AST

Hommage à P. A. Meyer et J. Neveu - Pages préliminaires

Astérisque, tome 236 (1996), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__1_0>

236 ASTÉRISQUE

1996

HOMMAGE À P. A. MEYER ET J. NEVEU

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Classification A.M.S. : 60GXX, 60HXX, 60JXX

À l'occasion du "sexagénariat" de P. A. Meyer et J. Neveu, leurs amis, collègues et élèves ont voulu leur témoigner admiration pour leur œuvre scientifique et gratitude pour leurs qualités humaines et leur exemple, en leur offrant ce bouquet d'articles qui, nous l'espérons, manifeste la fertilité et la vitalité des graines qu'ils sèment généreusement depuis de longues années. Ce volume ne représente qu'une partie, importante, du cadeau auquel beaucoup d'amis se sont associés, et qui se concrétisera aussi sous d'autres formes.

Puisse la théorie des probabilités voir encore germer et fleurir de nombreuses idées de nos deux maîtres !

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières 5

S. ATTAL, M. ÉMERY : Martingales d'Azéma bidimensionnelles. 9

Un théorème de Meyer affirme l'existence de solutions pour une équation de structure markovienne à coefficient continu ; en l'étendant à deux dimensions, nous obtenons l'existence des martingales d'Azéma bidimensionnelles. Ces processus font l'objet d'une classification simple ; certains d'entre eux jouissent de la propriété de représentation chaotique.

Classification AMS : 60 G 44.

D. BAKRY : Remarques sur les semigroupes de Jacobi. 23

Après une première partie montrant les connexions entre les semigroupes de Jacobi et le laplacien sphérique, nous donnons une estimation de la constante de Sobolev de ces semigroupes.

Classification AMS : 47 D 03, 47 D 07, 60 J 35.

S. BENACHOUR, B. ROYNETTE, P. VALLOIS : Solutions fondamentales de $u_t - \frac{1}{2} u_{xx} = \pm|u_x|$. 41

A l'aide de techniques probabilistes nous construisons explicitement la solution fondamentale du problème de Cauchy associé à l'équation $u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = \pm|u_x|$, lorsque la dimension d'espace d est égale à 1. Puis nous analysons le comportement en norme L^p des solutions de cette équation pour une large classe de données initiales. Le cas où $d \geq 2$ a été étudié aussi et fera l'objet d'une autre publication.

Classification AMS : 35 K 55.

P. BIANE : Quelques propriétés du mouvement brownien non-commutatif. 73

Le mouvement brownien non-commutatif est la dilatation naturelle d'un semi-groupe d'applications complètement positives sur la C^*-algèbre du groupe d'Heisenberg. On étudie tout particulièrement les propriétés d'invariance par le groupe unitaire de ce processus, ce qui amène à considérer un processus de Bessel non-commutatif, dont le semi-groupe est relié à la compactification de Martin en espace-temps d'un processus de branchement.

Classification AMS : 47 D 03, 81 S 25.

F. COMETS : A Spherical Bound for the Sherrington-Kirkpatrick Model. 103

We prove existence of a phase transition for the Sherrington-Kirkpatrick model at $\beta = 1$: making use of the domination by the spherical model, we derive a bound for the pressure as well as for the ground state energy.

Classification AMS : 60 K 35, 82 A 57.

C. DELLACHERIE : Théorie générale du potentiel I. 109

Plus précisément et plus modestement, mais plus longuement, j'avais prévu intituler cet article, dans la lignée de [3], [4] et [5] (en grande partie absorbé),

Rudiments de théorie non (nécessairement) linéaire du potentiel fellerien(ne)

mais, vu les circonstances, je n'ai pu résister à la tentation de réaffirmer mon ambition, mettre à nu les ressorts élémentaires et fondamentaux de toute théorie du potentiel, même si ce projet est encore loin d'être réalisé. Le menu du jour est surtout l'étude du principe du maximum, sous toutes ses formes.

Classification AMS : 26 D 10, 31 D 05, 35 B 05.

J. GLOVER, M. RAO : Condenser Potentials. 125

Under appropriate hypotheses, the potential theory of a transient Markov process can be recovered from the condenser charges.

Classification AMS : 60 J 45, 31 C 15.

S. C. HARRIS, D. WILLIAMS : Large deviations and martingales for a typed branching diffusion, 1. 133

We study a certain family of typed branching diffusions where the type of each particle moves as an Ornstein-Uhlenbeck process and binary branching occurs at a rate quadratic in the particle's type. We calculate the 'left-most' particle speed for the branching process explicitly, aided by close connections with harmonic oscillator theory. The behaviour of the system changes markedly below a certain critical temperature parameter.

In the high-temperature regime, the study of various 'additive' martingales and their use in a change of measure method provides the proof of the almost sure speed of spread of the particle system.

Also, we briefly mention how to use the martingale results of the branching diffusion model in representations of travelling-wave solutions for the associated reaction-diffusion equation.

Classification AMS : 60 J 80, 60 G 44, 60 F 10.

J. JACOD : La variation quadratique du brownien en présence d'erreurs d'arrondi. 155

Nous étudions le comportement asymptotique (quand $n \longrightarrow \infty$) de la variation quadratique au pas n, $\sum_{i=1}^{[nt]}(X_{i/n} - X_{(i-1)/n})^2$, lorsque X est un brownien linéaire, et lorsqu'on remplace dans la formule ci-dessus $X_{i/n}$ par une valeur arrondie, avec une précision α_n pouvant dépendre de n. On verra apparaitre des comportements inattendus, dépendant de la limite α de la suite α_n, et de sa vitesse de convergence si $\alpha = 0$.

Classification AMS : 60 G 07, 60 J 65.

T. JEULIN : Filtrations, sous-filtrations : propriétés élémentaires. 163

Nous donnons des conditions simples pour qu'il existe des martingales continues (ou plus précisément un mouvement brownien) adaptées à une filtration.

Classification AMS : 60 G 44, 60 H 99.

F. B. KNIGHT : The Uniform Law for Exchangeable and Lévy Process Bridges. 171

Let $X(t)$, $0 \leq t \leq 1$, be a bridge from 0 to 0 with exchangeable increments on $D[0,1]$. We obtain the n.a.s.c. for the sojourn below 0 to be uniformly distributed, or equivalently for X to have a uniform index of the (unique) supremum. This is applied to Lévy bridges.

Classification AMS : 60 G 09, 60 J 30.

F. LEDRAPPIER : Profil d'entropie dans le cas continu. 189

On considère le mouvement brownien sur un revêtement régulier d'une variété Riemannienne compacte. Par analogie avec l'entropie d'Avez des marches aléatoires, V. Kaimanovitch a défini un nombre positif appelé encore entropie, nul si et seulement si les seules fonctions harmoniques bornées sont les fonctions constantes. Dans cet article, nous proposons une démonstration des premières propriétés de cette entropie; de plus nous obtenons toute une famille de nombres rassemblés dans une fonction : le profil d'entropie. Le profil d'entropie enregistre les variations à grande échelle du noyau de la chaleur et permet de retrouver d'autres quantités asymptotiques.

Classification AMS : 58 G 32.

G. LETAC : The Function $\exp[-p\,\mathrm{Trace}\sqrt{2A}]$ as a Laplace Transform on Symmetric Matrices. 199

This note shows that if $p > 0$ and if S_+ is the set of symmetric positive definite matrices, then the function on S_+ defined by $A \mapsto \exp(-\mathrm{Trace}\, p\sqrt{2A})$ is the Laplace transform of a non positive function concentrated on S_+ if $n \geq 2$. This function is explicitely computed for $n = 2$. This computation is generalized to a Lorentz cone. The link of this question with the inverse Gaussian distributions in probability theory is also discussed, as well as the general problem of considering $\det L(A)$ as a Laplace transform on symmetric matrices when $L(\lambda)$ is a Laplace transform on the real line.

Classification AMS : 44 A 10, 60 E 10.

B. MAISONNEUVE : Excursions chevauchant un temps aléatoire quelconque. 215

Nous étudions diverses lois conditionnelles de l'excursion (d'un processus de Markov) chevauchant un temps aléatoire quelconque.

Cet exposé constitue la rédaction de résultats présentés pour l'essentiel au Seminar on Stochastic Processes de Gainesville en 1985 et aux Journées de Luminy 1985. Il s'agit aussi d'un petit cadeau d'anniversaire à mes maîtres P.A. Meyer (qui a manifesté plusieurs fois son intérêt pour une telle rédaction) et J. Neveu.

Classification AMS : 60 J 25, 60 J 40, 60 J 50, 60 J 55, 60 K 99.

K.R. PARTHASARATHY : Maassen Kernels and Self-Similar Quantum Fields. 227

In his Lecture Notes [Maj] P. Major has outlined a theory of multiple Wiener-Itô integrals with respect to a stationary Gaussian random field ξ over the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ of rapidly decreasing smooth functions in $\mathbb{R}^d$. Furthermore, he has exploited the same to construct self-similar random fields subordinate to ξ. Here, we observe that the Hilbert space of functions square integrable with respect to the probability measure P of ξ can be identified in a natural way with the Hilbert space of functions square integrable with respect to the symmetric Guichardet measure [Gui] constructed from the spectrum of ξ. Under such an identification, multiplication of random variables on the probability space of ξ becomes the twisted convolution of Lindsay and Maassen [Li M 1,2] for Maassen kernels [Maa], [Mey]. The multiple Wiener-Itô integral of Major is described neatly by a twisted version of Meyer's multiplication formula (see (IV.4.1 in [Mey]). Following Lindsay and Parthasarathy [Li P] we introduce the weighted and twisted convolution of Maassen kernels, present a generalization of Meyer's formula and exploit it to construct a family of operator fields whose expectations in the vacuum state exhibit a simultaneous self-similarity property. Such a construction includes Major's examples and at the same time yields a self-similar Clifford field.

Classification AMS : 81 S 25, 60 G 60.

J. W. PITMAN, M. YOR : Quelques identités en loi pour les processus de Bessel. 249

Nous rassemblons certaines identités en loi concernant les intégrales de R^{-1}, R^2, ainsi que le supremum de R, processus de Bessel de dimension 1, 2 ou 3, puis nous les étendons convenablement à toute dimension. Ces généralisations mettent en jeu certains processus qui "interpolent" entre les ponts et les processus de Bessel. Elles interviennent aussi bien dans des études appliquées, par exemple : calcul de prix d'options, que pour certaines questions d'équations non linéaires.

Classification AMS : 60 G 07, 60 H 05.

M. PRATELLI : Quelques résultats de calcul stochastique et leur application aux marchés financiers. 277

Nous donnons quelques résultats d'intégration stochastique et de théorie générale des processus, qui peuvent être appliqués dans l'étude des modèles stochastiques pour les marchés financiers.

Classification AMS : 60 H 05, 60 H 30.

D. W. STROOCK, O. ZEITOUNI : Variations on a Theme by Bismut. 291

Let M be a compact, connected, Riemannian manifold of dimension d, let $\{P_t : t > 0\}$ denote the Markov semigroups on $C(M)$ determined by $\frac{1}{2}\Delta$, and let $p_t(x,y)$ denote the kernel (with respect to the Riemannian volume measure) for the operator P_t. (The existence of this kernel as a positive, smooth function is well-known, see e.g. [D].) Bismut's celebrated formula, presented in [B], equates $\nabla \log(p_t(\cdot, y))$ with certain stochastic integrals (see (20) below.) Various derivations of this formula and its extensions can be found in [AM], [EL] and [N]. In this note, we give a quick derivation of Bismut's and related formulae by lifting considerations to the bundle of orthonormal frames, using Bochner's identity, and applying a little elementary stochastic analysis. Some consequences of these identities are then explored. In particular, after deriving a standard logarithmic Sobolev inequality, we present (see (26)) a sharp pointwise estimate on the logarithmic derivative of the heat kernel in terms of known estimates on the heat kernel itself.

Classification AMS : 35 K 05, 47 D 07, 58 G 11, 58 G 32.

J.-P. THOUVENOT : Utilisation des processus gaussiens en théorie ergodique. 303

Les processus gaussiens peuvent constituer, en théorie ergodique, une source intéressante d'exemples et permettre de répondre très efficacement (grâce à des outils spécifiques) à des questions variées.

Nous montrons ainsi que, dans un K-système, une algèbre parfaite n'est pas nécessairement parfaite dans tous les facteurs.

Nous construisons ensuite un exemple de discontinuité de l'entropie directionnelle.

Nous donnons enfin un exemple de processus gaussien où tous les facteurs sont "à une extension par un groupe compact près" encore gaussiens.

Classification AMS : 28 D 05, 60 G 15.

Astérisque

S. ATTAL
M. ÉMERY

Martingales d'Azéma bidimensionnelles

Astérisque, tome 236 (1996), p. 9-21
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__9_0>

Martingales d'Azéma bidimensionnelles

S. Attal, M. Émery

Résumé. — Un théorème de Meyer affirme l'existence de solutions pour une équation de structure markovienne à coefficient continu; en l'étendant à deux dimensions, nous obtenons l'existence des martingales d'Azéma bidimensionnelles. Ces processus font l'objet d'une classification simple; certains d'entre eux jouissent de la propriété de représentation chaotique.

1. Martingales d'Azéma multidimensionnelles

D'abord quelques rappels sur les martingales d'Azéma réelles et les équations de structure réelles ou vectorielles. Une martingale réelle X est dite *normale* si $X_t^2 - t$ est une martingale; ceci revient à dire que $[X,X]_t - t$ en est une, ou encore que $\langle X,X\rangle_t = t$ pour tout t (par convention, tous les crochets et toutes les intégrales stochastiques seront nuls en zéro, même si $X_0 \neq 0$). Lorsque X est une martingale normale et possède de plus la propriété de représentation prévisible, la martingale $[X,X]_t - t$ est une intégrale stochastique par rapport à X : il existe un processus prévisible Φ tel que

$$[X,X]_t = t + \int_0^t \Phi_s \, dX_s \ ;$$

cette formule est une *équation de structure.* On l'écrit souvent sous forme différentielle $d[X,X]_t = dt + \Phi_t \, dX_t$. Un cas particulier fort intéressant (dit markovien) est celui où Φ_t est de la forme $f(X_{t-})$. Étant donnée une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, un théorème de Meyer ([3]) affirme qu'il existe, sur un espace probabilisé adéquat, une martingale X vérifiant l'équation de structure

$$d[X,X]_t = dt + f(X_{t-}) \, dX_t \, .$$

En particulier, lorsque f est une fonction affine, cette équation devient

$$d[X,X]_t = dt + (\alpha + \beta X_{t-}) \, dX_t \ ;$$

si l'on impose une valeur initiale $X_0 = x$, elle admet une solution unique en loi, la *martingale d'Azéma* de paramètres α et β (voir [2]).

Une martingale $X = (X^i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est dite normale lorsque l'on a $\langle X, X\rangle_t = \delta^{ij} t$ pour tout t. L'équation de structure qu'une telle martingale est susceptible de vérifier prend la forme

$$d[X^i, X^j]_t = \delta^{ij}\, dt + \sum_k \Phi_k^{ij}(t)\, dX_t^k \,.$$

Ces équations de structure multidimensionnelles sont étudiées dans [1] ; il y est montré que la famille des d^3 processus prévisibles Φ_k^{ij} n'est pas arbitraire : pour qu'il existe une solution X, il faut que, pour presque tout (t,ω), les $\Phi_k^{ij}(t,\omega)$ soient les d^3 composantes d'un tenseur *doublement symétrique.* (Un tenseur $T = (T_k^{ij})_{1\leqslant i,j,k\leqslant d}$ est dit doublement symétrique lorsque

$$T_k^{ij} \text{ est symétrique en } i,\ j \text{ et } k$$

et

$$\sum_m T_m^{ij}\, T_\ell^{mk} \text{ est symétrique en } i,\ j,\ k \text{ et } \ell;$$

les tenseurs doublement symétriques sont exactement ceux que l'on peut diagonaliser dans une base orthonormée.) Il est établi dans [1] que ces conditions de symétrie apparaissant dans les équations de structure sont maximales — ceci sera corroboré par le théorème 1 plus bas.

DÉFINITION. — *Une martingale normale $X = (X^i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est une* martingale d'Azéma *si elle vérifie une équation de structure de la forme*

$$d[X^i, X^j]_t = \delta^{ij}\, dt + \sum_{k=1}^{d} f_k^{ij}(X_{t-})\, dX_t^k \,,$$

où les f_k^{ij} sont d^3 fonctions affines sur $\mathbb{R}^d$ telles que, pour presque tout (t,ω), le tenseur $f(X_{t-})$ soit doublement symétrique.

2. Le cas bidimensionnel

Nous allons nous restreindre au cas bidimensionnel ($d = 2$). Faute en effet d'être parvenus à des méthodes permettant de traiter le cas général, nous remplaçons la compréhension en profondeur des phénomènes par des calculs explicites qui deviendraient inextricables en dimensions supérieures; nos résultats ne constituent donc qu'une première approche vers les martingales d'Azéma multidimensionnelles.

À deux dimensions, un tenseur doublement symétrique est un tenseur de la forme $(T_k^{ij})_{1\leqslant i,j,k\leqslant 2}$, où les conditions de symétrie imposent d'une part

$$T_2^{11} = T_1^{12} = T_1^{21} \ ; \qquad T_2^{12} = T_2^{21} = T_1^{22}$$

(donc T ne dépend que des quatre quantités $p = T_1^{11}$, $q = T_2^{22}$, $r = T_2^{11}$ et $s = T_1^{22}$), et d'autre part

$$\sum_m T_m^{1j} T_\ell^{m2} = \sum_m T_m^{2j} T_\ell^{m1} \ ,$$

qui exprime la symétrie en i et k de la somme $\sum_m T_m^{ij} T_\ell^{mk}$ déjà symétrique en i et j et en k et ℓ. Compte tenu de la symétrie de T en ses trois indices, échanger j et ℓ revient à échanger les deux membres; cette relation est donc automatiquement vérifiée lorsque $j = \ell$ et il suffit de l'écrire pour $j = 1$ et $\ell = 2$. On obtient

$$ps + qr = r^2 + s^2 \ .$$

Une équation de structure bidimensionnelle se met donc sous la forme

$$\begin{cases} d[X,X]_t = dt + P_t\, dX_t + R_t\, dY_t \\ d[X,Y]_t = \phantom{dt + {}} R_t\, dX_t + S_t\, dY_t \\ d[Y,Y]_t = dt + S_t\, dX_t + Q_t\, dY_t \end{cases}$$

où les processus prévisibles P, Q, R et S vérifient pour presque tout (t,ω) la relation $PS{+}QR = R^2{+}S^2$. Et les martingales d'Azéma bidimensionnelles sont les martingales normales $Z = (X,Y)$ telles qu'il existe quatre fonctions affines p, q, r et s sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant pour presque tout (t,ω)

$$(*) \qquad p(Z_{t-})\, s(Z_{t-}) + q(Z_{t-})\, r(Z_{t-}) = r(Z_{t-})^2 + s(Z_{t-})^2$$

et telles que

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} d[X,X]_t = dt + p(Z_{t-})\, dX_t + r(Z_{t-})\, dY_t \\ d[X,Y]_t = \phantom{dt + {}} r(Z_{t-})\, dX_t + s(Z_{t-})\, dY_t \\ d[Y,Y]_t = dt + s(Z_{t-})\, dX_t + q(Z_{t-})\, dY_t \ . \end{cases}$$

LEMME 1. — *Les quatre fonctions affines p, q, r et s associées à une martingale d'Azéma bidimensionnelle Z sont uniquement déterminées par Z.*

DÉMONSTRATION. — Si p', q', r' et s' sont aussi associées à Z, l'ensemble $E = \{p{=}p', q{=}q', r{=}r', s{=}s'\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$, dans lequel se trouvent presque tous les $Z(t-,\omega)$. Par limites à droite, pour presque tout t, $Z_t(\omega)$ est p. s. dans E; soient $s < t$ deux instants auxquels ceci a lieu. Puisque Z est normale, la matrice de covariance $\mathbb{E}\big[(Z_t{-}Z_s)\otimes(Z_t{-}Z_s)\big]$ du vecteur aléatoire $Z_t{-}Z_s$ est égale à $(t{-}s)\,\mathrm{Id}$; ce vecteur ne peut donc pas prendre ses valeurs dans une droite déterministe de $\mathbb{R}^2$, et E est l'espace $\mathbb{R}^2$ tout entier. ∎

Cependant la relation (*) ne peut être simplifiée : nous rencontrerons plus bas certaines martingales d'Azéma pour lesquelles les quatre fonctions affines p, q, r et s ne vérifient pas la relation $ps+qr = r^2+s^2$ sur tout $\mathbb{R}^2$, mais seulement sur un fermé dans lequel Z prend ses valeurs.

3. Existence

Comme dans le cas unidimensionnel, l'existence de martingales d'Azéma bidimensionnelles découle d'un résultat plus général : voici une extension bidimensionnelle du théorème d'existence de Meyer ([3]).

THÉORÈME 1. — *Soient z un point de $\mathbb{R}^2$ et p, q, r, s quatre fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, liées par la relation $ps+qr = r^2+s^2$. Sur un espace probabilisé filtré convenable, il existe une martingale bidimensionnelle $Z = (X,Y)$ telle que $Z_0 = z$ et vérifiant l'équation de structure*

$$\begin{cases} d[X,X]_t = dt + p(Z_{t-})\,dX_t + r(Z_{t-})\,dY_t \\ d[X,Y]_t = \qquad r(Z_{t-})\,dX_t + s(Z_{t-})\,dY_t \\ d[Y,Y]_t = dt + s(Z_{t-})\,dX_t + q(Z_{t-})\,dY_t\ . \end{cases}$$

Nous l'allons prouver en suivant le même schéma que Meyer dans [3], c'est-à-dire en discrétisant le temps dans l'équation de structure. Une difficulté nouvelle apparaît en dimension 2 : les équations de structure en temps discret et continu n'ont pas la même forme, le tenseur des coefficients en temps discret étant non pas doublement symétrique, mais *sesqui-symétrique*. Ceci signifie que, si h est un réel positif et $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale à temps discret à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont les accroissements $\Delta\zeta_n = \zeta_n-\zeta_{n-1}$ vérifient une équation de structure de la forme

$$\Delta\zeta_n^i\,\Delta\zeta_n^j = h\,\delta^{ij} + \sum_k \Phi_k^{ij}(n)\,\Delta\zeta_n^k\ ,$$

où les Φ_k^{ij} sont des processus prévisibles, alors, à tout instant n,

$$\Phi_k^{ij} \text{ dépend symétriquement de } i,\ j \text{ et } k$$

et

$$\sum_m \Phi_m^{ij}\,\Phi_\ell^{mk} + h\,\delta^{ij}\,\delta_\ell^k \text{ dépend symétriquement de } i,\ j,\ k \text{ et } \ell.$$

Lorsque $h = 1$ ceci se trouve dans la proposition 6 de [1] ; le cas général s'en déduit immédiatement par homothétie de rapport $\sqrt{h}$.

Réciproquement, on a un résultat d'existence : d'après le corollaire 3 de [1], si l'on se donne un tenseur Φ possédant les propriétés de sesqui-symétrie rappelées ci-dessus, il existe un (et, en loi, un seul) vecteur aléatoire $\Delta\zeta$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que

$\Delta\zeta^i\,\Delta\zeta^j \;=\; h\,\delta^{ij} + \sum_k \Phi_k^{ij}\,\Delta\zeta^k$; il en résulte en particulier, par récurrence et conditionnement, que si f est une fonction borélienne de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans les tenseurs sesqui-symétriques, il existe pour tout $z \in \mathbb{R}^2$ une martingale ζ (unique en loi) telle que $\zeta_0 = z$ et que, pour tout $n > 0$

$$\Delta\zeta_n^i\,\Delta\zeta_n^j = h\,\delta^{ij} + \sum_k f_k^{ij}(\zeta_{n-1})\,\Delta\zeta_n^k\,.$$

Ce sont de telles martingales discrètes qui seront utilisées pour démontrer le théorème 1 ; il faudra pour cela savoir approcher les tenseurs doublement symétriques par des tenseurs sesqui-symétriques. Nous avons vu plus haut qu'en dimension 2 les tenseurs doublement symétriques peuvent être identifiés aux quadruplets (p,q,r,s) de $\mathbb{R}^4$ vérifiant $ps + qr = r^2 + s^2$; nous noterons $\mathcal{D}$ leur ensemble. De même, le lecteur écrira facilement, en dimension 2, les tenseurs sesqui-symétriques de paramètre $h > 0$ comme les quadruplets vérifiant $ps + qr + h = r^2 + s^2$; leur ensemble sera noté $\mathcal{S}(h)$.

LEMME 2. — *Soit* $\|\,.\,\|$ *une norme sur l'espace vectoriel (quadridimensionnel) des tenseurs symétriques à trois indices. Il existe une constante* C *et, pour tout* $h > 0$, *une application borélienne* I^h *de* $\mathcal{D}$ *dans* $\mathcal{S}(h)$ *telles que, pour tout* $T \in \mathcal{D}$, *on ait* $\|I^h(T) - T\| < C\sqrt{h}$.

En langage clair : quand h tend vers zéro, les tenseurs doublement symétriques sont approchés uniformément par des tenseurs sesqui-symétriques de paramètre h.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2. — Étant donnés $h > 0$ et quatre réels p_0, q_0, r_0 et s_0 vérifiant $p_0s_0+q_0r_0-r_0^2-s_0^2 = 0$, il s'agit de trouver p, q, r et s proches de p_0, q_0, r_0 et s_0 et vérifiant $ps+qr-r^2-s^2 = -h$. Le changement linéaire de coordonnées $u = s-p$ et $v = r-q$ permet de remplacer (p,q,r,s) par (u,v,r,s) ; les équations ci-dessus deviennent $u_0s_0+v_0r_0 = 0$ et $us+vr = h$.

Si $u_0 = v_0 = r_0 = s_0 = 0$, il suffit de poser $u = v = r = s = \sqrt{h/2}$. Sinon, on peut définir $\alpha>0$ par la formule $(u_0^2+v_0^2+r_0^2+s_0^2)\,\mathrm{sh}\,2\alpha = 2h$, et poser $r = r_0\,\mathrm{ch}\,\alpha+v_0\,\mathrm{sh}\,\alpha$, $v = v_0\,\mathrm{ch}\,\alpha + r_0\,\mathrm{sh}\,\alpha$, $s = s_0\,\mathrm{ch}\,\alpha + u_0\,\mathrm{sh}\,\alpha$ et $u = u_0\,\mathrm{ch}\,\alpha + s_0\,\mathrm{sh}\,\alpha$. Compte tenu de $u_0s_0+v_0r_0 = 0$, on a bien

$$us + vr = (u_0^2 + v_0^2 + r_0^2 + s_0^2)\,\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha = h\,;$$

et l'estimation de norme résulte de

$$(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 + (r-r_0)^2 + (s-s_0)^2 = 2\,\mathrm{ch}\,\alpha\,(\mathrm{ch}\,\alpha-1)(u_0^2 + v_0^2 + r_0^2 + s_0^2) < 2\,h\,,$$

car pour $\alpha > 0$ on a $\mathrm{ch}\,\alpha - 1 = \mathrm{sh}\,\alpha + e^{-\alpha} - 1 < \mathrm{sh}\,\alpha$. ∎

On aurait pu tenter de démontrer ce lemme par une autre méthode. Il est en effet montré dans [1] que les tenseurs doublement symétriques (respectivement sesqui-symétriques) sont en bijection avec des systèmes particuliers de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, les *systèmes droits* (respectivement *obtus*). On aurait pu approcher le système droit par des systèmes obtus, ce qui serait d'ailleurs aussi simple en toute dimension qu'en dimension 2 (alors que nous reculons devant l'extension à la dimension n des calculs faits ici en dimension 2). Mais pour démontrer le théorème nous aurons besoin du caractère uniforme de l'approximation, que nous ne voyons pas comment obtenir en passant par les systèmes droits et obtus.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. — Les quatre fonctions continues p, q, r et s sont données. Pour chaque $h > 0$, le lemme 2 fournit des fonctions boréliennes p^h, q^h, r^h et s^h, uniformément proches de p, q, r et s quand h est petit, et telles que $p^h s^h + q^h r^h + h = (r^h)^2 + (s^h)^2$. Il est donc possible de définir des martingales discrètes $\zeta^h = (\xi^h, \eta^h)$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\zeta_0^h = z$ et

$$\begin{cases} (\Delta\xi_{n+1}^h)^2 = h + p^h(\zeta_n^h)\,\Delta\xi_{n+1}^h + r^h(\zeta_n^h)\,\Delta\eta_{n+1}^h \\ \Delta\xi_{n+1}^h\Delta\eta_{n+1}^h = \phantom{h +{}} r^h(\zeta_n^h)\,\Delta\xi_{n+1}^h + s^h(\zeta_n^h)\,\Delta\eta_{n+1}^h \\ (\Delta\eta_{n+1}^h)^2 = h + s^h(\zeta_n^h)\,\Delta\xi_{n+1}^h + q^h(\zeta_n^h)\,\Delta\eta_{n+1}^h\,. \end{cases}$$

On peut ensuite définir des martingales à temps continu Z^h dans $\mathbb{R}^2$ par $Z_t^h = \zeta_n^h$ si $nh \leqslant t < (n+1)h$; dans leurs filtrations naturelles, elles vérifient $\langle (Z^h)^i, (Z^h)^j\rangle_t = \delta^{ij}\,[t/h]h \leqslant \delta^{ij}t$ et sont donc uniformément bornées dans L^2 sur tout intervalle fini. Leurs lois sont pseudo-tendues (*cf* [3] et [4]) et il existe donc une suite h_n tendant vers zéro telle que les lois des Z^{h_n} convergent pseudo-étroitement vers une loi de martingale L. On peut supposer (mêmes références) que les Z^{h_n} sont toutes définies sur un même espace probabilisé et que les trajectoires $Z^{h_n}(\omega)$ convergent (presque partout en t) vers celles d'une martingale Z de loi L. Il reste à montrer que Z est solution de l'équation de structure proposée.

De la même façon que dans [3], on peut montrer que les crochets $[X,X]$, $[X,Y]$ et $[Y,Y]$ sont proches en probabilité des crochets correspondants de Z^{h_n} ; que $\int_0^t p(Z_{s-})\,dX_s$ est proche en probabilité de $\int_0^t p(Z_{s-}^{h_n})\,dX_s^{h_n}$ et de même pour les cinq intégrales analogues. Il reste, pour conclure, à vérifier que $\int_0^t p(Z_{s-}^{h_n})\,dX_s^{h_n}$ est proche de $\int_0^t p^{h_n}(Z_{s-}^{h_n})\,dX_s^{h_n}$ (et de même pour les cinq autres intégrales). Or le lemme 2 donne

$$\Big\|\int_0^t \big(p(Z_{s-}^{h_n}) - p^{h_n}(Z_{s-}^{h_n})\big)\,dX_s^{h_n}\Big\|^2 = \mathbb{E}\Big[\int_0^t \big(p(Z_{s-}^{h_n}) - p^{h_n}(Z_{s-}^{h_n})\big)^2\,d[X^{h_n},X^{h_n}]_s\Big]$$
$$\leqslant C\,h_n\,\mathbb{E}\big[[X^{h_n},X^{h_n}]_t\big] \leqslant C\,h_n\,t\,,$$

ce qui permet de conclure comme dans [3]. ∎

4. Classification des martingales d'Azéma bidimensionnelles

THÉORÈME 2. — *Les martingales d'Azéma bidimensionnelles $Z = (X,Y)$ peuvent être classées en trois types, selon les propriétés des fonctions affines p, q, r et s figurant dans l'équation de structure*

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases} d[X,X]_t = dt + p(Z_{t-})\,dX_t + r(Z_{t-})\,dY_t \\ d[X,Y]_t = \phantom{dt +{}} r(Z_{t-})\,dX_t + s(Z_{t-})\,dY_t \\ d[Y,Y]_t = dt + s(Z_{t-})\,dX_t + q(Z_{t-})\,dY_t\,. \end{cases}$$

Le type (I) *rassemble celles telles que $p-s = \lambda r$ et $r-q = \lambda s$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ (le cas $\lambda = \infty$ signifiant $r = s = 0$); elles se ramènent par rotation au cas $r = s = 0$.*

Ce sont les martingales d'Azéma dont les sauts sont tous parallèles à l'une ou l'autre de deux directions fixes, que l'on peut toujours choisir orthogonales; quand $r = s = 0$, *ces directions sont celles des axes.*

Le type (II) *est formé de toutes celles pour lesquelles* $p-s = \lambda(r-q)$ *et* $r = \lambda s$ *pour un* $\lambda \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ *(le cas* $\lambda = \infty$ *signifiant* $r-q = s = 0$*), sans que* p, q, r *et* s *ne soient colinéaires (c'est-à-dire constantes, ou multiples d'une même fonction affine non constante). Ces martingales se ramènent par rotation au cas où* $r-q = s = 0$.

Pour toute position initiale dans $\mathbb{R}^2$, *les équations de structure* (A) *associées aux types* (I) *et* (II) *ont une solution.*

Le type (III) *est constitué des martingales d'Azéma* Z *pour lesquelles l'égalité* $ps+qr = r^2+s^2$ *n'a pas lieu identiquement, mais seulement sur une partie stricte du plan, dans laquelle vit* Z *; cette partie du plan est nécessairement la réunion de deux droites orthogonales. Ces martingales se ramènent par translation et rotation au cas où ces deux droites sont les axes; l'équation de structure prend alors la forme*

$$\text{(III}'\text{)}\qquad \begin{cases} d[X,X]_t = dt + (-X_{t-} + a\,Y_{t-})\,dX_t - Y_{t-}\,dY_t \\ d[X,Y]_t = \qquad -Y_{t-}\,dX_t - X_{t-}\,dY_t \\ d[Y,Y]_t = dt - X_{t-}\,dX_t + (b\,X_{t-} - Y_{t-})\,dY_t\ , \end{cases}$$

où a *et* b *sont deux réels tels que* $a+b \neq 0$. *Étant donné* $z \in \mathbb{R}^2$, *l'équation* (III′) *a une solution de valeur initiale* z *si* z *est sur l'un des axes et dans ce cas seulement.*

REMARQUE. — Les équations du type (III′) avec $a+b = 0$ sont en fait du type (I), avec $\lambda = b = -a$. Les martingales correspondantes restent sur la courbe $xy = x_0y_0$ (hyperbole équilatère ou les deux axes) puisque l(e morceau d)'équation de structure $d[X,Y]_t = -Y_{t-}\,dX_t - X_{t-}\,dY_t$ entraîne que le produit X_tY_t reste constant.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. — Les quatre fonctions affines p, q, r et s doivent vérifier la relation $ps + qr = r^2 + s^2$ en presque tout point de la forme $Z_{t-}(\omega)$. Une alternative se présente : cette relation est vérifiée soit partout, soit seulement sur un sous-ensemble strict de $\mathbb{R}^2$.

Regardons d'abord le premier cas : $ps + qr - r^2 - s^2 \equiv 0$. Cette relation peut aussi s'écrire $(p-s)s = (r-q)r$; on a ainsi deux factorisations en facteurs de degrés $\leqslant 1$, $(p-s)s$ et $(r-q)r$, d'un même polynôme en x et y de degré $\leqslant 2$. Ces factorisations sont donc les mêmes, à l'ordre près et à un facteur scalaire près, et l'un au moins des quatre cas suivants se réalise :

$$(1)\quad \begin{cases} p - s = \lambda r \\ r - q = \lambda s \end{cases} \qquad\qquad (2)\quad \begin{cases} p - s = \lambda(r - q) \\ r = \lambda s \end{cases}$$

$$(\text{I}')\quad r = s = 0 \qquad\qquad (\text{II}')\quad r-q = s = 0$$

où λ est un nombre réel. Il est plus joli de résoudre en r et s les systèmes (1) et (2) pour les mettre sous la forme

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} r = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\,p + \frac{1}{1+\lambda^2}\,q \\ s = \frac{1}{1+\lambda^2}\,p - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\,q \end{cases} \qquad \text{(II)}\quad \begin{cases} r = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\,p + \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\,q \\ s = \frac{1}{1+\lambda^2}\,p + \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\,q\,; \end{cases}$$

on retrouve (I′) et (II′) comme cas particuliers de (I) et (II) en autorisant la valeur $\lambda = \infty$ dans ces derniers. Les cas (I) et (II) sont simultanément réalisés si et seulement si les quatre fonctions affines $p-s$, $r-q$, r et s sont colinéaires; ceci revient à dire que p, q, r et s le sont. Par convention, les martingales correspondantes seront exclues du type (II) et mises dans le type (I).

Pour chaque valeur finie de λ, les équations de structure (I) et (II) sont respectivement obtenues à partir de (I′) et (II′) par une rotation convenable des axes. En effet, si l'on effectue une rotation de matrice orthogonale $U = (u_i^\alpha)$, en notant $V = (v_\alpha^i)$ l'inverse de U (de sorte que $v_\alpha^i = u_i^\alpha$), la formule de changement de base pour les tenseurs s'écrit

$$T_\gamma^{\alpha\beta} = \sum_{i,j,k} v_\gamma^k T_k^{ij} u_i^\alpha u_j^\beta = \sum_{i,j,k} T_k^{ij} u_i^\alpha u_j^\beta u_k^\gamma$$

(les indices grecs sont relatifs à la nouvelle base, les latins à l'ancienne). En dimension 2, on peut poser $u_1^1 = u_2^2 = \cos\theta = \gamma$ et $u_2^1 = -u_1^2 = \sin\theta = \sigma$, et les composantes dans la nouvelle base p', q', r' et s' d'un tenseur doublement symétrique de composantes p, q, r et s dans l'ancienne sont données par

$$\begin{cases} p' = \gamma^3 p + 3\gamma^2\sigma r + 3\gamma\sigma^2 s + \sigma^3 q \\ r' = -\gamma^2\sigma p + (\gamma^3 - 2\gamma\sigma^2) r - (\sigma^3 - 2\gamma^2\sigma) s + \gamma\sigma^2 q \\ s' = \gamma\sigma^2 p + (\sigma^3 - 2\gamma^2\sigma) r + (\gamma^3 - 2\gamma\sigma^2) s + \gamma^2\sigma q \\ q' = -\sigma^3 p + 3\gamma\sigma^2 r - 3\gamma^2\sigma s + \gamma^3 q\,. \end{cases}$$

Lorsque (I′) est satisfaite, ceci devient

$$\begin{cases} p' = \gamma^3 p + \sigma^3 q \\ r' = -\gamma^2\sigma p + \gamma\sigma^2 q \\ s' = \gamma\sigma^2 p + \gamma^2\sigma q \\ q' = -\sigma^3 p + \gamma^3 q\,, \end{cases}$$

de sorte que $p'-s' = (\gamma^3-\gamma\sigma^2)p + (\sigma^3-\gamma^2\sigma)q$ et $r'-q' = (\sigma^3-\gamma^2\sigma)p - (\gamma^3-\gamma\sigma^2)q$, et les relations (1) sont vérifiées par (p', q', r', s') avec $\lambda = \sigma/\gamma - \gamma/\sigma = -2\operatorname{cotg} 2\theta$; pour tout λ, il existe donc au moins une rotation $\mathcal{R}$ qui transforme (I′) en (1). Pour vérifier que toutes les fonctions affines satisfaisant (1) proviennent de (I′) par $\mathcal{R}$, il suffit dès lors d'un petit argument de dimension : $\mathcal{R}$ transforme linéairement et injectivement les quadruplets vérifiant (I′) en certains quadruplets vérifiant (1); la surjectivité résulte de l'égalité des dimensions.

Pour le type (II), le calcul est analogue : lorsque (II′) est satisfaite, on a

$$\begin{cases} p' = \gamma^3 p + (\sigma^3 + 3\gamma^2\sigma)q \\ r' = -\gamma^2\sigma p + (\gamma^3 - \gamma\sigma^2)q \\ s' = \gamma\sigma^2 p + (\sigma^3 - \gamma^2\sigma)q \\ q' = -\sigma^3 p + (\gamma^3 + 3\gamma\sigma^2)q\,, \end{cases}$$

et les relations (2) sont vérifiées avec $\lambda = -\gamma/\sigma = -\operatorname{cotg}\theta$; on conclut comme ci-dessus que (2) se ramène toujours à (II′) par rotation, et il ne reste qu'à remarquer que le sous-espace à exclure, formé des quadruplets colinéaires, est invariant par rotations.

Par la proposition 3 de [1], une martingale vérifiant une équation de structure a tous ses sauts parallèles aux axes si et seulement si le tenseur prévisible (P,Q,R,S) figurant dans l'équation est diagonal : $R = S = 0$. Une martingale d'Azéma du type (I) a donc ses sauts parallèles aux axes si $r = s = 0$ et, par rotation, parallèles à deux droites orthogonales dans le cas général. Réciproquement, si une martingale d'Azéma a ses sauts dans deux directions fixes, l'ensemble $\Sigma(t,\omega)$ associé à son tenseur prévisible par le corollaire 1 de [1] reste composé de vecteurs ayant ces directions; mais puisque c'est un système droit, les sauts (s'il y en a) sont tous soit dans une direction, soit dans deux directions orthogonales; on peut donc trouver deux directions orthogonales contenant tous les sauts. Après s'être ramené, par rotation, au cas où les sauts sont parallèles aux axes, on a un tenseur diagonal, donc $r(Z_{t-}) = s(Z_{t-}) = 0$ pour presque tout (t,ω); le lemme 1 entraîne $r = s = 0$. Et dans le cas général, obtenu par rotation à partir de ce cas particulier, la martingale est du type (I).

L'existence de solutions de (I) et (II) pour toute condition initiale est un cas particulier du théorème 1.

Il reste à étudier le second terme de l'alternative, qui donnera le type (III) : nous supposons maintenant que que l'égalité $ps+qr = r^2+s^2$ n'a pas lieu identiquement dans tout le plan. Puisque cette relation est du second degré, l'ensemble H sur lequel elle a lieu est une conique, propre ou dégénérée. Pour presque tout (t,ω), Z_{t-} est dans H; comme H est fermé, Z lui-même est (indistinguable d'un processus) à valeurs dans H. La projection de Z sur n'importe quelle direction est une martingale normale, donc non convergente, donc non unilatéralement bornée. En conséquence, H ne peut être ni une ellipse, ni une parabole, ni deux droites parallèles, ni une droite double : c'est donc une hyperbole, éventuellement dégénérée en deux droites concourantes. Au moyen d'une translation et d'une rotation, on se ramène au cas où les asymptotes de cette hyperbole ont pour équations $x = 0$ et $y = \rho x$, où ρ est un nombre réel; l'équation de H est alors de la forme $x(y-\rho x) = c$ pour une constante c, et le processus $X(Y-\rho X)$ est constant. Mais, puisque Z est normale, ce processus $X(Y-\rho X)$ est aussi somme d'une martingale et du processus $-\rho t$; il en résulte que $\rho = 0$, et H est une hyperbole équilatère, d'équation $xy = c$. Il s'ensuit que le processus XY est constant, d'où $d[X,Y]_t = -Y_{t-}dX_t - X_{t-}dY_t$ et le lemme 1 donne $r(x,y) = -y$

et $s(x,y) = -x$. L'équation de H, $xy = c$, s'écrit aussi $ps+qr = r^2+s^2$, c'est-à-dire $-xp(x,y) - yq(x,y) = y^2 + x^2$. En identifiant les deux équations, on voit que $c = 0$ (donc H consiste en les deux axes), $p(x,y) = -x + ay$ et $q(x,y) = -y + bx$, où les réels a et b vérifient $a+b \neq 0$; la martingale Z vérifie donc l'équation (III′) et reste sur les axes.

Réciproquement, étant donnés a et $b \neq -a$, si l'on pose $p(x,y) = -x + ay$, $q(x,y) = -y+bx$, $r(x,y) = -y$ et $s(x,y) = -x$, la relation $ps+qr = r^2+s^2$ est vérifiée uniquement sur les axes; il nous reste à construire, pour toute condition initiale z_0 sur l'un des axes, une solution de (III′). Remplaçons pour cela p et q par les fonctions non affines mais continues

$$p'(x,y) = -x + \frac{ay^2-bx^2}{x^2+y^2}\, y \quad \text{et} \quad q'(x,y) = -y + \frac{bx^2-ay^2}{x^2+y^2}\, x\,,$$

qui coïncident avec p et q sur les axes et qui vérifient partout $p's+q'r = r^2+s^2$. Le théorème 1 appliqué à p', q', r et s fournit une martingale Z issue de z_0 et vérifiant (III′) avec p' et q' au lieu de p et q. Mais puisque $r = -y$ et $s = -x$, elle vérifie aussi $d[X,Y]_t = -Y_{t-}dX_t - X_{t-}dY_t$ et XY est constant; puisque $X_0Y_0 = 0$, Z reste sur les axes et le système (III′) est satisfait.

Enfin, l'analyse ci-dessus montre que toute martingale d'Azéma qui n'est pas du type (I) ou (II) vit sur deux droites; le système (III′), pour lequel ces deux droites sont les axes, ne saurait donc avoir aucune solution issue d'un point non situé sur les axes. ∎

5. Propriété de représentation chaotique

Pour les martingales d'Azéma unidimensionnelles, la propriété de représentation chaotique n'est connue que pour les valeurs des paramètres telles que le processus soit borné sur tout intervalle fini de temps. Il en va de même à deux dimensions : nous ne savons obtenir la propriété de représentation chaotique que pour certaines martingales du type (I) bien particulières, que nous prouvons d'abord bornées sur tout intervalle fini. Puisque les martingales du type (I) se ramènent par rotation au cas “diagonal” où $r = s = 0$, nous nous restreindrons à ce cas-là.

PROPOSITION 1. — *Soit Z une martingale d'Azéma du type* (I), *d'équation de structure*

$$\begin{cases} d[X,X]_t = dt + p(Z_{t-})\, dX_t \\ d[X,Y]_t = 0 \\ d[Y,Y]_t = dt + q(Z_{t-})\, dY_t \end{cases}$$

avec $p(x,y) = ax+by+c$ et $q(x,y) = \alpha x+\beta y+\gamma$. On suppose $-2 \leqslant a < 0$, $-2 \leqslant \beta < 0$ et $0 < b\alpha < a\beta$. Si le vecteur aléatoire Z_0 est borné, le processus Z est borné sur tout intervalle fini $[0,t]$: il reste dans un compact qui ne dépend que de Z_0, de t et de l'équation de structure.

DÉMONSTRATION.[1] — Dans l'équation de structure

$$\begin{cases} d[X,X]_t = dt + (aX_{t-}+bY_{t-}+c)\,dX_t \\ d[X,Y]_t = 0 \\ d[Y,Y]_t = dt + (\alpha X_{t-}+\beta Y_{t-}+\gamma)\,dY_t\ , \end{cases}$$

remplaçons X_-dX par $\frac{1}{2}d(X^2)-\frac{1}{2}d[X,X]$ et Y_-dY par $\frac{1}{2}d(Y^2)-\frac{1}{2}d[Y,Y]$:

$$\begin{aligned} (1+\tfrac{1}{2}a)\,d[X,X] &= dt + \tfrac{1}{2}a\,d(X^2) + b\,Y_-dX + c\,dX \\ (1+\tfrac{1}{2}\beta)\,d[Y,Y] &= dt + \tfrac{1}{2}\beta\,d(Y^2) + \alpha\,X_-dY + \gamma\,dY\ ; \end{aligned}$$

multiplions la première par α, la seconde par b et ajoutons. Compte tenu de $[X,Y]=0$, on peut remplacer X_-dY+Y_-dX par $d(XY)$, et il reste

$$\begin{aligned} \alpha(1+\tfrac{1}{2}a)[X,X]_t &+ b(1+\tfrac{1}{2}\beta)[Y,Y]_t \\ &= (\alpha+b)t + \tfrac{1}{2}\alpha aX_t^2 + \tfrac{1}{2}b\beta Y_t^2 + b\alpha X_tY_t + \alpha cX_t + b\gamma Y_t \\ &\qquad - \tfrac{1}{2}\alpha aX_0^2 - \tfrac{1}{2}b\beta Y_0^2 - b\alpha X_0Y_0 - \alpha cX_0 - b\gamma Y_0\ ; \end{aligned}$$

ceci est de la forme

$$F(X_t,Y_t) - F(X_0,Y_0) = (\alpha+b)t - \alpha(1+\tfrac{1}{2}a)[X,X]_t - b(1+\tfrac{1}{2}\beta)[Y,Y]_t\ .$$

Par hypothèse, α et b sont de même signe $\varepsilon \in \{-1,1\}$. Comme a et β sont supérieurs ou égaux à -2, les coefficients $\alpha+b$, $\alpha(1+\frac{1}{2}a)$ et $b(1+\frac{1}{2}\beta)$ sont tous du signe de ε. Les hypothèses $a\beta > b\alpha$, $a<0$ et $\beta<0$ impliquent que la forme quadratique $-\frac{1}{2}\alpha ax^2 - b\alpha xy - \frac{1}{2}b\beta y^2$ qui figure dans F est définie positive si $\varepsilon=1$ et définie négative si $\varepsilon=-1$. Quitte à tout multiplier par ε, on est ainsi ramené à

$$G(X_t,Y_t) - G(X_0,Y_0) \leqslant |\alpha+b|\,t\ ,$$

où G est un polynôme du second degré elliptique. Lorsque t décrit un intervalle fini, $G(X_t,Y_t)-G(X_0,Y_0)$ reste majoré; puisque Z_0 est borné, $G(Z_t)$ est majoré, et Z reste à l'intérieur d'une ellipse. ∎

REMARQUE. — L'hypothèse $0 < b\alpha < a\beta$ peut être remplacée par $b=\alpha=0$ (et la démonstration se simplifie un peu : il faut bien entendu se garder de multiplier les équations par α et b avant de les ajouter!). Ce cas n'a guère d'intérêt : compte tenu de l'unicité en loi établie plus bas, X et Y sont alors deux martingales d'Azéma unidimensionnelles indépendantes.

1. Nous remercions Ph. Biane pour son aide.

LEMME 3. — *Soit Z une martingale d'Azéma à valeurs dans un espace vectoriel euclidien E de dimension finie; on suppose Z_0 déterministe. Soit Q un polynôme à n variables sur E. Pour $t_1 \geqslant 0, \ldots, t_n \geqslant 0$, la variable aléatoire $Q(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n})$ est de la forme*

$$\sum_{k=0}^{\deg Q} \int_{0<s_1<\ldots<s_k} \phi_k(s_1, \ldots, s_k)\, dZ_{s_1} \ldots dZ_{s_k} ,$$

où, pour chaque k, ϕ_k est une application mesurable bornée et à support compact de $\mathbb{R}_+^k$ dans l'espace $(E^*)^{k\otimes}$ des formes k-linéaires sur E. (Pour $k = 0$, l'intégrale multiple est une constante.) La fonction ϕ_k est déterminée de façon unique (presque partout) sur l'ensemble $0 < s_1 < \ldots < s_k$ par Q, les t_i et l'équation de structure vérifiée par Z.

Nous omettons la démonstration de ce lemme : elle recopie mot pour mot celle du cas unidimensionnel (lemme 7 de [2]), en remplaçant là où c'est nécessaire les réels par des tenseurs convenables.

PROPOSITION 2. — *Soit donnée une équation de structure bidimensionnelle vérifiant les hypothèses de la proposition 1 (ou de la remarque qui la suit). Pour toute condition initiale dans le plan, cette équation a une solution Z, unique en loi. La martingale Z possède la propriété de représentation chaotique.*

DÉMONSTRATION. — La position initiale z étant donnée dans $\mathbb{R}^2$, soit $t > 0$. La proposition 1 fournit un compact K dans lequel restent jusqu'à l'instant t toutes les solutions de l'équation de structure issues de z. La constante obtenue pour $k = 0$ dans le lemme 3, qui n'est autre que $\mathbb{E}[Q(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n})]$, est la même pour toutes les solutions Z. Comme, sur K, les polynômes sont denses dans les fonctions continues, pour f continue et $0 \leqslant t_i \leqslant t$, l'espérance $\mathbb{E}[f(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n})]$ ne dépend pas de Z : toutes les solutions ont donc la même loi.

Puisque, sur le compact K, les polynômes sont denses dans L^2 pour n'importe quelle loi de probabilité, la propriété de représentation chaotique de Z, établie par le lemme 3 pour les polynômes, s'étend à toutes les variables aléatoires de L^2 de la forme $f(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n})$ où $0 \leqslant t_i \leqslant t$, puis à tout $\mathrm{L}^2(\sigma(Z))$. ∎

REMARQUE. — Comme nous l'avons observé plus haut, lorsque $b = \alpha = 0$, les coordonnées X et Y de Z sont deux martingales d'Azéma unidimensionnelles indépendantes, complètement découplées dans l'équation de structure. On pourrait s'attendre à ce que cette situation soit en un sens la meilleure possible et espérer que, si a et β sont dans l'ouvert $]-2, 0[$, la propriété de représentation chaotique subsiste pour des coefficients a', b', α' et β' suffisamment voisins de a, 0, 0 et β. Mais la méthode employée ci-dessus semble inutilisable dès lors que $b\alpha < 0$...

5. Références

[1] S. Attal & M. Émery. Équations de structure pour des martingales vectorielles. *Séminaire de Probabilités XXVIII*, Lecture Notes in Mathematics 1583, Springer 1994.

[2] M. Émery. On the Azéma martingales. *Séminaire de Probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372, Springer 1989.

[3] P.-A. Meyer. Construction de solutions d'équations de structure. *Séminaire de Probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372, Springer 1989.

[4] P.-A. Meyer & W. Zheng. Tightness criteria for laws of semimartingales. *Ann. Inst. Henri Poincaré Série B,* vol. 20, 353–372, 1984.

Université Louis Pasteur et C. N. R. S.
I. R. M. A.
7 rue René Descartes
67 084 STRASBOURG Cedex

Astérisque

D. BAKRY

Remarques sur les semigroupes de Jacobi

Astérisque, tome 236 (1996), p. 23-39
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__23_0>

Remarques sur les semigroupes de Jacobi

D. Bakry

Résumé. — Après une première partie montrant les connexions entre les semigroupes de JACOBI et le laplacien sphérique, nous donnons une estimation de la constante de SOBOLEV de ces semigroupes.

Les semigroupes de diffusion sur un intervalle de $\mathbb{R}$ ont en général une mesure stationnaire réversible. Intéressons-nous, parmi ceux-ci, à ceux dont la mesure stationnaire est une probabilité, qui ont un spectre discret et tels que les vecteurs propres successifs forment une suite de polynômes (nécessairement orthogonaux pour la mesure réversible) : ce sont donc les semigroupes de diffusion naturellement associés à des familles de polynômes orthogonaux. Il est alors facile de voir qu'il n'y en a, à affinité près, que 3 familles, caractérisées par leur générateur infinitésimal L (cf [M], par exemple) :

— Les semigroupes de JACOBI, définis sur $]-1,1[$, de générateur

$$L = (1-x^2)d^2/dx^2 - (ax+b)d/dx, \text{ avec } a \pm b > 0\,;$$

— Les semigroupes de LAGUERRE, définis sur $]0,\infty[$, de générateur

$$L = xd^2/dx^2 - (x+b)d/dx, \text{ avec } b < 0\,;$$

— Le semigroupe d'ORNSTEIN-UHLENBECK , défini sur $\mathbb{R}$, de générateur

$$L = d^2/dx^2 - xd/dx.$$

Les deux dernières familles apparaissent comme des limites (convenablement renormalisées), de semigroupes de la première famille, et on voit donc que les semigroupes de JACOBI forment le modèle générique de tels semigroupes.

Le cas symétrique ($b = 0$) est lié, lorsque le paramètre a est demi-entier, à la partie radiale du laplacien sphérique, et a donc été de ce fait intensivement étudié. Il présente de nombreuses propriétés remarquables qui en rendent l'étude assez facile. Dans le cas non symétrique, beaucoup de questions restent posées, en particulier du côté des inégalités de SOBOLEV, de SOBOLEV logarithmiques, etc. Le but de cet exposé est de montrer qu'en fait les semigroupes de JACOBI dissymétriques ont également une interprétation géométrique simple pour certaines valeurs des paramètres, et de donner des estimations sur les constantes des inégalités de SOBOLEV optimales qui leur sont associées.

Malheureusement, alors que la plupart de ces constantes sont assez faciles à calculer dans le cas symétrique, il n'en est pas de même dans le cas dissymétrique, et c'est pourquoi nous devons alors nous contenter d'encadrements.

1— Quelques considérations géométriques.

Toutes les remarques qui suivent peuvent se trouver de façon plus détaillée dans l'exposé [M]. Rappelons tout d'abord la forme des opérateurs de JACOBI : ce sont des opérateurs différentiels du second ordre agissant sur les fonctions deux fois dérivables définies sur l'intervalle $]-1,1[$ par la formule

$$L(f)(x) = (1-x^2)f''(x) - (ax+b)f'(x).$$

Dans ce qui suit, nous poserons $a = \frac{n+1}{2}$ et $b = a-p$. Pour des raisons qui apparaîtront plus claires dans la suite, nous choisirons toujours $n \geq 1$ et $p \in [1,n]$. Nous poserons ensuite $q = n+1-p$, et nous utiliserons les lettres p et q pour désigner l'opérateur:

$$L_{p,q}(f)(x) = (1-x^2)f''(x) - \frac{1}{2}\{(p+q)x + q - p\}f'(x),\ p \geq 1,\ q \geq 1.$$

Remarquons que le changement de x en $-x$ transforme $L_{p,q}$ en $L_{q,p}$. Lorsque $p = q$, nous noterons tout simplement l'opérateur L_p : il s'agit du cas de l'opérateur ultrasphérique.

Ce que nous voulons montrer dans ce paragraphe, c'est que, pour des valeurs entières des paramètres p et q, l'opérateur de JACOBI s'interprète naturellement comme une image du laplacien sur la sphère de dimension n (avec comme plus haut $n = p+q-1$).

Pour les lecteurs qui n'aiment pas la géométrie différentielle, la façon la plus simple de se représenter le laplacien sphérique est sans doute la suivante : appelons S_n la sphère de rayon 1 et de dimension n plongée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$, et considérons une fonction suffisamment dérivable f définie sur S_n. On prend un prolongement $\hat{f}$ de cette fonction à un voisinage de S_n dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui soit indépendant du rayon (et alors la notion de "suffisamment dérivable" peut se définir à partir de cette fonction $\hat{f}$), puis on calcule le laplacien ordinaire de cette fonction dans $\mathbb{R}^{n+1}$. La restriction de ce laplacien à S_n donne par définition le laplacien sphérique de la fonction f, que nous noterons $\Delta_{S_n}(f)$.

Si l'on veut exprimer ce laplacien, et qu'on n'aime pas trop les angles d'EULER, il y a une façon de le faire qui donne une expression raisonnable. Tout d'abord, il est clair sur la définition que l'opérateur est local, et qu'il est également invariant par les transformations orthogonales de $\mathbb{R}^{n+1}$, car c'est le cas du laplacien ordinaire de $\mathbb{R}^{n+1}$. On peut se contenter de calculer $\Delta_{S_n}(f)$ losqu'on connait f seulement au voisinage d'un point, et, à cause de l'invariance, on ne perd rien à supposer que ce point est $(0, \cdots, 0, 1)$. On va alors prendre comme voisinage la demisphère supérieure $\{x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S_{n+1} \,/\, x_{n+1} > 0\}$. Un point de cette demisphère est repéré par ses coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ sur le disque de rayon unité de $\mathbb{R}^n$, et l'on peut alors définir la fonction f dans cette demisphère par sa valeur sur la boule $f(x_1, \cdots, x_n)$, ainsi que son laplacien.

Le lecteur un peu courageux peut alors faire le calcul à la main, et voit que l'on obtient ainsi

$$\Delta_{S_n}(f)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - x_i x_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - n \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\delta x_i}.$$

(Ici, δ_{ij} désigne comme d'habitude le symbole de Kronecker.) On a évidemment exactement la même expression pour la demisphère inférieure. En particulier, si la fonction f est invariante par la symétrie par rapport à l'hyperplan $\{x_{n+1} = 0\}$, il en de même de son laplacien (mais ceci n'est qu'un cas particulier de l'invariance par rotation que nous avons évoquée plus haut).

Une des propriétés remarquables de cet opérateur est que le résultat $\Delta_{S_n}(f)(x)$ ne dépend que des variables dont dépend la fonction f elle même. En particulier, si la fonction f ne dépend que des p variables $(x_1, \cdots, x_p)$, $(1 \leq p \leq n)$, il en va de même de son laplacien (c'est une fois de plus un cas particulier de l'invariance par les transformations orthogonales). On peut alors relever toute fonction g définie sur le disque de $\mathbb{R}^p$ en une fonction f définie sur la demisphère supérieure de $\mathbb{R}^{n+1}$ (voire en une fonction définie sur la sphère toute entière pourvu que g ait un comportement ad hoc au voisinage du bord du disque), prendre son laplacien sphérique et obtenir ainsi une nouvelle fonction définie sur le disque de $\mathbb{R}^p$: ceci nous définit un nouvel opérateur sur le disque de $\mathbb{R}^p$ qui est

$$\Delta_{n,p}(g)(x) = \sum_{i,j=1}^{p} (\delta_{ij} - x_i x_j) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} - n \sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial g}{\delta x_i}.$$

C'est presque le même opérateur que précédemment, à ceci près que le coefficient n qui apparaît devant le terme du premier ordre n'est pas la dimension du disque, mais un entier supérieur à p : en fait, rien ne nous oblige à ne considérer que des coefficients n entiers dans la formule précédente, et nous avons ainsi réalisé sur le disque unité de $\mathbb{R}^p$ une famille à un paramètre n d'opérateurs qui s'interprètent pour n entier comme des projections de laplaciens sphériques.

Ces opérateurs ont quantité de propriétés intéressantes (ce sont des quasi-laplaciens de courbure et dimension constantes au sens de [B1]), mais nous n'avons pas l'intention ici de nous attarder sur eux.

Remarquons que pour $p = 1$ nous obtenons ainsi l'opérateur de Jacobi symétrique de paramètres $L_n = L_{n,n}$ ce qui explique que cet opérateur soit appelé l'opérateur ultrasphérique lorsque n est non entier. (On l'appelle aussi opérateur de GEGENBAUER.)

Mais nous pouvons faire un peu mieux si l'on observe que l'opérateur $\Delta_{n,p}$ préserve les fonctions radiales dans le disque unité de $\mathbb{R}^p$: si l'on pose $r = (\sum_1^p x_i^2)^{1/2}$, on a, pour $f(x) = g(r)$,

$$\Delta_{n,p}^{(r)}(f)(x) = (1-r^2)g''(r) + (\frac{p-1}{r} - nr)g'(r).$$

Appelons donc $\Delta_{n,p}^{(r)}$ cet opérateur, agissant sur les fonctions définies sur $]0,1[$:

$$\Delta_{n,p}^{(r)} = (1-r^2)\frac{d^2}{dr^2} + (\frac{p-1}{r} - nr)\frac{d}{dr}.$$

Si l'on pose $r = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$, de façon à ce que x varie dans l'intervalle $]-1,1[$, alors l'opérateur $\Delta_{n,p}^{(r)}$ s'écrit

$$\Delta_{n,p}^{(r)} = 4\{(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - (\frac{n+1}{2}x + \frac{n+1}{2} - p)\frac{d}{dx}\} = 4L_{p,q},$$

où $L_{p,q}$ est l'opérateur de JACOBI, avec $q = n+1-p$.

Qu'a-t-on fait lorsque $p = 1$? Nous avons remplacé l'opérateur L_n par l'opérateur $L_{1,n}$ en le faisant agir sur les fonctions paires (ou, si l'on préfère, en restreignant son intervalle de définition à $]0,1[$, et en faisant un changement de variables). En d'autres termes, les opérateurs L_n et $4L_{1,n}$ sont exactement les mêmes (localement) : mais on verra plus bas que ce sont leurs propriétés globales qui diffèrent. Comme c'est le dogme en géométrie riemannienne, on ne distingue pas deux quantités (par exemple deux opérateurs) qui se transforment l'une en l'autre par un changement de variables, même si ici tout se passe en dimension 1!

Remarquons d'autre part que nous avons ainsi obtenu, pour n entier, deux interprétations différentes de l'opérateur L_n : tout d'abord en projetant directement la sphère S_n en dimension 1, ou encore en projetant d'abord la sphère S_{2n-1} sur le disque de dimension n, et ensuite en prenant une partie radiale (à un facteur 4 près). Même pour $n = 2$, il ne paraît pas évident de voir pourquoi cela donne le même résultat. De même, le fait que $L_{p,q}$ soit essentiellement le même que $L_{q,p}$ ne semble pas se traduire facilement dans ce contexte.

De même que l'opérateur L_n peut s'interpréter comme la partie radiale du laplacien sphérique, l'opérateur $L_{n,1}$, toujours à un facteur 4 près, s'interprètera comme la partie radiale du laplacien sur l'espace projectif, qui est le quotient de la sphère obtenue en identifiant deux points diamétralement opposés.

Ceci n'est qu'un cas particulier d'un phénomène plus général : tous les espaces symétriques compacts de rang 1 ont pour partie radiale du laplacien des opérateurs de JACOBI : le lecteur intéressé pourra trouver la liste suivante dans [G] ou dans [SC], où n désigne la dimension réelle de l'espace symétrique :

– Sphères : $L_{n,n}$;

– Espaces projectifs réels : $L_{1,n}$;

– Espaces projectifs complexes : $L_{2,n}$ (n pair) ;

– Espaces projectifs quaternioniques : $L_{4,n}$ ($n = 4p$) ;

– Plan elliptique de CAYLEY : $L_{8,16}$.

2— Les semigroupes de JACOBI.

Introduisons tout d'abord la mesure

$$\mu_{p,q}(dx) = \frac{1}{Z_{p,q}} 1_{]-1,1[}(x)(1-x)^{(q-2)/2}(1+x)^{(p-2)/2}\, dx,$$

où $Z_{p,q}$ est la constante de normalisation qui fait de $\mu_{p,q}$ une probabilité : on voit aisément que

$$Z_{p,q} = 2^{(p+q-2)/2}\Gamma(p/2)\Gamma(q/2)/\Gamma((p+q)/2),$$

où $\Gamma(a) = \int_0^\infty s^{a-1}e^{-s}\, ds$.

L'intégrale d'une fonction f par rapport à $\mu_{p,q}$ sera notée $\langle f\rangle_{p,q}$, ou plus simplement $\langle f\rangle$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la valeur des paramètres.

À l'aide d'une intégration par parties, il est facile de voir que, si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$, on a

$$\langle f\, L_{p,q}(g)\rangle = -\langle (1-x)^2 f'g'\rangle = \langle g\, L_{p,q}(f)\rangle. \tag{1}$$

Ainsi, $\mu_{p,q}$ apparaît comme la mesure par rapport à laquelle $L_{p,q}$ est un opérateur symétrique (on l'appelle la mesure réversible de $L_{p,q}$).

Remarquons qu'en prenant $g = 1$ dans la formule précédente, on obtient $\langle L_{p,q}(f)\rangle = 0$, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$. Cette seule propriété de la mesure μ suffit en fait à la déterminer.

Dans la suite, nous poserons, pour des fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\Gamma(f,g)(x) = (1-x^2)f'(x)g'(x).$$

Nous noterons $\Gamma(f)$ pour $\Gamma(f,f)$. Un calcul rapide nous montre la relation

$$2\Gamma(f,g) = L_{p,q}(fg) - fL_{p,q}(g) - gL_{p,q}(f).$$

On voit directement sur la forme de l'opérateur $L_{p,q}$ qu'il laisse stable pour tout entier k l'espace vectoriel des polynômes de degré inferieur ou égal à k. Si l'on munit cet espace du produit scalaire induit de l'espace $L^2(]-1,1[,\mu_{p,q}(dx))$, alors $L_{p,q}$

apparaît sur cet espace de dimension finie comme un opérateur symétrique : il est diagonalisable dans une base orthonormée, avec des valeurs propres et des vecteurs propres réels.

En répétant cette opération pour tous les entiers k, on construit ainsi une suite $Q_k^{(p,q)}$ de polynômes de degré k, orthogonaux dans $L^2(\mu_{p,q})$, qui en forment donc une base hilbertienne, car les polynômes sont denses dans l'espace $L^2(\mu_{p,q})$, la mesure étant à support compact. Ces polynômes sont donc entièrement définis au signe près, et, s'il en est besoin, on choisira le signe de façon à ce que le coefficient du terme dominant soit positif.

Appelons $-\lambda_k$ les valeurs propres : $L_{p,q}(Q_k^{(p,q)}) = -\lambda_k Q_k^{(p,q)}$.

(Dans ce qui suit, nous omettons les indices (p,q) pour alléger les notations, ainsi que dans $L_{p,q}$ et $Q_k^{(p,q)}$.) Le choix du signe $-$ dans la définition des valeurs propres provient de ce qu'ainsi $\lambda_k \geq 0$, car

$$\langle Q_k\, LQ_k\rangle = -\lambda_k = -\langle \Gamma(Q_k)\rangle,$$

et $\Gamma(Q_k)$ est toujours une expression positive.

Le calcul de λ_k peut se faire très simplement à l'aide de la remarque suivante : tout d'abord, $\lambda_0 = 0$ car Q_0 est constant. Ensuite, appelons D l'opérateur de dérivation d/dx ; nous avons

$$DL_{p,q} = (L_{p+2,q+2} - \frac{p+q}{2} Id)D. \tag{2}$$

Si l'on applique cette relation à Q_1, puisque DQ_1 est constant, on obtient

$$-\lambda_1 DQ_1 = -\frac{p+q}{2} DQ_1,$$

d'où $\lambda_1 = \frac{p+q}{2}$.

On peut itérer facilement la formule (2), ce qui donne, en posant $m = (p+q)/2$,

$$D^k L_{p,q} = (L_{p+2k,q+2k} - k(m+k-1)Id)D^k,$$

et on obtient alors

$$\lambda_k = k(m+k-1).$$

Remarquons qu'on obtient ainsi une suite de valeurs propres (λ_k) qui ne dépend que de m.

Nous n'aurons pas à nous servir de la forme explicite des polynômes $Q_k^{(p,q)}$. La façon la plus simple de les construire, à une constante multiplicative près, est de donner leur fonction génératrice, qu'on trouve dans [M],

$$2^{2-m} \sum_k t^k Q_k(x) =$$
$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}(1-t+(1-2xt+t^2)^{1/2})^{-(q-2)/2} \times$$
$$(1+t+(1-2xt+t^2)^{1/2})^{-(p-2)/2}.$$

On peut aussi trouver leur forme explicite dans [SC]. Bien sûr, toutes ces formules se trouvent dans tous les ouvrages de base sur les polynômes orthogonaux, par exemple [Sz].

Pour une fonction f de $L^2(\mu_{p,q})$, on peut écrire sa décomposition en polynômes de JACOBI $f = \sum_k \alpha_k Q_k$, ce qui nous permet de définir le semigroupe d'opérateurs $P_t^{(p,q)}$ par

$$P_t^{(p,q)}(f) = \sum_k e^{-\lambda_k t} \alpha_k Q_k \quad (t \geq 0).$$

Comme d'habitude, nous omettrons les indices (p,q) lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

On voit immédiatement sur la définition que le semigroupe P_t est une contraction de $L^2(\mu_{p,q})$, et que formellement $P_t = \exp(tL)$. On a aussi $P_t(1) = 1$, car $Q_0 = 1$ et $\lambda_0 = 0$.

Il n'est pas évident de voir sur la définition que P_t préserve la positivité des fonctions. Cela ressort d'un argument général qui utilise deux propriétés : l'existence d'une mesure positive pour laquelle $\langle L(f) \rangle = 0$ pour suffisamment de bonnes fonctions f (ici, il s'agit de la mesure $\mu_{p,q}$), et la propriété fondamentale de $L_{p,q}$ qui est que, pour toute fonction Φ convexe, $L(\Phi(f)) \geq \Phi'(f)L(f)$. Nous renvoyons le lecteur à [B2] pour plus de détails.

Ces deux propriétés (préserver les constantes et la positivité) font de P_t un semigroupe markovien.

Le fait d'être markovien, et d'être invariant pour μ montre qu'en fait P_t est une contraction de tous les espaces $L^p(\mu)$, $(1 \leq p \leq \infty)$. En fait, l'opérateur P_t vérifie de bien meilleures propriétés que cela : il se représente par un noyau borné $p_t(x,y)$, c'est à dire que

$$P_t(f)(x) = \int f(y) p_t(x,y)\, \mu(dy).$$

Il n'y a pas d'expression explicite raisonnable de la fonction $p_t(x,y)$ (ou tout du moins je n'en connais pas). Son existence et son comportement proviennent de considérations générales que nous allons détailler plus bas.

Admettons pour l'instant l'existence de la fonction $p_t(x,y)$. Remarquons tout d'abord que l'opérateur P_t étant symétrique, la fonction $p_t(x,y)$ est symétrique par rapport aux variables (x,y). D'autre part, l'opérateur étant markovien, la mesure $p_t(x,y)\, \mu(dy)$ est pour tous les couples (x,t) une mesure de probabilité sur $]-1,1[$.

De plus, la propriété de semigroupe se traduit par l'équation de CHAPMAN-KOLMOGOROV :

$$p_{s+t}(x,y) = \int p_t(x,z) p_s(z,y)\, \mu(dz).$$

Cette formule montre que $\|p_t(x,\cdot)\|_2^2 = p_{2t}(x,x)$, où la norme $\| \, \|_p$ désigne la norme dans l'espace $L^p(\mu)$, et également, par l'inégalité de SCHWARZ, que

$$p_{2t}(x,y) \leq \|p_t(x,\cdot)\|_2 \|p_t(y,\cdot)\|_2,$$

d'où l'on tire

$$p_t(x,y)^2 \leq p_t(x,x)p_t(y,y).$$

Le maximum de la fonction $p_t(x,y)$ est donc atteint sur la diagonale.

Par un argument générique, l'existence d'une fonction bornée $p_t(x,y)$ représentant l'opérateur P_t est équivalente au fait que l'opérateur P_t est un opérateur borné de $L^1(\mu)$ dans $L^\infty(\mu)$ (cf [B2], par exemple). La borne supérieure de la fonction $p_t(x,y)$ est alors égale à cette norme d'opérateur.

Dans le cas qui nous intéresse ici, cette propriété est vérifiée : on va même pouvoir assurer un peu mieux en montrant que la norme d'opérateur $\|P_t\|_{1,\infty}$ est majorée par $ct^{-r/2}$, pour $0 < t < 1$, avec $r = \sup(p,q)$. En effet, il est bien connu qu'une telle estimation sur la norme $\|P_t\|_{1,\infty}$ pour un opérateur markovien symétrique est équivalente, pour une constante $r > 2$, à l'existence d'une inégalité de SOBOLEV de la forme

$$\|f\|^2_{2r/(r-2)} \leq C\{\|f\|_2 - \langle fL(f)\rangle\}, \tag{3}$$

satisfaite pour une famille de fonctions f dense dans le domaine de L. Cette relation fondamentale, établie dans [V], [CKS], [D], admet une extension un peu différente dans le cas $1 \leq r \leq 2$, mais nous restreindrons ici au cas $r > 2$. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [B2] pour plus de détails.

Dans la suite de cet exposé, nous allons donc nous attacher à établir des inégalités de type (3) pour les opérateurs de JACOBI.

3— Inégalités de SOBOLEV.

Dans ce qui suit, et quitte à changer x en $-x$, nous supposerons partout que $p \geq q$. Nous supposerons aussi que $p > 2$. Le type d'inégalités de SOBOLEV que nous allons établir prend une toute autre forme dans le cas $p = 2$ (inégalités de TRUDINGER-MOSER) ou dans le cas $1 \leq p < 2$ (inégalités de NASH ou de SOBOLEV faibles). Nous ne nous en occuperons pas. Quant à la forme que devraient prendre des inégalités optimales dans le cas $0 < p < 1$, elle reste encore largement mystérieuse.

Rappelons d'abord quelques faits sur les inégalités de SOBOLEV. Ces inégalités prennent sens dans le cadre général des semigroupes symétriques. On dispose alors d'une mesure de probabilité μ (ici $\mu_{p,q}$, sur $]-1,1[$), et d'un opérateur carré du champ $\Gamma(f,g)$, défini sur une bonne classe de fonctions (ici, $\Gamma(f,g) = (1-x^2)f'(x)g'(x)$, défini pour les fonctions f de classe C^1 sur $[-1,1]$). On désignera alors par $\|\ \|_r$ la norme dans $L^r(\mu)$ $(1 \leq r \leq \infty)$ et comme plus haut par $\langle f\rangle$ l'intégrale $\int f\,d\mu$.

L'opérateur carré du champ permet de parler de l'opérateur symétrique L associé à Γ par la formule

$$\int L(f)g\,d\mu = -\langle\Gamma(f,g)\rangle.$$

Ici, c'est de l'opérateur $L_{p,q}$ qu'il s'agit.

Dans le cadre qui nous intéresse, une inégalité de SOBOLEV de dimension $k > 2$ est une inégalité de la forme suivante

$$\forall f \in C^1([-1,1]),\ \|f\|_{r_k}^2 \leq a\|f\|^2 + b\langle\Gamma(f,f)\rangle, \qquad (S(k,a,b))$$

où l'on a posé $r_k = 2k/(k-2)$.

Le choix de cette définition de k comme une dimension vient de ce que, pour une variété riemannienne compacte de dimension k, ou pour un ouvert borné de $\mathbb{R}^k$, r_k est le plus grand exposant pour lequel on peut espérer une telle inégalité.

En appliquant l'inégalité à des fonctions constantes, on voit que $a \geq 1$. D'autre part, si $a = 1$, nous pouvons appliquer l'inégalité $S(k,1,b)$ à une fonction de la forme $(1+\varepsilon f)$, avec $\langle f\rangle = 0$, et faire tendre ε vers 0. On obtient alors

$$\forall f \in C^1([-1,1]),\ \langle f^2\rangle \leq \langle f\rangle^2 + \frac{b(k-2)}{4}\langle\Gamma(f,f)\rangle.$$

L'inégalité précédente, du type

$$\forall f \in C^1([-1,1]),\ \langle f^2\rangle \leq \langle f\rangle^2 + \frac{1}{\lambda}\langle\Gamma(f,f)\rangle, \qquad (TS(\lambda))$$

s'appelle une inégalité de trou spectral, et est équivalente au fait que la première valeur propre non nulle de l'opérateur symétrique $-L$ est supérieure à λ.

Réciproquement, la connaissance d'une inégalité $S(k,a,b)$ et d'une inégalité $TS(\lambda)$ permet d'obtenir une inégalité $S(k,1,b')$, cf [B2].

Ici, le trou spectral λ est égal à $(p+q)/2$, et donc nous pouvons ne nous intéresser qu'aux inégalités $S(k,1,b)$. (Elles sont appelées inégalités tendues dans [B2].) Nous appelerons alors k la dimension dans l'inégalité de SOBOLEV et b la constante de SOBOLEV.

La remarque précédente nous fournit une première minoration de la constante de SOBOLEV, en fonction du trou dans le spectre : $b \geq \frac{4}{(k-2)\lambda}$, où λ est la première valeur propre non nulle.

Un autre inégalité générique compare la constante de SOBOLEV au diamètre δ, défini de la façon suivante :

$$\delta = \sup_{\{\Gamma(f,f)\leq 1\}} \{f(x) - f(y)\}.$$

Dans le cas qui nous intéresse, cette constante est égale à π, ce sup étant obtenu pour la fonction $\arcsin(x)$. On a toujours (cf [BL])

$$\delta^2 \leq \pi^2 bk(k-2)/4.$$

Ici, cela nous donne $b \geq \frac{4}{(k-2)k}$, et cette inégalité est moins forte que la précédente dès que $\lambda \leq k$, ou encore $p+q \leq 2k$. Nous allons voir que c'est toujours le cas ici.

Théorème .—*Si une inégalité de* SOBOLEV $S(k,1,b)$ *a lieu pour la mesure* $\mu_{p,q}$*, alors* $k \geq p$*. De plus, l'inégalité* $S(p,1,b)$ *a lieu, et la meilleure constante* $b_{p,q}$ *apparaissant dans l'inégalité* $S(p,1,b)$ *satisfait*

$$\left(\frac{Z_{p,q}}{Z_{p,p}}\right)^{2/p} \frac{4}{p(p-2)} 2^{(p-q)/p} \leq b_{p,q} \leq \frac{16(p-1)}{p(p-2)(p+3q-4)}.$$

Preuve.

Nous commençons par montrer qu'il n'y a pas d'inégalité de SOBOLEV d'exposant inférieur à p. Pour cela, il suffit de considérer la famille de fonctions

$$f_{\varepsilon,\beta}(x) = (1+\varepsilon-x)^{\beta},\ \varepsilon > 0.$$

Il est facile de voir que, pour la mesure $\mu_{p,q}$, les quantités $\lim_{\varepsilon\to 0} \|f_{\varepsilon,\beta}\|^2$ et $\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\Gamma(f_{\varepsilon,\beta}, f_{\varepsilon,\beta})\rangle$ sont finies dès que $\beta > (2-p)/4$, tandis que $\lim_{\varepsilon\to 0} \|f_{\varepsilon,\beta}\|_{r_k} = \infty$ dès que $\beta \leq -p(k-2)/(4k)$. Ceci montre qu'il n'y a pas d'inégalité de SOBOLEV dès que

$$\frac{2-p}{4} < -\frac{p(k-2)}{4k},$$

c'est à dire $k < p$.

Nous allons maintenant montrer en même temps l'existence d'une inégalité de SOBOLEV pour l'exposant $k = p$ ainsi que la majoration de la constante $b_{p,q}$. Cela repose sur le critère Γ_2, que nous rappelons brièvement ci-dessous :

l'opérateur linéaire L étant comme plus haut symétrique par rapport à la mesure de probabilité μ, et vérifiant de plus l'identité

$$\int L(f)g\,d\mu = -\langle\Gamma(f,g)\rangle,$$

pour toutes les fonctions f et g appartenant à une classe suffisamment riche (ici, la famille des polynômes sur $[-1,1]$), la théorie générale s'applique dès que

$$\forall(f,g,h),\ \Gamma(fg,h) = f\Gamma(g,h) + g\Gamma(f,h),$$

ce qui est la propriété de diffusion. (Elle est évidemment vérifiée ici.) On introduit alors l'opérateur Γ_2 de la façon suivante

$$2\Gamma_2(f,g) = L(\Gamma(f,g)) - \Gamma(f,Lg) - \Gamma(g,Lf).$$

Nous disons que L satisfait une inégalité courbure-dimension $CD(\rho, k)$ ($\rho \in \mathbb{R}$, $k > 1$) si,

$$\forall f,\ \Gamma_2(f,f) \geq \rho\Gamma(f,f) + \frac{1}{k}(Lf)^2. \qquad (CD(\rho,k))$$

Nous avons alors le critère suivant pour obtenir une inégalité de SOBOLEV [B2] : si L satisfait l'inégalité $CD(\rho, k)$ avec $\rho > 0$ et $k > 2$, il satisfait à une inégalité de SOBOLEV $S(k, 1, b)$, avec

$$b = \frac{4(k-1)}{k(k-2)\rho}.$$

Dans le cas qui nous intéresse, l'inégalité $CD(\rho, k)$ prend une forme simple. Si L est un opérateur sur un intervalle réel I de la forme

$$L(f)(x) = f''(x) - a(x)f'(x),$$

L satisfait à l'inégalité $CD(\rho, k)$ ($\rho \in \mathbb{R}$, $k > 1$) si et seulement si

$$\forall x \in I,\ a'(x) \geq \rho + a^2(x)/(k-1). \qquad CD'(\rho,k)$$

Pour appliquer le critère, il nous suffit donc de mettre l'opérateur $L_{p,q}$ sous la forme précédente. Cela se fait en posant $x = \sin(y)$, avec $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, et alors L devient

$$Lf(y) = f''(y) - \frac{1}{2}((p+q-2)\tan(y) + \frac{q-p}{\cos(y)})f'(y).$$

Toujours avec $x = \sin(y)$, l'inégalité $CD'(\rho, k)$ s'écrit alors

$$\forall x \in [-1,1],\ 2[p+q-2+(q-p)x] \geq 4\rho(1-x^2) + \frac{[(p+q-2)x+q-p]^2}{k-1}.$$

Constatons au passage que cette inégalité en $x = \pm 1$ montre que $k \geq \sup(p,q) = p$. D'autre part, pour la valeur extrême $k = p$, cela se ramène à

$$\rho \leq \frac{p+3q-4}{4}.$$

Cela nous donne la majoration annoncée.

Pour la minoration, commençons par observer que, pour toute fonction $k(x)$ définie sur $[-1,1]$, intégrable par rapport à la mesure de LEBESGUE et continue au point -1, nous avons, pour tout $\beta > p/2$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\beta - p/2} \int_{-1}^{1} k(u)(1+u)^{p/2-1}(1+\varepsilon+u)^{-\beta}\,du = k(-1)K(p,\beta),$$

où $K(p,\beta) = \int_0^\infty u^{p/2-1}(1+u)^{-\beta}\,du$. Pour s'en convaincre, il suffit de couper l'intervalle $[-1,1]$ en $[-1,-1+\alpha]$ et $[-1+\alpha,1]$, de telle façon que $k(x)$ soit bornée sur $[-1,-1+\alpha]$. L'intégrale sur le second intervalle converge vers une valeur finie, tandis que, sur le premier, le changement de variables $u = -1+\varepsilon v$ la transforme en

$$\varepsilon^{p/2-\beta}\int_0^{\alpha/\varepsilon} k(-1+\varepsilon v)v^{p/2-1}(1+v)^{-\beta}\,dv.$$

Considérons maintenant les fonctions $f_\varepsilon(x) = (1+\varepsilon+x)^{(2-p)/2}$. Sous la mesure $\mu_{p,q}$, il découle de ce qui précède que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\|f_\varepsilon\|^2_{r_p} - \|f_\varepsilon\|_2^2}{\langle\Gamma(f_\varepsilon,f_\varepsilon)\rangle} = \frac{4Z_{p,q}^{2/p}}{(p-2)^2}\,\frac{K(p,p)^{(p-2)/p}}{K(p,p)}2^{(2-p-q)/p}.$$

Bien entendu, le même résultat est valable lorsque $p=q$. Mais, dans ce cas, d'après la majoration que nous avons déjà obtenue, et les remarques précédentes sur le cas symétrique, nous savons déjà que $b_{p,p} = 4/(p(p-2))$. D'autre part, dans le cas symétrique, on peut voir que, pour tout $\lambda > 1$, les fonctions $f_\lambda(x) = (\lambda+x)^{(2-p)/2}$ sont des fonctions extrémales de l'inégalité de SOBOLEV. Ce n'est pas très difficile, et nous renvoyons à [BL] pour le cas général ou à [A] pour le cas où p est entier. Ceci nous montre que la même quantité calculée pour $q=p$ converge en fait vers $4/(p(p-2))$. Ceci permet de calculer $\dfrac{K(p,p)^{(p-2)/p}}{K(p,p)}$ en fonction de $Z_{p,p}$ et d'obtenir le résultat. □

Remarques.—

Dans le cas $p=q$, nous obtenons une égalité. Mais, dans ce cas, la majoration

$$b_{p,p} \le \frac{4}{p(p-2)}$$

est également une minoration grâce à l'une des deux inégalités précédentes (trou spectral ou diamètre). On voit donc qu'il s'agit là d'un cas tout à fait particulier .

Dans le cas $q=1$, nous pouvons voir aisément que $Z_{p,1} = 2^{(p-1)/2}Z_{p,p}$, en utilisant directement la définition de $Z_{p,p}$ et en y faisant le changement de variables déjà mentionné $x = \sqrt{(1+y)/2}$. Nous obtenons alors

$$\frac{16}{p(p-2)}2^{-2/p} \le b_{p,1} \le \frac{16}{p(p-2)}.$$

On voit que cet encadrement est d'autant meilleur que p est grand.

Remarquons encore que la minoration donnée est meilleure que celle obtenue par l'inégalité utilisant le trou spectral (elle même meilleure, rappelons-le, que l'inégalité obtenue en utilisant le diamètre). Pour le voir, il suffit de montrer que

$$\left(\frac{Z_{p,q}}{Z_{p,p}}\right)^{2/p} 2^{(p-q)/p} \geq \frac{2p}{p+q},$$

ou, ce qui revient au même,

$$2\left(\frac{Z_{p,q}}{Z_{p,p}}\right)^{2/(p-q)} \geq \left(\frac{2p}{p+q}\right)^{p/(p-q)}.$$

Posons alors $\alpha = (p-q)/2$. Le premier membre de l'inégalité précédente n'est autre que

$$2\langle\frac{1}{(1+x)^\alpha}\rangle_{p,p}^{1/\alpha} \geq 2/\langle 1+x\rangle_{p,p} = 2,$$

tandis que le second membre s'écrit, en posant $x = \alpha/p \in [0,1/2]$,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{1/(2x)},$$

qui est une fonction croissante de x qui prend la valeur 2 en $x = 1/2$.

Remarquons finalement que, si l'on appelle $M_{p,q}$ le majorant de $b_{p,q}$ apparaissant dans l'énoncé du théorème et $m_{p,q}$ le minorant, le rapport $m_{p,q}/M_{p,q}$ converge vers

$$\frac{1+3\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^\alpha,$$

lorsque $p \to \infty$ et $q/p \to \alpha$, avec $\alpha \in [0,1]$. Cette limite ne vaut 1 qu'en $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Ceci permet de retrouver les valeurs exactes des constantes de SOBOLEV logarithmiques des semigroupes d'ORNSTEIN-UHLENBECK et de LAGUERRE.

En effet, commençons par observer le cas classique du semigroupe d'ORNSTEIN-UHLENBECK : si l'on fait le changement de variable $x = y/\sqrt{p}$, l'opérateur $L_{p,p}/p$ se transforme en

$$\hat{L}_p(f)(y) = (1 - \frac{y^2}{p})f''(y) - yf'(y),$$

qui converge vers le générateur du semigroupe d'ORNSTEIN-UHLENBECK

$$Lf(y) = (1-y^2)f''(y) - yf'(y).$$

La mesure image de $\mu_{p,p}$ par cette transformation se transforme en

$$\hat{\mu}_p(dy) = \frac{1}{\hat{Z}_p}1_{[-\sqrt{p},\sqrt{p}]}(y)(1-\frac{y^2}{p})^{p/2-1}\,dy,$$

qui converge lorsque $p \to \infty$ vers la mesure gaussienne

$$\hat{\mu}_\infty(dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2)\, dy.$$

D'autre part, pour une fonction f de classe C^1 et à support compact, l'inégalité de SOBOLEV pour $\hat{L}_p$ s'écrit

$$\frac{\|f\|_p^{2/p} - \|f\|^2}{p-2} \leq 4 \frac{p^2}{(p-2)^2} \langle (1 - \frac{y^2}{p}) f'^2 \rangle,$$

les normes et les intégrales étant prises par la mesure $\hat{\mu}_p$. Il n'est alors pas difficile de voir que, lorsque $p \to \infty$,

$$\frac{\|f\|_p^{2/p} - \|f\|^2)}{p-2} \to 2(\langle f^2 \log f^2 \rangle) - \langle f^2 \rangle \log \langle f^2 \rangle),$$

l'intégrale dans le second membre étant prise par rapport à la mesure $\hat{\mu}_\infty$ et nous obtenons à la limite l'inégalité de SOBOLEV logarithmique par rapport à la mesure gaussienne

$$\langle f^2 \log f^2 \rangle) - \langle f^2 \rangle \log \langle f^2 \rangle \leq 2 \langle f'^2 \rangle.$$

Il est moins évident de voir que la borne inférieure passe à la limite, mais le même argument de trou spectral permet de voir la borne supérieure ainsi obtenue est en fait une borne inférieure. Ce cas correspond au cas $\alpha = 1$ du passage à la limite dans le rapport $m_{p,q}/M_{p,q}$.

Le cas $\alpha = 0$ correspond aux semigroupes de LAGUERRE. Cette fois-ci, nous fixons q et faisons converger p vers l'infini. Le changement de variables $x = 1 - 2y/p$ transforme $L_{p,q}/p$ en l'opérateur

$$\hat{L}_{p,q}(f)(y) = y(1 - y/p) f''(y) - \frac{1}{2}(\frac{p+q}{p} y - q) f'(y),$$

défini sur $[0, p]$. Cet opérateur converge vers l'opérateur de LAGUERRE

$$\hat{L}_{\infty,q}(f)(y) = y f''(y) - \frac{1}{2}(y - q) f'(y),$$

défini sur $[0, \infty]$, et la mesure image

$$\frac{1}{\hat{Z}_{p,q}} 1_{[0,p]}(y) y^{q/2-1} (1 - y/p)^{p/2-1}\, dy$$

converge vers la mesure réversible $\hat{\mu}_{\infty,q}$ du semigroupe de LAGUERRE

$$\frac{1}{\hat{Z}_q} 1_{[0,\infty]}(y)\, y^{q/2-1} \exp(-y/2)\, dy.$$

Le même raisonnement que plus haut permet de retrouver l'inégalité de SOBOLEV logarithmique de l'opérateur de LAGUERRE

$$\langle f^2 \log f^2 \rangle\rangle - \langle f^2 \rangle \log \langle f^2 \rangle \leq 8\langle y f'^2 \rangle,$$

les normes et intégrales étant cette fois-ci prises par rapport à la mesure $\hat{\mu}_{\infty,q}$.

Là encore, il n'est pas évident de voir que la borne inférieure passe à la limite, mais la meilleure constante dans l'inégalité de SOBOLEV logarithmique dans ce cas a été calculée dans [KS], et correspond bien à la valeur obtenue. D'ailleurs, si nous regardons attentivement quelles fonctions ont été utilisées pour obtenir notre borne inférieure et que nous faisons les changements de variables ad hoc ainsi que les passages à la limite correspondants, nous retrouvons les fonctions utilisées par [KS] pour obtenir la borne inférieure dans leur inégalité de SOBOLEV logarithmique.

Pour conclure, signalons que nous aurions pu nous intéresser aux inégalités de SOBOLEV pour des exposants $n > p$, c'est à dire pour des exposants non optimaux. La méthode proposée plus haut pour obtenir des minorations des constantes de SOBOLEV dans ce cas ne donne rien d'intéressant, et les meilleures minorations que nous ayons obtenues sont celles données par la comparaison avec le trou dans le spectre.

Pour les majorations, nous pouvons soit utiliser à nouveau la méthode Γ_2 en établissant une inégalité $CD(\rho, n)$, soit utiliser une amélioration de cette méthode proposée par [L] :

si une inégalité $CD(\rho, m)$ a lieu avec $m > 2$ et $\rho > 0$, et que λ_1 désigne la première valeur propre non nulle, nous avons pour tout $n > m$ une majoration de la constante de SOBOLEV dans l'inégalité $S(n, 1, b_n)$ donnée par

$$b_n \leq \frac{4}{n-2}\left(\frac{\alpha m \rho}{m-1} + (1-\alpha)\lambda_1\right)^{-1},$$

où la constante $\alpha \in [0, 1]$ vaut

$$\alpha = \frac{(n+2)(m-1)^2}{4+(n-2)(m+1)^2}.$$

Remarquons que $\alpha = 1$ lorsque $m = n$, et que, lorsque $\lambda_1 = m\rho/(m-1)$, cette constante est optimale car on retrouve alors la borne inférieure calculée en fonction du trou spectral.

Le calcul de la majoration des constantes de SOBOLEV par l'une de ces deux méthodes pour un exposant n général n'apporte pas de résultat particulièrement intéressant. Néanmoins, il vaut sans doute la peine de faire cette comparaison lorsque $n = p + q - 1$, qui est, rappelons le, la dimension de la sphère dont nous étions partis lorsque p et q sont entiers pour construire l'opérateur de JACOBI.

Dans ce cas, nous obtenons une inégalité $CD(\rho, n)$ avec

$$\rho = \frac{2(n-1)^2 - (q-p)^2}{4(n-1)},$$

ce qui donne une majoration de b_n par

$$b_n^1 = \frac{16(n-1)^2}{n(n-1)[2(n-1)^2-(q-p)^2]}.$$

L'utilisation de la méthode proposée par [L] avec $m = p$ conduit à une majoration de b_n par

$$b_n^2 = \frac{16[n(p+1)^2 - 2(p^2+2p-1)]}{p(n-2)[n^2(3p-1)+n(2p^2+p-3)+2(2p^2+3p-1)]}.$$

Il n'est pas surprenant de constater que, lorsque $p = q$, b_n^2 est supérieur à b_n^1, car nous sommes alors dans le cas où ce résultat est optimal. Mais il est par contre plus curieux de voir que $b_n^1 > b_n^2$ lorsque q est proche de 1.

D'autre part, il faut constater que l'on pourrait améliorer cette borne supérieure dans le cas $1 < q < p$ en utilisant une inégalité $CD(\rho, m)$ pour tous les $m \in [p, n]$ et optimisant en m le résultat obtenu par la majoration de [L]. Cela conduit à des calculs (presque) inextricables.

Références

[A] AUBIN (T.) — **Non linear analysis on manifolds, MONGE-AMPÈRE equations**, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York, 1982.

[B1] BAKRY (D.) — La propriété de sous-harmonicité des diffusions dans les variétés, *Séminaire de probabilités XXII*, Lecture Notes in Math. 1321, 1988, Springer, p. 1-50.

[B2] BAKRY (D.) — L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes, *Lectures on Probability Theory*, Lecture Notes in Math. 1581, 1994, Springer.

[BL] BAKRY (D.), LEDOUX (M.) — MYER's theorem and SOBOLEV inequalities, preprint, 1994.

[CSK] CARLEN (E.), KUSUOKA (S.), STROOCK (D.W.) — Upperbounds for symmetric MARKOV transition functions, Ann. Inst. H. POINCARÉ, vol. 23, 1987, p. 245-287.

[D] DAVIES (E.B.) — **Heat kernels and spectral theory**, Cambridge University Press, Berlin-Heidelberg-New-York, 1989.

[G] GANGOLLI (R.) — Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to LEVY's Brownian motion of several parameters, Ann. Inst. H. POINCARÉ, vol. III, 1967, p. 121-226.

[KS] KORZENIOWSKI (A.), STROOCK (D.) — An example in the theory of hypercontractive semigroups, Proc. A.M.S., vol. 94, 1985, p.87-90.

[L] LEDOUX (M.) — Sur les inégalités de SOBOLEV dans les variétés riemanniennes compactes, preprint, 1994.

[M] MAZET (O.) — Semigroupes de diffusion associés à des familles de polynômes orthogonaux., preprint, 1994.

[SC] SALOFF -COSTE (L.) — Quantitative bounds on the convergence of diffusion semigroups to equilibrium, Math. Zeit., à paraître, 1994.

[Sz] SZEGÖ (G.) — **Orthogonal Polynomials, 4^{th} Ed.**, A.M.S., 1967.

[V] VAROPOULOS (N.) — HARDY-LITTLEWOOD theory for semigroups, J. Funct. Anal., vol. 63, 1985, p.240-260.

D. Bakry,
Laboratoire de Statistique et Probabilités,
Université PAUL SABATIER,
118, route de Narbonne,
31062, TOULOUSE Cedex.

Astérisque

S. BENACHOUR
B. ROYNETTE
P. VALLOIS

Solutions fondamentales de $u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = \pm |u_x|$

Astérisque, tome 236 (1996), p. 41-71
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__41_0>

Solutions fondamentales de $u_t - \frac{1}{2} u_{xx} = \pm|u_x|$

S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois

Résumé. — A l'aide de techniques probabilistes nous construisons explicitement la solution fondamentale du problème de Cauchy associé à l'équation $u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = \pm|u_x|$, lorsque la dimension d'espace d est égale à 1. Puis nous analysons le comportement en norme L^p des solutions de cette équation pour une large classe de données initiales. Le cas où $d \geq 2$ a été étudié aussi et fera l'objet d'une autre publication.

I. Introduction

1. Considérons l'équation aux dérivées partielles :

$$u_t - \frac{1}{2}\Delta u = -|\nabla u| \text{ dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^d \tag{1.1}$$

$$u(0, .) = \mu \text{ dans } \mathbb{R}^d. \tag{1.2}$$

Ces équations ont un lien avec celles de Navier-Stokes. En effet, lorsque la dimension d'espace est deux, les équations de Navier-Stokes décrivent l'évolution de la vitesse $u = (u_1, u_2)$ d'un fluide de viscosité $\nu > 0$ et incompressible, cf. [L], et s'écrivent :

$$\text{(N.S.)} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u.\nabla)u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

où p (la pression) est une fonction scalaire, inconnue aussi. Dans ces équations, le tourbillon $\omega = \operatorname{rot} u$ (identifié dans ce cas à une fonction scalaire) joue un rôle essentiel et vérifie l'équation

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu\Delta\omega = -(u.\nabla)\omega. \tag{T}$$

En supposant u bornée par une constante $C > 0$, on a :

$$\left|\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \Delta \omega\right| \leq C|\nabla \omega|.$$

D'où l'intérêt accordé à l'équation (1.1).

2. L'existence et l'unicité de la solution de (1.1), (1.2) dans

$$L^1([0,T], W^{1,1}(\mathbb{R}^d)) \cap C^0([0,T], \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d))$$

ont été obtenues par M. Ben Artzi [B] lorsque la donnée initiale est une fonction régulière et par S. Benachour, H. Brézis et M. Pierre [BBP] quand la donnée initiale μ est dans l'espace $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$ des mesures de masse totale finie.

En intégrant l'équation (1.1) dans $\mathbb{R}^d$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx = -\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t,x)|dx$$

et donc : $t \to \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx$ est décroissante sur $]0,\infty[$. Lorsque μ est une fonction positive, la solution du problème (1.1), (1.2) est positive. Il est donc naturel d'étudier :

- d'une part le comportement asymptotique de $\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx$ lorsque $t \to \infty$
- d'autre part de rechercher si $\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx$ admet un taux de décroissance lorsque $t \to \infty$.

Si μ est une fonction positive, régulière et à support compact, M. Ben Artzi [B] montre que la solution de (1.1), (1.2) vérifie :

(1.3) $$\exists \alpha > 0, \quad \exists C > 0 \text{ tels que : } t^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx \leq C$$

où α ne dépend que de la dimension d, mais n'est pas précisé, et où C dépend aussi de d et $||\mu||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)}$.

Lorsque μ est une mesure positive de masse totale finie, S. Benachour, H. Brézis et M. Pierre [BBP] montrent que la solution de (1.1), (1.2) vérifie les deux propriétés suivantes :

(1.4) $$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx = 0$$

(1.5) il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tendant vers 0

quand $t \to \infty$ et telle que, pour toute solution positive u de (1.1), (1.2) on ait :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx \leq f(t) \int u(0,x)dx$$

En ce sens, $\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx$ n'admet pas de taux de décroissance.

3. Dans cette étude nous nous proposons d'analyser les solutions de (1.1), (1.2) lorsque la dimension d'espace est égale à un. Notre contribution est essentiellement la construction explicite de la solution du problème de Cauchy (1.1), (1.2) dans les deux cas suivants :

i) la donnée initiale μ est égale à la masse de Dirac à l'origine.
ii) la donnée initiale μ est une mesure positive, de masse totale finie et "profilée" (cf l'alinéa 7 ci-dessous pour une définition précise de ce terme). Pour fixer les idées, lorsque μ est une fonction dérivable, profilée signifie que $\operatorname{sgn} \mu'(x) = -\operatorname{sgn}(x)$.
L'idée de la construction explicite de la solution est la suivante : on remplace l'équation non linéaire (1.1) par l'équation linéarisée :

$$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = (\operatorname{sgn} x).u_x \tag{1.6}$$

$$u(0,.) = \mu(.). \tag{1.7}$$

On résout alors explicitement l'équation linéarisée par une méthode probabiliste, puis on constate que, lorsque μ est profilée, la solution du problème linéaire est également solution du problème non linéaire (1.1), (1.2).

4. La connaissance explicite de la solution de (1.1) (1.2), pour une large classe de mesures μ, jointe à l'utilisation du principe de comparaison, nous permet alors d'étudier de façon fine le comportement de la solution. Plus précisément :
a) dans le théorème 3.3, nous redémontrons, par des arguments probabilistes simples, les résultats (1.4) et (1.5) sur la décroissance vers 0 de $||u(t,.)||_1$ et sur l'inexistence de taux de décroissance; dans les théorèmes 4.1 et 4.4, nous améliorons ce résultat en montrant comment ce taux de décroissance dépend de la "queue de la mesure μ", ie de $\varphi_\mu(t) = \int_{|x|>t} \mu(dx)$

b) lorsque la mesure μ possède un moment exponentiel, ie :

$$C(\mu) = \int_{\mathbb{R}} |x|e^{|x|}\mu(dx) < \infty,$$

nous obtenons (cf. théorème 4.8) la vitesse optimale de décroissance de $||u(t,.)||_1$. Plus précisément, nous montrons l'existence de deux constantes universelles C_1 et C_2 telles que :

$$C_1C'(\mu) \leq \varliminf_{t\to\infty} t^{3/2}e^{t/2}||u(t,.)||_1 \leq \varlimsup_{t\to\infty} t^{3/2}e^{t/2}||u(t,.)||_1 \leq C_2.C(\mu). \tag{1.8}$$

Bien sûr, (1.8) améliore le résultat (1.3) de M. Ben Artzi puisque :
- il donne la vitesse exacte de décroissance de $||u(t,.)||_1$ qui est en $e^{-t/2}\frac{1}{t^{3/2}}$, et qui est donc exponentielle,
- il est vrai pour des mesures à moment exponentiel, et pas seulement pour des mesures à support compact.

Remarquons que l'estimation (1.8) montre un comportement de $||u(t,.)||_1$ très différent de la situation de l'équation de la chaleur. On peut donc dire que, dans (1.1), le terme de convection $-|u_x|$ joue un rôle prépondérant.

La connaissance explicite de la solution de (1.1), (1.2) nous permet également d'obtenir d'autres estimations intéressantes :

c) Lorsque μ est profilée, on a :

$$||u(t,.)||_\infty \leq C\frac{(\log t)^{1/2}}{t}||\mu||_1 \qquad (t \geq 1)$$

$$||u_x(t,.)||_1 \leq \frac{C}{t}||\mu||_1 \qquad (t \geq 1).$$

5. Dans le dernier paragraphe de ce travail (§ V) nous nous intéressons cette fois à l'équation :

$$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = |u_x| \tag{1.9}$$

$$u(0,.) = \mu(.) \tag{1.10}$$

Les méthodes mises en oeuvre pour étudier (1.1), (1.2) fonctionnent, mutatis mutandis, de la même manière pour (1.9), (1.10). Nous déterminons la solution explicite de (1.9), (1.10) pour des mesures μ profilées et, à partir de cette solution explicite, des estimations de $||u(t,.)||_1$. Par exemple, nous obtenons (théorème 5.4) :

Si μ est profilée et si u est la solution de (1.9), (1.10) :

$$\begin{aligned} C_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-2|a|}\mu(da) &\leq \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{1+t}||u(t,.)||_1 \\ &\leq \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{1+t}||u(t,.)||_1 \leq C_2 \int_{\mathbb{R}} e^{-2|a|}|a|\mu(da) \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} C_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-2|a|}\mu(da) &\leq \varliminf_{t\to\infty} ||u(t,.)||_\infty \\ &\leq \varlimsup_{t\to\infty} ||u(t,.)||_\infty \leq C_2 \int_{\mathbb{R}} e^{-2|a|}|a|\mu(da) \end{aligned} \tag{1.12}$$

où C_1, C_2 sont des constantes universelles.

6. Nous avons choisi, pour ce travail, de nous placer dans le cas où la dimension d vaut 1. Lorsque $d > 1$, l'approche probabiliste choisie ici, continue à être opérationnelle. Cependant, les formules explicites obtenues ne sont plus si simples. En particulier, elles dépendent de fonctionnelles liées au pont de Bessel. C'est pourquoi nous nous sommes limités ici au cas $d = 1$. Le cas $d > 1$ fera l'objet d'une étude ultérieure (cf. [B.R.V.]).

7. Fixons quelques notations qui seront utilisées au cours de l'article.
- C est une constante universelle.
- Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ appartient à $W^{1,1}(\mathbb{R})$ si f et f' sont éléments de $L^1(\mathbb{R})$.
- $\|\ \|_p$ désigne la norme de $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$.
- $\mathcal{M}_b(\mathbb{R})$ est l'ensemble des mesures bornées de $\mathbb{R}$
- δ_a représente la mesure de Dirac au point a.
- Les solutions aux différentes équations aux dérivées partielles considérées dans ce travail seront toujours des fonctions appartenant à $L^1((0,T), W^{1,1}(\mathbb{R})) \cap C^0([0,T], \mathcal{M}_b(\mathbb{R}))$, pour tout $T > 0$.
- Nous désignons par ψ la fonction :

$$\psi(x) = \int_x^\infty \exp(-t^2/2)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Une mesure μ sur $\mathbb{R}$ est dite a-profilée si μ est une distribution tempérée et μ' est une mesure négative sur $(a, +\infty)$ et une mesure positive sur $]-\infty, a)$. Lorsque $a = 0$, on dira que μ est profilée.
- Soient f et g deux fonctions sur $\mathbb{R}_+$, positives. On dira que $f \asymp g$ s'il existe deux constantes $c > 0$ et $c' > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$, on ait $cf(t) \leq g(t) \leq c'f(t)$.

II Construction explicite d'une solution modèle

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$u_t - \tfrac{1}{2}u_{xx} = -|u_x| \qquad \text{dans } (0,+\infty) \times \mathbb{R} \tag{2.1}$$

$$u(0,.) = \delta_0. \tag{2.2}$$

Pour tout $T > 0$, ce problème admet une unique solution u^0 dans $L^1((0,T), W^{1,1}(\mathbb{R})) \cap C^0([0,T], \mathcal{M}_b(\mathbb{R}))$. Le but de cette section est d'écrire explicitement cette solution et puis d'en déduire le comportement asymptotique des normes $\|u^0(t,.)\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 2.1

La solution u^0 du problème (2.1), (2.2) *est donnée par :*

$$u^0(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{[\frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-\frac{x^2}{2t} - |x| - \frac{t}{2})] - \psi(\sqrt{t} + \frac{|x|}{\sqrt{t}})\} \tag{2.3}$$

où :

$$\psi(x) := \int_x^{+\infty} \exp(-\frac{s^2}{2})\, ds.$$

Démonstration du théorème 2.1

i) L'équation de la chaleur a une vitesse infinie de propagation mais il est légitime de penser que la solution u^0 du problème (2.1), (2.2) garde, pour tout $t > 0$, un "profil analogue" à une gaussienne centrée. Auquel cas nous avons alors :

$$\text{sgn}\,(u_x(t,x)) = -\text{sgn}\,(x) \tag{2.4}$$

où sgn désigne la fonction :

$$\text{sgn}\,(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Cela nous amène à considérer le problème "linéarisé":

$$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = \text{sgn}(x).u_x \qquad \text{sur } (0,+\infty) \times \mathbb{R} \tag{2.5}$$

$$u(0,.) = \delta_0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Par une méthode probabiliste nous allons exhiber la solution u^0 du problème de Cauchy linéaire (2.5), (2.6) et constater que u^0 vérifie (2.4). Par suite, cette fonction u^0 est l'unique solution (cf. [BBP]) du problème de Cauchy (2.1), (2.2).

ii) Construisons à présent la solution u^0 du problème de Cauchy (2.5), (2.6). Pour ce faire, on considère l'opérateur différentiel, sur $\mathbb{R}$:

$$Lv = \frac{1}{2}v_{xx} + \text{sgn}\,(x).v_x$$

dont l'adjoint formel est :

$$L^{(*)}f = \frac{1}{2}f_{xx} - \text{sgn}\,(x).f_x - 2\delta_0 f.$$

En désignant par u^0 la solution de (2.5), (2.6) et P_t le semi-groupe associé à $L^{(*)}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} u^0(t,x)f(x)dx = P_t f(0). \tag{2.7}$$

D'autre part, soient $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien issu de 0 et $(X_t; t \geq 0)$ la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$X_t = B_t - \int_0^t \text{sgn}\,(X_s)ds$$

Alors, on a :

$$P_t f(0) = E\{f(X_t)\exp(-2L_t^0)\}$$

où L_t^0 est le temps local en 0 de $(X_t, t \geq 0)$.

Signalons que Karatzas et Shreve ont considéré des équations différentielles où le terme de dérive prend deux valeurs ([KS], 6.5).
Grâce à la formule de Girsanov ([KS], page 191, (5.6)), on tire :

$$P_t f(0) = E\{f(B_t)\exp(-\int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)dB_s - \frac{t}{2} - 2\ell_t^0)\}$$

où ℓ_t^0 est le temps local en 0 du mouvement brownien B.

Compte tenu de la formule de Tanaka (cf [KS], p205) :

$$|B_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s).dB_s + \ell_t^0,$$

on obtient :

$$P_t f(0) = E\{f(B_t)\exp(-|B_t| - \frac{t}{2} - \ell_t^0)\}. \tag{2.8}$$

Désignons par $n(t,x,y)$ la densité du couple $(|B_t|, \ell_t^0)$. Puisque $-B$ est un mouvement brownien, on a donc, d'après (2.7) et (2.8) :

$$u^0(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\{\exp(-|x| - \frac{t}{2} - y)\}n(t,|x|,y)dy.$$

D'une part $u^0(t,.)$ est une fonction paire et d'autre part la densité $n(t,x,y)$ est bien connue (cf. [RY], p. 227, ex. 2.18). Elle vaut, pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$:

$$n(t,x,y) = (\frac{2}{\pi t^3})^{1/2}(x+y)\exp(-\frac{(x+y)^2}{2t}).$$

Donc :

$$\begin{aligned} u^0(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\{\exp(-\frac{x^2}{2t} - \frac{t}{2} - |x|)\}\int_0^{+\infty}(|x|+y)\exp[-\frac{1}{2t}(y^2 + 2|x|y + 2yt)]dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\int_0^{+\infty}(|x|+y)\exp[-\frac{1}{2t}(t+|x|+y)^2]dy. \end{aligned}$$

Après le changement de variable :

$$z = \frac{t+|x|+y}{\sqrt{t}},$$

on a finalement :

$$u^0(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{[\frac{1}{\sqrt{t}}\exp(-\frac{1}{2}(\sqrt{t} + \frac{|x|}{\sqrt{t}})^2)] - \psi(\sqrt{t} + \frac{|x|}{\sqrt{t}})\}.$$

iii) Il est facile de voir que u^0 est deux fois dérivable en x sur $]0,+\infty[\times I\!R$. Montrons que la relation (2.4) est vérifiée.
Soit $x > 0$, on a :

$$\sqrt{2\pi}\{\exp\frac{1}{2}(\sqrt{t}+\frac{x}{\sqrt{t}})^2\}u^0_x(t,x) = -\frac{x}{t\sqrt{t}}$$

Puisque $u^0(t,.)$ est une fonction paire,

$$\operatorname{sgn}(u^0_x(t,x)) = -\operatorname{sgn}(x), \forall x \in I\!R.$$

Enfin, on peut vérifier que u^0 est la solution du problème de Cauchy (2.5), (2.6). En effet, on a pour $x > 0$:

$$\sqrt{2\pi}\{\exp\frac{1}{2}(\sqrt{t}+\frac{|x|}{\sqrt{t}})^2\}u^0_t(t,x) = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}+\frac{x^2}{2t^2\sqrt{t}}-\frac{x}{2t\sqrt{t}}$$

$$\sqrt{2\pi}\{\exp\frac{1}{2}(\sqrt{t}+\frac{|x|}{\sqrt{t}})^2\}u^0_{xx}(t,x) = -\frac{1}{t\sqrt{t}}+\frac{x^2}{t^2\sqrt{t}}+\frac{x}{t\sqrt{t}}$$

Il est évident alors que (2.5) est réalisée. Pour vérifier la relation (2.6), on remarque que pour toute fonction f continue et à support compact sur $I\!R$, on a :

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{I\!R} f(x)\{\exp -\frac{1}{2}(\sqrt{t}+\frac{|x|}{\sqrt{t}})^2\}dx = f(0)$$

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{I\!R} f(x)\psi(\sqrt{t}+\frac{|x|}{\sqrt{t}})dx = 0.$$

Donc : $u^0(0,.) = \delta_0$ et la preuve du théorème (2.1) est achevée.

Remarque (a)
La solution u^0 du problème de Cauchy (2.1), (2.2) est positive sur $]0,+\infty[\times I\!R$. Cette propriété est une conséquence des deux points suivants :

i) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} u^0(t,x) = 0, \qquad \forall t > 0$
ii) $\operatorname{sgn}(u^0_x(t,x)) = -\operatorname{sgn}(x)$

Remarque (b)
L'équation (2.1) étant invariante par translation, il est clair que la fonction:

$$u^\xi(t,x) := u^0(t,x-\xi)$$

est la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{array}{rcll} u_t - \frac{1}{2}u_{xx} & = & -|u_x| & \text{sur }]0,\infty[\times I\!R \\ u(0,.) & = & \delta_\xi & \text{sur } I\!R \end{array}$$

où δ_ξ est la distribution de Dirac au point ξ.

Théorème 2.2
Soit u^0 définie par (2.3) *la solution du problème de Cauchy* (2.1), (2.2). *Alors,*

$$\|u^0(t,.)\|_\infty \asymp \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}e^{-t/2} \tag{2.9}$$

$$\|u^0(t,.)\|_1 \asymp \frac{1}{(1+t)^{3/2}}e^{-t/2}. \tag{2.10}$$

(cf. dernier point de l'alinéa I.7 pour la signification de $\asymp$).

Démonstration du théorème 2.2
D'après la remarque (a) ci-dessus et (2.3), on a :

$$\|u^0(t,.)\|_\infty = u^0(t,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t/2} - \psi(\sqrt{t})].$$

D'après le développement classique :

$$\psi(x) = [\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5} + 0(\frac{1}{x^5})]e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x \to \infty \tag{2.11}$$

on a :

$$\|u^0(t,.)\|_\infty \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-t/2}}{t^{3/2}} \qquad t \to \infty. \tag{2.12}$$

D'autre part, il est évident que :

$$\|u^0(t,.)\|_\infty = u^0(t,0) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-t/2}, \qquad t \to 0. \tag{2.13}$$

En regroupant (2.12) et (2.13) on obtient (2.9).

Pour avoir le point (2.10), on observe que $u^0(t,x)$ est paire par rapport à la variable x; il suffit de calculer :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} u^0(t,x)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\{[\frac{1}{\sqrt{t}}\exp(-\frac{1}{2}(\sqrt{t}+\frac{x}{\sqrt{t}})^2)] \\ &\qquad - \psi(\sqrt{t}+\frac{x}{\sqrt{t}})\}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[(1+t)\psi(\sqrt{t}) - \sqrt{t}e^{-t/2}].\end{aligned} \tag{2.14}$$

Compte tenu de (2.11) on en déduit que :

$$\|u^0(t,.)\|_1 \sim \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}e^{-t/2}, \qquad t \to +\infty. \tag{2.15}$$

D'autre part, en vertu de (2.14), on a :

$$\lim_{t\to 0}\|u^0(t,.)\|_1 = 1. \tag{2.16}$$

De (2.15) et (2.16), on déduit le point (2.10). Ceci achève la preuve du théorème 2.2.

Corollaire 2.3
Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$||u^0(t,.)||_p \leq \frac{C}{t^{3/2}} e^{-t/2}, \qquad \forall t > 1.$$

Nous allons maintenant donner une représentation probabiliste de la solution u^0 de (2.1), (2.2) différente de celle utilisée pour la démonstration du théorème 2.1.

Théorème 2.4
Soit $(R_t; t \geq 0)$ un processus de Bessel de dimension 3, (cf. [RY], p.232 ou 409), *issu de* 0. *Alors :*

$$u^0(t,x) = \frac{1}{2} e^{-t/2} E[\frac{1}{R_t} 1_{\{x<R_t\}} e^{-R_t}] \qquad \text{si } x \geq 0$$
$$u^0(t,x) = u^0(t,|x|).$$

Démonstration du théorème 2.4
a) Soit $(X_t; t \geq 0)$ la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$X_t = B_t - \int_0^t \operatorname{sgn} X_s ds$$

Soit ξ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 2 :

$$P(\xi \geq t) = e^{-2t}$$

indépendante de (X, B). Définissons Y par :

$$Y_t = \begin{cases} X_t & \text{si } L_T \leq \xi \\ \delta & \text{si } L_T > \xi \end{cases}$$

où $(L_t; t \geq 0)$ désigne le temps local en 0 de X.
Soit f une fonction borélienne bornée définie sur $\mathbb{R}$; on pose $f([\delta]) = 0$. Alors :

$$E(f(Y_t)) = E(f(X_t) 1_{\{L_t \leq \xi)\}}) = E(f(X_t) e^{-2L_t}) \tag{2.17}$$

et donc, d'après (2.7), $u^0(t,x)$ est la densité de $Y_t 1_{\{Y_t \in \mathbb{R}\}}$

b) Posons : $\Delta := E(f(X_t) \exp - 2L_t)$
Utilisons à nouveau le théorème de Girsanov; il vient :

$$\Delta = E(f(B_t) \exp(-|B_t| - \ell_t^0 - t/2))$$

où ℓ_t^0 est le temps local en 0 de B.

Par symétrie,

$$\Delta = E(f(-B_t)\exp(-|B_t| - \ell_t^0 - t/2))$$

Si f est une fonction paire, $\Delta = \Delta_+$ où l'on a posé :

$$\Delta_+ = \frac{1}{2}E(f(|B_t|)\exp - (|B_t| + \ell_t^0 + t/2)) \tag{2.18}$$

Soit :

$$S_t := \sup_{u\le t} B_u.$$

D'après le théorème de Lévy, $(|B|, \ell^0)$ a même distribution que $(S - B, S)$
D'où :

$$\Delta_+ = \frac{1}{2}E(f(S_t - B_t)\exp - (2S_t - B_t + t/2))$$

Mais d'après le théorème de Pitman, ([RY], theorem 3.5 p.234), $2S - B$ a même distribution que R, où R est un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0. De plus : $S_t = \inf_{u\ge t} R_u$. Ecrivant : $S_t - B_t = 2S_t - B_t - S_t$, on obtient donc :

$$\Delta_+ = \frac{1}{2}E(f(R_t - \underline{R}_t)e^{-R_t})e^{-t/2}$$

avec $\underline{R}_t := \inf_{u\ge t} R_u$.
Mais il est classique (cf. [K.S], Corollary 3.6, p.236) que, conditionnellement à $R_t = x, \underline{R}_t$ suit une loi uniforme sur $[0,x]$. $R_t - \underline{R}_t$ suit également une loi uniforme sur $[0, R_t]$ et :

$$\Delta_+ = \frac{1}{2}e^{-t/2}E[\frac{1}{R_t}(\int_0^\infty f(x)1_{\{x<R_t\}}dx).e^{-R_t}]$$

d'où, d'après (2.18), le théorème 2.4.

Remarque (c)
La formule explicite du théorème 2.4 permet de retrouver la formule donnant la dérivée $u_x^0(t,x)$. En effet, la densité de la v.a R_t étant pour $x \ge 0$ égale à $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{2t}}x^2$, on a, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} u^0(t,x) &= \frac{1}{2}E(\frac{1}{R_t}1_{\{x<R_t\}}e^{-R_t})e^{-t/2} \\ &= \frac{e^{-t/2}}{2t^{3/2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_x^\infty ae^{-a-\frac{a^2}{2t}}da \qquad \text{et donc :} \end{aligned}$$

$$u_x^0(t,x) = \frac{-x}{t\sqrt{2\pi t}}\exp - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + \frac{x}{\sqrt{t}})^2. \tag{2.19}$$

Remarquons aussi que le théorème 2.4 implique :

$$\begin{aligned}||u^0(t,.)||_1 &= \int_0^\infty E[\frac{1}{R_t}1_{\{x<R_t\}}e^{-R_t}]e^{-t/2}dx \\ &= e^{-t/2}E(e^{-R_t}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}[(1+t)\psi(\sqrt{t}) - \sqrt{t}e^{-t/2}]\end{aligned}$$

et que :

$$||u^0(t,.)||_\infty = u^0(t,0) = \frac{1}{2}E(\frac{1}{R_t}e^{-R_t})e^{-t/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t/2} - \psi(\sqrt{t})]$$

formules déjà obtenues dans la preuve du théorème 2.2.

III Solution correspondant à une donnée initiale profilée

Dans ce paragraphe, on considère le problème de Cauchy :

$$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = -|u_x| \qquad \text{sur }]0,+\infty[\times\mathbb{R} \tag{3.1}$$

$$u(0,.) = \mu \qquad \text{sur } \mathbb{R} \tag{3.2}$$

où μ est une mesure positive profilée et de masse totale finie (cf. 1.7 pour la définition d'une mesure profilée).

Comme précédemment, pour tout $T > 0$, le problème (3.1), (3.2) admet une unique solution u dans $L^1((0,T), W^{1,1}(\mathbb{R})) \cap C^0([0,T], \mathcal{M}_b(\mathbb{R}))$. Là aussi, notre objectif est d'écrire explicitement cette solution u et d'en déduire le comportement asymptotique de normes $||u(t,.)||_p, (1 \le p \le \infty)$ quand $t \to \infty$.

Théorème 3.1

Soit μ une mesure positive, profilée et de masse totale finie. Alors la solution u du problème (3.1), (3.2) *est donnée par :*

$$\begin{aligned}u(t,x) = \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{|a|-|x|}\{\exp - \frac{(|x|-|a|)^2}{2t} \\ -\exp - \frac{(|x|+|a|)^2}{2t}\}\mu(da) \\ + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} e^{|a|}\frac{|a|}{s^{3/2}}\{\exp - (\frac{a^2}{2s}+\frac{s}{2})\}u^0(t-s,x)\mu(da)\end{aligned} \tag{3.3}$$

où u^0, donnée par (2.3), *est la solution du problème* (2.1), (2.2)

Démonstration du Théorème 3.1

La démarche est la même que pour le théorème 2.1. On considère le problème linéarisé :

(3.4) $$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = (\operatorname{sgn} x)u_x \qquad \text{sur }]0,+\infty[\times \mathbb{R}$$

(3.5) $$u(0,.) = \mu \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Si la solution u vérifie :

$$\operatorname{sgn}(u_x) = -\operatorname{sgn}(x)$$

alors u est l'unique solution du problème (3.1), (3.2).

Les mêmes considérations probabilistes que précédemment conduisent cette fois à : pour toute f positive et borélienne sur $\mathbb{R}$,

(3.6) $$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u(t,x)f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} E\{f(X_t^a)\exp\, -2L_t^0\}\mu(da)\\ &= \int_{\mathbb{R}} E\{f(a+B_t)\exp\,(|a| - |a+B_t| - \ell_t^{-a} - \frac{t}{2})\}\mu(da)\end{aligned}$$

où ℓ_t^{-a} désigne le temps local en $-a$ du processus B. On calcule l'espérance ci-dessus en la décomposant en deux parties selon que $t < T_{-a}$ ou $t \geq T_{-a}$, où T_{-a} est le temps d'atteinte pour le processus B du niveau $-a$. Pour $a \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}&E\{f(a+B_t)\exp\,(|a| - |a+B_t| - \ell_t^{-a}); t < T_{-a}\}\\ &= E\{f(a+B_t)\exp\,(a-a-B_t)\,;\, t < T_{-a}\}\\ &= E\{f(a+B_t)\exp\,(-B_t)\,;\, t < T_{-a}\}\end{aligned}$$

En vertu du principe de symétrie de D. André (cf. [KS], p 79).

$$\begin{aligned}&E\{f(a+B_t)\exp\,(-B_t)\,;\, t < T_{-a}\}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-a}^{+\infty} f(a+x)\exp\,(-x)[\exp(-\frac{x^2}{2t}) - \exp\, -\frac{(2a+x)^2}{2t}]dx\end{aligned}$$

D'où on tire le premier terme du second membre de (3.3). D'autre part, pour $t \geq T_{-a}$ on a :

$$\begin{aligned}&E\{f(a+B_t)\exp\,(|a| - |a+B_t| - \ell_t^{-a})\,;\, T_{-a} \leq t\}\\ =&E\{f(a+B_{T_{-a}+t-T_{-a}})\exp\,[|a| - |a+B_{T_{-a}+t-T_{-a}}| - \ell^{-a}_{T_{-a}+t-T_{-a}}]\,;\, T_{-a} \leq t\}\end{aligned}$$

Puisque :

$$a + B_{T_{-a}} = 0$$

et comme la densité de la variable aléatoire T_{-a} est :

$$g_a(s) = \begin{cases} \frac{|a|}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right) & s > 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

en vertu de la propriété de Markov forte (cf. [RY], III 3)

$$e^{-t/2} E\{f(a + B_t) \exp(|a| - |a + B_t| - \ell_t^{-a}) \,;\, T_{-a} \le t\} \tag{3.8}$$

$$= \int_0^t \frac{|a|}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{|a|} [\exp(-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2})] E\{f(B_{t-s}) \exp(-|B_{t-s}| - \ell^0_{t-s} - \frac{t-s}{2})\} ds$$

Rappelons que d'après (2.7), (2.8) on a :

$$E\{f(B_{t-s}) \exp(-|B_{t-s}| - \ell^0_{t-s} - \frac{t-s}{2})\} = \int_{\mathbb{R}} f(x) u^0(t-s, x) dx \tag{3.9}$$

Alors, en regroupant (3.6), (3.8) et (3.9), on a l'expression de la solution u donnée par (3.3).

Il reste à vérifier que l'on a :

$$\operatorname{sgn}(u_x(t,x)) = -\operatorname{sgn}(x), \qquad \forall (t,x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Pour ce faire, posons :

$$w_1(t,x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} e^{|a|} \frac{|a|}{s^{3/2}} \{\exp(-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2})\} u^0(t-s, x) \mu(da)$$

$$w_2(t,x) = \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{|a|} \exp(-|x| - \frac{(|x| - |a|)^2}{2t}) \mu(da)$$

$$w_3(t,x) = \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{|a|} \exp(-|x| - \frac{(|x| + |a|)^2}{2t}) \mu(da)$$

i) Calcul de $(w_1)_x$, pour $x > 0$.
Compte tenu de (2.19), on a :

$$(w_1)_x(t,x) = \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|a|} \mu(da) \{ \int_0^t \frac{|a|}{s^{3/2}} [\exp(-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2})] \frac{x}{\sqrt{2\pi (t-s)^3}}$$

$$\exp - (\frac{x^2}{2(t-s)} + x + \frac{t-s}{2}) ds \}$$

$$= -2e^{-x-\frac{t}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{|a|} \mu(da) \{ \int_0^t \frac{|a|}{\sqrt{2\pi s^3}} [\exp(-\frac{a^2}{2s})] \frac{x}{\sqrt{2\pi (t-s)^3}}$$

$$\exp(-\frac{x^2}{2(t-s)}) ds \}$$

$$= -2e^{-x-\frac{t}{2}} \int_0^{+\infty} e^{|a|} (g_a * g_x)(t) \mu(da).$$

où g_a est la densité de la variable aléatoire T_a, cf (3.7).

Puisque

$$g_a * g_x = g_{a+x}$$

alors on a :

$$(3.11) \qquad (w_1)_x(t,x) = \frac{-2}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-x-\frac{t}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{|a|}(|a|+x)\exp - \frac{(|a|+x)^2}{2t}\mu(da)$$

ii) Calcul de $(w_2)_x$, pour $x > 0$.

On a

$$(3.12) \qquad (w_2)_x(t,x) = -\frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{|a|}\left(\frac{x-|a|}{t}+1\right)\exp\left[-x - \frac{(x-|a|)^2}{2t}\right]\mu(da)$$

iii) Calcul de $(w_3)_x$, pour $x > 0$.

On a :

$$(3.13) \qquad (w_3)_x(t,x) = -\frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{|a|}\left(\frac{x+|a|}{t}+1\right)\exp\left[-x - \frac{(x+|a|)^2}{2t}\right]\mu(da)$$

Donc, en regroupant (3.11), (3.12) et (3.13) on a, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} u_x(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x-\frac{t}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{|a|+x}{t}\right)\exp\left[|a| - \frac{(|a|+x)^2}{2t}\right]\mu(da) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x-\frac{t}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left(-1 + \frac{|a|-x}{t}\right)\exp\left[|a| - \frac{(|a|-x)^2}{2t}\right]\mu(da) \end{aligned}$$

et donc, après intégration par parties :

$$(3.14) \qquad u_x(t,x) = \frac{2e^{-t/2-|x|-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{|a|-\frac{a^2}{2t}} \operatorname{sh}\frac{|a|x}{t}\mu'(a)da$$

ce qui prouve (3.10), puisque μ est profilée, et ceci achève la démonstration du théorème (3.1).

Notons que, d'après (3.14)

$$(3.15) \qquad ||u(t,.)||_\infty = u(t,0).$$

Corollaire 3.2

Soit μ une mesure positive, de masse totale finie (mais sans l'hypothèse du profil) et soit u la solution donnée par (3.3) du problème linéaire (3.4), (3.5). Alors u est une sur-solution de l'équation non linéaire (3.1).

Démonstration du corollaire 3.2

On a :

$$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} + |u_x| \geq u_t - \frac{1}{2}u_{xx} - \mathrm{sgn}x.u_x = 0.$$

Nous sommes maintenant en mesure de retrouver, par des arguments probabilistes simples, les résultats (1.4), (1.5) de S. Benachour, H. Brézis et M. Pierre.

Théorème 3.3

1) *Soit μ positive de masse totale finie et u la solution de (3.1), (3.2). Alors :*

$$\|u(t,.)\|_1 \underset{t\to\infty}{\to} 0. \tag{3.16}$$

2) *Soit μ une fonction positive, intégrable et profilée. Pour tout $\lambda > 0$, définissons : $\mu_\lambda(x) := \frac{1}{\lambda}\mu(\frac{x}{\lambda})$. Soit u_λ la solution de (3.1) avec donnée initiale μ_λ. Alors :*

$$\|u_\lambda(t,.)\|_1 \underset{\lambda\to\infty}{\to} \|\mu_\lambda\|_1 = \|\mu\|_1 \tag{3.17}$$

En particulier, il n'existe pas de taux de décroissance, au sens donné en (1.5).

Démonstration du théorème 3.3

1) D'après le corollaire 3.2, pour prouver le point 1 du théorème 3.3, on peut supposer que u est la solution du problème linéaire (3.4), (3.5). Mais on a, d'après (3.6) :

$$\|u(t,.)\|_1 = \int_{\mathbb{R}} E(\exp - 2L_t^0)\mu(da) \tag{3.18}$$

où L_t^0 est le temps local en 0 du processus X solution de :

$$X_t^a = a + B_t - \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s^a)ds. \tag{3.19}$$

Mais le processus X, de générateur $\frac{1}{2}f'' - (\mathrm{sgn}x)f'$, admet la mesure $\nu(x)dx = e^{-2|x|}dx$ comme mesure invariante puisque $\frac{\nu'(x)}{2\nu(x)} = -\mathrm{sgn}x$. Il est donc récurrent et $L_t^0 \underset{t\to\infty}{\to} +\infty$ pour tout a. Ainsi,

$$E(\exp - 2L_t^0) \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Il suffit alors, pour voir que $\|u(t,.)\|_1 \to 0$ quand $t \to \infty$, d'appliquer le théorème de Lebesgue.

2) Soit maintenant μ une fonction positive intégrable et profilée. D'après (3.18), on a :

$$\begin{aligned} \|u_\lambda(t,.)\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda}\mu(\frac{a}{\lambda})E_a(\exp - 2L_t^0)da \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mu(a)E_{a\lambda}(\exp - 2L_t^0)da \end{aligned}$$

où P_a désigne la loi du processus X^a solution de (3.19). Il est clair que

$$\lim_{\lambda\to\infty} E_\lambda(\exp - 2L_t^0) = 0,$$

par conséquent,

$$\|u_\lambda(t,.)\|_1 \underset{\lambda\to\infty}{\to} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(a)da = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_\lambda(a)da.$$

Nous venons de voir que lorsque μ est profilée, la solution u du problème linéaire (3.4), (3.5) est automatiquement solution du problème non linéaire (3.1), (3.2). Nous allons montrer ci-dessous que, sous des hypothèses convenables sur μ, (mais μ non profilée), la solution u du problème linéaire "se profile automatiquement", ie qu'il existe $t_0 > 0$ tel que, pour $t > t_0$, u est alors également solution du problème non linéaire.

Proposition 3.4

Soit μ une fonction positive vérifiant :

(H1) *il existe A et C telles que :* $\sup\limits_{-A\leq x\leq A} |\mu'(a)| \leq C$

(H2) *On a :* $\mathrm{sgn}\mu'(a) = -\mathrm{sgn}a$ *pour* $|a| \geq A$ *et*

$$\inf_{2A\leq a\leq 3A} |\mu'(a)| \geq C(A) \text{ avec } e^A C(A) > C.$$

Alors, pour t assez grand, la solution du problème linéaire (3.4), (3.5) est solution du problème non linéaire (3.1), (3.2).

Notons que nous n'avons pas cherché dans cette proposition à supposer sur μ des hypothèses optimales. On pourrait raffiner (H1), (H2).

Démonstration de la proposition 3.4

Il suffit bien sûr de voir que, pour t assez grand :

$$\text{(3.20)} \qquad \mathrm{sgn}(u_x(t,x)) = -\mathrm{sgn}x.$$

Supposons, pour simplifier l'écriture, que μ est symétrique. On a, d'après (3.14) :

$$u_x(t,x) = \frac{4e^{-t/2-|x|-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty e^{a-\frac{a^2}{2t}} \mathrm{sh}\frac{ax}{t}\mu'(a)da$$

(3.20) est une conséquence de (H2) et :

$$|\int_0^A e^{a-\frac{a^2}{2t}} \mathrm{sh}\frac{ax}{t}\mu'(a)da| \leq |\int_{2A}^{3A} e^{a-\frac{a^2}{2t}} \mathrm{sh}\frac{ax}{t}\mu'(a)da|$$

et il suffit donc de voir que :

$$C\int_0^A e^{a-\frac{a^2}{2t}} \mathrm{sh}\frac{ax}{t}da \leq C(A)\int_{2A}^{3A} e^{a-\frac{a^2}{2t}} \mathrm{sh}\frac{ax}{t}da. \tag{3.21}$$

Mais la fonction $a \to e^{a-\frac{a^2}{2t}}$ atteignant son maximum pour $a = t$, on a, pour tout $t \geq 3A$:

$$\sup_{0\leq a\leq A} e^{a-\frac{a^2}{2t}} = e^{A-\frac{A^2}{2t}} \text{ et } \inf_{2A\leq a\leq 3A} e^{a-\frac{a^2}{2t}} = e^{2A-\frac{4A^2}{2t}}$$

ce qui, puisque $e^A C(A) > C$, implique (3.21) et la proposition (3.4).

IV Propriétés asymptotiques des solutions de (3.1), (3.2)

Nous analysons ici les propriétés de la solution u du problème (3.1), (3.2). Nous nous intéressons particulièrement au "taux de décroissance" de $||u(t,.)||_1$. Les théorèmes (4.1) et (4.3) précisent de manière optimale le lien entre ce "taux de décroissance" et la queue de μ, ie la fonction $\varphi_\mu(t) = \int_{|x|>t} \mu(dx)$.

Théorème 4.1

Soit μ une mesure positive de masse totale finie, et u la solution de (3.1), (3.2). Alors :

$$\forall \epsilon \in]0, \frac{1}{2}[, \exists \alpha(\epsilon) : \frac{1}{2} - \epsilon \leq \alpha < \frac{1}{2}, \exists C(\epsilon) > 0, \; 0 < \gamma(\epsilon) < 1$$

tels que :

$$||u(t,.)||_1 \leq C(\epsilon)||\mu||_1 \exp(-t\alpha(\epsilon)) + K\int_{|x|>\gamma(\epsilon).t} \mu(dx). \tag{4.1}$$

Démonstration du théorème 4.1.

D'après le corollaire 3.2, il suffit de prouver (4.1) pour u solution du problème linéaire (3.4), (3.5), et donc u est donnée explicitement par le théorème (3.1). Par ailleurs, il est clair que d'après (3.4), on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}||u(t,.)||_1 = -||u_x(t,.)||_1 = \int_{I\!R} u_x(t,x)(\mathrm{sgn} x)dx. \tag{4.2}$$

Mais, d'après (3.14), on connaît explicitement u_x :

$$u_x(t,.) = \frac{2e^{-t/2-|x|-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{I\!R} e^{|a|-\frac{a^2}{2t}} \mathrm{sh}\frac{|a|x}{t}\mu'(a)da.$$

Ainsi (4.2) et la formule explicite de u_x permettent de calculer explicitement $||u(t,.)||_1$. On trouve :

$$||u(t,.)||_1 = C\int_{I\!R} e^{2|a|}\{\int_t^\infty u^0(s,a)ds\}\mu(da). \tag{4.3}$$

Pour simplifier l'écriture, nous allons supposer μ symétrique. Compte-tenu de l'expression (2.3) de u^0 et de (2.12), on a :

$$\begin{aligned} u^0(s,a) &\le \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{\sqrt{s}}{s+|a|} + \frac{(\sqrt{s})^3}{(s+|a|)^3}\right)\exp\left(-\frac{s}{2} - |a| - \frac{a^2}{2s}\right) \\ &\le \frac{2}{\sqrt{s}}\exp\left[-\frac{s}{2} - |a| - \frac{a^2}{2s}\right], \qquad \text{pour } s > 1. \end{aligned}$$

D'où :

$$||u(t,.)||_1 \le C_1 \int_0^\infty e^a\{\int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{s}}\exp(-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2})ds\}\mu(da).$$

On décompose l'intégrale par rapport à a en deux parties, $[0,\gamma.t]$ et $[\gamma t, \infty[$. Soit $\epsilon > 0$. On a :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\gamma t} e^a\{\int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}}\exp[-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2}]ds\}\mu(da) \\ &= \int_0^{\gamma t} e^a\{\int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}}\exp[-\frac{\epsilon}{2}s - \frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2}(1-\epsilon)]ds\}\mu(da). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Le maximum de la fonction : $s \to -\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2}(1-\epsilon)$ est atteint pour : $s_0 = \frac{a}{\sqrt{1-\epsilon}}$. En choisissant γ tel que $0 < \gamma < \sqrt{1-\epsilon}$, on a :

$$s_0 \le \frac{\gamma t}{\sqrt{1-\epsilon}} < t$$

Donc :

$$\exp[-\frac{a^2}{2s}-\frac{s}{2}(1-\epsilon)] \leq \exp[-\frac{a^2}{2t}-\frac{t}{2}(1-\epsilon)], \qquad \forall s \geq t$$

et par suite :

$$I_1 \leq (\int_t^\infty \frac{e^{-\epsilon s/2}}{\sqrt{s}} ds) e^{-\frac{t}{2}(1-\epsilon)} \int_0^{\gamma t} \exp[a-\frac{a^2}{2t}]\mu(da).$$

Puisque le maximum de la fonction $a \to a - \dfrac{a^2}{2t}$ est atteint pour : $a = t$ et compte tenu que : $\gamma t < t\sqrt{1-\epsilon} < t$, on a :

$$\exp(a-\frac{a^2}{2t}) \leq \exp(\gamma t - \frac{\gamma^2 t}{2}), \quad 0 \leq a \leq \gamma t$$

D'où :

$$I_1 \leq (\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\epsilon s/2}}{\sqrt{s}} ds)(\int_0^{\gamma t} \mu(da) \exp[-\frac{t}{2}(\gamma^2 - 2\gamma + 1 - \epsilon)] \tag{4.5}$$

D'autre part, d'après la formule classique :

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{\gamma s}{2}-\frac{a^2}{2s}} ds = \frac{C_0}{\sqrt{\gamma}} e^{-a\sqrt{\gamma}} \qquad \text{pour tout } \gamma > 0,$$

on a :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\gamma t}^{+\infty} e^a \{\int_t^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \exp(-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2}) ds\} \mu(da) \\ &\leq C_0 \int_{\gamma t}^{+\infty} e^a (e^{-a}) \mu(da). \end{aligned} \tag{4.6}$$

D'où :

$$I_2 \leq \int_{\gamma t}^{+\infty} \mu(da) \tag{4.7}$$

En regroupant (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) et (4.7), on obtient :

$$||u(t,.)||_1 \leq C_2(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\epsilon s/2}}{\sqrt{s}} ds)||\mu||_1[\exp - \frac{t}{2}(\gamma^2 - 2\gamma + 1 - \epsilon)] + \int_{\gamma t}^{+\infty} \mu(da))$$

La démonstration du théorème (4.1) est achevée.

Corollaire 4.2

Soit μ une mesure positive et de masse totale finie. Alors la solution u du problème (3.1), (3.2) vérifie :

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} u(t,x) dx = 0. \tag{4.8}$$

Remarquons que ce résultat a déjà été obtenu précédemment (cf. Théorème 3.3.).

Corollaire 4.3

Soit μ une mesure positive, de masse totale finie et vérifiant :

$$\exists\beta > 0\,; \quad \int (1+|a|)^\beta \mu(da) \leq C_\beta < \infty$$

Alors la solution u du problème (3.1), (3.2) vérifie

$$\exists C > 0\,; \quad ||u(t,.)||_1 \leq C_\beta \frac{C}{(1+t)^m}, \quad \forall t > 0. \tag{4.9}$$

Nous étudions maintenant la minoration de $||u(t,.)||_1$.

Théorème 4.4

Soit μ une mesure positive profilée, de masse totale finie et u la solution du problème (3.1), (3.2). Alors :

$$\exists t_0 > 0\,; ||u(t,.)||_1 \geq C \int_{|a|>t} \mu(da), \quad \forall t \geq t_0. \tag{4.10}$$

où C et t_0 sont deux constantes indépendantes de μ et u.

Démonstration du théorème 4.4.

Pour simplifier, supposons μ symétrique. D'après (4.3), on a :

$$||u(t,.)||_1 = 2C \int_0^{+\infty} e^{2a} \Big(\int_t^{+\infty} u^0(s,a)ds \Big) \mu(da).$$

D'autre part, en vertu de l'expression (2.3) de u^0 et du développement asymptotique (2.12) de la fonction ψ, on a :

$$u^0(s,a) \geq \Big(\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{\sqrt{s}}{s+|a|}\Big) \exp\Big(-\frac{a^2}{2s} - |a| - \frac{s}{2}\Big)$$

pour tout (s,a) dans $[t_0, +\infty[\times \mathbb{R}$, où $t_0 > 0$ est assez grand.

Par conséquent, pour $t \geq t_0$, on a :

$$||u(t,.)||_1 \geq 2C \int_t^{+\infty} e^a \Big\{ \int_t^{+\infty} \frac{a}{\sqrt{s}(a+s)} \exp\Big(-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2}\Big) ds \Big\} \mu(da)$$

Sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ la fonction : $s \to -\frac{s}{2} - \frac{a^2}{2s}$, atteint son maximum au point $s = a$ et est décroissante sur $[a, +\infty[$. Donc, pour $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned}
||u(t,.)||_1 &\geq 2C \int_t^{+\infty} e^a \Big(\int_a^{a+\sqrt{a}} \frac{a}{\sqrt{s}(a+s)} \exp\Big(-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2}\Big) ds\Big) \mu(da) \\
&\geq 2C \int_t^{+\infty} e^a \frac{a\sqrt{a}}{(2a+\sqrt{a})\sqrt{a+\sqrt{a}}} \exp\Big(-\frac{a^2}{2(a+\sqrt{a})} - \frac{a+\sqrt{a}}{2}\Big) \mu(da) \\
&\geq C_1 \int_t^{+\infty} \exp\Big(a - \frac{a^2}{2(a+\sqrt{a})} - \frac{a+\sqrt{a}}{2}\Big) \mu(da).
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que :

$$a - \frac{a^2}{2(a+\sqrt{a})} - \frac{a+\sqrt{a}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+\sqrt{a})} \geq -\frac{1}{2}, \quad \forall a > 0$$

et par conséquent, on a :

$$||u(t,.)||_1 \geq C_2 \int_t^{+\infty} \mu(da), \quad \forall t \geq t_0.$$

ce qui achève la preuve du théorème 4.4.

Corollaire 4.5.
Il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifiant : $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$, telle que pour toute solution u positive de (3.1), (3.2), on ait :

$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x)dx \leq f(t) \int_{\mathbb{R}} u(0,x)dx, \quad \forall t > 0. \tag{4.11}$$

Ce résultat a déjà été obtenu de manière probabiliste ci-dessus (cf. théorème 3.3).

Démonstration du corollaire 4.5
Soit μ une fonction positive, symétrique, profilée et intégrable et considérons la solution u du problème (3.1), (3.2) avec pour donnée initiale μ.
Pour tout $\lambda > 0$, posons :

$$\mu_\lambda(a) = \frac{1}{\lambda}\mu\Big(\frac{a}{\lambda}\Big)$$

et considérons la solution u_λ du problème (3.1), (3.2) avec pour donnée initiale μ_λ.
Compte tenu de (4.10), pour $t \geq t_0$, on a :

$$||u_\lambda(t,.)||_1 \geq C \int_t^{+\infty} \mu_\lambda(a)da = C \int_{\frac{t}{\lambda}}^{+\infty} \mu(a)da, \quad \forall \lambda > 0$$

Il suffit de faire tendre λ vers $+\infty$ pour voir que (4.11) ne peut être réalisée.

Remarque

Ce corollaire prouve que, lorsque t tend vers $+\infty$, $||u(t,.)||_1$ tend vers zéro sans "taux de décroissance". Mais le théorème 4.1 précise comment $||u(t,.)||_1$ tend vers 0, lorsque t tend vers $+\infty$, en fonction de la queue de μ.

Théorème 4.6

Soient μ une fonction positive profilée et intégrable et u la solution correspondante du problème de Cauchy (3.1), (3.2) alors :

$$\exists C > 0\,;\ ||u_x(t,.)||_1 \leq \frac{C}{t}||\mu||_1,\ \forall t \geq 1. \tag{4.12}$$

Notons qu'il y a ici un taux de décroissance en $1/t$, de $||u_x(t,.)||_1$.

Démonstration du théorème 4.6

Pour simplifier, on suppose μ symétrique. Compte tenu de (3.13) et (3.14) on a :

$$||u_x(t,.)||_1 = C\int_0^{+\infty} \mu(a)e^{2a}[\frac{1}{\sqrt{t}}(\exp -\frac{1}{2t}(t+a)^2) - \psi(\frac{t+a}{\sqrt{t}})]da$$

Comme ψ vérifie :

$$\psi(x) \geq (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3})e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \forall x \geq 1$$

alors, on a :

$$\begin{aligned}
||u_x(t,.)||_1 &\leq C\int_0^{+\infty} \mu(a)e^{2a}(\exp -\frac{1}{2t}(t+a)^2)[\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{\sqrt{t}}{t+a} + \frac{(\sqrt{t})^3}{(t+a)^3}]da \\
&\leq \frac{Ce^{-t/2}}{t^{3/2}}\{\int_0^{+\infty} \mu(a)\exp(a - \frac{a^2}{2t})da + \int_0^{+\infty} a\mu(a)\exp(a-\frac{a^2}{2t})da\}
\end{aligned}$$

Puisque :

$$\max_{a>0}\{\exp(a - \frac{a^2}{2t})\} = e^{t/2}$$

et en vertu du profil de μ, on a :

$$||\mu||_1 \geq \int_0^a \mu(x)dx \geq a\mu(a)$$

on en déduit :

$$\begin{aligned}
||u_x(t,.)||_1 &\leq \frac{C}{t^{3/2}}||\mu||_1(1 + \int_0^{+\infty} \exp(a - \frac{t}{2} - \frac{a^2}{2t})da) \\
&\leq \frac{C}{t^{3/2}}||\mu||_1(1 + \sqrt{t}\psi(-\sqrt{t})).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$||u_x(t,.)||_1 \leq \frac{C}{t}||\mu||_1, \qquad \forall t \geq 1.$$

ce qui achève la preuve de ce théorème.

Théorème 4.7

Soit μ une mesure positive vérifiant :

$$\int_0^{+\infty} e^a(1+a)\mu(da) < +\infty$$

alors, la solution u du problème de Cauchy (3.1), (3.2) vérifie :

$$\exists C > 0\,; \varlimsup_{t\to+\infty} t^{3/2}e^{t/2}||u(t,.)||_1 \leq C\int_0^{+\infty} e^a(1+a)\mu(da). \tag{4.13}$$

Si de plus μ est profilée alors :

$$\exists C' > 0\,; \varliminf_{t\to+\infty} t^{3/2}e^{t/2}||u(t,.)||_1 \geq C'\int_0^{\infty} e^a\mu(da). \tag{4.14}$$

Démonstration du théorème 4.7

Pour simplifier l'écriture, on suppose μ symétrique. Montrons d'abord (4.14). Compte tenu de l'expression de u qui est donnée par (3.3) et de l'estimation (2.10), on a :

$$\begin{aligned}
||u(t,.)||_1 &\geq C\int_0^t \Big(\int_0^{+\infty} e^a\frac{a}{s^{3/2}}[\exp(-\frac{s}{2}-\frac{a^2}{2s})]||u^0(t-s,.)||_1\mu(da)\Big)ds \\
&\geq C\int_0^{+\infty} e^a\Big(\int_0^t \frac{a}{s^{3/2}}[\exp(-\frac{s}{2}-\frac{a^2}{2s})]\frac{e^{-\frac{t-s}{2}}}{(1+t-s)^{3/2}}ds\Big)\mu(da) \\
&\geq \frac{Ce^{-t/2}}{(1+t)^{3/2}}\int_0^{+\infty} e^a\Big(\int_0^t \frac{a}{s^{3/2}}e^{-\frac{a^2}{2s}}ds\Big)\mu(da)
\end{aligned}$$

Puisque la fonction g_a définie par (3.7) est une densité de probabilité, il est clair que (4.14) est réalisée. Il reste à montrer (4.13).

Pour ce faire, on utilise de nouveau l'expression (3.3) de u ainsi que l'estimation (2.10) de u^0 et on a :

$$||u(t,.)||_1 \leq C(I_1(t)+I_2(t)) \tag{4.15}$$

où :

$$I_1(t) = \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty} e^a\Big(\int_0^{+\infty} e^{-x}[\exp-\frac{1}{2t}(x-a)^2 - \exp-\frac{1}{2t}(x+a)^2]dx\Big)\mu(da)$$

$$I_2(t) = \int_0^{+\infty} e^a\Big(\int_0^t \frac{a}{s^{3/2}}\frac{1}{(1+t-s)^{3/2}}[\exp(-\frac{a^2}{2s}-\frac{s}{2}\frac{t-s}{2})]ds\Big)\mu(da)$$

A l'aide du théorème des accroissements finis on a :

$$I_1(t) \leq \frac{2e^{-t/2}}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^a (\int_0^{+\infty} (\frac{ax}{t}) e^{-x} dx) \mu(da)$$

Donc :

$$I_1(t) \leq \frac{2e^{-t/2}}{(\sqrt{t})^3} \int_0^{+\infty} a e^a \mu(da). \tag{4.16}$$

Pour majorer $I_2(t)$, on décompose l'intégrale sur $[0, t]$ en deux intégrales: l'une sur $[0, \frac{t}{2}]$ et l'autre sur $[\frac{t}{2}, t]$. On a :

$$\begin{aligned} I_2^1(t) &= e^{-t/2} \int_0^{+\infty} e^a (\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{a}{s^{3/2}} \frac{1}{(1+t-s)^{3/2}} \exp(-\frac{a^2}{2s}) ds) \mu(da) \\ &\leq \frac{e^{-t/2}}{(1+\frac{t}{2})^{3/2}} \int_0^{+\infty} e^a (\int_0^{t/2} \frac{a}{s^{3/2}} \exp(-\frac{a^2}{2s}) ds) \mu(da). \end{aligned}$$

Puisque g_a définie par (3.7) est une densité de probabilité alors on a :

$$I_2^1(t) \leq C \frac{e^{-t/2}}{t^{3/2}} \int_0^{+\infty} e^a \mu(da). \tag{4.17}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} I_2^2(t) &= e^{-t/2} \int_0^{+\infty} e^a (\int_{\frac{t}{2}}^{t} \frac{a}{s^{3/2}} \frac{1}{(1+t-s)^{3/2}} \exp(-\frac{a^2}{2s}) ds) \mu(da) \\ &\leq C \frac{e^{-t/2}}{t^{3/2}} \int_0^{+\infty} a e^a (\int_{t/2}^{t} \frac{1}{(1+t-s)^{3/2}} ds) \mu(da). \end{aligned}$$

Donc :

$$I_2^2 \leq C \frac{e^{-t/2}}{t^{3/2}} \int_0^{+\infty} a e^a \mu(da) \tag{4.18}$$

Par suite, on a :

$$I_2(t) = I_1^1(t) + I_2^2(t) \leq C \frac{e^{-t/2}}{t^{3/2}} \int_0^{+\infty} a e^a \mu(da). \tag{4.19}$$

On achève la preuve du théorème en regroupant les relations (4.15), (4.16) et (4.19).

Théorème 4.8
Soit μ une mesure positive, profilée et vérifiant :

$$\int_0^{+\infty} e^a \mu(da) < \infty$$

alors, la solution u du problème de Cauchy (3.1), (3.2) vérifie :

$$\exists C > 0\,;\ \|u(t,.)\|_\infty \leq C\frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}}, \quad \forall t \geq 1. \tag{4.20}$$

Démonstration du théorème 4.8
A nouveau pour simplifier la preuve on suppose que μ est symétrique.
Compte tenu de l'expression de u qui est donnée par (3.3) et de l'estimation (2.9), on a :

$$\begin{aligned}&\|u(t,.)\|_\infty = \|u(t,0)\| \\ &\leq Ce^{-\frac{t}{2}} \int_0^\infty e^a \Big(\int_0^t \frac{a}{s^{3/2}} \frac{1}{(1+t-s)\sqrt{t-s}} \exp(-\frac{a^2}{2s}) ds\Big)\mu(da).\end{aligned} \tag{4.21}$$

De même que précédemment, on décompose l'intégrale sur $[0,t]$ en deux intégrales : l'une sur $[0,\frac{t}{2}]$ et l'autre sur $[\frac{t}{2},t]$. Pour $t \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}J_1(t) &= e^{-t/2} \int_0^{+\infty} e^a \Big(\int_0^{t/2} \frac{a}{s^{3/2}} \frac{1}{(1+t-s)\sqrt{t-s}} \exp(-\frac{a^2}{2s}) ds\Big)\mu(da) \\ &\leq C\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t^{3/2}} \int_0^\infty e^a \Big(\int_0^{t/2} \frac{a}{s^{3/2}} \exp(-\frac{a^2}{2s}) ds\Big)\mu(da).\end{aligned}$$

Donc :

$$J_1(t) \leq C\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t^{3/2}} \int_0^\infty e^a \mu(da) \tag{4.22}$$

D'autre part :

$$J_2(t) = e^{-t/2} \int_0^{+\infty} e^a \Big(\int_{t/2}^t \frac{a}{s^{3/2}} \frac{1}{(1+t-s)\sqrt{t-s}} \exp(-\frac{a^2}{2s}) ds\Big)\mu(da)$$

Donc :

$$J_2(t) \leq C\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t^{3/2}} \int_0^\infty e^a \Big(\int_{t/2}^t \frac{a}{\sqrt{t-s}} \exp(-\frac{a^2}{2s}) ds\Big)\mu(da).$$

Compte tenu de :

$$\max_{a>0}\{a \exp(-\frac{a^2}{2s})\} = \frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{s}$$

On a :

$$J_2(t) \leq C\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t^{3/2}}\int_0^\infty e^a(\int_{t/2}^t \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t-s}}ds)\mu(da).$$

Donc :

$$J_2(t) \leq C\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}\int_0^\infty e^a\mu(da). \tag{4.23}$$

Finalement, en regroupant (4.21), (4.22) et (4.23), on achève la démonstration du théorème.

V Etude de l'équation $v_t - \frac{1}{2}v_{xx} = |v_x|$

Dans cette section nous faisons la même étude de cette équation que pour l'équation (3.1). Tout d'abord, signalons que pour toute mesure μ de masse totale finie le problème de Cauchy :

$$v_t - \frac{1}{2}v_{xx} = |v_x| \quad \text{sur } (0,+\infty)\times I\!R \tag{5.1}$$

$$v(0,.) = \mu \qquad \text{sur } I\!R \tag{5.2}$$

admet une unique solution dans $L^1((0,T), W^{1,1}(I\!R)) \cap C^0([0,T], \mathcal{M}_b(I\!R))$, pour tout $T > 0$ (cf. [BBP]).

Il convient de remarquer que dans ce cas, les solutions positives de (5.1) vérifient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{I\!R} v(t,x)dx \geq 0$$

et par suite : $t \to \int_{I\!R} v(t,x)dx$ est croissante sur $I\!R_+$.

Théorème 5.1

La solution du problème de Cauchy :

$$v_t - \frac{1}{2}v_{xx} = |v_x| \qquad \text{sur } (0,+\infty)\times I\!R \tag{5.3}$$

$$v(0,.) = \delta_0 \qquad \text{sur } I\!R \tag{5.4}$$

est donnée par :

$$v^0(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{\frac{1}{\sqrt{t}}[\exp -\frac{1}{2t}(|x|-t)^2] + \psi(\frac{|x|-t}{\sqrt{t}})\}. \tag{5.5}$$

La preuve est identique à celle du théorème 2.1, on en trace les grandes lignes seulement. On résout d'abord le problème de Cauchy linéaire :

$$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = -\mathrm{sgn}(x).u_x \qquad \text{sur } (0,+\infty)\times \mathbb{R} \tag{5.6}$$

$$u(0,.) = \delta_0 \qquad \text{sur } \mathbb{R} \tag{5.7}$$

Avec les mêmes notations que dans le paragraphe II, pour toute fonction f régulière, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} v^0(t,x)f(x)dx = P_t f(0) = E\{f(X_t)\exp 2L_t^0(X)\}$$

où :

$$X_t = B_t + \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)ds.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} v^0(t,x)f(x)dx &= E\{f(B_t)\exp[\int_0^t \mathrm{sgn}(B_s)dB_s - \frac{t}{2} + 2\ell_t^0]\}\\ &= E\{f(B_t)\exp[|B_t| - \frac{t}{2} + \ell_t^0]\}.\end{aligned}$$

D'où on tire (5.5).

Puis on observe que pour tout $x \neq 0$, on a :

$$v_x^0(t,x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{x}{t^{3/2}}\exp[-\frac{1}{2t}(|x|-t)^2]$$

donc, v^0 est une solution de l'équation (5.3).

L'analogue du théorème 2.2 est :

Théorème 5.2

La solution v^0 du problème de Cauchy (5.3), (5.4) vérifie :

$$||v^0(t,.)||_\infty \asymp \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{t}}$$

$$||v^0(t,.)||_1 \asymp (1+t)$$

On notera que le comportement de $||v^0(t,.)||$ est radicalement différent de celui de $||u^0(t,.)||$.

Théorème 5.3

Soit μ une mesure positive, profilée et de masse totale finie et soit v la solution du problème (5.1), (5.2). Alors :

$$v(t,x) = \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \mu(a) e^{|x|-|a|} \{\exp - \frac{1}{2t}(|x|-|a|)^2 - \exp - \frac{1}{2t}(|x|+|a|)^2\} da \tag{5.8}$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mu(a) e^{|a|} \left(\int_0^t \frac{|a|}{s^{3/2}} [\exp(-\frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2})] v^0(t-s,x) ds \right) da$$

Démonstration abrégée

On obtient cette fonction v en résolvant le problème de Cauchy linéaire :

$$v_t - \frac{1}{2} v_{xx} = -\mathrm{sgn}(x).v_x \tag{5.9}$$

$$v(0,.) = \mu \tag{5.10}$$

puis on vérifie que l'on a, (au moins formellement) :

$$v_x(t,x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{|x| - \frac{t}{2}} \int_{\mathbb{R}} [\exp(-|a| - \frac{a^2+x^2}{2t})] \mathrm{sh}(\frac{|a|x}{t}) \mu'(a) da.$$

En particulier, lorsque μ est profilée, v est alors une solution de l'équation (5.1).

Remarque (a)

Soient μ une mesure positive, de masse totale finie mais "non profilée" et v la solution correspondante, donnée par (5.8), du problème de Cauchy <u>linéaire</u> (5.9), (5.10). Alors, v est une sous-solution de l'équation non linéaire (5.1).

En effet, on a :

$$v_t - \frac{1}{2} v_{xx} - |v_x| \leq v_t - \frac{1}{2} v_{xx} + \mathrm{sgn}(x).v_x = 0. \tag{5.11}$$

Remarque (b)

Soit μ une fonction positive, de masse totale finie et anti-profilée (i.e. vérifiant : $\mathrm{sgn}(\mu'(a)) = \mathrm{sgn}(a)$ et soit v la fonction correspondante donnée par (5.8). Alors v est une solution de l'équation :

$$u_t - \frac{1}{2} u_{xx} = -|u_x|.$$

Par des méthodes analogues à celles du paragraphe IV, on a :

Théorème 5.4

Soient μ une mesure positive profilée et de masse totale finie et v donnée par (5.8), la solution correspondante du problème de Cauchy (5.1), (5.2). Alors il existe une constante $C > 0$, telle que :

$$\frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}}\mu(a)e^{-2|a|}da \leq \underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{1}{1+t}||v(t,.)||_p$$
$$\leq \overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{1}{1+t}||v(t,.)||_p \leq C\int_{\mathbb{R}}\mu(a)e^{-2|a|}da$$

pour tout p dans $[1,+\infty]$.

Remarquons en particulier, d'après la remarque (a) et le théorème 5.4, pour toute mesure positive, $||v(t,.)||_1 \to \infty$ lorsque $t \to \infty$. Il se pose alors, de manière naturelle, la question de l'existence d'un taux de croissance. La réponse est négative, comme le montre le théorème suivant :

Théorème 5.5
Il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifiant : $f(t) > 1$, telle que pour toute solution u positive et profilée de (5.1), on ait :

$$\int_{\mathbb{R}} v(t,x)dx \geq f(t)\int_{\mathbb{R}} v(0,x)dx\ .$$

En particulier, il n'existe pas de taux de croissance.

Démonstration abrégée
Soit μ une fonction profilée positive, pour tout $\lambda > 0$ définissons :

$$\mu_\lambda(a) = \frac{1}{\lambda}\mu\left(\frac{a}{\lambda}\right).$$

Soit v_λ la solution de (5.1) avec donnée initiale égale à μ_λ.

Alors :

$$||v_\lambda(t,.)||_1 \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} ||\mu_\lambda||_1 = ||\mu||_1.$$

Références

[B] **M. BenArtzi** : *Global existence and decay for a nonlinear parabolic equation.* Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, vol. 19, n°8, 763-768, (1992).

[BBP] **S. Benachour, H. Brezis, M. Pierre** : Communication privée.

[BRV] **S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois** : *Asymptotic estimates of $u_t - \frac{1}{2}\Delta u = -|\nabla u|$ in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.* J. Funct. Anal., à paraître.

[CW] **M. Chipot, F. B. Weissler** : *Some blow-up results for a nonlinear parabolic equation with a gradient term.* Siam J. Math. Anal. vol 20, n°4, 886-907, (1989).

[EZ] **M. Escobedo, E. Zuazua** : *Large time behaviour for a convection-diffusion equation in* $\mathbb{R}^N$. J. Funct. Analysis 100, 119-161, (1991).

[KS] **I. Karatzas, S. E. Shreve** : *Brownian motion and stochastic calculus.* Graduate Texts in Math. Second Edition. Springer Verlag New-York, (1991).

[L] **P. L. Lions** : *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equation.* Pitman Research notes in Math. 69, (1982).

[PL] **M. Pierre, T. P. Liu** : *Source solutions and asymptotic behavior in conservation laws.* J.Diff. Equations, 51,419-441, (1984).

[K] **O. Kavian** : *Remarks on the large time behavior of a non linear diffusion equation.* Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non linéaire 4, n°5, 423-452, (1987).

[GK] **Y. Giga, T. Kambé** : *Large time behavior of the vorticity of two-dimensional viscous flows and its applications to vortex formation.* Comm. Math. Phys. 117, 549-568, (1988).

[L] **O. A. Ladyzenskaya** : *The mathematical theory of viscous incompressible flows.* Gordon and Breach, (1969).

[RY] **D. Revuz, M. Yor** : *Continuous martingales and Brownian motion.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften n°293. Springer Verlag. Berlin, (1991).

Université de Nancy I
Institue Elie Cartan, UMR 9973
Département de Mathématiques
BP 239
54 506 Vandœuvre-Lès-Nancy

Astérisque

P. BIANE

Quelques propriétés du mouvement brownien non-commutatif

Astérisque, tome 236 (1996), p. 73-101
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__73_0>

Quelques propriétés du mouvement brownien non-commutatif

P. Biane

Résumé. — Le mouvement brownien non-commutatif est la dilatation naturelle d'un semi-groupe d'applications complètement positives sur la C^*-algèbre du groupe d'Heisenberg. On étudie tout particulièrement les propriétés d'invariance par le groupe unitaire de ce processus, ce qui amène à considérer un processus de Bessel non-commutatif, dont le semi-groupe est relié à la compactification de Martin en espace-temps d'un processus de branchement.

0. Introduction.

Le mouvement brownien est l'une des pierres angulaires des probabilités modernes. Il y a peu de domaines de la théorie des processus stochastiques où l'on ne le rencontre pas, et ses relations avec la théorie du potentiel et les processus de Markov, la théorie des martingales, le calcul stochastique, ou encore les processus gaussiens, pour ne citer que quelques exemples, font qu'il a été l'objet d'innombrables études et que la recherche à son sujet est encore très active.

Il y a quelques années, les travaux de Hudson et Parthasarathy ont ouvert la voie à l'étude de nouveaux types de processus stochastiques, étude désignée souvent par le vocable générique de "probabilités quantiques" (voir par exemple [H-P], [P1], [M1], [M2], [B1]). Parmi les objets introduits figurent en bonne place les processus de création, annihilation et nombre, qui permettent en quelques sorte d'unifier le mouvement brownien et le processus de Poisson. Ceci amène naturellement à introduire une notion de "mouvement brownien non-commutatif", comme dans [C-H]. Le but de cet article est de tenter d'aller un peu plus loin dans l'étude de cet objet mathématique qui me semble particulièrement intéressant. L'idée sous-jacente est que beaucoup de résultats classiques concernant le mouvement brownien possèdent des analogues pour cet objet, avec bien sûr des modifications dues à la non-commutativité, et qu'une étude systématique devrait éclairer. Les résultats présentés ici apparaîtront bien modestes en regard de l'ampleur de la tâche, mais j'espère que cet article pourra encourager des recherches plus approfondies dans cette direction.

Qu'est-ce que le mouvement brownien non-commutatif? Pour tenter de répondre à cette question, considérons un mouvement brownien $(B_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. D'après un résultat bien connu de N. Wiener, l'espace L^2 engendré par les variables aléatoires $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ se décompose en chaos, autrement dit il existe un isomorphisme naturel entre cet espace et l'espace de Fock construit sur $L^2(\mathbb{R}_+)$. La variable aléatoire B_t, considérée comme un opérateur de multiplication sur l'espace de Fock, est la somme de deux opérateurs adjoints l'un de l'autre, A_t et A_t^*, les opérateurs d'annihilation et de création associés au vecteur $1_{[0,t]}$ de $L^2(\mathbb{R}_+)$. Il existe alors un mouvement brownien $\tilde{B}_t$ sur un espace $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ et une isométrie de l'espace L^2 engendré par ce mouvement brownien dans $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$ tels que les opérateurs de multiplication par les variables $\tilde{B}_t$ soient représentés dans l'espace de Fock par les opérateurs $\frac{1}{i}(A_t - A_t^*)$ (pour tout ceci on pourra consulter [M1]). Il y a donc deux mouvements browniens sur l'espace de Fock $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$, qui sont la partie réelle et la partie imaginaire du processus d'annihilation A_t. Les opérateurs A_t et A_t^* ne commutent pas, on a en fait la relation $[A_t, A_t^*] = tId$, ou de façon équivalente $[B_t, \tilde{B}_t] = 2itId$ ce qui fait qu'il n'existe pas d'isométrie entre $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$ et l'espace L^2 d'un espace de probabilité où seraient définis simultanément deux mouvements browniens, B_t et $\tilde{B}_t$ tels que $A_t + A_t^*$ et $\frac{1}{i}(A_t - A_t^*)$ soient les opérateurs de multiplication par B_t et $\tilde{B}_t$. On dispose ainsi d'un "mouvement brownien non-commutatif" qui est la donnée des deux mouvements browniens $B_t = A_t + A_t^*$ et $\tilde{B}_t = \frac{1}{i}(A_t - A_t^*)$, ou, de façon équivalente, la donnée des processus A_t et A_t^*. On peut imaginer que, physiquement, les processus B et $\tilde{B}$ représentent l'évolution de la "position" et de la "vitesse" d'une particule brownienne quantique.

Le point de vue adopté dans cet article est que le processus non-commutatif $(A_t, A_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est en fait une réalisation particulière d'un processus de Markov non-commutatif associé à un semi-groupe d'applications complètement positives sur une certaine C^*-algèbre, et nous allons concentrer notre attention sur ce semi-groupe plutôt que sur sa réalisation particulière à travers les opérateurs de création et d'annihilation. Pour comprendre dans quel espace ce processus prend ses valeurs, remarquons que la relation de commutation $[B_t, \tilde{B}_t] = 2it$ est vérifiée pour tout temps t. On voit donc qu'au moins heuristiquement, le mouvement brownien non-commutatif prend ses valeurs, à l'instant t, dans un "espace non-commutatif" dans lequel la position d'un point est mesurée (au sens de la mécanique quantique) par deux coordonnées p et q qui vérifient la relation de commutation d'Heisenberg $[p, q] = 2it$. Le temps joue le rôle de la constante de Planck, et cet espace se déforme continûment avec le temps, ce qui entraîne, comme nous le verrons, que le mouvement brownien non-commutatif ne pourra être considéré comme un processus de Markov homogène, qu'à la condition de lui rajouter une composante temporelle. Une façon élégante de faire cette construction est de définir le semi-groupe du mouvement brownien non-commutatif comme un semi-groupe de convolution sur la C^*-algèbre du groupe d'Heisenberg. Le semi-groupe obtenu est un analogue non-commutatif du semi-groupe de la chaleur (c'est-à-dire du semi-groupe du mouvement brownien en espace-temps) plutôt que du mouvement brownien lui-même. La C^*-algèbre du groupe d'Heisenberg possède une structure très intéressante, avec une singularité à l'origine (voir [V], [L]) sur laquelle le comportement du mouvement brownien non-commutatif jette un peu de lumière.

Dans la suite on utilise le langage des C^*-algèbres car c'est le mieux adapté aux généralisations non-commutatives des concepts classiques, mais on n'utilisera pas de résultat sophistiqué de la théorie des algèbres d'opérateurs.

Comme le rappelle K.R. Parthasarathy dans l'introduction de son livre [P1], l'analogie entre le théorème de Lévy-Khinchine et les résultats sur les représentations factorisables de H. Araki [A], développés dans [P-S], a été à l'origine du calcul stochastique non-commutatif. Plus récemment, M. Schürmann [S] a montré qu'on pouvait généraliser cette approche pour construire des bruits blancs sur des bigèbres. Les idées présentées dans cet article sont donc familières aux spécialistes des probabilités quantiques, néanmoins je n'ai pas trouvé dans la littérature d'exposé qui s'attache à décrire de manière purement probabiliste ces objets, en particulier, il me semble que le "processus de Bessel quantique" décrit en 3.3 est passé inaperçu. Il m'a donc semblé intéressant de mettre au propre ces quelques réflexions. La seule originalité de l'article qui suit consiste à adopter un point de vue nettement probabiliste et à essayer d'appliquer des méthodes markoviennes ou potentialistes dans cette situation.

Voici comment est organisé cet article.

La première partie consiste en quelques préliminaires sur les C^*-algèbres, plus particulièrement les C^*-algèbres de groupes, et certains semi-groupes d'applications complètement positives, obtenus en considérant une fonction ψ continue, conditionnellement de type positif sur un groupe G localement compact, qui engendre un semi-groupe multiplicatif de fonctions de type positif $(e^{t\psi})_{t\in\mathbb{R}_+}$. Ce semi-groupe, agissant par multiplication sur l'algèbre $L^1(G)$ définit un semi-groupe de contractions complètement positives sur cette algèbre qui se prolonge à diverses autres algèbres engendrées par G. En restreignant ce semi-groupe à des sous-algèbres commutatives convenables, on peut obtenir des semi-groupes markoviens intéressants, dont on donne quelques exemples. On décrit ensuite une dilatation de ce semi-groupe au moyen de la théorie des représentations de groupes de courants, décrite par exemple dans [P-S].

Dans la seconde partie, on se concentre sur le groupe d'Heisenberg $H_d = \mathbb{C}^d \times \mathbb{R}$. On y décrit la structure de la C^*-algèbre de H_d, avec en particulier l'existence d'un couple de Gelfand construit grâce à l'action du groupe unitaire sur le groupe d'Heisenberg. La fonction conditionnellement de type positif $\psi(z,t) = it - \frac{1}{2}|z|^2$ sur H_d est associée à un semi-groupe de contractions complètement positives de $C^*(H_d)$, qui est un analogue non-commutatif du semi-groupe de la chaleur, et dont on commence l'étude.

Dans la troisième partie, on étudie de façon plus approfondie différentes propriétés d'invariance de ce semi-groupe qui sont des analogues de propriétés bien connues du mouvement brownien. En particulier, l'invariance du mouvement brownien usuel par changement d'échelle, qui permet de donner une construction simple du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, a un analogue non-commutatif que l'on utilise pour définir un "semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck" sur l'algèbre $\mathcal{B}(H)$ des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H. D'autre part, une propriété d'invariance par transformations unitaires nous permettra de définir un analogue non-commutatif du semi-groupe de Bessel, qui sera un semi-groupe de noyaux Markoviens sur une partie de $\mathbb{R}^2$. On verra que le processus correspondant peut se construire à l'aide d'un processus de branchement classique, le processus de Yule, et d'un processus de mort très simple.

Enfin, on terminera par l'étude des "fonctions paraboliques bornées" pour ce semi-groupe, en donnant un théorème de représentation intégrale, analogue de la formule de Poisson classique pour les fonctions harmoniques bornées dans le disque unité.

Je remercie P. Bougerol et J.L. Sauvageot pour d'utiles discussions sur des sujets abordés dans cet article, ainsi que R. Hudson qui m'a communiqué la référence [C-H], et W. von Waldenfels qui m'a procuré une copie de son article [vW2].

1. Préliminaires.

1.1 C^*-algèbres et applications complètement positives.

Cette section est consacrée à des généralités et des rappels sur les C^*-algèbres, applications complètement positives, et d'autres notions voisines, qui sont bien connus des spécialistes. Les quelques résultats qui sont démontrés le sont pour la commodité du lecteur, car il n'a pas toujours été facile de trouver une référence adéquate. Je renverrai au livre de Dixmier [Di] pour une bonne partie des résultats et définitions de base.

Dans la suite, les espaces de Hilbert considérés seront toujours complexes. Si H est un espace de Hilbert, on note $\mathcal{B}(H)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur H, et $\mathcal{K}(H)$ celle des opérateurs compacts.

Soient A, B deux C^*-algèbres, et A'', B'' leurs algèbres de von Neumann enveloppantes (qui sont leurs biduaux au sens de la théorie des espaces de Banach, voir [Di] 12.1.3). Soit $Q : A \to B$ une application linéaire continue, complètement positive. Lorsque A et B sont abéliennes, isomorphes, par le théorème de Gelfand, à $C_0(X)$ et $C_0(Y)$, où $X = spec\ (A)$ et $Y = spec\ (B)$, l'application Q est associée à un noyau fellérien $N(y, dx)$ sur $Y \times X$, c'est à dire que l'on a, pour toute $f \in C_0(X)$, $Qf(y) = \int_X f(x)N(y, dx)$. (cf [D-M] IX.1).

Soit Q'' l'application biduale de Q, qui est un prolongement faiblement continu de Q à A'', à valeurs dans B''; l'application Q'' est encore une application complètement positive de A'' dans B''.

1.2. Cas des C^*-algèbres de groupes.

Soit maintenant G un groupe localement compact. Toute représentation unitaire, faiblement continue, de G détermine de façon canonique une représentation de l'algèbre de Banach $L^1(G)$. La C^*-algèbre de G notée $C^*(G)$ est la complétée de $L^1(G)$ pour la norme $\|f\| = sup_\pi |\pi(f)|$, où π parcourt l'ensemble des représentations unitaires faiblement continues de G. Dans la suite nous ne considérerons que de telles représentations, sans le préciser.

Lorsque G est abélien, les représentations irréductibles de G sont de dimension 1 et forment le groupe $\hat{G}$ des caractères de G, l'algèbre $C^*(G)$ est alors isomorphe, par l'isomorphisme de Gelfand, à $C_0(\hat{G})$.

Soit φ une fonction continue de type positif sur G telle que $\varphi(e) \leq 1$, on a alors $|\varphi| \leq 1$ sur G et l'application $Q : L^1(G) \to L^1(G)$, $f \mapsto \varphi f$ est une contraction complètement positive de l'algèbre $L^1(G)$.

1.2.1. Proposition. *L'application Q se prolonge de manière unique en une contraction complètement positive de $C^*(G)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\|\varphi f\| \leq \|f\|$ pour tout $f \in L^1(G)$.

Soit ξ une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert H_ξ, et $\Omega \in H_\xi$ tels que, pour tout $g \in G$, $\varphi(g) =< \xi(g)\Omega, \Omega >$. Soit π une représentation unitaire de G dans un espace H_π, alors $\xi \otimes \pi$ est une représentation unitaire de G et on a $|\xi \otimes \pi(f)| \leq \|f\|$. Soit E le projecteur orthogonal dans $H_\xi \otimes H_\pi$ sur le sous-espace $\Omega \otimes H_\pi$, alors on a $E(\xi \otimes \pi(f))E = E(1 \otimes \pi(\varphi f))$, mais $|E(\xi \otimes \pi(f))E| \leq |\xi \otimes \pi(f)| \leq \|f\|$, par conséquent $|(1 \otimes \pi(\varphi f))| = |\pi(\varphi f)| \leq \|f\|$ pour toute représentation π, donc $\|\varphi f\| \leq \|f\|$ et la conclusion suit.

Dans le cas d'un groupe G abélien, le théorème de Bochner entraîne que φ est la transformée de Fourier d'une mesure de sous-probabilité sur $\hat{G}$, et l'application complètement positive de $C_0(\hat{G})$ dans lui-même est alors l'opérateur de convolution par cette mesure de sous-probabilité.

Le prolongement de l'application complètement positive Q à $U(G)$, l'algèbre de von Neumann enveloppante de $C^*(G)$, s'exprime de façon naturelle comme une convolution à l'aide du coproduit sur $U(G)$.

Pour $g \in G$ notons $u(g)$ l'image de g dans $U(G)$. Le coproduit Δ est le morphisme $\Delta : U(G) \to U(G) \otimes U(G)$, où le produit tensoriel est pris au sens des algèbres de von Neumann, qui prolonge la représentation de $G : g \mapsto u(g) \otimes u(g)$.

La fonction φ détermine une unique forme linéaire positive faiblement continue ν sur $U(G)$ telle que $\nu(u(g)) = \varphi(g)$ pour tout g dans G, et l'application Q n'est autre que la composée $(id \otimes \nu) \circ \Delta$, c'est à dire la convolution par ν dans la bigèbre de von Neumann $U(G)$. Rappelons qu'il est équivalent de se donner une forme linéaire continue sur $C^*(G)$ et une forme faiblement continue sur $U(G)$.

Si nous revenons au cas d'un groupe G abélien, le coproduit sur $U(G)$, l'algèbre des fonctions universellement mesurables sur $\hat{G}$, est l'application qui à une fonction h sur $\hat{G}$ associe la fonction $\Delta h(x,y) = h(xy)$ sur $\hat{G} \times \hat{G}$, si on identifie $U(G) \otimes U(G)$ avec l'algèbre des fonctions universellement mesurables sur $\hat{G} \times \hat{G}$. Remarquons que dans ce cas, si $\hat{G}$ n'est pas compact alors le coproduit n'envoie pas $C_0(\hat{G})$ dans $C_0(\hat{G} \times \hat{G})$.

1.3. Convolution et poids de Haar.

Si μ et ν sont deux formes linéaires faiblement continues sur $U(G)$, leur convolution est la forme linéaire faiblement continue définie par $\mu * \nu = (\mu \otimes \nu) \circ \Delta$.

Si μ est un poids normal semi-fini sur $U(G)$ (cf [S-Z] 10.14) et ν une forme linéaire positive sur $U(G)$, alors on peut définir un poids $\mu * \nu$ en posant $\mu * \nu(f) = \mu((id \otimes \nu) \circ \Delta f)$.

Supposons G unimodulaire et postliminaire. Soit ε_e la mesure de Dirac en l'élément neutre de G. Elle définit une trace χ sur $U(G)$. En fait d'après la formule de Plancherel ([Di] 18.8) on a, pour toute fonction f continue à support compact sur G,

$$f(e) = \int_{\hat{G}} tr(\pi_\zeta(f))dm(\zeta)$$

où $\hat{G}$ est le dual unitaire de G et m est la mesure de Plancherel sur $\hat{G}$.

1.3.1. Proposition. *Pour toute forme linéaire positive ν sur $C^*(G)$ (ou $U(G)$), on a $\chi * \nu = \nu(1)\chi$.*

Démonstration. Soit f une fonction continue à support compact sur G, on a $(id \otimes \nu) \circ \Delta f = f\varphi$ où φ est la fonction de type positif $\varphi(g) = \nu(u(g))$. On a donc $\chi(\varphi f) = f(e)\varphi(e) = \chi(f)\nu(1)$. On en déduit le résultat.

En particulier, si ν est un état, on a $\chi * \nu = \chi$, ce qui, dans le cas d'un groupe abélien G, caractérise la mesure de Haar sur $\hat{G}$. Dans le cas non-abélien, le poids χ joue le rôle de "mesure de Haar" sur $C^*(G)$, et on l'appellera par la suite le poids de Haar. Remarquons que c'est une trace.

Soit $\hat{Q}$ la contraction complètement positive associée à $\bar{\varphi}$, alors Q et $\hat{Q}$ sont en dualité par rapport au poids de Haar, c'est à dire que pour tous $a, b \in C^*_+(G)$ on a

$$\chi(aQ(b)) = \chi(\bar{Q}(a)b) ;$$

en effet, si f et k sont continues à support compact sur G, on a

$$\chi(fQ(k)) = \int_G f(g)\varphi(g^{-1})k(g^{-1})dg = \int_G \bar{\varphi}(g)f(g)k(g^{-1})dg = \chi(\hat{Q}(f)k)$$

et le cas général s'en déduit aisément.

1.4. Semi-groupes de convolution.

Soit ψ une fonction continue, conditionnellement de type positif sur G, avec $\psi(e) \geq 0$; alors $e^{t\psi}$ est un semi-groupe multiplicatif de fonctions continues de type positif.

1.4.1. Définition. *Le semi-groupe de convolution associé à ψ est l'unique semi-groupe de contractions complètement positives sur $C^*(G)$, noté $(Q_t^\psi)_{t \in \mathbf{R}_+}$ tel que $Q_t^\psi(f) = e^{t\psi} f$ pour $f \in L^1(G)$.*

Si A est une sous-C^*-algèbre abélienne de $C^*(G)$ ou de $U(G)$, invariante par ce semi-groupe, la restriction du semi-groupe à A est donnée par un semi-groupe de noyaux sous-markoviens sur le spectre de A. Voici quelques exemples de tels semi-groupes.

a) Tout d'abord, si $C \subset G$ est un sous groupe abélien fermé, la C^*-algèbre de C se plonge comme une sous-C^*-algèbre de $U(G)$ (pas de $C^*(G)$ en général), et elle est stable par le semi-groupe Q_t''. En fait le semi-groupe obtenu par restriction de Q_t'' à $C^*(C)$ est celui associé à la fonction conditionnellement de type positif sur C, qui est la restriction de ψ à C. En particulier, il s'identifie à un semi-groupe de convolution sur $\hat{C}$.

b) Supposons que la fonction ψ soit centrale, c'est à dire que $\psi(gh) = \psi(hg)$ pour tous h, g dans G, alors le centre de l'algèbre $U(G)$ est une algèbre abélienne stable par le semi-groupe Q_t^ψ. Cette algèbre est isomorphe à une algèbre de fonctions mesurables sur l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G. On obtient ainsi un semi-groupe markovien sur le dual unitaire de G. Certains de ces semi-groupes (ou plutôt une version en temps discret) ont été étudiés dans [P2], [Bi2]. L'existence d'une fonction ψ centrale non-constante entraîne des restrictions sur la nature du groupe. Par exemple, il n'en existe pas si G est semi-simple non-compact, avec un centre trivial.

c) Un autre exemple est fourni par les couples de Gelfand. Si K est un sous-groupe compact de G tel que (G, K) soit un couple de Gelfand, c'est à dire que l'algèbre de convolution $L^1(K\backslash G/K)$ des fonction bi-invariantes par K soit commutative, et si ψ est elle-même bi-invariante par K alors, la C^*-algèbre engendrée par $L^1(K\backslash G/K)$ est stable par le semi-groupe $(Q_t^\psi)_{t\in\mathbf{R}_+}$. En restreignant le semi-groupe à cette sous-algèbre commutative, on obtient un semi-groupe de noyaux markoviens sur son spectre.

Donnons un exemple concret lié au mouvement brownien. On prend $G = \mathbb{R}^d$ et $\psi(\xi) = -\frac{1}{2}|\xi|^2$. En identifiant $\hat{G}$ avec $\mathbb{R}^d$ par transformation de Fourier, on reconnaît immédiatement que le semi-groupe de convolution associé est le semi-groupe brownien donné par les noyaux de densité $p_t(x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Considérons maintenant le groupe $D(d)$ des déplacements de $\mathbb{R}^d$, produit semi-direct de $SO(d)$ par $\mathbb{R}^d$. La fonction ψ est invariante par l'action de $SO(d)$, on en déduit que la fonction $\tilde{\psi}(\theta, \xi) = \psi(\xi)$ est conditionnellement de type positif sur $D(d)$.

Considérons maintenant le couple de Gelfand $(D(d), SO(d))$. L'algèbre des fonctions bi-invariantes s'identifie avec l'algèbre de convolution des fonctions sur $\mathbb{R}^d$ invariantes par rotation, et donc le spectre de cette algèbre est l'ensemble $\mathbb{R}_+$. On vérifie facilement que le semi-groupe obtenu par restriction à cette sous-algèbre est celui du processus de Bessel de dimension d sur $\mathbb{R}_+$ (cf [I-M]).

1.5. Dilatation d'un semi-groupe.

La donnée d'un semi-groupe de contractions complètement positives, sur une C^*-algèbre est un analogue non-commutatif de la notion de semi-groupe de noyaux sur un espace localement compact. Il existe alors un analogue de la notion de processus de Markov associé à ce semi-groupe, que l'on va décrire ci-dessous.

1.5.1. Définition *Soient A une C^*-algèbre, ν un état sur A, et $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ un semi-groupe de contractions complètement positives de A. Une dilatation de $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ de loi initiale ν est la donnée de $(W, W_t, \omega_\nu, E_t, j_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ où W est une algèbre de von Neumann munie d'un état ω_ν, $(W_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ est une filtration de W, c'est à dire une famille croissante de sous-algèbres, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, E_t est une espérance conditionnelle de W sur W_t par rapport à ν, et j_t est une famille de morphismes de A dans W telle que $\omega_\nu \circ j_0 = \nu$, j_t envoie A dans W_t et (propriété de Markov) on ait pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ et tout $a \in A$,*

$$E_t[j_{t+s}(a)] = j_t(Q_s(a))$$

(Pour la notion d'espérance conditionnelle dans une algèbre de von Neumann, voir par exemple [Tak].)

Indiquons tout de suite comment les processus de Markov usuels rentrent dans ce cadre. Soient A une C^*-algèbre commutative, et $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ un semi-groupe de Feller sur le spectre E de A. Une dilatation de $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ s'obtient ainsi. On considère un processus de Markov $(X_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$, à valeurs dans E, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P_\nu)$, où, comme d'habitude, $(\Omega, \mathcal{F}, P_\nu)$ est un espace de probabilité, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ est une filtration de $\mathcal{F}$, à laquelle X est adapté, et est markovien de semi-groupe $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$, de loi initiale ν sous la loi P_ν. On pose alors $W = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P_\nu)$, $W_t = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, P_\nu)$ et j_t est le morphisme de A dans W_t déterminé par la variable aléatoire X_t c'est à dire que $j_t(f)$, pour $f \in C_0(E)$, est la variable $f(X_t)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P_\nu)$. La propriété de Markov simple s'écrit alors $E[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t] = Q_s f(X_t)$, soit $E_t \circ j_{t+s} = j_t \circ Q_s$, et on a bien une dilatation du semi-groupe $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$.

Réciproquement, soit A une C^*-algèbre commutative, $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ un semi-groupe de contractions complètement positives, dont $(W, W_t, \omega_\nu, E_t, j_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ est une dilatation, telle que W soit une algèbre de von Neumann commutative, alors il existe un processus de Markov $(X_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ à valeurs dans *spec* (A), défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P_\nu)$ et un isomorphisme d'algèbres de von Neumann $\gamma : L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P_\nu) \to W$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $f \in A$, $j_t(f)$ soit égal à $\gamma(f(X_t))$.

Soit $(W, W_t, \omega_\nu, E_t, j_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ une dilatation de $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ de loi initiale ν, alors pour toute suite croissante de réels positifs $t_1, t_2, \ldots, t_n$ et toute suite $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dans A on a, d'après la propriété de Markov,

$$\omega_\nu(j_0(a_0)j_{t_1}(a_1)\ldots j_{t_n}(a_n)) = \nu(a_0 Q_{t_1}(a_1 Q_{t_2-t_1}(a_2 \ldots a_{n-1} Q_{t_n-t_{n-1}}(a_n)\ldots))).$$

Nous voyons que le membre de droite de cette expression ne dépend pas de la dilatation choisie, mais seulement de ν et du semi-groupe Q. D'un point de vue physique, il représente le résultat d'une observation du processus j aux instants $t_1, \ldots, t_n$ par un observateur chronologique, c'est à dire qui ne "voit" pas dans le passé. Par contre, si la suite $t_1, \ldots t_n$ n'est pas croissante, le membre de gauche n'est pas déterminé par la donnée du semi-groupe Q_t. On est amené à la définition suivante : on dit que deux dilatations $(W, W_t, \omega_\nu, E_t, j_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ et $(W', W'_t, \omega'_\nu, E'_t, j'_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ du semi-groupe $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$, de loi initiale ν, sont équivalentes si pour toute suite de réels positifs $t_1, \ldots, t_n$ et toute suite $a_1, \ldots, a_n$ dans A on a

$$\omega_\nu(j_0(a_0)j_{t_1}(a_1)\ldots j_{t_n}(a_n)) = \omega'_\nu(j'_0(a_0)j'_{t_1}(a_1)\ldots j'_{t_n}(a_n)) .$$

Etant donnés une C^*-algèbre A, un état ν sur A et un semi-groupe de contractions complètement positives $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ sur A, il existe toujours une dilatation de $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ de loi initiale ν, (cf [Sa]) mais en général deux telles dilatations ne sont pas équivalentes. En particulier, un semi-groupe sur un espace commutatif peut admettre une dilatation non-commutative, nous en verrons un exemple plus loin.

La notion de dilatation de la définition 1.5.1 est loin d'être la seule possible. Récemment, R.V. Bhat et K.R. Parthasarathy [B-P] ont proposé une définition légèrement différente de la notion de dilatation, qui leur a permis de développer une théorie des frontières analogue à la théorie classique pour les chaînes de Markov.

1.6. Construction d'une dilatation sur l'espace de Fock

Soient G un groupe localement compact, et ψ une fonction continue sur G, conditionnellement de type positif. On va décrire une dilatation du semi-groupe

$(Q_t^{\psi})_{t\in\mathbb{R}_+}$, obtenue grâce aux résultats sur les représentations factorisables des groupes de courants décrites dans [P-S].

À la donnée de G et ψ on peut associer, par la construction GNS, un espace de Hilbert H, une représentation U de G dans $B(H)$, un cocyle $v : G \to H$ pour cette représentation (c'est à dire une fonction continue telle que $v(e) = 0$ et $U_g v(x) = v(gx) - v(g)$ pour tous $g, x \in G$), qui vérifient

$$< v(x), v(y) >= \psi(xy^{-1}) - \psi(x) - \psi(y^{-1}) + \psi(e)$$

pour tous x, y dans G (cf [P-S] I.3).

Soit ν un état sur $C^*(G)$ et π une représentation de G, dans un espace de Hilbert H_π, η un vecteur unitaire de H_π tel que $\nu(x) =< \pi(x)\eta, \eta >$ pour tout $x \in C^*(G)$.

Considérons l'espace de Fock $\Gamma = \Gamma(L^2(\mathbb{R}_+) \otimes H)$. Cet espace admet une famille totale de vecteurs exponentiels $\big(\mathcal{E}(u)\big)_{u\in L^2(\mathbb{R}_+)\otimes H}$ qui vérifient

$$< \mathcal{E}(u), \mathcal{E}(v) >= exp < u, v > \ .$$

Pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+$ on a une décomposition canonique en produit tensoriel hilbertien $\Gamma = \Gamma_{t]} \otimes \Gamma_{[t}$ où $\Gamma_{t]} = \Gamma\big(L^2([0,t[) \otimes H)\big)$ et $\Gamma_{[t} = \Gamma\big(L^2([t,+\infty[) \otimes H\big)$.

Posons $W = \mathcal{B}\big(H_\pi \otimes \Gamma\big)$, prenons pour ω_ν l'état pur associé au vecteur $\eta \otimes \mathcal{E}(0)$, et soit, pour $t \geq 0$, $W_t = \mathcal{B}(H_\pi \otimes \Gamma_{t]}) \otimes Id_{\Gamma_{[t}}$. Pour tout $g \in G$ posons $v_t(g) = 1_{[0,t]} \otimes v(g) \in L^2(\mathbb{R}_+) \otimes H$ et soit $U^t(g)$ l'opérateur

$$U^t(g) = P_{t]} \otimes U(g) + P_{[t} \otimes Id$$

sur $L^2(\mathbb{R}_+) \otimes H$ où $P_{t]}$ et $P_{[t}$ sont les projections orthogonales sur $L^2([0,t[)$ et $L^2([t,+\infty[)$, respectivement. Il existe des espérances conditionnelles $E_t : W \to W_t$ définies par

$$< E_t[X](a \otimes \mathcal{E}(h)), b \otimes \mathcal{E}(v) >=< X(a \otimes \mathcal{E}(h_{t]})), b \otimes \mathcal{E}(v_{t]}) >< \mathcal{E}(h_{[t}), \mathcal{E}(v_{[t}) >$$

où on a posé $u_{t]} = P_{t]} \otimes Id(u)$ et $u_{[t} = P_{[t} \otimes Id(u)$ (cf [P1] p.214).

On définit une représentation unitaire de G en posant

$$V^t(g)(\mathcal{E}(u)) = e^{(t\psi(g)+<v_t(g),u>)}\mathcal{E}(U^t(g)(u) + v_t(g))$$

pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}_+) \otimes H$. Le morphisme $j_t : C^*(G) \to W$ est alors obtenu en prolongeant la représentation unitaire $\pi \otimes V^t$ de G.

Montrons que l'on construit ainsi une dilatation de $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Il est clair que $\omega_\nu \circ j_0 = \nu$. Il suffit donc de vérifier la propriété de Markov, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$ on a bien $E_t[(\pi \otimes V^{t+s})(g)] = e^{s\psi(g)}(\pi \otimes V^t)(g)$; mais pour tous $a, b \in \mathcal{B}(H_\pi)$ et $u, v \in L^2(\mathbb{R}_+) \otimes H$ on a

$$\begin{aligned}
< E_t\big[\pi \otimes V^{t+s}(g)\big]a \otimes \mathcal{E}(u), b \otimes \mathcal{E}(v) >= \\
&=< \pi \otimes V^{t+s}(g)a \otimes \mathcal{E}(u_{t]}), b \otimes \mathcal{E}(v_{t]}) >< \mathcal{E}(u_{[t}, \mathcal{E}(v_{[t} > \\
&=< \pi(g)a, b > e^{((t+s)\psi(g)+v_{t+s}(g),u_{t]}>)} \\
&\qquad < \mathcal{E}(U^{t+s}(g)(u_{t]}) + v_{t+s}(g)), \mathcal{E}(v_{t]}) >< \mathcal{E}(u_{[t}), \mathcal{E}(v_{[t}) >
\end{aligned}$$

or il est clair que $< v_{t+s}(g), u_{t]} >=< v_t(g), u_{t]} >$, $< v_{t+s}(g), v_{t]} >=< v_t(g), v_{t]} >$ et $< U^{t+s}(g)u_{t]}, v_{t]} >=< U^t(g)u_{t]}, v_{t]} >$, par conséquent

$$\begin{aligned}< E_t\left[\pi \otimes V^{t+s}(g)\right] a \otimes \mathcal{E}(u), b \otimes \mathcal{E}(v) >= \\ =< \pi(g)a, b > e^{((t+s)\psi(g)+v_t(g), u_{t]}>)} \\ < \mathcal{E}(U^t(g)(u_{t]}) + v_t(g)), \mathcal{E}(v_{t]}) >< \mathcal{E}(u_{[t}), \mathcal{E}(v_{[t}) > \\ = e^{s\psi(g)} < (\pi \otimes V^t)(g)a \otimes \mathcal{E}(u), b \otimes \mathcal{E}(v) >\end{aligned}$$

pour tous a, b, u, v, et donc $E_t[\pi \otimes V^{t+s}(g)] = e^{s\psi(g)}(\pi \otimes V^t)(g)$.

La construction qui précède, qui provient de [P-S], a été généralisée récemment par M. Schürmann pour traiter les cas de bigèbres plus générales que celles provenant de groupes (voir [Sc]).

2. Le groupe d'Heisenberg et le mouvement brownien non-commutatif.

2.1. Le groupe d'Heisenberg.

Nous reprenons les notions introduites au paragraphe précédent dans le cas particulier où G est le groupe d'Heisenberg. Rappelons qu'il s'agit de $H_d = \mathbb{C}^d \times \mathbb{R}$ avec la loi de groupe

$$(z, w) \star (z', w') = (z + z', w + w' + \Im < z', z >)$$

C'est un groupe de Lie nilpotent de rang 1, de dimension $2d + 1$, dont le centre est le sous-groupe $\{0\} \times \mathbb{R}$. C'est un groupe unimodulaire, et la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^d \times \mathbb{R}$ est une mesure de Haar.

Pour $z \in \mathbb{C}^d$ on notera $q \in \mathbb{R}^d$ sa partie réelle et $p \in \mathbb{R}^d$ sa partie imaginaire.

L'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche sur H_d admet une base donnée par les champs

$$T = \frac{\partial}{\partial w} \qquad L_j = \frac{\partial}{\partial q_j} - p_j \frac{\partial}{\partial w} \qquad M_j = \frac{\partial}{\partial p_j} + q_j \frac{\partial}{\partial w}$$

qui vérifient les relations de commutation

$$[L_j, M_j] = 2T$$

les autres commutateurs étant nuls.

Dans la suite nous utiliserons les éléments

$$\alpha_j = \frac{1}{2}(iL_j + M_j) = \frac{i}{2}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial w}) \text{ et } \alpha_j^* = \frac{1}{2}(iL_j - M_j) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial z_j} - z_j \frac{\partial}{\partial w})$$

de l'algèbre de Lie complexifiée de H_d.

2.2. Représentations de H_d.

Nous allons essayer de décrire la C^*-algèbre de H_d, et pour cela, commencer par décrire les représentations unitaires irréductibles de H_d (je renvoie à [F] et [Tay] Ch.1 pour ces résultats).

Les représentations de dimension 1 de H_d sont indexées par les éléments de $\mathbb{C}^d$: si $\xi \in \mathbb{C}^d$, $\rho_\xi(z,w) = e^{i\Re<z,\xi>}$ définit une représentation de dimension 1 de H_d.

D'autre part, pour tout réel $\tau \neq 0$ soit π_τ la représentation induite par le caractère $w \mapsto e^{i\tau w}$ du centre de H_d, qui est donnée par la formule suivante sur $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\pi_\tau(z,w)f(x) = f(x+q)e^{i\tau(w+p.q+2p.x)}$$

où $p.q$ désigne le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, la représentation π_τ est irréductible, et la représentation dérivée de l'algèbre de Lie de H_d est donnée par les formules

$$d\pi_\tau(T) = i\tau.Id \qquad d\pi_\tau(L_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad d\pi_\tau(M_j) = 2i\tau x_j$$

La structure de la représentation π_τ peut-être précisée de la façon suivante. Considérons d'abord le cas $d = 1$ et $\tau > 0$. Il existe une base orthonormée $(h_n^\tau)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ ($h_0^\tau(x) = (\frac{2\tau}{\pi})^{\frac{d}{4}} e^{-\tau\,|x|^2} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et h_n^τ s'exprime à l'aide du polynôme d'Hermite de degré n, cf [F], ou [Tay] 1.6) telle que

$$\begin{aligned} d\pi_\tau(\alpha^*)(h_n^\tau) &= \sqrt{(n+1)\tau}\ h_{n+1}^\tau \\ d\pi_\tau(\alpha)(h_n^\tau) &= \sqrt{n\tau}\ h_{n-1}^\tau \end{aligned}$$

(on a posé $\alpha = \alpha_1$ et $\alpha^* = \alpha_1^*$).

Pour $\tau < 0$, les rôles de α et α^* sont inversés, et

$$\begin{aligned} d\pi_\tau(\alpha)(h_n^{-\tau}) &= -\sqrt{-(n+1)\tau}\ h_{n+1}^{-\tau} \\ d\pi_\tau(\alpha^*)(h_n^{-\tau}) &= -\sqrt{-n\tau}\ h_{n-1}^{-\tau}\ . \end{aligned}$$

En particulier, si $\Lambda_\tau = \pi_\tau(\alpha^*)\pi_\tau(\alpha)$ est l'opérateur de nombre de la représentation π_τ, c'est un opérateur auto-adjoint dont le spectre est constitué des nombres $k\tau$ avec $k \in \mathbb{N}$ pour $\tau > 0$ et $-k\tau$, $k \in \mathbb{N}^*$ pour $\tau < 0$.

L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est isomorphe à l'espace de Fock $\Gamma(\mathbb{C})$, si l'on envoie h_n^τ, pour $\tau > 0$, sur le vecteur $\frac{1^{\circ n}}{\sqrt{n!}}$ de $\Gamma(\mathbb{C})$. On identifie alors les opérateurs $d\pi_\tau(\alpha)$ et $d\pi_\tau(\alpha^*)$ avec les opérateurs d'annihilation et de création $a^-_{\sqrt{\tau}}$ et $a^+_{\sqrt{\tau}}$ sur l'espace de Fock (cf [M1], [P]).

Si $d > 1$, on peut représenter $L^2(\mathbb{R}^d)$ comme un produit tensoriel $L^2(\mathbb{R})^{\otimes d}$ et les opérateurs α_j, α_j^* opèrent sur la j^{eme} composante du produit tensoriel, i.e.

$$\begin{aligned} \alpha_j &= Id^{\otimes(j-1)} \otimes \alpha \otimes Id^{\otimes(d-j-2)} \\ \alpha_j^* &= Id^{\otimes(j-1)} \otimes \alpha^* \otimes Id^{\otimes(d-j-2)}\ . \end{aligned}$$

L'opérateur de nombre $\Lambda_\tau = \sum_j \pi_\tau(A_j)\pi_\tau(A_j^*)$ est auto-adjoint et a un spectre discret, composé des réels $k\tau$, $k \in \mathbb{N}$ pour $\tau > 0$ et $-d\tau - k\tau$, $k \in \mathbb{N}$ pour $\tau < 0$. Sa plus petite valeur propre est de multiplicité 1 et un vecteur propre correspondant est $(h_0^\tau)^{\otimes d}$.

Les représentations ρ_ξ de dimension 1 et les représentations π_τ épuisent l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de H_d (voir [F] et [Tay]).

2.3. La C^*-algèbre de H_d.

La structure de $C^*(H_d)$ peut se décrire au moyen d'une extension de C^*-algèbres, que l'on obtient comme suit. Si $a \in C^*(H_d)$, l'application $\tau \mapsto \pi_\tau(a)$ est une application continue, nulle en $\pm\infty$, de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans l'algèbre des opérateurs compacts de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Soit π_0 la représentation de H_d dans $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ qui à tout élément g de H_d associe l'opérateur de multiplication par la fonction $\xi \mapsto \rho_\xi(g)$ sur $\mathbb{R}^{2d} = \mathbb{C}^d$. La représentation π_0 est l'intégrale $\int_{\mathbb{C}^d} \rho_\xi d\xi$ des représentations de dimension 1 de H_d. On peut définir un opérateur de nombre $\Lambda_0 = d\pi_0(\alpha^*)d\pi_0(\alpha)$ dans l'espace de cette représentation, qui n'est autre que l'opérateur de multiplication par la fonction $|\xi|^2$ sur $L^2(\mathbb{C}^d)$.

On obtient un morphisme surjectif $\pi_0 : C^*(H_d) \to C_0(\mathbb{R}^{2d})$, dont le noyau est formé des éléments de $C^*(H_d)$ tels que $\tau \mapsto \pi_\tau(x)$ tende vers 0 en $\tau = 0$. On déduit des considérations précédentes la suite exacte suivante (voir [L] et [V] pour plus de détails)

$$0 \to C_0(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \otimes \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^d)) \to C^*(H_d) \to C_0(\mathbb{R}^{2d}) \to 0 .$$

On peut donner une description heuristique de la structure de l'espace non-commutatif sous-jacent à $C^*(H_d)$. C'est un espace fibré au dessus de $\mathbb{R}$, où vit le paramètre τ, qui est la variable conjuguée de w par la transformation de Fourier. En chaque point $\tau \neq 0$ la fibre est un "espace euclidien non-commutatif" mesuré par $2d$ coordonnées qui sont $x_j = \pi_\tau(L_j)$ et $y_j = \pi_\tau(M_j)$ et qui vérifient $[x_j, y_j] = 2i\tau$. La structure de l'algèbre des fonctions continues nulles à l'infini sur un tel espace est celle des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert séparable, et ne dépend pas de τ. Lorsque τ tend vers zéro, la structure de l'espace devient "de plus en plus commutative", et finalement en $\tau = 0$ on retrouve $2d$ coordonnées qui commutent et l'algèbre des fonctions continues, nulles à l'infini, sur un espace euclidien de dimension $2d$. Il y a donc une singularité en zéro où la structure algébrique de l'algèbre des fonctions sur la fibre change brusquement.

Posons $\mathcal{A}_\tau = \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^d))$ si $\tau \in \mathbb{R}^*$ et $\mathcal{A}_0 = C_0(\mathbb{R}^{2d})$. On définit un poids m_τ sur $\mathcal{A}_\tau$ par $m_\tau = |4\pi\tau|^d tr$ pour $\tau \neq 0$, tr étant la trace sur $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^d))$, et $m_0(g) = (2\pi)^{2d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} g(\xi)d\xi$ pour g continue positive sur $\mathbb{R}^{2d}$. Soit f continue à support compact sur H_d, pour $\tau \neq 0$, l'opérateur $\pi_\tau(f)$ est donné par un noyau continu sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, et le calcul de sa trace, ainsi que la formule d'inversion de Fourier montrent que pour $\tau \in \mathbb{R}$, on a

$$m_\tau(\pi_\tau(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0, w)e^{i\tau w}dw .$$

On en déduit que la formule de Plancherel pour le groupe d'Heisenberg (cf [Tay], [F]) donne, pour f continue à support compact sur H_d

$$f(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} m_\tau(\pi_\tau(f)) d\tau$$

et le poids de Haar sur $C^*(H_d)$ est donc donné par

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} m_\tau \circ \pi_\tau d\tau .$$

On observera que pour f continue, à support compact sur H_d, $m_\tau(\pi_\tau(f))$ est une fonction continue de τ cela suggère que m_0 est la distribution limite des m_τ lorsque $\tau \to 0$. La deuxième partie de l'article [V] de D. Voiculescu donne une signification précise à cette remarque.

2.4. Partie radiale de $C^*(H_d)$

On peut, à l'aide du groupe d'Heisenberg, construire un couple de Gelfand qui nous permettra de définir le semi-groupe de Bessel non-commutatif, auquel est associé un processus stochastique classique tout-à-fait intéressant.

Commençons par décrire ici le couple de Gelfand en question et son spectre.

Soit $\theta \in U(d)$ une transformation unitaire de $\mathbb{C}^d$, elle induit un automorphisme a_θ du groupe d'Heisenberg défini par $a_\theta(z,w) = (\theta(z), w)$, et donc des automorphismes de $L^1(H_d)$ et $C^*(H_d)$. On peut alors former le produit semi-direct $U(d) \times H_d$, avec la loi de groupe

$$(\theta, z, w) \star (\theta', z', w') = (\theta\theta', z + \theta(z'), w + w' + \Im < \theta(z'), z >)$$

Le couple $(U(d) \times H_d, U(d))$ est un couple de Gelfand (cf [F] Ch. 5), en d'autres termes, la sous-algèbre de $L^1(H_d)$ formée des fonctions invariantes par l'action de $U(d)$ est commutative. La sous-algèbre $C^*_R(H_d)$ de $C^*(H_d)$ des éléments invariants par $U(d)$ est également commutative. Son spectre peut se décrire explicitement. Il coïncide avec le spectre de l'algèbre de Banach $L^1_R(H_d)$ des fonctions radiales sur H_d, qui a été déterminé par A. Koranyi (voir [F], voir aussi [Tay] Ch.1, où sont cités des travaux très proches dûs à Petree). L'ensemble des caractères de cette algèbre est égal à $\{\chi_{\tau,m} | \tau \in \mathbb{R}^*,\ m \in \mathbb{N}\} \cup \{\chi_\mu | \mu \in \mathbb{R}_+\}$ où le caractère $\chi_{\tau,m}$ est donné par la formule $\chi_{\tau,m}(f) = \int_{H_d} \omega_{\tau,m}(g) f(g) dg$ pour $f \in L^1(H_d)$, invariante par $U(d)$, avec

$$\omega_{\tau,m} = \frac{(d-1)!m!}{(m+d-1)!} e^{i\tau w} e^{-\frac{1}{2}|\tau|\ |z|^2} L_m^{d-1}(|\tau|\ |z|^2) \tag{2.4.1}$$

les L_m^n étant les polynômes de Laguerre donnés par la série génératrice

$$\sum_{m=0}^{\infty} L_m^n(x) t^m = (1-t)^{-n-1} e^{-\frac{xt}{1-t}} \tag{2.4.2}$$

Le caractère χ_μ pour $\mu \in \mathbb{R}_+$ est, lui, donné par $\chi_\mu(f) = \int_{H_d} \omega_\mu(g) f(g) dg$ où

$$\omega_\mu(z,w) = j_{d-1}(\mu|z|^2) \tag{2.4.3}$$

j_n étant la fonction de Bessel usuelle.

Il n'est pas difficile de voir que tous ces caractères sont en fait continus sur la grosse algèbre $C^*_R(H_d)$, et s'obtiennent au moyens d'états purs sur les espaces des représentations π_τ. On peut décrire explicitement la topologie du spectre de $C^*_R(H_d)$ (cf [F] et [Bo]), ce que nous allons faire après avoir donné une description un peu plus intuitive de l'algèbre $C^*_R(H_d)$. D'après [Tay] (Ch.1, Proposition 7.7) on sait que dans la représentation π_τ l'image de l'algèbre $C^*_R(H_d)$ est exactement l'algèbre commutative des fonctions de l'opérateur Λ_τ, (nulles à l'infini sur le spectre de Λ_τ). Ce spectre est égal, d'après les remarques faites en 2.2, à $\{k\tau|\ k \in \mathbb{N}\}$ pour $\tau > 0$ et à $\{-d\tau - k\tau | k \in \mathbb{N}\}$ pour $\tau < 0$. L'image par la représentation π_0 de $C^*_R(H_d)$ est égale, elle, à l'algèbre des fonctions continues, nulles à l'infini, radiales sur $\mathbb{R}^{2d}$, autrement dit à l'algèbre des fonctions de l'opérateur Λ_0 qui est l'opérateur de multiplication par la fonction $|\xi|^2$ sur $L^2(\mathbb{C}^d)$, et dont le spectre est donc $\mathbb{R}_+$. La réunion des ensembles $(\tau \times spectre(\Lambda_\tau))_{\tau\in\mathbb{R}}$ est une partie fermée X_d de $\mathbb{R}^2$ qui est la réunion des demi-droites, dans le demi-plan $y > 0$, de la forme $(\sigma, k\sigma)_{\sigma\in\mathbb{R}_+}$ avec $k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1,-2,\ldots,-d-1\}$, et de la demi droite $(y > 0, x = 0)$ (voir fig 1 pour $d = 1$).

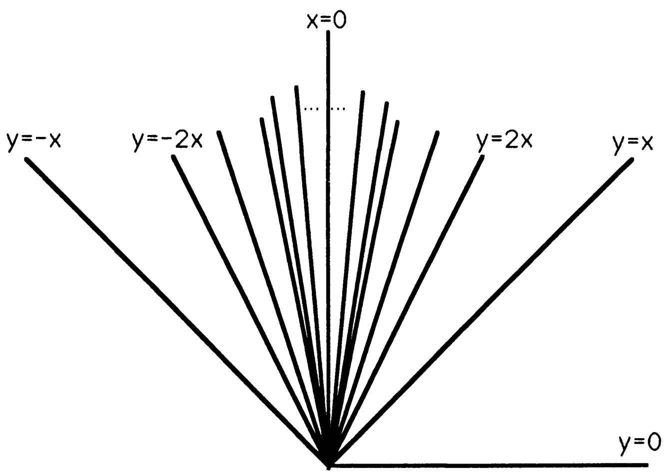

fig 1
Le spectre de $C^*_R(H_1)$

En identifiant un point $(\tau, k|\tau|)$ de X_d avec le caractère $\chi_{\tau,k}$ pour $\tau > 0$, avec $\chi_{\tau,k-d}$ pour $\tau < 0$ et en identifiant $(0, 4\mu^2)$ avec χ_μ on obtient un homéomorphisme entre X_d et le spectre de l'algèbre $C^*_R(H_d)$. On aurait obtenu un homéomorphisme avec une autre partie de $\mathbb{R}^2$ en considérant les spectres des opérateurs $\tilde{\Lambda}_\tau = \sum_j d\pi_\tau(\alpha_j) d\pi_\tau(\alpha_j^*) = \Lambda_\tau + d\tau$, qui sont conjugués de Λ_τ par l'automorphisme J de

$C^*(H_d)$ déduite de l'automorphisme $J(z,w) = (\bar{z}, -w)$ de H_d. La partie de $\mathbb{R}^2$ obtenue est le symétrique de X_d par rapport à l'axe vertical $x = 0$. On peut aussi considérer les spectres des oscillateurs harmoniques $\frac{1}{2}(\Lambda_\tau + \tilde{\Lambda}_\tau)$ ce qui donne l'homéomorphisme décrit dans [F], Ch. 5.

La restriction du poids de Haar sur $C^*(H_d)$ à $C^*_R(H_d)$ définit une mesure de Radon sur X_d, qui est donnée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |4\pi\tau|^d \sum_0^\infty \frac{(d+k-1)!}{k!(d-1)!} \delta_{(\tau,k\tau)} d\tau \, .$$

Plus précisément, le poids $m_\tau \circ \pi_\tau$ définit une mesure positive sur X_d qui est

$$|4\pi\tau|^d \sum_0^\infty \frac{(d+k-1)!}{k!(d-1)!} \delta_{(\tau,k\tau)}$$

pour $\tau \neq 0$ et $(4\pi)^d \frac{r^{d-1}}{(d-1)!} dr$ sur $\mathbb{R}_+$ pour $\tau = 0$.

On observera que l'espace X_d est une partie de $X_{d'}$ si $d' \leq d$. Considérons le sous-groupe diagonal de $U(d)$ et la sous-algèbre $C^*_D(H_d)$ de $C^*(H_d)$ des éléments invariants par les automorphismes de ce sous-groupe. Cette algèbre est encore commutative et contient $C^*_R(H_d)$. L'image de cette algèbre par la représentation π_τ est l'algèbre des fonctions des opérateurs $d\pi_\tau(\alpha_j^*) d\pi_\tau(\alpha_j)$ pour $1 \leq j \leq d$, qui commutent entre eux. On déduit facilement des considérations qui précèdent que le spectre de l'algèbre s'identifie avec l'espace $X^{(d)}$, produit fibré de d copies de X_1 au-dessus de $\mathbb{R}$, c'est à dire la partie de $\mathbb{R}^{d+1}$ formée des $(\tau, u_1, \ldots, u_d)$ tels que $\tau \in \mathbb{R}$ et $(\tau, u_j) \in X_1$ pour tout j. L'inclusion $C^*_R(H_d) \to C^*_D(H_d)$ donne, au niveau des spectres, l'application

$$\begin{aligned} X^{(d)} &\to X_d \\ (\tau, u_1, \ldots, u_d) &\mapsto (\tau, u_1 + \ldots + u_d) \end{aligned}$$

qui est surjective.

2.5. Le semi-groupe du mouvement brownien non-commutatif.

Posons, pour $\tau \in \mathbb{R}^*$, $\varphi_\tau(z,w) = <\pi_\tau(z,w) h_0^{|\tau|}, h_0^{|\tau|}> = e^{i\tau w - \frac{1}{2}|\tau||z|^2}$. Par construction, φ_τ est une fonction de type positif sur H_d, et $(\varphi_s)_{s \in \mathbf{R}_+}$ et $(\varphi_{-s})_{s \in \mathbf{R}_+}$ sont deux semi-groupes multiplicatifs de fonctions de type positif sur H_d, donc les fonctions $\psi(z,w) = iw - \frac{1}{2}|z|^2$ et $\bar{\psi}(z,w) = -iw - \frac{1}{2}|z|^2$ sont conditionnellement de type positif sur H_d.

2.5.1. Définition *Le semi-groupe du mouvement brownien non-commutatif est le semi-groupe de contractions complètement positives $(Q_t = Q_t^\psi)_{t \in \mathbf{R}_+}$ sur $C^*(H_d)$.*

On notera $(\hat{Q}_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ le semi-groupe $(Q_t^{\bar{\psi}})_{t \in \mathbf{R}_+}$

Construisons la dilatation de $(Q_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ décrite au paragraphe 1.6, avec pour loi initiale l'état associé à la fonction 1 sur H_d. On a $H_\pi = \mathbb{C}$ et π est la représentation triviale de H_d. Soient $H = \mathbb{C}^d$, et v le cocycle à valeurs dans H, pour la représentation triviale de H_d, défini par $v(z,t) = z$. On a bien

$$< v(g), v(g') >= \psi(g(g')^{-1}) - \psi(g) - \psi(g'^{-1}) + \psi(e)$$

pour $g, g' \in H_d$.

L'espace Γ est alors l'espace de Fock $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+) \otimes H)$, on a $v_t(z,w) = z1_{[0,t[}$, $U^t(z,w) = Id$ et pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$,

$$V^t(z,w)\mathcal{E}(u) = e^{-\frac{t}{2}|z|^2 + \int_0^t <z,u(s)>ds}\mathcal{E}(u + z1_{[0,t[}) \, .$$

On déduit de ces formules que les opérateurs $j_t(\alpha_j)$ et $j_t(\alpha_j^*)$ sont les opérateurs A_t^j et A_t^{j*} de création et d'annihilation sur l'espace de Fock utilisés dans le calcul stochastique non-commutatif (voir [P1]). La dilatation du semi-groupe brownien non-commutatif contient donc le mouvement brownien non-commutatif, c'est-à-dire les processus A_t^j et A_t^{j*}, et réciproquement, la donnée de ces processus permet de reconstruire les représentations j_t, ce qui justifie le nom que nous avons donné au semi-groupe $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

On peut également obtenir les autres intégrateurs du calcul stochastique non-commutatif en modifiant la construction précédente. Pour cela considérons le produit semi-direct $U(d) \times H_d$. La fonction $\tilde{\psi}(\theta, z, w) = \psi(z,w)$ est conditionnellement de type positif sur le produit semi-direct $U(d) \times H_d$ et en posant $v(\theta, z, w) = z$ on obtient un cocycle pour la représentation de $U(d) \times H_d$ dans $\mathbb{C}^d$ donnée par $(\theta, z, w)(x) = \theta(x)$. Construisons maintenant la dilatation associée (avec pour mesure initiale l'état associé à la représentation triviale). On a $v_t(\theta, z, w) = z1_{[0,t]}$, $U^t(\theta, z, w) = P_{t]} \otimes \theta + P_{[t} \otimes Id$. Soit $(E_{jk})_{1\leq j,k\leq d}$ la base usuelle de l'algèbre de Lie $gl(d)$, on vérifie que l'image de l'élément $(E_{jk}, 0, 0)$ de l'algèbre de Lie de $U(d)$ est l'opérateur de nombre $\Lambda_{jk}(t)$. On voit donc que pour obtenir tous les intégrateurs du calcul stochastique non-commutatif il faut considérer le groupe $U(d) \times H_d$ et non pas seulement le groupe H_d.

On va laisser de côté la dilatation du semi-groupe Q fournie par la construction de 1.6, pour examiner en détail le semi-groupe lui-même, qui est en quelque sorte plus fondamental que sa dilatation.

2.6. Restrictions à des sous-groupes.

Examinons la restriction du semi-groupe $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à l'algèbre d'un sous-groupe commutatif, en commençant par le centre de H_d. La restriction au centre de la fonction ψ est la fonction $w \mapsto iw$ sur $\mathbb{R}$, et donc le semi-groupe obtenu par restriction au centre de H_d est celui de la translation uniforme sur la droite réelle. On voit donc que le semi-groupe du mouvement brownien non-commutatif induit un mouvement déterministe, de translation uniforme le long de la variable τ. En fait nous avons le résultat plus précis suivant.

2.6.1. Proposition. *Pour tous $\tau \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ il existe une unique contraction complètement positive $R_\tau^{\tau+t} : \mathcal{A}_{\tau+t} \to \mathcal{A}_\tau$ telle que $R_\tau^{\tau+t} \circ \pi_{\tau+t} = \pi_\tau \circ Q_t$.*

De même, il existe une unique contraction complètement positive $\hat{R}_\tau^{\tau-t} : \mathcal{A}_{\tau+t} \to \mathcal{A}_\tau$ telle que $\hat{R}_\tau^{\tau-t} \circ \pi_{\tau-t} = \pi_\tau \circ \hat{Q}_t$.

Démonstration. Nous allons construire $R_\tau^{\tau+t}$, le cas de $\hat{R}_\tau^{\tau+t}$ est tout-à-fait semblable. Soit $\tau \in \mathbb{R}^*$, l'application $\pi_\tau \circ Q_t$ est égale à la composition de

$$\pi_\tau \otimes \pi_t : C^*(H_d) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathbb{R}^d))$$

et de

$$Id \otimes \eta_0 : \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathbb{R}^d)) \mapsto \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$$

où η_0 est l'état pur associé au vecteur h_0^t. La restriction de la représentation $\pi_\tau \otimes \pi_t$ au centre de H_d est égale au caractère $w \mapsto e^{i(t+\tau)w}$, donc si $\tau + t \neq 0$ le théorème de Stone-von Neumann (cf [Tay] 5.2) entraîne que c'est un multiple de la représentation $\pi_{\tau+t}$, d'où l'existence d'un unique morphisme $\gamma : \mathcal{A}_{\tau+t} \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathbb{R}^d))$ tel que $\gamma \circ \mathcal{A}_{\tau+t} = \pi_{\tau.} \otimes \pi_t$. Il suffit alors de prendre $R_\tau^{\tau+t} = (Id \otimes \eta_0) \circ \gamma$.

Lorsque $\tau + t = 0$ la représentation $\pi_\tau \otimes \pi_{-\tau}$ est équivalente à π_0. En effet, cette représentation, dans $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathbb{R}^d)$ identifié à $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, est donnée par les formules

$$\pi_\tau \otimes \pi_{-\tau}(z, w) f(x, y) = f(x + q, y + q) e^{2i\tau p.(x-y)}$$

En considérant f comme une fonction de $(\frac{1}{2}(x + y), 2\tau(x - y))$ et en faisant une transformation de Fourier dans la variable $\frac{1}{2}(x + y)$ on obtient un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ qui entrelace les représentations π_0 et $\pi_\tau \otimes \pi_{-\tau}$. On en déduit alors facilement l'existence et l'unicité de l'application R_τ^0 comme ci-dessus.

Enfin le cas $\tau = 0$ se traite par des méthodes analogues.

Il est clair, d'après la propriété de semi-groupe de $(Q_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ que pour tous $\sigma < \tau < \delta \in \mathbb{R}$ on a

$$R_\sigma^\delta = R_\sigma^\tau \circ R_\tau^\delta \quad \text{et} \quad \hat{R}_\delta^\sigma = \hat{R}_\delta^\tau \circ \hat{R}_\tau^\sigma \tag{2.6.1}$$

De même, comme les semi-groupes Q et $\hat{Q}$ commutent on a, pour $\sigma \in \mathbb{R}$ et $s, t > 0$,

$$R_{\sigma+s-t}^{\sigma+s} \circ \hat{R}_{\sigma+s}^{\sigma} = \hat{R}_{\sigma+s-t}^{\sigma-t} \circ R_{\sigma-t}^{\sigma} \tag{2.6.2}$$

Les transformations R et $\hat{R}$ se prolongent en des contractions des algèbres $\mathcal{A}_\tau''$, où $\mathcal{A}_\tau'' = \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$ pour $\tau \neq 0$ et $\mathcal{A}_0''$ est l'algèbre des fonction universellement mesurables bornées sur $\mathbb{R}^d$.

On peut donner une formule explicite pour la transformation R_τ^0 $(\tau < 0)$. Pour cela introduisons les opérateurs $\eta_\tau(\xi)$, pour $\tau < 0$ et $\xi = u + iv \in \mathbb{C}^d$, donnés par

$$\eta_\tau(\xi) h(x) = (2\pi)^{2d} \int_{\mathbb{C}^d} h(q') e^{i\tau(q'+x).p'} e^{-i\Re<z'-x,\xi>} e^{\frac{\tau}{2}|z'-x|^2} dz'$$

L'opérateur $\eta_\tau(\xi)$ est donné par le noyau continu

$$\begin{aligned}K(q',x) &= (2\pi)^{2d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\tau(q'+x).p'}e^{-i(p'.u+q'.v)}e^{\frac{\tau}{2}(|q'-x|^2+|p'|^2)}dp'\\ &= (2\pi)^{2d}(\frac{2\pi}{-\tau})^{\frac{d}{2}}e^{-i(q'-x).v+\tau(|q'|^2+|x|^2)+(q'+x).u+\frac{|u|^2}{\tau}}\\ &= (2\pi)^{2d}(\frac{2\pi}{-\tau})^{\frac{d}{2}}\bar{Z}_\xi(q')Z_\xi(x)\end{aligned}$$

où $Z_\xi(y) = e^{iy.v+\tau|y|^2+y.u+\frac{|u|^2}{2\tau}}$. La fonction Z_ξ est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ par conséquent l'opérateur $\eta_\tau(\xi)$ est borné, de rang 1 sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. De plus, l'application $(\tau,\xi)\mapsto\eta_\tau(\xi)$ est faiblement continue de $]-\infty,0[\times\mathbb{C}^d$ dans $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$. On voit aussi facilement que si $h\in L^2(\mathbb{R}^d)$ alors $\xi\mapsto\int_{\mathbb{R}^d}h(y)Z_\xi(y)dy$ est de carré intégrable sur $\mathbb{C}^d$, par conséquent, $\xi\mapsto\eta_\tau(\xi)$ est faiblement intégrable sur $\mathbb{C}^d$.

2.6.2. Proposition. *Pour toute fonction g mesurable bornée sur $\mathbb{R}^{2d}$ on a*

$$R_\tau^0(g) = \int_{\mathbb{C}^d} g(\xi)\eta_\tau(\xi)d\xi \tag{2.6.3}$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'opérateur défini par la formule (2.6.3) est bien défini, car $\xi\mapsto\eta_\tau(\xi)$est faiblement intégrable.

Soit f une fonction de l'espace de Schwartz de H_d. L'opérateur $R_\tau^0(\pi_0(f)) = \pi_\tau(e^{-\tau\psi}f)$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ est donné par la formule

$$\pi_\tau(e^{-\tau\psi}f)h(x) = \int_{H_d} h(x+q)e^{i\tau(w+p.q+2p.x)}e^{-i\tau w+\frac{\tau}{2}(|q|^2+|p|^2)}f(q,p,w)dqdpdw.$$

D'après la formule d'inversion de Fourier et la définition des représentations ρ_ξ, on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z,w)dw &= (2\pi)^{2d}\int_{\mathbb{C}^d}\rho_\xi(f)e^{-i\Re<z,\xi>}d\xi\\ &= (2\pi)^{2d}\int_{\mathbb{C}^d}\pi_0(f)(\xi)e^{-i\Re<z,\xi>}d\xi\ ;\end{aligned}$$

comme f est dans l'espace de Schwartz, on peut interchanger l'ordre d'intégration pour obtenir

$$\begin{aligned}&\pi_\tau(e^{-\tau\psi}f)h(x) =\\ &= (2\pi)^{2d}\int_{\mathbb{C}^d}\Big(\int_{\mathbb{C}^d} h(x+q)e^{i\tau(p.q+2p.x)+\frac{\tau}{2}(|q|^2+|p|^2)}e^{-i\Re<z,\xi>}dz\Big)\pi_0(f)(\xi)d\xi\\ &= \int_{\mathbb{C}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} h(q')K(q',x)dq'\Big)\pi_0(f)(\xi)d\xi\ ,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$R^0_\tau(\pi_0(f)) = \int_{\mathbb{C}^d} \pi_0(f)(\xi)\eta_\tau(\xi)d\xi \,.$$

Cette formule se prolonge ensuite à toutes les fonctions universellement mesurables bornées sur $\mathbb{C}^d$, ce qui donne le résultat.

Nous avons vu en 1.3.1 que le poids de Haar est invariant par un semi-groupe de convolution. Nous avons en fait un peu plus ici.

2.6.3. Proposition. *Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$*

$$m_\tau \circ R_\tau^{\tau+t} = m_{\tau+t} \,.$$

Démonstration. Pour toute f continue à support compact sur H_d, on a

$$\begin{aligned} m_{\tau+t}(\pi_{\tau+t}(f)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(0,w)e^{iw(\tau+t)}dw \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(0,w)e^{iw\tau}e^{t\psi(0,w)}dw \\ &= m_\tau(\pi_\tau(e^{t\psi}f)) \\ &= m_\tau\big(R_\tau^{\tau+t}(\pi_{\tau+t}(f))\big) \end{aligned}$$

et le résultat suit par prolongement à $\mathcal{A}_{\tau+t}$.

2.6.4. Proposition. *Pour tout $x \in U(H_d)$, l'application $\sigma \mapsto R^\tau_\sigma(x)$ de $]-\infty,\tau[$ dans $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$ est faiblement continue.*

Démonstration. Soient $a, b \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et $f \in L^1(H_d)$ on a

$$\begin{aligned} &< R^\tau_\sigma(\pi_\tau(f))a, b > = < \pi_\sigma(e^{(\tau-\sigma)\psi}f)a, b > \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{H_d} a(x+q)e^{i\sigma(w+p.q+2p.x)}e^{(\tau-\sigma)(iw-\frac{1}{2}|z|^2)}f(z,w)\bar{b}(x)dxdzdw \,. \end{aligned}$$

Il est clair que cette expression dépend continûment de σ, d'où le résultat pour $f \in L^1(H_d)$. On prolonge à $U(H_d)$ par densité de L^1 pour la topologie faible.

La forme $\Im < z', z >$ est une forme symplectique sur $\mathbb{C}^d$, considéré comme un espace vectoriel réel. Pour tout sous-espace vectoriel isotrope maximal V_d de $\mathbb{C}^d$, $V_d \times \mathbb{R}$ est un sous-groupe abélien de H_d. En restreignant le semi-groupe $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à l'algèbre engendrée par ce sous-groupe, on obtient le semi-groupe de la chaleur sur $\mathbb{R} \times \hat{V}_d$.

En coupant le groupe d'Heisenberg en "tranches" de la forme $\mathbb{R} \times V_d$ on obtient ainsi toute une famille de semi-groupes de la chaleur.

3. Premières propriétés du semi-groupe brownien non-commutatif.

Nous allons maintenant passer en revue certaines propriétés d'invariance du semi-groupe $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ qui sont des analogues de propriétés vérifiées par le semi-groupe du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ (ou plus précisément du processus de la chaleur).

3.1. Invariance par changement d'échelle

Rappelons que si $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien d-dimensionnel issu de 0 et $c \neq 0$ alors le processus $(\frac{1}{c}B_{c^2t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est encore un mouvement brownien.

Pour tout réel $c \neq 0$, soit α_c l'automorphisme de H_d défini par $\alpha_c(z,w) = (cz, c^2w)$. On remarque que $\psi \circ \alpha_c = c^2\psi$, ce qui entraîne que, pour tout $c > 0$

$$\alpha_c \circ Q_t \circ \alpha_{c^{-1}} = Q_{c^2t}\ . \tag{3.1.1}$$

Cette propriété du semi-groupe est l'analogue de l'invariance du mouvement brownien par changement d'échelle. Elle va nous permettre d'éliminer la composante de temps dans le mouvement brownien non-commutatif et de définir le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck non-commutatif.

Rappelons que si $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien d-dimensionnel issu de 0, alors les processus $(e^{\frac{s}{2}}B_{e^{-s}})_{s\in\mathbb{R}_+}$ et $(e^{-\frac{s}{2}}B_{e^s})_{s\in\mathbb{R}_+}$ sont des processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ceci motive l'introduction des deux semi-groupes $(\tilde{R}_s^+)_{s\in\mathbb{R}_+}$ et $(\tilde{R}_s^-)_{s\in\mathbb{R}_+}$ définis par les formules $\tilde{R}_s^+ = \alpha_{e^{\frac{s}{2}}} \circ Q_{1-e^{-s}}$ et $\tilde{R}_s^- = \alpha_{e^{-\frac{s}{2}}} \circ Q_{e^s-1}$. Ce sont bien des semi-groupes de contractions complètement positives de $C^*(H_d)$, en effet, d'après la formule (3.1.1) on a

$$\begin{aligned}\tilde{R}_s^+ \circ \tilde{R}_{s'}^+ &= \alpha_{e^{\frac{s}{2}}} \circ Q_{1-e^{-s}} \circ \alpha_{e^{\frac{s'}{2}}} \circ Q_{1-e^{-s'}} \\ &= \alpha_{e^{\frac{s+s'}{2}}} \circ Q_{e^{-s'}-e^{-s-s'}} \circ Q_{1-e^{-s'}} \\ &= \alpha_{e^{\frac{s+s'}{2}}} \circ Q_{1-e^{-(s+s')}} \\ &= \tilde{R}_{s+s'}^+\end{aligned}$$

et un calcul semblable pour $\tilde{R}_s^-$. La proposition suivante montre qu'on peut les utiliser pour définir les semi-groupes d'Ornstein-Uhlenbeck non-commutatifs sur $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^d))$.

3.1.2 Proposition. *Il existe deux semi-groupes $(R_s^+)_{s\in\mathbb{R}_+}$ et $(R_s^-)_{s\in\mathbb{R}_+}$ de contractions complètement positives sur $\mathcal{A}_{\pm1} = \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^d))$ tels que pour tout $s \in \mathbb{R}_+$*

$$\pi_1 \circ \tilde{R}_s^\pm = R_s^\pm \circ \pi_1$$

On appellera les deux semi-groupes $R^\pm$ les semi-groupes d'Ornstein-Uhlenbeck non-commutatifs.

Démonstration. On suit le même principe que pour la proposition 2.6.1.

L'application $\pi_1 \circ \tilde{R}_s$ est égale à la composition de la représentation $(\pi_1 \circ \alpha_{e^{-\frac{s}{2}}}) \otimes \pi_{1-e^{-s}}$ de $C^*(H_d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathbb{R}^d)$ avec l'application $Id \otimes \eta_0 : \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d) \otimes$

$L^2(\mathbb{R}^d)) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$ où η_0 est l'état pur associé à $(h_0^1)^{\otimes d}$. La restriction de la représentation $(\pi_1 \circ \alpha_{e^{-\frac{s}{2}}}) \otimes \pi_{1-e^{-s}}$ au centre de H_d est un multiple du caractère $w \mapsto e^{iw}$, et par conséquent, le théorème de Stone-von Neumann entraîne que cette représentation est un multiple de la représentation π_1. Il existe donc un unique morphisme $\gamma_s : \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d)) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathbb{R}^d))$ tel que $(\pi_1 \circ \alpha_{e^{-\frac{s}{2}}}) \otimes \pi_{1-e^{-s}} = \gamma_s \circ \pi_1$. Si on pose $R_s^+ = (Id \otimes \eta_0) \circ \gamma_s$ on obtient le semi-groupe cherché. Un raisonnement semblable fonctionne pour R_s^-.

On peut obtenir des dilatations explicites des semi-groupes d'Ornstein-Uhlenbeck non-commutatifs suivant la méthode de Evans-Hudson en résolvant une équation différentielle stochastique non-commutative. Ces dilatations ont des interprétations physiques, et représentent, dans le cas de R^-, le phénomène dit de “superradiance”, dans le cas de R^+ l'émission spontanée de lumière (voir [vW1] et [vW2] pour plus de détails).

3.2 Invariance par retournement du temps

D'après 1.3.1, les semi-groupes $(Q_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $(\hat{Q}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sont en dualité par rapport au poids de Haar. En fait on a, plus précisément,

3.2.1. Proposition. *Pour tout* $\tau \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{A}_\tau^+, y \in \mathcal{A}_\tau^+$,

$$m_\tau(R_\tau^{\tau+t}(x)y) = m_{\tau+t}(x\hat{R}_{\tau+t}^\tau(y)) \,. \tag{3.2.1}$$

Démonstration. Soient f, f' continues, à support compact sur H_d, on a

$$\begin{aligned} m_\tau(R_\tau^{\tau+t}(\pi_{\tau+t}(f))\pi_\tau(f')) &= m_\tau(\pi_\tau(e^{-t\psi}f)\pi_\tau(f')) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{C}^d} e^{-t\psi(z,w)} f(z,w) f'(-z,-w-w') e^{i\tau w'} dw dw' dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{C}^d} f(z,w) e^{-t\bar{\psi}(-z,-w-w')} f'(-z,-w-w') e^{i(\tau+t)w'} dw dw' dz \\ &= m_{\tau+t}\big(\pi_{\tau+t}(f)\hat{R}_{\tau+t}^\tau(\pi_\tau(f'))\big) \,. \end{aligned}$$

On en déduit la formule pour $x = \pi_\tau(f)$ et $y = \pi_{\tau+t}(f')$, et le cas général s'obtient par densité.

La proposition précédente reste vraie si on suppose x à trace et y borné, ou l'inverse.

Soit J l'automorphisme de $C^*(H_d)$ donné par $J(z,w) = (\bar{z},-w)$. On voit facilement, en utilisant le théorème de Stone-von Neumann, qu'il existe des isomorphismes $J_\tau : \mathcal{A}_\tau \to \mathcal{A}_{-\tau}$ tels que $J_\tau \circ \pi_\tau = \pi_{-\tau} \circ J_{-\tau}$. Les deux semi-groupes $(Q_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $(\hat{Q}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sont conjugués par J :

3.2.2. Proposition. *Pour tout* $t > 0$ *on a*

$$\hat{Q}_t = JQ_tJ \,.$$

De plus pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ on a

$$R_\tau^{\tau+t} \circ J_{-\tau-t} = J_\tau \circ \hat{R}_{-\tau}^{-\tau-t} .$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\psi \circ J = \bar{\psi}$, ce qui donne la première partie. La seconde partie s'en déduit à l'aide de 2.6.1.

3.3 Invariance par rotation : le semi-groupe de Bessel non-commutatif.

Nous abordons là un des aspects les plus intéressants du mouvement brownien non-commutatif, qui est l'existence d'un semi-groupe sur un espace commutatif, dont la dilatation naturelle, donnée par 1.6 est non-commutative.

Remarquons que la fonction ψ est invariante par l'action du groupe unitaire $U(d)$ sur H_d, ce qui entraine que l'algèbre $C_R^*(H_d)$ est invariante par $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$. On en déduit donc par restriction un semi-groupe de noyaux markoviens sur le spectre X_d de cette algèbre.

3.3.1. Définition *On appelle semi-groupe de Bessel non-commutatif le semi-groupe de noyaux sur X_d donné par la restriction de $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ à $C_R^*(H_d)$.*

Le nom semi-groupe de Bessel non-commutatif est justifié par l'analogie avec la construction du semi-groupe de Bessel classique rappelée en 1.4. Nous allons calculer le semi-groupe de Bessel non-commutatif.

3.3.1. Proposition. *Le semi-groupe de Bessel non-commutatif est donné par les noyaux $q_t(x,dy)$ sur $X_d \times X_d$ définis ci-dessous. (On désigne par δ_x la masse de Dirac en un point $x \in X_d$).*
i) Si $x = (\sigma, -k\sigma)$ avec $\sigma < 0$ et $\tau = \sigma + t < 0$, alors

$$q_t(x,dy) = \sum_{l=k}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(k-1)!(l-k)!}(1-\frac{\tau}{\sigma})^{l-k}(\frac{\tau}{\sigma})^k \delta_{(\tau,-l\tau)}(dy) .$$

ii) Si $x = (\sigma, -k\sigma)$ avec $\sigma < 0$ et $\sigma = -t$, en notant $y = (0,r)$,

$$q_t(x,dy) = \frac{(\frac{r}{t})^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\frac{r}{t}}\delta_0 \otimes dr .$$

iii) Si $x = (\sigma, -k\sigma)$ avec $\sigma < 0$ et $\tau = \sigma + t > 0$, alors

$$q_t(x,dy) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+k-1)!}{(k-1)!l!}(1-\frac{\tau}{t})^{l+k}(\frac{\tau}{t})^k \delta_{(\tau,l\tau)}(dy) .$$

iv) Si $x = (0,r)$, alors

$$q_t(x,dy) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\frac{r}{t})^l}{l!}e^{-\frac{r}{t}}\delta_{t,lt}(dy) .$$

v) Si $x = (\sigma, k\sigma)$ avec $\sigma > 0$, $\tau = \sigma + t$

$$q_t(x, dy) = \sum_{l=0}^{l=k} \frac{k!}{l!(k-l)!}(1 - \frac{\sigma}{\tau})^{k-l}(\frac{\sigma}{\tau})^l \delta_{\tau, l\tau}(dy) .$$

Démonstration. Soit $x \in X_d$ et χ_x le caractère de l'algèbre $C^*_R(H_d)$ correspondant, qui est donné par la formule $\chi_x(f) = \int_{H_d} \omega_x(g) f(g) dg$ sur $L^1(H_d)$; alors $\chi_x \circ Q_t$ définit un état sur $C^*_R(H_d)$, qui est donné par la mesure de probabilité $q_t(x, dy)$ sur X_d. Or, pour $f \in L^1(H_d)$ on a $\chi_x \circ Q_t(f) = \int_{H_d} f(g) e^{-t\psi(g)} \omega_x(g) dg$. Il suffit donc de trouver l'unique décomposition de la fonction $\omega_x e^{-t\psi}$ sous la forme $\omega_x e^{-t\psi} = \int_{X_d} \omega_y q_t(x, dy)$ pour obtenir la mesure $q_t(x, dy)$. On peut faire ces calculs en utilisant les formules explicites (2.4.1, 2.4.2, 2.4.3) et les propriétés des polynômes de Laguerre et des fonctions de Bessel. Nous allons suivre une autre voie qui est plus proche de l'esprit des probabilités quantiques.

Soit $x \in X_d$, d'abscisse σ, et soit η un état sur $\mathcal{A}_\sigma$ tel que la restriction de $\eta \circ \pi_\sigma$ à $C^*_R(H_d)$ soit la mesure de Dirac en x. Il résulte alors des considérations sur les opérateurs de nombre des représentations de H_d que la mesure $q_t(x, dy)$ est portée par $(\sigma + t) \times \mathbb{R}_+$, et n'est autre que la loi de l'opérateur $\sum_{j=1}^d d(\pi_\sigma \otimes \pi_t)(\alpha_j^*) d(\pi_\sigma \otimes \pi_t)(\alpha_j)$ dans l'état $\eta \otimes h_0^t$ sur $\mathcal{A}_\sigma \otimes \mathcal{A}_t$. Nous allons utiliser ce fait pour calculer la loi $q_t(x, dy)$ dans le cas $\sigma \geq 0$.

Commençons par le cas $d = 1$.

On considère les isomorphismes $\Gamma(\mathbb{C}) \sim L^2(\mathbb{R})$ (définis au paragraphe 2.2) avec $\frac{1^{\circ n}}{\sqrt{n!}} \sim h_n^\sigma$, dans lequel les opérateurs $d\pi_\sigma(\alpha)$ et $d\pi_\sigma(\alpha_j^*)$ correspondent aux opérateurs $a^-_{\sqrt{\sigma}}$ et $a^+_{\sqrt{\sigma}}$.

Si $\sigma = 0$, soit $x = (0, r)$, on prend $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $|\xi|^2 = r$. La loi que l'on cherche est celle de l'opérateur $(a^+_{\sqrt{t}} + \xi)(a^-_{\sqrt{t}} + \bar{\xi})$ dans l'état vide, qui est une loi de Poisson de paramètre $\frac{r}{t}$ sur $\{kt | k \in \mathbb{N}\}$ (voir par exemple [M1]). On obtient ainsi la formule iv).

Pour $\sigma > 0$, et $x = (\sigma, k\sigma)$, l'espace de la représentation $\pi_\sigma \otimes \pi_t$ est isomorphe à $\Gamma(\mathbb{C}) \otimes \Gamma(\mathbb{C}) \sim \Gamma(\mathbb{C}^2)$ et l'opérateur $d(\pi_\sigma \otimes \pi_t)(\alpha)$ correspond à l'opérateur d'annihilation $a^-_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})}$ par le vecteur $(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})$ de $\mathbb{C}^2$ et $d(\pi_\sigma \otimes \pi_t)(\alpha)^*$ à l'opérateur de création $a^+_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})}$. Considérons l'état pur associé au vecteur $\frac{1^{\circ k}}{\sqrt{k!}} \otimes 1^{\circ 0}$, la mesure $q_t(x, dy)$ est donc la loi de l'opérateur $a^+_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})} a^-_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})}$ dans cet état. L'opérateur $e^{iva^+_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})} a^-_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})}}$ n'est autre que l'opérateur de seconde quantification, dans $\Gamma(\mathbb{C}^2)$, de l'opérateur $e^{iv(\sigma+t)\Pi_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})}}$ où $\Pi_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})}$ est l'opérateur de projection orthogonale sur le vecteur $(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})$ dans $\mathbb{C}^2$. Pour tous $u, v \in \mathbb{C}$ on a

$$\begin{aligned} < e^{iv(\sigma+t)\Pi_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})}} \mathcal{E}(z, 0), \mathcal{E}(z', 0) > &=< \mathcal{E}(e^{iv(\sigma+t)\Pi_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})}}(z, 0)), \mathcal{E}(z', 0) > \\ &= e^{z\bar{z}' \frac{e^{iv(\sigma+t)}t + \sigma}{\sigma + t}} \end{aligned}$$

En examinant le coefficient de $z^k \bar{z}'^k$ dans cette expression on trouve la transformée de Fourier de la loi $q_t(x, dy)$ qui vaut

$$\int_{X_1} e^{ivy} q_t(x, dy) = \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(l-k)!} e^{iv(\sigma+t)l} (\frac{\sigma}{t+\sigma})^l (\frac{t}{t+\sigma})^{k-l} .$$

Ceci démontre la formule v).

Les propositions 3.2.1 et 3.2.2 permettent, par dualité, de déduire les formules i) et ii) de v) et iv). La formule iii) est alors obtenue en utilisant la relation de Chapman-Kolmogorov $q_t(x, dy) = \int_X q_{-\sigma}(x, dz) q_{t+\sigma}(z, dy)$ et les formules ii) et iv).

Pour traiter le cas d quelconque, on utilise la restriction de Q_t à l'algèbre $C^*_D(H_d)$ (définie en 2.4). Il est facile de voir que ce semi-groupe est celui du processus sur $X^{(d)}$, donné par $(T_t, Y_t^1, \ldots, Y_t^d)$ où les processus (T_t, Y_t^j) à valeurs dans X_1 sont des processus de Markov de semi-groupe $(q_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ sur X_1, indépendants. Le semi-groupe $(q_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ sur X_d est le semi-groupe du processus de Markov $(T_t, Y_t^1 + \ldots + Y_t^d)$, que l'on peut donc déduire du semi-groupe sur X_1.

Comme $(Q_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ laisse invariante la sous-algèbre $C^*_R(H_d)$, on voit que les semi-groupes $R_s^{\pm}$, laissent invariante la sous-algèbre de $\mathcal{A}_{\pm 1}$ engendrée par l'opérateur de nombre $\Lambda_{\pm 1}$; on en déduit des semi-groupes de noyaux markoviens sur les spectres de $\Lambda_{\pm 1}$ que l'on peut calculer grâce à la proposition précédente.

3.3.3. Corollaire. *Les semi-groupes de noyaux induits par $(R_s^{\pm})_{s \in \mathbf{R}_+}$ sur les spectres de $\Lambda_{\pm 1}$ sont donnés par les probabilités de transition suivantes sur* $\mathbf{N}$ *et* $\mathbf{N} \backslash \{0, 1, \ldots, d-1\}$ *respectivement*

$$\begin{aligned} r_s^+(k, l) &= \frac{k!}{l!(k-l)!} e^{-ls} (1 - e^{-s})^{k-l} \text{ pour } 0 \leq l \leq k \\ &= 0 \text{ sinon;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_s^-(k, l) &= \frac{(l-1)!}{(l-k)!(k-1)!} e^{-ks} (1 - e^{-s})^{l-k} \text{ pour } l \geq k \geq d \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Le semi-groupe $(r_s^-)_{s \in \mathbf{R}_+}$ est le semi-groupe du processus de Yule, ou processus de fission binaire (cf [At]). C'est un processus de Galton-Watson dont la loi de reproduction est une masse de Dirac en 2, autrement dit, ce processus compte le nombre total de particules à l'instant t dans un système de particules où chaque particule se divise en deux au bout d'un temps exponentiel, indépendamment des autres. C'est ce semi-groupe qui intervient dans [vW2] dans la description du phénomène de superradiance.

Le semi-groupe $(r_s^+)_{s \in \mathbf{R}_+}$ représente le processus inverse, c'est un processus de mort, qui compte le nombre de particules restant en vie à l'instant t dans un système où toutes les particules sont indépendantes et ont un temps de vie exponentiel.

Les trajectoires d'un processus de Markov obéissant au semi-groupe $(q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ sont faciles à décrire à partir de celles des processus de semi-groupes $r^{\pm}$. Supposons que ce processus parte du point $(\sigma, -\sigma)$ avec $\sigma < 0$, son abscisse suit un mouvement de translation uniforme à vitesse 1. Il va commencer par se déplacer le long de la droite de pente -1 suivant $t \mapsto (\sigma+t, -\sigma-t)$. Le processus saute verticalement sur la droite de pente -2 avec un taux $\frac{dt}{-(\sigma+t)}$, puis lorsqu'il est arrivé sur cette droite, il continue sa translation uniforme vers la droite, avec cette fois un taux de saut de $\frac{2dt}{-(\sigma+t)}$ vers la droite de pente -3, et ainsi de suite; en général, si le processus est sur la droite de pente $-k$, en un point d'abscisse $\tau < 0$, sa probabilité de sauter sur la droite de pente $-(k+1)$ pendant l'intervalle de temps dt est $\frac{kdt}{-\tau}$. Lorsque l'abscisse tend vers zéro, le nombre de sauts devient infini, mais le processus converge presque sûrement vers un point de la droite d'abscisse 0. Un moyen simple de voir cela consiste à remarquer que l'ordonnée sur X_d est une fonction harmonique positive pour le semi-groupe q_t, par conséquent la composante verticale du processus est une martingale positive et admet une limite lorsque l'abscisse tend vers 0. Après le passage en zéro, le processus commence à mourir, sa trajectoire, partant d'un point $(\varepsilon, k\varepsilon)$ commence par suivre la droite de pente k, avec un taux de saut sur la droite de pente $k-1$ égal à $\frac{kdt}{\varepsilon}$. Au bout d'un temps fini, le processus arrive sur la droite d'ordonnée zéro, où il continue sa translation vers la droite pour toujours.

La figure 2 donne un exemple typique de trajectoire de ce processus.

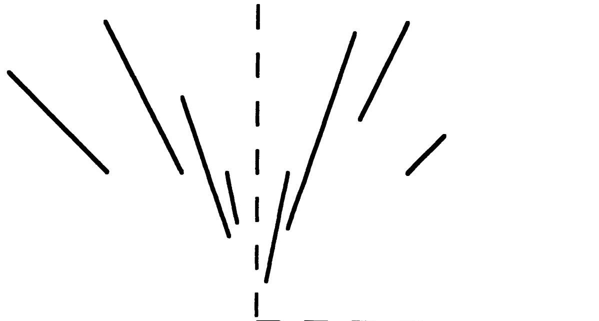

fig. 2
Une trajectoire typique sous q_t.

(Au voisinage de $x = 0$ le nombre infini de sauts rend les trajectoires difficiles à représenter.)

Un aspect tout à fait remarquable de ces processus est que les formules de transition ne dépendent pas de la dimension d du groupe d'Heisenberg, seul l'espace X_d dépend de cette dimension. En fait, cela est une conséquence de la propriété d'additivité des processus de Bessel non-commutatifs, c'est-à-dire le fait que l'opérateur de nombre dans une représentation de H_d peut être considéré comme une somme de d opérateurs de nombre, les opérateurs $d\pi(\alpha_j^*)d\pi(\alpha_j)$. Cette propriété peut se vérifier par le calcul, mais elle est probabilistiquement évidente lorsqu'on a l'interprétation en terme des processus de Galton-Watson, c'est simplement la propriété de branchement de ces processus.

Donnons-nous une représentation π de H_d sur un espace de Hilbert H_π, avec un état ν, et considérons les opérateurs $\lambda_t = \sum_{j=1}^d (d\pi(\alpha^*)\otimes Id + Id\otimes A_t^{j*})(d\pi(\alpha)\otimes Id + Id\otimes A_t^j)$ sur l'espace $H_\pi \otimes \Gamma(L^2(\mathbb{R}_+)$. Les opérateurs λ_t fournissent un dilatation du semi-groupe $(q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, au sens où, pour toute suite de fonctions bornées $h_0, h_1, \ldots, h_n$ sur $\mathbb{R}_+$, et toute suite croissante de réels $t_1, \ldots, t_n$ on a

$$\nu \otimes \omega(h_0(\lambda_0)h_1(\lambda_{t_1})\ldots h_n(\lambda_{t_n})) = \nu(h_0 q_{t_1}(h_1 \ldots q_{t_n - t_{n-1}}(h_n)\ldots)$$

Dans le second membre de cette formule, une fonction h_j sur $\mathbb{R}_+$ est considérée comme une fonction sur X_d ne dépendant que de l'ordonnée.

Pour un observateur chronologique, rien ne distingue le processus λ_t de la seconde coordonnée d'un processus de Markov de semi-groupe $(q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sur X_d. Mais les opérateurs λ_t ne commutent pas entre eux et en fait, il est facile de voir que la dilatation que l'on obtient du semi-groupe q_t n'est pas équivalente à la dilatation commutative canonique (sauf dans le cas où l'état initial est donné par la fonction constante égale à 1 sur H_d). Un phénomène analogue avec le semi-groupe r^- se produit et est décrit dans [vW2].

Pour terminer avec les processus de Bessel non-commutatifs, remarquons que l'on peut déduire du semi-groupe $(q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ des fonctions positives, harmoniques en espace-temps pour le processus de Yule. En effet, en posant $h(s,k) = q_{e^{-s}}\big((e^{-s}, e^{-s}k),(0,r)\big)$ pour $r \in \mathbb{R}_+$, on obtient une fonction harmonique en espace temps pour le semi-groupe r^-. En fait on obtient ainsi toutes les fonctions harmoniques positives minimales en espace temps de ce processus (voir L. Overbeck [O]). Ceci montre que le semi-groupe $(q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, restreint à la partie de X_d d'abscisse négative, s'obtient à partir du processus de Yule, de semi-groupe r^-, en prolongeant ce dernier à son espace de Martin en espace-temps et en effectuant un changement de temps logarithmique. De même, le processus sur la partie d'abscisse positive s'obtient en rajoutant une frontière d'entrée en espace-temps en 0 au processus de mort pure de semi-groupe r^+.

3.4. Fonctions paraboliques non-commutatives bornées.

La dernière remarque du paragraphe 3.3 suggère que la singularité en zéro de la C^*-algèbre de H_d s'interprète naturellement comme une frontière d'entrée et de sortie en espace-temps pour les semi-groupes d'Ornstein-Uhlenbeck non-commutatifs R^+ et R^- sur $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^d))$. Nous allons montrer ci-dessous un résultat dans cette direction en étudiant les fonctions paraboliques non-commutatives bornées dans le demi-espace $\tau < 0$, et donner un théorème de représentation intégrale de ces fonctions.

3.4.1 Définition. *Une fonction parabolique non-commutative bornée (sur $\tau < 0$) est une famille $(H_\tau)_{\tau<0}$ d'éléments $H_\tau \in \mathcal{A}''_\tau$ tels que $\sup_{\tau<0} \|H_\tau\| < \infty$ et pour tous $\sigma < \tau < 0$ on ait*

$$R_\sigma^\tau(H_\tau) = H_\sigma\ .$$

Pour les fonctions paraboliques usuelles, bornées dans un demi-espace, on a un résultat de représentation intégrale au moyen du noyau de la chaleur, qui est un analogue parabolique de la formule de Poisson pour les fonctions harmoniques bornées dans le disque unité (voir par exemple [W], Ch. VII). En fait on sait également que le noyau de la chaleur permet de représenter toutes les fonctions paraboliques positives dans le demi-espace ([W] Ch. VIII), ce qui permet de déterminer la frontière de Martin parabolique de ce demi-espace (cf [Do] 2.XVI et 2.XIX). Ici nous allons nous contenter de donner un résultat simple de représentation intégrale des fonctions paraboliques bornées, le résultat analogue pour les fonctions paraboliques positives est certainement vrai, mais l'énoncé et la démonstration d'un tel résultat, qui impliqueraient d'utiliser des opérateurs non-bornés, nous emmèneraient trop loin pour cet article.

3.4.2. Proposition. *Pour toute fonction parabolique non-commutative bornée, il existe une fonction H_0, mesurable, bornée sur $\mathbb{R}^{2d}$, telle que pour tout $\tau < 0$*

$$H_\tau = R_\tau^0(H_0)\ .$$

Démonstration. Soient $\tau < 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\varepsilon + \tau < 0$. D'après (2.6.1) et (2.6.2), on a

$$\begin{aligned}\hat{R}^\tau_{\varepsilon+\tau}(H_\tau) &= \hat{R}^\tau_{\tau+\varepsilon}(R^{-\varepsilon}_\tau(H_\varepsilon)) \\ &= R^0_{\tau+\varepsilon}(\hat{R}^{-\varepsilon}_0(H_{-\varepsilon}))\end{aligned}$$

La condition $\sup_{\tau<0}\|H_\tau\| < \infty$ entraîne que $(\kappa_\varepsilon = \hat{R}^{-\varepsilon}_0(H_{-\varepsilon}))_{\varepsilon\in\mathbf{R}_+}$ est une famille bornée de fonctions universellement mesurables sur $\mathbb{R}^d$, donc il existe une suite $\varepsilon_n \to 0$ telle que $H_{-\varepsilon_n}$ converge faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soient $a, b \in L^2(\mathbb{R}^d)$, lorsque $\varepsilon \to 0$ on a

$$< \hat{R}^\tau_{\varepsilon+\tau}(H_\tau)a, b > \to < H_\tau a, b > ;$$

or d'après ce qu'on a vu en 2.6

$$\begin{aligned}< \hat{R}^\tau_{\varepsilon_n+\tau}(H_\tau)a, b > &= \int_{\mathbf{C}^d} \kappa_{\varepsilon_n}(\xi) < \eta_\tau(\xi)a, b > d\xi \\ &\to \int_{\mathbf{C}^d} \kappa_0(\xi) < \eta_\tau(\xi)a, b > d\xi\end{aligned}$$

quand $n \to \infty$, car $\eta_\tau(\xi)$ est faiblement intégrable en ξ (cf 2.6) par conséquent, si on pose $H_0 = \kappa_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $H_\tau = R^0_\tau(H_0)$.

Dans la proposition 3.4.2, les opérateurs $\eta_\tau(\xi)$ jouent le rôle de noyaux de la chaleur non-commutatifs. La théorie du potentiel pour les noyaux de la chaleur dans le cas classique est bien connue, (voir par exemple le livre [Do] Ch. XV à XIX). La théorie non-commutative du potentiel reste à étudier, ce qu'on espère pouvoir faire dans le futur.

Références.

[Ar] H. Araki, *Factorisable representations of current algebras, Pub. R.I.M.S., Kyoto University, Ser. A, Vol. 5, n° 3, 1970, 361-422.*

[At] K.B. Athreya et P.E. Ney, *Branching processes, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg , 1972.*

[Bh] R.V. Bhat, K.R. Parthasarathy, *Markov Dilations of Nonconservative Dynamical Semigroups and a Quantum Boundary theory, à paraître, Ann. I.H.P.*

[B1] P. Biane, *Calcul stochastique non-commutatif, Lectures on Probability Theory, Lecture Notes in Mathematics 1608, Springer, 1995, 1-96.*

[B2] P. Biane, *Quantum random walks on the dual of SU(n), Prob. Th. and Rel. fields, 89, 1991, 117-129.*

[Bo] P. Bougerol, *Théorème central limite local sur certains groupes de Lie, Ann. Sc. Éc. Norm. Sup., 4^e^ série, 14, 1981, p. 403 à 432.*

[C-H] A.M. Cockroft et R.L. Hudson, *Quantum mechanical Wiener processes, J. Multiv. Anal. 7, 1978, 107-124.*

[D-M] C. Dellacherie et P.A. Meyer, *Probabilités et Potentiel, Chapitres IX à XI, Hermann, Paris , 1983.*

[Di] J. Dixmier, *Les C^*-algèbres et leurs représentations, Gauthiers Villars, Paris, 1964.*

[Do] J.L. Doob, *Classical Potential theory and its Probabilistic Counterpart, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg , 1984.*

[F] J. Faraut, *Analyse harmonique et fonctions spéciales, in J. Faraut, K. Harzalah, Deux cours d'analyse harmonique, Progress in Mathematics, vol. 69, Birkhäuser, Basel 1987.*

[H-P] R.L. Hudson et K.R. Parthasarathy, *Quantum Ito's fromula and stochastic evolutions, Comm. Math. Phys., 93, 1984, 301-323.*

[I-M] K. Ito et H.P. Mac Kean, *Diffusion processes and their sample paths, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1974*

[L] R.Y. Lee, *Field algebras of operator fields trivial except at one point, Indiana Univ. Math. J. 26 (1977) 351-372.*

[M1] P.A. Meyer, *Eléments de Probabilités Quantiques, Séminaire de Probabilités XX, Lecture Notes in Mathematics 1204, Springer, 1986, 186-312.*

[M2] P.A. Meyer, *Quantum Probability for probabilists, Lecture Notes in Mathematics 1538, Springer, 1993*

[O] L. Overbeck, *Martin boundaries of some branching processes, Ann. I.H.P. 30, 2, (1994), 181-196.*

[P] K.R. Parthasarathy, *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus, Monographs in Mathematics, Vol. 85, Birkhäuser, Basel, 1992.*

[P2] K.R. Parthasarathy, *A generalized Biane's process, Séminaire de Probabilités XXIV, Lecture Notes in Mathematics 1426, Springer, 1990, 345-348.*

[P-S] K.R. Parthasarathy et K. Schmidt, *Positive definite kernels, Continuous Tensor Products, and Central Limit Theorems of Probability Theory, Lecture Notes in Mathematics 272, Springer, 1972.*

[Sa] J.L. Sauvageot, *Markov quantum semi-groups admit covariant markov C^*-dilations, Comm. Math. Phys. 106, 1986, 91-103.*

[Sc] M. Schürmann, *White noise on bialgebras, Lecture Notes in Mathematics 1544, Springer, 1993.*

[S-Z] S. Stratila et L. Zsido, *Lectures on von Neumann algebras, Abacus press, Turnbridge Wells, 1979.*

[Tak] M. Takesaki, *Conditionnal expectations in von Neumann algebras, J. Funct. Anal. 9, 1972, 306-321.*

[Tay] M.E. Taylor, *Non commutative harmonic analysis, Mathematical surveys and monographs, 22, A.M.S. Providence, 1986.*

[V] D. Voiculescu, *Remarks on the singular extension in the C^*-algebra of the Heisenberg group, J. Operator Theory 5 (1981) 147-170.*

[vW1] W. von Waldenfels, *Spontaneous light emission described by a quantum stochastic differential equation, Quantum Probability and applications II, Lecture Notes in Mathematics 1136, Springer Berlin, Heidelberg, New York, 1985, 361-374.*

[vW2] W. von Waldenfels, *The inverse oscillator in a heat bath as a quantum stochastic process, preprint, Heidelberg, 1994.*

[W] D. Widder, *The heat equation, Academic Press, New York, 1975.*

Ce travail a été en partie soutenu par le contrat CAPITAL HUMAIN ET MOBILITÉ numéro ERCHRXCT 930094

C.N.R.S. Laboratoire de probabilités
Université PARIS 6
Tour 56, 3^e étage 4, place Jussieu
75252 PARIS CEDEX 05

F. COMETS

A spherical bound for the Sherrington-Kirkpatrick model

Astérisque, tome 236 (1996), p. 103-108
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__103_0>

A Spherical Bound for the Sherrington-Kirkpatrick Model

F. Comets

Abstract. — We prove existence of a phase transition for the Sherrington-Kirkpatrick model at $\beta = 1$: making use of the domination by the spherical model, we derive a bound for the pressure as well as for the ground state energy.

1. Introduction. The Sherrington-Kirkpatrick (SK) model consists of a set of N binary spins $\sigma_i \in \{-1, +1\}$ with Hamiltonian

$$H_N(\sigma) = -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1 \le i < j \le N} J_{ij}\sigma_i\sigma_j - \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{1 \le i \le N} J_{ii}\sigma_i^2 \tag{1.1}$$

where the couplings J_{ij} are independent Gaussian random variables with mean zero and unit variance. Compared with the original definition [SK] we have added the second summand in (1.1) which does not depend on σ in the binary case and does not change the results below. The partition function at inverse temperature β and the pressure of the model are the random variables

$$Z_N^{\mathrm{SK}} = \mathrm{E}_\sigma \exp\{-\beta H_N(\sigma)\}\,, \qquad p_N^{\mathrm{SK}} = \frac{1}{N}\log Z_N^{\mathrm{SK}} \tag{1.2}$$

depending on the J_{ij}'s; in (1.2) we have used the notation $\mathrm{E}_\sigma = 2^{-N}\sum_{\sigma\in\{-1,+1\}^N}$ to denote the average over the spin configurations, and we keep the symbol $\mathbb{E}$ for expectations over the couplings J_{ij}.

Among the few mathematical results for this model it is known that, at high temperature, the "quenched" and "annealed" behaviors coincide:

$$p_N^{\mathrm{SK}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\beta^2}{4} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\log \mathbb{E}\, Z_N^{\mathrm{SK}}\,. \tag{1.3}$$

Convergence in probability and in L_p, $1 \le p < \infty$, follows from the fluctuations results of [ALR] or [CN], and convergence with probability one follows using in addition the concentration property proved in [T] from general considerations, or in [BGP] more directly. On the other hand, the convergence (1.3) cannot hold for large β since the entropy per spin is at most $\log 2$ for binary spins.

In this note we show that the convergence in (1.3) only happens when $\beta \leq 1$ and hence phase transition takes place at $\beta_c = 1$. For this we prove below a (weak) bound for the limit points of p_N^{SK}, which is a self-averaging quantity [PS]. This bound implies another one for the ground state energy.

These bounds reflect the domination of the SK model by the spherical model, where the uniform probability measure E_σ on the N-dimensional hypercube $\{-1,+1\}^N$ is replaced with the uniform probability measure E_η on the sphere

$$\{\eta \in \mathbb{R}^N \ ; \quad |\eta|^2 := \sum_{i=1}^N \eta_i^2 = N\} \ .$$

The partition function and pressure of this second model

$$Z_N^{\mathrm{S}} = \mathrm{E}_\eta \exp\{-\beta H_N(\eta)\} \ , \qquad p_N^{\mathrm{S}} = \frac{1}{N} \log Z_N^{\mathrm{S}} \tag{1.4}$$

depend only on the eigenvalues of the quadratic form H_N. Spherical models, introduced by Berlin and Kac [BK], are completely solvable in many instances. They are commonly analysed via the method of steepest descent, or more simply via the mean-spherical approximation (i.e., as Gaussian models where the spherical constraint is satisfied in the mean). The asymptotics of (1.4) are studied in [KTJ] and in [Th], but for completeness of this note, we give below a quick derivation of the bound.

Acknowledgements: I thank Olivier Catoni and Leonid Pastur for stimulating conversations and useful remarks about these bounds.

2. Spherical bound and consequences.

The $N \times N$ symmetric matrix M, with coefficients $M_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{N}} J_{ij}$ if $i < j$ and $M_{ii} = \frac{1}{\sqrt{2N}} J_{ii}$, has a.s. simple eignevalues $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$ with normalized eigenvectors $\phi_1 = (\phi_{1,j})_{j \leq N}, \ldots, \phi_N$. Since the distribution of M is invariant under orthogonal transformations, the diagonal matrix Λ of the eigenvalues $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ is independent of the orthogonal matrix $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_N)$, and we may clearly choose the frame ϕ such that it is uniformly distributed on the set $O(N)$ of orthogonal matrices; in particular one has for any positive measurable function F

$$\mathbb{E}\{F(M)|\Lambda\} = \mathbb{E}_\phi \ F(\phi\Lambda\phi^t) \ , \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.} \tag{2.1}$$

with $\mathbb{E}_\phi$ the expectation in ϕ uniformly distributed on $O(N)$. This implies that the spherical model dominates the SK model: more precisely, for any fixed binary spin σ, the distribution of the scalar products $(\sigma.\phi_i)_{i \leq N}$ under $\mathbb{E}_\phi$ is the uniform measure E_η on the sphere, and then

$$\mathbb{E}\{Z_N^{\mathrm{SK}}|\Lambda\} = Z_N^{\mathrm{S}} \ . \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.} \tag{2.2}$$

On the other hand, by Wigner's semicircle law, the empirical measure of eigenvalues converges weakly [G]

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\delta_{\lambda_k} \xrightarrow[N\to\infty]{} w(\lambda)\,d\lambda := \frac{2}{\pi}(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{]-1,1[}(\lambda)\,d\lambda \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.} \qquad (2.3.a)$$

and moreover the maximal and minimal eigenvalues do not deviate [BY]

$$\lim_{N\to\infty}\lambda_N = -\lim_{N\to\infty}\lambda_1 = 1\,. \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.} \qquad (2.3.b)$$

Let us now state our main result which implies non-analyticity of the pressure at $\beta = 1$.

Proposition: *a) For all $\beta \geq 1$,*

$$\limsup_{N\to\infty} p_N^{\mathrm{SK}} \leq \beta - \tfrac{1}{2}\log\beta - \tfrac{3}{4}\,. \qquad \mathbb{P}\text{-}a.s.$$

b) In particular, $\limsup_{N\to\infty} p_N^{\mathrm{SK}} < \beta^2/4$ *$\mathbb{P}$-a.s. when $\beta > 1$, though the limit* (1.3) *holds when* $0 \leq \beta \leq 1$.

In fact the bound in a) is equal to the limit of p_N^{S} [Th]. For $\beta > 1$ but close to 1, the bound is larger than the Sherrington-Kirkpatrick solution for the pressure of the SK model, and then it does not prove absence of self-averaging of the Edwards-Anderson order parameter [PS] for these values of β.

Proof. We will prove that

$$\limsup_{N\to\infty} p_N^{\mathrm{SK}} \leq \inf_{s>\beta}\left\{s - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\int \log 2(s-\beta\lambda)\,w(\lambda)\,d\lambda\right\} \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.} \qquad (2.4)$$

Then, noticing that the function between braces in (2.4) is convex in s, and using the identities

$$\begin{cases}\int (s-\beta\lambda)^{-1}\,w(\lambda)\,d\lambda = 2\beta^{-2}\left[s-(s^2-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\right] & (2.5.\mathrm{a})\\ \int \log(s-\beta\lambda)\,w(\lambda)\,d\lambda = \beta^{-2}s\left[s-(s^2-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\right] + \log\left(\left[s+(s^2-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\right]/2\right) - 1/2 & (2.5.\mathrm{b})\end{cases}$$

valid for $s > \beta$, it can be checked that the bound in (2.4) is achieved for $\beta < 1$ at the saddle-point $s = (\beta^2+1)/2$ and is equal to $\beta^2/4$, but corresponds to $s = \beta$ when $\beta \geq 1$ and is equal to $\beta - \frac{1}{2}\log\beta - \frac{3}{4}$.

We now prove (2.4). Let $s > s_0 > \beta$; and assume that $\beta\lambda_N \leq s_0$. Then,

$$a_N := \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left\{\beta\zeta^t\Lambda\zeta - s|\zeta|^2\right\}d\zeta = \exp\left\{\tfrac{N}{2}\log 2\pi - \tfrac{1}{2}\log\det 2(sI-\beta\Lambda)\right\}. \qquad (2.6)$$

For $\epsilon \in\,]0,1[$, let $v_{N,\epsilon}$ be the Euclidean volume of $\left\{\zeta \in \mathbb{R}^N, |\zeta|^2/N \in [1-\epsilon, 1]\right\}$. The uniform probability measure on this domain makes the vectors $\eta = \sqrt{N}(\zeta_i/|\zeta|)_{i\leq N}$

and $|\zeta|^2/N$ independent, the first one with distribution $\mathbb{E}_\eta$ and the second one with mean $m_{N,\epsilon} \in [1-\epsilon, 1]$. Therefore, we have

$$\begin{aligned} a_N &\geq \int \exp \frac{|\zeta|^2}{N} \{\beta\eta^t\Lambda\eta - sN\}\, \mathbb{1}_{N^{-1}|\zeta|^2\in[1-\epsilon,1]}\, d\zeta\, v_{N,\epsilon}^{-1}.v_{N,\epsilon} \\ &\geq v_{N,\epsilon}.\mathrm{E}_\eta \exp m_{N,\epsilon}\{\beta\eta^t\Lambda\eta - sN\} \end{aligned}$$

from Jensen inequality for E_η. Since $s > s_0 \geq \beta\lambda_N$, the last term in braces is negative, the function $m \mapsto \mathrm{E}_\eta \exp m\{\beta\eta^t\Lambda\eta - sN\}$ is decreasing and

$$a_N \geq v_{N,\epsilon}\, \mathrm{E}_\eta \exp\{\beta\eta^t\Lambda\eta - sN\} = V_{N,\epsilon} \exp\{-Ns\}\, Z_N^{\mathrm{S}} \ .$$

Combining (2.6) and the estimate

$$\begin{aligned} v_{N,\epsilon} &= \pi^{N/2}\Gamma(1+N/2)^{-1}\, N^{N/2}\, [1 - \exp\frac{N}{2}\log(1-\epsilon)] \\ &= \exp\frac{N}{2}\{\log 2\pi + 1 + \mathcal{O}_\epsilon(1)\} \end{aligned}$$

with some (deterministic) sequence $\mathcal{O}_\epsilon(1)$ going to zero, we obtain finally for $\beta\lambda_N \leq s_0$

$$p_N^{\mathrm{S}} \leq s - \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N} \log 2(s-\beta\lambda_k) + \mathcal{O}_\epsilon(1) \ . \tag{2.7}$$

Letting $b = s - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int \log 2(s-\beta\lambda)\, w(\lambda)\, d\lambda$ we define the following set A_N of couplings $A_N = \{\lambda_N \leq s_0/\beta, \lambda_1 > -2, s - \frac{1}{2} - \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^N \log 2(s-\beta\lambda_k) < b+\epsilon\}$. We have

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, Z_N^{\mathrm{SK}}\, \mathbb{1}_{A_N} &= \mathbb{E}\, \mathbb{1}_{A_N} \mathrm{E}(Z_N^{\mathrm{SK}}|\Lambda) \\ &= \mathbb{E}\, \mathbb{1}_{A_N}\, Z_N^{\mathrm{S}} && \text{(from (2.2))} \\ &\leq \exp N(b+2\epsilon) && \text{for large } N \quad \text{(from (2.7))}, \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}\big(\{p_N^{\mathrm{SK}} \geq b+3\epsilon\} \cap A_N\big) \leq \exp -N\epsilon$$

and the Borel-Cantelli lemma implies that $\mathbb{P}(\limsup_{N\to\infty} \{p_N^{\mathrm{SK}} \geq b+3\epsilon\} \cap A_N) = 0$. On the other hand we know from (2.3.a and b) that $\mathbb{P}(\liminf_{N\to\infty} A_N) = 1$, therefore $\mathbb{P}(\limsup_{N\to\infty} \{p_N^{\mathrm{SK}} \geq b+3\epsilon\}) = 0$ for all $\epsilon > 0$. We have finally $\limsup_{N\to\infty} p_N^{\mathrm{SK}} \leq b$ $\mathbb{P}$-a.s., which shows (2.4).

The statement b) is an obvious consequence of a), except for $\lim_N p_N^{\mathrm{SK}} = \beta^2/4$ if $\beta = 1$; but this follows from convexity of p_N^{SK} in β, from (1.3) and a) for $\beta = 1$. See also [Gu] for the case $\beta = 1$. ∎

Simple entropy considerations yield an improvement of the proposition, which in turn reflects as a bound on the ground state energy (per site)

$$\mathcal{E}_N = \max_\sigma \left\{ \frac{-1}{N} H_N(\sigma) \right\} .$$

Following [ALR] note that, since the entropy rate does not exceed $\log 2$, the function $(p_N^{\mathrm{SK}}(\beta)+\log 2)/\beta$ is non-increasing. Hence if some asymptotic upper bound $\bar{p}(\beta)$ for the pressure $p_N^{\mathrm{SK}}(\beta)$ has its tangent line at some $\beta_0 > 0$ which intersect the vertical axis at height $-\log 2$, then this tangent is itself an asymptotic upper bound for $\beta \geq \beta_0$, and its slope is an asymptotic upper bound for $\mathcal{E}_N$. Taking here $\bar{p}(\beta) = \beta^2/4$ for $\beta \leq 1$ and $\bar{p}(\beta) = \beta - \frac{1}{2}\log\beta - \frac{3}{4}$ for $\beta > 1$ we obtain the following.

Corollary: *$\mathbb{P}$-a.s.,* $\limsup_{N\to\infty} \mathcal{E}_N \leq 1 - e^{\frac{1}{2}}/8 = 0.79390\ldots$
and

$$\limsup_{N\to\infty} p_N^{\mathrm{SK}} \leq (1 - e^{\frac{1}{2}}/8) - \log 2 , \quad \beta \geq 4e^{-\frac{1}{2}} .$$

This bound on $\mathcal{E}_N$ numerically improves the bound 0.83 in [ALR], and is slightly better than the bound $(2/\pi)^{1/2} = 0.798\ldots$ given in [S] with the use of Slepian's lemma. We recall that the asymptotic value for the ground state energy predicted from numerical studies is 0.76 (see [MPV], p. 2).

References

[ALR] M. AIZENMAN, J.L. LEIBOWITZ, D. RUELLE (1987): Some rigorous results on the Sherrington-Kirkpatrick spin-glass model. *Comm. Math. Phys. 112, 3–20.*

[BGP] A. BOVIER, N. GAYRARD, P. PICCO: Gibbs states of the Hopfield model with extensively many patterns. *Preprint, Marseille 1994.*

[BK] T.H. BERLIN, M. KAC (1952): The spherical model of a ferromagnet. *Phys. Rev. 86, 821–825.*

[BY] Z.D. BAI, Y.Q. YIN (1988): Necessary and sufficient conditions for almost sure convergence of the largest eigenvalue of a Wigner matrix. *Ann. Prob. 16, 1729–1741.*

[CN] F. COMETS, J. NEVEU (1995): The Sherrington-Kirkpatrick model of spin glasses and stochastic calculus : the high temperature case. *Comm. Math. Phys. 166, 549–564.*

[G] V.L. GIRKO (1989) : Asymptotics of the distribution of the spectrum of random matrices. *Russian Math. Surv. 44, 3–36.*

[Gu] F. GUERRA : Fluctuations and thermodynamic variables in mean field spin glass models. Preprint, Rome 1992.

[KTJ] J. KOSTERLITZ, D. THOULESS, R. JONES (1976) : Spherical models of spin-glass. *Phys. Rev. Lett. 36, 1217–1220.*

[MPV] M. MEZARD, G. PARISI, M.A. VIRASORO (1987) : Spin glass theory and beyond. Lect. Notes in Physics 9, World Scientific, Singapore.

[PS] L. PASTUR, M.V. SHCHERBINA (1991) : Absence of self-averaging of the order parameter in the Sherrington-Kirkpatrick model. *J. Stat. Phys. 62, 1–19.*

[S] D. SZASZ : Private communication on a bound of G. HALASZ, Budapest (1994).

[SK] D. SHERRINGTON, S. KIRKPATRICK (1975) : Solvable model of a spin-glass, *Phys. Rev. Lett. 35, 1792–1796.*

[T] M. TALAGRAND : Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product spaces. Preprint, 1994.

[Th] C.J. THOMPSON (1985) : Random spin systems. In : Critical phenomena, 1983 Brasov school (ed. Jaffe, Parisi, Ruelle) 136–186. Progress in Physics II, Birkhäuser, Boston.

Francis Comets
Université Denis Diderot
UFR de Mathématiques
Case 7012
2 place Jussieu
75 251 PARIS Cedex 05

C. DELLACHERIE

Théorie générale du potentiel I

Astérisque, tome 236 (1996), p. 109-124
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__109_0>

Théorie générale du potentiel I

C. Dellacherie

Résumé. — Plus précisément et plus modestement, mais plus longuement, j'avais prévu intituler cet article, dans la lignée de [3], [4] et [5] (en grande partie absorbé),

Rudiments de théorie non (nécessairement) linéaire du potentiel fellerien(ne)

mais, vu les circonstances, je n'ai pu résister à la tentation de réaffirmer mon ambition, mettre à nu les ressorts élémentaires et fondamentaux de toute théorie du potentiel, même si ce projet est encore loin d'être réalisé. Le menu du jour est surtout l'étude du principe du maximum, sous toutes ses formes.

Quasi toute théorie du potentiel sur un espace F a pour essentiel ingrédient l'étude de systèmes d'inéquations de la forme $u \geq u_0$, $Au \geq f_0$ où A est une application d'une partie $\mathcal{D}$ de $\overline{\mathbb{R}}^F$ dans $\overline{\mathbb{R}}^F$ vérifiant deux propriétés de monotonie (δ) et (μ) explicitées ci-dessous et qu'on résumera en disant que A est un *dériveur sousmarkovien* ; pour fixer les idées, penser au cas $u_0 = f_0 = 0$ et $Au = \sup_t(u - P_t u)$, ou $Au = \limsup_{t \to 0}(u - P_t u)/t$, où (P_t) est un semigroupe sousmarkovien,

Sauf mention du contraire, nos semigroupes seront linéaires ; noter que les dériveurs associés aux semigroupes ont le signe opposé de celui des générateurs infinitésimaux.

les propriétés de monotonie de A étant induites par celles de (P_t). L'étude de tels systèmes peut être fort variée (construction de solutions, existence et régularité d'une solution minimale, points où les inégalités deviennent des égalités, etc.) et mène à toutes les notions classiques

Du côté des fonctions. La non linéarité fait perdre l'aspect dual, celui des mesures (tout au moins nous ne chercherons pas à y remédier ici).

de théorie du potentiel linéaire (potentiel, réduction, problème de Dirichlet, principes de domination et du maximum) ou souslinéaire (réduite, cône de fonctions, points extrémaux, frontières) tout en y rattachant des choses diverses de l'analyse traditionnelle.

Nous allons étudier dans cette optique l'action d'un dériveur sousmarkovien A sur l'ensemble $\mathcal{C}(F)$ des fonctions *continues* (réelles) sur un espace *compact* F (d'où le nom de *fellerien*) : que $\mathcal{C}(F)$ soit infstable (i.e. stable pour inf) jouera un rôle important, et que tout élément de $\mathcal{C}(F)$ atteigne ses bornes un rôle crucial. Ce cadre peut sembler trop particulier pour être fructueux. Il n'en est rien : on verra que tout dériveur sousmarkovien, quoique souvent naturellement défini sur un domaine restreint, peut être étendu à toute fonction (cf la lim sup dans l'exemple ci-dessus, qui aurait pu être une lim inf), et ce que nous établirons sera valable pour toute extension ; d'autre part on peut ramener de nombreuses situations au cas topologique considéré grâce à une compactification idoine (non nécessairement métrisable).

Nous commençons cependant par quelques généralités sur les dériveurs dans un cadre abstrait afin d'avoir les coudées plus franches pour expliquer précisément ce que sera notre cadre fellerien.

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES DÉRIVEURS

Étant donné un ensemble E (muni tacitement d'une structure topologique ou mesurable si besoin est) et une partie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E} = \overline{\mathbb{R}}^E$ (muni de son ordre partiel habituel), une application A de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$ sera appelée un *dériveur sur* $\mathcal{D}$ si elle vérifie, pour tout $u, v \in \mathcal{D}$ et tout $x \in E$,

$$(\delta) \qquad u \leq v \text{ et } u(x) = v(x) \quad \Longrightarrow \quad Au(x) \geq Av(x)$$

qu'on peut lire *si u est majorée par v, avec égalité en x, alors u est plus "concave" que v en x* et qu'on peut reformuler comme suit

$$u \leq v \implies u < v \text{ sur } \{Au < Av\}.$$

Pour x fixé et u, v variables dans $\mathcal{D}$ vérifiant $u(x) = v(x)$, le dériveur A sera dit *dégénéré* en x si on a toujours $Au(x) = Av(x)$, *plat* en x si $u \leq v$ implique toujours $Au(x) = Av(x)$, et *local* en x si $Au(x) \geq Av(x)$ a lieu dès qu'on a $u \leq v$ sur un voisinage de x.

Si E est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{D}$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞, tout opérateur linéaire du second ordre elliptique éventuellement dégénéré (en particulier, parabolique), dont le terme du second ordre est affecté du "bon signe" (par exemple, pour $\lambda(x) \in \mathbb{R}_+$, $\nu(x) \in \mathbb{R}$ et $\mu(x)$ forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, $Au(x) = -\lambda(x)\Delta u(x) + <\mu(x), \nabla u(x)> + \nu(x)u(x)$ où Δ est le laplacien et ∇ le gradient), est un dériveur local, plat (resp dégénéré comme dériveur) en x s'il y est d'ordre 1 (resp d'ordre 0) ; en fait, (δ) est une formulation abstraite, non linéaire, empruntée à [7], du principe du maximum (ou du minimum) local pour les opérateurs elliptiques du second ordre, lequel caractérise ces opérateurs parmi les opérateurs différentiels linéaires. Voir [2] p.1065 et suivantes.

Lorsque $\mathcal{D}$ est infstable, (δ) équivaut évidemment, pour tout $u, v \in \mathcal{D}$, à

$$(\wedge) \qquad A(u \wedge v) \;\geq\; Av \text{ sur } \{u \geq v\}$$

qui implique $A(u \wedge v) \geq Au \wedge Av$ (une forme du principe de l'enveloppe inférieure), d'où l'intérêt d'étendre le domaine de A pour avoir cette stabilité, même si elle n'est pas naturelle (et si, en fin de compte, elle n'apparaît plus parce qu'on retombe dans le domaine initial).

On a la même chose, mutatis mutandis, pour sup (par exemple, $A(u \vee v) \leq Au \vee Av$) mais cela jouera un rôle bien moindre parce qu'on a choisi de prendre le signe "$\geq$" dans nos systèmes d'inéquations fondamentaux.

À titre d'exemple, voici une forme du principe complet du maximum (prendre $\alpha = 0$ dans l'énoncé pour retrouver le cas linéaire)

ou plutôt du "superprincipe" de domination habituel en linéaire où l'on compare un potentiel (de fonction positive) à une fonction excessive, le cas de l'énoncé usuel du principe complet du maximum étant celui où la fonction excessive est la somme d'un potentiel et d'une constante positive, ce qui nécessite une situation sousmarkovienne,

qui sera considérablement améliorée plus loin dans notre cadre fellerien.

0 Proposition. *Supposons $\mathcal{D}$ infstable et soient $\alpha, u \in \mathcal{D}$ telles que u soit la plus petite solution dans $\mathcal{D}$ du système en w*

$$w \geq \alpha \ , \ Aw \geq f \ \text{ où } f = Au.$$

Alors pour tout $v \in \mathcal{D}$ majorant α on a

$$u \leq v \text{ sur } \{Au > Av\} \implies u \leq v \text{ partout.}$$

Démonstration. Si $w = u \wedge v$, on a $Aw \geq Au$ sur $\{u \leq v\}$ et $Aw \geq Av$ sur $\{u \geq v\}$ d'après $(\wedge)$, et donc l'hypothèse $Av \geq Au$ sur $\{u > v\}$ implique $Aw \geq Au$ partout. Si v majore α, on a $w \geq \alpha$, et on conclut $w = u$ par minimalité de u.

Le dériveur A de domaine $\mathcal{D}$ est dit *sousmarkovien* si $\mathcal{D}$ est stable pour les translations par les constantes positives (en abrégé, est *constable*), i.e. si

$$u \in \mathcal{D} \text{ et } t \in \mathbb{R}_+ \implies u + t \in \mathcal{D},$$

et si on a, pour tout $u \in \mathcal{D}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$(\mu) \qquad A(u+t) \ \geq \ Au \ ;$$

il est dit *markovien en x* si l'inégalité est toujours une égalité en x.

Le cas markovien n'est vraiment intéressant que si $\mathcal{D}$ est stable par les translations par les constantes positives et négatives, ce qui arrive fréquemment d'ailleurs. Par ailleurs, on peut toujours, comme en linéaire, rendre markovien un dériveur sousmarkovien en adjoignant un point (isolé) δ à E et en identifiant $\mathcal{E}$ aux fonctions sur $E \cup \{\delta\}$ nulles en δ.

Tandis que (δ) permet, pour $u \leq v$, de comparer u et v en un point de contact, (μ) sert à mettre tout couple u, v dans cette situation : si $t = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ : u \leq v + s\}$, et si cet inf est atteint en un point x (d'où l'intérêt des fonctions continues sur un espace compact), on a $Au(x) \geq A(v+t)(x)$ par (δ) et $A(v+t)(x) \geq Av(x)$ par (μ), d'où $Au(x) \geq Av(x)$ en combinant les deux propriétés, et $Au(x) = Av(x)$ si A est plat et markovien en x (d'où une forme non linéaire du théorème de Rolle).

La propriété (μ), qui en linéaire signifie que les constantes ≥ 0 sont surharmoniques, peut être affaiblie de sorte à retrouver la condition "il existe une fonction surharmonique >0", en remplaçant le semi-groupe des translations par les constantes positives par une famille continue à un paramètre de transformations tendant convenablement vers l'infini. On se limitera ici au cas sousmarkovien non seulement par simplicité (en particulier, le maximum d'une fonction n'est une entité naturelle en théorie du potentiel que dans ce cas) mais aussi parce qu'il est illustré par de nombreux exemples (comme $Au(x) = \Phi(-\Delta u(x), \nabla u(x), u(x), x)$ sur $C^2(\mathbb{R}^n)$ où Φ est une fonction à $1+n+1+n$ arguments réels croissante en le premier et le $(1+n+1)$-ième). C'est aussi par simplicité qu'on a supposé le domaine d'un dériveur sousmarkovien constable (excluant ainsi a priori $C_0(E)$ pour E localement compact comme domaine) ; comme on va travailler avec des dériveurs étendus à toute fonction, cela n'apportera aucune gêne.

L'exemple fondamental[1] de dériveur, sousmarkovien, A sur un domaine constable est celui de *dériveur élémentaire, sousmarkovien*, où A s'écrit $I-N$, I étant l'identité et N un opérateur croissant ($u \leq v \Rightarrow Nu \leq Nv$), contractant pour la "norme" uniforme (équivaut à $N(u+t) \leq Nu+t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par croissance). Au moins heuristiquement, c'est la brique à partir de laquelle tous les autres dériveurs sont construits à l'aide des propriétés de stabilité que nous recensons sous forme d'une proposition de démonstration évidente.

1 **Proposition.** *Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou infinie de dériveurs (sousmarkoviens) définis sur un même domaine $\mathcal{D}$ (constable).*

a) Si $h(..., a_i, ...)$ est une fonction de $\overline{\mathbb{R}}^I$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, croissante en l'ensemble de ses arguments, alors l'opérateur A défini sur $\mathcal{D}$ par

$$Au(x) = h(..., A_i u(x), ...)$$

est un dériveur (sousmarkovien) ;

b) Si I est filtrant et si, pour tout $u \in \mathcal{D}$, la limite simple des Au_i existe, alors l'opérateur A défini sur $\mathcal{D}$ par

$$Au(x) = \lim_i Au_i(x)$$

est un dériveur (sousmarkovien).

Quelques conséquences immédiates : l'ensemble des dériveurs sousmarkoviens sur $\mathcal{D}$ est stable par somme finie, par produit par une fonction ≥ 0, par inf et par sup (ponctuels) quelconques, par lim inf et par lim sup, par mélange, etc. D'où les exemples classiques de dériveurs construits à partir de dériveurs élémentaires à l'aide d'un semigroupe ou d'une résolvante sousmarkoviens, ou encore ceux fournis par les opérateurs elliptiques du second ordre éventuellement dégénérés (cf [5] pour le détail de leur construction à partir des élémentaires).

Voyons, pour terminer les généralités, comment étendre, à deux points de vue différents, un dériveur sousmarkovien A défini sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$: on va voir comment passer de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{E}$, puis, supposant E sous-ensemble d'un ensemble F, comment passer de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F} = \overline{\mathbb{R}}^F$.

Voyons d'abord l'extension de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{E}$, sous la forme d'une proposition de démonstration encore une fois évidente.

2 **Proposition.** *Soit A un dériveur (sousmarkovien) défini sur $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$ (constable) et posons, pour tout $x \in E$ et tout $u \in \mathcal{E}$, avec $\sup \emptyset = -\infty$ et $\inf \emptyset = +\infty$,*

$$A^{\vee}u(x) = \sup\{Av(x), v \in \mathcal{D}, v \geq u, v(x) = u(x)\}$$
$$A^{\wedge}u(x) = \inf\{Av(x), v \in \mathcal{D}, v \leq u, v(x) = u(x)\}.$$

[1] Il correspond, du côté des fonctions, à celui de noyau élémentaire de Choquet-Deny en théorie linéaire.

On définit ainsi deux extensions de A en des dériveurs (sousmarkoviens) $A^\vee$ et $A^\wedge$ sur $\mathcal{E}$; de plus, $A^\vee$ est la plus petite et $A^\wedge$ la plus grande possible.

Si $t + \mathcal{D} = \mathcal{D}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, il y a aussi conservation du caractère markovien dans **1** et **2**. Il y a une variante évidente de définition de $A^\vee$ et $A^\wedge$ pour que ceux-ci soient locaux si A est local ; par contre, la platitude est en général perdue. En fait, les caractères local ou plat de dériveurs seront peu utilisés par la suite. Par ailleurs, il existe de nombreux cas où il est plus judicieux d'étendre d'abord A à un domaine plus restreint à l'aide d'un procédé fin (dérivée symétrique, dérivée seconde au sens de Schwarz, opérateur de Dynkin, etc.), mais cela aussi sera peu utilisé par la suite.

Il est instructif de regarder ce que donnent (δ) et (μ) quand A est défini sur tout $\mathcal{E}$ (et il n'est pas interdit de considérer le cas où E est fini et A linéaire sur $\mathbb{R}^E$). Quand donc A est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, (δ) dit que, pour tout $x \in E$, la x-ième composante $Au^x = Au(x)$ de Au est une fonction décroissante de l'ensemble $(u^y)_{y \neq x}$ des composantes de u autres que la x-ième tandis que (μ) dit que Au^x est une fonction croissante de u^x, cette croissance arrivant à compenser d'une certaine manière la décroissance précédente.

Considérons enfin l'extension de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F} = \overline{\mathbb{R}}^F$, en supposant E sous-ensemble d'un ensemble F. On posera $\partial E = F \backslash E$ (c'est une écriture suggestive, sans plus) et $\partial\mathcal{E} = \overline{\mathbb{R}}^{\partial E}$. Supposons donné un dériveur sousmarkovien B sur $\partial\mathcal{E}$; on définit un dériveur sousmarkovien $\widetilde{A}$ sur toute partie $\widetilde{\mathcal{D}}$ de $\{u \in \mathcal{F} : u_{|E} \in \mathcal{D}\}$ en posant

$$\widetilde{A}u(x) = A(u_{|E})(x) \text{ pour } x \in E \quad , \quad \widetilde{A}u(x) = B(u_{|\partial E})(x) \text{ pour } x \in \partial E.$$

La plupart du temps, on prend pour B un dériveur dégénéré, par exemple $Bu = u_0$ avec $u_0 \in \partial\mathcal{E}$ fixée (égale à 0 dans le cas linéaire ou souslinéaire), ou $Bu = u_{|\partial E}$ (on dira qu'on a prolongé A à F par l'identité). Dans ce dernier cas, on voit que, dans le problème de Dirichlet

$$\text{trouver } u \in \widetilde{\mathcal{D}} \text{ telle que } A(u_{|E}) = f,\ u_{|\partial E} = \varphi \text{ pour } f \in \mathcal{E},\ \varphi \in \partial\mathcal{E} \text{ données,}$$

on peut grouper les deux conditions en la seule $\widetilde{A}u = \widetilde{f}$ où $\widetilde{f} = f1_E + \varphi 1_{\partial E}$: la condition frontière a disparu parce qu'on lui a donné le même statut qu'à l'autre (ce qui peut être un germanobritannique gift).

II. MISE EN PLACE DU DÉCOR. GÉNÉRALITÉS SUR LES RÉDUITES

On désigne désormais par F un espace compact, souvent décomposé en deux parts E et $\partial E = F \backslash E$ a priori quelconques (en particulier, éventuellement vides), par $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathrm{F})$ l'espace des fonctions continues de F dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme, et par A un dériveur sousmarkovien de $\mathcal{F} = \overline{\mathbb{R}}^F$ dans $\mathcal{F}$.

Nous supposons A défini sur tout $\mathcal{F}$ mais, comme en analyse traditionnelle, nous n'arriverons à manipuler joyeusement que des fonctions continues (notre théorie est plus riemannienne que besguienne, et en particulier nous devrons nous contenter de la convergence uniforme là où on aimerait voir de la convergence simple bornée). Par ailleurs, dans les exemples, on se contentera souvent de se donner un dériveur par une définition naturelle sur un sous-ensemble implicite de $\mathcal{C}(E)$, laissant au lecteur le soin de l'étendre (en les deux sens).

Pour $u, f \in \mathcal{F}$ on désigne par $\mathfrak{D}_f^u$ ($\mathfrak{D}$ évoquant le mot "domine") l'ensemble des $v \in \mathcal{C}$ solutions du système d'inéquations $v \geq u$, $Av \geq f$ et par $\mathfrak{d}_f^u$ ($\mathfrak{d}$ évoquant la notation ∂ pour "bord") l'ensemble des $x \in F$ pour lesquels existe $v \in \mathfrak{D}_f^u$ tel que $v(x) = u(x)$; on pose pour simplifier $\mathfrak{D}_f = \mathfrak{D}_f^{-\infty}$. D'après ($\mu$), l'ensemble $\mathfrak{D}_f^u$ est non vide pour $\mathfrak{D}_f \neq \emptyset$, et est constable ; d'après (δ) équivalent à ($\wedge$), il est infstable.

On appelle *f-réduite* de u la fonction s.c.s. $R_f^u = \inf \mathfrak{D}_f^u$, notée encore $R_f u$ ou $R(f, u)$ selon les circonstances[1]. Pour $f, u \in \mathcal{C}$ avec $\mathfrak{D}_f \neq \emptyset$, le mieux qu'on puisse espérer de $v = R(f, u)$, et on risque d'être déçu, est d'avoir en tout $x \in \mathcal{F}$

$$(Av(x) = f(x) \text{ et } v(x) \geq u(x)) \text{ ou } (Av(x) \geq f(x) \text{ et } v(x) = u(x)) ;$$

c'est vrai au moins si F est fini et A continu. Si, pour $H \subseteq F$, on note $u_{\|H}$ la fonction égale à u sur H et à $-\infty$ sur H^c, alors $v = R(f_{\|E}, u_{\|\partial E})$ est, selon la méthode des fonctions majorantes de Lebesgue-Perron, candidate pour être solution du problème de Dirichlet $Av = f$ sur E, $v = u$ sur ∂E ; elle l'est si F est fini et A continu.

Les objets de la forme $\mathfrak{D}_f^u$, R_f^u et $\mathfrak{d}_f^u$ (à un moindre degré car trop grossier comme frontière) seront parmi nos principaux sujets de préoccupation.

Nos deux axiomes (δ) et (μ) sont trop faibles pour établir des résultats fins, mais il est étonnant de voir tout ce qu'on peut déjà faire avec eux seuls (par exemple, on verra que R_f^u généralise convenablement la notion de réduite de fonction en théorie linéaire ou souslinéaire et celle de potentiel de fonction en théorie linéaire). Il nous manque en particulier (et cela sera évoqué de temps à autre) un axiome de régularité jouant le rôle de l'axiome demandant l'existence d'une base d'ouverts réguliers dans les axiomatiques linéaires classiques de Brelot ou Bauer.

La donnée de A et f permet de définir $\mathfrak{D}_f$ et R_f. En sens inverse, si Γ est une partie non vide et constable de $\mathcal{C}$, on définit sur $\mathcal{F}$ *l'opérateur de Γ-réduite* par

$$R_\Gamma u = \inf\{v \in \Gamma, v \geq u\}$$

(si bien que, pour $\Gamma = \mathfrak{D}_f$, on a $R_f u = R_\Gamma u$). On voit aisément que R_Γ est, au moins sur $\mathcal{C}$, une contraction croissante et idempotente majorant l'identité, si bien que $B = I - R_\Gamma$ est une dériveur élémentaire sousmarkovien vérifiant $Bu \leq 0$ pour tout $u \in \mathcal{C}$. L'ensemble $\{u \in \mathcal{C} : Bu = 0\}$, identique à $\{u \in \mathcal{C} : R_\Gamma u = u\}$, est de la forme $\mathfrak{D}_f$ relativement à B, avec $f = 0$; il contient évidemment Γ et une application simple du lemme de Dini montre qu'il est l'adhérence dans $\mathcal{C}$ du stabilisé de Γ pour inf de sorte que, pour tout $u \in \mathcal{F}$, $R_\Gamma u$ est égal à $R_0 u$ relativement à B.

Lorsque A est surlinéaire sur $\mathcal{C}$ et qu'on prend $f=0$ et u continue, $\mathfrak{D}_f^u - u$ est un cône convexe infstable de fonctions continues contenant les constantes positives, et réciproquement, tout tel cône Γ, fermé, provient comme ci-dessus du dériveur élémentaire associé à l'opérateur souslinéaire de réduite de Γ : on retrouve ainsi la théorie souslinéaire du potentiel fellerienne, qui généralise la théorie de la convexité.

Prenant pour Γ notre $\mathfrak{D}_f$ de départ (relatif à A), on voit que R_f ne détermine pas $\mathfrak{D}_f$ mais son adhérence. On aimerait donc, en se limitant au cas où u et f parcourent

[1] Nos notations pour les réduites entrent parfois en conflit avec des notations traditionnelles quand f=0.

C, que $\mathfrak{D}_f$ soit toujours fermé, et même, pour plus d'une raison, avoir toujours $R_f u$ continue et $AR_f u \geq f$ (comme $\mathfrak{D}_f^u$ est infstable et constable, cela implique que $\mathfrak{D}_f$ est fermé). Mais, hors le cas élémentaire, les contre-exemples abondent

Si F est réduit à un point, la notion de dériveur sousmarkovien de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ coïncide avec la notion de fonction monotone croissante de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, et la régularité recherchée est la continuité à droite de la fonction.

et il faudrait ajouter un axiome convenable de régularité pour obtenir ces propriétés. Néanmoins, nous saurons tant bien que mal faire sans dans notre étude du principe du maximum.

Dans le cas linéaire, lorsque A étend l'opposé du générateur infinitésimal d'un semigroupe fellerien et qu'on prend $f=0$ et u continue, les propriétés voulues peuvent être obtenues : on sait, d'après Mokobodzki, que $R_0 u$ est continue, et on peut montrer que $AR_0 u$ est ≥ 0 et que $\mathfrak{D}_0$ est fermé pour la convergence simple bornée si A est une extension obtenue par un procédé fin utilisant l'opérateur de Dynkin, tout au moins lorqu'il y a suffisamment d'ouverts réguliers pour le problème de Dirichlet. On en dira un peu plus au n°7.

Si R_f^u est continue, $\mathfrak{d}_f^u$ est égal à $\{u = R_f^u\}$, et si AR_f^u est $\geq f$, $\{u = R_f^u\}$ est inclus dans $\{Au \geq f\}$. *En tout cas,* et c'est ce qui nous importe principalement pour la suite, il est toujours vrai, pour $u, f \in \mathcal{F}$, que *l'ensemble $\mathfrak{d}_f^u$ est inclus dans $\{u = R_f^u\}$ d'après sa définition, et aussi dans $\{Au \geq f\}$ d'après (δ).*

Soit $\Gamma \subseteq C$ constable, non vide ; on dira que ∂E est un ensemble Γ-*porteur* pour u s'il *porte* la Γ-réduite de u, i.e. si on a $R_\Gamma u = R_\Gamma(u_{\|\partial E})$, soit encore si

$$u \leq v \text{ sur } \partial E \text{ et } v \in \Gamma \implies u \leq v \text{ partout.}$$

Le préfixe "Γ-" sera remplacé par "f-" si $\Gamma = \mathfrak{D}_f$; la mention de u sera omise s'il n'y a pas d'ambiguïté. Un ensemble Γ-porteur est encore $\widetilde{\Gamma}$-porteur si $\widetilde{\Gamma}$ est le plus petit fermé infstable de C contenant Γ. Un surensemble ou une partie dense d'un ensemble Γ-porteur est encore Γ-porteur (en particulier, ∂E est Γ-porteur ssi $\overline{\partial E}$ l'est). Enfin, l'intersection d'une famille filtrante décroissante de fermés Γ-porteurs est encore un fermé Γ-porteur (utiliser (μ) et le lemme de Dini). Voici un exemple dérangeant que l'on retrouvera au §V et au §VII : on prend $F = \{1,2,3\}$, $u = 0$, et pour Γ l'ensemble des $v \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $v(2) \leq v(1) \wedge v(3)$; alors $\{1,3\}$ et $\{2\}$ sont tous deux des fermés Γ-porteurs pour u tandis que $\emptyset$ ne l'est pas.

Dans le cas souslinéaire, Γ est un cône convexe infstable et constable, et on retrouve pour $u=0$ la notion classique d'ensemble de Šilov. Cependant, nous venons de voir que, dans le cas général, il peut ne pas exister de frontière de Šilov.

Au §III on établit et exploite le fait que, pour $u \in C$, $\mathfrak{d}_f^u$ porte la f-réduite de u tandis qu'au §IV on étudie de manière systématique la notion d'ensemble porteur pour u quand $f = Au$ (et donc $\mathfrak{d}_f^u = F$ si bien que $\mathfrak{d}_f^u$ n'a plus d'intérêt). Au §V, qui clôt la première partie de notre étude, on dresse le bilan de ce qui est déjà fait de l'étude d'un système fondamental $v \geq u$, $Av \geq f$ et on introduit ce qu'on fera dans la seconde partie. Au §VI sera établi sans doute le meilleur théorème de comparaison possible sous nos axiomes, couvrant à la fois les principes du maximum et les théorèmes de support pour la réduite des théories linéaire et souslinéaire, et aussi une bonne part de §III et §IV. Enfin, au §VII, on abordera la définition et l'étude des points extrémaux et de la frontière de Choquet ; c'est l'endroit où pour la première fois le non linéaire se singularisera par rapport au linéaire ou souslinéaire. En appendice on trouvera une liste de problèmes commentés.

III. THÉORÈMES FAIBLES DE COMPARAISON, THÉORÈME DE ROLLE

Le résultat suivant, dont la démonstration ne fait intervenir que (μ), est une première approche de l'étude des "supports" ou "frontières".

3 **Théorème.** *Soient $u \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{F}$. Si $v \in \mathfrak{D}_f$ ne majore pas u, alors $\mathfrak{d}_f^u$ contient tout point où $(u-v)^+$ atteint son maximum. En particulier la f-réduite de u est portée par $\mathfrak{d}_f^u$, et donc par $\{u = R_f u\}$ et $\{Au \geq f\}$.*

Démonstration. Supposons qu'on n'a pas $u \leq v$ et soient $\tau = \inf\{t \geq 0 : v + t \geq u\}$, qui est > 0, $v_\tau = v + \tau$, et $\xi \in F$ tel que $v_\tau(\xi) = u(\xi)$: on a $v_\tau \in \mathfrak{D}_f^u$ d'après (μ) et $\xi \in \mathfrak{d}_f^u$, d'où la conclusion, compte tenu de $\mathfrak{d}_f^u \subseteq \{u = R_f^u\}$.

Remarque. On peut obtenir un résultat plus fort en supposant u s.c.s. et v s.c.i. Pour préserver la simplicité de l'exposé, nous tairons le plus souvent ce type de généralisation. Mais, comme R_f^u n'est en général que s.c.s., même pour u et f continues, on ne peut éviter complètement de parler de fonctions s.c.s.

Nous en déduisons à l'aide de (δ) nos premiers principe du maximum et théorème de comparaison.

4 **Théorème.** *Soient $u, v \in \mathcal{C}$. Si v ne majore pas u, la fonction $(u-v)^+$ atteint son maximum sur $\{Au \geq Av\}$. Ainsi, si on a $u \leq v$* sur *$\{Au \geq Av\}$, alors on a $u \leq v$ partout, et $u < v$ sur $\{Au < Av\}$.*

Démonstration. D'après (δ), on a $\mathfrak{d}_f^u \subseteq \{Au \geq f\}$ pour tout $f \in \mathcal{F}$, et il n'y a plus qu'à faire $f = Av$ au n°**3** ; la précision sur $u < v$, sachant qu'on a $u \leq v$ partout, n'est qu'une reformulation déjà vue de (δ).

Remarque. Si A est strictement sousmarkovien sur $\mathcal{C}$ en tout point de F (i.e. si on a $A(w+t) > Aw$ pour tout $w \in \mathcal{C}$ et tout $t > 0$), alors, avec les notations de **3** et de sa démonstration, on a

$$f(\xi) \leq Av(\xi) < Av_\tau(\xi) \leq Au(\xi)$$

et donc $Au(\xi) > f(\xi)$; ainsi $(u-v)^+$ atteint et a fortiori approche son maximum sur $\{Au > Av\}$, ce qui est bien plus précis que sur $\{Au \geq Av\}$ (mais implique l'injectivité de A). On établira plus loin qu'en général $(u-v)^+$ approche son maximum sur $\{Au > Av\}$ *augmenté* d'une frontière plus ou moins minimale ne dépendant que de u : c'est ce qui distinguera les théorèmes forts de comparaison des faibles que nous sommes en train de voir.

5 **Corollaire** (Théorème faible de comparaison). *Si pour $u, v \in \mathcal{C}$ on a*

$$u \leq v \text{ sur } \partial E \quad , \quad Au < Av \text{ sur } E$$

alors on a $u \leq v$ partout.

Remarque. On a de plus $u < v$ sur E, d'après (δ). Nous avons omis de le mettre dans l'énoncé afin que le faible soit effectivement plus faible que le fort.

L'énoncé suivant provient de [5], où on supposait en plus, par étourderie, satisfaite une propriété d'honnêteté (que l'on retrouvera cependant plus loin éclatée dans notre étude des ensembles à la Šilov).

6 Corollaire (Théorème de Rolle). *Soient $u, v \in C$ vérifiant $u = v$ sur ∂E. S'il existe $x_1, x_2 \in E$ (éventuellement confondus) tels que*

$$u(x_1) \leq v(x_1) \quad , \quad u(x_2) \geq v(x_2)$$

alors il existe $\xi_1, \xi_2 \in E$ tels que

$$Au(\xi_1) \leq Av(\xi_1) \quad , \quad Au(\xi_2) \geq Av(\xi_2).$$

De plus, on peut imposer $\xi_1 = \xi_2$ si Au et Av sont continues sur E connexe.

Démonstration. Supposons par exemple qu'on puisse trouver un ξ_1 mais pas de ξ_2 dans E. On a donc $Au < Av$ sur E, et $u = v$ sur ∂E par hypothèse, d'où $u < v$ sur E d'après **5**, ce qui contredit l'existence de x_2. Le reste est évident.

On trouvera dans [1] un petit historique et une bibliographie pour d'autres extensions du théorème de Rolle portant sur des opérateurs linéaires. En particulier, Polya a trouvé une condition suffisante (et nécessaire au moins pour $n=2$) intéressante pour qu'un opérateur différentiel linéaire L d'ordre n à coefficients continus sur un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ vérifie : pour toute fonction n fois dérivable u s'annulant $n+1$ fois dans $[a,b]$, il existe $x \in]a,b[$ tel que $Lu(x)=0$.

Remarque. Nous avons esquissé, lors de la définition de (μ), une extension, avec un énoncé aussi fort et une démonstration analogue, du théorème classique de Rolle quand A est markovien et plat ; il est cependant impossible dans le cas général de toujours imposer $\xi_1 = \xi_2$ (penser au cas où E est fini !).

7 Il est instructif de démontrer à l'aide de **6** le théorème classique des accroissements finis : u étant une fonction dérivable sur un intervalle compact $F = [a, b]$, on prend pour v la fonction affine telle que $v(a) = u(a)$ et $v(b) = u(b)$. D'abord, on constate qu'il faut briser la symétrie entre a et b : ou bien on prend $E = [a, b[$ et $\partial E = \{b\}$, puis pour dériveur A l'opposé de la dérivée à droite sur E (qui n'est pas plat en a), et enfin $x_1 = x_2 = a$, ou bien, on prend $E =]a, b]$, $\partial E = \{a\}$, pour A la dérivée à gauche sur E, et enfin $x_1 = x_2 = b$.

Pour le semi-groupe de la translation à gauche dont A est l'opposé du générateur infinitésimal, b est un point intérieur de E pour la topologie fine. Même chose en changeant de main, mais l'interprétation gauche a ici l'avantage que dérivée et dériveur ont même signe si bien que l'analyse traditionnelle s'y trouve plus à l'aise.

On conclut alors que la constante $v' = \frac{u(b)-u(a)}{b-a}$ est une "valeur intermédiaire" de u' sur F. Ensuite, en conservant l'interprétation gauche et en renommant b en x_0 pour marquer la dissymétrie, on voit que "la corde" v de "l'arc u" est la solution du problème à la Dirichlet suivant

$$v_{|\partial E} = u_{|\partial E} \quad , \quad Au \text{ est constante} \quad , \quad v(x_0) = u(x_0).$$

Cela dit, l'intérêt principal en analyse traditionnelle du théorème des accroissements finis est de permettre d'établir la part non évidente, pour u fonction dérivable et

$\tau_h u(x) = u(x-h)$, de l'équivalence

$$\forall x \in E \ \lim_{h \downarrow 0} \frac{u(x) - \tau_h u(x)}{h} \geq 0 \iff \forall h \geq 0 \ \forall x \in E \ u(x) - \tau_h u(x) \geq 0.$$

Ainsi une propriété relative à un dériveur complexe se trouve être équivalente à une propriété commune à des dériveurs élémentaires, donc compatible avec le passage à la limite uniforme et même à la lim inf,

En linéaire, un dériveur élémentaire sousmarkovien de C dans C est forcément de la forme $I-N$ où N est un noyau de théorie de la mesure d'après le théorème de Riesz-Markov, et a donc de bonnes propriétés relativement à la convergence simple. En général, c'est faux ; c'est pourquoi on a évoqué d'abord la convergence uniforme.

ce qui permet par exemple de démontrer le fait suivant : soient (u_n) une suite de fonctions dérivables telle que $u = \liminf_n u_n$ existe et soit dérivable ; pour toute fonction continue f telle que $u'_n \geq f$ pour tout n, on a encore $u' \geq f$, soit une sorte de théorème de convergence dominée pour la dérivée. De plus, si on prolonge la définition de la dérivée à toute fonction continue u sur E en remplaçant ci-dessus $\lim_{h\downarrow 0}$ par $\liminf_{h\downarrow 0}$, il est facile de voir (c'est d'ailleurs un cas particulier de **6**) qu'avec cette extension de la dérivée on peut remplacer partout l'hypothèse de dérivabilité par celle de continuité. On a alors, dans le cadre traditionnel, résolu nos difficultés concernant l'opérateur de f-réduite.

L'énoncé **6** peut-il avoir le même usage en général ? La réponse, plus qu'esquissée dans [5], est un oui-mais : l'idée est bonne, mais nos axiomes sont trop faibles pour l'exploiter. En gros, il s'agit de construire, pour f continue donnée, une famille de dériveurs élémentaires sousmarkoviens $(A_i)_{i \in I}$ envoyant C dans C telle qu'on ait, pour u continue,

$$\forall x \in E \ \ Au(x) \geq f \iff \forall i \in I \ \forall x \in E \ \ A_i u(x) \geq f$$

et, autant que possible, avec I filtrant vérifiant

$$\forall x \in E \ \ Au(x) = \lim_i A_i u(x),$$

au moins chaque fois que $\lim_i A_i u$ existe dans C.

Pour $f=0$, cela s'obtient, facilement et classiquement, pour le laplacien à l'aide des opérateurs de moyenne. En général, pour un semigroupe fellerien, la construction d'une telle famille revient pratiquement à la démarche de Dynkin dans son étude du générateur infinitésimal, laquelle est une généralisation au semigroupe de la formule de Taylor limitée à son premier terme (ce qui donne en général naissance à du second ordre comme dans la formule d'Itô).

En suivant la démarche précédente, on rencontre pour difficulté principale l'existence de solutions aux problèmes à la Dirichlet généralisant la situation des arcs et des cordes les sous-tendant.

À la difficulté de régularité de frontière, maîtrisée en axiomatique linéaire par un axiome demandant l'existence d'une base formée d'ouverts réguliers, s'ajoute en non linéaire celle de l'existence possible d'explosions (penser au cas où $E=\mathbb{R}^n$ et où $Au=-\Delta u+(\nabla u)^2$).

Nous n'en dirons pas plus ici (voir cependant la liste de problèmes).

IV. ENSEMBLES PORTEURS. THÉORÈMES FORTS DE COMPARAISON

On dira que la fonction $w \geq 0$ *approche son maximum* sur $H \subseteq F$ si H est vide et w nulle, ou si H est non vide et si on a $\sup_{x \in H} w(x) = \sup_{x \in F} w(x)$, soit encore, pour H non vide et $w \in \mathcal{C}$, si w atteint son maximum sur $\overline{H}$; cela servira dans les énoncés de théorèmes de comparaison ou de principes du maximum établis en regardant, pour $u, v \in \mathcal{C}$, le maximum de la fonction $w = (u - v)^+ = (u - v) \vee 0$.

On se donne $u \in \mathcal{C}$; les notions définies dans ce paragraphe seront relatives à u (et à A, bien entendu, qu'on sera cependant amené à faire varier plus loin). On pourrait supposer $u = Au = 0$, quitte à considérer au lieu de A et u le dériveur $w \mapsto A(u + w) - Au$ et la fonction 0, mais nous ne le ferons pas ici.

Le résultat suivant montre que les points de vue théorème de comparaison fort et principe du maximum[1] sont équivalents. Noter que 2), 3) et 4) ne dépendent pas de l'extension éventuelle du dériveur de E à F.

Le fait que ∂E soit porteur dépend par contre de l'extension éventuelle du dériveur de $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}(E)$ à $\mathcal{C}(E)$; voir cependant la remarque 2) du **11**.

8 Théorème. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) (Définition de *porteur* (pour u)) *L'ensemble ∂E est (Au-)porteur, i.e. on a $u = R(Au, u_{\|\partial E})$, soit encore, pour tout $v \in \mathcal{C}$,*

$$u \leq v \text{ sur } \partial E \text{ et } Au \leq Av \implies u \leq v \text{ partout;}$$

2) (Théorème fort de comparaison) *Pour tout $v \in \mathcal{C}$,*

$$u \leq v \text{ sur } \partial E \text{ et } Au \leq Av \text{ sur } E \implies u \leq v \text{ partout}$$

qu'on peut aussi écrire $u = R(Au_{\|E}, u_{\|\partial E})$;

3) (Principe de domination) *Pour tout $v \in \mathcal{C}$,*

$$u \leq v \text{ sur } \partial E \cup (\{Au > Av\} \cap E) \implies u \leq v \text{ partout}$$

(dans lequel on peut évidemment omettre d'écrire "$\cap E$") ;

4) (Principe du maximum) *Pour tout $v \in \mathcal{C}$, la fonction $(u - v)^+$ approche son maximum sur l'ensemble $\partial E \cup (\{Au > Av\} \cap E)$ (dans lequel on peut évidemment omettre d'écrire "$\cap E$").*

Démonstration. Les implications 4) ⇒ 3) ⇒ 2) ⇒ 1) sont triviales. Voyons 1) ⇒ 4). Soit $v \in \mathcal{C}$ et posons

$$w = u \wedge (v + \tau) \text{ où } \tau = \inf\{t \geq 0 : v + t \geq u \text{ sur } \{Au > Av\} \cup \partial E\}.$$

On a $u = w$ sur ∂E, et on va montrer qu'on a $Au \leq Aw$ partout, d'où on aura $u \leq w$ partout si ∂E est porteur pour u, et la conclusion d'après la définition de w. Sur $\{w = u\}$, on a $Aw \geq Au$ d'après ($\wedge$). Sur $\{w \neq u\}$, on a d'une part $w = v + \tau$ et donc

[1] Pour des précisions sur notre terminologie, voir le passage en petits caractères suivant **10**.

$Aw \geq A(v+\tau) \geq Av$ d'après $(\wedge)$ et (μ), et d'autre part $Av \geq Au$ car, par définition de τ, on a $w = u$ sur $\{Au > Av\}$. C'est fini.

Remarques. 1) L'équivalence 1) $\Leftrightarrow$ 2) peut encore se lire : ∂E est porteur pour u ssi u est la plus petite solution du problème de Dirichlet $Av = f$ sur E, $v = u$ sur ∂E pour $f = Au$, ou encore du système $Av \geq f$ sur E, $v \geq u$ sur ∂E.

2) On voit aisément que les notions de porteur pour u relativement à A, à $I - R_{Au}$ et à $I - R_{Au\|_E}$ coïncident (une fois n'est pas coutume !). On peut donc encore écrire huit autres assertions équivalentes en remplaçant "$Au \leq Av$" par "$Rv = v$" et donc "$Au > Av$" par "$Rv > v$" avec $R = R_{Au}$ ou $R = R_{Au\|_E}$.

Le premier corollaire généralise le classique "principe complet du maximum pour les potentiels"

9 Corollaire. *Supposons ∂E porteur et soient $v \in \mathcal{C}$, $t \in \mathbb{R}_+$. Si on a $u \leq v$ sur ∂E et $u \leq v + t$ sur $\{Au > Av\} \cap E$, alors on a $u \leq v + t$ partout.*

tandis que le second généralise le classique "principe faible du maximum pour les fonctions sousharmoniques"

10 Corollaire. *Supposons ∂E porteur et soit $v \in \mathcal{C}$. Si on a $Au \leq Av$ sur E, alors le maximum de $(u - v)^+$ est approché sur ∂E, ainsi que le minimum de $(v - u)^+$ si de plus A est markovien sur E.*

Démonstration. La première partie est triviale ; la seconde se ramène à la première en considérant le maximum de $(u + t - v)^+$ pour t suffisamment grand.

Dans le cas linéaire, avec $u=f=0$ et sous des conditions adéquates de régularité, on retrouve que la fonction sousharmonique $-v$ atteint son maximum sur ∂E, soit ce qu'on appelle classiquement le principe faible du maximum pour le différencier du fort qui, selon Hopf, affirme, sous une hypothèse de forte ellipticité, que $-v$ est constante dès qu'elle atteint son maximum dans E. Ainsi, le principe faible du maximum est associé au théorème fort de comparaison ! Nous évitons le choc des mots en disant simplement "principe du maximum" dans **8** (et "principe du maximum de Hopf" plus loin) ; cela est d'autant plus justifié que **8** implique aussi le classique principe complet du maximum pour les potentiels dans la mesure où ceux-ci sont les fonctions surharmoniques nulles à la frontière.

Remarque. Au lieu de supposer ∂E porteur pour u relativement à A, on pourrait, ayant retourné la feuille de papier, supposer que ∂E est porteur pour $-v$ relativement au dériveur *conjugué* $\overline{A}$ de A défini par $\overline{A}w = -A(-w)$, markovien là où A l'est.

Les propriétés de **8** révèlent l'intérêt de la notion de porteur mais ne permettent guère en pratique de vérifier qu'un ensemble l'est. Nous allons dégager maintenant un critère commode : ce ne sera qu'une condition suffisante si on travaille avec les notions relatives à A, mais elle sera aussi nécessaire si on travaille avec les notions relatives à $I - R_{Au}$ ou $I - R_{Au\|_E}$.

On dira que u est *prévisible* sur $H \subseteq F$ s'il existe dans $\mathcal{C}$ une suite (u_n) *annonçant* u sur H, i.e. tendant vers u (uniformément sur F) et vérifiant $Au_n < Au$ sur H.

On peut toujours rendre une suite (u_n) qui annonce u croissante et strictement majorée par u, quitte à remplacer u_n par $v_n = u_n - \|u - u_n\|$ puis v_n par $w_n = v_1 \vee \ldots \vee v_n$, car on a $Aw_n \leq Av_1 \vee \ldots \vee Av_n$ d'après (δ) et $Av_n \leq Au_n$ d'après (μ). Si $H = F$ est réduit à un point, on retrouve la notion de point de croissance à gauche, celle à droite se retrouvant à gauche en considérant le conjugué de A.

Et on dira que u est *accessible* sur E si u est prévisible sur tout compact disjoint de $\overline{\partial E}$ (il suffit évidemment de tester les “gros” compacts). Être prévisible ou accessible sur E ne dépend pas de l'extension éventuelle du dériveur de E à F .

Dans le cas linéaire, u=0 est accessible sur E ouvert ssi, pour tout compact K de E, il existe w continue sur F vérifiant $Aw>0$ sur K ; c'est donc une propriété de transience faible (vérifiée par exemple par le laplacien sur $E=\mathbb{R}^n$, pour tout n), évidemment satisfaite si A étend l'inverse d'un noyau de Hunt sur E.

11 Théorème. *Pour que ∂E soit porteur, il suffit que u soit accessible sur E.*

Démonstration. Soit $v \in \mathcal{C}$ et supposons que le maximum M de $(u-v)^+$ ne soit pas approché sur ∂E : il existe un $\varepsilon > 0$ tel que le compact $K = \{x : (u-v)^+(x) \geq M-\varepsilon\}$ soit disjoint de $\overline{\partial E}$. Soit alors (u_n) une suite annonçant u sur K dans $\mathcal{C}$. Pour n suffisamment grand, le maximum de $(u_n-v)^+$ n'est pas approché sur K^c ; il est donc atteint sur $K \cap \{Au_n \geq Av\}$ d'après **4**, a fortiori approché sur $K \cap \{Au > Av\}$. Faisant tendre n vers l'infini, on trouve que le maximum de $(u-v)^+$ est approché sur $K \cap \{Au > Av\}$, d'où la conclusion.

Dans le cas linéaire, lorsque, ∂E étant réduit à un point, A est associé à un semigroupe fellerien sur E admettant un noyau potentiel propre V, **11** implique que, pour $f \geq 0$ continue à support compact, $R_f^u = R(f,0)$ est égale au potentiel Vf de f : en effet, ∂E est porteur, et Vf, qui appartient à $\mathfrak{D}_f^0$ et est nulle sur ∂E, est alors le plus petit élément de $\mathfrak{D}_f^0$.

Remarques. 1) Même dans le cas linéaire avec A local, on peut avoir ∂E fermé porteur alors que u n'est prévisible sur aucun ouvert non vide de E,

C'est le cas, d'après un résultat classique cité dans [6] et [9], si on prend $F=[0,1]$, $\partial E=\{0,1\}$, u=0 et si, D étant un ensemble dénombrable dense dans F, on prend pour A un dériveur étendant convenablement l'application dérivée perturbée $v \mapsto v' 1_{F \setminus D}$.

quoique je ne connaisse aucun exemple “naturel”. Il est par contre tout à fait normal que, selon A, on puisse avoir E ouvert non accessible, ou accessible non prévisible, ou prévisible : dans le cas linéaire où l'on part d'un semigroupe fellerien sur un espace localement compact E, cela correspond en gros aux cas où le noyau potentiel V n'est pas propre, est propre mais non borné, et est borné.

2) Regardons la dépendance de “porteur” et “accessible” d'une éventuelle extension du dériveur de $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}(E)$ constable à $\mathcal{C}(E)$, en supposant $u \in \mathcal{C}$ et $u_{|E} \in \mathcal{D}$. Si, dans la définition de “porteur”, on ne regarde que les v vérifiant $v_{|E} \in \mathcal{D}$, on voit que plus $\mathcal{D}$ est grand plus il est difficile pour ∂E d'être porteur pour u alors que si, dans la définition de “prévisible”, on demande de surcroît $u_{n|E} \in \mathcal{D}$ pour tout n, plus $\mathcal{D}$ est grand plus il est facile pour u d'être accessible sur E ; en outre, les énoncés **8**-4) $\Rightarrow$ **8**-1) et **11** restent vrais. Ainsi, en pratique, le caractère porteur de ∂E ne dépend guère de l'extension de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{C}$ (et $\mathcal{F}$).

3) Si u est prévisible sur E et si on est passé de E à F en complétant le dériveur par l'identité sur ∂E, alors u est encore prévisible sur F : ainsi l'ensemble vide est porteur et on a donc perdu la frontière... On reviendra sur ce point un peu paradoxal au §V lors de l'introduction à l'étude des frontières.

Par contre, il est clair que l'ensemble vide ne peut pas être porteur si A est markovien sur F, **8**-1) impliquant une certaine injectivité de A. En outre, dans ce cas, tout ensemble de la forme $\{Av \leq Aw\}$ avec $v,w \in \mathcal{C}$ est non vide (appliquer (μ) et (δ) à $v \pm t$).

La suffisance dans l'énoncé suivant s'obtient en appliquant **11** (dans lequel l'arlésien A est considéré comme variable libre) au dériveur élémentaire $I - R$ pour $R = R_{Au}$ ou $R = R_{Au_{\|E}}$ (où A est à nouveau notre dériveur fixé).

12 Théorème. *Pour que ∂E soit porteur, il faut et il suffit que u soit prévisible sur l'ouvert $F \backslash \overline{\partial E}$ relativement au dériveur $I - R_{Au}$, ou $I - R_{Au_{\|E}}$.*

Démonstration. Pour la nécessité, il suffit, à l'aide du lemme d'Urysohn, de prendre pour u_n une fonction continue comprise entre u et $u - \frac{1}{n}$, égale à u sur $\overline{\partial E}$ et strictement inférieure à u ailleurs : ∂E étant porteur, on a $Ru_n = u$ partout et donc $(I-R)u_n < 0$ sur $F \backslash \overline{\partial E}$.

Remarque. Si u est prévisible sur E ouvert relativement à A, ∂E est porteur et donc u est aussi prévisible par rapport à $I - R_{Au}$. Mais cela n'implique pas qu'une suite (u_n) annonçant u sur E relativement à A l'annonce relativement à $I - R_{Au}$! En effet, rien ne permet d'affirmer que $Au > Au_n$ sur E implique $R_{Au}u_n > u_n$ sur E (sauf si $AR_{Au}u_n = Au$, ce qu'on aurait avec un axiome convenable de régularité).

Nous terminons ce paragraphe avec une version non linéaire et non locale du principe du maximum de Hopf.

Nous dirons qu'une partie H de F *ne cerne pas* $x \in E$ (relativement à u) si, pour tout $v \in C$ tel que $(u - v)^+$ atteigne son maximum en x, le maximum de $(u - v)^+$ est approché sur $(\partial E \backslash H) \cup (\{Au > Av\} \cap (E \backslash H))$. Par exemple, si A est markovien sur E, ∂E cerne tout point de E (prendre $v = u - 1$).

13 Théorème. *Supposons que ∂E soit porteur et qu'il n'existe aucun point de E cerné par une partie fermée de ∂E distincte de ∂E. Soit $v \in C$ vérifiant $Au \leq Av$ sur E ; si $(u - v)^+$ atteint son maximum en un point de E, alors elle l'atteint en tout point de ∂E.*

Démonstration. D'après **10**, le maximum M de $(u - v)^+$ est approché sur ∂E. Si $(u-v)^+$ n'est pas constante sur ∂E, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $H = \{x \in \partial E : (u-v)^+(x) \geq M - \varepsilon\}$ ne soit pas égal à ∂E, ce qui est incompatible avec le fait que H ne cerne aucun point de E.

Comme plus haut au **8**, le résultat n'est intéressant que si on a un moyen commode de vérifier les hypothèses. En voici un, inspiré de l'exposé dans [8] du théorème de Hopf.

14 Théorème. *Pour que ∂E soit porteur et que $H \subseteq F$ ne cerne pas $x \in E$, il suffit qu'il existe dans C une suite (u_n) annonçant u sur E et vérifiant*

$$u(x) - u_n(x) > \inf_{y \in H}(u(y) - u_n(y))$$

pour tout n.

Démonstration. La démonstration est semblable à celle de **11**, qui entraîne déjà que ∂E est porteur. Supposons que $(u - v)^+$ atteigne son maximum en $x \in E$ et soit (u_n) une suite annonçant u sur E de sorte qu'on ait $u(y) - u_n(y) > u(x) - u_n(x)$ pour tout n et tout $y \in H$: on est ainsi assuré que les $(u_n - v)^+$ ne peuvent atteindre leur maximum sur H. Supposons de plus que $(u - v)^+$ n'approche pas son maximum sur ∂E ; alors, pour n grand, les $(u_n - v)^+$ n'approchent pas non plus leur maximum sur ∂E, et finalement n'atteignent pas leur maximum sur $\partial E \cup H$. Les $(u_n - v)^+$, pour n grand, doivent alors atteindre leur maximum dans $E \backslash H$, donc dans $(E \backslash H) \cap \{Au_n \geq Av\}$ et finalement dans $(E \backslash H) \cap \{Au > Av\}$, d'où la conclusion.

Dans le cas linéaire avec $u=0$, K ne cerne pas x dès qu'il existe $w \in \mathcal{C}$ vérifiant $Aw > 0$ sur E et $w(x) < \inf_K w$. Dans le cas classique où l'on considère un opérateur linéaire du second ordre uniformément elliptique sur un ouvert connexe d'un espace euclidien, on se ramène à étudier l'opérateur dans une boule $E = B(x,r)$ et on prend pour w la fonction $y \mapsto 1 - \exp(-\alpha \|y-x\|^2)$ avec α suffisamment grand ; voir [8] pour les détails.

V. ENTRACTE

Donnons-nous $u \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{F}$, revenons explicitement à la considération du système fondamental d'inégalités (1) $v \geq u$ (2) $Av \geq f$ en $v \in \mathcal{C}$ et voyons ce que nous avons pu en dire au §III et au §IV. D'abord, excepté en **3**, on a toujours pris $f = Au$,

Dans le cas linéaire, cela signifie que, sauf en **3**, on a exclusivement étudié l'opérateur potentiel, au détriment de l'opérateur de réduite.

et, dans ce cadre, on a étudié seulement la possibilité d'affaiblir (1) en "$v \geq u$ sur ∂E". On a gagné en passant au **8-2)** l'affaiblissement de (2) en "$Av \geq f$ sur E", mais, dans la pratique, c'est peu de chose car A est souvent dégénéré sur ∂E, soit par construction de A, soit par définition de ∂E.

Si, Γ étant un cône convexe infstable et constable, on prend $A = I - R_\Gamma$ et $u=0$, alors l'ensemble $\partial E = \{x \in F : \forall v \in \mathcal{C}\ Av(x) = 0\}$ est par définition la frontière de Choquet de Γ.

Ce "peu de chose" se révèlera cependant important dans l'étude des frontières.

Au §VI on va restaurer la formulation générale de (2), et affaiblir à la fois (1) et (2). Plus précisément, on établira le théorème de comparaison suivant, qui redonne, pour $f = Au$, le principe de domination **8-3)**.

Théorème. *Soient $u, v \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{F}$, et supposons que ∂E est f-porteur pour u et qu'on a $v \geq u$ sur ∂E. Alors on a $v \geq R_f u$ partout dès qu'on a $v \geq R_f u$ sur $\overline{\{Av < f\}}$, et même dès qu'on a $v \geq R_f u$ sur $\{Av < f\}$ si $R_f u$ est continue ou si on a $AR_f u \geq f$.*

Au §VII, on se donne $E \subseteq F$ (éventuellement égal à F) et, considérant le système (1) $v \geq u$ (2) $Av \geq f$ sur E, nous traquerons le $f_{\|E}$-porteur minimal pour u, qui, pour plus d'une raison (cf §II), n'existe généralement pas au sens naïf. Nous notons Γ (resp Γ^+) l'adhérence de $\mathfrak{D}_{f\|E}$ (resp $\mathfrak{D}^0_{f\|E}$) et supposerons ici, pour la commodité de la présentation, que les conditions suivantes sont vérifiées : $u = Au = 0$, A est markovien sur E, Γ sépare les points de F.

La première condition est anodine (cf le début de IV). La seconde, souvent vérifiée quand on s'intéresse aux frontières, permet avec la première de remplacer la considération du maximum de $(u-v)^+$, pour $v \in \Gamma$ ne majorant pas u, par celle du minimum de v pour $v \in \Gamma^+$ (cf IV-**10**). La troisième, elle aussi souvent vérifiée quand on s'intéresse aux frontières, implique que le "préordre du balayage" est un ordre.

On montrera que la *frontière minimale* $\partial_c E$ de E (pour $u = 0$) définie par

$$(\gamma) \qquad x \in \partial_c E \iff \forall y \in F\ x \neq y \Rightarrow \exists v \in \Gamma^+\ v(x) = 0 \text{ et } v(y) > 0$$

est toujours un Γ-porteur, et que, si ∂E est un fermé Γ-porteur, on a $\partial_c E \subseteq \partial E$ si est vérifiée la condition (β) suivante

Si pour $i = 1, 2$, $K_i \subseteq F$ compact, $v_i \in \Gamma^+$ et $x \in F$ on a $v_i(x) = 0$ et $v_i > 0$ sur K_i, alors il existe $v \in \Gamma^+$ vérifiant $v(x) = 0$ et $v > 0$ sur $K_1 \cup K_2$.

qui écarte un certain nombre de situations pathologiques (comme celle décrite à la fin du §II), et en particulier assure l'existence d'un plus petit fermé Γ-porteur.

Si, Γ étant un cône convexe infstable et constable, on prend $A = I - R_\Gamma$, $u = f = 0$ et $E = F$, alors (γ) est une des définitions possibles de la frontière de Choquet de Γ tandis que (β) est toujours vérifiée ($v = v_1 + v_2$ convient).

La condition (β) permet de renforcer (γ) en

$$x \in \partial_c E \iff \forall K \subseteq F \text{ compact } x \notin K \Rightarrow \exists v \in \Gamma^+ \ v(x) = 0 \text{ et } v > 0 \text{ sur } K,$$

ce qui nous permettra d'établir un lien entre la frontière minimale et les barrières à la Poincaré-Lebesgue.

Cependant, la part la plus intéressante de la théorie de Choquet, la représentation intégrale, est perdue en non linéaire (tout au moins nous ne chercherons pas à y remédier ici).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BECKENBACH E.F., BELLMAN R. : Inequalities. Springer 1961

[2] BÉNILAN P. : Opérateurs différentiels linéaires, chapitre V du tome I du "Dautray-Lions", Analyse mathématique et calcul numérique etc., Masson 1984

[3] DELLACHERIE C. : Théorie des processus de production. Sém. Proba. XXIV, L.N.1426, 52-104, Springer 1990

[4] DELLACHERIE C. : Une version non linéaire du théorème de Hunt. Proceedings of the International Conference on Potential Theory, Nagoya 1990, 25-32, de Gruyter 1992

[5] DELLACHERIE C. : Théorie non linéaire du potentiel : un principe unifié de domination et du maximum, et quelques applications. Sém. Proba. XXV, L.N.1485, 1-9, Springer 1991

[6] LOJASIEWICZ S. : An Introduction to the Theory of Real Functions. Wiley 1988

[7] MOKOBODZKI G. : Quelques propriétés remarquables des opérateurs presque positifs. Sém. Proba. IV, L.N.124, 195-207, Springer 1970

[8] PROTTER M.H., WEINBERGER H.F. : Maximum Principles in Differential Equations. Springer 1984

[9] SAKS S. : Theory of the Integral. Hafner 1937

URA 1378, site Colbert
Université de Rouen
76821 Mont Saint Aignan Cedex

J. GLOVER
M. RAO

Condenser potentials

Astérisque, tome 236 (1996), p. 125-131
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__125_0>

Condenser Potentials

J. Glover, M. Rao

Abstract. — Under appropriate hypotheses, the potential theory of a transient Markov process can be recovered from the condenser charges.

A central object in both the theory of Markov processes and in potential theory is the cone of excessive or superharmonic functions. This cone provides a critical link between the two subjects, and many important and useful theorems in Markov processes aim at a deeper understanding of the cone and its properties. Various subsets of this cone have been studied, also. For example, the collection of hitting probabilities proves to contain enough information to recover the potential theory of the process [5,6]. In this article, we suggest that another important link between Markov processes and potential theory is forged by the collection of condenser potentials and the associated collection of condenser charges. Condenser potentials receive little attention even in comprehensive tomes on potential theory. The condenser theorem for classical potential theory in $\mathbb{R}^d$ is the following and has a standard extension in the theory of Dirichlet spaces [9].

Theorem. *Let K and L be open sets with disjoint closures $\overline{K}$ and $\overline{L}$, and assume that $\overline{K}$ is compact. Then there exists a potential p of a signed measure μ such that:*
(i) $0 \leq p \leq 1$ *a.e. on* $\mathbb{R}^d$.
(ii) $p = 0$ *a.e. on* L *and* $p = 1$ *a.e. on* K.
(iii) The support of μ^+ *is contained in* $\overline{K}$ *and the support of* μ^- *is contained in* $\overline{L}$.

The potential p is in fact unique in $\mathbb{R}^d$ and uniqueness holds also in Dirichlet spaces.

We are aware of only one probabilistic study of condenser potentials, that being the 1977 note by K. L. Chung and R. K. Getoor [4]. They "guessed" that the condenser potential is simply the probability starting at x that Brownian motion hits K before it hits L. In their article, they deal with a Hunt process on a locally compact state space satisfying the duality assumptions in [1]. Throughout this article, we adopt the same assumptions: $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ is a Hunt process on a locally compact

Research of the first author supported in part by NSA grant MDA904–94–H–2052.

state space E satisfying the duality assumptions in Section VI–1 of [1]. In particular, $u(x,y)$ will denote the potential density and $U\gamma$ will denote the potential of a measure γ. For K and L Borel sets in E with disjoint closures, we define $p(x) = P^x[T_K < T_L]$ to be the condenser potential of the pair (K, L). Define $p_n = (P_K P_L)^n P_K 1$. Chung and Getoor's final result may be stated as follows.

Theorem. *If $\sum_n p_n$ converges, then $p = U\mu$ is the condenser potential of (K, L), where the measure μ is obtained as follows:*

(i) μ^+ is the capacitary measure μ_K of K relative to (X, T_L), the process X killed when it hits L.

(ii) $\mu^- = \widehat{P}_L \mu_K$ is the co–balayage onto L of μ_K.

Chung and Getoor also investigate several conditions guaranteeing $\sum_n p_n$ converges.

In this article, we investigate what rôle the condenser potential p and the condenser measure μ can play in potential theory, now that they have interesting probabilistic interpretations. We begin by characterizing the condenser potential in the symmetric case in a style akin to Hunt's balayage theorem. Our real interest in this article lies in studying the non–symmetric case, so we present this result in passing to help the reader with intuition about condenser potentials. Let $\mathcal{K}$ denote the collection of probability measures on $\overline{K}$, and let $\mathcal{L}$ denote the collection of positive measures on $\overline{L}$. Recall that the mutual energy of two measures λ and ρ is defined by

$$\ll \lambda, \rho \gg = \int_E \int_E u(x,y)\lambda(dx)\rho(dy)$$

It is by now a standard exercise to extend this to be an inner product on the space of signed measures π with $\ll |\pi|, |\pi| \gg < \infty$. This space is a pre–Hilbert space. We shall denote the norm of π by $||\pi||$.

Theorem. *Assume that $u(x,y) = u(y,x)$. Assume also that every potential $U\gamma$ of a measure γ is lower semicontinuous on E and continuous off the support of γ. Let $\overline{K}$ and $\overline{L}$ be compact and disjoint. The unique measure $\gamma - \nu$ which minimizes*

$$\inf_{\gamma \in \mathcal{K}, \nu \in \mathcal{L}} ||\gamma - \nu||$$

is a constant times the condenser measure μ.

Proof. We show first that the inf above is achieved by measures $\rho \in \mathcal{K}$ and $P_L \rho \in \mathcal{L}$. Choose $(\rho_n) \subset \mathcal{K}$ and $(\pi_n) \subset \mathcal{L}$ such that the sequence $||\rho_n - \pi_n||$ converges to $e = \inf_{\gamma \in \mathcal{K}, \nu \in \mathcal{L}} ||\gamma - \nu||$. Then, by reducing to a subsequence if necessary, ρ_n converges weakly to a measure $\rho \in \mathcal{K}$ and π_n converges weakly to a measure $\pi \in \mathcal{L}$. A standard Dirichlet space computation yields $||\rho - \pi|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||\rho_n - \pi_n|| = e$. But $||\rho - \pi|| \geq ||\rho - P_L\rho||$ since $P_L\rho$ is the unique measure in $\mathcal{L}$ minimizing the distance between ρ and $\mathcal{L}$. Thus $e = ||\rho - P_L\rho||$ with $\rho \in \mathcal{K}$ and $P_L\rho \in \mathcal{L}$.

Now let $\xi \in \mathcal{K}$ and $\beta \in \mathcal{L}$ be any pair of measures such that $||\xi - \beta|| = e$. Note that $\beta = P_L\xi$ since $P_L\xi$ is the unique measure in $\mathcal{L}$ minimizing the distance between ξ and $\mathcal{L}$. Take another measure $\lambda \in \mathcal{K}$ of finite energy, and let $t > 0$. Then

$$||t(\lambda - \xi) + \xi - \beta|| = ||(1-t)\xi + t\lambda - \beta|| \geq ||\xi - \beta||$$

Thus

$$t^2\|\lambda - \xi\|^2 + 2t \ll \lambda - \xi, \xi - \beta \gg \geq 0$$

for every $t > 0$, and we conclude that

$$\ll \lambda - \xi, \xi - \beta \gg \geq 0$$

That is,

$$\int U(\xi - \beta) d(\lambda - \xi) \geq 0$$

so

$$\int U(\xi - \beta) d\lambda \geq \int U(\xi - \beta) d\xi = \int U(\xi - \beta) d(\xi - \beta) = e^2$$

(the first equality holding since $U(\xi - \beta) = 0$ on L). Since $\lambda \in \mathcal{K}$ is arbitrary, $U(\xi - \beta) \geq e^2$ on K, except perhaps on a set of capacity zero. Taking $\lambda = \xi$, we get

$$\int U(\xi - \beta) d\xi = \int U(\xi - \beta) d(\xi - \beta) = e^2$$

so $U(\xi - \beta) = e^2$ a.e. ξ on K. Since $U\xi \leq U\beta + e^2$ a.e. ξ, we have $U\xi \leq U\beta + e^2$ on E by the maximum principle. To summarize, $U(\xi - \beta) \leq e^2$, $U(\xi - \beta) = e^2$ a.e. ξ on K, $\beta = P_L\xi$ and $U(\xi - \beta) = 0$ on L. By uniqueness of condenser potentials, $\xi = \rho$ and $\beta = P_L\rho$. □

In [7], Glover, Hansen and Rao observed that the potential theory of a symmetric process can be reconstructed from the capacities. This result can also be found in Choquet [3], at least in the case where points are polar. In the case where the process hits points, Glover, Hansen and Rao proved the following formula, which will be useful for the purposes of comparison later.

Theorem. *Assume that $u(z, w) = u(w, z)$ and $P^z(T_{\{z\}} < \infty) > 0$ for all z and w in E. Fix x and y in E, let a be the capacity of $\{x\}$, let b be the capacity of $\{y\}$, and let c be the capacity of the set $\{x, y\}$. Then*

$$u(x, y) = \frac{1 - \sqrt{1 - c\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{c}{ab}\right)}}{c}$$

If $a = b$, then

$$u(x, y) = \frac{2}{c} - \frac{1}{a}$$

Symmetry is needed in the theorem above: one cannot recover the potential theory of a nonsymmetric process from the capacities, in general. However, one can recover neatly the potential theory of a nonsymmetric process from the condenser charges, as follows.

Definition. *Let $U\mu$ be the condenser potential of the sets (K, L). The condenser charge associated with the sets (K, L) is defined to be $\mu(E)$, and will be denoted by $c(K, L)$.*

Under the hypotheses of Chung and Getoor's theorem, $c(K, L) > 0$, and, for fixed L, the map $K \to c(K, L)$ is a capacity which is alternating of order infinity, since it is simply the capacity of the process X killed the first time it hits L. We will need some notation to state the next result. For $x \neq y$, let $c_{xy} = c(\{x\}, \{y\})$ and $c_{yx} = c(\{y\}, \{x\})$, let $a = c(\{x\}, \emptyset)$ and $b = c(\{y\}, \emptyset)$.

Theorem. *Assume that $P^z(T_{\{z\}} = 0) = 1$ for all $z \in E$. Then $u(x,x) = a^{-1}$.*

- *If $c_{xy} = 0$, then $u(y,x) = b^{-1}$ and $u(x,y) = 0$.*
- *If $c_{yx} = 0$, then $u(x,y) = a^{-1}$ and $u(y,x) = 0$.*
- *If $c_{xy} \neq 0$ and $c_{yx} \neq 0$, then*

$$u(y,x) = \frac{1}{c_{yx}} - \frac{c_{xy}}{ac_{yx}}$$
$$u(x,y) = \frac{1}{c_{xy}} - \frac{c_{yx}}{bc_{xy}}$$

Proof. $u_{xx} = a^{-1}$, so u_{xx} can be determined from condenser charges. If $x \neq y$, let $\mu = \mu_{\{x\},\{y\}}$, $\mu_x = \mu(\{x\})$ and $\mu_y = \mu(\{y\})$. Then

$$\begin{aligned} u_{xx}\mu_x + u_{xy}\mu_y &= 1 \\ u_{yx}\mu_x + u_{yy}\mu_y &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

If the determinant $D = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}u_{yx} = 0$, then $u_{xx} = u_{yy} = u_{xy} = u_{yx}$ since the maximum principle guarantees $u_{xx} \geq u_{xy}$, $u_{yy} \geq u_{yx}$, $u_{xx} \geq u_{yx}$, and $u_{yy} \geq u_{xy}$. But this would imply that the restriction of u to $\{x,y\} \times \{x,y\}$ is not the potential density of a transient two–state Markov chain, which would be a contradiction. So $D > 0$. Then $\mu_x = u_{yy}/D$ and $\mu_y = -u_{yx}/D$, so $c_{xy} = (u_{yy} - u_{yx})/D$. Similarly, $c_{yx} = (u_{xx} - u_{xy})/D$. If $c_{xy} = 0$, then $u_{yx} = u_{yy} = b^{-1}$ and $c_{yx} = b$. By Chung and Getoor's result [4], $c_{yx} = b - b\widehat{P}_{\{x\}}(y, \{x\})$, and we conclude that $\widehat{P}_{\{x\}}(y, \cdot) = 0$. By time reversal, it follows that $P^x(T_y < \infty) = 0$ which implies $u(x,y) = 0$.

If $c_{xy} \neq 0$ and $c_{yx} \neq 0$, then $(u_{yy} - u_{yx})/c_{xy} = (u_{xx} - u_{xy})/c_{yx}$. Solving for u_{xy} and substituting into equation (1), we obtain a quadratic in u_{yx} with solution

$$u_{yx} = \frac{\left(1 + \frac{c_{yx}}{b} - \frac{c_{xy}}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{c_{xy}}{a} - 1 - \frac{c_{yx}}{b}\right)^2 - 4c_{yx}\left(\frac{1}{b} - \frac{c_{xy}}{ab}\right)}\right)}{2c_{yx}}$$
$$= \frac{1 + \frac{c_{yx}}{b} - \frac{c_{xy}}{a} \pm \left|1 - \left(\frac{c_{xy}}{a} + \frac{c_{yx}}{b}\right)\right|}{2c_{yx}}$$

Similarly,

$$u_{xy} = \frac{1 + \frac{c_{xy}}{a} - \frac{c_{yx}}{b} \pm \left|1 - \left(\frac{c_{xy}}{a} + \frac{c_{yx}}{b}\right)\right|}{2c_{xy}}$$

So we have two possibilities at the moment for u_{yx}: either $u_{yx} = 1/c_{yx} - c_{xy}/ac_{yx}$ or $u_{yx} = 1/b = u_{yy}$. However, in this second case, $U\mu(y) = 0$ would force c_{xy} to be zero, contradicting our assumption that $c_{xy} > 0$. Thus we conclude that

$$u_{yx} = \frac{1}{c_{yx}} - \frac{c_{xy}}{ac_{yx}}$$
$$u_{xy} = \frac{1}{c_{xy}} - \frac{c_{yx}}{bc_{xy}}$$

□

So the previous theorem shows that, if points are regular for X, then the potential density can be explicitly recovered from the condenser charges. We now turn our attention to the case where points are polar. The condenser charges still determine the potential theory of the process, at least if the process is a diffusion. Following the theorem, we discuss an extension to the case of discontinuous processes.

Recall that we are always dealing with a transient Hunt process X in duality with another transient Hunt process $\widehat{X}$ with respect to a duality measure ξ as described in VI–1 of [1]. Let $E_\Delta = E \cup \{\Delta\}$ be the one point compactification of the LCCB state space E, and let C_0 denote the collection of bounded functions on E_Δ vanishing at Δ. If L is any Borel set, let $H_L f(x) = E^x[f(X(T_L)); T_L < \infty]$. If K and L are two Borel sets, let $p_n(K, L) = (P_K P_L)^n P_K 1$. If $x \in E$, let $B(r, x)$ denote the closed ball of radius r around x. Let $\mathcal{Z}$ be the set consisting of all pairs (x, L) with $x \in L^c$ and L compact, having the property: for some $r > 0$, $P^y[T_{B(s,x)} < T_L] > 0$ for every $y \in L^c$ and for every $s < r$.

Theorem. *Assume*

(i) $X_{\zeta-} = \Delta$ *and* $\widehat{X}_{\zeta-} = \Delta$ *a.s.*

(ii) $\sum p_n(K, L) < \infty$ *whenever* K *and* L *are closed disjoint balls.*

(iii) $H_L f \in C_0$ *for every* $f \in C_0$ *and every closed ball* L.

Then the hitting distributions $H_L(x, \cdot)$ *can be recovered from the condenser charges for every pair* $(x, L) \in \mathcal{Z}$.

Proof. Fix two closed balls L and M with $L \subset M^\circ$. Since $K \to c(K, L)$ is a capacity, by Choquet's theorem [10], we can construct a unique measure Q_M on $\mathcal{K}(M)$, the closed subsets of M, which is characterized by

$$Q_M[\{A \in \mathcal{K}(M) : A \cap K \neq \emptyset\}] = c(K, L)$$

for every closed subset K of M. To identify this measure Q_M in terms of X, we define $\Gamma : \Omega \to \mathcal{K}(M)$ by letting $\Gamma(\omega)$ be the closure of $\{X_t(\omega) : 0 < t < T_L(\omega)\} \cap M$. Let

η be the coequilibrium measure of M, so $\eta\widehat{U} = 1$ on M°: the coequilibrium measure exists since M is compact and $\widehat{X}$ is transient. Then

$$c(K,L) = P^\eta[T_K < T_L] = P^\eta[\Gamma^{-1}\{A \in \mathcal{K}(M) : A \cap K \neq \emptyset\}]$$

By the uniqueness portion of Choquet's theorem, $Q_M = \Gamma(P^\eta)$. Let $C \subset \partial L$. Thus from the condenser charges, we can calculate

$$Q_M[A \cap K \neq \emptyset, A \cap C \neq \emptyset] = P^\eta[X(T_L) \in C; T_K < T_L < \infty]$$

and $Q_M[A \cap K \neq \emptyset] = P^\eta[T_K < T_L]$. It follows that we can calculate

$$\begin{aligned} P^\eta[f(X(T_L)); T_K < T_L < \infty] &= P^\eta[P^{X(T_K)}[f(X(T_L)); T_L < \infty]; T_K < T_L] \\ &= P^\eta[H_L f(X(T_K)); T_K < T_L] \end{aligned}$$

for any bounded continuous function f. If $(x, L) \in \mathcal{Z}$, we can take $K = B(s,x)$, so $P^\eta[T_{B(s,x)} < T_L] > 0$, and we can compute

$$\frac{P^\eta[H_L f(X(T_K)); T_K < T_L]}{P^\eta[T_K < T_L]}$$

As s decreases to zero, $B(s,x)$ decreases to $\{x\}$, and the quotient converges to $H_L f(x)$. □

The set $\mathcal{Z}$ is used in the proof above simply to insure that we do not divide by zero. The same proof applies for any pair (x, L) provided $P^\eta[T_K < T_L] \neq 0$.

There is a large literature on the construction of Markov processes from hitting distributions which covers the present situation. See [2, 8, 11], and for the case of discontinuous processes, [13].

The previous theorem works for continuous processes since $X(T_L) \in C \subset \partial L$ if and only if $\overline{\{X_t : 0 < t < T_L\}} \cap C \neq \emptyset$. In the case where X_t is only right continuous, $X(T_L)$ will not be in ∂L, in general, and the point $\{X(T_L)\}$ will not be in $\overline{\{X_t : 0 < t < T_L\}}$. However, if we use a modified condenser charge, we can obtain a similar theorem. Define $\kappa(K,L) = P^\eta(T_K \leq T_L)$. If one knows κ, then one can recover $H_L f$ even for discontinuous processes, since, in this case, $Q_M(\{A \in \mathcal{K}(M) : A \cap K \neq \emptyset\}) = P^\eta(\Lambda^{-1}\{A \in \mathcal{K}(M) : A \cap K \neq \emptyset\})$, where $\Lambda(\omega)$ is the closure of $\{X_t(\omega) : 0 < t \leq T_L\} \cap M$. One could then calculate $P^\eta(T_K \leq T_L, X(T_L) \in C) = Q_M(A \cap K \neq \emptyset, A \cap L \neq \emptyset)$.

While we have concentrated most of our attention on condenser charges, a tremendous amount of well-organized information is contained in the modified condenser potentials discussed in the last paragraph. Here, for example, is a simple necessary and sufficient condition for the hitting distributions of X to dominate those of another Hunt process $Y = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, Y_t, \theta_t, Q^x)$.

Theorem. *Suppose*

$$P^x(T_A \leq T_C) \geq Q^x(T_A \leq T_C) \tag{2}$$

for all disjoint Borel sets A and C and for every $x \in E$. Then

$$P^x(X(T_B) \in dy) \geq Q^x(Y(T_B) \in dy) \tag{3}$$

for every Borel set B and for every $x \in E$. Conversely, if (3) holds, then (2) holds.

Proof. Fix $x \notin B$, and suppose there exists a compact Borel set $A \subset B$ with $P^x(X(T_B) \in A) < Q^x(Y(T_B) \in A)$. Since $A \subset B$ is compact, $\{X(T_B) \in A\} = \{T_A \leq T_{B-A}\}$ a.s., so $P^x(T_A \leq T_{B-A}) = P^x(X(T_B) \in A) < Q^x(Y(T_B) \in A) = Q^x(T_A \leq T_B)$, a contradiction. The converse follows by applying Shih's theorem [12] and Choquet's theorem. If (3) holds, then Y can be obtained by killing X, so the range of Y is contained in the range of X. $\square$

References

1. R.M. Blumenthal and R.K. Getoor, *Markov Processes and Potential Theory*, Academic Press, 1968.
2. N. Boboc, C. Constantinescu, and A. Cornea, *Semigroups of transitions on harmonic spaces*, Revue Roumaine Math. pur. appl. **12** (1967), 763–805.
3. G. Choquet, *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier **5** (1955), 131–295.
4. K.L. Chung and R.K. Getoor, *The condenser problem*, Ann. Probab. **5** (1977), 82–86.
5. P. Fitzsimmons, *Markov processes with identical hitting probabilities*, Math. Zeitschrift **194**, 547–554.
6. J. Glover, *Markov processes with identical hitting probabilities*, Trans. AMS **275** (1983), 131–141.
7. J. Glover, W. Hansen and M. Rao, *Capacities of symmetric Markov processes*, in Seminar on Stochastic Processes, 1987 (Cinlar, Chung and Getoor, eds.), Birkhauser, 1988, pp. 159–170.
8. W. Hansen, *Konstruktion von helbgruppen und Markoffschen prozessen*, Inventiones math. **5** (1968), 335–348.
9. N.S. Landkof, *Foundations of Modern Potential Theory*, Springer–Verlag, 1972.
10. G. Matheron, *Random Sets and Integral Geometry*, John Wiley and Sons, 1975.
11. P.–A. Meyer, *Brelot's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory*, Ann. Inst. Fourier **13/2** (1963), 357–372.
12. C.–T. Shih, *Markov processes whose hitting distributions are dominated by those of a given process*, Trans. AMS **129** (1967), 157–179..
13. C.–T. Shih, *Construction of Markov processes from hitting distributions*, Z. Wahr. verw. Geb. **18** (1971), 47–72.

Joseph Glover and Murali Rao
Department of Mathematics
University of Florida
201 Walker Hall
PO Box 118000
Gainesville, FL 32611-8000
U.S.A.

Astérisque

S. C. HARRIS
D. WILLIAMS

Large deviations and martingales for a typed branching diffusion, 1

Astérisque, tome 236 (1996), p. 133-154
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__133_0>

Large deviations and martingales for a typed branching diffusion, 1

S. C. Harris, D. Williams

Abstract. — We study a certain family of typed branching diffusions where the type of each particle moves as an Ornstein-Uhlenbeck process and binary branching occurs at a rate quadratic in the particle's type. We calculate the 'left-most' particle speed for the branching process explicitly, aided by close connections with harmonic oscillator theory. The behaviour of the system changes markedly below a certain critical temperature parameter.

In the high-temperature regime, the study of various 'additive' martingales and their use in a change of measure method provides the proof of the almost sure speed of spread of the particle system.

Also, we briefly mention how to use the martingale results of the branching diffusion model in representations of travelling-wave solutions for the associated reaction-diffusion equation.

1. Introduction

Our aim is to produce a series of papers on a certain family of typed branching diffusions each with rich structure. The present paper introduces the simplest (binary-branching) model and (except for a 'sneak preview' of the critical-temperature phase in the Section 9) studies this model only in the high-temperature phase in which there is a high degree of ergodicity. Here, many standard methods are applicable, though we have been able to carry them through only because the model's close relation to the harmonic oscillator allows explicit calculations; the first calculations also have a long history in probability going back to Cameron and Martin – see Sections 5.13-5.15 of Itô and McKean (1965). Some of the calculations necessary for our approach are rather complicated; and these are only sketched here – see Harris (1995) and Harris and Williams (1995) for more details. We deal with the substantive points of rigour, but skip some details of rigour to keep the text to an appropriate length.

We begin by recalling how certain 'linear' expectations for the branching process may be calculated by considering a one-particle system, and we derive certain martingale properties. We then study in some detail the large-deviation heuristics for the problem, emphasizing the rôle of Legendre transformations. Next, we use a method of Neveu to establish uniform-integrability properties of certain martingales; this requires calculation of an expectation which reflects the *non*-linearity of the system, and we are saved only because Meyer's *opérateur carré du champ* behaves well. By exploiting a change-of-measure technique ('exponential tilting' in the exotic/quixotic terminology of statisticians), we *prove* the results suggested by large-deviation theory. The martingale methods have the significant bonus that they imply existence of monotone travelling waves associated with the model. In the present context, it may not be easy to establish the existence of these waves by analysis. Neveu's method of proving *lack* of uniform integrability of certain martingales will be important for proving uniqueness in some cases, non-existence in others, for monotone travelling waves. This idea is developed in full for a simpler problem in Champneys, Harris, Toland, Warren and Williams (1995); in the present context, it requires difficult *a priori* estimates. We also refer the reader to the Champneys *et al* paper for a list of references to which the present paper is equally indebted.

Further study of the high-temperature regime is made in Harris (1995), and will be continued in other joint papers. The changes of measure have some bizarre features which we wish to discuss further, bringing in important ideas from Chauvin and Rouault (1988, 1990). The long-term behaviour of the 'Gibbs-Boltzmann' measure $J_\lambda(t)$ which assigns mass $J_\lambda(t,k)$ as at (6.1) to the point $(X_k(t), Y_k(t))$ is the most fascinating aspect of the high-temperature phase. Note that the fundamental martingale $Z_\lambda^-(t)$ gives the 'partition function'. The study of the long-term behaviour of J_λ is closely related to that of the 'excited-state' martingales for our system.

A major challenge for the binary-branching model is the low-temperature regime ($\theta < 8r$) in which all of the methods used here fail: the expected number of particles in a region blows up, though the number of particles remains almost surely finite. Other models present other challenges.

2. The Branching Model

We consider a typed branching diffusion where, for time $t \geq 0$,

$N(t)$ is the number of particles alive,
$X_k(t)$ in $\mathbb{R}$ is the spatial position of the k^{th}-born particle,
$Y_k(t)$ in $\mathbb{R}$ is the 'type' of the k^{th}-born particle,

$\big(N(t); X_1(t), \dots, X_{N(t)}; Y_1(t), \dots, Y_{N(t)}\big)$ is the current state of the particle system.

The *type* moves on the real line as an Ornstein-Uhlenbeck process associated with the differential operator (generator)

$$Q_\theta := \frac{\theta}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

where θ is a positive real parameter considered as the *temperature* of the system. The *spatial* motion of a particle of type y is a driftless Brownian motion with variance

$$A(y) := ay^2, \qquad \text{where } a \geq 0.$$

The *breeding* of a type y particle occurs at a rate

$$R(y) := ry^2 + \rho, \qquad \text{where } r, \rho \geq 0,$$

and we have one child born at these times (binary splitting). A child inherits its parent's current type and (spatial) position then moves off *independently* of all others. Particles live forever (once born!).

Let $\mathbb{P}^{x,y}$ and $\mathbb{E}^{x,y}$ represent probability and expectation when the process starts from $(N; \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (1; x; y)$.

For starting point $(N; \mathbf{X}; \mathbf{Y}) = (1; 0; 0)$, we have

$$\mathbb{P}^{0,0}(N(t) = 1 \,|\, \sigma(Y_1(s) : s \leq t)) = \exp\left(-\int_0^t R(Y_1(s))\, ds\right),$$

and on the set $\{N(t) \geq k\}$ we have

$$\begin{aligned} \text{(2.1)} \qquad & \mathbb{P}^{0,0}\Big(X_k(t) \in F \,\Big|\, \sigma\big(N(s), \mathbf{Y}(s) : s \leq t\big)\Big) \\ &= \int_F \left\{2\pi \int_0^t A\big(Y_k(s)\big)\, ds\right\}^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\int_0^t A\big(Y_k(s)\big)\, ds}\right) dx, \end{aligned}$$

where $Y_k(s)$ is the type of the unique 'ancestor' alive at s of the k-th particle alive at time t.

We are going to consider r, ρ, a as fixed, and look at the effects of changing the temperature θ. One of our main concerns is: what is 'the velocity of the leftmost particle'; to be precise, what is the value of

$$\text{Vel} := \lim_{t \to \infty} L(t)/t$$

(we prove that the almost sure limit does exist), where

$$L(t) := \inf_{1 \leq k \leq N(t)} X_k(t)?$$

The temperature controls the balance of competition between the ergodic mixing of the Ornstein-Uhlenbeck process (which increases with θ) and the large breeding rate and large diffusion coefficient for the X-motion away from the type-origin. This is reflected in the answer

$$\text{Vel} = -\tilde{c}(\theta),$$

where

$$\tilde{c}(\theta)^2 = \begin{cases} 2a\left(r+\rho+\dfrac{2(2r+\rho)^2}{\theta-8r}\right) & \text{for } \theta > 8r, \\ +\infty & \text{for } \theta \le 8r. \end{cases} \tag{2.2}$$

When θ is very large, the system may be approximated by a 'mean field' model in which $A(Y)$ is replaced by its mean a and $R(Y)$ by its mean $r+\rho$ under the (standard normal) invariant law of the type process.

In all but the last section of this paper,

we assume that $\theta > 8r$.

The challenging low-temperature cases and many other things are left to other occasions.

3. Calculations using the One-Particle System

Let (ξ, η) be a process behaving like a single particle's space and type motions in the branching model described above. Thus, ξ is a Brownian motion controlled by an Ornstein-Uhlenbeck process η, and (ξ, η) has formal generator $\mathcal{H}$, where

$$(\mathcal{H}F)(x,y) = \frac{1}{2}A(y)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (\mathcal{Q}_\theta F)(x,y) = \frac{1}{2}A(y)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\theta}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - y\frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Of course, η is an autonomous Markov process with generator $\mathcal{Q}_\theta$ and with (standard normal) invariant density

$$\phi(y) := (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\tfrac{1}{2}y^2).$$

For functions h_1, h_2 on $\mathbb{R}$, we define the $L^2(\phi)$ inner product:

$$\langle h_1, h_2 \rangle_\phi := \int_{\mathbb{R}} h_1(y) h_2(y) \phi(y) dy.$$

The following principle is used repeatedly.

(3.1) LEMMA: 'From One to Many'. *For any non-negative Borel function f on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, we have*

$$\mathbb{E}^{x,y}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} f\big(X_k(t), Y_k(t)\big)\right) = \mathbb{E}^{x,y}\left(\exp\left(\int_0^t R(\eta_s)\, ds\right) f(\xi_t, \eta_t)\right).$$

This principle is often combined with a change-of-measure formula for Ornstein-Uhlenbeck processes. We use $\mathrm{OU}(\theta, \mu)$ to represent an Ornstein-Uhlenbeck process with variance θ and drift parameter μ, thus with generator $\frac{\theta}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \mu y \frac{\partial}{\partial y}$.

(3.2) LEMMA: 'Change of Measure between OU processes'. *Let η be an* OU(θ,μ) *under $\mathbb{P}_\mu$. For $\delta \in \mathbb{R}$, we can define a new probability measure $\mathbb{P}_\delta$, equivalent to $\mathbb{P}_\mu$ on every $\mathcal{F}_t$, via the Radon-Nikodým derivative*

$$\frac{d\mathbb{P}_\delta}{d\mathbb{P}_\mu} = \exp\left(\frac{(\mu-\delta)}{2\theta}(\eta_t^2 - \theta t) + \frac{(\mu^2-\delta^2)}{2\theta}\int_0^t \eta_s^2\, ds - \frac{(\mu-\delta)}{2\theta}\eta_0^2\right) \quad \text{on } \mathcal{F}_t.$$

Under $\mathbb{P}_\delta$, η is an OU(θ,δ) *process.*

Let us remind ourselves of how these results may be combined. Define

$$\lambda_{\min} := -\sqrt{\frac{\theta - 8r}{4a}}. \tag{3.3}$$

Let $\alpha, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, with the following convention which we always use for λ:

$$\lambda_{\min} < \lambda < 0. \tag{3.4}$$

Suppose for example that we wish to calculate (for a positive Borel function h)

$$\text{Required} := \mathbb{E}^{0,y} \sum_{k=1}^{N(t)} \exp\left\{\alpha Y_k(t)^2 + \lambda X_k(t)\right\} h\left(Y_k(t)\right). \tag{3.5}$$

We find that

$$\begin{aligned}\text{Required} &= \mathbb{E}^y_{\frac{1}{2}\theta} \exp\left\{\alpha\eta_t^2 + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \int_0^t a\eta_s^2\, ds + \int_0^t \left(r\eta_s^2 + \rho\right) ds\right\} h(\eta_t)\\ &= \mathbb{E}^y_\mu \exp\{\text{Quad}\} h(\eta_t),\end{aligned}$$

where

$$\text{Quad} := \alpha\eta_t^2 - \psi^-(\eta_t^2 - \theta t) + \left(\tfrac{1}{2}a\lambda^2 + \frac{\mu^2 - \frac{1}{4}\theta^2}{2\theta} + r\right)\int_0^t \eta_s^2 ds + \rho t + \psi^- y^2, \tag{3.6}$$

where

$$\psi^- := (\tfrac{1}{2}\theta - \mu)/2\theta.$$

We now choose μ so that the coefficient of the integral on the right-hand side of (3.6) is zero:

$$\mu = \mu_\lambda := \tfrac{1}{2}\sqrt{\theta^2 - \theta(8r + 4a\lambda^2)}, \tag{3.7}$$

and we write ψ_λ^- for ψ^- with this μ: indeed, we shall write

$$\psi_\lambda^\pm := \frac{\theta \pm \sqrt{\theta^2 - \theta(8r + 4a\lambda^2)}}{4\theta},$$

Then

$$\text{(3.8)} \qquad \text{Required} = \exp\left[(\rho + \theta\psi_\lambda^-)t + \psi_\lambda^- y^2\right] \mathbb{E}_{\mu\lambda}^y \exp\left\{(\alpha - \psi_\lambda^-)\eta_t^2\right\} h(\eta_t).$$

However, it is well known that, for the $\mathbb{P}_\mu^y$ law, η_t has the normal distribution

$$\text{(3.9)} \qquad \mathrm{N}\left(e^{-\mu t}y, \frac{\theta\left(1 - e^{-2\mu t}\right)}{2\mu}\right),$$

so that the expression 'Required' is easily calculated explicitly: if $h \equiv 1$, it will be finite for all finite t if and only if $\alpha \le \psi_\lambda^+$.

In particular, on taking $\alpha = \psi_\lambda^-$ and $h \equiv 1$, and making obvious use of the branching property, we obtain the following lemma.

(3.10) LEMMA. *For*

$$\lambda_{\min} < \lambda < 0,$$

the expression

$$\text{(3.11)} \qquad Z_\lambda^-(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} \exp\left\{\psi_\lambda^- Y_k(t)^2 + \lambda\left[X_k(t) + c_\lambda^- t\right]\right\},$$

where

$$\text{(3.12)} \qquad \psi_\lambda^- := \frac{\theta - \sqrt{\theta^2 - \theta(8r + 4a\lambda^2)}}{4\theta},$$

$$\text{(3.13)} \qquad c_\lambda^- := -\left(\rho + \theta\psi_\lambda^-\right)/\lambda,$$

defines a martingale Z_λ^- (under each $\mathbb{P}^{x,y}$ measure).

Since $\lambda < 0$ and the non-negative martingale Z_λ^- converges, we must have

$$\liminf\left[X_k(t) + c_\lambda^- t\right] > -\infty, \quad \text{a.s.},$$

whence

$$\liminf t^{-1}L(t) \ge -c_\lambda^-, \quad \text{a.s.},$$

and we have the lower bound:

$$\text{(3.14)} \qquad \liminf t^{-1}L(t) \ge -\tilde{c}(\theta) := -\inf\{c_\lambda^- : \lambda_{\min} < \lambda < 0\}.$$

This formula for $\tilde{c}(\theta)$ agrees with that at (2.2).

It is easy to check that the function c^- is convex on $(\lambda_{\min}, 0)$, and achieves its minimum at a unique point $\tilde{\lambda}(\theta)$. We shall prove later that the martingale Z_λ^- is uniformly integrable for $\lambda \in \left(\tilde{\lambda}(\theta), 0\right)$, and use this in obtaining the upper bound

$$\limsup t^{-1} L(t) \le -\tilde{c}(\theta), \quad \text{a.s.}. \tag{3.15}$$

4. Large-Deviation Heuristics.

(4.1) *Feynman-Kac heuristics.* We wish to find the rate of growth in numbers of particles out along rays in space-time, that is, we wish to calculate

$$\Delta(\gamma) := \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} \mathrm{I}\{X_k(t) \le -\gamma t\}\right) \quad (\gamma \ge 0). \tag{4.2}$$

Large-deviation theory makes us conjecture the existence of the limit $\Delta(\gamma)$ and also that

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma) &= \inf_{\lambda<0} \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log \mathbb{E} \sum_{k=1}^{N(t)} \exp(\lambda\gamma t) \exp\{\lambda X_k(t)\} \\ &= \inf_{\lambda<0} \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log\left\{\exp(\lambda\gamma t)\mathbb{E} \exp\left(\int_0^t \{\tfrac{1}{2}\lambda^2 A + R\}(\eta(s))\,ds\right)\right\} \\ &= \inf_{\lambda<0}\{E(\lambda) + \lambda\gamma\}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

where, by the Feynman-Kac formula, $E(\lambda)$ is the rightmost eigenvalue of the self-adjoint operator on $L^2(\phi)$ defined by

$$\mathcal{L}_\lambda := \mathcal{Q}_\theta + \tfrac{1}{2}\lambda^2 A(y) + R(y).$$

We find that for

$$\lambda_{\min} := -\sqrt{\frac{\theta - 8r}{4a}} < \lambda < 0,$$

we have

$$E(\lambda) = \rho + \left(\theta - \sqrt{\theta(\theta - 8r - 4a\lambda^2)}\right)/4 = \rho + \theta\psi_\lambda^- = -\lambda c_\lambda^-. \tag{4.4}$$

The expression $E(\lambda) + \lambda\gamma$ is minimized when $\lambda = \lambda_\gamma$, where

$$E'(\lambda_\gamma) = -\gamma, \quad \text{whence } \lambda_\gamma = -\sqrt{\frac{\gamma^2(\theta - 8r)}{a(4\gamma^2 + a\theta)}}; \tag{4.5}$$

and hence

$$\Delta(\gamma) = \rho + \left(\theta - \sqrt{a^{-1}(\theta - 8r)(4\gamma^2 + \theta a)}\right)/4. \tag{4.6}$$

It is now tempting to guess that $\tilde{c}(\theta)$ is given by

$$\begin{aligned} \tilde{c}(\theta) = \sup\{\gamma : \Delta(\gamma) > 0\} &= \inf\{-E(\lambda)/\lambda : \lambda_{\min} < \lambda < 0\} \\ &= \inf\{c_\lambda^- : \lambda_{\min} < \lambda < 0\}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

in agreement with what we had previously. This guess that, *in this particular situation*, 'expectation' and 'particle' wave-speeds agree, is *proved* rigorously by martingale techniques in Section 6.

Since $\mathcal{L}_\lambda$ is self-adjoint relative to $\langle\cdot,\cdot\rangle_\phi$, we have

$$E(\lambda) = \sup_g \{\langle g, \mathcal{L}_\lambda g\rangle_\phi : \langle g, g\rangle_\phi = 1\} = \sup_g \{U(\lambda; g) : \langle g, g\rangle_\phi = 1\}, \tag{4.8}$$

where

$$U(\lambda; g) := \langle Rg, g\rangle_\phi - \tfrac{1}{2}\theta\langle g', g'\rangle_\phi + \tfrac{1}{2}\lambda^2\langle Ag, g\rangle_\phi.$$

Moreover, the supremum at (4.8) will be obtained at the eigenfunction corresponding to $E(\lambda)$:

$$g_\lambda^*(y) = (2\mu_\lambda/\theta)^{\frac{1}{4}} \exp\left\{\psi_\lambda^- y^2\right\}. \tag{4.9}$$

Our arguments have therefore suggested the formula

$$\Delta(\gamma) = \inf_{\lambda<0} \sup_g L_\gamma(\lambda; g), \tag{4.10}$$

where

$$L_\gamma(\lambda; g) := \langle Rg, g\rangle_\phi - \tfrac{1}{2}\theta\langle g', g'\rangle_\phi + \tfrac{1}{2}\lambda^2\langle Ag, g\rangle_\phi + \lambda\gamma. \tag{4.11}$$

(4.12) *Discussion.* It is helpful to note that Mercer's Theorem applied to the Feynman-Kac semigroup appearing in (4.3) gives (as $t \to \infty$)

$$\mathbb{E}^{0,y} \sum_{k=1}^{N(t)} e^{\lambda X_k(t)} I\left(Y_k(t) \in dz\right) \sim \exp[tE(\lambda)] g_\lambda^*(y) g_\lambda^*(z)\phi(z)\, dz, \tag{4.13}$$

equivalently,

$$\mathbb{E}^{0,y} \sum_{k=1}^{N(t)} e^{\lambda X_k(t)} h\left(Y_k(t)\right) \sim \exp[tE(\lambda)] g_\lambda^*(y) \langle g_\lambda^*, h\rangle_\phi. \tag{4.14}$$

Note how this tallies with the martingale property of Z_λ^-.

However, (3.8) and (3.9) with $\alpha = 0$ give the *exact* form of (4.13), and imply in particular that

$$\text{(4.15)} \qquad \mathbb{E}^{0,0} \sum_{k=1}^{N(t)} \exp[\lambda X_k(t)] = \left\{1 + \theta\psi_\lambda^-(1 - e^{-2\mu_\lambda t})/\mu_\lambda\right\}^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{(\rho + \theta\psi_\lambda^-)t\right\}.$$

The existence of $\Delta(\gamma)$ at (4.2) and proof that $\Delta(\gamma)$ is given by (4.3) and (4.10) may be obtained from this by saddle-point techniques.

(4.16) *Heuristics based on the rate-functional for occupation densities.* We now link the above heuristics to the dual approach which more properly belongs to large-deviation theory. One of the great Donsker-Varadhan theorems (see, for example, Deuschel and Stroock (1989)) makes precise the idea that the probability that a process η with generator $\mathcal{Q}_\theta$ will have occupation density $tg^2\phi$ by time t (where, of course, $\langle g, g\rangle_\phi = 1$) is roughly

$$\exp(-tI(g)), \qquad \text{where } I(g) := \tfrac{1}{2}\theta\langle g', g'\rangle_\phi.$$

(For ergodic self-adjoint processes, the rate functional for occupation densities relative to the invariant measure agrees with the Dirichlet norm.) Thus, we guess the expected number of particles with type histories having densities tg^2 with respect to ϕ by time t to be roughly

$$\exp\left(t\left\{\langle Rg, g\rangle_\phi - \theta\, I(g)\right\}\right),$$

and, by (2.1), the expected number of *these* particles with X-values at time t near to $-\gamma t$ should be about

$$\exp\left(t\left\{\langle Rg, g\rangle_\phi - \theta\, I(g) - \tfrac{1}{2}\gamma^2/\langle Ag, g\rangle_\phi\right\}\right).$$

By Laplace-Varadhan asymptotics, the expected *total* number of particles with X-values near $-\gamma t$ is roughly

$$\exp\left(t \sup_g\left\{\langle Rg, g\rangle_\phi - \theta\, I(g) - \tfrac{1}{2}\gamma^2/\langle Ag, g\rangle_\phi : \langle g, g\rangle_\phi = 1\right\}\right)$$

However, from (4.11), we see that

$$\text{(4.17)} \qquad \inf_{\lambda<0} L_\gamma(\lambda, g) = \langle Rg, g\rangle_\phi - \theta\, I(g) - \tfrac{1}{2}\gamma^2/\langle Ag, g\rangle_\phi,$$

so that we are in the usual situation where the key thing to linking the dual pictures is to be able to interchange the sup and inf.

(4.18) *Duality.* Let us expand on the duality. See Harris (1995) for details. The optimizing $\overline{g}_\gamma$ which gives the supremum of the right-hand side of (4.17) is

$$\overline{g}_\gamma := \left(\frac{a(\theta-8r)}{4\gamma^2+\theta a}\right)^{\frac{1}{8}} \exp\left\{\left(1-\sqrt{\frac{a(\theta-8r)}{4\gamma^2+\theta a}}\right)\frac{y^2}{4}\right\}. \tag{4.19}$$

Everything checks. With λ_γ as at (4.5), we have

$$g^*_{\lambda_\gamma} = \overline{g}_\gamma, \tag{4.20}$$

and indeed it is true that

$$\sup_g \inf_{\lambda<0} L_\gamma(\lambda, g) = \inf_{\lambda<0} \sup_g L_\gamma(\lambda, g) = L_\gamma(\lambda_\gamma, \overline{g}_\gamma).$$

Particles with X-values close to $-\gamma t$ at time t are likely to have type histories by time t with occupation densities close to $t(\overline{g}_\gamma)^2\phi$.

The following Legendre-conjugate expressions hold (we already saw the first at (4.3)):

$$\Delta(\gamma) = \inf_{\lambda<0}\{E(\lambda)+\lambda\gamma\}, \quad E(\lambda) = \sup_{\gamma>0}\{\Delta(\gamma)-\gamma\lambda\}, \tag{4.21}$$

If, for $\lambda_{\min} < \lambda < 0$, we write γ_λ for the γ value which achieves the supremum on the right-hand side of (4.21), then the functions

$\lambda \mapsto \gamma_\lambda$ from $(-\lambda_{\min}, 0)$ to $(0, \infty)$, and
$\gamma \mapsto \lambda_\gamma$ from $(0, \infty)$ to $(-\lambda_{\min}, 0)$

are inverses of each other.

(4.22) *Remarks.* When we move on to our rigorous treatment, we find the familiar story: getting a lower bound for Vel is quite easy, while obtaining the best upper bound is much more tricky. The fact (now known to us) that the expected number of particles near $-\gamma t$ for $0 \le \gamma < \tilde{c}(\theta)$ is large for large t does not guarantee that we shall continue finding particles in that region. 'Expectation wavefronts' and particle wavefronts can differ. The martingale techniques in the next section are safe but not always applicable.

(4.23) *A formula concerning* $\mathbf{Y}$. From (4.15) with $\lambda = 0$,

$$\mathbb{E}^{0,0}N(t) \sim \text{const } \exp\left\{(\rho + \theta\psi_0^-)t\right\},$$

as one would expect from the formula (4.4) with $\lambda = 0$. We can use (3.8) to calculate the expected number of Y-values in any subregion of $\mathbb{R}$ at time t. Indeed, writing the answer in a form symmetrical in ψ^+ and ψ^-, we have

(4.24)

$$\frac{\mathbb{E}^{0,0}\#\{k \le N(t) : Y_k(t) \in dy\}}{dy} = \frac{\exp\left((\rho+\frac{1}{4}\theta)t - \dfrac{(\psi_0^+ e^{\mu_0 t} - \psi_0^- e^{-\mu_0 t})}{2\sinh\mu_0 t}y^2\right)}{\sqrt{2\pi(\theta/\mu_0)\sinh\mu_0 t}}.$$

For large t, it is as if, given $N(t)$, each Y-value is normally distributed with mean 0 and variance $(2\psi_0^+)^{-1}$, that is, each with density a constant multiple of $(g_0^*)\,\phi$, in agreement with (4.13).

(4.25) *Heuristics on the long-term behaviour of* $\mathbf{Y}$. (These remain heuristics here: rigorous treatment is a matter for a different paper.) If we believe that expectation and particle wavefronts agree here, we will guess that (provided $\theta > 8r$) we have, almost surely,

$$\text{(4.26)(?)} \qquad \lim_{t\to\infty} t^{-1} \sup_{k\le N(t)} Y_k(t)^2 = \frac{\rho+\theta\psi_0^-}{\psi_0^+} = \frac{4\rho+\theta-\sqrt{\theta(\theta-8r)}}{1+\sqrt{1-8r/\theta}}.$$

We might very well believe this to hold when $\theta = 8r$, too.

5. Uniform integrability of Z_λ^- for $\lambda \in \left(\tilde{\lambda}(\theta), 0\right)$

Recall that for $\lambda \in (\lambda_{\min}, 0)$, where

$$\lambda_{\min} := -\sqrt{\frac{\theta-8r}{4a}},$$

we define

$$\psi_\lambda^\pm := \frac{\theta \pm \sqrt{\theta^2 - \theta(8r+4a\lambda^2)}}{4\theta}, \quad c_\lambda^- := -\left(\rho+\theta\psi_\lambda^-\right)/\lambda,$$

and that

$$Z_\lambda^-(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} \exp\left\{\psi_\lambda^- Y_k(t)^2 + \lambda\left[X_k(t) + c_\lambda^- t\right]\right\}.$$

Recall too that $\tilde{\lambda}(\theta)$ is the unique point in $(\lambda_{\min}, 0)$ at which the convex function c^- achieves its minimum $\tilde{c}(\theta)$.

We want to show that, for $\lambda \in \left(\tilde{\lambda}(\theta), 0\right)$, the martingale Z_λ^- is $\mathcal{L}^p$ bounded for some $p > 1$. To do so, we need the following important estimate the proof of which is given in Section 7.

(5.1) LEMMA: An $\mathcal{L}^p$ bound for the Z_λ^- martingales. *Given* $\lambda \in (\lambda_{\min}, 0)$ *and* $\epsilon > 0$, *there exist* $T > 0$ *and* $\widetilde{K}$ *in* $[0,\infty)$ *such that for* $p \in [1,2]$,

$$\mathbb{E}^{0,y}\left(\left|Z_\lambda^-(t)\right|^p\right) \le \widetilde{K}\, e^{p(\psi_\lambda^- + \epsilon)y^2} \quad (y \in \mathbb{R},\ t \in [0,T]).$$

Given Lemma 5.1, the following lemma from Neveu (1987) works very effectively.

(5.2) LEMMA (Neveu), *Let $p \in (1,2]$. For any finite sequence of positive independent random variables $W_1, \ldots, W_n$ in $\mathcal{L}^p$ and any sequence of positive real numbers $c_1, \ldots, c_n$, we have*

$$\beta_p\left(\sum_{k=1}^{n} c_k W_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} c_k^p \beta_p(W_k),$$

where $\beta_p(W) := \mathbb{E}(W^p) - \mathbb{E}(W)^p$ for $W \in \mathcal{L}^p$.

(5.3) THEOREM. *Let $\lambda \in \left(\tilde{\lambda}(\theta), 0\right)$. Then, for some $p > 1$, Z_λ^- is (for every $\mathbb{P}^{x,y}$) bounded in $\mathcal{L}^p$. Thus, under each $\mathbb{P}^{x,y}$,*

$$Z_\lambda^-(\infty) \quad \textit{exists almost surely and in } \mathcal{L}^1.$$

Moreover, $\mathbb{P}^{x,y}\left(Z_\lambda^-(\infty) = 0\right) = 0$ for all pairs (x, y).

Proof (guided by Neveu). Fix $\lambda \in \left(\tilde{\lambda}(\theta), 0\right)$. We know that $\lambda \mapsto c_\lambda^-$ is strictly increasing on $\left(\tilde{\lambda}(\theta), 0\right)$. Hence, for some $p > 1$ and $\epsilon > 0$, both of which we now fix, we shall have

$$p\lambda\left(c_{p\lambda}^- - c_\lambda^-\right) > 0. \quad \psi_\lambda^+ - p\psi_\lambda^- > p\epsilon. \tag{5.4}$$

Now

$$Z_\lambda^-(t+s) = \sum_{k=1}^{N(s)} e^{\lambda\left(X_k(s) + c_\lambda^- s\right)} W_t^{0,y_k}$$

where W_t^{0,y_k} behaves like the branching process started with one particle starting at $(0, y_k)$ where $y_k = Y_k(s)$. Applying the conditional version of Neveu's Lemma 5.2 yields

$$\mathbb{E}^{x,y}\left(Z_\lambda^-(s+t)^p \,|\, \mathcal{F}_s\right) - Z_\lambda^-(s)^p \leq \sum_{k=1}^{N(s)} e^{p\lambda\left(X_k(s) + c_\lambda^- s\right)} \mathbb{E}^{0,y_k} Z_\lambda^-(t)^p.$$

By Lemma 5.1, there exist $T > 0$ and $\widetilde{K} < \infty$ such that for $y \in \mathbb{R}$ and $t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E}\left(Z_\lambda^-(s+t)^p \,|\, \mathcal{F}_s\right) - Z_\lambda^-(s)^p \leq \widetilde{K} \sum_{k=1}^{N(s)} e^{p\lambda\left(X_k(s) + c_\lambda^- s\right) + p(\psi_\lambda^- + \epsilon) Y_k(s)^2}.$$

We now concentrate on the $\mathbb{P}^{0,0}$ measure for simplicity. Using the methods in Section 3, we find that

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{0,0}\left(Z_\lambda^-(s+t)^p\right) - \mathbb{E}^{0,0}\left(Z_\lambda^-(s)^p\right) \\
&\le \widetilde{K}\,\mathbb{E}^{0,0}\left(\sum_{k=1}^{N(s)} e^{p\lambda\left(X_k(s)+c_\lambda^- s\right)+p(\psi_\lambda^-+\epsilon)Y_k(s)^2}\right) \\
&\le \widetilde{K}e^{p\lambda c_\lambda^- s}\left\{1-(1-e^{-2\theta(\psi_{p\lambda}^+-\psi_{p\lambda}^-)s})\left(\frac{p\psi_\lambda^-+p\epsilon-\psi_{p\lambda}^-}{\psi_{p\lambda}^+-\psi_{p\lambda}^-}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}} e^{(\theta\psi_{p\lambda}^-+\rho)s}.
\end{aligned}$$

Because of (5.4), this term decays exponentially as $s \to \infty$. Thus, we have found that there exist $T > 0$, $K < \infty$, $\ell > 0$, such that for $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}^{0,0}\left(Z_\lambda^-(s+t)^p\right) - \mathbb{E}^{0,0}\left(Z_\lambda^-(s)^p\right) \le Ke^{-\ell s} \quad (s>0).$$

Finally, we have, for all $t \ge 0$ and $s \in [0,T]$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}^{0,0}\Big(Z_\lambda^-(ms+s)^p - Z_\lambda^-(ms)^p\Big) \le K\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\ell ms} < \infty$$

and thus Z_λ^- is indeed bounded in $\mathcal{L}^p$ under $\mathbb{P}^{0,0}$. Similar arguments apply to $\mathbb{P}^{x,y}$.

For the last part of the theorem, we use the following lemma.

(5.5) LEMMA. *Let $\lambda \in (\lambda_{\min}, 0)$. Then (as a function of (x,y)),*

$$\mathbb{P}^{x,y}\left(Z_\lambda^-(\infty)=0\right) \equiv 0 \text{ or } 1.$$

Proof. First note that

$$\mathbb{P}^{x,y}\left(Z_\lambda^-(\infty)=0\right) = \mathbb{P}^{0,y}(e^{\lambda x}Z_\lambda(\infty)=0) = \mathbb{P}^{0,y}(Z_\lambda^-(\infty)=0) =: u(y).$$

Thus it is clear that the probability is independent of the spatial start position.

For all $t \ge 0, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
u(y) &= \mathbb{E}^y\left(\mathrm{I}\{Z_\lambda^-(\infty)=0\}\right) = \mathbb{E}^y\Big\{\mathbb{E}\big(\mathrm{I}\{Z_\lambda^-(\infty)=0\}\,\big|\,\mathcal{F}_t\big)\Big\} \\
&= \mathbb{E}^y\left(\prod_{k=1}^{N(t)} u(Y_k(t))\right) \le \mathbb{E}^y\Big\{u(Y_1(t))\Big\}.
\end{aligned}$$

Hence $u(\eta_t)$ is a bounded submartingale, whence it converges. Since η is recurrent, $u(\cdot)$ must be constant on $\mathbb{R}$, whence (why?) $u(\cdot) \equiv 0$ or 1. □

6. Proof that $t^{-1}L(t) \to -\tilde{c}(\theta)$, a.s.

Let us work with the $\mathbb{P}^{0,0}$ measure. Let $\lambda \in \left(\tilde{\lambda}(\theta), 0\right)$. Because $Z_\lambda^-(\infty)$ exists in $\mathcal{L}^1$ and is almost surely strictly positive, and since $Z_\lambda^-(0) = 1$, we can define a new probability measure $\mathbb{Q}_\lambda = \mathbb{Q}_\lambda^{0,0}$ equivalent to $\mathbb{P}$ on $\mathcal{F}_\infty$ via

$$\frac{d\mathbb{Q}_\lambda}{d\mathbb{P}} = Z_\lambda^-(\infty) \quad \text{on} \quad \mathcal{F}_\infty, \quad \text{whence} \quad \left.\frac{d\mathbb{Q}_\lambda}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_\lambda^-(t).$$

It is now easy to show that $(\partial/\partial\lambda)Z_\lambda^-(t)$ is also a $\mathbb{P}$-martingale, so that

$$M_\lambda(t) := Z_\lambda^-(t)^{-1}\frac{\partial}{\partial\lambda}Z_\lambda^-(t)$$

is a $\mathbb{Q}_\lambda$-martingale. For $t \geq 0$, $1 \leq j \leq N(t)$, let

$$J_\lambda(t,j) := \frac{\exp\left(\psi_\lambda^- Y_j(y)^2 + \lambda\left(X_j(t) + c_\lambda^- t\right)\right)}{\sum_{k=1}^{N(t)} \exp\left(\psi_\lambda^- Y_k(y)^2 + \lambda\left(X_k(t) + c_\lambda^- t\right)\right)}, \tag{6.1}$$

so that we have $J_\lambda(\cdot,\cdot) \geq 0$ and $\sum_{k=1}^{N(t)} J_\lambda(t,k) = 1$. Then,

$$\begin{aligned}
M_\lambda(t) &= \sum_{k=1}^{N(t)} J_\lambda(t,k)\left\{(\psi_\lambda^-)' Y_k(t)^2 + X_k(t) + (\lambda c_\lambda^-)' t\right\} \\
&= (\psi_\lambda^-)' \sum_{k=1}^{N(t)} J_\lambda(t,k) Y_k(t)^2 + \sum_{k=1}^{N(t)} J_\lambda(t,k)\left\{X_k(t) + (\lambda c_\lambda^-)' t\right\} \\
&\geq (\psi_\lambda^-)' \sum_{k=1}^{N(t)} J_\lambda(t,k) Y_k(t)^2 + L(t) + (\lambda c_\lambda^-)' t.
\end{aligned}$$

Then, with $V_\lambda(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} J_\lambda(t,k) Y_k(t)^2$,

$$\frac{L(t)}{t} + (\lambda c_\lambda^-)' \leq \frac{M_\lambda(t)}{t} - (\psi_\lambda^-)' \frac{V_\lambda(t)}{t},$$

and the idea is to show that both terms on the right tend almost surely to zero:

$$t^{-1}V_\lambda(t) \to 0 \quad \text{a.s.}, \qquad t^{-1}M_\lambda(t) \to 0 \quad \text{a.s.}, \tag{6.2}$$

whence we shall have

$$\limsup \frac{L(t)}{t} \leq -(\lambda c_\lambda^-)', \quad \text{a.s.}.$$

Since $(\lambda c_\lambda^-)' \to \tilde{c}(\theta)$ as $\lambda \downarrow \tilde{\lambda}(\theta)$, we therefore have the desired upper bound

$$\limsup \frac{L(t)}{t} \leq -\tilde{c}(\theta), \quad \text{a.s.},$$

and the fact that

$$t^{-1}L(t) \to -\tilde{c}(\theta), \quad \text{a.s.}$$

will be proved. It therefore remains only to prove (6.2).

Proof that $t^{-1}V_\lambda(t) \to 0$ a.s.. We know from Section 3 that

$$\mathbb{Q}_\lambda^{0,0}(V_\lambda(t)) = \mathbb{E}_{\mu_\lambda}^0(\eta_t^2), \qquad \mu_\lambda := \tfrac{1}{2}\sqrt{\theta(\theta - 8r - 4a\lambda^2)},$$

where η is an $\mathrm{OU}(\theta, \mu_\lambda)$ process started at 0 under $\mathbb{P}_{\mu_\lambda}^0$. Thus, since an $\mathrm{OU}(\theta, \mu_\lambda)$ process is ergodic, $\mathbb{Q}_\lambda^{0,0}(V_\lambda(t))$ tends to a limit as $t \to \infty$, and is therefore bounded in t. For $n \in \mathrm{N}$, Jensen's inequality tells us that

$$\mathbb{Q}_\lambda^{0,0}(V_\lambda(t)^n) \leq \mathbb{Q}_\lambda^{0,0}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} J_\lambda(t,k) Y_k(t)^{2n}\right) = \mathbb{E}_{\mu_\lambda}^0(\eta_t^{2n}),$$

and this expression is again bounded in t.

We now need the fact that

$$\text{(6.3)} \qquad e^{2\mu_\lambda t}\left[V_\lambda(t) - \frac{\theta}{2\mu_\lambda}\right] \quad \text{is a } \mathbb{Q}_\lambda^{0,0} \text{ martingale.}$$

This follows by combining the methods of Section 3 with the fact that if η is an $\mathrm{OU}(\theta, \mu)$ process, then

$$e^{2\mu t}\left(\eta_t^2 - \frac{\theta}{2\mu}\right) \text{ is a martingale.}$$

In harmonic-oscillator language, this martingale is a 'second excited state' martingale; the previous ones have been 'ground state'.

It is now trivial to prove that, for any $\delta > 0$,

$$\text{(6.4)} \qquad t^{-\delta}\left[V_\lambda(t) - \frac{\theta}{2\mu_\lambda}\right] \to 0, \quad \text{a.s..}$$

For choose an integer n such that $2n\delta > 1$, and use Doob's submartingale inequality to see that for any integer $T > 1$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\sup_{t\in[T-1,T]}\left|V_\lambda(t)-\frac{\theta}{2\mu_\lambda}\right| \geq \epsilon T^\delta\right] \\
&\leq \mathbb{P}\left[\sup_{t\in[T-1,T]}\left(V_\lambda(t)-\frac{\theta}{2\mu_\lambda}\right)^{2n} e^{4nt} \geq \epsilon^{2n}T^{2n\delta}e^{4\mu_\lambda n(T-1)}\right] \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^{2n}T^{2n\delta}e^{4\mu_\lambda n(T-1)}}e^{4\mu_\lambda nT}\mathbb{E}\left\{\left(V_\lambda(T)-\frac{\theta}{2\mu_\lambda}\right)^{2n}\right\} \\
&\leq \frac{e^{4\mu_\lambda n}}{\epsilon^{2n}}U_n\,\frac{1}{T^{2n\delta}} \qquad (U_n \text{ a constant}),
\end{aligned}$$

and since $\sum 1/T^{2n\delta}$ converges, the result (6.4) follows from the Borel-Cantelli Lemma.

Proof that $t^{-1}M_\lambda(t) \to 0$ a.s.. Jensen's inequality gives

$$M_\lambda(t)^2 \leq \sum_{k=1}^{N(t)} J_\lambda(t,k)\{(\psi_\lambda^-)'Y_k(t)^2 + X_k(t) + (\lambda c_\lambda^-)'\}^2.$$

We can show that $(Z_\lambda^-)^{-1}(\partial^2/\partial\lambda^2)Z_\lambda^-$ is a $\mathbb{Q}_\lambda$-martingale, where

$$\begin{aligned}
&Z_\lambda^-(t)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}Z_\lambda^-(t) \\
&= \sum_{k=1}^{N(t)} J_\lambda(t,k)\left\{\{(\psi_\lambda^-)'Y_k(t)^2 + X_k(t) + (\lambda c_\lambda^-)'\}^2 + (\psi_\lambda^-)''Y_k(t)^2 + (\lambda c_\lambda^-)''t\right\}.
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_\lambda\left(M_\lambda(t)^2\right) &\leq \mathbb{Q}_\lambda\left(Z_\lambda^-(t)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}Z_\lambda^-(t) - \sum_{k=1}^{N(t)} J_\lambda(t,k)\{(\psi_\lambda^-)''Y_k(t)^2 + (\lambda c_\lambda^-)''t\}\right) \\
&= \mathbb{Q}_\lambda\left(Z_\lambda^-(0)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}Z_\lambda^-(0)\right) - (\psi_\lambda^-)''\mathbb{Q}_\lambda(V_\lambda(t)) - (\lambda c_\lambda^-)''t \\
&\leq K_1(\lambda) + K_2(\lambda)t,
\end{aligned}$$

for some finite K_i's. Doob's submartingale inequality now yields

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_\lambda\left(\sup\{s^{-1}|M_\lambda(s)| \,:\, 2^{n-1}\leq s\leq 2^n\} \geq \epsilon\right) &\leq \mathbb{Q}_\lambda\left(\sup_{0\leq s\leq 2^n}|M_\lambda(s)| \geq \epsilon 2^{n-1}\right) \\
&\leq (\epsilon 2^{n-1})^{-2}\{K_1(\lambda) + 2^nK_2(\lambda)\},
\end{aligned}$$

and the Borel-Cantelli Lemma completes the proof. □

7. Proof of Lemma 5.1

(At last, an expectation calculation which is not of the elementary 'linear' form.)

Our branching process has statespace

$$\mathcal{I} := \bigcup_{n\geq 1}(\{n\} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Its formal generator $\mathcal{G}$ is given by

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_A + \mathcal{G}_\theta + \mathcal{G}_R, \tag{7.1}$$

where for $n \geq 1, x, y \in \mathbb{R}^n$, we have

$$\begin{aligned}
(\mathcal{G}_A F)(n;\mathbf{x};\mathbf{y}) &= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}A(y_k)\frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2},\\
(\mathcal{G}_\theta F)(n;\mathbf{x};\mathbf{y}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\theta}{2}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial y_k^2} - y_k\frac{\partial F}{\partial y_k}\right\},\\
(\mathcal{G}_R F)(n;\mathbf{x};\mathbf{y}) &= \sum_{k=1}^{n} R(y_k)\Big\{F\big(n+1;(\mathbf{x},x_k);(\mathbf{y},y_k)\big) - F(n;\mathbf{x};\mathbf{y})\Big\},
\end{aligned} \tag{7.2}$$

where $(\mathbf{x}, x_k) := (x_1, \ldots, x_n, x_k) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(7.3) PROPOSITION: Local-martingale condition. *If $F : [0,\infty) \times \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ and*

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{G}\right)F\right\}(t;n;x;y) = 0 \qquad \text{for } t \geq 0, n \geq 1, x, y \in \mathbb{R}^n,$$

then $F\big(t;N(t);\mathbf{X}(t);\mathbf{Y}(t)\big)$ is a local martingale.

We know that

$$h_\lambda(t;n;\mathbf{x};\mathbf{y}) := \sum_{k=1}^{n} e^{\psi_\lambda^- y_k^2 + \lambda(x_k + c_\lambda^- t)} \tag{7.4}$$

leads to the martingale $Z_\lambda^-(t) = h_\lambda\big(t;N(t);\mathbf{X}(t);\mathbf{Y}(t)\big)$. Now, Z_λ^- jumps when a new particle is born; but any jump of Z_λ^- is of magnitude no greater than the current value of Z_λ^-. If, therefore, we introduce the stopping time

$$S_n := \inf\{t : Z_\lambda^-(t) \geq n\},$$

then Z_λ^- *stopped at* S_n never exceeds $2n$. Hence, Z_λ^- *is locally in* $\mathcal{L}^2$ (relative to any $\mathbb{P}^{x,y}$). We may now conclude that

$$Z_\lambda^-(t)^2 - A(t) \ \text{ is a local martingale}$$

where

$$A(t) := \int_0^t \left\{ \left(\mathcal{G} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left((h_\lambda)^2 \right) \right\} (s; N(s); \mathbf{X}(s); \mathbf{Y}(s))\, ds.$$

We find that – and this nice fact is crucial –

$$\text{(7.5)} \qquad \frac{dA(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{N(t)} \left\{ (a\lambda^2 + 4\theta(\psi_\lambda^-)^2 + r) Y_k(t)^2 + \rho \right\} e^{2\psi_\lambda^- Y_k(t)^2 + 2\lambda(X_k(t) + c_\lambda^- t)}.$$

The methods of Section 3 give tight bounds on $\mathbb{E}^{0,y} A(t)$ and in particular show that it is finite for small t. We can use Fatou's Lemma to deduce from the fact that $(Z_\lambda^-)^2 - A$ is a local martingale that

$$\text{(7.6)} \qquad \mathbb{E}^{0,y} \left[Z_\lambda^-(t)^2 \right] \leq \mathbb{E}^{0,y} A(t) + e^{2\psi_\lambda^- y^2}.$$

In this way, we can prove the following result.

(7.7) LEMMA: An $\mathcal{L}^2$ bound for Z_λ^-. *Given $\lambda < 0$ and $\epsilon > 0$, there exist $T > 0$ and $K < \infty$ such that*

$$\mathbb{E}^{0,y} \left(Z_\lambda^-(t)^2 \right) \leq K e^{2(\psi_\lambda^- + \epsilon) y^2} \quad (y \in \mathbb{R},\ t \in [0, T]).$$

Granted this result, we can use the monotonicity of $\mathcal{L}^p$-norms, namely

$$\mathbb{E}|X| \leq \left(\mathbb{E}[|X|^p] \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\mathbb{E}[|X|^2] \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } p \in [1, 2]$$

to tell us that for $p \in [1, 2]$,

$$\mathbb{E}^{0,y} \left(Z_\lambda^-(t)^p \right) \leq K^{\frac{p}{2}} e^{p(\psi_\lambda^- + \epsilon) y^2} \quad (y \in \mathbb{R},\ t \in [0, T]),$$

and Lemma 5.1 follows.

Remark. In the case when $\mathbb{E}^{0,y} A(t)$ is always finite, then, because $Z_\lambda^-(t)$ is in $\mathcal{L}^2$ for $\mathbb{E}^{0,y}$, the existence and uniqueness parts of the Meyer decomposition theorem show that $(Z_\lambda^-)^2 - A$ is a true martingale. Thus, equality holds in (7.6).

8. The travelling-wave and reaction-diffusion equations

We just remark for now that, as McKean (1975) has taught us, for $\tilde{\lambda}(\theta) < \lambda < 0$,

$$\text{(8.1)} \qquad w(x, y) := \mathbb{E}^{x,y} \left(e^{-Z_\lambda^-(\infty)} \right)$$

is a solution, monotone in x and tending to 0 [respectively, 1] as $x \to -\infty$ [$x \to \infty$] for each y, of the travelling-wave equation

$$\text{(8.2)} \qquad \frac{1}{2} A(y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_\lambda^- \frac{\partial w}{\partial x} + R(y) w(w - 1) + \frac{\theta}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - y \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0.$$

Then $u(t,x,y) := w(x - c_\lambda^- t, y)$ solves the reaction-diffusion equation

$$(8.3)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}A(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R(y)u(u-1) + \frac{\theta}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

associated with our problem. Further discussion of these equations is deferred to sequels to this paper.

9. The first expectation calculation for the critical case $\theta = 8r$

(9.1) THEOREM. *If $\theta = 8r$, then*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1} \log \mathbb{E}^{0,0} \# \left\{k \le N(t) : X_k(t) > c(\theta a)^{\frac{1}{2}} t^2\right\} \begin{cases} > 0 & \text{if } c < \pi^{-1}(\rho + \frac{1}{4}\theta), \\ < 0 & \text{if } c > \pi^{-1}(\rho + \frac{1}{4}\theta). \end{cases}$$

Thus, the expectation wavefront (in the positive direction) is essentially the parabolic curve $x = (\theta a)^{\frac{1}{2}} \pi^{-1}(\rho + \frac{1}{4}\theta)t^2$.

Proof. From (4.15), we find that

$$(9.2)\qquad \int e^{i\lambda x}\mathbb{E}^{0,0}\# \left\{k \le N(t) : \frac{X_k(t)}{t\sqrt{\theta a}} \in dx\right\} = \mathbb{E}^{0,0}\sum_{k=1}^{N(t)} \exp\left\{\frac{i\lambda X_k(t)}{t\sqrt{\theta a}}\right\}$$
$$= \frac{e^{(\rho+\frac{1}{4}\theta)t}}{(1+\frac{1}{2}\theta t)^{\frac{1}{2}}}\mathbb{E}e^{i\lambda S(t)},$$

where $S(t)$ is a random variable with characteristic function

$$(9.3)\qquad \mathbb{E}e^{i\lambda S(t)} = \left\{\frac{1+\frac{1}{2}\theta t}{\cosh\lambda + \frac{1}{2}\theta t\lambda^{-1}\sinh\lambda}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Some of the following analysis could be derived probabilistically along the route suggested by Donati and Yor (1991) and Chan, Dean, Jansons and Rogers (1994). However, complex analysis deals very effectively with what we need.

The function $f_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, where

$$f_t(z) := \cosh z + \tfrac{1}{2}\theta t z^{-1} \sinh z$$

is entire and of exponential order 1. All of its roots are purely imaginary; for if $u + iv$ is a root, we find that

$$\frac{\sin v}{\cos v} = \frac{u\cosh u + \frac{1}{2}\theta t \sinh u}{v \sinh u} = \frac{(-v\cosh u)}{u\sinh u + \frac{1}{2}\theta t\cosh u},$$

whence

$$\left(\tfrac{1}{4}\theta^2t^2 + u^2\right)\sinh u\cosh u + \tfrac{1}{2}\theta tu\left(\sinh^2 u + \cosh^2 u\right) = -v^2\sinh u\cosh u,$$

and if $u \neq 0$, the two sides of this equation have different signs. Thus the zeros of f_t are at points $\pm iv_1(t), \pm iv_2(t), \ldots$, where $v_1(t), v_2(t), \ldots$ are the positive roots (labelled in increasing order) of the equation

$$\cos v + \tfrac{1}{2}\theta t\frac{\sin v}{v} = 0.$$

We see from a graph that $v(n)/n \to \pi$, so that $\sum v_n(t)^{-2} < \infty$, and $f_t(\cdot)$ is of genus 1 in the language of Hadamard's factorization theorem – see Section 8.2 of Titchmarsh (1952). Using the fact that $f_t(z)$ is even in z, we obtain from Hadamard's Theorem the formula

$$\mathbb{E}e^{i\lambda S(t)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{1+\lambda^2/v_n(t)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

This means that we can regard $S(t)$ as a sum

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t)$$

of independent variables, $W_n(t)$ having characteristic function $[1+\lambda^2/v_n(t)^2]^{-\frac{1}{2}}$. With $R_1(t)$ denoting $S(t) - W_1(t)$, we have

$$\mathbb{P}[S(t) > x] \geq \mathbb{P}[W_1(t) > x; R_1(t) \geq 0] = \tfrac{1}{2}\mathbb{P}[W_1(t) > x].$$

But $W_1(t)$ has the same distribution as $W/v_1(t)$, where

$$\mathbb{E}e^{i\lambda W} = \left(1+\lambda^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

and W has density $\pi^{-1}K_0$ where K_0 is the usual modified Bessel function. Now, $v_1(t) < \pi$ for every t; and so, for $x > 0$,

$$\mathbb{P}[W_1(t) > x] = \mathbb{P}[W > v_1(t)x] \geq P[W > \pi x] = \frac{e^{-\pi x}}{\sqrt{2x}}\left(1 + \mathrm{O}(1/x)\right).$$

Since

$$\mathbb{E}^{0,0}\#\left\{k \leq N(t) : X_k(t) > c(\theta a)^{\frac{1}{2}}t^2\right\} = \frac{e^{(\rho+\frac{1}{4}\theta)t}}{(1+\frac{1}{2}\theta t)^{\frac{1}{2}}}\mathbb{P}[S(t) > ct],$$

the first part of the theorem follows.

Provided that $|v| < v_1(t)$, we have

$$\mathbb{E}e^{vS(t)} = m_t(v) := \left\{ \frac{1 + \frac{1}{2}\theta t}{\cos v + \frac{1}{2}\theta t v^{-1} \sin v} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Now, *let c be an arbitrary but fixed number with $c > \pi^{-1}(\rho + \frac{1}{4}\theta)$.* Choose and fix v_0 with $0 < v_0 < \pi$ and such that $cv_0 > (\rho + \frac{1}{4}\theta)$. Noting that $v_1(t) \uparrow \pi$ when $t \uparrow \infty$, we realize that we can find t_0 with $v_1(t_0) > v_0$ such that

$$\sup_{t \geq t_0} m_t(v_0) < \infty.$$

But, for $c > 0$,

$$\mathbb{P}[S(t) > ct] \leq e^{-cv_0 t}\mathbb{E}\left[e^{v_0 S}; S > ct\right] \leq e^{-cv_0 t} m_t(v_0).$$

The second part of the theorem now follows. □

(9.4) *Remark.* It is obvious from (9.3) that the distribution of $S(t)$ converges to the distribution with characteristic function $(\lambda/\sinh\lambda)^{\frac{1}{2}}$ which has tail behaviour roughly like $e^{-\pi|x|}$. Assuming that at time t we have $\mathbb{E}N(t)$ particle positions each of which when divided by $(\theta a)^{\frac{1}{2}}t$ has this limiting distribution, would lead to the correct answer for the approximate asymptotic wavefront in this '$\theta = 8r$' case. However, you should contrast the following observations. If $\theta > 8r$, then, for any subinterval Γ of $\mathbb{R}$, we have

$$\frac{\mathbb{E}^{0,0}\#\left\{k \leq N(t) : t^{-\frac{1}{2}}X_k(t) \in \Gamma\right\}}{\mathbb{E}^{0,0}N(t)} \to L(\Gamma), \tag{9.5}$$

where L is the normal law of mean 0 and variance $a\sqrt{\theta/(\theta - 8r)}$; but assuming that we have $\mathbb{E}N(t)$ particle positions each of which when divided by $\sqrt{t}$ has this limiting normal distribution, would lead to too low a wavespeed in our earlier work. In (9.5), we are here attaching too little weight to the particles far from the origin which play a more significant role. 'Central Limit Theorems' such as (9.5) focus too heavily on deviations of 'average' magnitude, not on the large deviations which concern us.

10. Acknowledgements

We thank John Toland, Jonathan Warren and the referees for their help.
We also thank SERC/EPSRC for SCH's research studentship.

An 'MN60' Thankyou from DW. DW started his career on Markov chains, which he learnt from his supervisors Kendall and Reuter and from the writings of Lévy, Chung and Neveu. Neveu's work was a great influence then as now. After being enthused about Brownian motion by the books by Lévy and by Itô and McKean, about martingales by Doob's book, and about stochastic integrals by McKean's, DW knew that he ought to learn *la théorie générale.* Inevitably then, much the most of what DW now knows about probability, he learnt from the writings of Meyer (much of it Meyer's own original work). And while DW is not gifted enough to be able to use what he has learnt to great effect himself, he sees his main task as that of helping the next generations (SCH is in the second) to use the Strasbourg theory as the foundation for their own research.

References

Champneys, A, Harris, S. C., Toland, J. F., Warren, J. & Williams, D (1995) Analysis, algebra and probability for a coupled system of reaction-diffusion equations, *Phil. Trans. Roy. Soc. London (A)*, **350**, 69–112.

Chan, T., Dean, D. S., Jansons, K. M. & Rogers, L. C. G. (1994) On polymer conformations in elongational flows. *Comm. Math. Phys.* **160**, 239–257.

Chauvin, B. & Rouault, A. (1988) KPP equation and supercritical branching Brownian motion in the subcritical speed area. Application to spatial trees. *Probab. Thy. Rel. Fields* **80**, 299–314.

Chauvin, B. & Rouault, A. (1990) Supercritical branching Brownian motion and K-P-P equation in the critical speed-area. *Math. Nachr.* **149**, 41–59.

Donati-Martin, C. & Yor, M. (1991) Fubini's theorem for double Wiener integrals and the variance of the Brownian path. *Ann. Inst. H. Poincaré* **27**, 2, 181–200.

Deuschel, J.-D. & Stroock, D. W. (1989) *Large Deviations.* Academic Press, Boston.

Harris, S.C. (1995) Large deviations and martingales for a typed diffusion, 2 (In preparation).

Harris, S.C. & Williams, D. (1995) Large deviations and martingales for a typed diffusion, 3: at the critical temperature (In preparation).

Itô, K. & McKean, H.P. (1965) *Diffusion Processes and their Sample Paths.* Springer, Berlin.

McKean, H. P. (1975) Application of Brownian motion to the equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov. *Comm. Pure Appl. Math.* **28**, 323–331.

Neveu, J. (1987) Multiplicative martingales for spatial branching processes. *Seminar on Stochastic Processes* (ed. E. Çinlar, K. L Chung and R. K. Getoor), Progress in Probability and Statistics **15**. pp. 223–241. Birkhäuser, Boston.

Titchmarsh., E. C. (1952) *The Theory of Functions* (second edition). Oxford University Press.

S. C. Harris and D. Williams,
School of Mathematical Sciences,
University of Bath,
Bath, BA2 7AY,
UK.

J. JACOD

La variation quadratique du brownien en présence d'erreurs d'arrondi

Astérisque, tome 236 (1996), p. 155-161

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__155_0>

La variation quadratique du brownien en présence d'erreurs d'arrondi

J. Jacod

Résumé. — Nous étudions le comportement asymptotique (quand $n \to \infty$) de la variation quadratique au pas n, $\sum_{i=1}^{[nt]}(X_{i/n} - X_{(i-1)/n})^2$, lorsque X est un brownien linéaire, et lorsqu'on remplace dans la formule ci-dessus $X_{i/n}$ par une valeur arrondie, avec une précision α_n pouvant dépendre de n. On verra apparaitre des comportements inattendus, dépendant de la limite α de la suite α_n, et de sa vitesse de convergence si $\alpha = 0$.

1 Introduction et résultats

Dans ce qui suit, X désigne un brownien linéaire de variance unitaire σ^2. Nous nous proposons d'étudier le comportement de la variation quadratique en présence d'erreurs d'arrondi.

Plus précisément, on sait que le processus variation quadratique "au pas n" $V_t^n = \sum_{i/n}^{[nt]} (X_{i/n} - X_{(i-1)/n})^2$ converge dans $\mathbb{L}^2$ vers $t\sigma^2$. Que devient ce résultat banal si on remplace les $X_{i/n}$ par des valeurs "arrondies" à un certain niveau de précision $\alpha_n > 0$ (pouvant dépendre de n)? De manière plus précise, on remplace chaque $X_{i/n}$ par $X_{i/n}^{(\alpha_n)} = \alpha_n[X_{i/n}/\alpha_n]$ ($[x]$ désignant la partie entière du réel x) et donc le processus V^n par

$$V(n, \alpha_n)_t = \sum_{i=1}^{[nt]}(X_{i/n}^{(\alpha_n)} - X_{(i-1)/n}^{(\alpha_n)})^2. \tag{1}$$

L'intérêt de l'étude du comportement de $V(n, \alpha_n)$ est évident, par exemple, lors de l'estimation statistique de σ^2 à partir d'observations "discrétisées" $X_{i/n}$ pour $i \leq n$: on sait que le "meilleur" estimateur (en tous les sens du terme) est alors V_1^n; dans la pratique, on remplace évidemment V_1^n par $V(n, \alpha_n)_1$, et il est naturel de se demander si $V(n, \alpha_n)_1$ converge encore vers σ^2.

Si α_n tend "assez vite" vers 0, la différence $V_t^n - V(n, \alpha_n)_t$ va évidemment tendre vers 0. Au contraire si $\alpha_n = \alpha > 0$, pour n assez grand les accroissements du membre de droite de (1) sont pour la plupart nuls, et le reste du temps de taille α^2 lorsque X oscille autour d'une des valeurs $k\alpha$ pour $k \in \mathbb{Z}$: donc le comportement limite de $V(n,\alpha_n)$ doit s'exprimer en termes des temps locaux de X aux niveaux $k\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.

Une réponse complète à la question posée est donnée par le :

THEOREME : *Soit $\beta_n = \alpha_n\sqrt{n}$. On a les convergences suivantes :*

a) *Si $\beta_n \to 0$, alors $V(n,\alpha_n)_t \to t\sigma^2$ dans $\mathbb{L}^2$.*

b) *Si $\beta_n \to \beta \in]0,\infty[$, alors $V(n,\alpha_n)_t \to t\Gamma(\beta,\sigma)$ dans $\mathbb{L}^2$, où Γ est la fonction suivante, avec h densité de la loi normale standard $N(0,1)$:*

$$\Gamma(\beta,\sigma) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{(k-1)\beta/\sigma}^{k\beta/\sigma} h(u)(2k\beta\sigma u + k(1-k)\beta^2)du. \tag{2}$$

c) *Si $\beta_n \to \infty$ et $\alpha_n \to 0$, alors $\frac{1}{\beta_n}V(n,\alpha_n)_t \to t\sigma\sqrt{2/\pi}$ dans $\mathbb{L}^2$.*

d) *Si $\alpha_n \to \alpha \in]0,\infty[$, alors $\frac{1}{\sqrt{n}}V(n,\alpha_n)_t \to \frac{1}{\sigma}\Lambda(\alpha)_t$ en probabilité, où L^a est le temps local* (au sens des semimartingales) *de X au niveau a, et*

$$\Lambda(\alpha) = \sqrt{2/\pi}\,\alpha^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} L^{k\alpha}. \tag{3}$$

Les résultats les plus importants nous semblent être (b) et(c) : ils montrent que $V(n,\alpha_n)$ ne converge pas vers $\sigma^2 t$, ou peut même tendre vers l'infini, si α_n ne tend pas assez vite vers 0. La partie (d) est, nous le verrons, un corollaire simple des résultats d'Azaïs [1].

Bien entendu, ces résultats sont susceptibles de généralisations aux diffusions, ou peut-être à des semimartingales continues plus générales. Un autre problème intéressant, mais plus difficile, concerne les vitesses de convergence (du type théorème central limite) dans (a,b,c) : ces résultats seront développés ailleurs.

REMARQUE : Les résultats ci-dessus sont "compatibles" au sens suivant :

1) On vérifie aisément que $\Gamma(\beta,\sigma) \to \sigma^2$ si $\beta \to 0$ (Il est vraisemblable, mais nous n'avons pas su le démontrer, que $\beta \to \Gamma(\beta,\sigma)$ est croissante; les résultats de simulations étayent cette conjecture).

2) De même, on démontre que $\Gamma(\beta,\sigma)/\beta \to \sigma\sqrt{2/\pi}$ si $\beta \to \infty$.

3) Si $\alpha \to 0$, alors $\Lambda(\alpha)_t \to \sqrt{2/\pi}\frac{1}{\sigma}\int L_t^a dt = \sigma t\sqrt{2/\pi}$ (formule du temps d'occupation pour les temps locaux de semimartingale). □

On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par X, et on pose

$$\xi_i^n = X_{i/n} - X_{(i-1)/n}, \qquad \chi_i^n = (X_{i/n}^{(\alpha_n)} - X_{(i-1)/n}^{(\alpha_n)})^2.$$

Soit aussi $p_t(x,y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}h((y-x)/\sigma\sqrt{t})$ la famille des densités de transition de X. Finalement, C désigne une constante (dépendant parfois de σ^2) changeant de ligne en ligne.

2 Preuve de (a)

Comme $0 \leq x - \alpha[x/\alpha] < \alpha$, on a $|\chi_i^n - (\xi_i^n)^2| \leq 4\alpha_n^2 + 4\alpha_n|\xi_i^n|$ et donc

$$|V(n,\alpha_n)_t - V_t^n| \leq 4\alpha_n^2[nt] + 4\alpha_n \sum_{i=1}^{[nt]} |\xi_i^n|.$$

Par ailleurs $E(|\xi_i^n \xi_j^n|) = 2\sigma^2/n\pi$ si $i \neq j$ et $E((\xi_i^n)^2) = \sigma^2/n$, donc $E(|V(n,\alpha_n)_t - V_t^n|^2) \leq C(\alpha_n^4 n^2 + \alpha_n^2 n) \to 0$.

3 Preuve de (b)

On suppose ici que $\beta_n \to \beta \in]0,\infty[$ et on pose $\eta_i^n = \chi_i^n - \Gamma(\beta,\sigma)/n$. Il faut montrer que $\sum_{i=1}^{[nt]} \eta_i^n \to 0$ dans $\mathbb{L}^2$. Pour cela il suffit d'avoir les deux propriétés :

$$\sum_{i=1}^{[nt]} E((\eta_i^n)^2) \to 0. \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{[nt]-2} \sum_{j=i+2}^{[nt]} E(\eta_i^n \eta_j^n) \to 0. \tag{5}$$

Comme $|\eta_i^n| \leq 2(\xi_i^n)^2 + 8\alpha_n^2 + \Gamma(\beta,\sigma)/n$ et $E((\xi_i^n)^4) = 3\sigma^4/n^2$, on a (4). Pour (5) nous opérons en deux étapes.

ETAPE 1. Soit $s > 0$. La variable $E((X_{t+s+1/n}^{(\alpha_n)} - X_{t+s}^{(\alpha_n)})^2|\mathcal{F}_t)$ se met sous la forme $\gamma_n(X_t, s)$, où

$$\begin{aligned}
\gamma_n(x,s) &= \\
&= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} k^2\alpha_n^2 \iint p_s(x,y)p_{1/n}(y,z)1_{\{j\alpha_n \leq y < (j+1)\alpha_n, (k+j)\alpha_n \leq z < (k+j+1)\alpha_n\}}\, dy\, dz \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2\alpha_n^2 [\int_0^{\beta_n/\sigma} h(u + (k-1)\beta_n/\sigma)\, du \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}}^{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s}} h(v)\, dv \\
&\quad + \int_0^{\beta_n/\sigma} h(u + k\beta_n/\sigma)\, du \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{(j\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s}}^{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}} h(v)\, dv].
\end{aligned} \tag{6}$$

Soit $g(v,y,w) = (\frac{w}{y} - 1)v1_{[0,w]}(v) + w(\frac{v}{y} - 1)1_{]w,y]}(v)$. Si $z \in \mathbb{R}$, $0 \leq w \leq y$ et $y > 0$, une intégration par parties

$$\int_z^{z+w} h(v)\, dv - \frac{w}{y}\int_z^{z+y} h(v)\, dv = \int_z^{z+y} h'(v)g(z+v,y,w)\, dv.$$

Mais $|g(v,y,w)| \leq w$ et h' est intégrable, donc si $z \in \mathbb{R}$, $y > 0$ et $0 \leq w \leq y$:

$$|\sum_{j\in\mathbf{Z}} \int_{jy+z}^{jy+z+w} h(v)\,dv - \frac{w}{y}| \leq Cw \leq Cy. \tag{7}$$

Soit $0 \leq u \leq \beta_n/\sqrt{s}$. Si on applique (7) à $y = \alpha_n/\sigma\sqrt{s}$, et d'abord à $w = u/\sqrt{ns}$ et $z = (\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}$, puis à $w = \alpha_n/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns} = (\beta_n/\sigma - u)/\sqrt{ns}$ et $z = -x/\sigma\sqrt{s}$, on obtient :

$$|\sum_{j\in\mathbf{Z}} \int_{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}}^{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s}} h(v)\,dv - \frac{u\sigma}{\beta_n}| \leq C\frac{u}{\sqrt{ns}} \leq C\frac{\alpha_n}{\sigma\sqrt{s}} \tag{8}$$

$$|\sum_{j\in\mathbf{Z}} \int_{(j\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s}}^{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}} h(v)\,dv - 1 + \frac{u\sigma}{\beta_n}| \leq C(\frac{\beta_n}{\sigma} - u)\frac{1}{\sqrt{ns}} \leq C\frac{\alpha_n}{\sigma\sqrt{s}} \tag{9}$$

Si alors $f_n(u) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} k^2(h(u + (k-1)\beta_n/\sigma)u\sigma\beta_n + h(u + k\beta_n/\sigma)(\beta_n^2 - u\sigma\beta_n))$ et $g_n(u) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} k^2(h(u + (k-1)\beta_n/\sigma) + h(u + k\beta_n/\sigma))$, on déduit de (6), (8) et (9) que

$$|\gamma_n(x,s) - \frac{1}{n}\int_0^{\beta_n/\sigma} f_n(u)\,du| \leq C\alpha_n^3 s^{-1/2} \int_0^{\beta_n/\sigma} g_n(u)\,du.$$

Mais $\beta_n \to \beta \in]0,\infty[$, donc les fonctions f_n et g_n convergent vers les fonctions $f(u) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} k^2(h(u + (k-1)\beta/\sigma)u\sigma\beta + h(u + k\beta/\sigma)(\beta^2 - u\sigma\beta))$ et $g(u) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} k^2(h(u + (k-1)\beta/\sigma) + h(u + k\beta/\sigma))$, et $sup_{u\in[0,\beta_n/\sigma]}(|f_n(u)| + |g_n(u)|) < \infty$. De plus $\int_0^{\beta/\sigma} f(u)\,du = \Gamma(\beta,\sigma)$. Comme $\alpha_n = O(\sqrt{n})$, on a finalement :

$$|\gamma_n(x,s) - \frac{1}{n}\Gamma(\beta,\sigma)| \leq \frac{C}{n\sqrt{ns}} + o(1/n). \tag{10}$$

ETAPE 2. On a $E(\eta_j^n|\mathcal{F}_{i/n}) = \gamma_n(X_{i/n}, (j-i-1)/n) - \Gamma(\beta,\sigma)/n$ si $j \geq i+2$. Comme $|\eta_i^n| \leq 2(\xi_i^n)^2 + 8\alpha_n^2 + \Gamma(\beta,\sigma)/n$ on a aussi $E(|\eta_i^n|) \leq C/n$. Donc (10) implique pour $j \geq i+2$:

$$\begin{aligned}|E(\eta_i^n\eta_j^n)| &= |E(\eta_i^n(\gamma_n(X_{i/n}, \frac{j-i-1}{n}) - \frac{\Gamma(\beta,\sigma)}{n}))| \\ &\leq (C/n\sqrt{j-i-1} + o(1/n))|E(\eta_i^n)| \leq C/n^2\sqrt{j-i-1} + o(1/n^2).\end{aligned}$$

Comme $\lim_n n^{-1/2}\sum_{k=2}^{[nt]}(k-1)^{-1/2} = \int_0^t s^{-1/2}\,ds < \infty$, on en déduit (5).

4 Preuve de (c)

On suppose maintenant que $\beta_n \to \infty$ et que $\alpha_n \to 0$. Posons $R_n = \{(x,y) : |[y/\alpha_n] - [x/\alpha_n]| = 1\}$ et $S_n = \mathbb{R}^2 \setminus R_n$.

ETAPE 1. Soit

$$\delta_i^n = \frac{1}{\beta_n}\chi_i^n 1_{S_n}(X_{(i-1)/n}, X_{i/n}), \qquad W_n = \sum_{i=1}^{[nt]} \delta_i^n.$$

Si $(x,y) \in S_n$ on a ou bien $[y/\alpha_n] = [x/\alpha_n]$, ou bien $|x-y| \geq \alpha_n$, donc toujours $|\alpha_n[y/\alpha_n] - \alpha_n[x/\alpha_n]| \leq 2|y-x|$. Donc $(\delta_i^n)^2 \leq 16\beta_n^{-2}(\xi_i^n)^4$. Comme $E((\xi_i^n)^4) = 3\sigma^4/n^2$ et $W_n^2 \leq [nt]\sum_{i=1}^{[nt]}(\delta_i^n)^2$, on déduit de $\beta_n \to \infty$ que $W_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^2$. Il reste donc à prouver que si

$$\eta_i^n = \frac{1}{\beta_n}\chi_i^n 1_{R_n}(X_{(i-1)/n}, X_{i/n}) - \frac{1}{n}\sigma\sqrt{2/\pi}, \quad W_n' = \sum_{i=1}^{[nt]} \eta_i^n, \tag{11}$$

alors $W_n' \to 0$ dans $\mathbb{L}^2$.

ETAPE 2. Si $(X_{t+s}, X_{t+s+1/n}) \in R_n$ on a $(X_{t+s+1/n}^{(\alpha_n)} - X_{t+s}^{(\alpha_n)})^2 = \alpha_n^2$. Par suite $E(\frac{1}{\beta_n}(X_{t+s+1/n}^{(\alpha_n)} - X_{t+s}^{(\alpha_n)})^2 1_{R_n}(X_{t+s}, X_{t+s+1/n})|\mathcal{F}_t)$ est de la forme $\gamma_n'(X_t, s)$, où

$$\begin{aligned}\gamma_n'(x,s) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int p_s(x,y)p_{1/n}(y,z)[&1_{\{j\alpha_n\leq y<(j+1)\alpha_n\leq z<(j+2)\alpha_n\}} \\ &+ 1_{\{(j-1)\alpha_n\leq z<j\alpha_n\leq y<(j+1)\alpha_n\}}]\,dy\,dz.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\Big[\int_0^{\beta_n/\sigma}(h(u)+h(u-2\beta_n/\sigma))\,du\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{((j+1)\alpha_n-x)/\sigma\sqrt{s}-u/\sqrt{ns}}^{((j+1)\alpha_n-x)/\sigma\sqrt{s}} h(v)\,dv \\ + \int_0^{\beta_n/\sigma}(h(u+\beta_n/\sigma)+h(u-\beta_n/\sigma))\,du\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{(j\alpha_n-x)/\sigma\sqrt{s}}^{((j+1)\alpha_n-x)/\sigma\sqrt{s}-u/\sqrt{ns}} h(v)\,dv\Big].\end{aligned}$$

Soit $\varphi_n = \exp -\beta_n^2/4\sigma^2$. On a $\int_0^{\beta_n/\sigma}(h(u-2\beta_n/\sigma)+h(u+\beta_n/\sigma))\,du \leq C\varphi_n$, donc d'après (8) et (9) :

$$|\gamma_n'(x,s) - \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\int_0^{\beta_n/\sigma}(h(u)\frac{u\sigma}{\beta_n} + h(u-\beta_n/\sigma))(1-\frac{u\sigma}{\beta_n})\,du| \leq C\frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}(\varphi_n + \frac{1}{\sqrt{ns}}).$$

De plus

$$\int_0^{\beta_n/\sigma} h(u)\frac{u\sigma}{\beta_n}\,du = \int_0^{\beta_n/\sigma}(h(u-\beta_n/\sigma)(1-\frac{u\sigma}{\beta_n})\,du = \int_0^{\infty} h(u)\frac{u\sigma}{\beta_n}\,du + O(\varphi_n).$$

On a donc

$$|\gamma_n'(x,s) - \frac{\sigma}{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}| \leq C\frac{\beta_n}{n}(\varphi_n + \frac{1}{\sqrt{ns}}). \tag{13}$$

ETAPE 3. Vu (11), il suffit de prouver (4) et (5) (avec η_i^n comme dans (11)) pour obtenir $W'_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^2$. D'abord $|\eta_i^n| \leq C(1/n + \alpha_n/\sqrt{n} + |\xi_i^n|/\sqrt{n})$, donc $E((\eta_i^n)^2) \leq C\alpha_n^2/n$, et comme $\alpha_n \to 0$ on obtient (4).

Ensuite $E(\eta_i^n|\mathcal{F}_{i/n}) = \gamma'_n(X_{i/n}, \frac{j-i-1}{n}) - \frac{\sigma}{n}\sqrt{2/\pi}$ si $j \geq i+2$. On déduit alors de (12) que $|E(\eta_j^n|\mathcal{F}_{i/n})| \leq C\frac{\beta_n}{n}(\varphi_n + 1/\sqrt{j-i-1})$ si $j \geq i+2$. On a aussi $E(|\eta_i^n|) \leq C\beta_n/n$ (cf. ci-dessus), et d'après (12) encore il vient $E(|\eta_i^n|) \leq E(\gamma'_n(0, \frac{i-1}{n}) + \frac{\sigma}{n}\sqrt{2/\pi})) \leq C(1/n + \beta_n\varphi_n/n + \beta_n n\sqrt{i-1})$ si $i \geq 2$. En rassemblant tout ceci on arrive à :

$$|E(\eta_1^n\eta_{1+j}^n)| \leq \frac{C}{n^2}\beta_n^2(\varphi_n + \frac{1}{\sqrt{j-1}})$$
$$|E(\eta_i^n\eta_{i+j}^n)| \leq \frac{C}{n^2}\beta_n^2(\varphi_n + \frac{1}{\sqrt{j-1}})(\varphi_n + \frac{1}{\beta_n} + \frac{1}{\sqrt{i-1}})$$

(pour $i \geq 2$, $j \geq 2$). Comme $sup_n\ n^{-1/2}\sum_{j=1}^{[nt]} j^{-1/2} < \infty$, le premier membre de (5) est majoré par $C\beta_n^2(n\varphi_n + 1)(n\varphi_n + 1 + n/\beta_n)/n^2$. (5) découle alors de ce que $\beta_n^2\varphi_n \to 0$ et $\beta_n/n \to 0$. La preuve est donc terminée.

5 Preuve de (d)

On suppose maintenant que $\alpha_n \to \alpha \in]0,\infty[$. On utilise les notations R_n, S_n, W_n du paragraphe précédent. Comme $\beta_n \to \infty$, on a encore $W_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^2$. Comme $\alpha_n \to \alpha > 0$, on a $P(|\xi_i^n| > \alpha_n) \leq e^{-Cn}$ et on a aussi la convergence suivante dans $\mathbb{L}^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[nt]} 1_{\{|\xi_i^n|>\alpha_n\}} \to 0. \tag{13}$$

Rappelons que $(X_{(i-1)/n}, X_{i/n}) \in R_n$ implique $\chi_i^n = \alpha_n^2$, donc si on pose

$$\hat{W}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[nt]} 1_{R_n}(X_{(i-1)/n}, X_{i/n}),$$

il vient $V(n,\alpha_n)_t/\sqrt{n} = \alpha_n^2\hat{W}_n + \alpha_n W_n$. Comme $\alpha_n \to \alpha$ et $W_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^2$, il reste à prouver que $\hat{W}_n \to \Lambda(\alpha)_t/\sigma\alpha^2$ en probabilité.

Posons $T(a) = \{(x,y) : x < a \leq y \text{ ou } y < a \leq x\}$ et $T_n = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} T(j\alpha_n)$. On a $R_n \subset T_n$, et $|x-y| \geq \alpha_n$ lorsque $(x,y) \in T_n \setminus R_n$. Par (13) on voit qu'il suffit de prouver que $\hat{W}'_n \to \Lambda(\alpha)_t/\sigma\alpha^2$ en probabilité, où

$$\hat{W}'_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[nt]} 1_{T_n}(X_{(i-1)/n}, X_{i/n}).$$

D'après Azaïs [1], on sait que pour chaque $a \in \mathbb{R}$ la suite

$$U(n,a) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} 1_{T(a)}(X_{(i-1)/n}, X_{i/n})$$

converge vers $\sqrt{2/\pi}\ L_t^a/\sigma$ dans $\mathbb{L}^2$, et une modification triviale de la preuve de [1] (utilisant une version continue de $a \mapsto L_t^a$; noter que le temps local utilisé ici, qui est celui des semimartingales, égale le temps local de Azaïs multiplié par σ^2) montre qu'on a aussi $U(n,a_n) \to \sqrt{2/\pi}\ L_t^a/\sigma$ dans $\mathbb{L}^2$ quand $a_n \to a$.

Maintenant, sur l'ensemble $A_k = \{sup_{s\leq t}|X_s| \leq k/2\}$ on a d'une part $\Lambda(\alpha)_t/\sigma\alpha^2 = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sigma} \sum_{j\in\mathbf{Z},|j|\leq k} U(n, j\alpha_n)$ dès que $\alpha_n \leq 2\alpha$. Donc ce qui précède entraîne $\hat{W}_n' \to \Lambda(\alpha)_t/\sigma\alpha^2$ dans L^2 sur A_k, et comme $A_k \to \Omega$ lorsque $k \to \infty$ on obtient le résultat.

6 Bibliographie

[1] AZAIS J.M. (1989) : Approximation des trajectoires et temps local des diffusions. *Ann. Inst. H. Poincaré,* **25**, 175–194.

Laboratoire de Probabilités
(URA 224 du CNRS)
Université Pierre et Marie Curie
Tour 56
4 place Jussieu
75 252 PARIS Cedex 05

Astérisque

T. JEULIN

Filtrations, sous-filtrations : propriétés élémentaires

Astérisque, tome 236 (1996), p. 163-170

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__163_0>

Filtrations, sous-filtrations : propriétés élémentaires

T. Jeulin

Résumé. — Nous donnons des conditions simples pour qu'il existe des martingales continues (ou plus précisément un mouvement brownien) adaptées à une filtration.

Le but de cette note est essentiellement de montrer les résultats suivants :

Théorème 1 *Soit T une variable aléatoire positive définie sur l'espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$; $\mathcal{T}$ est la plus petite filtration [continue à droite, complète] faisant de T un temps d'arrêt. Il existe un processus non constant $\mathcal{T}$-adapté, qui est une martingale continue [dans sa propre filtration] si et seulement si la loi de T a une partie diffuse.*

Théorème 2 *Soit X un processus, à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, à accroissements indépendants stationnaires, sans partie gaussienne, de mesure de Lévy ν, $\mathcal{X}$ la filtration qu'il engendre. Il existe un mouvement brownien B adapté à la filtration $\mathcal{X}$ si et seulement si $\nu[\mathbf{R}^d]$ est infini.*

Soulignons que si B existe, ce n'est pas un $\mathcal{X}$-mouvement brownien, ou, de façon équivalente une $\mathcal{X}$-martingale, puisque l'on sait que les $\mathcal{X}$-martingales sont purement discontinues.

Théorème 3 *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration vérifiant les conditions habituelles. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un mouvement brownien $\mathcal{F}$-adapté est :*

$$\textit{pour tout } t > 0, \textit{ il existe une v.a. } U_t\ \mathcal{F}_t\textit{-mesurable, de loi diffuse.}$$

Dans la suite, Φ désigne une application mesurable de $[0,1]$ dans $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ transformant la mesure de Lebesgue λ_1 en la mesure de Wiener $\mathbf{P}_0$.

I. Soit T une variable aléatoire positive définie sur l'espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, μ sa loi et F_μ sa fonction de répartition. On désigne par $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ la plus petite filtration [continue à droite, complète] faisant de T un temps d'arrêt ([3], Chapitre 5, exemple p. 122-124).

Supposons dans un premier temps μ purement atomique. Soit $\mathcal{G}$ une sous-filtration de $\mathcal{T}$. $\sigma(T)$ étant [complétée d'une tribu] atomique, on sait ([8], [5]) que toute $\mathcal{G}$-martingale locale est une $\mathcal{H}$-semimartingale si

$$\mathcal{H}_t = \bigcap_{s>t} (\mathcal{G}_s \vee \sigma(T)) = \mathcal{T}_\infty.$$

Puisque $\mathcal{H}_0 = \mathcal{T}_\infty$, les $\mathcal{H}$-martingales [locales] sont des processus constants et toute $\mathcal{G}$-semimartingale est à variation finie. Les seules martingales continues $\mathcal{T}$-adaptées sont donc constantes.

Supposons maintenant que la partie diffuse μ_c de μ n'est pas nulle et notons C_μ l'ensemble des points de continuité de F_μ. Soit $0 < a < b$, avec

$$\mu_c\,]a,b[\; \neq 0.$$

Conditionnellement à $\{T \in C_\mu\,,\ a < T < b\}$ la loi de T est diffuse*, de fonction de répartition

$$F_{\mu,a,b}(x) = 1_{\{a\leq x\}}\,\frac{\mu_c\,]a, x\wedge b[}{\mu_c\,]a,b[}$$

et $F_{\mu,a,b}(T)$ est uniforme sur $[0,1]$.

$$Y_t = 1_{\{b\leq t\}} 1_{\{T\in C_\mu\,,\ a<T<b\}} \big(\Phi \circ F_{\mu,a,b}(T)\big)_{t-b} \text{ convient :}$$

▹ $\forall t \geq 0, Y_t$ est $\mathcal{T}_t$-mesurable : c'est évident si $t < b$; sinon :
$\{T \in C_\mu\,,\ a < T < b\} \in \mathcal{T}_b$;
$Y_t = 1_{\{T\in C_\mu\,,\ a<T<b\}} \big(\Phi \circ F_{\mu,a,b}(T\wedge b)\big)_{t-b}$ est $\mathcal{T}_b$-mesurable;

▹ Si $(\mathcal{Y}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration [continue à droite, complète] engendrée par Y,

$$\{T \in C_\mu\,,\ a < T < b\} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} \{\exists t \in\,]b, b+\tfrac{1}{n}[\,,\ Y_t \neq 0\} \in \mathcal{Y}_b$$

et pour $0 = t_0 < t_1 = b \leq ... \leq t_n$, φ_0, ..., φ_n boréliennes sur $\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\prod_{0\leq k\leq n} \varphi_k(Y_{t_k})\,;\ T \in C_\mu\,,\ a < T < b\right] &= \varphi_0(0)\ \mathbf{E}\left[\prod_{1\leq k\leq n} \varphi_k\Big(\big(\Phi\circ F_{\mu,a,b}(T)\big)_{t_k-b}\Big), T \in C_\mu\,,\ a < T < b\right]\\ &= \varphi_0(0)\ \mu\,]a,b[\ \mathbf{P}_0\left[\prod_{1\leq k\leq n} \varphi_k(\xi_{t_k-b})\right].\end{aligned}$$

* On travaille de fait avec la partie $\mathcal{T}$-totalement inaccessible de T.

On en déduit facilement que Y est une $\mathcal{Y}$-martingale continue, de processus croissant

$$\langle Y, Y\rangle_t = 1_{\{T\in C_\mu\,,\,a<T<b\}}(t-b)_+.$$

D'où le théorème 1.

Sous les mêmes conditions sur T, soit $a = (a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une suite croissante (à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}_+$) avec

$$\inf_n a_n = 0,\ \sup_n a_n = \infty$$

et soit

$$T^{(a)} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_{n+1} 1_{\{T\in C_\mu,\, a_n<T\le a_{n+1}\}} + \infty 1_{\{T\notin C_\mu\}},$$

$$Y_t^{(a)} = \sum_{\left\{n\in\mathbf{Z}\middle|\mu_c\left[\,]a_n,a_{n+1}[\,\right]>0\right\}} 1_{\{T\in C_\mu,\, a_n<T\le a_{n+1}\le t\}}\big(\Phi\circ F_{\mu,a_n,a_{n+1}}(T)\big)_{t-a_{n+1}}.$$

$Y^{(a)}$ est une $\big(\mathcal{Y}_t^{(a)}\big)$-martingale continue, de processus croissant

$$\big\langle Y^{(a)}, Y^{(a)}\big\rangle_t = \big(t - T^{(a)}\big)_+.$$

Remarques

1) Toute $\mathcal{T}$-martingale locale est purement discontinue. Cette dernière propriété peut donc être perdue si on diminue la filtration.

2) Ce travail a son origine dans l'étude de la notion suivante, introduite par Yor :

une filtration $\mathcal{U}$ est dite automatique si pour toute sous-filtration $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$, toute $\mathcal{V}$-semi-martingale est une $\mathcal{U}$-semi-martingale.

Proposition 1 *La filtration $\mathcal{U}$ est automatique si et seulement si*

($\natural$) $\forall t\ge 0$, $\mathcal{U}_t$ *est atomique [aux ensembles* $\mathbf{P}$*-négligeables près].*

Démonstration. Vu le théorème de Stricker ([10]), une sous-filtration d'une filtration automatique est automatique; d'après la remarque *1*), dans une filtration automatique $\mathcal{U}$, les temps d'arrêt ont des lois atomiques; si $\mathbf{P}\,|_{\mathcal{U}_t}$ n'était pas atomique, il existerait une variable aléatoire réelle η, $\mathcal{U}_t$-mesurable telle que $\mathbf{P}_\eta$ ait une partie diffuse; $t+|\eta|$ serait un $\mathcal{U}$-temps d'arrêt de loi non atomique. Inversement si $\mathcal{U}$ vérifie ($\natural$), toute sous-filtration $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ vérifie aussi ($\natural$) et toute $\mathcal{V}$-martingale est à variation finie. □

Une filtration automatique $\mathcal{U}$ vérifie la propriété

($\flat$) toute $\mathcal{U}$-martingale est à variation finie.

D'après la caractérisation de Jacod et Skorohod ([4]-théorème 1) des filtrations vérifiant ($\mathfrak{b}$), une filtration $\mathcal{U}$ est automatique si, et seulement si, il existe une suite croissante $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{U}$-temps d'arrêt avec :

$$T_0 = 0,\ \sup_n T_n = \infty,\ \mathcal{U}_t = \mathcal{U}_{T_n} \text{ sur } \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$$

et $\forall n \in \mathbf{N}, \mathcal{U}_{T_n}$ est une tribu atomique.

3) Supposons μ non atomique; soit Y une martingale continue $\mathcal{T}$-adaptée, $\mathcal{Y}$ la filtration qu'elle engendre et

$$\tau = \inf\{t \mid Y_t \neq Y_0\} \ \big(= \inf\{t \mid \langle Y, Y\rangle_t > 0\}\big)$$

τ est un $\mathcal{Y}$- (et un $\mathcal{T}$-) temps d'arrêt vérifiant $T \leq \tau$; il existe donc $\phi : \mathbf{R}_+ \to \overline{\mathbf{R}}_+$ borélienne avec $\phi(x) \geq x$ pour μ-presque tout x et $\tau = \phi(T)$; les fonctions ϕ admissibles sont celles pour lesquelles la loi de T (sur $\{T < \infty\}$) conditionnellement à $\phi(T)$ est diffuse, i.e. telles que :

$$(\clubsuit) \text{ pour toute } h \text{ borélienne sur } \overline{\mathbf{R}}_+,\ \mathbf{P}[h \circ \phi(T) = T\,;\ T < \infty] = 0.$$

Conditionnellement à τ, les martingales continues sont constantes après τ sur les atomes de la loi conditionnelle de T sachant τ, d'où la nécessité de ($\clubsuit$). Inversement, soit V un noyau de $(\overline{\mathbf{R}}_+, \overline{\mathcal{R}}_+)$ dans lui même tel que $V(\tau, A)$ soit une version [régulière] de l'espérance conditionnelle $\mathbf{P}[T \in A \mid \phi(T)]$; sous ($\clubsuit$), on peut supposer :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, V(t, .) \text{ est une probabilité diffuse portée par } \mathbf{R}_+\ ;$$

le processus

$$(\omega, t) \to Y_t(\omega) = 1_{\{\tau(\omega) \leq t\}}\ \Phi\big(V(\tau(\omega), [0, T(\omega)])\big)_{t-\tau(\omega)}$$

a les propriétés requises.

II. Supposons données sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ vérifiant les conditions habituelles et une suite $(T_r)_{r\geq 0}$ de $\mathcal{F}$-temps d'arrêt *indépendants*, tels que

$$\text{pour tout } r,\ T_r \text{ a une loi diffuse } \mu_r.$$

Pour chaque r on choisit $0 < a_r < b_r$ avec $\mu_r\big[\,]a_r, b_r[\,\big] \neq 0$; on construit comme en I

$$Y_t^{(r)} = 1_{\{b_r \leq t\}} 1_{\{a_r < T_r < b_r\}} \big(\Phi \circ F_{\mu_r, a_r, b_r}(T)\big)_{t-b_r}.$$

Les processus $Y^{(r)}$ sont adaptés à la filtration $\mathcal{F}$, indépendants. Désignons par $\mathcal{U}$ la filtration engendrée par la famille $(Y^{(r)})_{r\geq 0}$; chaque $Y^{(r)}$ est une $\mathcal{U}$-martingale continue, de processus croissant

$$\langle Y^{(r)}, Y^{(r)}\rangle_t = 1_{\{a_r < T_r < b_r\}}(t - b_r)_+$$

et pour $p \neq r$, $\langle Y^{(r)}, Y^{(p)} \rangle = 0$.
Pour toute suite de réels (y_r) avec $\sum_r y_r^2 < \infty$, la série $\sum_r y_r Y^{(r)}_{.}$ converge presque sûrement uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}_+$ et définit un processus continu Z qui est une $\mathcal{U}$-martingale continue, de processus croissant

$$\langle Z, Z \rangle = \int_{[0,.]} \left(\sum_{r \geq 0} y_r^2 1_{\{a_r < T_r < b_r\}} 1_{\{b_r < s\}} \right) ds.$$

Supposons de plus : $\exists(\beta_r)$ suite décroissant vers 0 avec

$$\sum_r \mu_r \left[ ]0, \beta_r[\right] = \infty$$

et prenons :

$$\forall r \geq 0\,,\ a_r = 0\,,\ b_r = \beta_r\,,\ y_r \neq 0.$$

Par application du lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbf{P}\left[\limsup_r \{0 < T_r < \beta_r\}\right] = 1$$

et le processus

$$H = \sum_{r \geq 0} y_r^2 1_{\{a_r < T_r < b_r\}} 1_{]b_r, \infty[}$$

est $\mathcal{U}$-prévisible et presque sûrement à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$;

$$\frac{1}{\sqrt{H}} \cdot Z \textit{ est un } \mathcal{U}\textit{-mouvement brownien, adapté à la filtration } \mathcal{F}.$$

Soit en particulier $\mathcal{X}$ la filtration d'un processus à accroissements indépendants X [sans partie gaussienne], dont la mesure de Lévy ν charge tout voisinage de 0. Soit $\widetilde{\nu}$ l'image de ν par $x \to \|x\|$, (α_n) une suite décroissante de réels strictement positifs, avec $\lim_n \alpha_n = 0$ et $\forall n$, $\rho_n \equiv \widetilde{\nu}\left[]\alpha_{n+1}, \alpha_n]\right] > 0$. Les processus

$$N^{(h)} = \sum_{s \leq .} 1_{\{\|\Delta X_s\| \in]\alpha_{h+1}, \alpha_h]\}}$$

sont des processus de Poisson indépendants, de paramètres respectifs ρ_h ; soit T_h le premier temps de saut de $N^{(h)}$;

$$\mathbf{P}[T_h \leq x] = 1 - e^{-x\rho_h}.$$

Si on peut choisir (β_r) décroissant vers 0 avec $\sum_h \rho_h \beta_h = \infty$, on aura à notre disposition un mouvement brownien adapté à la filtration de X.

Si $\nu[\mathbf{R}^d] = \infty$, soit $\phi : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$, croissante, continue à droite, avec

$$\phi(0+) = 0 \text{ et } \int \phi(\|x\|)\, d\nu(x) = \infty\ ;$$

si $\beta_h = \phi(\alpha_h)$,

$$\sum_h \rho_h \beta_h = \int \Big(\sum_h \beta_h 1_{]\alpha_{h+1}, \alpha_h]} \Big) (\|x\|)\, d\nu(x) \geq \int_{]0,\alpha_0]} \phi(\|x\|)\, d\nu(x) = \infty.$$

A contrario, si $\gamma = \nu[\mathbf{R}^d]$ est fini, $\tau = \inf\{t > 0 \mid X_t \neq X_{t-}\}$ suit une loi exponentielle de paramètre γ et

$$X_{t\wedge\tau} = ct \wedge \tau + U 1_{\{\tau \leq t\}}$$

($c \in \mathbf{R}^d$, U variable indépendante de τ de loi $\frac{1}{\gamma}\nu$) et tout processus adapté à la filtration de X est déterministe sur $[0, \tau[$.

D'où le théorème 2.

III. La condition énoncée au théorème 3 est évidemment nécessaire. Pour la réciproque on utilisera le

Théorème 4 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.*
i) Soit $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_n\}$ une partition $\mathcal{A}$-mesurable de Ω et $\mathcal{C}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$, telle que :

il existe une variable $\mathcal{C}$-mesurable de loi diffuse.

Il existe alors une partition $\mathcal{D} = \{D_1, ..., D_n\}$ indépendante de $\mathcal{B}$ et telle que

$$\forall i = 1, ..., n,\ \mathbf{P}[B_i] = \mathbf{P}[D_i].$$

ii) Soit $(\mathcal{G}_n)_{n\in -\mathbf{N}}$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$ telle que :

$$\forall n \in -\mathbf{N}\ ,\ \exists H_n\ \mathcal{G}_n\text{-mesurable de loi diffuse;}$$

il existe une suite $(Y_n)_{n\in -\mathbf{N}}$ de variables indépendantes, de même loi de Bernoulli (paramètre $\frac{1}{2}$), adaptée à la filtration $(\mathcal{G}_n)_{n\in -\mathbf{N}}$. En conséquence il existe une suite $(Z_n)_{n\in -\mathbf{N}}$ de variables indépendantes, de même loi uniforme sur $[0, 1]$, adaptée à la filtration $(\mathcal{G}_n)_{n\in -\mathbf{N}}$.

J.-P. Thouvenot m'a signalé deux versions du théorème 4-*i*) (on passe facilement, par récurrence, de *i*) au premier point de *ii*)); reste à définir Z_{-m} ($m \in \mathbf{N}$) par

$$Z_{-m} = \sum_{k\geq 1} Y_{p_m^k}$$

où p_m est le $(m+1)^{ème}$ nombre premier). La première est la proposition *1* de [1] qui construisent la partition $\mathcal{D}$ "à la main" ; la deuxième est le lemme *8* de [2] qui en font une conséquence [immédiate?] du théorème suivant dû à Liapounoff ([6]) (pour une démonstration voir aussi [7] ou [9], théorème *5.5*) :

Théorème 5 *Soit $\mu_1, ..., \mu_r$ des mesures bornées, sans atomes, définies sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$;*

$$\{(\mu_1[H], ..., \mu_r[H]) \mid H \in \mathcal{E}\}$$

est un sous-ensemble convexe compact de $\mathbf{R}^r$.

Indiquons (en suivant J.P.Thouvenot) comment en déduire le théorème 4. On supposera (ce n'est pas une restriction) :

$$\forall i = 1, ..., n, \ \mathbf{P}[B_i] > 0.$$

D'après le théorème 5 appliqué à $(\Omega, \mathcal{C})$, aux mesures [sans atomes] $\mu_0 = \mathbf{P}$ et pour $i = 1, ..., n, \mu_i = \mathbf{P}[\,.\mid B_i]$, il existe $D_1 \in \mathcal{C}$ avec :

$$\mathbf{P}[D_1] = \mathbf{P}[B_1] \text{ et } \forall i = 1, ..., n, \ \mathbf{P}[D_1 \cap B_i] = \mathbf{P}[B_1]\mathbf{P}[B_i] = \mathbf{P}[D_1]\mathbf{P}[B_i].$$

Supposons $r < n-1$ et supposons trouvés $D_1, ..., D_r$ disjoints, dans $\mathcal{C}$, vérifiant

$$\forall i = 1, ..., n\,, \ \forall j = 1, ..., r\,, \ \mathbf{P}[D_j] = \mathbf{P}[B_j] \text{ et } \mathbf{P}[D_j \cap B_i] = \mathbf{P}[D_j]\mathbf{P}[B_i].$$

Comme

$$\frac{\mathbf{P}[B_{r+1}]}{\mathbf{P}\left[\left(\bigcup_{1\le k\le r} D_k\right)^c\right]} = \frac{\mathbf{P}[B_{r+1}]}{\sum_{r+1\le h\le n} \mathbf{P}[B_h]} \le 1,$$

avec $\mu_0 = \mathbf{P}\left[\ .\ \middle| \left(\bigcup_{1\le k\le r} D_k\right)^c\right]$ et pour $i = 1, ..., n, \ \mu_i = \mathbf{P}\left[\ .\ \middle| \left(\bigcup_{1\le k\le r} D_k\right)^c \cap B_i\right]$,

$$\exists D \in \mathcal{C}, \ \forall j = 0, ..., n\,, \ \mu_j[D] = \frac{\mathbf{P}[B_{r+1}]}{\mathbf{P}\left[\left(\bigcup_{1\le k\le r} D_k\right)^c\right]}$$

i.e. avec $D_{r+1} = D \cap \left(\bigcup_{1\le k\le r} D_k\right)^c$,

$$\mathbf{P}[D_{r+1}] = \mathbf{P}[B_{r+1}]$$

et pour $i = 1, ..., n$,

$$\mathbf{P}[D_{r+1} \cap B_i] = \frac{\mathbf{P}[B_{r+1}]}{\mathbf{P}\left[\left(\bigcup_{1\le k\le r} D_k\right)^c\right]}\, \mathbf{P}\left[B_i \cap \left(\bigcup_{1\le k\le r} D_k\right)^c\right] = \mathbf{P}[D_{r+1}]\ \mathbf{P}[B_i]$$

D'où le résultat par récurrence, en définissant $D_n = \left(\bigcup_{1\le k\le n-1} D_k\right)^c$.

Démonstration du théorème 3.
Elle est triviale, compte tenu de ce qui précède : soit $(\alpha_n)_{n\in -\mathbf{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs, avec $\inf_n \alpha_n = 0$, $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{\alpha_n}$ et $(Z_n)_{n\in -\mathbf{N}}$ une suite de variables indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$ avec Z_n $\mathcal{F}_{\alpha_n}$-mesurable.

$$W_t = \sum_{\alpha_n \leq t} \Phi(Z_n)_{t-\alpha_n}$$

répond à la question.

Exemple Soit B un mouvement brownien réel (issu de 0) et pour tout $t \geq 0$,

$$g_t = \sup\{s < t \mid B_s = 0\}$$

pour tout $t > 0$, $\frac{1}{\sqrt{t}} g_t$ suit la loi (diffuse) de l'arcsinus; on peut donc construire un mouvement brownien adapté à la filtration des zéros de B.

Bibliographie

[1] De La Rue T., Ladouceur S., Peškir G., Weber M. : On the central limit theorem for aperiodic dynamical systems and applications. Prépublication, University of Aarhus, 1993.

[2] Del Junco A., Rudolph D.A. : Residual behavior of induced maps. Preprint, University of Toronto, 1993.

[3] Dellacherie C. : Capacités et processus stochastiques. Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, Vol. 67, Springer 1972.

[4] Jacod J., Skorohod A.V. : Jumping filtrations and martingales with finite variation. Séminaire de Probabilités 28, Lect. Notes in Math. 1583, 21-35, Springer 1994.

[5] Jeulin T. : Semi-martingales et grossissement d'une filtration. Lect. Notes in Math. 833, Springer 1980.

[6] Liapounoff A.A. : Sur les fonctions-vecteurs complètement additives (*en russe*). Izv. Akad. Nauk SSSR 4, 465-478, 1940.

[7] Lindenstrauss J. : A short proof of Liapounoff's convexity theorem. J. Math. Mec. 15, 971-972, 1966.

[8] Meyer P.-A. : Sur un théorème de Jacod. Séminaire de Probabilités 12, Lect. Notes in Math. 649, 57-60, Springer 1978.

[9] Rudin W. : Functional Analysis. Mac-Graw Hill, 1973.

[10] Stricker C. : Quasi-martingales, martingales locales et filtration naturelle. Z.f.W. 39, 55-63, 1977.

T. Jeulin
CNRS URA 1321
Université Denis Diderot-Paris VII
4, place Jussieu
Tour 45, 5ème étage, Couloir 45-55
75251 PARIS Cedex 05

Astérisque

F. B. KNIGHT

The uniform law for exchangeable and Levy process bridges

Astérisque, tome 236 (1996), p. 171-188
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__171_0>

The Uniform Law for Exchangeable and Lévy Process Bridges

F. B. Knight

Abstract. — Let $X(t)$, $0 \leq t \leq 1$, be a bridge from 0 to 0 with exchangeable increments on $D[0,1]$. We obtain the n.a.s.c. for the sojourn below 0 to be uniformly distributed, or equivalently for X to have a uniform index of the (unique) supremum. This is applied to Lévy bridges.

It seems particularly fitting for the present author to be given an opportunity to contribute to a volume in honor of Meyer and Neveu. Professor Meyer alone, over the years, has rewritten, revised, and expanded not fewer than five of our research papers, mostly as part of his herculean efforts on behalf of the Seminaire de Probabilités. There are various anecdotes concerning these papers which, if space permitted, we would gladly include. However, it seems fair to say that Meyer always put business before amusement, and following his lead we must be content to do likewise. Suffice it to say that both the subject and the author are lastingly indebted for his contributions. The present paper, however, is already indebted to a referee, so we can hope that it, at least, will not merit his revision.

In his famous paper [8], P. Lévy obtained the arcsine law for the positive sojourn of Brownian motion, and also the uniform law for the positive sojourn of Brownian bridge. Very recently ([5]) R. K. Getoor and M. J. Sharpe have obtained the necessary and sufficient conditions for the same arcsine law to hold for a diffuse Lévy process X on R. One purpose of the present paper is to do the analogous thing (but without the "diffuse" assumption) for the uniform law, at least if we understand by "bridge" the process $X_t - tX_1$, $t \leq 1$.

Also in the paper [8], Lévy obtained the arcsine law for the distribution of the last exit time g from 0 before $t = 1$. Since Lévy knew that $M(t) - B(t) \stackrel{d}{=} |B(t)|$, where $M(t) = \max_{s \leq t} B(s)$ ($B(s)$ being a Brownian motion) it followed immediately (although he does not mention it) that the location (abscissa) of the maximum of B in $0 < t < 1$ again has the arcsine law. He also probably realized that the location of the maximum of the bridge B^0 is uniformly distributed.

Both of these facts extend to processes with exchangeable increments whenever the corresponding laws for the positive sojourn are valid, by virtue of the identity that the law of the positive sojourn is the same as that of the location of the first supremum in [0,1]. This identity has a combinatorial basis in the analogous discrete parameter case, due to E. Sparre-Andersen. It was extended by a limit procedure to Lévy processes by Pecherskii and Rogozin [14], and to Lévy bridges by J. Bertoin [12]. In the present paper it is extended to processes with exchangeable increments (Theorem 1.4*). We wish to thank a referee for sketching this proof, based on the discrete parameter case (see Theorem 2 of W. Feller [13, XII. 8] for this case). However since this is a rather hard result, and the others seem much more intuitive, we have indicated it and the results depending on it with an asterisk.

For diffuse Lévy processes, the necessary and sufficient condition for the arcsine law of positive sojourn is $P\{X_t > 0\} = \frac{1}{2}, t > 0$. By contrast, for diffuse Lévy **bridges** the uniform law of positive sojourn **always** holds. In both cases the surprising level of generality goes back to Sparre-Andersen's work in the discrete parameter setting [1,2]. Indeed, a formula of [2] is used in [5]. Our debt is less concrete, although our reasoning is already implicit in [1]. It seems that for bridges the set-up of a discrete parameter, as in [1], only obscures the relative simplicity of the continuous parameter case.

Both the uniform sojourn law and the uniform location of the maximum are first obtained, in Section 1, for processes with exchangeable increments, where we rely on a representation given in O. Kallenberg [6]. Here it seems natural to replace the notion of bridge by the process linearly centered to vanish at $t = 1$. For Lévy processes, however, usage favors using the term "bridge" for a process <u>conditioned</u> to vanish at $t = 1$. Accordingly, we treat the two concepts separately in Section 2, although, generally speaking, the same uniform laws hold for both. In fact the two concepts coincide only in the Gaussian case (Theorem 2.2), and the definition by conditioning of course requires some supplementary hypothesis. We have found Condition (C) of Kallenberg [7] to be most adaptable to our needs at this point (but see the Remarks after Lemma 2.6).

Section 1. The uniform law for linearly centered processes with exchangeable increments.

A certain part of the theorems we wish to prove can be formulated for an arbitrary measurable function $f(t)$, $0 \le t < 1$. We set $S(x, f) = \int_0^1 I_{(-\infty,x]}(f(t))dt$, $-\infty < x < \infty$. Noting that $\lim_{x\to-\infty} S(x, f) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} S(x, f) = 1$, and $S(x, f)$ is non-decreasing and continuous to the right, we call $S(x, f)$ the "sojourn distribution function" of f. More generally, if $X_t(w)$ is a measurable stochastic process, $0 \le t < 1$, we call $S(x, X(w))$ the (random) sojourn distribution of X, and when X is understood from context we abbreviate to simply $S(x)$. In that case, it is clear that $S(x)$ is a stochastic process associated with X. We say that f (or X) has continuous sojourn distribution if $S(x, f)$ (or $S(x, X)$, P-a.s.) is continuous in x. Now a critical result for the sequel is

Lemma 1.1(a). *Let f have continuous sojourn distribution, and let U be a uniformly distributed random variable on (0,1). Let*

$$X(t,w) = f((t+U)mod1) - f(U) = \begin{cases} f(t+U) - f(U); & t < 1-U \\ f(t+U-1) - f(U); & 1-U \le t < 1 \end{cases}$$

Then $P\{S(0,X) \le x\} = x$, $0 < x < 1$, that is $S(0,X)$ has the same law as U.

Proof. Since $S(x,f)$ is continuous, for $0 < p < 1$ there is a number x_p for which $S(x_p, f) = p$. Then if $f(t) < x_p$ we have

$$\begin{aligned} &\int_0^1 I_{(-\infty,0]}(f((t+s)\text{mod}1) - f(t))ds \\ \le &\int_0^1 I_{(-\infty,0]}(f((t+s)\text{mod}1) - x_p)ds \\ = &\int_0^1 I_{(-\infty,x_p]}f((t+s)\text{mod}1)ds \\ = &p. \end{aligned}$$

Similarly, if $f(t) > x_p$, then

$$\begin{aligned} &\int_0^1 I_{(-\infty,0]}(f((t+s)\text{mod}1) - f(t))ds \\ \ge &\int_0^1 I_{(-\infty,x_p]}f((t+s)\text{mod}1)ds \\ = &p. \end{aligned}$$

Thus we have

$$\begin{aligned} S(0,X) \le p \quad &\text{if} \quad f(U) < x_p, \quad \text{and} \\ S(0,X) \ge p \quad &\text{if} \quad f(U) > x_p. \end{aligned}$$

Now $P\{f(U) \le x_p\} = p$, and since f has continuous sojourn distribution,

$$P\{f(U) = x_p\} = \int_0^1 I_{\{x_p\}}(f(s))ds = 0.$$

So it follows that $P\{S(0,X) \le p\} \ge p$ and $P\{S(0,X) \ge p\} \ge 1-p$. By addition we get $P\{S(0,X) = p\} = 0$, and finally $P\{S(0,X) \le p\} = p$, as asserted.

The second appearance of the uniform law which we intend to treat concerns the location, or argument, of the supremum. Here we shall assume that all functions or processes considered are right-continuous and left limited, so that their paths are in the space D [0, 1]. In the case of processes, we use the coordinate filtration, augmented by all P-null sets. This is equivalent to the augmented topological filtration of the complete separable metric space–see [3] for more details. This approach has the advantage that the supremum and the essential supremum coincide, so we need not treat them separately.

For $f \in D\,[0,\,1]$, we adjust the definition at 1 by setting $f(1) = f(1-)$, and we define $f(0-) = f(1)$, so that f can be viewed as defined on a circle. Let $Mf = \sup_{0 \le t < 1} f(t)$. We say that f has unique location of supremum (or just unique supremum) if there is a unique t_0, $0 \le t_0 < 1$, with $Mf = f(t_0-) \vee f(t_0)$, and we write $t_0 = ArgMaxf = AMf$. If this holds $P-a.s.$ for a process X, we write $AM(X)$ for its location (set=0 where not unique). We note that for any f there exists at least one t_0 with $Mf = f(t_0-) \vee f(t_0)$, so there is no problem as to existence.

Lemma 1.1(b). *If f has unique supremum, and $X = X(t,w)$ is as in Lemma 1.1(a), then $AM(X)$ has the same law as U.*

Proof. If $t_0 = AMf$, then one sees that $AM(X) = (1 + t_0 - U)(\text{mod}1)$, so the result follows.

We will apply this to certain processes with exchangeable increments. From now on, all processes considered will be assumed to have paths $X(\cdot, w) \in D[0,1]$, where $D[0,1]$ is the measurable space of right-continuous, left-limited real-valued functions (see [3] for details). We recall ([6]) that X_t has exchangeable increments if, for each n, the joint law of $\left\{X\left(\frac{k}{n}\right) - X\left(\frac{k-1}{n}\right); 1 \le k \le n\right\}$ is that same as that of $\left\{X\left(\frac{\sigma(k)}{n}\right) - X\left(\frac{\sigma(k)-1}{n}\right); 1 \le k \le n\right\}$ for every permutation σ of $\{1,2,\ldots,n\}$. We will need to use the

Representation Theorem. *(Kallenberg, [6]). The process X_t, $X_0 = 0$, has exchangeable increments if and only if it may be represented in the form*

$$X_t = \alpha t + \sigma B_o(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j (1(t-t_j) - t); \quad 1(s) \doteq \begin{cases} 0; & s < 0 \\ 1; & s \ge 0 \end{cases}, \tag{1.1}$$

where

(a) $B_o(t)$ is a Brownian bridge, $0 \le t \le 1$,

(b) α, σ and $\beta_1, \beta_2, \ldots$ are real-valued random variables (on the probability space of X), independent of $B_o(\cdot)$, $0 \le \sigma$, and $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^2 < \infty$, P-a.s.

(c) t_j, $1 \le j$, are uniformly distributed on (0, 1), independent of each other and of the random variables in (a) and (b).

Remark. Any or all of the variables in (a) and (b) may assume the value 0. The series, if infinite, converges a.s. uniformly in $t \le 1$.

Given such a process X_t, we set $Y_t \doteq X_t - tX_1$, $0 \le t < 1$. The following Lemma is the key to applying Lemma 1.1(a) to Y_t.

Lemma 1.2 *(a) Y_t has exchangeable increments. (b) X_t has continuous sojourn distribution if and only if, in the representation (1.1),*
$P\left(\cup_{i=1}^{3} S_i\right) = 1$, where $S_1 = \{\sigma \neq 0\}$,
$S_2 = \{$infinitely many $\beta_j \neq 0\}$, and
$S_3 = \{$only finitely many $\beta_j \neq 0$ and $\sum_{finite} \beta_j \neq \alpha\}$ (here we define an empty sum to equal 0).

Remark. In the representation (1.1) for Y_t, we have $\alpha \equiv 0$.

Proof. (a) More generally, for each n let $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$ be $B^n/B-$measurable functions. Then the joint law of $\{f_j\left(X\left(\frac{1}{n}\right), X\left(\frac{2}{n}\right) - X\left(\frac{1}{n}\right)\right), \ldots, X(1) - X\left(\frac{n-1}{n}\right),\ 1 \leq j \leq m\}$ is invariant under permutation of the n increments. Since $Y\left(\frac{k}{n}\right) - Y\left(\frac{k-1}{n}\right) = -\sum_{i \neq k}\left(X\left(\frac{i}{n}\right) - X\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)$, exchangeability for Y follows as a consequence.

Turning to (b), which is much less obvious, let us first examine the set $S = \{$only finitely many $\beta_j \neq 0$ and $\sigma = 0\}$. Since there are only countably many finite subsets of j, it is seen that S is measurable. Now on the subset $S \cap \left\{\sum_j \beta_j = \alpha\right\}$ we have $Y = \sum_j \beta_j 1(t - t_j)$, the sum being finite, which is a random step function. Obviously it does not have continuous sojourn distribution. On the other hand, over $S \cap \left\{\sum_j \beta_j \neq \alpha\right\}$ we have a step function plus the line $t\left(\alpha - \sum_j \beta_j\right)$. The sojourn time at x is that of $\sum_j \beta_j 1\,(t - t_j)$ on the line $-t\left(\alpha - \sum_j \beta_j\right) + x,\ 0 < t < 1$, which includes at most one point in each step of the former. Hence it is of Lebesque measure 0, and we have proved (b) in the case $\Omega = S$, or more generally on the set S.

For the general case, we need to distinguish between fixed and mobile discontinuities of $S(x, Y)$. By definition, x is a fixed discontinuity if $E(S(x, Y) - S(x-, Y)) > 0$, while x is a mobile discontinuity at $w \in \Omega$ if $S(x, Y(w)) - S(x-, Y(w)) > 0$ but $E(S(x, Y) - S(x-, Y)) = 0$. We will first show that, if $P(U_{i=1}^{3} S_i) = 1$, $S(x, Y)$ has no fixed discontinuities. By Fubini's Theorem, $E(S(x, Y) - S(x-, Y)) = E\int_0^1 I_{\{x\}}(Y_s)ds = \int_0^1 (F_Y(x, s) - F_Y(x-, s))ds$, where $F_Y(x, s)$ is the marginal distribution function of $Y(s)$. Hence it suffices to show that the marginal distributions are continuous. Since $B_o(s)$ is independent of the other variables and continuously distributed, the conditional marginal distributions, given $\sigma \neq 0$ and the other variables, are continuous, hence their expectation over the other variables is also continuous. Thus the expectations are continuous over $\{\sigma \neq 0\}$, i.e. there are no fixed discontinuities over this set. Now on $\{\sigma = 0\}$ we have infinitely many $\beta_i \neq 0$, hence it now suffices to treat the case $P\{$infinitely many $\beta_i \neq 0\} = 1$. We use the observation that for any two distribution functions F and G, if $*$ denotes convolution and Δ_x denotes the jump at x (possibly 0), then $\sup_x \Delta_x(F * G) = \sup_x \int(\Delta_{x-y}G)dF_y \leq \sup_x \Delta_x G$.

Thus the maximum jump size is reduced through convolution, and by conditioning on the sequence β_j it suffices to show that the marginal distributions of $\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j(1(t-t_j)-t)$ are continuous when β_j are constants with $\sum_j \beta_j^2 < \infty$. To this effect, since the t_j are independent, it is enough to find a subsequence $j_n \to \infty$ such that $\lim_{m\to\infty} \max_x P\left\{\sum_{n=1}^{m}\beta_{j_n}(1(t-t_{j_n})-t) = x\right\} = 0$. A single term $\beta_j 1(t-t_j)$ has a law with jumps (= point masses) of size t at $\beta_j(1-t)$, and of size $1-t$ at $-\beta_j t$. The sum of n such terms has jumps at the 2^n possible sums of these points, which may not be distinct. However, they become distinct if we choose only j_n such that $(t\vee(1-t))\sum_{k=n+1}^{\infty}|\beta_{j_k}| < (t\wedge(1-t))|\beta_{j_n}|$. Then a sum of jump positions of index $j_k, k \geq n+1$ cannot equal the separation in the jump position of two sums of size n which differ only at the nth term. Such a sequence j_n is easily constructed by induction on n. Beginning with a fixed subsequence, also denoted $\beta_n (\neq 0)$ such that $\sum_n \beta_n < \infty$ we set $\beta_{j_1} = \beta_1$ and, having chosen the further subsequence $(\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_n})$ we let $j_{n+1} > j_n$ be any index for which

$$(t\vee(1-t))\sum_{k=j_n+1}^{\infty}|\beta_k| < (t\wedge(1-t))|\beta_{j_n}|.$$

Then clearly a sum $\sum_{k=1}^{n}\beta_{j_k}(1(t-t_{j_k})-t)$ has all of its 2^n jump points distinct, and hence its maximum jump (point mass) is $(t\vee(1-t))^n$. Since this tends to 0, the proof of absence of fixed sojourn discontinuities is complete.

It remains to consider the mobile discontinuities. For $0<a<b<1$, let $I=(a,b)$; $S_I(x) = \int_a^b I_{(-\infty,x]}(X_s)ds$ is the sojourn distribution of X in the interval I. We assume, in accordance with the case at hand, that $P\{\sigma \neq 0$ or infinitely many $\beta_j \neq 0\} = 1$. We now consider the conditional law of $X_{a+t}-X_a,\ \ 0\leq t\leq b-a$, given the processes $(X_s, s\leq a)$ and $(X_s, b\leq s\leq 1)$. Slightly redundantly, we also treat as given $B_o(b)-B_o(a)$ and the sequence $(t_jI_j, 1\leq j)$ where $I_j \doteq \begin{cases} 0; & t_j \in I \\ 1; & t_j \notin I \end{cases}$. It is not hard to see that this amounts to being given a countable number of random variables, so the conditional joint distributions of $X_{a+t}-X_a$ are well-defined (P-a.s.) on the space D[a, b], and extend to a conditional probability on the coordinate σ-field. We claim that this conditional process again has exchangeable increments, P-a.s. (i.e. $X_{a+(b-a)t}-X_a$ does so, as a process on D[0, 1]). Indeed, even given α, σ, and $(\beta_j,\ 1\leq j)$ as well as the other assumed data, the t_j for which $I_j=0$ are conditionally independent and uniformly distributed on (a, b). Actually, it is not hard to see that the β_j with $I_j=1$ are already given, along with X and the corresponding t_j, i.e. the jumps of X outside of I are all given, and consequently so is α and the quadratic variation coefficient σ, and consequently $B_o(s)$ is also determined outside of I. Now inside I we can write

$$X_{a+t} - X_a = (\alpha + \sigma(B_o(b) - B_o(a)))t$$
$$(1.2) \qquad + \sigma(B_o(a+t) - B_o(a) - (B_o(b) - B_o(a)t)$$
$$+ \sum_{t_j \in I} \beta_j(1(a+t-t_j) - t), \quad 0 < t < b - a$$

where the second term on the right is σ times a conditional Brownian bridge and the t_j are conditionally uniform on (a, b) and independent of the former. Then, when we give to the β_j such that $t_j \in I$ the conditional distribution given all of $(t_j I_j, 1 \leq j)$, the process $(X_s,\ s \notin I)$, and $B_o(b) - B_o(a)$, we see that (1.2) becomes a representation (1.1) for a process with exchangeable increments on $(0,\ b - a)$, conditional on the given quantities, P-a.s. Furthermore our hypothesis, that either $\sigma \neq 0$ or infinitely many $\beta_j \neq 0$, also holds for the conditional process, P-a.s. Indeed, σ is the same for both, and it is clear that infinitely many $\beta_j \neq 0$ implies, P-a.s., infinitely many $\beta_j \neq 0$ with corresponding $t_j \in I$. Consequently, by what was already shown, the conditional process with probability 1 has no fixed sojourn discontinuities.

Now fix n and let $I(k) = (\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$. Setting $I = I(k)$, the sojourn processes $S_{I(j)}(x)$, $1 \leq j \neq k \leq n$, are all given along with the process $(X_t, t \notin I_k)$. Hence their discontinuities are also given, and at most denumerable in number. Hence it follows that, P-a.s. for the conditional distribution of $S_{I(k)}(x)$, there are no discontinuities at any values of x where $S_{I(j)}(x)$ is discontinuous for some $j \neq k$. It is easy to see that the event that any two $S_{I(j)}(x)$ and $S_{I(k)}(x)$ have a discontinuity at the same x is measurable; indeed, it is $\bigcup_N \bigcap_m$ {some $S_{I(j)}$ and $S_{I(k)}$ both have a discontinuity of size at least N^{-1} in some interval $((l-1)m^{-1},\ lm^{-1}), -\infty < l < \infty\}$. Consequently, since the conditional probability of any jump shared by $S_{I(k)}$ is 0, this is a null event. On the other hand, $S(x) = \sum_{j=1}^{n} S_{I(j)}(x)$, and each $S_{I(j)}(x)$ can have jumps of size at most n^{-1}. Since they have no jumps in common, $S(x)$ also has jump size limited by n^{-1}. Letting $n \to \infty$, the absence of mobile discontinuities is proved.

We can now state and prove

Theorem 1.3(a). *Let X_t have exchangeable increments on $D[0,1]$, $X_0 = 0$, and let $Y_t = X_t - tX_1$. Then $S(0, Y)$ is uniformly distributed on (0, 1) if and only if, in a representation (1.1) for $X, P\{\sigma = 0$ and there are only finitely many $\beta_j \neq 0$ and $0 = \sum_{finite} \beta_j\} = 0$, where $\sum_{null} \beta_j \doteq 0$.*

Proof. To obtain a representation (1.1) of Y_t, we simply set $\alpha = 0$ in that of X_t. Hence by Lemma 1.2.(b) the condition is necessary and sufficient for Y_t to have continuous sojourn distribution. Now assuming this condition, let U be adjoined to Ω as a uniformly distributed random variable entirely independent of X (by product space construction, for example). We claim that $Y((t+U)\mathrm{mod}1) - Y(U),\ 0 \leq t < 1$, has the same law as $Y(t)$ on D[0, 1]. Indeed, this is true even if U is given, say $U = t_0$. To prove this it suffices to take $t_0 = k/n$, since by right-continuity of path we can obtain the general case from this by letting $\frac{k}{n} \to t_0+$. Similarly, by writing $\frac{k}{n} = \frac{Nk}{Nm}$ for large N, we see that it is enough to prove that the joint law of $Y(\frac{j}{n})$, $1 \le j \le n$, is the same as that of $Y(\frac{(k+j)}{n} \bmod 1) - Y(\frac{k}{n})$, $1 \le j \le n$. Now the map $\sigma : Y(\frac{j}{n}) \to Y(\frac{(k+j)}{n} \bmod 1)$, $1 \le j \le n$, induces a map of increments $Y(\frac{j}{n}) - Y(\frac{(j-1)}{n})$, $1 \le j \le n$, which is in fact a cyclic permutation. Since Y_t has exchangeable increments, this map preserves the joint distribution of the increments. On the other hand, each $Y(\frac{j}{n})$ is a sum from 1 to j of these increments, and, thanks to the fact that $Y(0) = Y(1) = 0$, $Y(\frac{(k+j)}{n} \bmod 1) - Y(\frac{k}{n})$ is simply the corresponding sum of the images of these increments by σ. It follows just as in the proof of Lemma 1.2 (a) that the joint law of $Y(\frac{j}{n})$ is also preserved, proving the sufficiency of the condition.

Conversely, suppose that $P\{\sigma = 0 \text{ and } 0 = \sum_{finite} \beta_j\} > 0$, so that there is positive probability that Y_t is a random step function $\sum_{j=1}^{n} \beta_j 1(t - t_j)$, or identically 0. Let us order the β_j so that $\beta_1 \le \beta_2 \le \cdots \le \beta_n$. Clearly the new t_j remain independent and uniform on (0, 1). But then, on the further subset $\{t_1 < t_2 < \cdots < t_n\}$, which has non-zero probability, we have $Y_t \le 0$ for all t. Indeed, either $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$, or $0 > \beta_1$. In the second case, let $\hat{k} = min\{k \le n : \sum_1^k \beta_j > 0\}$, or 0 if the set is empty. Then if $\hat{k} \ne 0$ we have $\beta_{\hat{k}} > 0$, and hence $Y(1) > 0$ since the subsequent β_j's are all at least $\beta_{\hat{k}}$. This contradiction implies that the law of $S(0, Y)$ has an atom at 1, hence it is not uniform, as asserted.

Let us note, finally, the

Theorem 1.3(b). *Suppose that Y in Theorem 1.3(a) has unique location of supremum. Then $AM(Y)$ is uniformly distributed on (0, 1).*

Proof. This follows from Lemma 1.1(b) in the same way as Theorem 1.3(a) followed from Lemma 1.1(a).

We turn now to the extension of Sparre-Andersen's result, mentioned in the introduction.

Theorem 1.4*. *Let X_t have exchangeable increments on $D[0,1]$, $X_0 = 0$, and let $LAMX \doteq \inf\{t : X_{t-} \vee X_t = \max_t\{X_{t-} \vee X_t\}\}$, i.e. the first location of the maximum. Then $LAMX$ has the same law as $1 - S(0, X)$.*

Proof. Let $X_n(t) \doteq X(k2^{-n})$, $(k-1)2^{-n} \le t < k2^{-n}$, $1 \le k \le 2^n$, $1 \le n$. Then $X_n(k2^{-n}) = \sum_{j=0}^{k}(X_n(j2^{-n}) - X_n((j-1)2^{-n}))$, for each n is an exchangeable 2^n-tuple of random variables. Hence by Sparre-Andersen's theorem (see Feller, loc. sit., Theorem 2) we have

$$LAMX_n \stackrel{d}{=} 1 - S(0, X_n). \tag{1.3}$$

Let us assume, for the moment, that $S(0-, X) = S(0, X)$ P-a.s., i.e. $E\int_0^1 I_{\{0\}}(X_s)ds = 0$, and that X has an a.s. unique maximum at AMX. Then since $\lim_{n\to\infty} X_n = X$

for all (t,w), and hence $\lim_{n\to\infty} I_{(0,\infty)}(X_n(t)) = I_{(0,\infty)}(X(t))$ on $\{X(t) \neq 0\}$, by dominated convergence we have $\lim_{n\to\infty} S(0,X_n) = S(0,X)$, P-a.s. On the other hand, it is clear that $\lim_{n\to\infty}(X_n(LAMX_n-) \vee X_n(LAMX_n)) = MX$ ($\doteq \max_t(X_{t-} \vee X_t)$), and since AMX is unique it follows that $\lim_{n\to\infty} LAMX_n = AMX$. Hence by (1.3) we obtain the result in this case.

Turning to the general case, we will replace $X(t)$ by $X(\epsilon,\delta,t) \doteq X(t) + \epsilon B(t) - \delta t$, where $B(t)$ is an independent Brownian motion adjoined to the probability space (product construction if necessary) and ϵ, δ are positive constants. This process has exchangeable increments, and it will be seen to satisfy our two extra assumptions. Indeed, by Lemma 1.2 it has continuous sojourn distribution. As to the uniqueness of $AM(X(\epsilon,\delta,t))$, if not there would be rationals $0 < r_1 < r_2 < 1$ with $P\{\sup_{t\le r_1} X(\epsilon,\delta,t) = \sup_{t\ge r_2} X(\epsilon,\delta,t)\} > 0$. Denoting these suprema by M_1 and M_2, respectively, let us suppose given $X(t)$, $t \le 1$, along with $B(t)$, $t \le r_1$, and also $B(t) - B(r_2)$, $r_2 < t \le 1$. Then M_1 is given, and $M_2 = X(\epsilon,\delta,r_1)+X(r_2)-X(r_1)-\delta(r_2-r_1)+\sup_{t\ge r_2} X(\epsilon,\delta,t)-X(\epsilon,\delta,r_2)+\epsilon(B(r_2)-B(r_1))$, where all terms on the right are given except the last, which is independent. Clearly the conditional probability is 0 that $M_1 = M_2$, hence the same holds unconditionally. Thus, by the previous argument, we have

$$AMX(\epsilon,\delta,\cdot) \overset{d}{=} 1 - S(0,X(\epsilon,\delta,\cdot)). \tag{1.4}$$

We now pick a sequence $\epsilon_k \to 0$, $\delta_k \to 0$, such that $\epsilon_k\delta_k^{-1} \to 0$. Then denoting $X_k \doteq X(\epsilon_k,\delta_k,\cdot)$ we have, since $X_k \to X$ uniformly on $[0,1]$,

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty} |X(AMX_k) - X(LAMX)| \le \\ &\le \lim_{k\to\infty} |X_k(AMX_k) - X(LAMX)| + \lim_{k\to\infty} |X(AMX_k) - X(AMX_k)| \\ &= 0, \quad \text{P-a.s.}\end{aligned} \tag{1.5}$$

On the other hand, we note that

$$\begin{aligned}&X_k(t) - X(t) - (\epsilon_k B(LAMX) - \delta_k(LAMX)) \\ &= \epsilon_k(B(t) - B(LAMX)) - \delta_k(t - LAMX) \\ &< -2\epsilon_k(\max_t |B|)\end{aligned}$$

provided that $t > LAMX + 4\epsilon_k\delta_k^{-1}\max_t |B|$. For such t, then, we have

$$\begin{aligned}X_k(t) &< X(t) - \epsilon_k \max_t |B| - \delta_k(LAMX) \\ &< X(LAMX) - \epsilon_k \max_t |B| - \delta_k(LAMX).\end{aligned}$$

But for $t = AMX_k$, we have

$$\begin{aligned}X_k(AMX_k) &\ge X_k(LAMX) \\ &\ge X(LAMX) - \epsilon_k \max_t |B| - \delta_k(LAMX),\end{aligned}$$

whence it follows that

$$AMX_k \le LAMX + 4\epsilon_k\delta_k^{-1} \max_t |B|. \tag{1.6}$$

Since $\epsilon_k\delta_k^{-1} \to 0$, it follows from (1.5) and (1.6) that $\lim_{k\to\infty} AMX_k = LAMX$, P-a.s.

Finally, since we have $X_k < X$ uniformly in $\frac{1}{n} \le t \le 1$ for large $k > K(n,w)$, while $X_k \to X$ uniformly in t, we see that $\lim_{k\to\infty} S(0,X_k) = S(0,X)$, and by (1.4) the proof of Theorem 1.4* is complete.

We have next the following

Corollary 1.4*. *With X as before, $S(x,X)$ is continuous at $x = 0$, P-a.s., if and only if X has unique location of the supremum.*

Proof. Let us set $RAM(X) = \max\{s : X(s-) \vee X(s) = \sup_t X\}$. We introduce the process $X_{(1-t)-} - X_1$, which has exchangeable increments and starts at 0. Moreover, this process is identical in law to $-X_t$, $0 \le t \le 1$. To see this, we can apply the mapping $t \leftrightarrow 1-t$ on $[0,1]$, and note that this permutes the increments of X_t into those $X_{(1-t)} - X_1$ but reverses order of the endpoints. Multiplying by -1 gives the result. Now we have

$$\begin{aligned} RAM(X) &= 1 - LAM(X_{(1-t)-} - X_1) \\ &\overset{d}{=} S(0, X_{(1-t)-} - X_1) \\ &\overset{d}{=} S(0,-X) \\ &= 1 - S(0-,X). \end{aligned}$$

Thus we have, by Theorem 1.4 again,

$$\begin{aligned} E(S(0,X) - S(0-,X)) &= E(1 - S(0-,X) - (1 - S(0,X))) \\ &= E(RAMX - LAMX), \end{aligned}$$

which completes the proof.

In the special case that X is a bridge (i.e. $\alpha \equiv 0$ in (1.1)), we can complete Theorem 1.3 as follows.

Theorem 1.5*. *For an exchangeable bridge the following are equivalent (we omit P-a.s. in (b)-(d)).*

(a) *$S(0,X)$ is uniformly distributed.*
(b) *$S(x,X)$ is continuous.*
(c) *$S(x,X)$ is continuous at* 0.
(d) *X has a unique supremum (at AMX).*
(e) *$LAMX$ is uniformly distributed.*

Proof. The proof of the converse in Theorem 1.3(a) shows that if (a) fails then so does (c), while Lemma 1.2(b) in conjunction with Theorem 1.3(a) show that (a) and (b) are equivalent. Since (b) trivially implies (c), (a)-(c) are equivalent. Now (c) and (d) are equivalent by Corollary 1.4*, and (d) implies (e) by Theorem 1.3(b), since under (d) we have LAM $X = AMX$. Finally, (e) is equivalent to (a)-(c) by Theorem 1.4*, so (e) imples (d) and the argument is complete.

Section 2. The case of Lévy processes and Lévy bridges.

We first specialize to the case that X_t is a measurable process with homogeneous, independent increments, also called a Lévy process. Then its log characteristic function may be written in P. Lévy's form as

$$\begin{aligned} \log E\ exp(iuX_t) &\doteq t\psi(u) \\ &= t[iu\gamma - \sigma^2\frac{u^2}{2} + \int(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2})G(dx)], \end{aligned} \tag{2.1}$$

where the Lévy measure $G(dx)$ satisfies $G\{0\} = 0$ and $\int(1 \wedge x^2)G(dx) < \infty$. Conversely, any real γ, $\sigma^2 \geq 0$, and such G, determine a unique Lévy process as coordinate process on $D[0,\ 1]$, and this process determines them uniquely. (see M. Loeve, [9; Sec. 22 C and Sec 23, Ex. 9]).

Such a process X_t has exchangeable increments as in Section 1. We have indeed

Theorem 2.1(a). *The necessary and sufficient condition, with X_t as in (2.1), to have $S(0, Y)$ uniform on (0, 1) is that either $\sigma \neq 0$ or $G(R) = \infty$.*

Proof. It is clear that σ in (2.1) equals the σ of (1.1), which is therefore constant in the present situation. Thus by Theorem 1.3, $\sigma \neq 0$ suffices for $S(0, Y)$ to be uniform. Similarly, by writing X_t as the sum of a compound Poisson process with intensity (Lévy) measure $I_{(|X|>\epsilon)}(x)G(dx)$, and an independent process, for $\epsilon > 0$, we see that $\int_{|X|>\epsilon} G(dx)$ is a lower bound for the Poisson intensity of the jumps. Thus if $G(R) = \infty$ there are infinitely many jumps, so P-a.s. infinitely many $\beta_j \neq 0$ occur, and $S(0, Y)$ is uniform by Theorem 1.3(a).

Conversely, if $\sigma = 0$ and $G(R) < \infty$, then the process X_t is simply a compound Poisson process (possibly of rate 0) plus a uniform translation at rate $(\gamma - \int \frac{x}{1+x^2} dG)$. By Theorem 1.3(a), $S(0, Y)$ is not uniform unless $P\left\{0 = \sum_{finite} \beta_j\right\} = 0$. But, with probability $\exp(-G(R))$, this is an empty sum. Hence, $S(0, Y)$ has an atom at 1 and cannot be uniform, completing the proof.

Turning to the law of $AM(Y)$, we have

Lemma 2.1. *(a) If $G(R) < \infty$ and $\sigma = 0$, then Y does not have a unique supremum.*
(b) If $G(R) = \infty$ or $\sigma \neq 0$, then Y has a unique supremum.

*Remark**. This also follows from Corollary 1.4*.

Proof. (a) This is clear since X is a compound Poisson process, and Y vanishes identically with positive probability.

(b) (We are indebted to Bruce Hajek for the following argument). If $AM(Y(w))$ is not unique, then there are rational intervals (r_1, r_2) and (r_3, r_4), $r_2 < r_3$, such that $S_1 \doteq \sup_{r_1<s<r_2} Y_s = \sup_{r_3<s<r_4} Y_s \doteq S_2$, so it is enough to prove this has probability 0. We consider the two sides as a function of $X(r_3) - X(r_2)$, with X_t, $t \leq r_2$, and $X_t - X_{r_3}$, $t > r_3$, as given. Then $S_1 = \sup_{r_1<s<r_2} [X_s - s(X(r_2)+X(1)-X(r_3)) - s(X(r_3)-X(r_2))]$, where the first two terms on the right are given while the last is independent and has a continuous distribution. Analogously, $S_2 = \sup_{r_3<s<r_4} [(X_s - X_{r_3} + X_{r_2}) - s(X(r_2) + X(1)-X(r_3)) + (1-s)(X(r_3)-X(r_2))]$. We see that S_1 is decreasing in $X(r_3)-X(r_2)$, while S_2 is increasing. Consequently there is conditional probability 0 that they are equal, so the result is proved.

We now have immediately, by Lemma 1.1.(b),

Theorem 2.1.(b). *$AM(Y)$ is uniformly distributed if and only if $G(R) = \infty$ or $\sigma \neq 0$.*

In his original work, P. Lévy showed that if B_t is Brownian motion then the process $Y_t = B_t - tB_1$ is independent of B_1, hence we are justified in considering the law of Y_t as that of B_t conditioned by $\{B_1 = 0\}$ (or, indeed, that of $B_t - t\alpha$ conditioned by $\{B_1 = \alpha\}$, for any α). When we seek to generalize the idea of this conditional process to a general Lévy process, the first obstacle is that X_1 is not in general independent of Y_t. Indeed, we have

Theorem 2.2. *The random variable $X_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$ is independent of X_1 if and only if $G \equiv 0$, i.e. the process is Gaussian.*

Proof. If $G \equiv 0$, the process has the form $X_t = \gamma t + \sigma B_t$ for a Brownian motion B_t (or else $\sigma = 0$). Then $X_t - tX_1 = \sigma(B_t - tB_1)$, and the asserted independence follows by Lévy's result.

Conversely, suppose for fixed $t < 1$ that $X_t - tX_1$ and X_1 are independent (we will later take $t = \frac{1}{2}$). Then from (2.1) we have

$$\begin{aligned} &\log E \exp i(\alpha(X_t - tX_1) + \beta X_1) \\ &= \log E \exp i\alpha((1-t)X_t + t(X_t - X_1)) + \psi(\beta) \\ &= t\psi(\alpha(1-t)) + (1-t)\psi(-\alpha t) + \psi(\beta). \end{aligned} \tag{2.2}$$

On the other hand, (2.2) can also be expressed as

$$\begin{aligned} &\log E \exp i[(\beta + \alpha(1-t))X_t + (\beta - \alpha t)(X_1 - X_t)] \\ &= t\psi(\beta + \alpha(1-t)) + (1-t)\psi(\beta - \alpha t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Now specializing to $t = \frac{1}{2}$, setting (2.2) = (2.3) gives us

$$\frac{1}{2}\psi(\frac{\alpha}{2}) + \frac{1}{2}\psi(-\frac{\alpha}{2}) + \psi(\beta) = \frac{1}{2}\psi(\beta + \frac{\alpha}{2}) + \frac{1}{2}\psi(\beta - \frac{\alpha}{2}). \tag{2.4}$$

We will specialize further in two ways. First, taking $\alpha = \beta$ gives $\psi(\frac{-\alpha}{2}) + 2\psi(\alpha) = \psi(\frac{3}{2}\alpha)$, which implies that

$$|\exp\psi(\frac{-\alpha}{2})\exp 2\psi(\alpha)|^2 = |\exp(\frac{3}{2}\alpha)|^2, \tag{2.5}$$

where $|\exp\psi(u)|^2$ is the (symmetrized) characteristic function of $X_1 - X_1'$, with X_1' and X_1 i.i.d. Letting Y_i, $i = 1,2,3$, denote 3 independent such variables, this implies the identity in law

$$Y_1 + 2(Y_2 + Y_3) \stackrel{d}{=} 3Y_1. \tag{2.6}$$

Since we already know that this holds when X_1 is Gaussian, we assume $\sigma = \gamma = 0$, and writing $G^*(dx) = G(dx) + G(-dx)$ for the Lévy measure of Y_1 we obtain from (2.6) by the uniqueness of the Lévy representation

$$G^*(a,b] + 2G^*(\frac{a}{2},\frac{b}{2}] = G^*(\frac{a}{3},\frac{b}{3}]; \quad 0 < a < b. \tag{2.7}$$

This equation does have solutions–for example $dG^*_{(x)} = c|x|^{-(1+ln2/ln3)}\,dx$, yielding a symmetric stable process. However, we return to (2.4) and now set $\frac{\alpha}{2} = \beta$. Then, in the same way as (2.5)–(2.7) we obtain

$$3\psi(\frac{\alpha}{2}) + \psi(\frac{-\alpha}{2}) = \psi(3\frac{\alpha}{2}), \tag{2.8}$$

and with Y_i, $1 \le i \le 4$, as before this yields $\sum_{i=1}^{4} Y_i \stackrel{d}{=} 3Y_1$, and hence

$$G^*(a,b] = 4^{-1}G^*(\frac{a}{3},\frac{b}{3}]; \quad 0 < a < b. \tag{2.9}$$

Combining (2.7) and (2.9) gives

$$G^*(a,b] = \frac{2}{3}G^*(\frac{a}{2},\frac{b}{2}]. \tag{2.10}$$

By iteration, (2.9) and (2.10) give respectively

$$\begin{aligned} G^*(a,\infty) &= 4^{-n}G^*(3^{-n}a,\infty) \\ &= (\frac{2}{3})^m G^*(2^{-m}a,\infty), \quad \text{for all integers} \quad n,m > 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Since $G^*(a,\infty)$ is monotone, this requires that $3^{-n} < 2^{-m}$ hold whenever $4^{-n} < (\frac{2}{3})^m$, unless $G^* \equiv 0$. For $n = 2$, $m = 4$ this breaks down, so we have $G^* \equiv 0$, and hence $G \equiv 0$ as was to be shown.

In view of Theorem 2.2, one cannot make any obvious sense out of $X_.$ conditioned by $X_1 = 0$ without supplementary hypothesis, even if $P\{-\epsilon < X_1 < \epsilon\} > 0$ for every ϵ. On the other hand, if $P\{X_1 = 0\} > 0$, there is no difficulty. We therefore treat this case first.

Theorem 2.3(a). *If X_t is a Lévy process and $P(X_1 = 0) > 0$, we define the "Lévy bridge" X_t^o to be (any) process with paths in $D[0,1]$ having the conditional law of $(X_t|X_1 = 0)$. Then X^o has exchangeable increments, and its positive sojourn $S(0, X^o)$ is uniformly distributed if and only if, in the representation (2.1), $\gamma - \int \frac{x}{1+x^2} dG \neq 0$ (we note that $P(X_1 = 0) > 0$ already implies $\sigma = 0$ and $G(R) < \infty$, so we need a compound Poisson process with non-zero drift; conversely, a compound Poisson process with zero drift satisfies $P(X_1 = 0) > 0$ but $S(0, X^o)$ is not uniformly distributed)*

Proof. It is clear that X^o has exchangeable increments and $X_1^o = 0$. Hence, in the notation of Theorem 1.3, $X_t^o = X_t^0 - tX_t^o = Y_t^o$, and the condition that $S(0, X^o)$ be uniform is $P\{0 = \sum \beta_j\} = 0$. However, by the definition of X^o we have $\gamma + (\sum \beta_j) - \int \frac{x}{1+x^2} G(dx) = 0$, i.e. $\sum \beta_j = \gamma - \int \frac{x}{1+x^2} G(dx)$ as asserted.

The corresponding result about $AM(X^o)$ is

Theorem 2.3(b). *If X_t is a Lévy process and $P\{X_1 = 0\} > 0$, then $AM(X^o)$ is unique and uniformly distributed on (0, 1) if and only if, in (2.1), $\gamma - \int \frac{x}{1+x^2} G(dx) \neq 0$.*

*Remark**. This also follows, of course, by Corollary 1.4*.

Proof. We need only show that this condition is necessary and sufficient for X^o to have unique location of supremum. Since $\sigma = 0$ and $G(R) < \infty$, we have a compound Poisson process with drift. If the drift is 0, the process will vanish identically with positive probability. Hence the condition is clearly necessary. Conversely, if the drift is non- zero, the paths of the process have the form of a step function plus a fixed line lt, $l \neq 0$. Suppose that the number of steps, say n, is given along with the ordered sizes of the jumps say $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n$. Then the corresponding times $t_1, \ldots, t_n$ of the jumps are independent and uniform on (0, 1). Clearly any point t at which $X_{t-}^o \vee X_t^o = \sup_s X_s^o$ must be in the set $\{0, t_1, \ldots, t_n, 1\}$. Indeed, it is not hard to see that 0 and 1 are excluded, i.e. $\sup_s X_s^0 > 0$ (note that there must be at least one jump). The right and left limit values at t_k are $\left(\sum_{t_j \leq t_k} s_j\right) - lt_k$ and $\left(\sum_{t_j < t_k} s_j\right) - lt_k$, respectively. These sums are all in a fixed finite set, while the lt_k are uniform and independent. Clearly no two coincide.

We turn to defining X^o when $P(X_1 = 0) = 0$. It is not hard to recognize that if $G(R) < \infty$ and $\sigma = 0$ the definition may be quite problematical; indeed, even for G concentrated at 2 points and $P\{-\epsilon < X_1 < \epsilon\} > 0$ for every $\epsilon > 0$, conditioning by $\{-\epsilon < X_1 < \epsilon\}$ as $\epsilon \to 0$ may lead to a process with infinitely many jumps of size bounded away from 0, in such a way that a limit process does not exist. Accordingly, we consider only the case that either $\sigma > 0$ or $G(R) = \infty$. Everything works smoothly if, when $\sigma = 0$, we strengthen $G(R) = \infty$ to Hypothesis (C) of Kallenberg [7], namely

Hypothesis (C). *For $t > 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(t\psi(u))du$ exists, i.e. the Fourier transform of the law of X_t is in L_1.*

This implies L_2, hence the law of X_t has a density and $P\{X_1 = 0\} = 0$. It always holds if $\sigma > 0$, and, as argued in [7, §5], it is only "slightly" stronger than $G(R) = \infty$. Setting $\nu(u) \doteq \sigma^2 + \int_{-u}^{u} x^2 dG(x)$, indeed, Hypothesis (C) holds whenever $\lim_{u\to 0} u^{-2}|\log u|^{-1}\nu(u) = \infty$, whereas $\sigma > 0$ or $G(R) = \infty$ holds if $\limsup_{u\to 0} u^{-2}\nu(u) = \infty$, and $G(R) < \infty$ if $\lim_{u\to 0} u^{-2}|\log u|^r \nu(u) = 0$ for some $r > 1$ (see [7, §5]). Let us verify an assertion of [7], as

Lemma 2.4. *Under Hypothesis (C), the law of X_t has a density $p(t,x)$ continuous in (t,x) for $t \geq \epsilon > 0$.*

Proof. Let $f_t(u) \doteq \exp(t\psi(u))$ denote the Fourier transform. It is well-known (see [9, 12.1, Corollary]) that for each $t > 0$, there exists the continuous inverse transform $p(t,x) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-uix} f_t(u)du$, which is a density for the law of X_t. Now we have $|f_t(u)| = \exp -t(\frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int(1-\cos ux)dG(x))$, which is integrable in u by hypothesis, and monotone, continuous in t. Since we have

$$|p(t,x_2) - p(t,x_1)| \leq (2\pi)^{-1}\int |1 - \exp -u(x_2 - x_1)||f_t(u)|du,$$

with integrand dominated by $2|f_\epsilon(u)|$ for $t \geq \epsilon$, we see by dominated convergence that $p(t,x)$ is uniformly continuous in x, uniformly in $t \geq \epsilon$. On the other hand, for $\epsilon \leq t_1 < t_2$ we have

$$|p(t_2,x) - p(t_1,x)| \leq (2\pi)^{-1}\int |f_{t_2}(u) - f_{t_1}(u)|du,$$

which tends to 0 as $t_2 \to t_1$ uniformly in x. Hence Lemma 2.4 follows.

We now introduce the law of X_t given $X_1 = x$. Let $\mathcal{F}_s \doteq \sigma(X_u, u \leq s)$, augmented by all P–nullsets.

Definition 2.5. For x such that $p(1,x) > 0$, and $A \in \mathcal{F}_s$, $s < 1$, we set $P(A|X_1 = x) = E(p(1-s, x - X_s); A)p^{-1}(1,x)$.

Since, by Lemma 2.4, we have $\lim_{\epsilon\to 0+}(2\epsilon)^{-1}\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} p(1-s, y-X_s)dy = p(1-s,\ x-X_s)$ uniformly on the probability space, it is easy to see that, for every $A \in \mathcal{F}_s$, we have

$$P(A|X_1 = x) = \lim_{\epsilon\to 0+} P(A|x - \epsilon < X_1 < x + \epsilon). \tag{2.12}$$

Indeed, by a Theorem of Vitali, Hahn, and Saks the convergence is uniform in A, and the limit is (clearly) a probability on $\mathcal{F}_s$, consistent in s for $s < 1$ by Chapman-Kolmogorov equation.

We next specialize to $x = 0$ in

Lemma 2.6. *If $p(1,0) > 0$, let $P^o(A) = P(A|X_1 = 0)$, $A \in \mathcal{F}_s$, $s < 1$. Then $P^o(A)$ extends from $\vee_{s<1}\mathcal{F}_s$ to $\mathcal{F}_{1-}$ uniquely, and $P^o\{X_{1-} = 0\} = 1$. Under $P^o(A)$, the* *process (set = 0 at t = 1) has paths in* $D[0,1]$, P^o*–a.s., and it is an inhomogeneous Markov process with transition density*

$$p^o(t_1,x;t_2,y) = p(t_2-t_1,y-x)p(1-t_2,-y)p^{-1}(1-t_1,-x),\ 0 \le t_1 < t_2 < 1,$$

where we interpret $\frac{0}{0} = 0$

Remark. This Lemma is also proved, by somewhat different methods, in [4]. The hypotheses of [4] are considerably more general than ours, and the reader may refer to [4] for more details. However, we still need Hypothesis (C) below for Theorems 2.7 and 2.8, because of its consequence (2.12), which does not hold under the general hypothesis of [4].

Another Remark. After completion of this paper, we received the manuscript [15] of Fitzsimmons and Getoor, which proves Theorem 2.7 below in the setting of [4] restricted to Lévy processes. We then observed that our method also may be extended to that case. We have only to replace our uses of (2.12), which is employed to show that for $A \in \mathcal{F}_{1-\delta}$ with $P(A) = 1$ one has also $P^o(A) = 1$, by Definition 2.5, which gives the same implication.

Proof. The marginal density of X_t for P^o is $p(t,x)p(1-t,-x)p^{-1}(1,0)$ for $t < 1$. Indeed, this follows from the definition of P^o by taking $A = \{X_t \le x\}$ and differentiating in x (with $s = t$). From this, a routine Markov property of X_t, verifies the last assertion for $t \le 1-\epsilon$, $\epsilon > 0$. It remains to examine the behavior at $t = 1$. Noting that the marginal densities are invariant under the transformation $t \leftrightarrow 1-t$ and $x \leftrightarrow -x$, it follows by routine but rather tedious computation using the time-reversed transition density, that under P^o the processes X_t and $-X_{(1-t)-}$ have the same joint law for $\epsilon \le t \le 1-\epsilon$, $\epsilon > 0$. Since the law of X_t under P_o is also well-defined for $0 \le t \le \epsilon$, with $X_{0+} = 0$, we can consistently define its law for $1-\epsilon \le t \le 1$ as that of $-X_{(1-t)-}$, $1-\epsilon \le t \le 1$. Indeed, this gives a consistent family of joint distribution functions on $0 \le t \le 1$, with $X_1 = 0$. The fact that $X_{0+} = 0$, and the equivalence in law $X_t \leftrightarrow -X_{(1-t)-}$ assures us that $\lim_{t\to 1} X_t = 0$, P–a.s., so the Kolmogorov extension of the joint law is carried by D [0, 1], with $X_{1-} = X_1 = 0$. This completes the definition of P^o, and finishes the Lemma.

Theorem 2.7. *Assuming Hypothesis (C) and* $p(1,0) > 0$, *let* $X^o(t)$ *denote any realization of the process* X_t *for* P^o *of Lemma 2.6, having paths in D [0, 1]. We call* $X^o(t)$ *a "Lévy bridge" (from 0 to 0) corresponding to the Lévy process* X_t*. The positive sojourn* $S(0,X^o)$ *is uniformly distributed on (0, 1).*

Proof. For $\epsilon > 0$, the conditional law of X_t given $\{-\epsilon < X_1 < \epsilon\}$ is that of a process with exchangeable increments, since X_1 is invariant under permutation of increments. Letting $\epsilon \to 0+$, and using the fact that $P^o(A) = \lim_{\epsilon\to 0+} P(A|-\epsilon < X_1 < \epsilon)$ (as in (2.12)), we see that X^o has exchangeable increments. Let $S = \{$elements in $D[0,1]$ having infinitely many jumps$\}$. Then $\{X_{(\cdot)} \in S\} \in \mathcal{F}_1$: indeed it suffices that $\{X_{(\cdot)} \notin S\} \in \mathcal{F}_1$, and this can be written $\bigcup_N \limsup_{n\to\infty}\{X_{(\cdot)}$ is continuous in $((k-1)n^{-1},(k+1)n^{-1})$ for all but at most N values of $k \le n\}$, so it suffices that $\{X_{(.)}$ is continuous in $((k-1)n^{-1},(k+1)n^{-1})\} \in \mathcal{F}_1$, which is clear. Now either $P\{X_{(.)} \in S\} = 0$ or $P\{X_{(.)} \in S\} = 1$, and either probability is unchanged for $P\{X_{(.)} \in S_\delta | -\epsilon < X_t < \epsilon\}$ where $S_\delta \doteq \{$infinitely many jumps in $0 \leq t < 1-\delta\}$, $\delta < 1$. Letting $A_\delta = \{X_{(.)} \in S_\delta\}$, and letting $\epsilon \to 0$, it follows that this probability is also the same for P^o. Thus, if $P\{X_{(.)} \in S\} = 1$, then, noting that $X^o(t) = X^o(t) - tX^o(1) = Y^o(t)$, $S(0, X^o)$ is uniform by Theorem 1.3. On the other hand, if $P\{X_{(.)} \in S\} = 0$, then $\sigma > 0$ by Hypothesis (C) (since $G(R) < \infty$). Let $\hat{S} = \{$elements in D [0, 1] having infinite variation$\} \cap S^c$. Then it is not hard to see that, again, $\{X_{(.)} \in \hat{S}\} \in \mathcal{F}_1$. Since $P\{X_{(.)} \in \hat{S}\} = 1$, it follows as before that $P^o\{X^o_{(.)} \in \hat{S}\} = 1$. Therefore, in a representation (1.1) of X^o_t, since there are only finitely many $\beta_j \neq 0$, we must have $\sigma > 0$, P–a.s. Again by Theorem 1.3, $S(0, X^o)$ is uniformly distributed on (0, 1), as asserted.

We conclude with the result about $AM(X^o)$.

Theorem 2.8. *Assuming Hypothesis (C) and* $p(1,0) > 0$, $AM(X^o)$ *is uniformly distributed on* $(0,1)$

Proof. We need only show the uniqueness of supremum (or apply Corollary 1.4*). Let $S_\delta = \{$paths in $D[0, 1-\delta]$ having a unique supremum$\}$. Then S_δ is measurable, and it follows as in Lemma 2.1(b) (somewhat simplified) that $P(X_{(.)} \in S_\delta) = 1$. Thus $P(X^o_{(.)} \in S_\delta) = \lim_{\epsilon \to 0} P(X_{(.)} \in S_\delta | -\epsilon < X(1) < \epsilon) = 1$, and the proof is concluded by letting $\delta \to 0$.

REFERENCES

1. E. Sparre Andersen, *On the fluctuations of sums of random variables*, Math. Scand. **1** (1953), 263– 285; Remarks to the paper, ibid II, (1954), 193–194 .
2. E. Sparre Andersen, *On the fluctuations of sums of random variables II*, Math. Scand. **2** (1954), 195–223.
3. P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley and Sons, Inc, 1968.
4. P. Fitzsimmons, J. Pitman, M. Yor, *Markovian Bridges: Construction, Palm interpretation, and splicing.*, In Seminar on Stochastic Processes, 1992, Birkhauser, Boston.
5. R. K. Getoor and M. Sharpe, *Arc-sine laws for Lévy process*, J. Appl. Prob. 31 **1** (1994).
6. O. Kallenberg, *Canonical representations and convergence criteria for processes with interchangeable increments*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **27** (1973), 23–36.
7. O. Kallenberg, *Splitting at backward times in regenerative sets*, The Annals of Probability **9** (1981), 781–799.
8. P. Lévy, *Sur certains processus stochastiques homogènes*, Compositio Math **7** (1939), 283–339.
9. M. Loeve, *Probability Theory, Third Edition*, Van Nostrand, 1963.
10. P. W. Millar, *Exit properties of stochastic processes with stationary independent increments*, Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973), 459–479.
11. E. S. Shtatland, *On local properties of processes with independent increments*, Th. Prob. Appl. **10** (1965), 317–322.
12. J. Bertoin, *Splitting at the infimum and excursions in half-lines for random walks and Lévy processes*, Stochastic Processes and their Applications **47** (1993), 17–35.
13. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. II, John Wiley and Sons, Inc., 1966.
14. E.A. Pecherskii and B.A. Rogozin, *On joint distributions of random variables associated with fluctuations of a process with independent increments*, Theory of Prob. and its Application **XIV**, **3** (1969), 410–423.
15. P.T. Fitzsimmons and R.K. Getoor, *Occupation time distributions for Lévy bridges and excursions*, Stochastic Processes and Their Applications, 58 **1** (1995), 73–89.

Frank B. Knight
Department of Mathematics
University of Illinois
1409 West Green Street
Urbana, Illinois 61801
U.S.A.

Astérisque

F. LEDRAPPIER

Profil d'entropie dans le cas continu

Astérisque, tome 236 (1996), p. 189-198
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__189_0>

Profil d'entropie dans le cas continu

F. Ledrappier

Résumé. — On considère le mouvement brownien sur un revêtement régulier d'une variété Riemannienne compacte. Par analogie avec l'entropie d'Avez des marches aléatoires, V. Kaimanovitch a défini un nombre positif appelé encore entropie, nul si et seulement si les seules fonctions harmoniques bornées sont les fonctions constantes. Dans cet article, nous proposons une démonstration des premières propriétés de cette entropie; de plus nous obtenons toute une famille de nombres rassemblés dans une fonction : le profil d'entropie. Le profil d'entropie enregistre les variations à grande échelle du noyau de la chaleur et permet de retrouver d'autres quantités asymptotiques.

I - Notations et résultats.

Soient M une variété Riemannienne compacte connexe sans bord et $(\widetilde{M}; \pi : \widetilde{M} \to M)$ un revêtement régulier de M. Nous notons $\mathbb{P}_x$ la mesure de probabilité sur $C(\mathbb{R}^+, M)$ du mouvement brownien partant de x, c'est-à-dire la mesure de probabilité telle que $\omega(0) = x$ pour $\mathbb{P}_x$-presque tout ω et $\{\omega(t), t \geq 0\}$ est un processus de Markov de générateur le laplacien Δ.

Soit m la mesure de Lebesgue normalisée sur M. La mesure m est invariante ergodique pour le processus de Markov $\{\mathbb{P}_x, x \in M\}$ et la mesure $\mathbb{P} = \int \mathbb{P}_x \, dm(x)$ est invariante ergodique pour le flot $\{\psi_s, s \geq 0\}$ du décalage des coordonnées sur $C(\mathbb{R}^+, M)$.

Pour toute trajectoire ω de $C(\mathbb{R}^+, M)$ et tout relevé $\tilde{x}$ de $\omega(0)$, il existe un unique relevé $\tilde{\omega}$ de ω dans $C(\mathbb{R}^+, \tilde{M})$ tel que $\tilde{\omega}(0) = \tilde{x}$. Le processus $\{\tilde{\omega}(t), t \geq 0, \mathbb{P}_{\pi\tilde{x}}\}$ est le mouvement brownien sur $\tilde{M}$ partant de $\tilde{x}$. La distribution de $\tilde{\omega}(t)$ sous $\mathbb{P}_{\pi\tilde{x}}$ est $p(t, \tilde{x}, y)dy$, où dy est la mesure de Lebesgue sur $\tilde{M}$ et $p(t, ., .)$ le noyau de la chaleur, solution fondamentale de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$.

Théorème 1 : *Il existe une fonction convexe $h(s), s > 0$ et un ensemble B_1 de mesure* 1 *dans $C(\mathbb{R}^+, M)$ tels que pour tout ω de B_1, tout $s > 0$*

$$h(s) = \lim_{t \to \infty} -\frac{1}{t} \log p(st, \tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t)).$$

Pour $s = 1$, on retrouve l'entropie de Kaimanovitch h [K].

Notons λ_1 la valeur inférieure du spectre de l'opérateur $-\Delta$ dans $L^2(\widetilde{M})$. Pour $\lambda < \lambda_1$ notons G_λ la fonction de Green de l'opérateur $\lambda + \Delta$ sur $\widetilde{M}$:

$$G_\lambda(x,y) = \int_0^\infty e^{\lambda t} p(t,x,y)dt \ .$$

Théorème 2 : *Il existe une fonction concave $g(\lambda), \lambda < \lambda_1$ et un ensemble B_2 de mesure* 1 *dans $C(\mathbb{R}^+, M)$ tels que pour tout ω de B_2 tout $\lambda < \lambda_1$:*

$$g(\lambda) = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} \log G_\lambda(\tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t)) \ .$$

Les fonctions g et h sont conjuguées, i.e. :

$$g(\lambda) = \inf_{s>0} \{h(s) - \lambda s\}$$
$$h(s) = \sup_{\lambda>\lambda_1} \{g(\lambda) + \lambda s\} \ .$$

Théorème 3 :
a) *Quand s tend vers $+\infty, h(s) - \lambda_1 s$ décroît vers un nombre noté $g(\lambda_1)$.*
b) *Quand $\lambda, \lambda < \lambda_1$ tend vers $\lambda_1, g(\lambda)$ décroît vers $g(\lambda_1)$.*
c) *Nous avons :*

$$4\lambda_1 \leq h = g(0) \leq 2g(\lambda_1) \ .$$

Les inégalités dans le théorème 3.c sont optimales, comme le montre le cas où $\widetilde{M}$ est l'espace hyperbolique réel de courbure constante -1 et où on trouve

$$h(s) = \frac{1}{4}(\frac{1}{s} + 2 + s) \quad s > 0$$
$$g(\lambda) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4\lambda}) \quad \lambda \leq \frac{1}{4}.$$

Les théorèmes analogues ont été énoncés pour les processus discrets dans [L2]. Pour un processus discret à portée finie, le profil d'entropie est infini pour s suffisamment petit. La situation est différente dans le cas continu. Rappelons d'abord qu'il existe un nombre réel positif ℓ tel que pour $\mathbb{P}$-presque tout ω

$$\ell = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} d(\tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t)) \quad [G] \ .$$

Les estimées connues ([CY], [LY]) sur le noyau de la chaleur donnent alors le résultat suivant :

Théorème 4 : *Soit $-K$ un minorant de la courbure de Ricci sur $M, K > 0$. Alors pour tout $s > 0$*

$$\frac{\ell^2}{4s} \leq h(s) \leq \frac{\ell^2}{4s} + \frac{K}{2} + \frac{Ks}{4}$$

et pour tout $\lambda \le \dfrac{K}{4}$

$$\ell\sqrt{-\lambda} \le g(\lambda) \le \ell\sqrt{\frac{K}{4} - \lambda} + \frac{K}{2} .$$

où $\sqrt{-\lambda} = -\infty$ *pour* $\lambda > 0$, $g(\lambda) = -\infty$ *pour* $\lambda_1 < \lambda \le \frac{K}{4}$.

En particulier :

Corollaire 5 :

$$\ell = \lim_{s\to 0} \sqrt{4\,\mathrm{sh}(s)} = \lim_{\lambda\to-\infty} \frac{g(\lambda)}{\sqrt{-\lambda}} .$$

II Démonstration du théorème 1.

Nous utiliserons les propriétés suivantes du noyau de la chaleur :

- Propriété de semi-groupe

$$p(t+t', x, y) = \int p(t,x,z)p(t',z,y)dz \ , \tag{2.1}$$

- inégalité de Harnack parabolique [M] :

(2.2) il existe A, τ positifs tels que pour tous $t \ge 1, \frac{1}{2} \le t' \le 1, x, x', y, y'$ dans $\widetilde{M}$ avec $d(x,x') \le \tau, d(y,y') \le \tau$, on a :

$$p(t,x,y) \ge Ap(t-t', x', y')$$

- localisation du rayon spectral :

$$\lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t}\log p(t,x,x) = \lambda_1 \ , \tag{2.3}$$

- comparaison avec un espace à courbure constante :

(2.4) le processus $d(\tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t))$ est stochastiquement inférieur au processus distance sur un espace hyperbolique réel de même dimension que $\widetilde{M}$ et de courbure constante inférieure à toutes les courbures sectionnelles sur M [DGM],

- d'autre part :

(2.5) uniformément pour t dans un intervalle [a,b], $0 < a \le b < +\infty$

$$p(t,x,y) \ge C(a,b)e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}} \text{ [DGM].}$$

Définissons $F(s,\omega,t)$ par :

$$F(s,\omega,t) = -\log(p(st-1, \tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t)).B),$$

où

$$B = A^2 \inf_{z\in\widetilde{M}} \mathrm{vol}B(z,\tau)$$

et A et τ sont choisis pour que (2.2) soit vrai.

Nous avons les deux propriétés suivantes :

$$\left[\begin{array}{l}\text{Pour tous} \quad s > 0, t, t' \geq \dfrac{1}{s}, \omega \in C(\mathbb{R}_+, M) \ : \\ F(s,\omega,t+t') \leq F(s,\omega,t) + F(s,\psi_t\omega,t')\end{array}\right. \tag{2.6}$$

En effet nous pouvons écrire par (2.1) :

$$\begin{aligned} &p(s(t+t')-1,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t+t')) = \\ &= \int p(st-\frac{1}{2},\tilde{\omega}(0),z)p(st'-\frac{1}{2},z,\tilde{\omega}(t+t'))dz \\ &\geq \int_{z\in B(\tilde{\omega}(t),\tau)} p(st-\frac{1}{2},\tilde{\omega}(0),z)p(st'-\frac{1}{2},z,\tilde{\omega}(t+t'))dz \\ &\geq A^2 p(st-1,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t))p(st'-1,\tilde{\omega}(t),\tilde{\omega}(t+t')) \times \mathrm{vol}B(\tilde{\omega}(t),\tau) \ . \end{aligned}$$

$$\left[\mathbb{E}\left(\sup_{1+\frac{1}{s}\leq t\leq 2+\frac{1}{s}} F(s,\omega,t)\right) < +\infty \ . \right. \tag{2.7}$$

D'après (2.5) cela revient en effet à estimer $\sup_{1+\frac{1}{s}\leq t\leq 2+\frac{1}{s}} d^2(\omega(0),\tilde{\omega}(t))$ et cette variable est intégrable d'après (2.4).

D'après (2.6) et (2.7), nous pouvons appliquer le théorème ergodique sous-additif à la famille $\{F(s,\omega,t), t \geq \frac{1}{s}\}$. Donc il existe un nombre $h(s)$ et un ensemble $B(s)$ de trajectoires, $\mathbb{P}(B(s)) = 1$ tels que si ω appartient à $B(s)$.

$$h(s) = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t}\log p(st-1,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t)) \ . \tag{2.8}$$

Observons alors que la fonction h définie par (2.8) est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$; en effet un calcul analogue à celui qui prouve (2.6) donne, pour $0 < a < 1$:

$$\begin{aligned} &p((as_1+(1-a)s_2)t-1,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t)) \geq \\ &\geq Bp(as_1t-1,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(at))p((1-a)s_2t-1,\tilde{\omega}(at),\tilde{\omega}(t)) \ . \end{aligned}$$

En appliquant $-\frac{1}{t}\log$ puis en prenant la limite en probabilité de l'inégalité obtenue, nous trouvons bien que

$$h(as_1+(1-a)s_2) \leq ah(s_1)+(1-a)h(s_2) \ .$$

La fonction h définie par (2.8) est bien convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$, en particulier la fonction h est continue.

Soit alors un ensemble D dénombrable dense dans $\mathbb{R}_+$ et notons $B_1 = \cap\{B(s), s \in D\}$. Dès que $s < s'$ et t est assez grand, nous pouvons écrire, en itérant (2.2) :

$$p(st,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t)) \leq A^{(s-s')t-1}p(s't-1,\tilde{\omega}(0),\omega(t)) \ .$$

Il s'ensuit que pour tout ω dans $B_1, s's''$ dans D et $s' < s < s''$:

$$\begin{aligned} h(s'') + (s''-s)\log A &\le \liminf_{t\to\infty} -\frac{1}{t}\log p(st,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t)) \le \\ &\le \limsup_{t\to\infty} -\frac{1}{t}\log p(st,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t)) \\ &\le h(s') - (s-s')\log A \ . \end{aligned}$$

Le théorème 1 suit de la continuité de h.

La démonstration du théorème 3.a repose également sur le même calcul. En effet nous pouvons écrire pour $s' < s$:

$$p(st-1,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t)) \ge Bp(s't-1,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t))p((s-s')t-1,\tilde{\omega}(t),\tilde{\omega}(t)) \ .$$

D'après (2.3), nous obtenons :

$$h(s) \le h(s') + \lambda_1(s-s') \ ,$$

ce qui exprime bien que la fonction $s \to h(s) - \lambda_1 s$ est décroissante. Nous notons la limite quand s tend vers l'infini $g(\lambda_1)$.

III - Autres propriétés.

La démonstration du théorème 2 à partir du théorème 1 est de routine : on écrit

$$G_\lambda(\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t)) = t\int_0^\infty e^{\lambda st}p(st,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t))ds \ .$$

Pour ω dans B_1, il vient:

$$\limsup_{t\to\infty} -\frac{1}{t}\log G_\lambda(\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t)) \le \inf_{s>0}\{h(s)-\lambda s\}$$

Réciproquement d'après (2.4) on peut trouver un ensemble B avec $\mathbb{P}(B) = 1$ et un nombre C_0 tels que si ω appartient à B et t est assez grand $d(\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t)) \le C_0 t$.

Si ω est dans B, nous avons pour tout t assez grand, d'après (2.2) :

$$p(st,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t)) \le A^{-\frac{C_0}{\tau}t}p((s+\frac{C_0}{\tau})t,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(0)) \ ,$$

et donc d'après (2.3) pour tout t assez grand, tout $\xi > 0$, une constante C_1 telle que

$$p(st,\tilde{\omega}(0)\tilde{\omega}(t)) \le C_1^t e^{-(\lambda_1-\xi)st} \ .$$

Pour tous $\lambda < \lambda_1$ et $\xi > 0$ fixés nous pouvons donc trouver S assez grand pour que si t est assez grand

$$\int_S^{+\infty} e^{\lambda st}p(st,\tilde{\omega}(0),\tilde{\omega}(t))ds \le e^{-(g(\lambda)-\xi)t} \ .$$

Cet argument ramène à un domaine $[0, S]$ borné si bien que si ω appartient à $B_2 = B_1 \cap B$, on établit facilement que

$$\lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} \log G_\lambda(\tilde{\omega}(0), \tilde{\omega}(t)) = g(\lambda) ,$$

où $g(\lambda)$ est définie pour $\lambda < \lambda_1$ par $g(\lambda) = \inf_{s>0}\{h(s) - \lambda s\}$.

La fonction g est concave continue sur $\lambda < \lambda_1$.

Nous savons déjà que $h(s) = \lambda_1 s + g(\lambda_1) + f(s)$ où f est une fonction décroissante tendant vers 0 à l'infini et $g(\lambda_1)$ est défini par cette relation. Il s'ensuit que

$$g(\lambda_1) = \inf_{s>0}\{h(s) - \lambda_1 s\} .$$

Comme la fonction $-g$ est la fonction convexe conjuguée de h, il vient (cf. e.g. [RV] chapitre 15) :

$$h(s) = \sup_{\lambda<\lambda_1} \{g(\lambda) + \lambda s\} \ , \ s > 0$$

et

$$g(\lambda_1) = \lim_{\substack{\lambda<\lambda_1 \\ \lambda\to\lambda_1}} g(\lambda) .$$

Il reste à montrer les relations du théorème 3.c. et le théorème 4.

· Preuve de $4\lambda_1 \leq h$.

La démonstration du théorème 1 donne également pour tout s et presque tout x :

$$h(s) = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} \int p(t,x,y) \log p(st,x,y) dy .$$

En particulier $h = h(1)$ est donné par :

$$h = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} \int p(t,x,y) \log p(t,x,y) dy .$$

La démonstration est alors la même que dans le cas du revêtement universel ([L1] proposition 3).

· Preuve de $h = g(0)$.

Cela revient à dire que 1 est minimum pour la fonction h. Or nous avons pour tout s :

$$\begin{aligned} h(s) - h(1) &= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} \int p(t,x,y) \log \frac{p(st,x,y)}{p(t,x,y)} dy \\ &\geq \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} \int p(t,x,y) \left(\frac{p(st,x,y)}{p(t,x,y)} - 1 \right) dy . \end{aligned}$$

Nous avons utilisé que $\log a \le a-1$ pour tout a réel.

· Preuve de $h \le 2g(\lambda_1)$.

Pour montrer cette relation, nous allons d'abord donner une autre définition de l'entropie. Posons pour tout x de $\widetilde{M}$, t, $\delta > 0$

$$N(x,t,\delta) = \inf\{\mathrm{card} E : \mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), E) \le 1\} \ge \delta\}$$

Proposition (Kaimanovich [K]) : *Pour tout x de $\widetilde{M}, 0<\delta<1$, nous avons*

$$h = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log N(x,t,\delta) .$$

Nous établissons d'abord que pour tout x de $\widetilde{M}$, $0<\delta<1$,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log N(x,t,\delta) \le h .$$

Nous avons en fait un résultat un peu plus précis :

$$(3.1) \qquad \left[\begin{array}{l} \text{Pour tout} x \text{ de } \widetilde{M} \text{ et } \mathbb{P}_{\pi x}\text{-presque tout } \omega : \\ \limsup\limits_{t\to\infty} -\dfrac{1}{t} \log \mathbb{P}_{\pi x}\{\omega' : d(\omega'(t), \tilde{\omega}(t)) \le \tau\} \le h . \end{array}\right.$$

En effet nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_{B(\tilde{\omega}(t),\tau)} p(t,x,y)dy &= \int_{B(\tilde{\omega}(t),\tau)\times\widetilde{M}} p(t-\tfrac{1}{2},x,z)p(\tfrac{1}{2},z,y)\,dy\,dz \\ &\ge Ap(t-1,x,\tilde{\omega}(t)) \int_{B(\tilde{\omega}(t),\tau)\times\widetilde{M}} p(\tfrac{1}{2},y,z)\,dy\,dz \\ &\ge A_1 p(t-1,x,\tilde{\omega}(t)) \end{aligned}$$

pour une certaine constante A_1. D'après (2.8) la propriété (3.1) est vraie pour presque tout x. En écrivant

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{\pi x}\{\omega' : d(\omega'(t), \tilde{\omega}(t)) \le \tau\} = \\ &= \int p(1,x,y)\mathbb{P}_{\pi y}\{\omega' : d(\omega'(t-1), \tilde{\omega}(t-1)\} \le \tau\}dy , \end{aligned}$$

on obtient la propriété (3.1) pour tout x.

L'inégalité annoncée suit de (3.1) en prenant pour x, δ, ε fixés t assez grand pour que $\mathbb{P}_{\pi x}(A_t) \ge \delta$, où A_t est l'ensemble des ω tels que

$$\mathbb{P}_{\pi x}\{\omega' : d(\omega'(t)) \le \tau\} \ge e^{-(h+\varepsilon)t} .$$

Choisissons alors pour E un ensemble 1-séparé maximal dans $\{\tilde{\omega}(t), \omega \in A_t\}$. Par maximalité

$$\mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), E) \leq 1\} \geq \mathbb{P}_{\pi x}(A_t) \geq \delta \ .$$

D'autre part les boules centrées sur E et de rayon τ sont disjointes (on peut supposer $\tau \leq \frac{1}{2}$!) et de probabilité supérieure à $e^{-(h+\varepsilon)t}$ pour la loi de $\tilde{\omega}(t)$. Pour x, δ, ε fixés nous avons donc pour t assez grand $N(x,t,\delta) \leq \text{card } E \leq e^{(h+\varepsilon)t}$, c'est-à-dire la majoration annoncée.

Pour minorer $\liminf \frac{1}{t} \log N(x,t,\delta)$, nous définissons l'ensemble M_t par :

$$M_t = \left\{ y : y \in \widetilde{M}, \int_{B(y,1)} p(t,x,z)dz \geq e^{-(h-\varepsilon)t} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Pour tout } x \text{ de } \widetilde{M} \\ \lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), M_t \leq 1\} = 0 \ . \end{array} \right. \tag{3.2}$$

En effet si y appartient à M_t, nous avons pour t assez grand

$$\mathbb{P}_{\pi x}(\{\omega : p(t,x,\tilde{\omega}(t)) \geq e^{-(h-\varepsilon/2)t}\} | d(\tilde{\omega}(t), y) \leq 2) \geq \frac{1}{2} \ .$$

(sinon nous aurions :

$$\int_{B(y,2)} p(t,x,z)dz \leq \frac{1}{2} \int_{B(y,2)} p(t,x,z)dz + e^{-(h-\varepsilon/2)} \max_y \text{vol} B(y,z)$$

ce qui contredit la définition de M_t).

Il existe une constante géométrique C telle que l'on puisse trouver un sous-ensemble M_t^0 de M_t avec les $B(y,2), y \in M_t^0$ deux à deux disjoints et

$$\mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), M_t^0) \leq 2\} \geq \frac{1}{C} \mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), M_t) \leq 1\} \ .$$

On peut alors majorer :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), M_t) \leq 1\} &\leq C \sum_{y \in M_t^0} \mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), y) \leq 2\} \\ \leq 2C \sum_{y \in M_t^0} \mathbb{P}_{\pi x}\{\omega &: d(\tilde{\omega}(t), y) \leq 2 \text{et} \quad p(t,x,\tilde{\omega}(t)) \geq e^{-(h-\varepsilon/2)t}\} \\ &\leq 2C \mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : p(t,x,\tilde{\omega}(t)) \geq e^{-(h-\varepsilon/2)t}\} \ . \end{aligned}$$

La dernière expression tend vers zéro d'après le théorème 1.

Soit alors E un ensemble quelconque tel que $\mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), E) \leq 1\} \geq \delta$. Notons E_t les points de E qui ne sont pas dans M_t. D'après (3.2) pour t assez grand $\mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), E_t) \leq 1\} \geq \frac{\delta}{2}$ et par définition pour chaque y de E_t

$$\mathbb{P}_{\pi x}\{\omega : d(\tilde{\omega}(t), y) \leq 1\} \leq e^{-(h-\varepsilon)t} \ .$$

Le cardinal de E_t doit être au moins $\frac{\delta}{2}e^{(h-\varepsilon)t}$ et ceci achève la démonstration de la proposition.

(3.3) **Corollaire :** *Pour* $s > 0$, $h(s) - s\lambda_1 \geq \frac{h}{2}$.

Ecrivons en effet pour un x de $\widetilde{M}, t > 0$, $p(t,x,x) = \int p(t/2,x,y)p(t/2,y,x)dy$, et fixons $\xi > 0$. Pour ω dans $B(s), t$ assez grand et y tel que $d(y, \tilde{\omega}(t/2s)) \leq \tau$, nous avons si $x = \tilde{\omega}(0)$:

$$p(t/2,x,y) = p(t/2,y,x) \geq Ae^{-\frac{t}{2s}(h(s)+\xi)} \ .$$

Soit x tel que $\mathbb{P}_{\pi x}B(s) = 1$, et choisissons un ensemble E minimal dans $Q_t = \{\tilde{\omega}(t/2s) : \omega \in B(s), \tilde{\omega}(0) = x\}$ avec la propriété que $d(Q_t, E) \leq 1$.

La proposition entraîne que pour t assez grand card $E \geq e^{\frac{t}{2s}(h-\xi)}$. D'autre part, par minimalité les boules de rayon τ centrées sur E sont disjointes si bien que

$$\begin{aligned} p(t,x,x) &\geq \text{card } E \inf_{z \in Q_t} \int_{B(z,\tau)} p(t/2,x,y)^2 dy \\ &\geq e^{\frac{t}{2s}(h-\xi)} . A^2 . e^{-\frac{t}{s}(h(s)+\xi)} . \inf_z \text{vol} B(z,\tau) \ . \end{aligned}$$

D'où par (2.3) :

$$\lambda_1 \leq -\frac{h}{2s} + 2\xi + \frac{h(s)}{s} \ .$$

Le corollaire suit en laissant ξ tendre vers 0, et la relation $h \leq 2g(\lambda_1)$ en faisant tendre s vers l'infini.

· **Preuve du théorème 4 :** L'existence de la limite ℓ suit du théorème ergodique sous-additif. Pour minorer $h(s)$ rappelons la majoration du noyau de la chaleur de [LY] corollary 3.1. Pour $1 < \alpha < 2$ et $0 < \varepsilon < 1$, t assez grand pour que vol$B(x, \sqrt{t}) \geq 1$ et pour tout x :

$$p(t,x,y) \leq C(\varepsilon)^\alpha \exp\left(C\varepsilon(\alpha-1)^{-1}Kt - \frac{d^2(x,y)}{(4+\varepsilon)t}\right) \ .$$

D'où pour $\mathbb{P}$ presque tout ω :

$$\lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t}\log p(st,x,\tilde{\omega}(t)) \geq \frac{\ell^2}{(4+\varepsilon)s} - \frac{C\varepsilon K s}{\alpha - 1} \ .$$

Faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$h(s) \geq \frac{\ell^2}{4s} .$$

Inversement pour majorer $h(s)$, on minore le noyau de la chaleur $p(t,x,y)$ par la valeur $q(t,r)$ du noyau de la chaleur dans l'espace simplement connexe de même dimension que M et de courbure constante $-\frac{K}{\dim M - 1}$ ([CY]). La majoration annoncée suit. L'encadrement de la fonction g se déduit de celui de la fonction h par dualité.

Bibliographie

[CY] J. Cheeger and S.T. Yau : A lower bound for the heat kernel *Comm. Pure Appl. Math.* **34** (1981), 465-480.

[DGM] A. Debiard, B. Gaveau et E. Mazet : Théorèmes de comparaison en géométrie Riemannienne. *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **12** (1976), 391-425.

[G] Y. Guivarch : Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d'une marche aléatoire. *Astérisque* **74** (1980), 47-98.

[K] V.A. Kaimanovich : Brownian motion and harmonic functions on covering manifolds. An entropy approach. *Soviet Math. Dokldy* **33** (1986), 812-816.

[L1] F. Ledrappier : Harmonic measures and Bowen-Margulis measures. *Israel J. Maths.* **71** (1990), 275-287.

[L2] F. Ledrappier : Sharp estimates for the entropy. *Harmonic Analysis and Discrete Potential Theory.* M. Picardello ed. Plenum Press, NY (1992), 282-288.

[LY] P. Li and S.T. Yau : On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. *Acta Math.* **156** (1986), 154-201.

[M] J. Moser : A Harnack inequality for parabolic differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.* **17** (1964), 101-134.

[RV] A.N. Roberts and D.E. Varberg : Convex functions. *Pure and Applied Maths.* **57** Academic Press (1973).

C.N.R.S., URA 169
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91 128 PALAISEAU Cedex
et
C.N.R.S., URA 224
Laboratoire de Probabilités
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75 252 PARIS Cedex 05

G. LETAC

The function $\exp\left[-p\,\mathrm{Trace}\sqrt{2A}\right]$ as a Laplace transform on symmetric matrices

Astérisque, tome 236 (1996), p. 199-213
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__199_0>

The Function $\exp[-p \operatorname{Trace}\sqrt{2A}]$ as a Laplace Transform on Symmetric Matrices

G. Letac

Abstract. — This note shows that if $p > 0$ and if S_+ is the set of symmetric positive definite matrices, then the function on S_+ defined by $A \mapsto \exp(-\operatorname{Trace} p\sqrt{2A})$ is the Laplace transform of a non positive function concentrated on S_+ if $n \geq 2$. This function is explicitely computed for $n = 2$. This computation is generalized to a Lorentz cone. The link of this question with the inverse Gaussian distributions in probability theory is also discussed, as well as the general problem of considering $\det L(A)$ as a Laplace transform on symmetric matrices when $L(\lambda)$ is a Laplace transform on the real line.

§1. Introduction. For $p > 0$, define the stable probability distribution of order 1/2 on $\mathbb{R}^+$:

$$\mu_p(dx) = \frac{p}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2x}\right) \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)\, dx \tag{1.1}$$

Then its Laplace transform, evaluated at $\lambda > 0$, is :

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda x)\, \mu_p(dx) = \exp(-p\sqrt{2\lambda}) \tag{1.2}$$

(See e.g. Feller 1970, p. 436 (3.4)).

Probability distributions (1.1) can be imbedded in the three parameter family of the so called "generalized inverse Gaussian distributions" defined for (a, b, λ) in $(0, +\infty) \times [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ by

$$\mu_{\lambda,a,b}(dx) = \left(K_\lambda(\sqrt{ab})\right)^{-1} a^{\frac{\lambda}{2}} b^{-\frac{\lambda}{2}} x^{\lambda-1} \exp -\tfrac{1}{2}(ax + bx^{-1})\, \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)\, dx \tag{1.3},$$

where K_λ is a Bessel function (Watson 1966, p. 91).

Probability distributions (1.3) have a natural extension to the space of symmetric (n, n) real matrices, which extends nicely the fact that (1.3) is the distribution of a random continued fraction whose coefficients are independent and gamma distributed (see Letac and Seshadri 1983). This extension has been performed by E. Bernadac (1992) and even been made on general symmetric cones (see Bernadac 1993 and 1995). In this extension, the gamma distributions are replaced by the Wishart distributions on symmetric real matrices or on symmetric cones.

However, in this extension, the particular role played by $\lambda = -1/2$ when specializing (1.3) to (1.1) disappears, and although the extension of (1.3) to matrices is natural, extension of (1.1) is not. So one can look for an other path, and instead of trying to generalize (1.3), through for instance continued fractions, one can try to generalize (1.1) to symmetric matrices through (1.2). To describe what we have in mind, it is better to introduce a few definitions now.

Let E be a Euclidean space with dimension n, and let S be the space of symmetric endomorphisms of E. We equip S also with a Euclidean structure through the scalar product on S

$$(a, b) \mapsto \frac{1}{n}\ \mathrm{Trace}\, ab\ .$$

If $I \subset \mathbb{R}$, one denotes by $S(I)$ the set of a in S with eigenvalues in I; $S(I)$ is convex if I is an interval. For simplicity we write $S_+ = S((0, +\infty))$ (resp. $\bar{S}_+ = S([0, +\infty)))$ the cone of symmetric positive-definite (resp. positive) endomorphisms. Also, if e is a basis in E and a is in S, we write $[a]_e$ as its matrix in base e.

Let $f : I \to \mathbb{R}$ be any function. Suppose that a is in $S(I)$ and that e is an orthonormal basis which diagonalizes a, with $[a]_e = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Then it is a standard exercise to show that $\tilde{f}(a)$ in S defined by

$$[\tilde{f}(a)]_e = \mathrm{Diag}\left(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\right) \tag{1.4}$$

actually does not depend on e. Thus $\tilde{f} : S(I) \mapsto S$ is a well defined function. Furthermore, if I is an interval and if the derivative f' exists on I, then $\tilde{f}$ is differentiable, and its differential $(\tilde{f})'(a)$ on a, evaluated at the point h of S, is computed as follows : defining $g : I \times I \to \mathbb{R}$ by :

$$g(\lambda, \lambda) = f'(\lambda) \qquad \text{and} \qquad g(\lambda, \mu) = \big(g(\lambda) - g(\mu)\big)/(\lambda - \mu) \quad \text{if} \quad \lambda \neq \mu$$

then, if e is an orthonormal basis with $[a]_e = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, we have

$$\left[(\tilde{f})'(a)(h)\right]_e = \left(g(\lambda_i, \lambda_j)h_{ij}\right)\ , \qquad \text{for} \quad [h]_e = (h_{ij})\ . \tag{1.5}$$

The proof of (1.5) is a not so easy exercise in advanced calculus.

From (1.5), one deduces two facts. Asume that I is an open interval, and consider the function

$$a \longmapsto \mathrm{Trace}\, \tilde{f}(a) \qquad S(I) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1.6}$$

Then if f' exists, the differential of (1.6) in a is $(\tilde{f'})(a)$, from (1.5) (Note that we identify S with its dual through the Euclidean structure of S, and the differential of a real function on S can then be called a gradient). Furthermore, assume that f is convex on I. Then (1.6) will be convex on $S(I)$: to see this point, assume that f'' exists. Then, for arbitrary u in S and a in $S(I)$ (which is an open convex subset of S), there exists $\alpha > 0$ such that the function

$$(-\alpha, \alpha) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad t \longmapsto F(t) = \operatorname{Trace} \tilde{f}(a+tu)$$

is well defined. With the help of (1.5) we compute

$$F''(0) = \operatorname{Trace} \tilde{f}''(a) u^2 .$$

Since $f'' \geq 0$, then $\tilde{f}''(a)$ is in $\bar{S}_+$, as well as $u\tilde{f}''(a)u$. Thus $F''(0) \geq 0$. This implies that (1.6) is convex. The case where f'' does not exist is then treated by approximation.

To come back to our initial problem, i.e. a suitable generalization of (1.1) through (1.2), we consider (1.6) when f is the logarithm of the Laplace transform L of some positive measure μ on $\mathbb{R}$. Let us assume that for all λ in the open interval I

$$L(\lambda) = \exp f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda x)\, \mu(dx) < \infty \tag{1.7}$$

It is well known that f is convex on I. Thus, as we have seen, (1.6) is convex, and one can wonder if there exists a positive measure $\tilde{\mu}$ on S such that for all a in $S(I)$ one has

$$\operatorname{Det} \tilde{L}(a) = \exp \operatorname{Trace} \tilde{f}(a) = \int_S \exp\left(-\operatorname{Trace}(ax)\right) \tilde{\mu}(dx) \tag{1.8}$$

An instance for which it is true is the case $I = \mathbb{R}$ and $f(\lambda) = \sigma^2\lambda^2/2$: clearly $\tilde{\mu}$ is a suitable Gaussian distribution on S. An other instance for which it is almost true is the case where $I = (0, +\infty)$ and $f(\lambda) = -p \operatorname{Log} \lambda$, where $p > 0$. Here (1.7) holds with

$$\mu(dx) = \frac{x^{p-1}}{\Gamma(p)} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)\, dx .$$

However $\tilde{\mu}$ defined by (1.8) will be positive if and only if

$$p \in \left\{\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \ldots, \tfrac{n-1}{2}\right\} \cup \left(\tfrac{n-1}{2}, +\infty\right) \tag{1.9}$$

This result (1.9) is due to Gindikin (1975). It has been rediscovered again and again : see Casalis and Letac (1994) for references, and a short proof.

We are now able to state the aim of this note : to study the existence of a positive $\tilde{\mu}$ in (1.8) when $I = (0, +\infty)$ and $f(\lambda) = -p\sqrt{2\lambda}$ (compare (1.2) and (1.7)). As we shall see (section 5) the answer is negative for $n \geq 2$, and we shall prove this by computing explicitely a signed measure $\tilde{\mu}$ such that (1.8) holds when $n = 2$. Explicit calculations for $n \geq 3$ seem hopeless. Section 2 is devoted to a general study of (1.8). Section 3 specializes to $n = 2$. Section 4 studies an integral equation that we meet by considering the case $f(\lambda) = -p\sqrt{2\lambda}$ and a slight extension of the problem to the Lorentz cone, which appears in section 5.

§2. Properties of $\tilde{\mu}$ for general n. We keep the notations of the introduction; furthermore we denote by $\mathbb{O}(E)$ and $\mathbb{O}(S)$ the orthogonal groups of the Euclidean spaces E and S. There is a natural representation of $\mathbb{O}(E)$ in $\mathbb{O}(S)$ defined as follows: if u is in $\mathbb{O}(E)$, then for all a in S, $g_u(a) = uau^{-1}$ is in S.

Furthermore $\mathrm{Trace}\,(g_u(a))^2 = \mathrm{Trace}\,a^2$, thus g_u is in $\mathbb{O}(S)$. An argument of convexity shows easily that if u is in the subgroup $\mathbb{O}_+(E)$ of rotations of $\mathbb{O}(E)$, then g_u is in $\mathbb{O}_+(S)$ too. Clearly $g_{u_1}g_u = g_{u_1u}$, and $u \mapsto g_u$ defines an homomorphism from $\mathbb{O}(E)$ to $\mathbb{O}(S)$ and from $\mathbb{O}_+(E)$ to $\mathbb{O}_+(S)$. Note also that

$$uau^{-1} = a \quad \text{for all } u \text{ in } \mathbb{O}_+(E) \quad \Longleftrightarrow \quad a \in \mathbb{R}.\mathrm{id}_E \tag{2.1}$$

$$uau^{-1} = a \quad \text{for all } a \text{ in } S \quad \Longleftrightarrow \quad u = \pm\,\mathrm{id}_E \tag{2.2}$$

Denote by G and G_+ the respective images of $\mathbb{O}(E)$ and $\mathbb{O}_+(E)$ in $\mathbb{O}(S)$ by $u \mapsto g_u$. It is easy to see that a and b in S are in the same G_+ orbit —thus in the same G orbit— if and only if their spectrum coincide. More precisely if $\lambda_1(a) \leq \lambda_2(a) \leq \ldots \leq \lambda_n(a)$ is the sequence of not necessarily distinct eigenvalues of a, then there exists u in $\mathbb{O}_+(E)$ such that $b = uau^{-1}$ if and only if $\lambda_j(a) = \lambda_j(b)$ $j = 1, \ldots, n$. The necessary condition is clear; to prove the sufficient condition, if e and f are orthonormal basis of E such $a(\vec{e}_j) = \lambda_j(a)\vec{e}_j$ and $b(\vec{f}_j) = \lambda_j(b)\vec{f}_j$ then one takes u in $\mathbb{O}_+(E)$ such that $u(\vec{f}_j) = \vec{e}_j$. However, if such a u has determinant -1, one has to replace $\vec{f}_1$ by $-\vec{f}_1$, still an eigenvector of b.

Assume now that I and μ are as in (1.7) and suppose that (1.8) holds with a signed measure $\tilde{\mu}$. For u in $\mathbb{O}(E)$ we have:

$$\mathrm{Trace}\,\tilde{f}(a) = \mathrm{Trace}\,\tilde{f}(g_u(a))\ .$$

Thus (1.8) becomes

$$\int_S \exp\left(-\,\mathrm{Trace}(ax)\right)\tilde{\mu}(dx) = \exp\mathrm{Trace}\,\tilde{f}(a) = \exp\mathrm{Trace}\,\tilde{f}(g_u(a))$$
$$= \int_S \exp\left(-\,\mathrm{Trace}\left(ag_{u^{-1}}(x)\right)\right)\tilde{\mu}(dx) = \int_S \exp\left(-\,\mathrm{Trace}(ay)\right)\tilde{\mu}_1(dy)$$

where $\tilde{\mu}_1(dy)$ is the image of $\tilde{\mu}$ by $x \mapsto y = g_{u^{-1}}(x)$.

Thus $\tilde{\mu}$ is invariant by G and G_+. Now S is split by G_+ in orbits and the set of these orbits is parametrized by the increasing sequence of the eigenvalues of any element of the orbit, i.e. by

$$H = \left\{h \in \mathbb{R}^n\ ;\ h_1 \leq h_2 \leq \ldots \leq h_n\right\}\ .$$

Choosing an arbitrary orthonormal basis e of E, one can say that, since $\tilde{\mu}$ is invariant by G_+, there exists a signed measure ν on H such that if dU denotes the Haar measure of mass 1 on the group $\mathbb{O}_+(n)$ of rotation matrices of order n, then $\tilde{\mu}(dx)$ is the image of $\nu(dh)\,dU$ by the map

$$(h,U) \longmapsto x \qquad \text{with} \qquad [x]_e = U \begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n \end{pmatrix} U^{-1} .$$

In (1.8), if $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$ are the eigenvalues of a, we get :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp -(\lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n)\, \mu(dt_1)\ldots\mu(dt_n) = \exp\left(f(\lambda_1) + \ldots + f(\lambda_n)\right)$$

$$= \int_H \nu(dh) \int_{\mathbb{O}_+(n)} dU \exp - \mathrm{Trace} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n \end{pmatrix} U^{-1} \quad (2.3)$$

and (2.3) shows that the image of $\nu(dh)\,dU$ by $(h,U) \mapsto (t_1,\ldots,t_n) =$ diagonal of $U\left(\begin{smallmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_n \end{smallmatrix}\right)U^{-1}$ is $\mu(dt_1)\ldots\mu(dt_n)$.

The task of extracting ν from this information seems rather difficult for $n \ge 3$. For $n = 2$, however, things are feasible : we have to find $\nu(dh_1, dh_2)$ such that the image of

$$\nu(dh_1, dh_2)\, \frac{d\theta}{2\pi} \qquad \text{on} \qquad \{h \in \mathbb{R}^2 \; ; \; h_1 \le h_2\} \times [0, 2\pi[$$

by $(h,\theta) \mapsto (t_1,t_2) = (h_1 \cos^2\theta + h_2 \sin^2\theta, h_1 \sin^2\theta + h_2\cos^2\theta)$ is $\mu(dt_1)\mu(dt_2)$. We solve this problem in the next section.

§3. How to compute $\tilde{\mu}$ for $n = 2$.

To have a clear geometrical picture of the case $n = 2$, we adapt the notations. The Euclidean plane E is now identified with $\mathbb{R}^2$ and S is identified to $\mathbb{R}^3$ by the parametrization

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow S \;:\; (a,b,c) \longmapsto M(a,b,c) = \begin{bmatrix} a+b & c \\ c & a-b \end{bmatrix} .$$

Thus the scalar product in S is

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Trace}\left(M(a,b,c)M(a',b',c')\right) = aa' + bb' + cc'$$

which is the canonical scalar product in $\mathbb{R}^3$. We consider the measure $\tilde{\mu}$ that we look for as a measure $\tilde{\mu}(da,db,dc)$ on $\mathbb{R}^3$. Thus (1.8) can be written

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp -(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)\, \mu(dt_1)\mu(dt_2) = \int_{\mathbb{R}^3} \exp - \left(\lambda_1(a+b) + \lambda_2(a-b)\right) \tilde{\mu}(da,db,dc) \quad (3.1)$$

The images of $\tilde{\mu}$ by $(a,b,c) \mapsto (a,b)$ and of $\mu(dt_1)\mu(dt_2)$ by $(t_1,t_2) \mapsto (a,b) = \left(\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{t_1-t_2}{2}\right)$ coincide. We denote it by $\pi(da,db)$.

Doing $\lambda_1 = \lambda_2$ in (3.1) shows that the image of $\tilde{\mu}$ by $(a,b,c) \mapsto a$ is the positive measure $\pi(da)$ defined as the image of the convolution $\mu * \mu$ by the homothety $t \mapsto \frac{t}{2} = a$.

Therefore we write :

$$\pi(da,db) = \pi(da)\, Q_a(db)\ , \quad \tilde{\mu}(da,db,dc) = \pi(da)\, \nu_a(db,dc)\ . \tag{3.2}$$

Recall that in (3.2), $Q_a(db)$ is a known positive measure and that $\nu_a(db,dc)$ has to be found. Before giving two examples, we make the following remark :

Proposition 3.1 : *Let μ be a positive measure on $\mathbb{R}$ such that $\int e^{-\lambda t}\mu(dt) < \infty$ for all λ in the open interval I. For λ_0 in $\mathbb{R}$, define $\mu^0(dt) = e^{-\lambda_0 t}\mu(dt)$ and consider the $\pi^0(da)$, $\pi^0(da,db)$ and $Q^0_a(db)$ similarly associated to μ^0 as in (3.2). Then $\pi^0(da) = \exp(-2\lambda_0 a)\,\pi(da)$, $\pi^0(da,db) = \exp(-4\lambda_0 a)\,\pi(da,db)$ and $Q^0_a(db) = \exp(-2\lambda_0 a)\, Q_a(db)$.*

In particular, $Q_a(db)$ is a bounded measure π almost every where.

Proof : $(\mu^0 * \mu^0)(dt) = \exp(-\lambda_0 t)\,(\mu * \mu)(dt)$ imply the three identities. Finally, since there exists λ_0 such that μ^0 is bounded, this implies that $Q^0_a(db)$ is bounded, as well as Q_a, π almost every where. ∎

Example A : Let p be > 0 and take $\mu(dt) = \dfrac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(t)\, dt$. Then :

$$\begin{aligned}
(\mu * \mu)(dt) &= \frac{t^{2p-1}}{\Gamma(2p)} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(t)\, dt \\
\pi(da) &= \frac{2^{2p}}{\Gamma(2p)} a^{2p-1}\, \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(a)\, da \\
\pi(da,db) &= \frac{4}{(\Gamma(p))^2}(a^2 - b^2)^{p-1}\, \mathbb{1}_{|b|<a}(a,b)\, da\, db \\
Q_a(db) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(p)} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^{p-1} \mathbb{1}_{(-a,a)}(b)\, \frac{db}{a}\ .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

The constant in (3.3) has been simplified with the duplication formula of the gamma function : see Whittaker and Watson (1927), bottom of p. 240).

Example B : For $p > 0$ we take $\mu = \mu_p$ as in (1.1). Hence $\mu_p * \mu_p = \mu_{2p}$ and

$$\begin{aligned}
\pi(da) &= \frac{p}{\sqrt{\pi}}\, a^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{p^2}{a}\right) \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(a)\, da \\
\pi(da,db) &= \frac{2p^2}{\pi}\, (a^2 - b^2)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{p^2 a}{a^2-b^2}\right) \mathbb{1}_{|b|<a}(a,b)\, da\, db \\
Q_a(db) &= \frac{2p}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{p^2 b^2}{a(a^2-b^2)}\right) \mathbb{1}_{|b|<a}(b)\, db\ .
\end{aligned} \tag{3.4}$$

We now state a theorem.

Theorem 3.2 : *Assume that μ has no atoms. Then a signed measure $\tilde{\mu}$ satisfying (1.8) for $n = 2$ exists if and only if for π almost all a, $Q_a(db)$ as defined by (3.2) is absolutely continuous, with density $q_a(b)$, and there exists a signed measure $K_a(dr)$ with bounded variation on $(0, +\infty)$ such that*

$$q_a(b) = \frac{1}{\pi} \int_b^\infty \frac{K_a(dr)}{\sqrt{r^2 - b^2}} \tag{3.5}$$

Under these circumstances, $\nu_a(db, dc)$, as defined by (3.2), is the image of $K_a(dr) \dfrac{d\theta}{2\pi}$ on $(0, +\infty) \times [0, 2\pi[$ by $(r, \theta) \mapsto (b, c) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$.

Furthermore if μ is concentrated on $(0, +\infty)$, then K_a is concentrated on $(0, a]$.

Proof : Suppose that $\tilde{\mu}$ exists. Thus $\nu_a(db, dc)$ is invariant by rotation in the (b, c) plane, i.e. ν_a is the image of a measure $K_a(dr)\frac{d\theta}{2\pi}$ on $(0, +\infty) \times [0, 2\pi[$ by $(r, \theta) \mapsto (b, c) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$.

Let us observe that $Q_a(\{0\}) = 0$ for π-almost all a. If not, there exists $A \subset \mathbb{R}$ such that

$$0 < \int_A \pi(da)\, Q_a(\{0\}) \leq \mu \otimes \mu(\{(t, t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}) ,$$

and since μ has no atoms, the right hand term of the above inequality is 0 : a contradiction.

Denote by $\alpha(dz)$ the image of $\dfrac{d\theta}{2\pi}$ on $[0, 2\pi[$ by $\theta \mapsto z = \cos\theta$. We have

$$\alpha(dz) = \frac{1}{\pi}(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{(-1,1)}(z)\, dz .$$

Thus $Q_a(db)$, defined by (3.2), is the image of $K_a(dr)\, \alpha(dz)$ by $(r, z) \mapsto b = rz$. Hence Q_a is simply the convolution of K_a and α in the *multiplicative* group $\mathbb{R}^*$. Furthermore, because of the invariance by rotation of ν_a in (3.2), Q_a, as well as α, is a symmetric measure. Thus, taking their restrictions to $(0, +\infty)$, Q_a is the convolution of K_a and α in the multiplicative group $\mathbb{R}_+^*$. Since α has a density, necessarily Q_a must have one too, denoted by $q_a(b)$. The densities of Q_a and α with respect to the Haar measure $\dfrac{db}{b}$ of $\mathbb{R}_+^*$ are respectively $bq_a(b)$ and $\frac{b}{\pi}(1 - b^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{(0,1)}(b)$. Thus, for $b > 0$:

$$bq_a(b) = \int_0^\infty \frac{b}{\pi r} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{(0,1)}\left(\frac{b}{r}\right) K_a(dr) ,$$

which gives (3.5).

The converse part is plain. Eventually, to see that $K_a(dr)$ is concentrated on $(0, a]$ if μ is on $(0, +\infty)$ one observes that $\pi(da, db)$ is on $\{(a, b)\ ;\ |b| < a\}$, $Q_a(db)$ is on $(-a, a)$. Finally one uses the Titchmarsh theorem (see Donoghüe (1969) p. 224) to get the result. ∎

One can test this theorem on Example A; (3.3) and (3.5) give for $0 < b < a$ and for a constant C :

$$C\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^{p-1}\frac{1}{a}=\int_b^a\frac{K_a(dr)}{\sqrt{r^2-b^2}}\,.$$

Denoting $y = 1-\left(\frac{b}{a}\right)^2$ and making the change of variable $x = 1-\left(\frac{r}{a}\right)^2$ in the integral, we get

$$C\,y^{p-1}=\int_0^y\frac{\tilde{K}(dx)}{\sqrt{y-x}} \tag{3.6}$$

where $\tilde{K}$ is the image of K_a. If $p > \frac{1}{2}$ the solution of (3.6) is $\tilde{K}(dx) = C_1 x^{p-\frac{3}{2}}\mathbb{1}_{(0,1)(x)}\,dx$. If $p = \frac{1}{2}$, it is $C_1\delta_0(dx)$. If $0 < p < \frac{1}{2}$, there are no signed measure $\tilde{K}$ satisfying (3.6) : we get back the Gindikin result (1.9) for $n = 2$.

The remainder of the paper is essentially devoted to the solution of (3.5) in the case of Example B, i.e. with $g_a(b)$ given by (3.4). We write it for $0 < b < a$:

$$\frac{2p}{\sqrt{\pi}}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\exp\frac{-p^2b^2}{a(a^2-b^2)}=\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{K_a(dr)}{\sqrt{r^2-b^2}} \tag{3.7}$$

Denoting $y = \dfrac{a^2}{a^2-b^2}$ and making the change of variable $x = \dfrac{a^2}{a^2-r^2}$, we get

$$2p\,y\,\exp-\frac{p^2}{a}(y-1)=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int_y^\infty\frac{\tilde{K}(dx)}{\sqrt{x-y}}\,, \tag{3.8}$$

where $\tilde{K}(dx)$ is the image, multiplied by $\sqrt{x}$, of $K_a(dr)$ by $r \mapsto x$. The next section solves integral equation (3.7) and an extension of it.

§4. An integral equation

Theorem 4.1 : *Let q be > 0 and n be an integer ≥ 2. Let μ_n be a signed Radon measure on $[0,\infty)$ such that*

$$\int_0^\infty\exp(-\lambda x)\,|\mu_n|(dx)$$

is finite for all $\lambda > 0$ and such that, for all $y > 0$:

$$y^{\frac{n}{2}}e^{-qy}=\frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\int_y^\infty(x-y)^{\frac{n-3}{2}}\exp(-qx)\,\mu_n(dx) \tag{4.1}$$

Then μ_n is unique, absolutely continuous and its density f_n is as follows :

(i) If $n = 2p$ is even, then f_n is a polynomial $x^p + g(x)$, with degree of $g < p$, and defined by

$$\int_0^\infty x^{p+k-\frac{3}{2}} \exp(-qx)\, f_n^{(k)}(x)\, dx = 0\,, \qquad k = 0, 1, \dots (p-1)\,. \tag{4.2}$$

(ii) If $n = 2p+1$ is odd, then

$$f_n(x) = (-q)^{-p} \exp(qy) \left(\frac{d}{dy}\right)^p \left(y^{p+\frac{1}{2}} \exp(-qy)\right) \tag{4.3}$$

Examples : $\quad f_2(x) = x - \dfrac{2}{q}\,, \qquad f_3(x) = x^{3/2} - \dfrac{3}{2q}\, x^{1/2}$

$$f_4(x) = x^2 - \frac{10}{3q}\, x + \frac{5}{4q^2}\,, \qquad f_5(x) = x^{5/2} - \frac{5}{q}\, x^{3/2} + \frac{15}{4q^2}\, x^{1/2} \tag{4.4}$$

Proof: We prove the uniqueness. If μ_n and μ'_n are solutions of (4.1), then $\beta = \mu_n - \mu'_n$ satisfies for all $y > 0$

$$\int_y^\infty (x-y)^{\frac{n-3}{2}} \exp(-qx)\, \beta(dx) = 0 \tag{4.5}$$

Multiplying (4.5) by y^{s-1}, with $s > 0$, integrating with respect to y on $(0, +\infty)$, and applying Fubini (since $\int_0^\infty \exp(-\lambda x)\, |\beta|(dx) < \infty$), we get for all $s > 0$

$$0 = \int_0^\infty e^{-qx} \beta(x) \int_0^x y^{s-1} (x-y)^{\frac{n-3}{2}} dy = \frac{\Gamma(s)\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(s + \frac{n-1}{2})} \int_0^\infty x^{s-1} e^{-qx} x^p \beta(dx)\,,$$

i.e. the Mellin transform of $\exp(-qx)\, x^p \beta(dx)$ is 0. This implies $\beta = 0$.

We now show the existence of a solution μ_n of (4.1) with $\mu_n(dx) = f_n(x)\, dx$, with f_n of $C^\infty(0, +\infty)$ class such that all its derivatives are slowly increasing, i.e. for all $\lambda > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \exp(-\lambda x) f^{(k)}(x) = 0$.
Now, changing x in $s = x - y$ in (4.1), we get

$$y^{\frac{n}{2}} = \frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty s^{\frac{n-3}{2}} \exp(-qs)\, f_n(y+s)\, ds\,. \tag{4.6}$$

Because of the postulated regularity of f_n, (4.6) can be derivated under the integral sign an arbitrary number of times.

(i) If $n = 2p$, p derivations of (4.6) yield

$$p! = \frac{q^{p-\frac{1}{2}}}{\Gamma(p-\frac{1}{2})} \int_0^\infty s^{p-\frac{3}{2}} \exp(-qs)\, f_n^{(p)}(y+s)\, ds\ .$$

Since $f_n^{(n)}(x) = p!$ satisfies this relation we can take $f_n = x^p + g$ where g has degree $< p$. Finally, writing $f_n(y+s) = \sum_{k=0}^p \frac{y^k}{k!} f_n^{(k)}(s)$, and identifying the polynomials in y leads to (4.2).

(ii) If $n = 2p+1$, induction on $k = 0, 1, \ldots, p-1$ shows from (4.1) that

$$(-q)^p \left(\frac{d}{dy}\right)^k (y^{p+\frac{1}{2}} \exp -qy) = \frac{(-1)^k}{(p-k-1)!} \int_y^\infty (x-y)^{p-1-k} \exp(-qx)\, f_n(x)\, dx\ .$$

Derivating this formula for $k = p-1$ once more gives (4.3). ∎

§5. $\exp\left(-\operatorname{Trace} p\sqrt{2A}\right)$ for $(2,2)$ symmetric matrices.

We now apply the previous theory to find $\tilde{\mu}(da, db, dc)$ such that if A is a positive $(2,2)$ symmetric matrix we have

$$\exp\left(-\operatorname{Trace} p\sqrt{2A}\right) = \int_{\mathbf{R}^3} \exp\left(-\operatorname{Trace} A \begin{pmatrix} a+b & c \\ c & a-b \end{pmatrix}\right) \tilde{\mu}(da, db, dc)\ . \tag{5.1}$$

In (4.1), do $n = 2$ and $q = p^2/a$ $(a > 0)$. From (4.4) we get

$$y \exp\left(-\frac{p^2}{a} y\right) = \frac{p}{\sqrt{\pi a}} \int_y^\infty e^{-\frac{p^2}{a}x} \left(x - \frac{2a}{p^2}\right) \frac{dx}{\sqrt{x-y}}$$

and from the uniqueness in Th. 4.1 we get that $\tilde{K}$ in (3.8) is

$$\tilde{K}(dx) = 2p^2\sqrt{a}\, \exp\left(-\frac{p^2}{a}(x-1)\right) \left(x - \frac{2a}{p^2}\right) 1\!\!1_{(0,+\infty)}(x)\, dx\ . \tag{5.2}$$

Thus $K_a(dr)$ in (3.7) is

$$K_a(dr) = 4p^2 a^{\frac{5}{2}} \exp\left(-\frac{p^2 r^2}{a(a^2-r^2)}\right) \left[\frac{a}{(a^2-r^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{p^2(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}\right] r\, 1\!\!1_{(0,a)}(r)\, dr\ . \tag{5.3}$$

$\nu_a(db, dc)$, as defined by (3.2), is the image of $K_a(dr)\frac{d\theta}{2\pi}$ by $(r, \theta) \mapsto (b, c) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, i.e.

$$\begin{aligned} \nu_a(db, dc) = &\frac{2p^2 a^{\frac{5}{2}}}{\pi} \exp\left(-\frac{p^2(b^2+c^2)}{a(a^2-b^2-c^2)}\right) \\ &\times \left[\frac{a}{(a^2-b^2-c^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{p^2(a^2-b^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\right] 1\!\!1_{b^2+c^2<a^2}(b, c)\, db\, dc \end{aligned} \tag{5.4}$$

and since $\tilde{\mu}(da, db, dc) = \pi(da)\, \nu_a(db, dc)$, with $\pi(da)$ given by (3.4), we get at last

$$\tilde{\mu}(da, db, dc) = \frac{2p^3 a}{\pi^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{p^2 a}{a^2-b^2-c^2}\right) \times \left[\frac{a}{(a^2-b^2-c^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{p^2(a^2-b^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\right] 1\!\!1_{\sqrt{b^2+c^2}<a}(a, b, c)\, da\, db\, dc$$

as satisfying (5.1).

One can observe that $\tilde{\mu}$ is never a positive measure. It is concentrated on the cone of revolution $\{(a, b, c); \sqrt{b^2+c^2} < a\}$ which is nothing but, with the parametrization introduced in §3, the cone of positive definite symmetric endomorphisms. The positive part of $\tilde{\mu}$ is concentrated inside the convex hull of one sheet of the hyperboloid :

$$\left\{(a, b, c)\,; \quad b^2 + c^2 - \left(a^2 - \frac{p^2}{4}\right)^2 + \frac{p^4}{16} = 0\right\}.$$

Note the difference with Example A where, from (1.9), $\tilde{\mu}$ is positive if p is big enough.

Finally, the above computation of $\tilde{\mu}$ shows that if $n \geq 3$, there is no positive measure $\nu(dx)$ on the space S of symmetric (n, n) matrices such that

$$\int_S \exp(-\operatorname{Trace} Ax)\, \nu(dx) = \exp -p \operatorname{Trace} \sqrt{2A}$$

for all A in the cone of symmetric positive definite matrices. To see it, observe that this formula would be true for A only positive thus for

$$A = \begin{pmatrix} a+b & c & 0 \\ c & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and this would imply that the positive measure ν is linearly projected on the non positive measure $\tilde{\mu}$.

§6. Extension to the Jordan algebra of the Lorentz cone.

Because of the complexity of the calculation, we have not been able to solve the problem of the title for $n \geq 3$. In this section we sketch a generalization of the problem, and we solve a significative specialization of it, extending section 5 and using calculations made in section 4.

The idea is to consider the space of symmetric endomorphisms as a particular instance of an Euclidean Jordan algebra. An excellent reference on the subject is the new book by Faraut and Koranyi (1994). This object is a Euclidean space S with scalar product $<a, b>$ and a bilinear symmetric product

$$S \times S \longrightarrow S \qquad\qquad (a, b) \longmapsto a \circ b,$$

such that there exists a neutral element e (i.e. $a \circ e = a$ for all a) and such that for all a, b, c, d in S, the following properties hold

$$(1) \qquad <a, b \circ c> = <a \circ b, c>$$

$$(2) \quad (a \circ b)\circ(c \circ d)+(a \circ d)\circ(b \circ c)+(a \circ c)\circ(b \circ d) = \big(a \circ (c \circ d)\big)\circ b+\big(a \circ (b \circ c)\big)\circ d+\big(a \circ (b \circ d)\big)\circ c.$$

In the case of the space S of symmetric endomorphisms of a Euclidean space E the product $a \circ b$ is $\frac{1}{2}(ab+ba)$. Replacing the real numbers by complex, quaternions and octonions give other instances of these algebras; we shall describe a fifth instance with the Jordan algebra of the Lorentz cone in a moment. One can prove that these five instance are essentially the only ones.

If S is such an algebra, one defines similarly two real functions called "determinant" and "trace" on S. Attached to S is a positive integer r called the "rank" of S. If S is the space of symmetric endomorphisms of E, then $r = \dim E$. In general we normalize such that

$$\frac{1}{r}\ \mathrm{Trace}\,(a \circ b) = <a, b> . \tag{6.1}$$

Again, if $I \subset \mathbb{R}$, one defines a suitable subset $S(I)$ of S and, for $f : I \to \mathbb{R}$, a map $\tilde{f} : S(I) \to S$. The problem of extending the Laplace transform of μ on $\mathbb{R}$ as in (1.7) to a $\tilde{\mu}$ on S such that an extension of (1.8) holds :

$$\exp \mathrm{Trace}\, \tilde{f}(a) = \int_S \exp\big(-\mathrm{Trace}\,(a \circ x)\big)\, \tilde{\mu}(dx) \tag{6.2}$$

can be raised. However, we shall be content here to consider only the Jordan algebra of the Lorentz cone which is the only one with rank $r = 2$ and the case $f(\lambda) = -p\sqrt{2\lambda}$, with $p > 0$.

We define now the Jordan algebra of the Lorentz cone by taking first a Euclidean space E with dimension $n \geq 2$, where the scalar product of $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is denoted by $\vec{a}.\vec{b}$ and the squared norm $\|\vec{a}\|^2 = \vec{a}^{\,2}$. On $S = \mathbb{R}\times E$ the scalar and the bilinear symmetric products of $a = (a_0, \vec{a})$ and $b = (b_0, \vec{b})$ are defined by

$$<a, b> = a_0 b_0 + \vec{a}.\vec{b} \qquad a \circ b = \big(<a, b>\, ,\ a_0\vec{b} + b_0\vec{a}\big) \tag{6.3}$$

and we call the following quantities $2a_0$ and $a_0^2 - \vec{a}^{\,2}$ the trace and the determinant of $a = (a_0, \vec{a})$. The set $C = \{a \in S\ ;\ a_0 > \|\vec{a}\|\}$ is called the Lorentz cone. If $E = \mathbb{R}^2$ with its canonical Euclidean structure, $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ is isomorphic to symmetric $(2, 2)$ real matrices by

$$\big(a_0\ ,\ (a_1, a_2)\big) \longmapsto \begin{bmatrix} a_0+a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0-a_1 \end{bmatrix} .$$

Now if $a \in \overline{C} = \{a \in S\ ;\ a_0 \geq \|\vec{a}\|\}$, there exists a unique $u = u(a)$ in $\overline{C}$ such that $u \circ u = a$ (or $u = \sqrt{a}\,$), which is given by

$$u_0 = u_0(a) = \left[\tfrac{1}{2}(a_0+\sqrt{\det a})\right]^{1/2} \qquad \vec{u} = \vec{u}(a) = \frac{\vec{a}}{2u_0} . \tag{6.4}$$

Therefore the aim of this section is to compute the signed measure $\tilde{\mu}$ on $S = \mathbb{R} \times E$ such that (6.2) holds when $f = -p\sqrt{2\lambda}$, i.e. for $(a_0, \vec{a})$ in $\overline{C}$:

$$\exp\left(-2p\left(a_0 + \sqrt{a_0^2 - \vec{a}^2}\right)^{1/2}\right) = \int_S \exp\left(-2(a_0 x_0 + \vec{a}.\vec{x})\right) \tilde{\mu}(dx) \tag{6.5}$$

Note that no special knowledge of Jordan algebras is required to understand and solve the problem (6.5) : previous explanations just gave the motivation and the background of it.

We now imitate the previous sections : doing $\vec{a} = \vec{0}$ in (6.5) gives the Laplace transform of the image $\pi(dx_0)$ of $\tilde{\mu}$ by $(x_0, \vec{x}) \mapsto x_0$. We can also equip E with an orthonormal basis e and identify E with $\mathbb{R}^n$. Then doing $\vec{a} = (1, 0, \ldots 0)$ in (6.5) gives the Laplace transform of the image $\pi(dx_0, dx_1)$ of $\tilde{\mu}$ by $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_0, x_1)$, i.e.

$$\exp -2p\left(a_0 + \sqrt{a_0^2 - a_1^2}\right)^{1/2} = \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-2a_0 x_0 - 2a_1 x_1\right) \pi(dx_0, dx_1)$$

Writing $\lambda_1 = a_0 + a_1$ and $\lambda_2 = a_0 - a_1$ shows

$$\exp -p\left(\sqrt{2\lambda_1} + \sqrt{2\lambda_2}\right) = \int \exp\left(-x_0(\lambda_1 + \lambda_2) - x_1(\lambda_1 - \lambda_2)\right) \pi(dx_0, dx_1) \,.$$

Finally if $\pi(dx_0, dx_1) = \pi(dx_0) Q_{x_0}(dx_1)$ one sees that $\pi(dx_0)$, $\pi(dx_0, dx_1)$ and $Q_{x_0}(dx_1)$ are given by formulas (3.4), where (x_0, x_1) replaces (a, b).

Now $\tilde{\mu}$ is invariant by the transformations g_u of S defined by $g_u(a_0, \vec{a}) = (a_0, u(\vec{a}))$ when u varies in $\mathbb{O}(E)$. Thus

$$\tilde{\mu}(dx_0, d\vec{x}) = \pi(dx_0)\, \nu_{x_0}(d\vec{x}) \,,$$

where $\nu_{x_0}(d\vec{x})$ is invariant by $\mathbb{O}(E)$.

There exists a signed measure $K_{x_0}(dr)$ on $(0, +\infty)$ such that ν_{x_0} is the image of $K_{x_0}(dr)\, \sigma(d\theta)$ (where σ is the uniform probability measure on the unit sphere $S(E)$ of E) by $(r, \theta) \mapsto \vec{x} = r\theta$.

Coming back to the basis, and writing $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, we see that $Q_{x_0}(dx_1)$ is the image of $K_{x_0}(dr)\, \sigma(d\theta)$ by $(r, \theta) \mapsto \theta_1$. Denoting by $\alpha(d\theta_1)$ the image of $\sigma(d\theta)$ by $\theta \mapsto \theta_1$, the known Q_{x_0} is the convolution in the multiplicative group $\mathbb{R}^*$ of the unknown $K_{x_0}(dr)$ with the known $\alpha(d\theta_1)$. Actually, the computation of $\alpha(d\theta_1)$ is quite standard; the fastest way to proceed is to observe that $\sigma(d\theta)$ is the distribution of $\vec{X}/\|\vec{X}\|$, where $\vec{X}$ is Gaussian distributed in E with mean $\vec{0}$ and covariance identity. Thus the distributions of θ_1^2 and of $X_1^2(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2)^{-1}$ are

$$\beta^{(1)}_{\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}} = t^{-1/2}(1-t)^{(n-3)/2} \mathbb{1}_{(0,1)}(t) \frac{dt}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \,.$$

Since the random variable θ_1 is symmetric, then :

$$\alpha(d\theta_1) = (1 - \theta_1^2)^{(n-3)/2} \mathbb{1}_{(-1,1)}(\theta_1) \frac{d\theta_1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \,.$$

Working, as in Theorem 3.2, in $\mathbb{R}_+^*$ rather than $\mathbb{R}^*$, the analogue of the integral equations (3.5) and (3.7) is :

$$\frac{2p}{\sqrt{\pi}}\left(1-\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \exp-\frac{p^2x_1^2}{x_0(x_0^2-x_1^2)} = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)}\int_{x_1}^{x_0}(r^2-x_1^2)^{\frac{n-3}{2}}\frac{K_{x_0}(dr)}{r^{n-2}} .$$

As in (3.7) we make the change of variables :

$$x=\frac{x_0^2}{x_0^2-r^2} \qquad\qquad y=\frac{x_0^2}{x_0^2-x_1^2}$$

and we get the generalization of (3.8) :

$$2p\,y^{\frac{n}{2}}\exp-\frac{p^2}{x_0}(y-1)=\frac{x_0^{n-3}\sqrt{\pi}}{B\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)}\int_y^\infty(x-y)^{\frac{n-3}{2}}\tilde{K}(dx) , \tag{6.6}$$

where $\tilde{K}(dx)$ is the image, multiplied by $x^{(3-n)/2}$, of $r^{2-n}K_{x_0}(dr)$ by $r\mapsto x$. Equation (6.6) is essentially solved by Theorem 4.1, and keeping the notation f_n used there we get :

$$\tilde{K}(dx)=\frac{2p^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x_0^{\frac{7-3n}{2}}f_n(x)\exp\left(-\frac{p^2}{x_0}(x-1)\right)\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)\,dx .$$

Taking the image of $x^{(n-3)/2}\,\tilde{K}(dx)$ by $x\mapsto r$, we get :

$$K_{x_0}(dr)=\frac{4p^nx_0^{\frac{5-n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(x_0^2-r^2)^{-\frac{n-3}{2}}f_n\left(\frac{x_0^2}{x_0^2-r^2}\right)\exp\left(-\frac{p^2r^2}{x_0(x_0^2-r^2)}\right)r\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(r)\,dr .$$

Now, $\nu_{x_0}(d\vec{x})$ is the image of $K_{x_0}(dr)\,\sigma(d\theta)$ by $(r,\theta)\mapsto\vec{x}=r\theta$. Recall that the image of $r^{n-1}dr\,\sigma(d\theta)$ by $(r,\theta)\mapsto\vec{x}=r\theta$ is "a" Lebesgue measure of E, i.e. is invariant by translation. However, to get "the" Lebesgue measure of E, i.e. the only one which gives mass 1 to any unit cube built on an orthonormal basis, we have to introduce a factor obtained by the computation of the volume of the unit ball. We skip this standard computation and obtain that $d\vec{x}$ is the image of

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}r^{n-1}\,dr\;\sigma(d\theta) ,$$

by $(r,\theta)\mapsto r\theta=\vec{x}$. Thus we get :

$$\nu_{x_0}(d\vec{x})=\frac{2p^nx_0^{\frac{5-n}{2}}}{\pi^{\frac{n}{2}}}(x_0^2-\vec{x}^2)^{\frac{3-n}{2}}r^{2-n}f_n\left(\frac{x_0^2}{x_0^2-\vec{x}^2}\right)\exp-\frac{p^2\vec{x}^2}{x_0^2-\vec{x}^2}\mathbb{1}_{\|\vec{x}\|<x_0}(\vec{x})\,d\vec{x} .$$

And the final solution of (6.5) is :

$$\tilde{\mu}(dx_0, d\vec{x}) = \frac{2p^{n+1}}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} x_0^{\frac{2-n}{2}} \|\vec{x}\|^{2-n} (x_0^2 - \vec{x}^2)^{\frac{3-n}{2}} f_n\Big(\frac{x_0^2}{x_0^2 - \vec{x}^2}\Big)$$
$$\times \exp - \frac{p^2}{x_0(x_0^2 - \vec{x}^2)} \mathbb{1}_{\|\vec{x}\| < x_0}(x_0, \vec{x})\, dx_0\, d\vec{x} ,$$

where f_n is defined in Theorem 4.1.

References

Bernadac, E. (1992), "Fractions continues sur les matrices symétriques réelles et la loi gaussienne inverse", *C. R. Acad. Sc. Paris 315,* Série I, 329–332.

Bernadac, E. (1993), "Fractions continues aléatoires sur un cône symétrique", *C. R. Acad. Sc. Paris 316,* Série I, 859–864.

Bernadac, E. (1995), "Random continued fractions and inverse Gaussian distribution on a symmetric cone", *J. Theor. Prob. 8,* 221–260.

Casalis, M. and Letac, G. (1994), "Characterization of the Jorgensen set in the generalized linear model", *Test 3,* 145–162.

Donoghüe, W. (1969), *"Distributions and Fourier transforms"*, Academic Press, New York.

Faraut, J. and Koranyi, A. (1994), *"Analysis on symmetric cones"*, Oxford University Press, Cambridge.

Feller, W. (1970), *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. II, 2d ed. Wiley, New York.

Gindikin, S. (1975), "Invariant generalized functions in homogeneous spaces", *J. of Funct. Anal. and Applications 9,* 50–52.

Letac, G. and Seshadri, V. (1983), "A characterization of the inverse Gaussian distribution by continued fractions", *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 62,* 485–489.

Watson, G. N. (1966), *"A treatise on the theory of Bessel functions"*, 4th ed. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Whittaker, E. T. and Watson, G. N. (1927), *"Modern Analysis"*, Cambridge Univ. Press.

Laboratoire de Statistique et Probabilités
Université Paul Sabatier
31 062 TOULOUSE

B. Maisonneuve

Excursions chevauchant un temps aléatoire quelconque

Astérisque, tome 236 (1996), p. 215-226
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__215_0>

Excursions chevauchant un temps aléatoire quelconque

B. Maisonneuve

Résumé. — Nous étudions diverses lois conditionnelles de l'excursion (d'un processus de Markov) chevauchant un temps aléatoire quelconque.

Cet exposé constitue la rédaction de résultats présentés pour l'essentiel au Seminar on Stochastic Processes de Gainesville en 1985 et aux Journées de Luminy 1985. Il s'agit aussi d'un petit cadeau d'anniversaire à mes maîtres P.A. Meyer (qui a manifesté plusieurs fois son intérêt pour une telle rédaction) et J. Neveu.

1. Introduction

Considérons un processus de Ray X à valeurs dans E, un borélien B de $E \times E$ et un intervalle de temps aléatoire maximal $]g, d[$ sur lequel (X_-, X) ne visite pas B; cet intervalle d'excursion sera en général celui qui "chevauche" un temps aléatoire donné T.

Nous nous proposons d'exprimer la loi du processus $(X_{g+t})_{t\geq 0}$ conditionnée par le passé de g, à l'aide des mesures de sortie de l'ensemble aléatoire $M = \overline{\{t > 0 : (X_{t-}, X_t) \in B\}}$. La formule principale obtenue au §**3** généralise diverses formules connues pour des temps T particuliers. Nous étudierons ensuite la loi de l'excursion e basée sur $]g, d[$ conditionnée simultanément par le passé de g et le futur de d. Nous montrerons que cette loi ne dépend que de $(X_g, d-g, X_d)$ dans diverses situations, en particulier dans celles étudiées par Getoor et Sharpe, mais à la différence de [5], [6], [7] nous ne ferons aucune hypothèse de dualité.

Signalons aussi que l'utilisation du système de sortie $(\mathcal{F}_{D_t})$ prévisible défini en [13] permet de remplacer le passé de g par son passé strict et que le conditionnement par rapport au passé strict de Weil [15] (voir aussi [12]) permet de remplacer le futur de d par le futur large, prenant en compte X_{d-}.

2. Notations générales

A. — Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ la réalisation canonique d'un processus de Ray d'espace d'états E (compact métrisable). La tribu borélienne et la tribu des ensembles universellement mesurables de E sont notées $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$. Sur l'ensemble Ω (des applications càd làg de $\mathbf{R}_+$ dans E), la tribu engendrée par les coordonnées X_t et sa complétée universelle sont notées $\mathcal{F}^o$ et $\mathcal{F}^*$. Dans la suite, P désigne une mesure P^μ, correspondant à une mesure initiale fixée μ, et les propriétés énoncées p.s. le seront relativement à P (sauf mention explicite d'une autre mesure).

Pour $t \in \mathbf{R}_+$ on définit les opérateurs a_t, k_t *d'arrêt* et de *meurtre* des trajectoires à t :

$$X_s(a_t) = X_{s\wedge t},\ X_s(k_t) = X_s \text{ si } s < t,\ \delta \text{ si } s \geq t\ ,$$

où δ est un point fixé, considéré comme cimetière. δ n'est pas supposé absorbant. On pose $X_\infty = \delta$.

Pour $s \in \mathbf{R}_+$, $\omega, \omega' \in \Omega$ on note $\omega|s|\omega'$ la trajectoire $w \in \Omega$ identique à ω ou à $k_s\omega$ sur $[0, s[$ et telle que $\theta_s w = \omega'$.

B. — On considère un fermé aléatoire M de $(0,\infty)\times\Omega$ optionnel, homogène et tel que la v.a. $R = \inf M$ soit $\mathcal{F}^*$-mesurable, par exemple l'ensemble M de l'introduction. On note

$$\begin{aligned}
&D_t = \inf\{s > t : s \in M\}\ \ (\inf\emptyset = +\infty),\ R_t = D_t - t,\\
&G_t = \sup\{s \leq t : s \in M\}\ \ (\sup\emptyset = 0),\ A_t = t - G_t,\\
&G^o = \{t \in M \cup \{0\} : D_t > t\},\ \ G = G^o\backslash\{0\},\\
&\mathcal{R}_t = \mathcal{F}_{D_t}.
\end{aligned}$$

Pour tout processus $(\mathcal{F}_t)$ optionnel (π_t), à valeurs dans un espace arbitraire $(W, \mathcal{G})$ et toute fonction universellement mesurable positive f sur $W \times \Omega$ on peut écrire

$$E\left(\sum_{s\in G^o} f(\pi_s, \theta_s)\right) = \int P(d\omega) \int L^o(\omega, ds)\widehat{P}^{X_s(\omega)}\left(f(\pi_s(\omega), \bullet)\right) \tag{2.1}$$

où $(L, \widehat{P})$ est un système de sortie de M et où L^o désigne la mesure aléatoire $L(ds) + I_{\{R>0\}}\varepsilon_o(ds)$ sur $\mathbf{R}_+$ (voir [9] et [10] (5)). Nous pouvons supposer que pour tout $x \in E$ la mesure de sortie $\widehat{P}^x$ est portée par $\{X_0 = x,\ R > 0\}$.

La formule (2.1) est encore valable pour tout processus $(\mathcal{R}_t)$ prévisible (π_t) à condition de remplacer le système de sortie optionnel $(L, \widehat{P})$ par le système de sortie $(\mathcal{F}_{D_t})$ prévisible défini en [13], que nous noterons $(\Lambda, \overline{P})$; il faut alors remplacer X_s par X^D_{s-} dans le membre de droite de (2.1) ($X^D_s = X_{D_s}$, $X^D_{0-} = X_0$). Nous pouvons encore supposer que pour tout $x \in E$, la mesure $\overline{P}^x$ est portée par $\{R > 0\}$ (mais non par $\{X_0 = x\}$).

C. — Dans toute la suite T désignera un *temps aléatoire $\mathcal{F}^*$ mesurable fixé*, les temps G_T, D_T seront notés g, d et *nous supposerons que $T < d$ sur $\{T < \infty\}$* ou de manière équivalente que $g \in G^o$ sur $\{g < \infty\}$ (cette hypothèse est par exemple réalisée si $g < T$ sur $\{g < \infty\}$). L'excursion chevauchant T sera notée e; précisément on a : $e = k_R \circ \theta_g$.

3. Conditionnement par rapport au passé de g

Rappelons que la tribu $\mathcal{F}_g$ du passé de g est engendrée par les variables Z_g, où Z est un processus optionnel positif indexé par $\overline{\mathbf{R}}_+$. Étant donnée une mesure ν sur $(\Omega, \mathcal{F}^o)$ et deux ensembles ν-mesurables B, C on pose

$$\nu(B \mid C) = \frac{\nu(B \cap C)}{\nu(C)} \tag{3.1}$$

en convenant que ce quotient est nul si $\nu(C) = 0$ ou $+\infty$.

La formule fondamentale est donnée par le théorème suivant (c'est l'analogue de la formule générale de conditionnement par rapport au passé strict de [12]). Pour $\omega \in \{g < \infty\}$, ν^ω désigne la mesure $\widehat{P}^{X_{g(\omega)}}$ et A^ω désigne l'application $T(\omega|g(\omega)|\bullet) - g(\omega)$ de Ω dans $]-\infty, +\infty]$.

3.2. THÉORÈME. — *Pour $B \in \mathcal{F}^*$ on a p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$*

$$P(\theta_g \in B \mid \mathcal{F}_g)(\omega) = \nu^\omega(B \mid 0 \leq A^\omega < R) . \tag{3.3}$$

De plus, si T est un temps d'arrêt de la filtration rapide $\mathcal{R}_t = \mathcal{F}_{D_t}$, on a $\nu^\omega(A^\omega < 0) = 0$ p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$ et par suite la condition $0 \leq A^\omega$ peut être supprimée de (3.3).

3.4. *Remarque.* — La formule (3.3) peut être généralisée de la manière suivante : si (π_t) est comme dans (2.2) et si f est universellement mesurable ≥ 0 sur $W \times \Omega$ on a p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$

$$E[f(\pi_g, \theta_g) \mid \mathcal{F}_g](\omega) = \nu^\omega\left(f(\pi_g(\omega), \bullet) \mid 0 \leq A^\omega < R\right) . \tag{3.5}$$

Avec les conventions utilisées dans (3.1) ceci montre que $0 < \nu^\omega(0 \leq A^\omega < R) < \infty$ p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$.

Démonstration. — Établissons (3.5). Si $g(\omega)<\infty$, $g(\omega)$ est l'unique $s \in G^o(\omega)$ tel que $s \leq T(\omega) < D_s(\omega)$ ou $0 \leq T(\omega|s|\theta_s\omega) - s < R(\theta_s\omega)$ et pour Z optionnel ≥ 0 on a d'après (2.1)

$$E[Z_g f(\pi_g, \theta_g),\ g < \infty] = \int P(d\omega) \int_{\mathbf{R}_+} L^o(\omega, ds) Z_s(\omega) \widehat{P}^{X_s(\omega)}\left(f(\pi_s\omega, \bullet), C_s^\omega\right)$$

où $C_s^\omega = \{0 \leq T(\omega|s|\bullet) - s < R\}$. Il en résulte que $P(d\omega)L^o(\omega, ds)$ p.p. on a $\widehat{P}^{X_s(\omega)}(C_s^\omega) < \infty$ et que le second membre s'écrit

$$\int P(d\omega) \int_{\mathbf{R}_+} L^o(\omega, ds) Z_s(\omega) \widehat{P}^{X_s(\omega)}\left(f(\pi_s\omega, \bullet) \mid C_s^\omega\right) \widehat{P}^{X_s(\omega)}(C_s^\omega) = E[Z_g \Phi,\ g < \infty],$$

où $\Phi(\omega)$ désigne le second membre de (3.5).

Lorsque T est un *temps d'arrêt* de $(\mathcal{R}_t)$, $d = D_T$ est un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t)$ et si $g(\omega) < \infty$, le point $g(\omega)$ est le seul $s \in G^o(\omega)$ tel que $s < d(\omega)$ et $T(\omega|s|\theta_s\omega)-s < R(\theta_s\omega)$. En reprenant le calcul précédent avec $Z_s I_{\{s<d\}}$ en place de Z_s on trouve (3.5) avec la condition $A^\omega < R$ en place de $0 \leq A^\omega < R$ et il en résulte comme dans la remarque 3.4 que $0 < \nu^\omega(A^\omega < R) < \infty$ p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$. Comme $g \leq T = T(k_g|g|\theta_g)$, il en découle aussi que

$$0 = P\{T < g < \infty\} = \int_{\{g<\infty\}} P(d\omega)\nu^\omega(A^\omega < 0 \mid A^\omega < R)$$
$$= \int_{\{g<\infty\}} P(d\omega)\frac{\nu^\omega(A^\omega < 0)}{\nu^\omega(A^\omega < R)} ,$$

d'où $\nu^\omega(A^\omega < 0) = 0$ p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$. ∎

3.6. *Remarques.* — Il est intéressant de noter que p.s. (ω)

$$\nu^\omega\,(g(\omega) \notin G^o(\omega|g(\omega)|\bullet)) = 0 .$$

En effet, avec la notation C_s^ω de la démonstration précédente,

$$\int_{\{g<\infty\}} P(d\omega)\nu^\omega\,(g(\omega)\notin G^o(\omega|g(\omega)|\bullet))$$
$$= \int P(d\omega)\int L^o(\omega, ds)\widehat{P}^{X_s(\omega)}\,(s\notin G^o(\omega|s|\bullet))\,\widehat{P}^{X_s}(C_s^\omega) .$$

Cette expression est nulle car

$$\int P(d\omega)\int L^o(\omega, ds)\widehat{P}^{X_s(\omega)}(s\notin G^o(\omega|s|\bullet)) = P^\mu\left(\sum_{s\in G^o} I_{s\notin G^o}\right) = 0 .$$

Il résulte de cette remarque que la condition $0 \leq A^\omega < R$ intervenant dans (3.3) peut être remplacée par $A^\omega = 0$ si $T \in G^o$ sur $\{T < \infty\}$ et par $0 < A^\omega < R$ si $g < T$ sur $\{g < \infty\}$; si T est un temps d'arrêt de $(\mathcal{R}_t)$ tel que $g < T$ sur $\{g < \infty\}$, on a aussi $\nu^\omega(A^\omega \leq 0) = 0$ p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$. *Ces remarques seront souvent utilisées dans les exemples qui suivent.*

3.7. *Exemples.*

1) Si le temps T est *strictement terminal* (au sens où $T \circ \theta_t = T-t$ sur $\{T \geq t\}$), la condition $A^\omega(\omega') \geq 0$ entraîne $A^\omega(\omega') = T(\omega')$, donc si T est de plus un t. d'a. de $(\mathcal{R}_t)$ il résulte du théorème 3.2 que

$$P(\theta_g \in B \mid \mathcal{F}_g) = \widehat{P}^{X_g}(B \mid T < R) \;\text{ sur }\; \{g < \infty\}. \tag{3.8}$$

Dans ce cas $\mathcal{F}_g$ et θ_g sont *conditionnellement indépendants étant donné* X_g.

Par exemple considérons le processus $Y_t = (R_t, a_R \circ \theta_t) = (R, a_R) \circ \theta_t$. Ce processus, à valeurs dans $\overline{\Omega} = \overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, est homogène, adapté à $(\mathcal{R}_t)$ et càd làg, Ω étant muni de la topologie de Skorohod ou de la topologie de la convergence en mesure ([11], III.1). Nous pouvons alors prendre $T = S_{\{S<D_S\}}$, où $S = \inf\{t \geq 0 : Y_t \in B\}$, B étant un borélien de $\overline{\Omega}$. Par exemple, pour $T = \inf\{t : R_t > a\}$ ($a \in]0, \infty[$) les conditions $T < R$ et $R > a$ sont équivalentes et l'on retrouve une formule bien connue :

$$P(\theta_g \in B \mid \mathcal{F}_g) = \widehat{P}^{X_g}(B \mid R > a) \ . \tag{3.9}$$

Noter que $]g, d[$ est ici le premier intervalle contigu à M de longueur $> a$.

2) Si le temps T est *terminal* ($T \circ \theta_t = T - t$ sur $\{T > t\}$), la condition $A^\omega(\omega') > 0$ entraîne $A^\omega(\omega') = T(\omega')$, donc, si de plus T est un t. d'a. de $(\mathcal{R}_t)$ tel que $g < T$ sur $\{g < \infty\}$, on obtient encore la formule (3.8). On retrouve ainsi un résultat de Getoor et Sharpe [6] (cas d'un t. d'a. de $(\mathcal{F}_t)$), étendu par Boutabia et Maisonneuve [1] aux t. d'a. de $(\mathcal{R}_t)$.

3) Si T est un *temps de retour* ($T \circ \theta_t = (T - t)_+$) tel que $g < T$ sur $\{g < \infty\}$, la condition $0 < A^\omega(\omega') < R(\omega')$ équivaut à $0 < T(\omega') < R(\omega')$, donc (3.3) s'écrit

$$P(\theta_g \in B \mid \mathcal{F}_g) = \widehat{P}^{X_g}(B \mid 0 < T < R) \text{ sur } \{g < \infty\} \ ,$$

et nous retrouvons une formule de Getoor [5], avec la même conséquence (sur l'indépendance conditionnelle de $\mathcal{F}_g$ et θ_g) que précédemment.

4) Soit b_t l'opérateur de "départ" à t défini par $X_s(b_t) = X_{s \vee t}$ et supposons que $\{T \geq t\} \in b_t^{-1}(\mathcal{F}^*)$ pour tout t. On a alors $\{T \geq t\} = \{T(b_s) \geq t\}$ pour $s \leq t$ à cause de l'idempotence des b_s et, si $g(\omega) < \infty$,

$$\{0 \leq A^\omega < R\} = \{0 \leq T(\omega_0 | g(\omega) | \cdot) - g(\omega) < R\} \ , \tag{3.10}$$

ω_0 étant un point fixé de Ω. En écrivant la formule (3.3), on obtient l'indépendance conditionnelle de $\mathcal{F}_g$ et θ_g relativement à (g, X_g).

5) Si T satisfait à $\{T > t\} \in b_t^{-1}(\mathcal{F}^*)$ et si $g < T$ sur $\{g < \infty\}$, on a de la même manière

$$\{0 < A^\omega < R\} = \{0 < T(\omega_0 | g(\omega) | \cdot) - g(\omega) < R\} \ ,$$

avec la même conséquence qu'au **4)**. Nous avons ainsi retrouvé un autre résultat de Getoor [5] (les temps envisagés ici ne sont autres que les "*forward times*" de [5], car b_t et θ_t engendrent la même tribu).

6) Si $t \in \mathbf{R}_+$ et $T \equiv t$ sur $\{G_t < t\}$, $+\infty$ sur $\{G_t = t\}$, la condition $A^\omega < R$ s'écrit $R > A_t(\omega)$ $(= t - G_t(\omega))$ si $g(\omega) < \infty$ et l'on retrouve la formule bien connue

$$P(\theta_{G_t} \in B \mid \mathcal{F}_{G_t})(\omega) = \widehat{P}^{X_{G_t}(\omega)}(B \mid R > A_t(\omega)) \tag{3.11}$$

p.s. (ω) sur $\{G_t < t\}$.

Supposons plus généralement que T soit un *temps d'arrêt de la filtration lente* $\mathcal{L}_t = (\mathcal{F}_{G_t})_+$. Comme tout élément de $\check{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{G_t}$ est P-p.s. égal à un élément de $\mathcal{L}_t^o = \mathcal{T}(G_t, a_{G_t})$, un raisonnement classique ([3], XIV 38) montre que T est P-p.s. égal à un t. d'a. de $(\mathcal{L}_{t+}^o)$. Nous supposerons donc que T lui-même est un t. d'a. de $(\mathcal{L}_{t+}^o)$. Alors pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $I_{\{T<t\}}$ s'écrit $f_t(G_t, a_{G_t})$ à l'aide d'une fonction f_t sur $\mathbf{R}_+ \times \Omega$. Soient ω, $\omega' \in \Omega$ tels que $g(\omega) \in G^o(w)$, où $w = (\omega|g(\omega)|\omega')$, et $X_0(\omega') = X_g(\omega)$. Les conditions $T(w) < g(\omega) + R(\omega')$ et $T(\omega) < g(\omega) + R(\omega')$ sont alors équivalentes (par exemple la première entraîne que pour $t \in]g(\omega), g(\omega) + R(\omega')[$ on a $(G_t, a_{G_t})(w) = (G_t, a_{G_t})(\omega)$, donc $T(\omega) < t$), et la formule (3.3) s'écrit

$$P(\theta_g \in B \mid \mathcal{F}_g)(\omega) = \nu^\omega\,(B \mid R > A_T(\omega)) \tag{3.12}$$

p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$, où $A_T(\omega) = T(\omega) - g(\omega)$. Cette formule reste valable pour un t. d'a. T de $(\mathcal{L}_t)$ tel que $T < d$ sur $\{T < \infty\}$ et en particulier pour un temps T de $(\mathcal{L}_t)$ tel que $g < T$ sur $\{g < \infty\}$. Par ailleurs dans ce dernier cas on a aussi ([10] et [4], XX61)

$$P(\theta_g \in B \mid \mathcal{L}_T)(\omega) = \nu^\omega\,(B \mid R > A_T(\omega)) \tag{3.13}$$

p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$. Il résulte des égalités (3.12) et (3.13) que $E(H) \mid \mathcal{F}_g) = E(H \mid \mathcal{L}_T)$ pour H mesurable ≥ 0, donc que $\mathcal{L}_T = \mathcal{F}_g$. *Pour un temps d'arrêt général* T *de* $(\mathcal{L}_t)$ *on en déduit l'égalité*

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{T}\,(\mathcal{F}_g, \{g < T\}) = \check{\mathcal{F}}_T\ . \tag{3.14}$$

Dans [14] Pitman affirme que pour un t. d'a. T de $(\check{\mathcal{F}}_t)$ on a $\check{\mathcal{F}}_T = \mathcal{F}_g$, où $g = G_T$, mais son théorème de représentation 6.1 n'est établi que sur $\{g < T\}$ et montre seulement que $\check{\mathcal{F}}_T$ et $\mathcal{F}_g$ ont même trace sur $\{g < T\}$ (ce que l'on retrouve ici d'après (3.14)).

4. Conditionnement par rapport à $\mathcal{R}_{g-}$

Tout ce qui précède (à part les exemples utilisant la propriété $\widehat{P}^x(X_0 \neq x_0) = 0$) peut être adapté au conditionnement par rapport à $\mathcal{R}_{g-}$: il suffit de remplacer $(L, \widehat{P})$ par $(\Lambda, \overline{P})$ et X_g par X_{g-}^D dans les formules. Noter que

$$X_{g-}^D = \begin{cases} X_{g-} & \text{sur } \{g \in G^o \backslash I\} \\ X_g & \text{sur } \{g \in I\} \end{cases},$$

I désignant l'ensemble des points isolés de $M \cup \{0\}$. Par exemple la formule (3.3) devient

$$P(\theta_g \in B \mid \mathcal{R}_{g-})(\omega) = \overline{\nu}^\omega(B \mid 0 \leq A^\omega < R) \text{ p.s. } (\omega) \text{ sur } \{g < \infty\} \tag{4.1}$$

où $\overline{\nu}^\omega$ désigne la mesure $\overline{P}^{X_{g-}^D(\omega)}$. Dans le cas d'un *temps d'arrêt de* $\mathcal{R}_t$, la condition $0 \leq A^\omega$ est inutile dans cette formule; la démonstration nécessite ici une légère modification : on remarque que si $g(\omega) < \infty$, le point $g(\omega)$ est le seul $s \in G^o(\omega)$ tel que $s \leq T(\omega)$ et $T(\omega)|s|\theta_s\omega) - s < R(\theta^s\omega)$ et l'on travaille avec le processus $\mathcal{R}$ prévisible $Z_s I_{\{s \leq T\}}$, où Z est $\mathcal{R}$ prévisible. Dans les situations des exemples 3.7, **1)**, **2)** et **3)** on observe maintenant l'indépendance conditionnelle de $\mathcal{R}_{g-}$ ($= \mathcal{F}_{g-}$ lorsque $P(g \in I) = 0$) et θ_g relativement à X^D_{g-} (X_{g-} lorsque $P(g \in I) = 0$).

Considérons par exemple un temps T de la forme $T = S_{\{S \in G^o\}}$, où $S = \inf\{t \in G : (X^D_{t-}, Y_t) \in H\}$, H étant un borélien de $E \times \overline{\Omega}$ (voir 3.7, **1)** pour la définition de Y). Nous avons alors

$$(4.2) \qquad \begin{aligned} P(\theta_g \in B \mid \mathcal{R}_{g-})(\omega) &= \overline{\nu}^\omega(B \mid A^\omega = 0) \\ &= \overline{\nu}^\omega(B \mid (X^D_{g-}(\omega), Y_0) \in H) \end{aligned}$$

p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$, grâce aux remarques 3.6. Si l'on remplace S par $S = \sup\{t \in G : (X^D_{t-}, \theta_t) \in A\}$ dans cet exemple, avec $A \subset E \times \Omega$, on obtient

$$(4.3) \qquad P(\theta_g \in B \mid \mathcal{R}_{g-})(\omega) = \overline{\nu}^\omega \left(B \mid (X^D_{g-}(\omega), \theta_0) \in A, S = 0\right) \ .$$

Dans les deux cas $\mathcal{R}_{g-}$ et θ_g sont conditionnellement indépendants étant donné X^D_{g-}. Ces résultats sont évidemment à rappprocher de ceux de [12].

5. Conditionnement par rapport à $(\mathcal{F}_g, d, \theta_d)$

Les lois conditionnelles étudiées dans ce paragraphe vont faire intervenir les mesures $P^{x,\ell,y}$ fournies par le lemme suivant (et déjà introduites dans [1]). Nous poserons

$$\widehat{R} = (R, X_R) \ .$$

5.1. Lemme. — *Il existe une famille $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbf{R}}_+} \otimes \mathcal{E}$ mesurable $(P^{x,\ell,y})$ de mesures sur $(\Omega, \mathcal{F}^o)$, de masses 0 ou 1, telles que pour $(x, \ell, y) \in E \times \overline{\mathbf{R}}_+ \times E$ et $A, B \in \mathcal{F}^o$*

(i) $\widehat{P}^x(A \mid \widehat{R}) = P^{x,\widehat{R}}(A) \qquad \widehat{P}^x$*-p.p.*,

(ii) $P^{x,\ell,y}(a_\ell \in A, \theta_\ell \in B) = P^{x,\ell,y}(a_\ell \in A) P^y(B)$.

Démonstration. — On a $\widehat{P}^x(R = 0) = 0$ et $\widehat{P}^x(1 - e^{-R}) \leq 1$; comme $(\Omega, \mathcal{F}^o)$ est un bon espace, et que la tribu $\mathcal{B}_{\overline{\mathbf{R}}_+} \otimes \mathcal{E}$ est séparable, on peut trouver une famille de probabilités $(P^{x,\ell,y})$ ayant la mesurabilité indiquée et satisfaisant à *(i)*. Fixons x, A, B et notons $\varphi(\ell, y)$, $\psi(\ell, y)$ les membres de *(ii)* relatifs à cette famille. Pour toute fonction $h \in (\mathcal{B}_{\overline{\mathbf{R}}_+} \otimes \mathcal{E})_+$ on a

$$\begin{aligned} \widehat{P}^x\left(h(\widehat{R})\varphi(\widehat{R})\right) &= \widehat{P}^x\left(h(\widehat{R}) I_A(a_R) I_B(\theta_R)\right) \\ &= \widehat{P}^x\left(h(\widehat{R}) I_A(a_R) P^{X_R}(B)\right) \\ &= \widehat{P}^x\left(h(\widehat{R})\psi(\widehat{R})\right) \ , \end{aligned}$$

où la seconde égalité résulte de la propriété de Markov de $(X_t)_{t>0}$ au temps R sous $\widehat{P}^x$ (noter que $R > 0, \widehat{P}^x$-p.p.). Il en résulte que $\varphi(\widehat{R}) = \psi(\widehat{R})$ $\widehat{P}^x$-p.p.; l'ensemble négligeable peut être choisi indépendamment de A et B, car $(\Omega, \mathcal{F}^o)$ est un bon espace. La famille cherchée s'obtient en remplaçant $P^{x,\ell,y}$ par $P^{x,\ell,y}1_C(x,\ell,y)$, où C désigne l'ensemble des (x,ℓ,y) tels que *(ii)* ait lieu pour tous $A, B \in \mathcal{F}^o$. La propriété de mesurabilité de $(P^{x,\ell,y})$ est conservée car $C \in \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbf{R}}_+} \otimes \mathcal{E}$; la propriété *(i)* reste également satisfaite car $(x, \widehat{R}) \in C$ $\widehat{P}^x$-p.p.. ∎

5.2. *Remarque.* — La propriété 5.1, *ii)* entraîne l'*indépendance* de a_ℓ (ou k_ℓ) et θ_ℓ sous $P^{x,\ell,y}$ (la notion d'indépendance prend évidemment un sens pour une mesure identiquement nulle).

Avec les notations T, g, d du §**2** et les mesures $P^{x,\ell,y}$ on définit pour $\omega \in \{g < \infty\}$

$$\begin{aligned} &n^\omega = P^{X_g(\omega), d(\omega)-g(\omega), X_d(\omega)} , \\ &C^\omega = \{0 \le A^\omega < R\}, \quad C_d^\omega = \{0 \le A_d^\omega < R\} , \end{aligned} \tag{5.3}$$

où A^ω est défini comme au §**3** et où A_d^ω désigne l'application $T(\omega|g(\omega)|\bullet|d(\omega)|\theta_d\omega) - g(\omega)$ de Ω dans $]-\infty, +\infty]$. Pour $s, t \in \mathbf{R}_+$, $s \le t$ et $\omega, \omega', \omega'' \in \Omega$. On pose

$$(\omega|s|\omega'|t|\omega'') = (\omega|s|\omega')|t|\omega'' = \omega|s|(\omega'|t-s|\omega'').$$

On a donc

$$\begin{aligned} A_d^\omega(\omega') &= A^\omega(\omega'|d(\omega) - g(\omega)|\theta_d\, \omega) , \\ C_d^\omega &= \{\omega' : \omega'|d(\omega) - g(\omega)|\theta_d\, \omega \in C^\omega\} . \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section. Rappelons que $e = k_R \circ \theta_g$.

5.4. THÉORÈME. — *Pour $B \in \mathcal{F}^*$ on a p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$.*

a) $P(\theta_g \in B \mid \mathcal{F}_g, d, X_d)(\omega) = n^\omega(B \mid C^\omega)$,

b) $P(e \in B \mid \mathcal{F}_g, d, \theta_d)(\omega) = n^\omega(k_R \in B \mid C_d^\omega)$.

De plus, si T est un t. d'a. de $(\mathcal{R}_t)$, on peut remplacer C^ω et C_d^ω par $\{A^\omega < R\}$ dans cet énoncé et l'on a

$$n^\omega(A^\omega < 0) = 0 \text{ p.s. } (\omega) \text{ sur } \{g < \infty\} .$$

5.5. *Remarque.* — p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$ la mesure n^ω est, comme $\widehat{P}^{X_g(\omega)}$, portée par $\{g(\omega) \in G^o(\omega|g(\omega)|\bullet)\}$. Nous pouvons alors faire des remarques analogues à 3.6. Par exemple, si $g < T$ sur $\{g < \infty\}$, les conditions C^ω, C_d^ω de *a)* et *b)* peuvent être remplacées par $\{0 < A^\omega < R\}$, $\{0 < A_d^\omega < R\}$ respectivement et si de plus T est un t. d'a. de $(\mathcal{R}_t)$ on a $n^\omega(A^\omega \le 0) = 0$ p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$.

Démonstration.

a) Soit Z une fonction $\mathcal{F}_g$ mesurable positive nulle sur $\{g = \infty\}$ et soit φ une fonction $\mathcal{B}_{\overline{\mathbf{R}}_+} \otimes \mathcal{E}$ mesurable positive. Pour établir *a)* il s'agit de montrer que

$$P(Z\ \varphi(d-g, X_d), \theta_d \in B) = P(Z\ \varphi(d-g, X_d) n^\bullet(B \mid C^\bullet)) \ ,$$

soit d'après la formule (3.3) :

$$\int P(d\omega) \frac{Z(\omega)}{\nu^\omega(C^\omega)} \nu^\omega \left(\varphi(\widehat{R}), B \cap C^\omega\right)$$
$$= \int P(d\omega) \frac{Z(\omega)}{\nu^\omega(C^\omega)} \nu^\omega \left(\varphi(\widehat{R}) P^{X_g(\omega), \widehat{R}}(B \mid C^\omega), C^\omega\right).$$

Or d'après 5.1, *(i)* on a

$$\begin{aligned}\nu^\omega(\varphi(\widehat{R}), B \cap C^\omega) &= \nu^\omega \left((\varphi(\widehat{R}) P^{X_g(\omega), \widehat{R}}(B \mid C^\omega) P^{X_g(\omega), \widehat{R}}(C^\omega)\right) \\ &= \nu^\omega \left((\varphi(\widehat{R}) P^{X_g(\omega), \widehat{R}}(B \mid C^\omega), C^\omega\right) \ ,\end{aligned}$$

d'où l'égalité cherchée.

b) Nous allons maintenant déduire 5.4, *b)* de 5.4, *a)*. Soit Z une fonction $\mathcal{T}(\mathcal{F}_g, d, X_d)$ mesurable ≥ 0 portée par $\{g < \infty\}$ et soit $C \in \mathcal{F}^o$. Nous voulons montrer que

$$P(Z, e \in B, \theta_d \in C) = P(Z n^\bullet(k_R \in B \mid C_d^\bullet), \theta_d \in C) \ . \tag{5.6}$$

D'après *a)* le membre de gauche s'écrit

$$\int P(d\omega) \frac{Z(\omega)}{n^\omega(C^\omega)} n^\omega(k_R \in B, \theta_R \in C, C^\omega) \ . \tag{5.7}$$

Dans cette expression on peut remplacer R par $\ell = d(\omega) - g(\omega)$ à cause du lemme ci-dessous. Par ailleurs, d'après l'indépendance de k_ℓ et θ_ℓ sous n^ω (voir 5.2)

$$\begin{aligned}n^\omega(k_\ell \in B, \theta_\ell \in C, C^\omega) &= \int_{\{\theta_\ell \in C\}} n^\omega(d\omega') n^\omega(k_\ell \in B, k_\ell|\ell|\theta_\ell\omega' \in C^\omega) \\ &= \int_{\{\theta_\ell \in C\}} n^\omega(d\omega') n^\omega(k_\ell \in B \mid k_\ell|\ell|\theta_\ell\omega' \in C^\omega) n^\omega(k_\ell|\ell|\theta_\ell\omega' \in C^\omega) \\ &= n^\omega(g^\omega(\theta_\ell), C^\omega) \ ,\end{aligned}$$

où $g^\omega(w) = I_C(w) n^\omega(k_\ell \in B \mid k_\ell|\ell|w \in C^\omega)$. En reportant cette expression dans (5.7) et en utilisant encore *a)* on trouve le second membre de (5.6).

Lorsque T est un *t. d'a.* de $(\mathcal{R}_t)$, la propriété de Markov au temps d permet de remplacer C_d^ω par C^ω dans la formule 5.4, *b)*. En effet e est $\mathcal{F}_d$ mesurable et l'on déduit directement de *a)* que (avec les mêmes Z, C que ci-dessus)

$$\begin{aligned} P(Z, e \in B, \theta_d \in C) &= P(ZP^{X_d}(C), e \in B) \\ &= \int P(d\omega)Z(\omega)P^{X_d(\omega)}(C)n^\omega(k_R \in B \mid C^\omega) \\ &= \int_{\{\theta_d \in C\}} P(d\omega)Z(\omega)n^\omega(k_R \in B \mid C^\omega)\,. \end{aligned}$$

Pour terminer, toujours dans le cas d'un t. d'a. de $(\mathcal{R}_t)$ on peut remplacer C^ω par $\{A^\omega < R\}$ dans a); en adaptant les raisonnements précédents on voit qu'on peut alors substituer $\{A_d^\omega < R\}$ ou $\{A^\omega < R\}$ à C_d^ω dans 5.4, *b)*. On démontre alors que $n^\omega(A^\omega < 0) = 0$ p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$ comme la propriété correspondante pour ν^ω (théorème 3.2). ∎

5.8. LEMME. — *$n^\omega(\widehat{R} \neq (d(\omega) - g(\omega), X_d(\omega)) = 0$ p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$.*

Démonstration. — D'après (2.1) on a

$$\begin{aligned} &\int P(d\omega) \sum_{s \in G^o(\omega)} P^{X_s(\omega),\widehat{R}(\theta_s\omega)}(\widehat{R} \neq \widehat{R}(\theta_s\omega)) \\ &\qquad = \int P(d\omega) \int L^o(\omega, ds) \int \widehat{P}^{X_s(\omega)}(d\omega')P^{X_s(\omega),\widehat{R}(\omega')}(\widehat{R} \neq \widehat{R}(\omega')) \\ &\qquad = \int P(d\omega) \int L^o(\omega, ds)\widehat{P}^{X_s(\omega)}(\widehat{R} \neq \widehat{R}) = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\int_{\{g<\infty\}} P(d\omega)P^{X_g(\omega),\widehat{R}(\theta_g\omega)}(\widehat{R} \neq \widehat{R}(\theta_g\omega)) = 0$$

et il reste à remarquer que $\widehat{R}(\theta_g\omega) = (d(\omega) - g(\omega), X_d(\omega))$. ∎

5.9. *Exemples.* — Voici une série d'exemples où la condition C_d^ω de la formule 5.4, *b)* se réduit à une condition ne dépendant pas de ω, ce qui conduit à l'indépendance conditionnelle de $(\mathcal{F}_g, d, \theta_d)$ et e étant donné $(X_g, d-g, X_d)$.

Tout d'abord il y a les exemples où T est un t. d'a. de $(\mathcal{R}_t)$ *strictement terminal* (et tel que $T < d$ sur $\{T < \infty\}$), ou *terminal* et tel que $g < T$ sur $\{g < \infty\}$. Ce deuxième cas généralise un résultat de Getoor et Sharpe [6] concernant l'excursion chevauchant un temps terminal. Nous retrouvons aussi sans dualité les résultats de Getoor [5]. Supposons que $g < T$ sur $\{g < \infty\}$. Alors p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$, $P(e \in B \mid \mathcal{F}_g, d, \theta_d)(\omega)$ s'écrit

a) $n^\omega\,(k_R \in B \mid 0 < T(\omega_0|g(\omega)|\bullet|d(\omega)|\theta_d\omega) - g(\omega) < R)$ si T est un *temps de départ* (ou forward time au sens de 3.7, **5**)).

b) $n^\omega\left(k_R \in B \mid 0 < T(\bullet|d(\omega) - g(\omega)|\theta_d\omega) < R\right)$ si T est un *temps de retour*.

c) $n^\omega(k_R \in B \mid 0 < T(k_R) < R)$ si $T = \sup\{t > 0 : X_t \in F\}$, où F est un borélien de $E\backslash\{\delta\}$ (ou plus généralement si T est *coterminal exact* [5]). En effet pour ω, ω' tels que $g(\omega) < \infty$ et $\widehat{R}(\omega') = (d(\omega) - \ell(\omega), X_d(\omega))$, on a $X_d(\omega) \notin F$ et

$$0 < T\left(\omega'|d(\omega) - g(\omega)|\theta_d\omega\right) < R(\omega') \Longleftrightarrow 0 < T(k_R\omega') < R(\omega') \ .$$

Noter que dans le cas *c)* la formule s'écrit aussi

$$(5.10) \qquad P(e \in B \mid \mathcal{F}_g, d, \theta_d) = Q^{X_g, d-g, X_d}(B \mid 0 < T < \zeta) \text{ sur } \{g < \infty\}$$

à condition de poser $Q^{x,\ell,y} = k_\ell(P^{x,\ell,y})$.

Signalons aussi que si T est un t. d'a. de la *filtration lente* $\mathcal{L}_t$ (cf. 3.7, **6**)), le second membre de 5.4, *b)* s'écrit p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$.

$$n^\omega(k_R \in B \mid R > A_T(\omega)) = n^\omega(k_R \in B)$$

à cause du lemme 5.8. Nous avons ainsi obtenu la formule

$$(5.11) \qquad P(e \in B \mid \mathcal{F}_g, d, \theta_d) = Q^{X_g, d-g, X_d}(B)$$

et retrouvé la formule (5) de [1].

5.12. *Remarque finale.* — La loi conditionnelle de e relativement à $(\mathcal{F}_g, d, X_{d-}, \theta_d)$ s'étudie de la même manière grâce aux mesures (déjà introduites dans [1])

$$P_{x,\ell,y}(B) = \widehat{P}^x(B \mid R = \ell, X_{R-} = y) \ .$$

Le rôle joué par la propriété de Markov au temps R sous $\widehat{P}^x$ est maintenant joué par la formule de conditionnement par rapport au passé strict de R sous $\widehat{P}^x$ (on suppose ici que M est la fermeture dans $]0,\infty[$ d'un ensemble $\{t > 0 : (X_{t-}, X_t) \in A\}$, ce qui assure l'indépendance conditionnelle de $\mathcal{F}_{R-}$ et θ_R étant donné X_{R-} [12]). Le lecteur imaginera facilement comment conditionner par $(\mathcal{R}_{g-}, d, X_{d-}, \theta_d)$ et il pourra examiner les formules obtenues dans divers cas particuliers.

Références

[1] Boutabia H. et Maisonneuve B. — *Lois conditionnelles des excursions markoviennes*, Sém. Prob. XXVI, LN 1526, Springer, 1992.

[2] Dellacherie C. et Meyer P.A. — Probabilités et Potentiel, Chapitres I à IV, Hermann, 1975.

[3] Dellacherie C. et Meyer P.A. — Probabilités et Potentiel, Chapitres XII à XVI, Hermann, 1987.

[4] Dellacherie C., Maisonneuve B. et Meyer P.A. — Probabilités et Potentiel, Chapitres XVII à XXIV, Hermann, 1992.

[5] Getoor R.K. — *Excursions and forward times*, Seminar on Stochastic Processes 1982, Birkhäuser (1983), 149–169.

[6] Getoor R.K. and Sharpe M.J. — *Excursions of dual processes*, Adv. in Math. **45** (1982), 259–309.

[7] Getoor R.K. and Sharpe M.J. — *Two results on dual excursions*, Seminar on Stochastic Processes 1981, Birkhäuser (1981), 31–52.
[8] Maisonneuve B. — *Topologies du type de Skorohod*, Sém. Prob. VI, Springer LN **258** (1972), 113–117.
[9] Maisonneuve B. — *Exit systems*, Ann. Prob. **3** (1975), 399–411.
[10] Maisonneuve B. — *On the structure of certain excursions of a Markov process*, Z.f.W. **47** (1979), 61–67.
[11] Maisonneuve B. — Systèmes Régénératifs, Astérisque 15, S.M.F., 1974.
[12] Maisonneuve B. — *Strict past conditioning at arbitrary times*, Seminar on Stochastic Processes 1985, Birkhäuser (1986), 148–154.
[13] Maisonneuve B. — *Systèmes de sortie* $(\mathcal{F}_{D_t})$*-prévisibles*, Probab. Th. Rel. Fields **80** (1989), 395–405.
[14] Pitman J.W. — *Lévy systems and paths decompositions*, Seminar on Stochastic Processes 1981, Birkhäuser (1981), 79–110.
[15] Weil M. — *Conditionnement par rapport au passé strict*, Sém. Prob. V, Springer LN **191** (1971), 362–372.

B. Maisonneuve
I.M.S.S.
Université de Grenoble II
BP 47X
38040 GRENOBLE Cedex

K. R. PARTHASARATHY

Maassen Kernels and self-similar quantum fields

Astérisque, tome 236 (1996), p. 227-247
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__227_0>

Maassen Kernels and Self-Similar Quantum Fields

K.R. Parthasarathy

Abstract. — In his Lecture Notes [Maj] P. Major has outlined a theory of multiple Wiener-Itô integrals with respect to a stationary Gaussian random field ξ over the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ of rapidly decreasing smooth functions in $\mathbb{R}^d$. Furthermore, he has exploited the same to construct self-similar random fields subordinate to ξ. Here, we observe that the Hilbert space of functions square integrable with respect to the probability measure P of ξ can be identified in a natural way with the Hilbert space of functions square integrable with respect to the symmetric Guichardet measure [Gui] constructed from the spectrum of ξ. Under such an identification, multiplication of random variables on the probability space of ξ becomes the twisted convolution of Lindsay and Maassen [Li M 1,2] for Maassen kernels [Maa], [Mey]. The multiple Wiener-Itô integral of Major is described neatly by a twisted version of Meyer's multiplication formula (see (IV.4.1 in [Mey]). Following Lindsay and Parthasarathy [Li P] we introduce the weighted and twisted convolution of Maassen kernels, present a generalization of Meyer's formula and exploit it to construct a family of operator fields whose expectations in the vacuum state exhibit a simultaneous self-similarity property. Such a construction includes Major's examples and at the same time yields a self-similar Clifford field.

1 An involutive Gaussian random field and the Lindsay-Maassen twisted convolution algebra

Let $(X, \mathcal{F}, m)$ be a σ-finite measure space equipped with an m-preserving involution $x \to \tilde{x}$ on X satisfying $(\tilde{x})^{\sim} \equiv x$. For any measure μ, denote by $L^2_{\mathbb{R}}(\mu)$ and $L^2(\mu)$ respectively the real and complex Hilbert spaces of functions square integrable with respect to μ. Then the following holds:

Theorem 1.1 There exists a probability space $(\Omega, \mathcal{F}_m, P_m)$ and a linear map $\xi : L^2_{\mathbb{R}}(m) \to L^2(P_m)$ satisfying the following:

(a) For each $f \in L^2_{\mathbb{R}}(m)$, $\xi(f)$ is a complex-valued Gaussian random variable of mean 0.

(b) For any $f, g \in L^2_{\mathbb{R}}(m)$,

$$\mathbb{E}\,\overline{\xi(f)}\xi(g) = \int f(x)g(x)dm(x).$$

(c) If $\tilde{f}(x) \equiv f(\tilde{x})$ and $f \in L^2_{\mathbb{R}}(m)$ then $\xi(\tilde{f}) = \overline{\xi(f)}$.

(d) The σ algebra generated by $\{\xi(f), f \in L^2_{\mathbb{R}}(m)\}$ is $\mathcal{F}_m$.

Proof: For any $f, g \in L^2_{\mathbb{R}}(m)$ define

$$K_{\pm}(f,g) = \int \frac{1}{2}(f(x) \pm f(\tilde{x}))g(x)dm(x). \tag{1.1}$$

From the $\sim$ - invariance of m and Schwarz's inequality we have $K_{\pm}(f,g) = K_{\pm}(g,f)$,

$$|\int f(\tilde{x})f(x)dm(x)| \leq \int f^2(x)dm(x)$$

and therefore

$$K_{\pm}(f,f) = \frac{1}{2}\int (f^2(x) \pm f(\tilde{x})f(x))dm(x) \geq 0.$$

In other words K_+ and K_- are non-negative definite bilinear forms on $L^2_{\mathbb{R}}(m)$ with non-trivial kernel (consisting of odd functions for K_+ and even functions for K_-). Hence there exist two independent real Gaussian random fields ξ_+ and ξ_- over $L^2_{\mathbb{R}}(m)$ on some probability space $(\Omega, \mathcal{F}_m, P_m)$ for which

$$\mathbb{E}\xi_{\pm}(f) = 0, \;\; \mathbb{E}\xi_+(f)\xi_+(g) = K_+(f,g), \mathbb{E}\xi_-(f)\xi_-(g) = K_-(f,g) \tag{1.2}$$

and $\mathcal{F}_m$ is generated by $\{\xi_+(f), \xi_-(f), f \in L^2_{\mathbb{R}}(m)\}$. Elementary algebra using (1.1), (1.2) and $\sim$-invariance of m yields

$$\mathbb{E}(\xi_+(f) - \xi_+(\tilde{f}))^2 = \mathbb{E}(\xi_-(f) + \xi_-(\tilde{f}))^2 = 0 \tag{1.3}$$

where $\tilde{f}(x) = f(\tilde{x})$. Define

$$\xi(f) = \xi_+(f) + i\xi_-(f).$$

Clearly, ξ is a linear map satisfying (a) and (c). Furthermore

$$\mathbb{E}\,\overline{\xi(f)}\,\xi(g) = K_+(f,g) + K_-(f,g) = \int f(x)g(x)dm(x)$$

proving (b). Property (d) is immediate. ■

Corollary 1.2 Let $\{\xi(f), f \in L^2_{\mathbb{R}}(m)\}$ be as in Theorem 1.1. For any f in the complex Hilbert space $L^2(m)$ with $f = f_1 + if_2$, where f_1 and f_2 are respectively the real and imaginary parts of f, let $\xi(f) = \xi(f_1) + i\xi(f_2)$. Then $\{\xi(f), f \in L^2(m)\}$ satisfies the following:

(a) The correspondence $f \to \xi(f)$ is complex linear.

(b) For each $f, \xi(f)$ is a complex-valued Gaussian random variable of mean 0.

(c) $\mathbb{E}\,\overline{\xi(f)}\,\xi(g) = \int \overline{f}(x)g(x)dm(x)$.

(d) If $\tilde{f}(x) \equiv \overline{f(\tilde{x})}$, then $\xi(\tilde{f}) = \overline{\xi(f)}$.

(e) $\mathbb{E}e^{\xi(f)} = \exp\ \frac{1}{2}\int f(\tilde{x})f(x)dm(x)$.

Proof: The first four parts (a) - (d) are immediate from Theorem 1.1. The last part follows from the $\sim$-invariance of m and the relation

$$\xi(f) = \xi_+(f_1) + i\xi_+(f_2) + i(\xi_-(f_1) + i\xi_-(f_2))$$

where ξ_+ and ξ_- are the independent real Gaussian random fields over $L^2_{\mathbb{R}}(m)$ with respective covariance kernels K_+ and K_- in the proof of Theorem 1.1. ∎

Remark 1.3 In Corollary 1.2 define the normalised exponential random variable $e_\xi(f)$ by

$$e_\xi(f) = \exp(\xi(f) - \frac{1}{2}\int f(\tilde{x})f(x)dm(x)) \tag{1.4}$$

for $f \in L^2(m)$. Then $\{e_\xi(f), f \in L^2(m)\}$ is a linearly independent and total set in $L^2(P_m)$. Furthermore

$$\mathbb{E}\,\overline{e_\xi(f)}\,e_\xi(g) = \exp\int \overline{f(x)}\,g(x)dm(x), \tag{1.5}$$

$$e_\xi(f)e_\xi(g) = e_\xi(f+g)\exp\int f(\tilde{x})g(x)dm(x) \tag{1.6}$$

for all $f, g \in L^2(m)$.

We shall denote by $\mathcal{E}_\xi \subset L^2(P_m)$ the dense linear manifold generated by $\{e_\xi(f), f \in L^2(m)\}$. Then (1.6) implies that $\mathcal{E}_\xi$ is an algebra of random variables on $(\Omega, \mathcal{F}_m, P_m)$. Owing to property (d) in Corollary 1.2 we may call ξ an *involutive Gaussian random field.*

From now on we assume that $(X, \mathcal{F}, m)$ is a separable, nonatomic and σ-finite measure space. Our aim is to identify $L^2(P_m)$ in Theorem 1.1 with $L^2(m_\Gamma)$ where m_Γ is the symmetric measure of Guichardet [Gui] in the space $\Gamma(X)$ of all finite subsets of X, constructed from m. We denote the Guichardet symmetric measure space by $(\Gamma(X), \mathcal{F}_\Gamma, m_\Gamma)$ so that integration with respect to m_Γ is determined by

$$\int_{\Gamma(x)} f(\sigma)dm_\Gamma(\sigma) = f(\emptyset) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int f(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\})m(dx_1)\cdots m(dx_n) \tag{1.7}$$

for any $f \in L^1(m_\Gamma)$ where, on the right hand side, $f(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\})$ is viewed as a symmetric measurable function of n variables $x_1, x_2, ..., x_n$ with all the $x_i's$ distinct. It is to be noted that the n-fold product of the nonatomic measure m has its support in the subset $\{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in X \text{ and } x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j\}$. Denote by $\Gamma^n(X)$ the n-fold cartesian product of $\Gamma(X)$ and by $\Gamma^{(n)}(X) \subset \Gamma^n(X)$ the subset

$$\{\underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) | \sigma_i \in \Gamma(X), \sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset \text{ if } i \neq j\}.$$

Then the product measure m_Γ^n satisfies $m_\Gamma^n(\Gamma^n(X) \backslash \Gamma^{(n)}(X)) = 0$. For simplicity we write $d\sigma = dm_\Gamma(\sigma)$ in $\Gamma(X)$. If $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ are disjoint elements of $\Gamma(X)$ we write $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n$ or $\sum_{i=1}^n \sigma_i$ to denote $\bigcup_{i=1}^n \sigma_i$. Then one has the following Maassen's sum-integral formula for $f \in L^1(m_\Gamma^n)$:

$$\int_{\Gamma^{(n)}(X)} f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) d\sigma_1 d\sigma_2 ... d\sigma_n = \int_{\Gamma(X)} \{ \sum_{\sigma_1 + \cdots + \sigma_n = \sigma} f(\sigma_1, ..., \sigma_n)\} d\sigma. \tag{1.8}$$

For a proof see [Mey], [Li P]. Following [Maa] we introduce the space $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X, m, \sim) \subset L^2(m_\Gamma)$ of Massen kernels:

$$\mathcal{K}(X) = \{f | \int a^{\#\sigma} |f(\sigma)|^2 d\sigma < \infty \ \forall \ a > 1\}. \tag{1.9}$$

The Lindsay-Maassen twisted convolution $f * g$ between any two Maassen kernels f and g is defined by

$$(f * g)(\sigma) = \sum_{\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma} \int f(\sigma_1 + \tilde{\omega}) g(\omega + \sigma_2) d\omega \tag{1.10}$$

where the summation on the right hand side is over all partitions of σ into a pair σ_1, σ_2 of subsets (which can be empty). Then $f * g \in \mathcal{K}(X)$ and satisfies the inequality

$$\int |a^{\#\sigma}(f * g)(\sigma)|^2 d\sigma \leq \int |(a\sqrt{3})^{\#\sigma} f(\sigma)|^2 d\sigma \cdot \int |(a\sqrt{3})^{\#\sigma} g(\sigma)|^2 d\sigma \text{ for all } a \geq 1. \tag{1.11}$$

For a proof see Proposition 3.2 in [Li P]. The $\sim$ - invariance of m implies the invariance of the associated Guichardet measure m_Γ on $\Gamma(X)$ under the involution transformation $\omega \to \tilde{\omega} = \{\tilde{x} | x \in \omega\}$ and hence it is clear from (1.10) that $f * g = g * f$. It follows from the sum-integral formula (1.8) that $*$ is even associative. This will also follow from our Theorem 1.4. Thus $\mathcal{K}(X)$ becomes a commutative and associative algebra equipped with the involution $f \to \tilde{f}$ where $\tilde{f}(\sigma) = \overline{f(\tilde{\sigma})}$. A simple computation shows that $(f * g)^\sim = \tilde{f} * \tilde{g}$.

For any $\varphi \in L^2(m)$ define the associated exponential kernel $e(\varphi) \in \mathcal{K}(X)$ by

$$e(\varphi)(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma = \emptyset, \\ \prod_{x \in \sigma} \varphi(x) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.12}$$

Then

$$e(\varphi) * e(\psi) = e(\varphi + \psi) \exp \int \varphi(\tilde{x}) \psi(x) dm(x), \tag{1.13}$$

$$e(\varphi)^\sim = e(\tilde{\varphi}). \tag{1.14}$$

for any $\varphi, \psi \in L^2(m)$. The set $E = \{e(\varphi), \varphi \in L^2(m)\}$ is linearly independent and total in $L^2(m_\Gamma)$. The linear manifold $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}(X)$ generated by E is an involutive subalgebra of $\mathcal{K}(X)$. A comparison of (1.12) - (1.14) with (1.4) - (1.6) leads to the following theorem.

Theorem 1.4: Let ξ be the complex Gaussian random field over $L^2(m)$ in the probability space $(\Omega, \mathcal{F}_m, P_m)$ satisfying the properties (a) - (e) of Corollary 1.2 and property (d) of Theorem 1.1. Then there exists a unique unitary isomorphism $V : L^2(P_m) \to L^2(m_\Gamma)$ satisfying the following:

(a) $V\, e_\xi(\varphi) = e(\varphi)$ for all $\varphi \in L^2(m)$;

(b) $V\bar{g} = (Vg)^\sim$ for all $g \in L^2(P_m)$;

(c) $V(e_\xi(\varphi)e_\xi(\psi)) = e(\varphi) * e(\psi)$ for all $\varphi, \psi \in L^2(m)$;

where $e_\xi(\varphi)$ and $e(\varphi)$ are defined by (1.4) and (1.12) respectively.

Proof: First observe that $\langle e(\varphi), e(\psi)\rangle = \exp\langle\varphi,\psi\rangle = \langle e_\xi(\varphi), e_\xi(\psi)\rangle$ for all $\varphi, \psi \in L^2(m)$. The totality of $\mathcal{E}_\xi$ in $L^2(P_m)$ and $\mathcal{E}$ in $L^2(m_\Gamma)$ yields the existence of a unique unitary operator V satisfying (a). Now (b) and (c) are immediate. ∎

Remark 1.5: The map V^{-1} identifies the Lindsay-Maassen twisted convolution algebra $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X, m, \sim)$ with the ordinary multiplication algebra of random variables on a Gaussian random field ξ satisfying the involutive property $\xi(\tilde{\varphi}) = \overline{\xi(\varphi)}, \varphi \in L^2(m)$. The involution $\sim$ of $\mathcal{K}(X, m, \sim)$ is then carried over to the complex conjugation of random variables.

We now describe a topology on $\mathcal{K}(X)$.To this end consider the selfadjoint number operator N in $L^2(m_\Gamma)$ defined by

$$(Nf)(\sigma) = (\#\sigma)f(\sigma), \quad f \in L^2(m_\Gamma)$$

with maximal domain. Define

$$\|f\|^{(a)} = \|a^N f\|, \quad a > 1, \quad f \in \mathcal{K}(X). \tag{1.15}$$

With the family $\{\|\cdot\|^{(a)},\ a > 1\}$ of norms $\mathcal{K}(X)$ becomes a topological vector space.

Theorem 1.6 The twisted convolution operator $*$ is continuous. The subalgebra $\mathcal{E}$ is dense in $\mathcal{K}(X)$.

Proof: By Proposition 3.2 in [Li P] we have the inequality

$$\|a^N f * g\| \le \|(a\sqrt{3})^N f\|\, \|(a\sqrt{3})^N g\| \quad \text{for all } f, g \in \mathcal{K}(X), a > 1.$$

If $\lim_{n\to\infty}(\|f_n - f\|^{(a)} + \|g_n - g\|^{(a)}) = 0$ for every $a > 1$ then the inequality

$$\begin{aligned}\|a^N(f_n * g_n - f * g)\| &\le \|a^N((f_n - f) * g_n)\| + \|a^N(f * (g_n - g))\| \\ &\le \|(a\sqrt{3})^N(f_n - f)\|\, \|(a\sqrt{3})^N g_n\| + \|(a\sqrt{3})^N f\|\, \|(a\sqrt{3})^N(g_n - g)\|\end{aligned}$$

implies that

$$\lim_{n\to\infty} \|a^N(f_n * g_n - f * g\| = 0.$$

This proves the first part.

To prove the second part consider an element $(f, a^N f)$ in the graph of the operator a^N with $f \in \mathcal{K}(X)$. Suppose that this element is orthogonal to every element of the form $(e(\varphi), a^N e(\varphi))$. Then

$$\begin{aligned}\langle (e(\varphi), a^N e(\varphi)),\ (f, a^N f)\rangle &= \langle e(\varphi), f\rangle + \langle e(\varphi), a^{2N} f\rangle \\ &= \langle e(\varphi), f + a^{2N} f\rangle \\ &= 0 \text{ for all } \ \varphi \in L^2(m).\end{aligned}$$

The totality of exponential kernels implies that $f + a^{2N} f = 0$. Since the spectrum of N is $\{0, 1, 2, ...\}$ it follows that $f = 0$. This enables us to conclude that for any fixed $a > 1, \varepsilon > 0$ and $f \in \mathcal{K}(X)$ there exists a $g \in \mathcal{E}$ such that

$$\|g - f\| + \|a^N g - a^N f\| < \varepsilon.$$

Choose $a = n, \varepsilon = \frac{1}{n}$ and denote the corresponding g by g_n. Since a^N is monotonic increasing in a for $a > 1$ it follows that

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - f\| + \|a^N g_n - a^N f\| = 0 \text{ for every } a > 1.$$

■

2 Weighted and twisted convolution of Maassen kernels

Following Lindsay and Parthasarathy [Li P] we shall now investigate deformations of the twisted convolution operator $*$ in (1.10) by introducing a *weight function* or *multiplier* p inside the integral on the right hand side of (1.10). To this end we introduce the space $\mathcal{M}(X)$ of all complex-valued bounded measurable functions defined on $\Gamma^{(3)}(X)$ and call any element $p \in \mathcal{M}(X)$ a multiplier. Thus p is a function of three arguments $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ which are disjoint finite subsets of X. For any two Maassen kernels $f, g \in \mathcal{K}(X)$ and any multiplier $p \in \mathcal{M}(X)$ define the *weighted* and *twisted convolution* $f *_p g$ by

$$(f *_p g)(\sigma) = \sum_{\sigma_1+\sigma_2=\sigma} \int p(\omega, \sigma_1, \sigma_2) f(\sigma_1 + \tilde{\omega}) g(\omega + \sigma_2) d\omega \tag{2.1}$$

where $d\omega = dm_\Gamma(\omega)$ as in Section 1. It is to be noted that for any fixed $\sigma \in \Gamma(X)$, the complement of the set $\{\omega | \omega \cap \sigma = \emptyset\}$ in $\Gamma(X)$ has m_Γ - measure 0.

Proposition 2.1 In the Hilbert space $L^2(m_\Gamma)$, for any $p \in \mathcal{M}(X), f, g \in \mathcal{K}(X)$ the following inequality holds:

$$\|a^N f *_p g\| \leq \sup\ |p|\ \|(a\sqrt{3})^N f\|\ \|(a\sqrt{3})^N g\| \ \text{ for all } \ a > 1. \tag{2.2}$$

In particular, $\mathcal{K}(X)$ is closed under the multiplication operation $*_p$.

Proof: This is the same as the first part of Proposition 3.2 in [Li P]. ■

The next proposition is a twisted and weighted version of the Wiener product for Maassen kernels. (See IV.4.1 in [Mey]).

Theorem 2.2 For any multiplier p and Maassen kernel f define the operator $B_p(f)$ in $L^2(m_\Gamma)$ with domain $\mathcal{K}(X)$ and

$$B_p(f)g = f *_p g$$

where the right hand side is given by (2.1). Then, for any given $f_i \in \mathcal{K}(X), p_j \in \mathcal{M}(X)$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n-1$,

$$\begin{aligned}
&(B_{p_1}(f_1)B_{p_2}(f_2)\cdots B_{p_{n-1}}(f_{n-1})f_n)(\delta) \\
&\qquad = \sum_{\Sigma\delta_i=\delta} \int \prod_{k=1}^{n} f_k((\sum_{i<k}\sigma_{ik}) + \delta_k + \sum_{j>k}\tilde{\sigma}_{kj}) \\
&\qquad \times \prod_{\ell=1}^{n-1} p_\ell(\sum_{j>\ell}\sigma_{\ell j}, (\sum_{i<\ell}\sigma_{i\ell}) + \delta_\ell, (\sum_{i<\ell<j}\sigma_{ij}) + \sum_{j>\ell}\delta_j) \\
&\qquad \times \prod_{1\le i<j\le n} d\sigma_{ij} \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

where all the sets $\sigma_{ij}, \delta_k, 1 \le i, j, k \le n$, $i < j$ are disjoint and the indices k, ℓ are kept fixed under the Σ-signs inside f_k and p_ℓ.

Proof When $n = 2$, (2.3) is same as (2.1) if we put $\sigma_{12} = \omega$, $\delta_1 = \sigma_1, \delta_2 = \sigma_2$. We prove (2.3) inductively. Assume (2.3) for n. To prove the same for $n + 1$ put $g_n = f_n *_{p_n} f_{n+1}$. Then

$$\begin{aligned}
&(B_{p_1}(f_1)\ldots B_{p_n}(f_n)f_{n+1})(\delta) = (B_{p_1}(f_1)\cdots B_{p_{n-1}}(f_{n-1})g_n)(\delta) \\
&= \sum_{\Sigma\delta_i=\delta} \int \prod_{k=1}^{n-1} f_k((\sum_{i<k}\sigma_{ik}) + \delta_k + \sum_{j>k}\tilde{\sigma}_{kj}) \\
&\times \prod_{\ell=1}^{n-1} p_\ell(\sum_{j>\ell}\sigma_{\ell j}, (\sum_{i<\ell}\sigma_{i\ell}) + \delta_\ell, (\sum_{i<\ell<j}\sigma_{ij}) + \sum_{j>\ell}\delta_j) \\
&\times \sum_{\varepsilon_1+\varepsilon_2=(\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{in})+\delta_n} p_n(\sigma_{n\,n+1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2) f_n(\varepsilon_1 + \tilde{\sigma}_{n\,n+1}) f_{n+1}(\sigma_{n\,n+1} + \varepsilon_2) \\
&\times \left(\prod_{1\le i<j\le n} d\sigma_{ij}\right) d\sigma_{n\,n+1}. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Introduce new disjoint set variables $\sigma'_{in}, \sigma'_{in+1}, \delta'_n, \delta'_{n+1}, 1 \leq i \leq n-1$ by putting

$$\sigma'_{in} = \varepsilon_1 \cap \sigma_{in}, \quad \sigma'_{i\,n+1} = \varepsilon_2 \cap \sigma_{in},$$

$$\delta'_n = \varepsilon_1 \cap \delta_n, \quad \delta'_{n+1} = \varepsilon_2 \cap \delta_n.$$

Then $\sigma'_{in} + \sigma'_{i\,n+1} = \sigma_{in} \cap (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \sigma_{in}$ and $\delta'_n + \delta'_{n+1} = \delta_n \cap (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \delta_n$. Substituting these new variables in (2.4) and using the sum-integral formula (1.8) we get

$$\begin{aligned}
&(B_{p_1}(f_1)\cdots B_{p_n}(f_n)f_{n+1})(\delta) = \\
&= \sum_{(\Sigma_{i=1}^{n-1}\delta_i)+\delta'_n+\delta'_{n+1}=\delta} \int \prod_{k=1}^{n-1} f_k\Big(\sum_{i<k}\sigma_{ik} + \delta_k + \sum_{k<j\leq n-1}\tilde{\sigma}_{kj} + \tilde{\sigma}'_{kn} + \tilde{\sigma}'_{k\,n+1}\Big) \\
&\quad \times \prod_{\ell=1}^{n-1} p_\ell\Big(\Big(\sum_{\ell<j\leq n-1}\sigma_{\ell j}\Big) + \sigma'_{\ell n} + \sigma'_{\ell n+1}, \Big(\sum_{i<\ell}\sigma_{i\ell}\Big) + \delta_\ell, \\
&\quad \sum_{i<\ell<j\leq n-1}\sigma_{ij} + \sum_{i<l}(\sigma'_{in} + \sigma'_{in+1}) + \sum_{\ell\leq j\leq n-1}\delta_j + \delta'_n + \delta'_{n+1}\Big) \\
&\quad \times f_n\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\sigma'_{in} + \delta'_n + \tilde{\sigma}_{n\,n+1}\Big) f_{n+1}\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\sigma'_{i\,n+1} + \sigma_{n\,n+1} + \delta'_{n+1}\Big) \\
&\quad \times p_n\Big(\sigma_{n\,n+1}, \sum_{i=1}^{n-1}\sigma'_{in} + \delta'_n, \sum_{i=1}^{n-1}\sigma'_{i\,n+1} + \delta'_{n+1}\Big) \\
&\quad \times \Big(\prod_{1\leq i<j\leq n-1} d\sigma_{ij}\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n-1} d\sigma'_{in}d\sigma'_{i\,n+1}\Big)d\sigma_{n\,n+1}.
\end{aligned}$$

If we now drop the primes $'$ in the expression above it is the same as (2.3) with n replaced by $n+1$. ■

Proposition 2.3 For any $f, g, h \in \mathcal{K}(X)$ and $p \in \mathcal{M}(X)$

$$\langle f, g *_p h\rangle = \langle \tilde{g} *_q f, h\rangle$$

where $\tilde{g}(\sigma) = \overline{g(\tilde{\sigma})}$ and $q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \overline{p(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3)}$.

Proof: By (2.1) and an application of (1.8) twice for the case $n = 2$ we have

$$\begin{aligned}
\langle f, g *_p h\rangle &= \int \bar{f}(\sigma)\Big\{\sum_{\sigma_1+\sigma_2=\sigma}\int p(\omega, \sigma_1, \sigma_2)g(\sigma_1 + \tilde{\omega})h(\omega + \sigma_2)d\omega\Big\}d\sigma \\
&= \int \bar{f}(\sigma_1 + \sigma_2)p(\omega, \sigma_1, \sigma_2)g(\sigma_1 + \tilde{\omega})h(\omega + \sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2 d\omega
\end{aligned}$$

$$= \int \{ \sum_{\omega+\sigma_2=\gamma} \int \bar{q}(\sigma_1, \omega, \sigma_2) \tilde{g}(\omega + \tilde{\sigma}_1) \bar{f}(\sigma_1 + \sigma_2) d\sigma_1 \} h(\gamma) d\gamma$$
$$= \langle \tilde{g} *_q f, h \rangle.$$

■

Corollary 2.4 For any multiplier p and Maassen kernel f the operators $B_p(f)$ and $B_q(\tilde{f})$ are adjoint to each other on the domain $\mathcal{K}(X)$, where $q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \overline{p(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3)}$.

Proof : Immediate . ■

Proposition 2.5 Let $f_i, 1 \leq i \leq k$ be Maassen kernels. Then

$$|(f_1 * f_2 * \cdots * f_k)(\emptyset)| \leq \prod_{i=1}^{k} \|(k-1)^{N/2} f_i\|.$$

Proof: When $k = 2, (f_1 * f_2)(\emptyset) = \langle f_1, f_2 \rangle$ and hence the required inequality coincides with Schwarz's inequality. To deal with the general case introduce the operation A by

$$(Af)(\sigma) = \int f(\sigma + \omega) d\omega.$$

Then, by Theorem 2.2, putting $p_i = 1$ for all i and $n = k$ we get from a repeated application of Schwartz's inequality in the integrating variables $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \ldots, \sigma_{1n}$,

$$\begin{aligned}
&|f_1 * \cdots * f_k(\emptyset)| \\
&= |\int f_1(\tilde{\sigma}_{12} + \tilde{\sigma}_{13} + \cdots + \tilde{\sigma}_{1k}) f_2(\sigma_{12} + \tilde{\sigma}_{23} + \cdots + \tilde{\sigma}_{2k}) \\
&\quad \cdots f_k(\sigma_{1k} + \sigma_{2k} + \cdots + \sigma_{k-1\,k}) d\sigma_{1k} \cdots d\sigma_{k-1\,k}| \\
&\leq \int (A|f_1|^2)^{1/2}(\tilde{\sigma}_{13} + \cdots + \tilde{\sigma}_{1k})(A|f_2|^2)^{1/2}(\tilde{\sigma}_{23} + \cdots + \tilde{\sigma}_{2k}) \\
&\quad \times |f_3|(\sigma_{13} + \sigma_{23} + \tilde{\sigma}_{34} + \cdots + \tilde{\sigma}_{3k}) \\
&\quad \cdots |f_k|(\sigma_{1k} + \sigma_{2k} + \cdots + \sigma_{k-1\,k}) \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ (i,j) \neq (1,2)}} d\sigma_{ij} \\
&\leq \int (A^2|f_1|^2)^{1/2}(\tilde{\sigma}_{14} + \cdots + \tilde{\sigma}_{1k})(A|f_2|^2)^{1/2}(\tilde{\sigma}_{23} + \cdots + \tilde{\sigma}_{2k}) \\
&\quad \times (A|f_3|^2)^{1/2}(\sigma_{23} + \tilde{\sigma}_{34} + \cdots + \tilde{\sigma}_{3k})
\end{aligned}$$

$$\times \ |f_4|(\sigma_{14}+\sigma_{24}+\sigma_{34}+\tilde{\sigma}_{45}+\cdots+\tilde{\sigma}_{4k})\cdots|f_k|(\sigma_{1k}+\cdots+\sigma_{k-1\,k})$$
$$\times \prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ (i,j)\notin\{(1,2),(1,3)\}}} d\sigma_{ij}$$

$$\cdots$$

$$\le \left(\int (A^{k-2}|f_1|^2)(\sigma)d\sigma\right)^{1/2}\{(A|f_2|^2)^{1/2}*(A|f_3|^2)^{1/2}*\cdots*(A|f_k|^2)^{1/2}(\emptyset)\}.$$

A repeated application of the inequality above yields

$$|f_1*\cdots*f_k(\emptyset)|\le\prod_{j=1}^{k}\{\int (A^{k-2}|f_j|^2)(\sigma)d\sigma\}^{1/2}. \tag{2.5}$$

For any Maassen kernel f we have from (1.8)

$$\begin{aligned}\int (A^k|f|^2)(\sigma)d\sigma &= \int |f|^2(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{k+1})d\sigma_1\cdots d\sigma_{k+1}\\ &= \int \sum_{\sigma_1+\cdots+\sigma_{k+1}=\sigma}|f|^2(\sigma)d\sigma\\ &= \int (k+1)^{\#\sigma}|f|^2(\sigma)d\sigma\\ &= \|(k+1)^{N/2}f\|^2.\end{aligned}$$

Now the proposition follows from (2.5). ∎

Proposition 2.6 Let $f, f_i, 1\le i\le k$ be Maassen kernels and let $p_i, 1\le i\le k$ be multipliers. Then

$$\|B_{p_1}(f_1)\cdots B_{p_k}(f_k)f\|\le\left(\prod_{i=1}^{k}(\sup|p_i|)\|(2k+1)^{N/2}f_i\|\right)\|(2k+1)^{N/2}f\|.$$

Proof: From Theorem 2.2 we have

$$\|B_{p_1}(f_1)\cdots B_{p_k}(f_k)f\|\le\left(\prod_{i=1}^{k}\sup|p_i|\right)\|\,|f_1|*\cdots*|f_n|*|f|\,\|. \tag{2.6}$$

From the $\sim$ - invariance of m_Γ we have for any Maassen kernel g

$$\|g\|^2=(g*\tilde{g})(\emptyset).$$

By Proposition 2.5 and commutativity of the operation $*$ we have

$$\begin{aligned}
&\| \, |f_1| * \cdots * |f_k| * |f| \, \|^2 \\
&\quad = (|f_1| * |f_1|^\sim * |f_2| * |f_2|^\sim * \cdots * |f_k| * |f_k|^\sim * |f| * |f|^\sim)(\emptyset) \\
&\quad \leq \{\prod_{j=1}^{k} \|(2k+1)^{N/2}(|f_j|)\|\}^2 \, \|(2k+1)^{N/2}(|f|)\|^2.
\end{aligned}$$

From (2.6) and Proposition 2.1 with $p = 1$ we now have

$$\|B_{p_1}(f_1) \cdots B_{p_k}(f_k) f\|^2 \leq \{\prod_{i=1}^{k} \sup \, |p_i|^2 \prod_{i=1}^{k} \|(2k+1)^{N/2} f_i\|^2\} \|(2k+1)^{N/2} f\|^2.$$

■

Corollary 2.7 Let $f, f_i, 1 \leq i \leq k$ be Maassen kernels and let $p_i, 1 \leq i \leq k$ be multipliers. Then, for any $a \geq 1$,

$$\|a^N B_{p_1}(f_1) \cdots B_{p_k}(f_k) f\| \leq (\prod_{i=1}^{k} (\sup \, |p_i|) \|(a\sqrt{2k+1})^N f_i\|) \|(a\sqrt{2k+1})^N f\|.$$

Proof: From (2.3) it is clear that

$$\begin{aligned}
&|a^N B_{p_1}(f_1) \cdots B_{p_{k-1}}(f_{k-1}) f|(\delta) \\
&\qquad \leq (\prod_{i=1}^{k} \sup \, |p_i|) \, (a^N |f_1|) * \cdots * (a^N |f_k|) * (a^N |f|)(\delta)
\end{aligned}$$

for any $a \geq 1$. The required inequality is immediate from Proposition 2.6. ■

Proposition 2.8: Let $f \in \mathcal{K}(X)$ have support in $\{\sigma | \#\sigma = 1\}$. Define the symmetric operator $A(f)$ with domain $\mathcal{K}(X)$ by $A(f) = B_p(f) + B_q(\tilde{f})$ where p and q are as in Corollary 2.4. Suppose $g \in \mathcal{K}(X)$ is such that either it has support in $\{\sigma | \#\sigma \leq n\}$ for some positive integer n or $g \in \mathcal{E}$. Then

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A(f)^k g\|}{k!} < \infty.$$

Proof: Let g be an n-particle element in $\mathcal{K}(X)$, in the sense that its support is contained in $\{\sigma | \#\sigma = n\}$. It follows from Corollary 2.7 that

$$\|A(f)^k g\| \leq (2 \sup \, |p|)^k (2k+1)^{\frac{k+n}{2}} \|f\|^k \|g\|$$

for all $k = 0, 1, 2, \ldots$ On the other hand, if $g = e(\varphi)$ for some $\varphi \in L^2(m)$, we have

$$\|A(f)^k g\| \leq (2 \ \sup\ |p|)^k (2k+1)^{\frac{k}{2}} \|f\|^k e^{\frac{2k+1}{2}\|\varphi\|^2}.$$

Thus, in either case,

$$\|A(f)^k g\| \leq C^k\, k^{\frac{k}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

for some positive constant C. Now the required result follows from Stirling's formula. ■

Remark: The symmetric operator $A(f)$ of Proposition 2.8 is essentially selfadjoint on the domain of finite particle vectors as well as the exponential domain $\mathcal{E}$.

3 Covariance properties of the family $\{B_p(f)\}$ under a group action

Let $(X, m, \sim)$ be a nonatomic, separable and σ-finite measure space equipped with an m-preserving involution as in Section 2. Suppose G is a group of transformations acting as measurable automorphisms of X, leaving m quasi-invariant and satisfying the relation $g\tilde{x} = (gx)^{\sim}$ for all $x \in X$. Let

$$\rho(g, x) = \{\frac{dm}{dmg}(x)\}^{1/2}. \tag{3.1}$$

Let $\alpha = \alpha(g, x)$ be a measurable complex-valued 1-cocycle of unit modulus in the sense of Mackey [Mac] for the G-action with quasi-invariant measure m. Then

$$\alpha(g_1 g_2, x) = \alpha(g_1, g_2 x)\alpha(g_2, x) \ \text{ a.e. } \ x(m) \tag{3.2}$$

for each $g_1, g_2 \in G$. We assume that

$$\alpha(g, \tilde{x}) \equiv \overline{\alpha(g, x)}, \ \ g \in G, \ \ x \in X. \tag{3.3}$$

Extend the G-action to $\Gamma(X)$ by putting

$$g\sigma = \begin{cases} \emptyset & \text{if } \sigma = \emptyset, \\ \{gx, x \in \sigma\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then the Guichardet measure m_Γ is quasi-invariant under the extended G action on $\Gamma(X)$ and

$$\rho(g, \sigma) := \left\{ \left(\frac{dm_\Gamma}{dm_\Gamma g} \right) (\sigma) \right\}^{1/2} \tag{3.4}$$

is given by

$$\rho(g, \sigma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma = \emptyset, \\ \prod_{x \in \sigma} \rho(g, x) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Define $\alpha(g,\sigma)$ by

$$\alpha(g,\sigma)=\begin{cases}1 & \text{if } \sigma=\emptyset,\\ \prod_{x\in\sigma}\alpha(g,x) & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{3.6}$$

Then we have the relations:

$$\begin{aligned}\alpha(g,\sigma_1+\sigma_2)&=\alpha(g,\sigma_1)\alpha(g,\sigma_2),\\ \alpha(g_1g_2,\sigma)&=\alpha(g_1,g_2\sigma)\alpha(g_2,\sigma),\\ \alpha(g,\tilde{\sigma})&=\overline{\alpha(g,\sigma)},\\ \rho(g,\sigma_1+\sigma_2)&=\rho(g,\sigma_1)\rho(g,\sigma_2),\\ \rho(g_1g_2,\sigma)&=\rho(g_1,g_2\sigma)\rho(g_2,\sigma),\\ \rho(g,\tilde{\sigma})&=\rho(g,\sigma).\end{aligned}$$

Consider the unitary representation $g\to U_g$ of G in $L^2(m)$ defined by

$$(U_gf)(x)=\alpha(g,g^{-1}x)\rho(g,g^{-1}x)f(g^{-1}x),\quad f\in L^2(m) \tag{3.7}$$

and its second quantization $g\to\Gamma(U_g)$ defined by

$$(\Gamma(U_g)h)(\sigma)=\alpha(g,g^{-1}\sigma)\rho(g,g^{-1}\sigma)h(g^{-1}\sigma), h\in L^2(m_\Gamma) \tag{3.8}$$

where $\rho(g,\sigma)$ and $\alpha(g,\sigma)$ are given by (3.5) and (3.6). Then $g\to\Gamma(U_g)$ is a unitary representation of G in $L^2(m_\Gamma)$.

Theorem 3.1: Let $p\in\mathcal{M}(X)$ and let $\{B_p(f), f\in\mathcal{K}(X)\}$ be defined as in Theorem 2.2. Then $\Gamma(U_g)$ leaves $\mathcal{K}(X)$ invariant and

$$\Gamma(U_g)B_p(f)\Gamma(U_g)^{-1}h=B_{pg^{-1}}(\Gamma(U_g)f)h$$

for all $f,h\in\mathcal{K}(X), g\in G$, where

$$pg^{-1}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\equiv p(g^{-1}\sigma_1,g^{-1}\sigma_2,g^{-1}\sigma_3).$$

Proof: Straightforward substitution from (3.7) and (3.8) using (2.1) yields

$$\begin{aligned}&(\Gamma(U_g)B_p(f)\Gamma(U_g)^{-1}h)(\sigma)\\ &\quad=\alpha(g,g^{-1}\sigma)\rho(g,g^{-1}\sigma)\sum_{\sigma_1+\sigma_2=g^{-1}\sigma}\int p(\omega,\sigma_1,\sigma_2)\alpha(g^{-1},g(\omega+\sigma_2))\\ &\qquad\times\rho(g^{-1},g(\omega+\sigma_2))\ f(\sigma_1+\tilde{\omega})h(g(\omega+\sigma_2))d\omega.\end{aligned}$$

Writing $\delta_i = g\sigma_i, g\omega = \omega'$ and using the relations satisfied by α and ρ we get

$$
\begin{aligned}
&(\Gamma(U_g)B_p(f)\Gamma(U_g)^{-1}h)(\sigma) \\
&= \sum_{\delta_1+\delta_2=\sigma} \int pg^{-1}(\omega', \delta_1, \delta_2)\alpha(g, g^{-1}\delta_1)\rho(g, g^{-1}\delta_1)f(g^{-1}(\delta_1 + \tilde{\omega}')) \\
&\qquad\qquad \times\ h(\omega' + \delta_2)\alpha(g^{-1}, \omega')\rho(g^{-1}, \omega')^{-1}d\omega' \\
&= \sum_{\delta_1+\delta_2=\sigma} \int pg^{-1}(\omega', \delta_1, \delta_2)\alpha(g, g^{-1}(\delta_1 + \tilde{\omega}'))\rho(g, g^{-1}(\delta_1 + \tilde{\omega}'))f(g^{-1}(\delta_1 + \tilde{\omega}')) \\
&\qquad\qquad \times h(\omega' + \delta_2)d\omega' \\
&= (B_{pg^{-1}}(\Gamma(U_g)f)h)(\sigma).
\end{aligned}
$$

■

4 Construction of self-similar operator fields

We shall now describe how the covariance property of the operator fields $B_p(\cdot)$ under the group action G can be exploited to construct a family of simultaneously self-similar fields. To this end consider a topological vector space $\mathcal{S}$ equipped with a homomorphism $g \to \pi(g)$ of the group G into the group of all bicontinuous linear isomorphisms of $\mathcal{S}$. Let $\mathcal{M}_G(X) \subset \mathcal{M}(X)$ be the subset of all G-invariant multipliers and let $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_G(X)$ be a fixed subset. Suppose that for every $p \in \mathcal{M}_0$ there exists a continuous linear map $L_p : \mathcal{S} \to \mathcal{K}(X)$ satisfying the relation

$$L_p\, \pi(g)\varphi = \tau_p(g)\Gamma(U_g)L_p\, \varphi,\ \ p \in \mathcal{M}_0,\ \ g \in G,\ \ \varphi \in \mathcal{S} \tag{4.1}$$

where τ_p is a homomorphism from G into the multiplicative group of all nonzero real scalars and $\Gamma(U_g)$ is defined by (3.8). Recall that $\mathcal{K}(X)$ is equipped with the topology induced by the family of norms given by (1.15). Define the operators $A_p(\varphi), A_p^\dagger(\varphi),\ \varphi \in \mathcal{S}$ by

$$A_p(\varphi) = B_p(L_p\varphi),\ \ A_p^\dagger(\varphi) = B_{\tilde{p}}((L_p\varphi)^\sim), p \in \mathcal{M}_0, \varphi \in \mathcal{S} \tag{4.2}$$

where $B_p(\cdot)$ is as in Theorem 2.2 and $\tilde{p}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \overline{p(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3)}$. From Corollary 2.4 we know that $A_p(\varphi)$ and $A_p^\dagger(\varphi)$ are adjoint to each other on the domain $\mathcal{K}(X)$. With these notations we have the following proposition.

Proposition 4.1: For any $p \in \mathcal{M}_0, \varphi \in \mathcal{S}$ let $A_p^\#(\varphi)$ denote either of the operators $A_p(\varphi), A_p^\dagger(\varphi)$ defined by (4.2). Then the following holds:

(i) For any fixed Maassen kernel f and multipliers $p_i \in \mathcal{M}_0,\ \ 1 \leq i \leq n$ the correspondence $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) \to A_{p_1}^\#(\varphi_1)A_{p_2}^\#(\varphi_2)...A_{p_n}^\#(\varphi_n)f$ from $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \cdots \times \mathcal{S}$ (n-fold) into $\mathcal{K}(X)$ is real multilinear and continuous;

(ii) If $\delta_\emptyset$ denotes the Maassen kernel defined by $\delta_\emptyset(\sigma) = 0$ or 1 according as $\sigma = \emptyset$

or $\neq \emptyset$ then

$$\langle \delta_\emptyset, A^{\#}_{p_1}(\pi(g)\varphi_1)A^{\#}_{p_2}(\pi(g)\varphi_2)\ldots A^{\#}_{p_n}(\pi(g)\varphi_n)\delta_\emptyset\rangle >$$
$$= \{\prod_{i=1}^{n}\tau_{p_i}(g)\}\langle\delta_\emptyset, A^{\#}_{p_1}(\varphi_1)A^{\#}_{p_2}(\varphi_2)\ldots A^{\#}_{p_n}(\varphi_n)\delta_\emptyset\rangle$$

for all $g \in G$, $\varphi_i \in \mathcal{S}$, $p_i \in \mathcal{M}_0$.

Proof: The first part is immediate from Corollary 2.7. To prove the second part observe that (4.1) and Theorem 3.1 together with the G-invariance of the p_i's imply

$$A^{\#}_{p_i}(\pi(g)\varphi_i) = \tau_{p_i}(g)\Gamma(U_g)A^{\#}_{p_i}(\varphi_i)\Gamma(U_g)^{-1}$$

and $\Gamma(U_g)\delta_\emptyset = \delta_\emptyset$. ■

Remark Property (ii) of the fields $\{A_p(\cdot), p \in \mathcal{M}_0\}$ may be interpreted as the simultaneous self-similarity of all their expectation values in the state $\delta_\emptyset$ where the self-similarity parameter for $A_p(\cdot)$ under the action of the group G is described by the homomorphism τ_p of G into the multiplicative group $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

We shall now illustrate Proposition 4.1 when $X = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, the Schwartz's space of rapidly decreasing C^∞ functions in $\mathbb{R}^d$ and $G = \mathbb{R}^d o(0,\infty)$, the semidirect product of the additive group $\mathbb{R}^d$ and the multiplicative group of positive real scalars with the group operation

$$(x,a)(x',a') = (x + a^{-1}x', aa'), \quad x, x' \in \mathbb{R}^d, \quad a, a' > 0.$$

Put $\tilde{x} = -x$ and define the measure m in X by

$$dm(x) = |x|^\mu \; h(\frac{x}{|x|})dx \tag{4.3}$$

where $|x|$ is the Euclidean norm of x and h is a nonnegative bounded measurable function on the unit sphere in $\mathbb{R}^d$ satisfying $h(y) = h(-y), |y| = 1$. Then $(\mathbb{R}^d, m, \sim)$ is a nonatomic separable and σ-finite measure space with m-preserving involution. Define the G-action on this measure space by $(x,a)y = ay$ for all $x, y \in \mathbb{R}^d, a > 0$. Then

$$\rho(g,y) = \left\{\frac{dm}{dmg}(y)\right\}^{1/2} = a^{-\frac{1}{2}(\mu+d)} \text{ if } g = (x,a). \tag{4.4}$$

Define

$$\alpha((x,a),y) = e^{iax.y} \tag{4.5}$$

where $x \cdot y$ is the scalar product between x, y in $\mathbb{R}^d$. Then α is a 1-cocycle of modulus unity for the G-action in $\mathbb{R}^d$ with quasi-invariant measure m given by (4.3) and furthermore $\alpha((x,a),-y) = \overline{\alpha((x,a),y)}$. Following the notations in (3.5) - (3.8) we have

$$\begin{aligned}
\alpha((x,a),\sigma) &= \exp\, ia\, x \cdot \Sigma_{y\in\sigma} y,\\
\rho((x,a),\sigma) &= a^{-\frac{1}{2}(\mu+d)\#\sigma},\\
(U_{(x,a)}f)(y) &= e^{i\,x\cdot y} a^{-\frac{1}{2}(\mu+d)} f(a^{-1}y), f \in L^2(m),\\
\{\Gamma(U_{(x,a)})g\}(\sigma) &= e^{ix\cdot\Sigma_{y\in\sigma} y} a^{-\frac{1}{2}(\mu+d)\#\sigma} g(a^{-1}\sigma),\ \ g \in L^2(m_\Gamma).
\end{aligned}$$

Let

$$(\pi(x,a)\varphi)(y) = \varphi(a(y-x)),\ \ (x,a) \in G,\ \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

With these notations we have the following proposition.

Proposition 4.2: For each G-invariant multiplier $p \in \mathcal{M}_G(\mathbb{R}^d)$ let $L_p : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^d, m, \sim)$ be a map satisfying

$$(L_p\varphi)(\sigma) = \hat{\varphi}(\sum_{y\in\sigma} y) F_p(\sigma), \sigma \in \Gamma(X)$$

where $\hat{\varphi}$ is the Fourier transform of φ and F_p satisfies the relation

$$F_p(a\sigma) = a^{d-\beta_p-\frac{1}{2}(\mu+d)\#\sigma} F_p(\sigma),\ \ \sigma \in \Gamma(X), \tag{4.6}$$

β_p being a real scalar. Then

$$L_p\pi(x,a)\varphi = a^{-\beta_p}\, \Gamma(U_{(x,a)}) L_p\varphi \tag{4.7}$$

for all $(x,a) \in G, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), p \in \mathcal{M}_G(\mathbb{R}^d)$.

Proof: We have

$$(\pi(x,a)\varphi)^\wedge(y) = e^{ix\cdot y} a^{-d} \hat{\varphi}(a^{-1}y).$$

By the definition of L_p we obtain

$$(L_p\pi(x,a)\varphi)(\sigma) = a^{-d} e^{ix.\Sigma_{y\in\sigma} y} \hat{\varphi}(a^{-1}\sum_{y\in\sigma} y) F_p(\sigma).$$

Now (4.7) follows from (4.6) and the definition of $\Gamma(U_{(x,a)})$. ∎

In order to construct functions $F_p, p \in \mathcal{M}_G(\mathbb{R}^d)$ satisfying the properties of Proposition 4.2 we shall make use of the following inequality.

Proposition 4.3 (P. Major [Maj]) Let $\theta_i > 0,\ 1 \leq i \leq n,\ n \geq 2, \theta_1 + \cdots + \theta_n < d$. Then

$$\int_{x_1+x_2+\cdots+x_n=x} \prod_{i=1}^{n} |x_i|^{\theta_i - d} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}$$
$$\leq C(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)|x|^{\theta_1+\cdots+\theta_n-d} \text{ for all } x \in \mathbb{R}^d,$$

where $|x|$ denotes the Euclidean norm in $\mathbb{R}^d, dx_j$ indicates integration with respect to the d-dimensional Lebesgue measure and $C(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$ is a positive constant.

Proof: This is done by straightforward induction in n. (For details see the proof of Proposition 6.3 in [Maj].). ■

Proposition 4.4 Let $r_j > 0, 1 \leq j \leq n, \sum_{j=1}^{n} r_j < \frac{d}{2}, -\infty < \beta < d$ and let

$$G_n(x_1, x_2, .., x_n) = |x_1 + \cdots + x_n|^{d-\beta-\sum_{j=1}^{n} r_j} \prod_{j=1}^{n} |x_j|^{r_j - \frac{1}{2}(\mu+d)}, x_j \in \mathbb{R}^d.$$

Then the following holds:
(i) $G_n(ax_1, ax_2, ..., ax_n) = a^{d-\beta-\frac{1}{2}(\mu+d)n} G_n(x_1, x_2, ..., x_n)$.
(ii) For any $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\int |\hat{\varphi}(\sum_{i=1}^{n} x_i) G_n(x_1, ..., x_n)|^2 dm(x_1)...dm(x_n)$$
$$\leq C \sup_x (1 + |x|^N)|\hat{\varphi}(x)|^2 \text{ for } N > 2(d-\beta)$$

where C is a constant independent of φ.

Proof (i) is immediate from definitions. To prove (ii) we denote by $C_1, C_2, ...$ constants independent of φ and observe that the boundedness of h in (4.3) together with Proposition 4.3 implies that, for $N > 2(d-\beta)$,

$$\int |\hat{\varphi}(\sum_{i=1}^{n} x_i) G_n(x_1, ..., x_n)|^2 \, dm(x_1)...dm(x_n)$$
$$\leq C_1 \int |\hat{\varphi}(x)|^2 |x|^{2(d-\beta-\sum_{j=1}^{n} r_j)} \left(\int_{x_1+\cdots+x_n=x} \prod_{j=1}^{n} |x_j|^{2r_j - d} dx_1 ... dx_{n-1}\right) dx$$
$$\leq C_2 \int |\hat{\varphi}(x)|^2 \ |x|^{d-2\beta} dx$$
$$\leq C_2 \sup_{|x|\leq 1} |\hat{\varphi}(x)|^2 \int_{|x|\leq 1} |x|^{d-2\beta} dx + C_2 \sup_{|x|>1} |x|^N |\hat{\varphi}(x)|^2 \int_{|x|>1} |x|^{d-2\beta-N} dx$$
$$\leq C \sup_x (1 + |x|^N)|\hat{\varphi}(x)|^2.$$ ■

Proposition 4.5: For each G-invariant multiplier $p \in \mathcal{M}_G(\mathbb{R}^d)$ let F_p be a function on $\Gamma(\mathbb{R}^d)$ given by

$$F_p(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{if } \sigma = \emptyset \\ c_p(n)\sum_{\pi \in \mathcal{G}_n} G_{n,p}(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)}) & \text{if } \sigma = \{x_1, ..., x_n\} \end{cases}$$

where $c_p(n)$ is a scalar, $c_p(n) = 0$ for $n > n_p$,

$$G_{n,p}(x_1, ..., x_n) = |x_1 + \cdots + x_n|^{d-\beta_p-\sum_{j=1}^n r(j,n,p)} \prod_{j=1}^n |x_j|^{r(j,n,p)-\frac{1}{2}(\mu+d)},$$

$-\infty < \beta_p < d, r(j,n,p) > 0, \sum_{j=1}^n r(j,n,p) < \frac{d}{2}$ and $\mathcal{G}_n$ is the group of all permutations on the set $\{1, 2, ..., n\}$. Define the linear map L_p on $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ by

$$(L_p\varphi)(\sigma) = \hat{\varphi}(\sum_{x \in \sigma} x)F_p(\sigma), \;\; p \in \mathcal{M}_G(\mathbb{R}^d).$$

Then the following are fulfilled:

(i) L_p is a continuous map from $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ into the space $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d, m, \sim)$ of all Maassen kernels, satisfying

$$\|(L_p\varphi)\| \leq C_p(N) \sup_x (1 + |x|^N)^{\frac{1}{2}} |\hat{\varphi}(x)| \;\text{ for }\; N > 2(d - \beta_p).$$

(ii) $L_p\pi(x, a)\varphi = a^{-\beta_p}\Gamma(U_{(x,a)})L_p\varphi$ for all $(x, a) \in G, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

(iii) If $A_p(\varphi), A_p^\dagger(\varphi), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ are defined by (4.2) then properties (i) and (ii) of Proposition 4.1 are fulfilled with

$$\tau_p((x, a)) = a^{-\beta_p} \;\text{ for all }\; (x, a) \in G, \;\; p \in \mathcal{M}_G(\mathbb{R}^d).$$

Proof: This is immediate from Proposition 4.2 and 4.4. ∎

Remark 4.6 Note that $p \in \mathcal{M}_G(\mathbb{R}^d)$ simply means that p is a bounded measurable function of disjoint triplets $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ of finite subsets of $\mathbb{R}^d$ satisfying the identity $p(a\sigma_1, a\sigma_2, a\sigma_3) \equiv p(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ for all $a > 0$. Thus Proposition 4.5 yields explicit examples of families of simultaneously self-similar fields $\{A_p(\cdot), p \in \mathcal{M}_G(\mathbb{R}^d)\}$ in the vacuum state $\delta_\emptyset$. If the measure m defined by (4.3) has the additional property that the function h on the unit sphere is a constant then the self-similarity property extends to the group of orthogonal transformations also. It follows from Proposition 4.5, Corollary 2.7 and the Schwartz's kernel theorem that the real multilinear functionals $\langle \delta_\emptyset, A_{p_1}^\#(\varphi_1)...A_{p_n}^\#(\varphi_n)\delta_\emptyset \rangle, (\varphi_1, ..., \varphi_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \cdots \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ are, indeed, restrictions of tempered distributions on $(\mathbb{R}^d)^n$ with self-similarity property under the G-action: $(x, a)(y_1, ..., y_n) = (ay_1 + x, ..., ay_n + x)$. It should be interesting to find out, under what conditions on p, the operators $A_p(\varphi) + A_p^\dagger(\varphi)$ are essentially selfadjoint on the domain $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ for all $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Remark 4.7 Consider the special case when $p \equiv 1$. Then for any two Maassen kernels $f, g, B_p(f)g = f * g$. By Theorem 1.4 the operators $A_p(\varphi) = A(\varphi), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ of Proposition 4.5 can be identified through the unitary conjugation by V as multiplication operators by random variables on a Gaussian random field with involution. Then the example in Proposition 4.5 yields a self-similar classical random field subordinate to a Gaussian random field. This is just a translation of the construction by P. Major [Maj] in terms of Maassen kernels.

We now conclude our discussion with the construction of a self-similar Clifford field by choosing an appropriate weight p. To this end we begin with a general proposition concerning *one-particle Maassen kernels*, i.e., kernels with support in $\{\sigma | \#\sigma = 1\}$.

Proposition 4.8 Let $(X, m, \sim)$ be as in Section 3, $p_1, p_2 \in \mathcal{M}(X)$ and let q be a scalar. For any two one-particle Maassen kernels f, g, the operator $B_{p_1}(f)B_{p_2}(g) + qB_{p_2}(g)B_{p_1}(f)$ is also the operator of multiplication by a bounded measurable function b on $\Gamma(X)$ if, for any $x, y \in X, \sigma \in \Gamma(X)$ such that $x \neq y, \{x, y\} \cap \sigma = \emptyset$ the following four relations hold:

(i) $p_1(\emptyset, \{x\}, \sigma + \{y\})p_2(\emptyset, \{y\}, \sigma) + qp_1(\emptyset, \{x\}, \sigma)p_2(\emptyset, \{y\}, \sigma + \{x\}) = 0$;
(ii) $p_1(\{x\}, \emptyset, \sigma)p_2(\{y\}, \emptyset, \sigma + \{x\}) + qp_1(\{x\}, \emptyset, \sigma + \{y\})p_2(\{y\}, \emptyset, \sigma) = 0$;
(iii) $p_1(\emptyset, \{x\}, \sigma)p_2(\{y\}, \emptyset, \sigma) + qp_1(\emptyset, \{x\}, \sigma + \{y\})p_2(\{y\}, \emptyset, \sigma + \{x\}) = 0$;
(iv) $p_1(\{x\}, \emptyset, \sigma + \{y\})p_2(\emptyset, \{y\}, \sigma + \{x\}) + qp_1(\{x\}, \emptyset, \sigma)p_2(\emptyset, \{y\}, \sigma) = 0$.

In such a case b is given by

$$b(\sigma) = \int p_1(\{x\}, \emptyset, \sigma)p_2(\emptyset, \{x\}, \sigma) + qp_1(\emptyset, \{\tilde{x}\}, \sigma)p_2(\{\tilde{x}\}, \emptyset, \sigma)f(\tilde{x})g(x)dm(x).$$

Proof: This is a consequence of somewhat tedious but straightforward verification by using the definition of $B_p(\cdot)$ in Theorem 2.2 and (2.1). ■

Proposition 4.9: In Proposition 4.8 let $p_1 = p_2 = p$ and $q = 1$. Suppose that $p(\emptyset, \{x\}, \sigma) \equiv \overline{p(\{x\}, \emptyset, \sigma)}$ and

$$p(\emptyset, \{x\}, \sigma) = \prod_{y \in \sigma} k(x, y)$$

where $k(x, y)$ is a complex-valued function of modulus unity on $\{(x, y) : x \neq y\} \subset X \times X$ satisfying the relation

$$k(x, y) + k(y, x) \equiv 0.$$

Then, for any two one-particle Maassen kernels f, g, the following holds:

(i) $B_p(f)B_p(g) + B_p(g)B_p(f) = 2\int f(\tilde{x})g(x)dm(x)$;
(ii) $B_p^\dagger(f) = B_p(\tilde{f})$

where $f(x) \equiv f(\{x\})$.

Proof: (i) is an immediate consequence of Proposition 4.8 whereas (ii) follows from Corollary 2.4. ∎

Remark 4.10 It is clear from Proposition 4.9 that $B_p(f)$ extends to a bounded operator in $L^2(m_\Gamma)$. Indeed,

$$B_p(f)B_p^\dagger(f) + B_p^\dagger(f)B_p(f) = 2\int |f(x)|^2 dm(x).$$

Thus the closure of the operators $B_p(f), f \in L^2(m)$ yields a Clifford field.

Remark 4.11: Choose $X = \mathbb{R}^d$, $\tilde{x} = -x$,

$$dm(x) = |x|^\mu \; h(\frac{x}{|x|})dx$$

where μ is a real scalar, h is a bounded, nonnegative and measurable function on the unit sphere in $\mathbb{R}^d$ and the multiplier p in Proposition 4.9 is chosen with

$$k(x,y) = \begin{cases} e^{i\theta} & \text{if } x > y \, , \\ -e^{-i\theta} & \text{if } x < y \end{cases}$$

where $\mathbb{R}^d$ is equipped with the lexicographic order and θ is a fixed real scalar. Then p is invariant under the action of the group $G = \mathbb{R}^d o(0,\infty)$ in $\Gamma(\mathbb{R}^d)$. Define, for any $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$(L_p\varphi)(\sigma) = \begin{cases} \hat{\varphi}(x)|x|^{\frac{1}{2}(d-\mu)-\beta} & \text{if } \sigma = \{x\}, \;\; x \in \mathbb{R}^d, \\ 0 & \text{if } \#\sigma \neq 1,. \end{cases}$$

where $\hat{\varphi}$ is the Fourier transform of φ and β is a real scalar satisfying $-\infty < \beta < d$. Let $A(\varphi)$ denote the closure of $B_p(L_p\varphi)$. Then it follows from Proposition 4.5, 4.9 and Remark 4.6, 4.10 that the family $\{A(\varphi), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\}$ satisfies the following:
(i) $A(\varphi)$ is a bounded operator in $L^2(m_\Gamma)$ and $A(\varphi)^* = A(\bar{\varphi})$;
(ii) $A(\varphi)A(\psi) + A(\psi)A(\varphi) = 2\int \hat{\varphi}(-x)\hat{\psi}(x)|x|^{d-2\beta}h(\frac{x}{|x|})dx$;
(iii) The correspondence $(\varphi_1, ..., \varphi_n) \to A(\varphi_1)...A(\varphi_n)$ is strongly continuous;
(iv) $\langle \delta_\emptyset, A(\pi(x,a)\varphi_1)...A(\pi(x,a)\varphi_n)\delta_\emptyset\rangle = a^{-n\beta}\langle \delta_\emptyset, A(\varphi_1)...A(\varphi_n)\delta_\emptyset\rangle$, where

$$(\pi(x,a)\varphi)(y) = \varphi(a(y-x)), \;\; x,y \in \mathbb{R}^d, \;\; a > 0.$$

Thus we have constructed a self-similar Clifford field with self-similarity parameter β. If β is varied in the interval $(-\infty, d)$ the fields constructed above are jointly self-similar. If, in addition, h is a constant then, in the vacuum state, the expectation values of the Clifford field thus constructed are invariant under the action of the orthogonal group.

References

[Li M 1] Lindsay, J.M., Maassen, H.: The stochastic calculus of bose noise, Preprint, 1988.

[Li M 2] Lindsay, J.M., Maassen, H.: An integral kernel approach to noise. In: Quantum Probability and Applications III (Proceedings, Oberwolfach 1987). Accardi, L., von Waldenfels, W. (eds). LNM 1303, pp. 192-208. Springer, Berlin 1988.

[Li P] Lindsay, J.M., Parthasarathy, K.R.: Cohomology of power sets with applications in quantum probability, Commun. Math. Phys. 124, 337-364 (1989).

[Maa] Maassen, H.: Quantum Markov processes on Fock space described by integral kernels. In: Quantum Probability and Applications II. Accardi, L., von Waldenfels, W. (edrs). LNM 1136, pp. 361-374, Springer, Berlin 1985.

[Mac] Mackey, G.W.: Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics, W.A. Benjamin, Inc., New York 1968.

[Maj] Major, P.: Multiple Wiener-Itô Integrals, LNM 849, Springer, Berlin 1981.

[Mey] Meyer, P.: Quantum Probability for Probabilists, LNM 1538, Springer, Berlin 1993.

K.R. Parthasarathy
Indian Statistical Institute, Delhi Centre,
7, S.J.S. Sansanwal Marg,
New Delhi - 110016, India
e-mail: krp@isid.ernet.in

J. W. PITMAN

M. YOR

Quelques identités en loi pour les processus de Bessel

Astérisque, tome 236 (1996), p. 249-276

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__249_0>

Quelques identités en loi pour les processus de Bessel

J. W. Pitman, M. Yor

Résumé. — Nous rassemblons certaines identités en loi concernant les intégrales de R^{-1}, R^2, ainsi que le supremum de R, processus de Bessel de dimension 1, 2 ou 3, puis nous les étendons convenablement à toute dimension. Ces généralisations mettent en jeu certains processus qui "interpolent" entre les ponts et les processus de Bessel. Elles interviennent aussi bien dans des études appliquées, par exemple : calcul de prix d'options, que pour certaines questions d'équations non linéaires.

1. Introduction.

(1.0) Dans toute la suite, $(R_t, t \geq 0)$ désigne un processus de Bessel de dimension $\delta > 0$, issu de 0, et $(r(t), 0 \leq t \leq 1)$ est le pont de Bessel standard, (c'est-à-dire : qui satisfait $r(0) = r(1) = 0$), de dimension δ. Pour la définition précise de ces processus, voir, par exemple, Revuz-Yor [23], chapitre XI.

(1.1) L'objet de ce travail est de démontrer, et de rassembler certaines identités en loi, nouvelles, ou bien un peu éparpillées dans la littérature, concernant les fonctionnelles : $\int_0^1 \frac{ds}{R_s}$, $\int_0^1 ds\, R_s^2$, $\sup_{s \leq 1} R_s$, ainsi que les fonctionnelles correspondantes pour r. Nous avons présenté ces identités, pour les dimensions $\delta = 1, 2, 3$, dans les deux tableaux suivants :

Cette recherche a été réalisée en partie avec l'aide de NSF Grant DMS-9404345.

Dimension δ	Décomposition canonique	Identité en loi
1	$R_t = \beta_t + L_t$	$L_t \underset{\text{p.s.}}{=} \sup_{s\leq t}(-\beta_s)$
2	$R_t = \beta_t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s}$	$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s} \overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{s\leq t} \lvert\beta_s\rvert$
3	$R_t = \beta_t + \int_0^t \frac{ds}{R_s}$	$\int_0^t \frac{ds}{R_s} \overset{\text{(loi)}}{=} S_t + I_t$

Tableau I

Dimension δ	Décomposition canonique	Identité en loi
1	$r(t) \equiv \lvert b(t)\rvert$ $= \gamma(t) - \int_0^t \frac{ds\, r(s)}{(1-s)} + \ell_t$	$\ell_1 \overset{\text{(loi)}}{=} 2S^{(b)}$
2	$r(t) = \gamma(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{r(s)} - \int_0^t \frac{ds\, r(s)}{(1-s)}$	$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{r(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{s\leq 1} R_3(s)$
3	$r(t) = \gamma(t) + \int_0^t \frac{ds}{r(s)} - \int_0^t \frac{ds\, r(s)}{(1-s)}$	$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{r(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} S^{(b)} + I^{(b)}$ $\overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{s\leq 1} r(s)$

Tableau II

(1.2) Voici quelques précisions concernant les *Notations* utilisées dans les deux Tableaux ci-dessus.

Dans le Tableau I, $(\beta_t, t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien issu de 0; $S_t = \sup_{s\leq t}\beta_s$, $I_t = -\inf_{s\leq t}\beta_s$, $L_t = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t ds\, 1\!\!1_{(R_s\leq\varepsilon)}$ $(\delta = 1)$; les deux dernières identités en loi $[\delta = 2,3]$ ont lieu à t fixé; la première identité est une identité presque sûre entre les deux processus $(L_t, t \geq 0)$ et $\left(\sup_{s\leq t} -\beta_s, t \geq 0\right)$.

Dans le Tableau II, $\big(b(t), t \leq 1\big)$ désigne un pont brownien standard, $S^{(b)} = \sup_{s\leq 1} b(s)$, $I^{(b)} = -\inf_{s\leq 1} b(s)$, $\big(\gamma(t), t \geq 0\big)$ désigne un mouvement brownien réel, $\big(R_3(t), t \geq 0\big)$ désigne un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0; enfin, on note :

$$\ell_t = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t ds\, 1\!\!1_{\left(\lvert b(s)\rvert\leq\varepsilon\right)} \qquad (\delta = 1)$$

(1.3) L'organisation de ce travail est la suivante :

– dans le paragraphe 2, nous montrons les identités en loi du Tableau I, et nous les étendons sous des formes convenables à toute dimension δ;

– dans le paragraphe 3, nous faisons de même avec les identités en loi du Tableau II;

– dans le paragraphe 4, on exploite les identités de Ciesielski-Taylor [6] pour obtenir une identité en loi (cf : Théorème 3) dans laquelle l'un des membres est $\sup_{s\leq 1} R(s)$;

– dans le paragraphe 5, nous étudions les lois conjointes de $\left(R_1, \int_0^1 \frac{ds}{R_s}\right)$; en fait, ces résultats sont présentés pour une famille de processus qui "interpolent" entre les processus et les ponts de Bessel, comprenant en particulier les méandres.

(1.4) Les origines et les motivations de ce travail sont variées :

a) tout d'abord, nous résolvons ici une ancienne question posée dans le dernier chapitre de notre article [20], à savoir : expliciter la loi conjointe de $\left(R_t, \int_0^t \frac{ds}{R_s}\right)$, R étant un procesus de Bessel;

b) nous aurions souhaité également donner une présentation plus "transparente" que celle qui figure en [5] des calculs de transformées de Fourier des lois de valeurs principales associées aux temps locaux browniens;

c) nous sommes parvenus, par hasard, à l'identité en loi du Tableau I pour $\delta = 2$, en nous intéressant aux propriétés d'intégrabilité du temps local d'intersection renormalisé $(\gamma_t, t \geq 0)$ pour le mouvement brownien plan;
nous montrons, en appendice, à l'aide des formules de Tanaka-Rosen que pour t fixé, γ_t possède des moments exponentiels. Une démonstration élémentaire (c'est-à-dire, ne s'appuyant pas sur le calcul stochastique) vient d'être donnée indépendamment par J.F. Le Gall [14];

d) enfin, nous sommes heureux de mentionner qu'une partie des identités en loi qui figurent dans ce travail joue un rôle important pour certains calculs exacts de prix d'options (B. Leblanc [13]) ainsi que pour les estimations de solutions fondamentales d'équations non linéaires (Benachour-Roynette-Vallois [1]).

Remerciements : Nous remercions le referee pour ses remarques simplificatrices, et sa lecture soigneuse qui nous a permis de rectifier les valeurs des paramètres qui figurent dans l'énoncé du Théorème 1.

2. Démonstrations et extensions à toute dimension des identités en loi du Tableau I.

(2.1) Comme cela a déjà été dit en **(1.2)**, l'identité pour $\delta = 1$ est une identité presque sûre entre les deux processus indiqués. Cette identité, très classique, est démontrée habituellement grâce au lemme de Skorokhod (voir [23], p. 222–223).

(2.2) Soit maintenant $\delta > 1$. Une première étape dans la démonstration des identités en loi pour $\delta = 2$, et $\delta = 3$ consiste à utiliser l'identité :

$$(2.a)_\delta \qquad \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{R_s} \overset{\text{(loi)}}{=} \left(\int_0^1 ds\, \widehat{R}_s^2\right)^{-\frac{1}{2}} ,$$

où $(R_s, s \geq 0)$, resp : $(\widehat{R}_s, s \geq 0)$ désigne ici un processus de Bessel de dimension δ (> 1), resp : $\widehat{\delta} = 2\delta - 2$, issu de 0.

L'identité en loi *(2.a)*$_\delta$ figure en ([23], p. 417), où il est montré qu'elle découle de la propriété de scaling :

$$(2.b) \qquad (R_{cs}; s \geq 0) \overset{\text{(loi)}}{=} (\sqrt{c}R_s, s \geq 0)$$

de R (et $\widehat{R}$), et de la représentation suivante de R, en fonction (implicite!) de $\widehat{R}$ (voir la Proposition 1.11 de [23]) : R étant donné, il existe un processus de Bessel $\widehat{R}$, de dimension $\widehat{\delta}$ tel que :

$$(2.c) \qquad R_t = \tfrac{1}{4}\, \widehat{R}^2\left(\int_0^t \tfrac{ds}{R_s}\right), \quad t \geq 0 .$$

(2.3) Ces rappels étant faits, nous montrons maintenant la seconde identité en loi du Tableau I : dans le cas $\delta = 2$, l'identité *(2.a)*$_{\delta=2}$ nous donne, puisque $\widehat{\delta} = \delta = 2$:

$$(2.d) \qquad \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{R_s} \overset{\text{(loi)}}{=} \left(\int_0^1 ds\, R_s^2\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Or, on voit facilement, par identification des transformées de Laplace, ou bien à l'aide du théorème de Ray-Knight pour les temps locaux browniens (cf. paragraphe 4.1 de [29]) que l'on a :

$$(2.e) \qquad \int_0^1 ds\, R_s^2 \overset{\text{(loi)}}{=} T_1 \overset{\text{def}}{=} \inf\{t : |\beta_t| = 1\} .$$

Or, toujours grâce au scaling brownien, on a :

$$(2.f) \qquad T_1 \overset{\text{(loi)}}{=} \left(\sup_{s\leq 1} |\beta_s|\right)^{-2} .$$

Finalement, à l'aide de *(2.d)*, *(2.e)* et *(2.f)*, on obtient l'identité en loi cherchée.

(2.4) Dans le cas $\delta = 3$, on a $\widehat{\delta} = 4$; nous allons utiliser ici des arguments semblables à ceux développés en **(2.3)**, mais en remplaçant maintenant T_1 par $\theta_c \overset{\text{def}}{=} \inf\{t \geq 0 : S_t + I_t \geq c\}$.

D'une part, on utilise l'identité en loi $(2.a)_\delta$, pour $\delta = 3$, et la forme explicite de la transformée de Laplace de : $\int_0^1 ds\, \widehat{R}_s^2$, qui est :

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 ds\, \widehat{R}_s^2\Big)\Big] = \frac{1}{(\operatorname{ch}\lambda)^{\widehat{\delta}/2}} \tag{2.g}$$

(voir, par exemple, Pitman-Yor [21], ou Yor [29], p. 16).

Pour $\delta = 3$, on a $\dfrac{\widehat{\delta}}{2} = \delta - 1 = 2$, et on déduit de *(2.g)* l'identité en loi

$$\int_0^1 ds\, \widehat{R}_s^2 \overset{\text{(loi)}}{=} T_1 + \tilde{T}_1 ,$$

où $\tilde{T}_1$ est une copie indépendante de T_1, variable définie en *(2.e)*.

D'autre part, d'après Imhof [10], ou Vallois ([24], [25]), on a :

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2}\,\theta_c\Big)\Big] = \mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\lambda^2 c^2}{8}\,\theta_2\Big)\Big] = \frac{1}{\left(\operatorname{ch}\frac{\lambda c}{2}\right)^2} .$$

En particulier, on a : $\theta_2 \overset{\text{(loi)}}{=} T_1 + \tilde{T}_1$; or, par scaling, $\theta_2 \overset{\text{(loi)}}{=} \dfrac{4}{(S_1 + I_1)^2}$. En comparant ces différentes identités en loi, on obtient finalement

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{R_s} \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{S_1 + I_1}{2} ,$$

ce qui démontre la dernière identité en loi du Tableau I.

(2.5) Nous montrons maintenant comment on peut généraliser les identités en loi du Tableau I, à toute dimension $\delta > 1$.

Désignons par $(C_a^{\widehat{\delta}}; a \geq 0)$ le processus des temps locaux, sur tout $\mathbb{R}_+$, associé au processus $\big(|\beta_t| + \frac{2}{\widehat{\delta}}\ell_t \equiv |\beta_t| + \frac{1}{\delta-1}\ell_t\ ;\ t \geq 0\big)$.

Rappelons l'extension suivante des théorèmes de Ray-Knight (cf. Le Gall-Yor [16]) :

$$(\widehat{R}_a^2; a \geq 0) \overset{\text{(loi)}}{=} (C_a^{\widehat{\delta}}; a \geq 0) ,$$

où $(\widehat{R}_a; a \geq 0)$ désigne toujours un processus de Bessel de dimension $\widehat{\delta}$, issu de 0. On en déduit :

$$\int_0^1 da\, \widehat{R}_a^2 \overset{\text{(loi)}}{=} \int_0^\infty ds\, \mathbb{1}_{\left(|\beta_s| + \frac{2}{\widehat{\delta}}\ell_s \leq 1\right)} .$$

Admettons pour l'instant que l'on puisse trouver un processus $(Z_t^\delta, t \geq 0)$ ayant la propriété de scaling du mouvement brownien, et tel que :

$$\int_0^\infty ds\, \mathbb{1}_{\left(|\beta_s| + \frac{2}{\widehat{\delta}}\ell_s \leq 1\right)} \overset{\text{(loi)}}{=} T_1(Z^\delta) \overset{\text{def}}{=} \inf\{t : Z_t^\delta = 1\} .$$

On pourra alors déduire de ces différentes identités en loi, considérées conjointement avec $(2.a)_\delta$ l'identité :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{R_s} \overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{t\leq 1} Z_t^\delta .$$

Le théorème suivant montre que l'on peut réaliser complètement ce programme, tout au moins pour certaines valeurs de δ.

THÉORÈME 1 : *Soit* $\frac{3}{2} < \delta$, *et* $(\beta_t, t \geq 0)$ *mouvement brownien réel, issu de* 0.

1) Il existe un unique processus $(Z_t, t \geq 0)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$, *solution de l'équation :*

$$Z_t = \beta_t + (2-\delta)\, S_t^Z + \ell_t^Z\,, \tag{2.h}$$

où $S_t^Z \overset{\text{def}}{=} \sup_{s\leq t} Z_s$, *et* $(\ell_t^Z, t \geq 0)$ *désigne le temps local en* 0 *de* Z. *On notera* $Z_t \equiv Z_t^\delta$.

2) On a les identités en loi :

$$\left(\int_0^1 \frac{ds}{R_s}\right)^2 \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{4}{\int_0^1 ds\, \widehat{R}_s^2} \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{4}{T_1(Z^\delta)} \overset{\text{(loi)}}{=} \left(2S_1^{Z^\delta}\right)^2 ,$$

où R, *resp :* $\widehat{R}$, *désigne un processus de Bessel de dimension* δ, *resp :* $\widehat{\delta} = 2(\delta-1)$, *issu de* 0, *et, finalement :*

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{R_s} \overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{s\leq 1} Z_s^\delta .$$

Démonstration : (i) Admettons provisoirement la première assertion du théorème. D'après les remarques qui précèdent l'énoncé, il nous suffit de vérifier, pour démontrer la seconde assertion, que l'on a :

$$\int_0^\infty ds\, \mathbb{1}_{\left(|\beta_s| + \frac{2}{\widehat{\delta}}\ell_s \leq 1\right)} \overset{\text{(loi)}}{=} T_1(Z^\delta)\,. \tag{2.i}$$

Pour simplifier l'écriture, posons $\alpha = \frac{\widehat{\delta}}{2} = \delta - 1$, et écrivons le membre de gauche de *(2.i)* en nous appuyant sur le théorème de Pitman [19] permettant de représenter le processus de Bessel de dimension 3 $(R_t, t \geq 0)$ comme $(2S_t - B_t, t \geq 0)$, où $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien réel, et $S_t = \sup_{s\leq t} B_s$.

On a tout d'abord, d'après la représentation de Lévy du mouvement brownien réfléchi :

$$\left(|\beta_t| + \tfrac{1}{\alpha}\ell_t\,,\ t \geq 0\right) \overset{\text{(loi)}}{=} \left((1+\tfrac{1}{\alpha})S_t - B_t\,;\ t \geq 0\right),$$

puis, on écrit :

$$X_t \stackrel{\text{def}}{=} (1+\tfrac{1}{\alpha})S_t - B_t = R_t + (\tfrac{1}{\alpha}-1)J_t\,, \qquad \text{où} \quad J_t = \inf_{u\geq t} R_u\,.$$

On retourne ensuite le processus (X_t) en $L = \sup\{t : X_t = 1\}$. En conséquence de l'égalité suivante entre processus :

$$\inf_{s\geq t} X_s = \frac{1}{\alpha}\, J_t\,,$$

on obtient : $L = \tau_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t : B_t = \alpha\} = \sup\{t : R_t = \alpha\}$, puis, d'après Williams [27], $(\beta_t = \alpha - R_{L-t}\,;\ t \leq L)$ est un mouvement brownien arrêté en son premier temps de passage en α. On obtient alors aisément :

$$1 - X_{L-t} = \beta_t + (\tfrac{1}{\alpha}-1)\sigma_t\,, \qquad \text{où} \quad \sigma_t = \sup_{s\leq t} \beta_s\,,$$

et on a aussi : $\tau_\alpha = \inf\left\{t : \beta_t + (\frac{1}{\alpha}-1)\sigma_t = 1\right\}$.

On en déduit :

$$\int_0^\infty dt\, \mathbb{1}_{(X_t\leq 1)} = \int_0^L dt\, \mathbb{1}_{(X_{L-t}\leq 1)} = \int_0^L dt\, \mathbb{1}_{(1-X_{L-t}\geq 0)} \stackrel{\text{(loi)}}{=} \int_0^{\tau_\alpha} dt\, \mathbb{1}_{\left(\beta_t+(\frac{1}{\alpha}-1)\sigma_t\geq 0\right)}\,.$$

On a donc pu représenter le membre de gauche de *(2.i)* sous la forme

$$\int_0^{\tau_\alpha} dt\, \mathbb{1}_{\left(\beta_t+(\frac{1}{\alpha}-1)\sigma_t\geq 0\right)}\,.$$

Posons maintenant $\nu = \frac{1}{\alpha} - 1$, et écrivons la formule de Tanaka pour $(\beta_t + \nu\sigma_t)^+$. Il vient :

$$(\beta_t + \nu\sigma_t)^+ = \int_0^t \mathbb{1}_{(\beta_s+\nu\sigma_s\geq 0)}\, d(\beta_s + \nu\sigma_s) + \tfrac{1}{2}\ell_t^\nu\,,$$

où $(\ell_t^\nu, t \geq 0)$ désigne le temps local en 0 de $(\beta_t + \nu\sigma_t, t \geq 0)$. Posons maintenant : $Y_t = \beta_t + \nu\sigma_t$; alors : $S_t^Y = (\nu+1)\,\sigma_t$. On a donc :

$$Y_t^+ = \int_0^t \mathbb{1}_{(Y_s\geq 0)}\, d\beta_s + \frac{\nu}{\nu+1}\, S_t^Y + \tfrac{1}{2}\ell_t^\nu\,.$$

Notons $(\mu_t, t \geq 0)$ l'inverse du processus croissant $\left(\int_0^t ds\, \mathbb{1}_{(Y_s\geq 0)}, t \geq 0\right)$, et remarquons que, à l'aide de la propriété de scaling du mouvement brownien, on a : $\int_0^\infty ds\, \mathbb{1}_{(Y_s\geq 0)} = \infty$ p. s.

On montre alors que le processus $(Z_t = Y_{\mu_t}^+\,,\ t \geq 0)$ satisfait :

$$Z_t = \tilde{\beta}_t + \frac{\nu}{\nu+1}\, S_t^Z + \ell_t^Z\,,$$

où $(\tilde{\beta}_t)$ est un mouvement brownien réel; cette dernière équation est précisément l'équation *(2.h)*.

(ii) Nous montrons maintenant la première assertion du théorème. Réécrivons l'équation *(2.h)* sous la forme :

$$(2.h)_a \qquad Z_t = \beta_t + aS_t^Z + \ell_t^Z \ , \quad t \geq 0 \ ,$$

où l'on a posé : $a = 2-\delta$. La condition : $\frac{3}{2} < \delta$ équivaut à : $a < \frac{1}{2}$. D'après la remarque qui suit la Proposition 6.2 de [17], un argument de point fixe permet alors de résoudre l'équation $(2.h)_a$ en montrant l'existence et l'unicité d'une solution forte : on commence par appliquer le lemme de Skorokhod pour écrire :

$$\ell_t^Z = \sup_{s\leq t} (-\beta_s - aS_s^Z) \ ,$$

puis on utilise l'argument de point fixe.

Remarque : Il est vraisemblable que l'on puisse remplacer la condition : $\frac{3}{2} < \delta$, qui figure dans l'énoncé du théorème, par la condition moins restrictive : $\delta > 1$.

Toutefois, il faudrait (par exemple) pouvoir montrer l'existence et l'unicité d'une solution forte de $(2.h)_a$, pour tout $a < 1$. Cette difficulté a déjà été rencontrée en [17], Proposition 6.2, et résolue uniquement lorsque l'on considère l'équation

$$Z_t = \varepsilon + \beta_t + a\, S_t^Z + \ell_t^Z \ , \qquad \text{pour} \quad \varepsilon > 0 \ .$$

(2.6) En complément aux identités en loi démontrées ci-dessus, il nous a paru intéressant de développer les calculs explicites suivants, qui caractérisent, via une transformation de Laplace (en t) la loi conjointe de

$$\left(R_t \ , \ H_t \overset{\text{def}}{=} \int_0^t \frac{ds}{R_s}\right) .$$

Nous allons utiliser la notation et les hypothèses suivantes : S_θ désigne un temps exponentiel de paramètre $\frac{\theta^2}{2}$ $(\theta > 0)$, indépendant du processus de Bessel $(R_s, s \geq 0)$, de dimension $\delta > 1$, issu de 0.

On a alors le

THÉORÈME 2 : *1) Soit $\delta > 1$. Pour tous $a \geq 0$, $b \geq 0$, on a :*

$$\mathbb{E}[\exp(-aR_{S_\theta} - bH_{S_\theta})] = \int_0^\infty du \, \exp(-bu)\, (\delta-1)\left(\frac{\theta}{2}\operatorname{sh}\frac{\theta u}{2}\right)\left[\operatorname{ch}\frac{\theta u}{2} + \frac{a}{\theta}\operatorname{sh}\frac{\theta u}{2}\right]^{-\delta} .$$

2) En particulier, on a :

$$\mathbb{P}(H_{S_\theta} \in du) = (\delta-1)\left(\frac{\theta}{2}\operatorname{sh}\frac{\theta u}{2}\right)\left(\operatorname{ch}\frac{\theta u}{2}\right)^{-\delta} du \ ,$$

ou, de façon équivalente :

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\theta}{2} H_{S_\theta}\right) \overset{\text{(loi)}}{=} U^{-\frac{1}{\delta-1}},$$

où U désigne une variable uniforme sur $[0,1]$.

3) Enfin, on a : $\mathbb{E}\left[\exp(-aR_{S_\theta}) \,\middle|\, H_{S_\theta} = u\right] = \left(1 + \frac{a}{\theta} \operatorname{th} \frac{\theta u}{2}\right)^{-\delta}$ *, ou encore, de façon équivalente :*

$$\textit{conditionnellement à } H_{S_\theta} = u, \quad R_{S_\theta} \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{\operatorname{th} \frac{\theta u}{2}}{\theta} Z_\delta ,$$

où Z_δ désigne une variable gamma de paramètre δ, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(Z_\delta \in dx) = \frac{dx}{\Gamma(\delta)} x^{\delta-1} \exp(-x) . \qquad (x > 0)$$

Démonstration : Définissons :

$$\Phi \equiv \Phi_\theta(a,b) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[\lambda \int_0^\infty dt\, e^{-\lambda t} e^{-(aR_t + bH_t)}\right] \equiv \mathbb{E}\left[e^{-(aR_{S_\theta} + bH_{S_\theta})}\right]$$

où l'on a noté : $\lambda = \frac{\theta^2}{2}$.

En faisant le changement de variables $u = H_t$ dans l'intégrale en (dt), et en utilisant la relation *(2.c)*, il vient :

$$\begin{aligned}\Phi &= \lambda \mathbb{E}\left[\int_0^\infty du \left(\frac{1}{4}\widehat{R}_u^2\right) \exp\left(-\tfrac{\lambda}{4} \textstyle\int_0^u dv\, \widehat{R}_v^2 - \tfrac{a}{4}\widehat{R}_u^2\right) \exp(-bu)\right] \\ &= \lambda \int_0^\infty du \exp(-bu)\, \mathbb{E}\left[\left(\tfrac{1}{4}\widehat{R}_u^2\right) \exp\left(-\tfrac{a}{4}\widehat{R}_u^2 - \tfrac{\lambda}{4} \textstyle\int_0^u dv\, \widehat{R}_v^2\right)\right]\end{aligned}$$

À l'aide de la formule suivante (voir, par exemple, Yor [29], p. 16) :

$$\text{(2.j)} \qquad \mathbb{E}\left[\exp\left(-\alpha \widehat{R}_u^2 - \tfrac{\beta^2}{2} \textstyle\int_0^u dv\, \widehat{R}_v^2\right)\right] = \left(\operatorname{ch}(\beta u) + 2\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh}(\beta u)\right)^{-(\delta-1)}$$

que nous allons appliquer avec : $\alpha = \dfrac{a}{4}$, et $\beta = \dfrac{\theta}{2}$, on obtient, en dérivant les deux membres de *(2.j)* par rapport à α :

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{4}\widehat{R}_u^2\right) \exp -\left(\frac{a}{4}\widehat{R}_u^2 + \frac{\theta^2}{8} \int_0^u dv\, \widehat{R}_v^2\right)\right] = \left(\frac{\delta-1}{\theta} \operatorname{sh} \frac{\theta u}{2}\right) \left(\operatorname{ch} \frac{\theta u}{2} + \frac{a}{\theta} \operatorname{sh} \frac{\theta u}{2}\right)^{-\delta} .$$

On déduit de cette dernière formule l'expression de

$$\Phi \equiv \mathbb{E}\left[\exp\left(-aR_{S_\theta} - bH_{S_\theta}\right)\right]$$

présentée dans le théorème. Les assertions 2) et 3) du théorème découlent aisément de cette expression de Φ.

3. Démonstration et extension à toute dimension des identités en loi du Tableau II.

(3.1) Soit $\delta = 1$. Nous allons combiner, pour le *mouvement brownien* $(\beta_t, t \geq 0)$, l'identité en loi de Paul Lévy, et la transformation de Sparre-Andersen due à Karatzas-Shreve (voir, par exemple, Bertoin [2], Embrechts-Rogers-Yor [7], et Yor [32] pour cette combinaison) :

notons $\qquad A_1^+ = \int_0^1 ds\, \mathbb{1}_{(\beta_s > 0)} \qquad$ et $\qquad \theta_1^+ = \sup\{s < 1 : S_s = \beta_s\}$;

on obtient l'identité en loi suivante :

$$(3.a) \qquad \left(\beta_1^+ + \tfrac{1}{2}L_1, \beta_1^- + \tfrac{1}{2}L_1, A_1^+\right) \overset{\text{(loi)}}{=} \left(S_1, S_1 - \beta_1, \theta_1^+\right)$$

et ses conséquences :

$$(3.b) \qquad \left(|\beta_1| + L_1, \beta_1, A_1^+\right) \overset{\text{(loi)}}{=} \left(2S_1 - \beta_1, \beta_1, \theta_1^+\right)$$

et

$$(3.c) \qquad \left(\tfrac{1}{2}L_1, \beta_1, A_1^+\right) \overset{\text{(loi)}}{=} \left(\min(S_1, S_1 - \beta_1), \beta_1, \theta_1^+\right).$$

En conditionnant l'une ou l'autre de ces identités par $\beta_1 = 0$, on obtient en particulier la première identité en loi du Tableau II.

(3.2) Soit maintenant $\delta > 1$. Une première étape pour la démonstration des identités pour $\delta = 2$ et $\delta = 3$ est la relation suivante :
pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne, on a :

$$(3.d)_\delta \qquad \lambda_\delta\, \mathbb{E}\left[f\left(\tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^1 \frac{ds}{r(s)}\right)\left(\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{ds}{r(s)}\right)^{\delta-2}\right] = \lambda_{\hat\delta}\, \mathbb{E}\left[f\left(\left(\textstyle\int_0^1 ds\, \hat r^2(s)\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\right]$$

où l'on a noté : $\lambda_\delta = \left(2^{\frac{\delta}{2}-1}\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^{-1}$. La relation $(3.d)_\delta$ est obtenue en particularisant avec $p = q = 2$ la relation du Théorème 3.5, p. 432 de [23], laquelle découle de la relation *(2.c)*.

(3.3) Nous montrons maintenant la seconde identité en loi du Tableau II : dans le cas $\delta = 2$ $(= \hat\delta)$, la relation $(3.d)_{\delta=2}$ nous donne :

$$(3.e) \qquad \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{r(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} \left(\int_0^1 ds\, r^2(s)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ensuite, on peut montrer, de différentes manières, que les variables $\int_0^1 ds\, r^2(s)$ et $T_1^{(3)} \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t : R_t^{(3)} = 1\}$ ont même loi : elles ont pour transformée de Laplace commune, en $\frac{\lambda^2}{2}$, la fonction : $\frac{\lambda}{\operatorname{sh}\lambda}$; plus profondément, le processus des temps locaux $\left(L^a_{T_1^{(3)}}\,;\ 0 \le a \le 1\right)$ de $\left(R_u^{(3)}, u \le T_1^{(3)}\right)$ est un carré de pont de Bessel de dimension 2 (voir D. Williams [27], ou Pitman-Yor [21]).

Finalement, on a, à l'aide d'arguments usuels de scaling :

$$\left(\int_0^1 ds\, r^2(s)\right)^{-\frac{1}{2}} \stackrel{(\text{loi})}{=} \sup_{s\le 1} R_s^{(3)} ,$$

et la seconde identité du Tableau II découle alors de *(3.e)*.

(3.4) Les deux identités en loi :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{r(s)} \stackrel{(\text{loi})}{=} \sup_{s\le 1} r(s) \qquad \text{et} \qquad S^{(b)} + I^{(b)} \stackrel{(\text{loi})}{=} \sup_{s\le 1} r(s)$$

peuvent être obtenues respectivement comme conséquences d'une part d'une transformation, due à Jeulin, des temps locaux de l'excursion brownienne normalisée, et, d'autre part, des résultats de Vervaat liant b et r; pour une discussion de ces résultats, voir par exemple Biane-Yor [5].

4. Quelques compléments relatifs au supremum d'un pont ou d'un processus de Bessel.

(4.1) Dans les Tableaux I et II, les supremum de certains processus, ou ponts, de Bessel, apparaissent à plusieurs reprises. Il semble donc naturel de chercher des identités en loi concernant ces processus, qui soient analogues à celles dégagées dans les paragraphes 2 et 3.

$(R_t, t \ge 0)$ désignant un processus de Bessel de dimension $\delta > 0$, issu de 0, le processus $\left(R_t^* \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{s\le t} R_s\,,\ t \ge 0\right)$ hérite de la propriété de scaling *(2.b)* de R; on a donc :

$$(4.a) \qquad (R^*_{cs}\,;\ s \ge 0) \stackrel{(\text{loi})}{=} (\sqrt{c}\, R^*_s\,,\ s \ge 0)\,.$$

Ainsi, le lemme suivant, qui nous permettra d'étendre de façon très générale le point 2) du Théorème 2, s'applique en particulier au processus $(R_t^*\,,\ t \ge 0)$.

LEMME : *Soit* $(X_t, t \ge 0)$ *processus croissant continu tel que* $\mathbb{P}(X_1 > 0) = 1$, *qui satisfait :* $(X_{cs}\,,\ s \ge 0) \stackrel{(\text{loi})}{=} (\sqrt{c}\, X_s\,,\ s \ge 0)$.

Notons $T_* = \inf\{t : X_t > 1\}$, *et définissons la fonction* $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1,\infty[$ *par :*

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{v^2}{2}T_*\Big)\Big] = \frac{1}{\varphi(v)}\,.$$

Soit, d'autre part, S_θ *une variable exponentielle de paramètre* $\dfrac{\theta^2}{2}$, *indépendante de* $(X_t, t \geq 0)$.

On a alors :

$$\varphi(\theta X_{S_\theta}) \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{1}{U}\,,$$

où U *désigne une variable uniforme sur* $[0,1]$.

Démonstration : (i) Remarquons tout d'abord que, grâce à la propriété de scaling de X, on a : $\theta X_{S_\theta} \overset{\text{(loi)}}{=} \big(\frac{S}{T_*}\big)^{1/2}$, où l'on a noté : S pour S_1, pour simplifier l'écriture.

Écrivons ensuite, pour $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, fonction borélienne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(\varphi(\theta X_{S_\theta}))] = \mathbb{E}\Big[f\Big(\varphi\Big(\Big(\frac{S}{T_*}\Big)^{\frac12}\Big)\Big)\Big] &= \tfrac12\int_0^\infty dt\, e^{-\frac{t}{2}}\,\mathbb{E}\Big[f\Big(\varphi\Big(\big(\tfrac{t}{T_*}\big)^{\frac12}\Big)\Big)\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty v\,dv\,T_*\,\exp\Big(-\frac{v^2}{2}T_*\Big)\,f(\varphi(v))\Big]\end{aligned}$$

Or, on a : $\mathbb{E}\Big[(vT_*)\exp\Big(-\dfrac{v^2}{2}T_*\Big)\Big] = \dfrac{-\varphi'(v)}{(\varphi(v))^2}$, d'où l'on déduit finalement : $\mathbb{E}[f(\varphi(\theta X_{S_\theta}))] = \int_1^\infty \frac{du}{u^2}\,f(u)$, ce qui démontre le lemme. ∎

COROLLAIRE (Kent [11]) : *Soit* $\delta > 0$, *et* $T_1^{(\delta)} = \inf\{t : R_t = 1\}$, *où* $(R_t,\ t \geq 0)$ *désigne un processus de Bessel de dimension* δ, *issu de* 0. *On a alors :*

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{v^2}{2}T_1^{(\delta)}\Big)\Big] = \frac{1}{\Phi_\delta(v)}\,,$$

où : $\Phi_\delta(v) = 2^\nu\Gamma(\nu+1)\,I_\nu(v)\,v^{-\nu}$, $\nu = \frac{\delta}{2} - 1$, *et* I_ν *désigne la fonction de Bessel modifiée d'indice* ν.

On a alors, avec les notations du Lemme :

$$\Phi_\delta(\theta R^*_{S_\theta}) \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{1}{U}\,.$$

(4.2) Nous cherchons maintenant, par analogie avec les développements du paragraphe 2, des identités en loi dans lesquelles figure, dans l'un des membres, la variable R_1^* (avec les notations ci-dessus).

Pour cela, nous rappelons tout d'abord les identités de Ciesielski-Taylor [6] (voir également Biane [3] pour de nombreuses généralisations, Getoor-Sharpe [9] pour une extension à toutes les dimensions $\delta > 0$, et Yor [28]) :

si R_δ désigne le processus de Bessel de dimension $\delta > 0$, issu de 0 on a :

$$(4.b) \qquad \text{pour } x > 0 \text{ fixé,} \qquad \int_0^\infty ds \mathbb{1}_{\left(R_{\delta+2}(s) \le x\right)} \stackrel{\text{(loi)}}{=} T_x^\delta \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t : R_\delta(t) = x\}$$

(Ciesielski-Taylor [6] ont obtenu ces identités pour δ entier).

Introduisons d'autre part, pour tout $\alpha \ge 0$:

$$\eta_\alpha^{\delta+2} \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{x : \int_0^\infty ds\ \mathbb{1}_{\left(R_{\delta+2}(s) \le x\right)} > \alpha\right\}.$$

Le processus $(\eta_\alpha^{\delta+2}\,,\ \alpha \ge 0)$ hérite de $R_{\delta+2}$ sa propriété de scaling :

$$(4.c) \qquad \text{pour } \lambda > 0, \qquad (\eta_{\lambda\alpha}^{\delta+2}\,;\ \alpha \ge 0) \stackrel{\text{(loi)}}{=} (\sqrt{\lambda}\,\eta_\alpha^{\delta+2}\,;\ \alpha \ge 0)\,.$$

On peut maintenant énoncer et démontrer le

THÉORÈME 3 : *Pour tout $\delta > 0$ et tout $\alpha > 0$ fixé, on a :*

$$(4.d) \qquad \eta_\alpha^{\delta+2} \stackrel{\text{(loi)}}{=} \sup_{s \le \alpha} R_\delta(s)$$

Démonstration : D'après les propriétés de scaling *(4.a)* et *(4.c)*, il suffit de démontrer l'identité *(4.d)* pour $\alpha = 1$. Or, le membre de gauche, resp : de droite, a même loi que :

$$\left(\int_0^\infty ds\ \mathbb{1}_{\left(R_{\delta+2}(s) \le 1\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \text{resp : } \ (T_1^\delta)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Le résultat cherché découle alors des identités de Ciesielski-Taylor *(4.b)*. ∎

5. Du processus au pont de Bessel, en passant par les méandres.

(5.1) Outre les identités en loi présentées ci-dessus dans les Tableaux I et II, il existe des identités en loi concernant le méandre brownien $(\rho(s)\,,\ s \le 1)$ défini par :

$$(5.a) \qquad \rho(s) = \frac{1}{\sqrt{1-g}}\left|\beta_{g+s(1-g)}\right|, \quad s \le 1\,,$$

où $g = \sup\{t < 1 : \beta_t = 0\}$, et $(\beta_t\,,\ t \le 1)$ désigne le mouvement brownien réel issu de 0. En effet, on a (voir, par exemple, Biane-Yor [5])

$$(5.b) \qquad \int_0^1 \frac{ds}{\rho(s)} \stackrel{\text{(loi)}}{=} 2\sup_{s \le 1}|b(s)| \stackrel{\text{(loi)}}{=} \sup_{s \le 1}\rho(s)\,,$$

où $(b(s)\,,\ s \le 1)$ désigne un pont brownien standard.

Il nous a semblé naturel de chercher à obtenir des identités en loi pour toute une famille de processus $\rho_{m,d}$, qui réalisent une interpolation entre les processus de Bessel $(R_\delta(t)\,,\ t \leq 1)$ et les ponts de Bessel $(r_\delta(t)\,,\ t \leq 1)$.

De façon précise, définissons $\rho_{m,d}(t) = \left(r_m^2(t) + R_d^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}$, où r_m et R_d désignent respectivement le pont de Bessel de dimension m, et le processus de Bessel de dimension d, issu de 0. On note $\mathbb{M}^{m,d}$ la loi de $\rho_{m,d}$, définie sur l'espace canonique $C([0,1],\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{F} = \sigma\{X_s\,,\ s \leq 1\}$, avec $X_s(\omega) = \omega(s)$.

Rappelons le résultat d'absolue continuité suivant

THÉORÈME 4 ([29], Chapitre 3) : *Désignons par $\mathbb{P}^\delta$ la loi de R_δ. On a, pour tous $m \geq 0$, et $d > 0$:*

$$\mathbb{M}^{m,d} = \frac{c_{m,d}}{X_1^m} \cdot \mathbb{P}^{m+d}\ ,$$

avec $c_{m,d} = \mathbb{M}^{m,d}(X_1^m) = \mathbb{P}^d[X_1^m] = \left(\mathbb{P}^{m+d}\left[\frac{1}{X_1^m}\right]\right)^{-1} = 2^{\frac{m}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{m+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$.

Remarque : Signalons une erreur typographique dans la formule donnée en [29], Théorème 3.9, pour la constante $c_{m,d}$. En fait, si nous désignons par $c^*_{m,d}$ la constante erronée donnée en [29], on a $c^*_{m,d} = c_{d,m} \equiv 2^{\frac{d}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{m+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$.

Dans la suite, nous considérerons plus particulièrement les cas suivants :

(i) $\underline{m=0}$; $\mathbb{M}^{0,d} = \mathbb{P}^d$

(ii) $\underline{m=1}$; cette valeur du paramètre m est particulièrement intéressante pour notre étude de la loi de $H_1 = \int_0^1 \frac{ds}{X_s}$, car la propriété de scaling pour $(X_t\,,\ t \geq 0)$ sous $\mathbb{P}^\delta$ implique :

$$\textit{(5.c)} \qquad \mathbb{P}^\delta\left[\frac{1}{X_1}\,\Big|\, H_1\right] = 2\,H_1\ .$$

Cette formule est un cas particulier des résultats qui figurent dans l'Appendice 2.

En conséquence, on a, pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne :

$$\textit{(5.c')} \qquad \mathbb{P}^\delta[H_1\,\varphi(H_1)] = \mathbb{P}^\delta\left[\frac{1}{2X_1}\,\varphi(H_1)\right]\ .$$

Ainsi, de la loi de H_1, relativement à $\mathbb{M}^{1,\delta-1}$, on déduit immédiatement celle de H_1, relativement à $\mathbb{P}^\delta$.

(iii) $\underline{m=\delta-2}$, $\underline{d=2}$; dans le cas particulier $\delta = 3$, c'est-à-dire : $m = 1$, et $d = 2$, $\mathbb{M}^{1,2}$ est la loi du méandre brownien présenté en *(5.a)*. Plus généralement, d'après le Corollaire 3.9.1, p. 44 de [29], pour : $2 < \delta < 4$, $\mathbb{M}^{\delta-2,2}$ est la loi du méandre : $\left(\left(\sqrt{1-g_\gamma}\right)^{-1} R_\gamma(g_\gamma+u(1-g_\gamma))\ ;\ u \leq 1\right)$ associé au processus de Bessel de dimension $\gamma = \delta - 2$; on a posé ici : $g_\gamma = \sup\{t < 1 : R_\gamma(t) = 0\}$.

(iv) $\underline{m=2}$, $\underline{d=\delta-2}$; d'après le Corollaire 3.9.2, p. 44 de [29], la probabilité $\mathbb{M}^{2,\delta-2}$, pour $\delta > 2$, est la loi du processus $\left(\frac{1}{\sqrt{L_\delta}} R_\delta(uL_\delta)\,,\ u \leq 1\right)$, où $L_\delta = \sup\{t : R_\delta(t) = 1\}$. Notons que : $c_{2,d} = d = \delta - 2$.

(v) $\underline{m=\delta}$, $\underline{d=0}$; $\mathbb{M}^{\delta,0}$ est la loi du pont de Bessel de dimension δ. En faisant décroître d vers 0 dans la relation d'absolue continuité du Théorème 4, on obtient l'approximation suivante :

$$\mathbb{M}^{m,0} = \lim_{d\to 0}(\mathbb{M}^{m,d}) = \lim_{d\to 0}\left(\frac{d}{2}\right)\frac{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{X_1^m}\cdot \mathbb{P}^{m+d}$$

où $\lim\limits_{d\to 0}$ indique la convergence étroite des probabilités sur $C([0,1],\mathbb{R}_+)$. Pour cela, on a utilisé la formule explicite pour $c_{m,d}$, qui implique :

$$\frac{1}{d}\,c_{m,d} \underset{d\to 0}{\longrightarrow} 2^{\frac{m}{2}-1}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right).$$

(5.2) Nous nous proposons maintenant de décrire et de caractériser la loi conjointe de $\left(h_{m,d}, \rho_{m,d}(1)\right)$, où l'on a posé : $h_{m,d} = \int_0^1 \frac{ds}{\rho_{m,d}(s)}$. En d'autres termes, on étudie, sous $\mathbb{M}^{m,d}$, la loi conjointe de $\left(\int_0^1 \frac{ds}{X_s}, X_1\right)$. Pour cela, remarquons que, d'après la formule *(2.c)* ci-dessus, et la propriété de scaling, on a la

Proposition 1 : *Soit* $(R_t,\ t \geq 0)$, *resp :* $(\widehat{R}_t,\ t \geq 0)$, *processus de Bessel, issu de 0, de dimension* $\delta > 1$, *resp :* $\widehat{\delta} = 2(\delta-1)$. *Alors, pour toute fonction* $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *borélienne, on a :*

$$\mathbb{E}[f(R_1, H_1)] = \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{\widehat{R}_1^2}{2Y}\Big)\, f\Big(\frac{\widehat{R}_1^2}{2\sqrt{Y}}, \frac{2}{\sqrt{Y}}\Big)\Big] \tag{5.d}$$

où l'on a posé : $H_1 = \int_0^1 \frac{ds}{R_s}$ *et* $Y = \int_0^1 ds\, \widehat{R}_s^2$.

Commentaires : 1) De façon analogue à ce qui a été fait dans la démonstration du Théorème 2 ci-dessus, la formule *(5.d)* nous permet de ramener l'étude de la loi de (R_1, H_1) à celle de $(\widehat{R}_1, Y)$, laquelle peut être appréhendée grâce à la formule *(2.j)*, que nous réécrivons ici :

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-a\widehat{R}_1^2 - \frac{z^2 Y}{2}\Big)\Big] = \Big(\operatorname{ch} z + \frac{2a}{z}\operatorname{sh} z\Big)^{-(\delta-1)}. \tag{2.j}$$

La loi de $\widehat{R}_1^2$ est bien connue, i.e. : $\widehat{R}_1^2 \overset{\text{(loi)}}{=} 2Z_{(\delta-1)}$, où Z_a désigne une variable gamma de paramètre a; la formule *(2.j)* peut donc être écrite sous la forme conditionnelle :

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{z^2 Y}{2}\Big)\,\Big|\,\widehat{R}_1 = r\Big] = \Big(\frac{z}{\operatorname{sh} z}\Big)^{\delta-1}\exp -\frac{r^2}{2}(z\coth z - 1)\,. \tag{2.j'}$$

Nous utiliserons, par la suite, la conséquence suivante de la formule *(2.j)* (ou de *(2.j')*) :

$$\text{(2.j")} \qquad \mathbb{E}\left[\frac{1}{(\widehat{R}_1^2)^{m-1}} \exp\left(-\frac{z^2Y}{2}\right)\right] = \gamma_{m,\delta} \left(\frac{z}{2 \operatorname{sh} z}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} z}\right)^{\delta-m},$$

formule valable pour $\delta > (m \vee 1)$, avec $\gamma_{m,\delta} = \dfrac{\Gamma(\delta-m)}{\Gamma(\delta-1)}$.

Démonstration de la formule (2.j") : On peut supposer tout d'abord la condition : $1 < m < \delta$ satisfaite. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{1}{(\widehat{R}_1^2)^{m-1}} \exp\left(-\frac{z^2Y}{2}\right)\right] &= \frac{1}{\Gamma(m-1)} \int_0^\infty da\, a^{m-2}\, \mathbb{E}\left[\exp\left(-a\widehat{R}_1^2 - \frac{z^2Y}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-1)} \int_0^\infty da\, a^{m-2} \left(\operatorname{ch} z + \frac{2a}{z} \operatorname{sh} z\right)^{-(\delta-1)}.\end{aligned}$$

Or, on a, en posant : $A = \operatorname{ch} z$ et $B = 2\dfrac{\operatorname{sh} z}{z}$:

$$\int_0^\infty da \frac{a^{m-2}}{(A+aB)^{\delta-1}} = \gamma_{m,\delta} \frac{1}{B^{m-1}A^{\delta-m}},$$

ce qui entraîne aisément la formule *(2.j")*.

2) Il découle de la formule *(2.c)* qui lie les processus de Bessel R et $\widehat{R}$ que l'inverse du processus croissant $(H_t\,,\ t \geq 0)$ est :

$$\tfrac{1}{4} Y_t \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{1}{4} \int_0^t du\, \widehat{R}_u^2 .$$

En conséquence des propriétés de scaling de R et $\widehat{R}$, on a :

$$\text{(5.d')} \qquad H_1 \stackrel{\text{(loi)}}{=} \frac{2}{\sqrt{Y}} .$$

Il découle alors, en particulier, de la formule *(5.c)* que l'on a :

$$\mathbb{E}\left[\frac{\widehat{R}_1^2}{2Y} \,\middle|\, Y = y\right] = 1 ,$$

soit :

$$\text{(5.d")} \qquad \mathbb{E}[\widehat{R}_1^2 | Y] = 2Y .$$

Une variante utile de la formule *(5.d)* est la formule suivante

$$\text{(5.d)}_{\alpha,m} \qquad \mathbb{E}\left[f(R_1, H_1)\frac{H_1^\alpha}{R_1^m}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{(\widehat{R}_1^2)^{1-m}}{\sqrt{Y}}\, 2^{m+\alpha-1}\, Y^{\frac{m-(\alpha+1)}{2}} f\left(\frac{\widehat{R}_1^2}{2\sqrt{Y}}, \frac{2}{\sqrt{Y}}\right)\right].$$

Cette variante est une conséquence immédiate de la formule *(5.d)*.

3) Prenons maintenant $\alpha = 0$ dans la formule $(5.d)_{\alpha,m}$, et écrivons $(5.d)_{0,m}$ en utilisant la relation d'absolue continuité entre $\mathbb{M}^{m,d}$ et $\mathbb{P}^{\delta}$ d'une part, et entre $\mathbb{M}^{\widehat{m},\widehat{d}}$ et $\mathbb{P}^{\widehat{\delta}}$ d'autre part (on a posé : $\widehat{m} = 2(m-1)$, $\widehat{\delta} = 2(\delta-1)$, $\widehat{d} = 2(\widehat{\delta}-\widehat{m}) = 2d$).

On obtient alors :

$$(5.d.1)_m \qquad \mathbb{M}^{m,\delta-m}[f(R_1,H_1)] = \frac{c_{m,d}\,2^{m-1}}{c_{\widehat{m},\widehat{d}}}\,\mathbb{M}^{\widehat{m},\widehat{\delta}-\widehat{m}}\Big[Y^{\frac{m}{2}-1} f\Big(\frac{\widehat{R}_1^2}{2\sqrt{Y}}, \frac{2}{\sqrt{Y}}\Big)\Big] .$$

En particulier, pour $m = 2$, on a :

$$(5.d.1)_{m=2} \qquad \mathbb{M}^{2,\delta-2}[f(R_1,H_1)] = \mathbb{M}^{2,\widehat{\delta}-2}\Big[f\Big(\frac{\widehat{R}_1^2}{2\sqrt{Y}}, \frac{2}{\sqrt{Y}}\Big)\Big] . \qquad \blacksquare$$

Nous appliquons maintenant la formule $(5.d)_{\alpha,m}$ à l'étude de la loi de H_1 relativement à la probabilité $\mathbb{M}^{m,\delta-m}$.

PROPOSITION 2 : *Pour tous δ, m, tels que : $\delta > 1$, et $\delta > m \geq 0$, on a :*

$$(5.e)_{m,\delta} \qquad \begin{aligned} &\mathbb{M}^{m,\delta-m}\Big(H_1^{m-1}\exp\Big(-\frac{\xi^2}{2}H_1^2\Big)\Big) \\ &\qquad = \alpha_{m,\delta}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \exp(2i\xi z)\Big(\frac{z}{\operatorname{sh} z}\Big)^{m-1}\frac{1}{(\operatorname{ch} z)^{\delta-m}} \end{aligned}$$

où : $\alpha_{m,\delta} = 2^{\frac{3}{2}(m-1)}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\Gamma(\frac{\delta}{2})}{\Gamma(\delta-1)}\dfrac{\Gamma(\delta-m)}{\Gamma(\frac{\delta-m}{2})}$.

En particulier, on a :

(i) pour $m = 1$, et $\delta > 1$,

$$(5.f)_\delta \qquad \mathbb{M}^{1,\delta-1}\Big(\exp\Big(-\frac{\xi^2}{2}H_1^2\Big)\Big) = \alpha_{1,\delta}\int_{-\infty}^{\infty} dz\,\exp(2i\xi z)\Big(\frac{1}{\operatorname{ch} z}\Big)^{\delta-1} ,$$

avec $\alpha_{1,\delta} \equiv \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\Gamma(\frac{\delta}{2})}{\Gamma(\frac{\delta-1}{2})}$, et donc :

$$(5.f)'_\delta \qquad \mathbb{M}^{1,\delta-1}\Big(\exp\Big(-\frac{\xi^2}{2}H_1^2\Big)\Big) = \left|\frac{\Gamma(\frac{\delta-1}{2}+i\xi)}{\Gamma(\frac{\delta-1}{2})}\right|^2 .$$

(ii) pour $m > 1$, on obtient, en faisant tendre m vers δ :

$$(5.g)_m \qquad \mathbb{M}^{m,0}\Big\{H_1^{m-1}\exp\Big(-\frac{\xi^2}{2}H_1^2\Big)\Big\} = \alpha_{m,m}\int_{-\infty}^{\infty} dz\,\exp(2i\xi z)\Big(\frac{z}{\operatorname{sh} z}\Big)^{m-1}$$

avec : $\alpha_{m,m} = \dfrac{2^{\frac{3m-5}{2}}}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(m-1)}$.

En conséquence, si l'on prend, dans la formule $(5.e)_{m,\delta}$, $\delta - m = m-1$, c'est-à-dire : $\delta = 2m-1$, et que l'on compare les formules $(5.e)_{m,2m-1}$ et $(5.g)_m$, on déduit de la formule de duplication :

$$\mathrm{sh}(2z) = 2\,\mathrm{sh}\,z\,\mathrm{ch}\,z$$

l'identité en loi suivante :

COROLLAIRE 2.1 : *On note* $h_{m,d} = \int_0^1 \frac{ds}{\rho_{m,d}(s)}$, *avec les notations introduites en* **(5.1)**. *On a :* $h_{m,m-1} \overset{(\mathrm{loi})}{=} \frac{1}{2} h_{m,0}$.

Remarque : L'énoncé de la Proposition 2 est écrit à l'aide des paramètres m et δ, alors que celui du Théorème 4 est écrit à l'aide de m et d. Rappelons la relation : $\delta = d - m$; ces deux choix différents nous permettent d'obtenir des formules relativement simples pour les constantes $c_{m,d}$ et $\alpha_{m,\delta}$.

Démonstration de la Proposition 2 : On prend $\alpha = m-1$ dans la formule $(5.d)_{\alpha,m}$ et on pose, pour simplifier les notations : $d = \delta - m$. On a alors, par définition de $\mathbb{M}^{m,d}$, pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^{m,d}\left(H_1^{m-1}\varphi(H_1)\right) &= c_{m,d}\,\mathbb{E}^{\delta}\left[\frac{H_1^{m-1}}{R_1^m}\,\varphi(H_1)\right] \\ &= c_{m,d}\,2^{2(m-1)}\,\widehat{\mathbb{E}^{\delta}}\left[\frac{1}{(\widehat{R}_1^2)^{m-1}\sqrt{Y}}\,\varphi\Big(\frac{2}{\sqrt{Y}}\Big)\right]. \end{aligned} \tag{5.h}$$

Introduisons maintenant N variable gaussienne centrée, indépendante de R; on a alors :

$$\mathbb{M}^{m,d}\left(H_1^{m-1}\exp\Big(-\frac{\xi^2}{2}H_1^2\Big)\right) = \mathbb{M}^{m,d}\left(H_1^{m-1}\exp(i\xi N H_1)\right)$$

(d'après *(5.h)*)
$$\begin{aligned} &= c_{m,d}\,2^{2(m-1)}\,\widehat{\mathbb{E}^{\delta}}\left[\frac{1}{(\widehat{R}_1^2)^{m-1}\sqrt{Y}}\exp\Big(2i\xi\frac{N}{\sqrt{Y}}\Big)\right] \\ &= c'_{m,d}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\,\widehat{\mathbb{E}^{\delta}}\left[\frac{1}{(\widehat{R}_1^2)^{m-1}}\exp\Big(2i\xi\frac{x}{\sqrt{Y}}\Big)\frac{1}{\sqrt{Y}}\right] \\ &= c'_{m,d}\int_{-\infty}^{\infty} dz\,\exp(2i\xi z)\,\widehat{\mathbb{E}^{\delta}}\left[\frac{1}{(\widehat{R}_1^2)^{m-1}}\exp\Big(-\frac{z^2 Y}{2}\Big)\right], \end{aligned}$$

où l'on a posé : $c'_{m,d} = c_{m,d}\,2^{2(m-1)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

On déduit maintenant la formule $(5.e)_{m,\delta}$ de la formule *(2.j")*, en posant :

$$\alpha_{m,\delta} = c'_{m,d}\,\gamma_{m,\delta}\,\frac{1}{2^{m-1}} = c_{m,d}\,\frac{2^{m-1}}{\sqrt{2\pi}}\,\gamma_{m,\delta}\,. \qquad \blacksquare$$

Remarque : Les calculs ci-dessus permettent, par exemple, d'obtenir une expression, et les propriétés asymptotiques, de la transformée de Mellin :

$$F(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dv}{(\operatorname{ch} v)^\zeta} ,$$

qui joue un rôle important en [18].

Posons $\delta = \zeta + 1$. De l'égalité :

$$\widehat{\mathbb{E}^\delta}\left[\exp\left(-\frac{v^2}{2} Y\right)\right] = (\operatorname{ch} v)^{-\zeta} ,$$

on déduit :

$$\begin{aligned}
F(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\mathbb{E}^\delta}\left[\frac{1}{\sqrt{Y}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \mathbb{E}^\delta [H_1] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\delta - 1} \mathbb{E}^\delta [R_1] \qquad \text{(d'après la formule d'Itô)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\zeta} \mathbb{E}\left[(2Z_{\frac{\zeta}{2}})^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\zeta} \frac{\Gamma(\frac{\zeta}{2}+1)}{\Gamma(\frac{\zeta+1}{2})} \\
(*) \qquad &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{\zeta}{2})}{\Gamma(\frac{\zeta+1}{2})} \equiv 2^{-\zeta} \frac{\Gamma(\zeta)}{\left[\Gamma(\frac{\zeta+1}{2})\right]^2} .
\end{aligned}$$

La dernière formule est celle qui figure en [18], et la dernière égalité découle de la formule de duplication de la fonction Γ :

$$\Gamma(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{\zeta - \frac{1}{2}} \Gamma(\tfrac{\zeta}{2}) \Gamma(\tfrac{\zeta+1}{2}) .$$

La formule (*) ci-dessus peut également être déduite directement de $(5.f)_\delta$, où l'on prend $\xi = 0$, ce qui donne : $2 \int_0^\infty dz \frac{1}{(\operatorname{ch} z)^{\delta-1}} = \frac{1}{\alpha_{1,\delta}}$. ∎

(5.3) Nous donnons maintenant une description de la loi conjointe de

$$\left(h_{m,d} \,;\, \rho_{m,d}(1)\right)$$

en termes de variables beta et gamma.

Bien que cela puisse paraître étonnant au premier abord, les résultats les plus remarquables, et les plus simples à décrire, le sont pour les processus $\rho_{1,d}$. En fait, les simplifications qui ont lieu dans ce cas particulier ($m = 1$) sont dues pour l'essentiel à la propriété de scaling, comme le montre la petite discussion du point (ii) qui suit l'énoncé du Théorème 4. De façon précise, on a le

THÉORÈME 5 : *Soit $d > 0$, et N une variable gaussienne, centrée, réduite, indépendante du processus $(X_t \equiv \rho_{1,d}(t)\,,\ t \leq 1)$.*

Alors, la loi de $N\left(\int_0^1 \frac{ds}{X_s}\,,\ X_1\right)$, sous $\mathbb{M}^{1,d}$ est celle de :

$$\left(\log(Z_{d/2}) - \log(Z'_{d/2})\ ;\ Z_{d/2} - Z'_{d/2}\right)\,,$$

où $Z_{d/2}$ et $Z'_{d/2}$ désignent deux variables gamma, de paramètre $\frac{d}{2}$, indépendantes.

Remarque : Dans le cas $d = 2$, le processus $(\rho_{1,2}(t)\,,\ t \leq 1)$ est, d'après le point (iii) qui suit l'énoncé du Théorème 4, le méandre brownien $(m(t)\,,\ t \leq 1)$, et le résultat du Théorème 5 peut être exprimé comme suit :

$$N\left(\int_0^1 \frac{ds}{m(s)}\,,\ m(1)\right) \overset{\text{(loi)}}{=} (\log Z - \log Z'\ ;\ Z - Z')\,,$$

où Z et Z' sont deux variables exponentielles d'espérance 1, indépendantes.

C'est ce cas particulier, présenté en [5], Théorème 5.4, (1), de façon légèrement différente, qui nous a suggéré l'énoncé général du Théorème 5.

Démonstration du Théorème 5 : a) Pour simplifier l'écriture, posons $\alpha = \frac{d}{2}$. Rappelons ensuite que, à l'aide de l'algèbre des variables beta-gamma, on a :

$$(Z_\alpha\ ;\ Z'_\alpha) \overset{\text{(loi)}}{=} (U_\alpha Z_{2\alpha}\ ;\ (1-U_\alpha)Z_{2\alpha})\,,$$

où U_α, désigne une variable beta de paramètres (α, α), et $Z_{2\alpha}$ une variable gamma de paramètre (2α), et U_α et $Z_{2\alpha}$ sont supposées indépendantes. À l'aide de la représentation ci-dessus du couple $(Z_\alpha\ ;\ Z'_\alpha)$, on a :

$$\begin{aligned}\left(\left|\log(Z_\alpha) - \log(Z'_\alpha)\right|\ ;\ |Z_\alpha - Z'_\alpha|\right) &\overset{\text{(loi)}}{=} \left(\left|\log\left(\frac{U_\alpha}{1-U_\alpha}\right)\right|\ ;\ |1-2U_\alpha| Z_{2\alpha}\right)\\ &\overset{\text{(loi)}}{=} \left(\left|\log\left(\frac{1+X_\alpha}{1-X_\alpha}\right)\right|\ ;\ X_\alpha Z_{2\alpha}\right)\end{aligned}$$

où l'on a posé $X_\alpha = |2U_\alpha - 1|$.

Remarquons maintenant que si l'on note $Y_\alpha = \log\left(\frac{1+X_\alpha}{1-X_\alpha}\right)$, on a : $X_\alpha = \operatorname{th}\frac{Y_\alpha}{2}$.

b) Pour démontrer le théorème, il nous suffit donc de montrer les résultats suivants :

(i) la loi de $N\int_0^1 \frac{ds}{X_s}$ sous $\mathbb{M}^{1,d}$ est celle de $\log\frac{Z_\alpha}{Z'_\alpha}$;
(ii) conditionnellement à $|N|\int_0^1 \frac{ds}{X_s} = y$, la loi de $|N|X_1$ est celle de $\left(\operatorname{th}\frac{y}{2}\right) Z_{2\alpha} \equiv \left(\operatorname{th}\frac{y}{2}\right) Z_d$.

c) — Le point (i) ci-dessus découle de la formule *(5.f)*$_\delta$, ou de *(5.f)*$'_\delta$: en effet, d'après ces formules, les deux variables qui figurent en (i) ci-dessus ont la même fonction caractéristique. Remarquons encore que, d'après la formule *(5.f)*$_\delta$, on a :

$$\mathbb{M}^{1,\delta-1}\big(|N|H_1 \in dy\big) = \alpha_{1,\delta}\,\frac{dy}{\big(\mathrm{ch}\,\frac{y}{2}\big)^{\delta-1}}\,.$$

— Pour démontrer le point (ii) ci-dessus, nous reprenons le calcul fait dans la démonstration du Théorème 2, en considérant maintenant :

$$\tilde{\Phi}_\theta \equiv \tilde{\Phi}_\theta(a,b) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{E}\Big[\frac{1}{R_{S_\theta}}\ \exp -(aR_{S_\theta}+bH_{S_\theta})\Big]$$

Prenons $\theta = 1$, et posons $S \equiv S_1$. À l'aide de la propriété de scaling, on a :

$$\tilde{\Phi}_1 = \mathbb{E}\Big[\frac{1}{\sqrt{S}R_1}\ \exp -\sqrt{S}(aR_1+bH_1)\Big] = \mathbb{E}\Big[\frac{1}{R_1}\ \exp -|N|(aR_1+bH_1)\Big]\,.$$

D'autre part, il découle de la formule *(2.j)* que l'on a :

$$\tilde{\Phi}_1 = \int_0^\infty dy\, e^{-by}\,\big(\mathrm{ch}\,\tfrac{y}{2} + a\ \mathrm{sh}\,\tfrac{y}{2}\big)^{-(\delta-1)}\,.$$

En comparant les deux dernières formules, on obtient :

$$\mathbb{M}^{1,\delta-1}\big(\exp -(b|N|H_1 + a|N|R_1)\big) = \alpha_{1,\delta}\int_0^\infty dy\, e^{-by}\,\big(\mathrm{ch}\,\tfrac{y}{2} + a\ \mathrm{sh}\,\tfrac{y}{2}\big)^{-(\delta-1)}\,,$$

d'où l'on déduit le point (ii) ci-dessus. ∎

Nous abordons maintenant le cas général, plus compliqué à décrire; la démonstration, très semblable à celle du Théorème 5, est laissée au lecteur.

THÉORÈME 6 : *Soit $d > 0$, et $0 < m < 2$; soit également N_m une variable symétrique, indépendante du processus $\big(X_t \equiv \rho_{m,d}(t)\ ;\ t \le 1\big)$, et telle que :*

$$|N_m| \overset{\mathrm{(loi)}}{=} \big(2Z_{1-\frac{m}{2}}\big)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Alors, la loi de $N_m\Big(\displaystyle\int_0^1 \frac{ds}{X_s}\,,\ X_1\Big)$ *sous* $\mathbb{M}^{m,d}$ *est celle de :*

$$\big(\log(Z_\alpha^{(m)}) - \log(Z'^{(m)}_\alpha)\ ;\ Z_\alpha^{(m)} - Z'^{(m)}_\alpha\big)\,,$$

où $\alpha = \frac{d}{2}$, et les variables $Z_\alpha^{(m)}$ et $Z'^{(m)}_\alpha$ sont définies à l'aide d'un couple de variables indépendantes $(U_\alpha^{(m)}, \overline{Z}_d)$, de la façon suivante :

$$Z_\alpha^{(m)} = U_\alpha^{(m)}\overline{Z}_d \quad ; \qquad Z'^{(m)}_\alpha = (1-U_\alpha^{(m)})\overline{Z}_d\,,$$

$\overline{Z}_d$ désignant une variable gamma de paramètre d.

(5.4) Nous discutons maintenant quelques cas particulièrement intéressants.

(a) Le résultat du Corollaire 2.1 de la Proposition 2, qui consiste en l'identité en loi : $h_{m,m-1} \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{1}{2} h_{m,0}$ nous permet de compléter le Tableau II, relatif aux ponts de Bessel, pour les dimensions $d = 2$ et $d = 3$, de la façon suivante :

$$\text{(5.i)} \qquad \int_0^1 \frac{ds}{\rho_{2,1}(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{r_2(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{s \le 1} R_3(s)$$

$$\text{(5.j)} \qquad \int_0^1 \frac{ds}{\rho_{3,2}(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{r_3(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{s \le 1} r_3(s) \,.$$

(b) L'égalité en loi des deux expressions qui figurent à gauche et à droite de *(5.i)*, c'est-à-dire :

$$\text{(5.i)}' \qquad \int_0^1 \frac{ds}{\rho_{2,1}(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{s \le 1} R_3(s)$$

peut, compte tenu de la représentation de $\rho_{2,1}$ à l'aide du processus de Bessel de dimension 3, présentée en (iv) à la suite de l'énoncé du Théorème 4, être considérée comme une autre manière d'exprimer l'identité de Knight [12] :

$$\text{(5.k)} \qquad \frac{A^+_{\tau_s}}{M^2_{\tau_s}} \overset{\text{(loi)}}{=} 4 T_1^{(3)} \equiv 4 \inf \{t : R_3(t) = 1\} \,,$$

où $A_t^+ = \int_0^t du\, \mathbb{1}_{(B_u > 0)}$, $M_t = \sup_{u \le t} B_u$, et $(\tau_s\,,\ s \ge 0)$ désigne l'inverse du temps local en 0 de B, mouvement brownien réel issu de 0.

En effet, la représentation en question implique que le membre de gauche de *(5.i)'* a même loi que :

$$\int_0^1 \frac{du}{\frac{1}{\sqrt{L_3}} R_3(L_3 u)} \equiv \frac{1}{\sqrt{L_3}} \int_0^{L_3} \frac{dv}{R_3(v)}$$

(où l'on a noté : $L_3 = \sup\{t : R_3(t) = 1\}$) alors que, par scaling, le membre de droite de *(5.i)'* a même loi que $\left(T_1^{(3)}\right)^{-1/2}$.

En conséquence, l'identité *(5.i)'* peut être réécrite sous la forme :

$$\text{(5.i)}'' \qquad \left(\int_0^{L_3} \frac{dv}{R_3(v)}\right)^{-2} L_3 \overset{\text{(loi)}}{=} T_1^{(3)} \,.$$

Nous pouvons maintenant généraliser l'identité *(5.i)'* de la façon suivante

PROPOSITION 3 : *Soit* $\delta > 2$ *; posons* $\mu = \dfrac{1}{\delta-2}$.
On a alors, pour $s > 0$ *fixé :*

$$(5.i')_\delta \qquad \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{\rho_{2,\delta-2}(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{I^{(\mu)}(\tau^\mu_s)}{\left(A^{\mu,-}(\tau^\mu_s)\right)^{1/2}}$$

où l'on a posé : $I^{(\mu)}(t) = \sup_{s\leq t}(-X^{(\mu)}_s)$, $A^{\mu,-}_t = \int_0^t ds 1\!\!1_{(X^{(\mu)}_s \leq 0)}$, $X^{(\mu)}_t = |B_t| - \mu\ell_t$, $t \geq 0$, *et enfin :* $\tau^\mu_s = \inf\{u : \ell^{(\mu)}_u > s\}$, (ℓ_t), *resp :* $(\ell^{(\mu)}_t)$, *désignant le temps local en* 0 *de* B, *resp :* $X^{(\mu)}$.

Nous donnons tout d'abord une démonstration calculatoire de $(5.i')_\delta$, en nous appuyant sur l'extension suivante de l'identité de Knight, rappelée ci-dessus :

$$(5.l) \qquad \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\frac{A^{\mu,-}(\tau^\mu_s)}{\left(I^{(\mu)}(\tau^\mu_s)\right)^2}\right)\right] = \left(\frac{\lambda}{\operatorname{sh}\lambda}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda}\right)^{\frac{1}{\mu}}$$

(rappelons également que $\frac{1}{\mu} = \delta - 2$).

La formule *(5.l)* est précisément le premier résultat du Théorème 9.3 de [29].

Ainsi, si l'on pose $K^2 \equiv \dfrac{A^{\mu,-}(\tau^\mu_s)}{\left(I^{(\mu)}(\tau^\mu_s)\right)^2}$, la formule $(5.e)_{2,\delta}$ nous permet d'écrire :

$$\mathbb{M}^{2,\delta-2}\left(H_1 \exp\left(-\tfrac{\xi^2}{2}H_1^2\right)\right) = \alpha_{2,\delta}\int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(2i\xi z)\,\mathbb{E}\left[\exp\left(-\tfrac{z^2}{2}K^2\right)\right].$$

En faisant le changement de variables $z = \frac{u}{K}$ dans le membre de droite, on obtient :

$$\mathbb{M}^{2,\delta-2}\left(H_1 \exp\left(-\tfrac{\xi^2}{2}H_1^2\right)\right) = c\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{K}\exp\left(-\frac{2\xi^2}{K^2}\right)\right],$$

où c est une constante qui ne dépend que de δ.

On déduit de cette identité : $h_{2,\delta-2} \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{2}{K}$, c'est-à-dire $(5.i')_\delta$.

En fait, une bien meilleure compréhension de l'identité en loi $(5.i')_\delta$ peut être obtenue grâce au théorème de Ray-Knight suivant, relatif aux temps locaux de $\left(X^{(\mu)}_t\,;\, t \leq \tau^\mu_s\right)$; ce théorème est énoncé et démontré en ([29], p. 127).

THÉORÈME 7 : *Soient* $s > 0$, *et* $\mu > 0$. *On note* $(\lambda^x_{(s)}\,;\, 0 \leq x \leq 1)$ *le processus (continu en* x*) des temps d'occupation définis de la façon suivante :*

$$(5.m) \qquad \frac{1}{\left(I^{(\mu)}(\tau^\mu_s)\right)^2}\int_0^{\tau^\mu_s} du\, 1\!\!1_{(X_u \leq 0)}\, f\left(1 + \frac{X_u}{I^{(\mu)}(\tau^\mu_s)}\right) = \int_0^1 dx\, f(x)\,\lambda^x_{(s)},$$

pour toute fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *borélienne.*

Alors $\left((\lambda^x_{(s)})^{1/2}\,;\, 0 \leq x \leq 1\right)$ *a pour loi* $\mathbb{M}^{2,\frac{2}{\mu}}$.

COROLLAIRE 7.1 : *Soit $\delta \geq 2$. On pose $\mu = \frac{1}{\delta-2}$. On a alors*

$$\left(\tfrac{1}{2}\, h_{2,\delta-2}\ ;\ \rho_{2,\delta-2}(1)\right) \overset{\text{(loi)}}{=} \left(\frac{I^{(\mu)}(\tau^{\mu}_{s})}{\left(A^{\mu,-}(\tau^{\mu}_{s})\right)^{1/2}}\ ;\ \frac{s}{\left(A^{\mu,-}(\tau^{\mu}_{s})\right)^{1/2}}\right).$$

Démonstration : En combinant la formule $(5.d.1)_{m=2}$ et le Théorème 7 ci-dessus, on obtient, pour toute fonction $f : \mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}_{+} \longrightarrow \mathbb{R}_{+}$ borélienne :

$$\text{(5.n)} \qquad \mathbb{M}^{2,\delta-2}(f(R_1, H_1)) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{\lambda^{1}_{(s)}}{2\left(\int_0^1 dx\, \lambda^{x}_{(s)}\right)^{1/2}}\ ;\ \frac{2}{\left(\int_0^1 dx\, \lambda^{x}_{(s)}\right)^{1/2}}\right)\right].$$

Or, il résulte de la formule *(5.m)* que l'on a :

$$\left(\left(\int_0^1 dx\, \lambda^{x}_{(s)}\right)^{-\frac{1}{2}}\ ;\ \lambda^{x}_{(s)}\right) \equiv \left(\frac{I^{(\mu)}(\tau^{\mu}_{s})}{\left(A^{\mu,-}(\tau^{\mu}_{s})\right)^{1/2}}\ ;\ \frac{s}{I^{(\mu)}(\tau^{\mu}_{s})}\right)$$

Le résultat du corollaire découle alors de *(5.m)*.

Appendice 1 : Sur l'intégrabilité du temps local d'intersection renormalisé du mouvement brownien plan.

$(B_t\,,\ t \geq 0)$ désigne ici un mouvement brownien plan, issu de 0. Le temps local d'intersection renormalisé $(\gamma_t\,,\ t \geq 0)$ est le processus continu qui figure dans la formule de Tanaka-Rosen :

$$(*) \qquad \int_0^t ds\, \log|B_t - B_s| = \int_0^t \left(dB_u\ ;\ \int_0^u ds\, \frac{B_u - B_s}{|B_u - B_s|^2}\right) + \pi\gamma_t\,.$$

(Voir, par exemple, [31] pour l'existence et la définition de $(\gamma_t\,,\ t \geq 0)$, et la démonstration de la formule $(*)$).

On se propose ici de montrer la

PROPOSITION : *Soit $t > 0$ fixé. Il existe $\lambda > 0$, suffisamment petit, tel que :*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda|\gamma_t|\right)\right] < \infty\,.$$

On peut se ramener, par scaling, à $t = 1$.

Étape 1 : Pour démontrer la Proposition, il suffit, d'après la formule $(*)$, de montrer que chacune des variables :

$$X \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 ds\, \log|B_1 - B_s| \overset{\text{(loi)}}{=} \int_0^1 ds\, \log|B_s| \overset{\text{def}}{=} X'$$

et

$$Y \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 \left(dB_u\ ;\ \int_0^u ds\, \frac{B_u - B_s}{|B_u - B_s|^2}\right)$$

admet des moments exponentiels.

Étape 2 : En ce qui concerne X', l'inégalité : $\log u \leq u$, pour $u \geq 1$, entraîne : $X' \leq \int_0^1 ds\{\frac{1}{|B_s|} + |B_s|\}$.

Il découle alors de l'identité en loi du tableau I, pour $\delta = 2$, et du fait que, si β est un mouvement brownien réel, alors :

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\varepsilon\big(\sup_{s\leq 1}|\beta_s|\big)^2\Big)\Big] < \infty\,,$$

pour ε suffisamment petit, qu'il existe $\varepsilon' > 0$ tel que : $\mathbb{E}\big[\exp\big(\varepsilon'(X)^2\big)\big] < \infty$.

Remarque (suggérée par le rapporteur) : Plus simplement, on peut utiliser la décomposition : $|B_t| = \beta_t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{|B_s|}$, où $(\beta_t\,,\; t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel, pour majorer X' par : $\sup_{s\leq 1}|B_s| + 2\,\sup_{s\leq 1}|\beta_s|$ puis appliquer l'estimation ci-dessus.

Étape 3 : Pour démontrer que Y admet des moments exponentiels, il nous suffit de montrer que le processus croissant, pris au temps 1, de la martingale :

$$Y_t \overset{\text{def}}{=} \int_0^t \left(dB_u\,;\, \int_0^u \frac{ds}{\overline{B_u - B_s}}\right)$$

(on note : $\overline{z}$ le conjugué de z ($\in \mathbb{C}$)) admet des moments exponentiels. Or, on a : $<Y>_1 = \displaystyle\int_0^1 du\left|\int_0^u \frac{ds}{B_u - B_s}\right|^2$.

Estimons maintenant :

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda<Y>_1)] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\mathbb{E}[<Y>_1^n]\,.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[<Y>_1^n] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^1 du\left|\int_0^u \frac{ds}{B_u - B_s}\right|^2\right)^n\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_0^1 du\left(\left|\int_0^u \frac{ds}{B_u - B_s}\right|^2\right)^n\right] \qquad \text{(d'après l'inégalité de Hölder)} \\
&\leq \frac{1}{n+1}\,\mathbb{E}\left[\left|\int_0^1 \frac{ds}{B_s}\right|^{2n}\right] \qquad \text{(par retournement en } u\text{, et scaling).}
\end{aligned}$$

En reportant cette inégalité dans le développement en série de $\mathbb{E}[\exp(\lambda<Y>_1)]$, il vient :

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda<Y>_1)] \leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda\left|\int_0^1 \frac{ds}{B_s}\right|^2\right)\right] < \infty\,,$$

pour λ suffisamment petit, d'après l'étape 2. ∎

Remarque (suggérée par le rapporteur) : Pour obtenir la dernière estimation, on peut également utiliser l'inégalité de Jensen au lieu du développement en série de l'exponentielle; en effet :

$$\exp\left(\lambda<Y>_1\right) = \exp\left(\lambda \int_0^1 du \left|\int_0^u \frac{ds}{B_u-B_s}\right|^2\right) \leq \int_0^1 du \exp\left(\lambda \left|\int_0^u \frac{ds}{B_u-B_s}\right|^2\right)$$

d'où l'on déduit, par retournement en u, et scaling :

$$\mathbb{E}[\exp\left(\lambda<Y>_1\right)] \leq \mathbb{E}\left[\exp \lambda \left|\int_0^1 \frac{ds}{B_s}\right|^2\right].$$

Appendice 2 : Processus self-similaires et espérances conditionnelles.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; on dit que $(X_t,\ 0 < t \leq 1)$ processus mesurable à valeurs réelles est self-similaire d'ordre α (on écrira : α-SS) si : pour tout $0 < c \leq 1$, $(X_{ct},\ t \leq 1) \overset{\text{(loi)}}{=} (c^\alpha X_t,\ t \leq 1)$. Une autre démonstration de l'énoncé ci-dessous et de nombreuses conséquences sont développées en [22].

PROPOSITION : *On suppose que X est α-SS et que :* $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$. *Alors, pour tout $\beta > -1$, on a :*

$$\mathbb{E}[X_1 \,|\, \widehat{X}^{(\beta)}] = \widehat{X}^{(\beta)},$$

où : $\widehat{X}^{(\beta)} = (\beta+1) \int_0^1 dt\, t^{\beta-\alpha} X_t$.

Démonstration (suggérée par le rapporteur) :

(i) On commence par remarquer que, pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\mathbb{E}(|X_t|) = t^\alpha\, \mathbb{E}(|X_1|).$$

En conséquence, pour $\beta > -1$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 s^{\beta-\alpha} |X_s|\, ds\right] = \mathbb{E}(|X_1|) \left(\int_0^1 ds\, s^\beta\right) = \frac{1}{\beta+1} \mathbb{E}(|X_1|),$$

et le processus $\left(\xi_t \overset{\text{def}}{=} \int_0^t ds\, s^{\beta-\alpha} X_s,\ t \leq 1\right)$ est absolument continu, et à variation intégrable.

De plus, pour $t \in [0,1]$, on a : $\xi_t = t^{\beta-\alpha+1} \int_0^1 ds\, s^{\beta-\alpha} X_{ts}$, et :

(*) le couple (X_t, ξ_t) a même loi que le couple $(t^\alpha X_1, t^{\beta+1} \xi_1)$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(ix\xi_1) = 1 + ix \int_0^1 ds\, s^{\beta-\alpha}\, e^{ix\xi_s}\, X_s.$$

On déduit ensuite de $(*)$ l'égalité :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\exp(ix\xi_1)\big] &= 1 + ix\int_0^1 ds\, s^\beta\, \mathbb{E}\big[\exp(ixs^{\beta+1}\xi_1)X_1\big] \\ &= 1 + \frac{i}{\beta+1}\int_0^x dy\, \mathbb{E}\big[\exp(iy\xi_1)X_1\big]\ ,\end{aligned}$$

à l'aide du changement de variables : $y = xs^{\beta+1}$.

En dérivant par rapport à x, on obtient :

$$\mathbb{E}\big[\exp(ix\xi_1)\xi_1\big] = \frac{1}{\beta+1}\,\mathbb{E}\big[\exp(ix\xi_1)X_1\big]$$

ce qui équivaut à : $\mathbb{E}[X_1\,|\xi_1] = (\beta+1)\,\xi_1$. ∎

COROLLAIRE : *Soit* $(Y_t\,,\ t\ \geq\ 0)$ *processus stationnaire au sens strict tel que* $\mathbb{E}(|Y_0|) < \infty$. *Alors, pour tout* $\lambda > 0$, *on a :*

$$\mathbb{E}[Y_0\,|\tilde{Y}_\lambda] = \tilde{Y}_\lambda$$

où : $\tilde{Y}_\lambda = \lambda\displaystyle\int_0^\infty dt\, e^{-\lambda t}\, Y_t$.

Références

[1] S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois : Estimations asymptotiques de la solution fondamentale de l'équation $u_t - \frac{1}{2}\Delta u = -|\nabla u|$ dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$). *Prépublication (Septembre 1994).*

[2] J. Bertoin : Décomposition du mouvement brownien avec dérive en un minimum local par juxtaposition de ses excursions positives et négatives. *Séminaire de Probabilités XXV, Lect. Notes in Math. 1485, p. 330–344, Springer (1991).*

[3] Ph. Biane : Comparaison entre temps d'atteinte et temps de séjour de certaines diffusions réelles. *Séminaire de Probabilités XIX, Lect. Notes in Math. 1123, p. 291–296, Springer (1985).*

[4] Ph. Biane : Sur un calcul de F. Knight. *Séminaire de Probabilités XXII, Lect. Notes in Math. 1321, p. 190–197, Springer (1988).*

[5] Ph. Biane, M. Yor : Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. *Bul. Sc. Math., 2e série, vol. 111, p. 23–101 (1987).*

[6] Z. Ciesielski, S.J. Taylor : First passage times and sojourn density for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path. Trans. *Amer. Math. Soc.* 103, *p. 434–450 (1962).*

[7] P. Embrechts, L.C.G. Rogers, M. Yor : A proof of Dassios' representation of the α-quantile of Brownian motion with drift. *Ann. Appl. Prob.* 5, *p. 757–767 (1995).*

[8] W. Feller : The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. *Ann. Math. Stat.* 22, *p. 427–432 (1951).*

[9] R.K. Getoor, M. Sharpe : Excursions of Brownian motion and Bessel processes. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* 47, *p. 83–106 (1979).*

[10] J.P. Imhof : On the range of Brownian motion and its inverse process. *Ann. Prob.* 13 *(3), p. 1011–1017 (1985).*

[11] J. Kent : Some probabilistic properties of Bessel functions. *Ann. Prob.* 6, *p. 760–770 (1978).*

[12] F.B. Knight : Inverse local times, positive sojourns, and maxima for Brownian motion. *Colloque Paul Lévy, Astérisque* 157-158, *p. 233–247 (1988).*

[13] B. Leblanc : Une approche unifiée pour une forme exacte du prix d'une option dans les différents modèles à volatilité stochastique. *Stoch. and Stoch. Reports, à paraître (1995).*

[14] J.F. Le Gall : Exponential moments for the renormalized self-intersection local time of planar Brownian motion. *Séminaire de Probabilités XXVIII, Lect. Notes in Math. 1583, p. 172–180, Springer (1994).*

[15] J.F. Le Gall : L'équation stochastique $Y_t = B_t + \alpha M_t^Y + \beta I_t^Y$ comme limite des équations de Norris-Rogers-Williams. *Notes non publiées, 1986.*

[16] J.F. Le Gall, M. Yor : Excursions browniennes et carrés de processus de Bessel. *C. R. Acad Sc. Paris, Série I, t. 303, p. 73–76 (1986).*

[17] J.F. Le Gall, M. Yor : Enlacements du mouvement brownien autour des courbes de l'espace. *Trans. Amer. Math. Soc.* 317 *(2), p. 687–722 (1990).*

[18] P. Malliavin : Analyticité réelle des lois conditionnelles de fonctionnelles additives. *C. R. Acad Sc. Paris, Série I, t. 302, p. 73–78 (1986).*

[19] J.W. Pitman : One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process. *Adv. Appl. Prob.* 7, *p. 511–526 (1975).*

[20] J.W. Pitman, M. Yor : Bessel processes and infinitely divisible laws. *In : "Stochastic Integrals", ed. D. Williams, Lect. Notes in Math. 851, Springer (1981).*

[21] J.W. Pitman, M. Yor : A decomposition of Bessel Bridges. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* 59, *p. 425–457 (1982).*

[22] J. Pitman, M. Yor : Random discrete distributions derived from self-similar random sets. *Electronic J. of Prob.* 1, *paper n°4 (1996).*

[23] D. Revuz, M. Yor : Continuous Martingales and Brownian Motion. *Springer (1991).*

[24] P. Vallois : Diffusion arrêtée au premier instant où l'amplitude atteint un niveau donné. *Stoch. and Stoch. Reports* 43, *p. 93–116 (1993).*

[25] P. Vallois : Amplitude du mouvement brownien, et juxtaposition des excursions positives et négatives. *Séminaire de Probabilités XXVI, Lect. Notes in Math. 1526, p. 361–373, Springer (1992).*

[26] P. Vallois : Sur la loi conjointe du maximum et de l'inverse du temps local du mouvement brownien; application à un théorème de F. Knight. *Stoch. and Stoch. Reports* 35, *p. 175–186 (1991).*

[27] D. Williams : Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions I. *Proc. London Math. Soc. (3)* 28, *p. 738–768 (1974).*

[28] M. Yor : Une explication du théorème de Ciesielski-Taylor. *Ann. Inst. Henri Poincaré* 27, *p. 201–213 (1991).*

[29] M. Yor : Some Aspects of Brownian Motion. Part I : Some special functionals. *Lectures in Math. ETH Zürich, Birkhäuser (1992).*

[30] M. Yor : Random Brownian scaling and some absolute continuity relationships. *In : Progress in Probability, vol. 36; eds : E. Bolthausen, M. Dozzi, F. Russo, p. 243–252. Birkhäuser (1995).*

[31] M. Yor : Compléments aux formules de Tanaka-Rosen. *Séminaire de Probabilités XIX, Lect. Notes in Math. 1123, p. 332–349, Springer (1985).*

[32] M. Yor : Some remarks on Akahori's generalized arc sine formula for Brownian motion with drift. *Prépublication – Laboratoire de Probabilités (Décembre 1993).*

J. Pitman
Statistics Department
University of California
BERKELEY CA 94720
U.S.A.

M. Yor
Laboratoire de Probabilités
Université Paris VI
4 place Jussieu
75 252 PARIS Cedex 05

M. PRATELLI

Quelques résultats de calcul stochastique et leur application aux marchés financiers

Astérisque, tome 236 (1996), p. 277-289
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__277_0>

Quelques résultats de calcul stochastique et leur application aux marchés financiers.

M. Pratelli

Résumé. — Nous donnons quelques résultats d'intégration stochastique et de théorie générale des processus, qui peuvent être appliqués dans l'étude des modèles stochastiques pour les marchés financiers.

Un article de P.–A. Meyer ([Me1]), qui remonte à il y a vingt ans, débute par cette phrase: «Aux gens qui disent que les probabilités sont une branche des mathématiques appliquées, nous répondons depuis des années que les probabilités que *nous* faisons, au moins, ne peuvent servir à rien. Il faut se détromper: la solution de certains problèmes posés par les ingénieurs exige maintenant une partie de l'arsenal de la "théorie générale des processus".»

La théorie de l'intégration stochastique (que j'eus la chance d'apprendre de bonne source en suivant, en 1975, le cours de M. Meyer qui devait donner lieu à [Me2]) s'est avérée très efficace dans plusieurs applications. La plus récente, et peut-être la plus frappante, de ces applications est celle qui concerne la construction de modèles pour les marchés financiers. Des problèmes tels que l'existence d'une "probabilité martingale équivalente" (voir [St],[De],[DS]) ou la recherche de stratégies de couverture des options qui minimisent le risque (voir [FS],[Sc]) ne peuvent être abordés avec le seul support de la théorie d'Itô: ils exigent en effet tout l'arsenal des résultats de "l'Ecole de Strasbourg".

Cette note a été inspirée par la lecture de l'article [AH], dans lequel les auteurs considèrent un marché financier avec un ensemble dénombrable d'actifs: après avoir introduit la notion de "marché approximativement complet", ils donnent un exemple d'un marché qui satisfait à cette condition et dans lequel l'unicité de la "probabilité martingale équivalente" n'a pas lieu.

Dans le premier paragraphe de cette note on étend aux espaces $\mathcal{H}^p$ de martingales locales la théorie de l'intégrale stochastique vectorielle isométrique (exposée, pour le cas $p = 2$, dans le livre [Mt]). Cette extension est utilisée dans le paragraphe suivant pour obtenir une formule de représentation de certains sous–espaces stables de $\mathcal{H}^p$

(qui étend au cas de dimension infinie des résultats du chapitre 4 du livre de Jacod [Ja]).

Les notions ainsi introduites permettent de donner une formule de représentation pour la notion de "marché approximativement complet" introduite par Artzner et Heath.

Dans le troisième paragraphe on prouve que l'extrémalité de la probabilité martingale est réduite à l'unicité de la probabilité martingale équivalente dans le cas où l'on remplace la notion de martingale per celle de "martingale stricte". Cette dernière notion semble être suffisamment large pour couvrir les principales applications aux marchés financiers.

Enfin, dans le quatrième paragraphe on indique comment les résultats précédents peuvent être appliqués aux marchés financiers.

Je profite de cette occasion pour évoquer un ami disparu, Michel Métivier, et un colloque que j'avais eu avec lui à Pise, dans un bureau de la Scuola Normale Superiore. Je lui avais exposé le contenu des deux premiers paragraphes de cette note, et il m'avait encouragé à le publier. Si je ne le fais qu'aujourd'hui, c'est parce que j'en cherchais des applications.

0. Notations

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t<\infty}$ satisfaisant aux conditions habituelles.

A tout processus croissant A (adapté et continu à droite), on associe la mesure μ_A, sur $]0,\infty[\times\Omega$, définie par

$$\mu_A(B) = \mathbf{E}\left[\int_{]0,\infty[} I_B(s,\omega)\, dA_s(\omega)\right].$$

Etant donnés deux espaces de Hilbert séparables $\mathbb{H}, \mathbb{G}$ (dont les normes seront indiquées par $|\cdot|_{\mathbb{H}}$ et par $|\cdot|_{\mathbb{G}}$ respectivement), on considère l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{G})$ des opérateurs linéaires continus de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{G}$ (avec la norme $\|\cdot\|$), ainsi que le sous-espace $\mathcal{L}_1(\mathbb{H},\mathbb{G})$ des opérateurs nucléaires (avec la norme $\|\cdot\|_1$) et le sous-espace $\mathcal{L}_2(\mathbb{H},\mathbb{G})$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt (avec la norme $\|\cdot\|_2$).

Dans les deux premiers paragraphes, le lecteur est supposé être familier avec les notions et les notations introduites dans le livre de Métivier ([Mt]). On trouvera notamment dans ce livre, pour une martingale locale M à valeurs dans $\mathbb{H}$, la définition du processus croissant $[M]_t$, ainsi que celle du processus $[\![M]\!]_t$ à valeurs dans l'ensemble des éléments symétriques positifs de $\mathcal{L}_1(\mathbb{H},\mathbb{H})$.

Dans le troisième paragraphe, qui est indépendant des deux premiers, et où l'on considère des processus à valeurs réelles, les notations sont plutôt celles du livre de Jacod ([Ja]).

1. Utilisation des espaces $\mathcal{H}^p$ dans l'intégration stochastique vectorielle.

On désigne par $\mathcal{H}^p(\mathbb{H})$ (pour $1 \leq p \leq \infty$) l'espace des martingales locales M, à valeurs dans $\mathbb{H}$, telles que la variable aléatoire

$$M^* = \sup_{0 \leq t < \infty} |M_t|_{\mathbb{H}}$$

appartienne à L^p. Il s'agit d'un espace de Banach (avec la norme évidente). On le désignera simplement par $\mathcal{H}^p$ lorsqu'aucune confusion n'est à craindre. La célèbre inégalité de Burkholder–Davis–Gundy affirme l'existence, pour $1 \leq p < \infty$, de deux constantes c_p, C_p telles que l'on ait

$$c_p \left\|M^*\right\|_{L^p} \leq \left\|[M]_\infty^{1/2}\right\|_{L^p} \leq C_p \left\|M^*\right\|_{L^p}.$$

(Pour une démonstration synthétique, voir le chap. 11 de [MP].)

Proposition 1.1 *Pour toute martingale locale M, il existe un processus R_M fortement optionnel, à valeurs dans l'ensemble des éléments symétriques positifs de $\mathcal{L}_1(\mathbb{H}, \mathbb{H})$, avec $\|R_M\|_1 = 1$ et tel que l'on ait*

$$[\![M]\!]_t = \int_{[0,t]} R_M(s)\, d[M]_s.$$

DÉMONSTRATION. Considérons la décomposition $M = M^c + M^d$, où M^c désigne la partie martingale continue. Le théorème 21.6 de [Mt] assure l'existence d'un processus Q_M fortement optionnel, à valeurs dans l'ensemble des éléments symétriques positifs de $\mathcal{L}_1(\mathbb{H}, \mathbb{H})$, avec $\|Q_M\|_1 = 1$ et tel que l'on ait

$$\langle\!\langle M^c \rangle\!\rangle_t = \int_{[0,t]} Q_M(s)\, d\langle M^c\rangle_s.$$

Posons

$$B = \{(s,\omega) :\ \Delta M_s(\omega) \neq 0\},$$

et désignons par R_M le processus qui coïncide avec $\Delta M_s^{\otimes 2}/|\Delta M_s|_{\mathbb{H}}^2$ sur B, et avec Q_M sur B^c. Puisque B est négligeable pour la mesure associée à $\langle M^c\rangle$, on a

$$\langle\!\langle M^c \rangle\!\rangle_t = \int_{[0,t]} Q_M\, I_{B^c}\, d\langle M^c\rangle = \int_{[0,t]} R_M\, I_{B^c}\, d[M].$$

On a en outre

$$[\![M^d]\!]_t = \sum_{s \leq t} \Delta M_s^{\otimes 2} = \int_{[0,t]} R_M\, I_B\, d[M].$$

La relation

$$[\![M]\!] = \langle\!\langle M^c \rangle\!\rangle + [\![M^d]\!]$$

montre alors que le processus R_M possède les propriétés désirées.

Considérons maintenant l'espace $\mathcal{E}\left(\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{G})\right)$ constitué par les processus prévisibles élémentaires à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{G})$, c'est-à -dire par les processus de la forme

$$X(t,\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, I_{]s_i,t_i]\times F_i}(t,\omega),$$

où les a_i sont des éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{G})$ et où les rectangles $]s_i,t_i] \times F_i$ sont deux à deux disjoints, avec $F_i \in \mathcal{F}_{s_i}$ pour tout i.

Lemme 1.2 *Etant donnés un élément X de $\mathcal{E}\left(\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{G})\right)$ et une martingale M, posons $N_t = \int_{[0,t]} X\, dM$. On a alors*

$$[\![N]\!]_t = \int_{[0,t]} (X \circ R_M \circ X^*)\, d[M].$$

DÉMONSTRATION. Rappelons que l'on a

$$N^c = \int X\, dM^c, \qquad N^d = \int X\, dM^d.$$

La formule à démontrer est déjà connue pour la partie martingale continue. Pour l'autre partie, elle découle de la relation suivante:

$$\sum_{s\le t} \Delta N_s^{\otimes 2} = \sum_{s\le t} (X_s \circ \Delta M_s)^{\otimes 2} = \sum_{s\le t} X_s \circ \Delta M_s^{\otimes 2} \circ X_s^*.$$

On remarquera que la formule du Lemme précédent entraîne notamment

$$\begin{aligned} [N]_t = \text{ trace}\left([\![N]\!]_t\right) &= \int_{[0,t]} \text{trace}\,(X \circ R_M \circ X^*)\; d[M] \\ &= \int_{[0,t]} \left\| X \circ R_M^{1/2} \right\|_2^2 \, d[M]. \end{aligned}$$

Lemme 1.3 *Soient A un processus croissant et (K_n) une suite de processus optionnels. Pour un exposant p, avec $1 \le p < \infty$, on suppose que l'on ait*

$$\lim_n \mathbf{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[} K_n^2\, dA\right)^{p/2}\right] = 0.$$

On peut alors extraire de (K_n) une sous–suite qui converge μ_A–p.s. vers zéro.

DÉMONSTRATION. On peut se restreindre au cas $p = 1$ et montrer que la relation

$$\sum_n \mathbf{E}\left[\left(\int K_n^2\, dA\right)^{1/2}\right] < \infty$$

entraîne $\sum_n K_n^2(s,\omega) < \infty$ μ_A–p.s.. A cet effet, posons

$$B_n = \left\{\omega : \left(\int_{[0,\infty[} K_n^2(s,\omega)\, dA_s(\omega)\right) \le 1\right\}.$$

On a alors

$$\sum_n \mathbf{E}\left[I_{B_n} \int K_n^2\, dA\right] \le \sum_n \mathbf{E}\left[I_{B_n} \left(\int K_n^2\, dA\right)^{1/2}\right] < \infty,$$

et donc $\sum_n I_{B_n}(\omega)\, K_n^2(s,\omega) < \infty$ μ_A–p.s..
En outre, la relation $\sum_n P\,(B_n^c) < \infty$ montre que l'ensemble $\limsup_n B_n^c$ est négligeable, de sorte que l'on a $\sum_n I_{B_n^c}(\omega)\, K_n^2(s,\omega) < \infty$ μ_A–p.s..

Le lemme est donc démontré.

Soit maintenant M un élément de $\mathcal{H}^p(\mathbb{H})$ (avec $1 \le p < \infty$). Nous désignerons par $L^{*,p}(\mathbb{H}, \mathbb{G}; M)$ l'espace constitué par les processus X, à valeurs dans l'espace des applications linéaires (non nécessairement bornées) de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{G}$, pour lesquels les conditions suivantes sont remplies:

(a) Le domaine de $X(s,\omega)$ contient l'image de $R_M^{1/2}(s,\omega)$.

(b) Pour tout élément h de $\mathbb{H}$, le processus $X \circ R_M^{1/2}(h)$ est optionnel.

(c) Le processus $X \circ R_M^{1/2}$ est à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}, \mathbb{G})$ des opérateurs de Hilbert–Schmidt, et l'on a

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[} \left\|X \circ R_M^{1/2}\right\|_2^2\, d[M]\right)^{p/2}\right]^{1/p} < \infty.$$

Proposition 1.4 *L'espace $L^{*,p}$, muni de la norme évidente, est un espace de Banach.*

DÉMONSTRATION. L'espace $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}, \mathbb{G})$ étant séparable, le processus $X \circ R_M^{1/2}$ est fortement optionnel. Etant donnée une suite de Cauchy (X_n) dans l'espace $L^{*,p}$, le Lemme 1.3 permet de construire une sous–suite (X_{n_k}) et un processus Y fortement optionnel, de telle manière que la suite

$$\left(\left\|X_{n_k} \circ R_M^{1/2} - Y\right\|_2\right)$$

converge $\mu_{[M]}$–p.s. vers 0. Puisque le processus Y s'annule sur le noyau de $R_M^{1/2}$, il est de la forme $Y = X \circ R_M^{1/2}$. On voit alors que X est la limite cherchée.

Définition 1.5 *On désigne par $\Lambda^p(\mathbb{H},\mathbb{G};M)$ la fermeture de $\mathcal{E}\big(\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{G})\big)$ dans l'espace $L^{*,p}(\mathbb{H},\mathbb{G};M)$. Le prolongement à Λ^p de l'intégrale stochastique des processus prévisibles élémentaires est une isométrie de Λ^p sur un sous–espace fermé de $\mathcal{H}^p(\mathbb{G})$, désigné par $\mathcal{L}^p(\mathbb{H},\mathbb{G};M)$. Cette isométrie définit l'intégrale stochastique pour les éléments de Λ^p.*

Il n'est pas facile de caractériser les éléments de Λ^p. On a toutefois le résultat suivant (qui coïncide, dans le cas où $p = 2$, avec le théorème 22.4 de [Mt]):

Théorème 1.6 *Pour qu'un processus X, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{G})$, appartienne à Λ^p, il suffit qu'il possède les deux propriétés suivantes:*

(a) Pour tout élément h de $\mathbb{H}$, le processus $X(h)$ est prévisible.

(b) On a

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[}\left\|X\circ R_M^{1/2}\right\|_2^2 d[M]\right)^{p/2}\right] < \infty.$$

DÉMONSTRATION. Pour prouver que le processus $\|X\|$ est prévisible, on remarquera que l'on a

$$\|X(s,\omega)\| = \sup_n |X(s,\omega)\,h_n|_{\mathbb{G}}\,,$$

où (h_n) désigne une suite partout dense dans la boule unité de $\mathbb{H}$.

On remarquera ensuite que, X étant limite dans $L^{*,p}$ de la suite $X\,I_{\{\|X\|\leq n\}}$, on peut se restreindre au cas où $\|X(s,\omega)\|$ est uniformément borné par une constante k.

Si l'image de X est de dimension finie, X est fortement prévisible (car $\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{R}^n)$ est séparable) et donc limite p.s. de processus élémentaires.

Choisissons maintenant, dans les espaces $\mathbb{H},\mathbb{G}$, deux bases orthonormales (h_n) et (g_n). Désignons par π^n la projection orthogonale de $\mathbb{G}$ sur le sous–espace engendré par $(g_1,\ldots,g_n)$, et posons $X_n = \pi^n \circ X$. On voit alors facilement que X est limite dans $L^{*,p}$ de la suite (X_n). Il suffit, pour cela, de tenir compte des relations suivantes:

$$\left\|(X_n - X)\circ R_M^{1/2}\right\|_2 \leq 2k\left\|R_M^{1/2}\right\|_2,$$

$$\lim_n \sum_i \left|(X_n - X)\circ R_M^{1/2}(h_i)\right|_{\mathbb{G}}^2 = 0.$$

L'exemple 22.5 de [Mt] concerne un processus appartenant à Λ^2, qui admet comme valeurs des opérateurs non bornés (et qui ne vérifie donc pas les hypothèses du

Théorème 1.6). On peut modifier cet exemple en remplaçant l'exposant 2 par un exposant p quelconque (avec $1 \leq p < \infty$).

Remarquons enfin que le procédé habituel de localisation permet d'étendre la définition de l'intégrale $\int X\,dM$ au cas où M est une martingale locale, et X est localement dans $\Lambda^1(\mathbb{H},\mathbb{G};M)$.

2. Représentation de sous–espaces stables de martingales

Le but de ce paragraphe est d'étendre au cas $p \neq 2$ la formule de représentation des sous–espaces stables de martingales vectorielles établie par Ouvrard ([Ou]). Même dans le cas $p = 2$, il est bien connu qu'on ne peut pas obtenir une telle formule sans introduire l'intégrale stochastique pour des processus à valeurs dans l'espace des opérateurs non bornés.

On rappelle qu'un sous–espace fermé $\mathcal{S}$ de $\mathcal{H}^p(\mathbb{H})$ est dit un *sous–espace p–stable* si, pour tout élément M de $\mathcal{S}$ et tout élément X de $\mathcal{E}(\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{G}))$, l'intégrale stochastique $\int X\,dM$ appartient à $\mathcal{S}$.

Le théorème suivant, dans lequel les suites (h_n) et (g_n) sont des bases orthonormales pour les espaces de Hilbert $\mathbb{H}$ et $\mathbb{G}$, coïncide avec le Théorème 4.60 du livre de Jacod ([Ja]) dans le cas où l'on a $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$.

Théorème 2.1 *Soit M un élément de $\mathcal{H}^p(\mathbb{H})$. L'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{H},\mathbb{G};M)$ coïncide alors avec le sous–espace p–stable de $\mathcal{H}^p(\mathbb{G})$ engendré par les martingales de la forme*

$$g_i \int X\,d(h_j \cdot M),$$

où (i,j) varie dans $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$, et X dans l'espace des processus prévisibles élémentaires à valeurs réelles.

DÉMONSTRATION. On vérifie aussitôt que $\mathcal{L}^p(\mathbb{H},\mathbb{G};M)$ est un sous–espace p–stable de $\mathcal{H}^p(\mathbb{G})$. En effet, si X est un élément de $\Lambda^p(\mathbb{H},\mathbb{G};M)$, et Y un élément de $\mathcal{E}(\mathcal{L}(\mathbb{G},\mathbb{G}))$, on a

$$Y \circ X \in \Lambda^p(\mathbb{H},\mathbb{G};M).$$

Il est d'autre part évident que le sous–espace p–stable dont on parle dans l'énoncé contient les intégrales stochastiques de la forme $\int X\,dM$, où X est une combinaison linéaire d'éléments du type $X_{i,j}(t,\omega)\, h_i \otimes g_j$, avec chaque $X_{i,j}$ réel prévisible borné. En outre, ces intégrales stochastiques forment un ensemble partout dense dans $\mathcal{E}(\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{G}))$ pour la norme de Λ^p (comme on le voit en modifiant légèrement la deuxième partie de la démonstration du Théorème 1.6). Le Théorème est donc démontré.

Le résultat suivant est démontré, pour $p = 2$, dans [Ou].

Corollaire 2.2 *Soit N une martingale de $\mathcal{H}^p(\mathbb{G})$. Pour que N appartienne à $\mathcal{L}^p(\mathbb{H},\mathbb{G};M)$, il faut et il suffit que, pour tout élément g de $\mathbb{G}$, la martingale réelle $g \cdot N$ appartienne au sous–espace p–stable engendré par les martingales réelles de la forme $h \cdot M$, où h varie dans $\mathbb{H}$.*

DÉMONSTRATION. La condition est évidemment nécessaire: si N appartient à $\mathcal{L}^p(\mathbb{H},\mathbb{G};M)$, c'est-à-dire au sous–espace p–stable engendré par les processus de la forme $g_i \int X\, d(h_j \cdot M)$, il est clair que $g \cdot N$ appartient au sous–espace p–stable engendré par les processus de la forme $(g \cdot g_i) \int X\, d(h_j \cdot M)$.

Pour prouver que la condition est suffisante, on remarque d'abord que N est limite dans $\mathcal{H}^p(\mathbb{G})$ des martingales $\sum_{i\leq n}(g_i \cdot N)\, g_i$. Il suffit alors de prouver que ces martingales appartiennent à $\mathcal{L}^p(\mathbb{H},\mathbb{G};M)$. A cet effet, remarquons que chaque $(g_i \cdot N)$ est limite dans $\mathcal{H}^p(\mathbb{R})$ de processus de la forme

$$\sum_{j\leq k} \int X_j\, d(h_j \cdot M)$$

(avec X_j processus prévisible élémentaire à valeurs réelles). Il en résulte que $(g_i \cdot N)\, g_i$ est limite dans $\mathcal{H}^p(\mathbb{G})$ de processus de la forme

$$\sum_{j\leq k} g_i \int X_j\, d(h_j \cdot M).$$

L'assertion est donc démontrée.

Considérons maintenant une suite (M^n) de martingales réelles appartenant à $\mathcal{H}^p(\mathbb{R})$, avec

$$\sum_{n\geq 0} \left\| [M^n]_\infty^{1/2} \right\|_{L^p} < \infty.$$

En désignant par (e_n) la base canonique de ℓ^2, on voit que la martingale $M = \sum_{n\geq 0} e_n M^n$ est bien définie en tant qu'élément de $\mathcal{H}^p(\ell^2)$. On a en effet $[M]_t = \sum_{i\geq 0}[M^i]_t$, de sorte que l'appartenance de $[M]_\infty^{1/2}$ à L^p résulte de la majoration suivante:

$$[M]_\infty^{1/2} \leq \sum_{i\geq 0} [M^i]_\infty^{1/2}.$$

Théorème 2.3 *Soit $\mathcal{S}$ le sous–espace stable de $\mathcal{H}^p(\mathbb{R})$ engendré par la suite de martingales (M_n). Tout élément de $\mathcal{S}$ peut alors s'écrire sous la forme $\int X\, dM$, avec X élément de $\Lambda^p(\ell^2,\mathbb{R};M)$.*

DÉMONSTRATION. Ce n'est qu'un cas particulier du Théorème 2.1, car $\mathcal{S}$ est engendré par les intégrales stochastiques de la forme

$$\int X\, dM^i = \int X\, d(e_i \cdot M),$$

où X est prévisible élémentaire.

On remarquera que, dans le cas particulier où l'on a $[M^i, M^j] = 0$ pour $i \neq j$, tout élément de $\mathcal{S}$ peut s'écrire plus simplement sous la forme $\sum_{i=1}^{\infty} \int X^i \, dM^i$, où X^i appartient à $\Lambda^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}; M^i)$ pour tout i, et où la série converge dans $\mathcal{H}^p(\mathbb{R})$.

3. Extrémalité et unicité de la probabilité martingale équivalente

Dans ce paragraphe, la restriction de P à la tribu $\mathcal{F}_0$ est supposée être dégénérée. En outre, afin d'alléger les notations, toutes les martingales (locales) considérées seront supposées *nulles en* 0.

On se donne un ensemble $\mathcal{M}$ (non nécessairement dénombrable) de martingales réelles, appartenant à $\mathcal{H}^1$. En outre, on désigne par C l'ensemble convexe constitué par les lois qui rendent chaque élément de $\mathcal{M}$ une martingale (locale).

Un célèbre théorème de Jacod et Yor (voir, par ex., [Ja], Th. 11.2) affirme que le sous–espace stable de $\mathcal{H}^1$ engendré par $\mathcal{M}$ coïncide avec l'espace $\mathcal{H}^1$ tout entier si, et seulement si, la condition suivante est remplie:

(3.1) *La loi P est un point extrémal de C.*

Il est commode, dans les applications aux modèles financiers, de pouvoir remplacer la précédente condition d'extrémalité par la condition suivante:

(3.2) *Il n'existe dans C aucune loi équivalente à P et distincte de P.*

Cette dernière condition est, en général, plus forte que la condition d'extrémalité (3.2). Dans le livre de Jacod ([Ja], Cor. 11.4), on montre que les deux conditions sont équivalentes si l'ensemble $\mathcal{M}$ est *fini* ou bien si ses éléments sont *à trajectoires continues*. Dans ce paragraphe nous nous proposons de montrer qu'il en est de même dans le cas où chaque élément de $\mathcal{M}$ est une martingale stricte. On rappelle (voir [LJ]) qu'une martingale (locale) M est dite *stricte* si, pour tout temps d'arrêt T, la variable aléatoire M_T est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{T-}$. En outre, nous dirons que la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est *strictement continue à gauche* si, pour tout temps d'arrêt T, on a $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$.

On sait (voir [Ja], Th. 11.2) que, dans le cas général, la condition d'extrémalité (3.1) équivaut à la condition suivante:

(3.1.*bis*) *La seule martingale bornée orthogonale à tout élément de $\mathcal{M}$ est la martingale nulle.*

On sait aussi (voir [Ja], Th. 11.3) que la condition (3.2) est une conséquence de la condition suivante:

(3.2.*bis*) *La seule martingale de $\mathcal{H}^1$ orthogonale à tout élément de $\mathcal{M}$ est la martingale nulle.*

Donc, si (3.1.*bis*) $\Rightarrow$ (3.2.*bis*), les conditions (3.1) et (3.2) coïncident (voir [Ja], Cor. 11.4).

Pour démontrer le résultat annoncé, nous nous servirons d'un petit lemme de "théorie générale":

Lemme 3.3 *On suppose que la filtration est strictement continue à gauche. Alors, pour tout processus X, optionnel et prélocalement borné, il existe une suite (croissante) (H_n) d'ensembles prévisibles dont la réunion coïncide avec $[\![0,\infty[\![$ et tels que X soit borné sur chaque H_n.*

DÉMONSTRATION. Puisque le processus X est prélocalement borné, il suffit de prouver que, pour tout temps d'arrêt T tel que X soit borné sur $[\![0,T[\![$, l'intervalle stochastique $[\![0,T]\!]$ est la réunion d'une suite (H_n) d'ensembles prévisibles, tels que X soit borné sur chaque H_n.

A cet effet, puisque l'ensemble $\{|X| \leq n\} \cap [\![T]\!] \in \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$, il existe (voir par exemple [DM] pag. 200) un ensemble prévisible H_n tel que l'on ait

$$H_n \cap [\![T]\!] = \{|X| \leq n\} \cap [\![T]\!].$$

On peut aussi supposer que $H_n \subset [\![0,T]\!]$. Posons ensuite

$$H = \bigcup\nolimits_{n\geq 1} H_n, \qquad H_0 = [\![0,T]\!] \setminus H.$$

On a alors $[\![T]\!] \subset H$. En outre, pour tout $n \geq 0$, le processus X est borné sur H_n, car il l'est sur chacun des deux ensembles $H_n \cap [\![0,T[\![$, $H_n \cap [\![T]\!]$ (dont le deuxième est vide pour $n = 0$). La suite $(H_n)_{n\geq 0}$ répond donc à la question.

Proposition 3.4 *Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de martingales locales strictes, tel que la seule martingale bornée orthogonale à tout élément de $\mathcal{M}$ soit la martingale nulle. On a alors les conclusions suivantes:*

1) La filtration est strictement continue à gauche.

2) La seule martingale locale orthogonale à tout élément de $\mathcal{M}$ est la martingale nulle.

DÉMONSTRATION. 1) Etant donné un temps d'arrêt T, considérons une variable aléatoire bornée V, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$, telle que l'on ait $\mathbf{E}\big[V \mid \mathcal{F}_{T-}\big] = 0$. Il s'agit de prouver que V est p.s. nulle. A cet effet, remarquons que le processus N défini par $N_t = V\, I_{\{t\geq T\}}$ est une martingale bornée. Tout est donc réduit à prouver que cette martingale est nulle, c'est-à-dire qu'elle est orthogonale à tout élément M de $\mathcal{M}$. Pour cela, il suffit de prouver que N est orthogonale à toute martingale L, uniformément intégrable, obtenue de M par arrêt. Or, puisque L est encore stricte, les relations

$$[L,N]_t = \big(\Delta L_T\, V\big)\, I_{\{t\geq T\}},$$

$$\mathbf{E}\big[\Delta L_T\, V \mid \mathcal{F}_{T-}\big] = \Delta L_T\, \mathbf{E}\big[V \mid \mathcal{F}_{T-}\big] = 0$$

montrent que le processus $[L, N]$ est une martingale. On a donc bien que N est orthogonale à L, et l'assertion est démontrée.

2) Soit N une martingale locale orthogonale à tout élément de $\mathcal{M}$. En appliquant le Lemme 3.3 au processus $X = \Delta N$, on voit qu'il existe une suite croissante (H_n) d'ensemble prévisibles dont la réunion coïncide avec $[\![0, \infty[\![$ et tels que chacune des martingales locales $I_{H_n} \cdot N$ soit à sauts uniformément bornés (et donc localement bornée). Chacune de ces martingales locales est orthogonale à $\mathcal{M}$, donc nulle. Il en résulte que la martingale N elle même est nulle, ce qui achève la démonstration.

Le résultat annoncé est maintenant une conséquence immédiate.

Théorème 3.5 *Si $\mathcal{M}$ est un ensemble de martingales locales strictes, les conditions (3.1) et (3.2) coïncident.*

4. Application aux modèles de marchés financiers

Dans l'article [AH], les auteurs considèrent un marché avec un ensemble dénombrable d'actifs financiers, représentés par une suite (M^n) de processus qui sont supposés être des martingales (locales) pour la loi P.

La valeur d'un portefeuille basé sur les k premiers actifs financiers, et qui suit une stratégie élémentaire, est de la forme

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{k} \vartheta_{ij} \left(M_{t_{j+1}}^i - M_{t_j}^i \right),$$

où la variable aléatoire ϑ_{ij} est bornée et mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{t_j}$. Si toute variable aléatoire intégrable peut être approchée dans L^1 par des "valeurs de portefeuille" du type décrit ci–dessus, le marché est dit *approximativement complet*. Grâce au Théorème 2.1, cette condition revient à imposer que le sous–espace stable de $\mathcal{H}^1$ engendré par la suite (M^n) coïncide avec l'espace $\mathcal{H}^1$ tout entier (ce qui permet notamment d'utiliser la formule de représentation du Théorème 2.3).

Dans l'article cité, Artzner et Heath donnent un exemple intéressant d'un marché approximativement complet dans lequel l'unicité de la "probabilité martingale équivalente" n'a pas lieu. Ils décrivent aussi certaines pathologies de ce marché. Or, de tels inconvénients sont éliminés si l'on impose aux actifs d'être des martingales strictes. D'autre part, cette condition est vérifiée dans la plupart des applications courantes, dans lesquelles la partie discontinue est une intégrale stochastique par rapport à un processus de Poisson. On vérifie en effet aisément que le processus de Poisson compensé est une martingale stricte par rapport à sa filtration naturelle.

Il suffit pour cela d'utiliser le résultat bien connu (voir, par ex., [FL]) selon lequel les instants de sauts T_k du processus de Poisson vérifient l'égalité $\mathcal{F}_{T_k} = \mathcal{F}_{T_k-}$. Puisque les sauts de chaque martingale doivent être contenus dans $\bigcup_k [\![T_k]\!]$ (grâce au résultat de représentation comme intégrale stochastique par rapport au processus de Poisson), une martingale à un seul saut $N_t = V\, I_{\{t \geq T\}}$ (avec V mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et telle que $\mathbf{E}\big[V \,|\, \mathcal{F}_{T-}\big] = 0$) doit être de la forme

$$\sum_k \big(V\, I_{\{T=T_k\}}\big)\; I_{\{t \geq T_k\}}\,.$$

Chaque $\big(V\, I_{\{T=T_k\}}\big)\; I_{\{t \geq T_k\}}$ étant une martingale, on a $\mathbf{E}\big[V\, I_{\{T=T_k\}} | \mathcal{F}_{T_k-}\big] = V\, I_{\{T=T_k\}} = 0$. Donc la filtration est strictement continue à gauche et toute martingale est stricte (voir (3.4))

On peut par le même raisonnement démontrer un résultat un peu plus général: si le marché est approximativement complet, et s'il existe une suite croissante (T_k) de temps d'arrêt, à graphes deux à deux disjoints, telle que l'on ait $\mathcal{F}_{T_k} = \mathcal{F}_{T_k-}$ pour tout k et que l'ensemble $\bigcup_n \{\Delta\, M^n \neq 0\}$ soit contenu dans la réunion des graphes des T_k, alors la filtration est strictement continue à gauche.

BIBLIOGRAPHIE

[AH] Artzner P. – Heath D., *Approximate completeness with multiple martingale measures*. Mathematical Finance **5** (1995), 1–11.

[De] Delbaen F., *Representing Martingale Measures when Asset Prices are continuous and bounded*. Mathematical Finance **2** (1992), 107–130.

[DM] Dellacherie C. – Meyer P.A., *Probabilités et Potentiel. Chapitres I à IV*. Hermann, Paris, 1975.

[DS] Delbaen F. – Schachermayer W., *A general version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing*. Mathematische Annalen **300** (1994), 463–520.

[FL] Fagnola F. – Letta G., *Sur la représentation intégrale des martingales du processus de Poisson*. Séminaire de Probabilités XX, Lecture Notes in Math. 1204 (1986), 28–30.

[FS] Föllmer H. – Schweizer M., *Hedging of contingent claims under incomplete information*, in Applied Stochastic Analysis (M.H.A. Davis and R.J. Elliot, eds.) Gordon and Breach, London (1991), 389–414.

[Ja] Jacod J., *Calcul stochastique et problèmes de martingales*. Lectures Notes in Math. 714 (1979).

[LJ] Le Jan Y., *Temps d'arrêt stricts et martingales de sauts*. ZW **44** (1978), 213–225.

[Mt] Métivier M., *Semimartingales*. W. de Gruyter, Berlin, 1982.

[MP] Métivier M. – Pellaumail J., *Stochastic Integration*. Academic Press, New York, 1980.

[Me1] Meyer P.– A., *Sur un problème de filtration*. Séminaire de Probabilités VII, Lecture Notes in Math. 321 (1973), 223–247.

[Me2] Meyer P.– A., *Un cours sur les intégrales stochastiques*, Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Math. 511 (1976), 245–401.

[Ou] Ouvrard J., *Représentation de martingales vectorielles de carré intégrable à valeurs dans des espaces de Hilbert séparables*. ZW **33** (1975), 195–208.

[Sc] Schweizer M., *Option hedging for semimartingales*. Stoch. Proc. and Appl. **37** (1991), 339–363.

[St] Stricker C., *Arbitrage et lois de martingale*. Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 26, n. 3 (1990), 451–460.

Maurizio Pratelli
Dipartimento di Matematica
Via Buonarroti, 2
I–56127 Pisa (Italie)

D. W. STROOCK
O. ZEITOUNI

Variations on a theme by Bismut

Astérisque, tome 236 (1996), p. 291-301
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__291_0>

Variations on a Theme by Bismut

D. W. Stroock, O. Zeitouni

Abstract. — Let M be a compact, connected, Riemannian manifold of dimension d, let $\{P_t : t > 0\}$ denote the Markov semigroups on $C(M)$ determined by $\frac{1}{2}\Delta$, and let $p_t(x,y)$ denote the kernel (with respect to the Riemannian volume measure) for the operator P_t. (The existence of this kernel as a positive, smooth function is well-known, see e.g. [D].) Bismut's celebrated formula, presented in [B], equates $\nabla \log\big(p_t(\,\cdot\,,y)\big)$ with certain stochastic integrals (see (20) below.) Various derivations of this formula and its extensions can be found in [AM], [EL] and [N]. In this note, we give a quick derivation of Bismut's and related formulae by lifting considerations to the bundle of orthonormal frames, using Bochner's identity, and applying a little elementary stochastic analysis. Some consequences of these identities are then explored. In particular, after deriving a standard logarithmic Sobolev inequality, we present (see (26)) a sharp pointwise estimate on the logarithmic derivative of the heat kernel in terms of known estimates on the heat kernel itself.

§1 Bismut's Formula and Variations

Let $\mathcal{O}(M)$ denote the bundle of orthonormal frames associated to M, equipped with the Lévi–Civita connection. (Throughout, we will take our basic reference for differential geometry to be the book [BC]. In particular, see Chapter 7 for an explanation of $\mathcal{O}(M)$.) The advantage gained by moving considerations to $\mathcal{O}(M)$ is that many differential geometric quantities resemble their classical analogs. For example, if $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_d)$ denotes the standard orthonormal basis in $\mathbb{R}^d$ and $\mathfrak{E}_1,\dots,\mathfrak{E}_d$ are the corresponding basic vector fields on $\mathcal{O}(M)$ (i.e., $\mathfrak{E}_k$ is the horizontal vector field on $\mathcal{O}(M)$ for which $d\pi\mathfrak{E}_k(\mathfrak{f}) = \mathfrak{f}\mathbf{e}_k$ at each $\mathfrak{f} \in \mathcal{O}(M)$), then we can define the gradient $\mathfrak{f} \in \mathcal{O}(M) \longmapsto \nabla_{\mathfrak{f}}\varphi \in \mathbb{R}^d$ for $\varphi \in C^1(M)$ so that

$$\nabla\varphi(\mathfrak{f}) = \nabla_{\mathfrak{f}}\varphi = \sum_1^d \mathfrak{E}_k(\mathfrak{f})(\varphi\circ\pi)\mathbf{e}_k, \tag{1}$$

where $\pi : \mathcal{O}(M) \longrightarrow M$ denotes the fiber map. Similarly, if, for $F \in C^2\big(\mathcal{O}(M)\big)$,

$$\Delta F = \sum_{k=1}^d \mathfrak{E}_k^2 F, \tag{2}$$

then

$$\Delta\varphi \equiv \Delta(\varphi \circ \pi), \quad \varphi \in C^2(M), \tag{3}$$

is well-defined as a function on M and, in fact, gives the action of the standard Laplacian (Laplace–Beltrami operator) on φ.

Next, let $\phi : T(\mathcal{O}(M)) \longrightarrow o(d)$ (the Lie algebra of $d \times d$ skew symmetric matrices) denote the connection 1-form determined by the Lévi–Civita connection (cf. §5.2 in [BC]). That is, for any $\mathfrak{f} \in \mathcal{O}(M)$ and $X_\mathfrak{f} \in T_\mathfrak{f}(\mathcal{O}(M))$, $\phi(X_\mathfrak{f})$ is determined so that

$$\mathbf{H}X_\mathfrak{f} \equiv X_\mathfrak{f} - \lambda(\phi(X_\mathfrak{f}))$$

is the horizontal component of $X_\mathfrak{f}$, where, for $A \in o(d)$, $\lambda(A) \in T(\mathcal{O}(M))$ is the vertical vector field such that

$$\lambda(A)F(\mathfrak{f}) = \frac{d}{ds}F(R_{e^{sA}}\mathfrak{f})\Big|_{s=0}, \quad \mathfrak{f} \in \mathcal{O}(M),$$

and $R_\mathcal{O} : \mathcal{O}(M) \longrightarrow \mathcal{O}(M)$ is the natural right action given by $R_\mathcal{O}\mathfrak{f}\mathbf{v} = \mathfrak{f}\mathcal{O}\mathbf{v}$ for $\mathcal{O} \in O(d)$, $\mathfrak{f} \in \mathcal{O}(M)$, and $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$. Then, the curvature 2-form $\Phi : T(\mathcal{O}(M)) \times T(\mathcal{O}(M)) \longrightarrow o(d)$ is defined to be the horizontal part of the exterior derivative $d\phi$ of ϕ:

$$\Phi(X_\mathfrak{f}, Y_\mathfrak{f}) = d\phi(\mathbf{H}X_\mathfrak{f}, \mathbf{H}Y_\mathfrak{f}), \quad X_\mathfrak{f}, Y_\mathfrak{f} \in T_\mathfrak{f}(\mathcal{O}(M)). \tag{4}$$

As a consequence of the fact that the Lévi–Civita connection is torsion free and the second structural equation (cf. Theorem 4 in §6.2 of [BC]), one finds (cf. §5.3 of [BC]) that the commutator of $\mathfrak{E}_k$ with $\mathfrak{E}_\ell$ is vertical and is given by

$$[\mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}_\ell](\mathfrak{f}) = -\lambda(\Phi_{k,\ell}(\mathfrak{f})), \quad \text{where } \Phi_{k,\ell} \equiv \Phi(\mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}_\ell). \tag{5}$$

In particular, for $\varphi \in C^2(M)$,

$$\mathfrak{E}_k\mathfrak{E}_\ell(\varphi \circ \pi) = \mathfrak{E}_\ell\mathfrak{E}_k(\varphi \circ \pi),$$

and, for $\varphi \in C^3(M)$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_k^2\mathfrak{E}_\ell(\varphi \circ \pi) &= \mathfrak{E}_\ell\mathfrak{E}_k^2(\varphi \circ \pi) - \lambda(\Phi_{k,\ell})\mathfrak{E}_k(\varphi \circ \pi)\\ &= \mathfrak{E}_\ell\mathfrak{E}_k^2(\varphi \circ \pi) - \sum_{j=1}^d (\Phi_{k,\ell}\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j)_{\mathbf{R}^d}\mathfrak{E}_j(\varphi \circ \pi).\end{aligned}$$

Hence, after summing with respect of k, we arrive at the Bochner identity

$$\Delta\nabla\varphi = \nabla\Delta\varphi + \mathrm{Ric}\nabla\varphi, \tag{6}$$

where Ric : $\mathcal{O}(M) \longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ is the Ricci curvature (symmetric) matrix

$$\mathrm{Ric}_{i,j} = -\sum_{k=1}^{d} \left(\Phi_{k,i}\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j\right)_{\mathbf{R}^d}. \tag{7}$$

Bochner's identity is the starting point for a great deal of analysis on M. To wit, let $\{P_t : t > 0\}$ denote the Markov semigroups on $C(M)$ determined by $\frac{1}{2}\Delta$. Then, as an application of (6), we find that

$$\frac{d}{dt}\nabla P_t\varphi = \frac{1}{2}\Delta\nabla P_t\varphi - \frac{1}{2}\mathrm{Ric}\nabla P_t\varphi, \tag{8}$$

where the action of Δ on an $\mathbb{R}^d$-valued function is component by component; and, from (8), one has

$$\frac{d}{dt}\left|\nabla P_t\varphi\right|^2 = \left(\nabla P_t\varphi, \Delta\nabla P_t\varphi\right)_{\mathbf{R}^d} - \left(\nabla P_t\varphi, \mathrm{Ric}\nabla P_t\varphi\right)_{\mathbf{R}^d}.$$

At the same time, an easy computation leads to

$$\Delta\left|\nabla P_t\varphi\right|^2 = 2\left(\nabla P_t\varphi, \Delta\nabla P_t\varphi\right)_{\mathbf{R}^d} + 2\left\|\mathrm{Hess}(P_t\varphi)\right\|_{\mathrm{H.S.}}^2,$$

where $\mathrm{Hess}f \equiv \left(\left(\mathfrak{E}_k\mathfrak{E}_\ell f\right)\right)$ is the Hessian matrix of $f \in C^2(M)$ and $\|\cdot\|_{\mathrm{H.S.}}$ is the standard Hilbert–Schmidt norm for $d \times d$ matrices. Hence, we find that

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left|\nabla P_t\varphi\right|^2 &= \frac{1}{2}\Delta\left|\nabla P_t\varphi\right|^2 - \left\|\mathrm{Hess}(P_t\varphi)\right\|_{\mathrm{H.S.}}^2 - \left(\nabla P_t\varphi, \mathrm{Ric}\nabla P_t\varphi\right)_{\mathbf{R}^d}\\ &\leq \frac{1}{2}\Delta\left|P_t\varphi\right|^2 - \alpha\left|\nabla P_t\varphi\right|^2,\end{aligned}$$

where

$$\alpha \equiv \inf\left\{\left(\mathbf{e}, \mathrm{Ric}(\mathfrak{f})\mathbf{e}\right)_{\mathbf{R}^d} : \mathfrak{f} \in \mathcal{O}(M) \text{ and } |\mathbf{e}| = 1\right\}. \tag{9}$$

In particular, for $T \in (0, \infty)$,

$$\frac{d}{dt}P_{T-t}\left(\left|\nabla P_t\varphi\right|^2\right) \leq -\alpha P_{T-t}\left(\left|\nabla P_t\varphi\right|^2\right), \quad t \in (0, T),$$

and so

$$\left|\nabla P_T\varphi\right|^2 \leq e^{-\alpha T}P_T\left(|\nabla\varphi|^2\right), \quad T \in (0, \infty). \tag{10}$$

The estimate in (10) is very useful as it stands. For example, when $\alpha > 0$, it leads immediately to the well known fact that the spectral gap for Δ as an operator on $L^2(M)$ is at least α. However, as Bismut [B] noticed, (8) can be effectively combined with elementary probability theory to replace estimates like (10) with intriguing equalities. To see this, let $(\mathfrak{W}, \mathcal{B}_{\mathfrak{W}}, \mu)$ be the standard Wiener space of $\mathbb{R}^d$-valued paths and, for each $\mathfrak{f} \in \mathcal{O}(M)$, use $\mathfrak{F}_\mathfrak{f} : [0,\infty) \times \mathfrak{W} \longrightarrow \mathcal{O}(M)$ to denote the progressively measurable solution to the Stratonovich stochastic differential equation

$$d\mathfrak{F}_\mathfrak{f}(t,\mathbf{w}) = \sum_1^d \mathfrak{E}_k\big(\mathfrak{F}_\mathfrak{f}(t,\mathbf{w})\big) \circ d\mathbf{w}(t)_k \quad \text{with } \mathfrak{F}_\mathfrak{f}(0,\mathbf{w}) = \mathfrak{f}. \tag{11}$$

Next, define $A_\mathfrak{f} : [0,\infty) \times \mathfrak{W} \longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ by the integral equation

$$A_\mathfrak{f}(t,\mathbf{w}) = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\int_0^t A_\mathfrak{f}(\tau,\mathbf{w})\mathrm{Ric}\big(\mathfrak{F}_\mathfrak{f}(\tau,\mathbf{w})\big)\,d\tau, \quad t \in [0,\infty). \tag{12}$$

Then, from (8) and Itô's formula, one finds that, for each $T \in (0,\infty)$,

$$M(t,\mathbf{w}) = A_\mathfrak{f}(t\wedge T,\mathbf{w})\big[\nabla P_{T-t\wedge T}\varphi\big]\big(\mathfrak{F}_\mathfrak{f}(t\wedge T,\mathbf{w})\big) \tag{13}$$

is an $\mathbb{R}^d$-valued martingale. In particular, this means that

$$\big[\nabla P_T\varphi\big](\mathfrak{f}) = \mathbb{E}\Big[A_\mathfrak{f}(T)\nabla\varphi\big(\mathfrak{F}_\mathfrak{f}(T)\big)\Big]. \tag{14}$$

Since it is obvious that (cf. (9))

$$\big\|A_\mathfrak{f}(T,\mathbf{w})\big\|_{\mathrm{op}}^2 \le e^{-\alpha T}, \quad (T,\mathbf{w}) \in [0,\infty) \times \mathfrak{W}, \tag{15}$$

(14) represents a considerable sharpening of (10). For example, from (14) and (15), we know that

$$\big|\nabla P_T\varphi\big| \le e^{-\frac{\alpha T}{2}} P_T\big(|\nabla\varphi|\big). \tag{16}$$

(Notice that although $\nabla\psi$ is defined only on $\mathcal{O}(M)$, $|\nabla\psi|$ is well-defined on M itself.) To see why (16) represents an improvement on (10), we follow the reasoning of D. Bakry and M. Emery [BM] to derive from it the logarithmic Sobolev inequality

$$P_T(\varphi\log\varphi) - P_T\varphi\log P_T\varphi \le \left(\frac{1}{2}\int_0^T e^{-\alpha t}\,dt\right) P_T\left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\right), \quad \varphi \in C^1\big(M;(0,\infty)\big). \tag{17}$$

Indeed, note that,

$$\begin{aligned} 2\frac{d}{dt}P_t\big(P_{T-t}\varphi\log P_{T-t}\varphi\big) &= P_t\left(\frac{\big|\nabla P_{T-t}\varphi\big|^2}{P_{T-t}\varphi}\right) \\ &\le e^{\alpha(t-T)}P_t\left(\frac{\big(P_{T-t}|\nabla\varphi|\big)^2}{P_{T-t}\varphi}\right) \le e^{\alpha(t-T)}P_T\left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\right), \end{aligned}$$

where we have used (16) to get the first inequality and the Markov property and

$$\begin{aligned}\left(P_{T-t}|\nabla\varphi|\right)^2 &= 4\Big(P_{T-t}\big(\varphi^{\frac{1}{2}}\nabla\varphi^{\frac{1}{2}}\big)\Big)^2\\ &\le 4\big(P_{T-t}\varphi\big)\Big(P_{T-t}|\nabla\varphi^{\frac{1}{2}}|^2\Big) = \big(P_{T-t}\varphi\big)\left(P_{T-t}\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\right)\end{aligned}$$

to get the second.

In addition to (17), (14) leads immediately to a remarkable identity, which, because it was discovered[1] originally by Bismut, we call *Bismut's formula.* Namely, by applying Itô's formula to first (cf. (13)) $t \in [0,T] \longmapsto tM(t)$ and then $t \in [0,T] \longmapsto P_{T-t}\varphi\big(\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}(t)\big)$, we see that

$$\begin{aligned}T\mathbb{E}\Big[A_{\mathfrak{f}}(T)\nabla\varphi\big(\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}(T)\big)\Big] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T A_{\mathfrak{f}}(t)\nabla P_{T-t}\varphi\big(\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}(t)\big)\,dt\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T A_{\mathfrak{f}}(t)\,d\mathbf{w}(t)\int_0^T \big[\nabla P_{T-t}\varphi\big]\big(\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}(t)\big)\,d\mathbf{w}(t)\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T A_{\mathfrak{f}}(t)\,d\mathbf{w}(t)\Big(\varphi\circ\pi\big(\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}(T)\big) - \big[P_T\varphi\big](\mathfrak{f})\Big)\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T A_{\mathfrak{f}}(t)\,d\mathbf{w}(t)\varphi\circ\pi\big(\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}(T)\big)\right],\end{aligned}$$

where all the stochastic integrals here are taken in the sense of Itô. (More generally, the notation $d\mathbf{w}(t)$, as opposed to "$\circ d\mathbf{w}(t)$", will be used to indicate Itô, as opposed to Stratonovich, stochastic integration.) Thus, in conjunction with (14), we arrive at Bismut's formula

$$\text{(18)}\qquad \big[\nabla P_T\varphi\big](\mathfrak{f}) = T^{-1}\mathbb{E}\left[\int_0^T A_{\mathfrak{f}}(t)\,d\mathbf{w}(t)\varphi\circ\pi\big(\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}(T)\big)\right].$$

Before examining (18) further, we remark that essentially the same line of reasoning leads to a related formula. Namely, let $\{\mathfrak{P} : t > 0\}$ denote the Markov semigroup given by

$$\mathfrak{P}_t\Psi(\mathfrak{f}) = \mathbb{E}\Big[\Psi\big(\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}(t)\big)\Big], \quad \Psi \in C\big(O(M)\big).$$

Clearly, $\big[P_t\varphi\big]\circ\pi = \mathfrak{P}_t(\varphi\circ\pi)$ for $\varphi \in C(M)$, but what is perhaps less obvious is that

$$\text{(19)}\qquad \nabla P_T\varphi(\mathfrak{f}) = \big[\mathfrak{P}_T\nabla\varphi\big](\mathfrak{f}) - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \operatorname{Ric}\big(\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}(t)\big)\,d\mathbf{w}(t)\,\varphi\circ\pi\big(\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}(T)\big)\right].$$

[1] Actually, after deriving his formula by a quite different line of reasoning, Bismut [B] offers a second derivation which, even if it is not identical, is closely related to the one which we give here.

To derive (19), first note that, from (6),

$$2\frac{d}{dt}\Big[\mathfrak{P}_t(\nabla P_{T-t}\varphi)\Big] = \mathfrak{P}_t\Big(\mathrm{Ric}\nabla P_{T-t}\varphi\Big), \quad t \in (0,T),$$

and therefore

$$\begin{aligned} 2[\mathfrak{P}_T(\nabla\varphi)](\mathfrak{f}) - 2[\nabla P_T\varphi](\mathfrak{f}) &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \mathrm{Ric}(\mathfrak{F}_\mathfrak{f}(t))\,[\nabla P_{T-t}\varphi(\mathfrak{F}_\mathfrak{f}(t))]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \mathrm{Ric}(\mathfrak{F}_\mathfrak{f}(t))\,d\mathbf{w}(t)\int_0^T [\nabla P_{T-t}\varphi]\,(\mathfrak{F}_\mathfrak{f}(t))\,d\mathbf{w}(t)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \mathrm{Ric}(\mathfrak{F}_\mathfrak{f}(t))\,d\mathbf{w}(t)\,\varphi\circ\pi\big(\mathfrak{F}_\mathfrak{f}(T)\big)\right]. \end{aligned}$$

§2 Estimates and Applications

We conclude this note with an examination of the potential applications of Bismut's formula (18). To begin with, we follow Bismut by converting (18) into the statement that

(20)
$$[\nabla\log(p_T(\,\cdot\,,y))](\mathfrak{f}) = \frac{[\nabla p_T(\,\cdot\,,y)](\mathfrak{f})}{p_T(\pi(\mathfrak{f}),y)} = T^{-1}\mathbb{E}\left[\int_0^T A_\mathfrak{f}(t)\,d\mathbf{w}(t)\middle|\,\pi(\mathfrak{F}_\mathfrak{f}(T)) = y\right].$$

where $p_t(x,y)$ denotes the kernel (with respect to the Riemannian volume measure) for the operator P_t. (The existence of this kernel as a positive, smooth function is well-known, see e.g. [D].) Indeed, as soon as one shows that the conditional expectation value on the right makes sense and admits a version which is continuous in $y \in M$, there is no question that (20) is simply a dramatic re-interpretation of (18). For this purpose, first observe that there is no problem about the interpretation of $\int_0^T A_\mathfrak{f}(t,\mathbf{w})\,d\mathbf{w}(t)$ under the conditional measure. Namely, although this integral arose as an Itô integral which is defined only up to a set of μ-measure 0, it makes perfectly good sense as a classical Riemann–Stieltjes integral for each $\mathbf{w} \in \mathfrak{W}$. In particular, this means that there is no question about the meaning of the right hand side and no doubt that (20) holds for $P(T,\pi(\mathfrak{f}),\,\cdot\,)$-almost every $y \in M$, where $P(T,x,\,\cdot\,)$ is the transition probability function whose density is $p_T(x,\,\cdot\,)$.

Now, let $T \in (0,\infty)$ be given, set $T_n = (1-2^{-n})T$, and define

$$G_{n,T}(\mathfrak{f},y) = \mathbb{E}\left[\int_0^{T_n} A_\mathfrak{f}(t)\,d\mathbf{w}(t)\,F_{n,T}\Big(\mathfrak{f},\pi\big(\mathfrak{F}_\mathfrak{f}(T_n)\big),y\Big)\right]$$

$$\text{where } F_{n,T}(\mathfrak{f},\xi,y) \equiv \frac{p_{2^{-n}T}(\xi,y)}{p_T(\pi(\mathfrak{f}),y)}.$$

We know from (18) that

$$T\frac{[\nabla P_T\varphi](\mathfrak{f})}{p_T(\pi(\mathfrak{f}),y)} = \lim_{n\to\infty}\int_M G_{n,T}(\mathfrak{f},y)\varphi(y)\,dy.$$

Thus, our problem comes down to showing that there exists a $G_T(\mathfrak{f},\cdot)\in C(M;\mathbb{R}^d)$ to which $\{G_{n,T}(\mathfrak{f},\cdot)\}_1^\infty$ converges uniformly. But, since

$$G_{n,T}(\mathfrak{f},y) - G_{n-1,T}(\mathfrak{f},y) = \mathbb{E}\left[\int_{T_{n-1}}^{T_n} A_{\mathfrak{f}}(t)\,d\mathbf{w}(t)F_{n,T}\Big(\mathfrak{f},\pi\big(\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}(T_n)\big),y\Big)\right], \quad n\ge 1,$$

our problem comes down to estimating the quantities

$$B_{n,T}(\mathfrak{f},y)\equiv\left|\mathbb{E}\left[\int_{T_{n-1}}^{T_n} A_{\mathfrak{f}}(t)\,d\mathbf{w}(t)F_{n,T}\Big(\mathfrak{f},\pi\big(\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}(T_n)\big),y\Big)\right]\right|.$$

However, by standard (cf. Chapter 5 of [D]) estimates,

$$M(T)\equiv\sup_{t\in(0,T]}\sup_{\xi,\eta\in M}(2\pi t)^{\frac{d}{2}}p_t(\xi,\eta)<\infty \quad\text{and}\quad \epsilon(T)\equiv\inf_{\xi,\eta\in M}p_T(\xi,\eta)>0,$$

while, by Hölder's and Burkholder's inequalities,

$$\begin{aligned}B_{n,T}(\mathfrak{f},y)&\le\mathbb{E}\left[\left|\int_{T_{n-1}}^{T_n}A_{\mathfrak{f}}(t)\,d\mathbf{w}(t)\right|^{d+1}\right]^{\frac{1}{d+1}}\mathbb{E}\Big[F_{n,T}\Big(\mathfrak{f},\pi\big(\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}(T_n)\big),y\Big)^{1+\frac{1}{d}}\Big]^{\frac{d}{d+1}}\\&\le de^{\frac{|\alpha|T}{2}}\left(T2^{-n}\right)^{\frac{1}{2}}\|F_{n,T}(\mathfrak{f},\cdot,y)\|_{\mathrm{u}}^{\frac{1}{d+1}}\le de^{\frac{|\alpha|T}{2}}\left(\frac{M(T)}{\sqrt{T}\,\epsilon(T)}\right)^{\frac{1}{d+1}}2^{-\frac{n}{2(d+1)}},\end{aligned}$$

which is more than enough to justify (20).

Obviously, the preceding argument is extremely crude and leads to far from optimal estimates. In order to remedy this situation, we return again to (18) and consider general $\varphi\in C\big(M;(0,\infty)\big)$. Next, recall (see, for example, Lemma 3.2.13 in [DS]) the application Jensen's inequality which says that, for any probability measure μ and non-negative $f\in L^1(\mu)$ with integral 1,

$$\int\psi f\,d\mu\le\int f\log f\,d\mu+\log\left[\int e^{\psi}\,d\mu\right],\quad\text{for all measurable }\psi\text{ with }\psi f\in L^1(\mu),$$

take

$$\psi=\lambda\int_0^T\big(\mathbf{e},A_{\mathfrak{f}}(t)\,d\mathbf{w}(t)\big)_{\mathbb{R}^d}\quad\text{and}\quad f=\frac{\varphi\circ\pi\big(\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}(T)\big)}{P_T\varphi\big(\pi(\mathfrak{f})\big)},$$

and conclude from (18) that, for every $\lambda > 0$ and $\mathbf{e} \in S^{d-1}$,

$$\lambda T \frac{\left(\mathbf{e}, \nabla P_T\varphi(\mathfrak{f})\right)_{\mathbf{R}^d}}{P_T\varphi(\pi(\mathfrak{f}))} \le h_T(\pi(\mathfrak{f}), \varphi) + \log \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \int_0^T \left(\mathbf{e}, A_{\mathfrak{f}}(t)\, d\mathbf{w}(t)\right)_{\mathbf{R}^d}\right)\right],$$

where

$$(21)\qquad \begin{aligned} h_T(x,\varphi) &\equiv \int_M \frac{\varphi(\xi)}{P_T\varphi(x)} \log \frac{\varphi(\xi)}{P_T\varphi(x)}\, p_T(x,\xi)\, d\xi \\ &= \frac{P_T\left(\varphi \log \varphi\right)(x) - P_T\varphi(x) \log P_T\varphi(x)}{P_T\varphi(x)}. \end{aligned}$$

Finally, observe that

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \int_0^T \left(\mathbf{e}, A_{\mathfrak{f}}(t)\, d\mathbf{w}(t)\right)_{\mathbf{R}^d} - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^T \left|A_{\mathfrak{f}}(t)^{\top}\mathbf{e}\right|^2 dt\right)\right] = 1,$$

and therefore, by (15),

$$\log \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \int_0^T \left(\mathbf{e}, A_{\mathfrak{f}}(t)\, d\mathbf{w}(t)\right)_{\mathbf{R}^d}\right)\right] \le \frac{\lambda^2}{2}\int_0^T e^{-\alpha t}\, dt.$$

Hence, after minimizing with respect to $\lambda > 0$, we arrive at

$$(22)\qquad \frac{|\nabla P_T\varphi|(x)}{P_T\varphi(x)} \le T^{-1}\sqrt{2h_T(x,\varphi)E_\alpha(T)}, \quad \text{where } E_\alpha(t) \equiv \int_0^t e^{-\alpha\tau}\, d\tau.$$

The estimate in (22) has several potentially interesting features. For one thing, it is a complement to the logarithmic Sobolev inequality in (17). Indeed, (17), the second part of (21), and (22) yield:

$$(23)\qquad \begin{aligned} \frac{\left|\nabla P_T\varphi\right|^2(x)}{P_T\varphi(x)} &\le \frac{2E_\alpha(T)}{T^2}\Big(\left(P_T\varphi \log \varphi\right)(x) - P_T\varphi(x)\log P_T\varphi(x)\Big) \\ &\le \frac{E_\alpha(T)^2}{T^2} P_T\left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\right)(x). \end{aligned}$$

In addition, (22) enables one to pass from estimates on $p_T(x,y)$ to estimates for $|\nabla p_T(\,\cdot\,,y)|(x)$. Namely, by taking $\varphi = p_{\epsilon T}(\,\cdot\,,y)$ in (22), we obtain

$$(24)\qquad \left|\nabla \log p_{(1+\epsilon)T}(\,\cdot\,,y)\right|(x) = \frac{\left|\nabla p_{(1+\epsilon)T}(\,\cdot\,,y)\right|(x)}{p_{(1+\epsilon)T}(x,y)} \le T^{-1}\sqrt{2E_\alpha(T)H_{\epsilon,T}(x,y)},$$

where

$$(25)\quad H_{\epsilon,T}(x,y) \equiv \int_M \frac{p_{\epsilon T}(\xi,y)}{p_{(1+\epsilon)T}(x,y)} \log \frac{p_{\epsilon T}(\xi,y)}{p_{(1+\epsilon)T}(x,y)}\, p_T(x,\xi)\, d\xi \le \log \frac{\left\|p_{\epsilon T}(\,\cdot\,,y)\right\|_{\mathrm{u}}}{p_{(1+\epsilon)T}(x,y)}.$$

To test that (24) is reasonably sharp, we consider the case when (cf. (9)) $\alpha \geq 0$ and use some of the beautiful estimates given by Cheeger, Li, and Yau in [CY] and [LY]. Namely, in that case, (cf. Proposition 5.5.1 and Theorem 5.5.11 in [D]), on the one hand, there exists a universal $a_d \in (0,\infty)$ such that

$$(2\pi t)^{\frac{d}{2}} \|p_t(\,\cdot\,,y)\|_{\mathrm{u}} \leq a_d \frac{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}}{\mathrm{Vol}(y,\sqrt{t})} \leq a_d \frac{(2\pi T)^{\frac{d}{2}}}{\mathrm{Vol}(y,\sqrt{T})}, \quad 0 < t \leq T,$$

where $\mathrm{Vol}(y,r)$ is the Riemannian volume of the Riemannian ball of radius r around y. On the other hand, $\alpha \geq 0$ implies (cf. Theorem 5.6.1 in [D]) that

$$(2\pi T)^{\frac{d}{2}} p_T(\pi(\mathfrak{f}),y) \geq \exp\left[-\frac{\mathrm{dist}^2(\pi(\mathfrak{f}),y)}{2T}\right],$$

where distance is measured in the Riemannian metric. Hence, after putting these together with (24), we find that, when $\alpha \geq 0$:

$$\begin{aligned} &\left|\nabla \log p_{(1+\epsilon)T}(\,\cdot\,,y)\right|(x) \\ &\leq \frac{\mathrm{dist}(x,y)}{(1+\epsilon)^{\frac{1}{2}}T} + T^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\log a_d + d\log\frac{1+\epsilon}{\epsilon} + 2\log\frac{(2\pi\epsilon T)^{\frac{d}{2}}}{\mathrm{Vol}(y,\sqrt{\epsilon T})}}, \end{aligned} \tag{26}$$

which is surprisingly close to what one knows to be true in the classical, Euclidean setting.

Discouraging Observation: Experience in such matters makes one suspect that estimates like (22) (equivalently, the first inequality in (23)) are easier to derive by a direct analytic argument than they are by way of a probabilistic formula like Bismut's. Unfortunately for stochastic analysis, the one here is no exception. Indeed, recall (cf. the derivation of (17)) that

$$2\Big(P_T(\varphi\log\varphi) - P_T\varphi\log P_T\varphi\Big) = \int_0^T P_{T-t}\left(\frac{|\nabla\varphi_t|^2}{\varphi_t}\right)dt,$$

where $\varphi_t \equiv P_t\varphi$. Next, integrate by parts to get

$$2\Big(P_T(\varphi\log\varphi) - P_T\varphi\log P_T\varphi\Big) = E_{-\alpha}(T)\frac{|\nabla P_T\varphi|^2}{P_T\varphi} + \int_0^T E_{-\alpha}(t)P_{T-t}\big(F_\alpha(t)\big)\,dt,$$

where

$$F_\alpha(t) \equiv \frac{1}{2}\Delta\left(\frac{|\nabla\varphi_t|^2}{\varphi_t}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla\varphi_t|^2}{\varphi_t}\right) - \alpha\frac{|\nabla\varphi_t|^2}{\varphi_t}.$$

Since, by elementary computation and the equality preceding (9),

$$
\begin{aligned}
F_\alpha(t) = &\frac{\|\mathrm{Hess}(\varphi_t)\|^2_{\mathrm{H.S.}}}{\varphi_t} + \frac{\left(\nabla\varphi_t, \mathrm{Ric}\,\nabla\varphi_t\right)_{\mathbf{R}^d}}{\varphi_t} - \frac{2\left(\nabla\varphi_t, \mathrm{Hess}(\varphi_t)\,\nabla\varphi_t\right)_{\mathbf{R}^d}}{\varphi_t^2} \\
&+ \frac{|\nabla\varphi_t|^4}{\varphi_t^3} - \alpha\frac{|\nabla\varphi_t|^2}{\varphi_t} \\
\geq &\frac{1}{\varphi_t}\left|\frac{\mathrm{Hess}(\varphi_t)\nabla\varphi_t}{|\nabla\varphi_t|} - \frac{|\nabla\varphi_t|\nabla\varphi_t}{\varphi_t}\right|^2 \geq 0,
\end{aligned}
$$

we now get that

$$
E_{-\alpha}(T)\frac{\left|\nabla P_T\varphi\right|^2}{P_T\varphi} \leq 2\Big(P_T(\varphi\log\varphi) - P_T\varphi\log P_T\varphi\Big). \tag{27}
$$

Finally, after an application of Jensen's inequality, one sees that (27) is actually a little sharper than the first inequality in (23).

Of course, with twenty-twenty hindsight, one sees how to amend Bismut's formula so that (27) comes out of a probabilistic argument. Namely, exactly the same sort of calculation which led to (18) shows that

$$
[\nabla P_T\varphi](\mathfrak{f}) = \mathbb{E}\left[\int_0^T \dot\eta(t)A_{\mathfrak{f}}(t)\,d\mathbf{w}(t)\varphi\circ\pi\big(\mathfrak{F}_{\mathfrak{f}}(T)\big)\right]
$$

for any $\eta \in C^1\big([0,T];\mathbb{R}\big)$ satisfying $\eta(0) = 0$ and $\eta(T) = 1$. Hence, just as in the passage from (18) to (22),

$$
\frac{\left|\nabla P_T\varphi\right|(x)}{P_T\varphi(x)} \leq \sqrt{2h_T(x;\varphi)\int_0^T e^{-\alpha t}\dot\eta(t)^2\,dt}
$$

for any such η. But this means that one cannot do better than to take $\eta(t) = \frac{E_{-\alpha}(t)}{E_{-\alpha}(T)}$, in which case one gets (27) in the form

$$
\frac{\left|\nabla P_T\varphi\right|(x)}{P_T\varphi(x)} \leq \sqrt{2h_T(x,\varphi)E_{-\alpha}(T)^{-1}}. \tag{28}
$$

References

[AM] Airault, H. & Malliavin, P., *Semi-martingales with values in Euclidean vector bundles and Ocone's formula on a Riemannian manifold* (to appear)Proceedings of the 1993 AMS conference at Cornell.

[B] Bismut, J.M., *Large Deviations and the Malliavin Calculus*, Progress in Math. #45, Birkhäuser, Cambridge USA, 1984.

[BC] Bishop, R. & Crittenden, R., *Geometry of Manifolds*, Pure and Appl. Math. #15, Academic Press, San Diego, 1964.

[BM] Bakry, D. and Emery, M., *Hypercontractivité de semi-groupes des diffusions*, C.R. Acad. Sci. Paris t. 299 Serie 1 (1984), 775–777.

[CY] Cheeger, J. & Yau, S.T., *A lower bound for the heat kernel*, Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981), 465–480.

[D] Davies, E.B., *Heat Kernels and Spectral Theory*, Cambridge Tracts in Math. #92, Cambridge Univ. Press, Cambridge U.K. & NY, USA, 1989.

[DS] Deuschel, J.D. & Stroock, D., *Large Deviations*, Pure and Appl. Math. #137, Academic Press, San Diego USA, 1989.

[EL] Elworthy, K.D. & Li, X.-M., *Formulae for the derivative of heat semigroups*, JFA **125** (1994), 252–286.

[LY] Li, P. & Yau, S.T., *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta Math. **156** (1986), 153–201.

[N] Norris, J., *Path integral formulae for heat kernels and derivatives*, Prob. Th. Rel. Fields **94** (1993), 525–541.

D. Stroock
MIT, rm. 2-272
Cambridge, MA 02139, USA

O. Zietouni
Dept. Elec. Eng.
Technion
Haifa, Israel

Astérisque

J.-P. THOUVENOT

Utilisation des processus gaussiens en théorie ergodique

Astérisque, tome 236 (1996), p. 303-308

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__303_0>

Utilisation des processus gaussiens en théorie ergodique

J.-P. Thouvenot

Résumé. — Les processus gaussiens peuvent constituer, en théorie ergodique, une source intéressante d'exemples et permettre de répondre très efficacement (grâce à des outils spécifiques) à des questions variées.

Nous montrons ainsi que, dans un K-système, une algèbre parfaite n'est pas nécessairement parfaite dans tous les facteurs.

Nous construisons ensuite un exemple de discontinuité de l'entropie directionnelle.

Nous donnons enfin un exemple de processus gaussien où tous les facteurs sont "à une extension par un groupe compact près" encore gaussiens.

Un lemme va jouer un rôle important dans les exemples qui suivent :

Lemme 1 : *Soit $(X, \mathcal{A}, m)$ un espace probabilisé et $H \subset \mathrm{L}_0^2(X, \mathcal{A}, m)$ (les fonctions d'intégrale nulle) un espace gaussien.*

Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces fermés de H. Alors

$$\mathcal{B}(H_1 \cap H_2) = \mathcal{B}(H_1) \wedge \mathcal{B}(H_2) .$$

(Si K est un sous-espace fermé de H, par $\mathcal{B}(K)$ on désigne la plus petite sous-tribu de $\mathcal{A}$ qui rend mesurables toutes les variables aléatoires qui sont dans K.)

Démonstration : on pose $\mathcal{B}(H_1) = \mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}(H_2) = \mathcal{B}_2$. On considère l'opérateur A de $\mathrm{L}_0^2(\mathcal{B}(H))$ dans $\mathrm{L}_0^2(\mathcal{B}(H))$ donné par $A = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_2}\mathbb{E}^{\mathcal{B}_1}\mathbb{E}^{\mathcal{B}_2}$. Alors A est un opérateur positif (au sens hilbertien) puisque $\int Af \cdot f \, dm = \|\mathbb{E}^{\mathcal{B}_1}\mathbb{E}^{\mathcal{B}_2} f\|_2^2$. Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est exactement $\mathrm{L}_0^2(\mathcal{B}_1 \wedge \mathcal{B}_2)$. On considère maintenant l'opérateur A_0 de H dans H qui est donné par le produit $\mathrm{P}_{H_2}\mathrm{P}_{H_1}\mathrm{P}_{H_2}$. (Par P_{H_i}, $i = 1, 2$, on désigne la projection sur le sous-espace H_i). C'est encore un opérateur positif et le sous-espace propre correspondant à la valeur propre 1 de A_0 est exactement $H_1 \cap H_2$. Si l'on considère le développement en chaos de $\mathrm{L}_0^2(\mathcal{B}(H))$ donné par l'identification $\sum_{n \geq 1} H^{n \odot}$ (où $H^{n\odot}$ désigne la n-ième puissance tensorielle symétrique de H, voir [6]), pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_i}$ commute avec la projection sur $H^{n\odot}$, et restreint à $H^{n\odot}$,

$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_i} = \mathrm{P}^{n\odot}_{H_i}$ $(i = 1, 2)$. Il en résulte que, pour tout $n \geq 1$, A commute avec la projection sur $H^{n\odot}$, et que, restreint à $H^{n\odot}$,

$$A = \mathrm{P}^{n\odot}_{H_2}\,\mathrm{P}^{n\odot}_{H_1}\,\mathrm{P}^{n\odot}_{H_2} = A_0^{n\odot}\ .$$

La restriction à $H^{n\odot}$ du sous-espace propre de A correspondant à la valeur propre 1 est exactement $(H_1 \cap H_2)^{n\odot}$. Ceci achève la démonstration (puisque $\mathrm{L}^2_0\mathcal{B}(H_1 \cap H_2) = \sum_{n\geq 1}(H_1 \cap H_2)^{n\odot}$).

— I —

On considère un système dynamique $(X, \mathcal{A}, m, T)$. On dit qu'une sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ vérifiant

1) $T\mathcal{B} \supset \mathcal{B}$

2) $\lim_{n\uparrow+\infty} T^n\mathcal{B} = \mathcal{A}$

3) $\lim_{n\downarrow-\infty} T^n\mathcal{B} = \nu$ (la tribu triviale)

est parfaite.

L'existence d'une sous-tribu parfaite entraîne que T est un K-système.

Réciproquement dans tout K-système on peut trouver une tribu parfaite. J. King a posé la question suivante :

Est-ce que si $\mathcal{B}$ est une partition parfaite de $(X, \mathcal{A}, m, T)$ et $\mathcal{A}_1$ est un facteur de $\mathcal{A}$ (une sous-tribu T-invariante de $\mathcal{A}$), $\mathcal{B}\wedge\mathcal{A}_1$ est parfaite dans $\mathcal{A}_1$?

Nous allons montrer que la réponse à la question de J. King est négative en utilisant les processus gaussiens.

Définition 2 : Soit σ une mesure positive, finie, sans atomes, symétrique sur S_1. On considère le processus gaussien réel stationnaire X_n, $n \in \mathbb{Z}$, dont la covariance est donnée par σ (i.e. pour tout $m, n \in \mathbb{Z}^2$, $\mathbb{E}(X_m X_{m+n}) = \int_{S_1} e^{in\theta} d\sigma(\theta)$).

La translation $T(X_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (X_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ définit un système dynamique $(X,\mathcal{A},m,T_\sigma)$. Soit H le sous-espace gaussien engendré par les X_n, $n \in \mathbb{Z}$. On note $\tilde{U}_\sigma$ l'opérateur unitaire induit par la restriction à H de l'opérateur unitaire U_σ de $\mathrm{L}^2(X)$ dans $\mathrm{L}^2(X)$ défini par $U_\sigma f(x) = f\,T_\sigma(x)$. On note U l'opérateur unitaire sur $\mathrm{L}^2(S_1, \sigma)$ défini par $Uf(x) = e^{ix}f(x)$. Alors $(H, \tilde{U}_\sigma)$ est unitairement conjugué à $\big(\mathrm{L}^2(S_1, \sigma), U\big)$ par l'isomorphisme V induit par $X_n \to e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Si A est un sous-ensemble de S_1, on appelle $\tilde{H}_A \subset \mathrm{L}^2(S_1, d\sigma)$ l'espace cyclique engendré par la fonction $\mathbb{1}_A$ sous l'action de U et $H_A \subset H$ est défini par $H_A = V^{-1}(\tilde{H}_A)$. La restriction de T_σ à $\mathcal{B}(H_A) = \mathcal{B}_A$ définit un facteur de T_σ (qui est isomorphe à $T_{\mathbb{1}_A\cdot\sigma}$).

Proposition 1 : *Avec les notations de la définition précédente, on considère $(X, \mathcal{A}, m, T_\sigma)$ où σ est la mesure de Lebesgue sur S_1. T_σ provient donc du processus gaussien X_n, $n \in \mathbb{Z}$, où les X_n, $n \in \mathbb{Z}$, forment une famille indépendante. Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X_n, n \leq 0)$, la tribu $\mathcal{B}$ est parfaite pour T_σ. Pour tout A de S_1 tel que $\sigma(A) > 0$ et $\sigma(A^c) > 0$, le facteur $\mathcal{B}_A$ de T_σ vérifie $\mathcal{B}_A \wedge \mathcal{B} = \nu$.*

Démonstration : Soit $H^- \subset H$ le sous-espace engendré par les X_n, $n \leq 0$. Alors $V(H^-) = \tilde{H}^-$ est le sous-espace vectoriel fermé de $L^2(S_1, d\sigma)$ engendré par les $e^{in\theta}$, $n \leq 0$.

Que $\tilde{H}^- \cap H_A = 0$ est une conséquence immédiate du théorème de F. et M. Riesz qui dit qu'une fonction de $L^2(S_1, d\sigma)$ qui est non identiquement nulle et nulle sur un ensemble de mesure positive ne peut pas avoir tous ses coefficients de Fourier négatifs égaux à 0.

(Pour une démonstration voir [4], théorème 1 1, p. 4). Le lemme 1 entraîne $\mathcal{B}(H_A) \wedge \mathcal{B} \stackrel{\circ}{=} \nu$.

Il serait intéressant de construire des contre-exemples à la question de J. King dans la classe des transformations d'entropie finie. (Il n'y a aucun espoir de parvenir à de tels exemples en utilisant les processus gaussiens dont l'entropie est soit nulle soit infinie voir [1]).

— II —

Nous allons maintenant utiliser les processus gaussiens pour produire facilement des exemples de discontinuité de l'entropie directionnelle pour une action de $\mathbb{Z}^2$.

Soit $(X, \mathcal{A}, m, S, T)$ une action de $\mathbb{Z}^2$ engendrée par deux automorphismes qui commutent S et T. Pour tout couple d'entiers $p \geq 0$, $q \geq 0$, on définit l'entropie dans la direction de pente p/q par $\dfrac{\mathrm{E}(S^pT^q)}{\sqrt{p^2+q^2}}$. (E désigne l'entropie.)

La question de la continuité de l'entropie directionnelle a été abordée dans un cadre métrique pour la première fois dans [8].

Proposition 2 : *Il existe une action $(X, \mathcal{A}, m, S, T)$ de $\mathbb{Z}^2$ de générateurs S et T telle que $\mathrm{E}(S^pT^q) = 0$ pour tout couple p, q tel que $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p \neq q$ tandis que* $\mathrm{E}(ST) = +\infty$.

Démonstration : (**A**) Il existe une mesure positive finie μ sur le tore $\mathbb{T}^2$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $\hat{\mu}(n,n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$.

2) Pour tous $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $p \neq q$, $(p \wedge q) = 1$ la mesure μ_{pq} sur $\mathbb{T}^1$ dont les coefficients de Fourier sont donnés par $\hat{\mu}_{p,q}(k) = \hat{\mu}(pk, qk)$, $k \in \mathbb{Z}$, est singulière.

La construction de μ est donnée comme un produit de Riesz : $\mu = \prod_{j \in \mathrm{N}} (1 + \cos(2\pi m_j x + 2\pi n_j y))$ et la suite (m_j, n_j), $j \geq 1$ est définie par récurrence de façon que pour tout (p,q), $p \neq q$, $(p \wedge q) = 1$ la famille (m_j, n_j), $j \geq 1$ intersecte infiniment souvent l'ensemble (np, nq), $n \in \mathbb{Z}$, que $m_j \neq n_j$, $\forall j \in \mathrm{N}$ et que $|m_j - n_j|$ soit suffisamment grand devant $\sum_{j'<j} |m_{j'}| + |n_{j'}|$ pour que la suite (m_j, n_j) soit dissociée et que $\hat{\mu}(n,n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$. (La suite (m_j, n_j), $j \geq 1$, est dite dissociée si tout couple $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ s'écrit d'au plus une manière $(m,n) = \sum \varepsilon_j (m_j, n_j)$ où ε_j vaut 0, +1 ou −1 et $\varepsilon_j = 0$ sauf pour nombre fini d'indices).

Que $\mu_{p,q}$ où $(p,q) = 1$ soit singulière est une application d'un critère général de singularité des produits de Riesz (voir [5], théorème 4.4. p. 407).

(**B**) On considère le champ stationnaire gaussien $X_{m,n}$, $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ dont la covariance est donnée par μ (i.e. $\mathbb{E}(X_{m+k,n+l}X_{m,n}) = \int_{\mathbf{T}^2} e^{2i\pi(kx+ly)}d\mu$). On appelle S la translation $S(X_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} = (X_{m+1,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $T(X_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} = (X_{m,n+1})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$.

La mesure spectrale de S^pT^q est équivalente à μ_{pq} et par conséquent (**A**) entraîne que $\mathrm{E}(ST) = +\infty$ tandis que $\mathrm{E}(S^pT^q) = 0$ dès que $p \neq q$. (On a utilisé que l'entropie d'un processus gaussien est infinie dès que sa mesure spectrale a une composante absolument continue, et est égale à 0 sinon).

Remarquons qu'on a en particulier $\mathrm{E}(S) = 0$, $\mathrm{E}(T) = 0$ et $\mathrm{E}(ST) = +\infty$, et qu'un tel exemple, où $0 < \mathrm{E}(ST) < +\infty$, construit par des techniques de "découpages et empilements indépendants" était connu (voir [7]). On peut aussi produire, par la même technique, un exemple satisfaisant à toutes les conditions de la proposition 2 mais où l'on a $0 < \mathrm{E}(ST) < +\infty$. Cela a été fait indépendamment par Thouvenot et Weiss (non publié). Insistons sur le fait que l'intérêt de la proposition 2 réside dans la brièveté de sa démonstration.

— III —

Nous allons maintenant donner un exemple où le lemme 1 est utilisé comme un outil pour étudier la structure des facteurs de certains processus gaussiens. Rappelons qu'une mesure sur S_1 est dite de Kronecker si son support est un ensemble de Kronecker. (Un tel ensemble est défini par la propriété que toute fonction continue de module 1 sur cet ensemble est une limite uniforme de caractères). Utilisant les notations de la définition 2, la proposition qui suit décrit la structure de tous les facteurs d'un système gaussien Kronecker. (A une extension par un groupe compact près, tout facteur est encore gaussien).

Proposition 3 : *Soit $(X, \mathcal{A}, m, T_\sigma)$ un processus gaussien avec σ Kronecker. Soit H l'espace gaussien associé à T_σ et U_σ la restriction de U_T à H. (on a utilisé les notations de la définition 2). Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu T_σ invariante de $\mathcal{A}$. Il existe une tribu T_σ invariante $\tilde{\mathcal{B}} \supset \mathcal{B}$, un groupe compact G tel que la restriction de T_σ à $\tilde{\mathcal{B}}$ soit isomorphe à une extension de la restriction de T_σ à $\mathcal{B}$ par le groupe G (un produit gauche avec les translations sur G) et un sous-espace gaussien $H_{\mathcal{B}}$ fermé dans H, invariant par U_σ tels que $\mathcal{B}(H_{\mathcal{B}}) = \tilde{\mathcal{B}}$.*

Démonstration : On considère $\lambda_{\mathcal{B}}$ le couplage relativement indépendant de T_σ avec lui-même au dessus de $\mathcal{B}$. (Si $(X_i, \mathcal{A}_i, m_i, T_{i,\sigma})$, $i = 1, 2$ sont deux copies de $(X, \mathcal{A}, m, T_\sigma)$, on définit $\lambda_{\mathcal{B}}$ sur $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ par

$$\lambda_{\mathcal{B}}(A_1 \times A_2) = \int \mathbb{E}^{\mathcal{B}}\mathbb{1}_{A_1}\, \mathbb{E}^{\mathcal{B}}\mathbb{1}_{A_2}\, dm_{\mathcal{B}} \qquad A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2$$

$\lambda_{\mathcal{B}}$ est $T_1 \times T_2$ invariante et ses marges sont m_1 et m_2). On utilise les trois résultats suivants

(1) (Le Théorème de structure de Furstenberg-Zimmer [3] et [12]). Soit $(Y, \mathcal{B}, \mu, S)$ un système dynamique ergodique et $\mathcal{C}$ une sous-tribu S invariante de $\mathcal{B}$. Alors il existe un facteur $\hat{\mathcal{C}} \supset \mathcal{C}$ relativement auquel S est faiblement mélangeant (i.e. le produit relativement indépendant de S avec lui-même au-dessus de $\hat{\mathcal{C}}$ est ergodique) et tel que $\hat{\mathcal{C}}$ soit construit à partir de $\mathcal{C}$ de la manière suivante : il existe une famille dénombrable de facteurs indicée par des ordinaux $\mathcal{C}_\eta$, $\eta \leq \eta_0$, telle que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$, $\mathcal{C}_{\eta_0} = \hat{\mathcal{C}}$, pour tout $\xi < \eta$, $\mathcal{C}_\xi < \mathcal{C}_\eta$, S restreint à $\mathcal{C}_{\eta+1}$ est une extension isométrique de sa restriction à $\mathcal{C}_\eta$ et si ξ est un ordinal limite $\mathcal{C}_\xi = \lim \uparrow \mathcal{C}_\eta$ $(\eta \uparrow \xi)$.

On appelle $\hat{\mathcal{C}}$, qui est canonique, l'extension distale saturée de $\mathcal{C}$. Nous utiliserons les deux propriétés suivantes :

(A) Si $\mathcal{D}$ est un facteur tel que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ est construit à partir de $\mathcal{C}$ par une suite d'extensions isométriques, alors $\mathcal{D} \subset \hat{\mathcal{C}}$.

(B) $\hat{\mathcal{C}}$ est le plus petit facteur contenant $\mathcal{C}$ par rapport auquel S est faiblement mélangeant. (Les preuves de **(A)** et **(B)** sont laissées au lecteur à titre d'exercices).

(2) (Un théorème de Foïas et Stratila [2]). Si $(Y, \mathcal{B}, \mu, S)$ est un système dynamique ergodique, et si $f \in L^2_0(Y)$ a la propriété que la mesure spectrale μ_f est Kronecker, la suite $S^n f$, $n \in \mathbb{Z}$, définit un processus gaussien stationnaire.

(3) (Un théorème de Veech [11]). Soit $(X, \mathcal{A}, m, T)$ un système dynamique ergodique et soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu T-invariante de $\mathcal{A}$. Si dans la décomposition en composantes ergodiques de λ, le produit indépendant de T avec lui-même au dessus de $\mathcal{B}$, $(\lambda = \int \lambda_\omega \, d\mathbb{P}(\omega))$, on a que presque chaque λ_ω identifie les deux algèbres $(X_1 \times \mathcal{A}_2)$ et $(\mathcal{A}_1 \times X_2)$, T est une extension par un groupe compact de sa restriction à $\mathcal{B}$.

On considère maintenant $\lambda_{\hat{\mathcal{B}}}$ ($\hat{\mathcal{B}}$ est l'extension distale saturée de $\mathcal{B}$) qui est donc ergodique. On considère dans $L^2(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \lambda_{\hat{\mathcal{B}}})$ les deux sous-espaces gaussiens H_1 et H_2 (provenant de X_1 et X_2). Alors *(2)* entraîne que $H_1 + H_2$ est un espace gaussien (puisque chaque g de $H_1 + H_2$ a un type spectral Kronecker). Le lemme 1 entraîne $\mathcal{B}(H_1) \wedge \mathcal{B}(H_2) = \hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B}(H_1 \cap H_2)$. (La première égalité résulte de la construction de $\lambda_{\hat{\mathcal{B}}}$ comme couplage relativement indépendant au dessus de $\hat{\mathcal{B}}$).

On peut donc supposer que $\hat{\mathcal{B}} = \mathcal{A}$ et on doit montrer que, sous ces hypothèses, $\hat{\mathcal{B}}$ est en fait une extension de $\mathcal{B}$ par un groupe compact. Soit $\lambda_{\mathcal{B}}(\omega)$ une composante ergodique de la décomposition de $\lambda_{\mathcal{B}}$. Il résulte de **(A)** que le saturé distal de $\mathcal{B}$ dans $\big(X_1 \times X_2, \lambda_{\mathcal{B}}(\omega)\big)$ est exactement $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Le même argument que précedemment donne que pour $\lambda_{\mathcal{B}}(\omega)$, $H_1 + H_2$ est encore gaussien; si $H_1 + H_2 \supsetneqq H_1$, il y a mélange faible conditionnel par rapport à $\mathcal{B}(H_1) = \mathcal{A}_1$, ce qui est impossible d'après **(B)**. On a donc que

$$\mathcal{A}_1 \times X_2 = X_1 \times \mathcal{A}_2 \qquad \big(\lambda_{\mathcal{B}}(\omega)\big)$$

ce qui achève la démonstration (en utilisant *(3)*).

Ce résultat a été annoncé dans [10]. (Voir aussi [9]).

Je remercie le "referee" pour ses utiles indications.

Bibliographie

[1] **T. De la Rue** : Entropie d'un système dynamique gaussien. *C. R. Acad. Sc. Paris Série I, 317, pp. 191–194 (1993).*

[2] **C. Foïas et S. Stratila** : Ensembles de Kronecker dans la théorie ergodique. *C. R. Acad. Sc. Paris 267, pp. 166–168 (1967).*

[3] **H. Furstenberg** : Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemeredi on arithmetic progressions. *Journal d'Analyse Mathématique 31, pp. 204–256 (1977).*

[4] **H. Helson** : Lectures on invariant subspaces. *Academic Press (1964).*

[5] **E. Hewitt et H. S. Zuckerman** : Singular measures with absolutely continuous squares. *Proc. Camb. Phil. Soc. 62, pp. 399–420 (1966).*

[6] **J. Neveu** : Processus aléatoires gaussiens. *Presses de l'Université de Montréal (1971).*

[7] **D. Ornstein et B. Weiss** : Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups. *Journal d'Analyse Mathématique 48, pp. 1–141 (1987).*

[8] **Y. Sinai** : An answer to a question by J. Milnor. *Comment. Math. Helvet. 60, pp. 173–178 (1985).*

[9] **J.-P. Thouvenot** : Some properties and applications of joinings in ergodic theory. *Ergodic Theory and its connections with Harmonic Analysis. Proceedings of the 1993 Alexandria Conference, K. E. Petersen and I. A. Salama eds. L.M.S. Lecture Notes Series 205, pp. 207–235 (1995).*

[10] **J.-P. Thouvenot** : The metrical structure of some gaussian processes. *Proceedings on Ergodic Theory and Related Topics II, Georgenthal, pp. 195–198 (1986).*

[11] **W. Veech** : A criterion for a process to be prime. *Monats. Math. 94, pp. 335–341 (1982).*

[12] **R. Zimmer** : Ergodic group actions with generalized discrete spectrum. *Ill. J. Math. 20, pp. 555–588 (1976).*

Laboratoire de Probabilités
Université Paris VI, Tour 56
4 Place Jussieu
75 252 PARIS Cedex 05