact de $PU(n,1)$ n'a pas de déformation non triviale dans $PU(n+1,1)$. En effet, un tel réseau possède une classe caractéristique non nulle en dimension $2n$. Une déformation est réalisée par une application harmonique de rang $\geq 2n$, donc holomorphe puis isométrique et enfin totalement géodésique.

6.2. Métriques harmoniques sur les fibrés plats.

Soit (E,∇) un $\mathbf{C}^r$-fibré sur M muni d'une connexion plate unimodulaire mais non unitaire. Choisir une métrique hermitienne sur E, c'est choisir une application équivariante de $\tilde{M}$ dans $N = G/K$ où $G = Sl(r,\mathbf{C})$. On peut donc parler de *métrique harmonique* sur E. Si l'adhérence de Zariski de la monodromie de E est semi-simple, une telle métrique existe et est unique.

Lorsque la base est kählérienne, une métrique harmonique détermine une structure de fibré holomorphe sur E (K. Corlette, C. Simpson). En effet, si on voit la métrique comme une application $f : \tilde{M} \to G/K$, on interprète sa différentielle df comme une 1-forme à valeurs dans $End(E)$. La connexion $D = \nabla - df$ est unitaire. La partie de type $(0,1)$ de D, $d''^D = d''^\nabla - d''f$, satisfait

$$d''^D \circ d''^D = d''^\nabla \circ d''^\nabla + d''f \wedge d''f$$

car $d''d''f = 0$. Le théorème 6.1 signifie donc, d'une part, que d''^D définit une structure holomorphe sur E, d'autre part, que $\theta = d'f$ est une 1-forme holomorphe à valeurs dans $End(E)$, telle que $\theta \wedge \theta = 0$. Une telle paire (E,∇) s'appelle, depuis N. Hitchin, un *fibré de Higgs*. Inversement, en résolvant les *équations de Yang-Mills-Higgs*, on attache à un fibré de Higgs *stable* dont les classes de Chern sont nulles une connexion unitaire D puis une connexion plate $\nabla = D + \theta + \overline{\theta}$ à monodromie irréductible. Lorsque la variété M est projective, il s'établit un dictionnaire (découvert par N. Hitchin, [H]) entre des objets de nature topologique, les représentations irréductibles de dimension finie de $\pi_1(\Gamma)$, et des objets algébriques,

les fibrés de Higgs stables dont les deux premières classes de Chern sont nulles. C'est une généralisation de l'uniformisation des surfaces de Riemann.

Ce dictionnaire constitue un moyen d'investigation puissant des espaces de représentations de certains groupes discrets. Même pour les groupes fondamentaux des surfaces (on ne peut faire plus explicite), N. Hitchin obtient des résultats frappants. Sur l'espace $\mathcal{M}$ des fibrés de Higgs stables de rang deux sur une surface de Riemann, il y a une action évidente de $\mathbf{C}^*$, par multiplication du champ de Higgs θ par une constante. Pour la structure symplectique naturelle de $\mathcal{M}$, l'action de $U(1)$ est hamiltonienne, le hamiltonien est une fonction de Morse parfaite. Ses points critiques sont les représentations à valeurs dans une forme réelle de $Sl(2,\mathbf{C})$, et correspondent à des familles calculables de fibrés de Higgs. Il vient, en plus du calcul des nombres de Betti de $\mathcal{M}$,

6.3 THÉORÈME (N. Hitchin).– *Soit Γ le groupe fondamental d'une surface compacte M de genre g. Les composantes $\mathbf{R}\mathcal{M}_k$ de l'espace des représentations de Γ dans $PSL(2,\mathbf{R})$ sont numérotées par la classe d'Euler, qui varie de 1 à $2g-2$. $\mathbf{R}\mathcal{M}_k$ est difféomorphe à un fibré vectoriel complexe de rang $g-1+k$ sur le produit symétrique $S^{2g-2-k}M$.*

Ce résultat très complet laisse la place, en dimensions supérieures, à des propriétés moins précises mais néanmoins très spécifiques des groupes fondamentaux kählériens. En voici deux exemples, dus à C. Simpson, [Si1].

Sur les formes différentielles à valeurs dans un fibré de Higgs, on a deux complexes, le d'' et la multiplication par le champ de Higgs, qui jouent le rôle que jouent d' et d'' pour les formes scalaires. Il résulte que l'algèbre de Lie différentielle graduée des formes à valeurs vectorielles est formelle. En combinant cela avec un théorème de W. Goldman et J. Millson [G-M], C. Simpson conclut que les espaces de représentations des groupes kählériens ont des singularités au pire quadratiques.

En utilisant le théorème de compacité de K. Uhlenbeck, C. Simpson montre que l'action de $\mathbf{C}^*$ a au moins un point fixe dans chaque composante de l'espace des G-fibrés de Higgs. Ces points fixes correspondent à des représentations à valeurs dans une forme réelle W de G. Nécessairement, W et son compact maximal ont même rang. Par exemple, $Sl(n,\mathbf{R})$, $n \geq 3$, ou un groupe de Lie complexe, sont exclus. On conclut que leur réseaux ne peuvent pas être isomorphes au groupe

fondamental d'une variété kählérienne compacte. Les points fixes de l'action de $\mathbf{C}^*$ (on les appelle des variations complexes de structures de Hodge) constituent des têtes de pont à partir desquelles étudier l'espace des représentations.

6.4. Représentations sur des corps valués et intégralité.

Comme en 5.5, la généralisation aux espaces singuliers de la méthode des applications harmoniques présente de l'intérêt pour les sources kählériennes. C. Simpson énonce une propriété d'intégralité pour les représentations rigides (i.e., isolées dans l'espace des représentations) à valeurs dans $Sl(2, \mathbf{C})$.

6.5 THÉORÈME (C. Simpson, [Si2]).– *Soit M une variété projective lisse sur $\mathbf{C}$. Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Toute représentation $\pi : \pi_1(M) \to Sl(2, \mathbf{K})$ irréductible et rigide est conjuguée à une représentation par des matrices à coefficients entiers algébriques.*

Comme en 5.6, il s'agit de montrer que si $\Gamma = \pi_1(M)$ agit réductivement par isométries sur un arbre (l'immeuble de $Sl(2)$ relatif à une place d'un corps de nombres), alors il fixe un point. Ce n'est pas vrai en général : les groupes de surfaces agissent sans points fixes sur des arbres (il y a la une riche théorie qui s'apparente à la théorie de Teichmüller). Ce sont les seules exceptions : toute action réductive sans point fixe de Γ sur un arbre T provient, via une application holomorphe, de l'action d'un groupe de surface (voir aussi [G-S]). En effet, comme en 6.1, l'application harmonique équivariante $f : \tilde{M} \to T$ est pluriharmonique, i.e., $d'f$ est une 1-forme holomorphe scalaire sur un revêtement ramifié de M. On montre que le feuilletage holomorphe défini par $d'f$ est à feuilles fermées, et l'espace des feuilles est une surface de Riemann. L'hypothèse de rigidité permet d'exclure cette factorisation, car les représentations de groupes de surfaces sont rarement rigides.

Inversement, une représentation non rigide a tendance à provenir d'une variété de dimension inférieure. Par exemple, si un fibré de Higgs a un champ de Higgs non nilpotent, ses valeurs propres sont des 1-formes holomorphes sur un revêtement ramifié, qui donnent naissance à une factorisation (K. Zuo, [Zuo]).

6.6. Géométrie des espaces de représentations.

Je pense que l'étude des espaces de représentations peut apporter un éclairage utile sur les questions de rigidité. C'est quand elle habite dans un espace de modules non trivial qu'une représentation rigide commence vraiment à exister. Voici quelques exemples.

Représentations unitaires du groupe fondamental d'une variété de dimension 3. Pour définir l'invariant de Casson, on les voit comme intersection de deux sous-variétés dans l'espace des représentations unitaires d'une surface.

Structures hyperboliques sur les variétés hyperbolique de dimension 3. On les obtient comme points fixes de transformations sur l'espace des structures hyperboliques géométriquement finies sur une variété à bord.

Fermeture des cusps des variétés hyperboliques de dimension 3, de volume fini. Dans l'espace des représentations dans $PSL(2, \mathbf{C})$ d'un réseau non uniforme - c'est une variété complexe dont la dimension est égale au nombre de bouts - on voit un ensemble discret correspondant aux représentations discrètes cocompactes (mais non injectives).

Monodromies d'équations hypergéométriques. Dans cette famille continue de groupes engendrés par des réflexions complexes, on trouve une famille discrète de réseaux, [D-M].

Cela dit, les espaces de représentations méritent d'être étudiés pour eux-mêmes. C'est particulièrement frappant dans le cas des groupes kählériens, dont les espaces de représentations portent une structure hyperkählérienne, où se croisent structure symplectique, structures complexes et polarisations réelles.

REFERENCES

[A] E. Andreev, *Convex polyhedra of finite volume in Lobachevski space*, Mat. Sb. **83** (1970), 256-260.

[A-B] N. A'Campo et M. Burger, *Une preuve du théorème de superrigidité de G.A. Margulis*, Preprint Université de Basel, (1991).

[B-M-S] H. Bass, J. Milnor and J.-P. Serre, *Solution of the congruence subgroup prob-*

lem for SL_n ($n \geq 3$) and Sp_{2n} ($n \geq 2$), Publ. Math. I. H. E. S. **33** (1967), 59-137.

[Bo] R. Borcherds, *Automorphism groups of Lorentzian lattices,* J. of Algebra **111** (1987), 133-153.

[B1] A. Borel, *On the curvature tensor of the hermitian symmetric manifolds,* Ann. of Math. **71** (1960), 508-521.

[B2] A. Borel, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces,* Topology **2** (1963), 111-122.

[B3] A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques,* Hermann, Paris (1969).

[B-W] A. Borel and N. Wallach, *Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups,* Ann. Math. Studies, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1980).

[B-T] F. Bruhat et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local,* Publ. Math. I. H. E. S. **41** (1972), 5-252.

[C] E. Calabi, *On compact Riemannian manifolds with constant curvature I,* in "Differential Geometry", Proc. Symp. Pure Math. **3**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1961), 155-180.

[C-T] J. Carlson and D. Toledo, *Harmonic mappings of Kähler manifolds to locally symmetric spaces,* Publ. Math. I.H.E.S. **69** (1989), 173-201.

[C-V] E. Calabi and E. Vesentini, *On compact locally symmetric Kähler manifolds,* Ann. of Math. **71** (1960), 472-507.

[C-W] P. Cohen et J. Wolfart, *Fonctions hypergéométriques en plusieurs variables et espaces de modules de variétés abéliennes,* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris **26** (1993), 665-690.

[Co1] K. Corlette, *Flat G-bundles with canonical metrics,* J. Differen. Geom. **28** (1988), 361-382.

[Co2] K. Corlette, *Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry,* Ann. of Math. **135** (1992), 165-182.

[D-K] C. Delaroche et A. Kirillov, *Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés,* Séminaire Bourbaki, Exposé n^0 343, (1967-68), Benjamin, New York (1969).

[D-M] P. Deligne and G.D. Mostow, *Monodromy of hypergeometric functions and non lattice integral monodromy*, Publ. Math. I.H.E.S. **63** (1986), 5-89.

[E-S] J. Eells and J. Sampson, *Harmonic maps of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109-160.

[F] H. Furstenberg, *Poisson boundaries and envelopes of discrete groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 350-356.

[Ga1] H. Garland, *A rigidity theorem for discrete subgroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **129** (1967), 1-25.

[Ga2] H. Garland, *p-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups*, Ann. of Math. **97** (1973), 375-423.

[G-M] W. Goldman and J. Millson, *The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kähler manifolds*, Publ. Math. I.H.E.S. **67** (1988), 43-96.

[G1] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in "Essays in group theory", ed. S. Gersten, Springer Verlag, Heidelberg (1987), 75-265.

[G2] M. Gromov, *The foliated Plateau problem I*, Geom. Functional Anal. **1** (1992), 14-79 ; *idem : II*, ibidem 253-320.

[G-P] M. Gromov and I. Piatetski-Shapiro, *Non-arithmetic groups in Lobachevsky spaces*, Publ. Math. I. H. E. S. **66** (1988), 93-103.

[G-S] M. Gromov and R. Schoen, *Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one*, Publ. Math. I.H.E.S. **76** (1992), 165-246.

[H] N.J. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London Math. Soc. **55** (1987), 59-126.

[H-V] P. de la Harpe et P. Valette, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Astérisque **175**, Soc. Math. de France (1989).

[J-Y] J. Jost and S.T. Yau, *Harmonic maps and superrigidity*, Proc. Symp. Pure Math. **54** (1993), 245-280.

[K-N] S. Kaneyuki and T. Nagano, *On certain quadratic forms related to symmetric Riemannian spaces*, Osaka Math. J. **14** (1962), 241-252.

[K-L] A. Katok and J. Lewis, *Global rigidity results for lattice actions on tori and new examples of volume preserving actions*, Preprint Pennsylvania State University (1991).

[K] D. Kazhdan, *Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*, Funkc. Anal. i Prilozh. **67** (1967), 71-74.

[Kh] A. G. Khovanski, *Hyperplane section of polyhedra, toroidal manifolds and discrete groups in Lobatchevski space*, Funkc. Anal. i Prilozh. **20** (1986), 50-61.

[La] F. Labourie, *Existence d'applications harmoniques tordues à valeurs dans les variétés à courbure négative*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 877-882.

[Lu] A. Lubotsky, *Trees and discrete subgroups of Lie groups over locla fields*, Bull. Amer. Math. Soc. **20** (1989), 27-30.

[Ma1] G.A. Margulis, *Discrete groups of motions of manifolds of nonpositive curvature*, Amer. Math. Soc. Transl. **109** (1977), 33-45.

[Ma2] G.A. Margulis, *Arithmeticity and finite dimensional representations of uniform lattices*, Funkc. Anal. i Prilozh. **8** (1974), 258-259.

[Ma3] G.A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Ergeb. der Math. Band 17, Springer Verlag, Berlin (1990).

[Mat] Y. Matsushima, *On the first Betti number of compact quotient spaces of higher-dimensional symmetric spaces*, Ann. of Math. **75** (1962), 312-330.

[Mok] N. Mok, *Metric rigidity theorems on Hermitian locally symmetric manifolds*, World Sci., Singapore (1989).

[M1] G.D. Mostow, *Quasiconformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms*, Publ. Math. I.H.E.S. **34** (1967), 53-104.

[M2] G.D. Mostow, *The rigidity of locally symmetric spaces*, Proc. Intern. Congress of Math. (1970), 187-197.

[M3] G.D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Annals of Math. Studies, Study 78, Princeton Univ. Press, Princeton N.J. (1973).

[M4] G.D. Mostow, *Discrete subgroups of Lie groups*, in "Elie Cartan et les Mathématiques d'aujourd'hui", Astérisque, numéro hors série (1985), 289-309.

[M5] G.D. Mostow, *Generalized Picard lattices arising from half-integral conditions.*, Publ. Math. I.H.E.S. **63** (1986), 91-106.

[M-S-Y] N. Mok, Y.T. Siu and S.K. Yeung, *Geometric superrigidity*, Invent. Math. **113** (1993), 57-83.

[Pr] M.N. Prokhorov, *The absence of discrete reflexion groups with noncompact fundamental polyhedron of finite volume in Lobachevsky space of large dimension*, Izvest. Mat. Nauk **28** (1987), 401-411.

[Ru] O.P. Ruzmanov, *Examples of nonarithmetic crystallographic Coxeter groups in n-dimensional Lobachevsky space for* $6 \leq n \leq 10$, Problems in group theory and homological algebra (1989).

[S] A. Selberg, *On discontinuous groups in higher dimensional symmetric spaces*, in "Intern. Coll. on Function Theory", Tata Institute of Fund. Research, Bombay, (1960), 147-164.

[Sa] J. Sampson, *Applications of harmonic maps to Kähler geometry*, Contemp. Math. **49** (1986), 125-133.

[Si1] C. Simpson, *Higgs bundles and local systems*, Publ. Math. I. H. E. S. **75** (1992), 5-95.

[Si2] C. Simpson, *Integrality of rigid local systems of rank two on a smooth projective variety*, Preprint Université de Toulouse (1992).

[Siu] Y.T. Siu, *Complex analyticity of harmonic maps, and strong rigidity of compact Kähler manifolds*, Ann. of Math. **112** (1980), 73-111.

[Th1] W. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton University Press, Princeton (1978).

[Th2] W. Thurston, *Shape of polyhedra*, Preprint Princeton Univ. (1987).

[T1] J. Tits, *Classification of algebraic groups*, in "Algebraic groups and discrete subgroups", Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., **9** (1966), 33-62

[T2] J. Tits, *Lectures on buildings of spherical type and finite B-N pairs*, Lecture Notes Band 386, Springer Verlag, Heidelberg (1970).

[T3] J. Tits, *Sur les travaux de Margulis*, Séminaire Bourbaki, Exposé n^0 482, (1975-76), Lect. Notes in Math. Vol 567, Springer Verlag, Berlin (1976).

[To] D. Toledo, *Representations of surface groups in $PSU(n,1)$ with maximum characteristic number*, J. Differen. Geom. **29** (1989), 125-134.

[V] E.B. Vinberg, *Geometry II*, Encyclopedia of Math. Sci., Springer Verlag, Heidelberg, (1990).

[W-Z] McK. Wang and W. Ziller, *Symmetric spaces and strongly isotropy irreducible spaces*, Preprint Univ. of Pennsylvania (1991).

[W] A. Weil, *On discrete subgroups of Lie groups II*, Ann. of Math. **75** (1962), 578-602.

[Z] R. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Monographs in Math. vol. 81, Birkhäuser, Basel (1984).

[Zuo] K. Zuo, *Factorizations of nonrigid Zariski dense representations of π_1 of projective algebraic manifolds*, Preprint Universität Kaiserslautern (1991).

Pierre PANSU
U.R.A. 1169 du C.N.R.S.
Mathématiques
Université Paris-Sud
91405 Orsay Cédex

Astérisque

CLAUDE ZUILY

Solutions en grand temps d'équations d'ondes non linéaires

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 779, p. 107-144

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__107_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 1993
46ème année, 1993-94, n° 779

SOLUTIONS EN GRAND TEMPS D'ÉQUATIONS D'ONDES NON LINÉAIRES

par **Claude ZUILY**

L'équation des ondes est sans conteste l'une des plus importantes équations aux dérivées partielles. Elle sert de modèle à la théorie générale des équations hyperboliques et ses applications en physique théorique sont multiples. De très nombreux travaux lui ont été consacrés depuis plus de deux siècles et encore aujourd'hui elle est l'objet de recherches très actives dans ses versions linéaire et non linéaire.

La question de l'existence de solutions pour le problème de Cauchy est centrale dans sa théorie. Dans le cas non linéaire, l'existence d'une solution pour des temps petits est en principe acquise (au moins pour des données assez régulières). Dès lors se pose le problème de l'évolution de cette solution. Existe-elle pour tout temps? Sinon peut-on déterminer son temps de vie, décrire l'ensemble de ses singularités, connaître son comportement au voisinage de cet ensemble? etc ... Autant de questions qui dans la plupart des cas sont encore largement ouvertes. Cependant il est au moins deux cas où des réponses profondes à certaines de ces questions ont été données. Le premier est celui où les données sont petites, le second celui des équations d'ondes semi-linéaires dispersives. L'objet de cet exposé est de rendre compte des progrès récents dans ces deux domaines. En particulier nous détaillerons la preuve d'un résultat de J. Shatah et M. Struwe qui traite des équations dispersives avec puissance critique.

Pour la rédaction de la première partie de ce texte nous avons bénéficié des excellentes notes de L. Hörmander [Ho4] auxquelles le lecteur intéressé est vivement invité à se référer. Concernant les équations dispersives nous renvoyons aux récents survols de W. Strauss [St4] et M. Struwe [Stru2] pour les résultats antérieurs.

0. PRELIMINAIRES

0.1. Notations

On notera dans ce qui suit x_0 et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les variables de temps et d'espace; on supposera $x_0 \geq 0$, le cas des temps négatifs étant ici analogue. Pour $u \in C^1$ on notera $u' = (\partial_j u)_{j=0,\dots,n}$ où $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

L'opérateur des ondes $\Box$ est défini par

$$\Box = \partial_0^2 - \Delta \quad \text{avec} \quad \Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 . \tag{0.1}$$

C'est le modèle des opérateurs différentiels du second ordre strictement hyperboliques par rapport aux surfaces x_0 =constante.

Il sera commode, pour des raisons qui apparaîtront plus loin, de supposer que toutes les fonctions considérées ici — coefficients, données, solutions ... — sont à valeurs réelles.

Nous étudierons le problème de Cauchy pour des équations du second ordre strictement hyperboliques quasi-linéaires. Les éventuelles extensions à des cas complètement non linéaires seront discutées dans les commentaires. Il s'agira de résoudre le problème :

$$\partial_0^2 u - \sum_{j,k=0}^{n} a_{jk}(u, u')\, \partial_j\, \partial_k u = f(u, u') \tag{0.2}$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_0 u(0, x) = u_1(x). \tag{0.3}$$

Les fonctions a_{jk}, f, u_0, u_1 sont des données. On supposera que les a_{jk} et f sont C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$. La régularité des données initiales u_0, u_1 sera, quant à elle, précisée dans les énoncés. On supposera d'autre part

$$a_{00} \equiv 0, \quad f(0,0) = 0 \tag{0.4}$$

et, ce qui ne restreint pas la généralité du problème,

$$\Box = \partial_0^2 - \sum_{j,k=0}^{n} a_{jk}(0,0)\, \partial_j\, \partial_k . \tag{0.5}$$

L'hyperbolicité de l'équation (0.2) se traduira dans le fait que les solutions éventuelles se devront de vérifier, sur leur domaine de définition D la condition

$$(0.6)\quad E^{\times} C_0 > 0 \quad \text{tq} \quad \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(u,u')\xi_j\xi_k \geq C_0|\xi|^2, \quad \forall (x_0,x) \in D,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Les solutions de classe C^2 du problème (0.2), (0.3) sont appelées solutions classiques. Dans certains cas il peut exister des solutions à régularité plus faible, cependant, à part quelques allusions au § 2, nous n'aborderons pas ici ce problème.

Nous aurons à utiliser les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$. Rappelons que si $s > \frac{n}{2} + k$, où $k \in \mathbb{N}$, cet espace s'injecte dans celui des fonctions k fois différentiables dont les dérivées d'ordre au plus k tendent vers zéro à l'infini.

0.2. Existence en temps petit de solutions classiques

Le résultat suivant, qui assure, sous des conditions assez générales, l'existence locale en temps, est classique (cf. [Ka1], [Ho4]).

Théorème 0.1. – *Soient s un entier, $s > \frac{n}{2} + 2$, et $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$. Posons $v_0 = (u_1, u_0')$ et supposons*

(0.7)

$$E^{\times} C_0 > 0 \quad \textit{tel que} \quad \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(u_0,v_0)\xi_j\xi_k \geq C_0|\xi|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Il existe alors $T > 0$ et une unique solution classique u sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ du problème (0.2), (0.3) telle que $\partial_0^j u \in C^0([0,T], H^{s-j}(\mathbb{R}^n))$, $0 \leq j \leq 2$.

Schéma de la preuve

On utilise un procédé itératif d'approximation. L'existence à chaque étape d'une solution approchée utilise la *théorie hyperbolique linéaire*, la convergence est montrée à l'aide de *l'inégalité d'énergie* et des *estimations des fonctions non linéaires* dans les espaces de Sobolev.

L'inégalité d'énergie

Elle concerne les solutions d'équations hyperboliques linéaires. Plus précisément

soit u une solution classique de l'équation linéaire

$$\partial_0^2 u - \sum_{j,k=0}^{n} \gamma_{jk}\,\partial_j\,\partial_k u = g\,, \quad 0 \le x_0 \le T\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, \tag{0.8}$$

où $\gamma_{0,0} \equiv 0$, $\partial^\alpha \gamma_{jk} \in C^0([0,T]\times\mathbb{R}^n) \cap L^\infty$ pour $|\alpha| \le 1$ et $j,k = 0,\dots,n$, $f \in L^\infty([0,T],L^2)$ et

(0.9)

$$E^\times\, \alpha > 0, \beta > 0 : \alpha|\xi|^2 \le \sum_{j,k=1}^{n} \gamma_{jk}\xi_j\xi_k \le \beta|\xi|^2, \quad \forall (x_0,x,\xi) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n.$$

Supposons que pour $x_0 \in [0,T]$, $u(x_0,x) = 0$ pour $|x|$ assez grand. Alors

(0.10)

$$\begin{cases} \text{Il existe } C_1 > 0, C_2 > 0 \text{ ne dépendant que de } n,\alpha,\beta \text{ telles que} \\ ||u'(x_0,\cdot)||_{L^2} \le C_1\Big(||u'(0,\cdot)||_{L^2} + \displaystyle\int_0^{x_0} ||g(\tau,\cdot)||_{L^2}\,d\tau\Big)\exp\Big(C_2\displaystyle\int_0^{x_0}|\gamma'(\tau)|d\tau\Big) \end{cases}$$

où

$$|\gamma'(\tau)| = \sum_{i,j,k=0}^{n} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial_i \gamma_{jk}(\tau,x)|\,. \tag{0.11}$$

Estimation des fonctions non linéaires

Soient $U \in (H^s(\mathbb{R}^n))^N$, $N \ge 1$, $s \in \mathbb{N}$, $s > \frac{n}{2}$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $f(0) = 0$. Alors $f(U) \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et

$$||f(U)||_s \le C(f, ||U||_{L^\infty})||U||_s \tag{0.12}$$

où $C(f,||U||_{L^\infty}) = \sup\limits_{\substack{1\le j\le s \\ |t|\le ||U||_{L^\infty}}} |\partial^j f(t)|||U||_{L^\infty}^{j-1}$.

Le point capital ici est que le membre de droite de l'inégalité (0.12) croît linéairement avec $||U||_s$.

Commentaires 0.2.

(i) La solution u du théorème 0.1 vérifie en fait $\partial^\alpha u \in L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$ pour $|\alpha| \leq s$. En particulier elle est C^∞ si les données initiales sont dans $\bigcap_{s>0} H^s(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Il existe bien sûr des versions du Théorème 0.1 plus générales où l'équation (0.2) est remplacée par une équation hyperbolique de la forme

$$\partial_0^2 u + F(x_0, x; u, u', u'') = 0.$$

(iii) Dans le cas des équations semi-linéaires c'est-à-dire lorsque le membre de gauche de (0.2) est égal à $\Box u$, la condition sur s peut être affaiblie en $s > \frac{n}{2} + 1$. Le fait de savoir si on peut améliorer cette borne inférieure a fait l'objet d'études récentes. On renvoie aux travaux de Klainerman-Machedon [KlM] et Ponce-Sideris [PoS] qui traitent du cas semi-linéaire en trois dimensions d'espace.

(iv) Une conséquence de la preuve du Théorème 0.1 est la suivante. Un réel $T > 0$ étant donné, on peut résoudre le problème (0.2), (0.3) jusqu'au temps T pourvu que la quantité $||u_0||_s + ||u_1||_{s-1}$ soit assez petite. Plus précisément si par exemple les fonctions a_{jk} et f sont bornées dans $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1})$ le temps d'existence T fourni par la preuve vérifie

$$T \geq \frac{\text{const.}}{||u_0||_s + ||u_1||_{s-1}}. \tag{0.13}$$

En l'absence d'hypothèse supplémentaire l'ordre de grandeur donné dans (0.13) est le meilleur.

(v) Si T_* désigne le sup des T fournis par le Théorème 0.1, on peut montrer que, soit $T_* = +\infty$, soit $T_* < +\infty$ et

$$\overline{\lim_{t \to T_*}} \sum_{|\alpha| \leq k} ||\partial^\alpha u(t, \cdot)||_{L^\infty} = +\infty \tag{0.14}$$

où $k = 2$ dans le cas quasi-linéaire, $k = 1$ si l'équation est semi-linéaire et $k = 0$ pour l'équation $\Box u = f(u)$.

(vi) Cependant la taille des données peut influencer de manière plus significative le temps de vie. Ce fait est illustré sur l'exemple simple suivant.

Considérons en trois dimensions d'espace le problème

$$(0.15) \qquad \Box u = \sum_{j=1}^{3} (\partial_j u)^2 - (\partial_0 u)^2; \quad u = 0, \quad \partial_0 u = u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \text{ si } x_0 = 0.$$

Il est facile de voir que la fonction $v = e^u$ est solution du problème linéaire : $\Box v = 0$, $v = 1$, $\partial_0 v = u_1$ si $x_0 = 0$. Par conséquent,

$$(0.16) \qquad v(x_0, x) = 1 + w \quad \text{où } w(x_0, x) = \frac{x_0}{4\pi} \int_{|\omega|=1} u_1(x + x_0\omega)\, d\omega.$$

Cette formule montre que u existe tant que $x_0 ||u_1||_{L^\infty} < 1$. Mais d'autre part, puisque u_1 s'annule à l'infini, on peut écrire :

$$w = \frac{x_0}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \int_{x_0}^{+\infty} -\frac{d}{ds}[u_1(x + s\omega)]\, ds\, d\omega =$$

$$= \frac{x_0}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \int_{x_0}^{+\infty} -\sum_{i=1}^{3} \omega_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x + s\omega)\, ds\, d\omega$$

$$|w| \leq \frac{x_0}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{s^2} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x + s\omega) \right| s^2\, ds\, d\omega$$

$$\leq \frac{1}{4\pi x_0} \int_{|y| \geq x_0} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x + y) \right| dy$$

et donc

$$|w(x_0, x)| \leq \frac{1}{4\pi x_0} ||u_1'||_{L^1}.$$

En résumé :

$$\begin{cases} \text{si} \quad x_0 ||u_1||_{L^\infty} < 1 \quad \text{on a} \quad |w(x_0, x)| < 1 \\ \text{si} \quad x_0 ||u_1||_{L^\infty} \geq 1 \quad \text{on a} \quad |w(x_0, x)| \leq \dfrac{||u_1||_{L^\infty} \cdot ||u_1'||_{L^1}}{4\pi}. \end{cases}$$

Par conséquent si $\frac{1}{4\pi} ||u_1||_{L^\infty} \cdot ||u_1'||_{L^1} < 1$ on a $v = 1 + w > 0$ pour tout $(x_0, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ et donc le problème (0.15) admet une solution classique globale i.e. $T_* = +\infty$. Il est facile de voir que cette condition est en général nécessaire et que si elle n'est pas satisfaite, T_* est de l'ordre de $\frac{1}{||u_1||_{L^\infty}}$.

Nous allons voir que dans le cas où les données sont petites on peut effectivement améliorer le temps de vie des solutions.

1. LE CAS DES DONNEES INITIALES PETITES

1.1. L'amélioration du temps de vie

On supposera dans la suite que les données initiales sont de la forme

$$u_j(x) = \varepsilon\varphi_j(x), \quad \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \ j = 1,2, \quad \varepsilon > 0 \text{ petit.} \tag{1.1}$$

La condition de support compact pourrait être affaiblie mais une décroissance suffisante à l'infini est indispensable pour la validité des résultats à venir. Les équations étudiées sont des perturbations quasi-linéaires au moins quadratiques de l'équation des ondes. Afin de ne pas alourdir le texte nous supposerons que ces perturbations ne dépendent que de u' (cf. commentaires). Il s'agit donc d'étudier le problème

$$\sum_{j,k=0}^{n} g_{jk}(u')\,\partial_j\,\partial_k u = f(u') \tag{1.2}$$

$$u(0,x) = \varepsilon\varphi_0(x), \quad \partial_0 u(0,x) = \varepsilon\varphi_1(x) \tag{1.3}$$

$$g_{00} \equiv 1, \quad \sum_{j,k=0}^{n} g_{jk}(0)\,\partial_j\,\partial_k = \Box \tag{1.4}$$

$$f(0) = f'(0) = 0. \tag{1.5}$$

Nous poserons

$$T_\varepsilon = \sup\left\{T > 0 \text{ tq } E^\times u \in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n) \text{ solution de (1.2), (1.3)}\right\}. \tag{1.6}$$

T_ε sera appelé le temps de vie de la solution. Il est bien défini compte tenu du Théorème 0.1 et de l'unicité. On a $0 < T_\varepsilon \leq +\infty$.

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 1.1. – *Sous les conditions (1.4), (1.5) il existe des constantes $C > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ telles que pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$ on ait :*

(i) *Si* $n = 1$ $\quad T_\varepsilon \geq \frac{C}{\varepsilon}$

(ii) *Si* $n = 2$ $\quad T_\varepsilon \geq \frac{C}{\varepsilon^2}$

(iii) *Si* $n = 3$ $\quad T_\varepsilon \geq \exp\frac{C}{\varepsilon}$

(iv) *Si* $n \geq 4$ $\quad T_\varepsilon = +\infty$.

L'énoncé ci-dessus est l'aboutissement de nombreux travaux qui commencent en 1963 avec ceux de Segal [Se1]. Il doit beaucoup aux travaux successifs de John [Jo1,4,6,8] et à ceux de Klainerman [Kl1-4] qui avaient préalablement obtenus des versions plus faibles. Sous la forme présente il est dû à Klainerman [Kl4] et John-Klainerman [JoK].

Esquisse de la preuve

Illustrons la démarche sur l'équation $\Box u = (\partial_0 u)^2$. Les précisions sur le temps de vie proviennent du fait que l'on tiendra compte de la décroissance asymptotique des solutions. En effet rappelons que la solution v de $\Box v = 0$, v et $\partial_0 v$ dans C_0^∞ si $x_0 = 0$ vérifie

$$||v(x_0,\cdot)||_{L^\infty} = O((1+x_0)^{\frac{1-n}{2}}), \quad x_0 > 0. \tag{1.8}$$

Soit T_ε le temps de vie d'une solution de (1.2), (1.3). Supposons que l'on puisse montrer une inégalité de type Sobolev qui tienne compte de la décroissance à l'infini. Plus précisément supposons que l'on ait :

$$||u'(x_0,\cdot)||_{L^\infty} \leq C(1+x_0)^{\frac{1-n}{2}} ||u'(x_0,\cdot)||_{s_0}, \quad s_0 > \frac{n}{2}, \quad 0 \leq x_0 < T_\varepsilon, \tag{1.9}$$

où $||\cdot||_{s_0}$ est une norme pour laquelle :

a) Les fonctions non linéaires s'estiment comme en (0.12).

b) On a une estimation d'énergie analogue à (0.10), i.e.

(1.10)

$$||u'(x_0,\cdot)||_{s_0} \leq C_1\Big(||u'(0,\cdot)||_{s_0} + \int_0^{x_0} ||(\partial_0 u)^2(\tau,\cdot)||_{s_0}\, d\tau\Big) \qquad 0 \leq x_0 < T_\varepsilon.$$

On aura donc, d'après (0.12),

$$||(\partial_0 u)^2(\tau,\cdot)||_{s_0} \leq C_2 ||(\partial_0 u)(\tau,\cdot)||_{L^\infty} \cdot ||(\partial_0 u)(\tau,\cdot)||_{s_0} \tag{1.11}$$

de sorte qu'en combinant (1.9), (1.10), (1.11) on obtient

(1.12)

$$||u'(x_0,\cdot)||_{s_0} \leq C_3\Big(||u'(0,\cdot)||_{s_0} + \int_0^{x_0} (1+\tau)^{\frac{1-n}{2}} ||u'(\tau,\cdot)||_{s_0}^2\, d\tau\Big), \quad 0 \leq x_0 < T_\varepsilon.$$

Soit alors z la solution du problème

$$\text{(1.13)} \qquad \begin{cases} z'(x_0) = C_3(1+x_0)^{\frac{1-n}{2}} z^2(x_0), \quad x_0 > 0 \\ z(0) = C_3||u'(0,\cdot)||_{s_0} = C_3\varepsilon(||\varphi_0||_{s_0+1} + ||\varphi_1||_{s_0}) \end{cases}$$

alors z est certainement définie sur $[0, \tilde{T}_\varepsilon[$ où $0 < \tilde{T}_\varepsilon \leq +\infty$ et

$$\text{(1.14)} \qquad C_3 z(0) \int_0^{\tilde{T}_\varepsilon} (1+\tau)^{\frac{1-n}{2}} d\tau \leq \frac{1}{2}$$

et on a

$$\text{(1.15)} \qquad z(x_0) = \frac{z(0)}{1 - C_3 z(0) \int_0^{x_0} (1+\tau)^{\frac{1-n}{2}} d\tau}, \qquad 0 \leq x_0 < \tilde{T}_\varepsilon .$$

Supposons $T_\varepsilon < \tilde{T}_\varepsilon$ alors (1.12)... (1.15) montrent que

$$\text{(1.16)} \qquad ||u'(x_0,\cdot)||_{s_0} \leq z(x_0) \leq \frac{1}{2} z(0), \qquad 0 \leq x_0 < T_\varepsilon$$

ce qui entraîne une estimation du type

$$\text{(1.17)} \qquad ||u(x_0,\cdot)||_{L^\infty} + ||u'(x_0,\cdot)||_{L^\infty} \leq C(\varepsilon, \varphi_0, \varphi_1), \qquad 0 \leq x_0 < T_\varepsilon$$

et contredit (0.14). Enfin, la condition (1.14) donne les bornes inférieures (i) ... (iv) du Théorème.

S. Klainerman a rempli le programme décrit en (1.9), (1.10) en utilisant les propriétés d'invariance de l'équation des ondes par le groupe de Lorentz et par les dilatations. Les générateurs infinitésimaux de ces transformations sont :

$$\text{(1.18)} \qquad \begin{cases} Z_j = \partial_j \\ Z_{jk} = x_j \partial_k - x_k \partial_j \qquad 1 \leq j < k \leq n \\ Z_{0k} = x_0 \partial_k + x_k \partial_0 \qquad 1 \leq k \leq n \\ \rho = \sum_{j=0}^{n} x_j \partial_j . \end{cases}$$

L'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par ces champs de vecteurs est une algèbre de Lie. En outre on a les relations de commutation suivantes :

$$\text{(1.19)} \qquad \begin{cases} [Z_j, \Box] = [Z_{jk}, \Box] = [Z_{0k}, \Box] = 0 \\ [\Box, \rho] = 2\Box. \end{cases}$$

Si I est un multi-indice de longueur $|I| = k$ on notera Z_I un composé de k champs de vecteurs du type (1.18). On a alors le :

Théorème 1.2. Inégalité de Klainerman [Kl6]. – *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $T > 0$, tout $u \in C^\infty([0,T], \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ et tout $(x_0, x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$,*

$$\text{(1.20)} \quad (1 + x_0 + |x|)^{\frac{n-1}{2}} (1 + |x_0 - |x||)^{1/2} |u(x_0, x)| \leq C \sum_{|I| \leq \left[\frac{n}{2}\right]+1} ||Z_I u(x_0, \cdot)||_{L^2}$$

On prend alors pour $s \in \mathbb{N}$: $||u||_s = \Big(\sum_{|I| \leq s} ||Z_I u||^2_{L^2} \Big)^{1/2}$.

L'inégalité (1.9) résulte du Théorème 1.2 et pour démontrer (1.10) on dérive Z_I fois l'équation, les propriétés de commutation (1.19) permettant d'utiliser la technique standard d'inégalité d'énergie.

Voici une petite idée de la preuve. Si $x_0 + |x| \leq 1$, (1.20) résulte de l'inégalité de Sobolev usuelle. Si $x_0 + |x| > 1$ on localise coniquement. Supposons u supportée dans $|x| \geq \frac{1}{2} x_0$. L'inégalité de Sobolev usuelle dans $]0, +\infty[\times S^{n-1}$ donne

$$\text{(1.21)} \qquad ||u(x_0, \cdot)||^2_{L^\infty} \leq C \sum_{|\alpha| + k \leq s_0} ||\partial^\alpha_\omega \partial^k_r u(x_0, \cdot)||^2_{L^2}$$

en notant (r, ω) les coordonnées polaires et $s_0 = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. On utilise alors les faits suivants :

a) $\sum_{i=1}^{n} |\partial_{\omega_i} u|^2 = \sum_{1 \leq j < k \leq n} |Z_{jk} u|^2$,

b) $[\partial_{\omega_i}, Z_{jk}]$ est une combinaisons linéaire à coefficients réels de Z_{pq}, $1 \leq p < q \leq n$,

c) $\partial_r = \frac{1}{r} \rho - \frac{x_0}{r} \partial_0$ et $\partial^k_r = \sum_{i+j \leq k} a_{kij} \rho^i \partial^j_0$ où les a_{kij} sont des fonctions bornées dans la région $r \geq \frac{1}{2} x_0$.

On déduit alors de (1.21)

$$x_0^{n-1}|u(x_0,x)|^2 \leq C \sum_{|I|\leq s_0} \int_{x_0\leq 2r} |(Z_I u)(x_0, r\omega)|^2 x_0^{n-1}\, dr\, d\omega$$
$$\leq C' \sum_{|I|\leq s_0} ||Z_I u(x_0,\cdot)||^2_{L^2}$$

ce qui montre en partie (1.20).

Dans les autres régions la preuve est plus délicate et il faut utiliser tous les champs de vecteurs (1.18) ; nous renvoyons à [Kl6], [Ho4] ou à [Jo9] pour les détails.

Commentaires 1.3.

(i) Les bornes inférieures du temps de vie données au Théorème 1.1 sont liées au caractère quadratique des perturbations. La preuve montre aisément que ces bornes croissent avec l'ordre d'annulation des perturbations. Par exemple si les $g_{jk} - \delta_{jk}$ et f s'annulent respectivement à l'ordre p et $p+1$ en zéro, $(p \geq 1)$, les solutions existent globalement si $p(n-1) > 2$; si $p(n-1) \leq 2$ elles existent au moins jusqu'au temps T tel que $\varepsilon^p \int_0^T (1+\tau)^{p\cdot\frac{1-n}{2}} d\tau \leq C$. En particulier si $p = 2$ on a $T_\varepsilon = +\infty$ dès que $n \geq 3$ et $T_\varepsilon \geq \exp\frac{C}{\varepsilon}$ si $n = 2$.
(ii) L'inégalité d'énergie (0.10) ne fournit d'estimation que pour $||u'(x_0,\cdot)||_{L^2}$; une estimation pour $||u(x_0,\cdot)||_{L^2}$ exigerait de perdre un facteur x_0 au membre de droite; ceci explique pourquoi les termes en u et u' ne peuvent être traités de manière symétrique. De fait, les perturbations quadratiques en u ne donnent pas lieu à des temps de vie aussi longs que ceux décrits au Théorème 1.1. Il existe des résultats analogues pour des perturbations non linéaires dépendant aussi de u (voir [Kl4], [LiY1,2,3], [Lin2]). Par exemple H. Linblad [Lin2] a montré qu'en trois dimensions d'espace, pour une équation du type

$$\Box u + G(u, u', u'') = 0$$

où $G(0,0,0) = G'(0,0,0) = 0$ on a :

a) Si $G''_{uu}(0,0,0) = 0 \quad T_\varepsilon \geq \exp\frac{C}{\varepsilon}$

b) Si $G''_{uu}(0,0,0) \neq 0 \quad T_\varepsilon \geq \frac{C}{\varepsilon^2}$.

On peut montrer que ces ordres de grandeur sont en général optimaux.

(iv) Il y a une théorie analogue pour les perturbations non linéaires de l'équation de Klein-Gordon i.e. $\Box u + u + G(u, u', u'') = 0$. Dans ce cas l'inégalité d'énergie fournit aussi une estimation de $||u(x_0, \cdot)||_{L^2}$ de sorte que les rôles de u et u' sont symétriques. D'autre part la décroissance à l'infini est meilleure que dans le cas des ondes. Elle est de l'ordre de $(1+x_0)^{\frac{-n}{2}}$, [W1], [B]. La méthode de Klainerman est applicable; il faut utiliser les champs (1.18) excepté le champ radial ρ. Pour ce type d'équations Klainerman [Kl7] et Shatah [Sh1,2] par une méthode différente ont montré que dans le cas des perturbations quadratiques on a $T_\varepsilon = +\infty$ dès que $n \geq 3$. Les cas $n = 1$ et 2 ont été examinés par Hörmander [Ho4]. Pour $n = 1$ on a $\varepsilon\sqrt{T_\varepsilon} \to +\infty$ et pour $n = 2$ $\varepsilon \mathrm{Log} T_\varepsilon \to +\infty$ sans que ces résultats apparaissent comme optimaux.
(v) Le cas de l'équation des ondes amortie, $\Box u + \alpha u_t + G(u, u', u'') = 0$,où $\alpha > 0$, est plus facile. On a $T_\varepsilon = +\infty$ dès que $n \geq 1$, [Mat].

La dualité classique en e.d.p. — méthode d'inégalités, construction de solutions approchées — est aussi présente dans ce domaine. Nous allons voir que cette dernière méthode permet de démontrer des résultats plus précis.

1.2. Précisions sur les bornes inférieures du temps de vie lorsque $n \leq 3$

Compte tenu de la structure des données il est naturel de chercher une solution approchée du problème (1.2), (1.3) de la forme $u = u^0 + \varepsilon u^1 + \ldots$ Il est facile de voir que $u^0 \equiv 0$ et que u^1 est solution du problème homogène

$$\Box u^1 = 0, \quad u^1 = \varphi_0 \quad \partial_0 u^1 = \varphi_1 \text{ si } x_0 = 0.$$

Si les données φ_j sont à support dans $\{|x| \leq M\}$ il résulte de la propagation à vitesse finie et du principe de Huygens que la contribution principale de u^1 se trouve dans la région où $\frac{x_0}{2} \leq |x| \leq x_0 + M$.

Friedlander [F1] a montré que u^1 est de la forme

$$u^1(x_0, x) = r^{\frac{1-n}{2}} F\Big(\omega, \frac{1}{r}, r - x_0\Big), \text{ si } r \geq 2M, \tag{1.22}$$

où $x = r\omega$, F étant une fonction C^∞ sur $S^{n-1} \times \big[0, \frac{1}{2M}\big] \times \mathbb{R}$ dont la partie principale $F_0(\omega, r - x_0) = F(\omega, 0, r - x_0)$ est appelé le champ de Friedlander. Celui-ci s'exprime aisément à l'aide de la transformée de Radon des données. En

effet rappelons que si $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de Radon, $R(\omega, s; v)$ est la fonction C^∞ à support compact sur $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ définie par :

$$R(\omega, s; v) = \int_{\langle \omega, y \rangle = s} v(y)\, d\sigma.$$

On a alors

$$F_0(\omega, q) = \frac{1}{2}(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \chi_+^{\frac{1-n}{2}} * \left[R(\omega, \cdot; \varphi_1) - \frac{\partial R}{\partial s}(\omega, \cdot; \varphi_0) \right] \tag{1.23}$$

où $\chi_+^a(s) = \begin{cases} s^a/\Gamma(a+1) & s > 0 \\ 0 & s \leq 0 \end{cases}$ si $\Re a > -1$ et $\frac{d}{ds}\chi_+^a = \chi_+^{a-1}$ si $a \in \mathbb{C}$. En particulier si $n = 3$, $\chi_+^{-1} = \delta_0$ et si $n = 2$, $\chi_+^{-\frac{1}{2}}(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} s^{-1/2} & s > 0 \\ 0 & s \leq 0 \end{cases}$. Ensuite, avec les notations de (1.2) à (1.5) on écrit :

$$\begin{cases} g_{jk}(u') = g_{jk}(0) + \sum_{\ell=0}^{n} g_{jk\ell}\, \partial_\ell u + O(|u'|^2), \quad |u'| \leq 1 \\ f(u') = \sum_{j,k=0}^{n} f_{jk}\, \partial_j u \cdot \partial_k u + O(|u'|^3), \quad |u'| \leq 1 \end{cases} \tag{1.24}$$

puis on pose

$$\begin{cases} G(\omega) = \sum_{j,k,\ell=0}^{n} g_{jk\ell}\, \hat{\omega}_j \hat{\omega}_k \hat{\omega}_\ell \\ F(\omega) = \sum_{j,k=1}^{n} f_{jk}\, \hat{\omega}_j \hat{\omega}_k \end{cases} \quad \text{où } \hat{\omega} = (-1, \omega), \quad \omega \in S^{n-1}. \tag{1.25}$$

Le résultat suivant est dû à John [Jo6-9] et Hörmander [Ho3-4].

Théorème 1.3. – *Supposons* $n = 3$. *Posons*

$$A = \left[\max_{(\omega,q) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial q^2}(\omega, q) G(\omega) - \frac{\partial F_0}{\partial q}(\omega, q) F(\omega) \right) \right]^{-1} \tag{1.26}$$

alors

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \operatorname{Log} T_\varepsilon \geq A. \tag{1.27}$$

Dans le cas de la dimension $n = 2$, lorsque $f \equiv 0$, Hörmander [Ho4] a montré que

$$\underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sqrt{T_\varepsilon} \geq \Big[\max_{(\omega,q)} G(\omega) \frac{\partial^2 F_0}{\partial q^2}(\omega, q) \Big]^{-1} \tag{1.28}$$

et pour les équations semi-linéaires $\Box u = f(u')$ Godin [Go] a prouvé

$$\underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sqrt{T_\varepsilon} \geq \Big[\max_{(\omega,q)} \Big(- \frac{\partial F_0}{\partial q}(\omega, q) F(\omega) \Big) \Big]^{-1}. \tag{1.29}$$

Remarque 1.4. – Il n'est pas difficile de voir que la quantité A définie en (1.26) est strictement positive et finie sauf si $F \equiv G \equiv 0$ ou $(u_0, u_1) = (0, 0)$.

Esquisse de la preuve du Théorème 1.3

Pour montrer le Théorème 1.3 on construit pour tout $B < A$ et tout $\varepsilon \leq \varepsilon_B$ une solution u qui vivra jusqu'au temps $\exp \frac{B}{\varepsilon}$. Cette solution sera de la forme $u = u_a + \dot{u}$ où u_a est une solution approchée, au sens où la quantité $\sum_{j,k=0}^{3} g_{jk}(u_a') \partial_j \partial_k u_a - f(u_a')$ sera petite, qui vivra jusqu'au temps $\exp \frac{A}{\varepsilon}$. Une fois u_a construite il faut montrer qu'il existe $\dot{u}$ tel que $u_a + \dot{u}$ soit une solution exacte. La solution approchée u_a est construite en deux étapes : jusqu'à un temps de l'ordre de $\frac{C}{\varepsilon}$ les effets non linéaires ne se font pas encore sentir de sorte qu'il n'est pas déraisonnable de prendre pour u_a la solution de l'équation linéaire avec les données (1.3). Par contre dans une zone de temps comprise entre $\frac{C'}{\varepsilon}$ et $\exp \frac{A}{\varepsilon}$ les interactions non linéaires interviennent, et c'est la quantité $\varepsilon \operatorname{Log} x_0$ (le temps lent) qui va devenir le paramètre pertinent. Compte tenu de la forme (1.22) des solutions libres il est naturel alors de chercher u_a sous la forme

$$u_a = \frac{\varepsilon}{r} U(\omega, \varepsilon \operatorname{Log} x_0, r - x_0). \tag{1.30}$$

Lorsque x_0 est grand mais $\varepsilon \operatorname{Log} x_0$ encore petit il est naturel de prendre

$$U(\omega, 0, r - x_0) = F_0(\omega, r - x_0). \tag{1.31}$$

Dans la zone intermédiaire $\frac{C}{\varepsilon} \leq x_0 \leq \frac{C'}{\varepsilon}$ on recollera ces deux solutions à l'aide d'une troncature.

Compte tenu de la vitesse finie de propagation et du principe de Huygens, dans la zone $\varepsilon x_0 \geq C'$ on aura $x_0 - M \leq |x| \leq x_0 + M$ de sorte que $|x_0 - r| \leq M$ et $\frac{C'}{2\varepsilon} \leq \frac{x_0}{2} \leq r \leq x_0 + M$. On pose $R = \sum_{j,k=0}^{3} g_{jk}(u'_a)\partial_j \partial_k u_a - f(u'_a)$. Le terme principal de R s'écrit $\frac{\varepsilon^2}{rx_0}\left(-2\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial q} + G(\omega)\frac{\partial U}{\partial q}\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} - F(\omega)\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)^2\right)$ où $U = U(\omega, s, q)$. On prendra pour U la solution du problème

(1.32)
$$\begin{cases} -2\dfrac{\partial^2 U}{\partial s \partial q} + G(\omega)\dfrac{\partial U}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial U^2}{\partial q^2} - F(\omega)\left(\dfrac{\partial U}{\partial q}\right)^2 = 0, \quad \omega \in S^2,\ |q| \leq M,\ s > 0 \\ U(\omega, 0, q) = F_0(\omega, q). \end{cases}$$

On commence par résoudre le problème :

(1.33)
$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial v}{\partial s} = G(\omega)v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial q} - F(\omega)v^2, \quad \omega \in S^2,\ |q| \leq M,\ s > 0, \\ v|_{s=0} = \dfrac{\partial F_0}{\partial q}(\omega, q) \end{cases}$$

dont on montre qu'il conduit à une solution de (1.32).

L'équation apparaissant dans (1.33) est une équation de Burger modifiée dont on sait calculer le temps de vie. La solution existe pour $0 \leq s < A$ où A est défini en (1.26).

Il faut ensuite montrer des estimations précises sur u_a et sur R pour ensuite passer à la preuve de l'existence d'une solution exacte vivant jusqu'au temps $\exp \frac{B}{\varepsilon}$. L'extrême technicité de la preuve ne permettant pas d'en dire ici beaucoup plus, on renvoie à [Ho4] pour les détails. Le cas de la dimension deux est compliqué par le fait que l'on ne dispose que du principe de Huygens faible et que le champ de Friedlander n'est pas à support compact par rapport à la variable q. Cependant ce fait est compensé par des estimations précises du type symbole sur ce champ.

La quantité A définie en (1.36) cesse d'avoir un sens si $F(\omega) \equiv G(\omega) \equiv 0$. Cependant dans ce cas le Théorème 1.3 suggère que l'on peut améliorer le temps de vie de la solution. Cette question a été résolue par S. Klainerman [Kl8] et par Christodolou [Chr] dans le cas de la dimension trois d'espace.

La condition nulle

L'équation (1.2) satisfait la condition nulle si, avec les notations de (1.24) on a :

$$(1.34) \qquad \sum_{j,k,\ell=0}^{n} g_{jk\ell}\xi_j\xi_k\xi_\ell = \sum_{j,k=0}^{n} f_{jk}\xi_j\xi_k = 0 \quad \text{lorsque} \quad \xi_0^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2,$$

(voir aussi [HJ] pour une condition similaire).

D'après (1.25) cette condition entraîne que $F(\omega) = G(\omega) = 0\ \forall \omega \in S^{n-1}$. Dans ce cas Klainerman [Kl8] et Christodolou [Chr] ont démontré le :

Théorème 1.5. – *Supposons $n = 3$. Si l'équation (1.2) satisfait la condition nulle on a pour ε assez petit $T_\varepsilon = +\infty$.*

En dimension $n = 2$, dans le cas des équations semi-linéaires $\Box u = f(u')$ Godin [Go] a montré que la condition nulle (1.34) n'était pas suffisante pour avoir existence globale d'une solution. Plus précisément notant $F_j(z) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(0) z^\alpha$ la partie homogène d'ordre j et $\mathcal{F}(\omega, q)$ le champ de Friedlander, Godin montre que

a) Si $F_2(\omega) \equiv 0$ on a $\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\ \varepsilon^2 \mathrm{Log} T_\varepsilon \geq \left[\max_{(\omega,q)} \left\{ - F_3(\omega)\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}(\omega, q)\right)^2\right\}\right]^{-1}$

b) Si $F_2(\omega) \equiv F_3(\omega) \equiv 0$ on a $T_\varepsilon = +\infty$ pour ε assez petit.

Il montre ensuite sur un modèle que $T_\varepsilon \leq \exp \frac{C}{\varepsilon^2}$ dans le cas a).

1.3. Bornes supérieures du temps de vie

Compte tenu de la précision avec laquelle la solution approchée a été construite au cours de la preuve du Théorème 1.3, il est difficile de douter, comme le dit Hörmander [Ho4], de l'optimalité de la borne inférieure du temps de vie décrite en (1.26), (1.27). Cependant dans le cas général des équations (1.2) cette question est encore largement ouverte. Le seul cas où la réponse est connue est celui étudié par John [Jo5] en dimension $n = 3$ (voir aussi Godin [Go] dans le cas semi-linéaire et $n = 2$). Il considère le problème

$$(1.35) \qquad \begin{cases} \partial_0^2 u - c^2(\partial_0 u)\Delta u = 0, \ \text{où}\ \Delta = \sum_{j=1}^{3} \partial_j^2, \\ \\ u = \varepsilon u_0,\ \partial_0 u = \varepsilon u_1 \ \text{ si } \ x_0 = 0. \end{cases}$$

Ici c est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$c(0) = 1, \quad c'(0) \neq 0. \tag{1.36}$$

La condition $c'(0) \neq 0$ exprime le fait que la condition nulle n'est pas satisfaite, (et que les valeurs propres du système associé à (1.35) sont vraiment non linéaires).

L'hypothèse suivante sur les données est cruciale.

$$\text{Les données } u_j \text{ sont dans } C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \text{ et radiales.} \tag{1.37}$$

Dans ce cadre John a montré le

Théorème 1.6. – *Pour le problème (1.35), (1.36), (1.37) on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \operatorname{Log} T_\varepsilon = A$$

où A est défini en (1.26).

Remarquons que dans ce cas particulier on a $A = \frac{1}{aK}$ où $a = c'(0)$ est supposé positif et $K = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{1}{2}(2\phi'(\lambda) + \lambda\phi''(\lambda) - \psi(\lambda) - \lambda\psi'(\lambda))$ où $u_0 = \phi(r)$, $u_1 = \psi(r)$.

Expliquons pourquoi la radialité des données est ici essentielle. Dans ce cas la solution u est aussi radiale et le problème (1.35) est ramené au problème en une variable d'espace

$$\partial_0^2(ru) - c^2(\partial_0 u)\,\partial_r^2(ru) = 0. \tag{1.39}$$

Compte tenu de (0.14) on s'attend bien sûr à ce que des dérivées d'ordre ≤ 2 de u "explosent" lorsque $t \to T_*$ (mais il n'est pas clair que toutes les dérivées explosent). L'équation (1.39) se ramène à un système hyperbolique du premier ordre en une variable d'espace qui est l'un des rares cas où l'on connaisse de manière un peu générale des quantités pertinentes susceptibles d'exploser (en T_* et non pas après) (voir [Jo9], [Ho3]). Si on écrit le système $\partial_0 U + a(U)\,\partial_r U = 0$, ces quantités sont les composantes de $\partial_r U$ dans une base de vecteurs propres normalisés de la matrice $a(U)$.

Dans le cas de l'équation (1.39) ces quantités s'écrivent

$$w_1 = \frac{1}{2c}(-\partial_0\,\partial_r v + c\partial_r^2 v), \quad w_2 = \frac{1}{2c}(\partial_0\,\partial_r v + c\partial_r^2 v) \text{ où } v = ru. \tag{1.40}$$

D'autre part l'équation (1.39) a deux familles de caractéristiques

$$(1.41) \qquad \Gamma^1_\lambda : \frac{dr}{dx_0} = c(\partial_0 u),\ r(0) = \lambda, \qquad \Gamma^2_\mu : \frac{dr}{dx_0} = -c(\partial_0 u),\ r(0) = \mu.$$

D'après le Théorème 1.3 on sait que le problème (1.35) admet une solution u de classe C^∞ dans $\left[0, \exp\frac{B}{\varepsilon}\right] \times \mathbb{R}^3$ où $B < A$, qui vérifie $||\partial_0 u||_{L^\infty} \leq C\varepsilon$. Alors $|c(\partial_0 u)| \leq M\varepsilon$ et les caractéristiques existent jusqu'au temps $\exp\frac{B}{\varepsilon}$. On montre que :

a) Sur Γ^1_λ $\quad \frac{d}{dx_0} w_1 = \frac{cc'}{r} w_1(w_1 - w_2) + \frac{c'}{2r} u_t(3w_1 + w_2)$

b) Sur Γ^2_λ $\quad \frac{d}{dx_0} w_2 = \frac{cc'}{r} w_2(w_2 - w_1) + \frac{c'}{2r} u_t(3w_2 + w_1)$.

Puisque $v = ru = \varepsilon F_0(r - x_0) + O(\varepsilon^2), x_0 > M$, on a $w_1 = \varepsilon F_0''(r - x_0) + O(\varepsilon^2)$ pour $x_0 > M$. D'autre part comme $F_0(\lambda)$ est à support compact et non identiquement nul F_0'' prend des valeurs strictement positives. Soit λ_0 tel que $F_0''(\lambda_0) = \max F''(\lambda) > 0$. On a $|\lambda_0| < M$ si le support des données est contenu dans $\{|x| \leq M\}$. Considérons la caractéristique $\Gamma^1_{\lambda_0}$, on a $r(x_0) \approx x_0 + \lambda_0$ de sorte que $w_1(2M, r(2M)) = \varepsilon F_0''(\lambda_0) + O(\varepsilon^2)$. Ce que John démontre, par une très subtile et délicate récurrence continue qui utilise les deux équations a), b) ci-dessus c'est que le long de $\Gamma^1_{\lambda_0}$, w_2 et u_t restent bornés de sorte que le terme dominant dans le membre de droite de l'équation que vérifie w_1 est le terme $\frac{cc'}{r^2} w_1^2$. On a donc le long de $\Gamma^1_{\lambda_0}$, $\frac{dw_1}{dx_0} \approx \frac{c'(0)}{x_0 + \lambda_0} w_1^2$, $w_1(2M, r(2M)) \approx \varepsilon F_0''(\lambda_0)$. Le temps de vie d'une telle solution vérifie $\varepsilon \mathrm{Log} T_\varepsilon \leq \frac{1}{c'(0) F_0''(\lambda_0)}$, ce qui est précisément la borne supérieure cherchée. On renvoie à [Jo5], [Ho3] pour les détails.

Commentaires 1.7.

(i) En dimension deux d'espace, pour les équations $\sum_{j,k=0}^{2} g_{jk}(u')\, \partial_j\, \partial_k u = 0$, Alinhac [A1,2,3], en construisant une solution approchée beaucoup plus précise, a montré que $T_\varepsilon \geq \tilde{T}_\varepsilon = \frac{A}{\varepsilon^2} + \frac{B}{\varepsilon} - o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ avec égalité dans le cas invariant par rotation de John (cf. (1.35)). Il montre en outre une dégradation effective des dérivées secondes à l'approche de $\tilde{T}_\varepsilon$. Plus précisément

$$||\nabla^2 u(x_0, \cdot)||_{L^\infty} \geq \frac{C}{\frac{A}{\varepsilon^2} + \frac{B}{\varepsilon} - x_0}, \quad x_0 \leq \tilde{T}_\varepsilon.$$

(ii) Dans [Ho6] Hörmander donne une version complètement non linéaire du Théorème 1.3.

(iii) L'équation $\Box u = |u|^p$ a fait l'objet de nombreux travaux que faute de place nous n'aurons pas la possibilité de décrire; voir [Gl1-4], [Jo9], [Si1-3], [Ka2], [S1], [As1], [Ts], [Ku] et dans le cas des variétés hyperboliques [CaC], [Cho1,2]. Nous ferons cependant une exception pour les travaux de Caffarelli-Friedman [CF1,2] car ce sont les seuls travaux qui étudient l'ensemble d'explosion i.e. la frontière de $\{(x_0, x) : |u(x_0, x)| < +\infty\}$. Pour des équations du type $\Box u = F(u)$ où $F(u) \sim Au^p$, $u \to +\infty$, $p > 1$, ils montrents sous des hypothèses convenables sur les données de Cauchy et en dimension $n \leq 3$, que l'ensemble d'explosion est une surface de type espace : $t = \phi(x)$ avec $\phi \in C^1$ et $|\nabla\phi| < 1$.

2. EQUATIONS SEMI-LINEAIRES DISPERSIVES

Lorsque les données sont quelconques, le comportement en grand temps des solutions du problème de Cauchy est beaucoup moins bien compris. Le seul cas où l'étude a dépassé le stade de l'exemple est celui des équations d'ondes dispersives. Il s'agit du problème

$$\begin{cases} \Box u + f(u) = 0, x_0 > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u = u_0, \partial_0 u = u_1 \text{ si } x_0 = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$F(u) = \int_0^u f(t)dt \geq 0 \qquad \forall u \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

L'étude mathématique de ce problème a été commencée dans les années soixante avec les travaux de Jorgens [Jor], Segal [Se1], Strauss [St2], Lions [Lio] etc ... Il est malheureusement impossible, faute de place, de rendre compte dans le détail de l'ensemble des travaux qui, depuis trente ans, ont été consacrés à ce problème. Le lecteur intéressé pourra consulter les récents survols de Strauss [St4] et Struwe [Stru2]. Je me bornerai ici à résumer brièvement l'état du sujet avant la contribution de Shatah-Struwe qui sera détaillée par la suite.

1. Il est possible dans des situations assez générales ($uf(u) \geq 0 \ \forall u$ ou bien (2.2) et $\frac{F(u)}{|f(u)|} \to +\infty$ $|u| \to +\infty$) d'obtenir des solutions faibles globales en temps (i.e. faiblement continues à valeurs dans l'espace d'énergie X_0 qui est relié à $H^1 \times L^2$, cf. [Se1], [St2], [Lio]). Les méthodes basées sur la compacité ne donnent ni l'unicité ni la régularité qui sont encore des questions ouvertes.

2. Une des difficultés étant de mesurer la croissance à l'infini de $f(u)$, l'essentiel des travaux a porté sur le cas où f croît polynomialement. L'exemple majeur est $f(u) = u|u|^{p-1}$; apparaît alors une valeur critique pour p : $p_* = \frac{n+2}{n-2}$. Lorsque $1 < p < p_*$, à la suite de nombreux travaux, Ginibre et Velo [GV1] ont montré l'unicité et l'existence d'une solution fortement continue à valeurs dans l'espace d'énergie. Ils utilisent pour cela une résolution locale du problème par contraction puis une globalisation. La valeur critique apparaît dans le fait que le temps de vie de la solution locale peut être minoré par $C||(u_0, u_1)||_{X_0}^{-\frac{C}{p_*-p}}$.

3. En poursuivant dans cette voie, Brenner-Von Wahl [BrW] et Pecher [P3] ont obtenu une solution classique globale pour $1 < p < p_*$ et $n \leq 9$.

4. Dans le cas critique $p = p_*$ les méthodes précédentes atteignent leurs limites (voir cependant le récent article de Ginibre-Soffer-Velo [GSV] dans le cas radial). Une autre approche initiée par Jorgens [Jor] qui consiste à obtenir des estimations L^∞ sur les solutions locales du Théorème 0.1, a permis à Grillakis [GR1], à la suite de travaux de Rauch [Ra] et Struwe [Stru1], de résoudre le cas de l'équation $\Box u + u^5 = 0$ en trois dimensions d'espace. Ce même auteur a étendu son résultat aux dimensions $n \leq 5$, [GR2], avant que Shatah et Struwe [ShS] ne prouvent le :

Théorème 2.1. – *Supposons* $3 \leq n \leq 7$. *Soient* $u_0 \in C_0^3(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^2(\mathbb{R})$. *Supposons*

$$f(u) = u|u|^{p_*-1}, \quad |u| \geq C, \quad p_* = \frac{n+2}{n-2}. \tag{2.3}$$

Le problème (2.1) admet alors une solution classique globale $u \in C^2([0, +\infty[\times\mathbb{R}^n)$ *(et* $u \in C^\infty$ *si toutes les données sont* C^∞*).*

Commentaires 2.2.

(i) Il est bien entendu naturel de s'interroger sur la pertinence des bornes imposées à la dimension et à l'exposant p. Force est de constater qu'elles apparaissent aujourd'hui comme des contraintes techniques. Les calculs numériques effectués par Strauss-Vasquez [StV] et par Linblad pour l'équation $\Box u + u^7 = 0$ en dimension trois ne font pas apparaître de dégradation de la solution mais une accélération des oscillations, ce qui rend le pronostic délicat. Cependant sans qu'une conjecture étayée ait été formulée, on pense généralement que le cas surcritique en dimension

quelconque ne devrait pas faire apparaître de différence majeure.
(ii) On renvoie aux travaux de Kapitanski [K1,2], Ginibre-Soffer-Velo [GSV] pour d'autres résultats dans le cas critique.

2.1. Preuve du Théorème 2.1.

Le problème (2.1) admet une solution classique locale et si T_* est le temps de vie de cette solution on a soit $T_* = +\infty$ soit $T_* < +\infty$ et $\overline{\lim_{t \to T_*}} ||u(t,\cdot)||_{L^\infty} = +\infty$. Il existe alors un point (T_*, x_*) et une suite (x_{0n}, x_n) tendant vers ce point telle que $\lim_{n \to +\infty} |u(x_{0n}, x_n)| = +\infty$. L'objectif est de contredire ce fait en démontrant des estimations L^∞ sur u dans des cônes rétrogrades de sommet $(T_*, x_*) = z_*$.

Voici un résumé (inversé) de la preuve. Pour montrer que u est L^∞ dans le cône il suffit, d'après les inégalités de Sobolev, et puisque $n \leq 7$, d'avoir $\partial^\alpha u \in L^\infty([0, T_*[; L^2)$ pour $|\alpha| \leq 4$. Ceci peut s'obtenir à l'aide de l'inégalité d'énergie usuelle si $\Box u = -f(u) \in H^2$. En dimension $n \leq 7$, compte tenu de la forme de $f(u)$, ce fait est impliqué par : $u \in W^{2,q}$ (pour un certaint q). Pour montrer que u est dans $W^{2,q}$ on dérive deux fois l'équation, on applique les estimations $L^p - L^q$ pour l'équation des ondes linéaire et une estimation nouvelle due à Shatah-Struwe.

Introduisons d'abord quelques notations. Dans ce qui suit on notera t (au lieu de x_0) la variable de temps. Si $z_0 = (t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ on introduit
(2.5)

$$\begin{cases} K(z_0) = \Big\{ z = (t,x) \in [0,t_0] \times \mathbb{R}^n \,:\, |x - x_0| \leq t_0 - t \Big\}, \text{ le cône rétrograde} \\ M(z_0) = \Big\{ z = (t,x) \in [0,t_0] \times \mathbb{R}^n \,:\, |x - x_0| = t_0 - t \Big\}, \text{ le manteau} \\ D(t, z_0) = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x - x_0| \leq t_0 - t \Big\}, \text{ la section du cône au temps } t. \end{cases}$$

Si $Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ on pose

$$Q_S^T = \{(t,x) \in Q \,:\, S \leq t \leq T\}. \tag{2.6}$$

On introduit également

$$e(u) = \frac{1}{2}(u_t^2 + |\nabla_x u|^2) + F(u), \text{ la densité d'énergie} \tag{2.7}$$

$$E(u, D(t, z_0)) = \int_{D(t,z_0)} e(u)\,dx, \quad \text{l'énergie locale au temps } t \tag{2.8}$$

$$d_{z_0}(u) = \frac{1}{2}\Big|\frac{x - x_0}{|x - x_0|}u_t - \nabla_x u\Big|^2 + F(u), \quad \text{la densité de flux} \tag{2.9}$$

$$\text{Flux}(u, M_S^T(z_0)) = \int_{M_S^T(z_0)} d_{z_0}(u)\,d\sigma, \quad \text{le flux.} \tag{2.10}$$

A. L'estimation d'énergie

Proposition 2.3. – *Soit $z_0 \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$. Soit u une solution classique de l'équation (2.1) dans $K(z_0) \setminus \{z_0\}$. Alors pour $0 \leq S < T < t_0$ on a :*

$$E(u, D(T, z_0)) + \frac{1}{\sqrt{2}} Flux(u, M_S^T(z_0)) = E(u, D(S, z_0)). \tag{2.11}$$

Preuve. – On a :

$$0 = u_t(\Box u + f(u)) = \frac{\partial}{\partial t} e(u) - \text{div}\,(u_t \cdot \nabla_x u) = \text{div}\,\vec{p}$$

d'où

$$0 = \int_{K_S^T(z_0)} \text{div}\,\vec{p} = \int_{\partial K_S^T(z_0)} \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle\, d\sigma$$

où $\vec{n}$ est la normale extérieure à $K_S^T(z_0)$. Cela fournit (2.11) par un calcul simple.

Conséquences 2.4.

(i) La quantité $E(u, D(S, z_0))$ est décroissante en S et admet donc une limite lorsque S tend vers t_0.

(ii) $\lim_{S \to t_0} \text{Flux}(u, M_S^{t_0}(z_0)) = 0.$ (2.12)

B. Les estimations $L^p - L^q$

Il y a une vaste littérature consacrée à ce type d'estimations (voir [Str1,2], [Lit], [MSW], [BS], [GV1]). La version utilisée ici est celle de Strichartz.

Théorème 2.4. – *Soit w une solution classique d'un problème de Cauchy*

$$\Box w = f \quad pour\ t > 0, \quad w = u_0, \quad \partial_0 w = u_1 \quad pour\ t = 0.$$

On a alors

$$||w||_{L^q(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C\Big(||f||_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} + ||u_0||_{\dot{H}^{1/2}} + ||u_1||_{\dot{H}^{-1/2}}\Big) \tag{2.13}$$

où C ne dépend que de la dimension et

$$p = \frac{2(n+1)}{n+3} \qquad q = \frac{2(n+1)}{n-1}. \tag{2.14}$$

On a noté ici $||u||_{\dot{H}^s} = |||\xi|^s \hat{u}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Remarquons que le couple (p, q) décrit en (2.14) est entièrement déterminé par l'homogé-
néité de l'estimation (2.13).

Nous aurons besoin d'introduire les espaces de Besov et de Sobolev homogènes (voir [T]). Pour $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q < +\infty$ on pose

$$\dot{B}^s_{pq}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'/\mathcal{P} : ||u||_{\dot{B}^s_{pq}} \equiv \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq} ||u_j||^q_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Big)^{1/q} < +\infty \right\}$$

où $u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j$ est une décomposition de Littlewood-Paley de u et $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes. On pose aussi

$$\dot{H}^s_p(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'/\mathcal{P} : (-\Delta)^{s/2} u \in L^p(\mathbb{R}^n) \right\}$$

que l'on munit de la norme évidente.

On a alors les inclusions suivantes :

$$\begin{cases} \dot{B}^s_{\alpha\alpha} \hookrightarrow \dot{H}^s_\alpha & \text{si } \alpha \leq 2 \\ \dot{H}^s_\beta \hookrightarrow \dot{B}^s_{\beta\beta} & \text{si } \beta \geq 2 \\ \dot{H}^s_r \hookrightarrow \dot{H}^\sigma_{r_*} & \text{si } s \geq \sigma \text{ avec } \dfrac{1}{r_*} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{s-\sigma}{n} > 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

On posera dans ce qui suit :

$$\dot{B}^{1/2}_q = \dot{B}^{1/2}_{qq} \cap L^{q_*} \quad \text{où } \frac{1}{q_*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2n} \tag{2.17}$$

que l'on munit de la norme de $\dot{B}^{1/2}_{qq}$.
Comme $\dot{B}^{1/2}_{qq} = [\dot{H}^1_q, L^{q_*}]_{\frac{1}{2},q}$, il résulte de (2.16) que

$$\dot{B}^{1/2}_q \hookrightarrow L^{q_*}. \tag{2.18}$$

D'autre part les fonction non linéaires s'estiment aisément dans ces espaces.

Proposition 2.5. – *Soit $f \in C^1(\mathbb{C},\mathbb{C})$ telle que $|f'(z)| \leq C|z|^{p_*-1}$ pour un $p_* \in [1,+\infty[$. Soient $1 \leq \alpha,\beta \leq +\infty$, $1 \leq r \leq +\infty$ et $\frac{1}{s} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$. Il existe alors $C' > 0$ t.q. :*

$$||f(\varphi)||_{\dot{B}^{1/2}_{\alpha r}} \leq C'||\varphi||_{\dot{B}^{1/2}_{\beta r}} \cdot |||\varphi|^{p_*-1}||_{L^s} \tag{2.19}$$

pour toute $\varphi \in L^\gamma$ pour un γ dans $[1,+\infty[$ telle que le membre de droite de (2.19) ait un sens.

Ensuite si $\vee$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ on pose

$$||u||_{\dot{B}^s_q(\vee)} = \inf\Big\{||v||_{\dot{B}^s_q(\mathbb{R}^n)} : v|_\vee = u, v \in \dot{B}^s_q(\mathbb{R}^n)\Big\}.$$

Il résulte de (2.18) que

$$\dot{B}^{1/2}_q(\vee) \hookrightarrow L^{q_*}(\vee), \qquad \frac{1}{q_*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2n} > 0 \tag{2.20}$$

En appliquant (2.13) à $(-\Delta)^{1/2}w$ (ce qui a un sens par propagation à vitesse finie si les données sont à support compact), on obtient en utilisant (2.16)

$$||w||_{L^q(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{1/2}_q(\mathbb{R}^n))} \leq C\Big(||f||_{L^p(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{1/2}_p(\mathbb{R}^n))} + ||\nabla u_0||_{L^2(\mathbb{R}^n)} + ||u_1||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\Big). \tag{2.21}$$

Un argument d'unicité précisée dans les cônes $K^\tau_S(z_*)$ permet de localiser cette estimation dans ces cônes. Avec les notations de (2.5), (2.6) on pose

$$||u||_{q,S,\tau} = ||u||_{L^q([S,\tau];\dot{B}^{1/2}_q(D(t,z_*)))}, \quad 0 \leq S < \tau < T_*.$$

On démontre à partir de (2.21) :

$$||w||_{q,S,\tau} \leq C\Big(||f||_{p,S,\tau} + E(w(S,\cdot), D(S,z_*))\Big) \tag{2.22}$$

C. Le Lemme fondamental

Lemme 2.5. – *Soit u une solution classique de (2.1) dans $K(z^*) \setminus \{z^*\}$. Alors*

$$\lim_{S \to T_*} \int_{D(S,z_*)} |u|^{p_*+1} dx = 0 \tag{2.23}$$

Preuve. – On peut supposer que $z_* = 0$. Multiplions l'équation (2.1) par $tu_t + x \cdot \nabla u + \frac{n-1}{2} u$. On obtient l'identité :

$$0 = \partial_t \Big(tQ_0 + \frac{n-1}{2} u_t u \Big) - \operatorname{div}(tP_0) + R_0 \qquad \text{(2.24)} \quad \text{où}$$

$$Q_0 = e + u_t \Big(\frac{x}{t} \cdot \nabla u \Big)$$

$$P_0 = \frac{x}{t} \Big(\frac{|u_t|^2 - |\nabla u|^2}{2} - \frac{|u|^{p_*+1}}{p_*+1} \Big) + \nabla u \Big(u_t + \frac{x}{t} \cdot \nabla u + \frac{n-1}{2} \frac{u}{t} \Big)$$

$$R_0 = \frac{1}{n} |u|^{p_*+1}.$$

On intègre (2.25) sur le cône K_S^T et on fait tendre T vers zéro. On obtient :

$$\int_{D(S)} \Big\{ SQ_0 + \frac{n-1}{2} u_t u \Big\} dx + \int_{K_S^0} R_0 \, dx \, dt$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{M_S^0} \Big\{ tQ_0 + \frac{n-1}{2} u_t u + x \cdot P_0 \Big\} d\sigma = I + II + III = 0.$$

Sur M_S^0 on a $|x| = -t$ ce qui permet d'écrire

$$III = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{M_S^0} \Big\{ -|x| \Big| u_t - \frac{x \cdot \nabla u}{|x|} \Big|^2 + \frac{n-1}{2} \Big(u_t - \frac{x \cdot \nabla u}{|x|} \Big) \Big\} d\sigma$$

paramétrant M_S^0 par $y \mapsto (y, -|y|)$ et posant $v(y) = u(y, -|y|)$ il vient

$$III = - \int_{D(S,0)} \frac{1}{|y|} \Big\{ \Big| y \cdot \nabla v + \frac{n-1}{2} \Big|^2 - \Big(\frac{n-1}{2} \Big)^2 v^2 \Big\} dy$$

$$+ \int_{D(S,0)} \frac{n-1}{4} \frac{y \cdot \nabla (v^2)}{|y|} dy.$$

Intégrant par parties et revenant aux coordonnées originales on obtient

$$III = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{M_S^0} \frac{1}{t} \Big| t u_t + x \cdot \nabla u + \frac{n-1}{2} u \Big|^2 d\sigma + \frac{n-1}{4} \int_{\partial D(S,0)} u^2 d\sigma$$

$$III \geq \frac{n-1}{4} \int_{\partial D(S,0)} u^2 d\sigma + S o(1)$$

où $o(1) \to 0$ lorsque $S \to 0$, en vertu de (2.12).
Ensuite

$$I = - \int_{D(S,0)} \Big\{ S \Big[\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} \Big| \nabla u + \frac{n-1}{2} \frac{x}{|x|^2} u \Big|^2 - \frac{n-1}{2} \frac{x \cdot \nabla u}{|x|^2} u -$$

$$- \frac{1}{2} \Big(\frac{n-1}{2} \Big)^2 \frac{u^2}{|x|^2} + \frac{|u|^{p_*+1}}{p_*+1} \Big] + u_t \Big(x \cdot \nabla u + \frac{n-1}{2} u \Big) \Big\} dx$$

$$I = - \int_{D(S,0)} \Big\{ S \Big[\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} \Big| \nabla u + \frac{n-1}{2} \frac{x}{|x|^2} u \Big|^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{8} \frac{u^2}{|x|^2} + \frac{|u|^{p_*+1}}{p_*+1} \Big]$$

$$+ u_t \Big(x \cdot \nabla u + \frac{n-1}{2} u \Big) \Big\} dx + \int_{D(S,0)} \Big\{ S \frac{n-1}{4} \frac{u^2}{|x|} \Big\} d\sigma$$

$$I \geq - \int_{D(S,0)} S \frac{|u|^{p_*+1}}{p_*+1} dx - \frac{n-1}{4} \int_{\partial D(S,0)} u^2 d\sigma .$$

Comme $II \geq 0$ on obtient $-S \int_{D(S,0)} |u|^{p_*+1} dx + S o(1) \leq 0$ et $-S = |S|$. ♢

Proposition 2.6. – *Soit u une solution classique de (2.1) sur $K(z_*) \setminus \{z_*\}$. Alors u est bornée dans $L^q([0, T_*[, \dot{B}_q^{1/2}(D(t, z_*)))$ et*

$$||u||_{q,0,T_*} \leq C(z_*, E(u, D(0, z_*))) .$$

Preuve. – Pour s assez proche de T_* et $\tau \in]S, T_*[$ il résulte de (2.22) que

$$||u||_{q,S,\tau} \leq C \Big(||\, |u|^{p_*} ||_{p,S,\tau} + E(u, D(S, z_*)) \Big) . \tag{2.25}$$

D'après (2.19) $||\, |u|^{p_*} ||_{p,S,\tau} \leq C ||u||_{q,S,\tau} ||\, |u|^{p_*-1} ||_{L^{p_1}}$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ et $||\, |u|^{p_*-1} ||_{L^{p_1}} = ||u||_{L^{p_2}}^{p_*-1}$, où $p_2 = (p_*-1)p_1 = \frac{2n+2}{n-2}$, $p_1 = \frac{n+1}{2}$, d'où

$$||u||_{q,S,\tau} \leq C \Big(||u||_{q,S,\tau} ||u||_{L^{p_2}}^{p_*-1} + E(u, D(S, z_*)) \Big) . \tag{2.26}$$

Ensuite $\dot{B}_q^{1/2} \subset L^r$ où $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2n}$. On a $p_* + 1 < p_2 < r$ et $L^{p_2} = [L^r, L^{p_*+1}]_\theta$ où $\theta = \frac{n-2}{n-1}$. On déduit que sur $D(t, z_*)$ on a :

$$||u(t,\cdot)||_{L^{p_2}} \leq ||u(t,\cdot)||_{L^r}^{\theta} \cdot ||u(t,\cdot)||_{L^{p_*+1}}^{1-\theta} \leq ||u(t,\cdot)||_{\dot{B}_q^{1/2}}^{\theta} ||u(t,\cdot)||_{L^{p_*+1}}^{1-\theta}$$

d'où

$$||u||_{L^{p_2}(K_S^\tau(z_*))} \leq \Big(\sup_{S\leq t\leq \tau} ||u(t,\cdot)|| \Big)_{L^{p_*+1}}^{1-\theta} \cdot ||u||_{q,S,\tau}^{\theta}.$$

En utilisant (2.26) il vient

$$||u||_{q,S,\tau} \leq C(E(u, D(S, z_*)) + ||u||_{q,S,\tau}^{1+\theta(p_*-1)} \Big(\sup_{S\leq t\leq \tau} ||u(t,\cdot)||_{L^{p_*+1}} \Big)^{(1-\theta)(p_*+1)}$$

avec $\theta(p_* - 1) = \frac{4}{n-1}$ et $(1-\theta)(p_* - 1) = \frac{4}{(n-1)(n-2)}$.
Comme l'énergie est décroissante, $E(u, D(S, z_*)) \leq E(u, D(0, z_*))$. D'autre part d'après le Lemme 2.5 pour $S \geq S_0$ $\Big(\sup_{S\leq t\leq \tau} ||u(t,\cdot)||_{L^{p_*+1}} \Big)^{(1-\theta)(p_*-1)} \leq \dfrac{\varepsilon}{C}$ donc pour $S \geq S_0$

$$||u||_{q,S,\tau} \leq DE(u, D(0, z_*)) + \varepsilon ||u||_{q,S,\tau}^{\gamma} \quad \text{où } \gamma = \frac{n+3}{n-1} > 1.$$

On en déduit que pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ où ε_0 ne dépend que de $E(u, D(0, z_*))$ c'est-à-dire de l'énergie des données on a $||u||_{q,S,\tau} \leq 2C\, E(u, D(0, z_*))$. **QED**

Lemme 2.7. – *Sous les hypothèses de la Proposition 2.6 on a* $Du \in L^q(K(z_*))$.

Preuve. – On dérive l'équation (2.1) ce qui donne

$$\Box Du = -Du \cdot f'(u) \quad \text{où } |f'(u)| \leq C|u|^{p_*-1} \quad \text{pour } |u| \geq 1.$$

On applique l'inégalité (2.13) localisée dans le cône $K_S^\tau(z_*)$

$$||Du||_{L^q(K_S^\tau(Z_*))} \leq \Big(\underbrace{||Du \cdot f'(u)||_{L^p(K_S^\tau(z_*))}}_{(1)} + E(Du, D(S, z_0)) \Big).$$

On a $(1) \leq ||Du||_{L^q(K_S^\tau)} \cdot ||f'(u)||_{L^{p_1}(K_S^\tau)} \leq ||Du||_{L^q(K_S^\tau)} ||u||_{L^{p_2}}^{p_*-1}$ où $p_2 = \frac{2n+2}{n-2}$.
On a vu dans la preuve de la Proposition 2.6 que

$$||u||_{L^{p_2}(K_S^\tau)} \leq C \sup_{S\leq t\leq \tau} ||u(t,\cdot)||_{L^{p_*+1}}^{1-\theta} \cdot ||u||_{q,S,\tau}^{\theta}.$$

On déduit

$$||Du||_{L^q(K_S^\tau)} \leq C\Big(\sup_{S\leq t\leq \tau} ||u(t,\cdot)||_{L^{p_*+1}}\Big)^{(1-\theta)(p_*-1)} \cdot ||u||_{q,S,\tau}^{\theta(p_*-1)} \cdot ||Du||_{L^q(K_S^\tau)} + C_0 .$$

Si S est assez proche de T_* on déduit du Lemme 2.5 et de la Proposition 2.6 que $Du \in L^q(K(z_*))$.

Corollaire 2.8. – *Soit u une solution classique de (2.1) dans $K(z_*)\setminus\{z_*\}$. Alors*

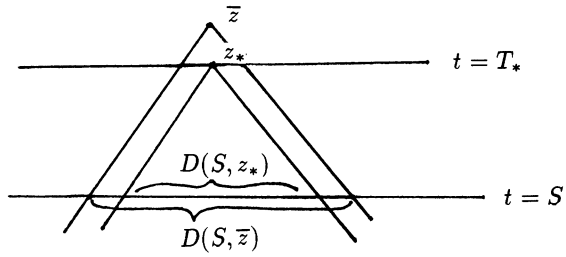
$$\lim_{S\to T_*} E(u, D(S,z_*)) = 0 .$$

Preuve. – Ce Corollaire renforce le lemme 2.5 et montre que toute l'énergie tend vers zéro. Il suffit de montrer que $\int_{D(S,z_*)} |Du|^2 dx$ tend vers zéro. D'après la conséquence 2.4 i) et le Lemme 2.5, cette quantité tend vers une limite ℓ. D'autre part

$$\int_{K_S^{T_*}(z_*)} |Du|^2 \leq \Big(\int_{K_S^{T_*}} |Du|^{2\cdot\frac{n+1}{n-1}}\Big)^{\frac{n-1}{n+1}} \mu(K_S^{T_*}(z_*))^{\frac{2}{n+1}}$$
$$\leq M\cdot \mu(K_S^{\tau}(z_*))^{\frac{2}{n+1}} \leq M(T_*-S)^2$$

puisque $2\frac{n+1}{n-1} = q$. Donc $\int_S^{T_*} \big(\int_{D(t,z_*)} |Du|^2 dx\big)\, dt \leq M(T_*-S)^2$. Ceci montre que $\ell = 0$.

D'après le Corollaire 2.8 il existe S_0 tel que $E(u, D(S_0,z_*)) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ où ε_0 est défini dans la Proposition 2.6. Par décroissance on a $E(u, D(S,z_*)) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ pour $S_0 < S < T_*$. Par continuité puisque u est C^2 à l'intérieur du cône il existe $\delta > 0$ tel que $\int_{|x-x_0|\leq T_*-S_0+\delta} e(u)(S,x)dx < \varepsilon_0$. Considérons le point $\overline{z} \in (T_*+\delta, x_*)$.



Nous allons travailler dans le cône tronqué $K_S^{T_*}(\overline{z})$ pour $s \in [S_0, T_*[$. Comme $D(S,\overline{z}) = \{x : |x-x_*| \leq T_*+\delta-S\}$ on a $E(u, D(S,\overline{z})) < \varepsilon_0$ pour $S_0 \leq S < T_*$

car l'énergie est décroissante et donc :

$$\sup_{S_0 \le S \le \tau} ||u(S,\cdot)||_{L^{p_*+1}(D(S,\overline{z}))} < \varepsilon_0\,, \quad S_0 < \tau < T_*\,.$$

Par conséquent on peut répéter la preuve de la Proposition 2.6 et du Lemme 2.7 dans les cônes tronqués $K_S^\tau(\overline{z})$ où $S_0 \le S < \tau < T_*$ et on en déduit :

$$Du \in L^q(K_0^{T_*}(\overline{z})) \tag{2.27}$$

Fin de la preuve du Théorème

On travaille désormais sur les cônes tronqués $K_S^T(\overline{z})$, $0 < S < T < T_*$. L'objectif est de montrer que $D^2u \in L^q(K_0^{T_*}(\overline{z}))$. On dérive donc deux fois l'équation, on obtient :

$$\Box \partial_j \partial_k u + \partial_j \partial_k u \cdot f'(u) + (\partial_j u)(\partial_k u) f''(u) = 0\,.$$

Par un raisonnement identique à celui de la preuve du Lemme 2.7 on obtient

$$\begin{aligned} &||f'(u)\,\partial_j \partial_k u||_{L^q(K_S^T)} \\ &\le C\Big(\sup_{S\le t\le T} ||u(t,\cdot)||_{L^{p_*+1}}\Big)^{(1-\theta)(p_*-1)} ||u||_{q,s,T}^{\theta(p_*-1)} ||\partial_j \partial_k u||_{L^q(K_S^T)} + C_0\,. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Considérons le second terme. Deux cas se présentent :
a) Si $n \ge 6$: on a alors $f'' \in L^\infty$. En notant D une dérivée partielle on obtient $||f''(u)(Du)^2||_{L^p} \le C||Du||_{L^{2p}}^2$. D'après l'inégalité de Sobolev, $W^{1,q} \hookrightarrow L^{r_1}$ où $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n+1}$ i.e. $r_1 = \frac{2(n+1)}{n-3}$. D'autre part $[L^q, L^{r_1}]_\theta = L^{2p}$ si $\theta = \frac{n-5}{4} \in]0,1[$. On en déduit
(2.29)

$$||f''(u)(Du)^2||_{L^p} \le C||Du||_{L^q}^{\frac{9-n}{2}} \cdot ||D^2u||_{L^q}^{\frac{n-5}{2}}\,, \quad \text{avec } \frac{n-5}{2} \le 1 \text{ puisque } n \le 7\,.$$

En utilisant (2.28), (2.29), le Lemme 2.5, le fait que $\lim_{S\to T_*} ||Du||_{L^q(K_S^{T_*})} = 0$ qui résulte de (2.27) et en utilisant les estimations $L^p - L^q$ on déduit que $D^2u \in L^q(K_S^{T_*}(\overline{z}))$ pour $S \ge S_1$.
b) Si $n < 6$: Dans ce cas $|f''(u)| \le C|u|^{p_*-2}$ pour $|u| \ge C$ d'où

$$||f''(u)(Du)^2||_{L^p} \le C||\,|u|^{p_*-2} \cdot Du \cdot Du||_{L^p} \le C||\,|u|^{p_*-2}||_{L^\alpha} \cdot ||Du||_{L^q} \cdot ||Du||_{L^{r_1}}$$

où $\alpha = \frac{2n+2}{7-n}$. Comme $(p_* - 2)\alpha < p_* + 1$ il vient

$$||f''(u)(Du)^2||_{L^p} \leq C' ||u||^{p_*-2}_{L^{p_*+1}} \cdot ||Du||_{L^q} \cdot ||D^2u||_{L^q}$$

et on conclut grâce au Lemme 2.5 et à (2.27).

On a donc montré que :

$$u \in W^{2,q}(K_0^{T_*}(\overline{z})). \tag{2.30}$$

Compte tenu de la forme de la non linéarité on montre facilement le

Lemme 2.9. – *Si $n \leq 7$ on a $f(u) \in W^{2,2}(K_0^{T_*}(\overline{z}))$.*

L'estimation d'énergie classique permet d'en déduire

$$\partial^\alpha u \in L^\infty\Big([0,T_*[, L^2(D(t,\overline{z}))\Big), \quad |\alpha| \leq 3. \tag{2.31}$$

Comme $W^{3,2}(D(t,\overline{z})) \subset L^\infty(D(t,\overline{z}))$ si $n < 6$ on déduit que $u \in L^\infty(K_0^{T_*}(\overline{z}))$ si $n < 6$. Pour traiter les dimensions $n = 6$ et 7 on doit avoir recours à la dérivée d'ordre quatre i.e. on montre :

$$\partial^\alpha u \in L^\infty\Big([0,T_*[, L^2(D(t,\overline{z}))\Big) \quad \text{si } |\alpha| \leq 4. \tag{2.32}$$

On utilise pour cela l'inégalité d'énergie ainsi que l'inégalité de Gronwall.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] S. ALINHAC - *Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasi linéaires en dimension deux I,* Ann. Sc. ENS (1993) (à paraître).

[A2] S. ALINHAC - *Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasi linéaires en dimension deux II,* Duke Math. Journal (1993) (à paraître).

[A3] S. ALINHAC - *Approximation près du temps d'explosion des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux,* Siam J. Math. An. (1993) (à paraître).

[As] F. ASAKURA - *Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with slowly decreasing initial data in three space dimension,* Comm. in P.D.E., 11 **(13)** (1986),1459-1487.

[BS] M. BEALS - W. STRAUSS - *L^p estimates for the wave equation with a potential,* Comm. in P.D.E., Vol. 18 (n° **7** and **8**), (1993),1365-1397.

[Br1] P. BRENNER - *On $L^p - L^q$ estimates for the wave equation,* Math. Z., **145** (1975), 251-254.

[Br2] P. BRENNER - *On the existence of global smooth solutions of certain hyperbolic equations,* Math. Z., **167** (1979), 99-135.

[BrW] P. BRENNER , V. VON WAHL - *Global classical solutions of non linear wave equation* Math. Z., **176** (1981), 87-121.

[CF1] L. CAFFARELLI , A. FRIEDMAN - *The blow up boundary for non linear wave equations,* Trans. Amer. Math. Soc., 297 **(1)** (1986), 233-241.

[CF2] L. CAFFARELLI , A. FRIEDMAN - *Differentiability of the blow up curve for one dimensional non linear wave equations,* Arch. Rational Mech. Anal., **91**, 1, (1985), 83-98.

[CaC] F. CAGNAC, Y. CHOQUET-BRUHAT - *Solution globale d'une équation d'ondes non linéaire sur une variété hyperbolique,* J. Math. Pures Appl., **63** (1984), 377-390.

[Ch] J. CHADAM - *Asymptotics for $\Box u = m^2 u + G(t, x, u, u_x, u_t)$ I,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **26** (1972), 33-65.

[Cho1] Y. CHOQUET-BRUHAT - *Théorèmes de non existence de solutions d'une équation d'ondes non linéaire,* C.R. Acad. Sci. Paris, **305** (1987), 263-266.

[Cho2] Y. CHOQUET-BRUHAT - *Global existence for solutions of $\Box u = A|u|^p$,* Journ. Diff. Equ., **82** (1989), 98-108.

[Chr] D. CHRISTODOLOU - *Global solutions of non linear hyperbolic equations for small initial data,* Comm. Pure Appl. Math., **39** (1986), 267-282.

[ChrK] D. CHRISTODOLOU, S. KLAINERMAN - *Asymptotic properties of linear field equations in Minkowski space,* Comm. Pure Appl. Math., **43** (1990), 137-199.

[F1] F.G. FRIEDLANDER - *On the radiation field of pulse solutions of the wave equation I, II,* Proc. Roy. Soc. A., **269** (1962), 53-65 et **279** (1964), 386-394.

[F2] F.G. FRIEDLANDER - *The wave equation on a curved space time,* Cambridge University Press 1975.

[GV1] J. GINIBRE, G. VELO - *The global Cauchy problem for the non linear Klein-Gordon equation,* Math. Z., **189** (1985), 487-505.

[GV2] J. GINIBRE, G. VELO - *Time decay of finite energy solutions of the non linear Klein-Gordon and Schrödinger equations,* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **43** (1985), 399-442.

[GV3] J. GINIBRE, G. VELO - *Conformal invariance and time decay for non linear wave equations,* Ann. Inst. H. Poincaré Phy. Théor., **47** (1987), 221-276.

[GV4] J. GINIBRE, G. VELO - *The global Cauchy problem for the non linear Klein-Gordon equation II,* Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire, **6** (1989), 15-35.

[GV5] J. GINIBRE, G. VELO - *Smoothing properties and retarded estimates for some dispersive evolution equations,* Comm. Math. Phys., **144** (1992), 163-188.

[GV6] J. GINIBRE, G. VELO - *Regularity of solutions of critical and subcritical non linear wave equation,* Non Linear Analysis

[GSV] J. GINIBRE, A. SOFFER, G. VELO - *The global Cauchy problem for the critical non linear wave equation,* Journ. of Funct. Anal., 110 **(1)** (1992), 96-130.

[Gl1] R. GLASSEY - *On the asymptotic behavior of non linear wave equations,* Trans. Amer. Math. Soc., **182** (1973), 187-200.

[Gl2] R. GLASSEY - *Blow-up theorems for non linear wave equations,* Math. Z., **132** (1973), 183-203.

[Gl3] R. GLASSEY - *Finite time blow up for solutions of non linear wave equations,* Math. Z., **177** (1981), 323-340.

[Gl4] R. GLASSEY - *Existence in the large for* $\Box u = F(u)$ *in two space dimensions,* Math. Z., **178** (1981), 233-261.

[Go] P. GODIN - *Lifespan of solutions of semi linear wave equations in two space dimensions,* Comm. in P.D.E., 18 (**5** and **6**) (1993), 895-916.

[Gr1] M. GRILLAKIS - *Regularity and asymptotic behavior of the wave equation with a critical non linearity,* Annals of Math., **132** (1990), 485-509.

[Gr2] M. GRILLAKIS - *Regularity for the wave equation with a critical non linearity,* Comm. Pure Appl. Math., **XLV** (1992), 749-774.

[HJ] B. HANOUZET, J.L. JOLY - *Explosion pour des problèmes hyperboliques semi-linéaires avec second membres non compatibles,* C.R. Acad. Sc. Paris, **301** (1985), 581-584.

[Ho1] L. HÖRMANDER - *On global existence of solutions of non linear hyperbolic equations in* $\mathbb{R}^{1+3}$, Institut Mittag-Leffler, Report n° 9, (1985).

[Ho2] L. HÖRMANDER - *On Sobolev spaces associated with some Lie algebra,* Current topics in P.D.E. Kinokuniya Company Ltd Tokyo, (1985), 261-287.
[Ho3] L. HÖRMANDER - *The lifespan of classical solutions of non linear hyperbolic equations,* Springer Lectures Notes in Math., **1256** (1986), 214-280.
[Ho4] L. HÖRMANDER - *Non linear hyperbolic differential equations,* Lectures at University of Lund 1986-87.
[Ho5] L. HÖRMANDER - $L^1 - L^\infty$ *estimates for the wave operator,* Mittag-Leffler report 1 (1986), 1-29, and Analyse Math. et Appl. Gauthier-Villars Paris (1988), 211-234.
[Ho6] L. HÖRMANDER - *The fully non-linear Cauchy problem with small data,* Bol. Soc. Bras. Mat. Vol 20 , 1, 1-27, (1989).
[Jo1] F. JOHN - *Delayed singularity formation in solutions of non linear wave equations in higher dimensions,* Comm. Pure Appl. Math., **29** (1976), 649-682.
[Jo2] F. JOHN - *Blow-up of solutions of non linear wave equations in three space dimensions for small initial data,* Manuscripta Math., **28** (1979), 235-268.
[Jo3] F. JOHN - *Blow up for quasi-linear wave equations in three space dimensions,* Comm. Pure Appl. Math., **34** (1981), 29-51.
[Jo4] F. JOHN - *Lower bounds for the lifespan of solutions to non linear wave equations in three dimensions,* Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), 1-35.
[Jo5] F. JOHN - *Blow-up of radial solutions of* $u_{tt} = c^2(u_t)\Delta u$ *in three space dimension,* Mat. Apl. Comput. V (1985), 3-18.
[Jo6] F. JOHN - *Existence for large times of strict solutions of non linear wave equations in three space dimensions,* Comm. Pure Appl. Math., **40** (1987), 79-109.
[Jo7] F. JOHN - *Almost global existence of elastic waves of finite amplitude arising from small initial disturbances,* Comm. Pure Appl. Math., **41** (1988), 615-666.
[Jo8] F. JOHN - *Solutions of quasi-linear wave equations with small initial data. The third phase,* Lecture Notes in Math., **1402** (1989), 155-173, (Springer Verlag).
[Jo9] F. JOHN - *Non linear wave equations. Formation of singularities,* Lehigh University, University Lecture Series, Amer. Math. Soc. Providence, (1990).
[JoK] F. JOHN, S. KLAINERMAN - *Almost global existence to non linear wave equations in three space dimension,* Comm. Pure Appl. Math., **37** (1984), 443-455.
[Jor] K. JÖRGENS - *Das Ang faugswertproblem in Grossen für ein Klasse nichtlinearer Wellengleichungen,* Math. Z., **77** (1961), 295-307.

[K1] L.V. KAPITANSKII - *Some generalizations of the Strichartz-Brenner inequality,* Leningrad Math. Journ., **1** (1990), 693-726.

[K2] L.V. KAPITANSKII - *The Cauchy problem for a semi linear wave equation,* Zap. Nauchn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI), **181** (1990), 24-64; **182** (190), 38-85.

[Ka1] T. KATO - *Linear and quasi linear equations of evolution of hyperbolic type,* CIME II Ciclo, (1976).

[Ka2] T. KATO - *Blow up of solutions of some non linear hyperbolic equations,* Comm. Pure Appl. Math., **32** (1980), 501-505.

[Ke] KELLER - *On solutions of non linear wave equations,* Comm. Pure Appl. Math., **10** (1957), 523-530.

[KiL] S. KICHENASSAMY, W. LITTMAN - *Blow up surfaces for non linear wave equations I,* Comm. in P.D.E., 18 (**3** and **4**), (1993), 431-452.

[Kl1] S. KLAINERMAN - *Global existence of non linear wave equations,* Comm. Pure Appl. Math., **33** (1980), 43-101.

[Kl2] S. KLAINERMAN - *Long time behavior of solutions to non linear evolution equations,* Arch. Rat. Mech. Anal., **78** (1982),73-98.

[Kl3] S. KLAINERMAN - *On almost global existence to non linear wave equations in three space dimensions,* Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), 325-344.

[Kl4] S. KLAINERMAN - *Long time behavior of solutions to non linear wave equations,* Proc. Int. Congr. Math. Warszawa, (1983), 1209-1215.

[Kl5] S. KLAINERMAN - *Weighted L^∞ and L^1 estimates for solutions to the classical wave equation in three space dimensions,* Comm. Pure Appl. Math., **37** (1984), 269-284.

[Kl6] S. KLAINERMAN - *Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the wave equation,* Comm. Pure Appl. Math., **38** (1985), 321-332.

[Kl7] S. KLAINERMAN - *Global existence of small amplitude solutions to non linear Klein-Gordon equations in four space time dimensions,* Comm. Pure Appl. Math., **38** (1985), 631-641.

[Kl8] S. KLAINERMAN - *The null condition and global existence to non linear wave equations,* Lectures in Applied Mathematics, **23** (1986), 293-326.

[Kl9] S. KLAINERMAN - *Remarks on the global Sobolev inequalities in the Minkowski space $\mathbb{R}^{n+1}$,* Comm. Pure Appl. Math., **40** (1987), 111-117.

[Kl10] S. KLAINERMAN - *Remark on the asymptotic behavior of the Klein-Gordon equation in* $\mathbb{R}^{n+1}$, Comm. Pure Appl. Math., **46** (1993), 137-144.

[KlM] S. KLAINERMAN, M. MACHEDON - *Space time estimates for null forms and the local existence theorem,* Comm. Pure Appl. Math., **46** (1993), 1221-1268.

[KlMa] S. KLAINERMAN, A. MAJDA - *Formation of singularities for wave equations including the non linear vibrating string,* Comm. Pure Appl. Math., **33** (1980), 241-263.

[KlP] S. KLAINERMAN, G. PONCE - *Global small amplitude solutions to non linear evolution equations,* Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), 133-141.

[Le1] H. LEVINE - *Instability and non existence of global solutions to non linear wave equations of the form* $Pu_{tt} = -Au + F(u)$, Trans. Amer. Math. Soc., **192** (1974), 1-21.

[Le2] H. LEVINE - *The role of critical exponents in blow-up theorems,* SIAM Review, **32** (1990), 262-288.

[LiY1] LI T.T., YU XIN - *Lifespan of classical solutions to fully non linear wave equations.*

[LiY2] LI T.T., YU XIN - *Initial value problems for non linear wave equations,* Comm. in P.D.E., **13** (4) (1988), 383-422.

[LiY3] LI T.T., YU XIN - *Non linear stability for two space dimensional wave equations with higher order perturbations,* UMPA Prépublication **49**, E.N.S. Lyon, (1991).

[Lin1] H. LINBLAD - *Blow up of solutions of* $\Box u = |u|^p$ *with small initial data,* Comm. P.D.E., **15** (6) (1990), 757-821.

[Lin2] H. LINBLAD - *On the lifespan of solutions of non linear wave equations with small initial data,* Comm. Pure Appl. Math., **43** (1990), 445-472.

[Lin3] H. LINBLAD - *Global solutions of non linear wave equations,* Comm. Pure Appl. Math., **45** (1992), 1063-1096.

[Lio] J.L. LIONS - *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,* Dunod et Gauthier Villars, Paris (1965).

[Lit] W. LITTMAN - $L^p - L^q$ *estimates for singular integral operators arising from hyperbolic equations,* Part. Diff. Equ. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Providence, R.I., A.M.S., **23** (1973), 479-481.

[MSW] B. MARSHALL, W. STRAUSS, S. WAINGER - *$L^p - L^q$ estimates for the Klein-Gordon equation,* Journ. Math. Pure et Appl., (9) **59** (1980), 417-440.

[Ma] K. MASUDA - *Blow-up of solutions for quasi linear wave equations in two space dimensions,* Lecture Notes in Num. Appl. Anal., **6** (1983), 87-91, North-Holland.

[Mat] A. MATSUMURA - *Global existence and asymptotics of the solutions ...,* Publ. RIMS Kyoto Univ., **13** (1977), 349-379.

[Mo] C. MORAWETZ - *Time decay for the non linear Klein-Gordon equation,* Proc. Roy. Soc., London Ser. A, **306** (1968), 291-296.

[MoS] C. MORAWETZ, W. STRAUSS - *Decay and scattering of solutions of a non linear relativistic wave equation,* Comm. Pure Appl. Math., **25** (1972), 1-31 and **26** (1973), 47-54.

[P1] H. PECHER - *L^p−Abschätzungen und Klassiche Lösungen für nichtlinear ... I,* Math. Z., **150** (1976), 159-183, *II* Manuscripta Math., **20** (1977), 227-244.

[P2] H. PECHER - *Ein nichtlinear Interpolationsatz und seine Anwading ...,* Math. Z., **161** (1978), 9-40.

[P3] H. PECHER - *Global smooth solutions to a class of semi linear wave equations with strong non linearity,* Manuscripta Math., **69** (1990), 71-92.

[Pe] I. PERAL-ALONSO - *Some remarks on semi linear wave equations in $\mathbb{R}^n$,* Contr. to Non linear PDE Pitman, (1986).

[Po1] G. PONCE - *Global existence of small solutions to a class of non linear evolution equations,* Non Linear Analysis, T.M.A. **9** (1985), 399-418.

[Po2] G. PONCE - *Regularity of solutions to non linear dispersive equations,* Journ. Diff. Equ., **78** (1989), 122-135.

[PoS] G. PONCE, T. SIDERIS - *Local regularity of non linear wave equations in three space dimensions,* Comm. in P.D.E., 18 (**1** and **2**) (1993), 169-177.

[R] R. RACKE - *Lectures on non linear evolution equations,* Aspects of Math., Vol E 19, Braunschweig Wiesbaden, Vieweg.

[Ra] J. RAUCH - *The u^5−Klein-Gordon equation,* Non linear PDE's and Applications, Pitman Research Notes in Math., **53**, 335-364.

[Re] M. REED - *Abstract non linear wave equations,* Lectures Notes in Math., Vol. 507, (1976).

[S1] J. SCHAEFFER - *The equation $\Box u = |u|^p$ for the critical value of p,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 101 A (1985), 31-44.

[S2] J. SCHAEFFER - *Finite time blow up for* $u_{tt} - \Delta u = H(u_r, u_t)$ *in two space dimensions,* Comm. P.D.E., 11 **(5)** (1986), 513-543.

[Se1] I.E. SEGAL - *The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction,* Bull. Soc. Math. France, **91** (1963), 129-135.

[Se2] I.E. SEGAL - *Quantization and dispersion for non linear relativistic equation,* Proc. Conf. Math. Th. El. Particles, MIT Press (1966), 79-108.

[Se3] I.E. SEGAL - *Space time decay for solutions of wave equations,* Adv. Math., **22** (1976), 305-311.

[Sh1] J. SHATAH - *Global existence of small solutions to non linear evolution equations,* Journ. Diff. Equ., **46** (1982), 409-425.

[Sh2] J. SHATAH - *Normal forms and quadratic non linear Klein-Gordon equations,* Comm. Pure Appl. Math., **38** (1985), 685-696.

[Sh3] J. SHATAH - *Weak solutions and the development of singularities in the* $SU(2)$ $\sigma-$*model,* Comm. Pure Appl. Math., **41** (1988), 459-469.

[ShS] J. SHATAH, M. STRUWE - *Regularity results for non linear wave equation,* Annals of Math., (1993), (to appear).

[ShT] J. SHATAH, A. TAHVILDAR-ZADEH - *Regularity of harmonic maps from Minkowski space into rotationally symmetric manifolds.*

[Si1] T. SIDERIS - *Global behavior of solutions to non linear wave equations in three dimensions,* Comm. in P.D.E., **8** (1983), 1291-1323.

[Si2] T. SIDERIS - *Non existence of global solutions to semi linear wave equations in high dimensions,* Journ. Diff. Eq., **52** (1984), 378-406.

[Si3] T. SIDERIS - *Formation of singularities in solutions to non linear hyperbolic equations,* Arch. Rat. Mech. Anal., 86 **(4)** (1984), 369-381.

[Si4] T. SIDERIS - *Decay estimates for the three dimensional inhomogeneous Klein-Gordon equation and applications,* Comm. P.D.E., **14** (1989), 1421-1455.

[St1] W. STRAUSS - *Decay and asymptotics for* $\Box u = F(u)$, Journal of Funct. Anal., **2** (1968), 409-457.

[St2] W. STRAUSS - *On weak solutions of semi linear hyperbolic equations,* Anais Acad. Brasil Cienc., **42** (1970), 645-651.

[St3] W. STRAUSS - *Non linear invariant wave equations,* Lecture Notes in Phys. (Springer), Vol. 78, (1978), 197-249.

[St4] W. STRAUSS - *Non linear wave equations,* Conf. Board of the Math. Sciences, **73** (1989), Amer. Math. Soc.

[StV] W. STRAUSS, L. VASQUEZ - *Numerical solution of a non linear Klein-Gordon equation,* J. Comput. Phys., **28** (1978), 271-278.

[Str1] R. STRICHARTZ - *A priori estimates for the wave equation and some applications,* J. Funct. Analysis, **5** (1970), 218-235.

[Str2] R. STRICHARTZ - *Restrictions of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations,* Duke Math. Journ., **44** (1977), 705-714.

[Stru1] M. STRUWE - *Globally regular solutions to the* u^5 *Klein-Gordon equation,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci., (4) **15** (1988), 495-513.

[Stru2] M. STRUWE - *Semi linear wave equations,* Bull. Amer. Math. Soc., **26** (1992), 53-86.

[T] H. TRIEBEL - *Interpolation theory, function spaces, differential operators,* North Holland Math. Lib. **18**, (1978).

[Ts] K. TSUTAYA - *A global existence theorem for semi linear wave equations with data of non compact support in two space dimensions,* Comm. in P.D.E., 17 (**11** and **12**), (1992), 1925-1954.

[W1] W. VON WAHL - L^p *decay rates for homogeneous wave equations,* Math. Z., **120** (1971), 93-106.

[W2] W. VON WAHL - *Über nichtlineare Wellengleichungen mit zeitabhängigem elliptischen Hamptteil,* Math. Z., **142** (1975), 105-120.

[W3] W. VON WAHL - *Regular solutions of initial boundary value problems for linear and non linear wave equations II,* Math. Z., **142** (1975), 121-130.

[We] M. WEINSTEIN - *Solitary waves of non linear dispersive evolution equations with critical power non linearity,* J. Diff. Equ., **19** (1987), 192-203.

[Z] C. ZUILY - *Existence globale de solutions régulières pour l'équation des ondes non linéaire amortie sur le groupe de Heisenberg,* Indiana Univ. Math. Journ., Vol. 42, n° 2, (1993), 323-360.

Claude Zuily
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
F - 91405 Orsay Cedex
URA 760 du CNRS

Astérisque

MICHEL BRION

Points entiers dans les polytopes convexes

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 780, p. 145-169

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__145_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Mars 1994
46ème année, 1993-94, n° 780

POINTS ENTIERS DANS LES POLYTOPES CONVEXES

par **Michel BRION**

Pour aller à Rabastens, vous irez d'abord à Mirepoix, puis à Bauville, et ensuite à Caraman. Et là vous demanderez le chemin pour aller à Rabastens.

Guillaume Bélibaste

1. LE POLYNÔME D'EHRHART D'UN POLYTOPE ENTIER

1.1. Soit M un réseau dans un espace vectoriel réel V de dimension finie. On appelle *polytope entier*, l'enveloppe convexe dans V d'un nombre fini de points de M. Si P est un tel polytope, on note $\mathrm{aff}(P)$ l'espace affine qu'il engendre, et $\dim(P)$ la dimension de $\mathrm{aff}(P)$. On désigne par P^0 l'intérieur de P dans $\mathrm{aff}(P)$.

On s'intéresse à compter les points entiers dans P et P^0, c'est-à-dire à dénombrer les ensembles (finis) $P \cap M$ et $P^0 \cap M$. Dans les années soixante, Ehrhart a découvert des propriétés remarquables des nombres de points entiers dans les multiples nP et nP^0, considérés comme fonctions de l'entier positif n; voir [Eh1], [Eh3], [Eh4]. Voici une partie de ses résultats.

THÉORÈME.— *Il existe une fonction polynomiale i_P telle que $i_P(n) = \mathrm{card}(M \cap nP)$ pour tout entier $n \geq 1$. De plus, on a: $i_P(0) = 1$ et $i_P(-n) = (-1)^{\dim(P)} \mathrm{card}(M \cap nP^0)$ pour tout entier $n \geq 1$ ("loi de réciprocité").*

1.2. Démonstration

Supposons d'abord que P est un simplexe de sommets $s_0, \ldots, s_d$, c'est-à-dire que P est l'enveloppe convexe de $s_0, \ldots, s_d$ et que $\dim(P) = d$. Notons Π le sous-ensemble de $M \times \mathbf{Z}$ formé des points qui peuvent s'écrire $\sum_{i=0}^{d} t_i(s_i, 1)$ avec des

$t_i \in [0,1[$. Pour tout $m \in M \cap nP$, on a une décomposition unique $(m,n) = (m_0,n_0)+\sum_{i=0}^{d} x_i(s_i,1)$ où $(m_0,n_0) \in \Pi$ et où les x_i sont des entiers non négatifs. Introduisons la série formelle

$$F_P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{card}(M \cap nP)\, z^n = \sum_{m \in M \cap nP} z^n \ .$$

D'après ce qui précède, on a:

$$F_P(z) = \sum_{(m,n)\in\Pi} z^n (1-z)^{-d-1} \ .$$

Observons que $0 \leq n < d+1$ pour tout $(m,n) \in \Pi$ et que $n = 0$ implique $m = 0$. Par suite, il existe des entiers $\delta_0, \ldots, \delta_d$ tels que

$$F_P(z) = (\delta_0 + \delta_1 z + \cdots + \delta_d z^d) \cdot (1-z)^{-d-1} \ .$$

De plus, $\delta_0 = 1$. On en déduit aussitôt que

$$i_P(n) = \delta_0 \binom{n+d}{d} + \delta_1 \binom{n+d-1}{d} + \cdots + \delta_d \binom{n}{d}$$

où $\binom{x}{d}$ désigne le polynôme $(d!)^{-1}x(x-1)\cdots(x-d+1)$. De plus, $i_P(0) = 1$.

Notons Π' le sous-ensemble de $M \times \mathbf{Z}$ formé des points qui peuvent s'écrire $\sum_{i=0}^{d} t_i(s_i,1)$ avec des $t_i \in]0,1]$. On montre comme ci-dessus que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{card}(M \cap nP^0)\, z^n = \sum_{(m,n)\in\Pi'} z^n (1-z)^{-d-1} \ .$$

Observons que Π et Π' sont échangés par la symétrie centrale qui envoie (m,n) sur $(s_0 + \cdots + s_d - m, d+1-n)$, d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{card}(M \cap nP^0) = \sum_{(m,n)\in\Pi} z^{d+1-n}(1-z)^{-d-1} = \sum_{i=0}^{d} \delta_i z^{d+1-i}(1-z)^{-d-1}$$

et finalement

$$\operatorname{card}(M \cap nP^0) = \delta_0 \binom{n-1}{d} + \delta_1 \binom{n}{d} + \cdots + \delta_d \binom{n+d-1}{d}$$

d'où la loi de réciprocité.

Dans le cas général, observons que

$$\mathrm{card}(M \cap P) + \mathrm{card}(M \cap Q) = \mathrm{card}(M \cap (P \cup Q)) + \mathrm{card}(M \cap (P \cap Q))$$

chaque fois que P, Q, $P \cup Q$ et $P \cap Q$ sont des polytopes entiers. De plus, l'expression $(-1)^{\dim(P)} \mathrm{card}(M \cap P^0)$ vérifie la même relation d'additivité. L'existence de i_P et la loi de réciprocité résultent alors du fait que tout polytope entier admet une subdivision par des simplexes entiers, et de la première partie de la démonstration. De même, $i_P(0)$ est la caractéristique d'Euler de P, ce qui termine la preuve.

1.3. Les coefficients du polynôme d'Ehrhart

Avec les notations de 1.1, écrivons

$$i_P(t) = a_0(P) + a_1(P)\, t + \cdots + a_d(P)\, t^d$$

où $a_0(P) = 1$. Il est clair que d est la dimension de P, et que $a_d(P) = vol_d(P)$ où $vol_d(P)$ désigne le volume de P, pour la mesure de Lebesgue sur $\mathrm{aff}(P)$, normalisée de façon que le quotient $\mathrm{aff}(P)/(M \cap \mathrm{aff}(P))$ soit de volume 1. La "loi de réciprocité" entraîne facilement l'égalité

$$a_{d-1}(P) = \frac{1}{2} \sum_{F \subset P} vol_{d-1}(F)$$

où la somme porte sur les $(d-1)$-faces de P, leur volume étant normalisé comme ci-dessus. En particulier, lorsque $d = 2$, on retrouve la *formule de Pick* (voir [Pi]): le nombre de points entiers dans un polygone entier P est égal à l'aire de P, plus la moitié du nombre de points entiers sur le bord de P, plus 1.

Mais les choses se compliquent en dimension 3 ou plus: le terme $a_1(P)$ pour un tétraèdre entier P de dimension 3, n'a été compris que très récemment (voir [Po] ou 3.4 ci-dessous). Observons que ce terme ne peut s'exprimer en fonction des volumes des faces propres de P. En effet, dans $\mathbf{R}^3$ muni du réseau $\mathbf{Z}^3$, considérons le tétraèdre P_r de sommets $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,r)$ où r est un entier positif. Alors P_r ne contient pas d'autre point entier que ses sommets. D'autre part, P_r est de volume $r/6$, toutes ses faces sont de volume $1/2$, et toutes ses arêtes

de volume 1. D'où aussitôt $a_1(P_r) = 2 - \frac{r}{6}$ et notre assertion. Cette observation est due à Reeve, voir [Re].

On montre plus généralement que pour $1 \leq k \leq d-2$, le terme $a_k(P)$ ne peut s'exprimer en fonction de la somme des volumes des k-faces de P; voir [Ka]. On verra cependant que $a_k(P)$ est combinaison linéaire de ces volumes, avec des coefficients qui ne dépendent que de la géométrie locale de P; voir 2.4 ci-dessous.

2. POLYNÔME D'EHRHART ET THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

On rappelle le dictionnaire entre polytopes entiers et varétés toriques projectives munies d'un fibré en droites ample et linéarisé. Grâce au théorème de Riemann-Roch, on en déduit un lien entre les coefficients du polynôme d'Ehrhart et le calcul de la classe de Todd des variétés toriques.

2.1. Polytopes entiers et variétés toriques polarisées (voir [Da], [Fu2], [Od], [Te])

On note $\mathbf{C}[M]$ l'algèbre du groupe M sur $\mathbf{C}$, et $(x^m)_{m\in M}$ sa base canonique. Soit t une indéterminée. A tout polytope entier P, on associe l'espace

$$A_P := \bigoplus_{m\in M\cap nP} \mathbf{C}\, x^m t^n \subset \mathbf{C}[M][t] \ .$$

Alors A_P est une sous-algèbre de $\mathbf{C}[M][t]$, graduée par les entiers non négatifs. On vérifie aisément que A_P est normale, et qu'elle est entière sur sa sous-algèbre engendrée par ses éléments de degré 1. On peut donc définir une variété projective normale $X_P := \operatorname{Proj} A_P$ et un fibré en droites ample L_P sur X_P, tels que

$$H^0(X_P, L_P^{\otimes n}) = \bigoplus_{m\in M\cap nP} \mathbf{C}x^m = (A_P)_n \ .$$

On a: $\dim(X_P) = \dim(A_P) - 1 = \dim(P)$ et de plus: $X_{nP} = X_P$, $L_{nP} = L_P^{\otimes n}$.

Notons T le groupe des homomorphismes de M vers $\mathbf{C}^*$, c'est-à-dire le tore dont le groupe des caractères est M. L'algèbre A_P est graduée par $M \times \mathbf{N}$, d'où une opération de T dans X_P, qui se relève à l'espace total de L_P: on dit que L_P est *T-linéarisé*.

Pour toute face F de P, l'algèbre A_F est un quotient de A_P, d'où une inclusion de X_F dans X_P. On construit ainsi toutes les sous-variétés de X_P, qui sont irréductibles et stables par T. Par suite, les orbites de T dans X_P sont en bijection avec les faces de P; en particulier, T a une orbite dense dans X_P.

On appelle *T-variété torique* une variété normale dans laquelle T opère avec une orbite dense. On a une correspondance bijective entre polytopes entiers et couples (X, L) où X est une variété torique projective, et L un fibré en droites ample, T-linéarisé sur X. On peut montrer alors que $H^i(X, L^{\otimes n}) = 0$ lorsque $i \geq 1$ et $n \geq 1$; ce résultat reste valable si L est engendré par ses sections globales. On en déduit que

$$\mathrm{card}(M \cap nP) = h^0(X, L^{\otimes n}) = \chi(X, L^{\otimes n})$$

où χ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré cohérente. Mais $\chi(X, L^{\otimes n})$ est fonction polynomiale de l'entier n (voir [Ful] 18.3.6 ou 2.3 ci-dessous); de plus, $\chi(X, \mathcal{O}_X) = h^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$. *On retrouve ainsi l'existence de i_P et le fait que* $i_P(0) = 1$. On montre aussi que X est de Cohen-Macaulay, et que son faisceau dualisant ω_X vérifie: $h^0(X, \omega_X \otimes L^{\otimes n}) = \mathrm{card}(M \cap nP^0)$. De la dualité de Serre et de l'annulation des $H^i(X, L^{\otimes -n})$ pour $i < \dim(P)$ et $n \geq 1$, on déduit que

$$\mathrm{card}(M \cap nP^0) = \chi(X, \omega_X \otimes L^{\otimes n}) = (-1)^{\dim(P)} \chi(X, L^{\otimes -n})$$

On retrouve ainsi la "loi de réciprocité".

On peut aussi redémontrer et préciser les résultats d'Ehrhart, grâce au fait que l'algèbre graduée A_P est de Cohen-Macaulay et que sa fonction de Hilbert est i_P; voir entre autres [Hi] et [St].

2.2. Éventails et variétés toriques (voir [Da], [Fu2], [Od], [Te])

Soit P un polytope entier. Pour toute face F de P, notons P_F le cône convexe engendré par les points $p - f$ où $f \in F$ et $p \in P$. On pose:

$$\check{P}_F := \{f \in V^* \mid f(x) \geq 0 \ \forall x \in P_F\}$$

(le cône dual de P_F). Chaque $\check{P}_F$ est un cône convexe saillant, engendré par un nombre fini de demi-droites entières par rapport au réseau $N := \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z})$. Un tel cône est appelé *cône convexe rationnel polyédral,* abrégé en c.c.r.p, voire en

cône. Lorsque F décrit les faces de P, les $\check{P}_F$ s'assemblent en un *éventail* Δ_P, c'est-à-dire une collection finie de c.c.r.p. σ, telle que:
(i) Si τ est une face de $\sigma \in \Delta$, alors $\tau \in \Delta$.
(ii) Si $\sigma, \tau \in \Delta$ alors $\sigma \cap \tau$ est une face de σ et de τ.

Pour tout entier $k \geq 0$, on note $\Delta(k)$ l'ensemble des cônes de dimension k de Δ. Lorsque $\Delta = \Delta_P$, l'application $F \to \check{P}_F$ est une bijection de l'ensemble des faces de codimension k de P, sur $\Delta(k)$.

L'éventail Δ_P est *complet*: ses cônes forment une subdivision de V^*. Soit $H_P : V^* \to \mathbf{R}$ la *fonction d'appui* de P, définie par $H_P(f) = \inf_{p \in P} f(p)$. Alors H_P est convexe, linéaire sur chaque cône de Δ_P, et Δ_P est le plus petit éventail avec ces propriétés. Un tel éventail, de la forme Δ_P, est appelé *projectif*.

A tout éventail Δ on associe une T-variété torique X_Δ en recollant les variétés toriques affines

$$X_\sigma := \operatorname{Spec} \bigoplus_{m \in M \cap \check{\sigma}} \mathbf{C} x^m$$

suivant $X_\sigma \cap X_\tau = X_{\sigma \cap \tau}$. Pour tout $\sigma \in \Delta$, notons $\mathcal{O}_\sigma$ l'unique orbite fermée de T dans X_σ, et notons V_σ l'adhérence de $\mathcal{O}_\sigma$. L'application $\sigma \to \mathcal{O}_\sigma$ est une bijection de Δ sur l'ensemble des orbites de T dans X_Δ. On a: $\dim(\mathcal{O}_\sigma) = \operatorname{codim}(\sigma)$ et de plus: $\sigma \subset \tau$ si et seulement si $V_\sigma \supset V_\tau$.

La variété torique associée à un polytope entier P, ne dépend que de Δ_P. On a un dictionnaire entre éventails et variétés toriques, dont voici quelques extraits.
X_Δ est complète (resp. projective) $\Leftrightarrow$ Δ est complet (resp. projectif).
X_Δ est lisse $\Leftrightarrow$ Δ est régulier (i.e. tout cône de Δ est engendré par une partie d'une base de N).
X_Δ n'a que des singularités quotients par des groupes finis $\Leftrightarrow$ Δ est simplicial (i.e. tout cône de Δ est engendré par des directions linéairement indépendantes).
$\pi : X_{\Delta'} \to X_\Delta$ est un morphisme propre et équivariant (resp. une désingularisation équivariante) $\Leftrightarrow$ Δ' est une subdivision (resp. une subdivision régulière) de Δ.
On montre alors que $R^i \pi_* \mathcal{O}_{X'} = 0$ pour tout $i \geq 1$.

2.3. Le théorème de Riemann-Roch (voir [Ful] Chap. 18)

Soit X un schéma de type fini sur $\mathbf{C}$. Pour tout entier $k \geq 0$, on note $A_k(X)$ le groupe de Chow des k-cycles de X, modulo l'équivalence rationnelle. L'image dans $A_k(X)$ du k-cycle irréductible Y est notée $[Y]$. On note $A_*(X)$ le groupe

abélien gradué, somme directe des $A_k(X)$; on pose $A_*(X)_{\mathbf{Q}} := A_*(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. Lorsqu'on considère la graduation par la codimension, on a de même $A^k(X)$, $A^*(X)$ et $A^*(X)_{\mathbf{Q}}$.

Tout fibré en droites L sur X définit une *classe de Chern* $c_1(L)$, qui est un opérateur de degré -1 sur $A_*(X)$: si Y est un k-cycle irréductible, on note $c_1(L) \cap Y$ la classe dans $A_{k-1}(X)$ représentée par le diviseur de Cartier sur Y associé au fibré en droites $L|Y$. Le *caractère de Chern* $ch(L)$ est l'opérateur de $A_*(X)_{\mathbf{Q}}$ défini par :

$$ch(L) = exp(c_1(L)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_1(L)^k}{k!}.$$

Plus généralement, pour tout fibré vectoriel E sur X, on a des classes de Chern $c_i(E) : A_k(X) \to A_{k-i}(E)$ pour $0 \leq i \leq rg(E)$, ainsi qu'un caractère de Chern $ch(E)$, opérant dans $A_*(X)_{\mathbf{Q}}$.

On suppose désormais que X est complet. D'après le théorème de Riemann-Roch, il existe une *classe de Todd* $Td(X)$ dans $A_*(X)_{\mathbf{Q}}$ telle que pour tout fibré vectoriel E sur X, on ait :

$$\chi(X, E) = \int_X ch(E) \cap Td(X)$$

où $\int_X$ désigne le degré (le degré d'un 0-cycle est la somme de ses coefficients, et le degré d'un k-cycle est nul pour tout $k > 0$). De plus, si $\pi : X' \to X$ est un morphisme propre tel que $\pi_* \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X$ et $R^i \pi_* \mathcal{O}_{X'} = 0$ pour tout $i \geq 1$, alors $\pi_* Td(X') = Td(X)$. En notant d la dimension de X, on a: $Td_d(X) = [X]$ et si X est normale, alors $Td_{d-1}(X) = -\frac{1}{2} K_X$ où K_X désigne la classe canonique de X.

On en déduit aussitôt que pour tout fibré en droites L sur X, on a :

$$\chi(X, L^{\otimes n}) = \sum_{k=0}^{d} n^k \int_X \frac{c_1(L)^k}{k!} \cap Td_k(X) \ .$$

En particulier, $\chi(X, L^{\otimes n})$ est une fonction polynomiale de n, de degré au plus d (on l'appelle polynôme de Snapper-Kleiman). Le coefficient de n^d dans $\chi(X, L^{\otimes n})$ est

$$\int_X \frac{c_1(L)^d}{d!} \cap [X] = \frac{\deg(L)}{d!} \ .$$

2.4. Polynôme d'Ehrhart et classe de Todd (voir [Fu2], [M4]).

Soient P un polytope entier de dimension d, et

$$i_P(n) = a_0(P) + a_1(P)n + \cdots + a_d(P)n^d$$

son polynôme d'Ehrhart. Soit Δ une subdivision de Δ_P ; soient X la variété torique associée à Δ ; et L le fibré en droites sur X défini par P. D'après ce qui précède, on a :

$$a_k(P) = \int_X \frac{c_1(L)^k}{k!} \cap Td_k(X).$$

En particulier, pour $k = d$ on obtient : $vol_d(P) = \frac{\deg(L)}{d!}$. En outre, comme un diviseur canonique sur X est $-\sum_{\sigma\in\Delta(1)} V_\sigma$, on a :

$$a_{d-1}(P) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\in\Delta(1)} \int_X \frac{c_1(L)^{d-1}}{(d-1)!} \cap [V_\sigma].$$

On retrouve ainsi le fait que $a_{d-1}(P)$ est la demi-somme des volumes des $(d-1)$-faces de P.

On vérifie sans peine que le groupe $A_*(X)$ est engendré par les $[V_\sigma]$; voir [Fu2] 5.1. Ceci conduit à une nouvelle entrée du dictionnaire.

PROPOSITION.— *Soient Δ un éventail simplicial projectif, et $(\mu(\sigma))_{\sigma\in\Delta}$ une famille de nombres rationnels. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout polytope entier P tel que $\Delta = \Delta_P$, et pour tout entier $k \geq 0$, on a :*

$$a_k(P) = \sum_{F\subset P} \mu(\check{P}_F)\, vol_k(F),$$

où la somme porte sur les k-faces de P (notations de 2.2).

(ii) *Dans $A_*(X)_{\mathbf{Q}}$, on a: $Td(X) = \sum_{\sigma\in\Delta} \mu(\sigma)\,[V_\sigma]$.*

Démonstration.— (ii) $\Rightarrow$ (i) résulte du théorème de Riemann-Roch.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Pour tout cône simplicial $\tau \in V^*$, notons mult τ l'indice dans $N \cap \langle\tau\rangle$ du sous-réseau engendré par les points entiers sur les arêtes de τ. D'après [Fu2] 5.1, l'espace $A^*(X)_{\mathbf{Q}}$ a une structure d'algèbre graduée, et la "dualité de Poincaré"

$$A^k(X)_{\mathbf{Q}} \otimes A_k(X)_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{Q} : (\alpha, \beta) \to \int_X \alpha \cdot \beta$$

est un isomorphisme. De plus, la multiplication dans $A^*(X)_{\mathbf{Q}}$ est donnée par: $[V_\sigma] \cdot [V_\tau] = (\text{mult}\,\sigma)(\text{mult}\,\tau)(\text{mult}\,\gamma)^{-1}[V_\gamma]$ lorsque σ et τ engendrent un cône γ de Δ tel que $\dim(\sigma) + \dim(\tau) = \dim(\gamma)$.

Il en résulte aussitôt que la $\mathbf{Q}$-algèbre $A^*(X)_{\mathbf{Q}}$ est engendrée par les $[V_\sigma]$, où σ décrit $\Delta(1)$. Mais puisque X est projective, le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $A^1(X)_{\mathbf{Q}}$ est engendré par les classes des diviseurs amples. Grâce à l'identité

$$k! x_1 x_2 \cdots x_k = \sum_{I \subset [1,k]} (-1)^{k-\text{card}(I)} (\sum_{i \in I} x_i)^k \ ,$$

on en déduit que le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $A^*(X)_{\mathbf{Q}}$ est engendré par les puissances des diviseurs amples. L'assertion en résulte aussitôt.

Remarque.— La classe de Todd ne se représente pas toujours par un cycle effectif. En effet, les coefficients du polynôme d'Ehrhart peuvent être négatifs; voir l'exemple de Reeve en 1.3.

3. CLASSES DE TODD DES VARIÉTÉS TORIQUES, ET SOMMES DE DEDEKIND

On expose les résultats de Pommersheim, voir [Po].

3.1. La classe de Todd d'un variété torique simpliciale

Soient X une variété torique complète, et Δ son éventail. Supposons d'abord que X est lisse; alors la classe de Todd de X est $Td(X) = td(T_X) \cap [X]$ où $td(T_X)$ est la classe de Todd du fibré tangent à X. Rappelons que:

$$td(T_X) = \prod_{\sigma \in \Delta(1)} Y_\sigma (1 - exp(-Y_\sigma))^{-1}$$

où on développe formellement le membre de droite grâce à la structure d'anneau de $A^*(X)$. Si on suppose seulement que X est simpliciale, la formule ci-dessus garde un sens, à cause de la structure d'anneau de $A^*(X)_{\mathbf{Q}}$. On définit ainsi une "fausse classe de Todd" $TD(X) = \sum_k TD^k(X) \in A^*(X)_{\mathbf{Q}}$.

Observons que $TD^k(X)$ est bien définie si on suppose seulement que $\Delta(k)$ est formé de cônes simpliciaux. En particulier, $TD^2(X)$ a toujours un sens. Observons

aussi que $Td^k(X) = TD^k(X)$ si $\Delta(k)$ est formé de cônes réguliers. En effet, on peut alors trouver une subdivision régulière Δ' de Δ, qui coïncide avec Δ jusqu'en dimension k. On a donc une désingularisation $\pi : X' \to X$, qui vérifie: $\pi_* TD(X') = \pi_* Td(X') = Td(X)$. Mais $TD^k(X) = \pi_* TD^k(X')$ d'où l'assertion.

Soit $e \geq 1$ un entier. Soit Δ un éventail tel que $\Delta(e-1)$ est formé de cônes réguliers, et $\Delta(e)$ de cônes simpliciaux. D'après les remarques précédentes, on peut écrire dans $A^e(X)_{\mathbf{Q}}$:

$$Td^e(X_\Delta) - TD^e(X_\Delta) = \sum_{\sigma \in \Delta(e)} t(\sigma, \Delta)\,[V_\sigma]$$

pour certains rationnels $t(\sigma, \Delta)$.

THÉORÈME.— *Avec les notations précédentes, on peut trouver des $t(\sigma, \Delta)$ qui ne dépendent que de σ, et la fonction $\sigma \to t(\sigma)$ est alors unique.*

3.2. Démonstration

Choisissons $\sigma \in \Delta(e)$. On peut trouver une subdivision Σ de σ par des cônes réguliers, dont les arêtes (autres que les arêtes de σ) sont dans σ^0. Une telle subdivision est applée *intérieure*. Soit Δ' l'éventail obtenu en remplaçant σ par Σ dans Δ; soit $\pi : X' \to X$ le morphisme associé. Il est clair que l'image de l'ensemble exceptionnel de π est V_σ. Par suite, pour tous $\sigma_1, \ldots, \sigma_e$ dans $\Delta(1)$, on a dans $A^*(X)_{\mathbf{Q}}$:

$$\pi_*(\prod_{i=1}^{e} [V_{\sigma_i}]) - \prod_{i=1}^{e} \pi_*[V_{\sigma_i}] = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_e)[V_\sigma]$$

où le rationnel $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_e)$ est uniquement défini. Pour le calculer, on peut remplacer X par X_σ et X' par $\pi^{-1}(X_\sigma)$. Par suite, la fonction g ne dépend que de σ et de Σ.

On en déduit qu'il existe un unique rationnel $f_{\sigma,\Sigma}$ tel que

$$\pi_* TD^e(X') - TD^e(X) = f_{\sigma,\Sigma}[V_\sigma]\ .$$

Vérifions que $f_{\sigma,\Sigma}$ ne dépend que de σ, et non de Σ. En effet, soient Σ_1 et Σ_2 deux subdivisions intérieures de Σ. On peut supposer que tout cône de $\Delta(e)$,

distinct de σ, est régulier. On obtient ainsi deux éventails Δ_1 et Δ_2, réguliers en dimension e. Soient $\pi_i : X_i \to X$ les morphismes associés. On a: $(\pi_i)_* TD^e(X_i) = (\pi_i)_* Td^e(X_i) = Td^e(X)$ pour $i = 1, 2$; d'où $f_{\sigma,\Sigma_1} = f_{\sigma,\Sigma_2}$.

On termine la preuve en faisant des subdivisions intérieures successives de tous les cônes non réguliers de $\Delta(e)$.

3.3. Sommes de Dedekind et classe de Todd en codimension 2

La fonction t n'a été calculée que pour la valeur (minimale) $e = 2$. Soit σ un cône de dimension 2. On peut trouver une base (n_1, n_2) du réseau $\langle\sigma\rangle \cap N$ telle que σ est engendré par n_1 et $pn_1 + qn_2$ où p, q sont des entiers premiers entre eux, avec $1 \leq p < q$. L'entier q est alors unique (c'est la multiplicité de σ), mais on peut remplacer p par son inverse modulo q. On dit que σ est de type $(p, q) = (p_\sigma, q_\sigma)$.

On définit la *somme de Dedekind* associée à (p, q) par :

$$s(p,q) = \sum_{i=1}^{q} ((\frac{i}{q}))((\frac{pi}{q}))$$

où $((x)) = 0$ si x est entier, et $((x)) = x - [x] - \frac{1}{2}$ sinon.

THÉORÈME.— *Pour tout éventail complet Δ, on a :*

$$Td^2(X_\Delta) - TD^2(X_\Delta) = \sum_{\sigma \in \Delta(2)} (s(p_\sigma, q_\sigma) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4q_\sigma})[V_\sigma] \, .$$

En particulier, lorsque Δ est de dimension 2, on a : $Td^2(X_\Delta) = [\text{point}] = [V_\sigma]$ pour tout
$\sigma \in \Delta(2)$, et $TD^2(X_\Delta)$ se calcule facilement. Si on ordonne les cônes $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ de $\Delta(2)$ de façon que $\sigma_i \cup \sigma_{i+1} := \tau_i$ soit convexe pour tout i mod n, on trouve:

$$\sum_{i=1}^{n} s(p_i, q_i) = 1 - \frac{n}{4} + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n} (\text{mult}\, \tau_i)(\text{mult}\, \sigma_i)^{-1}(\text{mult}\, \sigma_{i+1})^{-1}$$

où on pose: $\text{mult}\, \sigma = |det(u, v)|$ avec u, v les vecteurs entiers indivisibles sur les arêtes de σ. Ceci généralise la "loi de réciprocité" de Rademacher, qui relie trois sommes de Dedekind; voir [Ra].

Voici les ingrédients de la preuve du théorème. On conserve les notations de 3.2, et on identifie chaque $\sigma \in \Delta'(1)$ avec le générateur du semi-groupe $\sigma \cap N$. On définit une application $\tilde{g} : N^e \to \mathbf{Q}$, par:

$$\tilde{g}(n_1, \ldots, n_e) = \begin{cases} g(n_1, \ldots, n_e) & \text{si } n_1, \ldots, n_e \in \Delta'(1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque $n_1, \ldots, n_e$ sont tous distincts, on vérifie que:

$$\tilde{g}(n_1, \ldots, n_e) = \begin{cases} 1 & \text{si } n_1, \ldots, n_e \text{ engendrent un cône de } \Sigma \\ -(\text{mult}\,\sigma)^{-1} & \text{si } n_1, \ldots, n_e \text{ engendrent } \sigma \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, $\tilde{g}$ est symétrique, et on a pour tous $m \in M$ et $n_2, \ldots, n_e \in N$:

$$\sum_{n \in \Sigma(1)} \langle m, n \rangle \tilde{g}(n, n_1, \ldots, n_e) = 0 \ .$$

Ces propriétés déterminent uniquement $\tilde{g}$; on peut ainsi calculer $t(\sigma)$ lorsqu'on connaît une subdivision régulière de σ. C'est le cas si $e = 2$; en effet, si σ est engendré par n_1 et $pn_1 + qn_2$ comme ci-dessus, définissons des entiers $b_1, \ldots b_k \geq 0$ par:

$$\frac{q}{q-p} = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{\cdots - \cfrac{1}{b_k}}}$$

et une suite $(\rho_i)_{0 \leq i \leq k}$ dans N, par:

$$\rho_0 = n_1, \ \rho_1 = n_1 + n_2, \ \rho_{i+1} = b_i \rho_i - \rho_{i-1} \ .$$

Alors $\rho_k = pn_1 + qn_2$; de plus, les cônes σ_i engendrés par ρ_i et ρ_{i+1} forment l'unique subdivision régulière minimale de σ. Enfin, on a:

$$s(p,q) = \frac{1}{12}\left(\sum_{i=1}^{k} (3 - b_i) + \frac{p + p'}{q} - 2\right)$$

où p' désigne l'inverse de p modulo q. Le résultat s'en déduit par un calcul direct.

3.4. Le nombre de points entiers dans un tétraèdre.

Soit P un tétraèdre entier dans un espace vectoriel V de dimension 3. Avec les notations de 2.2, pour toute arête $A = [aa']$ de P, on a un cône P_A, dont l'image dans le quotient $V/\mathbf{R}(a-a')$ est un c.c.r.p. de dimension 2. Comme en 3.3, on associe à A deux entiers p, q, et on pose: $m_A = q$, $d_A = -s(p,q) + \frac{1}{4}$. On note F_A^+, F_A^- les faces de P qui contiennent A.

THÉORÈME.— *Avec les notations précédentes, on a:*

$$a_1(P) = \sum_A \Big(\frac{1}{36 m_A}\Big(\frac{\mathrm{vol}_2(F_A^+)}{\mathrm{vol}_2(F_A^-)} + \frac{\mathrm{vol}_2(F_A^-)}{\mathrm{vol}_2(F_A^+)}\Big) + d_A\Big)\,\mathrm{vol}_1(A)\ .$$

Cela se déduit sans peine de 2.4 et 3.3; dans le calcul de $TD^2(X_P)$, on se débarasse des termes V_F^2 en observant que $\mathrm{vol}_2(F)V_{F'} = \mathrm{vol}_2(F')V_F$ pour toutes faces F, F' de P. En effet, puisque l'espace $A^1(X)_{\mathbf{Q}}$ est de dimension 1, les cycles V_F et $V_{F'}$ sont proportionnels; de plus, le degré de L_P sur V_F est $2\,\mathrm{vol}_2(F)$.

En particulier, lorsque $P \subset \mathbf{R}^3$ a pour sommets $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ où a, b, c sont des entiers positifs, on trouve:

$$\begin{aligned} a_1(P) = \frac{1}{12}\Big(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{d^2}{abc}\Big) + \frac{a+b+c+A+B+C}{4} \\ -As\Big(\frac{bc}{d}, \frac{aA}{d}\Big) - Bs\Big(\frac{ac}{d}, \frac{bB}{d}\Big) - Cs\Big(\frac{ab}{d}, \frac{cC}{d}\Big) \end{aligned}$$

où $A = \mathrm{pgcd}(b,c)$, $B = \mathrm{pgcd}(a,c)$, $C = \mathrm{pgcd}(a,b)$ et $d = ABC$. Si a, b, c sont premiers entre eux deux à deux, on retrouve une formule due à Mordell, et redécouverte par Ehrhart; voir [Mord], [Eh2]. Laterveer a redémontré la formule de Pommersheim, en calculant le genre géométrique de certaines intersections complètes dans des espaces projectifs à poids; voir [La]. D'autre part, Kantor et Khovanskii ont redémontré les résultats de Pommersheim, dans le cadre de leur théorème de Riemann-Roch combinatoire (voir [KK2]). Enfin, Cappell et Shaneson ont annoncé une formule qui dénombre les points entiers dans un simplexe entier de dimension quelconque, voir [CaSh].

4. L'ANNEAU DES POLYTOPES ENTIERS

On expose une partie des résultats de McMullen, Morelli, Kantor, Pukhlikov et Khovanskii sur l'anneau des polytopes, son analogue entier, et les liens avec la K-théorie des variétés toriques.

4.1. L'anneau des polytopes (voir [Mc1], [Mc2])

Soit V un espace vectoriel de dimension finie d. On note $\mathcal{P}(V)$ l'ensemble des polytopes convexes de V. Si P et Q sont dans $\mathcal{P}(V)$, on a leur *somme de Minkowski*

$$P + Q = \{p + q \,|\, p \in P, q \in Q\}.$$

On note $\mathbf{Z}\mathcal{P}(V)$ le groupe abélien libre sur $\mathcal{P}(V)$, et $\tilde{\Pi}(V)$ le quotient de $\mathbf{Z}\mathcal{P}(V)$ par les relations

$$[P \cup Q] + [P \cap Q] - [P] - [Q]$$

pour tous P, $Q \in \mathcal{P}(V)$ tels que $P \cup Q \in \mathcal{P}(V)$. On désigne par $\Pi(V)$ le quotient de $\tilde{\Pi}(V)$ par les relations $[v + P] - [P]$ pour tous $P \in \mathcal{P}(V)$ et $v \in V$. Du lemme ci-dessous résulte que la formule $[P] \cdot [Q] = [P + Q]$ définit une structure d'anneau sur $\tilde{\Pi}(V)$ et $\Pi(V)$. Ce dernier est appelé *l'anneau des polytopes*.

Lemme.— Soient P, Q, $R \in \mathcal{P}(V)$. Alors $(P \cup Q) + R = (P + R) \cup (Q + R)$. Si de plus $P \cup Q \in \mathcal{P}(V)$ alors $(P \cap Q) + R = (P + R) \cap (Q + R)$.

Démonstration.— La première assertion est évidente, ainsi que l'inclusion de $(P \cap Q) + R$ dans $(P + R) \cap (Q + R)$. Pour l'inclusion opposée, soient $p \in P$, $q \in Q$ et $r_1, r_2 \in R$ tels que $p + r_1 = q + r_2 := x$. Puisque $P \cup Q$ est convexe, le segment $[p, q]$ rencontre $P \cap Q$. Soit $t \in [0, 1]$ tel que $tp + (1 - t)q \in P \cap Q$. Alors $x = tp + (1 - t)q + tr_1 + (1 - t)r_2 \in (P \cap Q) + R$.

A tout polytope P, on associe sa *fonction caractéristique* $\mathbf{1}_P : V \to \{0, 1\}$. Il est clair que cette application passe au quotient en un homomorphisme $\varphi : \tilde{\Pi}(V) \to L(V)$ où $L(V)$ désigne le groupe des applications de V dans $\mathbf{Z}$ dont l'image est finie, et dont chaque fibre est réunion finie de polytopes.

PROPOSITION.— *Avec les notations précédentes, l'application $\varphi : \tilde{\Pi}(V) \to L(V)$ est un isomorphisme.*

Démonstration.— La surjectivité est évidente. Soit $x = \sum[P_i] - \sum[Q_j] \in \tilde{\Pi}(V)$ tel que $\varphi(x) = 0$. Ecrivons les P_i et les Q_j comme intersections finies de demi-espaces; d'où une famille (finie) d'hyperplans (H_α). Les composantes connexes de $V \setminus \cup_\alpha H_\alpha$ n'ont qu'un nombre fini de faces bornées; soit (R_β) la famille finie des adhérences de ces faces.

Pour tout hyperplan H, notons H^+ et H^- les demi-espaces fermés définis par H. Les relations $[P] = [P \cap H_\alpha^+] + [P \cap H_\alpha^-] - [P \cap H_\alpha]$ permettent d'écrire les P_i et Q_j comme combinaisons entières des R_β. Par suite, on a $x = \sum_\beta a_\beta[R_\beta]$ avec des a_β entiers. Choisissons un R_γ dont la dimension est maximale parmi les dimensions des R_β figurant dans x. En évaluant $\varphi(x)$ en un point intérieur de R_β, on obtient $a_\beta = 0$. On conclut par une récurrence immédiate.

Remarque. La preuve ci-dessus montre que les relations de $\tilde{\Pi}(V)$ sont engendrées par les "relations élémentaires" $[P] = [P \cap H^+] + [P \cap H^-] - [P \cap H]$ pour $P \in \mathcal{P}(V)$ et pour H hyperplan de V.

Pour tout entier $k \geq 0$, notons $F_k\mathbf{Z}\mathcal{P}(V)$ le sous-groupe de $\mathbf{Z}\mathcal{P}(V)$ engendré par les polytopes de dimension au plus k. On définit ainsi des filtrations croissantes des algèbres $\tilde{\Pi}(V)$ et $\Pi(V)$. Grâce à la remarque ci-dessus, on montre que le groupe $\Pi(V)/F_{d-1}\Pi(V)$ a pour générateurs les polytopes de dimension d, et pour relations: $[P \cup Q] - [P] - [Q]$ avec P, Q polytopes de dimension d, tels que $P \cup Q$ est convexe et que $P \cap Q$ est contenu dans un hyperplan. Bien sûr, ce groupe joue un rôle essentiel dans les problèmes de décomposition des polyèdres ; pour ceux-ci, renvoyons à l'exposé de Cartier dans ce Séminaire (voir [Ca]).

L'application deg : $\mathbf{Z}\mathcal{P} \to \mathbf{Z}$ définie par $\deg(\sum n_P P) = \sum n_P$ est nulle sur les relations de $\tilde{\Pi}(V)$ et $\Pi(V)$. On peut donc définir des degrés sur $\tilde{\Pi}(V)$ et $\Pi(V)$; ce sont des homomorphismes d'anneaux.

Pour tout $P \in \mathcal{P}(V)$, on pose

$$[P]^* = \sum_{F \subset P} (-1)^{\dim(F)}[F]$$

c'est-à-dire: $[P]^* = (-1)^{\dim(P)}[P^0]$ grâce à l'identité (équivalente à la relation d'Euler): $\mathbf{1}_{P^0} = \sum_{F \subset P} (-1)^{\mathrm{codim}(F)}\mathbf{1}_F$. On vérifie que $*$ est un automorphisme involutif de $\tilde{\Pi}(V)$ et de $\Pi(V)$. Pour $\lambda \in \mathbf{R}$ non nul, on définit l'homothétie de

rapport λ, notée Ψ^λ, par:

$$\Psi^\lambda([P]) = \begin{cases} [\lambda P] & \text{si } \lambda > 0 \\ [-\lambda P]^* & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

On obtient ainsi un automorphisme de $\tilde{\Pi}(M)$ et de $\Pi(M)$; on pose: $\Psi^0 = \deg$. Voici une partie du résultat principal de McMullen.

THÉORÈME.— *Il existe une graduation* $\Pi(V) = \oplus_{k=0}^{d} \Pi_k$ *de l'anneau* $\Pi(V)$ *telle que* :

(i) $\Pi_0 = \mathbf{Z}$ et $\Pi_{\geq 1} = \Pi_1 \oplus \cdots \oplus \Pi_d$ *est le noyau de* deg.

(ii) *L'idéal* $\Pi_{\geq 1}$ *a une structure de* $\mathbf{R}$*-algèbre graduée, telle que pour tout* $k \geq 1$ *et pour tout* $x \in \Pi_k$, *on a :* $\Psi^\lambda(x) = \lambda^k x$.

(iii) *L'espace vectoriel réel* Π_d *est de dimension 1.*

En fait, un isomorphisme de Π_d sur $\mathbf{R}$ est donné par le volume, si on choisit une mesure de Lebesgue sur V.

4.2. L'anneau des polytopes entiers (voir [M1], [M2], [PK1])

Soit M un réseau dans V. On note $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des polytopes entiers. Comme en 4.1, on définit $\tilde{\Pi}(M)$ et son quotient $\Pi(M)$ par le sous-groupe engendré par les $[m + P] - [P]$ où $m \in M$ et $P \in \mathcal{P}(M)$. Les groupes abéliens $\tilde{\Pi}(M)$ et $\Pi(M)$ ont une structure d'anneau augmenté, muni d'une involution $*$.

On note $L(M)$ le sous-groupe de $L(V)$ engendré par les fonctions caractéristiques des éléments de $\mathcal{P}(M)$. *L'application naturelle de* $\tilde{\Pi}(M)$ *vers* $L(M)$ *est un isomorphisme.* Ce résultat, bien plus difficile que son analogue non entier, est démontré par Morelli, alors que Pukhlikov et Khovanskii travaillent directement dans $L(M)$.

Comme ci-dessus, l'homothétie de rapport n définit un endomorphisme Ψ^n de $\tilde{\Pi}(M)$ et de $\Pi(M)$, pour tout entier $n \neq 0$. Les résultats de McMullen s'étendent alors, pourvu que l'on remplace $\Pi(M)$ par son produit tensoriel avec $\mathbf{Q}$; de plus, l'application naturelle de $\Pi(M)$ dans $\Pi(V)$ est injective, voir [M1]. La graduation de $\Pi(V)$ induit donc une filtration décroissante de $\Pi(M)$, par le *poids*.

Voici un corollaire plus concret de ces résultats. Appelons *valuation* sur $\mathcal{P}(M)$ une application $v : \mathcal{P}(M) \to \Gamma$ où Γ est un groupe abélien, telle que: $v(P \cup Q) + v(P \cap Q) = v(P) + v(Q)$ si P, Q et $P \cup Q$ sont dans $\mathcal{P}(M)$. Soit v une

valuation, *invariante par translation par* M; soit $P \in \mathcal{P}(M)$. Alors l'application $v_P(n) : \mathbf{Z} \to \Gamma$ définie par

$$v_P(n) = \begin{cases} v(nP) & \text{si } n \geq 0 \\ (-1)^{\dim(P)} v(-nP^0) & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

est polynomiale de degré au plus d (voir [McSc]). En effet, une valuation invariante par translation, à valeurs dans Γ, n'est autre qu'un homomorphisme du groupe $\Pi(M)$ vers Γ, et de plus $v_P(n) = v(\Psi^n([P]))$. Un exemple de telle valuation est donné par: $v(P) = \text{card}(P \cap M)$; on retrouve ainsi les résultats d'Ehrhart.

On doit à Morelli la définition d'une structure de λ-anneau sur l'anneau des polytopes et sur son analogue entier. Cette structure éclaire certaines manipulations de séries formelles, qui jouent un rôle important dans les travaux de McMullen. Rappelons qu'un anneau A est un λ-*anneau* si l'on a des opérations $\lambda^n : A \to A$ pour tout entier $n \geq 0$, telles que :

(i) $\lambda^0(x) = 1$ et $\lambda^1(x) = x$

(ii) $\lambda^n(x+y) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i(x)\lambda^{n-i}(y)$.

Cela revient à dire que la série formelle

$$\lambda_t(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n(x) t^n \in A[[t]]$$

vit dans $1 + tA[[t]]$ et qu'elle vérifie: $\lambda_t(x+y) = \lambda_t(x) \cdot \lambda_t(y)$. Une *augmentation* du λ-anneau A est un morphisme $\varepsilon : A \to \mathbf{Z}$ de λ-anneaux, où la structure de λ-anneau sur $\mathbf{Z}$ est donnée par $\lambda_t(m) = (1+t)^m$ pour tout $m \in \mathbf{Z}$.

PROPOSITION.— *On a une unique structure de* λ*-anneau augmenté sur* $\tilde{\Pi}(M)$ *et* $\Pi(M)$, *telle que* $\lambda_t([P]) = 1 + t[P]$ *pour tout* $P \in \mathcal{P}(M)$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que la définition est compatible avec les relations de $\tilde{\Pi}(M)$, c'est -à-dire que

$$(1 + t[P])(1 + t[Q]) = (1 + t[P \cup Q])(1 + t([P \cap Q])$$

chaque fois que P, Q et $P \cup Q$ sont dans $\mathcal{P}(M)$. Les coefficients de t étant égaux par définition, il reste à montrer que $P + Q = (P \cup Q) + (P \cap Q)$. Mais si $p \in P$ et $q \in Q$ alors il existe $t \in [0,1]$ tel que $tp + (1-t)q \in P \cap Q$. D'où

$p+q = tp+(1-t)q+(1-t)p+tq \in (P\cap Q)+(P\cup Q)$. Réciproquement, il est clair que $(P\cap Q)+(P\cup Q)\subset P+Q$.

Dans tout λ-anneau, on peut définir inductivement des *opérations d'Adams* ψ^n pour $n\geq 1$ entier, par:

$$\psi^1(x)=x,\ \psi^n(x)-\psi^{n-1}(x)\lambda^1(x)+\cdots+(-1)^{n-1}\psi^1(x)\lambda^{n-1}(x)+(-1)^n n\lambda^n(x)=0\,.$$

D'après Morelli, ces opérations coïncident avec les Ψ^n définis ci-dessus; on retrouvera ce résultat en 4.5.

4.3. K-théorie équivariante pour les actions de tores (voir [Th])

Soit X une variété algébrique complexe. On note $K_0(X)$ le quotient du groupe abélien libre sur les faisceaux cohérents sur X, par les relations $[F]-[F']-[F'']$ chaque fois qu'on a une suite exacte $0\to F'\to F\to F''\to 0$. On définit de même le groupe $K^0(X)$ à partir des faisceaux cohérents localement libres sur X. Le produit tensoriel munit $K^0(X)$ d'une structure d'anneau, et $K_0(X)$ d'une structure de $K^0(X)$-module; le rang définit une augmentation $\mathrm{rg}: K^0(X)\to \mathbf{Z}$. Enfin, $K^0(X)$ est un λ-anneau augmenté (voir 4.2) pour les opérations définies par: $\lambda^n([\mathcal{E}])=\wedge^n\mathcal{E}$. La dualité définit un automorphisme involutif de $K^0(X)$, noté $*$.

Lorsque X est lisse, l'application naturelle $K^0(X)\to K_0(X)$ est un isomorphisme; voir [Bo-Se]. On écrit alors $K(X)$.

Supposons X munie d'une opération d'un tore T. A l'aide des faisceaux T-linéarisés, on définit comme ci-dessus des groupes abéliens $K_0^T(X)$ et $K_T^0(X)$, avec des structures analogues. Lorsque X est lisse, l'application $K_T^0(X)\to K_0^T(X)$ est un isomorphisme. La démonstration non équivariante s'adapte aisément, car X est recouverte par des ouverts affines stables par T; de plus, si U est un tel ouvert, alors $D:=X\setminus U$ est un diviseur, et le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$ admet une T-linéarisation.

Notons M le groupe des caractères de T. Pour tout $m\in M$, notons $[m]$ le faisceau inversible trivial sur X, dans lequel T opère par le poids m. Le produit tensoriel avec les $[m]$ définit une action du groupe M dans $K_0^T(X)$ et $K_T^0(X)$.

PROPOSITION.— *Soit X une variété lisse dans laquelle opère un tore T.*

(i) *L'application naturelle* $K^T(X) \to K(X)$ *est surjective, et elle identifie* $K(X)$ *aux co-invariants de* M *dans* $K^T(X)$.

(ii) *Si de plus* X *est projective et ne contient qu'un nombre fini* n *de points fixes de* T, *alors le* $\mathbf{Z}[M]$*-module* $K^T(X)$ *est libre de rang* n, *et les groupes abéliens* $K(X)$ *et* $A_*(X)$ *sont libres de rang* n.

(iii) *Notons* $i : X^T \to X$ *l'inclusion des points fixes de* T. *Sous les hypothèses de (ii), l'application* $i^* : K^T(X) \to K^T(X^T) \simeq \mathbf{Z}[M]^n$ *est injective; de plus,* i^* *est surjective après localisation en l'idéal d'augmentation de* $\mathbf{Z}[M]$.

Démonstration.— (i) Choisissons une base $(m_1, \ldots, m_d)$ du groupe abélien libre M, et faisons opérer linéairement T dans $\mathbf{C}^n$ avec les poids $m_1, \ldots, m_d$. Notons $\alpha : \mathbf{C}^{d-1} \to \mathbf{C}^d$ l'application $x \to (x, 0)$. Posons $U = \mathbf{C}^{d-1} \times \mathbf{C}^*$ et notons β l'inclusion de U dans $\mathbf{C}^d$. On a une suite exacte de M-modules

$$K^T(X \times \mathbf{C}^{d-1}) \to K^T(X \times \mathbf{C}^d) \to K^T(X \times U) \to 0$$

où la première flèche est $(\mathrm{id}, \alpha)_*$ et la seconde est $(\mathrm{id}, \beta)^*$. Grâce à l'isomorphisme de Thom, on en déduit une suite exacte de M-modules

$$K^T(X) \to K^T(X) \to K^T(X \times \mathbf{C}^*) \to 0$$

où la première flèche est la multiplication par $1 - [m_d]$. De plus, en notant S le noyau du caractère m_d, on peut identifier $K^T(X \times \mathbf{C}^*) = K^T(X \times T/S)$ avec $K^S(X)$. On conclut par récurrence sur d.

(ii) On peut trouver un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{C}^* \to T$ tel que les points fixes de l'image de λ soient exactement $x_1, \ldots, x_n$. Pour $1 \leq i \leq n$, on définit la cellule de x_i par

$$C_i := \{x \in X \mid \lim_{t \to 0} \lambda(t)x = x_i\} .$$

Chaque C_i est un espace affine; de plus, on peut ordonner les points fixes de façon que $\cup_{j=1}^{i} C_j$ soit ouvert pour $1 \leq i \leq n$ (voir [Bi1], [Bi2]). Il en résulte que le groupe abélien $A_*(X)$ est libre, avec pour base les $[\overline{C_i}]$; voir [Fu1] 19.1.11. Par suite, les $[\mathcal{O}_{\overline{C_i}}]$ engendrent librement le groupe $K(X)$ (cela résulte de [Fu1] 15.1.5 et 15.2.16).

Posons $X_i := \cup_{j=1}^{i} C_j$. Montrons par récurrence sur i que le $\mathbf{Z}[M]$-module $K^T(X_i)$ est libre, avec pour base les $[\mathcal{O}_{\overline{C_j}}]$ pour $1 \leq j \leq i$. En effet, la restriction au point fixe x_i induit un isomorphisme de $K^T(C_i)$ sur $K^T(\{x_i\}) = \mathbf{Z}[M]$. De plus, on a un isomorphisme de $\mathbf{Z}[M]$-modules:

$$K^T(X_i)/\alpha_* K^T(C_i) \simeq K^T(X_{i-1}),$$

où $\alpha : C_i \to X_i$ désigne l'inclusion. Enfin, la composition $\alpha^* \circ \alpha_* : K^T(C_i) \to K^T(C_i)$ est la multiplication par la classe d'Euler du fibré normal à C_i dans X_i. Celle-ci est non nulle dans $\mathbf{Z}[M]$; donc α_* est injective, ce qui termine la récurrence. La preuve de (iii) est analogue.

4.4. K-théorie équivariante des variétés toriques (voir [Kl], [M3]).

Soit Δ un éventail complet régulier de dimension d. De l'existence d'une subdivision projective régulière de Δ, il suit facilement que la proposition 4.3 s'étend à la variété torique complète X_Δ, avec $n = \mathrm{card}\Delta(d)$. On va préciser ce résultat, et décrire le λ-anneau $K^T(X_\Delta)$ en termes combinatoires.

Notons $L_\Delta(M)$ l'ensemble des familles $(f_\sigma)_{\sigma\in\Delta}$ où $f_\sigma \in \mathbf{Z}[M/\sigma^\perp]$ et $f_\sigma|\tau = f_\tau$ chaque fois que $\tau \subset \sigma$. On peut voir une telle famille comme une application "continue" de $\Delta(d)$ vers $\mathbf{Z}[M]$, où d désigne la dimension de Δ. Pour les opérations évidentes, $L_\Delta(M)$ est un anneau qui contient $\mathbf{Z}[M]$ (les applications constantes). Puisque $\mathbf{Z}[M]$ est l'anneau des représentations du tore T, c'est un λ-anneau pour les opérations de puissance extérieure. On étend cette structure à $L_\Delta(M)$, en posant: $\lambda^n((f_\sigma)_{\sigma\in\Delta}) = (\lambda^n(f_\sigma))_{\sigma\in\Delta}$.

PROPOSITION.— *Pour tout éventail Δ complet et régulier, on a un isomorphisme canonique (de λ-anneaux augmentés et de $\mathbf{Z}[M]$-modules) $\varphi : K^T(X_\Delta) \to L_\Delta(M)$.*

Démonstration.— Soit E un fibré vectoriel T-linéarisé sur X_Δ. Pour tout $\sigma \in \Delta(d)$, on note E_σ la restriction de E au point fixe de T dans X_σ. Chaque E_σ est un T-module rationnel de dimension finie, dont on note $\varphi_\sigma(E) \in \mathbf{Z}[M]$ le caractère. On vérifie que la famille $(\varphi_\sigma(E))_{\sigma\in\Delta(d)}$ s'étend en un (unique) $\varphi(E) \in L_\Delta(M)$. Il est clair que φ définit un homomorphisme de λ-anneaux $\varphi : K^T(X_\Delta) \to L_\Delta(M)$. Pour tout $x \in K^T(X_\Delta)$, la donnée de $\varphi(x)$ équivaut à celle de $i^*(x)$ où $i : X^T \to X$ désigne l'inclusion des points fixes de T. Ainsi, φ est injective. Pour tout

$f = (f_\sigma)_{\sigma\in\Delta} \in L_\Delta(M)$, on peut trouver $g \in \mathbf{Z}[M]$ tel que chaque $f_\sigma + g$ soit le caractère d'une représentation de T. D'où un T-module E_σ pour chaque $\sigma \in \Delta(d)$. Les faisceaux $\mathcal{O}_{X_\sigma} \otimes_{\mathbf{C}} E_\sigma$ se recollent en un faisceau $\mathcal{E}$, localement libre et T-linéarisé. De plus, on a: $\varphi(\mathcal{E}) = f + g$. Par suite, φ est surjective.

Puisque deux éventails quelconques ont une subdivision commune, la limite inductive des $L_\Delta(M)$ a un sens. En fait, $\varinjlim L_\Delta(M)$ *est isomorphe à l'anneau* $L(M)$ *engendré par les fonctions caractéristiques des polytopes entiers.*

En effet, pour tout élément $f = \sum_P a_P \mathbf{1}_P$ de $L(M)$, on peut trouver un éventail complet régulier Δ qui subdivise tous les Δ_P. Les fonctions d'appui H_P sont alors linéaires sur chaque cône de Δ: pour un tel cône σ, on a un $H_{P,\sigma} \in M/\sigma^\perp$. On peut alors définir $u(f) \in L_\Delta(M)$ par: $u(f)_\sigma = \sum a_P\, x^{H_P,\sigma}$ où (x^m) est la base canonique de $\mathbf{Z}[M/\sigma^\perp]$. On vérifie que u est bien défini et que c'est un isomorphisme; voir [M1], [PK1].

Observons que $(\varphi^{-1} \circ u)(\mathbf{1}_P)$ est l'image du fibré en droites T-linéarisé L_P. Via l'isomorphisme de $\tilde{\Pi}(M)$ sur $L(M)$ (voir [M1]), on en déduit le :

THÉORÈME.— *L'application* $[P] \to [L_P]$ *définit un isomorphisme de* λ*-anneaux augmentés et de* $\mathbf{Z}[M]$*-modules:* $\tilde{\Pi}(M) \to \varinjlim K^T(X_\Delta)$. *Cette application passe au quotient en un isomorphisme de* λ*-anneaux augmentés:* $\Pi(M) \to \varinjlim K(X_\Delta)$.

La seconde partie de l'énoncé résulte de la première en passant aux co-invariants de M, et en se souvenant de la proposition 4.3. Ce lien entre l'anneau des polytopes entiers et la K-théorie des variétés toriques, conduit par exemple à une preuve facile du résultat suivant, dû à Pukhlikov et Khovanskii (voir aussi [Mc2]).

Notons I l'idéal de $\tilde{\Pi}(M)$ formé des éléments de degré nul; notons J l'idéal de $\tilde{\Pi}(M)$ engendré par les $[P] - [P+m]$ où $P \in \mathcal{P}(M)$ et $m \in M$. Alors $I^{d+k} \subset J^k$ pour tout entier $k \geq 1$.

En effet, il suffit de montrer le même énoncé pour l'idéal d'augmentation I_Δ de $K^T(X_\Delta)$, et son idéal J_Δ engendré par les $1 - x^m$ $(m \in M)$. Pour tout $\sigma \in \Delta$, notons $F_\sigma \in K^T(X_\Delta)$ la classe du faisceau structural de V_σ. D'après 4.3, les F_σ engendrent le $\mathbf{Z}[M]$-module $K^T(X_\Delta)$. On en déduit que le groupe abélien I_Δ est engendré par J_Δ et par les F_σ où σ n'est pas vide. Mais puisque V_σ est intersection transverse des V_τ pour $\tau \in \sigma(1)$, on a: $F_\sigma = \prod_{\tau\in\sigma(1)} F_\tau$. Il suffit donc de montrer que pour tous éléments distincts $\tau_1, \ldots, \tau_p$ de $\Delta(1)$, et pour tous $a_1 \ldots, a_p$ entiers

positifs de somme $d+k$, on a: $F_{\tau_1}^{a_1} \cdots F_{\tau_p}^{a_p} \in J^k$. Mais le produit $F_{\tau_1} \cdots F_{\tau_p}$ vaut F_τ si $\tau_1, \ldots, \tau_p$ engendrent un cône τ de Δ, et 0 sinon. Dans le premier cas, écrivons: $F_{\tau_1}^{a_1} \cdots F_{\tau_p}^{a_p} = F_\tau \cdot x$ et observons que $x \in K^T(V_\tau)$ est dans la puissance $(d-p+k)$-ième de l'idéal d'augmentation. Comme $\dim(V_\tau) = d-p$, on conclut par récurrence sur d.

Ce résultat peut se reformuler de la façon suivante (voir [KK1]). Soit $v : \mathcal{P}(M) \to \Gamma$ une valuation polynomiale de degré au plus k (c'est-à-dire: l'unique extension de v à $\tilde{\Pi}(M)$ est nulle sur les puissances $(k+1)$-ièmes des éléments de degré nul). Alors l'application

$$n \in \mathbf{Z} \to v(\Psi^n[P]) = \begin{cases} v(nP) & \text{si } n \geq 0 \\ (-1)^{\dim(P)} v(nP^0) & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

est polynomiale, de degré au plus $d+k$.

4.5. Mise à jour du dictionnaire entre éventails et variétés toriques (voir [M1]).

On résume et on complète les résultats de 4.2 et 4.4. On désigne par X la "variété torique universelle" limite projective des variétés toriques complètes de dimension d.

polytope entier P	fibré en droites linéarisé L_P engendré par ses sections globales
nombre de points entiers dans P	caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(X, L_P)$
polynôme d'Ehrhart i_P	polynôme de Snapper-Kleiman $\chi(X, L_P^{\otimes n})$
loi de réciprocité	dualité de Serre
relation dans $\Pi(M)$:	suite exacte de fibrés linéarisés:
$[P] + [Q] = [P \cup Q] + [P \cap Q]$	$0 \to L_{P \cap Q} \to L_P \oplus L_Q \to L_{P \cup Q} \to 0$
somme de Minkowski $P+Q$	produit tensoriel $L_P \otimes L_Q$
$\tilde{\Pi}(M)$	K-théorie équivariante de X
λ-anneau des polytopes entiers $\Pi(M)$	λ-anneau de K-théorie de X
$\deg : \Pi(M) \to \mathbf{Z}$	$\mathrm{rg} : K(X) \to \mathbf{Z}$
homothéties Ψ^n	opérations d'Adams ψ^n
filtration de $\Pi(M)$ par la dimension	filtration de $K(X)$ par la dimension du support
filtration de $\Pi(M)$ par le poids	γ-filtration de $K(X)$

Faute de place et de compétence, on n'exposera pas les résultats de Morelli sur la classe de Todd des variétés toriques, ni ceux de Kantor-Khovanskii et Pukhlikov-Khovanskii sur le théorème de Riemann-Roch combinatoire; renvoyons le lecteur aux articles originaux ([KK1], [KK2], [M4], [PK2]).

BIBLIOGRAPHIE

[Bi1] A. Bialynicki-Birula: *Some theorems on actions of algebraic groups,* Ann. of Math. **98**, 480-497 (1973).

[Bi2] A. Bialynicki-Birula: *Some properties of the decomposition of algebraic varieties determined by actions of a torus,* Bull. Acad. Polo. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. **24**, 667-674 (1976).

[Bo-Se] A. Borel, J. P. Serre: *Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck),* Bull. Soc. Math. France **86**, 97-136, 1958.

[Ca] P. Cartier: *Décomposition des polyèdres: le point sur le troisième problème de Hilbert,* Sém. Bourbaki, exp. n° 646 (juin 1985), Astérisque **133-134**, 1986, 261-288.

[CaSh] S. E. Cappell, J. L. Shaneson: *Genera of algebraic varieties and counting of lattice points,* preprint 1993.

[Da] V. I. Danilov: *The geometry of toric varietes,* Russian Math. Surveys **33**, 97-154, 1978.

[Eh1] E. Ehrhart: *Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire I. Polyèdres et réseaux,* J. Reine Angew. Math. **226**, 1-29, 1967.

[Eh2] E. Ehrhart: *Nombre de points entiers d'un tétraèdre,* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 258, Série I, 3945-3948, 1964.

[Eh3] E. Ehrhart: *Démonstration de la loi de réciprocité pour le polyèdre convexe entier,* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 265, Série I, 5-7, 1967.

[Eh4] E. Ehrhart: *Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire,* International series of numerical mathematics **35**, Birkhäuser 1977.

[Fu1] W. Fulton: *Intersection theory,* Springer-Verlag 1984.

[Fu2] W. Fulton: *Introduction to toric varieties,* Annals of Mathematical Studies **131**, Princeton University Press 1993.

[Hi] T. Hibi: *Ehrhart polynomials of convex polytopes, h-vectors of simplicial*

complexes, and nonsingular projective toric varieties, dans: Discrete and computational geometry, 165-177, Amer. Math. Soc., Providence 1991.

[Ka] J. M. Kantor: *Sur le polynôme associé à un polytope à sommets entiers dans* $\mathbf{R}^n$, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 314, Série I, 669-672, 1992.

[KK1] J. M. Kantor, A. V. Khovanskii: *Integral points in convex polyhedra, combinatorial Riemann-Roch theorem and generalized Euler-MacLaurin formula*, prépublication de l'I.H.E.S., juin 1992.

[KK2] J. M. Kantor, A. V. Khovanskii: *Une application du théorème de Riemann-Roch combinatoire au polynôme d'Ehrhart des polytopes entiers de* $\mathbf{R}^d$, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 317, Série I, 501-507, 1993.

[Kl] A. A. Klyachko: *Vector bundles on Demazure models*, Sel. Math. Sov. **3**, 41-44, 1983/84.

[La] R. Laterveer: *Weighted complete intersections and lattice points*, preprint 1993.

[Mc1] P. McMullen: *The polytope algebra*, Adv. in Math. **78**, 76-130, 1989.

[Mc2] P. McMullen: *Valuations and dissections*, dans: Handbook of Convex Geometry, Volume B, 933-988, North-Holland 1993.

[McSc] P. McMullen, R. Schneider: *Valuations on convex bodies*, dans: Convexity and its applications, édité par P. M. Gruber et J. M. Wills, Birkhuser 1983.

[Mord] L. J. Mordell: *Lattice points in a tetrahedron and generalized Dedekind sums*, J. Indian Math. Soc. **15**, 41-46, 1951.

[M1] R. Morelli: *A theory of polyhedra*, Adv. in Math. **97**, 1-73, 1993.

[M2] R. Morelli: *Translation scissors congruence*, Adv. in Math. **100**, 1-27, 1993.

[M3] R. Morelli: *The K-theory of a toric variety*, Adv. in Math. **100**, 154-182, 1993.

[M4] R. Morelli: *The Todd class of a toric variety*, Adv. in Math. **100**, 182-231, 1993.

[Od] T. Oda: *Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of torus embeddings*, Springer-Verlag 1988.

[Pi] G. Pick: *Geometrisches zur Zahlenlehre*, Naturwiss. Z. Logos, Prag. 311-319, 1899.

[Po] J. E. Pommersheim: *Toric varieties, lattice points and Dedekind sums*, Math. Ann. **295**, 1-24, 1993.

[PK1] A. V. Pukhlikov, A. G. Khovanskii: *Finitely additive measures of virtual polytopes*, St. Petersburg Math. J. **4**, 337-356, 1993.

[PK2] A. V. Pukhlikov, A. G. Khovanskii: *A Riemann-Roch theorem for integrals and sums of quasipolynomials over virtual polytopes*, St. Petersburg Math. J. **4**, 789-812, 1993.

[Ra] H. Rademacher: *Generalization of the reciprocity formula for the Dedekind sums*, Duke Math. J. **21**, 391-398, 1954.

[RaGr] H. Rademacher, E. Grosswald: *Dedekind sums*, Carus Math. Monogr. **16**, Washington, Mathematical Association of America 1972.

[Re] J. E. Reeve: *On the volume of lattice polyhedra*, Proc. London Math. Soc. (3) **7**, 378-395, 1957.

[St] R. P. Stanley: *On the Hilbert function of a graded Cohen-Macaulay domain*, J. Pure Appl. Alg. **73**, 307-314, 1991.

[Te] B. Teissier: *Variétés toriques et polytopes*, Sém. Bourbaki, exp. n° 565 (novembre 1980), Lect. Notes in Math. **901**, 1981, 71-84.

[Th] R. W. Thomason: *Algebraic K-theory of group scheme actions*, dans: Algebraic topology and algebraic K-theory, 539-563, Annals of Math. Studies **113**, 1987, Princeton Univ. Press.

Michel BRION

École Normale Supérieure
46, allée d'Italie
F–69364 LYON CEDEX 07

Astérisque

PIERRE CARTIER

La théorie des blocs et les groupes génériques

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 781, p. 171-208

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__171_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Mars 1994
46ème année, 1993-94, n° 781

LA THÉORIE DES BLOCS ET LES GROUPES GÉNÉRIQUES

par **Pierre CARTIER**[1][2]

> Historiquement, ceux de ces groupes qui se sont introduits d'abord sont relatifs au cas où le "corps de base"... est le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes... Mais l'Algèbre moderne entend aborder la question de plus haut... [avec] des méthodes purement algébriques, dégagées de tout recours à l'idée de continuité.
>
> Jean DIEUDONNÉ

INTRODUCTION

L'admonestation ci-dessus est tirée de l'introduction à l'ouvrage "Sur les groupes classiques". Elle n'a pas empêché la théorie des groupes de se développer sur le modèle des groupes de Lie et de bénéficier de l'héritage d'Élie Cartan. Le recours à l'idée de continuité, bien que souvent non explicité, est resté l'un des moteurs, même si les méthodes purement algébriques occupent le devant de la scène.

La première étape du développement a été la construction des groupes généralisant les groupes classiques, et l'étude de leur structure. La notion unificatrice est celle de *groupe algébrique*, introduite par Chevalley et Borel dans les années 50, et développée par ces auteurs en collaboration avec Bruhat, Springer, Steinberg et

(1) Je remercie les membres de l'Équipe des Groupes Finis, qui sont le terreau naturel des recherches décrites ici, et plus particulièrement Anne-Marie Aubert pour sa collaboration efficace à la préparation de cet exposé.
(2) Texte remanié en octobre 1994.

Tits en particulier. On sait que la classification des groupes algébriques simples est le même que celle découverte par Killing et Cartan (vers 1895) dans le cas du corps des nombres complexes.

Grothendieck et Demazure [A7] ont dégagé la notion de *donnée radicielle* qui code de manière combinatoire la structure des *groupes réductifs* (un peu plus généraux que les groupes semi-simples). A une telle donnée radicielle $(X, X^\vee, R, R^\vee)$ est associé un *groupe de Weyl* W. Un tel groupe est un groupe fini de transformations linéaires dans un espace vectoriel euclidien (réel) E de dimension finie qui possède deux propriétés :

— il est engendré par des réflexions s_H par rapport à des hyperplans H ;

— il laisse invariant un réseau X de E.

On peut considérer diverses généralisations de ces groupes de Weyl : par exemple, les groupes finis de transformations linéaires *complexes* engendrés par des *pseudo-réflexions*. Ces groupes ont été classés par Shephard et Todd [C5] ; la plupart des propriétés des groupes de Weyl s'étendent à eux.

La notion de donnée radicielle a subi plusieurs généralisations. Le groupe de Weyl est devenu infini dans certains cas, et le réseau X (un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini) est devenu un module sur $\mathbf{Z}(\sqrt{p})$ (p premier) entre les mains de J.-Y. Hée[(1)]. Ces généralisations ont été motivées par les développements explosifs de la théorie des groupes de Lie survenus récemment : algèbres de Kač-Moody, et en particulier algèbres de Lie affines, (k-σ)-groupes de Hée, groupes quantiques...

Dans un groupe réductif G, on considère de nombreux types de sous-groupes : tores, tores maximaux, sous-groupes de Levi, sous-groupes de Borel, sous-groupes paraboliques et leurs radicaux unipotents, normalisateurs des tores... Un dictionnaire précis permet de traduire chacune de ces notions dans le cadre des données radicielles. Si le corps de base K n'est pas algébriquement clos, il y a lieu de considérer aussi les *formes tordues* de ces groupes. Supposons K parfait pour simplifier ; notons $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, et Γ le groupe de Galois de $\overline{K}$ sur K. Notons aussi $W(R)$ le groupe de Weyl du système de racines R, et $A(R)$ le groupe des automorphismes de la donnée radicielle $(X, X^\vee, R, R^\vee)$. Les formes tordues sont classifiées par les homomorphismes continus de Γ dans $A(R)/W(R)$.

(1) Voir en particulier J.-Y. Hée, Systèmes de racines sur un anneau commutatif totalement ordonné, *Geom. Dedicata* **37** (1991), 65-102.

Cela s'applique en particulier lorsque K est le corps réel $\mathbf{R}$, un corps p-adique, ou un corps fini.

Arrêtons-nous au cas des corps finis. Considérons d'abord un groupe non tordu (ou "déployé") G sur le corps $\mathbf{F}_q$, correspondant à une donnée radicielle $(X, X^\vee, R, R^\vee)$. Le groupe $G(\mathbf{F}_q)$ des points rationnels (noté aussi G^F) a un ordre qui s'exprime comme un *polynôme en* q ; par exemple, l'ordre de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$ est $q^N \prod_{i=1}^n (q^i - 1)$ où $N = \frac{n(n-1)}{2}$. De manière générale, *ce polynôme en* q *ne dépend que de l'action du groupe de Weyl* $W = W(R)$ *dans l'espace vectoriel complexe* $X_{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} X$. Par exemple, les groupes orthogonaux $SO_{2m+1}(\mathbf{F}_q)$ et symplectiques $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbf{F}_q)$ ont le même ordre car ils correspondent à des groupes de Weyl isomorphes, bien que les données radicielles soient distinctes. Pour l'ordre des groupes tordus, on a une formule analogue, mais où interviennent l'action du groupe de Weyl W dans $X_{\mathbf{C}}$ et l'image Φ dans $A(R)/W$ de l'automorphisme de Frobenius $x \mapsto x^q$ de $\overline{\mathbf{F}}_q$ sur $\mathbf{F}_q$ (rappelons que c'est un générateur topologique du groupe de Galois de $\overline{\mathbf{F}}_q$ sur $\mathbf{F}_q$). En fait, $A(R)$ est contenu dans le normalisateur $\widehat{W}$ de W dans $\mathrm{GL}(X_{\mathbf{C}})$ et lui est presque toujours égal (dans le cas d'un groupe semi-simple). Pour couvrir le cas des groupes de Suzuki et Ree, il faut permettre à Φ d'appartenir à $\widehat{W}/W$ et simultanément d'admettre que q est de la forme $p^{m+1/2}$ avec m entier positif, et p égal à 2 ou 3.

Nous renvoyons à notre exposé précédent [B3] pour la description détaillée des caractères irréductibles des groupes réductifs finis de la forme $G(\mathbf{F}_q)$. Retenons simplement que le plus difficile est la détermination des *caractères unipotents.* Ceux-ci s'obtiennent par décomposition des caractères de Deligne-Lusztig $R_{w\phi}^{G^F}$, y compris la série principale obtenue par décomposition de la représentation de permutation naturelle de $G(\mathbf{F}_q)$ sur $G(\mathbf{F}_q)/B(\mathbf{F}_q)$ (on a noté B un sous-groupe de Borel de G). La théorie de l'*induction à la Harish-Chandra* [B6] permet de classer ces caractères unipotents en *familles correspondant aux sous-groupes de Levi* L *dont le centre connexe est un tore déployé.* La description complète des caractères unipotents, de leur répartition en familles, se fait au moyen d'une combinatoire qui ne dépend que de la donnée radicielle $(X, X^\vee, R, R^\vee)$. En fait, comme le montre une coïncidence inattendue entre caractères unipotents des groupes $SO_{2m+1}(\mathbf{F}_q)$ et $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbf{F}_q)$, pour l'essentiel, *tout ne dépend que du groupe de Weyl* W (et accessoirement de l'élément Φ de $\widehat{W}/W$ dans le cas tordu). Ceci s'étend aux degrés de

ces caractères, qui sont des polynômes en q ne dépendant aussi que du groupe de Weyl W. Il en est de même des algèbres de Iwahori-Hecke $\mathcal{H}(W,q)$ qui interviennent dans l'étude de la décomposition des caractères $R_{w\phi}^{G^F}$.

On est donc conduit à penser à la donnée radicielle $(X, X^\vee, R, R^\vee)$ comme définissant un "*groupe générique*" $\mathbf{G}(x)$ où x est une indéterminée. Il s'agit d'une machine qui, lorsque l'on fournit un corps $\mathbf{F}$ algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et une puissance entière[1] q de p (qui n'intervient que par l'automorphisme de Frobenius $x \mapsto x^q$ de $\mathbf{F}$), fabrique par la substitution $x \leftarrow q$ un groupe fini $\mathbf{G}(q)$, ses caractères unipotents, etc.

La constatation la plus étonnante concerne la *théorie des blocs*. Lorsque G est un groupe fini, à tout nombre premier ℓ divisant l'ordre $|G|$ du groupe, on associe une partition en ℓ-blocs des caractères irréductibles de G. L'étude des blocs pour les groupes linéaires $\mathrm{GL}_n(q)$[2] et unitaires $U_n(q^2)$ finis a été entreprise par Fong et Srinivasan [D11] en 1982, puis reformulée par Broué et Puig dans un exposé [D2] du Séminaire Bourbaki. Les progrès ont été ensuite rapides, et l'on connaît aujourd'hui l'essentiel de la répartition en blocs des caractères unipotents pour les groupes réductifs finis (voir [D8] à [D15] et [D19]).

Reprenons l'exemple des groupes $\mathrm{GL}_n(q)$. Le "groupe générique" correspondant $\mathbf{G}(x) = \mathrm{GL}_n(x)$ a pour ordre

$$x^N \prod_{i=1}^{n} (x^i - 1) = x^N \prod_{d|n} \Phi_d(x)^{[\frac{n}{d}]}$$

(qui redonne l'ordre connu de $\mathrm{GL}_n(q)$ par la substitution $x \leftarrow q$). On a noté $\Phi_d(x)$ le polynôme cyclotomique[3] de degré d ; tout comme $\Phi_1(x) = x - 1$, c'est un polynôme irréductible dans $\mathbf{Q}[x]$. La décomposition précédente apparaît donc comme une décomposition en facteurs premiers de l'ordre de $\mathbf{G}(x)$. Soit ℓ un

[1] Dans le cas des groupes de Suzuki et Ree, on a $q = p^{m+1/2}$, et pour définir x^q, il faut disposer d'une puissance $x^{\sqrt{p}}$, c'est-à-dire d'un automorphisme θ de $\mathbf{F}'$ tel que $\theta(\theta(x)) = x^p$. On a noté $\mathbf{F}'$ la réunion des extensions finies de degré impair de $\mathbf{F}_p$. Hée a beaucoup développé ce point de vue (voir la note précédente).

[2] Autre nom du groupe $GL_n(\mathbf{F}_q)$!

[3] On rappelle la définition par récurrence de ces polynômes : $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$.

nombre premier distinct de la caractéristique p, tel que $\ell > n$ (c'est-à-dire ne divisant pas l'ordre $n!$ du groupe de Weyl $W = S_n$), et divisant $|\mathrm{GL}_n(q)|$ pour un q fixé. Il existe un unique polynôme cyclotomique $\Phi_d(x)$ tel que ℓ divise $\Phi_d(q)$. *La répartition des caractères unipotents de* $\mathrm{GL}_n(q)$ *selon les* ℓ*-blocs ne dépend que du polynôme cyclotomique* $\Phi_d(x)$ *tel que* ℓ *divise* $\Phi_d(q)$. Il est donc légitime de parler des Φ_d*-blocs de caractères unipotents.*

Mais la notion de ℓ-bloc dans un groupe fini n'est qu'un des aspects de la théorie locale (voir la première partie) ; cette théorie s'occupe aussi des ℓ-sous-groupes, des sous-groupes de Sylow, des groupes de défaut des blocs. En fait, toute la théorie ℓ-locale du groupe $\mathrm{GL}_n(q)$ ne dépend que du polynôme cyclotomique Φ_d attaché à ℓ (c'est-à-dire de l'ordre d de q dans le groupe cyclique $(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^\times$). Le fait que les ℓ-sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(q)$ soient commutatifs simplifie beaucoup les choses.

Depuis une quinzaine d'années, M. Broué poursuit, avec Ll. Puig et leurs collaborateurs, le développement d'une théorie locale des groupes finis, reformulant les résultats de Brauer. Il a peu à peu dégagé d'ambitieuses conjectures sur les blocs à groupe de défaut abélien : à un ℓ-bloc b est associée une algèbre $B = \mathcal{O}Ge_b$ sur un anneau d'entiers ℓ-adiques $\mathcal{O}$ et l'objet essentiel est la catégorie ${}_B\mathbf{mod}$ des B-modules (à gauche, de type fini), et même mieux la catégorie dérivée bornée $\mathcal{D}^b({}_B\mathbf{mod})$. Une partie importante de la théorie consiste en des équivalences entre de telles catégories dérivées, généralisant l'équivalence de Morita[1] ; Broué [E3,E4] et Rickard ([E13] à [E16]) ont étudié à fond ces aspects.

Par ailleurs, l'induction à la Deligne-Lusztig, utilisant la cohomologie ℓ-adique d'une certaine variété, peut être étendue en un foncteur entre catégories dérivées. Les conjectures générales de Broué suggèrent donc toute une série d'énoncés sur les blocs des caractères unipotents des groupes réductifs finis. Tous ces énoncés ont une version "générique" en termes de combinatoire des données radicielles. Le volume 212 d'Astérisque[2], paru récemment, contient les résultats de Broué, Malle, Michel (et Lusztig) sur les blocs "génériques". De nouvelles algèbres apparaissent : les *algèbres de Hecke cyclotomiques* ; elles jouent par rapport aux groupes

[1] Inventée précisément par Morita pour des problèmes liés à la théorie de Brauer des caractères.

[2] Intitulé "Représentations unipotentes génériques et blocs des groupes réductifs finis".

engendrés par des pseudo-réflexions le rôle joué par les algèbres d'Iwahori-Hecke $\mathcal{H}(W,q)$ pour les groupes de Weyl. Deux faits frappants :

— La plupart des énoncés gardent un sens pour des groupes qui ne sont plus cristallographiques ; ils ont été testés (souvent avec l'aide d'ordinateurs).

— La spécialisation $q \leftarrow 1$ dans $\mathcal{H}(W,q)$ redonne l'algèbre du groupe de Weyl $\mathbf{Q}W$. Ici, *il faut spécialiser q en une racine de l'unité ζ.*

Il existe donc des objets plus généraux que les groupes génériques, associés aux groupes de pseudo-réflexions et baptisés provisoirement "spetsoïdes" (??). Par ailleurs, la spécialisation $q \leftarrow \zeta$ rappelle les groupes quantiques. A quand et comment la synthèse ?

PREMIÈRE PARTIE :
THÉORIE LOCALE DES GROUPES FINIS

1.1. Résumé de la théorie des caractères

On note G un groupe fini et $|G|$ son ordre. L'*exposant* de G est le plus petit entier $m > 0$ tel que l'on ait $g^m = 1$ pour tout élément g de G. On considère un corps K de caractéristique 0, dans lequel le polynôme $X^m - 1$ se décompose en produit de facteurs linéaires.

Une *représentation linéaire* du groupe G dans un espace vectoriel V, de dimension finie sur K, est un homomorphisme $g \mapsto g_V$ de G dans le groupe $GL(V)$ des automorphismes de V. Introduisons l'*algèbre du groupe* KG, qui a pour base les éléments de G, et dont la multiplication bilinéaire étend celle de G. Il revient au même de considérer les représentations de G, ou les KG-modules (à gauche, de dimension finie sur K). Le *caractère* χ_V d'une représentation linéaire de G dans l'espace V est la fonction $g \mapsto \mathrm{Tr}(g_V)$ sur G. Deux représentations sont isomorphes si et seulement si elles ont même caractère. On note $\mathrm{Irr}_K(G)$ l'ensemble des *caractères irréductibles* de G, c'est-à-dire ceux des représentations irréductibles de G.

On note ZKG le *centre* de l'algèbre KG ; comme espace vectoriel sur K, il admet la base formée des éléments $z_C = \sum_{g \in C} g$ où C parcourt l'ensemble des classes de conjugaison du groupe G. L'algèbre commutative ZKG est *diagonalisable* au sens de Bourbaki, Algèbre 5, page V.28, c'est-à-dire isomorphe à K^h, où

h est le nombre de classes de conjugaison de G.

Pour tout caractère irréductible χ, on pose :

$$e_\chi = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) \, . \, g. \tag{1}$$

Ces éléments e_χ forment une base de ZKG et satisfont aux propriétés suivantes :

a) on a $e_\chi^2 = e_\chi$, autrement dit, e_χ est *idempotent* ;

b) pour $\chi \neq \chi'$, on a $e_\chi e_{\chi'} = 0$, et donc e_χ et $e_{\chi'}$ sont *orthogonaux* ;

c) on ne peut pas décomposer e_χ en somme de deux idempotents orthogonaux, et donc e_χ est *primitif* ;

d) on a $\Sigma_\chi \, e_\chi = 1$ (décomposition de l'unité).

Tout élément z de ZKG se développe dans la base précédente sous la forme :

$$z = \sum_\chi u_\chi(z) \, . \, e_\chi \ ; \tag{2}$$

l'application $\chi \mapsto u_\chi$ est une bijection de $\mathrm{Irr}_K(G)$ sur l'ensemble des homomorphismes d'algèbres de ZKG dans K. En particulier, on a :

$$u_\chi(z_C) = |C| \, \chi(g)/\chi(1) \tag{3}$$

pour toute classe de conjugaison C, et tout élément g de C. L'application $\chi \mapsto \mathrm{Ker}\,(u_\chi)$ est une bijection de $\mathrm{Irr}_K(G)$ sur le *spectre*[1] $\mathrm{Spec}(ZKG)$ de l'algèbre ZKG.

Pour tout χ dans $\mathrm{Irr}_K(G)$, choisissons une représentation irréductible de G dans un espace V_χ, de caractère χ. L'homomorphisme naturel de KG dans $\mathrm{End}(V_\chi)$ définit un isomorphisme d'algèbres de $KG\,e_\chi$ sur $\mathrm{End}(V_\chi)$. De plus, on a $KG = \bigoplus_\chi KG\,e_\chi$, d'où un isomorphisme d'algèbres de KG avec $\prod_\chi \mathrm{End}(V_\chi)$.

Le *groupe de Grothendieck* $R_K(G)$ est le $\mathbf{Z}$-module libre ayant pour base l'ensemble des caractères irréductibles de G. Ses éléments s'appellent parfois "caractères virtuels", ou simplement "caractères". On le munit du produit scalaire usuel :

$$\langle \chi, \chi' \rangle = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \chi(g) \, \chi'(g^{-1}) \ ; \tag{4}$$

[1] Le spectre $\mathrm{Spec}(A)$ d'un anneau commutatif A est l'ensemble de ses idéaux premiers.

si V et V' sont deux KG-modules, on a :

$$\langle \chi_V, \chi_{V'} \rangle = \dim_K \mathrm{Hom}_{KG}(V, V'), \tag{5}$$

et en particulier $\mathrm{Irr}_K(G)$ est une base orthonormale de $R_K(G)$. Pour qu'un élément χ de $R_K(G)$ satisfasse à $\langle \chi, \chi \rangle = 1$, il faut et il suffit que χ ou $-\chi$ appartienne à $\mathrm{Irr}_K(G)$.

1.2. Définition des p-blocs

On choisit un anneau de valuation discrète $\mathcal{O}$ ayant K pour corps des fractions, et dont le corps des restes $k = \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ est de caractéristique $p > 0$. Voici les deux cas les plus importants :

1) K est le corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\zeta)$ avec $\zeta = e^{2\pi i/m}$ (où m est l'exposant de G), A est l'anneau des entiers $\mathbf{Z}[\zeta]$, $\mathcal{O}$ est le localisé de A en un idéal premier contenant le nombre premier p.

2) K est une extension finie du corps p-adique $\mathbf{Q}_p$ et $\mathcal{O}$ est la fermeture intégrale de $\mathbf{Z}_p$ dans K.

Le sous-$\mathcal{O}$-module de KG engendré par G est l'algèbre $\mathcal{O}G$ du groupe G sur $\mathcal{O}$; son centre $Z\mathcal{O}G$ a pour base sur $\mathcal{O}$ la famille des z_C. Comme $Z\mathcal{O}G$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}$, et que $\mathcal{O}$ est intégralement clos, on a $u_\chi(Z\mathcal{O}G) \subset \mathcal{O}$ pour tout caractère irréductible χ. On déduit de là diverses propriétés arithmétiques des caractères irréductibles :

a) *pour tout g dans G, $\chi(g)$ est somme de racines m-ièmes de l'unité et appartient donc à $\mathcal{O}$;*

b) *si C est la classe de conjugaison d'un élément g de G, $|C|\,\chi(g)/\chi(1)$ appartient à $\mathcal{O}$ d'après la formule* (3) ;

c) *le degré $\chi(1)$ du caractère χ divise l'ordre $|G|$ du groupe G.*

On dispose d'homomorphismes canoniques

$$K \xleftarrow{j} \mathcal{O} \xrightarrow{\varphi} k,$$

où j est l'inclusion et φ la réduction modulo $\mathfrak{p}$. On en déduit des homomorphismes[(1)] :

$$KG \xleftarrow{j} \mathcal{O}G \xrightarrow{\varphi} kG \quad \text{et} \quad ZKG \xleftarrow{j} Z\mathcal{O}G \xrightarrow{\varphi} ZkG.$$

[(1)] Bien entendu, kG désigne l'algèbre du groupe G sur le corps k, et ZkG son centre.

A tout homomorphisme d'anneaux commutatifs $u : A \to B$ est associée une application $\mathfrak{q} \mapsto u^{-1}(\mathfrak{q})$ de $\mathrm{Spec}(B)$ dans $\mathrm{Spec}(A)$. De ce qui précède, on déduit une *application de* $\mathrm{Spec}(ZKG) \amalg \mathrm{Spec}(ZkG)$ *dans* $\mathrm{Spec}(Z\mathcal{O}G)$,dont on prouve que *c'est une bijection.* De manière plus précise, appelons *bloc* (ou p-bloc) un idéal premier b de ZkG ; ces blocs correspondent bijectivement aux homomorphismes de k-algèbres $u_b : ZkG \to k$ par $b = \mathrm{Ker}\, u_b$. On énumère alors les idéaux premiers de $Z\mathcal{O}G$ sous la forme :

$$\mathfrak{p}_\chi = \mathrm{Ker}\,(u_\chi \circ j) \quad , \quad \mathfrak{m}_b = \mathrm{Ker}\,(u_b \circ \varphi)$$

pour χ parcourant $\mathrm{Irr}_K(G)$ et b parcourant le spectre de ZkG. Les idéaux premiers $\mathfrak{p}_\chi$ sont minimaux et les $\mathfrak{m}_b$ maximaux. Si χ est un caractère irréductible, $\mathfrak{p}_\chi$ est contenu dans un unique idéal $\mathfrak{m}_b$ caractérisé par $u_b = \varphi \circ u_\chi$, et l'on dit que χ *appartient au bloc* b ; on définit ainsi une partition de $\mathrm{Irr}_K(G)$ en blocs $\mathrm{Irr}_K(G, b)$. De la relation (3), on déduit le critère suivant : *deux caractères* χ *et* χ' *appartiennent au même bloc si et seulement si les éléments* $|C|\chi(g)/\chi(1)$ *et* $|C|\chi'(g)/\chi'(1)$ *de* $\mathcal{O}$ *sont congrus modulo* $\mathfrak{p}$ *pour toute classe de conjugaison* C *et tout élément* g *de* C.

Pour indexer de manière canonique les caractères, il faut raisonner dans le corps $K_m = \mathbf{Q}(e^{2\pi i/m})$. D'après nos hypothèses, il existe un isomorphisme θ de K_m sur un sous-corps de K ; l'application $\chi \mapsto \theta \circ \chi$ est alors une bijection $\widehat{\theta}$ de $\mathrm{Irr}_{K_m}(G)$ sur $\mathrm{Irr}_K(G)$. Un argument simple de théorie de Galois montre qu'il existe une décomposition en blocs de $\mathrm{Irr}_{K_m}(G)$, *ne dépendant que de* p, et que $\widehat{\theta}$ transporte en la décomposition en blocs décrite pour $\mathrm{Irr}_K(G)$.

Les idempotents de ZKG correspondent aux parties S de $\mathrm{Irr}_K(G)$ par la formule $e_S = \sum_{\chi \in S} e_\chi$. Les idempotents de $Z\mathcal{O}G$ sont les e_S appartenant à $Z\mathcal{O}G$, c'est-à-dire dont les coordonnées dans la base des z_C appartiennent à $\mathcal{O}$. En particulier, pour chaque bloc b, la somme e_b des e_χ, pour χ parcourant $\mathrm{Irr}_K(G, b)$, est un idempotent primitif de $Z\mathcal{O}G$; ces idempotents sont deux à deux orthogonaux, de somme 1, et tout idempotent de $Z\mathcal{O}G$ est somme de certains des e_b.

La décomposition de l'unité $1 = \sum_b e_b$ correspond à des décompositions d'anneaux en produit direct

$$Z\mathcal{O}G = \bigoplus_b Z\mathcal{O}G\, e_b \quad , \quad \mathcal{O}G = \bigoplus_b \mathcal{O}G\, e_b.$$

Si M est un $\mathcal{O}G$-module, on a $M = \bigoplus_b e_b M$; on dit que M appartient au bloc b si l'on a $e_b M = M$. La catégorie des $\mathcal{O}G$-modules se décompose ainsi en produit de catégories correspondant aux divers blocs.

1.3. Représentations en caractéristique p et matrice de décomposition

Nous étudions maintenant les représentations de G sur le corps k de caractéristique p, c'est-à-dire les kG-modules (de dimension finie sur k). Notons $\overline{e}_b$ la réduction modulo $\mathfrak{p}$ de l'idempotent e_b de $Z\mathcal{O}G$ associé au bloc b. On prouve que les $\overline{e}_b$ sont des idempotents primitifs de ZkG, deux à deux orthogonaux, de somme 1. Par suite, on a des décompositions en blocs des anneaux ZkG et kG et de la catégorie des kG-modules. Cependant, les $\overline{e}_b$ ne forment pas une base de ZkG sur k.

Notons $\mathrm{Irr}_k(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de kG-modules simples, et $R_k(G)$ le $\mathbf{Z}$-module libre de base $\mathrm{Irr}_k(G)$. On note $[S]$ la classe d'isomorphisme d'un kG-module simple S ; si M est un kG-module, on lui associe l'élément $[M] = \sum_{i=1}^{r} [M_{i-1}/M_i]$ de $R_k(G)$, qui ne dépend pas de la suite de Jordan-Hölder choisie $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_{r-1} \supset M_r = 0$. Soit S un kG-module simple ; l'*enveloppe projective* P_S de S est un kG-module projectif indécomposable qui possède un kG-homomorphisme non nul dans S ; ces propriétés caractérisent P_S à un isomorphisme près. *L'endomorphisme de Cartan* est l'endomorphisme c de $R_k(G)$ qui applique $[S]$ sur $[P_S]$ pour tout kG-module simple S ; dans la base naturelle de $R_k(G)$, il se traduit par la *matrice de Cartan* $C = (c_{S,T})$ caractérisée par :

$$[P_S] = \sum_T c_{ST}\,[T]. \tag{6}$$

On peut comparer les représentations en caractéristique 0 et en caractéristique p. En effet, soit V un KG-module. Dans V, on peut trouver un réseau[1] invariant par G ; c'est donc un $\mathcal{O}G$-module M et $M/\mathfrak{p}M$ est un kG-module. L'élément $[M/\mathfrak{p}M]$ de $R_k(G)$ ne dépend que de V et non de M ; l'*homomorphisme de décomposition* $d : R_K(G) \to R_k(G)$ transforme χ_V en $[M/\mathfrak{p}M]$ et il correspond à

[1] Autrement dit, un $\mathcal{O}$-module de la forme $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}e_i$ où $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de V sur K.

une *matrice de décomposition* $(d_{\chi,S})$ par

$$d(\chi) = \sum_S d_{\chi,S}[S] \tag{7}$$

pour χ dans $\mathrm{Irr}_K(G)$.

Il est important de connaître la matrice de décomposition associée au nombre premier p ; voir Serre [A18, page 165] pour des exemples. Elle détermine la matrice de Cartan par la formule :

$$c_{S,T} = \sum_\chi d_{\chi,S}\, d_{\chi,T}. \tag{8}$$

Elle détermine aussi la décomposition en blocs. Un kG-module simple S appartient à un bloc b unique caractérisé par la relation $\overline{e}_b S = S$. On définit ainsi une partition de $\mathrm{Irr}_k(G)$ en blocs $\mathrm{Irr}_k(G,b)$. Introduisons un graphe Γ ayant $\mathrm{Irr}_K(G) \amalg \mathrm{Irr}_k(G)$ comme ensemble de sommets et une arête pour chaque couple (χ, S) tel que $d_{\chi,S} \neq 0$. Alors les composantes connexes de Γ sont les ensembles $\Gamma_b = \mathrm{Irr}_K(G,b) \amalg \mathrm{Irr}_k(G,b)$ correspondant aux blocs b.

1.4. Caractères projectifs

Soit S un kG-module simple. Le kG-module projectif indécomposable P_S se relève à $\mathcal{O}$; de manière précise, il existe un $\mathcal{O}G$-module projectif indécomposable M_S tel que $M_S/\mathfrak{p}M_S$ soit isomorphe à P_S. À isomorphisme près, M_S ne dépend que de la classe d'isomorphie de S, et tout $\mathcal{O}$-module projectif indécomposable est isomorphe à l'un des M_S. On note Φ_S le caractère du KG-module $K \otimes_{\mathcal{O}} M_S$. La matrice de décomposition reparaît dans les deux formules équivalentes :

$$d_{\chi,S} = \langle \chi, \Phi_S \rangle, \tag{9}$$

$$\Phi_S = \sum_\chi d_{\chi,S}\, \chi \tag{10}$$

(où χ parcourt $\mathrm{Irr}_K(G)$ et S parcourt $\mathrm{Irr}_k(G)$). Quant à la matrice de Cartan, on traduit la formule (8) comme suit :

$$c_{S,T} = \langle \Phi_S, \Phi_T \rangle. \tag{11}$$

On dit qu'un élément de G est *p-régulier* si son ordre n'est pas divisible par p ; on note $G_{p'}$ l'ensemble de ces éléments et les éléments restants de G sont dits *p-singuliers*. Soit S un kG-module simple ; on définit comme suit le *caractère de Brauer* φ_S de S. C'est une fonction sur G à valeurs dans $\mathcal{O}$, nulle sur l'ensemble des éléments p-singuliers ; si g est p-régulier, l'application linéaire $g_S : S \to S$ est diagonalisable et ses valeurs propres $\varpi_1, \cdots, \varpi_r$ sont des racines de l'unité d'ordre non divisible par p. Chacune de ces racines ϖ_j se relève de manière unique en une racine de l'unité ω_j de même ordre dans $\mathcal{O}$, et l'on pose :

$$\varphi_S(g) = \omega_1 + \cdots + \omega_r \tag{12}$$

(*cf.* Serre [A18, page 139]). On a la relation d'orthogonalité :

$$\langle \Phi_S, \varphi_T \rangle = \delta_{ST} \ ; \tag{13}$$

on retrouve la matrice de Cartan par la relation :

$$\Phi_S = \sum_T c_{S,T}\, \varphi_T. \tag{14}$$

Les éléments Φ_S appartiennent à $R_K(G)$ d'après la formule (10), puisque les $d_{\chi,S}$ sont entiers. En général, φ_S n'appartient pas à $R_K(G)$; cependant, si p^e est la plus grande puissance de p divisant $|G|$, $p^e\varphi_S$ appartient à $R_K(G)$ pour tout S.

On dit qu'une fonction $f : G \to K$ est *centrale* si elle est constante sur chaque classe de conjugaison de G ; il revient au même de supposer que l'on a $f(gg') = f(g'g)$ pour g, g' dans G. Ces fonctions forment un espace vectoriel $FC(G)$ sur K, ayant pour base l'ensemble $\mathrm{Irr}_K(G)$ des caractères irréductibles. On note $FC_{p'}(G)$ le sous-espace formé des fonctions centrales nulles en dehors de $G_{p'}$. Alors les deux familles (Φ_S) et (φ_S) (où S parcourt $\mathrm{Irr}_k(G)$) sont des bases de $FC_{p'}(G)$; le cardinal de $\mathrm{Irr}_k(G)$ est donc égal au nombre des classes de conjugaison d'éléments p-réguliers.

Soit χ dans $R_K(G)$; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *on a* $\chi(g) = 0$ *pour tout élément p-singulier* g ;

(ii) *il existe des entiers* m_S *tels que* $\chi = \sum_S m_S\, \Phi_S$.

Supposons de plus que les entiers m_S soient positifs, c'est-à-dire que χ soit le caractère d'un KG-module V. Alors, on a une troisième condition équivalente :

(iii) *il existe un réseau M dans V, invariant par G, qui soit un $\mathcal{O}G$-module projectif.*

On note $P(G)$ (ou $P_{\mathcal{O}}(G)$) le $\mathbf{Z}$-module ayant pour base les Φ_S ; vu la condition (iii), les éléments de $P(G)$ s'appellent aussi "caractères projectifs".

On note Λ_G le $\mathcal{O}$-module ayant pour base les φ_S. Ses éléments sont les fonctions centrales sur G, à valeurs dans $\mathcal{O}$, et nulles sur l'ensemble des éléments p-singuliers. On note aussi Λ_G^* le $\mathcal{O}$-module ayant pour base les Φ_S ; c'est l'ensemble des fonctions centrales f sur G, nulles sur les éléments p-singuliers et telles que[1] $f(g)/|C_G(g)|$ soit dans $\mathcal{O}$ pour tout g dans $G_{p'}$.

1.5. Groupes de défaut d'un bloc

Soit b un bloc. On appelle *défaut de b* le plus grand des entiers $d \geq 0$ tels que p^d divise les entiers $|G|/\chi(1)$ pour tous les caractères χ du bloc b. Soit $C(b)$ la sous-matrice de la matrice de Cartan $C = (c_{S,T})$ correspondant aux indices S, T dans $\mathrm{Irr}_k(G, b)$. On a alors $p^d = \det C(b)$.

Examinons le cas (trivial) des *blocs b de défaut* 0. Par hypothèse, il existe dans b un caractère χ tel que p ne divise pas l'entier $|G|/\chi(1)$. D'après la formule (1), e_χ appartient alors à $Z\mathcal{O}G$, d'où $e_b = e_\chi$ et $b = \{\chi\}$. Soit V un KG-module simple de caractère χ et soit M un réseau invariant par G dans V. On prouve alors (Serre [A18, page 147]) que M est un $\mathcal{O}G$-module projectif, que $M/\mathfrak{p}M$ est un kG-module simple et projectif, et qu'on a un isomorphisme de $\mathcal{O}$-algèbres de $\mathcal{O}G\, e_\chi$ sur $\mathrm{End}_{\mathcal{O}} M$.

Lorsque p ne divise pas l'ordre de G, *tous les blocs sont de défaut* 0, et contiennent un seul caractère. De plus, la réduction modulo $\mathfrak{p}$ définit une bijection J de $\mathrm{Irr}_K(G)$ sur $\mathrm{Irr}_k(G)$ telle que $\chi = \Phi_{J(\chi)}$ et la matrice de Cartan est la matrice unité. Enfin, l'algèbre $\mathcal{O}G$ est isomorphe à un produit d'algèbres de matrices $M_r(\mathcal{O})$ et l'algèbre $Z\mathcal{O}G$ a pour base sur $\mathcal{O}$ les e_χ. Tous les $\mathcal{O}G$-modules qui sont libres comme $\mathcal{O}$-modules sont donc projectifs.

Soit b un bloc de défaut d ; nous allons définir une classe de conjugaison (sous G) de sous-groupes de G, d'ordre p^d, appelés "*groupes de défaut de b*". Nous aurons besoin pour cela d'une notion de *projectivité relative*. Tous les $\mathcal{O}G$-modules considérés sont libres de type fini comme $\mathcal{O}$-modules. Si H est un sous-groupe de

[1] On note $C_G(g)$ le centralisateur de g dans G.

G, on dit qu'un $\mathcal{O}G$-module est (G,H)-*projectif* s'il est isomorphe à un facteur direct d'un $\mathcal{O}G$-module de la forme $\mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}H} N$, où N est un $\mathcal{O}H$-module (libre de type fini sur $\mathcal{O}$). Bien sûr, tout $\mathcal{O}G$-module est (G,G)-projectif, et $(G,1)$-projectif est synonyme de projectif. Le *critère de Higman* affirme que M *est* (G,H)*-projectif si et seulement s'il existe un* $\mathcal{O}H$*-endomorphisme* u *de* M *tel que* $1_M = \sum_{g\in G/H} g\cdot u\cdot g^{-1}$ (noter que $g\cdot u\cdot g^{-1}$ ne change pas si l'on remplace g par gh, avec h dans H, d'où la sommation sur G/H).

Si M est un $\mathcal{O}G$-module indécomposable, on appelle "*vortex*" de M tout sous-groupe H de G minimal parmi ceux pour lesquels M est (G,H)-projectif. Ces sous-groupes forment une classe de conjugaison de p-sous-groupes de G.

Soit b un bloc. Un *groupe de défaut de* b est un sous-groupe minimal dans l'ensemble des sous-groupes de G qui sont vortex d'un $\mathcal{O}G$-module indécomposable du bloc b (i.e. tel que $e_b M = M$). Ces groupes de défaut ont tous l'ordre p^d et forment une classe de conjugaison de sous-groupes de G.

Par utilisation du critère de Higman, on obtient la caractérisation suivante :

Pour qu'un sous-groupe H *de* G *contienne un sous-groupe de défaut de* b, *il faut et il suffit qu'il existe un élément* u *de* $\mathcal{O}G$, *commutant à* H, *et tel que* $e_b = \sum_{g\in G/H} gug^{-1}$.

1.6. Structure locale sur un bloc [E1,E2,E5]

Nous résumons la théorie d'Alperin-Broué-Puig.

Les trois notions de base sont :

a) *L'homomorphisme de troncation de Brauer.* Soit P un p-sous-groupe de G. On note C son centralisateur dans G et $(kG)^P$ la sous-algèbre de kG formée des éléments commutant à P. L'application Br_P^G de $(kG)^P$ dans kC définie par

$$\mathrm{Br}_P^G\Big(\sum_{g\in G} a(g)\,g\Big) = \sum_{c\in C} a(c)\,c \tag{15}$$

est un homomorphisme d'algèbres.

b) *Sous-paire* : elle est de la forme (P,b) où P est un p-sous-groupe de G, et b un bloc du centralisateur $C_G(P)$ de P dans G.

c) *Domination* : soient (P,b) et (P',b') deux sous-paires telles que $P \subset P'$. On note C le centralisateur de P dans G et C' celui de P'. Soient i un idempotent

primitif dans kC et i' dans kC' ; on dira que i et i' sont *liés* s'il existe un idempotent primitif j de l'algèbre $(kG)^{P'}$ (contenue dans $(kG)^P$) tel que $i = \mathrm{Br}_P^G(j)$ et $i' = \mathrm{Br}_{P'}^G(j)$. On dira que (P', b') *domine* (P, b), et l'on écrira $(P, b) \leq (P', b')$ si chaque fois que i et i' sont liés et que l'on a $i'\overline{e}_{b'} = i'$, on a $i\overline{e}_b = i$. Cette relation détermine b de manière unique en fonction de b', mais non l'inverse.

Soit b un bloc de G. Considérons l'ensemble des sous-paires (P, b_P) dominant $(1, b)$; c'est un ensemble $\mathcal{X}_G(b)$ ordonné par la relation de domination, sur lequel G opère par automorphismes intérieurs. On dira que c'est la *structure locale sur b*. Supposons que b soit le bloc principal $b_0(G)$ de G, contenant le caractère unité ; alors $\mathcal{X}_G(b_0(G))$ se compose des sous-paires $(P, b_{0,P})$ où $b_{0,P}$ est le bloc principal du centralisateur du p-sous-groupe P. Autrement dit, dans le cas du bloc unité $b_0(G)$, la structure locale est isomorphe, comme ensemble ordonné avec action de G, à l'ensemble des p-sous-groupes de G. L'étude de la structure locale des blocs est donc une extension de la théorie de Sylow.

Le *premier théorème principal de Brauer* a été reformulé comme suit :

a) *Le groupe G opère transitivement sur l'ensemble des sous-paires maximales dans $\mathcal{X}_G(b)$.*

b) *Les sous-groupes de défaut de b sont les p-sous-groupes D pour lesquels il existe une sous-paire (D, b_D) maximale dans $\mathcal{X}_G(b)$. En particulier, on a $|D| = p^d$, où d est le défaut de b.*

c) *Fixons une sous-paire maximale (D, b_D) ; notons C le centralisateur de D dans G, et $N = N_G(D, b_D)$ le stabilisateur dans G de l'élément (D, b_D) de $\mathcal{X}_G(b)$. L'idempotent primitif e_{b_D} de ZOC associé à b_D est un idempotent primitif dans ZON. Il définit un bloc dans N, qu'on note b_N. Alors (D, b_D) est l'unique sous-paire maximale dans $\mathcal{X}_N(b_N)$. Comme ensemble ordonné avec action de N, $\mathcal{X}_N(b_N)$ est isomorphe à l'ensemble des sous-groupes de D.*

DEUXIÈME PARTIE :
ÉQUIVALENCE DE BLOCS

2.1. Isométries parfaites

On peut mettre en correspondance les caractères de groupes distincts, en utilisant par exemple l'induction et la restriction. Les isométries parfaites de

Broué permettent de conserver la trace des structures locales.

Soient donc G et H deux groupes finis ; on suppose désormais que l'entier m est l'exposant du groupe $G \times H$, et l'on garde les notations $K, \mathcal{O}, \cdots$. On peut identifier les $\mathbf{Z}$-modules $R_K(G \times H)$ et $R_K(G) \otimes_{\mathbf{Z}} R_K(H)$; de plus, le produit scalaire sur $R_K(G)$ et $R_K(H)$ permet d'identifier chacun de ces $\mathbf{Z}$-modules à son dual. Par suite, on a des isomorphismes naturels des $\mathbf{Z}$-modules suivants :

$$R_K(G \times H) \quad , \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R_K(H), R_K(G)) \quad , \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R_K(G), R_K(H)).$$

De manière explicite, à un élément μ de $R_K(G \times H)$ correspondent deux applications $\mathbf{Z}$-linéaires :

$$I_\mu : R_K(H) \longrightarrow R_K(G) \quad , \quad R_\mu : R_K(G) \longrightarrow R_K(H)$$

caractérisées par les formules :

$$(1) \qquad (I_\mu\, \lambda)(g) = |H|^{-1} \sum_{h \in H} \mu(g, h^{-1})\, \lambda(h)$$

$$(2) \qquad (R_\mu\, \chi)(h) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \chi(g)\, \mu(g^{-1}, h).$$

Ces deux applications linéaires sont adjointes l'une de l'autre par rapport aux produits scalaires sur $R_K(G)$ et $R_K(H)$. On définit par ailleurs un isomorphisme $\mu \mapsto \mu^*$ de $R_K(G \times H)$ sur $R_K(H \times G)$ par $\mu^*(h, g) = \mu(g, h)$; on a alors $R_\mu = I_{\mu^*}$ et $I_\mu = R_{\mu^*}$. Enfin, on reconstitue μ au moyen des applications I_μ et R_μ :

$$(3) \qquad \mu = \sum_{\chi} \chi \otimes R_\mu(\chi) = \sum_{\lambda} I_\mu(\lambda) \otimes \lambda.$$

On dit que μ est *parfait* s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

(P_1) *Pour (g, h) dans $G \times H$, les éléments $\mu(g, h)/|C_G(g)|$ et $\mu(g, h)/|C_H(h)|$ appartiennent à $\mathcal{O}$.*

(P_2) *Si $\mu(g, h)$ n'est pas nul, alors g et h sont tous deux p-réguliers, ou tous deux p-singuliers.*

Les formules (1) et (2) gardent un sens lorsqu'on remplace λ et χ par des fonctions centrales sur les groupes correspondants. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes[1] :

(i) le caractère μ de $G \times H$ est parfait ;

(ii) on a $I_\mu(\Lambda_H) \subset \Lambda_G$ et $R_\mu(\Lambda_G) \subset \Lambda_H$;

(iii) on a $I_\mu(\Lambda_H^*) \subset \Lambda_G^*$ et $R_\mu(\Lambda_G^*) \subset \Lambda_H^*$;

(iv) on a $I_\mu(P(H)) \subset P(G)$ et $R_\mu(P(G)) \subset P(H)$.

Les caractères parfaits forment un sous-module de $R_K(G \times H)$. Supposons que μ soit le caractère d'une représentation de $G \times H$ dans un espace vectoriel T sur K ; s'il existe un réseau M dans T, stable pour $G \times H$ et qui soit projectif comme $\mathcal{O}G$-module, et comme $\mathcal{O}H$-module (mais pas nécessairement comme module sur $\mathcal{O}(G \times H)$), alors μ est parfait.

Définissons les *isométries* entre blocs de caractères. Soient $J(G)$ et $J(H)$ des ensembles de caractères irréductibles de G et H respectivement. On suppose que l'idempotent $e = \sum_{\chi \in J(G)} e_\chi$ appartient à $Z\mathcal{O}G$, c'est-à-dire que $J(G)$ est réunion de blocs ; hypothèse analogue pour $f = \sum_{\lambda \in J(H)} e_\lambda$. On note $R_K(G, e)$ le $\mathbf{Z}$-module de base $J(G)$, et $R_K(H, f)$ est défini de manière analogue. Considérons une isométrie I de $R_K(H, f)$ sur $R_K(G, e)$; elle définit une bijection r de $J(H)$ sur $J(G)$ telle que $I(\lambda) = \pm r(\lambda)$. Elle définit aussi un caractère μ dans $R_K(G \times H)$ par

$$\mu = \sum_{\lambda \in J(H)} I(\lambda) \otimes \lambda \tag{4}$$

et l'on a $I = I_\mu$. De plus, R_μ induit l'isométrie inverse de $R_K(G, e)$ sur $R_K(H, f)$.

On dit que l'isométrie I est *parfaite* si μ est un caractère parfait. On montre alors facilement que *I induit une bijection de l'ensemble des blocs contenus dans $J(H)$ sur l'ensemble des blocs contenus dans $J(G)$. De plus, si deux blocs b_H et b_G se correspondent ainsi, I induit une bijection* (au signe près) *de l'ensemble des caractères de b_H sur ceux de b_G, b_H et b_G ont même défaut, et I induit une isométrie entre les $\mathbf{Z}$-modules de caractères projectifs des blocs ; ainsi les matrices de Cartan pour b_H et b_G ont même invariants de similitude.*

[1] Voir le n° 1.4 pour les notations Λ_G, Λ_G^* et $P(G)$; on définit Λ_H, Λ_H^* et $P(H)$ de manière analogue.

Broué définit une notion plus précise d'*isotypie* entre blocs b_H de H et blocs b_G de G. On impose en plus que I induise des isométries parfaites pour les centralisateurs des éléments des groupes de défaut, et que les catégories de Brauer de b_H et b_G soient équivalentes (notion plus faible que l'isomorphie des structures locales $\mathcal{X}_H(b_H)$ et $\mathcal{X}_G(b_G)$).

2.2. Équivalences de Morita

Les isométries introduites au n° 2.1 sont expliquées et précisées au moyen de la *notion d'équivalence de catégories.* On désigne par Λ l'un des anneaux K, $\mathcal{O}$ ou k ; les modules et algèbres considérés sont tous libres et de type fini sur Λ. On dit que la Λ-algèbre A est *symétrique* s'il existe une forme linéaire $t_A : A \to \Lambda$ telle que $t_A(aa') = t_A(a'a)$ et que l'application $a \mapsto a \cdot t_A = (a' \mapsto t_A(a'a))$ soit un isomorphisme de A sur $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, \Lambda)$. Dans ces conditions, pour tout A-module M, l'application $\varphi \mapsto t_A \circ \varphi$ est une bijection de $\mathrm{Hom}_A(M, A)$ sur $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda)$. Par exemple, si e est un idempotent du centre de l'algèbre de groupe ΛG, l'algèbre ΛGe est symétrique (poser $t_A(\sum_{g\in G} a(g)g) = a(1)$).

On note ${}_A\mathbf{mod}$ (resp. $\mathbf{mod}_B$, resp. ${}_A\mathbf{mod}_B$) la catégorie des A-modules à gauche (resp. B-modules à droite, resp. (A, B)-bimodules). Remarquons que tout (A, B)-bimodule M définit un foncteur $F \mapsto M \otimes_B F$ de ${}_B\mathbf{mod}$ dans ${}_A\mathbf{mod}$. Par exemple, si H est un sous-groupe de G et $A = \Lambda G$, $B = \Lambda H$, le foncteur d'induction Ind_H^G est défini par le (A, B)-bimodule A (multiplication à gauche par A et à droite par B) ; en considérant de même A comme (B, A)-bimodule, le foncteur $E \mapsto A \otimes_A E$ est le foncteur de restriction Res_H^G des ΛG-modules aux ΛH-modules.

Soit I un foncteur de ${}_B\mathbf{mod}$ dans ${}_A\mathbf{mod}$; si I est une équivalence de catégories, il existe un (A, B)-bimodule M tel que $I(F) = M \otimes_B F$. Réciproquement, supposons que I soit ainsi défini par M ; pour que I soit une équivalence, il faut et il suffit qu'il existe un (B, A)-bimodule N tel que $M \otimes_B N$ soit isomorphe à A dans ${}_A\mathbf{mod}_A$, et que $N \otimes_A M$ soit isomorphe à B dans ${}_B\mathbf{mod}_B$. Alors le foncteur R de ${}_A\mathbf{mod}$ dans ${}_B\mathbf{mod}$ défini par $R(E) = N \otimes_A E$ est un quasi-inverse de I. De plus, M et N sont projectifs comme A-modules et comme B-modules.

Si les Λ-algèbres A et B sont symétriques, on peut donner la construction suivante de N. Considérons un (A, B)-bimodule M qui est projectif comme A-module et comme B-module. Définissons N comme le Λ-module dual de M, et

munissons-le de la structure de (B, A)-bimodule caractérisée par :

$$\langle bna, m\rangle = \langle n, amb\rangle \tag{5}$$

(pour $m \in M$, $n \in N$, $a \in A$, $b \in B$). Il existe alors deux homomorphismes de bimodules :

$$\Phi : M \otimes_B N \longrightarrow A \quad , \quad \Psi : N \otimes_A M \longrightarrow B$$

caractérisés par :

$$t_A(\Phi(m \otimes n)) = t_B(\Psi(n \otimes m)) = \langle n, m\rangle. \tag{6}$$

Pour que le foncteur I défini par $I(F) = M \otimes_B F$ soit une équivalence de ${}_B\mathbf{mod}$ avec ${}_A\mathbf{mod}$, il faut et il suffit que Φ et Ψ soient des isomorphismes.

Nous examinons d'abord le cas $\Lambda = K$, $A = KGe$, $B = KHf$; ici, G et H sont deux groupes finis, e (resp. f) est un idempotent central de KG (resp. KH). Soit V un (A, B)-bimodule ; c'est donc un (KG, KH)-bimodule vérifiant $evf = v$ pour tout $v \in V$. On le transforme en module sur $K(G \times H)$ par la règle $(g, h) \cdot v = g \cdot v \cdot h^{-1}$, et l'on note μ son caractère. Pour que le foncteur $F \mapsto V \otimes_B F$ définisse une équivalence de ${}_B\,\mathbf{mod}$ avec ${}_A\,\mathbf{mod}$, il faut et il suffit que l'application I_μ de $R_K(H, f)$ dans $R_K(G, e)$ soit une isométrie, c'est-à-dire corresponde à une bijection φ de $\mathrm{Irr}_K(H, f)$ sur $\mathrm{Irr}_K(G, e)$.

On suppose maintenant qu'on a $\Lambda = \mathcal{O}$, $e \in Z\mathcal{O}G$ et $f \in Z\mathcal{O}H$; on pose $A = \mathcal{O}Ge$ et $B = \mathcal{O}Hf$. Soit M un (A, B)-bimodule qui est projectif comme A-module, et comme B-module. On pose $V = K \otimes_{\mathcal{O}} M$, considéré comme bimodule sur KGe, KHf. Pour que le foncteur $F \mapsto M \otimes_B F$ de ${}_B\,\mathbf{mod}$ dans ${}_A\,\mathbf{mod}$ soit une équivalence, il faut et il suffit que le foncteur défini par V soit une équivalence de ${}_{KHf}\,\mathbf{mod}$ dans ${}_{KGe}\,\mathbf{mod}$ (*cf.* ci-dessus). Le caractère μ de V est alors parfait au sens du n° 2.1.

Une équivalence de ${}_{\mathcal{O}Hf}\,\mathbf{mod}$ avec ${}_{\mathcal{O}Ge}\,\mathbf{mod}$ définit des équivalences de catégories de ${}_{KHf}\,\mathbf{mod}$ avec ${}_{KGe}\,\mathbf{mod}$, et de ${}_{kHf}\,\mathbf{mod}$ avec ${}_{kGe}\,\mathbf{mod}$. Par suite, on a des bijections de $\mathrm{Irr}_K(H, f)$ sur $\mathrm{Irr}_K(G, e)$ et de $\mathrm{Irr}_k(H, f)$ sur $\mathrm{Irr}_k(G, e)$. De plus, la matrice de décomposition et la matrice de Cartan sont préservées. Bien entendu, on a une isométrie parfaite, avec conservation des blocs, de leur défaut...

Supposons plus particulièrement que l'on ait $e = e_b$, $f = e_c$, où b est un bloc de G et c un bloc de H. Une équivalence de la catégorie ${}_{\mathcal{O}Hf}\mathbf{mod}$ avec la catégorie

${}_{\mathcal{O}G^e}\mathbf{mod}$ s'appelle une *équivalence de Morita* des blocs c et b. Cette notion explique un grand nombre de phénomènes liés aux p-groupes, ou plus généralement aux groupes p-nilpotents et p-résolubles.

2.3. Équivalences dérivées

Dans l'étude des blocs des groupes simples, il faut une notion plus générale, due à Rickard et Broué ; elle repose sur la notion de *catégorie dérivée*, due à Grothendieck et Verdier.

Soit A une Λ-algèbre comme précédemment. La catégorie dérivée bornée ${}_A\mathbf{deb}$ (notée aussi $\mathcal{D}^b({}_A\mathbf{mod})$ se décrit ainsi :

— *objets* : complexes de A-modules $\mathbf{X} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} X^n$, avec différentielle de degré $+1$, $X^n = 0$ pour n assez grand, $H^n(\mathbf{X}) = 0$ pour $|n|$ assez grand, et chaque composante X^n projective dans ${}_A\,\mathbf{mod}$.

— *morphismes* : classes d'homotopie de morphismes $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ compatibles à la graduation et à la différentielle.

Un complexe $\mathbf{X}$ est *parfait* s'il est isomorphe, dans la catégorie ${}_A\mathbf{deb}$, à un complexe $\mathbf{Y}$ tel que $Y^n = 0$ pour $|n|$ assez grand.

Le théorème de Morita sur les équivalences de catégories a été généralisé par Rickard ([E13] à [E16]) au cas des catégories dérivées. On peut introduire la catégorie dérivée ${}_A\mathbf{deb}_B = \mathcal{D}^b({}_A\mathbf{mod}_B)$ par analogie avec ce qui précède ; seul changement : les composantes X^n des complexes sont des (A, B)-bimodules projectifs, donc projectifs comme A-modules, et comme B-modules.

Le produit tensoriel permet d'associer à tout objet $\mathbf{M}$ de ${}_A\mathbf{deb}_B$ un foncteur $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{M} \otimes_B \mathbf{F}$ de ${}_B\mathbf{deb}$ dans ${}_A\mathbf{deb}$. *Pour que* ${}_A\mathbf{deb}$ *et* ${}_B\mathbf{deb}$ *soient équivalentes comme catégories triangulées* (au sens de Grothendieck-Verdier), *il faut et il suffit qu'il existe un objet* $\mathbf{M}$ *de* ${}_A\mathbf{deb}_B$ *et un objet* $\mathbf{N}$ *de* ${}_B\mathbf{deb}_A$ *tels que l'on ait les isomorphismes* :

$$\mathbf{M} \otimes_B \mathbf{N} \simeq A \text{ dans } {}_A\mathbf{deb}_A$$
$$\mathbf{N} \otimes_A \mathbf{M} \simeq B \text{ dans } {}_B\mathbf{deb}_B.$$

Toute équivalence dérivée, c'est-à-dire toute équivalence entre les catégories dérivées $I : {}_B\mathbf{deb} \to {}_A\mathbf{deb}$ est donnée par un objet $\mathbf{M}$ de ${}_A\mathbf{deb}_B$, sous la forme $I(\mathbf{F}) = \mathbf{M} \otimes_B \mathbf{F}$.

Revenons au cas des algèbres de groupes $A = \mathcal{O}Ge$ et $B = \mathcal{O}Hf$ comme précédemment. Soit $\mathbf{M}$ un objet de ${}_A\mathbf{deb}_B$. Pour tout entier i, introduisons le (KGe, KHf)-bimodule $K \otimes_{\mathcal{O}} H^i(\mathbf{M})$; on peut le considérer comme un module sur $K(G \times H)$ et il possède un caractère $\mu_i \in R_K(G \times H)$. On pose :

$$\mu = \sum_{i \in \mathbf{Z}} (-1)^i \mu_i \,; \tag{7}$$

cette définition est légitime car on a $H^i(\mathbf{M}) = 0$ pour $|i|$ assez grand. Dans ces conditions, *si le foncteur* $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{M} \otimes_B \mathbf{F}$ *est une équivalence de* ${}_B\mathbf{deb}$ *avec* ${}_A\mathbf{deb}$, *le caractère* μ *de* $G \times H$ *définit une isométrie parfaite.*

On trouvera dans Broué [E4] de nombreuses variations sur ce thème.

2.4. Une conjecture

La forme la plus générale de la conjecture de Broué est la suivante :

Soient G *un groupe fini,* b *un bloc de* G, *et* (D, b_D) *une sous-paire maximale dominant* $(1, b)$. *Supposons* D *abélien. Introduisons* N *et* b_N *comme dans le premier théorème principal de Brauer. Notons* e *l'idempotent de* $Z\mathcal{O}G$ *associé à* b *et* f *celui de* $Z\mathcal{O}N$ *associé à* b_N. *Alors les catégories dérivées* ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{deb}$ *et* ${}_{\mathcal{O}Nf}\mathbf{deb}$ *sont équivalentes. En particulier, on a une isométrie parfaite entre le bloc* b *de* G *et le bloc* b_N *de* N.

Plus particulièrement, supposons que les p-sous-groupes de Sylow de G soient abéliens, et soit N le normalisateur d'un de ces sous-groupes. Soit $e \in Z\mathcal{O}G$ l'idempotent associé au bloc principal de G et de même $f \in Z\mathcal{O}N$. Alors on devrait avoir une équivalence des catégories dérivées ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{deb}$ et ${}_{\mathcal{O}Nf}\mathbf{deb}$, et en particulier une isométrie parfaite des blocs principaux de G et de N.

Une preuve générale apparaît très lointaine. Cependant, on connaît déjà de nombreux cas particuliers :

a) Si D est cyclique, la conjecture est vraie d'après des résultats de Rickard et Linckelmann [E9].

b) Si G est p-résoluble, et D abélien, on a une équivalence (au sens de Morita) des catégories de modules sur $\mathcal{O}Ge$ et sur $\mathcal{O}Nf$. Cela résulte des théorèmes de Dade, Fong et Puig.

c) Si le bloc b est nilpotent au sens de Broué et Puig [E7], on a en tout cas une isotypie entre les blocs b de G et b_N de N.

d) Broué donne dans [E3] un certain nombre d'exemples explicites, dont le bloc principal du groupe $\mathrm{GL}_2(p^n)$.

e) Dans sa thèse [E17], Rouquier démontre l'isotypie des blocs b de G et b_N de N lorsque G est un groupe symétrique ; il élucide aussi le cas du bloc principal des groupes sporadiques.

On étudiera les groupes réductifs finis dans la troisième partie.

TROISIÈME PARTIE :
GROUPES GÉNÉRIQUES

3.1. Rappels sur la structure des groupes réductifs

Soit L un corps. Un *schéma affine en groupes* G est défini par une algèbre commutative $\mathcal{O}(G)$ (sur L) et des homomorphismes d'algèbres

$$\Delta : \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G) \quad , \quad S : \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathcal{O}(G) \quad , \quad \varepsilon : \mathcal{O}(G) \longrightarrow L$$

satisfaisant à la propriété suivante : si A est une algèbre commutative, l'ensemble $G(A)$ des homomorphismes de $\mathcal{O}(G)$ dans A est un groupe pour la multiplication donnée par[1] $u * v = m_A \circ (u \otimes v) \circ \Delta$, l'inverse de u étant $u \circ S$ et l'unité étant ε (L est plongé dans A).

On fait les hypothèses restrictives suivantes :

a) *le corps L est algébriquement clos* ;

b) *l'algèbre $\mathcal{O}(G)$ a un nombre fini de générateurs* ;

c) *dans $\mathcal{O}(G)$, la relation $f^m = 0$ (pour $m \geq 1$) entraîne $f = 0$.*

On peut se contenter du groupe $G(L)$, noté G par abus, et identifier $\mathcal{O}(G)$ à une algèbre de fonctions sur $G(L)$ à valeurs dans L. On parle alors de *groupe algébrique.*

Exemples : le groupe linéaire GL_n et son sous-groupe SL_n, le groupe additif G_a, le groupe multiplicatif G_m (ou tore à une dimension).

Avec nos conventions, tout groupe algébrique est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(L)$ algébrique au sens élémentaire.

[1] On définit $m_A : A \otimes A \to A$ par $m_A(a \otimes a') = aa'$.

Quelques classes de groupes :

a) Soit X un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini. On définit[1] le *tore* T par $T(L) = \mathrm{Hom}(X, L^\times)$, $\mathcal{O}(T)$ étant l'algèbre de groupe LX avec le coproduit $\Delta(\chi) = \chi \otimes \chi$ pour $\chi \in X$. De plus, X s'interprète comme l'ensemble des homomorphismes de groupes algébriques de T dans G_m.

b) Un groupe algébrique est *résoluble* (resp. *unipotent*) s'il est isomorphe à un sous-groupe algébrique du groupe des matrices triangulaires supérieures dans $\mathrm{GL}_n(L)$ (resp. avec éléments diagonaux égaux à 1).

c) Un groupe algébrique G est dit *réductif* s'il ne possède aucun sous-groupe algébrique invariant unipotent.

Soit alors G un groupe algébrique réductif et *connexe* (i.e. l'algèbre $\mathcal{O}(G)$ est intègre). Il existe des tores maximaux dans G, et ils sont tous conjugués par $\mathrm{G}(L)$. Soit T un tel tore, correspondant à un $\mathbf{Z}$-module X. On dit qu'un élément α de X est une *racine* s'il existe un homomorphisme φ_α de SL_2 dans G avec la propriété $t\,\varphi_\alpha(h)\,t^{-1} = \varphi_\alpha(u_\alpha(t)\,h u_\alpha(t)^{-1})$ pour h dans SL_2, t dans T et $u_\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il existe alors un élément $\alpha^\vee$ du dual $X^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X, \mathbf{Z})$ de X tel que $\chi\Big(\varphi_\alpha\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}\Big) = x^{\langle \alpha^\vee, \chi \rangle}$ pour tout $x \in L^\times$ et tout $\chi \in X$ (l'élément $\varphi_\alpha\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$ appartient à T).

On obtient ainsi la *donnée radicielle* $(X, X^\vee, R, R^\vee)$ satisfaisant aux axiomes suivants (*cf.* Demazure dans [A7]) :

(DR_1) *X est un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini, et $X^\vee$ son dual.*

(DR_2) *R est une partie finie de X et $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ est une bijection de R sur une partie $R^\vee$ de $X^\vee$. De plus, deux éléments de R ne sont pas proportionnels, sauf dans le cas de α et $-\alpha$.*

(DR_3) *Pour α dans R, on a $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$. L'automorphisme s_α de X qui transforme χ en $\chi - \langle \alpha^\vee, \chi \rangle \alpha$ applique R dans R, et le contragrédient de s_α transforme $R^\vee$ en lui-même.*

Les s_α engendrent le *groupe de Weyl* $W(R)$ qui agit sur X et $X^\vee$. Dans notre exemple, R est l'ensemble des racines, s_α est induit par l'automorphisme $t \mapsto w_\alpha\, t\, w_\alpha^{-1}$ de T, avec $w_\alpha = \varphi_\alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; le normalisateur N de T est engendré

[1] On note $L^\times$ le groupe multiplicatif du corps L, d'où $L^\times = G_m(L)$.

par T et les w_α, d'où un isomorphisme de $W(R)$ avec N/T.

Le théorème de structure de Chevalley affirme que la *classification des groupes réductifs est équivalente à celle des données radicielles.*

3.2. Groupes génériques

Soit $\mathbf{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Si q est une puissance de p, il existe un unique sous-corps $\mathbf{F}_q$ de $\mathbf{F}$ ayant q éléments, l'ensemble des solutions de l'équation $x^q = x$. Soit G un groupe algébrique sur $\mathbf{F}$. Une *transformation de Frobenius* F de G (pour le nombre q) est un endomorphisme du groupe algébrique G, correspondant à un endomorphisme $f \mapsto f^F$ de l'algèbre $\mathcal{O}(G)$, pourvu que l'axiome suivant soit satisfait :

(Frob) *L'anneau $\mathcal{O}(G)$ est engendré par $\mathbf{F}$ et par l'ensemble A des solutions de l'équation $f^F = f^q$.*

Dans ces conditions, A est une algèbre sur le corps $\mathbf{F}_q$, et l'on a un isomorphisme naturel $\mathcal{O}(G) \simeq \mathbf{F} \otimes_{\mathbf{F}_q} A$; autrement dit, A définit un schéma affine en groupes Γ sur le corps $\mathbf{F}_q$ et G se déduit de Γ par extension des scalaires.

Si H est un sous-groupe algébrique de G, on note $F(H)$ son image par F et H^F l'ensemble des éléments h de H tels que $F(h) = h$; c'est un sous-groupe du groupe fini G^F.

Revenons au cas d'un groupe algébrique réductif et connexe G. Il existe un tore maximal T de G stable par F. Notons $(X, X^\vee, R, R^\vee)$ la donnée radicielle correspondante. Comme T est stable par F, la restriction de F à T correspond à un endomorphisme de X qui est de la forme $q\phi$, où ϕ est un automorphisme d'ordre fini de X qui conserve R et $R^\vee$ et normalise donc le groupe de Weyl $W(R) = W$.

Considérons un autre tore maximal T' stable par F, et les données X', $X'^\vee$, R', $R'^\vee$ et ϕ' correspondantes. Il existe un élément g de G tel que $gTg^{-1} = T'$; le choix d'un tel g définit un isomorphisme γ de la donnée radicielle $(X', X'^\vee, R', R'^\vee)$ sur $(X, X^\vee, R, R^\vee)$, mais elle ne transporte pas nécessairement ϕ' en ϕ. En fait, l'élément $g^{-1}F(g)$ appartient au normalisateur N de T et définit donc un élément w de W ; alors γ transporte ϕ' sur ϕw^{-1}. En faisant varier le tore T', on obtient tous les éléments w de W.

On est donc conduit à appeler *groupe générique* $\mathbf{G}$ une donnée radicielle $(X, X^\vee, R, R^\vee)$ munie d'un élément Φ du groupe quotient $A(R)/W(R)$, où $A(R)$ est le groupe des automorphismes de la donnée radicielle et $W(R)$ le groupe de

Weyl correspondant.

Voici le *mode d'emploi* de cette notion. On se donne un groupe générique $\mathbf{G} = (X, X^\vee, R, R^\vee, \Phi)$.

a) Choisissons un corps $\mathbf{F}$ algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, et une puissance entière $q = p^m$ de p. Il existe alors pour chaque élément ϕ de Φ un système (G, T, F) où G est un groupe algébrique réductif et connexe sur le corps $\mathbf{F}$, où T est un tore maximal de G, et F un endomorphisme de Frobenius de G, envoyant T dans T ; ce système doit déterminer une donnée radicielle isomorphe à $(X, X^\vee, R, R^\vee)$ où l'action de F sur T correspond à $q\phi$. De plus, le choix d'un isomorphisme de données radicielles définit (G, T, F) à un automorphisme intérieur près par un élément du groupe fini T^F, et le choix d'un autre représentant ϕ' de Φ ne laisse la place qu'à un automorphisme intérieur par un élément de G^F. Le groupe G^F, défini ainsi à un automorphisme intérieur près, sera noté $\mathbf{G}(q)$, et appelé un *groupe réductif fini.*

b) Nous allons définir un polynôme $P(x)$ avec la propriété que l'on ait $P(q) = |\mathbf{G}(q)|$ pour chaque $q = p^m$. Ce polynôme pourra s'appeler l'*ordre générique* de $\mathbf{G}$; une bonne notation est $|\mathbf{G}(x)|$.

Soit E l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} X$ et soit ℓ sa dimension ; le groupe W agit sur E et c'est un groupe fini engendré par des réflexions. Cette action se prolonge à l'algèbre symétrique S construite sur E ; les invariants de W dans S forment une algèbre graduée S^W sur laquelle agit le groupe $A(R)/W(R)$, d'où une action de Φ. D'après un théorème classique de Chevalley (*cf.* Bourbaki [A3, page 107]), on peut trouver des générateurs algébriquement indépendants $P_1, \cdots, P_\ell$ de S^W, homogènes de degrés respectifs $d_1, \cdots, d_\ell$. On peut aussi supposer que les P_i sont des fonctions propres de Φ, d'où des racines de l'unité $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_\ell$ telles que $\Phi \cdot P_i = \varepsilon_i P_i$. On pose alors :

$$(1) \qquad \varepsilon_{\mathbf{G}} = (-1)^\ell \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\ell \qquad |\mathbf{G}(x)| = x^N \prod_{i=1}^{\ell} (x^{d_i} - \varepsilon_i^{-1}),$$

où $2N$ est le nombre des racines. Le nombre $\varepsilon_{\mathbf{G}}$ est égal à 1 ou -1, et le polynôme $|\mathbf{G}(x)|$ est à coefficients entiers.

Exemple : on prend $X = \mathbf{Z}^n$, qu'on identifie à $X^\vee$, avec sa base canonique $e_1, \cdots, e_n$. On identifie α et $\alpha^\vee$ pour les racines $\alpha = e_i - e_j$, d'où $\ell = n$, $N = \frac{n(n-1)}{2}$

et $d_i = i$ pour $1 \leq i \leq n$. Considérons deux cas :

$$\Phi = 1,\ \varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 1, \qquad |\mathbf{G}(x)| = x^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} (x^i - 1)$$

$$\Phi = -1, \varepsilon_i = (-1)^i, \qquad |\mathbf{G}^-(x)| = x^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} (x^i - (-1)^i).$$

Les deux groupes génériques correspondant à $\Phi = 1$ et $\Phi = -1$ peuvent se noter $\mathbf{GL}_n$ et $\mathbf{GL}_n^-$. Par spécialisation, on obtient respectivement les groupes finis $\mathrm{GL}_n(q)$ et $\mathrm{U}_n(q^2)$; on a de bonnes raisons de noter ce dernier $\mathrm{GL}_n(-q)$.

Voir Carter [A6, page 75], pour une table des ordres génériques.

c) Un *tore générique* $\mathbf{T}$ correspond au cas où R est vide, d'où $W = \{1\}$; il est donc donné par un réseau X et un automorphisme ϕ d'ordre fini de X ; son ordre générique est $|\mathbf{T}(x)| = \det(x1_X - \phi^{-1})$. Un sous-tore $\mathbf{T}_1$ du tore générique $\mathbf{T}$ est de la forme $(X/X_1, \phi_1)$, où X_1 est un sous-groupe facteur direct de X, stable par ϕ, et ϕ_1 est l'automorphisme induit par ϕ sur le quotient.

Si $\mathbf{G}$ est un groupe générique, ses tores maximaux correspondent au choix d'un représentant ϕ de $\Phi \in A(R)/W(R)$. On peut parler d'un sous-tore générique non maximal d'après ce qui précède.

d) Dans la théorie des groupes réductifs, on introduit les *sous-groupes de Levi* de G comme étant les sous-groupes réductifs et connexes de G qui sont les centralisateurs des tores (non nécessairement maximaux). On traduit facilement ceci en termes génériques, en tenant compte de la transformation de Frobenius. On peut ainsi, dans chaque incarnation $G^F = \mathbf{G}(q)$ mettre en correspondance les G^F-classes de conjugaison de tores, ou de sous-groupes de Levi de G, avec les W-classes de conjugaison de sous-groupes de Levi génériques $\mathbf{L}$. On peut aussi définir la version générique $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$ de $N_{G^F}(L)/L^F$ (groupe de Weyl relatif).

3.3. Théorèmes de Sylow génériques

L'ordre $|\mathbf{G}(x)|$ d'un groupe générique $\mathbf{G}$ est un polynôme à coefficients entiers dont les racines non nulles sont des racines de l'unité. Il s'écrit donc sous la forme :

$$|\mathbf{G}(x)| = x^N \prod_d \Phi_d(x)^{a(d)} \tag{2}$$

de produits de puissances de polynômes cyclotomiques (et de x). Si q est une puissance d'un nombre premier p, et si ℓ est un nombre premier distinct de p, divisant $|\mathbf{G}(q)|$ mais non $|W|$, il existe un unique entier d tel que $a(d) \neq 0$ et $\ell \mid \Phi_d(q)$.

Ceci s'applique au cas des tores ; l'ordre d'un tore générique $\mathbf{T}$ s'écrit :

$$|\mathbf{T}(x)| = \prod_{d \in D} \Phi_d(x)^{a(d)} \tag{3}$$

avec $a(d) > 0$ pour $d \in D$. On dit que $\mathbf{T}$ est un Φ_d-*tore* si D est réduit à un élément d ; il revient au même de supposer qu'on a $\Phi_d(\phi) = 0$ si $\mathbf{T} = (X, \phi)$. Le cas $d = 1$ correspond à $\Phi_1(x) = x - 1$, d'où $\phi = 1$; autrement dit, un Φ_1-tore générique correspond, dans ses incarnations, à ce qu'on appelle un *tore déployé*.

Voici l'analogue du théorème de Sylow [D4] :

THÉORÈME (Broué-Malle).— *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe générique.*

a) *Si le polynôme cyclotomique* $\Phi_d(x)$ *divise* $|\mathbf{G}(x)|$, *il existe des* Φ_d*-tores dans* $\mathbf{G}$.

b) *Soit* $\mathbf{S}$ *un* Φ_d*-tore maximal dans* $\mathbf{G}$. *Alors* $|\mathbf{S}(x)|$ *est la plus grande puissance de* $\Phi_d(x)$ *divisant* $|\mathbf{G}(x)|$.

c) *Soit de plus* $\mathbf{L}$ *le sous-groupe de Levi générique centralisateur de* $\mathbf{S}$. *Alors le polynôme* $|\mathbf{L}(x)|$ *divise* $|\mathbf{G}(x)|$, *et l'on a* :

$$\frac{|\mathbf{G}(x)|}{|W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})| \cdot |\mathbf{L}(x)|} \equiv 1 \qquad \text{mod. } \Phi(x). \tag{4}$$

Pour la démonstration, on se sert des résultats de Springer [C6]. On introduit comme plus haut l'espace vectoriel complexe $E = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} X$, et l'on choisit une racine primitive d-ième de l'unité, soit ζ. Pour ϕ dans Φ, on note $E(\phi, \zeta)$ le noyau de $\phi - \zeta$ dans E. Alors l'exposant $a(d)$ dans la formule (2) est le maximum des dimensions des sous-espaces $E(\phi, \zeta)$ pour ϕ parcourant Φ, et deux de ces sous-espaces de dimension maximale sont conjugués par W.

3.4. Caractères unipotents génériques ; théorie de Harish-Chandra

Nous rappelons d'abord la définition des caractères unipotents du groupe réductif fini G^F. Choisissons un sous-groupe de Borel B de G, stable par F, et

un tore maximal T, stable par F et contenu dans B. Soit ϕ le représentant de Φ correspondant à T. On note $\mathcal{X}$ l'espace homogène G/B (variété des drapeaux). La décomposition de Bruhat $G = \coprod_{w\in W} BwB$ se traduit en une partition de $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ en orbites pour G, indexées sous la forme $\mathcal{Y}_w$ avec $w \in W$. Considérons le plongement de $\mathcal{X}$ comme sous-variété algébrique fermée de $\mathcal{Y}$ donné par $r : x \mapsto (x, F(x))$[(1)], et posons $\mathcal{X}_w = r^{-1}(\mathcal{Y}_w)$. On a une partition $\mathcal{X} = \coprod_{w\in W} \mathcal{X}_w$ en sous-variétés algébriques localement fermées, stables pour le groupe fini G^F.

Grâce à Grothendieck, on peut définir les groupes de cohomologie étale $H^i_{\text{et}}(\mathcal{X}_w, \mathbf{Q}_\ell)$ et le groupe fini G^F agit sur ces espaces de cohomologie ; on définit les caractères virtuels :

$$R^G_{w\phi}(g) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \operatorname{Tr}(g \mid H^i_{\text{et}}(\mathcal{X}_w, \mathbf{Q}_\ell)). \tag{5}$$

Les caractères unipotents de G^F sont les caractères irréductibles intervenant dans la décomposition de ces caractères $R^G_{w\phi}$. Leur ensemble se note $\mathcal{E}(G^F, 1)$.

Le résultat fondamental de Lusztig (*cf.* Carter [A6] et Lusztig [A10]) peut se formuler ainsi :

THÉORÈME.— *Soit* $\mathbf{G} = (X, X^\vee, R, R^\vee, \Phi)$ *un groupe générique. Il existe un ensemble fini, noté* $\mathbf{Uch}(\mathbf{G})$, *et une famille de polynômes* $m_\gamma(\phi, x)$ *(pour* γ *dans* $\mathbf{Uch}(\mathbf{G})$ *et* ϕ *dans* Φ*) avec la propriété suivante :*

Choisissons une incarnation (G, T, F) *de* $\mathbf{G}$, *correspondant au corps* $\mathbf{F}$, *à l'entier* q *et à l'élément* ϕ *de* Φ. *Supposons qu'il existe un sous-groupe de Borel* B *de* G, *stable par* F *et contenant* T. *Il existe une bijection* $\gamma \mapsto \rho_\gamma$ *de* $\mathbf{Uch}(\mathbf{G})$ *sur l'ensemble* $\mathcal{E}(G^F, 1)$ *des caractères unipotents de* G^F *telle que* $m_\gamma(w\phi, q)$ *soit égal à la multiplicité (positive ou négative) du caractère* ρ_γ *dans le caractère virtuel* $R^G_{w\phi}$.

Nous rappelons maintenant la théorie de Harish-Chandra. Nous fixons un groupe réductif fini G^F, un tore maximal T stable par F, et un sous-groupe de Borel B, stable par F et contenant T. On note U le plus grand sous-groupe unipotent invariant de B ; il est stable par F et B est produit semi-direct de T et de U.

(1) Puisque B est stable par F, on a une action de F sur $\mathcal{X} = G/B$.

Soit L un sous-groupe de Levi contenant T et stable par F. On suppose que L est le centralisateur d'un sous-tore S de T, stable par F et déployé (on dira que L est 1-*déployé*). Il existe alors un sous-groupe V de U, stable par F, et normalisé par L, tel que le sous-groupe P engendré par B et L soit produit semi-direct de L et V. Comme L^F normalise V^F, on a sur G^F/V^F une action à gauche de G^F et une action à droite de L^F. Les fonctions sur G^F/V^F à valeurs dans le corps de base K (comme dans les parties 1 et 2) forment un bimodule $H_{G,L}$ sur (KG^F, KL^F). Conformément à ce qu'on a vu au n° 2.2, le produit tensoriel par $H_{G,L}$ définit un foncteur $R_{L^F}^{G^F}$ de la catégorie des KL^F-modules dans celle des KG^F-modules. On a un foncteur adjoint ${}^*R_{L^F}^{G^F}$ de la catégorie des KG^F-modules dans celle des KL^F-modules.

On dit qu'un caractère λ dans $\mathrm{Irr}_K(G^F)$ est *cuspidal* (ou 1-cuspidal) si l'on a ${}^*R_{L^F}^{G^F}\lambda = 0$ pour tout sous-groupe de Levi 1-déployé L distinct de G. Le théorème de Harish-Chandra [B6] affirme l'existence d'*une partition de* $\mathrm{Irr}_K(G^F)$ *en familles* $HC(G^F, (L^F, \lambda))$ *où* L *parcourt l'ensemble des sous-groupes de Levi 1-déployés de* G (y compris G), *et* λ *l'ensemble des caractères 1-cuspidaux de* L^F ; *la famille correspondant à* L *et* λ *s'obtient en décomposant en caractères irréductibles le caractère* $R_{L^F}^{G^F}\lambda$.

En particulier, on a une partition de $\mathcal{E}(G^F, 1)$ en sous-familles $UHC(G^F, (L^F, \lambda))$, où λ parcourt l'ensemble des caractères 1-cuspidaux de $\mathcal{E}(L^F, 1)$. Énonçons les résultats fondamentaux :

A) *Pour tout groupe générique* $\mathbf{G}$, *il existe une partition de* $\mathbf{Uch(G)}$ *en familles* $\mathbf{Uch(G, (L, \lambda))}$, *où* $(\mathbf{L}, \lambda)$ *parcourt l'ensemble des classes de conjugaison des paires formées d'un sous-groupe de Levi générique* $\mathbf{L}$ *centralisateur d'un* Φ_1*-tore, et* λ *un élément "cuspidal" de* $\mathbf{Uch(L)}$. *Cette partition correspond par la bijection* $\gamma \mapsto \rho_\gamma$ *précédente à la partition de* $\mathcal{E}(G^F, 1)$ *en famille de Harish-Chandra* $UHC(G^F, (L^F, \lambda))$.

Autrement dit, la répartition en familles de Harish-Chandra est "générique".

B) *Soit* ℓ *un nombre premier, divisant* $q - 1$, *mais non l'ordre du groupe de Weyl* W. *Les familles de Harish-Chandra* $UHC(G^F, (L^F, \lambda))$ *donnent la répartition des caractères de* $\mathcal{E}(G^F, 1)$ *selon les* ℓ*-blocs. Enfin, le groupe de défaut du bloc correspondant à* (L^F, λ) *est le groupe* $Z(L)_\ell^F$ *des éléments* F*-invariants d'ordre* ℓ *dans le centre* $Z(L)$ *de* L ; *le groupe* L *est le centralisateur de ce groupe de défaut*

dans G.

Ce dernier énoncé est à mettre en relation avec la conjecture de Broué énoncée au n° 2.4. En effet, pour un groupe fini G dont les ℓ-groupes de Sylow sont abéliens, la décomposition en blocs doit se faire selon des paires (L, λ) où L est le centralisateur d'un ℓ-groupe et λ un caractère de défaut 0 de $L/Z(L)_\ell$.

3.5. Théorie de Harish-Chandra cyclotomique

Les résultats précédents élucident complètement la répartition des caractères unipotents du groupe réductif fini G^F en ℓ-blocs, pourvu que ℓ divise $q-1$. En particulier, *il y a identité entre caractères unipotents de défaut* 0 (pour ℓ) *et caractères unipotents cuspidaux.* Pour étudier le cas général, il convient de généraliser la théorie de l'induction à la Harish-Chandra.

Clarifions d'abord quelques points. Soit de nouveau G un groupe algébrique réductif et connexe, muni d'un endomorphisme de Frobenius F. On dispose d'une famille infinie de groupes finis, à savoir les groupes G^{F^m} de points fixes de l'itéré F^m de F (pour $m = 1, 2, \cdots$). Il existe alors un polynôme $P(x)$ dans $\mathbf{Z}[x]$ tel que l'ordre de G^{F^m} soit égal à $P(q^m)$ pour tout entier $m \geq 1$; cela caractérise le polynôme $P(x)$, qui n'est autre que l'ordre générique $|\mathbf{G}(x)|$. En particulier, si T est un tore déployé de dimension ℓ, on a $|T^{F^m}| = (q^m - 1)^\ell$. De même, un Φ_d-tore S de dimension ℓ est caractérisé par la formule[1] :

$$|S^{F^m}| = \Phi_d(q^m)^{\ell/\varphi(d)} \qquad \text{pour tout entier } m \geq 1. \tag{6}$$

Il y a une analogie formelle entre le théorème de Brauer rappelé au n° 1.6 et le théorème de Harish-Chandra. Nous considérons des paires (S, λ) où S est un tore stable par F et déployé dans G, de centralisateur L, et λ un caractère irréductible de L^F. On dira que *la paire* (S', λ') *domine la paire* (S, λ) si l'on a $S \subset S'$ et :

$$\langle \lambda \,,\, R^{L^F}_{L'^F}(\lambda') \rangle \neq 0 \,; \tag{7}$$

on notera que l'hypothèse $S \subset S'$ entraîne $L' \subset L$, et le foncteur $R^{L^F}_{L'^F}$ est défini car L et L' sont des sous-groupes de Levi 1-déployés.

[1] L'entier $\varphi(d)$ est le degré du polynôme cyclotomique $\Phi_d(x)$, c'est-à-dire l'indicateur d'Euler.

On a alors les traductions suivantes :

a) *Un caractère irréductible λ de L^F est cuspidal si et seulement si la paire (S,λ) (où L est le centralisateur du tore déployé S) est maximale pour la relation de domination.*

b) *Soit χ un caractère irréductible de G^F. Alors la paire $(1,\chi)$ est dominée par une paire maximale (S,λ).*

c) *Le groupe G^F opère transitivement dans l'ensemble des paires maximales dominant $(1,\chi)$.*

d) *Si (S,λ) est une paire maximale, et si L est le centralisateur de S, alors la famille de Harish-Chandra $HC(G^F,(L^F,\lambda))$ se compose des caractères irréductibles χ de G^F tels que (S,λ) domine la paire $(1,\chi)$.*

Pour établir la version cyclotomique, on définit d'abord la notion de *groupe de Levi d-déployé*[1], à savoir le centralisateur d'un Φ_d-tore. On considère ensuite des *Φ_d-paires* (S,λ) où S est un Φ_d-tore et λ un caractère irréductible de L^F (L est le centralisateur de S). La relation de domination est encore caractérisée par la formule (7), mais il faut remplacer l'induction de Harish-Chandra $R_{L'F}^{L^F}$ par *l'induction de Deligne-Lusztig* [B4]. Ceci se fait en construisant une variété algébrique convenable $\mathcal{X}_{L,L'}$ sur laquelle on a une action à gauche γ du groupe L^F et une action à droite δ du groupe L'^F. Grâce à la cohomologie étale de la variété $\mathcal{X}_{L,L'}$, on définit un caractère virtuel μ du groupe fini $L^F \times L'^F$ par la formule :

$$\mu(g,g') = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \operatorname{Tr}(\gamma(g)\,\delta(g'^{-1}) \mid H^i_{\text{et}}(\mathcal{X}_{L,L'},\mathbf{Q}_\ell)). \tag{8}$$

À ce caractère virtuel μ, on associe par les formules du n° 2.1 une application I_μ de $R_K(L'^F)$ dans $R_K(L^F)$, qu'on notera $R_{L'F}^{L^F}$ et une application R_μ en sens opposé, qu'on notera ${}^*R_{L'F}^{L^F}$. La construction $R_{L'F}^{L^F}$ contient comme cas particuliers celle du caractère $R_{w\phi}^G$ (*cf.* formule (5) du n° 3.4) et l'induction d'Harish-Chandra[2].

Soit L un Φ_d-sous-groupe de Levi de G. On dit qu'un caractère λ dans $\operatorname{Irr}_K(L^F)$ est *d-cuspidal* si l'on a ${}^*R_{L'F}^{L^F}\lambda = 0$ pour tout Φ_d-sous-groupe de Levi L'

[1] Terminologie de Broué, Malle et Michel. Je préfère parler de Φ_d-groupe de Levi.

[2] Si L est un sous-groupe de Levi 1-déployé de G, la variété $\mathcal{X}_{G,L}$ est l'ensemble fini G^F/V^F avec les notations du n° 3.4.

L' de L, distinct de L. On peut alors généraliser le théorème de Harish-Chandra et répartir les caractères irréductibles de G^F en *Φ_d-familles* $HC_d(G^F,(L^F,\lambda))$. De manière précise, les assertions a) à d) ci-dessus se transposent en remplaçant "cuspidal" par "d-cuspidal", "tore déployé" par "Φ_d-tore" et "paire" par "Φ_d-paire".

On peut résumer les résultats obtenus par une longue chaîne d'auteurs (voir les références [D1] à [D19]) par l'affirmation suivante :

C) *Soit G^F un groupe réductif fini, et soit $d \geq 1$ un entier. On considère un nombre premier ℓ divisant l'ordre du groupe G^F, mais non l'ordre du groupe de Weyl*[(1)]. *Supposons que ℓ divise $\Phi_d(q)$. Les Φ_d-familles de Harish-Chandra :*

$$UHC_d(G^F,(L^F,\lambda)) = HC_d(G^F,(L^F,\lambda)) \cap \mathcal{E}(G^F,1)$$

donnent la répartition des caractères unipotents selon les ℓ-blocs. Le groupe de défaut du bloc correspondant à (L^F,λ) est égal à $Z(L)^F_\ell$. De plus, un caractère unipotent est de défaut 0 (pour ℓ) si et seulement s'il est d-cuspidal.

Le résultat essentiel de Broué, Malle et Michel dans l'article [D7] est leur théorème 3.2 qui donne une *version générique* des résultats précédents. Il est hors de question de décrire ici la lourde machine nécessaire. On s'appuie sur la définition de l'ensemble $\mathbf{Uch(G)}$ des caractères unipotents génériques du groupe générique $\mathbf{G}$, du degré générique $\deg_\gamma(x)$ de ces caractères, et des multiplicités génériques $m_\gamma(\phi,x)$ (*cf.* le théorème du n° 3.4). En particulier, un caractère unipotent générique γ est d-cuspidal si et seulement s'il est de[(2)] Φ_d-défaut 0, c'est-à-dire si le polynôme $|\mathbf{G}(x)|/\deg_\gamma(x)$ n'est pas divisible par $\Phi_d(x)$. Un point important est que *les caractères intervenant dans la famille $UHC_d(G^F,(L^F,\lambda))$ sont en correspondance avec ceux d'un groupe de Weyl relatif $W_G(L,\lambda)$ par une isométrie* du style du n° 2.1, et qu'il existe une *version générique de cette isométrie.* Pour le moment, le théorème fondamental de [D7] nécessite une laborieuse vérification cas par cas.

Cet exposé aura atteint son but s'il a préparé le lecteur à une étude attentive du volume 212 d'Astérisque, contenant la description précise de ces résultats de Broué, Malle et Michel, et de bien d'autres.

---

(1) Lorsque le groupe G n'est pas déployé, il faut omettre quelques valeurs de ℓ, telles que 2 ou 3... suivant les cas.

(2) Cette notion a été introduite par Boyce dans [D1].

BIBLIOGRAPHIE RAISONNÉE

A. Ouvrages de référence

Voici une sélection d'ouvrages sur les groupes algébriques, les systèmes de racines et les groupes finis associés.

[A1] A. BOREL - *Linear algebraic groups*, Grad. Texts Math. **126**, Springer, 1991.

[A2] A. BOREL et J. TITS - *Groupes réductifs*, Publ. Math. I.H.E.S. **27** (1965), 55-151.

[A3] N. BOURBAKI - *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 4, 5 et 6, réimpression, Masson, 1981.

[A4] N. BOURBAKI - *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 7 et 8, réimpression, Masson, 1990.

[A5] R.W. CARTER - *Simple Groups of Lie Type*, Wiley, 1972.

[A6] R.W. CARTER - *Finite Groups of Lie Type : Conjugacy Classes and Complex Characters*, Wiley, 1985.

[A7] M. DEMAZURE - *Données radicielles*, Exposé XXI, Schémas en groupes III, un séminaire dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck, Lect. Notes in Math. **153** (1970), Springer.

[A8] F. DIGNE et J. MICHEL - *Representations of finite groups of Lie type*, Cambridge Univ. Press, 1991.

[A9] J. HUMPHREYS - *Linear algebraic groups*, Grad. Texts Math. **21**, Springer, 1975.

[A10] G. LUSZTIG - *Characters of reductive groups over a finite field*, Ann. Math. Studies **107**, Princeton Univ. Press, 1984.

[A11] T.A. SPRINGER - *Linear algebraic groups*, Prog. Math. **9**, Birkhaüser, 1981.

[A12] T.A. SPRINGER et R. STEINBERG - *Conjugacy classes*, in Borel *et al.*, Seminar on algebraic groups and related finite groups, Lect. Notes in Math. **131** (1970), Springer.

[A13] R. STEINBERG - *Endomorphisms of linear algebraic groups*, A.M.S. Memoirs **80** (1968).

[A14] R. STEINBERG - *Lectures on Chevalley groups*, Yale University, 1967.

Passons maintenant aux représentations des groupes finis, leurs caractères et les blocs.

[A15] C. CHEVALLEY - *Théorie des blocs*, Sém. Bourbaki, exp. n° 419, Lect. Notes in Math. **383** (1974), Springer.

[A16] C.W. CURTIS et I. REINER - *Methods in representation theory*, I, II, Wiley, 1981/1987.

[A17] W. FEIT - *The representation theory of finite groups*, North-Holland Publ., 1982.

[A18] J.-P. SERRE - *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1978.

B. Classification et construction des caractères

Par ordre chronologique, voici les trois rapports au Séminaire Bourbaki sur les représentations des groupes de Chevalley finis :

[B1] T.A. SPRINGER - *Caractères de groupes de Chevalley finis*, exp. n° 429, Lect. Notes in Math. **383** (1974), Springer.

[B2] J.-P. SERRE - *Représentations linéaires des groupes finis "algébriques" [d'après Deligne-Lusztig]*, exp. n° 487, Lect. Notes in Math. **567** (1977), Springer.

[B3] P. CARTIER - *Détermination des caractères des groupes finis simples : travaux de Lusztig*, exp. n° 658, Astérisque **145-146** (1987), 137-161.

Voici les articles "historiques" sur la construction et la décomposition des caractères de ces mêmes groupes.

[B4] P. DELIGNE et G. LUSZTIG - *Representations of reductive groups over finite fields*, Annals of Math. **103** (1976), 103-161.

[B5] F. DIGNE et J. MICHEL - *Théorie de Deligne-Lusztig et caractères des groupes linéaires et unitaires*, J. of Algebra **107** (1987), 217-255.

[B6] HARISH-CHANDRA - *Eisenstein series over finite fields*, **in** "Functional analysis and related fields" (F.E. Browder, édit.), pages 76 à 88, Springer, 1970.

[B7] P.N. HOEFSMIT - *Representations of Hecke algebras of finite groups with BN-pairs of classical type*, Ph.D. Thesis, Univ. of British Columbia (1974).

[B8] R.B. HOWLETT et G.I. LEHRER - *Induced cuspidal representations and generalized Hecke rings*, Invent. Math. **58** (1980), 37-64.

[B9] R.B. HOWLETT et G.I. LEHRER - *Representations of generic algebras and finite groups of Lie type*, Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), 753-779.

[B10] G. LUSZTIG - *Irreducible representations of finite classical groups*, Invent. Math. **43** (1977), 125-175.

C. Groupes finis engendrés par des réflexions

[C1] C. CHEVALLEY - *Invariants of finite groups generated by reflections*, Amer. J. Math. **77** (1955), 778-782.

[C2] A.M. COHEN - *Finite complex reflection groups*, Ann. Sci. E.N.S. **9** (1976), 379-436.

[C3] H.S.M. COXETER - *Finite groups generated by unitary reflections*, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **31** (1967), 125-135.

[C4] L.L. GROVE et C.T. BENSON - *Finite reflection groups*, Grad. Texts Math. **99**, Springer, 1985.

[C5] G.C. SHEPHARD et J.A. TODD - *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math. **6** (1954), 274-304.

[C6] T.A. SPRINGER - *Regular elements of finite reflection groups*, Invent. Math. **25** (1974), 159-198.

D. Blocs des groupes réductifs finis

[D1] R. BOYCE - *Cyclotomic polynomials and irreducible representations of finite groups of Lie type*, manuscrit non publié.

[D2] M. BROUÉ - *Les ℓ-blocs des groupes* $\mathrm{GL}(n,q)$ *et* $U(n,q^2)$ *et leurs structures locales*, Sém. Bourbaki, exp. n° 640, Astérisque **133-134** (1986), 159-188.

[D3] M. BROUÉ et J. MICHEL - *Blocs et séries de Lusztig dans un groupe réductif fini*, J. reine angew. Math. **395** (1989), 56-67.

[D4] M. BROUÉ et G. MALLE - *Théorèmes de Sylow génériques pour les groupes réductifs sur les corps finis*, Math. Ann. **292** (1992), 241-262.

[D5] M. BROUÉ et G. MALLE - *Zyklotomische Hecke Algebren*, Astérisque **212** (1993), 119-189.

[D6] M. BROUÉ et J. MICHEL - *Blocs à groupes de défaut abéliens des groupes réductifs finis*, Astérisque **212** (1993), 93-117.

[D7] M. BROUÉ, G. MALLE et J. MICHEL - *Generic blocks of finite reductive groups*, Astérisque **212** (1993), 7-92.

[D8] M. CABANES et M. ENGUEHARD - *On unipotent blocks of finite reductive groups of a given type*, Math. Z. **213** (1993), 479-490.

[D9] M. CABANES et M. ENGUEHARD - *On unipotent blocks and their ordinary characters*, Invent. Math. **117** (1994), 149-164.

[D10] M. CABANES et M. ENGUEHARD - *On general blocks of finite reductive groups : ordinary characters and defect groups*, Publications du LMENS, **93-13** (1993).

[D11] P. FONG et B. SRINIVASAN - *The blocks of finite general and unitary groups*, Invent. Math. **69** (1982), 109-153.

[D12] P. FONG et B. SRINIVASAN - *The blocks of finite classical groups*, J. reine angew. Math. **396** (1989), 122-191.

[D13] P. FONG et B. SRINIVASAN - *Generalized Harish-Chandra theory for unipotent characters of finite classical groups*, J. of Algebra **104** (1986), 301-309.

[D14] M. GECK - *A classification of ℓ-blocks of finite groups of Lie type*, J. of Algebra **151** (1992), 180-191.

[D15] G. HISS - *Zerlegungszahlen endlicher Gruppen vom Lie-Typ in nicht-definierender Charakteristik*, thèse, 1990.

[D16] G. LUSZTIG - *Coxeter groups and unipotent representations*, Astérisque **212** (1993), 191-203.

[D17] G. LUSZTIG - *Exotic Fourier transform* (with an Appendix by G. Malle), Duke Math. Journ. **73** (1994), 227-248.

[D18] Ll. PUIG - *Algèbres de sources de certains blocs des groupes de Chevalley*, Astérisque **181-182** (1990), 221-236.

[D19] K. SCHEWE - *Blöcke exzeptionneller Chevalley-Gruppen*, Bonner Math. Schriften **165**, Bonn, 1985.

E. Théorie locale des blocs ; équivalence dérivée

[E1] J.L. ALPERIN et M. BROUÉ - *Local Methods in Block Theory*, Annals of Math. **110** (1979), 143-157.

[E2] M. BROUÉ - *Théorie locale des blocs*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley (1986), vol. 1, 360-368.

[E3] M. BROUÉ - *Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées*, Astérisque **181-182** (1990), 61-92.

[E4] M. BROUÉ - *Isométries de caractères et équivalences de Morita ou dérivées*, Publ. Math. I.H.E.S. **71** (1990), 45-63.

[E5] M. BROUÉ - *Equivalence of blocks of group algebras*, dans "Finite dimensional algebras and related topics", (V. Dlab et L. Scott édit.), Kluwer Acad. Publ., 1994.

[E6] M. BROUÉ - *Rickard equivalence and block theory*, Publications du LMENS, **94-1** (1994).

[E7] M. BROUÉ et Ll. PUIG - *A Frobenius theorem for blocks*, Invent. Math. **56** (1980), 117-128.

[E8] D. HAPPEL - *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*, Cambridge Univ. Press, 1988.

[E9] M. LINCKELMANN - *Derived equivalence for cyclic blocks over a p-adic ring*, Math. Z. **207** (1991), 293-304.

[E10] Ll. PUIG - *Local block theory in p-solvable groups*, B. Cooperstein and G. Mason éd., "The Santa Cruz Conference on Finite Groups", Proc. Symp. Pure Math., vol. XXXVII, Amer. Math. Soc., 1980.

[E11] Ll. PUIG - *Nilpotent blocks and their source algebras*, Invent. Math. **93** (1988), 77-116.

[E12] Ll. PUIG - *Local fusion in block source algebras*, J. of Algebra **104** (1986), 358-369.

[E13] J. RICKARD - *Morita Theory for Derived Categories*, J. London Math. Soc. **39** (1989), 436-456.

[E14] J. RICKARD - *Derived categories and stable equivalences*, J. Pure and Appl. Alg. **61** (1989), 307-317.

[E15] J. RICKARD - *Derived equivalences as derived functors*, J. London Math. Soc. **43** (1991), 37-48.

[E16] J. RICKARD - *Finite group actions and etale cohomology*, prépublication (1992).

[E17] R. ROUQUIER - *Isométries parfaites dans les blocs à défaut abélien des groupes symétriques et sporadiques*, J. of Algebra **168** (1994), 648-694.

Pierre CARTIER

D.M.I.
URA 762 du CNRS
École Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
F-75230 PARIS Cedex 05

et

I.H.E.S.
35, route de Chartres
F-91440 BURES-sur-YVETTE

Astérisque

BAS EDIXHOVEN

Rational torsion points on elliptic curves over number fields

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 782, p. 209-227

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__209_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Mars 1994
46ème année, 1993-94, n° 782

RATIONAL TORSION POINTS ON ELLIPTIC CURVES OVER NUMBER FIELDS
[after Kamienny and Mazur]

by **Bas EDIXHOVEN**

1. INTRODUCTION

Let E be an elliptic curve over a number field K. In other words, K is a finite field extension of $\mathbf{Q}$ and E is a non-singular algebraic curve in the projective plane $\mathbf{P}^2_K$ over K given by an equation of the form $y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3$, with a, b in K such that $4a^3 + 27b^2 \neq 0$. For each field extension L of K, we denote by $E(L)$ the set of L-rational points of E; the point $(0,1,0)$ in $E(K)$ will be denoted by 0_E. It is well known that the sets $E(L)$ have a unique stucture of abelian group with 0_E as origin, such that $P_1 + P_2 + P_3 = 0_E$ whenever P_1, P_2 and P_3 are the three intersection points (counted with multiplicity) of E with a straight line. For example, $E(\mathbf{C})$ is isomorphic to a group of the form $\mathbf{C}/\Lambda$ with Λ a lattice in $\mathbf{C}$. This already shows that the torsion subgroup $E(\mathbf{C})_{\text{tors}}$ of $E(\mathbf{C})$ is isomorphic to $\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \times \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

The theorem of Mordell-Weil states that $E(K)$ is finitely generated, hence isomorphic to $\mathbf{Z}/n_1\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n_2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^r$ with $n_1|n_2$, $n_1 > 0$, $n_2 > 0$ and $r \geq 0$. The pair (n_1, n_2) is the isomorphism type of $E(K)_{\text{tors}}$; the integer r is called the rank of $E(K)$.

1.1. Conjecture. *For every integer $d \geq 1$ there exists an integer B_d such that for every number field K of degree d (over $\mathbf{Q}$) and every elliptic curve E over K one has: $|E(K)_{\text{tors}}| < B_d$.*

This conjecture is known as the strong uniform boundedness conjecture, the word "strong" meaning that the bound is uniform in all number fields of degree d.

Let us introduce some notation. For $d \geq 1$ we define $\Phi(d)$ to be the set of isomorphism types of the groups $E(K)_{\text{tors}}$ with E an elliptic curve over a number field K with $[K : \mathbf{Q}] = d$. We define $S(d)$ to be the set of primes p for which there exists an elliptic curve E over a number field K with $[K : \mathbf{Q}] = d$ and $|E(K)_{\text{tors}}|$ divisible by p. With this terminology, Conjecture 1.1 is clearly equivalent to the statement that for all d, $\Phi(d)$ is a finite set. The results obtained by Kamienny and Mazur can now be stated as follows.

1.2. Theorem. [1]

1. *For $d \leq 8$ the set $\Phi(d)$ is finite (Kamienny [8], see also [9]).*

2. *The sets $S(d)$ have density zero for all d ([9]).*

3. *$\Phi(d)$ is finite if and only if $S(d)$ is finite ([9]).*

Furthermore, the sets $S(1)$, $S(2)$, $\Phi(1)$ and $\Phi(2)$ are known:

$$\begin{aligned}\Phi(1) &= \{(1,m) \mid 1 \leq m \leq 10\} \cup \{(1,12)\} \cup \{(2,2m) \mid 1 \leq m \leq 4\} \\ \Phi(2) &= \{(1,m) \mid 1 \leq m \leq 16\} \cup \{(1,18)\} \cup \{(2,2m) \mid 1 \leq m \leq 6\} \cup \\ &\quad \{(3,3m) \mid 1 \leq m \leq 2\} \cup \{(4,4)\}\end{aligned}$$

The set $\Phi(1)$ was determined by Mazur [17] in 1976, see also [18], using results of Kubert [13]. This result was at that time known as a conjecture of Ogg ([22]), but in fact it had already been conjectured by B. Levi ([15]) in 1908 (see a forthcoming article by Schappacher and Schoof). The determination of $\Phi(2)$ uses work of Kamienny, Kenku and Momose (see [11]). Part 3 of Theorem 1.2 is an easy consequence of a result of Frey (1992), which in turn is an easy consequence of a theorem of Faltings (see §6). A "local" version of the uniform boundedness conjecture was proved by Manin in 1969: he showed that for any number field K and any prime p there exists an integer $e \geq 0$ such that no elliptic curve over K has a rational point of order p^e (see [16] and [23]).

[1] See §7 for more recent results. In particular, Conjecture 1.1 is now a theorem of Merel.

2. RELATION WITH OTHER CONJECTURES

It is easily seen that the ABC-conjecture for a number field K implies a uniform bound for $|E(K)_{\text{tors}}|$ (see [4]). The same is true for the height conjecture for elliptic curves over K (see [4]). Instead of considering elliptic curves over number fields of degree d, one might consider abelian varieties over $\mathbf{Q}$ of dimension d. Restriction of scalars à la Weil shows that Conjecture 1.1 is a consequence of:

2.1. Conjecture. *For every $d \geq 0$ there exists an integer B'_d with the property that $|A(\mathbf{Q})_{\text{tors}}| < B'_d$ for all d-dimensional abelian varieties over $\mathbf{Q}$.*

It seems almost nothing is known about this conjecture, see [24] and references therein.

3. MAZUR'S METHOD FOR THE NUMBER FIELD Q

Let E be an elliptic curve over a number field K and $P \in E(K)$ a point of prime order N. Let $\mathcal{O}_K$ be the ring of integers of K and let $\mathbf{F}_q$ (q some prime power) be a residue field of $\mathcal{O}_K$. Let $\tilde{E}$ be the fibre over $\mathbf{F}_q$ of the Néron model of E, and let $\tilde{P}$ in $\tilde{E}(\mathbf{F}_q)$ be the reduction of P. Suppose that N does not divide q. Then elementary theory of group schemes shows that $\tilde{P}$ has order N. Now $\tilde{E}$ is of one of the following three types:

good reduction: $\tilde{E}$ is an elliptic curve over $\mathbf{F}_q$, hence $|\tilde{E}(\mathbf{F}_q)| \leq (q^{1/2}+1)^2$, so $N \leq (q^{1/2}+1)^2$;

additive reduction: there is an exact sequence $0 \to \mathbf{G}_{\mathrm{a},\mathbf{F}_q} \to \tilde{E} \to \Phi \to 0$ with $|\Phi(\mathbf{F}_q)| \leq 4$; since $\mathbf{G}_{\mathrm{a},\mathbf{F}_q}(\mathbf{F}_q) \cong \mathbf{F}_q$, one has $N \leq 3$;

multiplicative reduction: there is an exact sequence $0 \to T \to \tilde{E} \to \Phi \to 0$ with $T = \mathbf{G}_{\mathrm{m},\mathbf{F}_q}$ or $T = \widetilde{\mathbf{G}_{\mathrm{m},\mathbf{F}_q}}$ (the unique non-trivial twist) and $\Phi(\mathbf{F}_q) = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ for some n, so in this case one has $N|(q-1)$ or $N|(q+1)$ or $N|n$.

We conclude that in order to prove that $S(1) \subset \{2,3,5,7,13\}$, it suffices to prove that an elliptic curve over $\mathbf{Q}$ with a point of prime order $N \notin \{2,3,5,7,13\}$ does not have multiplicative reduction at 3.

So let us suppose that we have $P \in E(\mathbf{Q})$ of prime order N with N not in $\{2,3,5,7,13\}$. Our goal is now to show that E does not have multiplicative reduction at 3 (actually, with a bit more work one can show that E has potentially good reduction at all $p \geq 3$). The idea of the proof is to interpret (E,P) as a $\mathbf{Q}$-rational point of some moduli space, and to study the reduction of that point modulo 3.

Let $X_0(N)$ be the coarse moduli space of generalized elliptic curves equipped with a subgroup scheme of rank N which meets all irreducible components in all geometric fibres ([2], [10]). It is known that $X_0(N)$ is a projective curve over $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, smooth over $\mathbf{Z}[1/N]$. Its fibre $X_0(N)_{\mathbf{F}_N}$ over $\mathbf{F}_N$ has two irreducible components which are both smooth, of genus zero and which intersect transversally in the so-called supersingular points. The genus of $X_0(N)$ is roughly $N/12$ and the condition $N \notin \{2,3,5,7,13\}$ means precisely that $X_0(N)$ has positive genus. By construction, a pair $(E/S, G)$ with E an elliptic curve over a scheme S and G a subgroup scheme of rank N of E gives an S-valued point of $X_0(N)$. Points of $X_0(N)$ with values in an algebraically closed field k correspond to isomorphism classes of objects $(E/k, G)$. The Riemann surface $X_0(N)(\mathbf{C})$ can be obtained by adding two points (called the cusps 0 and ∞) to $\Gamma_0(N)\backslash\mathbf{H}$ (the quotient of the upper half plane by the congruence subgroup $\Gamma_0(N)$ of $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$). The cusp ∞ corresponds to a projective line with its points 0 and ∞ identified, equipped with its subgroup μ_N. The cusp 0 corresponds to an N-gon of projective lines, equipped with a subgroup $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ meeting all N projective lines. In fact 0 and ∞ give $\mathbf{Z}$-valued points of $X_0(N)$; the complement of 0 and ∞ is the moduli space for elliptic curves with a subgroup scheme of rank N.

Let $J_0(N)$ be the Néron model over $\mathbf{Z}$ of the jacobian of $X_0(N)_{\mathbf{Q}}$. Its restriction to $\mathbf{Z}[1/N]$ is an abelian scheme whose fibres have dimension equal to the genus of $X_0(N)$. The points of $J_0(N)$ with values in a field k of characteristic different from N correspond to divisor classes of degree zero on $X_0(N)_k$, modulo principal divisors. The fibre over $\mathbf{F}_N$ of $J_0(N)$ sits in an exact sequence

$$0 \to \text{torus} \to J_0(N)_{\mathbf{F}_N} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to 0, \qquad n = \mathrm{num}\left(\frac{N-1}{12}\right)$$

with the group $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ generated by the reduction mod N of the point c in $J_0(N)(\mathbf{Q})$ of order n given by the divisor class $c = (0) - (\infty)$.

Let $\mathbf{T}$ be the endomorphism ring of $J_0(N)$; it is generated by the Hecke operators T_p ($p \neq N$ prime) and the Atkin-Lehner involution w_N. It will be convenient to work with the Hecke operators T_m for all $m \geq 1$; these are defined as follows: $T_N = -w_N$ and one formally has the Euler product:

$$\left(1 - T_N N^{-s}\right)^{-1} \prod_{l \neq N} \left(1 - T_l l^{-s} + l^{1-2s}\right)^{-1} = \sum_{m \geq 1} T_m m^{-s}$$

If one interprets $\mathrm{H}^0(J_0(N)_{\mathbf{C}}, \Omega^1) = \mathrm{H}^0(X_0(N)_{\mathbf{C}}, \Omega^1)$ as the space of cuspidal modular forms of weight two on $\Gamma_0(N)$ and uses q-expansions, these operators are given by the usual formulas. This implies that the coefficient of q^m of an eigenform with eigenvalue a_m for T_m, equals a_m times the coefficient of q. The ring $\mathbf{T}$ is commutative, reduced, free of rank $\dim(J_0(N)_{\mathbf{Q}})$ as $\mathbf{Z}$-module. The $\mathbf{Q}$-algebra $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{T}$ is a product of totally real fields and $\mathrm{Spec}(\mathbf{T})$ is connected. For each prime number $p \neq N$ one has the Eichler-Shimura identity in $\mathrm{End}_{\mathbf{F}_p}(J_0(N)_{\mathbf{F}_p})$:

$$T_p = \mathrm{Frob}_p + \mathrm{Ver}_p, \qquad \text{where } \mathrm{Frob}_p \mathrm{Ver}_p = \mathrm{Ver}_p \mathrm{Frob}_p = p$$

Weil's theorem on the eigenvalues of Frobenius endomorphisms of abelian varieties then implies that for any homomorphism $\phi: \mathbf{T} \to \mathbf{C}$ and for any prime $p \neq N$, one has $|\phi(T_p)| \leq 2p^{1/2}$.

The action of $\mathbf{T}$ on c is as follows: $T_p(c) = (p+1)c$ for all primes $p \neq N$, and $w_N(c) = -c$. Let $I \subset \mathbf{T}$ be the annihilator of c. It follows that $\mathbf{T}/I = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ and that I is generated by the $T_p - p - 1$ ($p \neq N$ prime), $w_N + 1$ and n (actually one doesn't need n). The ideal $I \subset \mathbf{T}$ is called the Eisenstein ideal because it corresponds to congruences between cuspidal forms and non-cuspidal forms on $\Gamma_0(N)$ of weight two ([17], page 37).

Let $\mathbf{T}_I := \varprojlim \mathbf{T}/I^m$ be the I-adic completion of $\mathbf{T}$. The ideal γ_I of $\mathbf{T}$ is then defined to be the kernel of the map $\mathbf{T} \to \mathbf{T}_I$. In other words, γ_I is the intersection of the minimal prime ideals $\mathfrak{p}$ of $\mathbf{T}$ with $\mathfrak{p} + I \neq \mathbf{T}$. Phrased differently: $\mathrm{Spec}(\mathbf{T}/\gamma_I)$ is the union of the irreducible components of $\mathrm{Spec}(\mathbf{T})$ that have non-empty intersection with $\mathrm{Spec}(\mathbf{T}/I)$.

Let $\gamma_I J_0(N)_{\mathbf{Q}}$ be the abelian subvariety of $J_0(N)_{\mathbf{Q}}$ generated by the $tJ_0(N)_{\mathbf{Q}}$, $t \in \gamma_I$. The Eisenstein quotient $J_{\mathbf{Q}}$ is then defined by: $J_{\mathbf{Q}} := J_0(N)_{\mathbf{Q}}/\gamma_I J_0(N)_{\mathbf{Q}}$. Let J be its Néron model over $\mathbf{Z}$. By construction, $\mathbf{T}/\gamma_I$ acts faithfully on J. The following theorem is one of the main results of [17] (see also [19]).

3.1. Theorem (Mazur). *The group $J(\mathbf{Q})$ is torsion, and in fact, $J(\mathbf{Q})$ is generated by c, hence cyclic of order n.*

Let $X_0(N)^{\mathrm{sm}} \subset X_0(N)$ be the biggest open part which is smooth over $\mathbf{Z}$ (i.e., $X_0(N)^{\mathrm{sm}}$ is the complement of the set of double points in characteristic N). The points 0 and ∞ in $X_0(N)(\mathbf{Z})$ are in fact in $X_0(N)^{\mathrm{sm}}(\mathbf{Z})$. Let $X_0(N)^{\mathrm{sm}} \to J_0(N)$ be the usual embedding of a curve in its jacobian, normalized by the condition that ∞ is sent to 0. By composition with the canonical map $J_0(N) \to J$ we get a morphism $f: X_0(N)^{\mathrm{sm}} \to J$.

3.2. Theorem (Mazur). *(See [18].) The morphism f is a formal immersion at ∞, away from characteristic 2. In other words, the cotangent space $\mathrm{Cot}_0(J_{\mathbf{Z}[1/2]})$ of $J_{\mathbf{Z}[1/2]}$ at 0 maps surjectively to $\mathrm{Cot}_\infty(X_0(N)_{\mathbf{Z}[1/2]})$, or equivalently, for each prime $p \neq 2$ the map from $\mathrm{Cot}_0(J_{\mathbf{F}_p})$ to $\mathrm{Cot}_\infty(X_0(N)_{\mathbf{F}_p})$ is non-zero.*

Proof. The hypothesis that p is not equal to 2 implies that $\mathrm{Cot}_0(J_{\mathbf{F}_p})$ maps injectively to $\mathrm{Cot}_0(J_0(N)_{\mathbf{F}_p})$. Because $J_0(N)$ is a (commutative) group scheme, we have a canonical isomorphism $\Omega^1_{J_0(N)/\mathbf{Z}} \cong \pi^*\mathrm{Cot}_0(J_0(N))$ ($\pi: J_0(N) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$), inducing $\mathrm{Cot}_0(J_0(N)) \cong \mathrm{H}^0(J_0(N), \Omega^1_{J_0(N)/\mathbf{Z}})$. Composing with the pullback of differential forms along f gives an isomorphism:

$$\mathrm{Cot}_0(J_0(N)) \cong \mathrm{H}^0(J_0(N), \Omega^1_{J_0(N)/\mathbf{Z}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(X_0(N)^{\mathrm{sm}}, \Omega^1_{X_0(N)/\mathbf{Z}}) = S(N,2)$$

where $S(N,2)$ is the $\mathbf{Z}$-module of cusp forms over $\mathbf{Z}$ of weight two on $\Gamma_0(N)$. With this identification, the map $\mathrm{Cot}_0(J_0(N)) \to \mathrm{Cot}_\infty(X_0(N))$ corresponds to evaluating at ∞. The Tate curve over $\mathbf{Z}((q))$ shows that dq is a $\mathbf{Z}$-basis of $\mathrm{Cot}_\infty(X_0(N))$; the q here can be interpreted as the function $z \mapsto \exp(2\pi i z)$ on the upper half plane $\mathbf{H}$. So finally we see that the map on cotangent spaces corresponds to the map:

$$S(N,2) \to \mathbf{Z}, \qquad \left(\sum_{m \geq 1} a_m q^m\right)(dq)/q \mapsto a_1$$

Let $p > 2$ and let $\omega \neq 0$ be an eigenvector for $\mathbf{T}$ in $\mathrm{Cot}_0(J_{\overline{\mathbf{F}}_p})$. Since $p > 2$, ω has non-zero image in $S(N,2)_{\mathbf{F}_p}$; this image is an eigenvector for $\mathbf{T}$, hence it has $a_1 \neq 0$. □

With all this, we can finish Mazur's proof that the elliptic curve E does not have multiplicative reduction at 3. So suppose that E has multiplicative reduction at 3. Since $N \geq 11 > 3+1$, $\tilde{P}$ in $\tilde{E}(\mathbf{F}_3)$ has non-zero image in $\Phi(\mathbf{F}_3)$. This means that the $\mathbf{Q}$-rational point $(E/\mathbf{Q}, \langle P \rangle)$ of $X_0(N)$ specializes to the cusp 0 modulo 3. Let x be the $\mathbf{Q}$-rational point corresponding to $(E/\langle P \rangle, E[N]/\langle P \rangle)$; then x specializes to ∞ modulo 3. We consider $f(x) \in J(\mathbf{Q})$. By Thm. 3.1, $f(x)$ is torsion. By Thm. 3.2, $f(x)$ is not zero (this can be seen in the completion of $X_0(N)$ along ∞). But this is in contradiction with the following lemma, whose proof is an elementary calculation with formal groups.

3.3. Lemma. *Let R be a discrete valuation ring of characteristic 0 and with residue field k of characteristic p. Let G be a smooth group scheme over R. Let $x \in G(R)$ be torsion. Suppose that the valuation of p is strictly less than $p-1$. Then the specialization x_k has the same order as x.*

4. KAMIENNY'S GENERALIZATION OF MAZUR'S METHOD

Let $d \geq 1$, K a number field of degree d, E an elliptic curve over K and $P \in E(K)$ a point of prime order N. Let $y \in X_0(N)(K)$ be the point corresponding to $(E/\langle P \rangle, E[N]/\langle P \rangle)$. The idea is now to look at the $\mathbf{Q}$-rational point $x := \sum_\sigma \sigma(y)$, with $\sigma: K \to \mathbf{C}$, of the dth symmetric power $X_0(N)^{(d)}$ of $X_0(N)$. By definition, $X_0(N)^{(d)}$ is the quotient by the symmetric group S_d acting on the dth power $X_0(N)^d$. Hence $X_0(N)^{(d)}$ is proper over $\mathbf{Z}$, smooth of relative dimension d over $\mathbf{Z}[1/N]$. To give a k-valued point of $X_0(N)^{(d)}$, where k is a perfect field, is the same as giving an effective divisor of degree d on $X_0(N)_k$.

Let $f_d: X_0(N)^{(d)}_{\mathbf{Z}[1/N]} \to J_{\mathbf{Z}[1/N]}$ be the usual map from the symmetric product of a curve to its jacobian, normalized by the condition that $d\cdot\infty$ is sent to 0. We apply Mazur's method to x and f_d.

Suppose $p > 2$ is a prime such that $N > (p^{d/2} + 1)^2$. Then at each residue field of $\mathcal{O}_K$ of characteristic p, E has multiplicative reduction, and $\tilde{P}$ has non-zero image in Φ; in other words, all specializations to characteristic p of the K-valued point y of $X_0(N)$ are ∞. This means that x specializes to $d\cdot\infty$ modulo p. If moreover f_d is a formal immersion at the point $d\cdot\infty$ modulo p, then we obtain a

contradiction as before: $f_d(x)$ is torsion, $f_d(x)$ is not zero and $f_d(x)$ specializes to 0 modulo p. These arguments prove the following proposition.

4.1. Proposition. *Let $d \geq 1$, $N \in S(d)$ and suppose that f_d is a formal immersion at $d\cdot\infty$ modulo a prime $p > 2$. Then $N \leq (p^{d/2}+1)^2$.* □

Recall that $X_0(N)$ has a formal local coordinate q at ∞. Hence $X_0(N)^d$ has formal local coordinates $q_1, \ldots, q_d$ at $(\infty, \ldots, \infty)$. The elementary symmetric functions $\sigma_1 = q_1 + \cdots + q_d, \ldots, \sigma_d = q_1 \cdots q_d$ are then formal local coordinates of $X_0(N)^{(d)}$ at $d\cdot\infty$, so $d\sigma_1, \ldots, d\sigma_d$ is a $\mathbf{Z}$-basis for $\mathrm{Cot}_{d\cdot\infty}(X_0(N)^{(d)})$.

4.2. Lemma. *Let ω be in $\mathrm{Cot}_0(J)$, or, equivalently, in $\mathrm{H}^0(J, \Omega^1_{J/\mathbf{Z}})$. Then $f_1^*(\omega)$ is a differential form on $X_0(N)_{\mathbf{Z}[1/N]}$, say with q-expansion $(\sum_{m\geq 1} a_m q^m)(dq)/q$. We have:*

$$f_d^*(\omega) = a_1 d\sigma_1 - a_2 d\sigma_2 + \cdots + (-1)^{d+1} a_d d\sigma_d \qquad \text{in } \mathrm{Cot}_{d\cdot\infty}(X_0(N)^{(d)}_{\mathbf{Z}[1/N]}).$$

Proof. Let $g: X_0(N)^d \to X_0(N)^{(d)}$ be the canonical map. For $m \geq 1$ define $s_m = q_1^m + \cdots + q_d^m$. Then

$$g^* f_d^*(\omega) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{m\geq 1} a_m q_i^m \, (dq_i)/q_i = \sum_{m\geq 1} a_m m^{-1} ds_m$$

From Newton's identities

$$s_m - \sigma_1 s_{m-1} + \cdots + (-1)^{m-1} \sigma_{m-1} s_1 + (-1)^m m\sigma_m = 0$$

one sees that

$$m^{-1} ds_m = (-1)^m d\sigma_m \qquad \text{in } \mathrm{Cot}_{d\cdot\infty}(X_0(N)^{(d)}).$$

This finishes the proof. □

4.3. Theorem (Kamienny's criterion). *Let $d \geq 2$ and $N \in S(d)$. Suppose that the images $T_1', \ldots, T_d'$ in $\mathbf{T}/\gamma_I$ of $T_1, \ldots, T_d \in \mathbf{T}$ are linearly independent. Then $N \leq 2^{d+1}(d!)^{5d/2}$.*

Proof. By the q-expansion principle, $\mathrm{Tan}_0(J_0(N))$ is a locally free $\mathbf{T}$-module of rank 1. Since $\mathbf{Q}\otimes\mathbf{T}$ is a product of fields, $\mathbf{Q}\otimes S(N,2)$ is a free $\mathbf{Q}\otimes\mathbf{T}$-module of rank 1. It follows that $\mathbf{Q}\otimes S(N,2)[\gamma_I]$ (forms annihilated by γ_I) is a free module of rank 1 over $\mathbf{Q}\otimes(\mathbf{T}/\gamma_I)$. Let $\omega_1,\ldots,\omega_r$ be a basis of $\overline{\mathbf{Q}}\otimes S(N,2)[\gamma_I]$ consisting of normalized eigenforms for $\mathbf{T}$, and write $\omega_i=\sum_{m\geq 1}a_{i,m}q^m(dq)/q$ (normalized means that $a_{i,1}=1$ for all i). Let $R\subset\overline{\mathbf{Q}}$ be the ring generated by the $a_{i,m}$. Then, as a $\mathbf{Z}$-module, R is free of some rank t, say. The hypothesis that $T_1',\ldots,T_d'$ are linearly independent means that the $(a_{i,1},\ldots,a_{i,d})$, $1\leq i\leq r$, generate the $\overline{\mathbf{Q}}$-vector space $\overline{\mathbf{Q}}^d$. Note that Lemma 4.2 implies that $f_d\colon X_0(N)^{(d)}_{\mathbf{Q}}\to J_{\mathbf{Q}}$ is a formal immersion at $d\cdot\infty$.

Exactness properties of Néron models show that the torsion of the quotient $\mathrm{Cot}_0(J_0(N))/\mathrm{Cot}_0(J)$ is killed by 2 (compare [18], Cor. 1.1). Hence $\omega_1,\ldots,\omega_r$ can be viewed as elements of $R[1/2]\otimes\mathrm{Cot}_0(J)$.

After renumbering, we may suppose that $\Delta:=\det(a_{i,m})_{1\leq i,m\leq d}$ is non-zero. Recall that for all embeddings $R\to\mathbf{C}$ and all prime numbers $l\neq N$ one has $|a_{i,l}|\leq 2l^{1/2}$, and that $a_{i,N}=\pm 1$. For arbitrary m one has $|a_{i,m}|\leq\sigma_0(m)m^{1/2}$, where $\sigma_0(m)$ is the number of positive divisors of m. Hence for the norm of Δ one has:

$$|N(\Delta)|\leq\left(d!\cdot(d!)^{1/2}\sigma_0(2)\cdots\sigma_0(d)\right)^t\leq(d!)^{5t/2}$$

Suppose now that $p>2$ is a prime such that f_d is not a formal immersion at ∞ modulo p. Then p divides the index of $f_d^*\mathrm{Cot}_0(J)$ in $\mathrm{Cot}_{d\cdot\infty}(X_0(N)^{(d)})$. It follows that there is an $\alpha\in R$ such that $\Delta=p\alpha$, hence also $|N(\Delta)|=p^t|N(\alpha)|\geq p^t$. We conclude that $p\leq(d!)^{5/2}$.

Let p be a prime between $(d!)^{5/2}$ and $2(d!)^{5/2}$; then f_d is a formal immersion at ∞ modulo p. Prop. 4.1 implies that $N\leq(p^{d/2}+1)^2\leq 2^{d+1}(d!)^{5d/2}$. □

We end this section with some remarks. First of all, the difficulty with Kamienny's criterion is that one needs to know whether $T_1',\ldots,T_d'$ are linearly independent or not. The question of linear dependence of $T_1,\ldots,T_d$ in $\mathbf{T}$ itself is easily settled: let $g:=\dim(J_0(N)_{\mathbf{Q}})$, then $T_1,\ldots,T_g$ are linearly independent in $\mathbf{T}$. To prove this (optimal) result, one remarks that it is equivalent to ∞ not being a Weierstrass point on $X_0(N)_{\mathbf{Q}}$. Reduction modulo N shows that ∞ is not a Weierstrass point

(one finds a Vandermonde determinant, see also [14]).

Secondly, let us consider the case $d = 2$. We want to know the primes N for which T_1' and T_2' are linearly independent. Since T_1' is the identity, the question is whether T_2' acts as a scalar on J or not, so suppose that T_2' acts as a scalar. Weil's bound implies that $T_2' \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. But on the other hand we have $T_2' = 2+1$ modulo n (consider the image of T_2' in $\mathbf{T}/I = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$). It follows that $(N-1)/12 \leq \mathrm{num}((N-1)/12) = n \leq 5$, hence that $N \leq 61$. So Conjecture 1.1 is now proved for $d = 2$. The bounds given in Theorem 4.3 can be improved in this case: the proof shows that for $N > 61$ the map $f_2 : X_0(N)^{(2)} \to J$ is a formal immersion at ∞ modulo 7, so that $N \in S(2)$ implies $N \leq ((7^2)^{1/2} + 1)^2 = 64$. To go further, one has to do explicit calculations for the $N \leq 61$. For example, by calculating the characteristic polynomial of T_2 acting on the space of weight two cusp forms on $\Gamma_0(N)$ one sees that T_2' does not acts as a scalar modulo 5 for $N = 43$, 53 and 61, which means that these three N are not in $S(2)$.

5. WINDING HOMOMORPHISMS AND FUGITIVE SETS

In order to prove that the sets $S(d)$ are finite for $d \leq 8$ and, for all d, have density zero, it suffices, in view of Theorem 4.3, to prove that the set of primes N such that $T_1', \ldots, T_d'$ are linearly dependent is finite for $d \leq 8$ and has density zero for all d. The following lemma shows that to check whether $T_1', \ldots, T_d'$ are linearly independent or not (for a given N), it suffices to check a finite set of relations; this set of relations is independent of N.

5.1. Lemma. *Let $d \geq 1$, let N be a prime and suppose that $T_1', \ldots, T_d'$ are linearly dependent. Consider a non-trivial relation*

$$a_1 T_1' + \cdots + a_d T_d' = 0, \qquad a_1, \ldots, a_d \text{ in } \mathbf{Z}$$

which is minimal in the following sense: there is no non-trivial relation among $T_1', \ldots, T_d'$ with more coefficients equal to zero, and $a_1, \ldots, a_d$ have greatest common divisor equal to 1. Then $|a_i| \leq ((d-1)!)^{5/2}$ for all i.

Proof. Let $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{r+1}}$ be the a_i which are non-zero. We rewrite the equation as:

$$-a_{i_{r+1}} T_{i_{r+1}}' = a_{i_1} T_{i_1}' + \cdots + a_{i_r} T_{i_r}'$$

Recall that $\mathbf{Q}\otimes\mathbf{T}$ is a product of totally real fields. Hence $\mathbf{R}\otimes\mathbf{T}/\gamma_I$ is canonically isomorphic (as $\mathbf{R}$-algebra) to $\mathbf{R}^e$, where $e = \dim(J_{\mathbf{Q}})$. This gives an embedding $\mathbf{T}/\gamma_I \hookrightarrow \mathbf{R}^e$; let $v_i = (v_{i,1}, \ldots, v_{i,e})$ denote the image of T_i'. Then, by Weil's bound, we have $|v_{i,j}| \leq i^{3/2}$ for all i and j. Since $T'_{i_1}, \ldots, T'_{i,r}$ are linearly independent, there exist $j_1, \ldots, j_r$ in $\{1, \ldots, e\}$ such that $\Delta := \det(v_{i_k,j_l})_{1\leq k,l\leq r}$ is not zero. Let R be the subring of $\mathbf{R}$ generated by all $v_{i,j}$. Then, as a $\mathbf{Z}$-module, R is free of some rank t, say. Let $\overline{R}$ denote $R/a_{i_{r+1}}R$. Then in $\overline{R}^e$ we have the relation:

$$0 = \overline{a}_{i_1}\overline{v}_{i_1} + \cdots + \overline{a}_{i_r}\overline{v}_{i_r}$$

and $\overline{a}_{i_1}\overline{R} + \cdots + \overline{a}_{i_r}\overline{R} = \overline{R}$ since $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{r+1}}$ have greatest common divisor equal to 1. It follows that $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r}$ has image 0 in $\bigwedge^r(\overline{R}^e)$, hence Δ has image zero in $\overline{R}$ (it is one of the "coordinates" of $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r}$). Hence we have $\Delta = a_{i_{r+1}}\Delta'$ for some Δ' in R. It follows that $|N(\Delta)| \geq |a_{i_{r+1}}|^t$. As in the proof of Theorem 4.3 one shows that $|N(\Delta)| \leq ((d-1)!)^{5t/2}$, hence the result. □

Remark. Applying Siegel's lemma (which gives an upper bound for the smallest non-trivial solution of a system of linear equations with coefficients in $\mathbf{Z}$) one gets more or less the same estimate.

Recall that, by definition, $\mathbf{T}/\gamma_I$ is the image of $\mathbf{T}$ in its completion $\mathbf{T}_I$. Hence, for $a_1, \ldots, a_d$ in $\mathbf{Z}$, one has $a_1T_1' + \cdots + a_dT_d' = 0$ if and only if $a_1T_1 + \cdots + a_dT_d$ is in I^m for all m. The finiteness of $S(2)$ was obtained by studying the image of a relation among T_1 and T_2 in $\mathbf{T}/I$. We will now generalize this method and study an arbitrary relation using the filtration $\mathbf{T} \supset I \supset I^2 \supset \cdots$. To do this, it will be convenient not to work with the T_i, but with the η_i in $\mathbf{T}$ defined as follows:

$$\eta_l := T_l - l - 1 \quad \text{for } l \neq N \text{ prime}, \qquad \eta_N := T_N - 1, \qquad \eta_1 := 1, \qquad \eta_{ab} := \eta_a\eta_b.$$

The T_m can be written as linear combinations of the η_k:

$$T_m = \eta_m + \sum_{k<m} c_{m,k}\eta_k,$$

with $c_{m,k}$ in $\mathbf{Z}$. It is important to note that the $c_{m,k}$ with $m < N$ do not depend on N. For all m, let η'_m be the image of η_m in $\mathbf{T}/\gamma_I$. For $m \geq 1$, let $v(m)$ denote

the number of factors in a prime factorization of m: if $m = l_1 \cdots l_r$ with the l_i prime, then $v(m) = r$. Note that by definition, we have $\eta_l \in I$ for all primes l, hence for all $m \geq 1$ we have $\eta_m \in I^{v(m)}$.

Suppose now that we have $d \geq 1$ and a prime $N > d$ such that $T'_1 \ldots, T'_d$ are linearly dependent. Then Lemma 5.1 gives a non-trivial relation $b_1\eta'_1 + \cdots + b_d\eta'_d = 0$, with $|b_i| < C(d)$ for all i, where $C(d)$ is an integer depending only on d. We want to show that, for $d \leq 8$, N is bounded, and that in general N lies in a set of primes which has density zero.

Before treating the general case, let us deal with $d \leq 8$, or, what amounts to the same, with $d = 8$. Then we have $b_1, \ldots, b_8$ in $\mathbf{Z}$, $|b_i| \leq C(8)$ for all i, such that the element

$$x := b_1\eta_1 + (b_2\eta_2 + b_3\eta_3 + b_5\eta_5 + b_7\eta_7) + (b_4\eta_2^2 + b_6\eta_2\eta_3) + b_8\eta_2^3$$

of $\mathbf{T}$ is in I^m for all $m \geq 0$. Note that in this expression for x the second term is in I, the third is in I^2 and the fourth is in I^3. Suppose first that $b_1 \neq 0$. Since $b_1 = b_1\eta_1 \in I \cap \mathbf{Z} = n\mathbf{Z}$, one then has $(N-1)/12 \leq n \leq |b_1| \leq C(8)$, hence $N \leq 12C(8)+1$. So we may suppose that $b_1 = 0$. Then $x \in I$, so it will be useful to consider the image of x in I/I^2; this is where Mazur's winding homomorphism comes in.

5.2. Theorem ([17], §18). *Write $N-1 = en$, hence $e = \gcd(N-1, 12)$. Let $\mathbf{F}_N^*[e]$ be the kernel of the eth power endomorphism of $\mathbf{F}_N^*$. There is a unique isomorphism of groups (the winding homomorphism)*

$$w: I/I^2 \longrightarrow \mathbf{F}_N^*/\mathbf{F}_N^*[e]$$

which sends η_l to $l^{(l-1)/2}$ for all primes $l \neq N$.

Let $\phi: I/I^2 \to \mathbf{F}_N^*$ be the homomorphism defined by $\phi(y) = w(y)^{12}$. Then for all primes $l \neq N$, $\phi(\eta_l) = l^{6(l-1)}$.

Now suppose that b_2, b_3, b_5 and b_7 are not all zero. Then we have:

$$1 = \phi(x) = \left(2^{b_2}3^{2b_3}5^{4b_5}7^{6b_7}\right)^6 \quad \text{in } \mathbf{F}_N^*$$

It follows that N divides the numerator of $(2^{b_2}3^{2b_3}5^{4b_5}7^{6b_7})^6 - 1$, hence N is at most $\exp(127 \cdot C(8))$. So we may now suppose that b_2, b_3, b_5 and b_7 are zero. Then

we have $\eta_2'(b_4\eta_2' + b_6\eta_3' + b_8\eta_4') = 0$. Since η_2' is an isogeny from J to itself (this follows from Weil's bound), we must also have:

$$y := (b_4\eta_2 + b_6\eta_3) + b_8\eta_2^2 \in I^m \quad \text{for all } m \geq 0$$

If b_4 and b_6 are not both zero, we find $N \leq \exp(18 \cdot C(8))$. If b_4 and b_6 are both zero, then we find $\eta_2' = 0$, which implies that $J = 0$ and hence $N \leq 13$. This finishes the proof that the sets $S(d)$ with $d \leq 8$ are finite. Note, by the way, that the reason the proof works, is that we obtained linear relations among the images of the η_l in I/I^2. This method breaks down for $d = 9$, since then one has to deal with $b_4\eta_2^2 + b_6\eta_2\eta_3 + b_9\eta_3^2$.

In the general case (i.e., d arbitrary) let m be minimal such that not all b_i with $v(i) = m$ are zero. We define $x := \sum_{v(i)=m} b_i\eta_i$; then $x \in I^{m+1}$. We choose an isomorphism of groups $\log: \mathbf{F}_N^* \to \mathbf{Z}/(N-1)\mathbf{Z}$. The fact (see [17], Thm. 18.10) that $I \subset \mathbf{T}$ is locally principal, implies that we have a homomorphism of groups:

$$\phi_m: I^m/I^{m+1} \xrightarrow{\sim} (I/I^2)^{\otimes m} \xrightarrow{\phi^{\otimes m}} (\mathbf{F}_N^*)^{\otimes m} \xrightarrow{\log^{\otimes m}} (\mathbf{Z}/(N-1)\mathbf{Z})^{\otimes m} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/(N-1)\mathbf{Z}$$

(The tensor products are over $\mathbf{Z}$.) We have $\phi_m(x) = 0$. To see what this means, let us first consider $\phi_m(b_i\eta_i)$, where $i = l_1^{e_1} \cdots l_r^{e_r}$ with the l_j prime. One computes that

$$\phi_m(b_i\eta_i) = B_i(\log l_1)^{e_1} \cdots (\log l_r)^{e_r}, \qquad \text{with} \quad B_i = b_i(6(l_1 - 1))^{e_1} \cdots (6(l_r - 1))^{e_r}$$

where we view B_i as an integer. Note that B_i does not depend on N, that B_i does not depend on the choice of $\log: \mathbf{F}_N^* \to \mathbf{Z}/(N-1)\mathbf{Z}$ and that not all B_i are zero. Let F be the homogenous polynomial of degree m, with coefficients in $\mathbf{Z}$, in the variables X_l, $l \leq d$ prime, whose monomials are the $B_i X_{l_1}^{e_1} \cdots X_{l_r}^{e_r}$, with $v(i) = m$ and $1 \leq i \leq d$. Then the relation $0 = \phi_m(x) = \sum_i b_i\phi_m(\eta_i)$ can be rewritten as $F(\log 2, \log 3, \ldots) = 0$ in $\mathbf{Z}/(N-1)\mathbf{Z}$. The set of primes N with the property that $F(\log 2, \log 3, \ldots) = 0$ in $\mathbf{Z}/(N-1)\mathbf{Z}$ is called the fugitive set associated to F (note that this does not depend on the choice of the logarithms on the $\mathbf{F}_N^*$). We conclude that the set of primes N such that $T_1', \ldots, T_d'$ are linearly dependent, is contained in a finite union of such fugitive sets. H.W. Lenstra has given an elementary argument, using Cebotarev's theorem, that fugitive sets have density

zero. In an appendix to [9], A. Granville improves this result as follows: for $x \in \mathbf{R}$ sufficiently large, the number of primes $N \leq x$ in a fixed fugitive set is bounded by a constant times $(x/\log(x))(\log\log\log(x))/(\log\log(x))$. K. Murty has shown that under the generalized Riemann hypothesis, Granville's bound can be improved to $O((x/\log(x))\log\log(x)/\log(x))$. One expects that the actual size of a fugitive set is $O(\log\log(x))$.

6. AN APPLICATION OF A THEOREM OF FALTINGS

In this section we prove that $S(d)$ is finite if and only if $\Phi(d)$ is finite. We begin by recalling a result of Frey [6].

6.1. Proposition (Frey). *Let K be a number field, $d \geq 0$ an integer and C a smooth projective geometrically irreducible curve over K with $C(K)$ non-empty. Suppose that every non-constant morphism from C to $\mathbf{P}^1_K$ has degree $> 2d$. Then $C^{(d)}(K)$ is finite.*

Proof. Consider the morphism $C^{(d)} \to \mathrm{Pic}^d_C$ which sends an effective divisor D of degree d to the line bundle $\mathcal{O}_C(D)$ of degree d. This map induces an injection on K-rational points, since if $D_1 \neq D_2$ are effective divisors of degree d on C such that $D_1 - D_2$ is a principal divisor (f), then f is a finite morphism of degree $\leq d$ to $\mathbf{P}^1_K$. Let X be the image of $C^{(d)}$ in Pic^d_C. It suffices to show that $X(K)$ is finite. Suppose that $X(K)$ is not finite. Then, by Faltings's theorem [3, Thm. 4.2], there exists a non-zero abelian subvariety B of Pic^0_C with $B(K)$ Zariski-dense in B, and a point P_0 in $X(K)$ such that $P_0 + B \subset X$. For b in $B(K)$, let $P_b := b + P_0 \in X(K)$; let D_b denote the effective divisor on C corresponding to P_b (here we use that $C^{(d)}(K) \to X(K)$ is a bijection). Then for all $b \in B(K)$ the divisors $D_b + D_{-b}$ and $2D_0$ are linearly equivalent. Note that the equality $D_b + D_{-b} = 2D_0$ can happen only for finitely many b, so there exists a b and a non-constant rational function f on C such that $D_b + D_{-b} - 2D_0 = (f)$. But such a f is a morphism from C to $\mathbf{P}^1_K$ of degree at most $2d$. □

6.2. Corollary (Frey, [6]). *Let $d \geq 0$ and $e \geq 0$ be integers, let N be prime and suppose that $N^e \geq 120d$. Then there are, up to isomorphism, only finitely*

many elliptic curves E over $\overline{\mathbf{Q}}$ which have a cyclic isogeny of degree N^e that can be defined over a number field K of degree at most d.

Proof. Let $f: X_0(N^e) \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ be a finite morphism. Take $l \in \{2,3\}$, $l \neq N$. Since $X_0(N^e)$ has good reduction at l, the line bundle $f^*\mathcal{O}(1)$ has a unique extension to $X_0(N^e)_{\mathbf{Z}_l}$ and induces a finite morphism $f_l: X_0(N)_{\mathbf{F}_l} \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_l}$ of degree at most $\deg(f)$. An easy computation shows that $X_0(N^e)(\mathbf{F}_{l^2}) \geq (N+1)N^{e-1}/e_l$, where $e_2 = 12$ and $e_3 = 6$ (consider the supersingular points). Hence

$$\deg(f) \geq \deg(f_l) > N^e/(e_l(l^2+1) \geq 120d/60 = 2d \qquad \square$$

6.3. Corollary ([9]). *Let $d \geq 1$. If $S(d)$ is finite then $\Phi(d)$ is finite.*

Proof. Instead of giving a proof using Cor. 6.2, we give a proof using a variant of that corollary for the curves $X_1(N^e)$. An advantage of this is that the curves $X_1(N^e)_{\mathbf{Q}}$ are fine moduli spaces for $N^e > 4$.

Let $d \geq 1$ and suppose that $S(d)$ is finite. Since $S(d)$ is finite, it suffices to give, for each N in $S(d)$, an integer $r \geq 0$ such that no elliptic curve over a field of degree d has a rational point of order N^r. So let N be in $S(d)$ and $e \geq 0$. An elliptic curve E over a field K of degree d, together with a rational point P of order N^e, gives a K-valued point of the modular curve $X_1(N^e)$, hence a $\mathbf{Q}$-valued point of the symmetric product $X_1(N^e)^{(d)}$. The curve $X_1(N^e)$ is projective and smooth over $\mathbf{Z}[1/N]$, and has geometrically irreducible fibres. For any field k not of characteristic N, $X_1(N^e)_k$ has at least $(N-1)N^{e-1}/2$ rational points (coming from the cusps). It follows that any finite morphism from $X_1(N^e)_{\mathbf{Q}}$ to $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ has degree at least $(N-1)N^{e-1}/8$. Suppose that $e > 1 + \log_N(16d/(N-1))$. Then, by Prop. 6.1, $X_1(N^e)^{(d)}(\mathbf{Q})$ is finite. Let $x_1, \ldots, x_m$ be the non-cuspidal closed points of the scheme $X_1(N^e)_{\mathbf{Q}}$ that have non-zero multiplicity in at least one of the finitely many effective divisors on $X_1(N^e)_{\mathbf{Q}}$ corresponding to the elements of $X_1(N^e)^{(d)}(\mathbf{Q})$. Let K_i be the residue field of $X_1(N^e)$ at x_i; then K_i is a field of degree $\leq d$. Note that $N^e > 4$, so $X_1(N^e)_{\mathbf{Q}}$ is a fine moduli space. Hence over each K_i we have an elliptic curve E_i together with a point P_i in $E_i(K_i)$ of order N^e. By construction, these $(E_i/K_i, P_i)$ have the property that all $(E/K, P)$ with E an elliptic curve over K, K of degree d and $P \in E(K)$ of order N^e, can be

obtained by extension of scalars from one of the $(E_i/K_i, P_i)$. For each i, choose a residue field k_i of the ring of integers $\mathcal{O}_i$ of K_i such that k_i has characteristic different from N and E_i has good reduction at k_i. Now if $(E/K, P)$ is obtained by extension of scalars from $(E_i/K_i, P_i)$, then $\mathcal{O}_K$ has a residue field k which is an extension of degree at most d of k_i such that E has good reduction at k. Let $\tilde{E}/k$ be the reduction. Then $|\tilde{E}(k)| \leq (|k_i|^{d/2} + 1)^2$. Now take $r \geq e$ such that for all i one has $N^r > (|k_i|^{d/2} + 1)^2$. □

7. BEYOND KAMIENNY AND MAZUR

D. Abramovich [1] has remarked that the hypothesis in Prop. 4.1 that f_d is a formal immersion at $d{\cdot}\infty$ modulo a prime $p > 2$ can be weakened. In fact, all one needs is that $f_d(x) \neq 0$ for all x in $X_0(N)^{(d)}(\mathbf{Q})$ that specialize to $d{\cdot}\infty$ modulo p. Using this remark Abramovich has proved finiteness of $S(d)$ for all $d \leq 14$. For d equal to 13 and 14 his proof uses computer computations.

Very recently (February 11), L. Merel has announced a proof of the finiteness of $S(d)$ for all d. His method is to replace the Eisenstein quotient J of $J_0(N)$ by a bigger quotient J_{w}. This quotient, which he calls the winding quotient, is defined as follows. Integration over $\{it \mid t \in \mathbf{R}_{>0}\} \subset \mathbf{H}$ defines a $\mathbf{C}$-linear form on $\mathrm{H}^0(X_0(N)(\mathbf{C}), \Omega)$. It is known that this form corresponds to an element e in $\mathrm{H}_1(X_0(N)(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$. Let $a \subset \mathbf{T}$ be the annihilator of e, then $J_{\mathrm{w},\mathbf{Q}} = J_0(N)_{\mathbf{Q}}/aJ_0(N)_{\mathbf{Q}}$. A result of Kolyvagin and Logachev [12], supplemented by work of Bump, Friedberg and Hoffstein [7], or by work of Murty and Murty [21], shows that $J_{\mathrm{w}}(\mathbf{Q})$ is finite. The condition for $f_d\colon X_0(N)^{(d)}_{\mathbf{Q}} \to J_{\mathrm{w},\mathbf{Q}}$ to be a formal immersion at $d{\cdot}\infty$ is that $T_1 e, \ldots, T_d e$ are linearly independent in the free $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{T}{\cdot}e \subset \mathrm{H}_1(X_0(N)(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$. For N sufficiently large with respect to d (to be precise, $N/(\log N)^4$ should be greater than $400d^4$ and greater than d^8), Merel shows this linear independence using the theory of modular symbols.

The text that follows has been added at the time the final version of this text was written (August 1994). Shortly after this exposé, Oesterlé has improved Merel's result: he shows that $N \in S(d)$ implies $N \leq (3^{d/2} + 1)^2$. His proof, which follows Merel's proof, shows that for N prime such that $N/(\log N)^4 > (2d)^8$, the images in $(\mathbf{T}{\cdot}e) \otimes \mathbf{F}_3$ of $T_1 e, \ldots, T_d e$ are $\mathbf{F}_3$-linearly independent, and from that

he deduces that the map f_d of §4 (with the Eisenstein quotient replaced by the winding quotient) is a formal immersion at $d\cdot\infty$ modulo 3. The proof is then finished by Prop. 4.1 and some extra work for the primes $N < 37$.

Merel's work will appear in [20].

REFERENCES

[1] D. Abramovich. *Formal finiteness and the uniform boundedness conjecture, a footnote to a paper of Kamienny and Mazur.* Preprint March 1993. To appear in an Astérisque volume.

[2] P. Deligne, M. Rapoport. *Les schémas de modules des courbes elliptiques.* In Modular Functions of One Variable II. Springer Lecture Notes in Mathematics 349 (1973).

[3] G. Faltings. *The general case of S. Lang's conjecture.* To appear in "The Barsotti symposium in algebraic geometry", W. Messing and V. Christante, eds. Acad. Press, Cambridge, Mass.

[4] G. Frey. *Links between solutions of $A - B = C$ and elliptic curves.* Number theory, Ulm 1987. Lecture Notes in Mathematics 1380.

[5] G. Frey. *A remark on isogenies of elliptic curves defined over quadratic fields.* Compos. Math. 58, 133-134 (1986).

[6] G. Frey. *Curves with infinitely many points of fixed degree.* Preprint, Institut für Experimentelle Mathematik (1992).

[7] D. Bump, S. Friedberg and J. Hoffstein. *Nonvanishing theorems for L-functions of modular forms and their derivatives.* Invent. Math. 102, 543–618 (1990).

[8] S. Kamienny. *Torsion points on elliptic curves and winding homomorphisms.* MSRI preprint, December 1993.

[9] S. Kamienny, B. Mazur. *Rational torsion of prime order in elliptic curves over number fields.* To appear in an Astérisque volume.

[10] N.M. Katz, B. Mazur. *Arithmetic moduli of elliptic curves.* Annals of Mathematics Studies 108, Princeton University Press (1985).

[11] M. Kenku, F. Momose. *Torsion points on elliptic curves defined over quadratic fields.* Nagoya Mathematical Journal 109, 125–149 (1988).

[12] V.A. Kolyvagin, D. Logachev. *Finiteness of the Shafarevich-Tate group and group of rational points for some modular abelian varieties.* Leningrad Math. J. 1, 1229–1253 (1990).

[13] D. Kubert. *Universal bounds on the torsion of elliptic curves.* Proceedings London Math. Soc. (3) 33, 193–237 (1976).

[14] J. Lehner, M. Newman. *Weierstrass points of* $\Gamma_0(N)$. Annals of Mathematics 79, No. 2, 360–368 (1963).

[15] B. Levi. *Sull'equazione indeterminata del* 3^o *ordine.* Atti del IV congresso internazionale dei matematici, Roma, 6–11 Aprile 1908, G. Castelnuovo editor.

[16] Y. Manin. *A uniform bound for p-torsion in elliptic curves.* Izv. Akad. Nauk. CCCP 33, 459–465 (1969).

[17] B. Mazur. *Modular curves and the Eisenstein ideal.* Publications Mathématiques de l'IHES 47, 33–186 (1977).

[18] B. Mazur. *Rational isogenies of prime degree.* Invent. Math. 44, 129–162 (1978).

[19] B. Mazur and J-P. Serre. *Points rationnels des courbes modulaires* $X_0(N)$. Séminaire Bourbaki exp. 469 (1974–1975). Lecture Notes in Mathematics 514, 238–255 (1976).

[20] L. Merel. *Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres.* To appear.

[21] M.R. Murty and V.K. Murty. *Mean values of derivatives of modular L-series.* Ann. Math. 133, 447–475 (1991).

[22] A. Ogg. *Rational points of finite order on elliptic curves.* Invent. Math. 12, 105–111 (1971).

[23] J-P. Serre. *p-torsion des courbes elliptiques (d'après Y. Manin).* Séminaire Bourbaki exp. 380 (1969–1970). Lecture Notes in Mathematics 180, 281–294 (1971).

[24] A. Silverberg. *Points of finite order on abelian varieties.* Contemporary Mathematics 133, 175–193 (1992).

Bas EDIXHOVEN

Institut Mathématique
URA 305 du CNRS
Campus de Beaulieu
F-35042 Rennes cedex
France

Astérisque

JEAN-PIERRE SERRE

Cohomologie galoisienne : progrès et problèmes

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 783, p. 229-257

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__229_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Mars 1994
46ème année, 1993-94, n° 783

COHOMOLOGIE GALOISIENNE : PROGRÈS ET PROBLÈMES

par **Jean-Pierre SERRE**

NOTATIONS

Le corps de base est noté F. On en choisit une clôture séparable F_s et l'on note Γ_F le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F_s/F)$.

Sauf mention expresse du contraire, tous les groupes algébriques considérés sont *définis sur* F, *lisses* et *linéaires* : on ne parlera pas des variétés abéliennes.

PRÉLIMINAIRES

§ 1. RAPPELS SUR $H^1(F, G)$

Soit G un groupe algébrique sur F. On s'intéresse à l'ensemble $H^1(F, G)$, ensemble que l'on peut définir de deux façons équivalentes ([32], Chap. III, § 1) :

- classes d'isomorphisme de G-torseurs (G-torseur = espace homogène principal à droite de G)
- classes d'équivalence de 1-cocycles $z : \Gamma_F \to G(F_s)$, cf. [32], Chap. I, § 5.

(Rappelons comment on passe du point de vue "torseur" au point de vue "cocycle". Si P est un G-torseur, P est lisse (puisque G l'est), donc possède un point rationnel sur F_s. Soit $x \in P(F_s)$ un tel point. Si $\gamma \in \Gamma_F$, on a $\gamma(x) \in P(F_s)$. Il existe donc un unique élément $z(\gamma)$ de $G(F_s)$ tel que $\gamma(x) = x.z(\gamma)$. L'application $z : \Gamma_F \to G(F_s)$ ainsi définie est un 1-cocycle dont la classe d'équivalence ne dépend pas du choix de x.)

Ainsi, déterminer $H^1(F, G)$ revient à *classer les G-fibrés principaux sur une base réduite à un seul point*, à savoir le point $\mathrm{Spec}(F)$. Comme on sait, ce problème

est moins facile qu'il n'en a l'air à première vue ; la topologie (étale) de Spec(F) est loin d'être triviale !

Pourquoi s'intéresser à $H^1(F,G)$? La principale raison est que $H^1(F,G)$ *classifie les F-formes de tout "objet algébrique" A dont G est le groupe des automorphismes.* (Par "objet algébrique", j'entends une variété algébrique munie de données supplémentaires, par exemple un groupe algébrique, ou un espace vectoriel muni de tenseurs.) Rappelons (cf. [32], *loc. cit.*) que, si A' est une F-forme de A, on lui associe le G-torseur $P = \mathrm{Isom}(A, A')$; en sens inverse, si $z : \Gamma_F \to G(F_s)$ est un 1-cocycle, on lui associe l'objet $A' = {}_zA$ déduit de A par *torsion* au moyen de z.

(Attention : pour que ceci soit correct, on doit supposer que G est le foncteur des automorphismes de l'objet A ; en particulier, ce foncteur doit être lisse.)

Exemples

(1) Prenons pour A, soit l'algèbre des matrices $\mathbf{M}_n$ munie de sa structure d'algèbre, soit l'espace projectif $\mathbf{P}_{n-1}$ muni de sa structure de variété projective. Dans les deux cas, on a $\mathrm{Aut}(A) = \mathbf{PGL}_n$ (quotient du groupe $\mathbf{GL}_n$ par son centre $\mathbf{G}_m$). Or les F-formes de $\mathbf{M}_n$ sont les algèbres centrales simples sur F de rang n^2, et les F-formes de $\mathbf{P}_{n-1}$ sont les variétés de Severi-Brauer de dimension $n-1$. D'où des bijections entre les trois ensembles suivants :

- $H^1(F, \mathbf{PGL}_n)$;
- classes d'isomorphisme des algèbres centrales simples sur F de rang n^2 ;
- classes d'isomorphisme des variétés de Severi-Brauer de dimension $n-1$.

Pour $n = 2$, cela redonne la correspondance bien connue entre algèbres de quaternions et courbes de genre 0.

(2) Prenons pour A l'objet (V,q) formé d'un F-espace vectoriel V de dimension n et d'une forme quadratique non dégénérée q sur V. Le foncteur des automorphismes de A est le groupe orthogonal $\mathbf{O}(q)$ de q. Si la caractéristique de F est $\neq 2$ (ou si n est pair), $\mathbf{O}(q)$ est lisse. D'où des bijections entre :

- $\mathbf{H}^1(F, \mathbf{O}(q))$;
- classes de formes quadratiques non dégénérées de rang n sur F.

(3) Pour d'autres exemples, relatifs aux groupes exceptionnels G_2 et F_4, voir §§ 8, 9.

Tout ceci, qui est bien connu depuis la fin des années 50, explique que la structure de $H^1(F,G)$ ait été beaucoup étudiée, le cas le plus intéressant étant celui où G est réductif (et même semi-simple). Comme on le verra, les résultats dépendent de façon essentielle de la dimension cohomologique du groupe profini Γ_F.

§ 2. LES NOMBRES PREMIERS ASSOCIÉS À UN TYPE DE GROUPE SIMPLE

2.1. Absence de structure de groupe sur $H^1(F,G)$

Lorsque G est commutatif, $H^1(F,G)$ est un groupe (commutatif), et l'on peut définir les groupes $H^i(F,G)$ pour tout $i \geq 0$. Dans le cas général, la structure de groupe est remplacée par :

– un élément distingué (noté 0 ou 1), qui correspond au torseur trivial $P = G$ et fait de $H^1(F,G)$ un *ensemble pointé* ; cela permet de parler de *noyaux* et de *suites exactes*, cf. [32], Chap. I, § 5 ;

– une opération de *translation* : si z est un 1-cocycle : $\Gamma_F \to G(F_s)$, et si ${}_zG$ désigne le groupe déduit de G par torsion au moyen de z (vis-à-vis de l'action de G sur G par automorphismes intérieurs), on a une bijection :

$$\tau_z : H^1(F, {}_zG) \longrightarrow H^1(F,G)$$

qui transforme 0 en la classe de z ([32], Chap. I, n° 5.3).

2.2. L'ensemble $S(G)$

Bien que $H^1(F,G)$ ne soit pas un groupe, certains nombres premiers jouent un rôle spécial dans sa structure. Je vais me borner à définir l'ensemble de ces nombres premiers, noté $S(G)$, dans le cas particulier le plus important, celui où G est semi-simple connexe et où son système de racines R (sur F_s) est irréductible ; un tel groupe est dit *absolument presque simple*. L'ensemble $S(G)$ est alors formé des nombres premiers p satisfaisant à l'une des conditions suivantes :

2.2.1. p divise l'ordre du groupe d'automorphismes du graphe de Dynkin de G.

2.2.2. p divise l'indice du réseau des racines dans le réseau des poids (autrement dit l'ordre du centre du revêtement universel $\widetilde{G}$ de G).

2.2.3. p est un nombre premier *de torsion* pour R, au sens usuel de ce terme dans la topologie des groupes de Lie (cf. [7], p. 775-776).

(Une autre façon d'énoncer 2.2.1 et 2.2.2 est de dire que p divise l'ordre du groupe d'automorphismes du *graphe de Dynkin complété* de R, cf. Bourbaki, LIE VI, §4, n° 3.)

Le tableau suivant donne $S(G)$ pour les différents types de systèmes de racines :

Type	**Éléments de $S(G)$**
A_n	2, et les diviseurs premiers de $n+1$
B_n, C_n, D_n $(n \neq 4)$, G_2	2
D_4, F_4, E_6, E_7	2 et 3
E_8	2, 3 et 5

2.3. Un théorème de Tits

Pour énoncer le résultat, convenons de dire que, si S est un ensemble de nombres premiers, un entier est *S-primaire* si tous ses facteurs premiers appartiennent à S.

Théorème 1 – *Supposons G absolument presque simple* (cf. ci-dessus). *Pour tout $x \in H^1(F, G)$, il existe une extension finie F_x de F ayant les deux propriétés suivantes* :

(a) *Le degré $[F_x : F]$ de F_x sur F est $S(G)$-primaire.*

(b) *F_x "tue" x, autrement dit l'image de x dans $H^1(F_x, G)$ est* 0.

(Si P est un G-torseur correspondant à x, la condition (b) signifie que P a un point rationnel sur K_x.)

Ce résultat est essentiellement dû à Tits (voir [40]). De façon plus précise, Tits définit un certain entier $S(G)$-primaire N et démontre :

(c) Il existe une extension finie F' de F, de degré divisant N, telle que G devienne déployé sur F'.

En appliquant ce résultat au groupe tordu ${}_zG$ (où z est un 1-cocycle représentant x), avec comme corps de base le corps F', on obtient une extension F'' de F',

de degré divisant N, sur laquelle ${}_zG$ devient déployé. Il n'est pas difficile de voir que cela entraîne que F'' tue x. On peut donc prendre $F_x = F''$, ce qui démontre le théorème (sous une forme plus précise, puisque le degré de F'' sur F divise N^2).

Remarques

(1) On peut sans doute exiger que F_x soit une extension *séparable* de F, mais je ne l'ai pas vérifié.

(2) Un énoncé un peu plus faible que le th. 1 avait été démontré par Grothendieck ([12]) en 1958.

(3) Dans l'énoncé du th. 1, on ne peut pas remplacer $S(G)$ par un ensemble strictement plus petit, ne dépendant que du système de racines de G.

2.4. Quelques questions

Conservons les notations ci-dessus. Disons qu'un entier est *premier à* $S(G)$ si aucun de ses facteurs premiers n'appartient à $S(G)$.

Question 1 – *Est-il vrai que, si une extension finie F'/F a un degré premier à $S(G)$, l'application $H^1(F,G) \to H^1(F',G)$ est injective ?*

Cela paraît très optimiste, mais je ne connais pas de contre-exemple. C'est en tout cas vrai (avec $S(G) = \{2\}$) pour les groupes orthogonaux (Springer [34]), les groupes unitaires (Bayer-Lenstra [4]), et le groupe G_2 (voir § 8). C'est également vrai chaque fois que l'on peut décrire $H^1(F,G)$ au moyen d'*invariants cohomologiques* (voir §§ 6, 7), car ceux-ci ne font intervenir que des groupes de coefficients qui sont $S(G)$-primaires.

Voici une question encore plus optimiste :

Question 2 – *Soient F_i/F des extensions finies telles que le* pgcd *des $[F_i : F]$ soit premier à $S(G)$. Est-il vrai que l'application*

$$H^1(F,G) \longrightarrow \prod_i H^1(F_i,G)$$

est injective ?

Noter que l'hypothèse sur les $[F_i : F]$ est satisfaite si ces entiers sont premiers entre eux. Même le cas de deux extensions F' et F'' avec $[F' : F] = 2$, $[F'' : F] = 3$ n'est pas connu.

CORPS DE DIMENSION 1 OU 2

§ 3. RÉSULTATS AUXILIAIRES SUR LES TORES MAXIMAUX

Rappelons qu'un groupe semi-simple est dit *quasi-déployé* s'il possède un sous-groupe de Borel (défini sur le corps de base, bien entendu).

Théorème 2 – *Supposons G semi-simple connexe quasi-déployé. Pour tout $x \in H^1(F,G)$ il existe un tore maximal T de G tel que x appartienne à l'image de $H^1(F,T) \to H^1(F,G)$.*

Lorsque F est parfait, ce résultat est dû à Steinberg ([37], th. 11.1). D'après Borel et Springer ([8], n° 8.6), les arguments de Steinberg peuvent être étendus au cas général.

Voici un résultat sur les $H^1(F,T)$, dû à Harder ([13], I, § 3) et Tits ([39], prop. 4) :

Théorème 3 – *Supposons G absolument presque simple* (cf. n° 2.2). *Soit $S = \{2,3\}$ si G est de type G_2 et $S = S(G)$ sinon. Si T est un tore maximal de G, le groupe $H^1(F,T)$ est un groupe de torsion S-primaire* (i.e. la p-composante de $H^1(F,T)$ est 0 si $p \notin S$).

(*Exemple* : si G est de type E_8, $H^1(F,T)$ ne contient pas d'élément d'ordre 7.)

Ce théorème se démontre sans difficulté, à partir du lemme suivant, qui se vérifie cas par cas :

Lemme 1 – *Soient R le système de racines de G et P le réseau des poids de R. Soit Γ un p-groupe d'automorphismes de R, avec $p \notin S$. Il existe alors un sous-réseau P' de P, d'indice premier à p, qui possède une $\mathbf{Z}$-base stable par Γ.*

§ 4. LE CAS DE DIMENSION 1

4.1. Dimension cohomologique (cf. [32], Chap. I, § 3)

Soient Γ un groupe profini et p un nombre premier. On appelle *p-dimension*

cohomologique de Γ, et on note $\mathrm{cd}_p(\Gamma)$ la borne supérieure des entiers i tels qu'il existe un Γ-module fini p-primaire C avec $H^i(\Gamma, C) \neq 0$.

On a $\mathrm{cd}_p(\Gamma) \leq 1$ (resp. $\mathrm{cd}_p(\Gamma) = 0$) si et seulement si les p-sous-groupes de Sylow de Γ sont des pro-p-groupes libres (resp. sont triviaux).

Ceci s'applique notamment au groupe $\Gamma_F = \mathrm{Gal}(F_s/F)$.

4.2. Le théorème de Steinberg (ex-"conjecture I", cf. [31], [32])

Théorème 4 ([37], th. 11.12) – *Supposons que F soit parfait et que $\mathrm{cd}_p(\Gamma_F) \leq 1$ pour tout nombre premier p. Soit G un groupe linéaire connexe sur F. On a $H^1(F, G) = 0$.* (Autrement dit, tout G-torseur est trivial.)

L'hypothèse que F est parfait permet de se débarrasser du radical unipotent et l'on peut supposer que G est, soit un tore, soit un groupe semi-simple. Le cas d'un tore est facile. Si G est semi-simple, on remarque que G est isomorphe à un "tordu" ${}_zG_0$, où G_0 est quasi-déployé, et z est un 1-cocycle à valeurs dans le groupe adjoint G_0^{adj} de G_0. Or le th. 2 entraîne que $H^1(F, G_0^{\mathrm{adj}}) = 0$. On a donc $G \approx G_0$, d'où $H^1(F, G) = 0$ en appliquant à nouveau le th. 2.

On a démontré en même temps :

Corollaire 1 – *Tout groupe semi-simple sur F est quasi-déployé.*

Mentionnons aussi le résultat suivant, dû à Springer (cf. [32], Chap. III, n° 2.4), qui est à la fois un corollaire et une généralisation du th. 4 :

Corollaire 2 – *Tout espace homogène de G a un point rationnel.*

Voici quelques *exemples* de corps satisfaisant aux hypothèses du th. 4 : corps finis (où l'on retrouve un théorème de Lang [20], d'ailleurs applicable aux groupes algébriques connexes non nécessairement linéaires) ; corps locaux de caractéristique 0 à corps résiduel algébriquement clos ; extensions algébriques de $\mathbf{Q}$ contenant toutes les racines de l'unité ; extensions de degré de transcendance 1 d'un corps algébriquement clos de caractéristique 0 (e.g. corps des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte).

4.3. Extension du théorème de Steinberg au cas d'un corps imparfait

Soit p la caractéristique de F, supposée $\neq 0$. La condition $\mathrm{cd}_p(\Gamma_F) \leq 1$ est

satisfaite quel que soit F, cf. [32], Chap. II, n° 2.2. Il y a lieu de la renforcer en demandant :

(1_p) – *Pour toute extension finie séparable F' de F, la p-composante du groupe de Brauer de F' est* 0 (avec les notations du § 10, cela signifie que $H_p^2(F') = 0$).

Un corps F satisfaisant à (1_p), ainsi qu'à $\mathrm{cd}_q(\Gamma_F) \leq 1$ pour tout nombre premier q, est dit "de dimension ≤ 1" (autre caractérisation : le groupe de Brauer de toute extension finie séparable de F est 0). On a pour ces corps un analogue (un peu plus faible) du théorème de Steinberg :

Théorème 4′ ([8], n° 8.6) – *Si F est de dimension ≤ 1, et si G est un groupe réductif connexe sur F, on a $H^1(F, G) = 0$.*

Noter l'hypothèse "G est réductif" ; l'énoncé ne serait pas vrai si l'on acceptait des groupes connexes quelconques, par exemple unipotents.

Remarque – Inversement, si $H^1(F, G) = 0$ pour tout G semi-simple connexe, le corps F est de dimension ≤ 1 (facile).

4.4. Une variante

Supposons G absolument presque simple, et soit $S(G)$ l'ensemble de nombres premiers correspondant, cf. n° 2.2. L'énoncé suivant précise les th. 4 et 4′ :

Théorème 4″ – *On a $H^1(F, G) = 0$ si $\mathrm{cd}_p(\Gamma_F) \leq 1$ pour tout $p \in S(G)$, et si la condition (1_p) est satisfaite* (pour $p = \mathrm{caract}(F)$, bien entendu).

On utilise les hypothèses cohomologiques, combinées avec le th. 3, pour prouver que $H^1(F, T) = 0$ pour tout tore maximal T (sauf si G est de type G_2, auquel cas $H^1(F, T)$ peut contenir des éléments d'ordre 3 — mais ceux-ci ont une image nulle dans $H^1(F, G)$). L'argument de Steinberg s'applique alors sans changement.

Remarque – On peut même supprimer la condition (1_p) si la caractéristique p de F n'appartient pas à $S(G)$.

§5. LE CAS DE DIMENSION 2

On vient de voir que :

$$\mathrm{cd} \leq 1 \Longleftrightarrow \text{nullité de } H^1(F,G) \text{ pour } G \text{ connexe.}$$

On va maintenant s'occuper de :

$$\mathrm{cd} \leq 2 \overset{?}{\Longleftrightarrow} \text{nullité de } H^1(F,G) \text{ pour } G \text{ simplement connexe.}$$

L'hypothèse "cd ≤ 2" est satisfaite par les corps p-adiques et les corps de nombres totalement imaginaires. Commençons par ceux-là :

5.1. Corps locaux

On suppose que F est complet pour une valuation discrète ; on note k son corps résiduel.

Théorème 5 (Kneser [17]) – *Supposons k fini* (autrement dit F localement compact). *On a alors $H^1(F,G) = 0$ pour tout G semi-simple simplement connexe.*

La démonstration de Kneser procède cas par cas : $A_n, B_n, \cdots, E_8$. La théorie des immeubles de Bruhat-Tits donne une démonstration plus directe : elle permet de comparer $H^1(F,G)$ à certains $H^1(k,G_i)$, où les G_i sont des groupes linéaires connexes sur le corps résiduel k. Compte tenu du th. 4, cela entraîne :

Théorème 5′ (Bruhat-Tits [9], n° 4.7) – *L'énoncé du th. 5 reste valable lorsqu'on y remplace l'hypothèse "k est fini" par "k est parfait de dimension ≤ 1"* (au sens du n° 4.3).

Question – *Dans le th. 5′, est-il possible de remplacer l'hypothèse que k est parfait par $[k : k^p] \leq p$, où $p = \mathrm{caract}(k)$?*

5.2. Corps globaux

On suppose que F est un corps global, i.e. un corps de nombres algébriques, ou un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini.

Théorème 6 – *Si F n'a pas de place réelle, on a $H^1(F,G) = 0$ pour tout G semi-simple simplement connexe.*

Lorsque F est de caractéristique $\neq 0$, ce théorème a été démontré par Harder [14].

Lorsque F est un corps de nombres, on se ramène facilement au cas où G est absolument presque simple. La nullité de $H^1(F,G)$ se démontre alors cas par cas :

- lorsque G est de type classique (Kneser [18]) ;
- lorsque G est de type D_4 trialitaire, G_2, F_4, E_6, E_7 (Harder [13]) ;
- lorsque G est de type E_8 (Chernousov [10]).

On trouvera dans [27], § 6.7 et § 6.8, un exposé détaillé de ces divers cas ; celui de E_8 est particulièrement intéressant.

Lorsque F est un corps de nombres ayant des places réelles, le th. 6 est remplacé par le suivant (cf. [27], *loc. cit.*) :

Théorème 6′ – *Soit* Σ *l'ensemble des places réelles de* F ; *pour tout* $\sigma \in \Sigma$, *soit* F_σ *le complété de* F *pour* σ (isomorphe à $\mathbf{R}$). *Si* G *est semi-simple simplement connexe, l'application canonique*

$$H^1(F,G) \longrightarrow \prod_{\sigma\in\Sigma} H^1(F_\sigma,G)$$

est bijective.

Par exemple, si G est de type F_4, ou E_8, et si le nombre des places réelles de F est r_1, l'ensemble $H^1(F,G)$ a 3^{r_1} éléments.

Remarque – Le th. 6′, combiné avec le th. 5, entraîne que le *principe de Hasse* est vrai pour un groupe semi-simple simplement connexe. Ce principe joue un rôle important dans la démonstration du fait que *le nombre de Tamagawa d'un groupe simplement connexe est égal à* 1 (Kottwitz [19]).

5.3. La conjecture II

C'est la suivante (cf. [31], ainsi que [32], Chap. III, § 3) :

Conjecture II – *Si* F *est un corps parfait tel que* $\mathrm{cd}_p(\Gamma_F) \leq 2$ *pour tout nombre premier* p, *on a* $H^1(F,G) = 0$ *pour tout* G *semi-simple simplement connexe.*

Cette conjecture entraîne les th. 5 et 6, du moins lorsque F est de caractéristique 0.

Exemples de groupes semi-simples simplement connexes pour lesquels la conjecture a été démontrée :

– Les groupes de type A_n intérieur, autrement dit les groupes $\mathbf{SL}$ associés aux algèbres centrales simples (Merkurjev-Suslin, cf. th. 7 ci-dessous) ;

– Les groupes de spineurs (Merkurjev, non publié), et en particulier tous les groupes de type B_n ;

– Les groupes de type C_n et D_n (sauf D_4 trialitaire) et les formes extérieures de type A_n (Bayer-Parimala [5]) ;

– Les groupes de type G_2 et F_4 (cf. §§ 8, 9).

Bref, il ne reste à traiter "que" les types E_6, E_7, E_8 et D_4 trialitaire.

5.4. Un théorème de Merkurjev-Suslin

Si D est une algèbre centrale simple sur F, de rang n^2, on note $\mathbf{SL}_D$ le "F-groupe algébrique des éléments de D de norme réduite 1". C'est une F-forme (intérieure) de $\mathbf{SL}_n$; en particulier, c'est un groupe semi-simple (et même absolument presque simple si $n > 1$) simplement connexe. On a :

$$H^1(F, \mathbf{SL}_D) = F^*/\mathrm{Nrd}(D^*),$$

de sorte que la nullité de $H^1(F, \mathbf{SL}_D)$ équivaut à dire que tout élément de F est norme réduite d'un élément de D.

Théorème 7 ([38], th. 24.8) – *Supposons F parfait. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

(a) $\mathrm{cd}_p(\Gamma_F) \leq 2$ *pour tout nombre premier p.*

(b) $H^1(F', \mathbf{SL}_{D'}) = 0$ *pour toute extension finie F' de F et toute algèbre centrale simple D' sur F'.*

Noter que $H^1(F', \mathbf{SL}_{D'})$ peut être identifié à $H^1(F, R_{F'/F}(\mathbf{SL}_{D'}))$, où $R_{F'/F}$ est le foncteur de restriction des scalaires de F' à F. La propriété (b) équivaut donc à dire que $H^1(F, G) = 0$ pour tout G de la forme $R_{F'/F}(\mathbf{SL}_{D'})$. D'où l'énoncé suivant, qui est une *réciproque* de la Conjecture II :

Corollaire – *Si F est parfait, et si $H^1(F, G) = 0$ pour tout G semi-simple simplement connexe, on a $\mathrm{cd}_p(\Gamma_F) \leq 2$ pour tout p.*

5.5. Renforcements de la conjecture II

Les hypothèses faites sur F sont un peu trop restrictives. Si G est absolument presque simple, il devrait suffire que $\mathrm{cd}_p(\Gamma_F) \leq 2$ pour tout $p \in S(G)$. Quant à la condition "F est parfait", il est sans doute possible de la supprimer si la caractéristique p de F n'appartient pas à $S(G)$; si $p \in S(G)$, on devrait pouvoir la remplacer par $[F : F^p] \leq p^2$ et $H^3_p(F') = 0$ pour toute extension finie séparable F' de F, cf. § 10.

INVARIANTS COHOMOLOGIQUES

§ 6. INVARIANTS COHOMOLOGIQUES : PREMIERS EXEMPLES

L'une des façons les plus commodes d'étudier $H^1(F, G)$ consiste à définir des applications de cet ensemble dans des groupes de cohomologie plus aisément accessibles (tout comme on associe à un fibré vectoriel des classes de Chern). Cela conduit à la notion d'*invariant cohomologique*, dont nous allons maintenant nous occuper.

6.1. Définition

Soit C un Γ_F-module de torsion (par exemple $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(d) = \mu_n^{\otimes d}$, où n est premier à la caractéristique, et d est un entier). Soit i un entier > 0. Comme d'habitude en cohomologie galoisienne, posons :

$$H^i(F, C) = H^i(\Gamma_F, C).$$

Soit G un groupe algébrique sur F. Un *invariant cohomologique* de type (i, C) sur les G-torseurs est un *morphisme* du foncteur $L \mapsto H^1(L, G)$ dans le foncteur $L \mapsto H^i(L, C)$, où L parcourt la catégorie des extensions (finies ou infinies) de F.

De façon un peu plus concrète, un tel invariant est une loi $a : P \mapsto a(P)$ qui attache à tout G-torseur P sur une extension L de F un élément $a(P)$ de $H^i(L, C)$, avec la condition suivante :

(*) Si L'/L est une extension, et si P' est le G-torseur sur F' déduit de P par le changement de base $L \to L'$, l'invariant $a(P')$ de P' est l'image de $a(P)$ par l'homomorphisme $H^i(L, C) \to H^i(L', C)$.

En d'autres termes, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(L,G) & \xrightarrow{a} & H^i(L,C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(L',G) & \xrightarrow{a} & H^i(L',C) \end{array}$$

doit être commutatif.

Remarques

1) Il s'agit ici d'invariant "primaire", pour employer le langage de la Topologie des années 40 ; il y aurait lieu de définir aussi des invariants "supérieurs", mais je ne m'y risquerai pas.

2) Il n'y a pas de raison de se borner à des invariants "cohomologiques" : on peut avoir intérêt à définir des invariants dans des groupes de Witt ou encore dans des groupes de K-théorie du genre $K_iL/n.K_iL$.

3) L'idéal est de disposer d'un invariant qui soit précis (i.e. injectif) et calculable effectivement. Cela arrive parfois, cf. n° 7.2 et § 8.

6.2. Exemple : le cobord associé au revêtement universel

Supposons G semi-simple, et soit $\widetilde{G}$ son revêtement universel. On a une suite exacte :

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1,$$

où C est un groupe algébrique de dimension 0, de type multiplicatif, contenu dans le centre de $\widetilde{G}$. Supposons que C soit *lisse*, autrement dit que son ordre ne soit pas divisible par la caractéristique de F ; on peut alors identifier C à l'ensemble de ses F_s-points, qui est un Γ_F-module fini. Pour toute extension L de F, on a une suite exacte de cohomologie (cf. [32], Chap. I, § 5.7) :

$$H^1(L,\widetilde{G}) \longrightarrow H^1(L,G) \xrightarrow{\Delta} H^2(L,C).$$

L'application $\Delta : H^1(L,G) \to H^2(L,C)$ intervenant dans cette suite exacte est une *opération cohomologique de type* $(2,C)$. Elle est injective si l'on a (par exemple) $H^1(L,{}_z\widetilde{G}) = 0$ pour tout 1-cocycle z de Γ_L à valeurs dans G ; d'où l'intérêt de disposer de la conjecture II.

Exemples

(a) Si $G = \mathbf{PGL}_n$, on a $\widetilde{G} = \mathbf{SL}_n$, $C = \mu_n$, d'où un invariant cohomologique

$$H^1(L, \mathbf{PGL}_n) \longrightarrow H^2(L, \mu_n) = \mathrm{Br}_n(L)$$

qui est injectif.

(b) Si $G = \mathbf{SO}(q)$, où q est une forme quadratique non dégénérée de rang ≥ 3, on a $\widetilde{G} = \mathbf{Spin}(q)$ et $C = \mu_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, si la caractéristique est $\neq 2$. D'où un invariant cohomologique

$$H^1(L, \mathbf{SO}(q)) \longrightarrow H^2(L, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}),$$

qui est étroitement lié à l'invariant de Hasse-Witt w_2 (cf. n° 6.3, ainsi que [33], n° 2.1).

Remarque – Il y a des définitions analogues si C n'est pas lisse, à condition de définir $H^2(L, C)$ en termes de cohomologie plate et non plus de cohomologie galoisienne.

6.3. Exemple : classes de Stiefel-Whitney

Supposons F de caractéristique $\neq 2$. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur F, de rang n, et soit $\mathbf{O}(q)$ le groupe orthogonal correspondant. Soit L une extension de F. On sait (cf. § 1, exemple 2) que les éléments de $H^1(L, \mathbf{O}(q))$ correspondent aux classes de formes quadratiques non dégénérées sur L, de même rang n que q. Si $x \in H^1(L, \mathbf{O}(q))$, notons q_x la forme quadratique correspondante, qui est définie à isomorphisme près. Pour tout $i > 0$, on peut associer à q_x sa *i-ème classe de Stiefel-Whitney* $w_i(q_x)$, qui est un élément de $H^i(L, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. On obtient ainsi un invariant cohomologique

$$w_i : H^1(L, \mathbf{O}(q)) \longrightarrow H^i(L, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$$

de type $(i, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Les cas $i = 1$ et $i = 2$ ont des interprétations simples : discriminant et invariant de Hasse-Witt. Les cas $i = 3, 4, \cdots$ sont moins utiles ; par exemple w_3 est le cup-produit de w_1 et w_2 ; quant à w_4, on a souvent intérêt à le remplacer par l'invariant d'Arason (cf. n° 7.1), qui appartient à $H^3(L, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

§ 7. INVARIANTS COHOMOLOGIQUES À VALEURS DANS H^3

Les invariants du § 6 fournissent peu de renseignements dans le cas le plus intéressant, celui où G est semi-simple simplement connexe. Nous allons voir qu'il y a des invariants à valeurs dans H^3 qui sont plus efficaces.

7.1. Le cas de Spin(q) : invariant d'Arason

Renenons à la situation du n° 6.3, où q est une forme quadratique non dégénérée de rang n sur F. Supposons caract$(F) \neq 2$, et $n \geq 3$. Prenons pour G le groupe $\mathbf{Spin}(q)$, revêtement universel de $\mathbf{SO}(q)$. Si $\widetilde{x} \in H^1(F, G)$, notons x l'image de $\widetilde{x}$ dans $H^1(F, \mathbf{O}(q))$, et soit q_x la forme quadratique déduite de q par torsion au moyen de x.

Soit WF l'anneau de Witt de F, et soit $I = \mathrm{Ker} : WF \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ son idéal d'augmentation. Les formes q_x et q ont même rang, et mêmes invariants w_1 et w_2, cf. n° 6.3. Il en résulte (cf. Milnor [24]) que l'élément $q_x - q$ de WF appartient à I^3. Or il existe un *homomorphisme canonique*

$$a : I^3/I^4 \longrightarrow H^3(F, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}),$$

construit par Arason [1], Satz 5.7. (L'existence de cet homomorphisme est un cas particulier de la *conjecture de Milnor, loc. cit.*, disant que $I^m/I^{m+1} \cong H^m(F, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ pour tout $m \geq 0$, conjecture qui est maintenant démontrée pour $m \leq 4$.) On peut donc définir un *invariant* de $\widetilde{x}$ par $\widetilde{x} \mapsto a(q_x - q) \in H^3(F, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. En remplaçant F par une extension L quelconque, on obtient ainsi un *invariant cohomologique*

$$a : H^1(L, \mathbf{Spin}(q)) \longrightarrow H^3(L, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$$

de type $(3, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

Plus généralement, la conjecture de Milnor peut être interprétée comme fournissant des invariants cohomologiques "supérieurs", chacun défini sur le noyau du précédent.

7.2. Le cas de $\mathbf{SL}_D$: invariant de Merkurjev-Suslin

Soit $\mathbf{SL}_D$ le groupe associé à une algèbre centrale simple D de rang n^2 sur F, cf. n° 5.4. Supposons n premier à la caractéristique de F. La théorie de Kummer

permet alors d'identifier $H^1(F,\mu_n)$ à F^*/F^{*n} ; si $t \in F^*$, notons (t) l'élément correspondant de $H^1(F,\mu_n)$. Soit d'autre part (D) la classe de D dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(F)$; comme $n(D) = 0$, (D) appartient au sous-groupe $H^2(F,\mu_n)$ de $\mathrm{Br}(F)$. Le cup-produit $(t)(D)$ est un élément de $H^3(F,\mu_n^{\otimes 2})$, et l'on vérifie facilement que l'on a $(t)(D) = 0$ si $t \in \mathrm{Nrd}(D^*)$. D'où, par passage au quotient, un homomorphisme

$$F^*/\mathrm{Nrd}(D^*) \longrightarrow H^3(F,\mu_n^{\otimes 2}).$$

Comme $F^*/\mathrm{Nrd}(D^*) = H^1(F,\mathbf{SL}_D)$, on a ainsi défini (après remplacement de F par une extension L quelconque...) un *invariant cohomologique de type* $(3,\mu_n^{\otimes 2})$ pour les $\mathbf{SL}_D$-torseurs. (Noter que, si n divise 24, on a $\mu_n^{\otimes 2} = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.)

Le cas le plus favorable est celui où n est sans facteur carré :

Théorème 8 (Merkurjev-Suslin [21], 12.2) – *Si n est sans facteur carré, l'application*

$$a : H^1(F,\mathbf{SL}_D) \longrightarrow H^3(F,\mu_n^{\otimes 2}),$$

définie ci-dessus, est injective.

Autrement dit, un élément t de F^* est norme réduite d'un élément de D^* si et seulement si $(t)(D) = 0$ dans $H^3(F,\mu_n^{\otimes 2})$.

Remarques

(1) Pour $n = 2$, D est une algèbre de quaternions, et $\mathbf{SL}_D$ s'identifie au groupe $\mathbf{Spin}(q)$ associé à une forme quadratique q de rang 3 ; l'invariant ci-dessus est égal à l'invariant d'Arason du n° 7.1.

(2) Si n a des facteurs carrés (par exemple $n = 4$), l'application a n'est pas injective en général : il faut trouver d'autres invariants...

7.3. Les invariants de Rost

Les exemples ci-dessus, ainsi que ceux des §§ 8,9, laissaient penser qu'il existe des invariants cohomologiques de type $(3,\mu_n^{\otimes 2})$ pour tout type de groupe simplement connexe (avec n dépendant du type de G, par exemple $n = 2,3,5$ pour G de type E_8, cf. [33], § 3). C'est effectivement ce que vient de démontrer Rost ([30]). Voici le principe de sa construction :

On suppose G absolument presque simple, simplement connexe, et F de caractéristique 0 (pour simplifier). Soit P un G-torseur sur une extension L de F. On se propose d'associer à P un élément $a(P)$ du groupe

$$H^3(L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) = \varinjlim H^3(L, \mu_n^{\otimes 2}).$$

(Noter que, en vertu d'un théorème de Merkurjev-Suslin (cf. [38], th. 21.4), les applications canoniques $H^3(L, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ sont injectives ; on peut donc voir $H^3(L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ comme la *réunion* des $H^3(L, \mu_n^{\otimes 2})$.)

Choisissons une extension finie L' de L qui déploie G, et sur laquelle P a un point rationnel. On a $P_{/L'} \simeq G_{/L'}$. Considérons le groupe de cohomologie étale $H^3_{\text{et}}(P_{/L'})$, à coefficients dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)$. Il n'est pas difficile de voir que ce groupe se décompose en somme directe :

$$H^3_{\text{et}}(P_{/L'}) = H^3(L') \oplus \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \qquad (\text{avec } H^3(L') = H^3(L', \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)),$$

où la projection sur le premier facteur est définie par le choix d'un point L'-rationnel de P (deux points différents donnant la même projection), et le second facteur est le groupe de cohomologie "géométrique", sur L_s. (Rappelons que ce dernier groupe est le même que sur $\mathbf{C}$; pour voir que c'est $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, utiliser le fait que $\pi_2 = 0$ et $\pi_3 = \mathbf{Z}$.)

Notons u_P l'élément de $H^3_{\text{et}}(P_{/L'})$ dont les deux composantes sont respectivement 0 et $1/m$, avec $m = [L' : L]$. Considérons l'homomorphisme de *trace* (= image directe = corestriction)

$$\text{Tr} : H^3_{\text{et}}(P_{/L'}) \longrightarrow H^3_{\text{et}}(P).$$

D'où un élément $v_P = \text{Tr}(u_p)$ de $H^3_{\text{et}}(P)$. Or on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^3(L) \longrightarrow H^3_{\text{et}}(P) \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

déduite de la suite spectrale reliant les cohomologies de P et de $P_{/L_s}$. L'image de v_P dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est $m.(1/m) = 0$; on a donc

$$v_P \in H^3(L) = H^3(L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

On vérifie sans mal que v_P est indépendant du choix de L' ; *c'est l'invariant* $a(P)$ *cherché.*

Exemple. Si G est de type E_8, on montre, en utilisant le plongement de G dans $\mathbf{SL}_{248}$ donné par la représentation adjointe, que $60.a(P) = 0$. D'où un invariant cohomologique

$$H^3(L, G) \longrightarrow H^3(L, \mu_{60}^{\otimes 2}) = H^3(L, \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \oplus H^3(L, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) \oplus H^3(L, \mu_5^{\otimes 2}).$$

Rost montre en outre que "60" ne peut pas être amélioré : si P désigne le G-torseur *versel* associé[1] à un plongement de G dans un groupe $\mathbf{SL}_d$, l'invariant $a(P)$ de P *est d'ordre* 60. [Cette non trivialité de a se démontre en utilisant des sous-groupes bien choisis de E_8. Ainsi, pour prouver que la 5-composante de $a(P)$ n'est pas toujours nulle, on utilise des sous-groupes de G (supposé déployé) de type $A_4.A_4$, ou même des sous-groupes finis (non toriques) de type $\mu_5 \times \mu_5 \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$. De façon générale, il semble y avoir des relations entre les invariants cohomologiques de G, et ses sous-groupes abéliens élémentaires (pour une analyse de ceux-ci, voir Griess [11]).]

EXEMPLES : $\mathbf{G_2}$ ET $\mathbf{F_4}$

§8. LE CAS DE $\mathbf{G_2}$

On suppose F de caractéristique $\neq 2$ (sinon, voir n° 10.3). On écrit $H^i(F)$ pour $H^i(F, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Si $t \in F^*$, on note (t) l'élément correspondant de $H^1(F)$, cf. n° 7.2. Le sous-ensemble de $H^i(F)$ formé des cup-produits $(t_1) \cdots (t_i)$, avec $t_1, \cdots, t_i \in F^*$, est noté $H^i_{\text{dec}}(F)$; un élément de cet ensemble est dit *décomposable.*

[1] Rappelons, d'après Grothendieck [12], ce qu'est ce torseur. Si l'on choisit un plongement de G dans un groupe $\mathbf{SL}_d$, on définit L comme le corps des fonctions de la F-variété $X = \mathbf{SL}_d/G$. La fibre générique P de la projection $\mathbf{SL}_d \to X$ est un G-torseur défini sur L, qui est "versel" en ce sens que tout autre G-torseur s'en déduit par spécialisation (pour plus de précisions, voir [12]).

8.1. Description de $H^1(F,G)$, pour G de type G_2

Soit G un F-groupe simple de type G_2. On suppose que G est *déployé* (ce n'est pas une restriction : le cas général se ramène à celui-là par torsion, cf. n° 2.1).

Théorème 9 – *Il y a des bijections canoniques* (décrites ci-dessous) *entre* :

(i) $H^1(F,G)$;

(ii) $H^3_{\mathrm{dec}}(F)$;

(iii) *l'ensemble des classes d'isomorphisme de F-formes de G* ;

(iv) *l'ensemble des classes d'isomorphisme d'algèbres d'octonions sur F* ;

(v) *l'ensemble des classes d'isomorphisme de 3-formes de Pfister sur F.*

(Rappelons qu'une 1-forme de Pfister est une forme quadratique binaire qui représente 1, i.e. qui s'écrit X^2+tY^2, et qu'une n-forme de Pfister est un produit tensoriel de n 1-formes de Pfister. Une 3-forme de Pfister peut donc s'écrire :

$$(*) \qquad X_0^2 + t_1X_1^2 + t_2X_2^2 + t_3X_3^2 + t_1t_2X_4^2 + t_2t_3X_5^2 + t_1t_3X_6^2 + t_1t_2t_3X_7^2$$

avec $t_i \in F^*$.)

Les bijections (i) $\to$ (iii) et (i) $\to$ (iv) proviennent de ce que le groupe d'automorphismes de G (resp. d'une algèbre d'octonions déployée) est isomorphe à G. La bijection (iv) $\to$ (v) se définit en associant à une algèbre d'octonions C sa forme norme N_C, qui est une 3-forme de Pfister ; on sait (cf. par exemple [6], (2.3)) que N_C détermine C à isomorphisme près, et peut être choisie arbitrairement. La flèche (v) $\to$ (ii) s'obtient en associant à la 3-forme de Pfister $(*)$ son *invariant d'Arason* ([1], § 1), qui est $(-t_1)(-t_2)(-t_3)$, donc est décomposable. La surjectivité de cette flèche est claire. Son injectivité résulte d'un théorème de Merkurjev, cf. [2], prop. 2 (l'énoncé analogue pour les n-formes de Pfister est connu pour $n \leq 5$).

Remarque – La flèche $H^1(F,G) \to H^3(F)$ du th. 9 peut également se définir comme le composé

$$H^1(F,G) \longrightarrow H^1(F,\mathbf{Spin}_7) \xrightarrow{a} H^3(F),$$

où a est l'invariant du n° 7.1. C'est aussi un cas particulier des invariants de Rost (n° 7.3).

8.2. Exemples

Si $H^3(F) = 0$ (par exemple si $\mathrm{cd}_2(\Gamma_F) \leq 2$), le th. 9 montre que $H^1(F, G) = 0$; autrement dit toute algèbre d'octonions sur F est déployée, et tout groupe de type G_2 est déployé. Inversement, si $H^1(F, G) = 0$, on a $H^3(F) = 0$, d'après Merkurjev-Suslin ([21], th. 5.7).

Si $F = \mathbf{R}$, $H^3(F)$ a deux éléments : 0 et $(-1)(-1)(-1)$, qui correspondent respectivement à la forme déployée et à la forme compacte de G_2.

Si $F = k((T))$, avec $H^3(k) = 0$, on a $H^3(F) = H^2(k)$, et $H^3_{\mathrm{dec}}(F) = H^2_{\mathrm{dec}}(k)$. On voit ainsi que les algèbres d'octonions sur F correspondent aux algèbres de quaternions sur k, résultat qu'il est facile de démontrer directement (ou de déduire de la théorie de Bruhat-Tits [9], si k est parfait).

8.3. Un autre exemple (et un nouveau problème)

Soit k un corps p-adique, autrement dit une extension finie d'un corps $\mathbf{Q}_p$, p premier. Soit $F = k(T)$. On a $\mathrm{cd}_2(F) = 3$, et il n'est pas difficile de déterminer explicitement $H^3(F)$. Le résultat est le suivant :

Soit P l'ensemble des *points fermés* de la droite projective $\mathbf{P}_1$ sur k, autrement dit l'ensemble des valuations discrètes de F triviales sur k. Soit $C(P)$ le $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel des *fonctions* $f : P \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, *à support fini*, et *de somme nulle* (autrement dit, l'ensemble des parties finies paires de P, avec la loi d'addition $A + B = A \cup B - A \cap B$). Le groupe $H^3(F)$ *s'identifie* à $C(P)$. Cette identification se fait en associant à $x \in H^3(F)$ la fonction $f_x \in C(P)$ définie par :

$$f_x(v) = \text{image de } x \text{ dans } H^3(\widehat{F}_v) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \text{ si } v \in P,$$

où $\widehat{F}_v$ est le complété de F en v (isomorphe à $k_v((T))$, où k_v est une extension finie de k). Que l'on obtienne ainsi un isomorphisme résulte de [1], 4.17, combiné avec le fait que la corestriction $H^2(k_v) \to H^2(k)$ est bijective.

Compte tenu du th. 9, on voit que $H^1(F, G)$ s'identifie à un sous-ensemble $C_{\mathrm{dec}}(P)$ de $C(P)$; en termes plus concrets, on associe à une algèbre d'octonions sur F l'ensemble des $v \in P$ où cette algèbre "a mauvaise réduction" : c'est une partie finie paire de P. C'est satisfaisant... à cela près que l'on aimerait savoir ce qu'est le sous-ensemble $C_{\mathrm{dec}}(P)$. *Est-il égal à* $C(P)$? Autrement dit, est-il vrai que *tout élément de* $H^3(F)$ *est décomposable* ? Ce serait vrai si tout forme

quadratique à 9 variables sur F représentait 0 ; malheureusement, il ne semble pas que ce soit connu.

§9. LE CAS DE $\mathbf{F_4}$

On suppose F de caractéristique $\neq 2, 3$.
On note G un F-groupe simple déployé de type F_4.

9.1. Interprétations de $H^1(F, G)$

Ici encore, on a des bijections canoniques entre :

(i) $H^1(F, G)$;
(ii) l'ensemble des classes d'isomorphisme de F-formes de G ;
(iii) l'ensemble des classes d'isomorphisme d'algèbres de Jordan exceptionnelles sur F.

(Par "algèbre de Jordan exceptionnelle", on entend une algèbre de Jordan centrale simple de rang 27, du type considéré par Albert, cf. [15], [26], [35], [36].)

Comme l'ensemble $S(G)$ associé à G (cf. n° 2.2) est formé des nombres premiers 2 et 3, on s'attend à avoir des invariants cohomologiques mod 2 et mod 3. C'est bien le cas :

9.2. Invariants cohomologiques mod 2

Soit J une algèbre de Jordan exceptionnelle sur F. Associons-lui la "forme trace" correspondante, qui est une forme quadratique non dégénérée Q_J de rang 27 : $Q_J(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(x^2)$, cf. [35], [36].

Théorème 10 (cf. [26], [29], [33]) – *Il existe une 3-forme de Pfister φ_3 et une 5-forme de Pfister φ_5 telles que l'on ait* :

$$Q_J \oplus \varphi_3 = \langle 2, 2, 2\rangle \oplus \varphi_5.$$

De plus, ces propriétés caractérisent φ_3 et φ_5 à isomorphisme près, et φ_5 est divisible par φ_3 (i.e. φ_5 est isomorphe au produit tensoriel de φ_3 par une 2-forme de Pfister).

(On a noté $\langle 2,2,2\rangle$ la forme quadratique ternaire $2X^2+2Y^2+2Z^2$.)

On traite d'abord le cas où J est *réduite*, i.e. possède un idempotent distinct de 0 et 1. On peut alors identifier J à une algèbre de matrices hermitiennes de type $(3,3)$ à coefficients dans une algèbre d'octonions ; la forme φ_3 est celle associée à l'algèbre d'octonions, et la formule

$$Q_J = \langle 2,2,2\rangle \oplus (\varphi_5 - \varphi_3)$$

se vérifie par un calcul direct (cf. [36], (32), p. 76). Le cas non réduit se ramène au cas réduit par extension de degré 3 du corps de base ; on utilise un théorème de descente pour les formes de Pfister démontré par Rost [29]. Pour une autre méthode, voir [26].

Les formes de Pfister φ_3 et φ_5 ont des *invariants d'Arason* ([1], § 1) qui appartiennent respectivement à $H^3_{\mathrm{dec}}(F,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ et $H^5_{\mathrm{dec}}(F,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, et qui les caractérisent. D'où des *invariants cohomologiques* mod 2 :

$$f_3 : H^1(F,G) \longrightarrow H^3(F,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \quad \text{et} \quad f_5 : H^1(F,G) \longrightarrow H^5(F,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

Remarque. Soit G_2^{dep} un groupe simple déployé de type G_2. Il y a un plongement naturel (défini à conjugaison près) $G_2^{\mathrm{dep}} \to G = F_4^{\mathrm{dep}}$ qui donne une application

$$H^1(F,G_2^{\mathrm{dep}}) \longrightarrow H^1(F,F_4^{\mathrm{dep}}).$$

L'invariant φ_3 donne une *rétraction canonique*

$$H^1(F,F_4^{\mathrm{dep}}) \longrightarrow H^1(F,G_2^{\mathrm{dep}}).$$

Il serait intéressant d'en avoir une définition plus directe.

9.3. Invariant cohomologique mod 3

A toute algèbre de Jordan exceptionnelle J sur F, Rost [28] associe un invariant :

$$g_3(J) \in H^3(F,\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) \qquad (\text{noter que } \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} = \mu_3^{\otimes 2}).$$

L'une des façons de caractériser cet invariant est d'utiliser le fait que, si D est une algèbre centrale simple de rang 3^2, le groupe $\mathbf{SL}_D$ se plonge dans G. Cela

donne une flèche $H^1(F, \mathbf{SL}_D) \to H^1(F, G)$; les éléments de $H^1(F, G)$ ainsi obtenus (pour un D convenable) correspondent aux algèbres de Jordan exceptionnelles fournies par la "première construction de Tits". Le composé

$$H^1(F, \mathbf{SL}_D) \longrightarrow H^1(F, G) \xrightarrow{g_3} H^3(F, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$$

coïncide avec l'invariant de Merkurjev-Suslin (n° 7.2) ; il n'est pas difficile de montrer que cette propriété *caractérise* l'invariant g_3 (c'est son *existence* qui n'est pas évidente).

Remarque – Les invariants f_3 et g_3 sont des cas particuliers des invariants du n° 7.3.

9.4. Utilisation des invariants f_3, f_5 et g_3

On peut se demander si la situation est aussi favorable pour F_4 que pour G_2. Autrement dit :

Question – *Est-il vrai qu'une algèbre de Jordan exceptionnelle J est déterminée à isomorphisme près par ses trois invariants $f_3(J)$, $f_5(J)$ et $g_3(J)$?*

On ne sait même pas répondre (autant que je sache) à la question suivante (cf. n° 2.4, Question 1) :

Si deux algèbres de Jordan exceptionnelles deviennent isomorphes sur une extension finie de F de degré premier à 6 (par exemple de degré 5) *sont-elles isomorphes ?*

Il y a toutefois des résultats partiels encourageants :

– *J est* réduite *si et seulement si $g_3(J) = 0$.*

– *Deux algèbres réduites sont isomorphes si et seulement si leurs invariants f_3 et f_5 sont égaux* (i.e. si leurs formes traces sont isomorphes, cf. [35], th. 1).

– *Une algèbre est* déployée *si et seulement si tous ses invariants sont* 0 (d'ailleurs la nullité de f_3 entraîne celle de f_5).

– *Soit $F_4(J) = \mathrm{Aut}(J)$ la F-forme de G associée à J. Pour que $F_4(J)$ soit* anisotrope, *il faut et il suffit que l'un des invariants $f_5(J)$ et $g_3(J)$ soit $\neq 0$.*

Une autre question naturelle est la détermination de *l'image* de l'application

$$H^1(F, G) \longrightarrow H^3(F, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times H^5(F, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times H^3(F, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}).$$

On a vu que les invariants f_3 et f_5 sont *décomposables*, et que l'invariant f_5 est divisible par l'invariant f_3 ; inversement, tout couple de classes de cohomologie satisfaisant à ces conditions est le système d'invariants d'une algèbre J, que l'on peut même supposer réduite (et qui est alors bien déterminée, à isomorphisme près). Quant à l'invariant g_3, Rost vient de prouver (non publié) qu'il est *décomposable* au sens suivant : c'est un cup-produit d'un élément de $H^1(F, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ et de deux éléments de $H^1(F, \mu_3)$; inversement, tout élément décomposable de $H^3(F, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ est l'invariant g_3 d'une algèbre fournie par la première construction de Tits. Reste la question : *quelles relations y a-t-il entre les invariants* (mod 2) *et* (mod 3) ? Le cas des corps de séries formelles (cf. [25]) montre que ces invariants ne sont pas indépendants (ce qu'indique aussi la théorie de Bruhat-Tits).

9.5. Un exemple

Reprenons les notations et hypothèses du n° 8.3 : $F = k(T)$, où k est un corps p-adique, et P est l'ensemble des points fermés de la droite projective sur k. Comme $\mathrm{cd}_2(\Gamma_F) = 3$, l'invariant f_5 est 0. On a vu que l'invariant f_3 peut être interprété comme une fonction $f : P \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ à support fini, et de somme nulle. De même, g_3 s'interprète comme une fonction $g : P \to \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ à support fini et de somme nulle. On peut prouver, en utilisant [25], que les supports de f et de g sont *disjoints* ; autrement dit, si l'on considère (f, g) comme une fonction $P \to \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, *ses valeurs sont d'ordre* 1, 2 *ou* 3, *mais pas* 6. Y a-t-il d'autres relations entre f et g ?

CORPS IMPARFAITS

§ 10. LA p-COHOMOLOGIE D'UN CORPS DE CARACTÉRISTIQUE p

Supposons F de caractéristique $p > 0$. La p-cohomologie galoisienne de F est peu intéressante : on a $\mathrm{cd}_p(\Gamma_F) \leq 1$, comme on l'a vu au n° 4.3. Si l'on veut définir des invariants cohomologiques ressemblant à ceux des §§ 7,8,9, il est nécessaire de changer de point de vue. C'est ce que l'on va faire.

10.1. Les groupes $H_p^{i+1}(F)$

Soit $\Omega_{\mathbf{Z}}(F)$ le F-espace vectoriel des formes différentielles de la $\mathbf{Z}$-algèbre F, cf. Bourbaki A III.134. Si i est un entier ≥ 0, posons $\Omega^i = \wedge^i \Omega_{\mathbf{Z}}(F)$. La différentiation extérieure d applique Ω^{i-1} dans Ω^i. Il existe une application additive p-linéaire $\gamma : \Omega^i \to \Omega^i/d\Omega^{i-1}$, et une seule, telle que $\gamma(x\omega) = x^p\omega$, si ω est produit de i différentielles logarithmiques dy/y ("inverse de l'opération de Cartier"). *On pose* :

$$H_p^{i+1}(F) = \mathrm{Coker}(\gamma - 1 : \Omega^i \longrightarrow \Omega^i/d\Omega^{i-1}).$$

D'après Milne [23] et Kato [16], le groupe $H_p^{i+1}(F)$ ainsi défini est *l'analogue en caractéristique p du groupe $H^{i+1}(F, \mu_p^{\otimes i})$ en caractéristique $\neq p$.* (Cette analogie peut se préciser, grâce à la K-théorie, cf. [16].)

Exemples

(1) Pour $i = 0$, on a $\Omega^i = F$ et $\gamma - 1$ n'est autre que le classique

$$\wp : x \mapsto x^p - x$$

d'Artin-Schreier. D'où :

$$H_p^1(F) = F/\wp F = H^1(\Gamma_F, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}),$$

et l'on retrouve le H^1 galoisien.

(2) Pour $i = 1$, on peut montrer que $H_p^2(F)$ s'identifie au sous-groupe $\mathrm{Br}_p(F)$ de $\mathrm{Br}(F)$ formé des éléments annulés par p. (L'identification se fait en associant à une forme différentielle $\omega = xdy/y$, avec $y \in F^*$, l'algèbre centrale simple de rang p^2 définie par des générateurs X, Y liés par les relations $X^p - X = x$, $Y^p = y$, $YXY^{-1} = X + 1$.)

10.2. Exemple : formes de Pfister en caractéristique 2

On suppose que $p = 2$. Soit q une $(i+1)$-*forme de Pfister* sur F. Rappelons (cf. [3], [16]) que l'on peut écrire q comme produit tensoriel

$$(*) \qquad q = q_a \otimes \varphi_{b_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{b_i} \qquad (a \in F,\ b_1, \cdots, b_i \in F^*),$$

où q_a désigne la forme quadratique binaire $X^2 + XY + aY^2$, et φ_b est la forme symétrique bilinéaire binaire $X_1Y_1 + bX_2Y_2$. [Ces définitions ont un sens car le produit tensoriel d'une forme bilinéaire symétrique par une forme quadratique (resp. une forme bilinéaire symétrique) est une forme quadratique (resp. une forme bilinéaire symétrique).]

A une telle forme q, on associe :

$$a(q) = \text{image de } a(db_1/b_1) \wedge \cdots \wedge (db_i/b_i) \text{ dans } H_2^{i+1}(F).$$

On montre (cf. [16]) que $a(q)$ ne dépend pas de la décomposition $(*)$ choisie ; c'est donc un *invariant* de q, analogue à l'invariant d'Arason en caractéristique $\neq 2$. De plus, *deux formes de Pfister sont isomorphes si et seulement si leurs invariants sont égaux* (*loc. cit.*, prop. 3).

Ainsi, les classes de $(i+1)$-formes de Pfister correspondent bijectivement aux éléments *décomposables* de $H_2^{i+1}(F)$ (un élément de $H_2^{i+1}(F)$ est dit décomposable s'il est l'image d'une forme différentielle $x_0 dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_i$).

10.3. Le cas de G_2 en caractéristique 2

Soit G un F-groupe simple déployé de type G_2 ; supposons F de caractéristique 2.

Théorème 11 – *Le th.* 9 *du n°* 8.1 *reste valable, à condition d'y remplacer* $H^3_{\mathrm{dec}}(F)$ *par le sous-ensemble de* $H_2^3(F)$ *formé des éléments décomposables au sens du n°* 10.2.

La démonstration est la même que celle du th. 9, compte tenu des résultats de Kato rappelés ci-dessus.

Corollaire – *On a* $H^1(F, G) = 0$ *si* F *est parfait, ou si* $[F : F^2] = 2$.

En effet, on a alors $\Omega^2 = 0$, d'où $H_2^3(F) = 0$.

Remarque. Il devrait y avoir des résultats analogues pour F_4 en caractéristique 2 et en caractéristique 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. ARASON - *Cohomologische Invarianten quadratischer Formen*, J. Algebra **36** (1975), 446-491.

[2] J. ARASON - *A proof of Merkurjev's theorem*, Canadian Math. Soc. Conference Proc. **4** (1984), 121-130.

[3] R. BAEZA - *Quadratic forms over semilocal rings*, Lect. Notes in Math. **655** (1978).

[4] E. BAYER-FLUCKIGER et H.W. LENSTRA, Jr. - *Forms in odd degree extensions and self-dual normal bases*, Amer. J. of Math. **112** (1990), 359-373.

[5] E. BAYER-FLUCKIGER et R. PARIMALA - *Galois cohomology of classical groups over fields of cohomological dimension* ≤ 2, en préparation.

[6] F. van der BLIJ et T.A. SPRINGER - *The arithmetics of octaves and of the group* G_2, Indag. Math. **21** (1959), 406-418.

[7] A. BOREL - *Oeuvres*, Vol. II (1959-1968), Springer-Verlag, 1983.

[8] A. BOREL et T.A. SPRINGER - *Rationality properties of linear algebraic groups* II, Tôhoku Math. J. **20** (1968), 443-497 (= A. Borel, *Oe.* 80).

[9] F. BRUHAT et J. TITS - *Groupes algébriques sur un corps local. Chap. III. Compléments et applications à la cohomologie galoisienne*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **34** (1987), 671-698.

[10] V.I. CHERNOUSOV - *Le principe de Hasse pour les groupes de type* E_8 (en russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR **306** (1989), 1059-1063 (trad. anglaise : Soviet Math. Dokl. **39** (1989), 592-596).

[11] R.L. GRIESS - *Elementary abelian p-subgroups of algebraic groups*, Geometriæ Dedicata **39** (1991), 253-305.

[12] A. GROTHENDIECK - *Torsion homologique et sections rationnelles*, Sém. Chevalley, *Anneaux de Chow et applications*, exposé 5, Paris, 1958.

[13] G. HARDER - *Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengruppen* I, Math. Z. **90** (1965), 404-428 ; II, *ibid.*, **92** (1966), 396-415.

[14] G. HARDER - *Über die Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen* III, J. Crelle **274/275** (1975), 125-138.

[15] N. JACOBSON - *Structure and Representations of Jordan Algebras*, A.M.S. Colloquium Publ. XXXIX, Providence, 1968.

[16] K. KATO - *Galois cohomology of complete discrete valuation fields*, Lect. Notes in Math. **967** (1982), 215-238.

[17] M. KNESER - *Galois-Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über p-adischen Körpern* I, Math. Z. **88** (1965), 40-47 ; II, *ibid.*, **89** (1965), 250-272.

[18] M. KNESER - *Lectures on Galois Cohomology of Classical Groups*, Tata Inst. of Fund. Research, Bombay, 1969.

[19] R.E. KOTTWITZ - *Tamagawa numbers*, Ann. of Math. **127** (1988), 629-646.

[20] S. LANG - *Algebraic groups over finite fields*, Amer. J. of Math. **78** (1956), 555-563.

[21] A. S. MERKURJEV et A.A. SUSLIN - *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR **46** (1982), 1011-1046 (trad. anglaise : Math. USSR Izv. **21** (1983), 307-340).

[22] A. S. MERKURJEV et A.A. SUSLIN - *On the norm residue homomorphism of degree three*, LOMI preprint E-9-86, Leningrad, 1986.

[23] J.S. MILNE - *Duality in the flat cohomology of a surface*, Ann. Sci. E.N.S. **9** (1976), 171-202.

[24] J. MILNOR - *Algebraic K-theory and quadratic forms*, Invent. Math. **9** (1970), 318-344.

[25] H.P. PETERSSON - *Exceptional Jordan division algebras over a field with a discrete valuation*, J. Crelle **274/275** (1975), 1-20.

[26] H.P. PETERSSON et M.L. RACINE - *On the invariants* mod 2 *of Albert algebras*, à paraître.

[27] V. PLATONOV et A. RAPINCHUK - *Groupes algébriques et théorie des nombres* (en russe), ed. Nauka 1991 (trad. anglaise : *Algebraic Groups and Number Theory*, Acad. Press, Pure and Applied Math. vol. **139**, 1993).

[28] M. ROST - *A* (mod 3) *invariant for exceptional Jordan algebras*, C.R. Acad. Sci. Paris **313** (1991), 823-827.

[29] M. ROST - *A descent property for Pfister forms* (non publié), 1991.

[30] M. ROST - *Cohomology invariants*, en préparation.

[31] J.-P. SERRE - *Cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires*, Colloque sur la théorie des groupes algébriques, Bruxelles (1962), 53-68 (= *Oe.* 53).

[32] J.-P. SERRE - *Cohomologie Galoisienne*, Lect. Notes in Math. **5** (1964) ; une nouvelle édition, révisée et complétée, paraîtra en décembre 1994.

[33] J.-P. SERRE - *Résumé de cours* 1990-1991, Annuaire du Collège de France, 1991, 111-121.

[34] T.A. SPRINGER - *Sur les formes quadratiques d'indice zéro*, C.R. Acad. Sci. Paris **234** (1952), 1517-1519.

[35] T.A. SPRINGER - *The classification of reduced exceptional simple Jordan algebras*, Indag. Math. **22** (1960), 414-422.

[36] T.A. SPRINGER - *Oktaven, Jordan-Algebren und Ausnahmegruppen*, notes polycopiées, Göttingen, 1963.

[37] R. STEINBERG - *Regular elements of semisimple algebraic groups*, Publ. Math. I.H.E.S. **25** (1965), 281-312.

[38] A.A. SUSLIN - *Algebraic K-theory and the norm-residue homomorphism*, J. Soviet Math. **30** (1985), 2556-2611.

[39] J. TITS - *Résumé de cours* 1990-1991, Annuaire du Collège de France, 1991, 125-137.

[40] J. TITS - *Sur les degrés des extensions de corps déployant les groupes algébriques simples*, C.R. Acad. Sci. Paris **315** (1992), 1131-1138.

Jean-Pierre SERRE

Collège de France
3, rue d'Ulm
F-75005 PARIS

Astérisque

BERNARD TEISSIER

Résultats récents sur l'approximation des morphismes en algèbre commutative

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 784, p. 259-282

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__259_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Mars 1994
46ème année, 1993-94 n° 784

RÉSULTATS RÉCENTS SUR L'APPROXIMATION DES MORPHISMES EN ALGÈBRE COMMUTATIVE

[d'après André, Artin, Popescu et Spivakovsky]

par **Bernard TEISSIER**

0. INTRODUCTION

On sait bien que pour un système d'équations algébriques en n variables à coefficients entiers, les solutions dont les coordonnées sont des nombres algébriques sont denses parmi les solutions complexes. Si l'on considère des équations algébriques dont les coefficients sont eux-mêmes des polynômes, disons en $z_1, \ldots, z_p$, on peut se demander si parmi les solutions qui sont des séries formelles ou convergentes en $z_1, \ldots, z_p$ celles qui sont algébriques (en un sens convenable) sur l'anneau $\mathbf{C}[z_1, \ldots, z_p]$ des polynômes sont encore denses.

Ce type de question, depuis sa solution affirmative par M. Artin à la fin des années 60, porte le nom d'approximation d'Artin. A la fin des années 70, il est apparu que ces résultats d'approximation étaient des conséquences d'un résultat d'approximation (au sens maintenant de limite inductive) de morphismes réguliers entre anneaux nœthériens par des objets de même nature mais de type fini, ce qui est une sorte de résolution des singularités relatives. Les nombreuses conséquences de ce résultat, démontré par Popescu et André d'une part et Spivakovsky d'autre part, forment le sujet de cet exposé.

1. L'ÉNONCÉ

Soit $\sigma: A \to B$ un morphisme d'anneaux. Le morphisme σ est dit *régulier* s'il est plat et si pour tout idéal premier $\mathcal{P}$ de A, la $\kappa(\mathcal{P})$-algèbre $B \otimes_A \kappa(\mathcal{P})$

est géométriquement régulière, où $\kappa(\mathcal{P}) = A_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$ est le corps résiduel de $A_{\mathcal{P}}$. Cela veut dire que $B \otimes_A K$ est encore un anneau nœthérien régulier pour toute extension finie K de $\kappa(\mathcal{P})$. Une condition équivalente ([22]) est que pour tout idéal premier $\mathcal{Q}$ de B la A-algèbre $B_{\mathcal{Q}}$ obtenue de B par localisation soit formellement lisse pour la topologie $\mathcal{Q}$-adique.

Exemples de morphismes réguliers :

– Si A et B sont des corps, un morphisme injectif $A \to B$ est régulier si et seulement si il fait de B une extension séparable de A.

– Le morphisme naturel $A \to \mathbf{S}_A(M)$ de A dans l'algèbre symétrique d'un A-module M est régulier si et seulement si M est un A-module projectif.

– Si l'anneau A est *excellent*, ce qui est le cas des anneaux de la géométrie algébrique ou analytique usuelle, pour tout idéal I de A, l'homomorphisme $A \to \hat{A}$ de A dans son complété I-adique est régulier (*cf.* [22], scholie 7.8.3).

– Pour tout anneau nœthérien excellent A et tout entier n, l'inclusion naturelle $A \hookrightarrow A[[X_1, \ldots, X_n]]$ est un morphisme régulier.

– Le composé de deux morphismes réguliers est régulier et si le composé $\psi \circ \phi$ de deux morphismes entre anneaux nœthériens est régulier, et si ψ est fidèlement plat, alors ϕ est régulier. En particulier, si $k\{X_1, \ldots, X_n\}$ est un anneau de séries convergentes sur un corps valué non discret de caractéristique zéro, il est excellent ([23]) et il résulte de ce qui précède que l'homomorphisme $k[X_1, \ldots, X_n] \to k\{X_1, \ldots, X_n\}$ est régulier.

– Soient k un corps et $(R, \mathbf{m})$ une k-algèbre locale régulière telle que l'homomorphisme naturel $k \to R/\mathbf{m}$ soit séparable. Alors l'inclusion $k \to R$ est un morphisme régulier.

– Soient k un corps de caractéristique zéro algébriquement clos et V une k-algèbre (non nécessairement nœthérienne) qui est un anneau de valuation; le morphisme $k \to V$ est régulier (*cf* le §3 ci-dessous).

– Soit $V \to V'$ un morphisme local entre deux anneaux de valuation discrète. C'est un morphisme régulier si :
- On a $\mathbf{m}_V.V' = \mathbf{m}_{V'}$.
- Le corps des fractions de V' est une extension séparable de celui de V.
- Le corps résiduel de V' est une extension séparable de celui de V.

– Soit K un sous-ensemble de Stein de $\mathbf{C}^d$ compact, connexe, et tel que pour tout sous-ensemble analytique V de $\mathbf{C}^d$ l'intersection $K \cap V$ n'ait qu'un nombre fini de composantes connexes (par exemple un polycylindre fermé de $\mathbf{C}^d$). Soit A_K l'anneau des fonctions analytiques sur K. L'anneau A_K est nœthérien et de dimension d, et l'homomorphisme naturel $\mathbf{C}[z_1, \ldots, z_d] \to A_K$ est régulier.
(*cf.* [16], Prop. 4.6).

– Soit Ω une variété de Nash compacte, et soit $\mathcal{N}(\Omega)$ l'anneau des fonctions de Nash sur Ω. Son inclusion naturelle $\mathcal{N}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega)$ dans l'anneau des fonctions analytiques réelles sur Ω est un morphisme régulier d'anneaux nœthériens (cf [15]).

Rappelons que le faisceau des fonctions de Nash sur $\mathbf{R}^d$ est défini ainsi:
Pour tout ouvert connexe de $\mathbf{R}^d$, $\mathcal{N}(U)$ désigne l'anneau des fonctions analytiques réelles sur U qui sont algébriques sur l'anneau de polynômes $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_d]$. Etant donné $x \in \mathbf{R}^d$, l'anneau local $\mathcal{N}_x$ des germes de fonctions de Nash en un point est le hensélisé du localisé en ce point de l'anneau de polynômes $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_d]$. Une variété de Nash est un espace topologique séparé annelé en anneaux locaux et localement isomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^d$ muni du faisceau des fonctions de Nash.

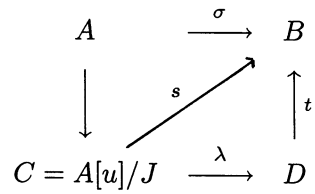
Régularité et lissité :

Un homomorphisme d'anneaux $A \to C$ fait de C une de A-algèbre de type fini si C est engendré en tant que A-algèbre par un nombre fini d'éléments, ce qui revient à dire que la A-algèbre C est isomorphe à un quotient d'un anneau de polynômes en un nombre fini d'indéterminées à coefficients dans A. Si A est supposé nœthérien, cet idéal est de type fini. Une A-algèbre de type fini $C = A[u_1, \ldots, u_n]/J$ est dite *lisse* en un idéal premier $\mathcal{Q} \in \mathrm{Spec}C$ correspondant à $\mathcal{Q}' \in \mathrm{Spec}A[u_1, \ldots, u_n]$ s'il existe un entier r, des polynômes $g_1, \ldots, g_r$ dans l'idéal J dont les images dans $A[u_1, \ldots, u_n]_{\mathcal{Q}'}$ engendrent $JA[u_1, \ldots, u_n]_{\mathcal{Q}'}$ et r indices $i_1, \ldots, i_r$ tels que l'image dans C du déterminant jacobien $\det(\frac{\partial g_i}{\partial u_{i_j}}) \in A[u_1, \ldots, u_n]$ n'appartienne pas à $\mathcal{Q}'$. Si $r = n$, on dit que le morphisme $A_{\mathcal{P}} \to C_{\mathcal{Q}}$ est *étale* , où $\mathcal{P}$ est l'image réciproque de $\mathcal{Q}$ dans A. On sait ([22]) que si C est une A-algèbre de type fini, l'homomorphisme $A \to C$ est lisse (c'est-à-dire lisse en $\mathcal{Q}$ pour tout $\mathcal{Q} \in \mathrm{Spec}C$), si et seulement si il est régulier au sens ci-dessus. La différence entre régulier et lisse tient donc dans la condition de finitude, qui permet de donner un *critère jacobien de lissité.*

1.1 Théorème (Popescu [34],[35],[36], Spivakovsky [42]; voir aussi [32] et [5]).– *Soit $\sigma: A \to B$ un homomorphisme d'anneaux nœthériens. Il est régulier si et seulement si il fait de B une limite inductive filtrante de A-algèbres de type fini lisses.*

On peut voir (*cf* [8], Lemme 5.2) que l'assertion du théorème est équivalente à l'énoncé suivant :

Pour toute A-algèbre de type fini C et tout A-homomorphisme $s: C \to B$, il existe un A-homomorphisme $\lambda: C \to D$ de C dans une A-algèbre de présentation finie lisse, et un A-homomorphisme $t: D \to B$ tels que $t \circ \lambda = s$.



2. APPLICATIONS

Commençons par montrer quelques avatars de ce résultat. Le premier résultat de cette nature est dû à Néron, motivé par des problèmes de Géométrie arithmétique (réduction des variétés abéliennes).

2.1 Théorème (Désingularisation de Néron, *cf* [30]).– *Soit $\sigma: V \to V'$ un morphisme entre deux anneaux de valuation discrète. S'il est régulier, la V-algèbre V' est limite inductive filtrante de V-algèbres lisses de type fini.*

Par ailleurs, l'analogue du théorème 1.1 dans la catégorie des algèbres analytiques sur un corps de caractéristique zéro (c'est-à-dire des algèbres qui sont des quotients d'algèbres de séries convergentes à coefficients dans un corps valué non discret de caractéristique zéro) a été démontré par A. Płoski en 1974. Ce résultat va aussi nous montrer le lien entre l'approximation par des algèbres lisses de type fini et l'approximation de solutions formelles de systèmes d'équations par des solutions analytiques, qui avait été démontrée en 1968 par M. Artin.

2.2 Théorème (Płoski [33]).– *Étant donné un corps k de caractéristique zéro valué non discret, soient n, p et q des entiers; posons $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$.*

Soient $f_1(x,Y),\dots,f_q(x,Y)$ *des séries convergentes sans terme constant dans* $k\{x,Y\}$. *Posons* $f(x,Y)=(f_1(x,Y),\dots,f_q(x,Y))$.
S'il existe une solution formelle $\hat{S}(x)=(\hat{S}_1(x),\dots,\hat{S}_n(x))\in k[[x]]^n$ *des équations* $f(x,Y)=0$, *formée de séries sans terme constant, alors il existe un entier* m, *des séries* convergentes sans terme constant $(T_1(x,\Lambda),\dots,T_n(x,\Lambda))\in k\{x,\Lambda\}^n$, *où* $\Lambda=(\Lambda_1,\dots,\Lambda_m)$ *est une famille finie d'indéterminées, et des séries formelles sans terme constant* $H_1(x),\dots,H_m(x)$ *telles que:*

$$F(x,T(x,\Lambda))=0 \quad \text{et} \quad \hat{S}(x)=T(x,H(x)).$$

Ce résultat implique facilement l'énoncé suivant, en remarquant que l'on peut remplacer $k\{x\}$ par une algèbre k-analytique quelconque:

Soit A *une algèbre analytique, notons* $\mathbf{m}_A$ *l'idéal maximal de* A *et* $\sigma\colon A\to\hat{A}$ *le morphisme naturel de* A *dans son complété* $\mathbf{m}_A$*-adique. Considérons une "*A*-algèbre analytique de type fini"* C, *c'est-à-dire une algèbre de la forme* $A\{Y\}/(f_1,\dots,f_q)$, *et supposons-la munie d'un* A*-homomorphisme* $C\to\hat{A}$, *ce qui correspond à la donnée d'une solution formelle des équations* $f_i=0$ *(l'image de* Y*). Alors il existe une* C*-algèbre analytique de type fini* D *lisse sur* A *et munie d'un* A*-homomorphisme* $D\to\hat{A}$ *faisant commuter le diagramme ci-dessous:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma} & B=\hat{A} \\ \downarrow & \nearrow & \uparrow \\ C=A\{Y\}/(f_1,\dots,f_q) & \longrightarrow & D=A\{\Lambda\}. \end{array}$$

Puisque les algèbres analytiques sont des anneaux locaux nœthériens excellents ([23]), le morphisme $\sigma\colon A\to\hat{A}$ est régulier, et d'après le théorème des fonctions implicites, une algèbre analytique de type fini lisse sur A est de la forme $A\{\Lambda\}$. Le résultat principal est donc une généralisation à tous les morphismes réguliers entre anneaux nœthériens du résultat obtenu par Płoski dans la catégorie des algèbres analytiques.

Le résultat de Płoski entraîne le célèbre théorème d'approximation d'Artin :

2.3 Théorème (Artin [6]).– *Soient* n, p *et* q *des entiers; posons* $x=(x_1,\dots,x_p)$, $Y=(Y_1,\dots,Y_n)$ *et soient* $f_1(x,Y),\dots,f_q(x,Y)$ *des séries convergentes sans terme constant dans* $\mathbf{C}\{x,Y\}$.

S'il existe une solution formelle $(\hat{S}_1(x), \ldots, \hat{S}_n(x)) \in \mathbf{C}[[x]]^n$ *des équations* $f_1(x,Y) = \cdots = f_q(x,Y) = 0$, *formée de séries sans terme constant, alors pour tout entier* N *il existe une solution convergente* $(S_1(x), \ldots, S_n(x)) \in \mathbf{C}\{x\}^n$ *telle que, notant* $\mathbf{m}_{\mathbf{C}[[x]]}$ *l'idéal maximal de* $\mathbf{C}[[x]]$, *on ait, pour* $1 \leq j \leq p$, $S_j(x) - \hat{S}_j(x) \in \mathbf{m}^N_{\mathbf{C}[[x]]}$.

Autrement dit, les solutions convergentes sont denses parmi les solutions formelles pour la topologie $\mathbf{m}_{\mathbf{C}[[x]]}$-adique de $\mathbf{C}[[x]]^n$.

Étant donné un entier N, il suffit en effet de choisir des séries convergentes $H_j^{(N)}(x)$ assez proches des séries formelles $H_j(x)$ du théorème de Płoski pour avoir les inclusions $T_k(x, H^{(N)}(x)) - T_k(x, H(x)) \in \mathbf{m}^N_{\mathbf{C}[[x]]}$. Les $T_k(x, H^{(N)}(x))$ forment alors une solution approchée à l'ordre N et convergente.

Une première conséquence nouvelle, et la motivation principale, de la conjecture d'Artin-théorème de Popescu et Spivakovsky, est la preuve en toute généralité d'une autre conjecture d'Artin dont de nombreux cas particuliers étaient déjà établis ([7],[8],[39]). Rappelons d'abord que l'on dit qu'un couple $(A, \mathbf{r})$ formé d'un anneau nœthérien A et d'un idéal $\mathbf{r}$ de A possède la *propriété d'approximation* si, pour tout système fini d'équations polynomiales à coefficients dans A, l'ensemble de ses solutions dans A est dense pour la topologie $\mathbf{r}$-adique dans l'ensemble de ses solutions dans le complété $\mathbf{r}$-adique $\hat{A}$ de A.

Par ailleurs, on dit qu'un tel couple $(A, \mathbf{r})$ est un *couple hensélien* si, pour toute A-algèbre B qui est étale sur A et telle que le morphisme induit $A/\mathbf{r} \to B/\mathbf{r}B$ soit un isomorphisme, il existe un A-morphisme $B \to A$. On suppose que $\mathbf{r}$ est contenu dans le radical de A. On rappelle (cf. [23]) qu'étant donné un anneau local A, on dit qu'une A-algèbre locale B est strictement essentiellement étale si B est A-isomorphe à une algèbre $C_{\mathbf{n}}$ localisée d'une A-algèbre étale en un idéal premier, telle que le morphisme $A \to C_{\mathbf{n}}$ soit local et induise un isomorphisme des corps résiduels.

La limite inductive (filtrante) de toutes les A-algèbres strictement essentiellement étales est le *hensélisé* A^h de A. Cette limite inductive est un anneau local, nœthérien si A l'est, et le couple $(A^h, \mathbf{m}_{A^h})$ est hensélien. Etant donnée une inclusion d'anneaux nœthériens $A \subset B$, le hensélisé de A dans B est la limite inductive

des sous-A-algèbres de B qui sont étales sur A. On peut alors définir le hensélisé d'un couple $(A, \mathbf{r})$ comme le hensélisé de A dans son complété $\mathbf{r}$-adique $\hat{A}$.

Il résulte du lemme de Hensel ([13]) que tout couple $(A, \mathbf{r})$ qui possède la propriété d'approximation est hensélien; une équation satisfaisant l'hypothèse du lemme de Hensel a une solution dans $\hat{A}$, et par l'approximation elle en a donc une dans A, ce qui prouve que $(A, \mathbf{r})$ est hensélien. Artin avait conjecturé la réciproque sous l'hypothèse que A est excellent, et en effet on a le :

2.4 Théorème (Popescu, Spivakovsky).– *Soit $(A, \mathbf{r})$ un couple hensélien tel que le morphisme naturel $\sigma: A \to \hat{A}$ de A dans son complété $\mathbf{r}$-adique soit régulier. Alors le couple $(A, \mathbf{r})$ possède la propriété d'approximation.*

En particulier, si $(A, \mathbf{m}_A)$ est un anneau local hensélien excellent, il possède la propriété d'approximation pour la topologie $\mathbf{m}_A$-adique.

Démonstration : montrons qu'un couple hensélien $(A, \mathbf{r})$ ayant la propriété que l'homomorphisme de complétion $\sigma: A \to \hat{A}$ est limite inductive filtrante de A-algèbres de type fini lisses possède la propriété d'approximation.

2.5 Lemme.– *Soit $\sigma: A \to B$ un morphisme d'anneaux nœthériens qui fait de B une limite inductive filtrante de A-algèbres lisses de type fini. Alors B est limite inductive filtrante de A-algèbres de type fini étales sur des A-algèbres de polynômes.*

Étant donnés une A-algèbre de type fini

$$C = A[u_1, \ldots, u_n]/J$$

et un A-morphisme $\rho: C \to B$, d'après l'hypothèse, le morphisme $C \to B$ se factorise en $C \to D \to B$ où D est une A-algèbre de type fini lisse. Nous pouvons donc supposer que C est lisse de type fini sur A. Alors l'algèbre symétrique S du C-module J/J^2 est aussi lisse de type fini sur A. D'après le lemme d' Elkik (lemme 3.6 ci-dessous) appliqué à $V = \mathrm{Spec}C$, nous pouvons présenter S comme quotient d'une algèbre de polynômes $A[v_1, \ldots, v_m]$ par un idéal (que nous noterons encore J) engendré par une suite de $m - (\dim S - \dim A)$ éléments, donc comme une intersection complète relative au-dessus de $\mathrm{Spec}A$. Utilisant la propriété universelle de l'algèbre symétrique et le fait que $J/J^2 = J \otimes_{A[u]} A[u]/J$, on peut étendre à S le morphisme $\rho: C \to B$ en assignant des valeurs arbitraires dans B aux générateurs

de J, et ainsi se ramener au cas où C est une intersection complète relative lisse sur A, c'est-à-dire que $C = A[u_1, \ldots, u_n]/(f_1, \ldots, f_{n-r})$ avec $\mathrm{ht}(f_1, \ldots, f_{n-r}) = n - r$. A l'aide du critère jacobien de lissité, on peut se ramener enfin au cas où C est une extension étale de type fini de $A[u_1, \ldots, u_r]$.

Terminons la preuve de la propriété d'approximation: nous revenons au cas où $B = \hat{A}$, et nous sommes maintenant en mesure de raisonner comme dans le cas analytique: fixons un entier N et, pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, choisissons un élément $x_i \in A$ tel que $\rho(u_i) - x_i \in \mathbf{r}^N \hat{A}$, et posons $R_N(u_i) = x_i$. L'homomorphisme $R_N : A[u_1, \ldots, u_n] \to A$ ainsi défini induit modulo $\mathbf{r}^N A[u_1, \ldots, u_n] + (f_1, \ldots, f_r)$, c'est-à-dire sur $C/\mathbf{r}^N C$ le même homomorphisme que ρ. Notons encore u_i l'image dans C de la variable u_i. L'algèbre $C_1 = C/(u_1 - x_1, \ldots, u_r - x_r)$, qui est une A-algèbre étale, possède donc mod.$\mathbf{r}^N$ un A-homomorphisme dans A. Par la propriété hensélienne de $(A, \mathbf{r})$, cet homomorphisme est induit par un A-homomorphisme $C_1 \to A$. Par composition avec le morphisme canonique $C \to C_1$, on obtient un A-morphisme $\rho_N : C \to A$, qui coïncide avec ρ mod. $\mathbf{r}^N$. Cela montre bien que $(A, \mathbf{r})$ possède la propriété d'approximation.

Remarquons que le théorème de Popescu et Spivakovsky entraîne le résultat de Płoski dans le cas où les équations sont polynomiales en (Y) ; en effet à toute algèbre de type fini sur une algèbre analytique A on peut associer son *analytisée,* solution du problème universel évident pour les morphismes dans des A-algèbres analytiques, et l'analytisée d'une A-algèbre locale étale sur une algèbre de polynômes à coefficients dans A est une algèbre de séries convergentes à coefficients dans A. Dans ce qui suit nous nous interesserons particulièrement au hensélisé de l'anneau localisé $k[x_1, \ldots x_r]_{(x_1, \ldots, x_r)}$ de l'anneau des polynômes en l'idéal maximal des polynômes qui s'annulent à l'origine. Cet anneau local nœtherien hensélien sera noté $k\langle x_1, \ldots x_r \rangle$; il est de plus excellent, et lorsque k est un corps valué non discret, il est contenu dans l'anneau des séries convergentes. Le théorème de Popescu et Spivakovsky a aussi pour conséquence un théorème d'algébrisation dû à Artin:

2.6 Théorème.- *Soient k un corps, n, p, et q des entiers; posons $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ et soient $f_1(x, Y), \ldots, f_q(x, Y)$ des séries sans terme constant dans $k\langle x, Y \rangle$. S'il existe une solution formelle $(\hat{S}_1(x), \ldots, \hat{S}_n(x)) \in k[[x]]^n$ des équations $f_1(x, Y) = \cdots = f_q(x, Y) = 0$, formée de séries sans terme constant,*

alors il existe un entier m, des séries sans terme constant $(T_1(x,\Lambda),\dots,T_n(x,\Lambda)) \in k\langle x,\Lambda\rangle^n$, où $\Lambda=(\Lambda_1,\dots,\Lambda_m)$ est une famille finie d'indéterminées, et des séries formelles sans terme constant $H_1(x),\dots,H_m(x)$ telles que:

$$F(x,T(x,\Lambda))=0 \quad \text{et} \quad \hat{S}(x)=T(x,H(x)).$$

Si nous appliquons le théorème non plus au morphisme régulier $k\langle x\rangle \to k[[x]]$ de $k\langle x\rangle$ dans les séries formelles mais au morphisme régulier $k\langle x\rangle \to k\{x\}$ dans l'anneau des séries convergentes lorsque k est un corps valué complet non discret, cet énoncé a la conséquence géométrique suivante:

Soit $(X,0) \subset (k^d,0)$ un germe d'espace analytique défini par des équations $(\overline{S_1}(x)=0,\dots,\overline{S_n}(x)=0$, où les $\overline{S_i}(x) \in k\{x\}$ sont des solutions d'un système d'équations $f_1(x,Y)=\cdots=f_q(x,Y)=0$ polynomiales en Y à coefficients dans $k\langle x_1,\dots,x_d\rangle$. Alors il existe un entier m, un sous-espace $(\mathcal{X},0) \subset (k^d\times k^m,0)$ défini par des équations algébriques $S_1(x,\Lambda)=\cdots=S_n(x,\Lambda)=0$ avec $S_i(x,\Lambda) \in k\langle x_1,\dots,x_d,\Lambda_1,\dots,\Lambda_m\rangle$ et une section analytique $s\colon (k^d,0)\to(k^d\times k^m,0)$ telle que $X=\mathcal{X}\cap s(k^d)$.

Autrement dit, tout germe analytique X défini par des équations qui sont des solutions d'équations polynomiales à coefficients dans l'anneau des fonctions algébriques est une section analytique d'un espace algébrique.

Si l'on peut s'assurer en ajoutant à $(\overline{S_1}(x),\dots,\overline{S_n}(x))$ des fonctions supplémentaires et aux $f_j(x,Y)$ des équations algébriques auxiliaires que l'espace $\mathcal{X}$ est suffisamment équisingulier le long de $\{0\}\times k^m$, en approximant la section s par une section algébrique s', on obtiendra un espace algébrique $\mathcal{X}\cap s'(k^d)$ qui est équisingulier avec X, et on aura prouvé que tout germe analytique est équisingulier (par exemple homéomorphe par un homéomorphisme stratifié) à un germe algébrique. Souvent les équations supplémentaires font intervenir des fonctions dépendant de moins de variables, et l'on souhaite que les solutions algébriques aient la même propriété. C'est une des motivations du théorème d'approximation cylindrique que nous verrons plus bas.

Une autre conséquence du théorème de Popescu-Spivakovsky est le résultat suivant, démontré par Denef et Harbater ([16]) dans des cas particuliers:

2.7 Théorème.– *Soit A_P l'algèbre des fonctions analytiques sur un polycylindre fermé P de $\mathbf{C}^d$, et soit A_P^{alg} le hensélisé de $A=\mathbf{C}[z_1,\dots z_d]$ dans A_P. Alors pour*

tout système d'équations polynomiales à coefficients dans A_P, les solutions dans A_P^{alg} sont denses pour la norme uniforme parmi les solutions dans A_P.

Nous avons vu que l'inclusion $A \to A_P$ est un morphisme régulier; la démonstration suit le même chemin que la démonstration de la propriété d'approximation vue plus haut, l'argument final étant remplacé par une version normée du théorème des fonctions implicites que l'on trouve dans [16].

L'application du théorème de Popescu et Spivakovsky au morphisme $\mathcal{N}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega)$ du §1 a permis récemment à M. Coste, J. Ruiz et M. Shiota ([15]) de résoudre plusieurs problèmes de la théorie des fonctions de Nash. Le résultat de base est le suivant, où $\mathcal{N}(\Omega, \Omega')$ désigne l'espace des morphismes de Nash entre deux variétés de Nash, et $\mathcal{O}(\Omega, \Omega')$ celui des morphismes analytiques:

2.8 Théorème ([15]).- *Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^d$, $\Omega' \subset \mathbf{R}^{d'}$ deux variétés de Nash, avec Ω compacte. Soient $F_1, \ldots, F_q : \Omega \times \Omega' \to \mathbf{R}$ des fonctions de Nash. Alors toute solution analytique $y = f(x)$, $f \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega')$, du système*

$$F_1(x, y) = \cdots = F_q(x, y) = 0$$

peut être approximé pour la topologie de Whitney par des solutions des mêmes équations, qui sont des fonctions de Nash globales $y = g(x)$, $g \in \mathcal{N}(\Omega, \Omega')$.

Une conséquence est qu'un morphisme analytique $f : \Omega \to \Omega'$ entre variétés de Nash, avec Ω compacte, peut être approché par un morphisme de Nash g. Si $S \subset \Omega$ et $S' \subset \Omega'$ sont des sous-ensembles semi-algébriques tels que $f^{-1}(S') = S$, on peut choisir g tel que $g^{-1}(S') = S$ puisque cela ne fait qu'imposer des relations algébriques.

L'APPROXIMATION CYLINDRIQUE

Soient $f_1(z_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_p) = \cdots = f_q(z_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_p) = 0$ des équations. Il arrive, en particulier en théorie de l'équisingularité, ou en théorie des équations aux dérivées partielles, que l'on connaisse des solutions formelles ou analytiques telles que $y_1(z), \ldots, y_j(x)$ ne dépendent que des variables $z_1, \ldots, z_{i_j}$, où i_j croît avec j. On se demande si l'on peut approximer ces solutions par des solutions analytiques ou algébriques ayant la même propriété. On savait, et nous verrons plus bas, que la réponse est négative en général lorsque les équations f_k sont analytiques (Gabrielov [20]), et le fait qu'elle soit positive dans le cas d'équations

algébriques n'est démontré que grâce au théorème de Popescu-Spivakovsky. Il s'agit essentiellement de montrer que des anneaux comme $k[[z_1,\dots,z_r]]\langle z_{r+1},\dots,z_n\rangle$, ont la propriété d'approximation, ce que les techniques antérieures ne permettaient pas. La preuve de l'énoncé qui suit, qui sert en théorie de l'équisingularité, est inspirée des preuves d'un résultat un peu plus faible (2.9 ci-dessous) rédigées par G. Pfister (communication directe), D. Popescu ([36]), et M. Spivakovsky ([42]).

2.9 Théorème.– *Soit*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \longrightarrow & \cdots & A_{i-1} & \xrightarrow{\alpha_{i-1}} & A_i & \longrightarrow & \cdots & A_m = A \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_1} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_2} & & \cdots & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_i} & & \cdots & \downarrow{\scriptstyle \sigma_m=\sigma} \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \longrightarrow & \cdots & B_{i-1} & \xrightarrow{\beta_{i-1}} & B_i & \longrightarrow & \cdots & B_m = B \end{array}$$

un diagramme d'anneaux nœthériens tel que les σ_i soient des morphismes réguliers. Posons $A'_1 = A_1$ et, pour chaque $i \geq 2$, $A'_i = A_i \otimes_{A_{i-1}} B_{i-1}$. Supposons que pour chaque i l'anneau A'_i est nœthérien et que pour $i \geq 2$ le morphisme $\sigma'_i = \sigma_i \otimes \beta_{i-1} : A'_i \to B_i$ est régulier.
Soit $C = A[u_1,\dots,u_n]/J$ une A-algèbre de type fini munie d'un A-morphisme $\rho : C \to B$ tel que en fait pour chaque j, $\rho(u_1),\dots,\rho(u_j)$ proviennent d'éléments de B_{i_j}, les i_j croissant avec j. Pour chaque indice k, il existe une A_k-algèbre de type fini D_k étale sur une A_k-algèbre de polynômes et munie d'un A_k-morphisme $D_k \to B_k$ telle que les $\rho(u_1),\dots,\rho(u_j)$ proviennent en fait d'éléments de D_{i_j}.

Soit donc $C = A[u_1,\dots,u_n]/J$ une A-algèbre de type fini munie d'un A-morphisme $\rho : A \to B$ possédant les propriétés ci-dessus. Notons $u_1,\dots,u_{j_i}$ les variables dont l'image dans B provient de B_i. Remarquons que pour chaque i l'homomorphisme $\rho : C \to B$ peut s'écrire comme composé

$$C \to (A \otimes_{A_{i-1}} A_{i-1}[u_1,\dots,u_{j_{i-1}}])[u_{j_{i-1}+1},\dots,u_n]/J \to B\ ,$$

où la première flèche est un isomorphisme.

Choisissons des éléments $w_1,\dots,w_n$ tels que $w_1,\dots,w_{j_i} \in B_i$, et que les w_ℓ pour $\ell < j_i$ soient les images des éléments correspondants dans les B_ℓ, avec l'abus de notation nécessaire, et que $\rho(u_{j_k}) = \beta_{m-1} \circ \cdots \circ \beta_i(w_{j_k})$. Pour chaque entier i , $1 \leq i \leq m$, posons

$$C'_i = A'_i[u_1,\dots,u_{j_i}]/J_i + \left(u_1 - 1 \otimes w_1,\dots,u_{j_{i-1}} - 1 \otimes w_{j_{i-1}}\right)$$

où J_i désigne l'idéal $J \cap A_i[u_1, \ldots, u_{j_i}]$. Nous pouvons considérer C'_i comme une A'_i-algèbre de type fini, engendrée par les images des $u_{j_{i-1}+1}, \ldots, u_{j_i}$, et la conjonction du morphisme naturel $\sigma'_i = \sigma_i \otimes \beta_{i-1} : A'_i \to B_i$ et des évaluations $\rho'_i(u_k) = w_k$ pour $j_{i-1} + 1 \leq k \leq j_i$, détermine un A'_i-morphisme $\rho'_i : C'_i \to B_i$. Puisque par hypothèse le morphisme $\sigma'_i : A'_i \to B_i$ est régulier, on peut trouver une A'_i-algèbre de type fini D'_i étale sur une A'_i-algèbre de polynômes et un morphisme $D'_i \to B$ factorisant le morphisme ρ'_i. Une algèbre étale sur une algèbre de polynômes étant décrite par un nombre fini de polynômes, donc de coefficients, la A'_i-algèbre D'_i est en fait définie sur une sous-A_i-algèbre de type fini de A'_i, que l'on peut supposer de la forme $A_i \otimes_{A_{i-1}} C''_{i-1}$ où C''_{i-1} est une A_{i-1}-algèbre de type fini munie d'un A_{i-1}-morphisme dans B_{i-1} dont l'image contient les $w_{j_{i-2}+1}, \ldots, w_{j_{i-1}}$. Puisque le morphisme σ_{i-1} est régulier, la A_{i-1}-algèbre C''_{i-1} est dominée par une A_{i-1}-algèbre D_{i-1} étale sur une algèbre de polynômes, munie d'un A_{i-1}-morphisme $\rho_i : D_{i-1} \to B_{i-1}$, qui est l'algèbre cherchée. On effectue cette construction d'abord pour $i = m$, et on se trouve avec A_{m-1}, B_{m-1} et C''_{m-1} exactement dans la même situation que pour A, B, et C. On démontre ainsi par récurrence descendante l'existence des A_i-algèbres D_i. Ceci achève la preuve du Théorème.

Supposons maintenant donné un idéal $\mathbf{r}$ de A, notons $\mathbf{r}_i$ l'image réciproque de $\mathbf{r}$ dans A_i, et $\mathbf{r}_i B_i$ l'image de $\mathbf{r}_i$ dans B_i. Supposons que chacun des couples $(A_i, \mathbf{r}_i)$ est hensélien, et que le passage aux complétés $\mathbf{r}_i$-adiques induit des isomorphismes $\hat{A}_i \cong \hat{B}_i$.

2.10 Corollaire (Théorème d'approximation cylindrique, [42], Th. 10.2).- *Étant donnée une A-algèbre de type fini $C = A[u_1, \ldots, u_n]/J$, pour tout entier N et tout A-morphisme $\rho : C \to B$ tel que pour chaque i, $\rho(u_1), \ldots, \rho(u_{j_i})$ proviennent de B_i, il existe un morphisme $\rho_N : C \to B$ tel que pour chaque i, $\rho_N(u_1), \ldots, \rho_N(u_{j_i})$ proviennent de A_i et que $\rho_N(u_k) - \rho(u_k)$ provienne d'un élément de $(\mathbf{r}_i B_i)^N$ pour $1 \leq k \leq j_i$.*

Fixons un entier N, et choisissons dans A_1 des éléments $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{j_1}$ congrus mod. $(\mathbf{r}_1 B_1)^N$ aux images de $u_1, \ldots, u_{j_1}$. Exactement comme dans la démonstration du théorème d'approximation, en utilisant le fait que D_1 est étale sur une A_1-algèbre de polynômes, on montre que l'on peut trouver dans A_1 des éléments $s_1, \ldots, s_{j_1}$ congrus mod. $\mathbf{r}_1^N$ aux images de $u_1, \ldots, u_{j_1}$ et définissant un A_1-morphisme $C'_1 \to A_1$. Cela fait, on peut fixer $u_1 = s_1, \ldots, u_{j_1} = s_{j_1}$ dans toute la

situation, recommencer avec A_2, et continuer ainsi jusqu'à A_m, ce qui prouve le résultat.

L'exemple privilégié est celui où, étant donné un anneau A_0 équipé d'une norme multiplicative, par exemple un corps valué complet non discret, on a $A_i = A_0\langle z_1, \ldots, z_i\rangle$, $B_i = A_0\{z_1, \ldots, z_i\}$, ou bien $B_i = A_0[[z_1, \ldots, z_i]]$.
Soit n un entier, posons $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$, et donnons-nous un système d'équations $(f_1(z, Y), \ldots, f_q(z, Y)) \in A[Y]^q$ et une solution $\hat{Y} \in B^n$ telle que

$$\hat{Y}_1(z), \ldots, \hat{Y}_{j_i}(z) \in A_0[[z_1, \ldots, z_i]] \ ;$$

alors pour tout entier N il existe une solution telle que l'on ait

$$Y_1(z), \ldots, Y_{j_i}(z) \in A_0\langle z_1, \ldots, z_i\rangle \ , \quad \text{et}$$
$$Y_k(z) - \hat{Y}_k(z) \in (z_1, \ldots, z_i)^N A_0[[z_1, \ldots, z_i]] \text{ pour } 1 \leq k \leq j_i \ .$$

LA CONJECTURE DE BASS-QUILLEN

Soit k un corps; la conjecture de Serre: *tout module projectif de type fini sur une k-algèbre de polynômes est libre,* démontrée par Suslin et Quillen, peut être reformulée en : *tout module projectif de type fini sur $k[u_1, \ldots, u_n]$ est de la forme $V \otimes_k k[u_1, \ldots, u_n]$ où V est un k-espace vectoriel de dimension finie.* Bass et Quillen ont demandé si l'énoncé restait vrai lorsque k était remplacé par un anneau nœthérien régulier. D'après un théorème de recollement de Quillen ([38]), il suffit de prouver le résultat lorsque B est un anneau local nœthérien régulier. Lindel a prouvé le résultat dans le cas "géométrique", plus précisément sous l'hypothèse que l'anneau local B est lisse de type fini sur un corps. Le théorème de Popescu-Spivakovsky permet de s'affranchir de l'hypothèse de finitude, pour prouver la conjecture de Bass-Quillen dans un cas plus général :

2.11 Théorème (partie de la Conjecture de Bass-Quillen, *cf* [42]).– *Soit B un anneau nœthérien régulier. Supposons que, pour chaque idéal maximal $\mathbf{m}$ de B, l'anneau localisé $B_{\mathbf{m}}$ contient un corps ou un anneau de Dedekind local (A, π) tel que $\pi \notin \mathbf{m}^2$ et que l'extension de corps $A/(\pi) \to B/\mathbf{m}$ soit séparable (en particulier, le morphisme d'inclusion $A \to B_{\mathbf{m}}$ est régulier). Alors, pour tout entier n, tout $B[u_1, \ldots, u_n]$-projectif de type fini M est de la forme $M_0 \otimes_B B[u_1, \ldots, u_n]$ où M_0 est un B-module projectif de type fini (isomorphe à $M/(u_1, \ldots, u_n)M$).*

De même, par réduction au cas de type fini, Spivakovsky prouve dans un grand nombre de cas une autre conjecture de Quillen:

Dans la situation ci-dessus, considérons pour un idéal maximal $\mathbf{m}$ *un élément* $u \in B_{\mathbf{m}}$ *tel que* u *et* π *soient linéairement indépendants dans le* $B_{\mathbf{m}}/\mathbf{m}$*-espace vectoriel* $\mathbf{m}/\mathbf{m}^2$*, ou que* $\frac{u}{\pi}$ *soit inversible dans* $B_{\mathbf{m}}$*. Alors tout* $(B_{\mathbf{m}})_u$*-module projectif de type fini est libre.*

C'est une version locale d'une autre conjecture de Quillen encore: Étant donnés un schéma affine régulier X et un diviseur non singulier $Z \subset X$, tout fibré vectoriel sur $X \setminus Z$ s'étend en un fibré vectoriel sur X.

3. QUELQUES ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION

Les premières démonstrations des théorèmes d'approximation par Artin dans le cadre formel/analytique ou formel/hensélien concernaient des morphismes $\sigma: A \to \hat{A}$, donc des morphismes sans extension résiduelle entre anneaux de même dimension, et de plus A était soit un anneau de séries convergentes soit le hensélisé d'un anneau de polynômes, disons en d variables, et B l'anneau des séries formelles. Elle procédaient par récurrence sur d au moyen du théorème de préparation de Weierstrass. Dans le cas général cette méthode est inapplicable. La démonstration de Popescu et celle de Spivakovsky doivent surmonter deux types de difficultés: faire diminuer par des extensions de type fini $C \to C'$ le lieu critique (la partie "résolution" de la démonstration) et se ramener au cas où $\sigma: A \to B$ est un morphisme d'anneaux locaux à extension résiduelle triviale.

L'IDÉAL CRITIQUE D'UNE A-ALGÈBRE DE TYPE FINI

Soient A un anneau nœthérien et $C = A[u_1, \ldots, u_n]/J$ une A-algèbre de type fini. Considérons l'idéal $H_{C/A}$ de C engendré par les images dans C de tous les élements de $A[u_1, \ldots, u_n]$ de la forme $c\Delta_{g,j}$, où r est un entier, $g = (g_1, \ldots, g_r) \subset J$, $j = (j_{i_1}, \ldots, j_{i_r})$, $\Delta_{g,j}$ est le déterminant jacobien $\det(\frac{\partial g_i}{\partial u_{j_k}})$, $1 \leq i,\ k \leq r$ et c appartient à l'idéal résiduel $(g) : (f)$, ce qui signifie que l'on a $c.(f) \subset (g)$. Il résulte du critère jacobien que l'idéal $H_{C/A}$ définit le lieu de non-lissité de Spec$C$ sur Spec$A$: Étant donné un idéal premier $\mathcal{Q}$ de C, l'algèbre localisée $C_{\mathcal{Q}}$ est lisse sur A si et seulement si $H_{C/A} \not\subset \mathcal{Q}$.

Un intérêt de cette définition un peu alambiquée est que $H_{C/A}$ définit encore le lieu de non-lissité en restriction à chaque composante irréductible de Spec$C$, quelle que soit sa dimension. Une présentation plus générale de cette construction, en rapport avec la cohomologie d'André, se trouve dans [5]. L'idée générale des démonstrations est de faire des extensions de type fini $C \to C'$ telles que l'image dans B de $H_{C'/A}$ soit plus grosse que celle de $H_{C/A}$. Pour cela on travaille d'abord dans l'algèbre localisée de B en un idéal premier minimal de $H_{C/A}B$.

(CO)HOMOLOGIE D'ANDRÉ

Soit $\sigma: A \to B$ un homomorphisme d'anneaux, et soit W un B-module. Dans [4], André associe à ces données pour chaque entier $i \geq 0$ des B-modules $\mathrm{H}_i(A, B, W)$ et $\mathrm{H}^i(A, B, W)$; la remarquable construction d'André est purement algébrique; on peut en obtenir une interprétation plus géométrique et des généralisations à l'aide du complexe cotangent de Grothendieck et Illusie ([26]). Nous n'utiliserons ici que les propriétés fondamentales suivantes :

Notant $\Omega_{B/A}$ le B-module des A-différentielles de Kähler de B , on a :

3.1 Proposition ([4], Prop. 16.12, Prop. 16.13).– *On a :*

$$\mathrm{H}_0(A, B, W) = \Omega_{B/A} \otimes_B W \quad , \quad H^0(A, B, W) = \mathrm{Der}_A(B, W).$$

Un point fondamental est que les A-algèbres lisses sont des objets acycliques pour cette (co)homologie:

3.2 Proposition ([4], Prop. VII.23, Prop. XVI.17, Th. 30).- *Pour un morphisme d'anneaux nœthériens $\sigma: A \to B$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *σ est régulier,*
2) $\mathrm{H}_i(A, B, W) = 0$ *pour tout $i > 0$ et tout B-module W,*
3) $\mathrm{H}_1(A, B, W) = 0$ *pour tout idéal premier $\mathcal{Q}$ de B et tout $\kappa(\mathcal{Q})$-espace vectoriel W,*
4) $\mathrm{H}^1(A, B, W) = 0$ *pour tout idéal premier $\mathcal{Q}$ de B et tout $\kappa(\mathcal{Q})$-espace vectoriel W,*
5) $\mathrm{H}^i(A, B, W) = 0$ *pour tout idéal premier $\mathcal{Q}$ de B, tout $\kappa(\mathcal{Q})$-espace vectoriel W et tout $i > 0$.*

En fait, σ est régulier si et seulement si $\mathrm{H}_1(A,B,B) = 0$ et $\Omega_{B/A}$ est un B-module plat. Une A-algèbre de présentation finie est lisse si et seulement si le B-module $\mathrm{H}_k(A,B,B)$ est nul pour $k=1$ et projectif pour $k=0$. Dans ce cas, les $\mathrm{H}_i(A,B,W)$ et $\mathrm{H}^i(A,B,W)$ sont nuls pour tout B-module W et tout $i>1$.

La suite exacte de cohomologie prend la forme suivante (dite de Jacobi-Zariski) :

3.3 Proposition ([4], Chap 5).– *Soient $F \to B$ un morphisme de A-algèbres et W un B-module. Il y a deux suites exactes longue s:*

$$\cdots \to \mathrm{H}_n(A,F,W) \to \mathrm{H}_n(A,B,W) \to \mathrm{H}_n(F,B,W) \to \mathrm{H}_{n-1}(A,F,W) \to \cdots$$

et

$$\cdots \to \mathrm{H}^{n-1}(A,F,W) \to \mathrm{H}^n(F,B,W) \to \mathrm{H}^n(A,B,W) \to \mathrm{H}^n(A,F,W) \to \cdots$$

Les propriétés ci-dessus de la cohomologie d'André et le fait qu'elle commute aux limites inductives filtrantes ([4], Chap. III, Prop. 35) impliquent aussitôt que si $\sigma\colon A \to B$ est limite inductive filtrante de A-algèbres de type fini lisses, σ est régulier. Il faut montrer la réciproque.
La démonstration de Popescu est très bien refondue à l'aide de la cohomologie d'André dans [5] (On consultera aussi [3]).

Voici un plan de la démonstration de Spivakovsky, qui est plus géométrique et plus facile à esquisser. Pour une partie, elle est guidée par l'analogie suivante: soient k un corps algébriquement clos et V une k-algèbre qui est un anneau de valuation du corps des fonctions d'une variété algébrique sur k. Alors le morphisme $k \to V$ est régulier parce que le calcul des groupes de cohomologie d'André commute aux limites inductives filtrantes d'algèbres et que V est limite inductive filtrante de k-algèbres lisses essentiellement de type fini (localisées d'algèbres de type fini); c'est un avatar du théorème d'uniformisation locale de Zariski ([46]), et les k-algèbres lisses dominant une k-algèbre essentiellement de type fini donnée sont construites par des éclatements. L'exemple donné au §1 utilise en outre le fait que le corps des fractions d'une k-algèbre est limite inductive filtrante de corps de fonctions algébriques sur k.

3.4 Proposition ([42], Prop. 4.1).– *Supposons que B soit un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{Q}$, et que $A \to B$ soit régulier. Posons $\mathbf{m} = \mathcal{Q} \cap A$ et supposons l'extension résiduelle $A/\mathbf{m} \to B/\mathcal{Q}$ triviale. Soit $C = A[u]/J$ une A-algèbre de type fini munie d'un A-morphisme $\rho: C \to B$. Supposons qu'il existe $(g_1, \ldots, g_r) \subset J$ et un entier N tels que $\mathcal{Q}^N \subset \sum_j \Delta_{g,j} B$ et $\mathbf{m}A[u] \subset \sqrt{(g) : J}$. Alors il existe une A-algèbre de type fini lisse faisant commuter le diagramme:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma} & B \\ \downarrow & \overset{\rho}{\nearrow} & \uparrow \\ C = A[u]/J & \longrightarrow & D \end{array}$$

et telle que $\sqrt{H_{D/C} B} = \mathcal{Q}$.

La dernière hypothèse est un peu plus faible que de demander que C soit intersection complète à singularité isolée au-dessus de A. La partie essentielle de la démonstration est de se ramener par une suite d'éclatements généralisés au cas où l'idéal J est engendré par des formes linéaires en les u_i. On se ramène d'abord, en remplaçant A par une A-algèbre de polynômes, au cas où $\mathcal{Q} = \mathbf{m}B$. Puisque l'extension résiduelle est triviale, on a l'inclusion $\rho(C) \subset \sigma(A) + \mathcal{Q}$. Soit $(z_1, \ldots, z_k)$ un système de générateurs de $\mathbf{m}$. Il existe des éléments $c_i \in A$ tels que $\rho(u_i - c_i) \in \mathcal{Q}$. Il existe puisque $\mathbf{m}B = \mathcal{Q}$ des éléments $\overline{v_{i,j}} \in B$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$ tels que $\rho(u_i - c_i) = \sum_{j=1}^{k} \overline{v_{i,j}} \sigma(z_j)$. Introduisons des indéterminées $v_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$ et l'homomorphisme de A-algèbres $\pi_z: A[u] \to A[v]$ déterminé par: $\pi_z(u_i) = c_i + \sum_{j=1}^{k} v_{i,j} z_j$. Notons $f^{(1)}$ l'image de f par π_z, et C_1 l'algèbre quotient $A[v]/(f^{(1)})$. Par construction, C_1 admet un A-morphisme $\rho_1: C_1 \to B$ tel que si nous continuons de noter π_z le morphisme $C \to C_1$, on ait $\rho_1 \circ \pi_1 = \rho$. L'homomorphisme $\pi_z: C \to C_1$ est appelé *éclatement généralisé* de $\mathbf{m}$ par rapport au système générateur (z). Si A est un anneau local et (z) un système minimal de générateurs de $\mathbf{m}$, l'éclatement généralisé ne dépend pas du choix de (z).

3.5 Lemme.- *Soit $\pi_z: C \to C_1$ un éclatement généralisé; on a l'inclusion $\sqrt{\mathbf{m} H_{C/A} C_1} \subset H_{C_1/A}$, avec égalité si $\mathbf{m}$ contient tous les idéaux premiers associés de A, en particulier si A est local.*

Nous allons désormais, pour montrer l'idée dans un cas simple, considérer seulement le cas où J est principal: $C = A[u_1, \ldots, u_n]/(f)$. Notons $J(f)$ l'idéal de B engendré par les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_n}$ et $I(f)$ l'idéal de A engendré par les coefficients a_α du polynôme $f = \sum_\alpha a_\alpha u^\alpha$. On a l'inclusion $J(f) \subset I(f) \otimes_A B$. On calcule ensuite $J(f^{(1)})$ et $I(f^{(1)})$ et la formule de Taylor donne:

$$J(f^{(1)}) = \mathbf{m}J(f), \quad I(f^{(1)}) \otimes_A B \subset \mathbf{m}J(f) + \mathbf{m}^2 I(f) \otimes_A B.$$

Utilisant le lemme d'Artin-Rees, on montre qu'il existe un entier N tel que, après N éclatements généralisés, on arrive à la situation où $J(f^{(N)}) = I(f^{(N)}) \otimes_A B$, avec une A-algèbre $C_N = A[U^{(N)}]/(f^{(N)})$. Si l'on note $(a_1, \ldots, a_\ell)$ un système minimal de générateurs de $I(f^{(N)})$, on peut écrire $f^{(N)} = \sum_i a_i g_i \ ; g_i \in A[u^{(N)}]$. On considère la A-algèbre $C_0 = A[G_1, \ldots, G_\ell]/(\sum_i a_i G_i)$, où les G_i sont de nouvelles indéterminées; elle admet un morphisme $C_0 \to C_N$ déterminé par $G_i \mapsto g_i$. L'égalité $J(f^{(N)}) = I(f^{(N)}) \otimes_A B$ entraîne que $(a_1, \ldots, a_\ell)$ induit un système minimal de générateurs du $B/\mathcal{Q}$-espace vectoriel $J(f^{(N)})/\mathcal{Q}J(f^{(N)})$, et de cela on déduit que $H_{C_N/C_0} \not\subset \mathcal{Q} \cap C_N$. Finalement on se ramène à lissifier l'algèbre C_0. C'est-à-dire que l'on est ramené au cas où l'idéal J est engendré par des formes linéaires!

Ce cas se traite par une généralisation du théorème de D. Lazard selon lequel tout A-module plat est limite inductive filtrante de A-modules libres de type fini. Le cas général sans extension résiduelle se ramène sans trop de peine au cas d'une intersection complète grâce au:

3.6 Lemme (Lemme d'Elkik, [17] Lemme 3).– *Soient A un anneau nœthérien et C une A-algèbre de type fini. Choisissons une présentation $C = A[u_1, \ldots, u_n]/J$ et un système de générateurs $(f_1, \ldots, f_q)$ de J. Notons S l'algèbre symétrique* $\mathrm{Sym}_C J/J^2$ *du C-module J/J^2. Soit V un ouvert de Spec$C$ lisse sur Spec$A$; notons V' l'image réciproque de V par le morphisme canonique* Spec$S \to$ Spec$C$. *L'ouvert V' de Spec$S$ est lisse sur Spec$A$ et la dimension de ses fibres est constante et égale à n. Il existe une présentation $S = A[U_1, \ldots, U_{q+2n}]/K$ telle que, sur toute immersion ouverte* Spec$D \hookrightarrow$ Spec$S$ *au dessus de* Spec$A$ *dont l'image est contenue dans V', le S-module K/K^2 induise un D-module libre de rang $q+n$. Ainsi il existe un voisinage dans* Spec$A[U_1, \ldots, U_{q+2n}]$ *de l'image de* Spec$D$ *dans lequel S est une intersection complète relative, définie par $q+n$ équations.*

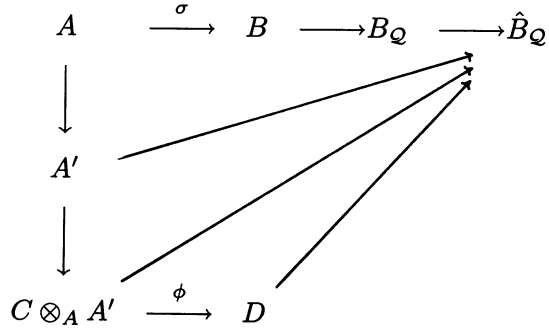
Il reste le travail très délicat d'exorciser les extensions résiduelles. Ici la cohomologie d'André joue un rôle crucial. Spivakovsky démontre la version suivante du théorème de Cohen, qui est très proche de résultats de Nica-Popescu ([31]):

3.7 Théorème (Nica-Popescu, Spivakovsky).– *Soit* $\sigma\colon (A,\mathbf{m}) \to (B,\mathcal{Q})$ *un morphisme régulier entre anneaux locaux nœthériens. Notons* $\hat{B}_{\mathcal{Q}}$ *le complété de* B. *Alors il existe une* A*-algèbre locale nœthérienne* A^* *qui est limite inductive de* A*-algèbres lisses de type fini et un diagramme commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^* & \xrightarrow{\sigma^*} & \hat{B}_{\mathcal{Q}} \end{array}$$

où σ^* *est aussi limite inductive de* A^**-algèbres lisses de type fini et induit un isomorphisme des corps résiduels.*

En fait, posant $k = A/\mathbf{m}$, $K = B/\mathcal{Q}$, on a $\dim A^* \geq \dim A + \dim_K \mathrm{H}_1(k,K,K)$, et on peut choisir A^* ayant cette dimension, ou bien celle de B. Ici on a dû aller dans le complété de B. Finalement, dans la situation du Théorème, on obtient pour chaque idéal premier $\mathcal{Q}$ minimal de $H_{C/A}B$ un diagramme commutatif :



où A' est une A-algèbre locale nœthérienne qui est limite inductive filtrante de A-algèbres de type fini, de même dimension que $\hat{B}_{\mathcal{Q}}$ et avec extension résiduelle triviale. Le bas du diagramme résulte du cas sans extension résiduelle appliqué au morphisme $A' \to \hat{B}_{\mathcal{Q}}$. Il reste enfin à approximer ce diagramme dans la topologie $\mathcal{Q}$-adique pour obtenir un morphisme dans $B_{\mathcal{Q}}$, puis à globaliser.

Spivakovsky montre aussi que si A est réduit et si pour tout idéal premier minimal $\mathcal{P}$ de A, le quotient $B/\mathcal{P}B$ est de degré de transcendance infini sur $A/\mathcal{P}$, alors B est limite inductive de ses sous-A-algèbres lisses de type fini.

4. L'EXEMPLE DE GABRIELOV

Partons de l'exemple dû à Osgood (*cf* [1], [2]) de l'injection

$$\phi: \mathbf{C}\{y_1, y_2, y_3\} \hookrightarrow \mathbf{C}\{x_1, x_2\}$$

définie par

$$\phi(y_1) = x_1,\ \phi(y_2) = x_1x_2,\ \phi(y_3) = x_1e^{x_2}.$$

Suivant Gabrielov ([20]), on peut vérifier que la série

$$\hat{S}(y_1, y_2, y_3) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\,(y_1^{n-1}y_3 - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} y_1^{n-i}y_2^i)$$

est divergente mais que $\hat{\phi}(\hat{S}) \in \mathbf{C}[[x_1, x_2]]$ est convergente, où $\hat{\phi}$ désigne l'extension de ϕ aux anneaux de séries formelles. Cela permet de définir un morphisme

$$\Phi: \mathbf{C}\{y_1, y_2, y_3, y_4\} \to \mathbf{C}\{x_1, x_2\}$$

par

$$\Phi(y_1) = x_1,\ \Phi(y_2) = x_1x_2,\ \Phi(y_3) = x_1e^{x_2}, \Phi(y_4) = \hat{\phi}(\hat{S}) = \hat{S}(\phi(y_1), \phi(y_2), \phi(y_3)))$$

dont on peut montrer qu'il est injectif mais dont l'extension aux anneaux de séries formelles

$$\hat{\Phi}: \mathbf{C}[[y_1, y_2, y_3, y_4]] \to \mathbf{C}[[x_1, x_2]]$$

n'est pas injective puisque son noyau contient $y_4 - \hat{S}(y_1, y_2, y_3)$.

Posant $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, la formule de Taylor

$$f(y) - \hat{\phi}(f) = \sum_{\alpha} (y - \phi(y))^{\alpha} F^{(\alpha)}(\phi(y))$$

nous montre que l'égalité $\hat{\phi}(f) = h(x)$ dans $\mathbf{C}[[x,y]]$ équivaut à l'existence de séries $A_i(x,y)$ telles que

$$h(x) = f(y) + \sum_{i=1}^{3} A_i(x,y)(y_i - \phi(y_i)).$$

Choisissant $h(x) = \hat{\phi}(\hat{S})$, considérons cela comme une équation linéaire en les inconnues f, A_1, A_2, A_3 à coefficients dans $\mathbf{C}\{x,y\}$. D'après ce qui précède elle a une solution formelle, avec $\hat{f} = \hat{S}(y)$, qui est donc indépendante de x mais si elle avait une solution convergente $f(y)$ *telle que* f *soit indépendante de* x , on aurait en se restreignant au sous-espace de $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^3$ défini par les équations $y_i = \phi(y_i)$ (le graphe du morphisme analytique $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$ correspondant à ϕ) une relation analytique $\phi(f) = \hat{\phi}(\hat{S})$ dans $\mathbf{C}\{x_1, x_2\}$, donc $y_4 - f(y)$ appartiendrait au noyau de Φ, contredisant l'injectivité de Φ.

Ceci montre que le théorème d'approximation cylindrique n'est pas vrai pour des équations analytiques sans condition supplémentaire. Cette présentation de l'exemple de Gabrielov est due à Becker ([11]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Abhyankar - *Two notes on formal power series,* Proc. A.M.S. **7** (1956), 903-905.

[2] S. Abhyankar, M. Van der Put - *Homomorphisms of analytic local rings.* J. Reine u. Ang. Math., **242**, (1970), 26-60.

[3] M. André - *Artin's Theorem on the solutions of analytic equations in positive characteristic,* Manus. Math. **15**, (1975), 341-347.

[4] M. André - *Homologie des algèbres commutatives* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974.

[5] M. André - *Cinq exposés sur la désingularisation,* Manuscrit, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Décembre 1991.

[6] M. Artin - *On the solutions of analytic equations,* Inventiones Math. (1968), 277-291.

[7] M. Artin, *Algebraic approximation of structures over local rings,* Publ. Math. IHES, **36** (1969), 23-58.

[8] M. Artin - *Algebraic structure of power series rings,* Contemp. Math.**13** (1982), 223-227.

[9] M. Artin and J. Denef - *Smoothing of a ring homomorphism along a section,* Arithmetic and Geometry, Vol. II,(in honor of Shafarevitch), Birkhaüser 1983, 5-32.

[10] J. Becker, *Exposé on a conjecture of Tougeron,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **27**, 4 (1977), 9-27.

[11] J. Becker - *On the composition of power series,* Commutative algebra, Fairfax 1979, Lect. Notes in Pure and applied Math., No. 68, 159-172, Dekker, 1982.

[12] J. Becker - J. Denef, L. Lipshitz, and L. van den Dries, *Ultraproducts and Approximation in local rings I,* Invent. Math. **51**, (1979), 189-203.

[13] N. Bourbaki - *Algèbre commutative, Chap. 3* , Masson, 1985.

[14] D. Cerveau - *Résultats de type Artin pour les systèmes d'équations holomorphes,* Gazette des mathématiciens, **48**, 77-95, S.M.F. 1991.

[15] M. Coste, J Ruiz, M Shiota, *Approximation in compact Nash manifolds,* Prépublication IRMAR, Rennes 1994.

[16] J. Denef, D. Harbater - *Global approximation in dimension two,* Journal of Algebra, Vol. 129, No.1, 1990.

[17] R. Elkik - *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien,* Ann. Sci. ENS, **6** (1973), 553-604.

[18] J. Frisch, *Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes,* Invent. math., **4**, (1967), 118-138.

[19] H. Hironaka - *formal line bundle along exceptionnal loci,* Algebraic geometry, Bombay, 1968, Oxford U.P.

[20] A.M. Gabrielov - *Formal relations between analytic functions,* Funk. Analiz Appl. **5** (1971), 64-65.

[21] M.J. Greenberg - *Rational points in henselian discrete valuation rings,* Publ. Math. IHES **31**, (1966).

[22] A. Grothendieck, J. Dieudonné - *EGA IV, seconde partie,* § 7. Publ. Math. IHES **24** (1965).

[23] A. Grothendieck, J. Dieudonné - *EGA IV, quatrième partie,* § 18. Publ. Math. IHES **32** (1965).

[24] M. Hickel - *Sur la fonction d'Artin d'un germe analytique,* in Complex analysis, Wuppertal 1991. K. Diederich ed., Aspects of Math. E 17, F. Vieweg and

Sohn 1991.

[25] H. Kurke, T. Mostowski, G. Pfister, D. Popescu and M. Roczen - *Die Approximationeigenschaft lokaler Ringe,* Springer LNM **634**, 1978.

[26] L. Illusie - *Complexe cotangent, I.* Springer LMN **239**.

[27] S. Lang - *Some applications of the local uniformization theorem,* Amer. J. Math. **76**, (1954), 362-374.

[28] H. Lindel - *On a question of Bass-Suslin concerning projective modules over polynomial rings,* Invent. Math. **65** (1981), 319-323.

[29] T. Mostowski - *Topological equivalence between analytic and algebraic sets,* Bull. Acad. Pol. Sci. (1984), 393-400.

[30] A. Néron - *Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux,* Publ. Math. IHES. **21** (1964).

[31] V. Nica et D. Popescu - *A structure theorem on formally smooth morphisms in positive characteristic,* J. of Algebra **100** (1986), 436-455.

[32] T. Ogoma - General Néron desingularization based on the idea of Popescu, *Preprint.*

[33] A. Płoski - *Note on a theorem of M. Artin,* Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Math. **22** (1974), 1107-1109.

[34] D. Popescu - *Global form of Néron's p-desingularization, in* Week of algebraic Geometry, Bucharest, June 30-July 6, 1980. Teubner Texte, Band 40, Leipzig, 1981.

[35] D. Popescu - *General Neron desingularisation,* Nagoya Math. J. **100** (1985), 97-126.

[36] D. Popescu - *General Neron desingularisation and approximation,* Nagoya Math. J. **104** (1986), 85-115.

[37] D. Popescu - *Letter to the Editor, General Neron desingularisation and approximation,* Nagoya Math. J. **118** (1990), 45-53.

[38] D. Quillen - *Projective modules over polynomial rings,* Invent. Math. **36** (1976), 167-171.

[39] C. Rotthaus - *On the approximation property for excellent rings,* Inv. Math. **88** (1987), 39-63.

[40] N. Schappacher - *Some remarks on a theorem of M.J. Greenberg,* in Proc. 1979 Kingston number theory Conf. Queen's Math. Papers (1980), 100-114.

[41] N. Schappacher - *L'inégalité de Łojasiewicz ultramétrique,* CRAS Paris **296** (1983), 439-442.

[42] M. Spivakovsky - *Smoothing of ring homomorphisms, approximation theorems, and the Bass-Quillen conjecture.* Prépublication, Toronto 1993 (version corrigée de Janvier 1994).

[43] M. Spivakovsky, - *Non-existence of the Artin function for henselian pairs,* Prépublication.

[44] J-C. Tougeron, *Courbes analytiques sur un germe d'espace analytique et applications*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **26**, 2 (1976), 117-131.

[45] J-C. Tougeron, *Solutions d'un système d'équations analytiques réelles et applications*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **26**, 3 (1976), 109-135.

[46] O. Zariski, *Local uniformization of algebraic varieties,* Annals of maths. **41**, No. 4, 1940.

Bernard TEISSIER

École Normale Supérieure
D.M.I.
URA 762 du C.N.R.S.
45, rue d'Ulm
F-75230 PARIS Cedex 05

Astérisque

ÉTIENNE GHYS

Construction de champs de vecteurs sans orbite périodique

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 785, p. 283-307

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__283_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
46ème année, 1993-94, n° 785

Juin 1994

CONSTRUCTION DE CHAMPS DE VECTEURS SANS ORBITE PÉRIODIQUE

[d'après Krystyna KUPERBERG]

par **Étienne GHYS**

Introduction

"It is unknown if every continuous vector field on the three dimensional sphere contains a closed integral curve" [25]. Cette question, discrètement insérée dans un article de 1948 par H. Seifert, est progressivement devenue *la conjecture de Seifert* et a passionné bon nombre de topologues/dynamiciens. En 1974, P. Schweitzer construisait un contre-exemple qui n'est cependant que de classe C^1 [23]. Depuis, la question de l'existence d'exemples plus réguliers semblait bien difficile... K. Kuperberg vient d'y répondre par une superbe construction que nous allons décrire dans cet exposé.

Théorème [11] *Sur toute variété fermée de dimension trois, il existe un champ de vecteurs non singulier,* analytique réel, *dont aucune orbite n'est périodique.*

Après avoir donné quelques motivations (§1 et §2), nous décrirons les constructions préliminaires de W. Wilson et P. Schweitzer (§3 et §4). La démonstration du théorème est faite aux §5 et §6. Enfin, dans les §7 et §8, nous discutons de la dynamique de ces exemples et des problèmes qu'ils soulèvent.

Je voudrais remercier les collègues qui m'ont aidé à mieux comprendre cette construction. J'ai en particulier profité d'un exposé de Shigenori Matsumoto [15], d'intéressantes conversations avec Christian Bonatti et Bruno Sevennec ainsi que du point de vue "serpentin" de Larry Siebenmann [26]. Je remercie par ailleurs Krystyna et Greg Kuperberg pour les informations qu'ils ont bien voulu me transmettre.

§1 Un peu d'histoire

C'est H. Poincaré qui a montré l'importance des orbites périodiques en mécanique céleste : "elles se sont montrées la seule brèche par où nous puissions pénétrer une place jusqu'ici réputée inabordable" [18]. Il démontre l'existence de nombreuses

orbites périodiques dans le problème des trois corps, ce qui lui permet d'étudier ensuite la dynamique au voisinage de ces orbites [19]. Avec la même motivation, il "montre" l'existence de géodésiques fermées sur les surfaces compactes convexes [20]. Ces travaux sont précisés par G. Birkhoff qui prouve en particulier qu'il existe des géodésiques fermées pour toute métrique riemannienne sur une sphère de dimension quelconque [2]. Les champs de vecteurs concernés sont hamiltoniens et les méthodes sont bien entendu variationnelles. Il était naturel de chercher des propriétés purement topologiques qui garantissent l'existence d'orbites périodiques pour des champs qui ne sont plus nécessairement hamiltoniens.

H. Kneser montre par exemple que tout champ de vecteurs non singulier sur la bouteille de Klein possède une orbite périodique [10]. C'est dans ce même esprit que H. Seifert aborde l'étude des champs de vecteurs sur la sphère de dimension trois, évidemment guidé par la remarque élémentaire suivante. Considérons un champ de vecteurs sur le produit $V \times S^1$ d'une variété fermée et du cercle et supposons que ce champ soit transverse à tous les $V \times \{*\}$ (ce qui est par exemple le cas si le champ est suffisamment proche de la fibration triviale en cercles). On peut alors considérer l'application de premier retour d'une orbite sur l'une de ces sections transverses ; c'est un homéomorphisme de V, homotope à l'identité, dont les points fixes correspondent bien sûr à des orbites périodiques du champ considéré. Si la caractéristique d'Euler-Poincaré de V est non nulle, on a donc montré l'existence d'une orbite périodique pour ce type de champ sur $V \times S^1$. Le problème étudié par H. Seifert est celui des champs proches de la fibration de Hopf sur la sphère de dimension trois. Bien sûr, cette fibration ne possède pas de section globale mais on peut analyser les applications de premier retour sur des sections locales et un calcul d'indice (délicat) mène au théorème de Seifert [25] :

Tout champ de vecteurs suffisamment proche de la fibration de Hopf sur la sphère de dimension trois possède au moins une orbite périodique.

On consultera [3] pour un exposé clair de ce résultat et de ses développements, comme la théorie de l'indice de Fuller qui permet de garantir l'existence d'orbites périodiques, dans certains cas, au voisinage d'un champ de vecteurs donné.

D'une certaine façon, *l'enjeu de la conjecture de Seifert était donc la recherche d'un théorème global qui permette de "compter" les orbites périodiques d'un champ tout comme le théorème de Poincaré-Hopf permet de "compter" les singularités.*

§2 Pourquoi la question est difficile...

Le fait qu'il ait fallu chercher ce contre-exemple pendant quarante-cinq ans est déjà une indication de la difficulté du problème... Pour que le lecteur ait quelques exemples à l'esprit, nous commençons par décrire deux procédés élémentaires de construction de champs de vecteurs sur la sphère de dimension trois.

Soit $h : S^3 \to S^2$ la fibration de Hopf et $\mathcal{H}$ un champ dont les orbites sont les fibres de h. Chaque champ de vecteurs $\mathcal{X}$ sur la sphère S^2 se relève de manière unique en un champ $\overline{\mathcal{X}}$ orthogonal à $\mathcal{H}$. La somme $\mathcal{Y} = \mathcal{H} + \overline{\mathcal{X}}$ est un champ non singulier dont les orbites se projettent par h sur celles de $\mathcal{X}$. Les singularités de $\mathcal{X}$ correspondent donc à des orbites périodiques de $\mathcal{Y}$ (en particulier, il en existe...). En choisissant par exemple pour $\mathcal{X}$ le gradient d'une fonction de Morse, *on obtient des champs non singuliers sur la sphère de dimension trois qui ne possèdent qu'un nombre fini d'orbites périodiques.*

Un métrique riemannienne sur la sphère de dimension *deux* définit un *flot géodésique* sur son fibré unitaire tangent, dont un revêtement double est la sphère de dimension trois. Nous avons déjà signalé que tous ces flots ont des orbites périodiques (et même un infinité, d'après un résultat de V. Bangert et J. Franks). Un exemple de V. Donnay montre qu'un tel flot *peut* être ergodique (par rapport à la mesure de Liouville) de sorte que, en particulier, *il existe des champs de vecteurs sur la sphère dont presque toutes les orbites sont denses* [5].

Voici quelques résultats qui montrent qu'un champ sans orbite périodique sur la sphère de dimension trois doit être *très* particulier.

- Le *closing lemma* de C. Pugh montre qu'un champ de vecteur générique (dans la topologie C^1) d'une variété fermée possède une singularité ou une orbite périodique [21].

- Selon un théorème de A. Katok, un champ de vecteurs non singulier, de classe C^2, sur une variété fermée de dimension trois, dont l'*entropie topologique est non nulle*, contient un ensemble hyperbolique et donc *une infinité d'orbites périodiques* [8].

- Un champ de vecteurs *transverse à un feuilletage de codimension un* sur la sphère de dimension trois possède une orbite périodique : c'est un corollaire du théorème de S.P. Novikov [17].

- D'après un résultat récent de H. Hofer, *le champ de Reeb d'une forme de contact* sur la sphère de dimension trois possède une orbite périodique. Voir l'exposé de F. Laudenbach dans ce séminaire [14].

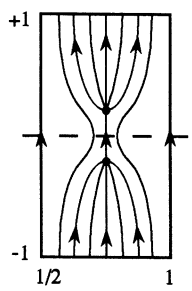
§3 Le piège de Wilson

Dans [27], W. Wilson introduit une méthode extrêmement simple pour modifier un champ de vecteurs et *piéger* ses orbites périodiques. Certes, le piège est encore rudimentaire puisqu'il produit lui-même des orbites périodiques mais ceci permet de montrer que :

Sur toute variété fermée de dimension trois, il existe des champs de vecteurs n'ayant qu'un nombre fini d'orbites périodiques.

C'est cette première idée, essentielle pour la construction de K. Kuperberg, que nous allons décrire dans ce paragraphe.

Considérons le champ de vecteurs $\mathcal{W}_0$ sur le rectangle $R = [1/2, 1] \times [-1, +1]$ (de coordonnées (r, z)) décrit sur la figure ci-contre. Il possède les propriétés suivantes :



- Il est de classe C^∞ et coïncide avec le champ vertical $\partial/\partial z$ près du bord du rectangle; il possède deux singularités (de type selle-nœud).
- Les orbites entrant dans le rectangle par un point de $[5/8, 7/8] \times \{-1\}$ ne sortent pas du rectangle : elles sont *piégées* et convergent vers une singularité.
- Le champ est antisymétrique par rapport à la droite $\{z = 0\}$. Il en résulte que *si une orbite pénètre dans le rectangle et en ressort, les points d'entrée et de sortie sont symétriques par rapport à cette droite.*

Soit $P = S^1 \times R$ le produit du cercle $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ (de coordonnée θ) par le rectangle R. Soit $\mathcal{W}_1$ le champ sur P tangent aux $\{*\} \times R$ et qui se projette sur $\mathcal{W}_0$ par la projection de P sur R; c'est un champ qui possède deux cercles de singularités que nous allons détruire en y ajoutant une composante dans la direction de $\partial/\partial\theta$. Soit $f : R \to \mathbf{R}$ une fonction, de classe C^∞, nulle au voisinage du bord, impaire en z, et non nulle sur les singularités de $\mathcal{W}_0$. La somme $\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 + f.\partial/\partial\theta$ est un *champ non singulier sur P, ne possédant que deux orbites périodiques.*

On peut plonger P dans le produit $D^2 \times [-1, +1]$ du disque fermé D^2 de rayon 1 par l'intervalle $[-1, +1]$ en envoyant le point (θ, r, z) sur le point $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. En prolongeant $\mathcal{W}_2$ à l'extérieur de P par le champ vertical $\partial/\partial z$, on obtient finalement un champ $\mathcal{W}_3$ sur $D^2 \times [-1, +1]$. C'est le *piège de Wilson.* Il possède les propriétés suivantes :

W1 *C'est un champ de classe C^∞ de $D^2 \times [-1, +1]$ qui coïncide avec le champ vertical $\partial/\partial z$ près du bord.*

W2 *Il existe un ouvert non vide U de D^2 tel que les orbites qui pénètrent dans le piège par un point de $U \times \{-1\}$ n'en ressortent pas.*

W3 *Le champ est antisymétrique par rapport au plan $\{z = 0\}$.*

Voyons comment utiliser le piège de Wilson. Rappelons d'abord qu'une variété fermée connexe supporte un champ de vecteurs non singulier si et seulement si sa caractéristique d'Euler-Poincaré est nulle, ce qui est le cas en dimension impaire (en particulier en dimension trois...).

Soit $\mathcal{X}$ un champ de vecteurs non singulier, de classe C^∞, sur une variété fermée V de dimension trois. Il n'est pas difficile de trouver un nombre fini de copies disjointes de $D^2 \times [-1, +1]$ dans V (que nous appellerons les *boîtes*) dans lesquelles le champ $\mathcal{X}$ coïncide avec un multiple constant de $\partial/\partial z$ et telles que la réunion des diverses

copies de $U \times \{-1\}$ rencontre toutes les orbites de $\mathcal{X}$.

On construit alors un champ de vecteurs non singulier $\overline{\mathcal{X}}$ sur V de la façon suivante. À l'extérieur de la réunion des boîtes, les champs $\mathcal{X}$ et $\overline{\mathcal{X}}$ coïncident. Dans chaque boîte, on remplace $\mathcal{X}$ par un multiple constant du piège de Wilson $\mathcal{W}_3$, convenablement ajusté pour que le champ ainsi obtenu soit lisse.

Nous affirmons que $\overline{\mathcal{X}}$ *ne possède qu'un nombre fini d'orbites périodiques*, à savoir celles qui sont contenues dans les boîtes. Considérons en effet l'orbite d'un point x, extérieur aux boîtes, par $\overline{\mathcal{X}}$. Cette orbite commence par suivre une orbite de $\mathcal{X}$. Si elle pénètre dans une boîte et en ressort, le point de sortie est le même que le point de sortie de l'orbite de $\mathcal{X}$ correspondante, c'est-à-dire que, à la sortie de la boîte, le point est revenu sur l'orbite de $\mathcal{X}$ qu'il a quittée à l'entrée. Puisque nous avons fait en sorte que la réunion des copies de $U \times \{-1\}$ rencontre toutes les orbites de $\mathcal{X}$, on en déduit que l'orbite par $\overline{\mathcal{X}}$ d'un point extérieur aux boîtes finit par pénétrer dans une boîte et ne plus en sortir : elle n'est donc pas périodique.

Terminons ce paragraphe par quelques remarques.

- Il est possible de construire un piège *analytique réel* et de réaliser la chirurgie précédente de manière analytique. La condition **W1** est évidemment incompatible avec **W2** pour un champ analytique, mais on peut considérer un champ analytique réel $\mathcal{W}'$ sur un voisinage ouvert de $D^2 \times [-1,+1]$ dans $\mathbf{R}^3$ qui vérifie les conditions **W2** et **W3** et la condition suivante :

W1' *Il existe un difféomorphisme analytique réel ϕ d'un voisinage ouvert* du bord *de $D^2 \times [-1,+1] \subset \mathbf{R}^3$ sur un (autre) voisinage du bord qui envoie $\mathcal{W}'$ sur $\partial/\partial z$.*

Si, par exemple, $\mathcal{W}'$ est un champ analytique vérifiant **W2** et **W3** qui coïncide avec $\partial/\partial z$ *sur* le bord alors il vérifie **W1'**. Il suffit en effet de définir $\phi(r,\theta,z)$ comme (r',θ',z) où r' et θ' sont tels que $(r',\theta',+1)$ ou $(r',\theta',-1)$est dans l'orbite de $\mathcal{W}'$ passant par (r,θ,z). Ceci est bien défini au voisinage du bord.

Partant maintenant d'un champ analytique $\mathcal{X}$ non singulier sur une variété analytique V de dimension trois, on peut réaliser les boîtes précédentes par des plongements analytiques ψ définis sur un voisinage de $D^2 \times [-1,+1] \subset \mathbf{R}^3$, à valeurs dans V; et envoyant $\partial/\partial z$ sur un multiple de $\mathcal{X}$. L'opération de chirurgie consiste alors à ôter $\psi(D^2 \times [-1,+1])$ à V et à recoller le voisinage de $D^2 \times [-1,+1]$ sur ce qui reste de V par $\psi \circ \phi$ (là où cela a un sens). On obtient un champ analytique $\overline{\mathcal{X}}$ sur la variété V équipée d'une nouvelle structure analytique. D'après le théorème de Morrey-Grauert, la nouvelle structure est l'image de l'ancienne par un difféomorphisme C^∞ et on obtient donc un champ analytique sur la variété analytique initiale, comme annoncé.

- Si l'on dispose d'un nombre fini de disques transverses à $\mathcal{X}$, on peut toujours les connecter par des bandes transverses à $\mathcal{X}$ de façon à obtenir *un seul* disque transverse (si la variété V est connexe...). On peut donc réaliser la construction

précédente en utilisant une seule boîte et on obtient ainsi un champ ne possédant que deux orbites périodiques. Cette remarque est due à A. Verjovsky.

- Nous n'avons supposé la variété V compacte que pour des raisons de commodité ; une méthode analogue fonctionne sur une variété (paracompacte) quelconque et fournit des champs dont les orbites périodiques sont isolées.

- Dans chaque boîte, l'indice de chacune des deux orbites périodiques est nul. Il n'est pas difficile de construire des champs sur V ne possédant qu'un nombre fini d'orbites périodiques dont la somme des indices est arbitraire ; on ne peut donc pas espérer de théorème d'indice général "à la Poincaré-Hopf" pour les orbites périodiques.

- En dimension n supérieure ou égale à quatre, le piège de Wilson est très efficace. Au lieu de considérer le produit P du cercle par le rectangle R, on considère évidemment le champ analogue, encore noté $\mathcal{W}_1$, sur le produit d'un tore T^{n-2} par R. On construit alors le champ $\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 + f.\mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est un champ de vecteurs linéaire sur le tore T^{n-2}, de direction irrationnelle (*sans orbite périodique dès que* $n \geq 4$). En plongeant $T^{n-2} \times [1/2, 1]$ dans une boule B de $\mathbf{R}^{n-1}$, on obtient un piège de Wilson $\mathcal{W}_3$ sur $B \times [-1, +1]$ dont on peut faire le même usage que précédemment. On obtient le théorème de Wilson :

Théorème [27] *Sur toute variété fermée connexe de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle et de dimension supérieure ou égale à quatre, il existe un champ de vecteurs (analytique réel) sans orbite périodique.*

C'est donc en dimension trois que la conjecture de Seifert est plus intéressante.

§4 Le piège de Schweitzer

Dans ce paragraphe, nous allons décrire une construction de P. Schweitzer [23] :

Sur toute variété fermée de dimension trois, il existe des champs de vecteurs de classe C^1 *sans orbite périodique.*

Pour plus de détails, on pourra consulter l'exposé de H. Rosenberg dans ce séminaire [22]. Il faut utiliser des pièges dont la topologie est plus complexe que celle de $D^2 \times [-1, +1]$; ce sera la seconde idée essentielle pour la construction du piège de K. Kuperberg.

Considérons une surface Σ, compacte, orientable et à bord non vide. Nous dirons qu'un champ de vecteurs sur le produit $\Sigma \times [-1, +1]$ est un *piège apériodique* s'il vérifie les conditions suivantes :

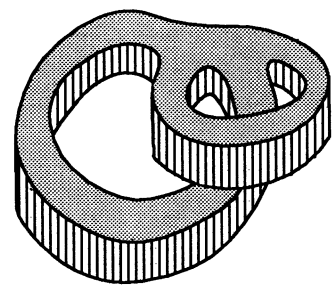
P1 *Il coïncide avec le champ vertical* $\partial/\partial z$ *près du bord.*

P2 *Il existe au moins un point de* $\Sigma \times \{-1\}$ *dont l'orbite ne ressort pas de*

$\Sigma \times [-1,+1]$.

P3 *Si une orbite pénètre dans* $\Sigma \times \{-1\}$ *et en ressort, les points d'entrée et de sortie sont symétriques par rapport au plan* $\{z = 0\}$.

P4 *Il ne possède pas d'orbite périodique.*



Toute surface compacte orientable à bord non vide Σ s'immerge dans le plan. On peut donc trouver un plongement de $\Sigma \times [-1,+1]$ dans $D^2 \times [-1,+1] \subset \mathbf{R}^3$ envoyant $\partial/\partial z$ sur un multiple du champ vertical constant. Voir la figure pour le cas où Σ est un tore T^2 auquel on a ôté un disque ouvert.

Supposons construit un piège apériodique sur $\Sigma \times [-1,+1]$, considéré comme une partie de $D^2 \times [-1,+1]$. En prolongeant un multiple de ce champ à $D^2 \times [-1,+1]$ tout entier par $\partial/\partial z$, on obtient évidemment un piège apériodique sur $D^2 \times [-1,+1]$. En partant d'un champ ne possédant qu'un nombre fini d'orbites périodiques sur une variété fermée de dimension trois, on pourra alors utiliser la méthode de Wilson pour piéger ces orbites périodiques sans en créer d'autres ; *on obtient ainsi des champs sans orbite périodique.*

Nous allons indiquer comment P. Schweitzer parvient à construire de tels pièges apériodiques, *de classe* C^1. Rappelons que A. Denjoy a construit un champ de vecteurs non singulier $\mathcal{D}$ sur le tore T^2, de classe C^1, ne possédant pas d'orbite périodique et possédant une orbite non dense, dont l'adhérence sera notée M [4]. Il est important de signaler qu'un théorème du même A. Denjoy garantit qu'*un tel champ de vecteurs ne peut pas être de classe* C^2. On consultera [23] pour une description de ces exemples. Ôtons un disque ouvert au tore T^2, situé dans le complémentaire de M et notons encore $\mathcal{D}$ le champ induit sur la surface à bord Σ ainsi obtenue. Sur le produit $\Sigma \times [-1,+1]$, on considère le champ $\mathcal{S} = f.\mathcal{D} + (1-f).\partial/\partial z$ où $f : \Sigma \times [-1,+1] \to [0,1]$ est une fonction de classe C^1, nulle au voisinage du bord de $\Sigma \times [-1,+1]$, égale à 1 exactement sur $M \times \{-1/2, +1/2\}$ et paire en z.

Il n'est pas difficile de s'assurer que $\mathcal{S}$ est un piège apériodique. Bien sûr, **P1** est satisfaite et **P3** résulte de la parité de f. D'autre part, le compact $M \times \{-1/2, +1/2\}$ est invariant et ne contient pas d'orbite périodique. Les orbites situées hors de ce compact ont une composante strictement positive en $\partial/\partial z$ et ne sont donc pas non plus périodiques ; on a donc **P4**. Le fermé $M \times [-1,+1]$ est invariant ; les orbites issues de $M \times \{-1\}$ ne peuvent traverser car elles s'accumulent dans $M \times \{-1/2\}$ et on a **P2**.

C'est le *piège de Schweitzer.*

L'extension de cette idée pour obtenir des exemples plus réguliers que C^1 était

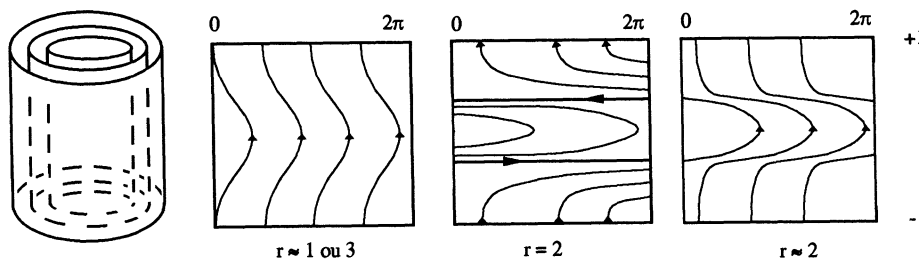
un défi aux géomètres... J. Harrison réussit le tour de force de construire un tore de dimension deux, plongé de manière C^0 dans $\mathbf{R}^3$ et un champ de vecteurs de classe C^2 dans son voisinage de telle sorte que le flot (local) correspondant préserve le tore et y induise un exemple de Denjoy [7]. Ce champ lui permet, avec la même méthode que P. Schweitzer, de construire un piège apériodique *de classe* C^2 sur le produit $\Sigma \times [-1,+1]$ et donc des champs de vecteurs sans orbite périodique, avec cette même régularité, sur toute variété fermée de dimension trois. Il est peut-être possible d'améliorer encore la différentiabilité de ce type d'exemples mais les difficultés semblent considérables.

§5 Le piège de Kuperberg

Nous nous proposons ici de décrire une construction de champs de vecteurs de classe C^∞ sur des variétés fermées de dimension trois. Il ne serait pas difficile d'adapter cette méthode dans le cas des champs analytiques réels, exactement comme nous l'avons fait pour le piège de Wilson, mais *nous laisserons les détails de cette vérification au lecteur.*

Nous avons vu que le piège de Wilson a l'avantage de détruire les orbites périodiques mais qu'il a l'inconvénient d'en créer de nouvelles ! L'idée de K. Kuperberg est de piéger ces nouvelles orbites par le piège lui même ; *c'est le serpent qui se mord la queue !* Dans ce paragraphe, nous allons construire le piège de Kuperberg et nous montrerons qu'il s'agit effectivement d'un piège apériodique au paragraphe suivant.

Commençons par décrire une modification (mineure) du piège de Wilson. On considère l'anneau $A = [1,3] \times S^1$ et un champ $\mathcal{W}$, de classe C^∞ sur $A \times [-1,+1]$ (de coordonnées (r,θ,z)) vérifiant les propriétés suivantes.

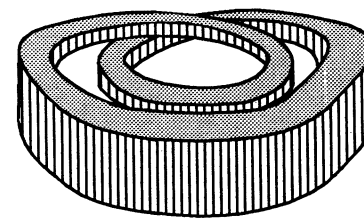


- Près du bord, le champ coïncide avec le champ vertical $\partial/\partial z$.
- Il est tangent aux cylindres $\{r = Cst\}$.
- Il est antisymétrique par rapport au plan $\{z = 0\}$.
- Il a une composante verticale strictement positive, sauf sur deux orbites pério-

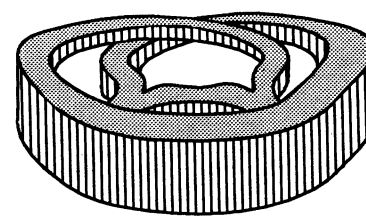
diques p_1 et p_2 contenues dans le cylindre $\{r = 2\}$.

Ainsi, toute orbite de $\mathcal{W}$ pénétrant dans W par un point $(r, \theta, -1)$ en ressort au point $(r, \theta, +1)$ si $r \neq 2$ (après un temps qui tend vers l'infini si r tend vers 2). Par contre, le cylindre $\{r = 2\}$ contient une composante de Reeb, bordée par p_1 et p_2, qui sont les ensembles ω et α-limites des points du type $(2, \theta, -1)$ et $(2, \theta, +1)$ respectivement.

Dans un premier temps, on plonge W dans $\mathbf{R}^3$ comme sur la figure ci-contre, de telle sorte que $\partial/\partial z$ corresponde au champ vertical constant dans $\mathbf{R}^3$.

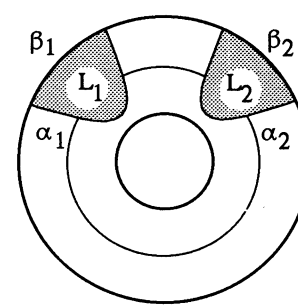


Dans un second temps, nous allons faire pénétrer une partie de W dans une autre partie de lui même, de façon à ce que W piège ses propres orbites périodiques. Avant de décrire précisément cette construction, indiquons le résultat topologique final : une double *autosomme connexe* de W mènera au compact K plongé dans $\mathbf{R}^3$ de la manière suggérée par la figure ci-contre (inspirée de [11], comme quelques unes des figures qui suivent).



Soit L_1 (resp. L_2) une *langue* contenue dans l'anneau A c'est-à-dire un disque topologique fermé dans A, bordé par deux arcs lisses α_1 et β_1 (resp. α_2 et β_2) l'un contenu dans l'intérieur et l'autre dans la composante $\{r = 3\}$ du bord de A. On suppose que les deux langues sont disjointes.

La partie de W destinée à être encastrée dans W est la réunion des deux *tenons* $L_1 \times [-1, +1]$ et $L_2 \times [-1, +1]$.



Il faut maintenant tailler deux *mortaises* dans W.

Soit σ_1 un plongement C^∞ de L_1 dans W possédant les propriétés suivantes :

- L'image $\sigma_1(\alpha_1)$ est de la forme $\alpha_1' \times \{-1\}$ où α_1' est un arc du cercle $\{r = 1\} \subset \partial A$.

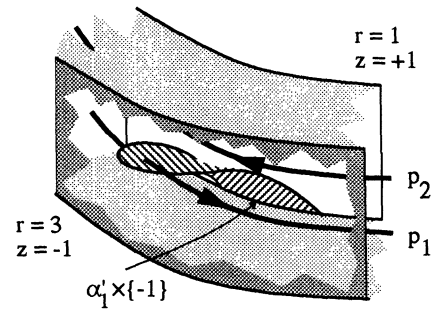
- L'image $\sigma_1(L_1)$ de la langue est transverse au champ $\mathcal{W}$, rencontre l'orbite périodique p_1 de $\mathcal{W}$ en un point unique et ne rencontre pas p_2.
Comme $\mathcal{W}$ est vertical près du bord et horizontal sur les orbites périodiques, ceci exige que le plongement σ_1 fasse "un quart de tour".

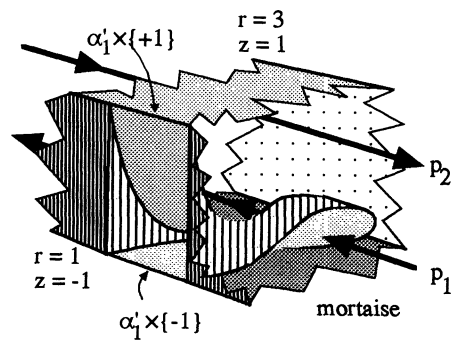
En poussant $\sigma_1(L_1)$ le long des orbites de $\mathcal{W}$, on peut construire un plongement C^∞, encore noté σ_1, que nous appellerons *insertion*, du tenon $L_1 \times [-1,+1]$ dans W de telle sorte que :

- Ce plongement prolonge le plongement précédent de $L_1 \simeq L_1 \times \{-1\}$.

- Un arc *vertical* de la forme $\{*\}\times[-1,+1]$ est envoyé par σ_1 sur un arc contenu dans une orbite de $\mathcal{W}$. Quitte à multiplier $\mathcal{W}$ par une fonction C^∞ et strictement positive convenable (ce qui ne change pas les orbites), on pourra supposer que σ_1 envoie le champ $\partial/\partial z$ sur $\mathcal{W}$.

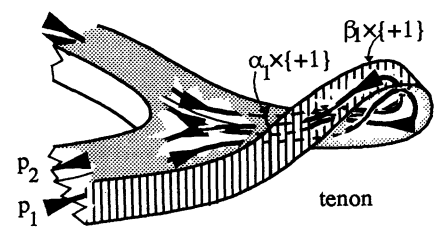
- L'image de $\alpha_1 \times \{+1\}$ par l'insertion σ_1 est $\alpha_1' \times \{+1\}$.





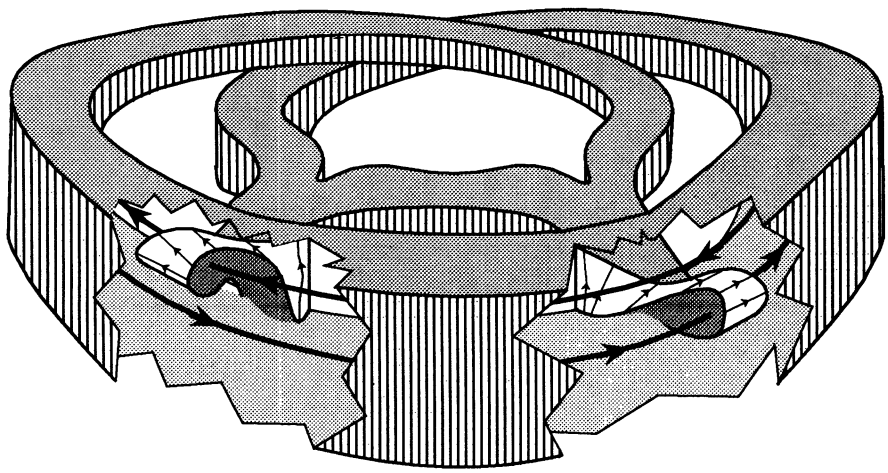
De la même manière, on construit une insertion σ_2 du tenon $L_2 \times [-1,+1]$ dans W dont l'image rencontre l'autre orbite périodique p_2 de $\mathcal{W}$. On s'arrange pour que les *mortaises* $\sigma_1(L_1 \times [-1,+1])$ et $\sigma_2(L_2 \times [-1,+1])$ soient disjointes l'une de l'autre ainsi que des deux tenons.

Le piège de Wilson creusé est défini comme l'adhérence W' du complémentaire de ces deux mortaises dans W. Pour construire un *piège de Kuperberg*, on fait pénétrer les tenons dans les mortaises correspondantes. En d'autres termes, partant de W', on identifie, pour tout x de $L_1 \times \{-1,+1\} \cup \beta_1 \times [-1,+1]$, les points x et $\sigma_1(x)$ ainsi que les paires de points analogues correspondant aux indices 2.



On obtient ainsi un compact K. *On notera* τ *la projection naturelle de* W' *sur* K.

Le compact K est une variété lisse de dimension trois, à bord et à coins. Puisque les plongements σ_1 et σ_2 envoient le champ vertical sur $\mathcal{W}$ et que $\mathcal{W}$ coïncide avec $\partial/\partial z$ près du bord, les recollements que nous venons d'effectuer sont compatibles avec $\mathcal{W}$. On obtient ainsi un champ $\mathcal{K}$, de classe C^∞, sur K.



Examinons K de plus près. Son bord est constitué de :

- Une *surface latérale* $\tau(\partial A \setminus (\beta_1 \cup \beta_2 \cup \alpha_1' \cup \alpha_2') \times [-1,+1])$ tangente à $\mathcal{K}$ et homéomorphe à la réunion de deux troncs de cylindre.

- Deux composantes transverses à $\mathcal{K}$ respectivement *entrantes* et *sortantes*, à savoir $\tau((A \setminus (L_1 \cup L_2)) \times \{\pm 1\})$, présentant chacune deux lignes anguleuses le long de $\tau((\alpha_1 \cup \alpha_2) \times \{\pm 1\})$. Chacune de ces composantes est homéomorphe à un tore moins deux disques. Il est important de constater que ces deux composantes sont canoniquement isomorphes ; à chaque point $\tau(r,\theta,-1)$ de la composante entrante correspond le point $\tau(r,\theta,+1)$ de la composante sortante. Nous dirons que ces points sont en *face* l'un de l'autre.

Nous montrerons au pararagraphe suivant que, si l'on choisit convenablement les insertions, $\mathcal{K}$ est un piège apériodique : c'est un *piège de Kuperberg.*

Les figures montrent que K peut être plongé dans $\mathbf{R}^3$ de manière C^∞ et de telle sorte que :

- Deux points en face l'un de l'autre sont envoyés sur la même verticale.

- Le champ $\mathcal{K}$, prolongé par le champ vertical constant à l'extérieur de K, est de classe C^∞.

Ainsi, un piège de Kuperberg pourra être inséré dans un $D^2 \times [-1,+1]$ et servira, à la Wilson, pour intercepter les orbites d'un champ sur une variété fermée de dimension trois.

Si donc nous montrons comment faire en sorte que $\mathcal{K}$ soit un piège apériodique, nous aurons démontré le théorème de K. Kuperberg.

§6 La preuve du théorème de Kuperberg

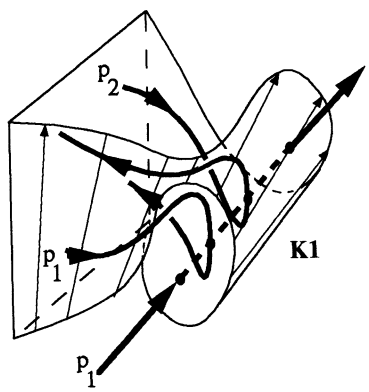
Il va nous falloir décrire la dynamique de $\mathcal{K}$; les orbites entrent et sortent sans cesse par les tenons...

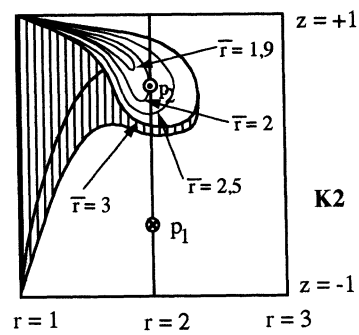
Si l'on veut un piège apériodique, il est naturel d'imposer au serpent de se mordre effectivement la queue :

K1 *Pour $i = 1, 2$, la langue L_i contient un point de la forme $(2, \vartheta_i)$ tel que le segment vertical $\{(2, \vartheta_i)\} \times [-1, +1]$ est inséré par σ_i dans un arc de l'orbite périodique p_i de $\mathcal{W}$.*

Nous imposerons aussi la condition suivante dont le rôle apparaîtra plus loin.

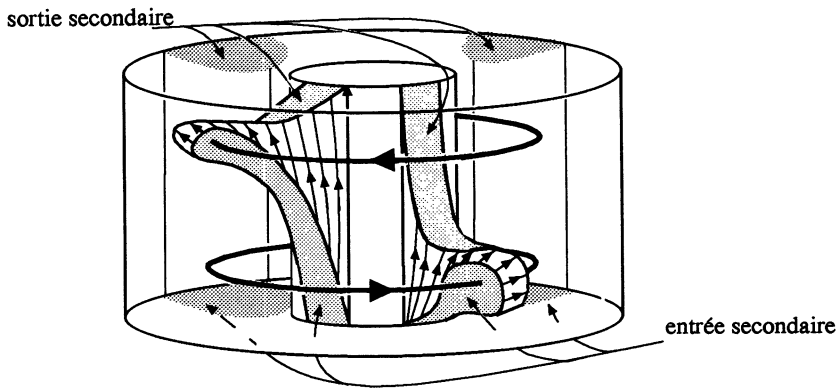
K2 Condition du rayon *Si un point $(\overline{r}, \overline{\theta})$ de $L_1 \cup L_2$ est inséré (par σ_1 ou σ_2) sur un point (r, θ, z) de W, alors $\overline{r} > r$ sauf lorsque $(\overline{r}, \overline{\theta})$ est l'un des deux points $(2, \vartheta_1)$ ou $(2, \vartheta_2)$ qui sont insérés dans l'une des deux orbites périodiques p_1 et p_2.* (La figure **K2** montre une mortaise de "profil".)





Nous allons montrer que *sous les conditions* **K1** *et* **K2**, *$\mathcal{K}$ est un piège apériodique.*

Ceci est bien sûr indépendant du plongement de K dans $\mathbf{R}^3$ de sorte qu'il est préférable de visualiser la preuve qui suit sur la figure ci-dessous qui représente le piège de Kuperberg creusé W'.



Introduisons un peu de terminologie :

- Un point de $A \times \{-1\} \cup \sigma_1(L_1 \times \{-1\}) \cup \sigma_2(L_2 \times \{-1\})$ est un *point d'entrée*; c'est un point d'entrée *primaire* s'il est dans $(A \setminus (L_1 \cup L_2)) \times \{-1\}$ et un point d'entrée *secondaire* sinon.

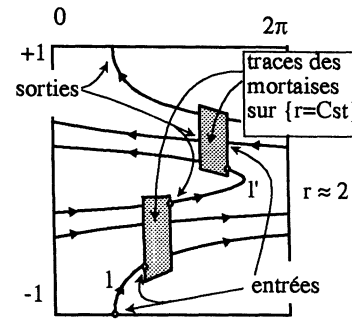
- On a de même une notion de *point de sortie, primaire ou secondaire*, en remplaçant -1 par $+1$ dans la définition précédente.

- Nous utiliserons aussi cette terminologie pour des points de K en considérant en fait leurs images inverses par τ.

- Un point d'entrée et un point de sortie dans W' sont *en face* s'ils sont de la forme $(r, \theta, -1)$ et $(r, \theta, +1)$. On dira aussi que leurs images par τ sont en face, ce qui généralise la définition donnée au paragraphe précédent.

- Une orbite de $\mathcal{W}$ dans W rencontre un certain nombre de points d'entrée/sortie; elle est donc naturellement décomposée en intervalles. Les adhérences de ceux de ces intervalles qui sont dans W' sont des *arcs de Wilson.* Il s'agit en général des composantes connexes des intersections des orbites de $\mathcal{W}$ avec W' mais il y a exception pour les orbites de $\mathcal{W}$ qui rencontrent la "surface latérale" des mortaises, c'est-à-dire $\sigma_i(\beta_i \times [-1, +1])$ (pour $i = 1, 2$). Notons que chacune des deux orbites périodiques de $\mathcal{W}$ intersecte W' sur un seul arc de Wilson; nous notons p'_1 et p'_2 ces deux arcs de Wilson particuliers.

- Si (r,θ,z) et (r',θ',z') sont deux points de W, on dira que (r,θ,z) est $\mathcal{W}$-*avant* (r',θ',z') s'ils sont situés sur la même orbite non périodique de $\mathcal{W}$ et si (r,θ,z) précède (strictement) (r',θ',z') dans l'ordre naturel de cette orbite ou bien s'ils sont tous les deux sur la même orbite périodique de $\mathcal{W}$. Notons qu'on a alors $r = r'$. Si l et l' sont deux arcs de Wilson, on dira que l est $\mathcal{W}$-*avant* l' si l'origine de l est $\mathcal{W}$-avant celle de l'. De manière analogue, on pourra dire qu'un arc de Wilson est $\mathcal{W}$-*entre* deux autres ou $\mathcal{W}$-entre deux points de W.

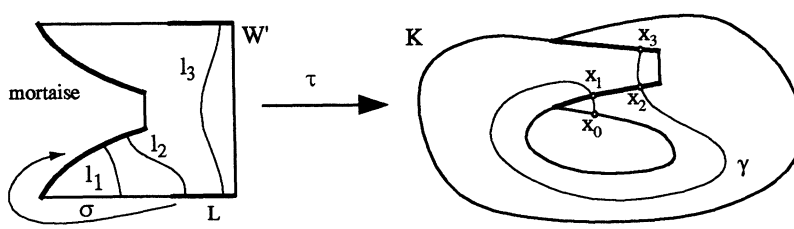


- Si l'arc de Wilson l est $\mathcal{W}$-avant l', si l'origine de l est un point d'entrée et si l'extrémité de l' est un point de sortie, il est clair que que ces deux points sont en face l'un de l'autre.

- Les arcs de Wilson l_1 et l_2 sont $\mathcal{K}$-*consécutifs* si l'extrémité de l_1 et l'origine de l_2 ont même image par τ.

- Un *arc de Kuperberg* est un arc compact d'orbite de $\mathcal{K}$ dans K dont l'origine et l'extrémité sont des points d'entrée ou de sortie.

- Soit γ un arc de Kuperberg. Il rencontre successivement un certain nombre de points d'entrée et de sortie $x_0,\ldots,x_k$. Bien sûr, seule l'origine x_0 (resp. l'extrémité x_k) peut être un point d'entrée (resp. de sortie) primaire. On peut alors trouver une suite d'arcs de Wilson $\mathcal{K}$-consécutifs l_i $(i = 1,\ldots,k)$ dont les images par τ sont les sous-arcs de γ joignant x_{i-1} à x_i. Nous dirons que les arcs de Wilson $l_1,\ldots,l_k$ *constituent* l'arc de Kuperberg γ. Voir le schéma ci-dessous (qui ne donne qu'une idée approximative de la topologie de W' et K).

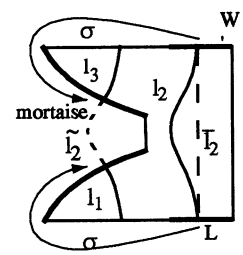


- Pour décrire les diverses diverses transitions de l'arc γ, on introduit une suite d'entiers $niv(i), i = 1,\ldots,k$, appelés *niveaux*, définie par $niv(1) = 0$ et, pour $i = 1,\ldots,k-1$, par $niv(i+1) = niv(i) + 1$ ou $niv(i) - 1$ suivant que x_i est un point

d'entrée ou de sortie. Nous nous inspirons ici de la présentation donnée dans [15].

Lemme *On suppose que $k > 1$, que tous les niveaux $niv(i)$ sont positifs ou nuls et que le dernier niveau $niv(k)$ est nul. Alors l'arc de Wilson l_1 est situé $\mathcal{W}$-avant l_k. De plus, si x_0 est un point d'entrée et x_k un point de sortie alors ces deux points sont en face l'un de l'autre.*

Nous avons déjà remarqué que la seconde assertion résulte de la première.



Nous procédons par récurrence sur k. Le cas $k = 2$ ne se présente pas car $niv(2)$ est nécessairement égal à $+1$. Si $k = 3$, la suite des niveaux est nécessairement $0, 1, 0$. Cela signifie que x_1 est une entrée secondaire et x_2 est une sortie secondaire. Puisque $\mathcal{W}$ est antisymétrique, ces deux points x_1 et x_2 sont en face l'un de l'autre ou, de manière équivalente, il existe un arc *vertical* $\bar{l}_2$ contenu dans la réunion des tenons $(L_1 \cup L_2) \times [-1, +1] \subset W$ et dont l'image par τ connecte les points x_1 et x_2. L'image de $\bar{l}_2$ par l'insertion est un arc $\tilde{l}_2$ dans W contenu dans une orbite de $\mathcal{W}$ et connectant l'extrémité de l_1 à l'origine de l_3, à travers l'une des mortaises. Les trois arcs $l_1, \tilde{l}_2, l_3$, mis bout à bout, forment un arc d'orbite de $\mathcal{W}$ dans W de sorte que l_1 est situé $\mathcal{W}$-avant l_3. Le lemme est établi pour $k = 3$.

Tout se passe comme si l'arc γ, rencontrant le point de sortie secondaire x_1, ne tenait pas compte de l'insertion et continuait son chemin le long de l'arc $\tilde{l}_2$, à travers la mortaise (qui a pourtant été incisée !), et pénétrait à nouveau dans W' par le point d'entrée secondaire x_2.

Supposons le lemme établi jusqu'à l'entier $k - 1$ et plaçons nous dans les hypothèses du lemme. Distinguons deux cas :

- S'il existe un entier i strictement compris entre 1 et k tel que $niv(i) = 0$, alors on peut décomposer l'arc de Kuperberg γ en deux sous-arcs qui vérifient chacun les hypothèses du lemme pour une valeur sricte ment inférieure à k. Le lemme en résulte dans ce cas.

- Sinon, tous les niveaux $niv(i)$ pour $i = 2, \ldots, k-1$ sont supérieurs ou égaux à 1. L'arc de Kuperberg γ' contenu dans γ et connectant les points x_1 et x_{k-1} vérifie les hypothèses du lemme pour la valeur $k - 2$. On conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence et le même argument que nous avons utilisé pour $k = 3$.

Ceci établit le lemme.

Nous pouvons maintenant montrer que $\mathcal{W}$ est un piège apériodique. Bien sûr, la condition **P1** est satisfaite.

P3 *Soit γ un arc de Kuperberg, constitué des arcs de Wilson $l_1, \ldots, l_k$ et connectant un point d'entrée primaire x_0 et un point de sortie primaire x_k. Alors x_0 et x_k*

sont en face l'un de l'autre.

Nous affirmons d'abord que tous les niveaux $niv(i)$ sont positifs ou nuls. Supposons que cela ne soit pas le cas. Puisque $niv(2) = +1$, on peut donc considérer le premier indice i strictement supérieur à 1 tel que $niv(i) = 0$. Le lemme montrerait alors que x_0 et x_i sont en face et donc que x_i est une sortie primaire, ce qui ne peut être le cas que pour $i = k$.

En raisonnant exactement de la même manière et en parcourant γ dans l'autre sens, on montre que $niv(k)$ est nécessairement nul. Ainsi, les hypothèses du lemme sont satisfaites et **P3** en résulte.

P2 *Une orbite qui pénètre dans K par un point du type $\tau(2, \theta, -1)$ n'en ressort pas.*

En effet, dans le cas contraire, le point de sortie serait nécessairement $\tau(2, \theta, +1)$ et, d'après la preuve de **P3**, les points $(2, \theta, -1)$ et $(2, \theta, +1)$ seraient sur la même orbite de $\mathcal{W}$, ce qui n'est pas.

P4 *Le piège est apériodique.*

Supposons par l'absurde qu'il existe une orbite périodique. Cette orbite contient au moins un point d'entrée ou de sortie (secondaire) x. On obtient un arc de Kuperberg γ dont l'origine et l'extrémité coïncident avec x. De même, on a une suite d'arcs de Wilson $\mathcal{K}$-consécutifs $l_1, \ldots, l_{k+1}$ telle que l_1 et l_{k+1} coïncident et ont x comme origine. Bien sûr, il est toujours possible de choisir arbitrairement le point origine x parmi les points d'entrée et de sortie $x_0, \ldots, x_k = x_0$ rencontrés par l'orbite périodique. On choisira aussi k minimal de sorte que les arcs de Wilson $l_1, \ldots, l_k$ sont distincts deux à deux.

Distinguons deux cas :

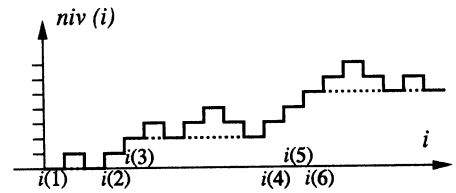
- Le dernier niveau $niv(k+1)$ est nul, c'est-à-dire que l'orbite périodique γ dont nous supposons l'existence rencontre autant de points d'entrée que de points de sortie. On choisit l'origine x pour que tous les niveaux $niv(i)$ soient positifs ou nuls (pour $i = 1, \ldots, k+1$) (bien sûr ceci ne change pas $niv(k+1)$ par périodicité). Alors, le lemme montre que l_1 est $\mathcal{W}$-avant l_{k+1}. Puisque ces deux arcs sont les mêmes, c'est donc qu'ils coïncident avec p_1' ou p_2'. D'après la condition **K1**, l'origine de l_2 est $(2, \vartheta_1, 0)$ ou $(2, \vartheta_2, 0)$; son extrémité est un point d'entrée. On a donc $niv(2) = 1$ et $niv(3) = 2$. Soit i le plus petit indice strictement supérieur à 1 tel que $niv(i) = 0$. Évidemment, x_1 est un point d'entrée, x_{i-1} est un point de sortie et le lemme montre que x_1 et x_{i-1} sont en face, ce qui est absurde puisque les orbites de $\mathcal{W}$ ne traversent pas le cylindre $\{r = 2\}$.

- Le dernier niveau $niv(k+1)$ est un entier n que nous supposerons strictement positif (l'autre cas étant analogue, en raisonnant sur le champ parcouru dans l'autre sens). On choisit l'origine x pour que tous les niveaux $niv(i)$ soient positifs ou nuls (pour $i = 1, \ldots, k+1$). C'est seulement ici que nous allons utiliser la *condition du*

rayon **K2** qui garantit que si $niv(i+1) = niv(i) + 1$ alors $r(i+1) \geq r(i)$ et que si on a égalité l_i est l'un des deux arcs p'_1, p'_2. Notons $r(i)$ la r-coordonnée (d'un point quelconque) de l'arc l_i.

Examinons d'abord le cas particulier où la suite des niveaux est strictement croissante, i.e. $niv(i) = i - 1$ pour $i = 1, \ldots, k+1$. Alors la suite des rayons $r(i)$ est croissante (au sens large). D'autre part, $r(1) = r(k+1)$ car les arcs l_1 et l_{k+1} sont les mêmes. C'est donc que tous les arcs l_i coïncident avec l'un des deux arcs p'_1, p'_2 mais ceci est absurde car deux tels arcs de Wilson ne sont pas $\mathcal{K}$-consécutifs.

Dans le cas général, on peut trouver une suite d'indices $1 = i(1) < i(2) < \ldots < i(n+1) \leq k+1$ tels que, pour $a = 1, \ldots, n+1$, on ait $niv(i(a)) = a - 1$ et $niv(i) \geq a - 1$ pour $i \geq i(a)$. Si $i(a+1) > i(a) + 1$, on applique le lemme à la suite d'arcs de Wilson $\mathcal{K}$-consécutifs $l_{i(a)}, \ldots, l_{i(a+1)-1}$, et on obtient que $l_{i(a)}$ est $\mathcal{W}$-avant $l_{i(a+1)-1}$ et donc que $r(i(a)) = r(i(a+1)-1))$ pour $a = 1, \ldots, n$. De même, $r(i(n+1)) = r(k+1)$. D'après **K2**, on a $r(i(a+1)) \geq r(i(a+1) - 1)$. Comme précédemment, le fait que $r(1) = r(k+1)$ montre que tous les $r(i(a))$ sont égaux et donc que chaque arc $l_{i(a+1)-1}$ coïncide avec p'_1 ou p'_2 pour $a = 1, \ldots, n$. Si $i(a+1) > i(a)+1$, nous savons que $l_{i(a)}$ est $\mathcal{W}$-avant $l_{i(a+1)-1}$ et il en résulte que $l_{i(a)}$ coïncide lui aussi avec p'_1 ou p'_2 ce qui est impossible puisque $l_1, \ldots, l_k$ sont distincts. Nous sommes donc ramenés au cas particulier que nous avons exclu précédemment.



Ceci achève la preuve du fait que $\mathcal{W}$ est un piège apériodique et donc du théorème de Kuperberg.

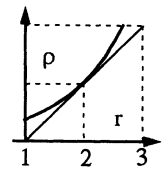
Terminons ce pararagraphe par une observation de L. Siebenmann. Si l'on considère une collection W'_i de copies de W', indexée par un entier relatif i, et si l'on insère les tenons de W'_i dans les mortaises de W'_{i+1}, on obtient un revêtement cyclique $\widetilde{K}$ de K. La démonstration précédente peut s'interpréter dans ce revêtement, les niveaux correspondant aux divers domaines fondamentaux visités par les orbites du champ relevé $\widetilde{\mathcal{K}}$. Le fait que nous n'ayons utilisé la condition **K2** que dans le dernier cas de la preuve montre que $\widetilde{\mathcal{K}}$ n'a pas d'orbite périodique, même si l'on n'impose que la condition **K1**.

§7 La dynamique à l'intérieur du piège

Il est clair que K contient un fermé non vide constitué d'orbites entièrement contenues dans l'intérieur. Dans ce paragraphe, nous allons décrire les résultats de Greg et Krystyna Kuperberg qui concernent la dynamique dans ce fermé [13].

Commençons par un lemme.

Lemme *Si $r > 2$, l'orbite de $\mathcal{K}$ passant par un point de la forme $\tau(r, \theta, -1)$ passe aussi par le point $\tau(r, \theta, +1)$ et contient les images par τ de tous les arcs de Wilson situés $\mathcal{W}$-entre $(r, \theta, -1)$ et $(r, \theta, +1)$.*

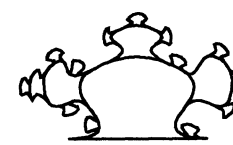


La condition du rayon entraîne l'existence d'une fonction ρ continue croissante de $[1, 3]$ dans lui-même telle que $\rho(r) > r$ sauf pour $r = 2$ et telle que si σ_1 ou σ_2 envoie un point $(\overline{r}, \overline{\theta}, \overline{z})$ sur (r, θ, z), alors $\overline{r} \geq \rho(r)$. La suite $\rho^{-n}(3)$ tend en décroissant vers 2.

Nous allons montrer le lemme par récurrence sur l'entier n tel que $\rho^{-n-1}(3) < r \leq \rho^{-n}(3)$. Pour $n = 0$, il est clair que l'arc de Wilson partant de $(r, \theta, -1)$ ne peut rencontrer les mortaises et se termine donc au point en face et ceci initialise la récurrence.

Supposons donc que $\rho^{-n-1}(3) < r \leq \rho^{-n}(3)$ et considérons tous les arcs de Wilson $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ qui sont $\mathcal{W}$-entre $(r, \theta, -1)$ et $(r, \theta, +1)$. Soit j le dernier indice tel que $\tau(\lambda_j)$ est dans l'orbite par $\mathcal{K}$ de $\tau(r, \theta, -1)$; nous devons montrer que $j = k$. Si ce n'était pas le cas, l'extrémité de λ_j serait une entrée secondaire de sorte que l'arc de Wilson $\mathcal{K}$-consécutif à λ_j aurait pour origine un point $(\overline{r}, \overline{\theta}, -1)$, avec $\rho^{-n}(3) < \overline{r}$. Par hypothèse de récurrence, l'orbite de $\tau(\overline{r}, \overline{\theta}, -1)$ par $\mathcal{K}$ passe par le point en face $\tau(\overline{r}, \overline{\theta}, +1)$. Puisque l'image de $(\overline{r}, \overline{\theta}, +1)$ par σ_1 ou σ_2 est l'origine de λ_{j+1}, ceci contredit la définition de j. Le lemme est établi.

Décrivons les arcs de Wilson qui constituent l'arc de Kuperberg connectant les points $\tau(r, \theta, -1)$ et $\tau(r, \theta, +1)$ avec $r > 2$. Il faut d'abord considérer tous les arcs de Wilson $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ qui sont $\mathcal{W}$-entre $(r, \theta, -1)$ et $(r, \theta, +1)$. Puis, pour chaque $i = 1, \ldots, k-1$, l'extrémité de λ_i et l'origine de λ_{i+1} sont envoyés par σ_1^{-1} ou σ_2^{-1} sur des points du type $(r_i, \theta_i, -1)$ et $(r_i, \theta_i, +1)$ et il faut aussi considérer tous les arcs de Wilson qui sont $\mathcal{W}$-entre $(r_i, \theta_i, -1)$ et $(r_i, \theta_i, +1)$. On continue ceci (un nombre fini de fois) jusqu'à obtenir des arcs de Wilson qui ne rencontrent plus les mortaises.



C'est ce que L. Siebenmann appelle le *chou-fleur*. On imagine que le nombre d'arcs ainsi obtenus croît très rapidement lorsque r tend vers 2 et ceci est source de difficultés numériques lorsque l'on essaye de simuler le piège sur ordinateur.

Décrivons maintenant l'orbite (positive) de $\mathcal{K}$ passant par un point du type $\tau(2, \theta, -1)$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots$ la suite infinie des arcs de Wilson situés $\mathcal{W}$-après $(2, \theta, -1)$; elle s'accumule sur l'arc de Wilson que nous avons noté p_1'. Nous affirmons que l'orbite de $\mathcal{K}$ considérée passe par tous les $\tau(\lambda_i)$. Supposons en effet ceci établi jusque l'entier i et considérons l'extrémité de λ_i. C'est une entrée secondaire dont l'image par σ_1^{-1} a une r-coordonnée strictement supérieure à 2. D'après le lemme cette orbite passe par le point en face qui n'est autre que l'origine de $\tau(\lambda_{i+1})$

et ceci établit notre affirmation. Ainsi, cette orbite de $\mathcal{K}$ est constituée de tous les arcs de Wilson λ_i ainsi que des choux-fleurs qui relient les arcs λ_i et λ_{i+1}. Notons en particulier que $\tau(p_1')$ et $\tau(p_2')$ sont dans l'adhérence de cette orbite.

De la même manière, on décrit l'orbite (positive) de $\mathcal{K}$ qui part de $\tau(p_1')$ (l' "exorbite périodique"). L'extrémité de p_1' est envoyée par σ_1^{-1} sur un point que nous avons noté $(2, \vartheta_1, -1)$ (voir **K1**) et nous venons de décrire l'orbite de $\mathcal{K}$ correspondant aux points de ce type. Un raisonnement analogue montre que l'orbite de $\mathcal{K}$ passant par un point de la forme $\tau(2, \theta, z)$ s'accumule (positivement ou négativement) sur $\tau(p_1')$ et $\tau(p_2')$.

Théorème *Le fermé de K constitué des orbites entièrement contenues dans l'intérieur de K contient un unique ensemble fermé non vide invariant par $\mathcal{K}$ et minimal pour ces propriétés.*

Nous allons montrer que toute orbite infinie s'accumule sur $\tau(p_1')$ et ceci établira que *l'unique minimal est l'adhérence de l'orbite de* $\tau(p_1')$. D'après ce que nous venons de voir, il s'agit de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, toute orbite infinie pénètre dans la zone $\tau(\{\mid r - 2 \mid < \varepsilon\})$.

Soit $l_i (i \geq 1)$ une suite infinie d'arcs de Wilson $\mathcal{K}$-consécutifs. Supposons d'abord que tous ces arcs aient une r-coordonnée strictement supérieure à 2. On définit une sous-suite $l_{i(a)}$ $(a \geq 1)$ de l_i de la façon suivante. On pose $l_{i(1)} = l_1$ et, si $l_{i(a)}$ est défini, on considère les arcs de Wilson $\lambda_2^a, \ldots, \lambda_{k_a}^a$ qui sont $\mathcal{W}$-après $l_{i(a)} = \lambda_1^a$. L'extrémité du dernier de ces arcs, $\lambda_{k_a}^a$, est une sortie secondaire dont l'image par l'insertion est, par définition, l'origine de $l_{i(a+1)}$. Le lemme montre qu'on obtient bien une sous-suite et que la suite $r(a) = r(l_{i(a)})$ des r-coordonnées de ces arcs tend en décroissant vers 2; c'est ce que nous voulions établir. Dorénavant, nous supposerons donc que la suite l_i pénètre une infinité de fois dans la partie $\{r < 2\}$.

La suite $\rho^n(1)$ tend en croissant vers 2. Pour montrer le théorème, nous allons montrer par l'absurde qu'il est impossible que la suite l_i évite la partie $\{\rho^n(1) < r < 2\}$. *Supposons donc que ce soit le cas, pour une certaine valeur fixée de n.*

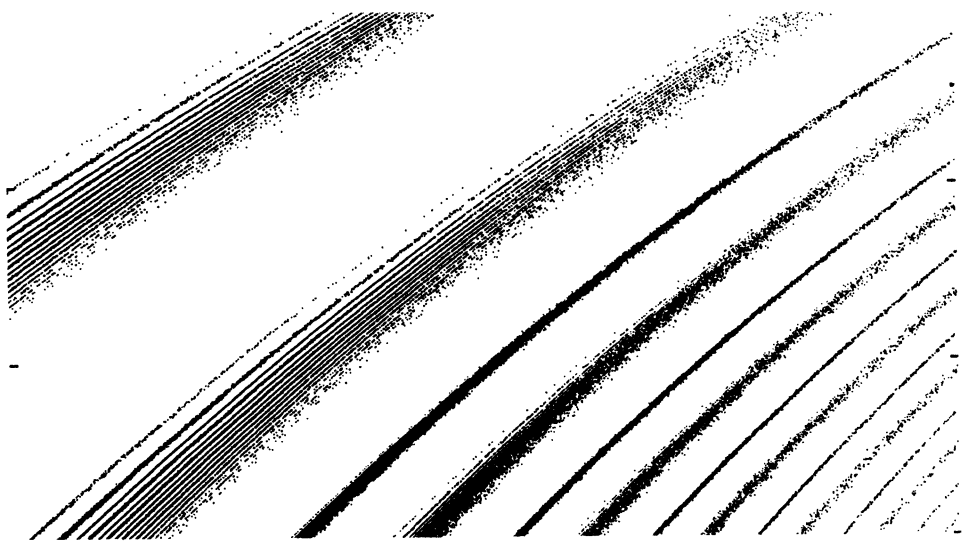
Si l'origine d'un l_i fixé est de la forme (r, θ, z), posons $\lambda_1 = l_i$ et considérons les arcs de Wilson $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ qui sont $\mathcal{W}$-après l_i.

Supposons d'abord $\rho^{n-1}(1) < r \leq \rho^n(1)$. D'après l'hypothèse, pour $j \leq k - 1$, l'extrémité de λ_j est une entrée secondaire dont l'image par σ_1^{-1} ou σ_2^{-1} est dans la zone $\{r > 2\}$ de sorte qu'on peut appliquer le lemme : les λ_j sont dans la liste des l_j, séparés par des choux-fleurs. En particulier, l'orbite de $\mathcal{K}$ passe par l'image par τ de l'extrémité du dernier arc λ_k.

En procédant par récurrence finie sur l'entier p avec $1 \leq p \leq n$ et en supposant toujours par l'absurde que les l_i ne visitent pas $\{\rho^n(1) < r < 2\}$, on montre de même que si l'origine de l_i est de la forme (r, θ, z) avec $\rho^{n-p}(1) < r \leq \rho^{n-p+1}(1)$, l'orbite de $\mathcal{K}$ passe par l'image par τ de l'extrémité du dernier arc λ_k.

Ainsi, on peut définir une sous-suite $l_{i(a)}$ de l_i de la façon suivante. On définit $l_{i(1)}$ comme l'un des l_i ayant une r-coordonnée strictement inférieure à $\rho^n(1)$ et, si $l_{i(a)}$ est défini, on considère les arcs de Wilson $\lambda_2^a, \ldots, \lambda_{k_a}^a$ qui sont $\mathcal{W}$-après $l_{i(a)} = \lambda_1^a$. On définit alors $l_{i(a+1)}$ comme étant l'arc de Wilson dont l'origine est l'image par l'insertion de l'extrémité de $\lambda_{k_a}^a$, dernier de ces arcs. D'après ce qui précède, c'est bien une sous-suite de l_i. La suite infinie $r(a)$ des r-coordonnées des $l_{i(a)}$ vérifie $\rho(r(a+1)) < r(a)$. Ceci est bien sûr impossible et cette contradiction achève la preuve du théorème.

Les dynamiciens sont friands d'ensembles minimaux non triviaux et les pièges de Kuperberg méritent sans aucun doute d'être étudiés de plus près. À quoi ressemble ce minimal ? La figure ci-dessous montre une image d'ordinateur obtenue par B. Sevennec : il s'agit de la trace d'une partie du minimal sur une section transverse à $\mathcal{K}$. Il faut prendre garde au fait que les difficultés numériques sont grandes et cette image n'est peut-être pas significative. Par ailleurs, on peut construire beaucoup de pièges de Kuperberg et il n'est pas clair qu'ils aient la même dynamique. La figure suggère que le minimal est transversalement de dimension topologique 1 et nous allons voir que ceci est effectivement le cas en général.



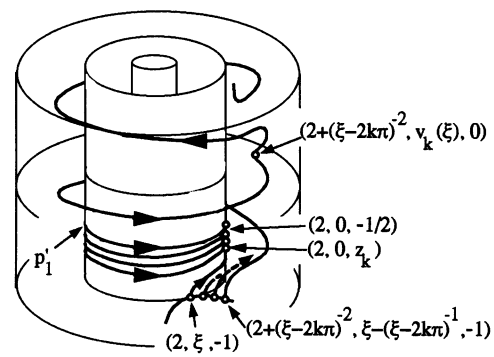
Théorème *Il existe des pièges de Kuperberg dont l'unique ensemble minimal est de dimension topologique* 2 *car il contient un disque.*

Nous allons montrer qu'en général, l'ensemble minimal contient l'image par τ du cercle $\{r = 2, z = 0\}$ et donc aussi son saturé par $\mathcal{K}$ qui contient bien sûr un disque.

Nous allons fixer un peu plus les choix sur $\mathcal{W}$ et sur les insertions mais il apparaîtra clairement que les choix que nous allons faire ne sont pas importants.

On suppose que l'orbite p_1 est située dans $\{z = -1/2\}$. On impose aussi à l'image $\sigma_1(L_1)$ de la langue d'être contenue, au voisinage de son intersection avec p_1, dans $\{\theta = 0\}$ (rappelons que L_1 est identifié à $L_1 \times \{-1\}$). On fait aussi en sorte que si z est voisin de $-1/2$ et inférieur à $-1/2$, l'orbite négative de $\mathcal{W}$ qui passe par $(2, 0, z)$ coupe l'anneau $\{z = -1\}$ au point $(2, (z+1/2)^{-1}, -1)$. On choisit l'insertion σ_1 de telle sorte que, pour z voisin de $-1/2$, l'image de $(2, 0, z)$ par σ_1^{-1} est $(2 + (z + 1/2)^2, \xi - (z + 1/2), -1)$ où ξ est un paramètre que nous ajusterons plus loin. Enfin, on suppose que $\mathcal{W}$ a une symétrie de révolution autour de l'axe des z et que l'orbite par $\mathcal{W}$ du point $(r, \theta, -1)$ coupe le plan $\{z = 0\}$ au point $(r, \theta + (r-2)^{-2}, 0)$ pour $r > 2$ voisin de 2.

Étudions l'orbite par $\mathcal{K}$ de $\tau(p_1')$. L'image par σ_1^{-1} de l'extrémité de p_1' est le point $(2, \xi, -1)$ dont l'orbite par $\mathcal{W}$ coupe $\sigma_1(L_1)$ sur les points $(2, 0, z_k)$ avec $(z_k + 1/2)^{-1} = \xi - 2k\pi$ (avec k entier grand), c'est-à-dire qu'on a : $z_k = -1/2 + (\xi - 2k\pi)^{-1}$. Nous savons que les images par τ de tous ces points sont dans l'orbite étudiée. A leur tour, chacun de ces points est à l'origine d'un chou-fleur qui commence au point $(2 + (\xi - 2k\pi)^{-2}, \xi - (\xi - 2k\pi)^{-1}, -1)$ et qui coupe donc le plan $\{z = 0\}$ en $(2 + (\xi - 2k\pi)^{-2}, \xi - (\xi - 2k\pi)^{-1} + (\xi - 2k\pi)^4, 0)$. Posons : $v_k(\xi) = \xi - (\xi - 2k\pi)^{-1} + (\xi - 2k\pi)^4$. Si $\xi_1 < \xi_2$, la suite $v_k(\xi_2) - v_k(\xi_1)$ n'est pas bornée et le lecteur (se souvenant du théorème de Baire) verra que ceci entraîne que pour un ensemble résiduel de valeurs de ξ, la suite $v_k(\xi)$ est dense lorsqu'on la projette sur le cercle $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Nous venons de montrer que si l'on ajuste convenablement la valeur de ξ, on peut faire en sorte que l'orbite que nous étudions s'accumule sur tout le cercle $\{r = 2, z = 0\}$. Ceci établit le théorème.



§8 Miscellanées

Commençons par quatre remarques élémentaires.

- D'après l'observation de A. Verjovsky faite plus haut, on obtient, sur chaque variété fermée de dimension trois, un champ analytique réel non singulier possédant

un *unique ensemble minimal, de dimension topologique deux.*

- Sur une variété qui n'est pas nécessairement compacte (mais paracompacte), on peut utiliser le piège de Kuperberg pour construire un champ analytique sans orbite périodique.

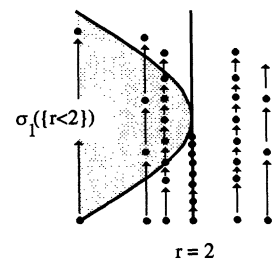
- On vérifie facilement que le piège de Kuperberg est homotope au champ vertical à travers les champs non singuliers qui sont verticaux près du bord. Il en résulte qu'on peut trouver des exemples de champs sans orbite périodique dans toute classe d'homotopie de champs de vecteurs non singuliers d'une variété fermée de dimension trois.

- Dans [23], P. Schweitzer indique comment détruire les feuilles compactes d'un feuilletage de codimension q supérieure ou égale à deux. Dans un ouvert feuilleté trivialement et rencontrant une feuille compacte, il suffit de modifier le feuilletage, à la Wilson, en insérant le produit du piège apériodique de Schweitzer (de classe C^1) par une sphère de dimension $q-2$. En utilisant le piège de Kuperberg, analytique réel, on montre de la même manière que *si une variété possède un feuilletage de codimension $q \geq 2$ et de classe C^∞ ou C^ω, alors cette variété possède également un feuilletage sans feuille fermée de même régularité* [13]. Le cas de la codimension 1 a été traité, en classe C^1 et en dimension supérieure ou égale à quatre par P. Schweitzer [24] (par une autre méthode) mais reste un difficile problème ouvert en classe C^∞.

L'énoncé suivant m'a été signalé par S. Matsumoto ; il implique qu'un piège de Kuperberg contient un ouvert non vide de points errants et donc, par le lemme de récurrence de Poincaré, que *ces exemples ne peuvent pas préserver une mesure qui charge les ouverts.*

Proposition *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'orbite par K d'un point du type $\tau(r,\theta,-1)$ avec $2-\varepsilon < r < 2$ ne repasse pas par le point en face $\tau(r,\theta,+1)$. En particulier, si le point $\tau(r,\theta,-1)$ est un point d'entrée primaire, son orbite ne ressort pas de K.*

Considérons un point $x = (r,\theta,z)$ de $\sigma_1(L_1)$ ($\simeq \sigma_1(L_1 \times \{-1\})$), très proche de l'extrémité de p_1'. Le point de premier retour x' sur $\sigma_1(L_1)$ de l'orbite de $\mathcal{W}$ passant par x est de la forme $x' = (r,\theta',z')$ et il est clair que $\mid z'-z \mid$ est inférieur à une constante fois la distance entre x et l'extrémité de p_1'.



Considérons par ailleurs la partie $\sigma_1(L_1 \cap \{r < 2\})$ de $\sigma_1(L_1)$. Elle est bordée par une courbe *lisse* contenue dans $\sigma_1(L_1) \cap \{r \leq 2\}$ et passant par l'extrémité de p_1' ; elle a donc un contact quadratique avec la courbe $\sigma_1(L_1) \cap \{r = 2\}$.

Il résulte aisément de ces deux observations que si ε est assez petit, toute orbite de $\mathcal{W}$ dans W partant d'un point $(r,\theta,-1)$ tel que $2-\varepsilon < r < 2$ rencontre néces-

sairement la partie $\sigma_1(L_1 \cap \{r < 2\})$. Voir la figure ci-dessus où les points noirs représentent les intersections de certaines orbites de $\mathcal{W}$ avec $\sigma_1(L_1)$.

Nous affirmons que la proposition est vraie pour ce choix de ε. Supposons par l'absurde que l'orbite par $\mathcal{K}$ d'un point du type $\tau(r, \theta, -1)$ avec $2 - \varepsilon < r < 2$ repasse par le point en face $\tau(r, \theta, +1)$. Parmi les arcs de Wilson qui constituent l'arc de Kuperberg joignant ces deux points, considérons ceux dont la r-coordonnée est strictement inférieure à 2 et, parmi ceux-ci, soit l l'un de ceux pour lesquels cette r-coordonnée est maximale. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ la suite des arcs de Wilson situés sur l'orbite de $\mathcal{W}$ contenant l, de sorte que l coïncide avec l'un des λ_i avec $1 \leq i \leq k$. Par le choix de ε, nous savons que l'un des λ_j $(1 \leq j \leq k-1)$ a son extrémité dans $\sigma_1(L_1 \cap \{r < 2\})$ ou $\sigma_2(L_2 \cap \{r < 2\})$. Supposons pour fixer les idées que $j \geq i$ et choisissons j minimal pour cette propriété. Alors les extrémités de $\lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_{j-1}$ sont des entrées secondaires dont les images par σ_1^{-1} ou σ_2^{-1} sont donc de la forme $(\overline{r}, \theta, -1)$ avec $\overline{r} > 2$, par le choix de j. Il résulte alors du lemme du §7 que les $\tau(\lambda_i), \ldots, \tau(\lambda_j)$ sont sur l'arc de Kuperberg que nous considérons, séparés par des choux-fleurs. Par contre, l'image par σ_1^{-1} ou σ_2^{-1} de l'extrémité de λ_j est de la forme $(\overline{r}, \overline{\theta}, -1)$ avec $r < \overline{r} < 2$, c'est-à-dire que l'arc de Wilson $\mathcal{K}$-consécutif à λ_j a une r-coordonnée strictement comprise entre celle de l_i $(= l)$ et 2. Ceci est contraire au choix initial de l et démontre la proposition.

Le début de cette démonstration utilise le fait que que champ $\mathcal{K}$ est de classe C^2. Il n'est pas difficile de s'assurer que le champ de Wilson $\mathcal{W}$ préserve une mesure finie μ sur W dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue s'annule exactement sur le cylindre $\{r = 2\}$. Il existe un homéomorphisme de W qui envoie μ sur la mesure de Lebesgue, non différentiable sur ce cylindre. On peut donc construire une version de $\mathcal{W}$ qui est un flot topologique qui préserve le volume. Les insertions peuvent alors être construites de façon à préserver le volume et on obtient ainsi *des exemples de flots topologiques qui préservent le volume et n'ont pas d'orbite périodique, sur toute variété de dimension trois.* G. Kuperberg parvient même à améliorer cette construction en construisant des pièges de Schweitzer de classe C^1 qui préservent le volume [12].

Il est difficile de construire des champs non singuliers en dimension trois, de classe C^∞, qui préservent un volume et dont on contrôle la dynamique. D'une part, la décomposition en *anses rondes*, si utile pour construire ce type de champs, n'existe pas toujours en dimension trois [1]. D'autre part, la théorie KAM pour ces flots entraîne bien souvent l'existence de tores invariants, ce qui complique le problème... Notons toutefois que G. Kuperberg, par un procédé de chirurgie, parvient à construire sur toute variété fermée de dimension trois, un champ non singulier *de classe* C^∞ qui préserve le volume et qui n'a qu'un nombre fini d'orbites périodiques [12].

Faut-il en conclure qu'il faut modifier la conjecture de Seifert et *demander si un champ de classe* C^∞ *qui préserve le volume sur la sphère de dimension trois a*

nécessairement une orbite périodique ?

Il y a encore bien d'autres questions ouvertes dans ce domaine. On sait par exemple qu'il existe des difféomorphismes de la sphère de dimension trois dont toutes les orbites sont denses [6, 8] mais *on ignore toujours s'il existe des champs de vecteurs sur cette sphère dont toutes les orbites sont denses*; la *conjecture de Gottschalk* reste intacte...

Bibliographie

[1] ASIMOV, D.: Homotopy to divergence free vector fields. *Topology* **15** (1976), 349-352.

[2] BIRKHOFF, G.: *Dynamical Systems*, AMS Colloquium Publications **9** (1966) (first ed. 1927).

[3] BONATTI, C.: *Feuilletages proches d'une fibration*, Ensaios matemáticos, **5** (1993) Soc. Brasileira de Matemática.

[4] DENJOY, A.: Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *J. Math. Pures Appl.* **11** (1932), 333-375.

[5] DONNAY, V.: Geodesic flow on the two-sphere II: ergodicity. *Dynamical Systems (College Park, 1986-87), Springer Lecture Notes in Mathematics* **1342** (1988), 112-153.

[6] FATHI, A. & HERMAN, M.: Existence de difféomorphismes minimaux. *Astérisque* **49** (1977), 35-59.

[7] HARRISON, J.: A C^2 counterexample to the Seifert conjecture. Topology **27** (1988), 249-278.

[8] KATOK, A.: Minimal' nye diffeomorphizmy na gljavnych S^1-fassloenijach, tezisy VI, Vsesvjuznoj topologičekoj Konferencii v Tblisi Mecniereba (1972), Tblisi (en russe).

[9] KATOK, A.: Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Pub. IHES*, **51** (1980), 137-174.

[10] KNESER, H.: Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen. *Math. Annalen* **91** (1924), 135-154.

[11] KUPERBERG, K.: A smooth counterexample to the Seifert conjecture in dimension three. Preprint (1993) à paraître dans *Annals of Math.*

[12] KUPERBERG, G.: A volume-preserving counterexample to the Seifert conjecture. Preprint.

[13] KUPERBERG, K. & KUPERBERG, G.: Generalized counterexamples to the Seifert conjecture. En préparation.

[14] LAUDENBACH, F.: Orbites périodiques, courbes pseudo-holomorphes et la conjecture de Weinstein en dimension 3. [d'après H. Hofer et al.], séminaire Bourbaki, n^0 786, 1993-94.

[15] MATSUMOTO, S.: Notes on "A C^∞ counterexample to the Seifert conjecture in dimension three" by K. Kuperberg, informal notes, Tokyo, november 1993.

[16] MATSUMOTO, S.: C^∞ counterexample to Seifert conjecture according to K. Kuperberg, (en japonais), en préparation, à paraître dans Sugaku.

[17] NOVIKOV, S.P.: Topology of foliations. *Trans. Moscow Math. Soc.* (1965), 268-304.

[18] POINCARÉ, H.: Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Math.* **13** (1890), 1-270.

[19] POINCARÉ, H.: *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, tome 3. Gauthier-Villars, Paris, 1899.

[20] POINCARÉ, H.: Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. *Trans. A.M.S.* **6** (1905), 237-274.

[21] PUGH, C.: The closing lemma. *Amer. J. Math.* **89** (1967), 956-1009.

[22] ROSENBERG, H.: Un contre-exemple à la conjecture de Seifert (d'après P. Schweitzer) séminaire Bourbaki, n^0 434, 1972-73, Springer Lecture Notes in Maths 383.

[23] SCHWEITZER, P. A.: Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations. *Annals of Math.* **100** (1974), 229-234.

[24] SCHWEITZER, P. A.: Codimension one foliations without compact leaves. A paraître.

[25] SEIFERT, H.: Closed integral curves in 3-space and two-dimensional deformations. *Proc. Amer. Math. Soc.* **1** (1950), 287-302.

[26] SIEBENMANN, L.: *Le paradigme du serpent*, lettre à l'auteur (février 1994).

[27] WILSON, F. W.: On the minimal sets of non singular vector fields. *Annals of Math.* **84** (1966), 529-536.

Étienne GHYS
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
U.M.R. 128 du C.N.R.S.
École Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 LYON CEDEX 07

Astérisque

FRANÇOIS LAUDENBACH

Orbites périodiques et courbes pseudo-holomorphes. Application à la conjecture de Weinstein en dimension 3

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 786, p. 309-333

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__309_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Juin 1994
46ème année, 1993-94, n° 786

ORBITES PÉRIODIQUES ET COURBES PSEUDO-HOLOMORPHES, APPLICATION À LA CONJECTURE DE WEINSTEIN EN DIMENSION 3

[d'après H. Hofer et al.]

par **François LAUDENBACH**

1. De Rabinowitz à Hofer

1.1. Si (W, ω) est une variété symplectique et si M est une hypersurface de W, le noyau de la forme induite par ω sur M est tangent à un feuilletage de dimension 1, noté M_ω et appelé *feuilletage caractéristique* de M. Lorsqu'il existe un *hamiltonien* $H : W \to \mathbf{R}$, constant sur M et sans point critique au voisinage de M, le gradient symplectique de H, c'est-à-dire le champ de vecteurs X_H tel que $i(X_H)\omega = dH$, dirige le feuilletage caractéristique en tout point de M. Aussi M_ω est-il l'objet typique d'étude de la *dynamique hamiltonienne* et l'une des premières questions est l'existence de feuilles compactes, ou encore d'orbites périodiques si l' on est en présence d'un hamiltonien. Le rapport de Berestycki [Ber] fait l'état de la question en 83. Par le renouveau apporté aux méthodes de mini-max, le théorème de Rabinowitz (1978) reste une des grandes étapes dans le problème des orbites périodiques.

1.2. Théorème [Ra]. *Si M est une hypersurface compacte dans $\mathbf{R}^{2n}$, muni de sa structure symplectique standard $\omega_0 = \sum dp_i \wedge dq_i$, et si M est strictement étoilée (c'est-à-dire transverse aux droites issues d'un point), alors le feuilletage caractéristique M_ω a une feuille compacte.*

1.3. L'hypothèse géométrique faite sur M n'est pas invariante par difféomorphismes symplectiques, contrairement à la conclusion. Dans [We], A.

Weinstein s'est attaché à formuler une hypothèse "naturelle". Il dit que M est *une hypersurface de type contact dans une variété symplectique* (W,ω) *si au voisinage de* M, ω *admet une primitive* Λ *induisant une 1-forme sans zéro sur chaque feuille de* M_ω. Si λ est la forme induite par Λ sur M, cette dernière condition s'exprime aussi en disant que $d\lambda$ est une 2-forme non-dégénérée sur le fibré $\ker\lambda$, ou encore que λ est *une forme de contact.*

Exemple 1. Si M est strictement étoilée par rapport à l'origine dans $\mathbf{R}^{2n}$, M est de type contact (prendre $\Lambda = \frac{1}{2}\sum p_i dq_i - q_i dp_i$).

Exemple 2. Soit N une variété riemannienne. Son espace cotangent est muni d'une 1-forme canonique, dite forme de Liouville, $\Lambda = \sum pdq$ dont la différentielle est une forme symplectique. Le sous-fibré unitaire est une hypersurface de type contact. Les feuilles du feuilletage caractéristique sont les orbites du *flot géodésique.* Il y a au moins une feuille compacte car, d'après Lusternik - Fet [LF] (1951), toute variété riemannienne possède une géodésique périodique.

1.4. La conjecture de Weinstein est une généralisation des théorèmes de Lusternik - Fet et de Rabinowitz. Elle s'énonce ainsi :

Si M *est une hypersurface compacte et de type contact dans* (W,ω) *(et si* $H^1(M,\mathbf{R}) = 0$*), alors* M_ω *admet une feuille compacte.*

L'hypothèse cohomologique est mise ici entre parenthèses car sa raison d'être n'apparaît pas clairement. D'ailleurs c'est bien la conjecture forte qui a été prouvée par C. Viterbo [Vi] lorsque $(W,\omega) = (\mathbf{R}^{2n},\omega_0)$ et dans ce cas il est facile de construire par chirurgie plongée des hypersurfaces de type contact dont le premier nombre de Betti est non nul.

Dans certaines situations, l'hypothèse d'exactitude contenue dans la définition de "type contact" peut être assouplie. Dans [HV], Hofer et Viterbo la remplacent par une certaine propriété de *stabilité* de M du point de vue symplectique et ils obtiennent ainsi de nouveaux résultats d'orbites périodiques.

1.5. *Remarque.* Soit M une variété compacte sans bord, de dimension $2n-1$, munie d'une 2-forme fermée ω dont le noyau $\ker\omega$ est un fibré de

rang 1 ; il revient au même de munir M d' un feuilletage de dimension 1 "transversalement symplectique". Si $\ker\omega$ est un fibré orientable, (M,ω) admet un germe de symplectisation $(\mathbf{R}\times M,\widetilde{\omega})$, au voisinage de $\{a=0\}$, où a désigne la coordonnée dans $\mathbf{R}$ (prendre $\widetilde{\omega}=t\lambda+\omega$, où λ est une 1-forme positive sur $\ker\omega$). De plus, d'après A. Givental (voir [Be2]), le germe de $\widetilde{\omega}$ est unique à conjugaison près. La situation de type contact correspond à $\omega=d\lambda$ où λ est une forme de contact. Dans ce cas la symplectisation prend une forme plus classique : $\widetilde{\omega}=d(e^a\lambda)$.

Cette remarque signifie que l'on peut étudier une dynamique hamiltonienne sur une variété de dimension impaire M sans la plonger comme hypersurface d'une variété symplectique.

1.6. Voici deux exemples de dynamique hamiltonienne sans orbite périodique.

Exemple A. Un feuilletage linéaire irrationnel sur le tore T^{2n-1} est transversalement symplectique si on met sur les facteurs $T^{2n-2}\times pt$ la structure symplectique standard (invariante par translation). Se fondant sur le théorème KAM, M. Herman a montré que, sous certaines conditions diophantiennes sur la pente du feuilletage linéaire, les flots hamiltoniens C^{2n+1}-voisins restent sans orbite périodique, interdisant ainsi un "C^{2n+1}-closing lemma" hamiltonien [Her].

Cet exemple n'est pas de type contact car la 2-forme fermée ω ainsi définie n'est pas une différentielle.

Exemple B (bien connu des spécialistes de $SL_2(\mathbf{R})$). D'après Hedlund [Hed], sur les quotients compacts de $SL_2(\mathbf{R})$ le flot horocyclique est *minimal* (toutes les orbites sont denses) et pourtant il est hamiltonien (c.-à-d. transversalement symplectique) ; la 2-forme ω est prescrite par sa valeur sur les 2-vecteurs de l'algèbre de Lie. Par ailleurs Milnor [Mi] a montré que certains de ces quotients sont des variétés Σ^3 ayant l'homologie de la sphère S^3.

Esquissons que pour les variétés de Milnor (Σ^3,ω) n'est pas de type contact. La forme ω a une primitive λ dont la relevée dans $SL_2(\mathbf{R})$ est invariante à gauche ; elle se calcule facilement sur l'algèbre de Lie. On

trouve :

$$(*) \qquad \ker\omega \subset \ker\lambda\,.$$

Comme $H^1(\Sigma^3,\mathbf{R}) = 0$, les autres primitives de ω sont de la forme $\lambda + df$, où f est une fonction sur Σ^3. La condition de type contact impose que df soit non nulle sur $\ker\omega$ ce qui est impossible aux points critiques de f.

En relation avec $(*)$ signalons que, dans le germe de symplectisation, $\widetilde{\omega}$ a une primitive $\widetilde{\lambda}$ dont le champ de vecteurs $\widetilde{\omega}$-dual sort de $[-\epsilon,+\epsilon]\times\Sigma^3$ par les deux côtés. Ce phénomène est aussi décrit dans [Mc3] avec une approche différente.

1.7. Si, au lieu de fixer la variété ambiante comme dans le théorème de Viterbo, on met l'accent sur M en vertu de la remarque 1.5, on a une nouvelle formulation de la conjecture de Weinstein :

Soit M une variété compacte munie d'une forme de contact λ. Alors le feuilletage de dimension 1 *dirigé par* $\ker d\lambda$ *a une feuille compacte.*

En introduisant le *champ de Reeb* X associé à la forme de contact λ et défini par $i(X)d\lambda = 0$ et $\lambda(X) = 1$, la conjecture énonce que X a une orbite périodique. Si on fixe M, variété compacte de dimension impaire et orientable, on dira que *la conjecture de Weinstein est vraie pour M si, quelle que soit la forme de contact sur M, le champ de Reeb associé a une orbite périodique.* En dimension 3, la question se pose pour toutes les variétés compactes orientables, puisque d'après Lutz et Martinet, elles portent toutes une forme de contact (cf. [Ma]).

1.8. Le théorème de Hofer ([Ho]). *Soit M une variété compacte orientable de dimension 3. La conjecture de Weinstein est vraie dans les deux cas suivants :*

(i) *M est revêtue par S^3 ;*

(ii) *le second groupe d'homotopie de M est non trivial.*

Dans ce dernier cas, tout champ de Reeb a une orbite périodique homotope à zéro.

1.9. Commentaires

1) Si la conjecture de Weinstein est vraie pour une variété, elle est vraie pour toute variété qu'elle revêt.

2) Dans le cas de S^3 ce théorème d'existence d'une orbite périodique est à rapprocher du résultat de K. Kuperberg selon lequel il existe un champ de vecteurs sans orbites périodiques (voir l'exposé de E. Ghys dans ce volume). D'une façon générale pour un champ de vecteurs sur S^3 on peut se demander si le fait de préserver une structure géométrique le force à avoir une orbite périodique. Mais le théorème de Hofer n'est pas exactement de cette nature vis-à-vis de la géométrie de contact. Un champ de Reeb associé à une forme de contact λ préserve la structure de contact sous-jacente, c'est-à-dire le champ de plans $\ker\lambda$; inversement, parmi tous les champs de vecteurs préservant une structure de contact ξ les champs de Reeb sont exactement ceux qui sont transverses à ξ. La question suivante est alors naturelle : un champ de vecteurs préservant une structure de contact sur S^3 a-t-il une orbite périodique ? (E. Giroux a observé que la même question sur T^3 a une réponse négative).

3) Toujours pour S^3, une construction simple montre que le feuilletage dirigé par un champ de Reeb de la structure de contact standard est conjugué au feuilletage caractéristique d'une hypersurface étoilée dans $\mathbf{R}^4$. Dans ce cas l'orbite périodique est fournie par le théorème de Rabinowitz.

4) D'après le "Sphere Theorem" de Papakyriakopoulos et Whitehead (voir [Hem]), si $\pi_2(M) \neq 0$, M contient une sphère plongée S non homotope à zéro. Si S sépare M en deux composantes, M se présente comme une somme connexe de deux variétés non simplement connexes ; si S est à complémentaire connexe, $M = S^1 \times S^2$ ou une somme connexe avec $S^1 \times S^2$. On a ainsi une description topologique des variétés auxquelles s'applique le (ii) du théorème de Hofer.

5) Typiquement, l'exemple suivant ne se situe pas dans le champ du théorème 1.8. Si N est une surface riemannienne compacte à courbure ≤ 0, il existe bien des géodésiques périodiques mais aucune n'est homotope à zéro. Il en est de même pour le champ de Reeb de la forme de contact canonique sur son espace unitaire tangent ($\cong$ cotangent) UTN.

2. Sur les structures de contact en dimension trois

On se reportera à l'exposé de Giroux [Gi2] pour un rapport détaillé sur cette question. Ici nous rassemblons seulement le matériel en relation avec le théorème de Hofer.

2.1. Feuilletage caractéristique

Si S est une surface (plongée) dans une variété de contact (M^3, ξ) le champ de plans ξ trace sur S un feuilletage S_ξ de dimension 1 singulier ; génériquement sur S, les singularités sont isolées. Le feuilletage S_ξ est (encore une fois !) appelé *feuilletage caractéristique* de la surface. Le qualificatif est d'ailleurs justifié puisque S_ξ détermine ξ au voisinage de S (à isotopie près, laissant S fixe).

2.2. Structure vrillée, structure tendue

La structure de contact ξ est dite *vrillée le long d'un disque plongé* D si le feuilletage caractéristique D_ξ admet une seule singularité (nécessairement d'indice 1 et dite *elliptique*) et si le bord est une feuille régulière (voir fig.1).

Une structure qui n'est vrillée le long d'aucun disque plongé est dite *tendue*. Dans [Gi1], E. Giroux a établi le résultat suivant :

Théorème. *Soit (M^3, ξ) une variété munie d'une structure de contact tendue et soit S une sphère plongée dans M. Alors :*
1) *le feuilletage caractéristique S_ξ ne contient pas de cycle régulier ;*
2) *S est isotope à une sphère plongée S', par une isotopie C^0-petite, de sorte que S'_ξ n'ait que deux singularités elliptiques.*

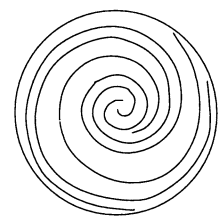


Figure 1

2.3. Existence de structures de contact tendues

A partir d'une structure de contact quelconque ξ, il est facile de produire une structure de contact vrillée : on construit une courbe fermée γ transversale à ξ et on change ξ dans un voisinage tubulaire de γ par une "modification de Lutz" ; le résultat est vrillé le long des disques méridiens de ce tube. En revanche, l'existence même d'une seule structure tendue est un problème difficile. Le théorème de D. Bennequin [Be1] est la première réponse (1982), antérieure bien sûr aux définitions ci-dessus (proposées par Y. Eliashberg), et une source d'inspiration du sujet :

Théorème. *La structure de contact standard de la sphère S^3 est tendue.*

Rappelons qu'en chaque point de S^3, vue comme sphère unité de $\mathbf{C}^2$, l'espace tangent réel contient une unique droite complexe. Le champ de $\mathbf{R}$-plans ainsi obtenu est la structure de contact *standard.* On peut aussi la voir comme la structure canonique sur l'unitaire tangent de la 2-sphère ronde.

Alors que les structures de contact vrillées peuvent être classées ([El1]), les structures tendues restent mystérieuses, sauf sur S^3 :

Théorème (Eliashberg [El3]). *La structure de contact standard est, à isotopie près, l'unique structure tendue de S^3.*

2.4. Réduction du théorème de Hofer

Compte tenu des résultats cités le théorème de Hofer 1.8 se réduit à l'énoncé suivant :

Théorème. *Soit M une variété de dimension 3 compacte munie d'une forme de contact λ. Alors le champ de Reeb de λ a une orbite périodique homotope à zéro dans les deux cas suivants :*
(i) *la structure de contact $\xi = \ker \lambda$ est vrillée ;*
(ii) *M possède une sphère plongée S, non homotope à zéro, telle que S_ξ n'ait pas de cycles et seulement deux singularités elliptiques.*

En effet pour 1.8(i), on peut supposer que $M = S^3$ d'après 1.9.1 et que la structure de contact est vrillée, d'après 1.9.3 et le théorème de Rabinowitz. Pour 1.8(ii), il ne reste qu'à considérer le cas d'une structure de

contact tendue. Le "Sphere Theorem" (1.9.4) et le théorème de Giroux 2.2 ramènent aux hypothèses du second cas ci-dessus.•

Remarque. Lu dans l'autre sens, ce théorème dit que, si le champ de Reeb d'une forme de contact n'a pas d'orbites périodiques homotopes à zéro, alors la structure de contact sous-jacente est tendue.

2.5. Généralisation du théorème de Bennequin

Avec Eliashberg [El2], on dit que (M^3, ξ) est *remplissable symplectiquement* s'il existe une variété compacte symplectique (W, ω) avec les propriétés suivantes :

1) M orientée par ξ est le bord orienté de W, celle-ci étant orientée par ω ;
2) $\omega_{|\xi}$ est positive.

Dans [El2], Eliashberg donne la généralisation suivante du théorème de Bennequin :

Théorème. *Si (M, ξ) est remplissable symplectiquement par W, alors ξ est une structure tendue. De plus, toute 2-sphère plongée dans M borde une 3-boule dans W.*

Remarque. Par construction, l'hypothèse de ce théorème est satisfaite pour les structures de contact standard sur les fibrés unitaires cotangents des surfaces riemanniennes. Elles sont donc tendues quelle que soit la métrique.

Il nous paraît important de situer le théorème de Hofer 2.4 par rapport au théorème d'Eliashberg 2.5. L'un et l'autre se démontrent à l'aide de *courbes pseudo-holomorphes.* Dans le cas de Hofer, ce qui tient lieu du remplissage symplectique est la variété non compacte $(-\infty, 0] \times M$, munie de la forme symplectique $d(e^a \lambda)$. Mais alors qu'avec un remplissage compact au sens d' Eliashberg on conclut à l'inexistence d'un disque le long duquel la structure est vrillée, avec le "remplissage" non compact de Hofer et à cause du trou en $-\infty$, on conclut qu'en présence d'un tel disque le champ de Reeb de λ a une orbite périodique.

3. Disques pseudo-holomorphes

La théorie des courbes pseudo-holomorphes a été développée par M. Gromov dans son célèbre article de 85 [Gr] (voir aussi [Be3]). On en présente ici certains aspects dans le cadre géométrique de Hofer.

3.1. Structure presque complexe sur la symplectisée

On commence par choisir une structure complexe J dans le fibré des plans de contact $\xi = \ker \lambda$, *calibrée* par $d\lambda$, c'est-à-dire telle que $< Y, Z >= d\lambda(Y, JZ)$ soit un produit scalaire. On note $W = \mathbf{R} \times M$ et (a, x) son point général. En chaque point de W l'espace tangent est scindé : $T_{(a,x)}W = \big(\mathbf{R}\partial_a \oplus \mathbf{R}X(x)\big) \oplus \ker \lambda(x)$. On étend J en une structure presque complexe sur W en posant

$$J\partial_a = X$$

et on étend $< .,. >$ en une métrique riemannienne en prenant ∂_a et $X(x)$ unitaires, mutuellement orthogonaux et orthogonaux à $\ker \lambda(x)$. Ces deux structures sont invariantes par translation parallèle à ∂_a. Par ailleurs W possède une structure symplectique canonique $\omega = d(e^a \lambda)$. Sur W, J est calibrée par ω, mais la métrique $\omega(., J.)$ est infiniment petite par rapport à $< .,. >$ pour $a \to -\infty$. Noter enfin que $d\lambda$ est ≥ 0 sur les droites J-complexes de TW.

Remarque. Soit p la projection $\mathbf{R} \times M \to M$. Si $\mathcal{O}$ est une orbite de X, l'espace tangent à $p^{-1}(\mathcal{O})$ est J-complexe et donc $\big(p^{-1}(\mathcal{O}), J\big)$ est conformément équivalent à $\mathbf{C}$ si l'orbite n'est pas périodique et à $\mathbf{C}^*$ si elle est périodique.

3.2. Disques J-holomorphes et J-convexité

Soit D le disque unité fermé de $\mathbf{C}$; un disque J-holomorphe (paramétré) est une application dérivable (au moins en un sens faible) $u : D \to W$ dont l'application tangente vérifie

$$Tu \circ i = J(u) \circ Tu\,.$$

La propriété suivante est fondamentale :

Si $u : D \to W$ est J-holomorphe, la fonction $e^{a\circ u}$ est strictement sous-harmonique (laplacien > 0), sauf aux points singuliers de u.

En effet, soit J^* la transposée de J. La 2-forme $-d(J^*de^a) = +d(e^a\lambda)$ $= \omega$ est positive sur les droites J-complexes de TW. Par ailleurs $u^*(dJ^*de^a)$ $= -\Delta(e^{a\circ u})$. •

En vertu du principe du maximum fort (lemme de E. Hopf), *si $u(\partial D) \subset \{a = 0\}$ et si u est non constant, alors $a \circ u(z) < 0$ pour tout $z \in \mathrm{int}D$. De plus, la dérivée radiale de $e^{a\circ u}$ (donc de $a \circ u$) est non nulle en tout point du bord de D.* Le domaine $\{a \leq 0\}$ est strictement J-convexe.

3.3. Disques J-holomorphes à bord dans une surface

Soit S une surface dans $M \times \{0\} = \{a = 0\}$. On note S^* le complémentaire du lieu singulier du feuilletage caractéristique S_ξ. C'est une surface totalement réelle : $T_xS^* \cap JT_xS^* = \{0\}$.

(i) *Pour tout disque J-holomorphe u à bord dans S^* et non constant, $u|\partial D$ est une immersion transverse à S_ξ.*

(ii) *Si S est une sphère ou un disque et si $u|\partial D$ est un plongement, on a :*

$$0 < \int_D u^*d\lambda \leq \int_S |d\lambda| .$$

Preuve : (i) Par J-holomorphie, on a $(u^*\lambda) \circ i = u^*da$. Comme le long du bord la dérivée radiale de $a \circ u$ est non nulle, la dérivée tangentielle de u est transverse à $\ker \lambda$.

(ii) La J-holomorphie dit encore que $u^*(d\lambda)$ est une forme ≥ 0. Si elle est identiquement nulle, u est à valeurs dans $p^{-1}(\mathcal{O})$ pour une certaine orbite $\mathcal{O}$ du champ de Reeb X et $e^{a\circ u}$ est harmonique, constante au bord, donc constante ainsi que u. Comme u n'est pas constante, $\int_D u^*d\lambda > 0$. La seconde inégalité résulte de la formule de Stokes, en utilisant que $u(\partial D)$ borde un disque sur S. •

3.4. Les disques J-holomorphes de Bishop

Le lemme de Darboux sur les formes de contact énonce que celles-ci ont un unique modèle local. On en déduit que, près d'une singularité

elliptique e de S_ξ et quitte à appliquer à S une isotopie C^0-petite, on peut supposer que le germe de (M, S, λ) est conjugué au germe de $\Big(S^3 = \{(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) | x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1\}, S^2 = S^3 \cap \{y_2 = 0\}, \lambda_0\Big)$ au voisinage de $(0, 0, \pm 1, 0)$, avec $\lambda_0 = \frac{1}{2}\sum(x_i dy_i - y_i dx_i)$. Le signe dépend du signe de la singularité, en comparant l'orientation de S et celle du plan de contact. La symplectisation canonique de λ_0 est $\mathbf{C}^2 - \{0\}$. Par conséquent, on peut choisir J pour coïncider au voisinage de e avec la structure complexe canonique de cette carte. Avec ce choix on a une famille explicite de disques J-holomorphes, appelés *disques de Bishop*, $D_t = \{x_1 + iy_1, t, 0\}$ pour t voisin de ± 1. Bishop en a établi l'existence sans déplacer S, au moins lorsque J est intégrable au voisinage du point elliptique ([Bi]).

On observe que les disques de Bishop sont plongés et deux à deux disjoints. Ils feuillettent un germe d'hypersurface (Lévi-plate) et leurs bords feuillettent le germe de S en faisant un tour autour de e.

La question est alors de prolonger la famille des disques de Bishop lorsque l'on s'éloigne de la singularité. Cette question, importante en géométrie complexe pour la détermination d'enveloppes d'holomorphie, a été considérée en premier par Bedford et Gaveau [BG].

3.5. Déformation locale d'un disque J-holomorphe

La détermination des disques J-holomorphes de W à bord dans S^* consiste à résoudre un certain problème elliptique non linéaire $Pu = 0$. Des résultats généraux de régularité énoncent par exemple que si J et S sont C^∞, les solutions sont C^∞ et que sur l'espace des solutions la topologie C^0 et la topologie C^∞ coïncident (voir [Si] pour un traitement direct dans le cas considéré).

A partir de maintenant on considère la situation où S est un disque ou une sphère vérifiant les hypothèses du théorème de Hofer 2.4.

Soit $u_0 : D \to W$ un disque J-holomorphe plongé à bord dans S^* représentant zéro dans le groupe d'homotopie relatif $\pi_2(W, S)$; d'après 3.3 son bord fait un tour autour de(s) singularité(s) $e_\pm$.

L'indice de Maslov du lacet $z \in \partial D \mapsto T_{u_0(z)}S^*$ de plans totalement réels, lu dans la trivialisation de $TW|u_0(D)$ vaut 2.

C'est évident pour les disques de Bishop et pour tous les disques qui s'en déduisent par déformation continue. L'indice de Fredholm de P en u_0 est alors égal à l'indice de Maslov $+ \frac{1}{2}\dim W = 4$ et donc le noyau de son linéarisé TP_{u_0} est de dimension ≥ 4.

Par ailleurs, en appliquant le *principe de similarité* ([Bers] ou [Ve], p. 211) dont une version locale sera donnée en 3.6, Hofer montre élémentairement que ce noyau est de dimension ≤ 4. Comme trois dimensions viennent du groupe des automorphismes conformes de la source, il y a exactement un degré de liberté pour les disques non paramétrés. De plus le champ des vecteurs normaux à $u_0(D)$ correspondant à cette déformation infinitésimale est sans zéros. Par le théorème des fonctions implicites on en déduit un plongement (unique à reparamétrage près) $\Phi : D\times]-\epsilon, +\epsilon[\to W$ tel que pour tout $t \in]-\epsilon, +\epsilon[$, Φ_t soit J-holomorphe à bord dans S^* et que $\Phi_0 = u_0$.

En conclusion, *la famille des disques de Bishop $\mathcal{D}(e_\pm)$ issue de $e_\pm$ a un prolongement maximal en une famille de disques J-holomorphes plongés deux à deux disjoints.*

3.6. Proposition. *Si S est une sphère non homotope à zéro avec 2 singularités elliptiques (hypothèse* 2.4(ii)*), les disques de la famille $\mathcal{D}(e_+)$ sont disjoints des disques de la famille $\mathcal{D}(e_-)$.*

Preuve. Si $D_- \in \mathcal{D}(e_-)$ rencontre l'un des disques de $\mathcal{D}(e_+)$, il y a, à partir de e_+, un premier disque $D_{t_0} \in \mathcal{D}(e_+)$ qui touche D_-.

Si $D_{t_0} = D_-$, alors les deux familles coïncident et la réunion de tous ces disques forme une 3-boule plongée dans $W = \mathbf{R} \times M$ bordée par S. C'est impossible puisque S n'est pas homotope à zéro dans M.

Le reste de l'argument repose sur l'idée de *positivité d'intersection* des courbes J-holomorphes en dimension 4 (D. McDuff [Mc2], [Mc4]). Pour l'intersection de disques plongés, c'est une application élémentaire du principe de similarité. Soient en effet $u, v : (\mathbf{C}, 0) \to (W, J)$ deux germes de courbes J-holomorphes distincts, avec $u(0) = v(0) = m_0$. Si u est un germe de plongement, il existe des coordonnées locales $\Psi = (z_1, z_2) : (W, m_0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ tels que $z_2 \circ u = 0$, $(z_1 \circ u)(z) = z$ et que $\Psi_* J = i$ le long de $\{z_2 = 0\}$. On pose $\alpha = z_1 \circ v$ et $\beta = z_2 \circ v$. Le principe de similarité affirme

que β ressemble à une fonction holomorphe. Précisément :
Il existe un germe d'application continue $\Phi : (\mathbf{C}, 0) \to GL_{\mathbf{R}}(\mathbf{C})$ *et un germe de fonction holomorphe* $b : (\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ *tels que*

$$\beta(z) = \Phi(z)b(z)\,.$$

Il en résulte que les points d'intersection sont isolés. La valuation du développement de Taylor de b est un entier $k > 0$, qui a une interprétation topologique simple : si B est une petite boule centrée en m_0, les disques u et v découpent sur ∂B deux courbes simples disjointes γ_u et γ_v ; k est l'enlacement de γ_u avec γ_v. Un tel enlacement résiste à de petites perturbations ; donc si u' est C^1-proche de u, les courbes u' et v se rencontrent encore. Comme $D_t \cap D = \emptyset$ pour $t < t_0$, l'argument ci-dessus montre que D_{t_0} et D_- ne peuvent se rencontrer en des points intérieurs.

Une variante de ce raisonnement permet d'exclure aussi les points communs au bord. Si D_- et D_{t_0} se rencontrent en $m_0 \in S$, les deux disques ont même espace tangent en m_0. On regarde une petite 1/2-boule B dans $(-\infty, 0] \times M$ centrée en m_0 ; ∂B, la frontière de B dans $(-\infty, 0] \times M$, rencontre les disques suivants deux arcs γ_u et γ_v, dont les extremités sont sur un cercle c dans l'espace réel $S \cap B$. La valuation k du développement de Taylor ci-dessus s'interprète ainsi. Si k est impair, les paires de points $\partial\gamma_u$ et $\partial\gamma_v$ sont enlacées sur c. Si k est pair, elles ne le sont pas et l'enlacement de γ_u et de γ_v a un sens, car on peut fermer ces arcs avec deux arcs tracés dans $S \cap B$ et mutuellement disjoints ; pour $k \geq 2$ cet enlacement est non trivial ($= k/2$). Dans les deux cas la figure est stable par perturbation et donne une intersection non vide de D_- avec D_t pour tout t voisin de t_0. •

3.7. Explosion du gradient

Proposition. *Pour tout paramétrage* $u_t : D \to W$ *des disques de la famille maximale de Bishop* $\mathcal{D} = \mathcal{D}(e_+)$, *le gradient* ∇u_t *est non borné (en* t*).*

Preuve. Dans le cas contraire, d'après Ascoli on pourrait extraire de toute suite de $\mathcal{D}$ (non convergente dans $\mathcal{D}$) une sous-suite $u_n : D \to W$, C^0-convergente, (donc C^∞-convergente) vers un disque J-holomorphe u_∞ : $D \to W$.

Lemme. u_∞ *est un plongement disjoint des* u_n.

Preuve du lemme. Comme on vient de le voir, $\mathcal{D}$ ne peut s'approcher de e_-; on en déduit que u_∞ n'est pas constant. La courbe $u_\infty|\partial D$ est alors transverse à S_ξ et limite de plongements transverses à S_ξ ; c'est donc un plongement. Dans cette situation on peut parler de l'auto-intersection de $u_\infty(D)$: c'est l'intersection algébrique avec un disque voisin en position générale, dont le bord dans S est disjoint de $u_\infty(\partial D)$. Ici cet entier est nul car il varie continuement avec le disque et il est nul pour u_n. Or d'après D. McDuff, il est > 0 pour un disque J-holomorphe non plongé (le modèle local de singularités J-holomorphe est complètement décrit dans [MW]). Que $u_\infty(D)$ soit disjoint des $u_n(D)$ suit en même temps par positivité de l'intersection des courbes J-holomorphes. •

D'après 3.3(i), $u_\infty(\partial D) \subset S$ ne peut rencontrer ∂S qui est tangent à la structure de contact. D'après 3.5, u_∞ appartient donc à une famille de disques J-holomorphes et plongés, à bord dans S^* ; l'unicité locale des familles de disques implique que celle-ci prolonge $\mathcal{D}$, contredisant la maximalité de $\mathcal{D}$. •

3.8. Explosion du diamètre

Dans [Gr] (voir aussi [Pa]), Gromov explique comment compactifier une famille de courbes J-holomorphes (non paramétrées) d'aires bornées dans une variété compacte, riemannienne presque complexe (V, J, μ), dont la source Σ a un type topologique fixé (surface fermée de genre g). Les objets limites qu'il faut ajouter à la famille sont des "courbes cuspidales", dont la source est obtenue à partir de Σ en écrasant, chacune sur un point, un nombre fini de courbes simples 2 à 2 disjointes.

Dans le cas où la source Σ a un bord, on prescrit aux courbes considérées d'avoir leur bord dans une sous-variété compacte totalement réelle ; le problème P des courbes J-holomorphes reste alors elliptique. Bien qu'une compactification par des courbes cuspidales à bord soit admise par les spécialistes, il n'en existe pas de version écrite avec des hypothèses utilisables ici. On se limitera donc à une version plus faible où un défaut de compacité se traduit par l'apparition de *bulles* au sens de Sacks-Uhlenbeck [SU].

Revenant à la situation de Hofer, on a la proposition suivante :

Proposition. *Les disques de la famille maximale de Bishop* $\mathcal{D} = \mathcal{D}(e_\pm)$ *ne restent dans aucune partie compacte* $W(a_0) = [a_0, 0] \times M$.

Preuve. Supposons au contraire que les disques de $\mathcal{D}$ sont dans $W(a_0)$. L'aire de disques de $\mathcal{D}$ est alors bornée. En effet, comme $a \in [a_0, 0]$, à une constante près celle-ci est donnée par

$$\int_D u^*(d(e^a\lambda)) = \int_{\partial D} u^*\lambda \leq \int_S |d\lambda|.$$

On choisit les paramétrages $u_t : D \to W(a_0)$ de sorte que les images de trois points choisis sur ∂D restent sur trois feuilles distinctes de S_ξ. D'après 3.7, il existe une suite $u_n \in \mathcal{D}$ telle que $R_n \sup_{z\in D} |\nabla u_n(z)| \to +\infty$ pour $t \to +\infty$. En prenant une sous-suite, le sup. du gradient est atteint en des points z_n formant une suite convergente : $z_n \to z_\infty$. On a deux cas de figure :

1) $R_n \mathrm{dist}(z_n, \partial D) \to +\infty$.

On introduit des applications J-holomorphes renormalisées

$$v_n(z) = u_n(z_n + \frac{z}{R_n})$$

bien définies sur $D(0, R_n \mathrm{dist}(z_n, \partial D))$. La suite v_n est à gradient borné et $|\nabla v_n(0)| = 1$. D'après Ascoli (+ la régularité elliptique), quitte à prendre une sous-suite, v_n converge dans C^∞_{loc} vers $v : \mathbf{C} \to W(a_0)$, non constant. Comme v_n paramètre une partie de $u_n(D)$, l'aire des v_n est bornée et l'aire de v est donc finie. D'après un théorème de *singularités inexistantes* (voir [Si], th. 4.5.1), v se prolonge à $P^1(\mathbf{C})$ en une application J-holomorphe non constante.

Or il n'existe pas de sphères J-holomorphes non constantes, cela pour deux raisons (une seule suffirait) :

a) J est calibrée par une forme symplectique exacte $\omega = d(e^a\lambda)$;

b) la fonction a ne peut avoir de maximum sur une courbe J-holomorphe.

2) $R_n \mathrm{dist}(z_n, \partial D) \to \ell$.

On choisit un isomorphisme conforme $h : \mathbf{H} \to D$ avec $h(0) = z_\infty$, où $\mathbf{H}$ désigne le demi-plan de Poincaré. On pose $v_n(z) = u_n \circ h(\frac{z}{R_n})$. Le maximum du gradient de v_n est atteint en un point de $\mathbf{H}$ à distance bornée

et ne tend pas vers zéro avec n. Donc la suite v_n tend vers $v : \mathbf{H} \to W(a_0)$, J-holomorphe non constante et d'aire bornée. Le théorème des singularités inexistantes énonce alors que $v \circ h^{-1}$ se prolonge en une application J-holomorphe du disque. En particulier le diamètre de $v(\{|z| = r\})$ tend vers 0 pour $r \to \infty$. Soit $\epsilon \ll \text{diam}(v([-1,+1])$, et soit r tel que $\text{diam}(\{|z| = r\}) < \epsilon$. Si n est assez grand les mêmes inégalités valent pour v_n. Comme $v_n(\mathbf{R}) \subset u_n(\partial D)$ est plongée dans S^*, transversalement à S_ξ, on voit que l'arc $v_n([-r,+r])$ fait un tour autour de la singularité e à ϵ près. D'autre part le lacet $u_n(\partial D)$ contient un autre arc où trois points ont été fixés. Ceci ne peut se faire si $u_n|\partial D$ est un plongement transversal à S_ξ. •

3.9. Retour sur le remplissage symplectique

Ouvrons une parenthèse pour esquisser la preuve du théorème d'Eliashberg 2.5 puisque les arguments invoqués jusqu'ici s'y trouvent déjà (voir aussi [Gr], 2.4D_2 - D_2').

Soit (W, ω) un remplissage symplectique de (M, ξ). Soit J une structure presque complexe calibrée par ω et laissant ξ invariante. Le bord $M = \partial W$ est alors J-convexe.

1$^{\text{er}}$ *cas : W ne contient pas de sphères exceptionnelles.*

Une sphère est dite *exceptionnelle* si elle est plongée, symplectique et d'autointersection homologique -1. En l'absence de sphères exceptionnelles, on montre que génériquement sur J il n'y a pas de sphères J-holomorphes d'autointersection < -1. Quant aux sphères J-holomorphes d'autointersection ≥ 0, elles donnent lieu à des familles à au moins 1 paramètre qui par un théorème de compacité devraient toucher le bord de W, ce que la J-convexité interdit (voir [Mc1] th.1.4 dans le cas sans bord). Finalement, il n'y a pas de sphères J-holomorphes non constantes.

Si $S \subset M$ est un disque le long duquel ξ est vrillée, comme en 3.7 le gradient explose dans une famille maximale de Bishop, donnant lieu à une bulle non triviale : contradiction. La structure ξ est tendue.

Si $S \subset M$ est une sphère, après une isotopie convenable (2.2), S_ξ n'a que deux singularités elliptiques et la famille maximale des disques de Bishop engendre une boule plongée dans W.

$2^{ème}$ *cas.* D. McDuff [Mc1] montre qu'en présence de sphères exceptionnelles (W, ω) s'obtient par éclatement d'un nombre fini de points dans une variété symplectique $(\overline{W}, \overline{\omega})$ qui ne contient pas de sphères exceptionnelles. Le bord est inchangé et ξ est donc une structure tendue. De plus si S borde une 3-boule B dans $\overline{W}$, génériquement B évite les points d'éclatement et se relève dans W.

4. Non-compacité et orbites périodiques

On présente ici une approche due à F. Labourie [Lab], qui a l'avantage sur celle de Hofer de ne pas recourir à d'autres symplectisations de (M, ξ) que celle utilisée classiquement.

4.1. Le théorème de Hofer découle de la proposition suivante :

Proposition. *Sous les hypothèses* 2.4, *il existe une application J-holomorphe $v : A \to W$, où A est un anneau ($\cong S^1 \times [0,1]$) muni d'une structure complexe et qui vérifie :*

$$\int_A v^* d\lambda = 0 \tag{1}$$

$$\int_{S^1 \times \{1\}} v^* \lambda \neq 0 . \tag{2}$$

En effet la J-holomorphie et la première condition impliquent que v est à valeurs dans $p^{-1}(\mathcal{O})$ pour une certaine orbite $\mathcal{O}$ du champ de Reeb. Si $\mathcal{O}$ n'est pas périodique, $v(S^1 \times \{0\})$ peut être contractée sur un point dans $p^{-1}(\mathcal{O})$. Comme $p^*(d\lambda)$ induit 0 sur $p^{-1}(\mathcal{O})$, la formule de Stokes contredit (2). •

On va trouver cet anneau J-holomorphe par un passage à la limite. Le lemme de Gromov-Schwarz assurera la convergence et le lemme de monotonie va, entre autres choses, contrôler la condition (2). On fera aussi appel à l'invariant classique des anneaux conformes à savoir le *module*.

4.2. Le lemme de Gromov-Schwarz

Soient K un domaine compact de W, β une 1-forme et J une structure presque-complexe calibrée par $d\beta$. Alors il existe une constante C telle que, pour toute application J-holomorphe $u : D \to K$, on ait $|\nabla u(0)| \leq C$.

Voir M.-P. Muller [Mu] pour une démonstration de l'énoncé sous la forme ci-dessus. Ce lemme est encore valable si on remplace le disque D par une surface de Riemann Σ et 0 par un point ne s'approchant pas de $\partial\Sigma$.

Remarque. D'après P. Gauduchon [Ga], les espaces de jets au-dessus de W portent une structure presque complexe canonique et le relèvement de u dans chaque espace de jets est J-holomorphe. L'application du lemme de Gromov-Schwarz à ce niveau est une expression de la régularité elliptique, au moins loin du bord de Σ.

4.3. Le lemme de monotonie

Soit (W, K, J) comme ci-dessus, où J est calibrée par une forme symplectique. Il existe alors des constantes r_0 et $C' > 0$ avec la propriété suivante : pour tout $x \in K$, tout $r \leq r_0$ et toute courbe J-holomorphe $u : (\Sigma, \partial\Sigma) \to B(x, r)$ passant par x, on a

$$\text{aire}\, u(\Sigma) \geq C' r^2 .$$

Voir [Si, prop. 4.3.1]. Noter que ces deux lemmes sont au cœur du théorème de compacité de Gromov.

4.4. Module d'un anneau

Soit A un anneau dans $\mathbf{C}$, $A \cong S^1 \times [0, 1]$. L'inverse du *module* $\text{Mod}(A)$ est défini par

$$\frac{1}{\text{Mod}(A)} = \inf_b \int_A db \wedge db \circ i$$

où b parcourt l'ensemble des fonctions réelles valant 0 sur $S^1 \times \{0\}$ et 1 sur $S^1 \times \{1\}$. Le module est une fonction croissante : si $A_1 \subset A_2$, on a $\text{Mod}(A_1) \leq \text{Mod}(A_2)$. Enfin deux anneaux ayant le même module sont conformément équivalents.

4.5. Démonstration de la proposition 4.1

On considère une suite de disques (plongés) J-holomorphes

$$u_n : D \to W = \mathbf{R} \times M ,$$

à bords dans $\{0\} \times M$ et vérifiant :

(3) la suite $\int_D u_n^* d\lambda$ est bornée,

(4) $\inf_n a \circ u_n = -\infty$.

D'après 3.3 et 3.8 une telle suite existe dans une famille maximale de Bishop.

Lemme. *Il existe une suite d'anneaux $A_m \subset D$, des applications J-holomorphes $v_m : A_m \to W$ et des constantes C_1 et C_2 avec les propriétés suivantes :*

(5) $\int_{A_m} v_m^* d\lambda \to 0$;

(6) *l'oscillation (max-min) de $a \circ v_m$ sur A_m est majorée par 2 ;*

(7) $\int_{S^1 \times \{1\}} v_m^* \lambda \geq C_1$;

(8) $\mathrm{Mod}(A_m) \geq C_2$.

Preuve. Pour simplifier les notations on suppose que les disques u_n sont transverses aux niveaux $\{a = k\}$ pour tout entier k. L'entier n étant fixé, pour chaque entier $k \in]\min a \circ u_n, 0]$, on peut trouver un anneau $A_{n,k} \subset D$ de sorte que :

- $u_n(\partial_0 A_{n,k}) \subset \{a = k-1\}$, $u_n(\partial_1 A_{n,k}) \subset \{a = k\}$, où ∂_0 et ∂_1 désignent les deux composantes du bord, ∂_1 entourant ∂_0.
- $\mathrm{int} A_{n,k} \cap \mathrm{int} A_{n,k'} = \emptyset$ si $k \neq k'$.

D'après le principe du maximum, le disque bordé par $\partial_0 A_{n,k}$ est envoyé par u_n dans $\{a \leq k-1\}$. Il n'est pas difficile de trouver un anneau $A'_{n,k} \subset A_{n,k}$ tel que :

- u_n envoie chaque bord dans des niveaux de a distants de 1 ;
- l'oscillation de $u_n | A'_{n,k} \leq 2$.

(Par exemple, si $A_{n,k}$ ne convient pas lui-même, on peut obtenir $A'_{n,k}$ en partant du minimum absolu de $a \circ u_n | A_{n,k}$ - voir fig.2.)

D'après (3) et (4), les intégrales $\int_{A'_{n,k}} u_n^* d\lambda$ n'ont pas un minorant > 0 uniforme en n et k. On note alors $v_m : A_m \to W$ une sous-suite de u_n :

$A'_{n,k} \to W$ satisfaisant (5) ; (6) est assuré par la construction même des $A'_{n,k}$.

Preuve de (7). Soit D_m le disque bordé par $\partial_1 A_m$ et $v_m : D_m \to W$ la courbe J-holomorphe prolongeant $v_m : A_m \to W$ (induite par un certain $u_{n,k}$). Soit $D'_m \subset D_m$ un sous-disque tel que :

- $a \circ v_m | \partial D'_m = \text{const.}$
- l'oscillation de $a \circ v_m | D'_m = 1$ (génériquement).

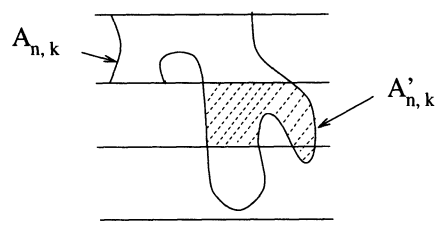


Figure 2

Ainsi le diamètre de $v_m(D'_m)$ n'approche pas de zéro ; d'après le lemme de monotonie l'aire de $v_m(D'_m)$ n'approche pas non plus de zéro - on rappelle que la métrique est invariante par translation parallèle à ∂_a, ce qui permet de considérer que $v_m(D'_m)$ varie dans un compact.

Après une translation convenable, $a \circ v_m(\partial D'_m) = 0$. A une constante près l'aire de D'_m est alors donnée par

$$\int_{D'_m} v_m^*(da \wedge \lambda + d\lambda) = \int_{D'_m} v_m^* d(a\lambda) + \int_{D'_m} v_m^*(1-a)d\lambda \,.$$

Par Stokes le premier terme de cette somme est nul ; par ailleurs le second terme est majoré par $2 \int_{D'_m} v_m^* d\lambda$. Donc $\int_{\partial D'_m} v_m^* \lambda$ n'approche pas 0. On en déduit (7) car
$\int_{D_m - D'_m} v_m^* d\lambda \geq 0$ implique $\int_{\partial D_m} v_m^* \lambda \geq \int_{\partial D'_m} v_m^* \lambda$.

Preuve de (8). Après une translation convenable, $a \circ v_m(\partial_i A_m) = i$ pour

$i = 0, 1$ et $|a \circ v_m| \leq 1$ sur A_m. Donc on peut majorer $\dfrac{1}{\mathrm{Mod}(A_m)}$ par

$$\int_{A_m} v_m^*(da \wedge \lambda) = \int_{\partial_1 A_m} v_m^* \lambda - \int_{A_m} v_m^*(a d\lambda)$$
$$\leq \int_{D_m} v_m^* d\lambda + \int_{A_m} v_m^* d\lambda \,.$$

Donc d'après 3.3(ii) on a $\dfrac{1}{\mathrm{Mod}(A_m)} \leq \text{const.} \int_S |d\lambda|$. •

Quitte à prendre un sous-anneau de A_m, on peut supposer que le module est constant et donc que A_m est paramétré par une surface de Riemann fixe A. D'après (5) et pour n grand, l'intégrale de $v_m^* \lambda$ est à peu près la même sur toutes les courbes qui font le tour de A_m ; donc (7) vaut encore pour A. Après une translation convenable $v_m(A)$ est contenu dans un compact. Le lemme de Schwarz assure l'équicontinuité de cette suite (translatée) en restriction à un sous-anneau compact $A' \subset \mathrm{int} A$; d'où la convergence C^0 (et C^∞ par la régularité elliptique) d'une sous-suite de $v_n|A'$. Pour l'application limite, (1) et (2) découlent de (5) et (7). •

4.6. L'approche de Hofer

Elle consiste à prouver que la non-compacité de la famille de Bishop se traduit par l'apparition d'une *bulle infinie*, courbe J-holomorphe $v : \mathbf{C} \to W$, dont le bout est asymptote au cylindre $p^{-1}(\mathcal{O})$ au-dessus d'une orbite périodique du champ de Reeb. Cependant pour rester dans un cadre où l'aire est finie, il faut introduire une mesure d'aire plus sophistiquée.

Selon H. Hofer et K. Wysocki, l'existence d'une telle bulle débouche sur d'autres résultats relatifs à l'existence d'une infinité d'orbites périodiques [HW].

4.7. Retour sur la structure de contact standard de S^3

En se fondant sur le théorème de Rabinowitz, on a pu exclure la structure standard de notre discussion. Or une idée de remplissage à paramètres permet de la traiter dans le même esprit.

On considère $S^3 = \{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1\}$, muni d'une forme de contact λ, où $\ker \lambda$ est la structure de contact standard. On introduit $W = \mathbf{R} \times S^3$

muni d'une structure presque complexe comme en 3.1. En dehors des pôles, S^3 est feuilleté par les 2-sphères $S_s = \{y_2 = s\}$ sur chacune desquelles le feuilletage caractéristique a exactement deux singularités elliptiques. Pour s voisin de 1, on peut remplir S_s par des disques J-holomorphes $D_{s,t} \subset W$.

Si cette famille n'explose pas, on pourra atteindre $s = -1$ et on aura écrit $\{0\} \times S^3$ comme bord d'une boule dans $\mathbf{R} \times S^3$, ce qui est absurde. L'explosion de la famille de Bishop détecte une orbite périodique du champ de Reeb de λ.

Remerciements. Je remercie particulièrement François Labourie pour sa contribution originale à cet exposé. Je remercie Helmut Hofer pour les éclaircissements et améliorations qu'il a apportés dans le cadre de son cours au Centre Emile Borel (printemps 94). Je remercie aussi Yasha Eliashberg, Emmanuel Giroux, Jean-Claude Sikorav et Claude Viterbo pour leurs aides et leurs encouragements.

Références

[AL] M. Audin, J. Lafontaine, eds., Holomorphic curves in symplectic geometry, Birkhäuser, 1994.

[Be1] D. Bennequin, Entrelacements et équations de Pfaff, Astérisque 103-108 (1983), 83-161.

[Be2] D. Bennequin, Caustique mystique [d'après Arnold et al.], Sém. Bourbaki, Astérisque 133-134 (1986), 19-56.

[Be3] D. Bennequin, Problèmes elliptiques, surfaces de Riemann et structures symplectiques [d'après M. Gromov], Sém. Bourbaki, Astérisque 145-146 (1987), 111-136.

[BG] E. Bedford, B. Gaveau, Envelopes of holomorphy of certain 2-spheres in $\mathbf{C}^2$, Amer. J. of Math. 105 (1983), 975-1009.

[Ber] H. Berestycki, Solutions périodiques de systèmes hamiltoniens, Sém. Bourbaki, Astérisque 105-106 (1983), 105-128.

[Bers] L. Bers, An outline of the theory of pseudo-analytic functions, Bull. Amer. Math. Soc. 62 (1956), 291-331.

[Bi] E. Bishop, Differentiable manifolds in complex Euclidian space, Duke Math. J.

[El1] Y. Eliashberg, Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds, Invent. Math. 98 (1989), 623-637.

[El2] Y. Eliashberg, Filling by holomorphic discs and its applications, London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 151 (1991), 45-67.

[El3] Y. Eliashberg, Contact 3-manifolds, twenty years since J. Martinet's work, Ann. Inst. Fourier 42 (1992), 165-192.

[Ga] P. Gauduchon, The canonical almost complex structure on the manifold of 1-jets of pseudo-holomorphic mappings between two almost complex manidolds, p. 69-74 in [AL].

[Gi1] E. Giroux, Convexité en topologie de contact, Comment. Math. Helv. 66 (1991), 637-677.

[Gi2] E. Giroux, Topologie de contact en dimension trois [autour de travaux de Yakov Eliashberg], Sém. Bourbaki, Astérisque 216 (1993), 7-34.

[Gr] M. Gromov, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, Invent. math. 82 (1985), 307-347.

[Hed] G. Hedlund, Fuchsian groups and transitive horocycles, Duke Math. Journal 2 (1936), 530-542.

[Hem] J. Hempel, 3-manifolds, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1976.

[Her] M. Herman, Exemples de flots hamiltoniens dont aucune perturbation en topologie C^∞ n'a d'orbites périodiques sur un ouvert de surfaces d'énergie, C. R. Acad. Sc. Paris série I Math. 312 (1991), 989-994.

[Ho] H. Hofer, Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three, Invent. Math. 114 (1993), 515-563.

[HV] H. Hofer, C. Viterbo, The Weinstein conjecture in the presence of holomorphic spheres, Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), 583-622.

[HW] H. Hofer, K. Wysocki, communication orale.

[Lab] F. Labourie, communication orale.

[LF] L. Lusternik, A. Fet, Variational problems on closed manifolds, Dokl. Akad. Nauk SSSR 81 (1951), 17-18.

[Ma] J. Martinet, Formes de contact sur les variétés de dimension trois, p. 142-163 in Proceedings of Liverpool Singularities Symposium II, L.N.M. 209, Springer, 1971.

[Mc1] D. McDuff, The structure of rational and ruled symplectic 4-manifolds, J. of AMS 3 (1990), 672-712.

[Mc2] D. McDuff, The local behaviour of holomorphic curves in almost complex 4-manifolds, J. of Diff. Geo. 34 (1991), 143-164.

[Mc3] D. McDuff, Symplectic manifolds with contact type boundaries, Invent. math. 103 (1991), 651-671.

[Mc4] D. McDuff, Singularities and positivity of intersections of J-holomorphic curves, p. 191-215 in [AL].

[Mi] J. Milnor, On the 3-dimensional Brieskorn manifolds $M(p,q,r)$, p. 175-225 in : Knots, groups and 3-manifolds, (papers dedicated to the memory of R.H. Fox, ed. by L. Neuwirth, Annals of Math. Studies 84, Princeton Univ. Press, 1975.

[Mu] M.-P. Muller, Gromov's Schwarz lemma as an estimate of the gradient for holomorphic curves, p. 217-231 in [AL].

[MW] M. Micallef, B. White, The structure of branch points in minimal surfaces and pseudoholomorphic curves, preprint 1994.

[Pa] P. Pansu, Compactness, p. 233-249 in [AL].

[Ra] P. Rabinowitz, Periodic solutions of Hamiltonian systems, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 157-184.

[Si] J.-C. Sikorav, Some properties of holomorphic curves in almost complex manifolds, p. 165-189 in [AL].

[SU] J. Sacks, K. Uhlenbeck, The existence of minimal immersions of two spheres, Ann. of Math. 113 (1981), 1-24.

[Ve] I.N. Vekua, Generalized analytical functions, Pergamon, London, 1962.

[Vi] C. Viterbo, A proof of the Weinstein conjecture in $\mathbf{R}^{2n}$, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire 4 (1987), 337-357.

[We] A. Weinstein, On the hypotheses of Rabinowitz's periodic orbit theorems, J. Diff. Eq. 33 (1979), 353-358.

François LAUDENBACH
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
URA 169 du CNRS
F-91128 PALAISEAU cedex

Astérisque

WERNER MÜLLER

The eta invariant (some recent developments)

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 787, p. 335-364

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__335_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Juin 1994
46ème année, 1993-94, n° 787

THE ETA INVARIANT
[some recent developments]

par **Werner MÜLLER**

0. INTRODUCTION

0.1. The eta invariant was introduced and studied by Atiyah, Patodi and Singer in a series of papers on spectral asymmetry [APS1], [APS2], [APS3]. In this report we will discuss some new developments connected with the eta invariant. We will concentrate mainly on aspects related to index theory.

The eta invariant is defined for every elliptic selfadjoint differential operator A acting on sections of a vector bundle E over a closed manifold Y. Let λ_j run over the eigenvalues of A. Then the eta function of A is defined as

$$\eta_A(s) = \sum_{\lambda_j \neq 0} \frac{\operatorname{sign}\lambda_j}{|\lambda_j|^s}, \tag{0.1}$$

where $s \in \mathbf{C}$. The series is absolutely convergent in the half–plane $\operatorname{Re}(s) > \frac{\dim Y}{m}$, m being the order of A. By Mellin transform, it follows that

$$\eta_A(s) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \int_0^\infty t^{(s-1)/2} \operatorname{Tr}(Ae^{-tA^2})\, dt, \quad \operatorname{Re}(s) \gg 0.$$

The heat equation method implies that, as $t \to 0$, there exists an asymptotic expansion

$$\operatorname{Tr}(Ae^{-tA^2}) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{(-n-1+k)/m},$$

where $n = \dim Y$. Using this asymptotic expansion, it follows that the eta function admits a meromorphic continuation to the whole complex plane. It is a

nontrivial result that $\eta_A(s)$ is always holomorphic at $s = 0$ [APS3], [Gi1]. This result needs global arguments because the local residue at $s = 0$ of $\eta_A(s)$ may not vanish [APS3], [Gi1]. This is in contrast to the case of the zeta function $\zeta_B(s) = \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j^{-s}$ of a positive elliptic operator B. The special value $\eta_A(0)$ is then called the *eta invariant* of the operator A. An important feature of the eta invariant is that it is not locally computable. However, the variation is locally computable.

0.2. The original purpose which led Atiyah, Patodi and Singer to the invention of the eta invariant was to generalize Hirzebruch's signature theorem to the case of manifolds with boundary. Recall that for a closed oriented C^∞ manifold X of dimension $4k$ Hirzebruch's signature theorem [Hi1] states that the signature $\mathrm{Sign}(X)$ of the nondegenerate quadratic form on $H^{2k}(X; \mathbf{R})$, which is defined by the cup product, is given by the formula

$$\mathrm{Sign}(X) = \langle L(p_1, ..., p_k), [X] \rangle. \tag{0.2}$$

Here $L(p_1, ..., p_k)$ is the Hirzebruch L–polynomial in the Pontrjagin classes of X and $[X] \in H_{4k}(X; \mathbf{Z})$ is the fundamental class of X. In his study of Hilbert modular surfaces [Hi2], Hirzebruch introduced certain topological invariants - called the *signature defect* - for cusp singularities of a Hilbert modular surface. Recall that a Hilbert modular surface is the compactification of a complex surface of the form $\Gamma \backslash H^2$ where H is the upper half–plane and Γ is a discrete subgroup of $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})^2$ which is commensurable with the Hilbert modular group of a real quadratic field. For a given cusp singularity $p \in \overline{\Gamma \backslash H^2}$ one considers a neighborhood U of p. The singularity can be resolved and in this way, one obtains a compact 4–manifold X with smooth boundary Y. The tangent bundle TX restricted to the boundary Y is parallelizable and therefore, can be pushed down to an $\mathrm{SO}(4)$–bundle over X/Y. Let $\overline{p}_1 \in H^4(X, Y; \mathbf{Q})$ be the first Pontrjagin class of this bundle. Then the signature defect $\delta(p)$ of p is defined as

$$\delta(p) = \mathrm{Sign}(X) \; - \; \frac{1}{3} \langle \overline{p}_1, [X, Y] \rangle. \tag{0.3}$$

Here $\mathrm{Sign}(X)$ denotes the signature of the nondegenerate quadratic form induced by the cup product on $H^*_!(X; \mathbf{R}) = \mathrm{Im}(H^*(X, Y; \mathbf{R}) \to H^*(X; \mathbf{R}))$. The right hand side is independent of the particular choice of a resolution of p.

Using the explicit description of the resolution, Hirzebruch was able to compute the signature defect in terms of the resolution diagram. In this way he showed that $\delta(p)$ equals the value at $s = 0$ of a certain Hecke L–series $L(s)$ attached to the cusp p. Hirzebruch then conjectured [Hi2] that a similar result holds for Hilbert modular varieties of any dimension.

0.3. This conjecture was one of the primary motivations for Atiyah, Patodi and Singer to investigate this problem in the wider context of Riemannian geometry. Let X be a compact oriented $4k$–dimensional Riemannian manifold with smooth boundary Y. Suppose that the metric of X is a product near the boundary. Then the differential geometric signature defect of Y is defined as

$$\delta(Y) = \mathrm{Sign}(X) \; - \; \int_X L(p_1, ..., p_k) \tag{0.4}$$

where $L(p_1, ..., p_k)$ is now the Hirzebruch L–polynomial in the Pontrjagin forms of X and $\mathrm{Sign}(X)$ is the signature of the intersection form on $H^*_!(X; \mathbf{R})$. It follows from the Novikov additivity of the signature that the right hand side of (0.4) is independent of the manifold X that bounds Y. One of the main results of [APS1] shows that $\delta(Y)$ has an intrinsic definition: it equals the eta invariant of some particular elliptic operator A on Y. Namely, let $\Lambda^{ev}(Y)$ be the even part of the differential forms on Y and let $A : \Lambda^{ev}(Y) \to \Lambda^{ev}(Y)$ be defined by

$$A\phi = (-1)^{k+p+1}(*d - d*)\phi, \quad \phi \in \Lambda^{2p}(Y).$$

Then A is essentially selfadjoint with respect to the canonical inner product in $\Lambda^{ev}(Y)$. Let $\eta_Y(0)$ denote the eta invariant associated to A. Then $\delta(Y) = -\eta_Y(0)$ and the generalization of the Hirzebruch signature theorem (0.2) to manifolds with boundary, proved by Atiyah, Patodi and Singer in [APS1], can be stated as follows

$$\mathrm{Sign}(X) = \int_X L(p_1, ..., p_k) \; - \; \eta_Y(0). \tag{0.5}$$

The conjecture of Hirzebruch was proved independently by Atiyah, Donnely and Singer [ADS] and the author [Mü2], [Mü3].

0.4 In the same way as (0.1) is a consequence of the Atiyah–Singer index theorem, (0.5) is a consequence of an index theorem for first order elliptic operators

on manifolds with boundary [APS1]. The boundary conditions used by Atiyah, Patodi and Singer are nonlocal and defined by the positive spectral projection of the tangential part of the first order operator. Instead of the spectral boundary conditions one may work with L^2 conditions on manifolds obtain by enlarging X in various ways. Cheeger [C1] was the first to study L^2–index problems on noncompact manifolds. He considered manifolds with isolated metrically conical singularities and derived the signature theorem in this context.

0.5. After the invention of the eta invariant by Atiyah, Patodi and Singer, many interesting relations of the eta invariant with other fields of mathematics have been discovered. As examples, we mention special values of certain L–series, the holonomy of determinant line bundles of families of Dirac operators, L^2-index theorems on noncompact manifolds and Witten's 3–manifold invariants.

1. THE ATIYAH–PATODI–SINGER INDEX THEOREM

1.1. Let X be a compact Riemannian manifold with C^∞ boundary Y, and suppose that on a collar neighborhood $I \times Y \subset X$ of Y, the metric equals the product metric $du^2 + g_Y$. Let E, F be Hermitian vector bundles over X and let $D : C^\infty(X, E) \to C^\infty(X, F)$ be a first order elliptic differential operator. Furthermore, suppose that on $I \times Y$, D takes the form

$$D = \gamma\Big(\frac{\partial}{\partial u} + A\Big) \tag{1.1}$$

where u is the inward normal coordinate, $\gamma : E|Y \to E|Y$ is a bundle isomorphism and $A : C^\infty(Y, E|Y) \to C^\infty(Y, E|Y)$ is an elliptic operator which is symmetric with respect to the inner product defined by the Hermitian metric of E and the metric of Y. Then A has discrete spectrum consisting of real eigenvalues λ of finite multiplicity. Let P_+ denote the orthogonal projection of $L^2(Y, E|Y)$ onto the subspace spanned by all eigenfunctions with eigenvalues $\lambda \geq 0$. Then P_+ is a pseudo-differential operator. Let $C^\infty(X, E; P_+)$ be the subspace of $C^\infty(X, E)$ consisting of all sections φ which satisfy the boundary conditions

$$P_+(\varphi|Y) = 0. \tag{1.2}$$

Then the main result of [APS1] is

THEOREM 1.1. (Atiyah-Patodi-Singer) *Let $D_{P_+} : C^\infty(X, E; P_+) \to C^\infty(X, F)$ be the restriction of D. Then D_{P_+} is a Fredholm operator and its index is given by*

$$\operatorname{Ind} D_{P_+} = \int_X \omega_D(x)\, dx \; - \; \frac{1}{2}\big(\eta_A(0) + \dim \operatorname{Ker} A\big), \tag{1.3}$$

where $\omega_D(x)dx$ is the local index density for D and $\eta_A(s)$ is the eta function (0.1).

Note that $\omega_D(x)$ is the constant term in the local asymptotic expansion of

$$\operatorname{tr}\big(e^{-tD^*D}(x,x)\big) \; - \; \operatorname{tr}\big(e^{-tDD^*}(x,x)\big)$$

as $t \to 0$. For A as above, the regularity of $\eta_A(s)$ at $s = 0$ follows from the proof of the index formula.

1.2. Now suppose that $\dim X = 4k$. Let $\tau : \Lambda^*(X) \to \Lambda^*(X)$ be defined by $\tau\varphi = i^{p(p-1)+2k} * \varphi$ for $\varphi \in \Lambda^p(X)$. Then τ is an involution and $d + d^*$ anti-commutes with τ. Let $\Lambda^*_\pm(X)$ denote the ± 1–eigenspaces of τ. Then $d + d^*$ interchanges $\Lambda^*_+(X)$ and $\Lambda^*_-(X)$, and hence defines by restriction an operator

$$D_S : \Lambda^*_+(X) \to \Lambda^*_-(X) \tag{1.4}$$

which is called the *signature operator*. The signature operator satisfies (1.1) with $A : \Lambda^*(Y) \to \Lambda^*(Y)$ being the operator given by

$$A\phi = (-1)^{k+p+1}(\varepsilon * d - d*)\phi, \tag{1.5}$$

where ϕ is either in $\Lambda^{2p}(Y)$ and $\varepsilon = 1$ or ϕ belongs to $\Lambda^{2p-1}(Y)$ and $\varepsilon = -1$. One may now apply (1.3) to compute the index of D_S with boundary conditions (1.2). On the other hand, the index of D_S is closely related to the signature of X. This implies the signature formula (0.5).

1.3. The Atiyah-Patodi-Singer index theorem and, in particular, the signature theorem (0.5) can be derived in different ways as L^2–index theorem for elliptic operators on noncompact manifolds. Let $\hat{X} = X \cup \big((-\infty, 0] \times Y\big)$ be the complete manifold obtained from X by gluing the negative half–cylinder $(-\infty, 0] \times Y$ to the boundary of X. Using (1.1), we may extend the vector bundles E, F and the

differential operator D to $\hat{X}$ in the obvious way. Let $\hat{D} : C^\infty(\hat{X}, \hat{E}) \to C^\infty(\hat{X}, \hat{F})$ be the extended operator. Then $\hat{D}$ restricted to $(-\infty, 0] \times Y$ is given by (1.1). It was proved in [APS1], Proposition 3.11, that $\mathrm{Ker} D_{P_+}$ is isomorphic to the space of L^2–solutions of $\hat{D}\varphi = 0$ on $\hat{X}$ and $\mathrm{Ker} D^*_{P_+}$ is isomorphic to the space of extended L^2–solutions of $\hat{D}^*\varphi = 0$ on $\hat{X}$, where extended solution means that on $(-\infty, 0] \times Y$, φ can be written as

$$\varphi = \phi + \psi$$

with $\phi \in \mathrm{Ker}\, A$ and $\psi \in L^2$. The section ϕ is called the limiting value of the extended solution φ. Let $L(F) \subset \mathrm{Ker}\, A$ be the subspace consisting of all limiting values of $\hat{D}^*$ on $\hat{X}$. By the remark above, it follows especially that $\hat{D}$ has a well-defined L^2–index given by

$$L^2\,\mathrm{Ind}\,\hat{D} = \dim\big(\mathrm{Ker}\,\hat{D} \cap L^2(E)\big) \;-\; \dim\big(\mathrm{Ker}\,\hat{D}^* \cap L^2(F)\big) \tag{1.5}$$

and the two indeces are related by the formula

$$\mathrm{Ind}\, D_{P_+} = L^2\,\mathrm{Ind}\,\hat{D} \;-\; h_\infty(F), \tag{1.6}$$

where $h_\infty(F) = \dim L(F)$. Thus the nonlocal boundary conditions on X can be replaced by L^2 conditions on $\hat{X}$. The space $L(F)$ of limiting values has a different interpretation in terms of generalized eigenfunctions of $\Delta = \hat{D}\hat{D}^*$ [Mü6]. Namely, let $\Delta_0 = -\partial/\partial u^2 + A^2$, regarded as operator in $C^\infty((-\infty, 0] \times Y, \hat{F})$. If we impose Dirichlet boundary conditions, we get a selfadjoint extension $\overline{\Delta}_0$. Let $\overline{\Delta}$ be the closure of Δ in L^2. Then $\exp(-t\overline{\Delta}) - \exp(-t\overline{\Delta}_0)$ is trace class for $t > 0$. Let $J : L^2((-\infty, 0] \times Y, \hat{F}) \subset L^2(\hat{X}, \hat{F})$ be the inclusion. Then the wave operators

$$W_\pm(\overline{\Delta}, \overline{\Delta}_0) = \lim_{t \to \pm\infty} e^{it\overline{\Delta}} J e^{-it\overline{\Delta}_0}$$

exist and are complete. Hence, the scattering operator S, associated to $(\overline{\Delta}, \overline{\Delta}_0)$, and the corresponding scattering matrix $S(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, exist [K1]. Suppose that $\mu_1 > 0$ is the smallest positive eigenvalue of A^2. Then, for $|\lambda| < \mu_1$, $S(\lambda)$ is a linear operator in $\mathrm{Ker}\, A$ which satisfies the functional equation $S(\lambda)S(-\lambda) = \mathrm{Id}$. In particular, for $\lambda = 0$ we get an involution

$$S(0) : \mathrm{Ker}\, A \to \mathrm{Ker}\, A, \quad S(0)^2 = \mathrm{Id}. \tag{1.7}$$

Using generalized eigenfunctions, it follows that

$$L(F) = \big(\mathrm{Id} - S(0)\big)\mathrm{Ker}\, A,$$

i.e., the $+1$–eigenspace of $S(0)$ coincides with the space $L(F)$ of limiting values. Thus, by Theorem 1.1, we obtain the following L^2 index theorem

THEOREM 1.2. *Let the notation be as above. Then*

$$L^2\,\mathrm{Ind}\,\hat{D} = \int_X \omega_D(x)\,dx \;-\; \frac{1}{2}\eta_A(0) \;-\; \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(S(0)\big). \tag{1.8}$$

On the other hand, Theorem 1.2 can be proved directly without referring to Theorem 1.1. For example, one may use the relative index theorem of [BMS] as applied in [Mü3] in a more general setting. Another method is based on Callia's formula (cf. [St2]). In view of (1.5), this reproduces then Theorem 1.1. Melrose [Me] has studied the case of asymptotically cylindrical metrics and derived the Atiyah–Patodi–Singer index theorem within this setting.

1.4 A different approach was used by Cheeger [C1], [C2]. In fact, he was the first to study L^2 index problems on noncompact manifolds. Cheeger considered manifolds with isolated conical singularities. Let X be a compact manifold with C^∞ boundary Y and let

$$C(Y) = (0,1) \times Y, \quad ds^2 = du^2 + u^2 g_Y,$$

be the metrical cone over Y. Let $M = X \cup C(Y)$ be the manifold obtain by gluing the bottom of the cone $C(Y)$ to the boundary of X and equip M with a Riemannian metric which coincides with the given metric on $C(Y)$. This is a manifold with an isolated metrically conical singularity. The noncompact Riemannian manifold M is not complete. Therefore the Laplacian Δ on forms $\Lambda^*(M)$ may have different closed extensions. In this case, *ideal boundary conditions* must be introduced. This leads to a selfadjoint operator with pure discrete spectrum consisting of eigenvalues of finite multiplicity. The space of L^2 harmonic forms $\mathcal{H}^*_{(2)}(M)$ is naturally isomorphic to the middle intersection cohomology $IH^*(\overline{M})$ of the one point compactification $\overline{M} = M \cup \{p\}$ where p is the cone tip. Let $D_S : \Lambda^*_+(M) \to \Lambda^*_-(M)$ be the signature operator. Then the observation above implies that

$$\mathrm{Sign}(X) = \mathrm{Sign}(M) = L^2\,\mathrm{Ind}\, D_S,$$

and application of the heat equation method gives the signature formula (0.5) (cf. [C2], §6). This approach was extended by Bismut and Cheeger [BC1] to the case of Dirac operators on manifolds with conical singularities. In this way Theorem 1.1 is reproduced from analysis on such spaces.

1.5. One may also consider other warped product metrics on $\mathbf{R}^+ \times Y$. This means that we consider $\mathbf{R}^+ \times Y$ equipped with a metric of the form $du^2 + f^2(u)g_Y$, where $f \in C^\infty(\mathbf{R}^+)$ is an appropriate warping factor. Call this Riemannian manifold $C_f(Y)$. Let $M = X \cup C_f(Y)$ and equip M with a metric which agrees on $C_f(Y)$ with the given metric. For example, we may pick $f(u) = e^{-u}$. Then M becomes a manifold with a cusp studied in [Mü1]. For other examples see [Br1], [Br2], [St1]. In all cases, the signature theorem (0.5) and, more generally, Theorem 1.1 can be recovered from appropriate L^2 index formulas for first order elliptic operators.

2. ETA INVARIANTS FOR MANIFOLDS WITH BOUNDARY

2.1. Let $M = X \cup_Y C(Y)$ be a manifold with an isolated conical singularity of dimension $4k-1$. Consider the Laplacian Δ_{2k-1} on $2k-1$–forms. If $H^{2k-1}(Y;\mathbf{R}) \neq 0$ one must introduce $*$–invariant ideal boundary conditions (cf. [C2]) to get a self-adjoint extension which we also denote by Δ_{2k-1}. This operator has pure point spectrum and the heat operator is trace class. The eta function can then be defined by

$$\eta_M(s) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \int_0^\infty t^{(s-1)/2} \mathrm{Tr}(*de^{-t\Delta_{2k-1}^2})\, dt, \quad \mathrm{Re}(s) > 4k-1.$$

Cheeger [C2] has proved that $\eta_M(s)$ has a meromorphic continuation to $\mathbf{C}$ which is holomorphic at $s = 0$. Therefore, the eta invariant $\eta(M)$ of M can be defined as $\eta_M(0)$. As stressed by Cheeger [C2], p.612, this may be regarded as a definition for the eta invariant of the manifold with boundary X. In place of a manifold with isolated conical singularities one may consider more general pseudomanifolds and define eta invariants for such spaces in the same way.

2.2. Using eta invariants for piecewise flat manifolds, Cheeger obtained combinatorial formulas for the Pontrjagin classes. For example, let X be a closed oriented $4k$–dimensional Riemannian pseudomanifold with a piecewise flat metric. Then

the signature of X is given by

$$\mathrm{Sign}(X) = \sum_{\sigma^0} \eta(L(\sigma^0)),$$

where the sum runs over the vertices of X and $L(\sigma^0)$ denotes the link of the vertex σ^0 [C2].

2.3. Another way to define eta invariants for manifolds with boundary is to use the spectral boundary conditions of Atiyah, Patodi and Singer (cf. [DW]). Let X, Y and E be as in section 1.1 and let $D : C^\infty(X, E) \to C^\infty(X, E)$ be an elliptic first order operator which is formally selfadjoint with respect to the Hermitian metric in E. Suppose that near the boundary, D takes the form (1.1). This means that

$$\gamma^2 = -\mathrm{Id}, \quad A\gamma = -\gamma A \quad \text{and} \quad A = A^*. \tag{2.1}$$

Let P_+ be the positive spectral projection with respect to A. By (2.1), γ induces a map $\gamma : \mathrm{Ker}\, A \to \mathrm{Ker}\, A$. Therefore, $\mathrm{Ker}\, A$ has a natural symplectic structure defined by $\Phi(x, y) = \langle x, y\rangle$, $x, y \in \mathrm{Ker}\, A$, where $\langle x, y\rangle$ denotes the L^2 inner product. If $\mathrm{Ker}\, A \neq 0$, let $L \subset \mathrm{Ker}\, A$ be a Lagrangian subspace, that is, L satisfies $L \oplus \gamma L = \mathrm{Ker}\, A$ and $\Phi(L, L) = 0$. Let P_L be the orthogonal projection onto L. Put

$$\Pi_L = P_+ + P_L.$$

Then we introduce boundary conditions for D by setting $\Pi_L(\phi|Y) = 0$ for smooth sections ϕ of E. This gives rise to a selfadjoint extension D_L. It has pure discrete spectrum consisting of real eigenvalues of finite multiplicity. The eta function of D_L can then be defined by the same formula (0.1) and it follows that $\eta_{D_L}(s)$ is a meromorphic function on $\mathbf{C}$ [DW], [Mü5]. For Dirac type operators, the eta function is regular at $s = 0$ and the eta invariant of D_L can therefore be defined as $\eta_{D_L}(0)$. It this clear that such eta invariants should be related to index formulas for Dirac type operators on manifolds with corners.

3. THE HIRZEBRUCH CONJECTURE

3.1. As explained in the introduction, one of the main motivations for Atiyah, Patodi and Singer to prove the signature theorem (0.5) for manifolds with smooth boundary was a conjecture by Hirzebruch concerning the equality of the topological signature defect of a cusp singularity of a Hilbert modular variety and the value at zero of a certain Hecke L–function attached to the cusp.

Let F be a totally real number field of degree n and let $\mathcal{O}_F$ be the ring of integers of F. Then $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}_F)$ is called *Hilbert modular group.* It can be identified with a discrete subgroup Γ_0 of $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})^n$. In particular, $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}_F)$ acts properly discontinuously on the product H^n of n copies of the upper half–plane. If $x \in F \mapsto x^{(i)} \in \mathbf{R}$, $i = 1,...,n$, denote the n different embeddings of F into $\mathbf{R}$, then the action of $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathcal{O}_F)$ on $(z_1,...,z_n) \in H^n$ is given by

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}(z_1,...,z_n) = \left(\frac{\alpha^{(1)}z_1+\beta^{(1)}}{\gamma^{(1)}z_1+\delta^{(1)}},...,\frac{\alpha^{(n)}z_n+\beta^{(n)}}{\gamma^{(n)}z_n+\delta^{(n)}}\right).$$

The quotient $\Gamma_0\backslash H^n$ of H^n by this action of Γ_0 is called a Hilbert modular variety. The group Γ_0 may have isolated fixed points which give rise to quotient singularities. To avoid this problem, we may pass to a torsion free normal subgroup $\Gamma \subset \Gamma_0$ of finite index. In fact, we may take Γ to be a congruence subgroup. Then $\Gamma\backslash H^n$ is a complex manifold which is noncompact. It can be compactified as analytic space by adding a finite number of points called "cusps". Each cusp is a singular point of $\overline{\Gamma\backslash H^n}$. The manifold has a finite number of ends Z_i, $i = 1,...,m$, which are in one-to-one correspondence with the cusps p_i. Each end Z_i is diffeomorphic to a half–cylinder $[1,\infty) \times Y_i$ and Y_i is a fibre bundle

$$T^n \to Y_i \xrightarrow{\pi} T^{n-1}, \tag{3.1}$$

where T^m denotes a torus of dimension m. The torus bundle (3.1) can be described explicitly in terms of the number field F [Hi2]. There is an abelian subgroup $\mathbf{M}_i$ of F of rank n and a group of totally positive units $\mathbf{V}_i$ acting on $\mathbf{M}_i$ such that $(\mathbf{M}_i,\mathbf{V}_i)$ determines the stabilizer Γ_i of the cusp p_i in Γ (cf. [Hi2]). If $(\mathbf{M},\mathbf{V})$ is any pair as above, then the L–function attached to $(\mathbf{M},\mathbf{V})$ is defined as

$$L(s,\mathbf{M},\mathbf{V}) = \sum_{\mu\in(\mathbf{M}-0)/\mathbf{V}} \frac{\operatorname{sign} N(\mu)}{|N(\mu)|^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1, \tag{3.2}$$

where $N(\mu) = \mu^{(1)} \cdots \mu^{(n)}$ denotes the norm of $\mu \in \mathbf{M}$. The series (3.2) has an analytic extension to the whole complex plane. There is some similarity with the eta–function (0.1).

3.2. The conjecture of Hirzebruch [Hi2] can now be stated as follows: Let p be a cusp singularity of $\overline{\Gamma\backslash H^n}$ and let $(\mathbf{M}, \mathbf{V})$ be the datas attached to p as above. Then the following equality holds

$$\delta(p) = L(0, \mathbf{M}^*, \mathbf{V}), \tag{3.3}$$

where $\mathbf{M}^*$ is the lattice dual to $\mathbf{M}$ and $\delta(p)$ is the signature defect of p which is defined analogously to (0.3).

The proof of Hirzebruch's conjecture given in [ADS] proceeds in two steps. Using Fourier analysis along the fibres of the torus bundle $Y \xrightarrow{\pi} T^{n-1}$, Atiyah, Donnelly and Singer identify the eta invariant $\eta_Y(0)$ attached to the operator (1.5) and $L(0, \mathbf{M}, \mathbf{V})$. The second step is to prove that $\eta_Y(0)$ equals the signature defect $\delta(p)$. This approach is closely related to the computation of the adiabatic limit of the eta invariant $\eta_Y(0)$ if the metric of Y is shrinked along the fibres. We shall explain this connection in more detail in §4.

3.3. The proof of Hirzebruch's conjecture given in [Mü2], [Mü3] is based on an L^2 index theorem for the signature operator $D_S : \Lambda^*_+(\Gamma\backslash H^n) \to \Lambda^*_-(\Gamma\backslash H^n)$. The L^2 index of D_S is defined in the same way as in (1.5). Using the Selberg trace formula, the following theorem was proved in [Mü2]:

THEOREM 3.1. *Let $n = 2k$ and suppose that $L(s, \mathbf{M}_i, \mathbf{V}_i)$, $i = 1, ..., m$, are the L–series attached to the cusp singularities of $\Gamma\backslash H^n$ as above. Then*

$$L^2 \operatorname{Ind} D_S = \int_{\Gamma\backslash H^n} L(p_1, ..., p_k) + \sum_{i=1}^{m} L(0, \mathbf{M}_i^*, \mathbf{V}_i).$$

Using Hirzebruch's proportionality theorem, it follows that $L(p_1, ..., p_k) \equiv 0$ in the present case. Let $\mathcal{H}^*_{(2)}(\Gamma\backslash H^n)$ be the space of L^2 harmonic forms of $\Gamma\backslash H^n$ and let $\mathcal{H}^{2k}_{(2),\pm}(\Gamma\backslash H^n)$ be the ± 1–eigenspaces of the involution $\tau = (-1)^k *$. Then

$$L^2 \operatorname{Ind} D_S = \dim \mathcal{H}^{2k}_{(2),+}(\Gamma\backslash H^n) - \dim \mathcal{H}^{2k}_{(2),-}(\Gamma\backslash H^n).$$

On the other hand, $\mathcal{H}^*_{(2)}(\Gamma\backslash H^n)$ is isomorphic to the middle intersection cohomology $IH^*(\overline{\Gamma\backslash H^n})$ of the compactification $\overline{\Gamma\backslash H^n}$. This implies that

$$L^2 \operatorname{Ind} D_S = \operatorname{Sign}(\Gamma\backslash H^n)$$

and we get the following signature formula

$$\operatorname{Sign}(\Gamma\backslash H^n) = \sum_{i=1}^{m} L(0, \mathbf{M}_i^*, \mathbf{V}_i). \tag{3.4}$$

For a Hilbert modular variety with a single cusp, this gives a proof of (3.3). In general, one has to isolate cusps using more general manifolds with cusps of Hilbert modular type [Mü3]. As a consequence one gets $\eta_Y(0) = L(0, \mathbf{M}^*, \mathbf{V})$ for all Hilbert modular cusps.

3.4. Satake [Sa] (see also [SO]) has considered generalizations of Hirzebruch's conjecture to cusps of other $\mathbf{Q}$–rank one locally symmetric spaces. This case can also be treated by the method described above [Mü4]. Ogata has proved some of the generalizations by different methods [Og].

3.5. Instead of the signature operator one may consider other geometric operators on $\Gamma\backslash H^n$ and compute their L^2 index. For example, this applies to the Dolbeault operator. Using the corresponding index formula, one obtains formulas for the dimension of the space $\mathcal{H}^{p,q}_{(2)}(\Gamma\backslash H^n)$ of L^2 harmonic forms of type (p,q). This generalizes results of Shimizu [Sh]. In these cases, special values of L–functions also occur as contributions of the cusps.

4. ADIABATIC LIMITS OF ETA INVARIANTS

4.1. The computation of the eta invariant for torus bundles of the form (3.1) and the identification of this eta invariant with the value at $s = 0$ of some L–series is closely related the study of "adiabatic limits" of eta invariants [BF2], [C3]. These investigations were initiated by a formula, derived by Witten [W1], [W2], for the eta invariant of a mapping torus $Z \to M \xrightarrow{\pi} S^1$ associated to a diffeomorphism $\psi : Z \to Z$. The formula of Witten is connected with the study of

global anomalies in general relativity. The word adiabatic refers to the so called adiabatic approximation used by Witten to solve the Dirac equation. This method is applied frequently in quantum mechanics, but is not rigorous.

4.2. We shall now describe the results of [BF2]. Let $Z \to M \xrightarrow{\pi} B$ be a fibration of compact manifolds with compact connected fibre Z of even dimension $n = 2l$. Suppose that g, g_B are Riemannian metrics on M, B respectively. Then π is called a Riemannian submersion, if

$$g = \pi^* g_B + g_Z, \tag{4.1}$$

where g_Z vanishes on the normal space of the fibres.

Let $TZ \subset TM$ be the subbundle consisting of all vectors tangent to the fibres. Suppose that TZ is oriented and has a spin structure. Let $F = F^+ \oplus F^-$ be the associated spinor bundle on M. Let E be a Hermitian bundle on M, equipped with a unitary connection ∇^E. For each $b \in B$, we get a twisted Dirac operator $D_b = D_b^+ \oplus D_b^-$ along the fibre $Z_b = \pi^{-1}(b)$ where

$$D_b^{\pm} : C^\infty(Z_b, F^{\pm} \otimes E) \to C^\infty(Z_b, F^{\mp} \otimes E).$$

This defines a family $\mathcal{D} = \{D_b\}_{b \in B}$ of twisted Dirac operators. Associated to the family $\mathcal{D}$ is the determinant line bundle λ over B whose fibre λ_b at $b \in B$ is canonically isomorphic to

$$\lambda_b \cong (\det \operatorname{Ker} D_b^+)^* \otimes \det(\operatorname{Ker} D_b^-).$$

Recall that the determinant of a finite–dimensional vector space is by definition the top exterior power of this vector space. Generalizing a construction by Quillen [Q], the line bundle λ can be equipped with a canonical metric, called Quillen metric, and a unitary connection ${}^1\nabla$. The curvature of this connection is the degree 2 term of the following differential form on B:

$$2\pi i \int_Z \hat{A}\Big(\frac{R^Z}{2\pi}\Big) \operatorname{Tr}\Big[\exp\Big(-\frac{L}{2\pi i}\Big)\Big],$$

where R^Z is the curvature tensor of the connection on TZ which is canonically induced by the Levi-Civita connection of TM and L is the curvature tensor of E.

The integral over Z denotes integration along fibres [BF2]. Witten's formula for global anomalies is related to the computation of the holonomy τ of the determinant line bundle λ over a closed loop c in B. Witten showed that in certain cases the holonomy of the loop c could be calculated using the eta invariant of a Dirac operator on $N = \pi^{-1}(c)$. After changing the parametrization of c and rescaling the metric of B, one can assume that c is isometric to S^1. Thus $N \xrightarrow{\pi} S^1$ is a Riemannian submersion and the metric of N takes the form

$$g = \pi^*(du^2) + g_Z.$$

Let $\varepsilon \neq 0$ and put

$$g_\varepsilon = \varepsilon^{-2}\pi^*(du^2) + g_Z. \tag{4.2}$$

Let D_ε be the twisted Dirac operator on N associated with the metric g_ε. Let $\eta^\varepsilon(0)$ be the eta invariant of D_ε. Put

$$\overline{\eta}^\varepsilon = \frac{1}{2}(\eta^\varepsilon(0) + \dim \operatorname{Ker} D_\varepsilon)$$

and let $[\overline{\eta}^\varepsilon]$ be the reduction mod $\mathbf{Z}$. Then we have the following holonomy theorem of Bismut and Fried:

THEOREM 4.1. ([BF2]) *As $\varepsilon \downarrow 0$, $[\overline{\eta}^\varepsilon]$ has a limit $[\overline{\eta}]$ in $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ and the holonomy τ of λ over the loop c for the connection ${}^1\nabla$ is given by*

$$\tau = (-1)^{\operatorname{Ind} D^+} \exp(-2\pi i[\overline{\eta}]).$$

The proof is based on the superconnection formalism.

4.3. Another proof of the holonomy theorem was given by Cheeger for the case of the signature operator [C3]. Let N be a closed oriented Riemannian manifold of dimension $4k-1$ and let $Z \to N \xrightarrow{\pi} S^1$ be a Riemannian submersion. Let $\tilde{d}_u, *_u$ denote exterior differentiation and the Hodge $*$–operator, on the fibre $Z_u = \pi^{-1}(u)$. Put

$$\beta_u = \begin{cases} (-1)^p \tilde{*}_u, & \Lambda^{2p}(Z_u); \\ \tilde{*}_u, & \Lambda^{2p-1}(Z_u); \end{cases}$$

and

$$\mathcal{A}(u) = \begin{cases} (-1)^{p+1}(\tilde{d}_u\beta_u + \beta_u\tilde{d}_u), & \Lambda^{2p}(Z_u); \\ \tilde{d}_u\beta_u - \beta_u\tilde{d}_u, & \Lambda^{2p-1}(Z_u). \end{cases}$$

Then $\mathcal{A}(u)$ is selfadjoint, elliptic, and the following relations hold

$$\beta_u^2 = -1, \quad \mathcal{A}(u)\beta_u = -\beta_u\mathcal{A}(u).$$

As above, let $A : \Lambda^{ev}(N) \to \Lambda^{ev}(N)$ be defined by

$$A = d* + (-1)^p * d \quad \text{on } \Lambda^{2p}(N). \tag{4.3}$$

Let u be the arc length on S^1 and let $U \subset S^1$ be an interval. Then, over $\pi^{-1}(U) \subset N$ a differential form $\psi \in \Lambda^{2p}(N)$ can be written as $\psi = \phi + du \wedge \omega$. Thus

$$\Lambda^{2p}(\pi^{-1}(U)) \cong \Lambda^{2p}(Z) \oplus \Lambda^{2p-1}(Z)$$

and, with respect to this identification, we have

$$A = \begin{pmatrix} \beta_u\partial_u & \mathcal{A}(u) \\ \mathcal{A}(u) & \partial_u\beta_u \end{pmatrix}.$$

Now let $\varepsilon \neq 0$, and consider the metric g_ε on N defined by (4.1). Let A_ε be the operator (4.3) with respect to g_ε. Let $\eta(N, g_\varepsilon) = \eta_{A_\varepsilon}(0)$ be the eta invariant of (N, g_ε).

THEOREM 4.2. ([C3]) *Suppose that* $\operatorname{Ker}\mathcal{A}(u) = 0$ *for all* $u \in S^1$. *Then*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\eta(N, g_\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\int_{S^1}\lim_{t\to 0}\operatorname{Tr}\Big(\frac{\beta}{2}\mathcal{A}(u)^{-1}\dot{\mathcal{A}}(u)e^{-t\mathcal{A}(u)^2}\Big). \tag{4.4}$$

We remark that $\operatorname{Tr}\Big(\frac{\beta}{2}\mathcal{A}(u)^{-1}\dot{\mathcal{A}}(u)e^{-t\mathcal{A}(u)^2}\Big)$ equals i times the imaginary part of the connection form of λ.

If $\mathcal{A}(u)$ is not invertible for all $u \in S^1$, the theorem can be modified by deforming the family $\mathcal{A}(u)$ to a family $\mathcal{A}_1(u)$ which is invertible for all $u \in S^1$. The adiabatic limit of the eta invariants is then expressed by the same formula with $\mathcal{A}(u)$ replaced by $\mathcal{A}_1(u)$, except that equality holds only mod $\mathbf{Z}$.

4.4. In particular, (4.4) may be applied to the case of a 2–torus bundle over the circle, $T^2 \to N \xrightarrow{\pi} S^1$. Such bundles occur as the boundary of a neighborhood of a

cusp singularity in a Hilbert modular surface. The holonomy of the 2–torus bundle $N \xrightarrow{\pi} S^1$ is given by a hyperbolic matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}), \quad |a+d| > 2.$$

The matrix B defines an isomorphism of the standard torus $T^2 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ and $N = ([0,1] \times T^2)/\sim$ where $(0,x) \sim (1, B(x))$, $x \in T^2$. As a linear fractional transformation of the upper half–plane, B has two real fixed points $w > w'$ given by

$$w = \frac{1}{2c}(a - d + \sqrt{(a+d)^2 - 4}), \quad w' = \frac{1}{2c}(a - d - \sqrt{(a+d)^2 - 4}).$$

Let

$$\mathbf{M} = \mathbf{Z}w \oplus \mathbf{Z}.$$

Then $\mathbf{M}$ is an abelian subgroup of rank two in the real quadratic field $F = \mathbf{Q}(\sqrt{D})$, $D = \sqrt{(a+d)^2 - 4}$. Let $\varepsilon > 1 > \varepsilon' > 0$ be the eigenvalues of B and set

$$\mathbf{V} = \{\varepsilon^n \mid n \in \mathbf{Z}\}.$$

Then $\mathbf{V}$ is the group of totally positive units in the ring of integers $\mathcal{O}_F$ which satisfy $\varepsilon\mathbf{M} = \mathbf{M}$. Let σ be the semi–circle in the upper half–plane with endpoints w, w' and let γ be the arc on σ which connects $z_0 = (w + iw')/(1+i)$ and $B(z_0)$. Furthermore, let

$$E(z,s) = \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2 - 0} \frac{y^s}{|mz+n|^{2s}}.$$

Then Theorem 4.2, applied to the torus bundle $N \xrightarrow{\pi} S^1$, gives the following formula

$$4\pi i \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \int_\gamma \frac{\partial}{\partial z} E(z,s)\, dz = L(0, \mathbf{M}^*, \mathbf{V})$$

(cf. [Mü4] for more details). This is a formula which was first proved by Hecke [He, p.415].

4.5. The case of a fibration $M \xrightarrow{\pi} B$ with arbitrary compact base B was treated by Bismut and Cheeger in [BC1]. Let $Z \to M \xrightarrow{\pi} B$ be a fibration of closed oriented manifolds with even–dimensional fibres and odd–dimensional base B. Assume that

$M \xrightarrow{\pi} B$ is a Riemannian submersion. Then the metric g of M satisfies (4.1). Let E be a Hermitian vector bundle over M with unitary connection ∇^E and curvature L^E. Let R^B be the curvature of B and let $\hat{A}(R^B/(2\pi))$ be the differential form representing the $\hat{A}$–genus of B, which is defined by Chern–Weil theory.

Let D^Z be the Dirac operator along fibres with coefficients in E. This means that D^Z acts fibrewise and its restriction to $Z_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in B$, is the Dirac operator on Z_b twisted by $E|Z_b$.

To state the main result of [BC1], one has to introduce the Levi–Civita superconnection. Let $F = F^+ \oplus F^-$ be the spinor bundle associated to the vertical tangent bundle $TZ \subset TM$ and g_Z. Let H^∞, $H^\infty_\pm$ denote the space of C^∞ sections of $F \otimes E$, $F^\pm \otimes E$ respectively. Then H^∞ and $H^\infty_\pm$ may be regarded as spaces of C^∞ sections of infinite–dimensional bundles $\mathbf{H}^\infty$ and $\mathbf{H}^\infty_\pm$ over B where the fibres $\mathbf{H}^\infty_b$, $\mathbf{H}^\infty_{\pm,b}$ over $b \in B$ are the C^∞ sections of $F \otimes E$, $F^\pm \otimes E$ over Z_b. The fibre $\mathbf{H}^\infty_b$ has a natural Hermitian inner product given by

$$\langle h, h' \rangle = \int_{Z_b} \langle h(x), h'(x) \rangle \, dx$$

and the connection ∇ on $F \otimes E$ induces a connection $\tilde{\nabla}$ on $\mathbf{H}^\infty$ by the prescription

$$\tilde{\nabla}_Y h = \nabla_{\tilde{Y}} h, \quad Y \in T_b B,$$

where $\tilde{Y}$ is the horizontal lift of Y. This connection does, in general, not preserve the Hermitian structure, but an elementary modification gives a unitary connection $\tilde{\nabla}^u$. Furthermore, let T be the torsion of the connection $\pi^*(\nabla^B) \oplus \nabla^Z$. The tensor determines a 2–form $c(T) \in \Lambda^2(T^*B) \otimes \mathrm{End}(TZ)$ which assigns to $U, V \in T^*_b B$ the Clifford multiplication by $T(\tilde{U}, \tilde{V}) = -p^{TZ}([\tilde{U}, \tilde{V}])$, $\tilde{U}, \tilde{V}$ being horizontal lifts. Then the Levi–Civita superconnection on $\mathbf{H}^\infty$ attached to the datas $(T^H M, \frac{1}{t} D^Z, \nabla^E)$ is defined as

$$A_t = \tilde{\nabla}^u + t^{1/2} D^Z - c(T)/(4t^{1/2}).$$

The curvature A_t^2 is a second–order elliptic differential operator acting fibrewise. It may be regarded as element in $\mathrm{End}(\mathbf{H}^\infty) \hat{\otimes} \Lambda^*(T^*B)$. Moreover, the fibrewise trace of $(D^Z + c(T)/(4t)) e^{-A_t^2}$ exists. Let Tr_s denote the fibrewise supertrace. Then the $\hat{\eta}$–form is defined as

$$\hat{\eta} = \int_0^\infty \mathrm{Tr}_s\big((D^Z + c(T)/(4t)) e^{-A_t^2}\big) \frac{dt}{2t^{1/2}}.$$

The convergence of this integral is proved in [BC1]. Note that $\hat{\eta}$ is an odd form on B which, by definition, depends only on global information along the fibres, on the metric g_Z, the connection ∇^E and on the splitting of TM into its horizontal and vertical subbundles. Moreover, one has

$$d\hat{\eta} = \frac{1}{(2\pi i)^l} \int_Z \hat{A}(iR^Z) \operatorname{tr}\big(\exp(-L^E)\big),$$

where $l = \frac{1}{2} \dim Z$ and R^Z is the curvature of the horizontal subbundle $TZ \subset TM$.

For $\varepsilon > 0$, let

$$D_\varepsilon : C^\infty(M, S \otimes E) \to C^\infty(M, S \otimes E)$$

be the twisted Dirac operator for the metric

$$g_\varepsilon = \varepsilon^{-1} \pi^*(g_B) + g_Z$$

on M. Let

$$\overline{\eta}(D_\varepsilon) = \frac{1}{2}\big(\dim \operatorname{Ker} D_\varepsilon + \eta_{D_\varepsilon}(0)\big)$$

be the reduced eta invariant. Then one has

THEOREM 4.3. ([BC1]) *As $\varepsilon \downarrow 0$, $\overline{\eta}(D_\varepsilon)$ has a limit in $\mathbf{R}$, which is given by*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\eta}(D_\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_B \hat{A}(iR^B)\hat{\eta}$$

where $k = (1 + \dim B)/2$.

There are modifications of this result for $\dim B$ even and for the case where D^Z is not invertible [Da].

4.6. In [BC2], this result was used to study adiabatic limits of eta invariants for torus bundles. Applying their result to torus bundles over tori, Bismut and Cheeger obtained a new proof of Hirzebruch's conjecture. Furthermore, the adiabatic limit technique can also be used to derive the signature formula (3.4).

5. FAMILIES INDEX THEOREM FOR MANIFOLDS WITH BOUNDARY

5.1. The $\hat{\eta}$–form occurs also in the families version of the Atiyah-Patodi-Singer index theorem proved by Bismut and Cheeger [BC3], [BC4]. Let $M \xrightarrow{\pi} B$ be a Riemannian submersion of a compact manifold with boundary with even dimensional fibres diffeomorphic to a fixed manifold with boundary Z. Again suppose that the vertical tangent bundle TZ has a spin structure. Let E be a Hermitian bundle with unitary connection ∇^E. Furthermore, suppose that the metrics are products near the boundary and that the connection ∇^E is also of product type near the boundary. Then on each fibre Z_b, $b \in B$, we can consider the twisted Dirac operator $D_b^+ : C^\infty(Z_b, F^+ \otimes E) \to C^\infty(Z_b, F^- \otimes E)$ where $F^\pm$ are the $\frac{1}{2}$–spinor bundles. By assumption, D_b^+ takes the form (1.1) near the boundary and we may impose boundary conditions with respect to the spectral projection P_b^+. In this way we get a family D^+ of Dirac operators satisfying boundary conditions of Atiyah–Patodi–Singer type. In order to define the index bundle for this family, one has to take into account the spectral flow of the family of Dirac operators $D^{\partial Z}$ on the boundaries. In [BC3], Bismut and Cheeger make the following assumption:

$$\operatorname{Ker} D_b^{\partial Z} = \{0\} \quad \text{for all } b \in B.$$

Then there is a well–defined virtual index bundle

$$\operatorname{Ind} D^+ = \operatorname{Ker} D^+ \; - \; \operatorname{Ker} D^- \in K^0(B)$$

in the sense of Atiyah and Singer [AS].

THEOREM 5.1. ([BC4]) *Let R^Z be the curvature tensor of the connection on the vertical tangent bundle $TZ \subset TM$ which is induced by the Levi–Civita connection of TM. Let L^E be the curvature of E. Then one has*

$$\operatorname{ch}(\operatorname{Ind} D^+) = \int_Z \hat{A}\Big(\frac{R^Z}{2\pi}\Big) \operatorname{Tr}\Big(\exp\Big(-\frac{L^E}{2\pi i}\Big)\Big) \; - \; \hat{\eta}.$$

Here $\int_Z$ means integration along fibres.

This is the family version of Theorem 1.1. If M is closed, this is precisely the local families index theorem proved by Bismut [Bi].

5.2. To prove Theorem 4.3, Bismut and Cheeger replace the family of manifolds with boundary $Z \to M \xrightarrow{\pi} B$ by the family of manifolds with conical singularities $Z' \to M' \xrightarrow{\pi'} B$ which is obtained by attaching cones fibrewise. The typical fibre is then $Z' = Z \cup_{\partial Z} C(\partial Z)$ and, for $\varepsilon > 0$, $C(\partial Z)$ is endowed with the metric

$$\frac{dr^2}{\varepsilon} + r^2 g^{\partial Z}. \tag{4.4}$$

Let D_ε^+ be the corresponding family of twisted Dirac operators associated with $M' \xrightarrow{\pi'} B$ with respect to the metric (4.4). It turns out that, for sufficiently small $\varepsilon > 0$, the index bundle $\operatorname{Ind} D_\varepsilon^+ \in K^0(B)$ coincides with the index bundle $\operatorname{Ind} D^+$. In a sense, this is the extension to the case of families of the results explained in §1.

5.3. Another proof of the families index theorem for Dirac operators on manifolds with boundary has been given by Melrose and Piazza [MP]. The general framework for this proof is the so–called b–geometry developed by Melrose [Me]. This means that the family of manifolds with boundary is replaced by a corresponding family of complete manifolds with cylindrical ends. In this setting, traces have to be regularized which leads to the b–trace formalism of Melrose. The conditions on the boundary family can be relaxed so that only the existence of a spectral section is required.

6. L^2 INDEX THEOREMS FOR LOCALLY SYMMETRIC SPACES OF FINITE VOLUME

6.1. In the previous sections we have seen that there is a close connection between index theory for elliptic operators on Hilbert modular varieties, eta invariants and special values of certain L–series. This is true in a much more wider sense if we study locally symmetric spaces $\Gamma\backslash G/K$ of finite volume and arbitrary rank. For example, Stern [St2] has proved an L^2 index theorem for the signature operator on Hermitian locally symmetric manifolds $M = \Gamma\backslash G/K$ of finite volume. The manifold M has a natural compactification as manifold with corners $\overline{M}$. This is the Borel–Serre compactification of M [BS]. The boundary of $\overline{M}$ has a stratification

and only the faces of maximal dimension provide a nontrivial contribution to the index formula. It is very conceivable that these terms can be reinterpreted as adiabatic limits of eta invariants. This will provide the link with §4 and will also put Stern's results into a different perspective. In subsequent papers [St3], [St4], Stern has related the boundary contributions in his index formula to special values of Sato–Shintani L–functions. It is, of course, very likely that a similar index formula can be proved for twisted Dirac operators. As observed by Moscovici [Mo], the index of special twisted Dirac operators is related to the dimension of certain spaces of automorphic forms (see below). This explains the significance of such an index formula.

In a subsequent paper [St3], Stern has expressed some of the contributions of the "cusps" to the index in terms of special values of Sato–Shintani L–functions.

6.2. Let G be a real semisimple Lie group, K a maximal compact subgroup, and Γ a discrete torsion–free subgroup of G such that $\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash G) < \infty$. Then $X = G/K$ is a Riemannian symmetric space and $\Gamma\backslash X$ is a locally symmetric manifold of finite volume. Let E, F be finite–dimensional unitary K–modules and $\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{F}$ the induced homogeneous vector bundles over X. These bundles can be pushed down to bundles $\mathcal{E} = \Gamma\backslash\tilde{\mathcal{E}}$, $\mathcal{F} = \Gamma\backslash\tilde{\mathcal{F}}$ over X. Let

$$\tilde{D} : C^\infty(X, \tilde{\mathcal{E}}) \to C^\infty(X, \tilde{\mathcal{F}})$$

be a G–invariant elliptic differential operator, that is, $\tilde{D}$ commutes with the action of G. Then $\tilde{D}$ descends to an elliptic operator

$$D : C^\infty(\Gamma\backslash X, \mathcal{E}) \to C^\infty(\Gamma\backslash X, \mathcal{F}).$$

The operator D is called "locally invariant". Let $L^2(\mathcal{E})$, $L^2(\mathcal{F})$ be the spaces of L^2 sections of $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ respectively.

Proposition 6.1. ([Mo]) *Let $D : C^\infty(\Gamma\backslash X, \mathcal{E}) \to C^\infty(\Gamma\backslash X, \mathcal{F})$ be a locally invariant elliptic differential operator. Then we have*

$$\dim(\mathrm{Ker}\, D \cap L^2(\mathcal{E})) < \infty.$$

Let D^* denote the formal adjoint operator to D. Then D^* is again locally invariant and, by Proposition 6.1, we may define the L^2 index of D by

$$L^2\,\mathrm{Ind}\, D = \dim(\mathrm{Ker}\, D \cap L^2(\mathcal{E})) - \dim(\mathrm{Ker}\, D^* \cap L^2(\mathcal{F})). \tag{6.1}$$

The basic problem is now to prove an index formula. If $\Gamma\backslash X$ has real rank-one, Barbasch and Moscovici [BM] derived an index formula for twisted Dirac operators. Stern [St2] has studied the case where G is the group of real points of an algebraic group defined over $\mathbf{Q}$ and X is Hermitian and $\mathbf{Q}$–irreducible. In this context, he derives an index formula for the signature operator with coefficients in a flat bundle. We shall only consider the case of the trivial flat bundle. Then we are dealing with the usual signature operator $D_S : \Lambda^*_+(\Gamma\backslash X) \to \Lambda^*_-(\Gamma\backslash X)$. To state the index theorem, we have to recall some facts about the structure of $\Gamma\backslash X$. The structure at infinity of $\Gamma\backslash X$ is described by the Γ–conjugacy classes of rational parabolic subgroups of G, which replace the cusps in the case of a Hilbert modular variety. Let P be a rational parabolic subgroup of G. Then P has a Langlands decomposition

$$P = M_P A_P N_P \tag{6.2}$$

where N_P is the unipotent radical of P, $L_P = A_P M_P$ is the unique Levi subgroup of P which is stable under the Cartan involution corresponding to K, A_P is the identity component of the maximal $\mathbf{Q}$–split torus of the radical of L_P and M_P is reductive. Then $K \cap P = K \cap M_P$ and $\Gamma \cap P/\Gamma \cap N_P = \Gamma_M$ is a discrete subgroup of M_P with finite covolume. Set

$$X_M = M/K \cap M, \quad Y_P = \Gamma \cap P\backslash(X_M \times N_P).$$

Then $\Gamma_M\backslash X_M$ is again a locally symmetric space of finite volume and there is a fibration

$$\Gamma \cap N\backslash N \to Y_P \xrightarrow{\pi} \Gamma_M\backslash X_M \tag{6.3}$$

with typical fibre the compact nilmanifold $\Gamma \cap N\backslash N$. Furthermore, each Y_P can be identified with a face of the Borel–Serre compactification $\Gamma\backslash\overline{X}$ [BS] ($Y_P = e'(P)$ in the notation of [BS]). The faces of maximal dimension, i.e. the faces of codimension one in $\Gamma\backslash\overline{X}$ correspond to the Γ–conjugacy classes of the maximal rational parabolic subgroups. A parabolic subgroup P is maximal if the torus A_P in (6.2) has dimension 1. The formula for the L^2 index of the signature operator derived by Stern [St2] is of the following nature

$$L^2 \operatorname{Ind} D_S = \int_{\Gamma\backslash X} L + \sum_{\{P\}_{max}} \delta_P \tag{6.4}$$

where L is the Hirzebruch L–polynomial and the sum is running over the Γ–conjugacy classes of maximal rational parabolic subgroups. The contribution δ_P of a given maximal rational parabolic subgroup to the index formula (6.4) is associated with the fibration (6.3). The explicit description of δ_P is too technical to be recalled here. For more details we refer to [St2]. Instead we would like to stress our point of view that in the light of §4, the term δ_P should be interpreted as adiabatic limit of eta invariants for Y_P. This needs, of course, further explanation, because Y_P is noncompact if the $\mathbf{Q}$–rank of $\Gamma\backslash X$ is greater than 1. The one–parameter family of metrics on Y_P which has to be considered for the adiabatic limit is defined as follows. Since P is maximal parabolic, the torus A_P in the Langlands decomposition (6.1) is of dimension 1. Furthermore $X = P/K \cap P$, and we get diffeomorphisms

$$X \cong \mathbf{R}^+ \times X_M \times N_P \quad \text{and} \quad \Gamma \cap P\backslash X \cong \mathbf{R}^+ \times Y_P.$$

Now consider the metric on $\mathbf{R}^+ \times X_M \times N_P$ which is the pull back of the invariant metric on X. This metric can be described explicitly in terms of the invariant metric on X_M and the root space decomposition of $\mathrm{Lie}(N)$ (cf. [Bo]). Let g_t be the metric on Y_P which is induced on the slice $\{t\} \times Y_P$. Let $*_t$ be the Hodge $*$–operator with respect to g_t and define $A_t : \Lambda^{ev}(Y_P) \to \Lambda^{ev}(Y_P)$ by

$$A_t = (d *_t + (-1)^p *_t d) \quad \text{on} \quad \Lambda^{2p}(Y_P).$$

Since A_t may have continuous spectrum, the eta invariant of A_t can not be defined by (0.1). Instead one has to use a regularized version. One possible way to regularize the eta invariant is to use the eta density defined by

$$\eta_{A_t}(0,y) = \int_0^\infty u^{-1/2} \mathrm{tr}(A_t e^{-uA_t^2}(y,y))\, du.$$

The convergence of this integral needs justification. It can be handled using techniques similar to [Mü5]. Next one has to verify that $\eta_{A_t}(0,y)$ is absolutely convergent on Y_P. If this is so, we may define

$$\eta(Y_P, g_t) = \int_{Y_P} \eta_{A_t}(0,y)\, dy. \tag{6.5}$$

If Y_P is compact, this number coincides with the usual eta invariant defined in §1. If this problem is settled, one may proceed and study $\eta(Y_P, g_t)$ as $t \to \infty$. We claim that the limit exists and equals δ_P. The answer can be expressed in terms of the Levi–Civita superconnection in the same way as in Theorem 4.3. In [St3] and [St4], Stern has expressed δ_P in terms of special values of Sato–Shintani L–functions. Following our approach, this should be a consequence of an extension of [BC3] to the noncompact case. This is under consideration in joint work with Bismut and Cheeger.

6.3. The index formula (6.4) can, in principle, be extended to twisted Dirac operators. The method of Stern, however, relies on the fact that the signature operator defines a Fredholm operator in L^2. This is were the hypothesis that X is Hermitian is needed. If one considers twisted Dirac operators it may occur that the corresponding operator in L^2 is not Fredholm. In this case, the index formula will contain additional contributions from the continuous spectrum which are similar to the trace of the scattering matrix $S(0)$ occuring in (1.8). To determine these contributions, one has to use the spectral resolution of D^-D^+. The continuous part of the spectral resolution is described by Eisenstein series and the intertwining operators correspond to the scattering matrix in (1.8). For special arithmetic groups like principal congruence subgroups of $SL(n, \mathbf{Z})$ the intertwining operators can be expressed in terms of automorphic L–functions and therefore, the contribution of the continuous spectrum to the index formula is given in terms of special values of ratios of automorphic L–functions.

6.4. Let R^Γ be the right regular representation of G in $L^2(\Gamma\backslash G)$. Then $L^2(\Gamma\backslash G)$ decomposes into the direct sum of two invariant subspaces

$$L^2(\Gamma\backslash G) = L^2_d(\Gamma\backslash G) \oplus L^2_c(\Gamma\backslash G)$$

where $L^2_d(\Gamma\backslash G)$ is the smallest invariant subspace containing all irreducible unitary subrepresentations of R^Γ. Thus

$$L^2_d(\Gamma\backslash G) = \oplus_{\pi\in\hat{G}} m_\Gamma(\pi)\mathcal{H}(\pi),$$

where $m_\Gamma(\pi) < \infty$ is the multiplicity of a given representation $\pi \in \hat{G}$ in R^Γ and $\mathcal{H}(\pi)$ is the representation space of π. Assume that $\operatorname{rank} G = \operatorname{rank} K$. Let $H \subset K$

be a compact Cartan subgroup of G. Let $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ and $\mathfrak{h}$ be the Lie algebras of G, K and H, respectively. Let Φ be the root system of $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbf{C}})$, $\Phi_c \subset \Phi$ the root system of $(\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbf{C}})$ and $\Phi_n = \Phi - \Phi_c$. Fix a positive root system $\Psi \subset \Phi$, and let ρ be the half–sum of positive roots and ρ_c the half–sum of positive compact roots. Let $\Lambda \subset i\mathfrak{h}^*$ be the lattice which, by exponentiation, correponds to $\hat{H}$. Recall that $\Lambda + \rho$ parametrizes the discrete series representations $\hat{G}_d \subset \hat{G}$. Let $\mu \in \Lambda$ be the highest weight of an irreducible K–module E_μ and let $\mathcal{E}_\mu$ be the corresponding locally homogeneous vector bundle over $\Gamma\backslash X$. Let

$$D_\mu^{\pm} : C^\infty(\Gamma\backslash X, \mathcal{S}^{\pm} \otimes \mathcal{E}_\mu) \to C^\infty(\Gamma\backslash X, \mathcal{S}^{\mp} \otimes \mathcal{E}_\mu)$$

be the Dirac operators with coefficients in $\mathcal{E}_\mu$. Moscovici [Mo] has proved that for sufficiently regular μ, $\operatorname{Ker} D_\mu^- = 0$ and

$$L^2 \operatorname{Ind} D_\mu^+ = \dim \operatorname{Ker} D_\mu^+ = m_\Gamma(\pi_{\mu+\rho_c}), \tag{6.6}$$

where π_λ denotes the discrete series representation of G parametrized by $\lambda \in \Lambda + \rho$. This is one reason why it is interesting to prove an L^2 index theorem for twisted Dirac operators.

6.5. What has been said about the L^2 index applies to the Lefschetz fixed point theorem as well. Stern [St4] has derived a Lefschetz formula for Hecke operators on Hermitian locally symmetric manifolds $\Gamma\backslash X$ with respect to the signature operator. More precisely, let $C(\Gamma)$ be the commensurator of Γ which consists of all $\alpha \in G$ such that $\Gamma \cap \alpha\Gamma\alpha^{-1}$ is of finite index in both Γ and $\alpha\Gamma\alpha^{-1}$. Fix $\alpha \in C(\Gamma)$ and let $\{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$ denote a set of representatives of $\Gamma\alpha\Gamma$. Thus $\Gamma\alpha\Gamma$ is the disjoint union of the cosets $\alpha_i\Gamma$. Then the Hecke operator $T_G(\alpha)$ on $L^2(\Gamma\backslash G)$ corresponding to α, is defined by

$$(T_G(\alpha)f)(\Gamma g) = \sum_{i=1}^{r} f(\Gamma\alpha_i^{-1}g), \quad f \in L^2(\Gamma\backslash G).$$

Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ be the Cartan decomposition. Using the identification of $L^2\Lambda^*(\Gamma\backslash X)$ with $(L^2(\Gamma\backslash G) \otimes \Lambda^*\mathfrak{p}^*)^K$, one can extend $T_G(\alpha)$ as $T_G(\alpha) \otimes \mathrm{Id}$ to an endomorphism of $L^2\Lambda^*(\Gamma\backslash X)$, which we also denote by $T_G(\alpha)$. Then $T_G(\alpha)$ commutes with $d + d^*$ and the involution τ on $\Lambda^*(\Gamma\backslash X)$ which is defined by the Hodge $*$–operator. Let

$D_S : \Lambda^*_+(\Gamma\backslash X) \to \Lambda^*_-(\Gamma\backslash X)$ be the signature operator. Then $T_G(\alpha)$ preserves $\operatorname{Ker} D_S = \mathcal{H}^*_{(2),+}(\Gamma\backslash X)$ and $\operatorname{Ker} D_S^* = \mathcal{H}^*_{(2),-}(\Gamma\backslash X)$. Then the Lefschetz number of $T_G(\alpha)$ acting on the signature complex is defined to be

$$L(T_G(\alpha), D_S) = \operatorname{Tr}(T_G(\alpha)|\mathcal{H}^*_{(2),+}(\Gamma\backslash X)) - \operatorname{Tr}(T_G(\alpha)|\mathcal{H}^*_{(2),-}(\Gamma\backslash X)).$$

The Lefschetz formula proved by Stern contains a term which is the same as in the compact case and a sum of contributions attached to the maximal rational parabolic subgroups of G. These terms are the equivariant versions of the numbers δ_P in (6.4) which, according to our interpretation, should correspond to adiabatic limits of regularized equivariant eta invariants associated to Y_P.

If one considers the Gauss–Bonnet complex in place of the signature complex, then the Lefschetz fixed point formula for Hecke operators is simplified considerably; the eta invariants do not show up. In this case, one can also use the Arthur trace formula to derive the Lefschetz fixed point formula [Ar]. There is also a pure topological Lefschetz fixed point formula developed by Goresky and MacPherson [GM]. On the other hand, as (6.6) shows, more information is gained if one considers twisted Dirac operators. A corresponding Lefschetz fixed point formula will then determine the trace of Hecke operators acting in certain spaces of automorphic forms.

REFERENCES

[Ar] J. Arthur - *Characters, harmonic analysis, and an l^2–Lefschetz formula*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. **48**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1987), 167–179.

[At] M.F. Atiyah - *The logarithm of the Dedekind η-function*, Math. Annalen **278**, 335–380 (1987).

[APS1] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, and I.M. Singer - *Spectral asymmetry and Riemannian geometry*, I, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77**, 43–69 (1975).

[APS2] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, and I.M. Singer - *Spectral asymmetry and Riemannian geometry*, II, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **78**, 405–432 (1975).

[APS3] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, and I.M. Singer - *Spectral asymmetry and Riemannian geometry*, III, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **79**, 71–99 (1976).

[AS] M.F. Atiyah and I.M. Singer - *The index of elliptic operators*, IV, Ann. of Math. **93**, 119–138 (1971).

[Ba] H. Baumgärtel and M. Wollenberg - *Mathematical scattering theory*, Akademie–Verlag, Berlin 1983.

[Bi] J.–M. Bismut - *The Atiyah-singer index theorem for families of Dirac operators: Two heat equation proofs,* Invent. math. **83**, 91–151 (1986).

[BC1] J.–M. Bismut and J. Cheeger - *Eta invariants and their adiabatic limits*, J. Amer. Math. Soc. **2**, 33–70 (1989).

[BC2] J.–M. Bismut and J. Cheeger - *Transgressed Euler classes of SL(n,Z) vector bundles, adiabatic limits of eta invariants and special values of L-functions*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. **25**, 335–391 (1992).

[BC3] J.–M. Bismut and J. Cheeger - *Families index for manifolds with boundary, superconnections and cones,* I, Journal Funct. Anal. **89**, 313–363 (1990).

[BC4] J.–M. Bismut and J. Cheeger - *Families index for manifolds with boundary, superconnections and cones,* II, Journal Funct. Anal. **90**, 306–354 (1990).

[BC5] J.–M. Bismut and J. Cheeger - *Remarks on the index theorem for families of Dirac operators on manifolds with boundary*, in: *Differential Geometry,* 59–83, A symposium in honor of Manfredo do Carmo. ed. B. Lawson and K. Tenenblat, Longman Scientific & Technical, 1991.

[BF1] J.–M. Bismut and D.S. Freed - *The analysis of elliptic families*, I, Commun. Math. Phys. **106**, 159–176 (1986).

[BF2] J.–M. Bismut and D.S. Freed - *The analysis of elliptic families*, II, **107**, 103–163 (1986).

[Bo] A. Borel - *Stable real cohomology of arithmetic groups,* Ann. Sci. Éc. Norm. Super., 4^e série, **7**, 235–272 (1974).

[BS] A. Borel and J.-P. Serre - *Corners and arithmetic groups,* Comment. Math. Helv. **48**, 244–297 (1974).

[BMS] N.V. Borisov, W. Müller and R. Schrader - *Relative index theorems and supersymmetric scattering theory,* Commun. Math. Phys. **114**, 475–513 (1988).

[BG] T. Branson and P. Gilkey - *Residues of the η–function for operators of Dirac type,* J. Funct. Anal. **108**, 47–87 (1992).

[Br1] J. Brüning - *L^2–index theorems on certain complete manifolds,* J. Diff. Geom. **32**, 491–532 (1990).

[Br2] J. Brüning - *On L^2–index theorems for complete manifolds of rank-one type,* Duke Math. J. **66**, 257–309.

[C1] J. Cheeger - *On the spectral geometry of spaces with cone–like singularities,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **76**, 2103–2106 (1979).

[C2] J. Cheeger - *Spectral geometry of singular Riemannian spaces,* J. Diff. Geom. **18**, 575–657 (1983).

[C3] J. Cheeger - *η–invariants, the adiabatic approximation and conical singularities*, J. Diff. Geom. **26**, 175–221 (1987).

[Da] X. Dai - *Adiabatic limits, the non–multiplicativity of signature and Leray spectral sequence*, J. Amer. Math. Soc. **4**, 265 - 321 (1991).

[DW] R.D. Douglas and K.P. Wojciechowski - *Adiabatic limits of the η–invariants. The odd-dimensional Atiyah-Patodi-Singer problem,* Commun. Math. Phys. **142**, 139–168 (1991).

[Gi1] P.B. Gilkey - *The residue of the global eta function at the origin*, Advances in Math. **40**, 290–307 (1981).

[Gi2] P.B. Gilkey - *The boundary integrand in the formula for the signature and the Euler characteristic of a Riemannian manifold with boundary*, Advances in Math. **15**, 334–360 (1975).

[GS] P.B. Gilkey and L. Smith - *The eta invariant for a class of elliptic boundary value problems*, Commun. Pure Appl. Math. **36**, 85–132 (1983).

[GM] M. Goresky, R. MacPherson - *Topological trace formula* (To appear).

[He] E. Hecke - *Darstellung von Klassenzahlen als Perioden von Integralen 3. Gattung aus dem Gebiet der elliptischen Modulfunktionen*, Mathematische Werke, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1959, 405 – 417.

[Hi1] F. Hirzebruch - *Topological methods in algebraic geometry*, Springer–Verlag, Berlin, 1966.

[Hi2] F. Hirzebruch - *Hilbert modular surfaces*, Enseignement Math. **19**, 183–281 (1973).

[K1] T. Kato - *Perturbation theory for linear operators*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer 1980.

[K2] T. Kato - *Wave operators and unitary equivalence*, Pacific J Math. **15**, 171–180 (1965).

[La] J.–P. Labesse - *Signature des variétés modulaires de Hilbert et représentations diédrales*, Lect. Notes in Math. **1447**, 249–260, Springer-Verlag, Berlin 1990.

[Me] R. Melrose - *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem*, A.K. Peters, Boston, 1993.

[MP] R. Melrose and P. Piazza - *Families of Dirac operators, boundaries and the b-calculus*, Preprint, MIT, 1994.

[Mo] H. Moscovici - *L^2-index of elliptic operators on locally symmetric spaces of finite volume*, Contemporary Math. **10**, 129–137 (1982).

[Mü1] W. Müller - *Spectral theory for noncompact Riemannian manifolds with cusps and a related trace formula*, I.H.E.S.-Preprint, Nr. 46, 1980.

[Mü2] W. Müller - *Signature defects of cusps of Hilbert modular varieties and values of L-series at $s = 1$*, J. Diff. Geom. **20**, 55–119 (1984).

[Mü3] W. Müller - *Manifolds with cusps of rank one*, Lect. Notes in Math. **1244**, Springer–Verlag, Berlin, 1987.

[Mü4] W. Müller - *L^2-index theory, eta invariants, and values of L-functions*, Contemporary Math. **105**, 145–189 (1990).

[Mü5] W. Müller. *Eta invariants and manifolds with boundary.* MPI–Preprint, 93-50, Bonn, 1993.

[Mü6] W. Müller - *L^2-index and resonances*, in: *Analysis on manifolds (Katata 1987),* pp. 203-211, Lect. Notes in Math. **1339**, Springer, Berlin-New York, 1988.

[O] S. Ogata - *Hirzebruch conjecture on cusp singularities*, Math. Annalen **296**, 69–86 (1993).

[S] I. Satake - *On numerical invariants of arithmetic varieties of $\mathbf{Q}$-rank one*, in: "Automorphic forms of several variables", Taniguchi Symposium, Katata, 1983 (I. Satake and Y. Morita eds.), Adv. Studies in Pure Math. **46**, Birkhäuser, Basel, 1984, 353–369.

[SO] I. Satake and S. Ogata - *Zeta functions associated to cones and their special values*, in: "Automorphic forms and geometry of arithmetic varieties" (Y. Namikawa and K. Hashimodo eds), Adv. Studies in Pure Math. **15**, Kinokuniya, Tokyo and North–Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1989, 1–27.

[Sh] H. Shimizu - *On discontinuous groups operating on the product of upper half-planes*, Ann. of Math. **77**, 33–71 (1963).

[St1] M. Stern - *L^2-index theorems on warped products*, Princeton University Ph.D. thesis, October 1984.

[St2] M. Stern - *L^2-index theorems on locally symmetric spaces*, Invent. math. **96**, 231–282 (1989).

[St3] M.Stern - *Eta invariants and hermitian locally symmetric spaces*, J. Diff. Geom. **31**, 771–789 (1990).

[St4] M. Stern - *Lefschetz formulae for arithmetic varieties*, Invent. math. **115**, 241–296 (1994).

[W1] E. Witten - *Global gravitational anomalies*, Commun. Math. Phys. **100**, 197–229 (1985).

[W2] E. Witten - *Global anomalies in string theory*, in: Proc. of the Symposium on Anomalies, Geometry, Topology of Chicago (1985), Bardeen, W.A., White, A.R. (eds.), Singapore, World Scientific, 1985, pp. 61–99.

Werner MÜLLER

Universität Bonn
Mathematisches Institut
Beringstrasse 1
D–53115 BONN

Astérisque

MICHAEL SEMENOV-TIAN-SHANSKY

Quantum integrable systems

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 788, p. 365-387

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__365_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Juin 1994
46ème année, 1993-94, n° 788

QUANTUM INTEGRABLE SYSTEMS

by Michael SEMENOV-TIAN-SHANSKY

1. INTRODUCTION

A quantum mechanical system is a triple consisting of an associative algebra with involution $\mathcal{A}$ called the algebra of observables, its irreducible $\star$-representation π in a Hilbert space $\mathcal{H}$ and a distinguished self-adjoint observable H called the Hamiltonian. Typical question to study is the spectrum and the eigenvectors of $\pi(H)$. Quantum mechanical systems usually appear with their classical counterparts. By definition, a classical mechanical system is again specified by its algebra of observables $\mathcal{A}_{cl}$ which is a commutative associative algebra equipped with a Poisson bracket (i.e. a Lie bracket which is a biderivation with respect to the associative algebra structure), and a Hamiltonian $H \in \mathcal{A}_{cl}$. The spectrum of $\mathcal{A}_{cl}$ is a Poisson manifold $\mathcal{M}$ (whenever its definition makes sense), and Hilbert space representations are now replaced by restriction of functions to Poisson submanifolds (in particular, to the symplectic leaves) of $\mathcal{M}$. A classical system is called *integrable* if the commutant of the Hamiltonian in $\mathcal{A}_{cl}$ contains an abelian algebra of maximal possible rank. (A technical definition is provided by the well known Liouville theorem.)

It is much less clear what should be called a quantum integrable system. To a certain extent the answer remains pragmatic: one can say it's the sort of systems which are studied by the experts in quantum integrability! Of course, numerous exactly solvable quantum mechanical models were studied in Quantum Mechanics from its early days. Starting with the works of H. Bethe, L. Hulthen, L. Onsager, E. Lieb an entire universe of exactly solvable models

of Quantum Statistical Physics has been gradually discovered, these developments coming to a culminating point in the works of R. Baxter [B]. On the other hand, and quite independently of that, there was in the late 60's and in the 70's a major breakthrough in the study of classical integrable systems which led to creation of the Classical Inverse Scattering Method. (It is virtually impossible to give here a summary of this development which was started by the famous papers of M. Kruskal et al [GGKM] and P. Lax [L]. A good introduction close to the ideas of QISM may be found in [FT2].) A synthesis of these two independent trends was achieved in the Quantum Inverse Scattering Method (QISM) proposed in the late 70's by L. D. Faddeev, E. K. Sklyanin, and L. A. Takhtajan [STF] [FT1] [F1] [F2]. The underlying algebraic structures which were implicit in QISM have proved to be extremely interesting; among other things, this has led to the discovery of q-deformed affine algebras and to the general theory of quantum groups [D]. The language of Quantum Groups naturally incorporates several important aspects of QISM; however, some of its more elaborate parts (in particular, the algebraic Bethe ansatz and its generalizations which are used to study the spectra and the eigenfunctions of quantum Hamiltonians) are still not too widely known and in fact, still require much work for their proper understanding.

The origins of QISM lie in the study of concrete examples; it is designed as a working machine which produces quantum systems together with their spectra, the quantum integrals of motion, and their joint eigenvectors. In the same spirit, Classical Inverse Scattering Method (along with its ramifications) is a similar tool to produce examples of classical integrable systems together with their solutions. Despite the great diversity of these examples, the underlying construction (both in classical and in quantum cases) is fairly uniform. The first key observation is that integrable systems always have an ample hidden symmetry. (Fixing this symmetry provides some rough classification of associated examples. A nontrivial class of examples is related to loop algebras or, more generally, to their q-deformations. This is the class of examples I shall consider below.) Two other key points are the role of (classical or quantum) R-matrices and of the Casimir elements which give rise to the integrals of motion. This picture brings together all main ingredients of the theory (classical and quantum R-matrices, Lax operators, factorization problems);

it appears in several different guises which depend on the type of examples in question. The simplest (so called linear) case corresponds to classical systems which are modelled on coadjoint orbits of Lie algebras; a slightly more complicated group of examples are classical systems modelled on Poisson Lie groups or their Poisson submanifolds. In the quantum setting the difference between these two cases is deeper: while in the former case the hidden symmetry algebra remains the same, quantization of the latter requires the full machinery of Quantum Groups. Still, for loop algebras the quantum counterpart of the main construction is nontrivial even in the linear case; the point is that the universal enveloping algebra of a loop algebra has a trivial center which reappears only after central extension at the critical value of the central charge. Thus to tackle with the quantum case one needs the full machinery of representation theory of loop algebras. (By contrast, in the classical case one mainly deals with the evaluation representations which allow to reduce the solution of the equations of motion to a problem in algebraic geometry.) The corresponding construction for an important particular model (*the Gaudin model*) is a recent result of B. Feigin, E. Frenkel and N. Reshetikhin [FeiFrR]; remarkably, it allows to include into the Lie-algebraic picture the generalized Bethe ansatz and provides natural links with Conformal Field Theory. A similar treatment of quantum models related to q-deformed affine algebras is also possible, although the results in this case are still incomplete. (One should warn that much of the 'experimental material' on Quantum Integrability still resists general explanations. I'd like to mention in this respect deep results of E. K. Sklyanin [S2] relating Bethe ansatz to the separation of variables.)

To fix up the ideas I shall first discuss the classical case.

2. CLASSICAL CASE

The key idea used to study classical integrable systems is to bring them into *Lax form.* Let $(\mathcal{A}, \mathcal{M}, H)$ be a classical mechanical system. Let $\mathcal{F}_t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ be the associated flow on $\mathcal{M}$ (defined at least locally). Suppose that $\mathbf{g}$ is a Lie algebra. A mapping $L : \mathcal{M} \to \mathbf{g}$ is called a *Lax representation* of $(\mathcal{A}, \mathcal{M}, H)$ if the following conditions are satisfied:

(i) The flow $\mathcal{F}_t$ factorizes over $\mathbf{g}$, i.e. there exists a (local) flow $F_t : \mathbf{g} \to \mathbf{g}$ such that the following diagram is commutative.

$$\begin{array}{ccccc} & & F_t & & \\ & \mathcal{M} & \to & \mathcal{M} & \\ L & \downarrow & & \downarrow & L \\ & \mathbf{g} & \to & \mathbf{g} & \end{array}$$

(ii) The quotient flow F_t on $\mathbf{g}$ is isospectral, i.e. it is tangent to adjoint orbits in $\mathbf{g}$.

Clearly, $x \circ L \in \mathcal{A}$ for any affine coordinate x on $\mathbf{g}$; thus we may regard L as an element of $\mathbf{g} \otimes \mathcal{A}$; the Poisson bracket on $\mathcal{A}$ extends to $\mathbf{g} \otimes \mathcal{A}$ by linearity. Property (ii) means that there exists an element $M \in \mathbf{g} \otimes \mathcal{A}$ such that $\{H, L\} = [L, M]$.

Let (ρ, V) be a (finite-dimensional) linear representation of $\mathbf{g}$. Then $L_V = \rho \otimes id(L) \in End V \otimes A$ is a matrix valued function on $\mathcal{M}$; the coefficients of its characteristic polynomial $P(\lambda) = \det(L_V - \lambda)$ are integrals of the motion.

One may replace in the above definition a Lie algebra $\mathbf{g}$ with a Lie group G; in that case isospectrality means that the flow preserves conjugacy classes in G.

There is no general way to find a Lax representation for a given system (even if it is known to be completely integrable). However, there is a systematic way to produce examples of such representations.

The following basic construction (summarized in Theorem 1 below) goes back to Kostant [K] and Adler [A] in some crucial cases. Recall first of all that the symmetric algebra $S(\mathbf{g})$ of any Lie algebra $\mathbf{g}$ is equipped with a natural Poisson bracket which extends the Lie bracket on $\mathbf{g}$ (it is sometimes called the *Lie-Poisson bracket* of $\mathbf{g}$); its center coincides with the subalgebra $I = S(\mathbf{g})^{\mathbf{g}}$ of $ad\mathbf{g}$-invariants in $S(\mathbf{g})$ (called Casimir elements). The elements of I thus generate trivial dynamics in $S(\mathbf{g})$. However, one may still use Casimir elements to produce nontrivial equations of motion if the Poisson structure on $S(\mathbf{g})$ is properly modified. The formal definition is as follows. Let $r \in End\mathbf{g}$ be a linear operator (*classical r-matrix)* satisfying the *modified classical Yang-*

Baxter identity

$$[rX, rY] - r([rX, Y] + [X, rY]) = -[X, Y], X, Y \in \mathbf{g}. \tag{1}$$

Put

$$[X, Y]_r = \frac{1}{2}([rX, Y] + [X, rY]), X, Y \in \mathbf{g}, \tag{2}$$

Then (1) implies that (2) is a Lie bracket; let $\mathbf{g}_r$ be the corresponding Lie algebra (with the same underlying linear space). Put $r_\pm = \frac{1}{2}(r \pm id)$; by (1), $r_\pm : \mathbf{g}_r \to \mathbf{g}$ are Lie algebra homomorphisms. Extend them to Poisson algebra morphisms $S(\mathbf{g}_r) \to S(\mathbf{g})$ (denoted by the same letters). These morphisms also agree with the standard Hopf structure on $S(\mathbf{g})$, $S(\mathbf{g}_r)$. Define the action

$$S(\mathbf{g}_r) \otimes S(\mathbf{g}) \to S(\mathbf{g})$$

by setting

$$x \cdot y = \sum r_+(x_i^{(1)})\, y\, r_-(x_i^{(2)})', x \in S(\mathbf{g}_r), y \in S(\mathbf{g}), \tag{3}$$

where $\Delta x = \sum x_i^{(1)} \otimes x_i^{(2)}$ is the coproduct and $a \mapsto a'$ is the antipode map.

Theorem 1 *(i) $S(\mathbf{g})$ is a free graded $S(\mathbf{g}_r)$-module generated by $1 \in S(\mathbf{g})$. (ii) Let $i{:}S(\mathbf{g}) \to S(\mathbf{g}_r)$ be the induced isomorphism of graded linear spaces; its restriction to $I = S(\mathbf{g})^{\mathbf{g}}$ is a morphism of Poisson algebras. (iii) Assume, moreover, that $\mathbf{g}$ is equipped with a nondegenerate invariant bilinear form; the induced mapping $\mathbf{g}_r^* \to \mathbf{g}$ defines a Lax representation for all Hamiltonians $H = i(\hat{H})$, $\hat{H} \in S(\mathbf{g})^{\mathbf{g}}$.*

The most common examples of classical r-matrices are associated with *Manin triples.* By definition, it is a triple $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ consisting of a Lie algebra $\mathbf{c}$ equipped with a nondegenerate invariant inner product and two isotropic Lie subalgebras $\mathbf{a}, \mathbf{b} \subset \mathbf{c}$ such that $\mathbf{c} = \mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b}$ as a linear space. Let $P_\mathbf{a}, P_\mathbf{b}$ be the projection operators associated with this decomposition; the operator $r = P_\mathbf{a} - P_\mathbf{b}$ is skew and satisfies (1); moreover, the Lie algebra $\mathbf{c}_r$ splits into two parts, $\mathbf{c}_r \simeq \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$. Let us choose $\mathcal{A} = S(\mathbf{a})$ as our algebra of observables. The inner product on $\mathbf{c}$ sets up the isotropic subspaces $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ into duality; let $L \in \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \subset \mathbf{b} \otimes S(\mathbf{a})$ be the associated canonical element; alternatively,

we may regard L as an embedding $\mathbf{a}^* \hookrightarrow \mathbf{b}$. Let $P : S(\mathbf{c}) \to S(\mathbf{a})$ be the projection onto $S(\mathbf{a})$ in the decomposition

$$S(\mathbf{c}) = S(\mathbf{a}) \oplus S(\mathbf{c})\mathbf{b}.$$

Corollary 1 *(i) The restriction of P to the subalgebra $I = S(\mathbf{c})^{\mathbf{c}}$ of Casimir elements is a Poisson algebra homomorphism. (ii) L defines a Lax representation for all Hamiltonian equations of motion defined by the Hamiltonians $\bar{H} = P(H)$, $H \in I$. (iii) The corresponding Hamiltonian flows on $\mathbf{a}^* \simeq \mathbf{b} \subset \mathbf{c}$ preserve intersections of coadjoint orbits of $\mathbf{a}$ with the adjoint orbits of $\mathbf{c}$.*

One sometimes calls L *universal Lax operator;* restricting the mapping $L : \mathbf{a}^* \hookrightarrow \mathbf{b}$ to various Poisson submanifolds in $\mathbf{a}^*$ we get Lax representations for particular systems.

Theorem 1 may be applied to finite dimensional semisimple Lie algebras [K]. However, its really important applications are connected with loop algebras, which possess sufficiently many Casimirs. As a matter of example, let us describe the so called *generalized Gaudin model* (its quantum counterpart was originally proposed in [G]); the associated Manin triple is related to the Mittag-Leffler problem on $\mathbf{C}P_1$. Later on we shall also discuss quantum Gaudin model.

Let $\mathbf{g}$ be a complex simple Lie algebra. Fix a finite set $D = \{z_1, ..., z_N\} \subset \mathbf{C} \subset \mathbf{C}P_1$ and let $\mathbf{g}(D)$ be the algebra of rational functions on $\mathbf{C}P_1$ with values in $\mathbf{g}$ which vanish at infinity and are regular outside D . Let $\mathbf{g}_{z_i} = \mathbf{g} \otimes \mathbf{C}((z - z_i))$ be the localization of $\mathbf{g}(D)$ at $z_i \in D$. Put $\mathbf{g}_D = \oplus_{z_i \in D} \mathbf{g}_{z_i}$. There is a natural embedding $\mathbf{g}(D) \hookrightarrow \mathbf{g}_D$ given by the Laurent expansion. Put $\mathbf{g}^+_{z_i} = \mathbf{g} \otimes \mathbf{C}[[z - z_i]]$, $\mathbf{g}^+_D = \oplus_{z_i \in D} \mathbf{g}_{z_i}$. Then

$$\mathbf{g}_D = \mathbf{g}^+_D \dot{+} \mathbf{g}(D) \tag{4}$$

as a linear space. Fix an inner product on $\mathbf{g}$ and extend it to $\mathbf{g}_D$ by setting

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{z_i \in D} Res\,(X_i, Y_i)\, dz. \tag{5}$$

Both subspaces $\mathbf{g}(D), \mathbf{g}^+_D$ are isotropic with respect to the inner product (5) which sets them into duality. Thus $(\mathbf{g}_D, \mathbf{g}^+_D, \mathbf{g}(D))$ is a Manin triple. The linear space $\mathbf{g}(D)$ may be regarded as a $\mathbf{g}^+_D$–module with respect to the coadjoint

representation. The action of $\mathbf{g}_D^+$ preserves the natural $(\mathbf{Z}_+)^N$-filtration on $\mathbf{g}(D)$ by the order of poles. In particular, rational functions with simple poles form an invariant subspace $\mathbf{g}(D)_1 \subset \mathbf{g}(D)$. Let $\mathbf{g}_{z_i}^{++} \subset \mathbf{g}_{z_i}^+$ be the subalgebra consisting of formal series without constant terms. Put $\mathbf{g}_D^{++} = \oplus_{z_i \in D} \mathbf{g}_{z_i}^{++}$; clearly, $\mathbf{g}_D^{++}$ is an ideal in $\mathbf{g}_D^+$ and its action in $\mathbf{g}(D)_1$ is trivial. The quotient algebra is isomorphic to $\mathbf{g}^N = \oplus_{z_i \in D} \mathbf{g}$. The inner product (5) sets the linear spaces $\mathbf{g}(D)_1, \mathbf{g}^N$ in duality. Let $L(z) \in \mathbf{g}(D)_1 \otimes \mathbf{g}^N$ be the canonical element; we shall regard $L(z)$ as a matrix-valued rational function with coefficients in $\mathbf{g}^N \subset S(\mathbf{g}^N)$. Let $\{e_a\}$ be an orthonormal basis in $\mathbf{g}$. Fix a faithful linear representation (ρ, V) of $\mathbf{g}$; it extends canonically to a representation $(\rho, V(z))$ of the Lie algebra $\mathbf{g}(z) = \mathbf{g} \otimes \mathbf{C}(z)$ in the space $V(z) = V \otimes \mathbf{C}xx(z)$. Put

$$L_V(z) = (\rho \otimes id)L(z).$$

Matrix coefficients of $L_V(z)$ generate the algebra of observables $S(\mathbf{g}^N)$. The Poisson bracket relations in this algebra have a nice expression in 'tensor form', the brackets of the matrix coefficients of L_V forming a matrix in $EndV \otimes EndV$ with coefficients in $\mathbf{C}(u,v) \otimes S(\mathbf{g}^N)$; it is explicitly given by the following formula (which was suggested for the first time by Sklyanin [S1] and was the starting point of the whole theory):

$$\{L_V(u) \otimes, L_V(v)\} = [r_V(u,v), L_V(u) \otimes 1 + 1 \otimes L_V(v)], \tag{6}$$

where $r_V(u,v)$ is the *rational r-matrix*,

$$r_V(u,v) = \frac{t_V}{u-v}, \; t_V = \sum_a \rho(e_a) \otimes \rho(e_a). \tag{7}$$

Notice that $r_V(u,v)$ is essentially the Cauchy kernel solving the Mittag-Leffler problem on $\mathbf{C}P_1$ with which we started.

Corollary 1 may now be specialized in the following way which shows that spectral invariants of the Lax operator $L(z)$ may be regarded as 'radial parts' of the Casimir elements.

Clearly, we have $\mathbf{g}_D = \mathbf{g}(D) \dot{+} \mathbf{g}^N \dot{+} \mathbf{g}_D^{++}$ and hence

$$S(\mathbf{g}_D) = S(\mathbf{g}^N) \oplus (\mathbf{g}(D)\, S(\mathbf{g}_D) + S(\mathbf{g}_D)\, \mathbf{g}_D^{++}).$$

Let $\gamma : S(\mathbf{g}_D) \to S(\mathbf{g}^N)$ be the projection map associated with this decomposition.

Proposition 1 *The restriction of γ to the subalgebra $S(\mathbf{g}_D)^{\mathbf{g}_D}$ of Casimir elements is a morphism of Poisson algebras; under the natural pairing $S(\mathbf{g}^N)\times \mathbf{g}(D)_1 \to \mathbf{C}$ induced by the inner product (5) the restricted Casimirs coincide with the spectral invariants of $L(z)$.*

One should take some caution, as Casimir elements do not lie in the symmetric algebra $S(\mathbf{g}_D)$ itself but rather in its appropriate local completion; however, their projections to $S(\mathbf{g}^N)$ are well defined. The mapping γ is an analogue of the Harish-Chandra homomorphism; its definition may be extended to the quantum case as well.

Corollary 2 *Spectral invariants of $L(z)$ are in involution with respect to the standard Lie-Poisson bracket on $\mathbf{g}^N$; $L(z)$ defines a Lax representation for any of these invariants (regarded as a Hamiltonian on $(\mathbf{g}^N)^* \simeq \mathbf{g}^N$.*

The generalized Gaudin Hamiltonians are, by definition, the quadratic Hamiltonians contained in this family; one may take, e.g.

$$H_V(u) = \frac{1}{2} tr_V\, L(u)^2. \tag{8}$$

(Physically, they describe, e.g., bilinear interaction of several 'magnetic momenta'.)

Corollary 2 does not mention the 'global' Lie algebra $\mathbf{g}_D$ (and may in fact be proved by elementary means). However, of the three Lie algebras involved it is probably the most important one, as it is responsible for the dynamics. It is this 'global' Lie algebra that may be called the *hidden symmetry algebra.*

The characteristic equation $\det(L_V(z) - \lambda) = 0$ associates to the Lax operator $L(z)$ an affine algebraic curve (more precisely, we get a family of curves parametrized by the values of commuting Hamiltonians); this switches on the powerful algebraic-geometric machinery and makes the complete integrability of the generalized Gaudin Hamiltonians almost immediate.

Remarks. 1. In the exposition above we kept the divisor D fixed. A more invariant way is of course to use adèlic language. Thus one may replace the algebra $\mathbf{g}_D$ with the global algebra $\mathbf{g}_A$ defined over the ring $\mathbf{A}$ of adèles of $\mathbf{C}(z)$; fixing a divisor amounts to fixing a Poisson subspace inside the Lie algebra $\mathbf{g}(z)$ of rational functions (which is canonically identified with the

dual space of the subalgebra $\mathbf{g}_{\mathbf{A}}^{+}$). The use of adèlic freedom allowing to add new points to the divisor is essential in the treatment of the quantum Gaudin model.

2. Further generalizations consist in replacing rational r-matrix with more complicated ones. One is of course tempted to repeat the construction above replacing $\mathbf{C}P_1$ with an arbitrary algebraic curve. There are obvious obstructions which come from the Mittag-Leffler theorem for curves: the subalgebra $\mathbf{g}(C)$ of rational functions on the curve C does not admit a complement in $\mathbf{g}_{\mathbf{A}}$ which is again a Lie subalgebra; for elliptic curves (and $\mathbf{g} = sl(n)$) this problem may be cured [BD] by considering quasiperiodic functions on C, and in this way we recover elliptic r-matrices which were originally the first example of classical r-matrices ever considered! ([S1])

3. Another, and much more important extension of this picture, is to observe that the Poisson bracket defined on $\mathbf{g}(z)$ is a linearization of a *quadratic* Poisson bracket defined on the group $G(z)$ (we choose a group G with the Lie algebra $\mathbf{g}$ and regard $G(z)$ as an affine algebraic group defined over $\mathbf{C}(z)$). Fixing again a faithful representation of G we may define this Poisson bracket on the affine ring of $G(z)$ by the following formula [S1]

$$\{L_V(u) \otimes, L_V(v)\} = [r_V(u,v), L_V(u) \otimes\ L_V(v)]\,, \tag{9}$$

where we regard the matrix coefficients of $L_V(u)$ as generators of the affine ring $\mathcal{A}_{aff}$ of $G(z)$. The bracket (9) known as the *Sklyanin bracket* is multiplicative, i.e. the coproduct $\Delta : \mathcal{A}_{aff} \to \mathcal{A}_{aff} \otimes \mathcal{A}_{aff}$ is a morphism of Poisson algebras. In other words, the group $G(z)$ equipped with the bracket (9) is a Poisson-Lie group. Rational functions with prescribed divisor of poles form a finite-dimensional Poisson submanifold in $G(z)$; generic Poisson submanifolds correspond to functions with simple poles which should now be written in multiplicative form

$$L_V(z) = \overleftarrow{\prod_i}(I - \frac{X_i}{z - z_i}). \tag{10}$$

Spectral invariants of 'Lax matrices' of this type again generate completely integrable Lax equations. It may be shown (although it is less evident than before) that these spectral invariants are restrictions to $G(z)$ of formal Casimir

elements associated with the global group $G_{\mathbf{A}}$. So virtually all elements of the 'linear' picture admit a generalization to the quadratic case.

Multiplicativity of the Sklyanin bracket has still another asset, for it matches perfectly with the kinematics of lattice systems in statistical mechanics. It is natural to assume that the phase space of a multiparticle system associated with a one-dimensional lattice $\Gamma = \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ is the product $\mathcal{M}^N = \mathcal{M} \times ... \times \mathcal{M}$ of one-particle spaces. Let $\mathcal{M} = G(z)$ be the Poisson-Lie group of the previous example. The product $m : G(z) \times ... \times G(z) \to G(z)$ is a Poisson map (it is called *monodromy map* in the present context); it allows to pullback integrable Hamiltonians on $G(z)$ to $G(z)^N$. The pull-backed Hamiltonians still remain integrable; this may be regarded as the main content of the Inverse Scattering Method (in this slightly simplified setting). Multi-pole Lax matrices (10) naturally arise as monodromy matrices associated with single-pole matrices on the lattice. The study of Lax systems on the lattice thus breaks naturally into two parts: *(a) Solve the Lax equation for the monodromy. (b) Lift the solutions back to* $G(z)^N$. The second stage (by no means trivial) is the inverse problem *sensu strictu.*

3. QUANTUM CASE. THE GAUDIN MODEL

Speaking informally, quantization consists in replacing Poisson bracket relations with commutation relations in an associative algebra. The standard way to quantize the algebra$\mathrm{A}_{cl} = S(\mathbf{a})$ is to replace it with the universal enveloping algebra $U(\mathbf{a})$. Whenever there is a nice correspondence between coadjoint orbits and representations, we may also quantize particular systems obtained by specialization of $S(\mathbf{a})$ to these orbits. A much more delicate problem is to construct commuting quantum Hamiltonians and to determine their spectra.

Let us consider again the Gaudin model. Here the algebra of observables is simply $U(\mathbf{g}^N)$. Let V_λ be a finite-dimensional highest weight representation of $\mathbf{g}$ with dominant integral highest weight λ. Let $\lambda = (\lambda_1, ...\lambda_N)$ be the set of such weights; put $\mathbf{V}_\lambda = \otimes_i V_{\lambda_i}$. The space $\mathbf{V}_\lambda$ is a natural Hilbert space associated with the Gaudin model; so the 'kinematical' part of quantization problem in this case is fairly simple. Let us fix also an auxiliary representation (ρ, V). By analogy with the classical case we may introduce the *quantum Lax*

operator

$$L_V(z) \in \ End V(z) \ \otimes \mathbf{g}^N \subset End V(z) \otimes U(\mathbf{g}^N); \tag{11}$$

the definition remains exactly the same, but now we embed $\mathbf{g}^N$ into the universal enveloping algebra $U(\mathbf{g}^N)$ instead of symmetric algebra $S(\mathbf{g}^N)$. The commutation relations for $L_V(z)$ have the form

$$[L_V(u) \otimes, L_V(v)] = [r_V(u,v), L_V(u) \otimes 1 + 1 \otimes L_V(v)], \tag{12}$$

where the l.h.s. is now a matrix of true commutators. The key point in (12) is the interplay of comm utation relations in the quantum algebra $U(\mathbf{g}^N)$ and the auxiliary matrix algebra $End V(z)$. Formula (12) was the starting point of QISM (as applied to models with *linear* commutation relations). Put

$$S(u) = \frac{1}{2} tr_V \left(L_V(u)\right)^2; \tag{13}$$

using (12) it is easy to check that $S(u)$ form a commutative family of Hamiltonians (called Gaudin Hamiltonians) in $U(\mathbf{g}^N)$ [J]. An important property of this commuting family is that it possesses at least one 'obvious' eigenvector $\mid 0 > \in H$, the tensor product of highest weight vectors in V_{λ_i}; it is usually called *the vacuum vector* . One of the key ideas of QISM is to construct other eigenvectors by applying to the vacuum creation operators which are themselves rational functions of z. This construction is called *algebraic Bethe ansatz.* Assume that $\mathbf{g} = sl(2)$ and let $\{E, F, H\}$ be its standard basis. Put

$$F(z) = \sum_{z_i \in D} \frac{F^{(i)}}{z - z_i}, \tag{14}$$

where $F^{(i)}$ acts as F in the i-th copy of $sl(2)$ and as id on other places. The Bethe vector is, by definition,

$$\mid w_1, w_2, ...w_m > = F(w_1)F(w_2)...F(w_m) \mid 0 > \tag{15}$$

The Lax matrix (11) applied to $\mid w_1, w_2, ...w_m >$ becomes triangular; this yields after a short computation

$$S(u) \mid w_1, w_2, ...w_m > =$$

$$s_m(u) \mid w_1, w_2, ...w_m > + \sum_{j=1}^{N} \frac{f_j}{u - w_j} \mid w_1, w_2, ..., w_{j-1}, u, w_{j+1}, ..., w_m >,$$

where

$$f_j = \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{w_j - z_i} - \sum_{s \neq j} \frac{2}{w_j - w_s},$$

and $s_m(u)$ is a rational function,

$$(16)\quad s_m(u) = \frac{c_V}{2}\chi_m(u)^2 - c_V \partial_u \chi_m(u),\ \chi_m(u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{u - z_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{2}{u - w_j}.$$

(The constant c_V depends on the choice of V.) If all f_j vanish, $\mid w_1, w_2, \ldots w_m >$ is an eigenvector of $S(u)$ with the eigenvalue $s_m(u)$; equations

$$(17)\qquad \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{w_j - z_i} - \sum_{s \neq j} \frac{2}{w_j - w_s} = 0$$

are called the *Bethe ansatz equations.* (Notice that (17) is precisely the condition that $s_m(u)$ is nonsingular at $u = w_i$.)

For general simple Lie algebras the study of spectra of the Gaudin Hamiltonians becomes rather complicated; one way to solve this problem is to treat it inductively by choosing in $\mathbf{g}$ a sequence of embedded Lie subalgebras of lower rank and applying the algebraic Bethe ansatz to these subalgebras. An alternative idea is to interprete the Hamiltonians as radial parts of (infinite dimensional) Casimir operator of the 'global' Lie algebra $\mathbf{g}_D$. One observes, first of all, that Theorem 1 and Corollary 1 remain valid formally in quantum case; one has just to replace in their formulation symmetric algebras with the corresponding universal enveloping algebras (cf. [K]). More precisely, let $\mathbf{g}, \mathbf{g}_r$ be as in Theorem 1, let $U(\mathbf{g}), U(\mathbf{g}_r)$ be the corresponding universal enveloping algebras. Let $Z \subset U(\mathbf{g})$ be the center of $U(\mathbf{g})$. Extend the homomorphisms $r_\pm : \mathbf{g}_r \to \mathbf{g}$ to the universal enveloping algebras and define the action $U(\mathbf{g}_r) \otimes U(\mathbf{g}) \to U(\mathbf{g})$ by the same formulae (3) as before.

Theorem 2 *(i) $U(\mathbf{g})$ is a free filtered $U(\mathbf{g}_r)$ -module generated by $1 \in U(\mathbf{g})$. (ii) Let $i: U(\mathbf{g}) \to U(\mathbf{g}_r)$ be the induced isomorphism of filtered linear spaces; its restriction to $Z \subset U(\mathbf{g})$ is an algebra homomorphism.*

Corollary 3 *Let $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ be a Manin triple, $U(\mathbf{a}), U(\mathbf{b}), U(\mathbf{c})$ the corresponding universal enveloping algebras. Let $P : U(\mathbf{c}) \to U(\mathbf{a})$ be the projection map associated with the decomposition $U(\mathbf{c}) = U(\mathbf{a}) \oplus U(\mathbf{c})\mathbf{b}$; the restriction of P to the center of $U(\mathbf{c})$ is an algebra homomorphism.*

It is impossible to apply these theorems immediately in the affine case, since the center of $U(\mathbf{g}_D)$ is trivial. However, the situation can be amended by first passing to the central extension of $U(\mathbf{g}_D)$ and then considering the quotient algebra $U_k(\mathbf{g}_D) = U(\hat{\mathbf{g}}_D)/(c-k)$. It is known that for the *critical value* of the central charge $k = -h^\vee$ (here $h^\vee$ is the dual Coxeter number of $\mathbf{g}$) the (appropriately completed) algebra $U_{-h^\vee}(\mathbf{g}_D)$ possesses an ample center (for each 'local' factor in $U_{-h^\vee}(\mathbf{g}_D) = \otimes_{z_i \in D} U_{-h^\vee}(\mathbf{g}_{z_i})$ it is isomorphic to the classical W-algebra associated with the Langlands dual of $\mathbf{g}$ [FeiFr]). Moreover, the Gaudin Hamiltonians are radial parts of the appropriate Casimir operators. Let us describe this construction (due to B.Feigin, E.Frenkel and N.Reshetikhin [FeiFrR]) more precisely.

Let the Lie algebras $\mathbf{g}_D$, $\mathbf{g}_D^+$, $\mathbf{g}_D^{++}$, $\mathbf{g}(D)$ be as above. It will be convenient to add one more point $\{u\}$ to the divisor D and to attach to it the trivial representation V_0 of $\mathbf{g}$. Thus we write $D' = D \cup \{u\}$, etc. Let ω be the 2-cocycle on $\mathbf{g}_{D'}$ defined by

$$\omega(X,Y) = \sum_{z_i \in D'} Res(X_i, dY_i). \tag{18}$$

Let $\hat{\mathbf{g}}_{D'} = \mathbf{g}_{D'} \oplus \mathbf{C}c$ be the central extension of $\mathbf{g}_{D'}$ defined by this cocycle. Note that since the restriction of ω to the subalgebra $\mathbf{g}(D') \subset \mathbf{g}_{D'}$ is zero, the algebra $\mathbf{g}(D')$ is canonically embedded into $\hat{\mathbf{g}}_{D'}$. Put $\hat{\mathbf{g}}_{D'}^+ = \mathbf{g}_{D'}^+ \oplus \mathbf{C}c$. Fix a highest weight representation $\mathrm{V}_{(\lambda,\mathbf{0})} = \otimes_{z_i \in D} V_{\lambda_i} \otimes V_0$ of the Lie algebra $\mathbf{g}^{N+1} = \mathbf{g}_{D'}^+/\mathbf{g}_{D'}^{++}$ as above and let $V_{(\lambda,\mathbf{0})}^k$ be the associated representation of $\hat{\mathbf{g}}_{D'}^+$ on which the center $\mathbf{C}c$ acts by multiplication by $k \in \mathbf{Z}$. Let $\mathbf{V}_{(\lambda,\mathbf{0})}^k$ be the induced representation of $\hat{\mathbf{g}}_{D'}$,

$$\mathbf{V}_\lambda^k = U(\hat{\mathbf{g}}'_D) \otimes_{U(\hat{\mathbf{g}}_{D'}^+)} V_\lambda^k. \tag{19}$$

There is a canonical embedding $V_\lambda^k \hookrightarrow \mathbf{V}_\lambda^k : v \mapsto 1 \otimes v$. Let $\left(\mathbf{V}_\lambda^k\right)^*$ be the dual of $\mathbf{V}_\lambda^k$, $\mathbf{H}_\lambda \subset \left(\mathbf{V}_\lambda^k\right)^*$ the subspace of $\mathbf{g}(D')$–invariants. Decomposition (4) immediately implies that $\mathbf{H}_\lambda$ is canonically isomorphic to V_λ^*. Let $\Omega \in \mathbf{H}_\lambda \otimes V_\lambda$ be the canonical element; it defines a natural mapping $\mathbf{V}_\lambda^k \to V_\lambda : \varphi \mapsto \langle \varphi \rangle_\Omega$. (In Conformal Field Theory $\langle \varphi \rangle_\Omega$ are usually called *correlation functions.*) For any $x \in U(\hat{\mathbf{g}}_{D'})$ let $\gamma_\lambda(x) \in End V_\lambda$ be the linear operator defined by the composition mapping $v \mapsto \langle x(1 \otimes v) \rangle_\Omega, v \in V_\lambda$.

Now suppose that $k = -h^\vee$; let T be the canonical element which corresponds to the inner product (5) in $\mathbf{g}((z))$. Fix an auxiliary linear representation (ρ, V) of $\mathbf{g}$; it extends naturally to a representation of $\mathbf{g}((z))$ in $V((z)) = V \otimes C((z))$. Put formally $T_V(z) = (id \otimes \rho)T$ (although $T_V(z)$ does not belong to $U(\mathbf{g}_z \otimes End V((z))$, it still makes sense as a formal series in z infinite in both directions). Let $J_V(z) = tr_V : T_V(z)^2 :$ be the corresponding Sugawara current (here :: means usual normal ordering with respect to decomposition into positive and negative powers of z). For the critical value of the central charge all coefficients $J_V(n)$ of $J_V(z)$ are central in $U_{-h^\vee}(\mathbf{g}((z)))$. Let us embed $U_{-h^\vee}(\mathbf{g}(z)))$ into $U_{-h^\vee}(\mathbf{g}_{D'})$ sending it to the extra place $\{u\} \subset D'$ to which we attached the trivial representation of $\mathbf{g}$.

Proposition 2 $S(u) = \gamma_\lambda(J_V(-2))$ *coincides with the Gaudin Hamiltonian.*

Remark. Besides quadratic Hamiltonians associated with the Sugawara current there are also higher commuting Hamiltonians which may be obtained using the methods of [FeiFr].

This construction (if a bit tedious) presents several advantages. One is conceptual, as we could unravel the role of Casimir elements for the study of (one class of) quantum integrable models. Moreover, we identified the Hilbert space of the models in question with the space of CFT correlators at the critical value of the central charge (this value corresponds to the semiclassical limit in CFT). The technical advantage is that now the study of spectra and construction of the Bethe creation operators may be lifted to the 'big' space. This is the main content of the recent paper of Feigin, E.Frenkel, and Reshetikhin [FeiFrR]. An important ingredient of their construction is the use of 'adèlic' freedom: one may attach extra factors to the big space (these factors correspond to the poles of the creation operators) without affecting the reduced space. It appears to be more convenient technically to deal with Wakimoto modules instead of Verma modules for each 'local' factor in $U_{-h^\vee}(\mathbf{g}_\mathbf{A})$ and to replace the finite dimensional representation $V_\lambda = \otimes_i V_{\lambda_i}$ with the corresponding Verma module M_λ. (The generalized Bethe equations appear to be universal and Bethe vectors in V_λ are projections of Bethe vectors in M_λ.) To parametrize a Bethe vector choose first a set $\{w_1, ..., w_m\}$, $w_j \in \mathbf{C}$, and assign to each w_j a set of simple roots $\{\alpha_{i_j}\}_{i=1}^N$, one for each copy of $\mathbf{g}$ in $\mathbf{g}^N$. Let $F_{i_j}^i$

be the corresponding Chevalley generator of $\mathbf{g}$ acting nontrivially in the i-th copy of $\mathbf{g}$. The straightforward generalization of the Bethe creation operator (14) to the higher rank case is ([BF])

$$F(w_j) = \sum_{i=1}^{N} \frac{F_{i_j}^{i}}{w_j - z_i}. \tag{20}$$

The problem with (20) is that these operators no longer commute with each other. However, their counterparts in the big representation space (acting each in its own local factor attached to $w_j \in \mathbf{C}$) are already decoupled; acting on the vacuum they create singular vectors of imaginary weight. The conditions which assure it are precisely the generalized Bethe equations which read

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(\lambda_i, \alpha_{i_j})}{w_j - z_i} - \sum_{s \neq j} \frac{(\alpha_{i_s}, \alpha_{i_j})}{w_j - w_s} = 0, j = 1, ..., m. \tag{21}$$

Bethe vectors in the reduced space are computed as correlation functions which correspond to the tensor product of these singular vectors.

Another important point is the connection with the Knizhnik-Zamolodchikov equations. Recall that this is a system of equations satisfied by the correlation functions for an arbitrary value of the central charge; the critical value $c = -h^{\vee}$ corresponds to the semiclassical limit for the KZ system (small parameter before the derivatives). The outcome of this is two-fold: first, the Bethe vectors for the Gaudin model appear naturally in the semiclassical asymptotics of the solutions of the KZ system [RV]. Moreover, the exact integral representation of the solutions (for any value of the central charge) also involves the Bethe vectors [FeiFrR].

4. QUANTUM INTEGRABLE SYSTEMS AND QUANTUM GROUPS

For an expert in Quantum Integrability the Gaudin model is certainly sort of a limiting special case. The real thing starts with the quantization of *quadratic* Poisson bracket relations (9). This is a much more complicated problem which eventually requires the whole machinery of Quantum Groups (and has led to

their discovery). The substitute for the Poisson bracket relations is the famous relation

$$R(u\ v^{-1})L_1(u)L_2(v)R(u\ v^{-1})^{-1} = L_2(v)L_1(u), \tag{22}$$

where $R(u)$ is the quantum R-matrix satisfying the quantum Yang-Baxter identity

$$R_{12}(u)R_{13}(u\ v)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u\ v)R_{12}(u). \tag{23}$$

To bring a quantum mechanical system into Lax form one has to arrange quantum observables into a Lax matrix $L(u)$ (which is a rational function of u) and to find an appropriate R-matrix satisfying (22), (23). First examples of quantum Lax operators were constructed by error and trial method; in combination with the Bethe ansatz technique this has led to explicit solution of important problems [STF] [FT1] [F1] [F2]. The algebraic concept which brings order to the subject is that of *quasitriangular Hopf algebra* [D]. The main examples of quasirtiangular Hopf algebras arise as q-deformations of universal enveloping algebras associated with Manin triples. Remarkably, the general pattern represented by Theorems 1, 2 survives q-deformation.

Remark. In the context of Quantum Integrability the term 'Quantum Groups' now in current use is slightly misleading; as a matter of fact, the deformation parameter q has nothing to do with the Planck's constant h which distinguishes quantum systems from the classical ones; we have seen already that certain quantum integrable systems (e.g the Gaudin magnets) are related to ordinary Lie algebras. The real reason to deal with the q-deformed case is that the Hopf structure which is inherent to the quasitriangular Hopf algebras is adapted to the kinematics of multiparticle systems (see below).

Definition 1 *Let A be a Hopf algebra with coproduct Δ and antipode S; let Δ' be the opposite coproduct in A. A is called quasitriangular if*

$$\Delta'(x) = R\Delta(x)R^{-1} \tag{24}$$

for all $x \in A$ and for some distinguished invertible element $R \in A \otimes A$ (universal R-matrix) and, moreover,

$$(\Delta \otimes id)\, R = R_{13}R_{23}, (id \otimes \Delta)\, R = R_{13}R_{12}. \tag{25}$$

(I use standard tensor notation to denote different copies of spaces concerned.) Identities (25) imply that R satisfies the Yang-Baxter identity

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \tag{26}$$

Let A^0 be the dual Hopf algebra equipped with the opposite coproduct (in other words, its coproduct is dual to the opposite product in A). Put $R^+ = R, R^- = \sigma(R^{-1})$ (here σ is the permutation map in $A \otimes A$, $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x$) and define the mappings $R_\pm : A^0 \to A : f \mapsto \langle f \otimes id, R^\pm \rangle$; by (25) $R^\pm$ are Hopf algebra homomorphisms. Define the action $A^0 \otimes A \to A$ by

$$f \circ x = \sum_i R^+(f_i^{(1)})\, x\, S(R^-(f_i^{(2)}),\ \textit{where}\ \Delta^0 f = \sum_i f_i^{(1)} \otimes f_i^{(2)}. \tag{27}$$

A is called *factorizable* if A is a free A^0-module generated by $1 \in A$. (Let us denote the corresponding linear isomorphism $A^0 \to A$ by F for future reference.) It is easy to see that Theorem 2 remains valid for factorizable Hopf algebras. There is a more interesting way to state this theorem which brings to light the role of quantum Lax operators and the parallels with the classical case. Main applications of this theorem are connected with quantized loop algebras; the two important classes are quantum affine Lie algebras and the Yangians [D]. For concreteness I shall consider only the first class; the case of the Yangians requires more effort, as there is still no good realization of their doubles (see, however, [Sm]). Accurate formulation will require some extra notation.

Let $\mathbf{g}$ be a simple Lie algebra. Let $\hat{\mathbf{g}}$ be the corresponding extended affine Lie algebra containing both the central element c and the conjugate scaling element d. Let $A = U_q(\hat{\mathbf{g}})$ be the corresponding quantum affine algebra.Fix a finite dimensional representation (V, ρ_V) of $U_q(\hat{\mathbf{g}})$;for $z \in \mathbf{C}^*$ let $\rho_{V(z)}$ be the representation of A given by $\rho_{V(z)}(a) = \rho(z^d a z^{-d}$. Let A^0 be the dual of A with the opposite coproduct. Let $\mathcal{R}$ be the universal R-matrix of A.

Take A^0 as the algebra of observables. Let $L \in A \otimes A^0$ be the canonical element. Let $L^V(z) = (\rho_{V(z)} \otimes id)L, L^W(z) = (\rho_{W(z)} \otimes id)L, R^{VW}(z) = (\rho_{V(z)} \otimes \rho_W(z))\mathcal{R}$. We may call $L^V(z) \in End V \otimes A^0$ the *universal quantum Lax operator* (with auxiliary space V). Fix a finite-dimensional representation π of A^0; one can show that $(id \otimes \pi)\, L_V(z)$ is rational in z. (Moreover, Tarasov

[T] showed how to use this dependence on z to completely classify finite-dimensional representations of A^0.) Property (24) immediately implies that

$$L_2^W(w)L_1^V(v) = R^{VW}(vw^{-1})L_1^V(v)L_2^W(w)\left(R^{VW}(vw^{-1})\right)^{-1}. \tag{28}$$

Moreover, $R^{VW}(z)$ satisfies the Yang-Baxter identity (23).

Let H be the Cartan subgroup of G. Fix $h \in H$ and put $l_V^h(v) = tr_V \rho_V(h)L^V(v)$, then $l_V^h(v)l_W^h(w) = l_W^h(w)l_V^h(v)$. Elements $l_V^h(v)$ are usually called (twisted) *transfer matrices.*

Remark. Twisting the transfer matrix by $h \in H$ is of course possible in the classical case or for the Gaudin model as well; for $U_q(\mathbf{g})$, however, there is a natural twist (which comes from the square of the antipode), and so it is worth introducing the generic twist from the very beginning. For $h = 1$ $l_V^h(v)$ is the simplest 'spectral invariant' of the quantum Lax operator $L^V(v)$.

It is convenient to extend A by adjoining to it group-like elements which correspond to the extended Cartan subalgebra $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{h} \oplus \mathbf{C}d$ in $\hat{\mathbf{g}}$. Let $\hat{H} = H \times \mathbf{C}^*$ be the corresponding "extended Cartan subgroup" in A generated by elements $h = q^\lambda, \lambda \in \mathbf{h}, t = q^{kd}$. Let $\hat{H} \times A \to A$ be its natural action on A by right translations, $\hat{H} \times A^0 \to A^0$ the contragredient action. The algebra $A = U_q(\hat{\mathbf{g}})$ is factorizable; let $F : A^0 \to A$ be the isomorphism induced by the action (27); for $s \in \hat{H}$ put $F^s = F \circ s$. It is natural to compute the image of the universal Lax operator $L_V(z) \in End V(z) \otimes A^0$ under the 'factorization mapping' $(id \otimes F^s)$; this image is a formal series in z which is infinite in both directions, but its coefficients are well defined elements in $End V \otimes A$. Put

$$\begin{gathered} T_V^s(z)^\pm = (\ id \otimes R^\pm \circ s)\, L_V(z) \in End V\left[\left[z^{\pm 1}\right]\right] \otimes A, \\ T_V^s(z) = T_V^s(z)^+\ (id \otimes S)\, T_V^s(z)^-, h \in \hat{H}; \end{gathered} \tag{29}$$

it is easy to see that

$$T_V^s(z)^\pm = \left(id \otimes s^{\pm 1}\right) T_V^1(z)^\pm$$

and hence

$$T_V^s(z) = (id \otimes s)\, T_V^1(z)\, (id \otimes s);$$

moreover, if $s = h^{-1}t$, where $h \in H$ and $t = q^{kd}$, we have also

$$T_V^s(z) = (\rho_V(h) \otimes id)\, T_V^t(z)\, (\rho_V(h) \otimes id).$$

Put $t_V^s = tr_V T_V^s(z) = tr_V \rho_V(h)^2 T_V^t(z)$; clearly, we have $t_V^s(z) = F^t(l_V^{h^2}(z))$. Let U be any highest weight A-module of the critical level $k = -h^\vee$. Let 2ρ be the sum of positive roots of $\mathbf{g}$.

Theorem 3 *(i) [RS] Suppose that $s = q^{-\rho} q^{-h^\vee d}$. Then all coefficients of $t_V^s(z)$ are central in U. (ii) For any $h \in H$ we have $l_V^{h^2}(z) = F^{hs^{-1}}(t_V^s(z))$.*

Thus the duality between Hamiltonians and Casimir operators holds for quantum affine algebras as well. This allows to anticipate connections between the generalized Bethe ansatz, representation theory of quantum affine algebras at the critical level and the q-KZ equation [FrR], [Sm]. The results bearing on these connections are already abundant [DE], [TV], although they are still not in their final form.

As already noticed in the classical context, the Hopf structure on A^0 is perfectly suited to the study of lattice systems. Let $\Delta^{(N)} : A^0 \to \otimes^N A^0$ be the iterated coproduct map. $\otimes^N A^0$ may be interpreted as the algebra of observables associated with a multiparticle system. Put $\hat{t}_V^h(z) = \Delta^{(N)} t_V^h(z)$; Laurent coefficients of $\hat{t}_V^h(z)$ provide a commutative family of Hamiltonians in $\otimes^N A^0$. Let $i_n : A^0 \to \otimes^N A^0$ be the natural embedding, $i_n : x \mapsto 1 \otimes ... \otimes x \otimes ... \otimes 1$; put $L_V^n = (id \otimes i_n) L_V$. Then

$$\hat{t}_V^h(z) = tr_V \left(\rho_V(h) \overleftarrow{\prod_n} L_V^n \right). \tag{30}$$

Formula (30) has a natural interpretation in terms of lattice systems: L_V^n may be regarded as 'local' Lax operators attached to the points of a periodic lattice $\Gamma = \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$; commuting Hamiltonians for the big system arise from the monodromy matrix $M_V = \overleftarrow{\prod} L_V^n$ associated with the lattice. Finally, the twist $h \in H$ defines a quasiperiodic boundary condition on the lattice. The study of the lattice system again breaks into two parts: (a) *Find the joint spectrum of $\hat{l}_V(z)$*. (b) *Reconstruct the Heisenberg operators corresponding to 'local' observables and compute their correlation functions.* This is the *Quantum Inverse Problem* (profound results on it are due to F.Smirnov [Sm].)

Remarks. 1. The realization of the Casimirs described in Theorem 3 is a result of a relatively long development started by Faddeev, Reshetikhin and

Takhtajan [FRT]; they introduced the concept of 'universal Lax operator' and used the commutation relations for (29) to give an alternative definition of quasitriangular Hopf algebras corresponding to classical simple Lie algebras and to describe their center.

2. One may have the impression from the discussion above (and especially after reading Drinfeld's report [D]) that Hopf structure is a *sine qua non* condition for the study of integrable systems. This is not exactly the case. The properties of $\Delta^{(N)} : A^0 \to \otimes^N A^0$ imply that quantum observables corresponding to different copies of A^0 commute with each other. There are many physically interesting examples when it is not true. An extension of the outlined formalism which drops out this restriction is possible. Interesting nontrivial examples were found recently by Faddeev and Volkov [FV].

Let us finally return once again to the construction of quantum eigenstates described in Section 3 for the sl(2) Gaudin model. One important point of this construction is the existence of a vacuum, or a reference state (in the realization using Casimir operators at the critical level this vacuum is the image of the highest weight vector). There are many physically interesting models where there is no such vacuum vector, and the Bethe ansatz technique does not apply immediately. These problems certainly represent a major challenge from the point of view of representation theory. Remarkably, the direct methods of QISM still work in this situation. Sklyanin [S2] proposed an advanced version of the Bethe ansatz (*the functional Bethe ansatz*) which is equivalent to a separation of variables for the commuting quantum Hamiltonians; this technique is still mainly confined to the rank one case, but even so it presents striking parallels with the classical separation of variables based on the Jacobi inversion problem for abelian integrals (cf. also [Kuz], [HW]).

I would like to thank L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, and E. K. Sklyanin for many valuable advices during the preparation of this report; special thanks are due to M. Flato for his criticism of the draft text.

REFERENCES

[A] Adler M., On a trace functional for formal pseudodifferential operators and the symplectic structure for the KdV type equations, *Invent. Math.* **50**, 219-248 (1979).

[B] Baxter R.J., Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. Academic Press, London, 1982.

[BD] Belavin A.A., Drinfeld V.G., Triangle equations and simple Lie algebras, *Sov. Sci. Rev.*, **4**C, 93-165 (1983).

[BF] Babujian H.M., Flume R., Off-shell Bethe ansatz equations for Gaudin magnets and solutions of KZ equations, Preprint Bonn-HE-93-30.

[DE] Ding J., Etingof P., Center of a quantum affine algebra at the critical level. Preprint. Yale University, hep-th 9403064 (1994).

[D] Drinfeld V.G., Quantum Groups. Proc. ICM-86 (Berkeley), vol. 1, p. 798. AMS, 1987.

[F1] Faddeev L.D. Quantum Completely Integrable Systems in Quantum Field Theory. *Sov. Sci. Rev.***1**C, 107-155 (1980).

[F2] Faddeev L.D. Integrable Models in (1+1)-dimensional Quantum Field Theory. *Les Houches* 1982. Elsevier Science Publ. 1984.

[FRT] Faddeev L.D., Reshetikhin N.Yu., Takhtajan L.A. Quantization of Lie groups and Lie algebras. *Leningrad Math. J.*, **1**, 178-207 (1989).

[FT1] Faddeev L.D., Takhtajan L.A., Quantum Inverse Scattering Method. *Russian Math. Surveys,* **34**:5, 11-68, (1979).

[FT2] Faddeev L.D., Takhtajan L.A., Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons. Springer, 1987.

[FV] Faddeev L.D., Volkov A.Yu., Abelian current algebra and the Virasoro algebra on the lattice. *Phys. Lett.* B315, 311-318 (1993).

[FeiFr] Feigin B, Frenkel E, Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gelfand-Dikij algebras, *Int. J. Mod. Phys.A* **7**, Suppl. 1A (1992), 197-215.

[FeiFrR] Feigin B., Frenkel E., and Reshetikhin N., Gaudin model, Bethe ansatz and correlation functions at the critical level. Preprint hep-th 9401 (1994).

[FrR] Frenkel I.B., Reshetikhin N.Yu., Quantum affine algebras and holonomic difference equations. *Commun. Math. Phys.* **146**, 1-60 (1992).

[G] Gaudin M., La Fonction d'Onde de Bethe. Masson, Paris, 1983.

[GGKM] Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M., Method for solving the KdV equation, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095-1097 (1967).

[HW] Harnad J., Winternitz P., Classical and quantum integrable systems in $\tilde{\mathbf{gl}}(2)^{+*}$ and separation of variables. Preprint CRM 1921, Montreal 1993.

[J] Jurčo B., Classical Yang-Baxter equation and quantum integrable systems. *J. Math. Phys.* **30**, 1289-1293 (1989).

[K] Kostant B., Quantization and Representation Theory. In: Representation Theory of Lie Groups, Proc. SRC/LMS Res. Symp., Oxford 1977. *London Math. Soc. Lecture Notes Series*, **34**, 287-316 (1979).

[KuS] Kulish P.P., Sklyanin E.K., Quantum Spectral Transform Method. In: Integrable Quantum Field Theories. *Lecture Notes in Physics* **151**, 61-119, Springer, 1981.

[Kuz] Kuznetsov V., Equivalence of two graphical calculi. *J.Phys.* A**25**, 6005-6026.

[L] Lax P.D., Integrals of nonlinear equations and solitary waves. *Commun. Pure Appl. Math.*, **21**, 467-490, 1968.

[RS] Reshetikhin N.Yu., Semenov-Tian-Shansky M.A., Central extensions of quantum current groups. *Lett. Math. Phys.* **19**, 133-142 (1990).

[RV] Reshetikhin N.Yu., Varchenko A., Quasiclassical asymptotics of the KZ equations. Preprint. 1993.

[S1] Sklyanin E.K., On complete integrability of the Landau-Lifshitz equation. Preprint LOMI, E-3-79, Leningrad, 1979.

[S2] Sklyanin E.K., Quantum Inverse Scattering Method. Selected Topics. In: Quantum Groups and Quantum Integrable Systems. Ge M.L., ed. World Scientific, Singapore, 1992.

[STF] Sklyanin E.K., Takhtajan L.A., Faddeev L.D., The quantum inverse scattering method. I. *Theor. Math. Phys.* **101**, 194-220 (1979).

[Sm] Smirnov F.A., Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory. *Adv. Series in Math. Phys.* **14**, World Scientific, Singapore, 1992.

[T] Tarasov V.O., Irreducible monodromy matrices for the R-matrix of the XXZ-model and lattice local quantum Hamiltonians. *Theor. Math. Phys.* **63**, 440-454 (1985).

[TV] Tarasov V.O., Varchenko A., Jackson integral representations for solutions of the quantized KZ equation. St. Petersburg Math. J. **6**, 1994.

Michael SEMENOV-TIAN-SHANSKI

Physique-Mathématique
Université de Bourgogne
B.P. 138
F-21004 DIJON CEDEX

and

The St. Petersburg Branch
of the V.A. Steklov Mathematical Institute
191011 ST. PETERSBURG, RUSSIA

Astérisque

ALAN WEINSTEIN

Deformation quantization

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 789, p. 389-409

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__389_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Juin 1994
46ème année, 1993-94, n° 789

DEFORMATION QUANTIZATION

by **Alan WEINSTEIN**

1. INTRODUCTION

Quantum mechanics is often distinguished from classical mechanics by a statement to the effect that the observables in quantum mechanics, unlike those in classical mechanics, do not commute with one another. Yet classical mechanics is meant to give a description (with less precision) of the same physical world as is described by quantum mechanics. One mathematical transcription of this *correspondence principle* is the that there should be a family of (associative) algebras $\mathcal{A}_\hbar$ depending nicely in some sense upon a real parameter $\hbar$ such that $\mathcal{A}_0$ is the algebra of observables for classical mechanics, while $\mathcal{A}_\hbar$ is the algebra of observables for quantum mechanics. Here, $\hbar$ is the numerical value of Planck's constant when it is expressed in a unit of action characteristic of a class of systems under consideration. (This formulation avoids the paradox that we consider the limit $\hbar \to 0$ even though Planck's constant is a *fixed* physical magnitude.)

The first order (in $\hbar$) deviation of the quantum multiplication from the classical one is to be given by the Poisson bracket of classical observables. This idea goes back to Dirac [Di], who emphasized the analogies between classical Poisson brackets and quantum commutators. It played an important role in much of Berezin's work [Be1][Be2] on quantization.

Although the terminology and much of the inspiration comes from physics, noncommutative deformations of commutative algebras have also played a role of increasing importance in mathematics itself, especially since the advent of quantum groups about 15 years ago.

In the theory of *formal deformation quantization*, the "family of algebras $\mathcal{A}_\hbar$" is in fact a family $\star_\hbar$ of associative multiplications on a fixed complex vector space $\mathcal{A}$. More precisely, this family is given by a sequence of bilinear mappings

$B_j : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ for $j = 0, 1, \ldots$ so that

$$a \star_\hbar b = \sum B_j(a,b)\hbar^j.$$

The condition for associativity of the product is that

$$\sum_{j+k=n} B_j(a, B_k(b,c)) = \sum_{j+k=n} B_j(B_k(a,b), c)$$

for $n = 0, 1, 2, \cdots$.

The problem of formal deformation quantization is to classify such families up to equivalence, where an equivalence between formal deformations $\mathbf{B} = B_0, B_1, \ldots$ and $\mathbf{B}' = B_0', B_1', \ldots$ is, intuitively speaking, a formal family $G_{(\hbar)} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ of maps such that $G_{(\hbar)}(a \star_\hbar b) = G_{(\hbar)}(a) \star'_\hbar G_{(\hbar)}(b)$. More precisely, such a family is given by a sequence $\mathbf{G} = G_0, G_1, \ldots$ of linear maps from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{A}$ which satisfy the conditions

$$\sum_{j+k+r=n} B_r(G_j(a), G_k(b)) = \sum_{r+s=n} G_s(B_r'(a,b))$$

for $n = 0, 1, 2, \ldots$.

It is often useful to think of the deformation quantization as giving an associative algebra structure on the space $\mathcal{A}[[\hbar]]$ of formal power series with coefficients in $\mathcal{A}$ and an equivalence as giving an isomorphism between such algebras.

In attempting to solve the existence problem recursively for the B_j's, one finds at each stage an equation of the form $\delta B_j = F_j$, where F is a quadratic expression in the terms determined previously; a similar equation arises for each G_j in the equivalence problem. The operator δ goes from bilinear to trilinear (or linear to bilinear) $\mathcal{A}$-valued functionals on $\mathcal{A}$ and is precisely the coboundary operator for Hochschild cohomology with values in $\mathcal{A}$ of the algebra $\mathcal{A}$ with multiplication given by B_0. (In the equivalence problem, one normally assumes the product $\star_0$ as given, so that $B_0 = B_0'$, and G_0 is assumed to be the identity.) This cohomological approach to the deformation of algebras was established in the 1960's by Gerstenhaber [Ge].

A program to apply the methods of Gerstenhaber to algebras of interest in classical and quantum mechanics was laid out in 1978 by Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz, and Sternheimer [BFFLS]. (Another survey of the current state of

the art may be found in [FS].) The aim of this program has been to develop as much as possible of quantum mechanics in terms of the deformed algebra structures, without using the customary representations in Hilbert spaces. Here, $\mathcal{A}$ is taken to be the space $C^\infty(M)$ of smooth complex-valued functions on a manifold M which represents the classical phase space. The undeformed product $\star_0$ (i.e. B_0) is taken to be the usual pointwise multiplication, so that $(\mathcal{A}, \star_0)$ is the algebra of classical observables. Next, following Dirac, it is assumed that the "limit" $\lim_{\hbar\to 0}[(a\star_\hbar b - b\star_\hbar a)/i\hbar]$ (i.e. $B_1(a,b) - B_1(b,a)/i\hbar$ is equal to a given classical Poisson bracket $\{a,b\}$ on $\mathcal{A}$. This bracket should be a *Poisson structure* in the sense that it satisfies the axioms of a Lie algebra together with the Leibniz identity $\{ab,c\} = \{a,c\}b + a\{b,c\}$. In this context, a formal deformation $\mathbf{B} = B_0, B_1, \ldots$ is called a $\star$-product (or star-product) if each of the bilinear maps B_j is a differential operator in each of its arguments, annihilating the constant functions when $j \geq 1$. These conditions make the $\star$-product local and insure that the constant function 1 remains as the unit element. Occasionally, the parity condition $B_j(a,b) = (-1)^j\overline{B_j(b,a)}$ is also imposed.

From here on, we will use the terms "$\star$-product" and "(deformation) quantization" interchangeably.

Among the Poisson manifolds (manifolds equipped with Poisson structure), the symplectic manifolds are of particular interest. We recall that a symplectic manifold is a manifold M equipped with a closed non-degenerate 2-form. According to Darboux's Theorem, such a manifold is always locally isomorphic to $\mathbf{R}^{2n}$ equipped with the symplectic form expressed in coordinates $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ as $\sum_i dq_i \wedge dp_i$. The Poisson structure

$$\{a,b\} = \sum_j \left(\frac{\partial a}{\partial q_j}\frac{\partial b}{\partial p_j} - \frac{\partial a}{\partial p_j}\frac{\partial b}{\partial q_j} \right)$$

is invariant under all diffeomorphisms preserving the symplectic form, so there is a well-defined Poisson structure on any symplectic manifold. Non-symplectic manifolds arise for instance as quotients of symplectic manifolds by symmetry groups and as the classical limits of quantum groups.

The fundamental example of a $\star$-product is the *Moyal-Weyl product* on $\mathbf{R}^{2n}$ with the Poisson structure just described. It comes from the composition of operators on $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ via Weyl's identification [Wy] of such operators with functions

on $\mathbf{R}^{2n}$, and was used by Moyal [My] to study quantum statistical mechanics from the viewpoint of classical phase space. The term B_1 in the formal series for this product is just $i/2$ times the "Poisson operator" $(a,b) \mapsto \{a,b\}$, and the full series is essentially the exponential of B_1. We will define the "powers" of the Poisson operator which enter in this series in a slightly more general setting. Let V be a vector space, and let π be a skew-symmetric bilinear functional on V^*. The formula $\{a,b\} = \pi(da,db)$ defines a Poisson structure on V. Associated to the bilinear operator π is a unique differential operator $\Pi : C^\infty(V \times V) \to C^\infty(V \times V)$ with constant coefficients for which $\{a,b\} = \Delta^*\Pi(a \otimes b)$; here, $a \otimes b$ is the function $(y,z) \mapsto a(y)b(z)$, and $\Delta^* : C^\infty(V \times V) \to C^\infty(V)$ is restriction to the diagonal. Now we define the Moyal-Weyl product on V by

$$a \star_\hbar b = \Delta^* \exp(i\hbar\Pi/2)(a \otimes b).$$

The space $C^\infty(V)[[\hbar]]$ with this product will be called the *Weyl algebra* of V and denoted by $W(V)$.

If $(x_1, \ldots, x_m)$ are linear coordinates on V, then the Poisson brackets $\{x_r, x_s\}$ are constants π_{rs} (the components of π), and the operator B_j in the expansion of the Moyal-Weyl product is

$$B_j(a,b)(x) = \frac{1}{j!}\left(\frac{i}{2}\sum_{r,s}\pi_{rs}\frac{\partial}{\partial y_r}\frac{\partial}{\partial z_s})^j(a(y)b(z)\right)_{|y=z=x}. \tag{1}$$

On a general Poisson manifold, the Leibniz identity implies that the Poisson bracket is given by a skew-symmetric contravariant tensor (or "bivector") field π, called the Poisson tensor, via the formula $\{a,b\} = \pi(da,db)$. If the rank of the tensor π (i.e. the rank of the matrix function $\pi_{rs}(x) = \{x_r, x_s\}$ which represents it in local coordinates, or the rank of the corresponding mapping from 1-forms to vectors) is constant, then by a theorem of Lie [L] the Poisson manifold is locally isomorphic to a vector space with constant Poisson structure. Hence such Poisson manifolds, which are called *regular*, are always *locally* deformation quantizable; the problem is to patch together the local deformations to produce a global $\star$-product.

There is one case in which the patching together of local quantizations is easy. The Moyal-Weyl product on a vector space V with constant Poisson structure is invariant under all the affine automorphisms of V, since the notion of "operator

with constant coefficients" used in defining the powers of the Poisson operator is invariant under such transformations. As a consequence, we can construct a global quantization of any Poisson manifold M covered by local isomorphisms with V for which the transition maps are affine. Such a covering exists when M admits a flat torsionless linear connection for which the covariant derivative $\nabla\pi$ is zero.

Torsionless Poisson connections already play an important role in the treatment of deformation quantization in [BFFLS]. Just as the term B_1 in the deformation is determined by the Poisson structure (up to equivalence, and exactly, if the parity condition is satisfied), so the term B_2 is essentially determined by a Poisson connection, which exists (but is not unique) on any regular Poisson manifold. (Note that existence of a connection with $\nabla\pi = 0$ implies that the Poisson structure must be regular.) The existence of a deformation quantization in the presence of a flat torsionless Poisson connection was first established in [BFFLS] by replacing the partial derivatives in (1) by covariant derivatives with respect to parallel vector fields.

When our Poisson manifold does not admit a flat torsionless Poisson connection, the hard work begins. [BFFLS] and [Gu] began a careful analysis of the Hochschild cohomology space $H^3(\mathcal{A},\mathcal{A})$ which is home to the obstructions to successive construction of $B_3, B_4, \ldots$. It was soon found that the obstructions could be chased into the de Rham cohomology space $H^3_{\text{deRham}}(M)$, so there is no obstruction to constructing a deformation quantization when the 3rd Betti number of M is zero. This step involved in an crucial way the much smaller Chevalley cohomology space $H^3_{\text{Chev}}(\mathcal{A},\mathcal{A})$ of $\mathcal{A}$ considered as a Lie algebra via the Poisson bracket. (Deformations of this Lie algebra were studied in [V], a paper which was important for all these developments.) After further results in special cases (e.g. cotangent bundles), it was proven by de Wilde and Lecomte in [DeL1] that a deformation quantization exists on any symplectic manifold, so that at least in this case the obstructions in $H^3_{\text{deRham}}(M)$ were only illusory. Their proof (as well as the version in [DeL2]) involved rather complicated calculations which made the result look rather "technical".

Some later versions of the existence proof still relied on patching together local Moyal-Weyl products with nonlinear coordinate changes. In [KM2], Karasev and Maslov give further details of a proof, whose first outline was sketched in [KM1], which reduces the patching to rather standard sheaf-theoretic ideas. Their main

idea is to realize the deformed algebra as operators on a sheaf of "wave-packets" built by gluing together standard sheaves over $\mathbf{R}^{2n}$ with the aid of operators of Fourier integral type. In fact, this sheaf of wave packets can be constructed only when a certain quantization condition (elucidated in [DaP] and equivalent to a standard condition in the theory of geometric quantization [Cz]) is satisfied, but the corresponding sheaf of operators always exists—it is only the "representation" which is missing when the condition is not satisfied.

Another proof of the existence of deformation quantization which uses patching ideas was given by Omori, Maeda, and Yoshioka [OMY1]. Although their proof still involves substantial computations, it uses a fundamental idea which is also basic in the proof of Fedosov (who discovered it independently). Each tangent space of a Poisson manifold M can be considered as an affine space with a constant Poisson structure, so it carries a natural Moyal-Weyl quantization. In this way, the tangent bundle TM becomes a Poisson manifold with the fibrewise Poisson bracket, and with a fibrewise quantization. To quantize M itself, we may try to identify a subalgebra of the quantized algebra $C^\infty(TM)[[\hbar]]$ with the vector space $C^\infty(M)[[\hbar]]$ in such a way that the induced multiplication on $C^\infty(M)[[\hbar]]$ gives a deformation quantization of M. Such an identification is called a *Weyl structure* in [OMY1]. Weyl structures are investigated from a classical viewpoint in [EW], where they are seen to be closely related to exponential mappings.

An affine space V with constant Poisson structure carries a Weyl structure defined as follows. Let $(x_1, \ldots, x_m)$ be affine coordinates, and let $(y_1, \ldots, y_m)$ be the corresponding linear coordinates on a typical tangent space, so that the coordinates on TV are $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$, with Poisson structure defined by $\{y_i, y_j\} = \pi_{ij}$ and all other brackets between coordinate functions zero. The Weyl structure then consists of those "functions" $u(x, y, \hbar)$ which are invariant under the translations $(x, y, \hbar) \mapsto (x + c, y - c, \hbar)$. The restriction map $u(x, y, \hbar) \mapsto u(x, 0, \hbar)$ is then an isomorphism, with inverse $v(x, \hbar) \mapsto u(x, y, \hbar) = v(x + y, \hbar)$. Now the fibrewise Moyal-Weyl product (i.e. with the y_j as quantized variables, and x_j as parameters) goes over under this isomorphism to the usual Weyl-Moyal product on V (i.e. with the x_j as quantized variables). The existence proof in [OMY1] involves patching together the local Weyl structures arising from a covering of a symplectic manifold M by coordinate charts. The patching is rather complicated, and it uses at one point the gluing operators of [KM].

A simpler existence proof based on gluing together Moyal-Weyl products was given by De Wilde and Lecomte. They keep a key idea of [OMY1] (the use of a local non-inner derivation related to scaling) but eliminate the machinery of Weyl manifolds to give a proof by patching using fairly standard methods of Čech cohomology. Deligne [De] has developed these ideas further, using among other things the theory of gerbes, to give a classification of $\star$-products in terms of Čech cohomology. It agrees with the one described in Section 3 below.

Acknowledgements

I would like to thank Claudio Emmrich, Boris Fedosov, Moshe Flato, Simone Gutt, Vinay Kathotia, Daniel Sternheimer, and Boris Tsygan for their assistance in the preparation of this report.

2. FEDOSOV'S CONSTRUCTION

Fedosov overcomes the difficulty of patching together local Weyl structures by, in effect, making the canonical coordinate neighborhoods "infinitely small". To understand his idea, we should first think of elements of the deformed algebra $C^\infty(TM)[[\hbar]]$ as sections of the bundle $W(TM)$ over M whose fibre at $x \in M$ is $W(T_xM)$. When M is an affine space, the global Weyl structure described above can then be identified with a space of parallel sections of this bundle with respect to a certain flat connection on $W(TM)$. In a similar way we get a Weyl structure, and hence another construction of the deformation quantization, on any manifold with a flat torsionless Poisson connection.

Of course we are most interested in dealing with the case where M does not admit a flat Poisson connection, and this is where the most interesting part of Fedosov's proof comes in. In effect, he says that the tangent bundle of every symplectic (or regular Poisson) manifold *does* admit a flat Poisson connection, if one gives the appropriate extended meaning to that concept. Namely:

- The connection is constructed, not on the tangent bundle, but on the bundle $W(TM)$ of Weyl algebras. The "structure Lie algebra" of this connection, in which the connection forms take values, is $W(\mathbf{R}^{2n})$ acting on itself by the adjoint representation of its Lie algebra structure. Since the full Weyl algebra is used, and not just the quadratic functions which generate linear symplectic transformations, the structure group effectively allows nonlinear transforma-

tions of the (quantized) tangent spaces. Since even linear generating functions are included, the structure group even allows translations.

- Actually (this idea was also used in [OMY1]), it is not the full Weyl algebra of $\mathbf{R}^{2n}$ which serves as the typical fibre, but only a certain quotient: the *formal* Weyl algebra $FW(\mathbf{R}^{2n})$, consisting of formal Taylor expansions at the origin. Geometrically, one can think of this step as the replacement of the (quantized) tangent bundle by a formal neighborhood of the zero section. This step may appear to be inconsistent with the inclusion of translations in the structure group, since these do not leave the origin fixed. In fact, the effect is to force us to forget the group and to work only with the structure Lie algebra. A beneficial, and somewhat surprising, result of this effect is that a parallel section with respect to a flat connection is not determined by its value at a single point. This situation is very close to that in formal differential geometry, where the bundle of infinite jets of functions on a manifold M has a flat connection whose sections are the lifts of functions on M. (See Section 1 of [Ts] for a nice exposition, with references.)

Fedosov uses an iterative method for "flattening" a connection which is similar to that used in many differential geometric problems. (See [Mi-Ru] for an example, and [Ru] for a recent survey.) Given a local trivialization of a bundle over a manifold, a connection is given by a 1 form ϕ with values in the Lie algebra $\mathbf{g}$; the curvature of the connection is the Lie algebra valued 2 form $\Omega_\phi = d\phi + \frac{1}{2}[\phi, \phi]$. If the curvature is not zero, we may try to "improve" the connection by adding another Lie algebra valued 1 form ϵ. The curvature zero condition for $\phi + \epsilon$ is the quadratic equation $d\epsilon + [\phi, \epsilon] = -\Omega_\phi - \frac{1}{2}[\epsilon, \epsilon]$. Rather than trying to solve this equation exactly, we linearize it by dropping the term $-\frac{1}{2}[\epsilon, \epsilon]$. The operator $d + [\phi, \ ]$ is the covariant exterior derivative D_ϕ, so our linearized equation has the form

$$D_\phi \epsilon = -\Omega_\phi. \tag{2}$$

From the Bianchi identity, $D_\phi \Omega = 0$ it appears that the obstruction to solving (2) for ϵ lies in a cohomology space. This is not quite correct, since $D_\phi^2 = [\Omega_\phi, \ ]$, which is not zero because the connection ϕ is not yet flat.

Up to now, we have essentially been following Newton's method for solving nonlinear equations. At this point, we add an idea similar to one often attributed

to Nash and Moser. (See Section III.6 of [S] for an exposition of this method with original references.) Since the linear differential equation (2) is only an approximation to the nonlinear one which we really want to solve, it is unnecessary to solve it precisely. Rather, it suffices to solve it approximately and to compensate for the error in the later iterations which will in any case be necessary to take care of the neglected quadratic term $-\frac{1}{2}[\epsilon, \epsilon]$. Such approximate solutions are constructed by some version of the Hodge decomposition. In the differential geometric applications mentioned above, the full story involves elliptic differential operators, Sobolev spaces, and so on, but in the case at hand, it turns out that the "Hodge theory" is purely algebraic and quite trivial.

2.1 On the formal Weyl algebra

The coefficients of the connection forms which we will use are sections of the bundle $FW(TM)$. Rather than measuring the size of these forms by the usual Sobolev norms involving derivatives, we shall use a pointwise algebraic measurement.

In the formal Weyl algebra $FW(V)$ of a Poisson vector space V, we assign the weight 2 to the variable $\hbar$ and the weight 1 to each linear function on V. We denote by $FW_r(V)$ the ideal generated by the monomials of weight r. Because the kth term in the expansion of the $\star$-product involves $2k$ derivatives and multiplication by $\hbar^k$, we obtain a filtration of the algebra $FW(V)$. We will also occasionally use the classical grading, compatible with the commutative multiplication but not with the $\star$-product, which assigns the weight 0 to $\hbar$ and 1 to each linear function on V.

The Lie algebra structure which we will use for the formal Weyl algebra is the quantum Poisson bracket [Di] defined by $[a, b] = (1/i\hbar)(a \star_\hbar b - b \star_\hbar a)$. The factor $(1/i\hbar)$ makes the quantum bracket reduce to the classical one (rather than to zero) when $h \to 0$. In addition, the quantum and classical brackets are equal when one of the entries contains only terms linear or quadratic in the variable on V, and they share the property $[FW_r(V), FW_s(V)] \subset FW_{r+s-2}(V)$, so that the adjoint action of any element of $FW_2(V)$ preserves the filtration.

Next we introduce the algebra $\mathcal{W}(V) = FW(V) \otimes \wedge^*(V)$, whose elements may be considered as differential forms on the "quantum space whose algebra of functions is $FW(V)$". $\mathcal{W}(V)$ inherits a filtration by subspaces $\mathcal{W}_r(V)$ from

the formal Weyl algebra, and a grading from the exterior algebra. We can also consider $\mathcal{W}(V)$ as the algebra of infinite jets at the origin of differential forms on the classical space V, in which case we generally use the classical grading. In this way, $\mathcal{W}(V)$ inherits the exterior derivative operator, which we denote by δ. Remarkably, δ is also a derivation for the quantized algebra structure on $\mathcal{W}(V)$.

We may describe the operator δ in terms of linear coordinates $(x_1, \ldots, x_m)$ on V. With an eye toward the case where V is a tangent space, we denote the corresponding formal generators of $FW(V)$ by $(y_1, ..., y_m, \hbar)$ and the generators of $\wedge^*(V)$ by $(dx_1, \ldots, dx_m)$. Then $\mathcal{W}(V)$ is formally generated by the elements $y_i \otimes 1$, $\hbar \otimes 1$, and $1 \otimes dx_i$, and we have $\delta(y_i \otimes 1) = 1 \otimes dx_i$, $\delta(\hbar \otimes 1) = 0$, and $\delta(1 \otimes dx_i) = 0$. Notice that δ decreases the Weyl algebra filtration degree by 1 while it increases the exterior algebra grading by 1.

Since δ is essentially the de Rham operator on a contractible space, we expect the cohomology of the complex which it defines to be trivial. Fedosov makes this explicit by introducing the dual operator δ^* of contraction with the Euler vector field $\sum_i y_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i}$. More precisely, δ^* maps the monomial $y_{i_1} \cdots y_{i_p} \otimes dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}$ to

$$\sum_k (-1)^{k-1} y_{i_1} \cdots y_{i_p} y_{j_k} \otimes dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{j_k}} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}.$$

(This operator is *not* a derivation for the quantized algebra structure.) A simple computation (or the Cartan formula for the Lie derivative by the Euler vector field) shows that, on the monomial above, we have $\delta\delta^* + \delta^*\delta = (p+q)\mathrm{id}$, so that if we define the operator δ^{-1} to be $\frac{1}{p+q}\delta^*$ on the monomial above, and 0 on $1 \otimes 1$, we find that each element u of $\mathcal{W}(V)$ has the decomposition $u = \delta\delta^{-1}u + \delta^{-1}\delta u + \mathcal{H}u$, where the "harmonic" part $\mathcal{H}u$ of u is the part involving only powers of $\hbar$ and no y_i's or dx_i's, i.e. the pullback of u by the constant map from V to the origin. In other words, we have reproduced the usual proof of the Poincaré lemma via a homotopy operator from $\mathcal{H}$ to the identity.

When the Poisson vector space V is symplectic, the operator δ has anot her description. For any $a \in FW(V)$, $[y_i, a] = \{y_i, a\} = \sum_j \pi_{ij}(\partial a/\partial y_j)$. If (ω_{ij}) is the matrix of the symplectic structure, inverse to (π_{ij}), we get $\partial a/\partial y_i = [\sum_j \omega_{ij} y_j, a]$, and hence $\delta(a \otimes 1) = \sum_i (\partial a/\partial y_i) \otimes dx_i = [\sum_{ij} \omega_{ij} y_j \otimes dx_i, a \otimes 1]$. It follows from the derivation property that a similar equation holds for any element of $\mathcal{W}(V)$; i.e. the operator δ is equal to the adjoint action of the element $\sum_{ij} \omega_{ij} y_j \otimes dx_i$

(which is just the symplectic structure itself).

Of course, all the considerations above apply when V is replaced by a symplectic vector bundle E and $\mathcal{W}(V)$ by the space of sections of the associated bundle $\mathcal{W}(E) = FW(E) \otimes \wedge^*(E)$. In particular, when E is the tangent bundle of a symplectic manifold M, the operator δ and its relatives act on the algebra of differential forms on M with values in $FW(TM)$. Note that these operators are purely algebraic with respect to the variable in M, with δ being just the adjoint action of the symplectic structure considered as an $FW(TM)$-valued 1 form.

2.2 Flattening the connection

We are now ready for the iteration procedure to construct a flat connection on the bundle of Weyl algebras. For simplicity we describe the procedure in local canonical coordinates, but all the constructions are in fact intrinsic. We begin with an arbitrary (linear) Poisson connection on the tangent bundle of the symplectic manifold M. (In fact, one can even start with a connection with torsion–the torsion would be killed after the first iteration [Fe4].) This connection induces a covariant differentiation operator on the dual bundle, i.e. on the linear functions on fibres. In coordinates $(x_1, \ldots, x_m)$ on M and the corresponding basis $(y_1, \ldots, y_m)$ of linear functions, the connection form is a 1-form with values in the Lie algebra $\mathbf{sp}(m)$, whose elements may be identified with linear hamiltonian vector fields and hence with quadratic functions. Thus the connection form can be written as $\phi = \frac{1}{2} \sum \Gamma_{ijk} y_i y_j \otimes dx_k$. If we consider the same form (with the y_i's now interpreted as formal variables) as taking values in the bundle $FW(TM)$, it becomes the connection form for the associated connection on that bundle. Even if this connection were flat, it would not be the correct one to use for quantization, since its parallel sections would not be identifiable in any reasonable way with functions on M; instead we must use for our first approximation $\phi_0 = (\sum \omega_{kj} y_j + \frac{1}{2} \sum \Gamma_{ijk} y_i y_j) \otimes dx_k$.

To start the recursion, one calculates using the fact that the connection is symplectic and torsion free (see [Fe3]) that

$$\Omega_0 = -\frac{1}{2} \sum \omega_{ir} \otimes dx_i \wedge dx_r + \frac{1}{4} \sum R_{ijkl} y_i y_j \otimes dx_k \wedge dx_l = -1 \otimes \omega + R,$$

where ω is the symplectic form and R is the curvature of the original linear symplectic connection, considered as a 2 form with values in the Lie algebra of quadratic

functions. The term $-1 \otimes \omega$ appears even when the linear connection is flat, but it causes no trouble because it is a central element of the Weyl Lie algebra and therefore acts trivially in the adjoint representation.

We will now try to construct a convergent (with respect to the filtration) sequence ϕ_n of connections whose curvatures Ω_n tend to the central element $-1 \otimes \omega$. Fedosov calls this central element the *Weyl curvature* of the limit connection; to simplify notation, we will write $\widehat{\Omega} = \Omega + 1 \otimes \omega$ for the form which should be zero, and we call this the *effective curvature* .

As suggested above, we let $\phi_{n+1} = \phi_n + \epsilon_{n+1}$, where ϵ_{n+1} is a section of $\mathcal{W}(TM)$ which is an approximate solution of the linearized equation for zero effective curvature $D_n \epsilon_{n+1} + \widehat{\Omega}_n = 0$. The operator $D_n = D_{\phi_n}$ will have the form $d + \delta + [c_n, \ ]$, where c_n is an $FW(TM)$-valued 1 form. We will try to arrange for c_n to lie in $FW_2(TM)$ so that the operator $[c_n, \ ]$, like d, is filtration preserving. Since δ *lowers* the filtration degree by 1, the principal part of the differential operator D_n will actually be the algebraic operator δ (and not d as it would be if we measured forms by the size of their derivatives.)

Instead of solving $D_n \epsilon_{n+1} + \widehat{\Omega}_n = 0$, then, we try to solve the simpler equation $\delta \epsilon_{n+1} + \widehat{\Omega}_n = 0$. In fact, we cannot solve even this equation exactly, because the Bianchi identity gives $D_n \widehat{\Omega}_n = 0$ instead of $\delta \widehat{\Omega}_n = 0$. (The term $1 \otimes \omega$ is killed by both operators.) Nevertheless, we do the best we can and let the errors take care of themselves later. Thus, we simply define $\epsilon_{n+1} = -\delta^{-1}(\widehat{\Omega}_n)$ and try to live with the consequences.

From the recursion relation $\Omega_{n+1} = \Omega_n + D_n \epsilon_{n+1} + \frac{1}{2}[\epsilon_{n+1}, \epsilon_{n+1}]$, we find after a straightforward calculation using the decompositions $D_n = d + \delta + [c_n, \ ]$ and $u = \delta \delta^{-1} u + \delta^{-1} \delta u + \mathcal{H} u$ that

$$\widehat{\Omega}_{n+1} = \delta^{-1} \delta \widehat{\Omega}_n + \mathcal{H} \widehat{\Omega}_n + d\epsilon_{n+1} + [c_n, \epsilon_{n+1}] + \frac{1}{2}[\epsilon_{n+1}, \epsilon_{n+1}].$$

Using $D_n = d + \delta + [c_n, \ ]$ again, we can rewrite this as

$$\widehat{\Omega}_{n+1} = \delta^{-1} D_n \widehat{\Omega}_n - \delta^{-1} d\widehat{\Omega}_n - \delta^{-1}[c_n, \widehat{\Omega}_n] + \mathcal{H}\widehat{\Omega}_n + d\epsilon_{n+1} + [c_n, \epsilon_{n+1}] + \frac{1}{2}[\epsilon_{n+1}, \epsilon_{n+1}].$$

By the Bianchi identity $D_n \Omega_n = 0$, we get

$$\widehat{\Omega}_{n+1} = \mathcal{H}\widehat{\Omega}_n - \delta^{-1} d\widehat{\Omega}_n - \delta^{-1}[c_n, \widehat{\Omega}_n] + d\epsilon_{n+1} + [c_n, \epsilon_{n+1}] + \frac{1}{2}[\epsilon_{n+1}, \epsilon_{n+1}]$$

Suppose now that $\widehat{\Omega}_n \in \mathcal{W}_r(TM)$ with $r \geq 1$. Then $\mathcal{H}\widehat{\Omega}_n = 0$ and $\epsilon_{n+1} \in \mathcal{W}_{r+1}(TM)$, so that $c_n \in \mathcal{W}_2(TM)$ and hence all the terms on the right hand side of the equation above belong to $\mathcal{W}_{r+1}(TM)$.

Since $\widehat{\Omega}_0 = R$ has filtration degree 2, we conclude that $\widehat{\Omega}_n$ has degree at least $n+2$, and ϵ_{n+1} has degree at least $n+3$, so the sequence ϕ_n converges to a connection form ϕ for which the curvature is $\Omega = -1 \otimes \omega$. This curvature is a central section, so the connection on $FW(TM)$ associated to ϕ by the adjoint representation $FW(TM)$ is flat. Since the adjoint action is by derivations of the multiplicative structure, the space of parallel sections is a subalgebra of the space of all sections.

The last step in Fedosov's construction is to show by a recursive construction similar to the one above that each element of $C^\infty(M)[[\hbar]]$ is the harmonic part of a unique parallel section of $FW(TM)$, so that $C^\infty(M)[[\hbar]]$ is identified with the space of parallel sections and thus inherits from it an algebra structure, which is easily shown to be a deformation quantization associated with the symplectic structure ω.

3. CLASSIFICATION OF $\star$-PRODUCTS

Using techniques similar to those in [Gu] and building on earlier work of Flato, Lichnerowicz, Sternheimer, and Vey, S. Gutt showed around 1980 that the construction of star products on a symplectic manifold involves a choice within an affine space of dimension $b_2(M)$ at each power of $\hbar$. The proof involved an analysis of Hochschild and Chevalley cohomology with differentiable cochains null on constants. We refer to [FS] for a more detailed discussion of the state of the theory through the early 1980's.

Fedosov [Fe4] showed that his iterative construction of a connection on the bundle $FW(TM)$ can be modified so that the curvature becomes $\sum \hbar^j \otimes \omega_j$, for any sequence of closed 2 forms ω_j such that ω_0 is the original symplectic structure ω. He also showed that the isomorphism class of the resulting $\star$-product depends precisely on the sequence of de Rham cohomology classes $[\omega_j] \in H^2(M, \mathbf{R})$ and in particular is independent of the initial choice of connection.

This left open the question of whether every $\star$-product is isomorphic to one obtained by Fedosov's construction. A positive answer to this question has given by Nest and Tsygan. Using a noncommutative version of Gelfand-Fuks cohomol-

ogy, they construct in [NT1] for each deformation quantization a characteristic class in $H^2(M, \mathbf{R})[[\hbar]]$ with constant term ω. In [NT2], they show that this class determines the $\star$-product up to isomorphism and that it agrees with Fedosov's curvature for the $\star$-products constructed by his method. By Moser's classification [Ms] of nearby symplectic structures by their cohomology classes, the isomorphism classes of $\star$-products on a symplectic manifold are thus in 1-1 correspondence with isomorphism classes of formal deformations of the symplectic structure.

One consequence of this classification is that there is (up to isomorphism) a unique deformation quantization whose characteristic class is independent of $\hbar$. Although one might think that this special quantization is somehow the natural one, there is considerable evidence that the others are important as well. For instance, Fedosov [Fe5] shows that one needs to introduce $\star$-products with nonconstant characteristic class to make deformation quantization compatible with symplectic reduction. In addition, work in progress by Emmrich and the author suggests that $\star$-products with nonconstant characteristic classes may be related to geometric phases and deformations of symplectic forms which arise in the analysis of coupled wave equations [LtF].

4. TRACE AND INDEX

4.1. Strongly closed $\star$-products

A *trace* on a deformed algebra $C^\infty(M)[[\hbar]]$ is by definition a linear functional on the compactly supported functions $\tau : C_c^\infty(M) \to \hbar^{-m/2}\mathbf{C}[[\hbar]]$ whose formal extension to $C_c^\infty(M)[[\hbar]]$ satisfies the usual condition $\tau(a \star_\hbar b) = \tau(b \star_\hbar a)$. The negative powers of $\hbar$ (m is the dimension of M) are admitted because, when $M = \mathbf{R}^{2n}$, the "natural" trace coming via the Weyl correspondence from the trace of operators is

$$a \mapsto (2\pi\hbar)^{-m/2} \int_M a\omega^{m/2}/(m/2)! \tag{3}$$

In [CoFS], a $\star$-product is called *strongly closed* if the functional (3) still defines a trace. It is shown there that in the obstruction theory for the classification of strongly closed $\star$-products Hochschild cohomology should be replaced by cyclic cohomology [Co]. The existence of a strongly closed $\star$-product on an arbitrary

symplectic manifold was shown in [OMY2]. Fedosov [Fe4] constructed a trace for each of his $\star$-products, in which the linear functional (3) is applied not to a but to a series $\sum G_j(a)\hbar^j$, where the G_j are differential operators with G_0 the identity. By the classification of [NT2], it follows that every $\star$-product on a symplectic manifold is equivalent to a strongly closed $\star$-product. It is further shown in [NT2] that the set of traces for a $\star$-product on a symplectic manifold forms a 1-dimensional module over $\mathbf{C}[[\hbar]]$, so the trace is essentially unique.

4.2. Index theorems

The index of an elliptic operator is defined as the difference between the dimension of its kernel and that of its cokernel, which can also be interpreted as the difference between the traces of the projections on these two spaces. These two projections can be replaced by other pairs of operators more amenable to analysis, so that index theory comes down to a theory of computations of traces, which can then be applied in purely algebraic settings [Co]. In the context of deformation quantization, a setting for such theorems was given in [CoFS], while a detailed proof of an index theorem announced in [Fe2] may be found given in [Fe4]; other versions are in [NT1], and [NT2].

A basic ingredient in the algebraic formulation of index theorems is the appropriate counterpart of an elliptic operator. This can be defined in several ways; we present here one found in [Fe4].

Let $\mathcal{M}_N(\mathcal{A})$ denote the algebra of $N \times N$ matrices with entries in a $\mathbf{C}$-algebra $\mathcal{A}$. Any $\star$-product $\star_\hbar$ on the Poisson manifold M induces a deformation (which we also denote by $\star_\hbar$) of the product in the algebra $C^\infty(M, \mathcal{M}_N(C))$ of matrix valued functions; simply identify $C^\infty(M, \mathcal{M}_N(C))[[\hbar]]$ with $\mathcal{M}_N(C^\infty(M)[[\hbar]])$ and use the $\star$-product on the matrix elements. For convenience, we will denote this (deformed) algebra by $\mathcal{M}_N(M)$. A trace for the $\star$-product on $C^\infty(M)[[\hbar]]$ induces in the usual way a trace on $\mathcal{M}_N(M)$—take the sum of the traces of the diagonal elements. (We note that Fedosov [Fe4] constructs a deformation, with trace, of the algebra of endomorphisms of any complex vector bundle E over a symplectic manifold M; the starting data in this case are a linear connection on E and the usual symplectic connection on M. The index theorem extends to this more general setting.)

The domain and range of an ordinary elliptic operator are spaces of sections

of vector bundles. Since any bundle is a subbundle of a trivial bundle, in the algebraic setting the bundles may be replaced by projections, i.e. elements p_1 and p_2 in $\mathcal{M}_N(M)$ such that $p_j \star_\hbar p_j = p_j$. In the "usual case", M is a cotangent bundle T^*X, and the projections are the pullbacks of matrix valued functions on X, for which the most commonly used $\star$-products coincide with ordinary matrix multiplication.)

An operator between sections of vector bundles is replaced in the algebraic setting by an element a of $\mathcal{M}_N(M)$ such that $a \star_\hbar p_1 = p_2 \star_\hbar a = a$. Ellipticity in the analytic case follows from the existence of an inverse modulo compact operators; in our algebraic setting this becomes an element $r \in \mathcal{M}_N(M)$ such that $p_1 - r \star_\hbar a$ and $p_2 - a \star_\hbar r$ have compact support.

The 4-tuple $\mathcal{E} = (p_1, p_2, a, r)$ is called an *elliptic element.* Its index is defined as

$$\text{ind } \mathcal{E} = \text{Tr}(p_1 - r \star_\hbar a) - \text{Tr}(p_2 - a \star_\hbar r).$$

The classical, or geometric, limit of an elliptic element is the 4-tuple of symbols $\sigma(\mathcal{E}) = (\sigma(p_1), \sigma(p_2), \sigma(a), \sigma(r))$ obtained by setting $\hbar = 0$ in all the objects in $\mathcal{E}$. Here, $\sigma(p_1)$ and $\sigma(p_2)$ are projections onto vector bundles over M, and $\sigma(a)$ and $\sigma(r)$ are maps between these bundles which are inverse to one another outside a compact subset of M. These data define an element of K-theory with compact supports over M, which then has a Chern character $\text{ch}(\sigma(\mathcal{E}))$ in $H_c^*(M, \mathbf{C})$.

As a symplectic manifold, M carries a compatible almost complex structure unique up to homotopy and hence a well defined Atiyah-Hirzebruch class $\widehat{A}(M) \in H^*(M, \mathbf{C})$. Also determined by the symplectic structure is its de Rham cohomology class $[\omega]$. This completes the data needed for the statement of the index theorem, which is the following formula (in which evaluation on the fundamental homology class of M is written as integration):

$$\text{ind } \mathcal{E} = \int_M \text{ch}(\sigma(\mathcal{E}))e^{[\omega]/2\pi\hbar}\widehat{A}(M).$$

Remarks

The left hand side of the index formula is by definition a series in $\hbar^{-m/2}\mathbf{C}[[\hbar]]$, while the right hand side is a polynomial of degree at most $m/2$ in $\hbar^{-1}$.

When M is compact, the conditions to be satisfied by a and r are vacuous; we can even take a and r to be zero. In this case, the index just depends on the

element of K-theory defined by the projections p_1 and p_2. If $N = 1$, $p_1 = 1$, and $p_2 = 0$, we get the formula:

$$\mathrm{Tr}(1) = \int_M e^{[\omega]/2\pi\hbar} \widehat{A}(M).$$

This is consistent with the idea (see for instance [BoG]) that functions on M may often be identified with operators on a space whose dimension is given, via the Riemann-Roch theorem, by the right hand side of the formula above.

In a very recent manuscript [Fe6], Fedosov observes that the density in the integral above essentially defines the trace, and he attempts to use the work of Tamarkin [Ta] to characterize this density by its invariance properties. So far, this approach has succeeded only in the case where M carries a flat symplectic connection.

5. SOME QUESTIONS

A fundamental question remains. *Is every Poisson manifold deformation quantizable?* This question may be broken into the following two parts. Is every Poisson manifold locally deformation quantizable? Is every locally deformation quantizable Poisson manifold globally deformation quantizable? (It is not hard to show that deformation quantizations of two open subsets which are equivalent on the intersection of the sets can be "patched" to produce a deformation quantization of the union.) Donin [Do] has given an algebraic reformulation of Fedosov's method which shows, in particular, that there is a deformation quantization of the field of *rational* functions on any Poisson algebraic variety.

The algebra $C^\infty(M)$ is the Lie algebra of (a 1-dimensional central extension of) the group of symplectic transformations of M. Is there a version of deformation quantization which applies to this group? This problem is related to, but not totally solved by, the $\star$-exponentials of [BFFLS]. What is the corresponding index theorem? For homogeneous symplectic transformations of cotangent bundles, this would be an index theorem for elliptic Fourier integral operators. (See [Wi1].) In the cotangent bundle case, it is hard to find examples of homogeneous symplectic transformations which are not isotopic to cotangent lifts of diffeomorphisms (for which the index problem reduces to the pseudodifferential case). For general symplectic manifolds, on the other hand, there are plenty of examples, so this index theorem would be of real interest.

We have completely ignored in this paper the problem of *strict deformation quantization*, where one seeks a deformation which is not merely a formal power series in $\hbar$ but actually exists as an algebra for sufficiently small $\hbar$. For example, the reader may consult [Be2], [Ri] and [Wi2] for some of the analytical and geometric aspects of this problem and [CaGR] for the related problem of convergence of the series in $\hbar$ which define the $\star$-product.

BIBLIOGRAPHY

[BFFLS] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A., and Sternheimer, D., Deformation theory and quantization, I and II, *Ann. Phys.* **111**, (1977), 61-151.

[Be1] Berezin, F.A., Some remarks about the associated envelope of a Lie algebra, *Funct. Anal. Appl.* **1**, (1967), 91-102.

[Be2] Berezin, F.A., Quantization, *Math USSR Izv.* **8** (1974), 1109-1165.

[BoG] Boutet de Monvel, L., and Guillemin, V., *The spectral theory of Toeplitz operators*, Annals. of Math. Studies **99**, Princeton University Press, Princeton, 1981.

[CaGR] Cahen, M., Gutt, S., and Rawnsley, J., Quantization of Kähler Manifolds. II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **337** (1993), 73-98.

[Co] Connes, A., Non-commutative differential geometry, *Publ. Math. IHES* **62** (1986), 41-144.

[CoFS] Connes, A., Flato, M., and Sternheimer, D., Closed star-products and cyclic cohomology, *Lett. Math. Phys.* 24 (1992), 1-12.

[Cz] Czyz, J.,On geometric quantization and its connections with the Maslov theory, *Rep. Math. Phys.* **15** (1979), 57-97.

[DaP] Dazord, P., and Patissier, G, La première classe de Chern comme obstruction à la quantification asymptotique, *Symplectic geometry, groupoids, and integrable systems, Séminaire sud-Rhodanien de géométrie à Berkeley (1989)*, P. Dazord and A. Weinstein, eds., Springer-MSRI Series (1991), 73-97.

[De] Deligne, P., Unpublished letters and lectures at IAS, Princeton, 1993.

[DeL1] De Wilde, M., and Lecomte, P., Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds,

Lett. Math. Phys. **7** (1983), 487-496.

[DeL2] De Wilde, M., and Lecomte, P., Formal deformations of the Poisson Lie algebra of a symplectic manifold and star-products. Existence, equivalence, derivations, in M. Hazewinkel and M. Gerstenhaber, eds., *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications*, Kluwer Acad. Pub., Dordrecht (1988), 897-960.

[DeL3] De Wilde, M., and Lecomte, P., Existence of star-products revisited, *Note di Matematica* **10**, Suppl. 1 (1990), 205-216.

[Di] Dirac, P. A. M., *The principles of quantum mechanics*, Clarenden Press, Oxford, 1930.

[Do] Donin, J., On the quantization of Poisson brackets, *Advances in Math.* (to appear).

[EW] Emmrich, C., and Weinstein, A., The differential geometry of Fedosov's quantization, *Lie Theory and Geometry, in Honor of B. Kostant*, J.L. Brylinski, R. Brylinski, V. Guillemin, and V. Kac, eds., Progress in Mathematics, Birkhäuser, New York (to appear).

[Fe1] Fedosov, B.V., Formal quantization, *Some Topics of Modern Mathematics and their Applications to Problems of Mathematical Physics* (in Russian), Moscow (1985), 129-136.

[Fe2] Fedosov, B.V., Index theorem in the algebra of quantum observables, *Sov. Phys. Dokl.* **34** (1989), 318-321.

[Fe3] Fedosov, B.V., A simple geometrical construction of deformation quantization, *J. Diff. Geom.* (to appear).

[Fe4] Fedosov, B.V., Proof of the index theorem for deformation quantization, *Advances in Partial Differential Equations*, Akademie Verlag, Berlin (to appear).

[Fe5] Fedosov, B.V., Reduction and eigenstates in deformation quantization, *Advances in Partial Differential Equations*, Akademie Verlag, Berlin (to appear).

[Fe6] Fedosov, B.V., A trace density in deformation quantization, preprint, Moscow Institute of Physics and Technology, 1994.

[FS] Flato, M., and Sternheimer, D., Closedness of star products and cohomologies, *Lie Theory and Geometry, in Honor of B. Kostant*, J.L. Brylinski, R. Brylinski, V. Guillemin, and V. Kac, eds., Progress in Mathematics, Birkhäuser, New York (to appear).

[Ge] Gerstenhaber, M., On the deformation of rings and algebras, *Annals of Math.*,

79 (1964), 59-103.

[Gu] Gutt, S., Equivalence of deformations of twisted products on a symplectic manifold, *Lett. Math. Phys.* **3** (1979), 495-502.

[KM1] Karasev M.V, and Maslov, V.P., Pseudodifferential operators and a canonical operator in general symplectic manifolds, *Math. USSR Izvestia* **23** (1984), 277-305.

[KM2] Karasev, M.V. and Maslov, V.P., *Nonlinear Poisson brackets: geometry and quantization*, Translations of mathematical monographs, v. 119, Amer. Math. Soc., Providence, 1993.

[L] Lie, S., *Theorie der Transformationsgruppen*, (Zweiter Abschnitt, unter Mitwirkung von Prof. Dr. Friedrich Engel), Leipzig, Teubner, 1890.

[LtF] Littlejohn, R.G., and Flynn, W.G., Geometric phases in the asymptotic theory of coupled wave equations, *Phys. Rev.* **A44** (1991), 5239-5256.

[Mi-Ru] Min-Oo, and Ruh, E., Comparison theorems for compact symmetric spaces, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **12** (1979), 335-353.

[Ms] Moser, J., On the volume elements on a manifold, *Trans. Amer. Math. Soc.* **120** (1965), 280-296.

[My] Moyal, J., Quantum mechanics as a statistical theory, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **45** (1949), 99-124.

[NT1] Nest, R., and Tsygan, B., Algebraic index theorem, *Comm. Math. Phys.*, (to appear).

[NT2] Nest, R., and Tsygan, B., Algebraic index theorem for families, *Advances in Math.* (to appear).

[OMY1] Omori, H., Maeda, Y., and Yoshioka, A., Weyl manifolds and deformation quantization, *Advances in Math.* **85** (1991), 224-255.

[OMY2] Omori, H., Maeda, Y., and Yoshioka, A., Existence of a closed star-product, *Lett. Math. Phys.* **26** (1992), 285-294.

[Ri] Rieffel, M.A., Deformation quantization and operator algebras, *Proc. Symp. Pure Math.* **51** (1990), 411-423.

[Ru] Ruh, E., Cartan connections, *Proc.Symp.Pure Math.* **54** (1993), 505-519.

[S] Sternberg, S., *Celestial Mechanics* Part II, W.A. Benjamin, New York, 1969.

[Ta] Tamarkin, D.E., Topological invariants of connections on symplectic manifolds, *Funct. Anal. Appl.* (to appear).

[Ts] Tsujishita, T., On variation bicomplexes associated to differential equations, *Osaka J. Math* **19** (1982), 311-363.

[V] Vey, J., Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique, *Comment. Math. Helv.* **50** (1975), 421-454.

[Wi1] Weinstein, A., Fourier integral operators, quantization, and the spectrum of a Riemannian manifold. Colloque Internationale du Centre National de la Recherche Scientifique No. 237. *Géométrie Symplectique et Physique Mathématique* (1976), 289–298.

[Wi2] Weinstein, A., Noncommutative geometry and geometric quantization, *Symplectic Geometry and Mathematical Physics: actes du colloque en l'honneur de Jean-Marie Souriau*, P. Donato et al eds., Birkhäuser (1991), 446-461.

[Wy] Weyl, H., *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover, New York, 1931.

Alan WEINSTEIN

Centre Emile Borel
Institut Henri Poincaré
11 r. Pierre et Marie Curie
F-75231 PARIS CEDEX 05

and

Department of Mathematics
University of California
Berkeley, CA 94720, USA