

Astérisque

SAAD BAAJ

Représentation régulière du groupe quantique des déplacements de Woronowicz

Astérisque, tome 232 (1995), p. 11-48

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1995__232__11_0>

© Société mathématique de France, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REPRESENTATION REGULIERE DU GROUPE QUANTIQUE DES DEPLACEMENTS DE WORONOWICZ

Saad Baaï

Introduction

Soit H un espace de Hilbert. Un unitaire V qui agit dans $H \otimes H$ est dit multiplicatif s'il vérifie la relation pentagonale $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$. Un unitaire multiplicatif V est dit régulier [4] si l'adhérence normique $\overline{\mathcal{C}(V)}$ de la sous-algèbre $\mathcal{C}(V) = \{(id \otimes \omega)(\Sigma V) / \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$ de $\mathcal{L}(H)$ où Σ est la volte, coïncide avec la C^* -algèbre des opérateurs compacts $\mathcal{K}$ dans H ; il est dit irréductible [4] s'il existe un unitaire $U \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant les conditions :

- a) $U^2 = 1$ et $(\Sigma(1 \otimes U)V)^3 = 1$
- b) l'unitaire $\widehat{V} = \Sigma(U \otimes 1)V(U \otimes 1)\Sigma$ est multiplicatif.

Dans [4], en collaboration avec G.Skandalis, nous avons associé à tout unitaire multiplicatif régulier V , deux C^* -algèbres de Hopf $(S_V, \widehat{S}_V)$ en dualité, généralisant ainsi le cas des C^* -algèbres de Hopf $(C_0(G), C_{*ed}^*(G))$ associées à un groupe localement compact G . Comme nous l'avons annoncé dans [4], l'hypothèse de régularité, qui correspond en fait à la dualité de Takesaki-Takai pour les produits croisés de C^* -algèbres, n'est pas toujours vérifiée. Citons l'exemple suivant qui sera développé ailleurs [5]. Soit G un groupe localement compact, à tout couple (G_1, G_2) de sous-groupes fermés de G , d'intersection triviale et tel que l'ensemble G_1G_2 soit un ouvert dense dans G , on peut associer, comme [4] dans le cas $G = G_1G_2$, un unitaire multiplicatif V qui correspond au biproduct croisé de [17]. Dans ce cas, l'algèbre $\overline{\mathcal{C}(V)}$ est le produit croisé $C_0(G) \rtimes_{*ed} (G_1 \times G_2)$ où le sous-groupe G_1 (resp. G_2) agit par translation à droite (resp. à gauche) dans G . Remarquons que la C^* -algèbre $C_0(G) \rtimes_{*ed} (G_1 \times G_2)$ contient la C^* -algèbre des opérateurs compacts. Cependant, si $G \neq G_1G_2$, cette C^* -algèbre admet plus d'une représentation et donc, dans ce cas, l'inclusion $\mathcal{K} \subset \overline{\mathcal{C}(V)}$ est stricte. Notons cependant que l'unitaire multiplicatif V est irréductible.

Dans cet article, nous dégageons deux conditions plus faibles que les conditions de régularité et d'irréductibilité de [4], qui nous permettent de réaliser les constructions de [4] et d'obtenir la plupart de ses résultats. La première condition que nous avons appelée "semi-régularité", revient à demander que l'adhérence normique de $\mathcal{C}(V)$ contienne la C^* -algèbre des opérateurs compacts. Une conséquence de cette hypothèse est que $\overline{\mathcal{C}(V)}$ est auto-adjointe et donc par la preuve de (cf. [4] 3.5), l'algèbre réduite S_V et l'algèbre réduite duale $\widehat{S}_V$ sont également auto-adjointes. D'autrepart, nous disons

que l'unitaire multiplicatif V est "équilibré" s'il existe un unitaire $U \in \mathcal{L}(H)$ tel que $U^2 = 1$ et que l'unitaire $\widehat{V} = \Sigma(U \otimes 1)V(U \otimes 1)\Sigma$ soit multiplicatif.

Si V est un unitaire multiplicatif équilibré et semi-birégulier, i.e V et $\widehat{V}$ semi-réguliers, nous montrons (paragraphe 3) que les C^* -algèbres S_V et $\widehat{S_V}$ peuvent être munies de structures de C^* -algèbres de Hopf bisimplifiables naturelles. Nous montrons également que les constructions et les résultats de ([4] appendice) restent valables dans ce cadre. En particulier, si W est l'unitaire multiplicatif associé à une représentation covariante (cf. [4] appendice) d'un unitaire multiplicatif V satisfaisant aux conditions précédentes, l'algèbre réduite S_W (resp. l'algèbre réduite duale $\widehat{S_W}$), munie du coproduit $\delta(x) = W(x \otimes 1)W^*$ (resp. $\widehat{\delta}(x) = W^*(1 \otimes x)W$) est une C^* -algèbre de Hopf isomorphe à la C^* -algèbre de Hopf S_V (resp. $\widehat{S_V}$).

Notons que dans le cas non régulier, on ne peut espérer obtenir la dualité de Takesaki-Takai pour les produits croisés de C^* -algèbres. Cependant, comme l'hypothèse de semi-régularité implique la "régularité au sens faible", i.e l'adhérence faible de la sous-algèbre $\mathcal{C}(V)$ coïncide avec $\mathcal{L}(H)$, la méthode de [11] s'adapte dans le cadre des unitaires multiplicatifs irréductibles semi-biréguliers pour établir la dualité de Takesaki pour les produits croisés d'algèbres de von Neumann.

Dans le paragraphe 4, nous étudions un exemple important d'unitaire multiplicatif irréductible, semi-birégulier mais non régulier : la représentation régulière du groupe quantique [25,26] des déplacements $E_\mu(2)$ de Woronowicz. Rappelons qu'étant donné un nombre réel $\mu > 1$, la C^* -algèbre de Hopf (A, δ) des "fonctions continues sur $E_\mu(2)$ tendant vers 0 à l'infini" est [25] le produit croisé $A = C_0(\mathbf{C}_\mu) \rtimes_\alpha \mathbf{Z}$ où $\mathbf{C}_\mu = \{z \in \mathbf{C} / |z| \in \mu^{\mathbf{Z}}\} \cup \{0\}$, pour l'action définie par $\alpha(f)(\zeta) = f(\mu^{-1}\zeta)$. Il est facile de deviner [3] une mesure positive ν sur l'espace $\mathbf{C}_\mu$ telle que le poids dual ([15], [22]) correspondant Φ soit une mesure de Haar pour $E_\mu(2)$. La preuve de l'invariance à gauche et à droite de cette mesure de Haar est alors basée sur l'expression de ce poids Φ comme une somme de formes positives sur A et sur le calcul du produit de convolution de ces formes.

Comme nous le montrons dans un cadre assez général au paragraphe 2, à toute C^* -algèbre de Hopf munie d'une mesure de Haar, nous associons une isométrie pentagonale qui correspond dans le cas des groupes à la représentation régulière. Dans le cas du groupe quantique $E_\mu(2)$, l'isométrie V obtenue est un unitaire multiplicatif semi-régulier mais non régulier. Comme on peut s'y attendre dans une "situation avec mesure de Haar", la représentation régulière V est irréductible. Nous montrons que la C^* -algèbre de Hopf réduite (S_V, δ_V) coïncide avec (A, δ) et que la C^* -algèbre de Hopf réduite duale $\widehat{S_V}$ munie du coproduit opposé est isomorphe à la C^* -algèbre de Hopf [26] des "fonctions continues sur le dual de Pontrjagyn $\widehat{E_\mu(2)}$ tendant vers 0 à l'infini" au sens de Woronowicz.

Par les résultats du paragraphe 3 et la moyennabilité de $E_\mu(2)$ et de $\widehat{E_\mu(2)}$, nous savons que les représentations (resp. coreprésentations) de V sont les représentations de la C^* -algèbre $\widehat{S_V}$ (resp. S_V). S'appuyant sur la description (théorème 4.10) de l'unitaire multiplicatif V comme multiplicateur de la C^* -algèbre $\widehat{S_V} \otimes S_V$, on peut

déduire la description [26] des représentations du groupe quantique $E_\mu(2)$ donné par Woronowicz.

Une autre conséquence de la moyennabilité de $E_\mu(2)$ est que le produit croisé réduit $S_V \rtimes \widehat{S_V}$ coïncide avec le produit croisé “max”. Il s’ensuit que les représentations de la C^* -algèbre $B = S_V \rtimes \widehat{S_V}$ coïncident avec les représentations covariantes [4] de l’unitaire multiplicatif V . Nous montrons que la C^* -algèbre B est une extension des opérateurs compacts par les compacts. Il en résulte que V n’admet que deux représentations covariantes : la représentation régulière et une deuxième que nous décrivons.

Nous terminons le paragraphe 4 par le calcul des mesures de Haar duales et de leur théorie modulaire. Pour déduire les mesures de Haar duales à partir de la mesure de Haar Φ , on peut procéder comme dans le cas classique des algèbres de Kac ([12], [13], [16], [24]), i.e construire des algèbres hilbertiennes à gauche et montrer que les poids correspondants ([8], [22]) vérifient les propriétés d’invariance voulues. Pour garder à cet article une longueur raisonnable, nous avons préféré procéder directement en donnant les formes positives sur $\widehat{S_V}$ qui permettent d’exprimer les mesures de Haar duales comme somme de formes positives ; le calcul de leur produit de convolution permet alors comme dans le cas de Φ , de montrer les propriétés d’invariance. Nous montrons ensuite que les théories modulaires de Φ et des mesures de Haar duales $\widehat{\Phi}$ et $\widehat{\Psi}$ vérifient la conjecture de ([21] paragraphe 6.).

S’appuyant sur une conséquence du formulaire de [21], nous montrons que le poids $\Phi \otimes \widehat{\Phi}$ est une mesure de Haar invariante à gauche et à droite sur le double quantique ([4], [28]) de $E_\mu(2)$. Procédant comme dans le cas classique, on peut déduire dans ce cas les mesures de Haar duales et montrer que leur théorie modulaire satisfait le formulaire de [21].

Enfin, dans une première appendice, nous rassemblons les propriétés que nous avons utilisées dans le paragraphe 4, des coefficients de Fourier $(A(m, n))_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2}$ de la suite de fonctions notée $(U(m, \cdot))_{m \in \mathbb{Z}}$ introduite par Woronowicz dans [25]. Dans une seconde appendice, nous complétons la preuve du théorème 4.2 et nous montrons l’unicité de la mesure de Haar de $E_\mu(2)$.

Durant l’élaboration de cet article, j’ai bénéficié de nombreuses et fructueuses discussions avec G.Skandalis sur ce sujet ; je l’en remercie très sincèrement.

1. Préliminaires

Dans ce paragraphe, nous fixons les notations constamment utilisées dans la suite et nous rappelons quelques définitions.

Soit E un espace de Banach et $X \subset E$ un sous-ensemble de E . Nous notons $\overline{X}$ l’adhérence de X dans E et nous désignons par $\overline{\text{lin}} X$ l’espace vectoriel fermé engendré par X dans E .

Tous les produits tensoriels de C^* -algèbres, sauf mention expresse du contraire,

sont supposés munis de la norme spatiale (produits tensoriels "min").

Soit A une C^* -algèbre, nous notons $\tilde{A}$ la C^* -algèbre obtenue à partir de A par adjonction d'un élément unité et $M(A)$ la C^* -algèbre des multiplicateurs [18] de A . Si J est un idéal bilatère fermé de A , on pose $M(A, J) = \{m \in M(A) / mA + Am \subset J\}$.

Un homomorphisme de C^* -algèbres $\pi : A \rightarrow M(B)$ est dit non dégénéré si, pour une unité approchée (e_i) de A , $\pi(e_i) \rightarrow 1$ pour la topologie stricte.

1.1. DÉFINITION. — (cf. [4]) Une C^* -algèbre de Hopf est un couple (A, δ) où A est une C^* -algèbre et $\delta : A \rightarrow M(\tilde{A} \otimes A + A \otimes \tilde{A}; A \otimes A)$ est un homomorphisme non dégénéré, appelé le coproduit de A , vérifiant $(id \otimes \delta)\delta = (\delta \otimes id)\delta$. Une C^* -algèbre de Hopf est dite bisimplifiable si on a $A \otimes A = \overline{\text{lin}} \delta(A)(1 \otimes A) = \overline{\text{lin}} \delta(A)(A \otimes 1)$.

Soit H un espace de Hilbert, si $T \in \mathcal{L}(H \otimes H)$, on définit $T_{12}, T_{13}, T_{23} \in \mathcal{L}(H \otimes H \otimes H)$ comme dans [4]. On note $\Sigma \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ la volte donnée par $\Sigma(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi$ et on pose $T_{21} = \Sigma T \Sigma$.

Pour $T \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ et $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, on définit les opérateurs $(id \otimes \omega)(T)$ et $(\omega \otimes id)(T)$ par les formules :

$$(\xi \mid (id \otimes \omega)(T)\eta) = \omega(\theta_\xi^* T \theta_\eta) \quad , \quad (\xi \mid (\omega \otimes id)(T)\eta) = \omega(\theta'_\xi T \theta'_\eta)$$

où $\theta_\xi, \theta'_\eta \in \mathcal{L}(H, H \otimes H)$ sont définies par $\theta_\xi(\eta) = \theta'_\eta(\xi) = \xi \otimes \eta$.

1.2. DÉFINITION. — (cf. [4]) Un unitaire $V \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ est dit multiplicatif s'il vérifie la relation pentagonale :

$$V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$$

Si $V \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ est un unitaire multiplicatif et $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, on pose $L(\omega) = (\omega \otimes id)(V)$ et $\rho(\omega) = (id \otimes \omega)(V)$. L'algèbre réduite [4] (resp. l'algèbre réduite duale) S_V (resp. $\widehat{S}_V$) de V est par définition l'adhérence normique dans $\mathcal{L}(H)$ de la sous-algèbre $A(V) = \{L(\omega) / \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$ (resp. $\widehat{A}(V) = \{\rho(\omega) / \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$). Quand aucune confusion n'est possible, on note simplement S et $\widehat{S}$ ces algèbres.

Une représentation [4] (resp. coreprésentation) de V dans l'espace de Hilbert K est un unitaire $X \in \mathcal{L}(K \otimes H)$ (resp. $X \in \mathcal{L}(H \otimes K)$) vérifiant la relation $X_{12}X_{13}V_{23} = V_{23}X_{12}$ (resp. $V_{12}X_{13}X_{23} = X_{23}V_{12}$). Dans ce cas, pour tout $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, on pose $\rho_X(\omega) = (id \otimes \omega)(X)$ (resp. $L_X(\omega) = (\omega \otimes id)(X)$); l'espace vectoriel $\widehat{A}_X = \{\rho_X(\omega) / \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$ (resp. $A_X = \{L_X(\omega) / \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$) est une sous-algèbre ([4] A.3) de $\mathcal{L}(K)$; on note alors $\widehat{S}_X$ (resp. S_X) son adhérence normique dans $\mathcal{L}(K)$.

Une représentation covariante ([4] appendice) de V dans un espace de Hilbert K est un couple (X, Y) où X est une représentation et Y est une coreprésentation de V dans le même espace de Hilbert K vérifiant la relation de covariance $Y_{12}V_{13}X_{23} = X_{23}Y_{12}$.

2. Mesure de Haar sur une C*-algèbre de Hopf

Dans ce paragraphe, nous associons à toute C*-algèbre de Hopf munie d'une mesure de Haar, une isométrie pentagonale qui correspond dans le cas des groupes à la représentation régulière. Notons que notre définition d'une mesure de Haar est moins restrictive que celle de [14]. Auparavant, nous rappelons quelques notations et résultats de la théorie [7] des poids sur une C*-algèbre.

Un poids [7] Φ sur une C*-algèbre A est une application de A_+ dans $[0, \infty]$ telle que $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ pour $x, y \in A_+$ et $\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x)$ pour $\lambda \geq 0$ et $x \in A_+$. Un poids Φ est dit semi-fini (normiquement) si le sous-espace vectoriel :

$$\mathfrak{M}_\Phi = \{x_1 - x_2 + i(x_3 - x_4), x_j \in A_+, \Phi(x_j) < \infty\} = \mathfrak{N}_\Phi^* \mathfrak{N}_\Phi$$

où $\mathfrak{N}_\Phi = \{x \in A / \Phi(x^*x) < \infty\}$, est dense dans A .

Si Φ est un poids sur une C*-algèbre A , sa représentation [9] GNS $(\Lambda_\Phi, H_\Phi, \pi_\Phi)$ est définie de la façon suivante. L'idéal à gauche $\mathfrak{N}_\Phi$ de A , muni du produit scalaire $(x | y) = \Phi(x^*y)$, est un espace préhilbertien. Soient H_Φ le séparé complété de cet espace préhilbertien et Λ_Φ l'application canonique de $\mathfrak{N}_\Phi$ dans H_Φ ; posant $\pi_\Phi(a)(\Lambda_\Phi(x)) = \Lambda_\Phi(ax)$ pour $a \in A$ et $x \in \mathfrak{N}_\Phi$, on obtient une représentation π_Φ de la C*-algèbre A dans l'espace de Hilbert H_Φ .

Si Φ est un poids normal semi-fini fidèle sur une algèbre de von Neumann M , on note [22] σ_t^Φ le groupe d'automorphismes modulaires de M associé.

Soit Φ est un poids s.c.i et semi-fini sur une C*-algèbre A , alors [9] la représentation π_Φ est non dégénérée et [7,9] Φ admet un prolongement canonique noté $\bar{\Phi}$, à l'algèbre de von Neumann $M = \pi_\Phi(A)''$, donné par :

$$\bar{\Phi}(x) = \sup\{f(x), f \in M_+^+, f \circ \pi_\Phi \leq \Phi\}$$

$\bar{\Phi}$ est donc un poids normal semi-fini (pour la topologie ultrafaible) sur M vérifiant $\bar{\Phi} \circ \pi_\Phi = \Phi$. D'après [1], on a également pour tout $x \in M_+$:

$$\bar{\Phi}(x) = \inf\{l / \text{il existe } a_i \in A \text{ t.q. } \pi_\Phi(a_i) \rightarrow x \text{ (ultrafort) et } \Phi(a_i) \rightarrow l\}$$

Soient Φ, Ψ des poids s.c.i et semi-finis sur une C*-algèbre A , alors le produit tensoriel $\Phi \otimes \Psi$ des poids Φ et Ψ est le poids s.c.i et semi-fini sur $A \otimes A$ défini par $\Phi \otimes \Psi = (\bar{\Phi} \otimes \bar{\Psi}) \circ (\pi_\Phi \otimes \pi_\Psi)$, où $\bar{\Phi} \otimes \bar{\Psi}$ désigne le produit tensoriel des poids normaux [22] sur le produit tensoriel d'algèbres de von Neumann.

2.1. LEMME. — (cf. [9], [14]) Soient M une algèbre de von Neumann, B une sous-C*-algèbre de M faiblement dense dans M et Φ un poids normal, semi-fini ultrafaiblement et fidèle sur M . Posons $\phi = \Phi|_{B^+}$ et supposons que ϕ soit normiquement semi-fini. Notons H_Φ (resp. H_ϕ) l'espace de la représentation GNS du poids Φ (resp. ϕ). Si le groupe à un paramètre d'automorphismes modulaires (σ_t^Φ) laisse B invariante et

définit par restriction, un groupe à un paramètre d'automorphismes normiquement continu de la C^* -algèbre B , alors l'isométrie $U : H_\phi \rightarrow H_\Phi$ définie par $U \Lambda_\phi x = \Lambda_\Phi x$ est un unitaire qui entrelace les représentations π_ϕ et $\pi_\Phi|_B$ de B .

Démonstration. Soit (u_j) une suite généralisée dans $\mathfrak{M}_\phi^+$ normiquement bornée telle que $u_j \rightarrow 1$ fortement. Posons $v_j = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} \sigma_t^\Phi(u_j) dt$. On a $v_j \in \mathfrak{M}_\phi^+$ et [22] pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\sigma_z^\Phi(v_j) \rightarrow 1$ pour la topologie $*$ -forte. Pour tout $y \in \mathfrak{N}_\Phi$, on a :

$$\Lambda_\Phi y v_j = J_\Phi \pi_\Phi(\sigma_{-\frac{i}{2}}^\Phi(v_j)) J_\Phi \Lambda_\Phi y \rightarrow \Lambda_\Phi y$$

Soit alors (b_k) une suite généralisée dans B qui converge fortement vers y , comme $b_k v_j \in \mathfrak{N}_\phi$ pour tout k et tout j , le vecteur $\Lambda_\Phi y$ est dans l'image de l'isométrie U . ■

Soit A une C^* -algèbre et soit Ψ un poids s.c.i et semi-fini sur A , supposons que le prolongement canonique $\bar{\Psi}$ de Ψ à l'algèbre de von Neumann $M = \pi_\Psi(A)''$ soit fidèle et que le groupe d'automorphismes modulaires (σ_t^Ψ) laisse la C^* -algèbre $B = \pi_\Psi(A)$ invariante et définit par restriction, un groupe d'automorphismes de B normiquement continu, alors d'après le lemme précédent, l'isométrie $U : H_\Psi \rightarrow H_{\bar{\Psi}}$ définie par $U \Lambda_\Psi y = \Lambda_{\bar{\Psi}} \pi_\Psi(y)$ est un unitaire qui entrelace les représentations π_Ψ et $\pi_{\bar{\Psi}} \circ \pi_\Psi$. De même, il résulte de (2.1) que l'isométrie naturelle $U : H_\Psi \otimes H_\Psi \rightarrow H_{\Psi \otimes \Psi}$ définie par $U(\Lambda_\Psi x \otimes \Lambda_\Psi y) = \Lambda_{\Psi \otimes \Psi}(x \otimes y)$ est un unitaire. On identifie également l'espace de Hilbert $H_{\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi}$ au produit tensoriel $H_\Psi \otimes H_\Psi \otimes H_\Psi \dots$

2.2. DÉFINITION. — On appelle mesure de Haar à gauche (resp. à droite) sur une C^* -algèbre de Hopf (A, δ) , un poids $\Phi : A_+ \rightarrow [0, \infty]$ s.c.i et semi-fini vérifiant :

- a) $\bar{\Phi}$ est fidèle sur l'algèbre de von Neumann $M = \pi_\Phi(A)''$.
- b) $\sigma_t^{\bar{\Phi}}(\pi_\Phi(A)) = \pi_\Phi(A)$ et pour tout $a \in A$ la fonction $t \rightarrow \sigma_t^{\bar{\Phi}}(\pi_\Phi(a))$ est continue normiquement.
- c) Pour tout $a \in A_+$ et toute forme positive f sur A , on a $\Phi(a * f) = \|f\| \Phi(a)$ (resp. $\Phi(f * a) = \|f\| \Phi(a)$).

Rappelons que si (A, δ) est une C^* -algèbre de Hopf, $a \in A$, $f, f' \in A^*$, on pose :

$$a * f = (f \otimes id)(\delta(a)), \quad f * a = (id \otimes f)(\delta(a)), \quad f * f' = (f \otimes f') \circ \delta$$

2.3. PROPOSITION. — Soit (A, δ) une C^* -algèbre de Hopf munie d'une mesure de Haar à droite Ψ .

- a) Pour tout $x, y \in \mathfrak{N}_\Psi$, on a $(\Psi \otimes \Psi)((1 \otimes y^*)\delta(x^*x)(1 \otimes y)) = \Psi(x^*x)\Psi(y^*y)$.
- b) Pour tout $a \in \mathfrak{N}_{\Psi \otimes \Psi}$ et tout $y \in \mathfrak{N}_\Psi$, on a $(\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi)((1 \otimes 1 \otimes y^*)(id \otimes \delta)(a^*a)(1 \otimes 1 \otimes y)) = (\Psi \otimes \Psi)(a^*a)\Psi(y^*y)$.

Démonstration. Posons $f = y \Psi y^*$, f est une forme positive sur A et on a $\|f\| = \Psi(y^*y)$. Par [19], il existe une famille de formes normales positives $(\omega_i)_{i \in I}$ sur M telle que $\bar{\Psi} = \sum_i \omega_i$. On en déduit ([22] 8.3) que $(\bar{\Psi} \otimes \bar{\Psi}) = \sum_i (\omega_i \otimes \bar{\Psi})$, d'où :

$$\begin{aligned}
 (\Psi \otimes \Psi)((1 \otimes y^*)\delta(x^*x)(1 \otimes x)) &= \sum_i (\omega_i \otimes \bar{\Psi}) \circ (\pi_\Psi \otimes \pi_\Psi)((1 \otimes y^*)\delta(x^*x)(1 \otimes x)) \\
 &= \sum_i \Psi(y^*(x^*x * \omega_i \circ \pi_\Psi)y) \\
 &= \sum_i f(x^*x * \omega_i \circ \pi_\Psi) \\
 &= \sum_i (\omega_i \circ \pi_\Psi)(f * x^*x) \\
 &= \Psi(f * x^*x) = \Psi(y^*y)\Psi(x^*x) < \infty
 \end{aligned}$$

d'où le a).

Démonstration analogue pour le b). ■

Avec les notations ci-dessus, notons V l'isométrie dans l'espace de Hilbert $H_\Psi \otimes H_\Psi = H_{\Psi \otimes \Psi}$ définie par :

$$V(\Lambda_\Psi x \otimes \Lambda_\Psi y) = \Lambda_{\Psi \otimes \Psi}(\delta(x)(1 \otimes y))$$

où $x, y \in \mathfrak{N}_\Psi$. Nous avons :

2.4. THÉORÈME. — *L'isométrie V vérifie la relation pentagonale $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$.*

Pour la preuve de ce résultat, on a besoin de :

2.5. LEMME. — *Pour tout $a \in \mathfrak{N}_{\Psi \otimes \Psi}$ et tout $z \in \mathfrak{N}_\Psi$, on a $V_{23}\Lambda_{\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi}(a \otimes z) = \Lambda_{\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi}((id \otimes \delta)(a)(1 \otimes 1 \otimes z))$.*

Démonstration. Il est clair que si a appartient au produit tensoriel algébrique $\mathfrak{N}_\Psi \odot \mathfrak{N}_\Psi$, on a par définition de V :

$$V_{23}\Lambda_{\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi}(a \otimes z) = \Lambda_{\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi}((id \otimes \delta)(a)(1 \otimes 1 \otimes z))$$

Dans le cas général, soit (a_n) une suite dans le produit tensoriel algébrique $\mathfrak{N}_\Psi \odot \mathfrak{N}_\Psi$ telle que (2.1) $\Lambda_{\Psi \otimes \Psi} a_n \rightarrow \Lambda_{\Psi \otimes \Psi} a$. Par (2.3), on a :

$$\Lambda_{\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi}((id \otimes \delta)(a_n)(1 \otimes 1 \otimes z)) \rightarrow \Lambda_{\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi}((id \otimes \delta)(a)(1 \otimes 1 \otimes z))$$

■

démonstration du théorème. Pour $x, y, z \in \mathfrak{N}_\Psi$, on a par le lemme précédent :

$$\begin{aligned}
 V_{23}V_{12}(\Lambda_\Psi x \otimes \Lambda_\Psi y \otimes \Lambda_\Psi z) &= V_{23}\Lambda_{\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi}((\delta(x)(1 \otimes y)) \otimes z) \\
 &= \Lambda_{\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi}(\delta^2(x)(1 \otimes (\delta(y)(1 \otimes z)))
 \end{aligned}$$

D'autrepart, soit (b_n) une suite dans le produit tensoriel algébrique $\mathfrak{N}_\Psi \odot \mathfrak{N}_\Psi$ telle que $\Lambda_{\Psi \otimes \Psi} b_n \rightarrow \Lambda_{\Psi \otimes \Psi}(\delta(y)(1 \otimes z))$, on a :

$$\begin{aligned}
 V_{12}V_{13}V_{23}(\Lambda_\Psi x \otimes \Lambda_\Psi y \otimes \Lambda_\Psi z) &= V_{12}V_{13} \Lambda_\Psi x \otimes \Lambda_{\Psi \otimes \Psi}(\delta(y)(1 \otimes z)) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} V_{12}V_{13} \Lambda_{\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi}(x \otimes b_n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} V_{12} \Lambda_{\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi} \delta(x)_{13}(1 \otimes b_n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_{\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi} \delta^2(x)(1 \otimes b_n) \quad (\text{par (2.5)})
 \end{aligned}$$

Pour tout $u \in \mathfrak{M}_\Psi^+$, on a avec les mêmes notations :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_{\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi} \delta^2(x)(u \otimes b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi_\Psi \otimes \pi_\Psi \otimes \pi_\Psi)(\delta^2(x)) \Lambda_{\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi}(u \otimes b_n) \\
 &= (\pi_\Psi \otimes \pi_\Psi \otimes \pi_\Psi)(\delta^2(x)) \Lambda_{\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi}(u \otimes (\delta(y)(1 \otimes z)))
 \end{aligned}$$

Par densité normique dans A^+ des éléments u de $\mathfrak{M}_\Psi^+$ tels que $\pi_\Psi(u)$ soient analytiques pour le groupe d'automorphismes modulaires (σ_t^Ψ) , on déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_{\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi} \delta^2(x)(1 \otimes b_n) = \Lambda_{\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi}(\delta^2(x)(1 \otimes (\delta(y)(1 \otimes z))))$$

■

2.6. Remarque. — Soit (A, δ) une C^* -algèbre de Hopf.

- 1) Si Ψ est une mesure de Haar à droite sur (A, δ) , la condition a) de (2.2) entraîne que l'espace des vecteurs bornés à droite relativement à la représentation GNS du [9] système hilbertien à gauche $(A, \mathfrak{N}_\Psi, s_\Psi)$ où $s_\Psi(x, y) = \Psi(x^*y)$, est [9] dense dans H_Ψ ; procédant comme par exemple dans [12], on montre facilement que $V \in \mathcal{L}(H_\Psi) \otimes M$ où M est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_\Psi(A)$.
- 2) Si Φ est une mesure de Haar à gauche sur (A, δ) , alors on montre de même que la formule $V^*(\Lambda_\Phi x \otimes \Lambda_\Phi y) = \Lambda_{\Phi \otimes \Phi}(\delta(y)(x \otimes 1))$ définit une co-isométrie V de l'espace de Hilbert $H_\Phi \otimes H_\Phi$ qui vérifie la relation pentagonale ; on a évidemment que $V \in M \otimes \mathcal{L}(H)$ où M est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_\Phi(A)$.
- 3) Si Ψ est une mesure de Haar à droite sur (A, δ) , alors pour tout $x \in \mathfrak{N}_\Psi$ et toute forme $f \in A^*$, on a $(f * x) \in \mathfrak{N}_\Psi$ et $\Psi((f * x)^*(f * x)) \leq \|f\|^2 \Psi(x^*x)$; voir par exemple ([23],[13]).

3. Unitaires multiplicatifs semi-réguliers

Le but de cette partie est de montrer qu'avec des hypothèses de régularité et d'irréductibilité plus faibles que celles de [4], les algèbres de Banach S_V et $\widehat{S_V}$ canoniquement associées à un unitaire multiplicatif V , restent munies d'une structure de C^* -algèbre de Hopf bisimplifiable (cf.[4] 3.). Sous les mêmes hypothèses, nous étudions également les représentations covariantes de ces unitaires multiplicatifs.

Commençons par la définition suivante :

3.1. DÉFINITION. — On dit que l'unitaire multiplicatif V dans H est semi-régulier si l'adhérence normique de l'algèbre $\mathcal{C}(V)$ contient la C^* -algèbre des opérateurs compacts $\mathcal{K}$. On dit que V est semi-birégulier si V est semi-régulier et que l'adhérence normique de l'espace vectoriel $\{(\omega \otimes id)(\Sigma V) / \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$ contient $\mathcal{K}$.

Si V est semi-régulier, il est clair que $\Sigma V^* \Sigma$ est semi-régulier. Si deux unitaires multiplicatifs sont équivalents et que l'un est semi-régulier, l'autre l'est.

Nous verrons au paragraphe 4 que la représentation régulière du groupe quantique $E_\mu(2)$ de Woronowicz est unitaire multiplicatif semi-régulier mais non régulier. Cependant, dans le cas unifère (i.e $1 \in A(V)$), nous allons montrer que la semi-régularité d'un unitaire multiplicatif V entraîne sa régularité.

On a :

3.2. PROPOSITION. — Soit V un unitaire multiplicatif dans H semi-régulier, S et $\widehat{S}$ les algèbres de Banach associées.

- a) L'adhérence normique de la sous-algèbre $\mathcal{C}(V)$ de $\mathcal{L}(H)$ est auto-adjointe.
- b) S et $\widehat{S}$ sont des sous- C^* -algèbres de $\mathcal{L}(H)$.

Notons d'abord que si l'adhérence normique de $\mathcal{C}(V)$ est stable par l'involution, S et $\widehat{S}$ le sont également par la même preuve que ([4] 3.5) ; d'où le b). Pour démontrer le a), on a besoin de :

3.3. LEMME. — Soient H un espace de Hilbert, B une sous-algèbre normiquement fermée de $\mathcal{L}(H)$ et B_0 une sous-algèbre de B normiquement dense. Supposons que les ensembles $B_0^* B_0$ et $B_0 B_0^*$ soient contenus dans B . Alors B est une sous- C^* -algèbre de $\mathcal{L}(H)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $B_0^* \subset B$. Or, pour tout $x \in B_0$, il existe une suite de polynômes (P_n) telle que $P_n(0) = 0$ pour tout n et que x soit limite normique de $(x P_n(x^* x))$. Comme $\overline{P_n}(x^* x) x^* \in B$, on a $x^* \in B$.

démonstration de la proposition

Posons $B_0 = \mathcal{C}(V)$ et notons B son adhérence normique dans $\mathcal{L}(H)$. Nous allons montrer les ensembles $B_0^* B_0$ et $B_0 B_0^*$ sont contenus dans B . Pour $\omega, \omega' \in \mathcal{L}(H)_*$, on a :

$$\begin{aligned} (id \otimes \omega)(\Sigma V)^*(id \otimes \omega')(\Sigma V) &= (id \otimes \omega' \otimes \omega^*)(V_{13}^* \Sigma_{13} \Sigma_{12} V_{12}) \\ &= (id \otimes \omega' \otimes \omega^*)(\Sigma_{12} V_{23}^* V_{13} \Sigma_{23}) \end{aligned}$$

Il résulte du calcul précédent que si $x, y \in B_0$, alors $x^* y$ appartient à l'adhérence normique de l'espace vectoriel engendré par $\{(id \otimes \alpha \otimes \beta)(\Sigma_{12} V_{23}^* (a \otimes b \otimes 1) V_{13}) / \alpha, \beta \in \mathcal{L}(H)_* ; a, b \in \mathcal{K}\}$. Or il résulte de la semi-régularité de V et de ([4] 3.1) que l'adhérence normique de l'espace vectoriel engendré par $\{(a \otimes 1)V(1 \otimes b) / a, b \in \mathcal{K}\}$ contient la C^* -algèbre $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$. On en déduit que $x^* y \in \overline{\text{lin}} \{(id \otimes \alpha \otimes \beta)(\Sigma_{12} V_{23}^* V_{12} V_{13}) / \alpha, \beta \in$

$\mathcal{L}(H)_*$. Comme $V_{23}^*V_{12}V_{13} = V_{12}V_{23}^*$, on a $x^*y \in B$. Remplaçant V par $\Sigma V^*\Sigma$, on obtient également que $xy^* \in B$. ■

3.4. *Remarque.* — Si X est une coreprésentation (resp. représentation) de l'unitaire multiplicatif semi-régulier V dans un espace de Hilbert K , alors la sous-algèbre ([4] A.3) S_X (resp. $\widehat{S}_X$) est une sous-C*-algèbre de $\mathcal{L}(K)$; la preuve est la même que dans ([4] A.3).

Nous ne savons pas si la semi-régularité d'un unitaire multiplicatif V suffit pour munir la C*-algèbre S (resp. $\widehat{S}$), via le morphisme $\delta(x) = V(x \otimes 1)V^*$ (resp. $\delta(x) = V^*(1 \otimes x)V$), d'une structure de C*-algèbre de Hopf. Cependant, si S ou $\widehat{S}$ est unifère, c'est le cas car alors l'unitaire multiplicatif est régulier. Pour la preuve, montrons le résultat suivant :

3.5. LEMME. — Soient V un unitaire multiplicatif, X une coreprésentation (resp. représentation) de V dans un espace de Hilbert K . On a :

$$\overline{\text{lin}}(\mathcal{C}(V)^* \odot 1)X(\mathcal{K} \odot 1) = X(\overline{\mathcal{K} \odot A_X})$$

$$(\text{resp. } \overline{\text{lin}}(1 \odot \mathcal{K})X(1 \odot \mathcal{C}(V)^*) = \overline{(\widehat{A}_X \odot \mathcal{K})X})$$

Démonstration. Pour $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, $k \in \mathcal{K}$, on a :

$$\begin{aligned} (id \otimes \omega \otimes id)(V_{12}^*\Sigma_{12}X_{13}(k \otimes 1 \otimes 1)) &= (id \otimes \omega \otimes id)(V_{12}^*X_{23}\Sigma_{12}(k \otimes 1 \otimes 1)) \\ &= (id \otimes \omega \otimes id)(X_{13}X_{23}V_{12}^*\Sigma_{12}(k \otimes 1 \otimes 1)) \end{aligned}$$

On conclut grâce à l'égalité $V^*\Sigma(\overline{\mathcal{K} \odot \mathcal{K}}) = \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$.

L'assertion resp. résulte de celle-ci en remplaçant V par $\Sigma V^*\Sigma$ et X par $\Sigma X^*\Sigma$. ■

3.6. PROPOSITION. — Soit V un unitaire multiplicatif dans H de type compact (resp. discret). Si V est semi-régulier, alors V est régulier.

Démonstration. Notons d'abord qu'on a par ([4] 3.1), $\overline{\text{lin}}(\mathcal{K} \odot 1)V(\mathcal{K} \odot 1) = \overline{\mathcal{K} \odot A(V)}$. Si V est semi-régulier, (3.5) entraîne que $\mathcal{K} \otimes S \subset V(\mathcal{K} \otimes S)$. Si V est de plus de type compact, alors pour tout $k \in \mathcal{K}$ on a $V^*(k \otimes 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j^{p_n} (k_j \otimes s_j)$ avec $k_j \in \mathcal{K}$ et $s_j \in S$.

Pour tout $\xi, \eta \in H$, posons alors $t = (id \otimes \omega_{k\eta, \xi})(\Sigma V)$ et $t_n = \sum_j^{p_n} \theta_{s_j^* \xi, k_j \eta}$ pour

tout entier n . Pour tout $\alpha, \beta \in H$, nous avons :

$$\begin{aligned} (\alpha \mid (t - t_n)\beta) &= (\alpha \otimes k\eta \mid (\Sigma V)(\beta \otimes \xi)) - \sum_j^{p_n} (\alpha \mid s_j^* \xi)(k_j \eta \mid \beta) \\ &= ((V^*(k \otimes 1) - \sum_j^{p_n} (k_j \otimes s_j))(\eta \otimes \alpha) \mid \beta \otimes \xi) \end{aligned}$$

donc $\|t - t_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ et V est régulier.

L'assertion resp. résulte de celle-ci en remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$. ■

Par les résultats de [4], V est en fait (à la multiplicité près), irréductible.

3.7. DÉFINITION. — On dit qu'un unitaire multiplicatif V dans H est équilibré s'il existe un unitaire $U \in \mathcal{L}(H)$ tel que :

- a) $U^2 = 1$.
- b) L' unitaire $\hat{V} = \Sigma(U \otimes 1)V(U \otimes 1)\Sigma$ est multiplicatif.

Par abus de langage (et de notation), nous dirons que le couple (V, U) est un unitaire multiplicatif équilibré s'il vérifie les conditions de la définition précédente.

3.8. Remarque. — On déduit immédiatement de la définition de $\hat{V}$ que si (V, U) est un unitaire multiplicatif équilibré, V est semi-birégulier ssi V et $\hat{V}$ sont semi-réguliers. Notons aussi que l'unitaire $\tilde{V} = \Sigma(1 \otimes U)V(1 \otimes U)\Sigma = (U \otimes U)\hat{V}(U \otimes U)$ est également multiplicatif.

Dans la proposition suivante, nous donnons des propriétés algébriques des co-représentations et représentations d'un unitaire multiplicatif équilibré (V, U) . Pour cela, si X est une coreprésentation (resp. représentation) de V , nous posons $\hat{X} = (1 \otimes U)X_{21}(1 \otimes U)$ (resp. $\tilde{X} = (U \otimes 1)X_{21}(U \otimes 1)$). Nous avons :

3.9. PROPOSITION. — Soient (V, U) un unitaire multiplicatif équilibré dans H et X une co-représentation (resp. représentation) de V dans un espace de Hilbert K .

- a) $\tilde{V}_{12}X_{13}\tilde{V}_{12}^* = X_{13}X_{23}$ (resp. $\hat{V}_{23}^*X_{13}\hat{V}_{23} = X_{12}X_{13}$)
- b) $\hat{X}_{23}^*V_{13}\hat{X}_{23} = X_{12}V_{13}$ (resp. $\tilde{X}_{12}V_{13}\tilde{X}_{12}^* = V_{13}X_{23}$)
- c) $\overline{\text{lin}}(K \odot 1)X(\mathcal{C}(\tilde{V})^* \odot 1) = \overline{\text{lin}}(K \odot A_X)X$
(resp. $\overline{\text{lin}}(1 \odot \mathcal{C}(\hat{V})^*)X(1 \odot K) = \overline{\text{lin}}X(\hat{A}_X \odot K)$)

Démonstration. a) Cf. [4] A.7 b).

b) En conjuguant l'égalité $\tilde{V}_{12}X_{13}\tilde{V}_{12}^* = X_{13}X_{23}$ par l'unitaire $(1 \otimes U \otimes 1)\Sigma_{12}$, on obtient $V_{12}\hat{X}_{32}V_{12}^* = \hat{X}_{32}X_{13}$, d'où $V_{13}\hat{X}_{23}V_{13}^* = \hat{X}_{23}X_{12}$. On démontre de même l'assertion (resp.).

c) Pour $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, on a :

$$\begin{aligned} (id \otimes \omega \otimes id)((k \otimes 1 \otimes 1)X_{13}\tilde{V}_{12}^*\Sigma_{12}) &= (id \otimes \omega \otimes id)((k \otimes 1 \otimes 1)\tilde{V}_{12}^*X_{13}X_{23}\Sigma_{12}) \\ &= (id \otimes \omega \otimes id)((k \otimes 1 \otimes 1)\tilde{V}_{12}^*\Sigma_{12}X_{23}X_{13}) \end{aligned}$$

On conclut grâce à l'égalité $\overline{(\mathcal{K} \odot \mathcal{K})}\tilde{V}^*\Sigma = \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$.

L'assertion resp. résulte de celle-ci en remplaçant V par $\Sigma V^*\Sigma$ et X par $\Sigma X^*\Sigma$. $\blacksquare$

3.10. PROPOSITION. — Soient (V, U) un unitaire multiplicatif équilibré et semi-birégulier, X une coreprésentation (resp. représentation) de V . Nous avons :

- a) $X \in M(\mathcal{K} \otimes S_X)$ (resp. $X \in M(\hat{S}_X \otimes \mathcal{K})$).
- b) $X \in M(\hat{S} \otimes S_X)$ (resp. $X \in M(\hat{S}_X \otimes S)$).

Démonstration. a) Remarquons d'abord qu'on a par ([4] 3.1), $\mathcal{K} \otimes S_X = \overline{\text{lin}}(\mathcal{K} \otimes 1)X(\mathcal{K} \otimes 1)$. Comme V est semi-régulier, grâce à (3.5), on a donc $\mathcal{K} \otimes S_X \subset X(\mathcal{K} \otimes S_X)$. L'unitaire multiplicatif $\hat{V}$ étant également semi-régulier, on a aussi par (3.9 c)), $\mathcal{K} \otimes S_X \subset (\mathcal{K} \otimes S_X)X$. Donc X est un multiplicateur de $\mathcal{K} \otimes S_X$.

L'assertion resp. résulte de celle-ci en remplaçant V par $\Sigma V^*\Sigma$ et X par $\Sigma X^*\Sigma$.

- b) Il résulte clairement du a) qu'on a $V \in M(\mathcal{K} \otimes S)$. Remplaçant V par $\tilde{V}$, on en déduit que $\tilde{V} \in M(\mathcal{K} \otimes \hat{S})$. Par (3.9 a)), on a $X_{23} = X_{13}^*\tilde{V}_{12}X_{13}\tilde{V}_{12}^*$. Comme $\tilde{V}_{12}$ et X_{13} sont des multiplicateurs de $\mathcal{K} \otimes \hat{S} \otimes S_X$, il en va de même pour X_{23} .

L'assertion resp. résulte de celle-ci en remplaçant V par $\Sigma V^*\Sigma$ et X par $\Sigma X^*\Sigma$. $\blacksquare$

3.11. COROLLAIRE. — Soit V un unitaire multiplicatif équilibré et semi-birégulier, S et $\hat{S}$ les C^* -algèbres associées.

- a) $V \in M(\hat{S} \otimes S)$.
- b) Les adhérences des espaces vectoriels engendrés par $\{V(x \otimes 1)V^*(1 \otimes y) / x, y \in S\}$ et $\{V(x \otimes 1)V^*(y \otimes 1) / x, y \in S\}$ sont toutes deux égales à $S \otimes S$.
- c) Les adhérences des espaces vectoriels engendrés par $\{V^*(1 \otimes x)V(1 \otimes y) / x, y \in \hat{S}\}$ et $\{V^*(1 \otimes x)V(y \otimes 1) / x, y \in \hat{S}\}$ sont toutes deux égales à $\hat{S} \otimes \hat{S}$.

Démonstration. a) résulte clairement de (3.10 a)).

b) Pour $a \in \mathcal{K}$, $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$ et $y \in S$, on a :

$$V(L(a\omega) \otimes 1)V^*(1 \otimes y) = (\omega \otimes id \otimes id)(V_{12}V_{13}(a \otimes 1 \otimes y))$$

Par (3.10 a)) l'espace vectoriel engendré par $\{V(a \otimes y) / a \in \mathcal{K}, y \in S\}$ est dense dans $\mathcal{K} \otimes S$.

Pour $a \in \mathcal{K}$, $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$ et $y \in S$, on a :

$$(y \otimes 1)V(L(\omega a) \otimes 1)V^* = (\omega \otimes id \otimes id)((a \otimes y \otimes 1)V_{12}V_{13})$$

Par (3.10 a)) l'espace vectoriel engendré par $\{(a \otimes y)V / a \in \mathcal{K}, y \in S\}$ est dense dans $\mathcal{K} \otimes S$.

L'assertion c) résulte de b) en remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$. ■

Maintenant on a exactement comme dans ([4] 3.8) :

3.12. THÉORÈME. — Soit V un unitaire multiplicatif équilibré et semi-birégulier. Munie du coproduit δ donné par $\delta(x) = V(x \otimes 1)V^*$, l'algèbre réduite S de V est une C^* -algèbre de Hopf (1.1) bisimplifiable. Munie du coproduit $\hat{\delta}$ donné par $\hat{\delta}(x) = V^*(1 \otimes x)V$, l'algèbre réduite duale $\hat{S}$ de V est une C^* -algèbre de Hopf bisimplifiable.

Si V est un unitaire multiplicatif semi-régulier, alors on peut construire comme dans [4] les C^* -algèbres pleines S_p et $\hat{S}_p$. Si de plus, V est équilibré et semi-birégulier, on a :

3.13. THÉORÈME. — (cf. [4] A.6) Soit V un unitaire multiplicatif équilibré et semi-birégulier, alors les C^* -algèbres pleines S_p et $\hat{S}_p$ sont munies naturellement de structures de C^* -algèbres de Hopf bisimplifiables. De plus, les coreprésentations unitaires de la C^* -algèbre de Hopf S (resp. $\hat{S}$) correspondent exactement aux représentations de la C^* -algèbre $\hat{S}_p$ (resp. S_p).

Grace à (3.10), la preuve est la même que celle de ([4] A.6).

Enfin, pour affirmer avec ces hypothèses que V est en fait un multiplicateur de $\hat{S}_p \otimes_{\max} S_p$ et que les relations $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$ et $\hat{V}_{23}V_{12}V_{13} = V_{13}\hat{V}_{23}$ ont lieu respectivement dans $\mathcal{L}(\hat{S}_p \otimes_{\max} H \otimes_{\max} S_p)$ et $\mathcal{L}(\hat{S}_p \otimes_{\max} S_p \otimes H)$, il suffit de montrer le résultat suivant :

3.14. LEMME. — Soit V un unitaire multiplicatif dans l'espace de Hilbert H .

- a) Si (K, X) est une représentation et (K, Y) une coreprésentation de V dans le même espace de Hilbert K vérifiant $[Y_{12}, X_{23}] = 0$ dans $\mathcal{L}(H \otimes K \otimes H)$, alors nous avons $[X_{12}^* Y_{21} X_{12} Y_{21}^*, \Sigma_{23} V_{23}] = 0$ dans $\mathcal{L}(K \otimes H \otimes H)$.
- b) Si (K, X) est une représentation et (K, Y) une coreprésentation de V dans le même espace de Hilbert K , alors nous avons $[X_{12}^* Y_{23} X_{12} Y_{23}^*, \Sigma_{24} V_{24}] = 0$ dans $\mathcal{L}(K \otimes H \otimes K \otimes H)$.

Démonstration. a) Nous avons :

$$\begin{aligned}
X_{12}^* Y_{21} X_{12} Y_{21}^* \Sigma_{23} V_{23} &= \Sigma_{23} X_{13}^* Y_{31} X_{13} Y_{31}^* V_{23} \\
&= \Sigma_{23} X_{13}^* Y_{31} X_{13} V_{23} Y_{31}^* Y_{21}^* \\
&= \Sigma_{23} X_{13}^* Y_{31} X_{12}^* V_{23} X_{12} Y_{31}^* Y_{21}^* \\
&= \Sigma_{23} X_{13}^* X_{12}^* Y_{31} V_{23} Y_{31}^* X_{12} Y_{21}^* \\
&= \Sigma_{23} X_{13}^* X_{12}^* V_{23} Y_{21} X_{12} Y_{21}^* = \Sigma_{23} V_{23} X_{12}^* Y_{21} X_{12} Y_{21}^*
\end{aligned}$$

b) Posons $K' = K \otimes K$ et $X' = X_{13}$ (resp. $Y' = Y_{13}$) dans $\mathcal{L}(K' \otimes H)$ (resp. $\mathcal{L}(H \otimes K')$). Il est clair qu'on a $[Y'_{12}, X'_{23}] = 0$ dans $\mathcal{L}(H \otimes K' \otimes H)$; le b) résulte alors du a) appliqué à X' et Y' . ■

En s'appuyant sur le lemme précédent, il est facile de voir que les assertions b), c) et d) du lemme A.7 et la proposition A.8 de [4] sont vraies pour un unitaire multiplicatif équilibré et semi-birégulier.

Passons maintenant aux représentations covariantes de tels unitaires multiplicatifs.

Notons d'abord qu'à toute représentation covariante (X, Y) dans un espace de Hilbert K d'un unitaire multiplicatif semi-régulier, on peut associer (3.14 b)) un unitaire $W \in \mathcal{L}(K \otimes K)$ donné par $W_{13} = X_{12}^* Y_{23} X_{12} Y_{23}^*$ dans $\mathcal{L}(K \otimes H \otimes K)$. Comme dans ([4] A.10), on montre que W est multiplicatif et que (Y, X) est une représentation covariante de W dans l'espace de Hilbert H .

3.15. LEMME. — Soient V un unitaire multiplicatif dans H et (X, Y) une représentation covariante de V dans l'espace de Hilbert K . Nous avons :

$$\overline{\mathcal{C}(V) \odot \mathcal{K}(K)} = \overline{\text{lin}} (1 \odot \mathcal{K}(K)) X_{21} (\mathcal{K} \odot 1) Y (1 \odot \mathcal{K}(K))$$

Si de plus V est semi-régulier, l'unitaire multiplicatif W dans K associé à (X, Y) est semi-régulier.

Démonstration. Pour $k \in \mathcal{K}(K)$ et $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, nous avons $(id \otimes id \otimes \omega)((1 \otimes k \otimes 1) \Sigma_{13} V_{13}) = (id \otimes id \otimes \omega)((1 \otimes k \otimes 1) \Sigma_{13} Y_{12}^* X_{23} Y_{12} X_{23}^*) = (id \otimes id \otimes \omega)((1 \otimes k \otimes 1) Y_{32}^* X_{21} \Sigma_{13} Y_{12} X_{23}^*)$. On conclut grâce à l'égalité $\overline{\text{lin}} \{(id \otimes \omega)(\Sigma) / \omega \in \mathcal{L}(H)_*\} = \mathcal{K}$.

Supposons maintenant que V soit semi-régulier. Comme (Y, X) est une représentation covariante de W on a par le résultat précédent $\overline{\text{lin}} (\mathcal{C}(W) \odot \mathcal{K}) = \overline{\text{lin}} (1 \odot \mathcal{K}) Y_{21} (\mathcal{K} \odot 1) X (1 \odot \mathcal{K})$. Nous avons $\mathcal{K}(K \otimes H) \subset \overline{\text{lin}} (\mathcal{C}(W) \odot \mathcal{K})$. En effet, il suffit de montrer qu'un opérateur compact $z \in \mathcal{K}(K \otimes H)$ de la forme $z = (1 \otimes h_1) X^* (k \otimes h_2) X (1 \otimes h_3)$ où $k \in \mathcal{K}(K)$, $h_i \in \mathcal{K}$, appartient à $\overline{\text{lin}} (\mathcal{C}(W) \odot \mathcal{K})$. Or, par la semi-régularité de V , on peut supposer qu'on a $X^* (k \otimes h_2) = (1 \odot c) Y_{21} (k' \otimes 1)$ avec $c \in \mathcal{C}(V)$ et $k' \in \mathcal{K}(K)$, d'où la semi-régularité de W . ■

3.16. LEMME. — Soit (X, Y) une représentation covariante dans l'espace de Hilbert K de l'unitaire multiplicatif semi-régulier V , notons W l'unitaire multiplicatif dans K associé. Nous avons :

a) $S_W = S_Y$ et $\widehat{S}_W = \widehat{S}_X$.

b) $S_V = \overline{\text{lin}} \{(\omega' \otimes id)(X) / \omega' \in \mathcal{L}(K)_*\}$ et $\widehat{S}_V = \overline{\text{lin}} \{(id \otimes \omega')(Y) / \omega' \in \mathcal{L}(K)_*\}$.

Démonstration. a) Y étant une représentation de W dans H , l'adhérence normique dans $\mathcal{L}(K)$ de l'espace vectoriel engendré par $\{(\omega \otimes \omega' \otimes id)(Y_{13}W_{23}) / \omega \in \mathcal{L}(H)_*, \omega' \in \mathcal{L}(K)_*\}$ est S_W . Or, la relation de covariance $X_{12}W_{13}Y_{23} = Y_{23}X_{12}$ entraîne que l'adhérence normique dans $\mathcal{L}(K)$ de l'espace vectoriel engendré par $\{(\omega' \otimes \omega \otimes id)(W_{13}Y_{23}) / \omega \in \mathcal{L}(H)_*, \omega' \in \mathcal{L}(K)_*\}$ est S_Y . Comme S_W et S_Y sont des sous- C^* -algèbres de $\mathcal{L}(K)$, il y a égalité.

La deuxième égalité résulte de la précédente en remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$ et (X, Y) par $(\Sigma Y^* \Sigma, \Sigma X^* \Sigma)$.

b) (Y, X) étant une représentation covariante de W dont l'unitaire multiplicatif associé est V , le b) résulte alors du a). ■

3.17. LEMME. — Soient (V, U) un unitaire multiplicatif équilibré, (X, Y) une représentation covariante de V . Nous avons :

a) $Y_{12} = (\widehat{Y}X)_{23}^* V_{13} (\widehat{Y}X)_{23}$.

b) $X_{23} = (Y\widetilde{X})_{12} V_{13} (Y\widetilde{X})_{12}^*$.

Si, de plus, V est semi-régulier, nous avons :

c) $Y_{23}W_{13}\widetilde{X}_{21} = \widetilde{X}_{21}Y_{23}$.

d) $\widehat{Y}_{32}W_{13}X_{12} = X_{12}\widehat{Y}_{32}$.

e) $W_{13} = (Y\widetilde{X})_{21}Y_{23}(Y\widetilde{X})_{21}^*$.

Démonstration. a) résulte de (3.9 b)) et de la propriété de covariance ; on démontre de même le b).

L'assertion resp. (3.9 b)) peut s'écrire également $V_{31}X_{21}\widetilde{X}_{32} = \widetilde{X}_{32}V_{31}$ dans $\mathcal{L}(H \otimes K \otimes H)$. Dans $\mathcal{L}(H \otimes K \otimes K \otimes H)$, nous avons :

$$\begin{aligned} Y_{43}W_{23}\widetilde{X}_{42}Y_{13} &= Y_{43}X_{21}^*Y_{13}X_{21}Y_{13}^*\widetilde{X}_{42}Y_{13} \\ &= X_{21}^*Y_{43}Y_{13}X_{21}\widetilde{X}_{42} \\ &= X_{21}^*V_{41}^*Y_{13}V_{41}X_{21}\widetilde{X}_{42} \\ &= \widetilde{X}_{42}V_{41}^*\widetilde{X}_{42}^*Y_{13}\widetilde{X}_{42}V_{41} \\ &= \widetilde{X}_{42}V_{41}^*Y_{13}V_{41} = \widetilde{X}_{42}Y_{43}Y_{13} \end{aligned}$$

d'où le c). En conjuguant c) par l'unitaire $(1 \otimes U \otimes 1)$, on obtient d). L'assertion e) résulte de c) et du fait que Y est une représentation de W . ■

Comme conséquence des résultats précédents, nous avons :

3.18. THÉORÈME. — Soient V un unitaire multiplicatif dans H équilibré et semi-birégulier et (X, Y) une représentation covariante de V dans l'espace de Hilbert K . Notons W l'unitaire multiplicatif dans K associé. Nous avons :

- a) Munie du morphisme δ_W (resp. $\widehat{\delta}_W$) donné par $\delta_W(x) = W(x \otimes 1)W^*$ (resp. $\widehat{\delta}_W(x) = W^*(1 \otimes x)W$), la C^* -algèbre S_W (resp. $\widehat{S}_W$) est une C^* -algèbre de Hopf bisimplifiable.
- b) Il existe un unique isomorphisme de C^* -algèbres de Hopf π (resp. $\widehat{\pi}$) de S_V (resp. $\widehat{S}_V$) sur S_W (resp. $\widehat{S}_W$) vérifiant $(id \otimes \pi)(V) = Y$ (resp. $(\widehat{\pi} \otimes id)(V) = X$).
- c) $(\widehat{\pi} \otimes \pi)(V) = W$.

Démonstration. La coreprésentation Y de V étant stablement équivalente (3.17 a)) à la coreprésentation régulière, il existe un unique isomorphisme π de C^* -algèbres de S_V sur (3.16 a)) la C^* -algèbre $S_Y = S_W$ vérifiant $\pi(L_V(\omega)) = L_Y(\omega)$, donc $(id \otimes \pi)(V) = Y$.

Remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$ et (X, Y) par $(\Sigma Y^* \Sigma, \Sigma X^* \Sigma)$, on déduit de ce qui précède un unique isomorphisme $\widehat{\pi}$ de C^* -algèbres de $\widehat{S}_V$ sur la C^* -algèbre $\widehat{S}_X = \widehat{S}_W$ vérifiant $\widehat{\pi}(\rho_V(\omega)) = \rho_X(\omega)$, donc $(\widehat{\pi} \otimes id)(V) = X$. Appliquant $(\widehat{\pi} \otimes id \otimes \pi)$ à la relation pentagonale $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$, on obtient l'égalité $W = (\widehat{\pi} \otimes \pi)(V)$.

Soit $x = (\omega' \otimes id)(X)$ où $\omega' \in \mathcal{L}(K)_*$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 W(\pi(x) \otimes 1)W^* &= (\omega' \otimes id \otimes id)(W_{23}W_{12}W_{23}^*) \\
 &= (\omega' \otimes id \otimes id)(W_{12}W_{13}) \\
 &= (\omega' \otimes id \otimes id)(\widehat{\pi} \otimes \pi \otimes \pi)(V_{12}V_{13}) \\
 &= (\pi \otimes \pi)(V(L_V(\omega' \circ \widehat{\pi}) \otimes 1)V^*) \\
 &= (\pi \otimes \pi)(\delta_V(x))
 \end{aligned}$$

Par (3.12) et le calcul précédent, il résulte que S_W , munie de $\delta_W(x) = W(x \otimes 1)W^*$, est une C^* -algèbre de Hopf bisimplifiable, et que π est un isomorphisme de C^* -algèbres de Hopf de (S_V, δ_V) sur (S_W, δ_W) .

Le reste de l'assertion (resp.) se déduit comme précédemment. ■

Grâce aux résultats du paragraphe 4, on voit qu'avec les hypothèses précédentes, l'unitaire multiplicatif W n'est pas toujours (stablement) équivalent à V . Cependant, nous avons :

3.19. PROPOSITION. — Soient (V, U) un unitaire multiplicatif dans H semi-régulier et équilibré, (X, Y) une représentation covariante de V dans l'espace de Hilbert K ; notons W l'unitaire multiplicatif dans K associé. Alors l'unitaire multiplicatif $W_{13}W_{23}$ dans $K \otimes K$ est stablement équivalent à l'unitaire multiplicatif $\widehat{Y}_{12}V_{24}\widehat{Y}_{12}^*$ dans $K \otimes H$.

Démonstration. Montrons d'abord que l'unitaire multiplicatif (cf. 3.21) $W_{13}Y_{23}$ dans $K \otimes H$ est équivalent à l'unitaire multiplicatif $\widehat{Y}_{12}V_{24}\widehat{Y}_{12}^*$ dans $K \otimes H$. Nous avons

dans $\mathcal{L}(K \otimes H \otimes K \otimes H)$:

$$\begin{aligned} (\widehat{Y}X)_{12}(\widehat{Y}X)_{34}W_{13}Y_{23}(\widehat{Y}X)_{12}^*(\widehat{Y}X)_{34}^* &= (\widehat{Y}X)_{34}\widehat{Y}_{12}Y_{23}\widehat{Y}_{12}^*(\widehat{Y}X)_{34}^* \\ &= \widehat{Y}_{12}\widehat{Y}_{34}Y_{23}V_{24}\widehat{Y}_{34}^*\widehat{Y}_{12}^* = \widehat{Y}_{12}V_{24}\widehat{Y}_{12}^* \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que l'unitaire multiplicatif $W_{13}W_{23}$ dans $K \otimes K$ est stablement équivalent à l'unitaire multiplicatif $W_{13}Y_{23}$ dans $K \otimes H$. Pour cela, soit $T \in \mathcal{L}(K \otimes H, H \otimes K)$ l'unitaire défini par $T = s(Y\widetilde{X})_{21}^*$ où $s \in \mathcal{L}(K \otimes H, H \otimes K)$ est la volte. Nous avons, d'après (3.17), dans $\mathcal{L}\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ où $\mathcal{H} = K \otimes H \otimes K$:

$$T_{56}T_{23}W_{14}W_{24}T_{23}^*T_{56}^* = W_{14}T_{23}W_{24}T_{23}^* = W_{14}Y_{24}$$

■

3.20. COROLLAIRE. — Soit (V, U) un unitaire multiplicatif dans H semi-régulier et équilibré vérifiant $[\widehat{V}_{12}, V_{23}] = 0$. Alors V est stablement équivalent à $W_{13}W_{23}$, où W est l'unitaire multiplicatif associé à toute représentation covariante (X, Y) de V dans un espace de Hilbert K .

Démonstration. On a avec les notations de (3.9), $[\widehat{Y}_{12}, V_{23}] = 0$, d'où le résultat. ■

3.21. Remarque. — Si V est un unitaire multiplicatif dans H et X une coreprésentation (resp. représentation) de V dans l'espace de Hilbert K , il est facile de voir que l'unitaire $X_{23}V_{24}$ (resp. $V_{13}X_{23}$) dans $K \otimes H$ (resp. $H \otimes K$) est multiplicatif.

Nous terminons ce paragraphe par un résultat (3.23) dans le cas irréductible (cf. [4] 6.2), qui nous sera utile au paragraphe 4.

Donnons nous un unitaire multiplicatif irréductible (V, U) et supposons que V soit semi-birégulier, i.e V et $\widehat{V}$ semi-réguliers. Nous avons :

3.22. LEMME. — L'unitaire V est un multiplicateur de la C^* -algèbre $\overline{\mathcal{C}(\widehat{V})} \otimes \mathcal{K}$.

Démonstration. Pour tout $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$ et tout $k \in \mathcal{K}$, nous avons :

$$\begin{aligned} (id \otimes \omega \otimes id)(V_{13}\Sigma_{12}\widehat{V}_{12}(1 \otimes 1 \otimes k)) &= (id \otimes \omega \otimes id)(\Sigma_{12}V_{23}\widehat{V}_{12}(1 \otimes 1 \otimes k)) \\ &= (id \otimes \omega \otimes id)(\Sigma_{12}\widehat{V}_{12}V_{23}(1 \otimes 1 \otimes k)) \end{aligned}$$

on conclut grace à l'égalité $V(\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}) = \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$. ■

Il résulte clairement du lemme précédent qu'on a $\overline{\text{lin } \widehat{A}(V)\mathcal{C}(\widehat{V})} = \overline{\mathcal{C}(\widehat{V})}$.

3.23. PROPOSITION. — Soit (V, U) un unitaire multiplicatif irréductible et semi-birégulier. Alors l'espace vectoriel fermé engendré par $\{L(\omega')\rho(\omega) / \omega, \omega' \in \mathcal{L}(H)_*\}$ est une C^* -algèbre qui coïncide avec la fermeture normique de l'algèbre $\mathcal{C}(\widehat{V})$.

Démonstration. Par l'irréductibilité ([4] 6.2 a)) de V il est facile de voir qu'on a :

$$\overline{\widehat{\text{lin}}} \{(id \otimes \omega)(\widehat{V}V) / \omega \in \mathcal{L}(H)_*\} = U\overline{\mathcal{C}(V)}U = \overline{\mathcal{C}(\widehat{V})}$$

Remplaçant V par $\widehat{V}$ dans (3.22) et utilisant (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{C}(\widehat{V})} &= \overline{\widehat{\text{lin}}} \{(id \otimes \omega)((x \otimes 1)\widehat{V}V) / \omega \in \mathcal{L}(H)_*, x \in \widehat{A}(\widehat{V})\} \\ &= \overline{\widehat{\text{lin}}} \{L(\omega')\rho(\omega) / \omega, \omega' \in \mathcal{L}(H)_*\} \end{aligned}$$

■

3.24. *Remarque.* —

- a) Soit V un unitaire multiplicatif équilibré et semi-birégulier. Si la C^* -algèbre de Hopf S agit dans une C^* -algèbre A par une coaction δ_A , alors comme dans le cas régulier ([4] appendice), on peut définir le produit croisé “max” $A \rtimes_{\max} \widehat{S}$: c'est la C^* -algèbre dont les représentations sont données par les couples (π, u) où $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}(K)$ est une représentation de A dans l'espace de Hilbert K , et $u \in \mathcal{L}(K \otimes S)$ est une coreprésentation unitaire ([4] 0.3) de S vérifiant la condition de covariance $(\pi \otimes id)(\delta_A(a)) = u(\pi(a) \otimes 1)u^*$ pour tout $a \in A$.

Comme dans le cas des groupes, on a un plongement canonique $\pi : A \rightarrow M(A \rtimes_{\max} \widehat{S})$ (resp. $\widehat{\theta} : \widehat{S}_p \rightarrow M(A \rtimes_{\max} \widehat{S})$). Procédant comme dans ([4] A.6), on peut montrer qu'il existe un unitaire $W \in M(A \rtimes_{\max} \widehat{S} \otimes S)$ tel que $A \rtimes_{\max} \widehat{S} = \overline{\widehat{\text{lin}}} \{\pi(a)(id \otimes \omega)(W) / a \in A, \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$.

Si de plus l'unitaire multiplicatif V est moyennable ([4] appendice), par les résultats de (3.17), il est facile de montrer qu'on a $A \rtimes_{\max} \widehat{S} = A \rtimes \widehat{S}$.

- b) Avec les hypothèses de (3.23), le produit croisé réduit $S \rtimes \widehat{S}$ est isomorphe à la C^* -algèbre $\overline{\widehat{\text{lin}}} \{\rho(\omega)L(\omega') / \omega, \omega' \in \mathcal{L}(H)_*\}$ et donc contient la C^* -algèbre des opérateurs compacts. En effet, pour tout $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, on a ([4] 6.1 (2)) $\widehat{V}\delta(L(\omega))\widehat{V}^* = 1 \otimes L(\omega)$ et ([4] 6.5 c)) $[\widehat{V}, 1 \otimes \rho(\omega)] = 0$. Notons que dans le cas où l'unitaire multiplicatif est de plus moyennable, on a $S \rtimes \widehat{S} = S \rtimes_{\max} \widehat{S}$; dans ce cas les représentations de la C^* -algèbre $S \rtimes \widehat{S}$ sont les représentations covariantes de l'unitaire multiplicatif V .

4. Groupe quantique $E_\mu(2)$ de Woronowicz

Dans ce paragraphe, nous montrons que la représentation régulière de $E_\mu(2)$ est un unitaire multiplicatif semi-birégulier (mais non régulier) et irréductible. Pour cela, nous commençons par construire la mesure de Haar du groupe quantique $E_\mu(2)$. Nous donnons ensuite les représentations covariantes de cet unitaire multiplicatif et nous montrons que la C^* -algèbre $S \rtimes \widehat{S} = S \rtimes_{\max} \widehat{S}$ est une extension des compacts par les compacts. Enfin, nous explicitons la théorie modulaire des mesures de Haar de $E_\mu(2)$ et de son dual de Pontrjagyn.

Une partie des résultats de cette section ont été annoncés dans [3] ; nous donnons également les preuves de ces résultats.

a) Mesure de Haar du groupe quantique $E_\mu(2)$

Commonçons par rappeler la définition de la C^* -algèbre de Hopf [25] des “fonctions continues sur $E_\mu(2)$ tendant vers 0 à l’infini” que nous noterons dans la suite (A, δ) .

Fixons un nombre réel $\mu > 1$ et posons $\mathbf{C}_\mu = \{z \in \mathbf{C} / |z| \in \mu^{\mathbf{Z}}\} \cup \{0\}$. La C^* -algèbre A est la C^* -algèbre universelle engendrée par un unitaire $\mathbf{v} \in M(A)$ et un opérateur normal $\mathbf{n}$ de spectre $\mathbf{C}_\mu$, affilié ([2], [25]) à A , vérifiant $\mathbf{v}^* \mathbf{n} \mathbf{v} = \mu \mathbf{n}$. Autrement dit, A est le produit croisé $A = C_0(\mathbf{C}_\mu) \rtimes \mathbf{Z}$ par l’action α de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}_\mu$ définie par $\alpha(f)(\zeta) = f(\mu^{-1}\zeta)$.

Dans tout ce qui suit, nous notons L la représentation (fidèle) de A dans $l^2(\mathbf{Z}^3)$ définie par $L(\mathbf{v}) = 1 \otimes v_0 \otimes v_0$ et $L(\mathbf{n}) = v_0 \otimes n_0 \otimes 1$ où v_0 (resp. n_0) est l’opérateur dans $l^2(\mathbf{Z})$ défini par $v_0 e_n = e_{n+1}$ (resp. $n_0 e_n = \mu^n e_n$); (e_n) étant la base canonique de $l^2(\mathbf{Z})$.

Le coproduit δ est l’unique homomorphisme non dégénéré de A dans $M(A \otimes A)$ vérifiant $\delta(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ et $\delta(\mathbf{n})$ est la fermeture de l’opérateur $\mathbf{v} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}^*$, voir [25].

Fixons maintenant quelques notations qui seront constamment utilisées dans ce paragraphe. Posons $H = l^2(\mathbf{Z}^3)$. Pour tout $a, b, c \in \mathbf{Z}$, nous notons $\omega_{a,b,c}$ la forme $x \rightarrow (e_{c,a+b,a} \mid L(x)e_{0,b,0})$ sur A où $(e_{a,b,c})$ désigne la base canonique de $l^2(\mathbf{Z}^3)$. Pour tout i, j , notons $f_{i,j} \in C_0(\mathbf{C}_\mu)$ la fonction à support dans $\{z \in \mathbf{C}_\mu / |z| = \mu^i\}$ définie par $f_{i,j}(z) = (\frac{z}{|z|})^j$ si $|z| = \mu^i$. Il est clair que $\omega_{a,b,c}(\mathbf{v}^i f_{j,k}(\mathbf{n})) = \delta_{abc}^{ijk}$ et que la forme $x \rightarrow (e_{a,b,c} \mid L(x)e_{a',b',c'})$ sur A coïncide avec la forme $\delta_{b-b'}^{c-c'} \omega_{c-c',b',a-a'}$. Enfin, pour tout $\xi \in H$, notons ω_ξ la forme $\omega_{\xi,\xi} \circ L$.

Posons $\Phi = \sum_{-\infty}^{\infty} \mu^{2j} \omega_{0,j,0}$. Il est clair que Φ est un poids s.c.i et normiquement semi-fini sur A . Soit $M = L(A)''$ l’algèbre de von Neumann engendrée par $L(A)$; par abus de notation, nous notons également Φ le poids normal et ultrafaiblement semi-fini sur M défini par $x \rightarrow \sum_n \mu^{2n} (e_{0,n,0} \mid x e_{0,n,0})$.

Soit ν la mesure positive sur $\mathbf{C}_\mu$ définie pour toute fonction $f \in C_0(\mathbf{C}_\mu)$ à valeurs positives par :

$$\nu(f) = \sum_n \mu^{2n} \int_{S^1} f(\mu^n \zeta) d\zeta$$

où $d\zeta$ désigne la mesure de Haar normalisée de S^1 .

4.1. PROPOSITION. — Avec ces notations nous avons :

- a) Le poids Φ sur M est le poids dual ([15], [22]) de la mesure ν .
- b) La formule $e_{ijk} = \mu^{k-j} \Lambda_\Phi \mathbf{v}^k f_{j-k,i}(\mathbf{n})$ identifie l’espace de Hilbert H_Φ de la représentation GNS de Φ à H et la représentation π_Φ correspondante à L .

- c) L'opérateur modulaire Δ_Φ et l'opérateur J_Φ canoniquement associés à Φ , sont respectivement donnés par $\Delta_\Phi e_{ijk} = \mu^{2k} e_{ijk}$ et $J_\Phi e_{ijk} = e_{-i, j-k, -k}$.
- d) $\sigma_t^\Phi(L(A)) = L(A)$ et pour tout $a \in A$, $t \rightarrow \sigma_t^\Phi(L(a))$ est normiquement continue.

Démonstration. a) Soit $E : M \rightarrow L^\infty(C_\mu, \nu)$ l'espérance conditionnelle associée à l'action α . On a $\omega_{e_{0n0}; e_{0n0}} \circ E = \omega_{e_{0n0}; e_{0n0}}$ pour tout entier n , donc $\Phi \circ E = \Phi$. Par ailleurs, pour tout $f \in C_0(C_\mu)$, on a $(e_{0k0} \mid f(\mathbf{n})e_{0k0}) = \int_{S^1} f(\mu^k \zeta) d\zeta$, donc si f est à valeurs positives, on a $\Phi(f(\mathbf{n})) = \nu(f)$ d'où le a).

b) Soit T l'opérateur unitaire de H sur H_Φ définie par $T(e_{ijk}) = \mu^{k-j} \Lambda_\Phi \mathbf{v}^k f_{j-k, i}(\mathbf{n})$, il est facile de voir qu'on a $\pi_\Phi(\mathbf{v}) = TL(\mathbf{v})T^*$ et que pour $f \in C_0(C_\mu)$, on a $\pi_\Phi(f(\mathbf{n})) = TL(f(\mathbf{n}))T^*$.

c) résulte de a), b) et de [15]; d) se déduit facilement de a), b) et c). ■

4.2. THÉORÈME. — *Le poids Φ est une mesure de Haar à gauche et à droite pour la C^* -algèbre de Hopf (A, δ) .*

Démonstration. Vérifions d'abord que le poids Φ satisfait les conditions a) et b) de (2.2). Pour cela, par (4.1 a) et d)), il suffit de montrer que le prolongement canonique $\bar{\Phi}$ de Φ à l'algèbre de von Neumann M coïncide avec le poids $\tilde{\nu}$ sur M dual de la mesure ν . On a $\Phi = \bar{\Phi} \circ L = \tilde{\nu} \circ L$ sur A^+ , comme $\bar{\Phi}$ est [1] le régularisé s.c.i de Φ , il résulte que $\bar{\Phi} \circ \sigma_t^\nu = \bar{\Phi}$. Par [19], il est clair que $\tilde{\nu} = \bar{\Phi}$.

Pour montrer la condition c) de (2.2), nous allons d'abord calculer le produit de convolution des formes ω_{abc} .

Soit g_μ la fonction continue [25] sur C_μ définie par :

$$g_\mu(\zeta) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1 + \mu^{-1-2j}\zeta}{1 + \mu^{-1-2j}\bar{\zeta}}$$

et soit $A(m, n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_\mu(\mu^m e^{it}) e^{-int} dt$, le nième coefficient de Fourier de la restriction de g_μ au cercle $\{z \in C_\mu / |z| = \mu^m\}$.

4.3. PROPOSITION. — *Nous avons :*

$$\omega_{abc} * \omega_{a'b'c'} = \delta_{c+c'}^{a-a'} \sum_n A(b-b', n-b') A(b-b'+a-a', n-b'+c) \omega_{c+a', n, c+c'}$$

Démonstration. Posons $a = \mathbf{v} \otimes \mathbf{n}$, $b = \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}^*$. Il est facile de voir que les opérateurs a et b vérifient les conditions de ([28] thm.2.3); donc $\delta(\mathbf{n}) = \overline{a+b} = g_\mu(c) a g_\mu(c)^*$ où c est l'opérateur normal fermeture de l'opérateur $\mu^{-1} a^{-1} b$. Pour tout i, j, k nous en

déduisons :

$$\begin{aligned}
 \delta(f_{jk}(\mathbf{n})) &= g_\mu(c) f_{jk}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{n}) g_\mu(c)^* \\
 &= g_\mu(c) (\mathbf{v}^k \otimes f_{jk}(\mathbf{n})) g_\mu(c)^* \\
 &= \sum_{l,m,n} A(l-n, j-n) A(l-n+k, j-n+m) \\
 &\quad (\mathbf{v}^{k-m} f_{lm}(\mathbf{n}) \otimes \mathbf{v}^{-m} f_{n,k-m}(\mathbf{n}))
 \end{aligned}$$

En évaluant la forme $\omega_{abc} * \omega_{a'b'c'} = (\omega_{abc} \otimes \omega_{a'b'c'}) \circ \delta$ en $x = \mathbf{v}^i f_{jk}(\mathbf{n})$, on obtient l'égalité cherchée. ■

4.4. LEMME. — Soit $\xi \in H$ de composantes (ξ_{abc}) relativement à la base canonique de H . Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a :

$$a) \quad \omega_\xi * \omega_{0n0} = \sum_{m,p,q} \omega_{\xi_{m,n}^{p,q}} \text{ avec } \xi_{m,n}^{p,q} = \sum_{a,b,c} \delta_p^{a-b} \delta_q^{a-c} \xi_{abc} A(b-n, a+m-n) e_{a,m+a,c}.$$

$$b) \quad \omega_{0n0} * \omega_\xi = \sum_{m,p,q} \omega_{\xi_{p,q}^{m,n}} \text{ avec } \xi_{p,q}^{m,n} = \sum_{a,b,c} \delta_p^{a+c} \delta_q^{b-c} \xi_{abc} A(n-b, m-a-b) e_{a,m-a,c}.$$

Démonstration. Calculons d'abord $f * \omega_{0n0}$ où f est la forme définie par $f(x) = (e_{a,b,c} \mid L(x) e_{a',b',c'})$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
 f * \omega_{0n0} &= \delta_{b-b'}^{c-c'} \omega_{c-c', b', a-a'} * \omega_{0n0} \\
 &= \delta_{b-b'}^{c-c'} \delta_{a-a'}^{c-c'} \sum_m A(b'-n, m-n) A(b'-n+a-a', m-n+a-a') \omega_{c-c', m, a-a'} \\
 &= \delta_{b-b'}^{c-c'} \delta_{a-a'}^{c-c'} \sum_m A(b'-n, a'+m-n) A(b-n, a+m-n) \omega_{c-c', m+a', a-a'} \\
 &= \delta_{b-b'}^{c-c'} \delta_{a-a'}^{c-c'} \sum_m A(b'-n, a'+m-n) A(b-n, a+m-n) \omega_{e_{a,m+a,c}; e_{a',m+a',c'}} \circ L \quad (1)
 \end{aligned}$$

Pour tout entier $N \geq 0$ et tout $p, q \in \mathbf{Z}$, soient χ_N la fonction caractéristique de l'ensemble $\{ (a, b, c) \in \mathbf{Z}^3 \mid |a| + |b| + |c| \leq N \}$ et l_{pq}^N la fonction définie par $l_{pq}^N(a, b, c) = \chi_N(a, b, c) \delta_p^{a-b} \delta_q^{a-c} \xi_{abc}$, posons :

$$\xi_{m,n}^{p,q,N} = \sum_{a,b,c} l_{pq}^N(a, b, c) A(b-n, a+m-n) e_{a,m+a,c}.$$

Par (A.3) on a $\sum_{m,p,q} \|\xi_{m,n}^{p,q} - \xi_{m,n}^{p,q,N}\|^2 = \sum_{|a|+|b|+|c|>N} |\xi_{abc}|^2 \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$ d'où

$$\sum_{m,p,q} \omega_{\xi_{m,n}^{p,q}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m,p,q} \omega_{\xi_{m,n}^{p,q,N}}. \text{ D'autrepart, par (1), nous avons :}$$

$$\sum_{m,p,q} \omega_{\xi_{m,n}^{p,q,N}} = \sum_{a,b,c} \sum_{a',b',c'} \chi_N(a, b, c) \chi_N(a', b', c') \overline{\xi_{abc}} \xi_{a'b'c'} \omega_{e_{a,b,c}; e_{a',b',c'}} \circ L * \omega_{0n0}$$

qui converge normiquement quand $N \rightarrow \infty$ vers $\omega_\xi * \omega_{0n0}$, d'où le a). ■

Démonstration analogue pour le b).

4.5. LEMME. — Soit $\xi \in H$ un vecteur de composantes (ξ_{abc}) relativement à la base canonique de H . Supposons que pour tout p, q , on ait $\sum_a \mu^a |\xi_{a,a+p,a+q}| < \infty$ (resp.

$\sum_c \mu^c |\xi_{c+p,c+q,c}| < \infty$), alors pour tout $x \in A^+$, on a :

$$\Phi(x * \omega_\xi) = \|\xi\|^2 \Phi(x) \quad (\text{resp. } \Phi(\omega_\xi * x) = \|\xi\|^2 \Phi(x))$$

Démonstration. Nous avons avec les notations du lemme précédent :

$$\begin{aligned} \Phi(x * \omega_\xi) &= \sum_n \mu^{2n} (\omega_\xi * \omega_{0n0})(x) = \sum_{m,n,p,q} \mu^{2n} \omega_{\xi_{m,n}^{p,q}}(x) \\ &= \sum_{m,n,p,q} \mu^{2n} \sum_{a,b,c} \delta_{p,q}^{a-b,a-c} \xi_{abc} A(b-n, a+m-n) \omega_{\xi_{m,n}^{p,q}; e_{a,m+a,c}}(L(x)) \end{aligned}$$

Par (A.2), nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \Phi(x * \omega_\xi) &= \sum_{m,n,p,q} \mu^{2n} \sum_{a,b,c} \delta_{p,q}^{a-b,a-c} \xi_{abc} (-\mu)^{a+m-n} A(-p-m, n-m-a) \\ &\quad \omega_{\xi_{m,n}^{p,q}; e_{a,m+a,c}}(L(x)) \end{aligned} \quad (1)$$

Par (A.2), nous avons également :

$$\begin{aligned} \|\xi_{m,n}^{p,q}\|^2 &= \sum_{a,b,c} \delta_{p,q}^{a-b,a-c} |\xi_{abc}|^2 A(b-n, a+m-n)^2 \\ &= \sum_{a,b,c} \delta_{p,q}^{a-b,a-c} |\xi_{abc}|^2 \mu^{2(a+m-n)} A(-p-m, n-m-a)^2 \\ &\leq \mu^{2(m-n)} \sum_a \mu^{2a} |\xi_{a,a-p,a-q}|^2 < \infty \end{aligned}$$

Comme $\sum_n |A(x, n)| < \infty$, il vient que :

$$\begin{aligned} &\sum_n \mu^{2n} \sum_{a,b,c} \delta_{p,q}^{a-b,a-c} \xi_{abc} (-\mu)^{a+m-n} A(-p-m, n-m-a) \omega_{\xi_{m,n}^{p,q}; e_{a,m+a,c}}(L(x)) \\ &= \sum_{a,b,c} \delta_{p,q}^{a-b,a-c} \xi_{abc} (-\mu)^{a+m} \sum_n (-\mu)^n A(-p-m, n-m-a) \omega_{\xi_{m,n}^{p,q}; e_{a,m+a,c}}(L(x)) \end{aligned} \quad (2)$$

En remplaçant $\xi_{m,n}^{p,q}$ par son expression dans la base canonique de H , nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\sum_n (-\mu)^n A(-p-m, n-m-a) \omega_{\xi_{m,n}^{p,q}; e_{a,m+a,c}}(L(x)) \\ &= \sum_{a',b',c'} \delta_a^{a'} \delta_{p,q}^{a'-b',a'-c'} \overline{\xi_{a'b'c'}} (-\mu)^{a'+m} \omega_{e_{a',m+a',c'}; e_{a,m+a,c}}(L(x)) \end{aligned}$$

Tenant compte de (1),(2) et de l'égalité précédente , nous avons :

$$\begin{aligned}\Phi(x*\omega_\xi) &= \sum_{m,p,q} \sum_{a,b,c} \delta_{p,q}^{a-b, a-c} |\xi_{abc}|^2 \mu^{2(a+m)} \omega_{e_a, m+a, c}(x) \\ &= \sum_m \sum_{a,b,c} |\xi_{abc}|^2 \mu^{2(a+m)} \omega_{e_0, m+a, 0}(x) = \|\xi\|^2 \Phi(x).\end{aligned}$$

Démonstration analogue pour l'assertion (resp.). ■

4.6. LEMME. — Pour toute forme positive normale $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$ et tout $x \in A^+$, nous avons :

$$\Phi(x*\omega \circ L) = \Phi(\omega \circ L*x) = \omega(1) \Phi(x)$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $\xi \in H$, nous avons $\Phi(x*\omega_\xi) = \Phi(\omega_\xi*x) = \|\xi\|^2 \Phi(x)$. Nous allons montrer que $\Phi(x*\omega_\xi) = \|\xi\|^2 \Phi(x)$; la preuve de l'égalité $\Phi(\omega_\xi*x) = \|\xi\|^2 \Phi(x)$ étant tout à fait analogue.

Supposons que $\Phi(x) < \infty$. Pour tout $N \geq 0$, posons $y_N = \sum_{|k| \leq N} \mu^{2n} (\omega_{0n0} * x)$.

Alors la suite croissante d'opérateurs positifs $(L(y_N))$ converge faiblement vers $\Phi(x).1$. En effet, pour tout $\eta \in H$ à support fini, nous avons grace à (4.5) :

$$\omega_\eta(y_N) = \sum_{|k| \leq N} \mu^{2n} \omega_{0n0} (x*\omega_\eta) \leq \Phi(x*\omega_\eta) = \|\eta\|^2 \Phi(x)$$

Nous en déduisons que $\sup_N \|L(y_N)\| < \infty$, donc la suite $(L(y_N))$ converge faiblement vers un opérateur positif y . Mais, pour tout $\eta \in H$ à support fini, on a par (4.5) :

$$\omega_{\eta; \eta}(y) = \sup_N \omega_\eta(L(y_N)) = \Phi(x*\omega_\eta) = \|\eta\|^2 \Phi(x).$$

donc $y = \Phi(x).1$. Pour tout $\xi \in H$, nous avons alors :

$$\begin{aligned}\Phi(x*\omega_\xi) &= \sum_n \mu^{2n} \omega_{0n0} (x*\omega_\xi) \\ &= \sup_N \sum_{|k| \leq N} \mu^{2n} \omega_{0n0} (x*\omega_\xi) \\ &= \sup_N \omega_\xi(y_N) = \|\xi\|^2 \Phi(x)\end{aligned}$$

Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que si $\eta \in H$ est non nul et vérifie $\Phi(x*\omega_\eta) < \infty$, alors $\Phi(x) < \infty$.

Par (4.5), nous avons $\Phi(x*\omega_{000}) = \Phi(x)$. Si η est un vecteur de H non nul de composantes (η_{abc}) , nous avons :

$$\Phi(x*\omega_\eta) = \Phi(x*\omega_\eta*\omega_{000}) = \sum_{m,p,q} \Phi(x*\omega_{\eta_{m,0}^{p,q}})$$

Fixons m, p, q et posons $\eta_{m,0}^{p,q} = \xi$; d'après (4.4) et (A.2), les composantes (ξ_{abc}) de ξ sont données par :

$$\begin{aligned}\xi_{abc} &= \delta_{b,c}^{a+m,a-q} \eta_{a,a-p,a-q} A(a-p, a+m) \\ &= \delta_{b,c}^{a+m,a-q} \eta_{a,a-p,a-q} (-\mu)^{a+m} A(-p-m, -a-m)\end{aligned}$$

Il est clair qu'on peut trouver m, p, q de façon que le vecteur $\eta_{m,0}^{p,q} = \xi$ soit non nul et vérifie les hypothèses de (4.5). On a alors :

$$\|\eta_{m,0}^{p,q}\|^2 \Phi(x) = \Phi(x * \omega_{\eta_{m,0}^{p,q}}) \leq \Phi(x * \omega_{\eta}) < \infty$$

■

Pour terminer la preuve du théorème, nous montrons dans l'appendice B que pour toute forme positive f sur A , nous avons $\Phi(x * f) = \Phi(f * x) = \|f\| \Phi(x)$ pour tout $x \in A_+$.

Notons V l'isométrie multiplicative (2.4) de l'espace de Hilbert $H_{\Phi} \otimes H_{\Phi}$ définie pour tout $x, y \in \mathfrak{N}_{\Phi}$ par $V(\Lambda_{\Phi} x \otimes \Lambda_{\Phi} y) = \Lambda_{\Phi \otimes \Phi} \delta(x)(1 \otimes y)$. Il est évident que pour tout $x \in A$ nous avons $(L \otimes L)(\delta(x))V = V(L(x) \otimes 1)$ Pour montrer que V est surjective, notons d'abord qu'à travers l'identification $H = H_{\Phi}$ donnée par (4.1b)), nous avons :

$$\begin{aligned}V(e_{abc} \otimes e_{xyz}) &= \sum_{l,m} \mu^{l-b+c+y} A(l, b-c-y) A(a+l, b-y+m) \\ &\quad (e_{c+m, a+y+l-m, a-m} \otimes e_{x+a-c-m, y-m, z-m})\end{aligned}$$

Introduisons l'unitaire $V'' \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ défini par $V''(e_{abc} \otimes e_{xyz}) = e_{abc} \otimes e_{x, y+c-a, z+c-a}$. Alors la formule précédente nous dit exactement que $VV''^* = g_{\mu}(X)g_{\mu}(Y)$ où $X = \mathbf{v}^*(\mathbf{n}^*)^{-1} \otimes \mathbf{v}^* \mathbf{n}^*$ (resp. $Y = -(v_0 n_0 \otimes n_0^{-1} \otimes v_0^*) \otimes \mathbf{v}^* \mathbf{n}^*$), donc V est un unitaire multiplicatif dans H et nous avons pour tout $x \in A$, $(L \otimes L)(\delta(x)) = V(L(x) \otimes 1)V^*$.

Posons $W = g_{\mu}(X)V''$ et $Q = -(n_0 \otimes v_0 \otimes 1)$ dans H ; remarquons que les opérateurs normaux X et Y vérifient les conditions de ([28] thm.2.3) et que la fermeture de l'opérateur normal $\mu^{-1}X^{-1}Y$ est égale à l'opérateur $Q \otimes 1_H$.

4.7. PROPOSITION. — Avec ces notations, nous avons :

- a) $V = (g_{\mu}(Q) \otimes 1_H)W(g_{\mu}(Q)^* \otimes 1_H)$.
- b) V est semi-régulier mais non régulier.
- c) $S_V = L(A)$

Démonstration. a) Par ([28] thm.2.3), nous avons

$$g_{\mu}(X)g_{\mu}(Y) = (g_{\mu}(Q) \otimes 1)g_{\mu}(X)(g_{\mu}(Q)^* \otimes 1)$$

Comme V'' et $g_{\mu}(Q) \otimes 1_H$ commutent, on a donc $V = (g_{\mu}(Q) \otimes 1_H)W(g_{\mu}(Q)^* \otimes 1_H)$.

b) En s'appuyant sur la formule :

$$W(e_{abc} \otimes e_{xyz}) = \sum_n A(c - a - b + y, n) e_{a+n, b-n, c-n} \otimes e_{x-n, y+c-a-n, z+c-a-n}$$

il est facile de voir que l'adhérence normique E de l'espace vectoriel $\{ (id \otimes \omega)(\Sigma W) / \omega \in \mathcal{L}(H)_* \}$ coïncide avec celle de $\{ T_{xyz; x' y' z'} / (x, y, z) \in \mathbf{Z}^3, (x', y', z') \in \mathbf{Z}^3 \}$ où chaque opérateur $T_{xyz; x' y' z'}$ est défini par $T_{xyz; x' y' z'} e_{abc} = \delta_{x, y}^{a+c, b-c} A(z - c, -y') e_{a+x', b+y', c+z'}$. Par (A.4 b)), on a $\mathcal{K}(H) \subset E$ donc $\mathcal{K}(H) \subset \overline{\mathcal{C}(V)}$. Comme $\lim_{a \rightarrow -\infty} A(a, 0) = 1$, l'inclusion est stricte.

c) Par le a), il est facile de voir que $S_V = \overline{\text{lin}} \{ L_{abc} / (a, b, c) \in \mathbf{Z}^3 \}$ où chaque opérateur L_{abc} est défini par $L_{abc} e_{xyz} = A(y + a, b) e_{x-b, y+c, z+c}$. Par (A.4 b)), on a donc $S_V \subset L(A)$. D'autrepart, par (A.4 b)) et le théorème de Stone-Weierstrass, l'espace vectoriel engendré par les produits finis de fonctions sur $\mathbf{C}_\mu$ de la forme $g(\mu^x z) = f(x) z^j$ et $g(0) = 0$ où $f \in C_0(\mathbf{Z})$ et $j \in \mathbf{Z}$, et $g(\mu^x z) = A(x, 0)$ et $g(0) = 1$, est dense dans $C_0(\mathbf{C}_\mu)$. Il en résulte que $L(A) \subset S_V$. ■

Soit U l'unitaire dans H défini par $U e_{abc} = (-1)^a e_{a, b-c, -c}$. Nous avons :

4.8. PROPOSITION. — (V, U) est un unitaire multiplicatif irréductible et semi-birégulier.

Démonstration. Il est clair que $U = U^*$ et que $U^2 = 1$. Montrons que l'unitaire $\widehat{V} = \Sigma(U \otimes 1)V(U \otimes 1)\Sigma$ est multiplicatif.

Soit V' la co-isométrie dans $H_\Phi \otimes H_\Phi$ définie pour tout $x, y \in \mathfrak{N}_\Phi$ par $V'^*(\Lambda_\Phi x \otimes \Lambda_\Phi y) = \Lambda_\Phi \otimes_\Phi (\delta(y)(x \otimes 1))$. Par la coassociativité de δ , V' est multiplicative. A travers l'identification $H = H_\Phi$, on trouve :

$$\widehat{V}(e_{abc} \otimes e_{xyz}) = \sum_{l, n} \mu^{y+l-n} A(b-x-y-l, n-l-y) A(b-y, n-y) \\ (e_{a-l, b-x-z-l, c-x-z-l} \otimes e_{x+l, n, z+l})$$

Utilisant la formule précédente et (4.1b)), on vérifie directement que $V' = \widehat{V}$. Procédant comme dans (4.7b)), on montre que $\widehat{V}$ est semi-régulier, donc V est semi-birégulier.

Il reste à montrer l'égalité $\widehat{V}V\widetilde{V} = (U \otimes 1)\Sigma$ où $\widetilde{V} = \Sigma(1 \otimes U)V(1 \otimes U)\Sigma$.

Utilisant (A.2 et A.3), on trouve :

$$\widetilde{V}V(e_{abc} \otimes e_{xyz}) = \sum_{k, n} (-1)^{n+\alpha} A(\alpha+x, -n) A(a+n, \alpha+n+k) \\ (e_{k, a+b-\alpha-k, a+b-\alpha-y-k} \otimes e_{a+x-k, b-\alpha-n-k, c+x-k})$$

où on a posé $\alpha = b - c + z - y - x$. En composant avec $\widehat{V}$ et en utilisant (A.2), on obtient :

$$\widehat{V}V\widetilde{V}(e_{abc} \otimes e_{xyz}) = \sum_{l,n} (-1)^l (-\mu)^{-\alpha-n+l} A(\alpha+x, -n) A(-x+n-l, \alpha+n-l) \\ (e_{-l, -x+y-z-l, -x-z-l} \otimes e_{a+x+l, b, c+x+l})$$

Par (A.2 et A.3), on a $\sum_n (-\mu)^{-\alpha-n+l} A(\alpha+x, -n) A(-x+n-l, \alpha+n-l) = \delta_0^{l+x}$, d'où finalement $\widehat{V}V\widetilde{V}(e_{abc} \otimes e_{xyz}) = (-1)^x e_{x, y-z, -z} \otimes e_{abc}$. $\blacksquare$

Comme conséquence de (3.10), V est un multiplicateur de la C^* -algèbre $\widehat{S} \otimes S$. Nous allons préciser cette propriété.

Notons α' l'action de S^1 dans $\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z|^2 \in \mu^{\mathbf{Z}}\} \cup \{0\}$ définie pour $f \in \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}})$ par $\alpha'_z(f)(\zeta) = f(z^{-2}\zeta)$ et posons $B' = \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}}) \rtimes_{\alpha'} S^1$. Soit $z \rightarrow u_z$ le plongement de S^1 dans $M(B')$; pour tout $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, on obtient par prolongement analytique un multiplicateur non borné u_λ de B' . Notons $\mathbf{b}'$ la fonction $\zeta \rightarrow \zeta$ sur $\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}}$; avec ces notations nous avons :

4.9. PROPOSITION. — *Il existe un unique homomorphisme ρ de B' sur $\widehat{S}$ vérifiant $\rho(u_\mu) = n_0 \otimes 1 \otimes n_0^{-1}$ et $\rho(\mathbf{b}')$ est l'opérateur normal fermeture de l'opérateur $(v_0^{-1}n_0^{-\frac{1}{2}} \otimes v_0n_0^{-1} \otimes v_0n_0^{\frac{1}{2}}) - (v_0^{-1}n_0^{\frac{1}{2}} \otimes n_0^{-1} \otimes v_0n_0^{\frac{1}{2}})$ dans H .*

Démonstration. Montrons d'abord que $\rho(\mathbf{b}')$ est bien défini. Soit $X' = v_0^{-1}n_0^{-\frac{1}{2}} \otimes v_0n_0^{-1} \otimes v_0n_0^{\frac{1}{2}}$ et $Y' = -v_0^{-1}n_0^{\frac{1}{2}} \otimes n_0^{-1} \otimes v_0n_0^{\frac{1}{2}}$. Il est facile de voir que les opérateurs normaux X' et Y' dans H , vérifient les conditions de ([28] thm.2.3), donc la fermeture Z' de l'opérateur $(v_0^{-1}n_0^{-\frac{1}{2}} \otimes v_0n_0^{-1} \otimes v_0n_0^{\frac{1}{2}}) - (v_0^{-1}n_0^{\frac{1}{2}} \otimes n_0^{-1} \otimes v_0n_0^{\frac{1}{2}})$ est un opérateur normal. De plus, comme la fermeture de l'opérateur $\mu^{-1}X'^{-1}Y'$ est l'opérateur $Q = -(n_0 \otimes v_0 \otimes 1)$, par ([28] thm.2.3) nous avons $g_\mu(Q)^*Z'g_\mu(Q) = X'$. Nous en déduisons que la représentation ρ de B' dans H est bien définie et unique.

Pour voir que la C^* -algèbre $\widehat{S}$ est l'image de ρ , introduisons l'opérateur unitaire T dans H définie par $T e_{abc} = e_{a+b+c, b, b+c}$. Il est facile de voir que $T^*X'T = v_0^{-2}n_0^{-\frac{1}{2}} \otimes v_0n_0^{-1} \otimes 1$ et $T^*g_\mu(Q)^*(n_0 \otimes 1 \otimes n_0^{-1})g_\mu(Q)T = T^*(n_0 \otimes 1 \otimes n_0^{-1})T = n_0 \otimes 1 \otimes 1$. Nous avons $\widehat{S} = \overline{\text{lin}} \{ \rho_V(\omega_{ijk}) \mid (i, j, k) \in \mathbf{Z}^3 \}$. Utilisant (4.7), on vérifie directement que les représentations $B' \rightarrow \mathcal{L}(H) : x \rightarrow T^*g_\mu(Q)^*\rho(x)g_\mu(Q)T$ et $\widehat{S} \rightarrow \mathcal{L}(H) : x \rightarrow T^*g_\mu(Q)^*xg_\mu(Q)T$ ont même image, d'où le résultat. $\blacksquare$

Dans toute la suite, posons $\mathbf{b} = \rho(\mathbf{b}')$ et $\mathbf{x} = \rho(u_\mu^{-1})$. Il résulte de (4.9) que les opérateurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{x}$ sont affiliés à $\widehat{S}$. Notons également h la fonction sur $\mathbf{C}_\mu \setminus \{0\}$ définie par $h(\mu^m z) = z^{-m}$.

4.10. THÉORÈME. — *Nous avons $V = g_\mu(\mathbf{b}^*\mathbf{x}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{v}^*\mathbf{n}^*)h(\mathbf{x}^{-1} \otimes \mathbf{v})$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'avec les notations de (4.7), la fermeture de l'opérateur $\mathbf{b}^* \mathbf{x}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{v}^* \mathbf{n}^*$ coïncide avec celle de $X + Y$. Par ([28] thm.2.3), nous avons :

$$g_\mu(\mathbf{b}^* \mathbf{x}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{v}^* \mathbf{n}^*) = g_\mu(X)g_\mu(Y) = VV''^*$$

D'autre part, il est clair que $V'' = h(\mathbf{x}^{-1} \otimes \mathbf{v})$. ■

Notons β la représentation de $\widehat{S}$ dans $\mathcal{L}(l^2(\mathbf{Z}^2))$, apparue dans la preuve de (4.9), donnée par $x \rightarrow T^* g_\mu(Q)^* x g_\mu(Q) T$ où T désigne toujours l'unitaire de $\mathcal{L}(H)$ défini par $T e_{abc} = e_{a+b+c, b, b+c}$.

4.11. COROLLAIRE. — La C^* -algèbre de Hopf $\widehat{S}_V$ munie du coproduit opposé $\widehat{\delta}^0 = \sigma \circ \widehat{\delta}$ est isomorphe à la C^* -algèbre de Hopf des "fonctions continues tendant vers 0 à l'infini" sur le dual de Pontrjagin de $E_\mu(2)$ (au sens de Woronowicz).

Démonstration. Soit $(B, \widehat{\Phi})$ la C^* -algèbre de Hopf des "fonctions continues tendant vers 0 à l'infini" sur le dual de Pontryagin de $E_\mu(2)$, voir [26]. Il résulte de (4.9) que la représentation β définit un isomorphisme de C^* -algèbres de $\widehat{S}$ sur B . Pour montrer que β est un morphisme de C^* -algèbres de Hopf, introduisons la représentation γ de S dans $\mathcal{L}(l^2(\mathbf{Z}^2))$ définie par $\gamma(\mathbf{v}) = v_0^{-1} \otimes 1$ et $\gamma(\mathbf{n}) = n_0^{-1} \otimes v_0$. Alors par (4.10), $(\beta \otimes \gamma)(V)$ est la représentation fondamentale $\mathcal{W}$ donnée par Woronowicz. Il en résulte que β est un isomorphisme de C^* -algèbres de Hopf. ■

4.12. Remarque. — S'appuyant sur (4.7a)) et (A.2 et A.3), on peut voir que $\widehat{\delta}(\mathbf{b}) = V^*(1 \otimes \mathbf{b})V$ est l'opérateur normal ([28] thm.2.3) fermeture de l'opérateur $\mathbf{b} \otimes \mathbf{x}^{\frac{1}{2}} + \mathbf{x}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{b}$. Ce résultat est également une conséquence du corollaire précédent et de [26]. D'autrepart, il est facile de voir qu'on a $\widehat{\delta}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$.

b) Représentations de $S \rtimes \widehat{S}$

Nous allons montrer que la C^* -algèbre $S \rtimes \widehat{S}$ est une extension de la C^* -algèbre $\mathcal{K}$ des opérateurs compacts par $\mathcal{K}$, donc n'admet que deux représentations. Il en résulte que (3.24) l'unitaire multiplicatif V n'admet que deux représentations covariantes : la représentation régulière (V, V) et une deuxième (X, Y) , dont l'unitaire multiplicatif correspondant est non régulier et non irréductible, que nous expliciterons.

Commençons par décrire la C^* -algèbre $S \rtimes \widehat{S}$.

Par (3.24), nous savons que la C^* -algèbre $S \rtimes \widehat{S}$ s'identifie à l'espace vectoriel fermé engendré par les opérateurs $\{L(\omega)\rho(\omega') / \omega, \omega' \in \mathcal{L}(H)_*\}$, nous en déduisons un plongement canonique de la C^* -algèbre S (resp. $\widehat{S}$) dans $M(S \rtimes \widehat{S})$. En particulier les opérateurs $L(\mathbf{v}), L(\mathbf{n}), \mathbf{b}, \mathbf{x}$ sont ([2], [25]) affiliés à $S \rtimes \widehat{S}$. Notons simplement dans cette section $\mathbf{v}$ (resp. $\mathbf{n}$), l'opérateur $L(\mathbf{v})$ (resp. $L(\mathbf{n})$), posons $\mathbf{u} = \text{Phase } \mathbf{n}$, $\mathbf{w} = \mathbf{u} \mathbf{v}$ et soit $\mathbf{y}$ l'opérateur normal fermeture ([28] thm.2.3) de l'opérateur $\mathbf{b} - \mathbf{v} \mathbf{n}^{-1} \mathbf{x}^{\frac{1}{2}}$; nous

verrons plus loin que les opérateurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{w}$ sont également affiliés à la C^* -algèbre $S \rtimes \widehat{S}$.

Nous avons :

4.13. THÉORÈME. — *La C^* -algèbre $S \rtimes \widehat{S}$ est une extension de la C^* -algèbre $\mathcal{K}$ des opérateurs compacts par $\mathcal{K}$.*

Par (3.23 et 3.24 b)), il résulte de l'irréductibilité de V et de (4.7b)) que la C^* -algèbre $S \rtimes \widehat{S}$ contient $\mathcal{K}$; pour montrer que le quotient de $S \rtimes \widehat{S}$ par $\mathcal{K}$ s'identifie également à $\mathcal{K}$, nous allons introduire une C^* -algèbre D (qui est clairement une extension de $\mathcal{K}$ par $\mathcal{K}$), et montrer que l'extension D de $\mathcal{K}$ par $\mathcal{K}$ est canoniquement isomorphe à celle définie par $S \rtimes \widehat{S}$ et l'idéal $\mathcal{K} \subset S \rtimes \widehat{S}$.

Pour toute fonction $f \in C_0(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \cup \{-\infty\}))$, notons T_f l'opérateur dans H défini par $T_f e_{abc} = f(a - c, b, c) e_{abc}$. Nous avons :

4.14. PROPOSITION. — $S \rtimes \widehat{S} = \overline{\text{lin}}(\mathcal{K} + \{\mathbf{u}^i \mathbf{v}^j T_f / f \in C_0(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \cup \{-\infty\})), (i, j) \in \mathbf{Z}^2\})$.

Démonstration. Posons $E = \overline{\text{lin}}(\mathcal{K} + \{\mathbf{u}^i \mathbf{v}^j T_f\})$ et montrons que $E \subset S \rtimes \widehat{S}$. Écrivant que les opérateurs $\mathbf{v}^x f_{y,z}(\mathbf{n}) \rho_{ijk} \mathbf{v}^{x'} f_{y',z'}(\mathbf{n})$ appartiennent à $S \rtimes \widehat{S}$ et utilisant (A.2), on obtient que les opérateurs T de la forme :

$$T e_{abc} = \delta_{a-c}^x \delta_b^y A(c + z, y' - y) e_{a+x'y'c}$$

où $x, x'y, y'$ et z sont des entiers arbitraires, appartiennent à $S \rtimes \widehat{S}$. Par (A.4 b)), il est clair que $E \subset S \rtimes \widehat{S}$.

Pour montrer l'autre inclusion, nous avons besoin du lemme suivant :

4.15. LEMME. — *Pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3$ et tout $n \in \mathbf{Z}$, posons $\Phi_n(b, c) = A(n + x, b + x)A(b - c + y, n - c + z)$. Nous avons :*

$$\sum_b \Phi_n(b, c)^2 \leq \mu^{2(x+z-y)} \mu^{2n}$$

Démonstration. Par (A.2 et A.3), nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_b \Phi_n(b, c)^2 &= \sum_b \mu^{2(b+x)} A(n - b, -b - x)^2 A(b - c + y, n - c + z)^2 \\ &\leq \sum_b \mu^{2(b+x)} A(b - c + y, n - c + z)^2 \\ &= \mu^{2(c+x-y)} \sum_b \mu^{2b} A(b, n - c + z)^2 \\ &= \mu^{2(x+z-y)} \mu^{2n} \end{aligned}$$

Fin de la démonstration de la proposition . Par (4.7a)), la C^* -algèbre $S \rtimes \widehat{S}$ est l'espace vectoriel fermé engendré par les opérateurs $L_{xyz} \rho_V(\omega_{ijk})$, où L_{xyz} (resp. $\rho_V(\omega_{ijk})$) est l'opérateur défini par $L_{xyz} e_{abc} = A(x+b, y) e_{a-y, b+z, c+z}$ (resp. $\rho_V(\omega_{ijk}) e_{abc} = (-1)^k \delta_{a-c}^{k-i} \sum_n (-1)^{n-b} A(n-i-j, b-i-j) A(b-c-j, n-c-j-k) e_{a-k, n, c+k}$).

Pour montrer qu'un opérateur T de la forme $T = L_{xyz} \rho_{ijk}$ appartient à E , il suffit de montrer, grâce à (A.2) et au lemme précédent, que pour chaque $n \in \mathbf{Z}$, on a $T_n \in E$, où T_n est un opérateur de la forme $T_n e_{abc} = \delta_{a-c}^x \delta_b^y A(c+j, n-k-y) e_{a-k, n, c+k}$. Or, si $y = n-k$, T_n est clairement un opérateur de E ; si par contre $y \neq n-k$, par (A.4 b)) T_n est compact. ■

Soit α l'action du groupe $S^1 \times \mathbf{Z}$ sur l'espace $\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} \times \mathbf{Z}$ définie par $\alpha_{z,n}(g)(\zeta, p) = g(z^{-2}\zeta, p-n)$ où $g \in C_0(\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} \times \mathbf{Z})$. Posons $C = C_0(\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} \times \mathbf{Z}) \rtimes (S^1 \times \mathbf{Z})$ et soit $(z, n) \rightarrow u_{z,n}$ le plongement de $S^1 \times \mathbf{Z}$ dans $M(C)$; notons $\mathbf{y}'$ (resp. $\mathbf{p}$) la fonction $(\zeta, p) \rightarrow \zeta$ (resp. $(\zeta, p) \rightarrow \mu^p$) sur $\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} \times \mathbf{Z}$. Munissons la C^* -algèbre C de l'action du groupe $\mathbf{Z}$ donnée par l'automorphisme γ de C défini par :

$$\gamma(g)(\zeta, p) = g(\mu^{-\frac{1}{2}} \zeta, p+1), \quad g \in C_0(\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} \times \mathbf{Z}); \quad \gamma(u_{z,n}) = z^{-1} u_{z,n}$$

Posons finalement $D = C \rtimes \mathbf{Z}$. Nous avons :

4.16. LEMME. — D est une extension de $\mathcal{K}$ par $\mathcal{K}$.

Démonstration. Soit J l'idéal de D défini par $\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} \setminus \{0\}$. Comme $\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} \setminus \{0\}$ s'identifie à $\mathbf{Z} \times S^1$, l'idéal J est isomorphe à $\mathcal{K}$ ainsi que le quotient de D par cet idéal. ■

démonstration du théorème

Il suffit de construire un homomorphisme surjectif $\pi : D \rightarrow S \rtimes \widehat{S}$ de C^* -algèbres tel que $\pi(J) = \mathcal{K}$ où J est l'idéal de D défini par $\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} \setminus \{0\}$.

Soit π la représentation de C dans H définie par $\pi(\mathbf{y}') = -v_0^{-1} n_0^{\frac{1}{2}} \otimes n_0^{-1} \otimes v_0 n_0^{\frac{1}{2}}$, $\pi(\mathbf{p}) = |\mathbf{n}| = 1 \otimes n_0 \otimes 1$ et $\pi(u_\mu, 1) = \mathbf{x}^{-1} \mathbf{w} = \mathbf{w} \mathbf{x}^{-1}$. Pour tout $x \in C$, on a $\pi(\gamma(x)) = \mathbf{v}^* \pi(x) \mathbf{v}$; nous en déduisons une représentation de D dans H notée toujours π . La description de la C^* -algèbre $S \rtimes \widehat{S}$ donnée par (4.14) permet de voir sans peine que $\pi(D) = S \rtimes \widehat{S}$ et que $\pi(J) = \mathcal{K}$. ■

4.17. COROLLAIRE. — L'opérateur normal $\mathbf{y}$ est affilié à la C^* -algèbre $S \rtimes \widehat{S}$.

Démonstration. L'opérateur $\mathbf{y}'$ est affilié à la C^* -algèbre D et on a $\pi(\mathbf{y}') = \mathbf{y}$. ■

Explicitons pour terminer la représentation covariante de V correspondant à l'homomorphisme quotient $p : S \rtimes \widehat{S} \rightarrow S \rtimes \widehat{S} / \mathcal{K} \simeq \mathcal{K}$.

Soit θ (resp. $\hat{\theta}$), la représentation de S (resp. $\hat{S}$) dans $l^2(\mathbf{Z}^2)$ définie par $\theta(\mathbf{v}) = 1 \otimes v_0$ et $\theta(\mathbf{n}) = v_0 \otimes n_0$ (resp. $\hat{\theta}(\mathbf{b}) = v_0^{-1} n_0^{-\frac{1}{2}} \otimes v_0 n_0^{-\frac{1}{2}}$ et $\hat{\theta}(\mathbf{x}) = n_0^{-1} \otimes n_0$). Posons $X = (\hat{\theta} \otimes id)(V)$, $Y = (id \otimes \theta)(V)$ et $W' = (\hat{\theta} \otimes \theta)(V)$.

4.18. PROPOSITION. — *L'homomorphisme quotient p est la représentation de $S \rtimes \hat{S}$ correspondant à la représentation covariante (X, Y) de V . De plus l'unitaire multiplicatif W' associé est non régulier et non irréductible.*

Démonstration. Il est clair que X (resp. Y) est une représentation (resp. coreprésentation) de V . Par un calcul direct utilisant (4.7) et (A.2 et A.3), on obtient la relation de covariance $Y_{12} V_{13} X_{23} = X_{23} Y_{12}$. Nous avons :

$$W'(e_{ab} \otimes e_{xy}) = \sum_n A(y - a, n) e_{a+n, b-n} \otimes e_{x-n, y+b-a-n}$$

S'appuyant sur la formule précédente, il est facile de voir que W' est non régulier et que le commutant de $S_{W'}$ est commutatif, donc W' est non irréductible. Soit p' la représentation (3.24) de $S \rtimes \hat{S}$ dans $l^2(\mathbf{Z}^2)$ correspondant à cette représentation covariante ; on a $p'(\mathbf{y}) = 0$, donc $p'(S \rtimes \hat{S}) = \mathcal{K}(l^2(\mathbf{Z}^2))$ et p' est unitairement équivalente à p . ■

c) Mesures de Haar duales et théorie modulaire

Pour expliciter les mesures de Haar duales, introduisons la famille (ω^{xyz}) de formes continues sur $\widehat{S_V}$ définie par

$$\omega^{xyz}(\rho_V(\omega_{ijk})) = (-\mu)^{-k} \delta_{k-i, k}^{x, z} A(i + j - y, k) = (f_{-z, y+z, z-x} \mid \rho_V(\omega_{ijk}) f_{0, y, -x})$$

où $f_{xyz} = g_\mu(Q) e_{xyz}$.

4.19. PROPOSITION. — *Nous avons :*

$$a) \omega_{f_{x'y'z'}, f_{xyz}} = \delta_{y'-y}^{x-x'} \delta_{y'-y}^{z'-z} \omega^{x-z, y, x-x'} \text{ sur } \widehat{S_V}.$$

$$b) \omega^{xyz} * \omega^{x'y'z'} = \sum_n A(y' - x - y, n) A(y' - x - y + z' + z, n + z) \omega^{x+x', y'-x-n, z+z'}$$

Démonstration. Nous avons $\widehat{S_V} = \overline{\text{lin}}\{ \rho_V(\omega_{ijk}) / (i, j, k) \in \mathbf{Z}^3 \}$. Utilisant (4.7a), il est facile de vérifier l'égalité a) pour tout $x = \rho_V(\omega_{ijk})$.

b) Pour tout i, j, k , posons $T = \rho_V(\omega_{ijk})$; nous avons :

$$\begin{aligned} \omega^{xyz} * \omega^{x'y'z'}(T) &= (\omega^{xyz} \otimes \omega^{x'y'z'} \otimes \omega_{ijk})(V_{12}^* V_{23} V_{12}) \\ &= (\omega^{xyz} \otimes \omega^{x'y'z'} \otimes \omega_{ijk})(V_{13} V_{23}) \\ &= (\omega_{e_{-z, y+z, z-x}; e_{0, y, -x}} \otimes \omega_{e_{-z', y'+z', z'-x'}; e_{0, y', -x'}} \otimes \omega_{ijk})(W_{13} W_{23}) \\ &= \sum_{n, m} A(j - x' - y', n) A(j - x' - x - y - n, m) \delta_n^{-z'} \delta_m^{-z} \delta_{n+m}^{-k} \delta_{x+x'}^{k-i} \\ &= \delta_{x+x'}^{k-i} \delta_{z+z'}^k A(j - x' - y', -z') A(j - x' - x - y + z', -z) \end{aligned}$$

Utilisant (A.2), on obtient $A(j - x' - y', -z') = A(x' + y' - j, x' + y' - z' - j)$ et $A(j - x - x' - y + z', -z) = A(x + x' + y - z' - j, -z + x + x' + y - z' - j)$. Nous en déduisons :

$$\omega^{xyz} * \omega^{x'y'z'}(T) = \delta_{x+x'}^{k-i} \delta_{z+z'}^k A(z' + y' + z - x - i - j, y' + z - x - i - j) A(z + y - i - j, y - i - j)$$

Posons $\xi = y' - x - y + z + z'$, $\alpha = z + z'$, $\eta = y' - x - y$, $\beta = z'$, $\gamma = x + z' - y' + i + j$, on obtient grace à (A.4 a)) :

$$\begin{aligned} \omega^{xyz} * \omega^{x'y'z'}(T) &= \delta_{x+x'}^{k-i} \delta_{z+z'}^k A(\xi + \beta - \gamma - \eta, \alpha - \gamma) A(\alpha - \gamma - \eta, \beta - \gamma - \eta) \\ &= \delta_{x+x'}^{k-i} \delta_{z+z'}^k (-\mu)^{-\gamma} \sum_n (-\mu)^{-n} A(\xi, n + \alpha) A(\eta, n + \beta) A(\xi - \eta, n + \gamma) \\ &= \delta_{x+x'}^{k-i} \delta_{z+z'}^k (-\mu)^{-k} \sum_n A(\xi, n + \alpha) A(\eta, n + \beta) A(n + \gamma, \xi - \eta) \quad (\text{A.2 a)}) \\ &= \sum_n A(y' - x - y, n) A(y' + z' - x - y + z, n + z) \omega^{x+x', y'-x-n, z+z'}(T) \end{aligned}$$

■

Posons $\tau = \sum_{a,b} \mu^{-a-2b} \omega^{a,b,0}$ et avec les notations de (4.9), $\widehat{F} = \rho(u_\mu)$.

4.20. PROPOSITION. — Avec les notations précédentes, nous avons :

- τ est une trace s.c.i, semi-finie normiquement sur $\widehat{S}_V$ et fidèle sur le bicommutant de $\widehat{S}_V$.
- $\widehat{\Phi} = \tau(\widehat{F}^{-1})$ et $\Psi = \tau(\widehat{F})$ sont des poids s.c.i, semi-finis normiquement sur $\widehat{S}_V$ et fidèles sur le bicommutant de $\widehat{S}_V$.
- La formule $\Lambda_{\widehat{\Phi}} \rho_V(\omega_{abc}) = (-1)^c \mu^{-b-c} e_{-c, a+b, a}$ identifie l'espace de Hilbert $H_{\widehat{\Phi}}$ de la représentation GNS de $\widehat{\Phi}$ à $H = l^2(\mathbf{Z}^3)$ et la représentation $\pi_{\widehat{\Phi}}$ correspondante à ρ_V .
- L'opérateur modulaire $\Delta_{\widehat{\Phi}}$ et l'opérateur $J_{\widehat{\Phi}}$ canoniquement associés à $\widehat{\Phi}$, sont respectivement donnés par $\Delta_{\widehat{\Phi}} e_{abc} = \mu^{-2a} e_{abc}$ et $J_{\widehat{\Phi}} e_{abc} = (-1)^a e_{-a, b, c}$.
- $\rho_V(\widehat{F})$ est affilié au centralisateur du poids $\widehat{\Phi}$ et on a $\widehat{\Phi}(\widehat{F}^2) = \widehat{\Psi}$.

Démonstration. a) Par un calcul directe, on voit que pour $x = \rho_V(\omega_{ijk})$, on a $x \in \mathcal{N}_\tau \cap \mathcal{N}_\tau^*$ et que les formes $x\tau$ et τx se prolongent de façon unique au bicommutant de $\widehat{S}$. Il en résulte que τ est semi-finie. Utilisant l'inclusion $U\widehat{S}U \subset \widehat{S}'$ donnée par ([4] 6.5 c)), on voit facilement que τ est fidèle sur l'algèbre de von Neumann S_V'' . Comme pour tout $x = \rho_V(\omega_{ijk})$ et tout $y = \rho_V(\omega_{i'j'k'})$, on a $\tau(xy) = \tau(yx)$, τ est une trace sur S_V'' .

b) Par (4.9), on sait que $\widehat{F} = \rho(u_\mu)$ est affilié à la C*-algèbre $\widehat{S}$; le b) résulte alors du a) et de [19].

c) Résulte de (4.3), $\rho_V(\omega_{abc})^* = (-\mu)^{-c} \rho_V(\omega_{a, b, -c})$ et d'un calcul directe.

d) et e) résultent du a) et du b); voir [22].

■

Il résulte facilement de (4.19 b)) que pour tout x, y on a $\widehat{\Psi} * \omega^{x,y,0} = \widehat{\Psi}$ (resp. $\omega^{x,y,0} * \widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}$) ; en particulier on a $\widehat{\Psi} * \omega^{0,0,0} = \widehat{\Psi}$ (resp. $\omega^{0,0,0} * \widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}$). Procédant comme dans (4.2), on montre :

4.21. THÉORÈME. — *Le poids $\widehat{\Phi}$ (resp. $\widehat{\Psi}$ est une mesure de Haar à gauche (resp. à droite) sur la C^* -algèbre de Hopf $\widehat{S}_V$.*

Nous avons muni chacune des C^* -algèbres de Hopf S_V et $\widehat{S}_V$ canoniquement associées à l'unitaire multiplicatif irréductible (V, U) , de mesures de Haar : S_V admet une mesure de Haar Φ à gauche et à droite ; $\widehat{S}_V$ admet une mesure de Haar $\widehat{\Phi}$ à gauche et une mesure de Haar $\widehat{\Psi}$ à droite, cette dernière étant un poids de densité $\widehat{F}^2$ relativement à $\widehat{\Phi}$. D'autrepart, le carré de l'antipode κ (resp. $\widehat{\kappa}$) engendre un groupe à un paramètre d'automorphismes $(\kappa^2)^{it}$ (resp. $(\widehat{\kappa}^2)^{it}$) sur S_V (resp. $\widehat{S}_V$) implémenté par l'opérateur autoadjoint positif K (resp. $\widehat{K}$) donné par $K = \lambda(\widehat{F})\rho(\widehat{F})$ (resp. $\widehat{K} = K^{-1}$).

Il résulte alors de (4.1) et (4.20) qu'on a (cf. [21]) :

4.22. PROPOSITION. — a) $U = J_{\Phi} J_{\widehat{\Phi}} = J_{\widehat{\Phi}} J_{\Phi}$
 b) les opérateurs modulaires des poids Φ , $\widehat{\Phi}$ et $\widehat{\Psi}$ sont donnés par :

$$\Delta_{\Phi} = \lambda(\widehat{F})\rho(\widehat{F}^{-1}), \Delta_{\widehat{\Phi}} = \lambda(\widehat{F}^{-1})\rho(\widehat{F}^{-1}), \Delta_{\Psi} = \lambda(\widehat{F})\rho(\widehat{F}).$$

$$c) \delta \circ \sigma_t^{\Phi} = ((\kappa^2)^{it} \otimes \sigma_t^{\Phi}) \circ \delta = (\sigma_t^{\Phi} \otimes (\kappa^2)^{-it}) \circ \delta \text{ sur } S_V.$$

$$d) \widehat{\delta} \circ \sigma_t^{\widehat{\Phi}} = ((\widehat{\kappa}^2)^{it} \otimes \sigma_t^{\widehat{\Phi}}) \circ \widehat{\delta}, \widehat{\delta} \circ \sigma_t^{\widehat{\Psi}} = (\sigma_t^{\widehat{\Psi}} \otimes (\widehat{\kappa}^2)^{-it}) \circ \widehat{\delta} \text{ sur } \widehat{S}_V.$$

$$e) V\sigma_t^{\widehat{\Phi} \otimes \Phi}(V^*) = \rho(\widehat{F}^{2it}) \otimes 1.$$

Procédant comme dans [4], on peut construire le double quantique de tout unitaire multiplicatif irréductible (V, U) semi-birégulier : on obtient un unitaire multiplicatif irréductible semi-birégulier.

Dans le cas du groupe quantique $E_{\mu}(2)$, l'algèbre réduite $S \otimes \widehat{S}$ (et l'algèbre réduite duale) admettent des mesures de Haar.

4.23. THÉORÈME. — *le poids $\Phi \otimes \widehat{\Phi}$ est une mesure de Haar à gauche et à droite pour le double quantique de $E_{\mu}(2)$.*

Démonstration. Soit $\tau : S \otimes \widehat{S} \rightarrow \widehat{S} \otimes S$ l'inversion donnée par $\tau(x \otimes y) = V(y \otimes x)V^*$, il suffit de montrer que $(\widehat{\Phi} \otimes \Phi) \circ \tau = \Phi \otimes \widehat{\Psi}$. Or par (4.22 e)), pour tout t on a $(D((\widehat{\Phi} \otimes \Phi) \circ \tau) : D(\Phi \otimes \widehat{\Psi}))_t = 1$, où $(D((\widehat{\Phi} \otimes \Phi) \circ \tau) : D(\Phi \otimes \widehat{\Psi}))_t$ désigne la dérivée de Radon-Nikodym [10] du poids $(\widehat{\Phi} \otimes \Phi) \circ \tau$ relativement au poids $\Phi \otimes \widehat{\Psi}$ sur l'algèbre de von Neumann $S'' \otimes \widehat{S}'$. ■

Appendice A

Dans cette première appendice, nous donnons les preuves des propriétés des coefficients $A(m, j)$ utilisées principalement dans le paragraphe 4.

Considérons l'espace vectoriel réel (de dimension 2) E des suites $(b(m, j))_{(m, j) \in \mathbf{Z}}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ vérifiant pour tout (m, j) :

$$(E.1) \quad b(m-1, j) \mu^j = b(m, j) + b(m, j+1) \mu^{m-1}$$

$$(E.2) \quad b(m, j) = b(m-1, j) \mu^{-j} + b(m-1, j-1) \mu^{m-j}$$

Nous avons :

A.1 Lemme - Soit $(b(m, j))$ une suite de E .

$$a) \quad b(m, j) = (-\mu)^j b(m-j, -j) = b(-m, j-m) = (-\mu)^{j-m} b(j, m)$$

b) Les nombres $b_{i,j,k} = (-\mu)^{-j} b(i-k, j-k)$ sont invariants par permutation des entiers i, j, k .

Démonstration. Posons $u(m, j) = (-\mu)^j b(m-j, -j)$ (resp. $v(m, j) = b(-m, j-m)$). Il est facile de voir que les suites $u(m, j)$ et $v(m, j)$ appartiennent à E . Comme $u(m, 0) = b(m, 0)$ et $v(0, j) = b(0, j)$ pour tout $m, j \in \mathbf{Z}$, on a donc $u = b = v$; les autres assertions se déduisent immédiatement de ce résultat. ■

Dans le paragraphe 4, nous avons noté g_μ , la fonction introduite par Woronowicz dans [25], définie par :

$$g_\mu(\zeta) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1 + \mu^{-1-2j}\zeta}{1 + \mu^{-1-2j}\bar{\zeta}}$$

La fonction g_μ est continue sur C_μ et, pour tout $m \in \mathbf{Z}$, la fonction $z \rightarrow g_\mu(\mu^m z)$ définie sur S^1 , se prolonge en une fonction méromorphe [25] dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ dont les pôles sont les nombres $-\mu^{mq-q}$ où $q = 1, 3, 5, \dots$. Nous noterons dans ce qui suit $g_\mu(m, \cdot)$ ce prolongement ; dans [25], il est noté $U(m, \cdot)$. Rappelons également qu' on a posé $A(m, j)$ pour le j ème coefficient de Fourier de la restriction de la fonction g_μ au cercle $\{z \in C_\mu / |z| = \mu^m\}$.

A.2 Proposition - Nous avons :

a) La suite $(A(m, j))$ appartient à E .

$$b) \quad \lim_{m \rightarrow -\infty} A(m, j) = \delta_0^j \text{ uniformément en } j.$$

c) Si $(b(m, j))$ est une suite bornée de E et vérifie $\lim_{m \rightarrow -\infty} b(m, 0) = 1$, alors nous avons $b(m, j) = A(m, j)$ pour tout (m, j) .

Démonstration. a) Pour z de module 1, on a $g_\mu(m, \bar{z}) = \overline{g_\mu(m, z)}$, on en déduit que $A(m, j)$ est réel. La relation (E.1) (resp. (E.2)) résulte de la relation $g_\mu(m-1, \mu z) = (1 + \mu^{m-1} z^{-1}) g_\mu(m, z)$ (resp. $g_\mu(m, z) = (1 + \mu^{m-1} z) g_\mu(m-1, \mu^{-1} z)$, voir [25].

b) Résulte de $\lim_{m \rightarrow -\infty} g_\mu(\mu^m z) = 1$ uniformément en z de module 1.

c) Il résulte de a) et b), qu'il suffit de montrer qu'il existe une suite de E non bornée. Remarquons que toute suite $(b(m, j))$ de E est déterminée par la suite $(b(m, 0))$. Posons alors $c_m = b(m, 0)$. Il résulte de (E.1) et de (E.2) que la suite (c_m) vérifie la relation de récurrence :

$$c_{m+1} = -c_{m-1} + c_m(2 - \mu^{-2m})$$

Posons $\lambda = \mu^{-2}$ et soit $N \geq 1$ un entier tel que $\frac{\lambda^N}{(1-\lambda)^2} \leq 1$. Notons (x_m) la suite définie par $x_N = 0$, $x_{N+1} = 1$ et la relation de récurrence précédente. S'appuyant sur l'égalité :

$$x_m - x_{m-1} = x_1 - x_0 - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^j x_j$$

il est facile de montrer que la suite (x_m) est non bornée. ■

Nous rassemblons dans la proposition suivante quelques propriétés de sommabilité de la suite $(A(m, n))$.

A.3 Proposition - *Nous avons :*

a) Pour tout entiers $m, x \in \mathbf{Z}$, on a $\sum_n A(m, n+x) A(m, n) = \delta_0^x$.

b) Pour tout entiers $n, y \in \mathbf{Z}$, on a $\sum_m \mu^{2m} A(m+y, n) A(m, n) = \mu^{2n} \delta_0^y$

c) Pour tout entiers a_i, h_i ($i = 1, 2$), on a :

$$\sum_n A(a_1, n+h_1) A(a_2, n+h_2) A(a_1-n, a_2-n) = A(h_1, h_2) A(a_1+h_2, a_2+h_1).$$

Démonstration. a) Pour tout z de module 1, on a $|g_\mu(\mu^m z)| = 1$; le a) résulte alors de l'égalité de Parseval.

b) Par (A.2), on a $A(m, n) = (-\mu)^{n-m} A(n, m)$; le b) découle alors immédiatement du a).

c) Fixons h_1, h_2 et posons $\alpha(m, j) = \sum_n A(m, n+h_1) A(j, n+h_2) A(m-n, j-n)$ (resp. $\beta(m, j) = A(m+h_2, j+h_1)$). Il résulte de (E.1) et de (E.2) que les deux suites $(\alpha(m, j))$ et $(\beta(m, j))$ vérifient les deux relations de récurrence :

$$(E'.1) \quad b(m-1, j) \mu^{j+h_1-h_2} = b(m, j) \mu^{-h_2} + b(m, j+1) \mu^{m-1}$$

$$(E'.2) \quad b(m, j) \mu_1^h = b(m-1, j) \mu^{-j} + b(m-1, j-1) \mu^{m-j+h_2}$$

Par le a), il est clair que la suite $(\alpha(m, j))$ est bornée. Il résulte alors de (A.2 c)) que les deux suites $(\alpha(m, j))$ et $(\beta(m, j))$ sont proportionnelles. Posons alors $\alpha(m, j) = \lambda(h_1, h_2) \beta(m, j)$ où $\lambda(h_1, h_2) \in \mathbf{R}$. Or pour tout $m \in \mathbf{Z}$, on a $\sum_n |A(m, n)| < \infty$; en faisant $j = -h_1$, il découle alors de (A.2 a) et b)) qu'on a :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow -\infty} \sum_n A(m, n + h_1) A(-h_1, n + h_2) A(m - n, -h_1 - n) &= A(-h_1, -h_1 + h_2) \\ &= A(h_1, h_2). \end{aligned}$$

comme $\lim_{m \rightarrow -\infty} A(m + h_2, 0) = 1$, on a bien $\lambda(h_1, h_2) = A(h_1, h_2)$. ■

A.4 Remarques -

a) Il résulte d'un calcul facile s'appuyant sur (A.2 a)) que la formule :

$$\sum_n A(a_1, n + h_1) A(a_2, n + h_2) A(a_1 - n, a_2 - n) = A(h_1, h_2) A(a_1 + h_2, a_2 + h_1).$$

est équivalente à la relation :

$$\begin{aligned} \sum_n (-\mu)^{-n} A(x, n + a) A(y, n + b) A(x - y, n + c) \\ = (-\mu)^c A(a - c - y, b - c - y) A(b - c - y + x, a - c) \end{aligned}$$

b) Soit $n \in \mathbf{Z}$, posons $q_n(a) = A(a, n)$. Pour tout $j \in \mathbf{Z}$, notons τ_j l'opérateur de translation par j et soit $\mathcal{A}_n$ l'algèbre des polynômes sans termes constants en $\{\tau_j q_n / j \in \mathbf{Z}\}$. Si $n \neq 0$, il résulte facilement du théorème de Stone-Weierstrass que l'algèbre $\mathcal{A}_n$ est dense dans $C_0(\mathbf{Z})$. Dans le cas où $n = 0$, on voit de même que $\mathcal{A}_n$ est dense dans $C_0(\mathbf{Z} \cup \{-\infty\})$.

Appendice B

Dans cette seconde appendice, nous complétons la preuve du théorème (4.2) et nous montrons l'unicité de la mesure de Haar de $E_\mu(2)$. Nous conservons les notations du paragraphe 4.

B.1 Lemme - Soit f une forme linéaire positive sur S_V . Alors pour tout $\xi \in H$, il existe une famille (ξ_i) (resp. (ξ'_i)) dans H telle que $f * \omega_\xi = \sum_i \omega_{\xi_i}$ (resp. $\omega_\xi * f = \sum_i \omega_{\xi'_i}$) et $\|f\| \|\xi\|^2 = \sum_i \|\xi_i\|^2$ (resp. $\|f\| \|\xi\|^2 = \sum_i \|\xi'_i\|^2$).

Démonstration. On a par (3.10), $\hat{V} \in M(S_V \otimes \mathcal{K})$ et pour tout $x \in S_V$, on a aussi $\delta(x) = \hat{V}^*(1 \otimes x)\hat{V}$. Notons alors (π_f, H_f, ξ_f) la représentation GNS de la forme positive f et posons $(\pi_f \otimes id)(\hat{V})(\xi_f \otimes \xi) = \sum_i \eta_i \otimes \xi_i$, où (η_i) est une base orthonormée de l'espace de Hilbert H_f . On a alors pour tout $x \in S_V$:

$$\begin{aligned} (f * \omega_\xi)(x) &= (f \otimes \omega_\xi)(\delta(x)) \\ &= \langle \xi_f \otimes \xi, (\pi_f \otimes id)(\hat{V})^*(1 \otimes x)(\pi_f \otimes id)(\hat{V}) \rangle \\ &= \sum_i \langle \xi_i, x \xi_i \rangle \end{aligned}$$

L'assertion resp. se démontre de la même façon en remarquant (3.10) que $V \in M(\mathcal{K} \otimes S_V)$ et (3.12) que $\delta(x) = V(x \otimes 1)V^*$ pour tout $x \in S_V$. ■

fin de la démonstration de (4.2). Soit f une forme positive sur $A = S_V$, posons $f * \omega_{000} = \sum_i \omega_{\xi_i}$ avec $\|f\| = \sum_i \|\xi_i\|^2$. Par (4.6), on a alors :

$$\begin{aligned} \Phi(x * f) &= \Phi(x * f * \omega_{000}) \\ &= \sum_i \Phi(x * \omega_{\xi_i}) \\ &= \sum_i \|\xi_i\|^2 \Phi(x) = \|f\| \Phi(x) \end{aligned}$$

On montre de même que $\Phi(f * x) = \|f\| \Phi(x)$. ■

B.2 Remarque - : Soit ϕ un poids s.c.i normiquement sur A . Alors pour tout $\xi \in H$, il existe une famille de vecteurs (ξ_i) (resp. (η_i) de H telle que $\omega_\xi * \phi = \sum_i \omega_{\xi_i}$ (resp.

$\phi * \omega_\xi = \sum_i \omega_{\eta_i}$. En effet, par [19], il existe une famille de formes positives sur A telle que $\phi = \sum_i f_i$; il suffit alors d'appliquer B.1 aux formes $\omega_\xi * f_i$ et $f_i * \omega_\xi$.

B.3 Proposition - Soit ϕ un poids s.c.i et semi-fini normiquement sur A invariant à gauche, i.e pour tout vecteur ξ de H on a $\omega_\xi * \phi = \|\xi\|^2 \phi$. Si ϕ est invariant par le groupe à un paramètre d'automorphismes $(\kappa^2)^{it}$, alors il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\phi = \lambda \Phi$.
Démonstration. Il résulte de la formule (4.22 c)) $\delta \circ \sigma_t^\Phi = (\sigma_t^\Phi \otimes (\kappa^2)^{-it}) \circ \delta$ et de l'invariance de ϕ par $(\kappa^2)^{it}$ qu'on a $\phi = \phi \circ \sigma_t^\Phi$ pour tout t . Il en résulte que $\phi = \phi \circ E$ où $E : A \rightarrow C_0(\mathbf{C}_\mu)$ est l'espérance conditionnelle associée à l'action duale donc, ϕ étant semi-fini, sa restriction à $C_0(\mathbf{C}_\mu)^+$ est une mesure positive qui le détermine complètement. Comme $(\kappa^2)^{it}(\mathbf{n}) = \mu^{2it} \mathbf{n}$ et que $\phi = \phi \circ (\kappa^2)^{it}$, la restriction de ϕ à chaque cercle $\{z \in \mathbf{C}_\mu / |z| = \mu^j\}$ est proportionnelle à sa mesure de Haar. Soit $\alpha_j \in [0, \infty]$ le facteur de proportionnalité, posons $\beta_j = \alpha_j \mu^{-2j}$; nous allons montrer que la suite (β_j) est constante.

Par ([3] 2.), on a pour tout i, j entiers $f_{j0}(\mathbf{n}) * \omega_{0i0} = \sum_n A(i - n, j - n)^2 f_{n0}(\mathbf{n})$.

Par invariance à gauche de ϕ , on en déduit :

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \sum_n A(i - n, j - n)^2 \alpha_n \\ &= \sum_n A(i - j, n - j)^2 \mu^{2(j-n)} \alpha_n \quad \text{par (A.2)} \end{aligned}$$

donc $\beta_j = \sum_n A(i - j, n - j)^2 \beta_n$. Comme les entiers i, j sont arbitraires, on a

donc :

$$\begin{aligned}\beta_j &= \sum_n A(i, n-j)^2 \beta_n \\ &= \sum_n A(-i, n-j-i)^2 \beta_n \quad \text{par (A.2)} \\ &= \beta_{i+j}\end{aligned}$$

■

Références bibliographiques

- [1] S. Baa j : Prolongement d'un poids. C.R. Acad. Sci. 288 (1979) 1013-1015.
- [2] S. Baa j : Thèse, Univ. P. et M. Curie, Paris (1980).
- [3] S. Baa j : Représentation régulière du groupe quantique $E_\mu(2)$. C.R. Acad. Sci. 314 (1992) 1021-1026.
- [4] S. Baa j et G. Skandalis : Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C^* -algèbres. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4^e série, t. 26, 1993, 425-488.
- [5] S. Baa j et G. Skandalis : En préparation.
- [6] N. Bourbaki : Intégration. Chap. 7 à 8, Hermann, 1963.
- [7] F. Combes : Poids sur une C^* -algèbre. J. Math. Pures Appl. 47 (1968) 57-100.
- [8] F. Combes : Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche. Compositio Math. 23 (1971) 49-77.
- [9] F. Combes : Systèmes hilbertiens à gauche et représentation de Gelfand-Segal. Int. Conf. on operator Algebra and Group Representations. Monographs Series in Math.7 (1982) 71-107.
- [10] A. Connes : Une classification des facteurs de type III. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 6 (1973) 133-252.
- [11] M. Enock : Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac. I J.F.A. 26 n°1 (1977) 16-46.
- [12] M. Enock et J.M. Schwartz : Une dualité dans les algèbres de von Neumann. Bull. S.M.F. Suppl. mémoire 44 (1975) 1-144.
- [13] M. Enock et J.M. Schwartz : *Kac algebras and duality of locally compact groups*. Springer, Berlin (1992).
- [14] M. Enock et J.M. Vallin : C^* -algèbres de Kac et algèbres de Kac. Proc. London Math.Soc. (3) 66 (1993) p. 619-650.
- [15] U. Haagerup : On the dual weights of crossed products of von Neumann algebras. Math. Scand. 43 (1978) 119-140.
- [16] G.I. Kac et L.I. Vainerman : Nonunimodular ring-groups and Hopf-von Neumann

- algebras. Math. USSR Sb. 23 (1974) 185-214. Translated from Matem. Sb. 94 (136) (1974), 2 194-225.
- [17] S.H. Majid : Hopf von Neumann algebra Bicrossproducts, Kac Algebras Bicrossproducts, and the classical Yang-Baxter equation. JFA 95 n° 2, (1991) 291-319.
 - [18] G.K. Pedersen : *C*-algebras and their automorphism groups*. Academic press. (1979).
 - [19] G.K. Pedersen and M. Takesaki : The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras. Acta Math. 130 (1973) 53-87.
 - [20] P. Podles et S.L. Woronowicz : Quantum deformation of Lorentz group. Comm. Math. Phys. 130 (1990) 381-431.
 - [21] G. Skandalis : Operator Algebras and Duality. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. 2 (1990) 997-1009.
 - [22] S. Stratila : *Modular theory in operator algebras*. Academiei and Abacus Press. (1981).
 - [23] S. Stratila, D. Voiculescu and L. Zsidó : On crossed products. I and II. Rev. Roumaine Math. P. et Appl. 21 (1976) 1411-1449 and 22 (1977) 83-117.
 - [24] M. Takesaki : *Duality and von Neumann algebras*. LNM 247 (1972) 665-779.
 - [25] S.L. Woronowicz : Unbounded elements affiliated with C*-algebras and non compact quantum groups. Comm. Math. Phys. 136 (1991) 399-432.
 - [26] S.L. Woronowicz : Quantum E(2) group and its Pontryagin dual. Preprint.
 - [27] S.L. Woronowicz : Operator equalities related to Quantum E(2) group. Preprint.
 - [28] S.L. Woronowicz and S. Zakrzewski : Quantum Lorentz group having Gauss decomposition property. Preprint.

Saad BAAJ

Département de Mathématiques

Université d'Orléans

45046 Orléans Cedex