P. BIANE

Quelques propriétés du mouvement brownien non-commutatif

Astérisque, tome 236 (1996), p. 73-101

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__73_0>

Quelques propriétés du mouvement brownien non-commutatif

P. Biane

Résumé. — Le mouvement brownien non-commutatif est la dilatation naturelle d'un semi-groupe d'applications complètement positives sur la C^*-algèbre du groupe d'Heisenberg. On étudie tout particulièrement les propriétés d'invariance par le groupe unitaire de ce processus, ce qui amène à considérer un processus de Bessel non-commutatif, dont le semi-groupe est relié à la compactification de Martin en espace-temps d'un processus de branchement.

0. Introduction.

Le mouvement brownien est l'une des pierres angulaires des probabilités modernes. Il y a peu de domaines de la théorie des processus stochastiques où l'on ne le rencontre pas, et ses relations avec la théorie du potentiel et les processus de Markov, la théorie des martingales, le calcul stochastique, ou encore les processus gaussiens, pour ne citer que quelques exemples, font qu'il a été l'objet d'innombrables études et que la recherche à son sujet est encore très active.

Il y a quelques années, les travaux de Hudson et Parthasarathy ont ouvert la voie à l'étude de nouveaux types de processus stochastiques, étude désignée souvent par le vocable générique de "probabilités quantiques" (voir par exemple [H-P], [P1], [M1], [M2], [B1]). Parmi les objets introduits figurent en bonne place les processus de création, annihilation et nombre, qui permettent en quelques sorte d'unifier le mouvement brownien et le processus de Poisson. Ceci amène naturellement à introduire une notion de "mouvement brownien non-commutatif", comme dans [C-H]. Le but de cet article est de tenter d'aller un peu plus loin dans l'étude de cet objet mathématique qui me semble particulièrement intéressant. L'idée sous-jacente est que beaucoup de résultats classiques concernant le mouvement brownien possèdent des analogues pour cet objet, avec bien sûr des modifications dues à la non-commutativité, et qu'une étude systématique devrait éclairer. Les résultats présentés ici apparaîtront bien modestes en regard de l'ampleur de la tâche, mais j'espère que cet article pourra encourager des recherches plus approfondies dans cette direction.

Qu'est-ce que le mouvement brownien non-commutatif? Pour tenter de répondre à cette question, considérons un mouvement brownien $(B_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. D'après un résultat bien connu de N. Wiener, l'espace L^2 engendré par les variables aléatoires $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ se décompose en chaos, autrement dit il existe un isomorphisme naturel entre cet espace et l'espace de Fock construit sur $L^2(\mathbb{R}_+)$. La variable aléatoire B_t, considérée comme un opérateur de multiplication sur l'espace de Fock, est la somme de deux opérateurs adjoints l'un de l'autre, A_t et A_t^*, les opérateurs d'annihilation et de création associés au vecteur $1_{[0,t]}$ de $L^2(\mathbb{R}_+)$. Il existe alors un mouvement brownien $\tilde{B}_t$ sur un espace $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ et une isométrie de l'espace L^2 engendré par ce mouvement brownien dans $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$ tels que les opérateurs de multiplication par les variables $\tilde{B}_t$ soient représentés dans l'espace de Fock par les opérateurs $\frac{1}{i}(A_t - A_t^*)$ (pour tout ceci on pourra consulter [M1]). Il y a donc deux mouvements browniens sur l'espace de Fock $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$, qui sont la partie réelle et la partie imaginaire du processus d'annihilation A_t. Les opérateurs A_t et A_t^* ne commutent pas, on a en fait la relation $[A_t, A_t^*] = tId$, ou de façon équivalente $[B_t, \tilde{B}_t] = 2itId$ ce qui fait qu'il n'existe pas d'isométrie entre $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$ et l'espace L^2 d'un espace de probabilité où seraient définis simultanément deux mouvements browniens, B_t et $\tilde{B}_t$ tels que $A_t + A_t^*$ et $\frac{1}{i}(A_t - A_t^*)$ soient les opérateurs de multiplication par B_t et $\tilde{B}_t$. On dispose ainsi d'un "mouvement brownien non-commutatif" qui est la donnée des deux mouvements browniens $B_t = A_t + A_t^*$ et $\tilde{B}_t = \frac{1}{i}(A_t - A_t^*)$, ou, de façon équivalente, la donnée des processus A_t et A_t^*. On peut imaginer que, physiquement, les processus B et $\tilde{B}$ représentent l'évolution de la "position" et de la "vitesse" d'une particule brownienne quantique.

Le point de vue adopté dans cet article est que le processus non-commutatif $(A_t, A_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est en fait une réalisation particulière d'un processus de Markov non-commutatif associé à un semi-groupe d'applications complètement positives sur une certaine C^*-algèbre, et nous allons concentrer notre attention sur ce semi-groupe plutôt que sur sa réalisation particulière à travers les opérateurs de création et d'annihilation. Pour comprendre dans quel espace ce processus prend ses valeurs, remarquons que la relation de commutation $[B_t, \tilde{B}_t] = 2it$ est vérifiée pour tout temps t. On voit donc qu'au moins heuristiquement, le mouvement brownien non-commutatif prend ses valeurs, à l'instant t, dans un "espace non-commutatif" dans lequel la position d'un point est mesurée (au sens de la mécanique quantique) par deux coordonnées p et q qui vérifient la relation de commutation d'Heisenberg $[p, q] = 2it$. Le temps joue le rôle de la constante de Planck, et cet espace se déforme continûment avec le temps, ce qui entraîne, comme nous le verrons, que le mouvement brownien non-commutatif ne pourra être considéré comme un processus de Markov homogène, qu'à la condition de lui rajouter une composante temporelle. Une façon élégante de faire cette construction est de définir le semi-groupe du mouvement brownien non-commutatif comme un semi-groupe de convolution sur la C^*-algèbre du groupe d'Heisenberg. Le semi-groupe obtenu est un analogue non-commutatif du semi-groupe de la chaleur (c'est-à-dire du semi-groupe du mouvement brownien en espace-temps) plutôt que du mouvement brownien lui-même. La C^*-algèbre du groupe d'Heisenberg possède une structure très intéressante, avec une singularité à l'origine (voir [V], [L]) sur laquelle le comportement du mouvement brownien non-commutatif jette un peu de lumière.

Dans la suite on utilise le langage des C^*-algèbres car c'est le mieux adapté aux généralisations non-commutatives des concepts classiques, mais on n'utilisera pas de résultat sophistiqué de la théorie des algèbres d'opérateurs.

Comme le rappelle K.R. Parthasarathy dans l'introduction de son livre [P1], l'analogie entre le théorème de Lévy-Khinchine et les résultats sur les représentations factorisables de H. Araki [A], développés dans [P-S], a été à l'origine du calcul stochastique non-commutatif. Plus récemment, M. Schürmann [S] a montré qu'on pouvait généraliser cette approche pour construire des bruits blancs sur des bigèbres. Les idées présentées dans cet article sont donc familières aux spécialistes des probabilités quantiques, néanmoins je n'ai pas trouvé dans la littérature d'exposé qui s'attache à décrire de manière purement probabiliste ces objets, en particulier, il me semble que le "processus de Bessel quantique" décrit en 3.3 est passé inaperçu. Il m'a donc semblé intéressant de mettre au propre ces quelques réflexions. La seule originalité de l'article qui suit consiste à adopter un point de vue nettement probabiliste et à essayer d'appliquer des méthodes markoviennes ou potentialistes dans cette situation.

Voici comment est organisé cet article.

La première partie consiste en quelques préliminaires sur les C^*-algèbres, plus particulièrement les C^*-algèbres de groupes, et certains semi-groupes d'applications complètement positives, obtenus en considérant une fonction ψ continue, conditionnellement de type positif sur un groupe G localement compact, qui engendre un semi-groupe multiplicatif de fonctions de type positif $(e^{t\psi})_{t\in\mathbb{R}_+}$. Ce semi-groupe, agissant par multiplication sur l'algèbre $L^1(G)$ définit un semi-groupe de contractions complètement positives sur cette algèbre qui se prolonge à diverses autres algèbres engendrées par G. En restreignant ce semi-groupe à des sous-algèbres commutatives convenables, on peut obtenir des semi-groupes markoviens intéressants, dont on donne quelques exemples. On décrit ensuite une dilatation de ce semi-groupe au moyen de la théorie des représentations de groupes de courants, décrite par exemple dans [P-S].

Dans la seconde partie, on se concentre sur le groupe d'Heisenberg $H_d = \mathbb{C}^d \times \mathbb{R}$. On y décrit la structure de la C^*-algèbre de H_d, avec en particulier l'existence d'un couple de Gelfand construit grâce à l'action du groupe unitaire sur le groupe d'Heisenberg. La fonction conditionnellement de type positif $\psi(z,t) = it - \frac{1}{2}|z|^2$ sur H_d est associée à un semi-groupe de contractions complètement positives de $C^*(H_d)$, qui est un analogue non-commutatif du semi-groupe de la chaleur, et dont on commence l'étude.

Dans la troisième partie, on étudie de façon plus approfondie différentes propriétés d'invariance de ce semi-groupe qui sont des analogues de propriétés bien connues du mouvement brownien. En particulier, l'invariance du mouvement brownien usuel par changement d'échelle, qui permet de donner une construction simple du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, a un analogue non-commutatif que l'on utilise pour définir un "semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck" sur l'algèbre $\mathcal{B}(H)$ des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H. D'autre part, une propriété d'invariance par transformations unitaires nous permettra de définir un analogue non-commutatif du semi-groupe de Bessel, qui sera un semi-groupe de noyaux Markoviens sur une partie de $\mathbb{R}^2$. On verra que le processus correspondant peut se construire à l'aide d'un processus de branchement classique, le processus de Yule, et d'un processus de mort très simple.

Enfin, on terminera par l'étude des "fonctions paraboliques bornées" pour ce semi-groupe, en donnant un théorème de représentation intégrale, analogue de la formule de Poisson classique pour les fonctions harmoniques bornées dans le disque unité.

Je remercie P. Bougerol et J.L. Sauvageot pour d'utiles discussions sur des sujets abordés dans cet article, ainsi que R. Hudson qui m'a communiqué la référence [C-H], et W. von Waldenfels qui m'a procuré une copie de son article [vW2].

1. Préliminaires.

1.1 C^*-algèbres et applications complètement positives.

Cette section est consacrée à des généralités et des rappels sur les C^*-algèbres, applications complètement positives, et d'autres notions voisines, qui sont bien connus des spécialistes. Les quelques résultats qui sont démontrés le sont pour la commodité du lecteur, car il n'a pas toujours été facile de trouver une référence adéquate. Je renverrai au livre de Dixmier [Di] pour une bonne partie des résultats et définitions de base.

Dans la suite, les espaces de Hilbert considérés seront toujours complexes. Si H est un espace de Hilbert, on note $\mathcal{B}(H)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur H, et $\mathcal{K}(H)$ celle des opérateurs compacts.

Soient A, B deux C^*-algèbres, et A'', B'' leurs algèbres de von Neumann enveloppantes (qui sont leurs biduaux au sens de la théorie des espaces de Banach, voir [Di] 12.1.3). Soit $Q : A \to B$ une application linéaire continue, complètement positive. Lorsque A et B sont abéliennes, isomorphes, par le théorème de Gelfand, à $C_0(X)$ et $C_0(Y)$, où $X = spec\ (A)$ et $Y = spec\ (B)$, l'application Q est associée à un noyau fellérien $N(y, dx)$ sur $Y \times X$, c'est à dire que l'on a, pour toute $f \in C_0(X)$, $Qf(y) = \int_X f(x)N(y, dx)$. (cf [D-M] IX.1).

Soit Q'' l'application biduale de Q, qui est un prolongement faiblement continu de Q à A'', à valeurs dans B''; l'application Q'' est encore une application complètement positive de A'' dans B''.

1.2. Cas des C^*-algèbres de groupes.

Soit maintenant G un groupe localement compact. Toute représentation unitaire, faiblement continue, de G détermine de façon canonique une représentation de l'algèbre de Banach $L^1(G)$. La C^*-algèbre de G notée $C^*(G)$ est la complétée de $L^1(G)$ pour la norme $\|f\| = sup_\pi|\pi(f)|$, où π parcourt l'ensemble des représentations unitaires faiblement continues de G. Dans la suite nous ne considérerons que de telles représentations, sans le préciser.

Lorsque G est abélien, les représentations irréductibles de G sont de dimension 1 et forment le groupe $\hat{G}$ des caractères de G, l'algèbre $C^*(G)$ est alors isomorphe, par l'isomorphisme de Gelfand, à $C_0(\hat{G})$.

Soit φ une fonction continue de type positif sur G telle que $\varphi(e) \leq 1$, on a alors $|\varphi| \leq 1$ sur G et l'application $Q : L^1(G) \to L^1(G)$, $f \mapsto \varphi f$ est une contraction complètement positive de l'algèbre $L^1(G)$.

1.2.1. Proposition. *L'application Q se prolonge de manière unique en une contraction complètement positive de $C^*(G)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\|\varphi f\| \leq \|f\|$ pour tout $f \in L^1(G)$.

Soit ξ une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert H_ξ, et $\Omega \in H_\xi$ tels que, pour tout $g \in G$, $\varphi(g) = <\xi(g)\Omega, \Omega>$. Soit π une représentation unitaire de G dans un espace H_π, alors $\xi \otimes \pi$ est une représentation unitaire de G et on a $|\xi \otimes \pi(f)| \leq \|f\|$. Soit E le projecteur orthogonal dans $H_\xi \otimes H_\pi$ sur le sous-espace $\Omega \otimes H_\pi$, alors on a $E(\xi \otimes \pi(f))E = E(1 \otimes \pi(\varphi f))$, mais $|E(\xi \otimes \pi(f))E| \leq |\xi \otimes \pi(f)| \leq \|f\|$, par conséquent $|(1 \otimes \pi(\varphi f))| = |\pi(\varphi f)| \leq \|f\|$ pour toute représentation π, donc $\|\varphi f\| \leq \|f\|$ et la conclusion suit.

Dans le cas d'un groupe G abélien, le théorème de Bochner entraîne que φ est la transformée de Fourier d'une mesure de sous-probabilité sur $\hat{G}$, et l'application complètement positive de $C_0(\hat{G})$ dans lui-même est alors l'opérateur de convolution par cette mesure de sous-probabilité.

Le prolongement de l'application complètement positive Q à $U(G)$, l'algèbre de von Neumann enveloppante de $C^*(G)$, s'exprime de façon naturelle comme une convolution à l'aide du coproduit sur $U(G)$.

Pour $g \in G$ notons $u(g)$ l'image de g dans $U(G)$. Le coproduit Δ est le morphisme $\Delta : U(G) \to U(G) \otimes U(G)$, où le produit tensoriel est pris au sens des algèbres de von Neumann, qui prolonge la représentation de $G : g \mapsto u(g) \otimes u(g)$.

La fonction φ détermine une unique forme linéaire positive faiblement continue ν sur $U(G)$ telle que $\nu(u(g)) = \varphi(g)$ pour tout g dans G, et l'application Q n'est autre que la composée $(id \otimes \nu) \circ \Delta$, c'est à dire la convolution par ν dans la bigèbre de von Neumann $U(G)$. Rappelons qu'il est équivalent de se donner une forme linéaire continue sur $C^*(G)$ et une forme faiblement continue sur $U(G)$.

Si nous revenons au cas d'un groupe G abélien, le coproduit sur $U(G)$, l'algèbre des fonctions universellement mesurables sur $\hat{G}$, est l'application qui à une fonction h sur $\hat{G}$ associe la fonction $\Delta h(x,y) = h(xy)$ sur $\hat{G} \times \hat{G}$, si on identifie $U(G) \otimes U(G)$ avec l'algèbre des fonctions universellement mesurables sur $\hat{G} \times \hat{G}$. Remarquons que dans ce cas, si $\hat{G}$ n'est pas compact alors le coproduit n'envoie pas $C_0(\hat{G})$ dans $C_0(\hat{G} \times \hat{G})$.

1.3. Convolution et poids de Haar.

Si μ et ν sont deux formes linéaires faiblement continues sur $U(G)$, leur convolution est la forme linéaire faiblement continue définie par $\mu * \nu = (\mu \otimes \nu) \circ \Delta$.

Si μ est un poids normal semi-fini sur $U(G)$ (cf [S-Z] 10.14) et ν une forme linéaire positive sur $U(G)$, alors on peut définir un poids $\mu * \nu$ en posant $\mu * \nu(f) = \mu((id \otimes \nu) \circ \Delta f)$.

Supposons G unimodulaire et postliminaire. Soit ε_e la mesure de Dirac en l'élément neutre de G. Elle définit une trace χ sur $U(G)$. En fait d'après la formule de Plancherel ([Di] 18.8) on a, pour toute fonction f continue à support compact sur G,

$$f(e) = \int_{\hat{G}} tr(\pi_\zeta(f))dm(\zeta)$$

où $\hat{G}$ est le dual unitaire de G et m est la mesure de Plancherel sur $\hat{G}$.

1.3.1. Proposition. *Pour toute forme linéaire positive ν sur $C^*(G)$ (ou $U(G)$), on a $\chi * \nu = \nu(1)\chi$.*

Démonstration. Soit f une fonction continue à support compact sur G, on a $(id \otimes \nu) \circ \Delta f = f\varphi$ où φ est la fonction de type positif $\varphi(g) = \nu(u(g))$. On a donc $\chi(\varphi f) = f(e)\varphi(e) = \chi(f)\nu(1)$. On en déduit le résultat.

En particulier, si ν est un état, on a $\chi * \nu = \chi$, ce qui, dans le cas d'un groupe abélien G, caractérise la mesure de Haar sur $\hat{G}$. Dans le cas non-abélien, le poids χ joue le rôle de "mesure de Haar" sur $C^*(G)$, et on l'appellera par la suite le poids de Haar. Remarquons que c'est une trace.

Soit $\hat{Q}$ la contraction complètement positive associée à $\bar{\varphi}$, alors Q et $\hat{Q}$ sont en dualité par rapport au poids de Haar, c'est à dire que pour tous $a, b \in C^*_+(G)$ on a

$$\chi(aQ(b)) = \chi(\bar{Q}(a)b) ;$$

en effet, si f et k sont continues à support compact sur G, on a

$$\chi(fQ(k)) = \int_G f(g)\varphi(g^{-1})k(g^{-1})dg = \int_G \bar{\varphi}(g)f(g)k(g^{-1})dg = \chi(\hat{Q}(f)k)$$

et le cas général s'en déduit aisément.

1.4. Semi-groupes de convolution.

Soit ψ une fonction continue, conditionnellement de type positif sur G, avec $\psi(e) \geq 0$; alors $e^{t\psi}$ est un semi-groupe multiplicatif de fonctions continues de type positif.

1.4.1. Définition. *Le semi-groupe de convolution associé à ψ est l'unique semi-groupe de contractions complètement positives sur $C^*(G)$, noté $(Q_t^\psi)_{t\in\mathbf{R}_+}$ tel que $Q_t^\psi(f) = e^{t\psi}f$ pour $f \in L^1(G)$.*

Si A est une sous-C^*-algèbre abélienne de $C^*(G)$ ou de $U(G)$, invariante par ce semi-groupe, la restriction du semi-groupe à A est donnée par un semi-groupe de noyaux sous-markoviens sur le spectre de A. Voici quelques exemples de tels semi-groupes.

a) Tout d'abord, si $C \subset G$ est un sous groupe abélien fermé, la C^*-algèbre de C se plonge comme une sous-C^*-algèbre de $U(G)$ (pas de $C^*(G)$ en général), et elle est stable par le semi-groupe Q_t''. En fait le semi-groupe obtenu par restriction de Q_t'' à $C^*(C)$ est celui associé à la fonction conditionnellement de type positif sur C, qui est la restriction de ψ à C. En particulier, il s'identifie à un semi-groupe de convolution sur $\hat{C}$.

b) Supposons que la fonction ψ soit centrale, c'est à dire que $\psi(gh) = \psi(hg)$ pour tous h, g dans G, alors le centre de l'algèbre $U(G)$ est une algèbre abélienne stable par le semi-groupe Q_t^ψ. Cette algèbre est isomorphe à une algèbre de fonctions mesurables sur l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G. On obtient ainsi un semi-groupe markovien sur le dual unitaire de G. Certains de ces semi-groupes (ou plutôt une version en temps discret) ont été étudiés dans [P2], [Bi2]. L'existence d'une fonction ψ centrale non-constante entraîne des restrictions sur la nature du groupe. Par exemple, il n'en existe pas si G est semi-simple non-compact, avec un centre trivial.

c) Un autre exemple est fourni par les couples de Gelfand. Si K est un sous-groupe compact de G tel que (G, K) soit un couple de Gelfand, c'est à dire que l'algèbre de convolution $L^1(K\backslash G/K)$ des fonction bi-invariantes par K soit commutative, et si ψ est elle-même bi-invariante par K alors, la C^*-algèbre engendrée par $L^1(K\backslash G/K)$ est stable par le semi-groupe $(Q_t^\psi)_{t\in\mathbf{R}_+}$. En restreignant le semi-groupe à cette sous-algèbre commutative, on obtient un semi-groupe de noyaux markoviens sur son spectre.

Donnons un exemple concret lié au mouvement brownien. On prend $G = \mathbb{R}^d$ et $\psi(\xi) = -\frac{1}{2}|\xi|^2$. En identifiant $\hat{G}$ avec $\mathbb{R}^d$ par transformation de Fourier, on reconnaît immédiatement que le semi-groupe de convolution associé est le semi-groupe brownien donné par les noyaux de densité $p_t(x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Considérons maintenant le groupe $D(d)$ des déplacements de $\mathbb{R}^d$, produit semi-direct de $SO(d)$ par $\mathbb{R}^d$. La fonction ψ est invariante par l'action de $SO(d)$, on en déduit que la fonction $\tilde{\psi}(\theta, \xi) = \psi(\xi)$ est conditionnellement de type positif sur $D(d)$.

Considérons maintenant le couple de Gelfand $(D(d), SO(d))$. L'algèbre des fonctions bi-invariantes s'identifie avec l'algèbre de convolution des fonctions sur $\mathbb{R}^d$ invariantes par rotation, et donc le spectre de cette algèbre est l'ensemble $\mathbb{R}_+$. On vérifie facilement que le semi-groupe obtenu par restriction à cette sous-algèbre est celui du processus de Bessel de dimension d sur $\mathbb{R}_+$ (cf [I-M]).

1.5. Dilatation d'un semi-groupe.

La donnée d'un semi-groupe de contractions complètement positives, sur une C^*-algèbre est un analogue non-commutatif de la notion de semi-groupe de noyaux sur un espace localement compact. Il existe alors un analogue de la notion de processus de Markov associé à ce semi-groupe, que l'on va décrire ci-dessous.

1.5.1. Définition *Soient A une C^*-algèbre, ν un état sur A, et $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ un semi-groupe de contractions complètement positives de A. Une dilatation de $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ de loi initiale ν est la donnée de $(W, W_t, \omega_\nu, E_t, j_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ où W est une algèbre de von Neumann munie d'un état ω_ν, $(W_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ est une filtration de W, c'est à dire une famille croissante de sous-algèbres, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, E_t est une espérance conditionnelle de W sur W_t par rapport à ν, et j_t est une famille de morphismes de A dans W telle que $\omega_\nu \circ j_0 = \nu$, j_t envoie A dans W_t et (propriété de Markov) on ait pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ et tout $a \in A$,*

$$E_t[j_{t+s}(a)] = j_t(Q_s(a))$$

(Pour la notion d'espérance conditionnelle dans une algèbre de von Neumann, voir par exemple [Tak].)

Indiquons tout de suite comment les processus de Markov usuels rentrent dans ce cadre. Soient A une C^*-algèbre commutative, et $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ un semi-groupe de Feller sur le spectre E de A. Une dilatation de $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ s'obtient ainsi. On considère un processus de Markov $(X_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$, à valeurs dans E, défini sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P_\nu)$, où, comme d'habitude, $(\Omega,\mathcal{F},P_\nu)$ est un espace de probabilité, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ est une filtration de $\mathcal{F}$, à laquelle X est adapté, et est markovien de semi-groupe $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$, de loi initiale ν sous la loi P_ν. On pose alors $W = L^\infty(\Omega,\mathcal{F},P_\nu)$, $W_t = L^\infty(\Omega,\mathcal{F}_t,P_\nu)$ et j_t est le morphisme de A dans W_t déterminé par la variable aléatoire X_t c'est à dire que $j_t(f)$, pour $f \in C_0(E)$, est la variable $f(X_t)$ sur $(\Omega,\mathcal{F},P_\nu)$. La propriété de Markov simple s'écrit alors $E[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t] = Q_s f(X_t)$, soit $E_t \circ j_{t+s} = j_t \circ Q_s$, et on a bien une dilatation du semi-groupe $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$.

Réciproquement, soit A une C^*-algèbre commutative, $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ un semi-groupe de contractions complètement positives, dont $(W,W_t,\omega_\nu,E_t,j_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ est une dilatation, telle que W soit une algèbre de von Neumann commutative, alors il existe un processus de Markov $(X_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ à valeurs dans *spec* (A), défini sur un espace $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P_\nu)$ et un isomorphisme d'algèbres de von Neumann $\gamma : L^\infty(\Omega,\mathcal{F},P_\nu) \to W$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $f \in A$, $j_t(f)$ soit égal à $\gamma(f(X_t))$.

Soit $(W,W_t,\omega_\nu,E_t,j_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ une dilatation de $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ de loi initiale ν, alors pour toute suite croissante de réels positifs $t_1,t_2,\dots,t_n$ et toute suite $a_0,a_1,\dots,a_n$ dans A on a, d'après la propriété de Markov,

$$\omega_\nu(j_0(a_0)j_{t_1}(a_1)\dots j_{t_n}(a_n)) = \nu(a_0Q_{t_1}(a_1Q_{t_2-t_1}(a_2\dots a_{n-1}Q_{t_n-t_{n-1}}(a_n)\dots))).$$

Nous voyons que le membre de droite de cette expression ne dépend pas de la dilatation choisie, mais seulement de ν et du semi-groupe Q. D'un point de vue physique, il représente le résultat d'une observation du processus j aux instants $t_1,\dots,t_n$ par un observateur chronologique, c'est à dire qui ne "voit" pas dans le passé. Par contre, si la suite $t_1,\dots t_n$ n'est pas croissante, le membre de gauche n'est pas déterminé par la donnée du semi-groupe Q_t. On est amené à la définition suivante : on dit que deux dilatations $(W,W_t,\omega_\nu,E_t,j_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ et $(W',W'_t,\omega'_\nu,E'_t,j'_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ du semi-groupe $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$, de loi initiale ν, sont équivalentes si pour toute suite de réels positifs $t_1,\dots,t_n$ et toute suite $a_1,\dots,a_n$ dans A on a

$$\omega_\nu(j_0(a_0)j_{t_1}(a_1)\dots j_{t_n}(a_n)) = \omega'_\nu(j'_0(a_0)j'_{t_1}(a_1)\dots j'_{t_n}(a_n))\ .$$

Etant donnés une C^*-algèbre A, un état ν sur A et un semi-groupe de contractions complètement positives $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ sur A, il existe toujours une dilatation de $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ de loi initiale ν, (cf [Sa]) mais en général deux telles dilatations ne sont pas équivalentes. En particulier, un semi-groupe sur un espace commutatif peut admettre une dilatation non-commutative, nous en verrons un exemple plus loin.

La notion de dilatation de la définition 1.5.1 est loin d'être la seule possible. Récemment, R.V. Bhat et K.R. Parthasarathy [B-P] ont proposé une définition légèrement différente de la notion de dilatation, qui leur a permis de développer une théorie des frontières analogue à la théorie classique pour les chaînes de Markov.

1.6. Construction d'une dilatation sur l'espace de Fock

Soient G un groupe localement compact, et ψ une fonction continue sur G, conditionnellement de type positif. On va décrire une dilatation du semi-groupe

$(Q_t^\psi)_{t\in\mathbb{R}_+}$, obtenue grâce aux résultats sur les représentations factorisables des groupes de courants décrites dans [P-S].

À la donnée de G et ψ on peut associer, par la construction GNS, un espace de Hilbert H, une représentation U de G dans $B(H)$, un cocyle $v : G \to H$ pour cette représentation (c'est à dire une fonction continue telle que $v(e) = 0$ et $U_g v(x) = v(gx) - v(g)$ pour tous $g, x \in G$), qui vérifient

$$< v(x), v(y) >= \psi(xy^{-1}) - \psi(x) - \psi(y^{-1}) + \psi(e)$$

pour tous x, y dans G (cf [P-S] I.3).

Soit ν un état sur $C^*(G)$ et π une représentation de G, dans un espace de Hilbert H_π, η un vecteur unitaire de H_π tel que $\nu(x) =< \pi(x)\eta, \eta >$ pour tout $x \in C^*(G)$.

Considérons l'espace de Fock $\Gamma = \Gamma(L^2(\mathbb{R}_+) \otimes H)$. Cet espace admet une famille totale de vecteurs exponentiels $\big(\mathcal{E}(u)\big)_{u\in L^2(\mathbb{R}_+)\otimes H}$ qui vérifient

$$< \mathcal{E}(u), \mathcal{E}(v) >= exp < u, v > \ .$$

Pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+$ on a une décomposition canonique en produit tensoriel hilbertien $\Gamma = \Gamma_{t]} \otimes \Gamma_{[t}$ où $\Gamma_{t]} = \Gamma\big(L^2([0,t[) \otimes H)\big)$ et $\Gamma_{[t} = \Gamma\big(L^2([t,+\infty[) \otimes H\big)$.

Posons $W = \mathcal{B}\big(H_\pi \otimes \Gamma\big)$, prenons pour ω_ν l'état pur associé au vecteur $\eta \otimes \mathcal{E}(0)$, et soit, pour $t \geq 0$, $W_t = \mathcal{B}(H_\pi \otimes \Gamma_{t]}) \otimes Id_{\Gamma_{[t}}$. Pour tout $g \in G$ posons $v_t(g) = 1_{[0,t]} \otimes v(g) \in L^2(\mathbb{R}_+) \otimes H$ et soit $U^t(g)$ l'opérateur

$$U^t(g) = P_{t]} \otimes U(g) + P_{[t} \otimes Id$$

sur $L^2(\mathbb{R}_+) \otimes H$ où $P_{t]}$ et $P_{[t}$ sont les projections orthogonales sur $L^2([0,t[)$ et $L^2([t,+\infty[)$, respectivement. Il existe des espérances conditionnelles $E_t : W \to W_t$ définies par

$$< E_t[X](a \otimes \mathcal{E}(h)), b \otimes \mathcal{E}(v) >=< X(a \otimes \mathcal{E}(h_{t]})), b \otimes \mathcal{E}(v_{t]}) >< \mathcal{E}(h_{[t}), \mathcal{E}(v_{[t}) >$$

où on a posé $u_{t]} = P_{t]} \otimes Id(u)$ et $u_{[t} = P_{[t} \otimes Id(u)$ (cf [P1] p.214).

On définit une représentation unitaire de G en posant

$$V^t(g)(\mathcal{E}(u)) = e^{(t\psi(g) + < v_t(g), u >)} \mathcal{E}(U^t(g)(u) + v_t(g))$$

pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}_+) \otimes H$. Le morphisme $j_t : C^*(G) \to W$ est alors obtenu en prolongeant la représentation unitaire $\pi \otimes V^t$ de G.

Montrons que l'on construit ainsi une dilatation de $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Il est clair que $\omega_\nu \circ j_0 = \nu$. Il suffit donc de vérifier la propriété de Markov, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$ on a bien $E_t[(\pi \otimes V^{t+s})(g)] = e^{s\psi(g)}(\pi \otimes V^t)(g)$; mais pour tous $a, b \in \mathcal{B}(H_\pi)$ et $u, v \in L^2(\mathbb{R}_+) \otimes H$ on a

$$\begin{aligned} &< E_t\big[\pi \otimes V^{t+s}(g)\big] a \otimes \mathcal{E}(u), b \otimes \mathcal{E}(v) >= \\ &\qquad =< \pi \otimes V^{t+s}(g) a \otimes \mathcal{E}(u_{t]}), b \otimes \mathcal{E}(v_{t]}) >< \mathcal{E}(u_{[t}, \mathcal{E}(v_{[t} > \\ &\qquad =< \pi(g)a, b > e^{((t+s)\psi(g) + < v_{t+s}(g), u_{t]} >)} \\ &\qquad\qquad < \mathcal{E}(U^{t+s}(g)(u_{t]}) + v_{t+s}(g)), \mathcal{E}(v_{t]}) >< \mathcal{E}(u_{[t}), \mathcal{E}(v_{[t}) > \end{aligned}$$

or il est clair que $< v_{t+s}(g), u_{t]} >=< v_t(g), u_{t]} >$, $< v_{t+s}(g), v_{t]} >=< v_t(g), v_{t]} >$ et $< U^{t+s}(g)u_{t]}, v_{t]} >=< U^t(g)u_{t]}, v_{t]} >$, par conséquent

$$\begin{aligned}
< E_t\left[\pi \otimes V^{t+s}(g)\right] a \otimes \mathcal{E}(u), b \otimes \mathcal{E}(v) >= \\
&=< \pi(g)a, b > e^{((t+s)\psi(g)+v_t(g),u_{t]}>)} \\
&\qquad < \mathcal{E}(U^t(g)(u_{t]}) + v_t(g)), \mathcal{E}(v_{t]}) >< \mathcal{E}(u_{[t}), \mathcal{E}(v_{[t}) > \\
&= e^{s\psi(g)} < (\pi \otimes V^t)(g) a \otimes \mathcal{E}(u), b \otimes \mathcal{E}(v) >
\end{aligned}$$

pour tous a, b, u, v, et donc $E_t[\pi \otimes V^{t+s}(g)] = e^{s\psi(g)}(\pi \otimes V^t)(g)$.

La construction qui précède, qui provient de [P-S], a été généralisée récemment par M. Schürmann pour traiter les cas de bigèbres plus générales que celles provenant de groupes (voir [Sc]).

2. Le groupe d'Heisenberg et le mouvement brownien non-commutatif.

2.1. Le groupe d'Heisenberg.

Nous reprenons les notions introduites au paragraphe précédent dans le cas particulier où G est le groupe d'Heisenberg. Rappelons qu'il s'agit de $H_d = \mathbb{C}^d \times \mathbb{R}$ avec la loi de groupe

$$(z, w) \star (z', w') = (z + z', w + w' + \Im < z', z >)$$

C'est un groupe de Lie nilpotent de rang 1, de dimension $2d + 1$, dont le centre est le sous-groupe $\{0\} \times \mathbb{R}$. C'est un groupe unimodulaire, et la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^d \times \mathbb{R}$ est une mesure de Haar.

Pour $z \in \mathbb{C}^d$ on notera $q \in \mathbb{R}^d$ sa partie réelle et $p \in \mathbb{R}^d$ sa partie imaginaire.

L'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche sur H_d admet une base donnée par les champs

$$T = \frac{\partial}{\partial w} \qquad L_j = \frac{\partial}{\partial q_j} - p_j \frac{\partial}{\partial w} \qquad M_j = \frac{\partial}{\partial p_j} + q_j \frac{\partial}{\partial w}$$

qui vérifient les relations de commutation

$$[L_j, M_j] = 2T$$

les autres commutateurs étant nuls.

Dans la suite nous utiliserons les éléments

$$\alpha_j = \frac{1}{2}(iL_j + M_j) = \frac{i}{2}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial w}) \text{ et } \alpha_j^* = \frac{1}{2}(iL_j - M_j) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial z_j} - z_j \frac{\partial}{\partial w})$$

de l'algèbre de Lie complexifiée de H_d.

2.2. Représentations de H_d.

Nous allons essayer de décrire la C^*-algèbre de H_d, et pour cela, commencer par décrire les représentations unitaires irréductibles de H_d (je renvoie à [F] et [Tay] Ch.1 pour ces résultats).

Les représentations de dimension 1 de H_d sont indexées par les éléments de $\mathbb{C}^d$: si $\xi \in \mathbb{C}^d$, $\rho_\xi(z,w) = e^{i\Re<z,\xi>}$ définit une représentation de dimension 1 de H_d.

D'autre part, pour tout réel $\tau \neq 0$ soit π_τ la représentation induite par le caractère $w \mapsto e^{i\tau w}$ du centre de H_d, qui est donnée par la formule suivante sur $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\pi_\tau(z,w)f(x) = f(x+q)e^{i\tau(w+p.q+2p.x)}$$

où $p.q$ désigne le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, la représentation π_τ est irréductible, et la représentation dérivée de l'algèbre de Lie de H_d est donnée par les formules

$$d\pi_\tau(T) = i\tau.Id \qquad d\pi_\tau(L_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad d\pi_\tau(M_j) = 2i\tau x_j$$

La structure de la représentation π_τ peut-être précisée de la façon suivante. Considérons d'abord le cas $d = 1$ et $\tau > 0$. Il existe une base orthonormée $(h_n^\tau)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ ($h_0^\tau(x) = (\frac{2\tau}{\pi})^{\frac{d}{4}} e^{-\tau\,|x|^2} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et h_n^τ s'exprime à l'aide du polynôme d'Hermite de degré n, cf [F], ou [Tay] 1.6) telle que

$$\begin{aligned} d\pi_\tau(\alpha^*)(h_n^\tau) &= \sqrt{(n+1)\tau}\ h_{n+1}^\tau \\ d\pi_\tau(\alpha)(h_n^\tau) &= \sqrt{n\tau}\ h_{n-1}^\tau \end{aligned}$$

(on a posé $\alpha = \alpha_1$ et $\alpha^* = \alpha_1^*$).

Pour $\tau < 0$, les rôles de α et α^* sont inversés, et

$$\begin{aligned} d\pi_\tau(\alpha)(h_n^{-\tau}) &= -\sqrt{-(n+1)\tau}\ h_{n+1}^{-\tau} \\ d\pi_\tau(\alpha^*)(h_n^{-\tau}) &= -\sqrt{-n\tau}\ h_{n-1}^{-\tau}\ . \end{aligned}$$

En particulier, si $\Lambda_\tau = \pi_\tau(\alpha^*)\pi_\tau(\alpha)$ est l'opérateur de nombre de la représentation π_τ, c'est un opérateur auto-adjoint dont le spectre est constitué des nombres $k\tau$ avec $k \in \mathbb{N}$ pour $\tau > 0$ et $-k\tau$, $k \in \mathbb{N}^*$ pour $\tau < 0$.

L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est isomorphe à l'espace de Fock $\Gamma(\mathbb{C})$, si l'on envoie h_n^τ, pour $\tau > 0$, sur le vecteur $\frac{1^{\circ n}}{\sqrt{n!}}$ de $\Gamma(\mathbb{C})$. On identifie alors les opérateurs $d\pi_\tau(\alpha)$ et $d\pi_\tau(\alpha^*)$ avec les opérateurs d'annihilation et de création $a^-_{\sqrt{\tau}}$ et $a^+_{\sqrt{\tau}}$ sur l'espace de Fock (cf [M1], [P]).

Si $d > 1$, on peut représenter $L^2(\mathbb{R}^d)$ comme un produit tensoriel $L^2(\mathbb{R})^{\otimes d}$ et les opérateurs α_j, α_j^* opèrent sur la j^{eme} composante du produit tensoriel, i.e.

$$\begin{aligned} \alpha_j &= Id^{\otimes(j-1)} \otimes \alpha \otimes Id^{\otimes(d-j-2)} \\ \alpha_j^* &= Id^{\otimes(j-1)} \otimes \alpha^* \otimes Id^{\otimes(d-j-2)}\ . \end{aligned}$$

L'opérateur de nombre $\Lambda_\tau = \sum_j \pi_\tau(A_j)\pi_\tau(A_j^*)$ est auto-adjoint et a un spectre discret, composé des réels $k\tau$, $k \in \mathbb{N}$ pour $\tau > 0$ et $-d\tau - k\tau$, $k \in \mathbb{N}$ pour $\tau < 0$. Sa plus petite valeur propre est de multiplicité 1 et un vecteur propre correspondant est $(h_0^\tau)^{\otimes d}$.

Les représentations ρ_ξ de dimension 1 et les représentations π_τ épuisent l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de H_d (voir [F] et [Tay]).

2.3. La C^*-algèbre de H_d.

La structure de $C^*(H_d)$ peut se décrire au moyen d'une extension de C^*-algèbres, que l'on obtient comme suit. Si $a \in C^*(H_d)$, l'application $\tau \mapsto \pi_\tau(a)$ est une application continue, nulle en $\pm\infty$, de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ dans l'algèbre des opérateurs compacts de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Soit π_0 la représentation de H_d dans $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ qui à tout élément g de H_d associe l'opérateur de multiplication par la fonction $\xi \mapsto \rho_\xi(g)$ sur $\mathbb{R}^{2d} = \mathbb{C}^d$. La représentation π_0 est l'intégrale $\int_{\mathbb{C}^d} \rho_\xi d\xi$ des représentations de dimension 1 de H_d. On peut définir un opérateur de nombre $\Lambda_0 = d\pi_0(\alpha^*)d\pi_0(\alpha)$ dans l'espace de cette représentation, qui n'est autre que l'opérateur de multiplication par la fonction $|\xi|^2$ sur $L^2(\mathbb{C}^d)$.

On obtient un morphisme surjectif $\pi_0 : C^*(H_d) \to C_0(\mathbb{R}^{2d})$, dont le noyau est formé des éléments de $C^*(H_d)$ tels que $\tau \mapsto \pi_\tau(x)$ tende vers 0 en $\tau = 0$. On déduit des considérations précédentes la suite exacte suivante (voir [L] et [V] pour plus de détails)

$$0 \to C_0(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \otimes \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^d)) \to C^*(H_d) \to C_0(\mathbb{R}^{2d}) \to 0 .$$

On peut donner une description heuristique de la structure de l'espace non-commutatif sous-jacent à $C^*(H_d)$. C'est un espace fibré au dessus de $\mathbb{R}$, où vit le paramètre τ, qui est la variable conjuguée de w par la transformation de Fourier. En chaque point $\tau \neq 0$ la fibre est un "espace euclidien non-commutatif" mesuré par $2d$ coordonnées qui sont $x_j = \pi_\tau(L_j)$ et $y_j = \pi_\tau(M_j)$ et qui vérifient $[x_j, y_j] = 2i\tau$. La structure de l'algèbre des fonctions continues nulles à l'infini sur un tel espace est celle des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert séparable, et ne dépend pas de τ. Lorsque τ tend vers zéro, la structure de l'espace devient "de plus en plus commutative", et finalement en $\tau = 0$ on retrouve $2d$ coordonnées qui commutent et l'algèbre des fonctions continues, nulles à l'infini, sur un espace euclidien de dimension $2d$. Il y a donc une singularité en zéro où la structure algébrique de l'algèbre des fonctions sur la fibre change brusquement.

Posons $\mathcal{A}_\tau = \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^d))$ si $\tau \in \mathbb{R}^*$ et $\mathcal{A}_0 = C_0(\mathbb{R}^{2d})$. On définit un poids m_τ sur $\mathcal{A}_\tau$ par $m_\tau = |4\pi\tau|^d tr$ pour $\tau \neq 0$, tr étant la trace sur $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^d))$, et $m_0(g) = (2\pi)^{2d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} g(\xi)d\xi$ pour g continue positive sur $\mathbb{R}^{2d}$. Soit f continue à support compact sur H_d, pour $\tau \neq 0$, l'opérateur $\pi_\tau(f)$ est donné par un noyau continu sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, et le calcul de sa trace, ainsi que la formule d'inversion de Fourier montrent que pour $\tau \in \mathbb{R}$, on a

$$m_\tau(\pi_\tau(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0,w)e^{i\tau w}dw .$$

On en déduit que la formule de Plancherel pour le groupe d'Heisenberg (cf [Tay], [F]) donne, pour f continue à support compact sur H_d

$$f(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} m_\tau(\pi_\tau(f)) d\tau$$

et le poids de Haar sur $C^*(H_d)$ est donc donné par

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} m_\tau \circ \pi_\tau d\tau \, .$$

On observera que pour f continue, à support compact sur H_d, $m_\tau(\pi_\tau(f))$ est une fonction continue de τ cela suggère que m_0 est la distribution limite des m_τ lorsque $\tau \to 0$. La deuxième partie de l'article [V] de D. Voiculescu donne une signification précise à cette remarque.

2.4. Partie radiale de $C^*(H_d)$

On peut, à l'aide du groupe d'Heisenberg, construire un couple de Gelfand qui nous permettra de définir le semi-groupe de Bessel non-commutatif, auquel est associé un processus stochastique classique tout-à-fait intéressant.

Commençons par décrire ici le couple de Gelfand en question et son spectre.

Soit $\theta \in U(d)$ une transformation unitaire de $\mathbb{C}^d$, elle induit un automorphisme a_θ du groupe d'Heisenberg défini par $a_\theta(z,w) = (\theta(z), w)$, et donc des automorphismes de $L^1(H_d)$ et $C^*(H_d)$. On peut alors former le produit semi-direct $U(d) \times H_d$, avec la loi de groupe

$$(\theta, z, w) \star (\theta', z', w') = (\theta\theta', z + \theta(z'), w + w' + \Im < \theta(z'), z >)$$

Le couple $(U(d) \times H_d, U(d))$ est un couple de Gelfand (cf [F] Ch. 5), en d'autres termes, la sous-algèbre de $L^1(H_d)$ formée des fonctions invariantes par l'action de $U(d)$ est commutative. La sous-algèbre $C^*_R(H_d)$ de $C^*(H_d)$ des éléments invariants par $U(d)$ est également commutative. Son spectre peut se décrire explicitement. Il coïncide avec le spectre de l'algèbre de Banach $L^1_R(H_d)$ des fonctions radiales sur H_d, qui a été déterminé par A. Koranyi (voir [F], voir aussi [Tay] Ch.1, où sont cités des travaux très proches dûs à Petree). L'ensemble des caractères de cette algèbre est égal à $\{\chi_{\tau,m} | \tau \in \mathbb{R}^*, \ m \in \mathbb{N}\} \cup \{\chi_\mu | \mu \in \mathbb{R}_+\}$ où le caractère $\chi_{\tau,m}$ est donné par la formule $\chi_{\tau,m}(f) = \int_{H_d} \omega_{\tau,m}(g) f(g) dg$ pour $f \in L^1(H_d)$, invariante par $U(d)$, avec

$$\omega_{\tau,m} = \frac{(d-1)!m!}{(m+d-1)!} e^{i\tau w} e^{-\frac{1}{2}|\tau| \, |z|^2} L_m^{d-1}(|\tau| \, |z|^2) \tag{2.4.1}$$

les L^n_m étant les polynômes de Laguerre donnés par la série génératrice

$$\sum_{m=0}^{\infty} L_m^n(x) t^m = (1-t)^{-n-1} e^{-\frac{xt}{1-t}} \tag{2.4.2}$$

Le caractère χ_μ pour $\mu \in \mathbb{R}_+$ est, lui, donné par $\chi_\mu(f) = \int_{H_d} \omega_\mu(g)f(g)dg$ où

$$\omega_\mu(z,w) = j_{d-1}(\mu|z|^2) \tag{2.4.3}$$

j_n étant la fonction de Bessel usuelle.

Il n'est pas difficile de voir que tous ces caractères sont en fait continus sur la grosse algèbre $C^*_R(H_d)$, et s'obtiennent au moyens d'états purs sur les espaces des représentations π_τ. On peut décrire explicitement la topologie du spectre de $C^*_R(H_d)$ (cf [F] et [Bo]), ce que nous allons faire après avoir donné une description un peu plus intuitive de l'algèbre $C^*_R(H_d)$. D'après [Tay] (Ch.1, Proposition 7.7) on sait que dans la représentation π_τ l'image de l'algèbre $C^*_R(H_d)$ est exactement l'algèbre commutative des fonctions de l'opérateur Λ_τ, (nulles à l'infini sur le spectre de Λ_τ). Ce spectre est égal, d'après les remarques faites en 2.2, à $\{k\tau|\ k \in \mathbb{N}\}$ pour $\tau > 0$ et à $\{-d\tau - k\tau | k \in \mathbb{N}\}$ pour $\tau < 0$. L'image par la représentation π_0 de $C^*_R(H_d)$ est égale, elle, à l'algèbre des fonctions continues, nulles à l'infini, radiales sur $\mathbb{R}^{2d}$, autrement dit à l'algèbre des fonctions de l'opérateur Λ_0 qui est l'opérateur de multiplication par la fonction $|\xi|^2$ sur $L^2(\mathbb{C}^d)$, et dont le spectre est donc $\mathbb{R}_+$. La réunion des ensembles $(\tau \times spectre(\Lambda_\tau))_{\tau\in\mathbf{R}}$ est une partie fermée X_d de $\mathbb{R}^2$ qui est la réunion des demi-droites, dans le demi-plan $y > 0$, de la forme $(\sigma, k\sigma)_{\sigma\in\mathbf{R}_+}$ avec $k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1,-2,\ldots,-d-1\}$, et de la demi droite $(y > 0, x = 0)$ (voir fig 1 pour $d = 1$).

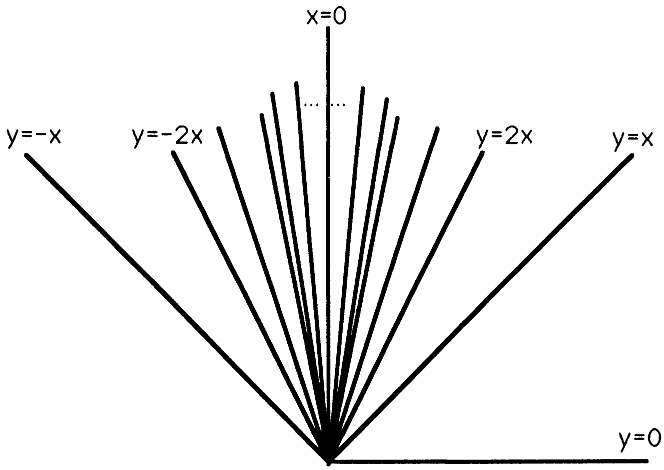

fig 1
Le spectre de $C^*_R(H_1)$

En identifiant un point $(\tau, k|\tau|)$ de X_d avec le caractère $\chi_{\tau,k}$ pour $\tau > 0$, avec $\chi_{\tau,k-d}$ pour $\tau < 0$ et en identifiant $(0, 4\mu^2)$ avec χ_μ on obtient un homéomorphisme entre X_d et le spectre de l'algèbre $C^*_R(H_d)$. On aurait obtenu un homéomorphisme avec une autre partie de $\mathbb{R}^2$ en considérant les spectres des opérateurs $\tilde{\Lambda}_\tau = \sum_j d\pi_\tau(\alpha_j)d\pi_\tau(\alpha_j^*) = \Lambda_\tau + d\tau$, qui sont conjugués de Λ_τ par l'automorphisme J de

$C^*(H_d)$ déduite de l'automorphisme $J(z,w) = (\bar{z}, -w)$ de H_d. La partie de $\mathbb{R}^2$ obtenue est le symétrique de X_d par rapport à l'axe vertical $x = 0$. On peut aussi considérer les spectres des oscillateurs harmoniques $\frac{1}{2}(\Lambda_\tau + \tilde{\Lambda}_\tau)$ ce qui donne l'homéomorphisme décrit dans [F], Ch. 5.

La restriction du poids de Haar sur $C^*(H_d)$ à $C^*_R(H_d)$ définit une mesure de Radon sur X_d, qui est donnée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |4\pi\tau|^d \sum_0^\infty \frac{(d+k-1)!}{k!(d-1)!}\delta_{(\tau,k\tau)}d\tau \,.$$

Plus précisément, le poids $m_\tau \circ \pi_\tau$ définit une mesure positive sur X_d qui est

$$|4\pi\tau|^d \sum_0^\infty \frac{(d+k-1)!}{k!(d-1)!}\delta_{(\tau,k\tau)}$$

pour $\tau \neq 0$ et $(4\pi)^d \frac{r^{d-1}}{(d-1)!}dr$ sur $\mathbb{R}_+$ pour $\tau = 0$.

On observera que l'espace X_d est une partie de $X_{d'}$ si $d' \leq d$. Considérons le sous-groupe diagonal de $U(d)$ et la sous-algèbre $C^*_D(H_d)$ de $C^*(H_d)$ des éléments invariants par les automorphismes de ce sous-groupe. Cette algèbre est encore commutative et contient $C^*_R(H_d)$. L'image de cette algèbre par la représentation π_τ est l'algèbre des fonctions des opérateurs $d\pi_\tau(\alpha_j^*)d\pi_\tau(\alpha_j)$ pour $1 \leq j \leq d$, qui commutent entre eux. On déduit facilement des considérations qui précèdent que le spectre de l'algèbre s'identifie avec l'espace $X^{(d)}$, produit fibré de d copies de X_1 au-dessus de $\mathbb{R}$, c'est à dire la partie de $\mathbb{R}^{d+1}$ formée des $(\tau, u_1, \ldots, u_d)$ tels que $\tau \in \mathbb{R}$ et $(\tau, u_j) \in X_1$ pour tout j. L'inclusion $C^*_R(H_d) \to C^*_D(H_d)$ donne, au niveau des spectres, l'application

$$\begin{aligned} X^{(d)} &\to X_d \\ (\tau, u_1, \ldots, u_d) &\mapsto (\tau, u_1 + \ldots + u_d) \end{aligned}$$

qui est surjective.

2.5. Le semi-groupe du mouvement brownien non-commutatif.

Posons, pour $\tau \in \mathbb{R}^*$, $\varphi_\tau(z,w) = <\pi_\tau(z,w)h_0^{|\tau|}, h_0^{|\tau|}> = e^{i\tau w - \frac{1}{2}|\tau||z|^2}$. Par construction, φ_τ est une fonction de type positif sur H_d, et $(\varphi_s)_{s\in\mathbf{R}_+}$ et $(\varphi_{-s})_{s\in\mathbf{R}_+}$ sont deux semi-groupes multiplicatifs de fonctions de type positif sur H_d, donc les fonctions $\psi(z,w) = iw - \frac{1}{2}|z|^2$ et $\bar{\psi}(z,w) = -iw - \frac{1}{2}|z|^2$ sont conditionnellement de type positif sur H_d.

2.5.1. Définition *Le semi-groupe du mouvement brownien non-commutatif est le semi-groupe de contractions complètement positives $(Q_t = Q_t^\psi)_{t\in\mathbf{R}_+}$ sur $C^*(H_d)$.*

On notera $(\hat{Q}_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ le semi-groupe $(Q_t^{\bar{\psi}})_{t\in\mathbf{R}_+}$

Construisons la dilatation de $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ décrite au paragraphe 1.6, avec pour loi initiale l'état associé à la fonction 1 sur H_d. On a $H_\pi = \mathbb{C}$ et π est la représentation triviale de H_d. Soient $H = \mathbb{C}^d$, et v le cocycle à valeurs dans H, pour la représentation triviale de H_d, défini par $v(z,t) = z$. On a bien

$$< v(g), v(g') >= \psi(g(g')^{-1}) - \psi(g) - \psi(g'^{-1}) + \psi(e)$$

pour $g, g' \in H_d$.

L'espace Γ est alors l'espace de Fock $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+) \otimes H)$, on a $v_t(z,w) = z1_{[0,t[}$, $U^t(z,w) = Id$ et pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$,

$$V^t(z,w)\mathcal{E}(u) = e^{-\frac{t}{2}|z|^2 + \int_0^t <z,u(s)>ds}\mathcal{E}(u + z1_{[0,t[}) .$$

On déduit de ces formules que les opérateurs $j_t(\alpha_j)$ et $j_t(\alpha_j^*)$ sont les opérateurs A_t^j et A_t^{j*} de création et d'annihilation sur l'espace de Fock utilisés dans le calcul stochastique non-commutatif (voir [P1]). La dilatation du semi-groupe brownien non-commutatif contient donc le mouvement brownien non-commutatif, c'est-à-dire les processus A_t^j et A_t^{j*}, et réciproquement, la donnée de ces processus permet de reconstruire les représentations j_t, ce qui justifie le nom que nous avons donné au semi-groupe $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

On peut également obtenir les autres intégrateurs du calcul stochastique non-commutatif en modifiant la construction précédente. Pour cela considérons le produit semi-direct $U(d) \times H_d$. La fonction $\tilde{\psi}(\theta, z, w) = \psi(z,w)$ est conditionnellement de type positif sur le produit semi-direct $U(d) \times H_d$ et en posant $v(\theta, z, w) = z$ on obtient un cocycle pour la représentation de $U(d) \times H_d$ dans $\mathbb{C}^d$ donnée par $(\theta, z, w)(x) = \theta(x)$. Construisons maintenant la dilatation associée (avec pour mesure initiale l'état associé à la représentation triviale). On a $v_t(\theta, z, w) = z1_{[0,t]}$, $U^t(\theta, z, w) = P_{t]} \otimes \theta + P_{[t} \otimes Id$. Soit $(E_{jk})_{1\leq j,k\leq d}$ la base usuelle de l'algèbre de Lie $gl(d)$, on vérifie que l'image de l'élément $(E_{jk}, 0, 0)$ de l'algèbre de Lie de $U(d)$ est l'opérateur de nombre $\Lambda_{jk}(t)$. On voit donc que pour obtenir tous les intégrateurs du calcul stochastique non-commutatif il faut considérer le groupe $U(d) \times H_d$ et non pas seulement le groupe H_d.

On va laisser de côté la dilatation du semi-groupe Q fournie par la construction de 1.6, pour examiner en détail le semi-groupe lui-même, qui est en quelque sorte plus fondamental que sa dilatation.

2.6. Restrictions à des sous-groupes.

Examinons la restriction du semi-groupe $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à l'algèbre d'un sous-groupe commutatif, en commençant par le centre de H_d. La restriction au centre de la fonction ψ est la fonction $w \mapsto iw$ sur $\mathbb{R}$, et donc le semi-groupe obtenu par restriction au centre de H_d est celui de la translation uniforme sur la droite réelle. On voit donc que le semi-groupe du mouvement brownien non-commutatif induit un mouvement déterministe, de translation uniforme le long de la variable τ. En fait nous avons le résultat plus précis suivant.

2.6.1. Proposition. *Pour tous $\tau \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ il existe une unique contraction complètement positive $R_\tau^{\tau+t} : \mathcal{A}_{\tau+t} \to \mathcal{A}_\tau$ telle que $R_\tau^{\tau+t} \circ \pi_{\tau+t} = \pi_\tau \circ Q_t$.*

De même, il existe une unique contraction complètement positive $\hat{R}_\tau^{\tau-t} : \mathcal{A}_{\tau+t} \to \mathcal{A}_\tau$ telle que $\hat{R}_\tau^{\tau-t} \circ \pi_{\tau-t} = \pi_\tau \circ \hat{Q}_t$.

Démonstration. Nous allons construire $R_\tau^{\tau+t}$, le cas de $\hat{R}_\tau^{\tau+t}$ est tout-à-fait semblable. Soit $\tau \in \mathbb{R}^*$, l'application $\pi_\tau \circ Q_t$ est égale à la composition de

$$\pi_\tau \otimes \pi_t : C^*(H_d) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathbb{R}^d))$$

et de

$$Id \otimes \eta_0 : \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathbb{R}^d)) \mapsto \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$$

où η_0 est l'état pur associé au vecteur h_0^t. La restriction de la représentation $\pi_\tau \otimes \pi_t$ au centre de H_d est égale au caractère $w \mapsto e^{i(t+\tau)w}$, donc si $\tau + t \neq 0$ le théorème de Stone-von Neumann (cf [Tay] 5.2) entraîne que c'est un multiple de la représentation $\pi_{\tau+t}$, d'où l'existence d'un unique morphisme $\gamma : \mathcal{A}_{\tau+t} \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathbb{R}^d))$ tel que $\gamma \circ \mathcal{A}_{\tau+t} = \pi_{\tau.} \otimes \pi_t$. Il suffit alors de prendre $R_\tau^{\tau+t} = (Id \otimes \eta_0) \circ \gamma$.

Lorsque $\tau + t = 0$ la représentation $\pi_\tau \otimes \pi_{-\tau}$ est équivalente à π_0. En effet, cette représentation, dans $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathbb{R}^d)$ identifié à $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, est donnée par les formules

$$\pi_\tau \otimes \pi_{-\tau}(z, w) f(x, y) = f(x+q, y+q) e^{2i\tau p.(x-y)}$$

En considérant f comme une fonction de $(\frac{1}{2}(x+y), 2\tau(x-y))$ et en faisant une transformation de Fourier dans la variable $\frac{1}{2}(x+y)$ on obtient un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ qui entrelace les représentations π_0 et $\pi_\tau \otimes \pi_{-\tau}$. On en déduit alors facilement l'existence et l'unicité de l'application R_τ^0 comme ci-dessus.

Enfin le cas $\tau = 0$ se traite par des méthodes analogues.

Il est clair, d'après la propriété de semi-groupe de $(Q_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ que pour tous $\sigma < \tau < \delta \in \mathbb{R}$ on a

$$R_\sigma^\delta = R_\sigma^\tau \circ R_\tau^\delta \quad \text{et} \quad \hat{R}_\delta^\sigma = \hat{R}_\delta^\tau \circ \hat{R}_\tau^\sigma \tag{2.6.1}$$

De même, comme les semi-groupes Q et $\hat{Q}$ commutent on a, pour $\sigma \in \mathbb{R}$ et $s, t > 0$,

$$R_{\sigma+s-t}^{\sigma+s} \circ \hat{R}_{\sigma+s}^\sigma = \hat{R}_{\sigma+s-t}^{\sigma-t} \circ R_{\sigma-t}^\sigma \tag{2.6.2}$$

Les transformations R et $\hat{R}$ se prolongent en des contractions des algèbres $\mathcal{A}_\tau''$, où $\mathcal{A}_\tau'' = \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$ pour $\tau \neq 0$ et $\mathcal{A}_0''$ est l'algèbre des fonction universellement mesurables bornées sur $\mathbb{R}^d$.

On peut donner une formule explicite pour la transformation R_τ^0 $(\tau < 0)$. Pour cela introduisons les opérateurs $\eta_\tau(\xi)$, pour $\tau < 0$ et $\xi = u + iv \in \mathbb{C}^d$, donnés par

$$\eta_\tau(\xi) h(x) = (2\pi)^{2d} \int_{\mathbb{C}^d} h(q') e^{i\tau(q'+x).p'} e^{-i\Re<z'-x,\xi>} e^{\frac{\tau}{2}|z'-x|^2} dz'$$

L'opérateur $\eta_\tau(\xi)$ est donné par le noyau continu

$$\begin{aligned}
K(q',x) &= (2\pi)^{2d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\tau(q'+x).p'} e^{-i(p'.u+q'.v)} e^{\frac{\tau}{2}(|q'-x|^2+|p'|^2)} dp' \\
&= (2\pi)^{2d} (\frac{2\pi}{-\tau})^{\frac{d}{2}} e^{-i(q'-x).v+\tau(|q'|^2+|x|^2)+(q'+x).u+\frac{|u|^2}{\tau}} \\
&= (2\pi)^{2d} (\frac{2\pi}{-\tau})^{\frac{d}{2}} \bar{Z}_\xi(q') Z_\xi(x)
\end{aligned}$$

où $Z_\xi(y) = e^{iy.v+\tau|y|^2+y.u+\frac{|u|^2}{2\tau}}$. La fonction Z_ξ est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ par conséquent l'opérateur $\eta_\tau(\xi)$ est borné, de rang 1 sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. De plus, l'application $(\tau, \xi) \mapsto \eta_\tau(\xi)$ est faiblement continue de $]-\infty, 0[\times\mathbb{C}^d$ dans $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$. On voit aussi facilement que si $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ alors $\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} h(y)Z_\xi(y)dy$ est de carré intégrable sur $\mathbb{C}^d$, par conséquent, $\xi \mapsto \eta_\tau(\xi)$ est faiblement intégrable sur $\mathbb{C}^d$.

2.6.2. Proposition. *Pour toute fonction g mesurable bornée sur $\mathbb{R}^{2d}$ on a*

$$R_\tau^0(g) = \int_{\mathbb{C}^d} g(\xi)\eta_\tau(\xi)d\xi \tag{2.6.3}$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'opérateur défini par la formule (2.6.3) est bien défini, car $\xi \mapsto \eta_\tau(\xi)$est faiblement intégrable.

Soit f une fonction de l'espace de Schwartz de H_d. L'opérateur $R_\tau^0(\pi_0(f)) = \pi_\tau(e^{-\tau\psi}f)$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ est donné par la formule

$$\pi_\tau(e^{-\tau\psi}f)h(x) = \int_{H_d} h(x+q)e^{i\tau(w+p.q+2p.x)}e^{-i\tau w+\frac{\tau}{2}(|q|^2+|p|^2)}f(q,p,w)dqdpdw.$$

D'après la formule d'inversion de Fourier et la définition des représentations ρ_ξ, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(z,w)dw &= (2\pi)^{2d} \int_{\mathbb{C}^d} \rho_\xi(f)e^{-i\Re<z,\xi>}d\xi \\
&= (2\pi)^{2d} \int_{\mathbb{C}^d} \pi_0(f)(\xi)e^{-i\Re<z,\xi>}d\xi \;;
\end{aligned}$$

comme f est dans l'espace de Schwartz, on peut interchanger l'ordre d'intégration pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\pi_\tau(e^{-\tau\psi}f)h(x) = \\
&= (2\pi)^{2d} \int_{\mathbb{C}^d} \Big(\int_{\mathbb{C}^d} h(x+q)e^{i\tau(p.q+2p.x)+\frac{\tau}{2}(|q|^2+|p|^2)}e^{-i\Re<z,\xi>}dz \Big) \pi_0(f)(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{C}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} h(q')K(q',x)dq' \Big) \pi_0(f)(\xi)d\xi \,,
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$R_\tau^0(\pi_0(f)) = \int_{\mathbb{C}^d} \pi_0(f)(\xi)\eta_\tau(\xi)d\xi \,.$$

Cette formule se prolonge ensuite à toutes les fonctions universellement mesurables bornées sur $\mathbb{C}^d$, ce qui donne le résultat.

Nous avons vu en 1.3.1 que le poids de Haar est invariant par un semi-groupe de convolution. Nous avons en fait un peu plus ici.

2.6.3. Proposition. *Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$*

$$m_\tau \circ R_\tau^{\tau+t} = m_{\tau+t} \,.$$

Démonstration. Pour toute f continue à support compact sur H_d, on a

$$\begin{aligned} m_{\tau+t}(\pi_{\tau+t}(f)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(0,w)e^{iw(\tau+t)}dw \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(0,w)e^{iw\tau}e^{t\psi(0,w)}dw \\ &= m_\tau(\pi_\tau(e^{t\psi}f)) \\ &= m_\tau\big(R_\tau^{\tau+t}(\pi_{\tau+t}(f))\big) \end{aligned}$$

et le résultat suit par prolongement à $\mathcal{A}_{\tau+t}$.

2.6.4. Proposition. *Pour tout $x \in U(H_d)$, l'application $\sigma \mapsto R_\sigma^\tau(x)$ de $]-\infty,\tau[$ dans $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$ est faiblement continue.*

Démonstration. Soient $a, b \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et $f \in L^1(H_d)$ on a

$$\begin{aligned} &< R_\sigma^\tau(\pi_\tau(f))a, b > = < \pi_\sigma(e^{(\tau-\sigma)\psi}f)a, b > \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{H_d} a(x+q)e^{i\sigma(w+p.q+2p.x)}e^{(\tau-\sigma)(iw-\frac{1}{2}|z|^2)}f(z,w)\bar{b}(x)dxdzdw \,. \end{aligned}$$

Il est clair que cette expression dépend continûment de σ, d'où le résultat pour $f \in L^1(H_d)$. On prolonge à $U(H_d)$ par densité de L^1 pour la topologie faible.

La forme $\Im < z', z >$ est une forme symplectique sur $\mathbb{C}^d$, considéré comme un espace vectoriel réel. Pour tout sous-espace vectoriel isotrope maximal V_d de $\mathbb{C}^d$, $V_d \times \mathbb{R}$ est un sous-groupe abélien de H_d. En restreignant le semi-groupe $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à l'algèbre engendrée par ce sous-groupe, on obtient le semi-groupe de la chaleur sur $\mathbb{R} \times \hat{V}_d$.

En coupant le groupe d'Heisenberg en "tranches" de la forme $\mathbb{R} \times V_d$ on obtient ainsi toute une famille de semi-groupes de la chaleur.

3. Premières propriétés du semi-groupe brownien non-commutatif.

Nous allons maintenant passer en revue certaines propriétés d'invariance du semi-groupe $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ qui sont des analogues de propriétés vérifiées par le semi-groupe du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ (ou plus précisément du processus de la chaleur).

3.1. Invariance par changement d'échelle

Rappelons que si $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien d-dimensionnel issu de 0 et $c \neq 0$ alors le processus $(\frac{1}{c}B_{c^2t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est encore un mouvement brownien.

Pour tout réel $c \neq 0$, soit α_c l'automorphisme de H_d défini par $\alpha_c(z,w) = (cz, c^2w)$. On remarque que $\psi \circ \alpha_c = c^2\psi$, ce qui entraîne que, pour tout $c > 0$

$$\alpha_c \circ Q_t \circ \alpha_{c^{-1}} = Q_{c^2t}\ . \tag{3.1.1}$$

Cette propriété du semi-groupe est l'analogue de l'invariance du mouvement brownien par changement d'échelle. Elle va nous permettre d'éliminer la composante de temps dans le mouvement brownien non-commutatif et de définir le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck non-commutatif.

Rappelons que si $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien d-dimensionnel issu de 0, alors les processus $(e^{\frac{s}{2}}B_{e^{-s}})_{s\in\mathbb{R}_+}$ et $(e^{-\frac{s}{2}}B_{e^s})_{s\in\mathbb{R}_+}$ sont des processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ceci motive l'introduction des deux semi-groupes $(\tilde{R}_s^+)_{s\in\mathbb{R}_+}$ et $(\tilde{R}_s^-)_{s\in\mathbb{R}_+}$ définis par les formules $\tilde{R}_s^+ = \alpha_{e^{\frac{s}{2}}} \circ Q_{1-e^{-s}}$ et $\tilde{R}_s^- = \alpha_{e^{-\frac{s}{2}}} \circ Q_{e^s-1}$. Ce sont bien des semi-groupes de contractions complètement positives de $C^*(H_d)$, en effet, d'après la formule (3.1.1) on a

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_s^+ \circ \tilde{R}_{s'}^+ &= \alpha_{e^{\frac{s}{2}}} \circ Q_{1-e^{-s}} \circ \alpha_{e^{\frac{s'}{2}}} \circ Q_{1-e^{-s'}} \\
&= \alpha_{e^{\frac{s+s'}{2}}} \circ Q_{e^{-s'}-e^{-s-s'}} \circ Q_{1-e^{-s'}} \\
&= \alpha_{e^{\frac{s+s'}{2}}} \circ Q_{1-e^{-(s+s')}} \\
&= \tilde{R}_{s+s'}^+
\end{aligned}$$

et un calcul semblable pour $\tilde{R}_s^-$. La proposition suivante montre qu'on peut les utiliser pour définir les semi-groupes d'Ornstein-Uhlenbeck non-commutatifs sur $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^d))$.

3.1.2 Proposition. *Il existe deux semi-groupes $(R_s^+)_{s\in\mathbb{R}_+}$ et $(R_s^-)_{s\in\mathbb{R}_+}$ de contractions complètement positives sur $\mathcal{A}_{\pm 1} = \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^d))$ tels que pour tout $s \in \mathbb{R}_+$*

$$\pi_1 \circ \tilde{R}_s^{\pm} = R_s^{\pm} \circ \pi_1$$

On appellera les deux semi-groupes $R^{\pm}$ les semi-groupes d'Ornstein-Uhlenbeck non-commutatifs.

Démonstration. On suit le même principe que pour la proposition 2.6.1.

L'application $\pi_1 \circ \tilde{R}_s$ est égale à la composition de la représentation $(\pi_1 \circ \alpha_{e^{-\frac{s}{2}}}) \otimes \pi_{1-e^{-s}}$ de $C^*(H_d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathbb{R}^d)$ avec l'application $Id \otimes \eta_0\ :\ \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d) \otimes$

$L^2(\mathbb{R}^d)) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$ où η_0 est l'état pur associé à $(h_0^1)^{\otimes d}$. La restriction de la représentation $(\pi_1 \circ \alpha_{e^{-\frac{s}{2}}}) \otimes \pi_{1-e^{-s}}$ au centre de H_d est un multiple du caractère $w \mapsto e^{iw}$, et par conséquent, le théorème de Stone-von Neumann entraîne que cette représentation est un multiple de la représentation π_1. Il existe donc un unique morphisme $\gamma_s : \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d)) \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathbb{R}^d))$ tel que $(\pi_1 \circ \alpha_{e^{-\frac{s}{2}}}) \otimes \pi_{1-e^{-s}} = \gamma_s \circ \pi_1$. Si on pose $R_s^+ = (Id \otimes \eta_0) \circ \gamma_s$ on obtient le semi-groupe cherché. Un raisonnement semblable fonctionne pour R_s^-.

On peut obtenir des dilatations explicites des semi-groupes d'Ornstein-Uhlenbeck non-commutatifs suivant la méthode de Evans-Hudson en résolvant une équation différentielle stochastique non-commutative. Ces dilatations ont des interprétations physiques, et représentent, dans le cas de R^-, le phénomène dit de "superradiance", dans le cas de R^+ l'émission spontanée de lumière (voir [vW1] et [vW2] pour plus de détails).

3.2 Invariance par retournement du temps

D'après 1.3.1, les semi-groupes $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(\hat{Q}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont en dualité par rapport au poids de Haar. En fait on a, plus précisément,

3.2.1. Proposition. *Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{A}_\tau^+, y \in \mathcal{A}_\tau^+$,*

$$m_\tau(R_\tau^{\tau+t}(x)y) = m_{\tau+t}(x\hat{R}_{\tau+t}^\tau(y)) \,. \tag{3.2.1}$$

Démonstration. Soient f, f' continues, à support compact sur H_d, on a

$$\begin{aligned} m_\tau(R_\tau^{\tau+t}(\pi_{\tau+t}(f))\pi_\tau(f')) &= m_\tau(\pi_\tau(e^{-t\psi}f)\pi_\tau(f')) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{C}^d} e^{-t\psi(z,w)}f(z,w)f'(-z,-w-w')e^{i\tau w'}dwdw'dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{C}^d} f(z,w)e^{-t\bar{\psi}(-z,-w-w')}f'(-z,-w-w')e^{i(\tau+t)w'}dwdw'dz \\ &= m_{\tau+t}\big(\pi_{\tau+t}(f)\hat{R}_{\tau+t}^\tau(\pi_\tau(f'))\big) \,. \end{aligned}$$

On en déduit la formule pour $x = \pi_\tau(f)$ et $y = \pi_{\tau+t}(f')$, et le cas général s'obtient par densité.

La proposition précédente reste vraie si on suppose x à trace et y borné, ou l'inverse.

Soit J l'automorphisme de $C^*(H_d)$ donné par $J(z,w) = (\bar{z}, -w)$. On voit facilement, en utilisant le théorème de Stone-von Neumann, qu'il existe des isomorphismes $J_\tau : \mathcal{A}_\tau \to \mathcal{A}_{-\tau}$ tels que $J_\tau \circ \pi_\tau = \pi_{-\tau} \circ J_{-\tau}$. Les deux semi-groupes $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(\hat{Q}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont conjugués par J :

3.2.2. Proposition. *Pour tout $t > 0$ on a*

$$\hat{Q}_t = JQ_tJ \,.$$

De plus pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ on a

$$R_\tau^{\tau+t} \circ J_{-\tau-t} = J_\tau \circ \hat{R}_{-\tau}^{-\tau-t} .$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\psi \circ J = \bar{\psi}$, ce qui donne la première partie. La seconde partie s'en déduit à l'aide de 2.6.1.

3.3 Invariance par rotation : le semi-groupe de Bessel non-commutatif.

Nous abordons là un des aspects les plus intéressants du mouvement brownien non-commutatif, qui est l'existence d'un semi-groupe sur un espace commutatif, dont la dilatation naturelle, donnée par 1.6 est non-commutative.

Remarquons que la fonction ψ est invariante par l'action du groupe unitaire $U(d)$ sur H_d, ce qui entraine que l'algèbre $C_R^*(H_d)$ est invariante par $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$. On en déduit donc par restriction un semi-groupe de noyaux markoviens sur le spectre X_d de cette algèbre.

3.3.1. Définition *On appelle semi-groupe de Bessel non-commutatif le semi-groupe de noyaux sur X_d donné par la restriction de $(Q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ à $C_R^*(H_d)$.*

Le nom semi-groupe de Bessel non-commutatif est justifié par l'analogie avec la construction du semi-groupe de Bessel classique rappelée en 1.4. Nous allons calculer le semi-groupe de Bessel non-commutatif.

3.3.1. Proposition. *Le semi-groupe de Bessel non-commutatif est donné par les noyaux $q_t(x,dy)$ sur $X_d \times X_d$ définis ci-dessous. (On désigne par δ_x la masse de Dirac en un point $x \in X_d$).*
i) Si $x = (\sigma, -k\sigma)$ avec $\sigma < 0$ et $\tau = \sigma + t < 0$, alors

$$q_t(x,dy) = \sum_{l=k}^{\infty} \frac{(l-1)!}{(k-1)!(l-k)!}(1-\frac{\tau}{\sigma})^{l-k}(\frac{\tau}{\sigma})^k \delta_{(\tau,-l\tau)}(dy) .$$

ii) Si $x = (\sigma, -k\sigma)$ avec $\sigma < 0$ et $\sigma = -t$, en notant $y = (0,r)$,

$$q_t(x,dy) = \frac{(\frac{r}{t})^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\frac{r}{t}} \delta_0 \otimes dr .$$

iii) Si $x = (\sigma, -k\sigma)$ avec $\sigma < 0$ et $\tau = \sigma + t > 0$, alors

$$q_t(x,dy) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+k-1)!}{(k-1)!l!}(1-\frac{\tau}{t})^{l+k}(\frac{\tau}{t})^k \delta_{(\tau,l\tau)}(dy) .$$

iv) Si $x = (0,r)$, alors

$$q_t(x,dy) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\frac{r}{t})^l}{l!} e^{-\frac{r}{t}} \delta_{t,lt}(dy) .$$

v) Si $x = (\sigma, k\sigma)$ *avec* $\sigma > 0$, $\tau = \sigma + t$

$$q_t(x, dy) = \sum_{l=0}^{l=k} \frac{k!}{l!(k-l)!}(1 - \frac{\sigma}{\tau})^{k-l}(\frac{\sigma}{\tau})^l \delta_{\tau, l\tau}(dy) .$$

Démonstration. Soit $x \in X_d$ et χ_x le caractère de l'algèbre $C^*_R(H_d)$ correspondant, qui est donné par la formule $\chi_x(f) = \int_{H_d} \omega_x(g) f(g) dg$ sur $L^1(H_d)$; alors $\chi_x \circ Q_t$ définit un état sur $C^*_R(H_d)$, qui est donné par la mesure de probabilité $q_t(x, dy)$ sur X_d. Or, pour $f \in L^1(H_d)$ on a $\chi_x \circ Q_t(f) = \int_{H_d} f(g) e^{-t\psi(g)} \omega_x(g) dg$. Il suffit donc de trouver l'unique décomposition de la fonction $\omega_x e^{-t\psi}$ sous la forme $\omega_x e^{-t\psi} = \int_{X_d} \omega_y q_t(x, dy)$ pour obtenir la mesure $q_t(x, dy)$. On peut faire ces calculs en utilisant les formules explicites (2.4.1, 2.4.2, 2.4.3) et les propriétés des polynômes de Laguerre et des fonctions de Bessel. Nous allons suivre une autre voie qui est plus proche de l'esprit des probabilités quantiques.

Soit $x \in X_d$, d'abscisse σ, et soit η un état sur $\mathcal{A}_\sigma$ tel que la restriction de $\eta \circ \pi_\sigma$ à $C^*_R(H_d)$ soit la mesure de Dirac en x. Il résulte alors des considérations sur les opérateurs de nombre des représentations de H_d que la mesure $q_t(x, dy)$ est portée par $(\sigma + t) \times \mathbb{R}_+$, et n'est autre que la loi de l'opérateur $\sum_{j=1}^d d(\pi_\sigma \otimes \pi_t)(\alpha_j^*) d(\pi_\sigma \otimes \pi_t)(\alpha_j)$ dans l'état $\eta \otimes h_0^t$ sur $\mathcal{A}_\sigma \otimes \mathcal{A}_t$. Nous allons utiliser ce fait pour calculer la loi $q_t(x, dy)$ dans le cas $\sigma \geq 0$.

Commençons par le cas $d = 1$.

On considère les isomorphismes $\Gamma(\mathbb{C}) \sim L^2(\mathbb{R})$ (définis au paragraphe 2.2) avec $\frac{1^{\circ n}}{\sqrt{n!}} \sim h_n^\sigma$, dans lequel les opérateurs $d\pi_\sigma(\alpha)$ et $d\pi_\sigma(\alpha_j^*)$ correspondent aux opérateurs $a^-_{\sqrt{\sigma}}$ et $a^+_{\sqrt{\sigma}}$.

Si $\sigma = 0$, soit $x = (0, r)$, on prend $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $|\xi|^2 = r$. La loi que l'on cherche est celle de l'opérateur $(a^+_{\sqrt{t}} + \xi)(a^-_{\sqrt{t}} + \bar{\xi})$ dans l'état vide, qui est une loi de Poisson de paramètre $\frac{r}{t}$ sur $\{kt | k \in \mathbb{N}\}$ (voir par exemple [M1]). On obtient ainsi la formule iv).

Pour $\sigma > 0$, et $x = (\sigma, k\sigma)$, l'espace de la représentation $\pi_\sigma \otimes \pi_t$ est isomorphe à $\Gamma(\mathbb{C}) \otimes \Gamma(\mathbb{C}) \sim \Gamma(\mathbb{C}^2)$ et l'opérateur $d(\pi_\sigma \otimes \pi_t)(\alpha)$ correspond à l'opérateur d'annihilation $a^-_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})}$ par le vecteur $(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})$ de $\mathbb{C}^2$ et $d(\pi_\sigma \otimes \pi_t)(\alpha)^*$ à l'opérateur de création $a^+_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})}$. Considérons l'état pur associé au vecteur $\frac{1^{\circ k}}{\sqrt{k!}} \otimes 1^{\circ 0}$, la mesure $q_t(x, dy)$ est donc la loi de l'opérateur $a^+_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})} a^-_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})}$ dans cet état. L'opérateur $e^{iva^+_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})} a^-_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})}}$ n'est autre que l'opérateur de seconde quantification, dans $\Gamma(\mathbb{C}^2)$, de l'opérateur $e^{iv(\sigma+t)\Pi_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})}}$ où $\Pi_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})}$ est l'opérateur de projection orthogonale sur le vecteur $(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})$ dans $\mathbb{C}^2$. Pour tous $u, v \in \mathbb{C}$ on a

$$\begin{aligned} < e^{iv(\sigma+t)\Pi_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})}} \mathcal{E}(z, 0), \mathcal{E}(z', 0) > &= < \mathcal{E}(e^{iv(\sigma+t)\Pi_{(\sqrt{\sigma}, \sqrt{t})}}(z, 0)), \mathcal{E}(z', 0) > \\ &= e^{z\bar{z}' \frac{e^{iv(\sigma+t)}t + \sigma}{\sigma + t}} \end{aligned}$$

En examinant le coefficient de $z^k \bar{z}'^k$ dans cette expression on trouve la transformée de Fourier de la loi $q_t(x, dy)$ qui vaut

$$\int_{X_1} e^{ivy} q_t(x, dy) = \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(l-k)!} e^{iv(\sigma+t)l} \left(\frac{\sigma}{t+\sigma}\right)^l \left(\frac{t}{t+\sigma}\right)^{k-l} .$$

Ceci démontre la formule v).

Les propositions 3.2.1 et 3.2.2 permettent, par dualité, de déduire les formules i) et ii) de v) et iv). La formule iii) est alors obtenue en utilisant la relation de Chapman-Kolmogorov $q_t(x, dy) = \int_X q_{-\sigma}(x, dz) q_{t+\sigma}(z, dy)$ et les formules ii) et iv).

Pour traiter le cas d quelconque, on utilise la restriction de Q_t à l'algèbre $C_D^*(H_d)$ (définie en 2.4). Il est facile de voir que ce semi-groupe est celui du processus sur $X^{(d)}$, donné par $(T_t, Y_t^1, \ldots, Y_t^d)$ où les processus (T_t, Y_t^j) à valeurs dans X_1 sont des processus de Markov de semi-groupe $(q_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ sur X_1, indépendants. Le semi-groupe $(q_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ sur X_d est le semi-groupe du processus de Markov $(T_t, Y_t^1 + \ldots + Y_t^d)$, que l'on peut donc déduire du semi-groupe sur X_1.

Comme $(Q_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ laisse invariante la sous-algèbre $C_R^*(H_d)$, on voit que les semi-groupes $R_s^\pm$, laissent invariante la sous-algèbre de $\mathcal{A}_{\pm 1}$ engendrée par l'opérateur de nombre $\Lambda_{\pm 1}$; on en déduit des semi-groupes de noyaux markoviens sur les spectres de $\Lambda_{\pm 1}$ que l'on peut calculer grâce à la proposition précédente.

3.3.3. Corollaire. *Les semi-groupes de noyaux induits par $(R_s^\pm)_{s \in \mathbf{R}_+}$ sur les spectres de $\Lambda_{\pm 1}$ sont donnés par les probabilités de transition suivantes sur $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N} \setminus \{0, 1, \ldots, d-1\}$ respectivement*

$$\begin{aligned} r_s^+(k, l) &= \frac{k!}{l!(k-l)!} e^{-ls} (1 - e^{-s})^{k-l} \text{ pour } 0 \le l \le k \\ &= 0 \text{ sinon;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_s^-(k, l) &= \frac{(l-1)!}{(l-k)!(k-1)!} e^{-ks} (1 - e^{-s})^{l-k} \text{ pour } l \ge k \ge d \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Le semi-groupe $(r_s^-)_{s \in \mathbf{R}_+}$ est le semi-groupe du processus de Yule, ou processus de fission binaire (cf [At]). C'est un processus de Galton-Watson dont la loi de reproduction est une masse de Dirac en 2, autrement dit, ce processus compte le nombre total de particules à l'instant t dans un système de particules où chaque particule se divise en deux au bout d'un temps exponentiel, indépendamment des autres. C'est ce semi-groupe qui intervient dans [vW2] dans la description du phénomène de superradiance.

Le semi-groupe $(r_s^+)_{s \in \mathbf{R}_+}$ représente le processus inverse, c'est un processus de mort, qui compte le nombre de particules restant en vie à l'instant t dans un système où toutes les particules sont indépendantes et ont un temps de vie exponentiel.

Les trajectoires d'un processus de Markov obéissant au semi-groupe $(q_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ sont faciles à décrire à partir de celles des processus de semi-groupes $r^{\pm}$. Supposons que ce processus parte du point $(\sigma, -\sigma)$ avec $\sigma < 0$, son abscisse suit un mouvement de translation uniforme à vitesse 1. Il va commencer par se déplacer le long de la droite de pente -1 suivant $t \mapsto (\sigma + t, -\sigma - t)$. Le processus saute verticalement sur la droite de pente -2 avec un taux $\frac{dt}{-(\sigma+t)}$, puis lorsqu'il est arrivé sur cette droite, il continue sa translation uniforme vers la droite, avec cette fois un taux de saut de $\frac{2dt}{-(\sigma+t)}$ vers la droite de pente -3, et ainsi de suite; en général, si le processus est sur la droite de pente $-k$, en un point d'abscisse $\tau < 0$, sa probabilité de sauter sur la droite de pente $-(k+1)$ pendant l'intervalle de temps dt est $\frac{kdt}{-\tau}$. Lorsque l'abscisse tend vers zéro, le nombre de sauts devient infini, mais le processus converge presque sûrement vers un point de la droite d'abscisse 0. Un moyen simple de voir cela consiste à remarquer que l'ordonnée sur X_d est une fonction harmonique positive pour le semi-groupe q_t, par conséquent la composante verticale du processus est une martingale positive et admet une limite lorsque l'abscisse tend vers 0. Après le passage en zéro, le processus commence à mourir, sa trajectoire, partant d'un point $(\varepsilon, k\varepsilon)$ commence par suivre la droite de pente k, avec un taux de saut sur la droite de pente $k-1$ égal à $\frac{kdt}{\varepsilon}$. Au bout d'un temps fini, le processus arrive sur la droite d'ordonnée zéro, où il continue sa translation vers la droite pour toujours.

La figure 2 donne un exemple typique de trajectoire de ce processus.

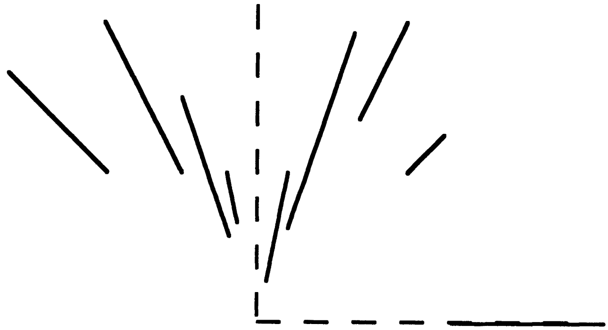

fig. 2
Une trajectoire typique sous q_t.

(Au voisinage de $x = 0$ le nombre infini de sauts rend les trajectoires difficiles à représenter.)

Un aspect tout à fait remarquable de ces processus est que les formules de transition ne dépendent pas de la dimension d du groupe d'Heisenberg, seul l'espace X_d dépend de cette dimension. En fait, cela est une conséquence de la propriété d'additivité des processus de Bessel non-commutatifs, c'est-à-dire le fait que l'opérateur de nombre dans une représentation de H_d peut être considéré comme une somme de d opérateurs de nombre, les opérateurs $d\pi(\alpha_j^*)d\pi(\alpha_j)$. Cette propriété peut se vérifier par le calcul, mais elle est probabilistiquement évidente lorsqu'on a l'interprétation en terme des processus de Galton-Watson, c'est simplement la propriété de branchement de ces processus.

Donnons-nous une représentation π de H_d sur un espace de Hilbert H_π, avec un état ν, et considérons les opérateurs $\lambda_t = \sum_{j=1}^d (d\pi(\alpha^*)\otimes Id + Id\otimes A_t^{j*})(d\pi(\alpha)\otimes Id + Id\otimes A_t^j)$ sur l'espace $H_\pi \otimes \Gamma(L^2(\mathbb{R}_+)$. Les opérateurs λ_t fournissent un dilatation du semi-groupe $(q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, au sens où, pour toute suite de fonctions bornées $h_0, h_1, \ldots, h_n$ sur $\mathbb{R}_+$, et toute suite croissante de réels $t_1, \ldots, t_n$ on a

$$\nu \otimes \omega(h_0(\lambda_0)h_1(\lambda_{t_1})\ldots h_n(\lambda_{t_n})) = \nu(h_0 q_{t_1}(h_1 \ldots q_{t_n - t_{n-1}}(h_n)\ldots)$$

Dans le second membre de cette formule, une fonction h_j sur $\mathbb{R}_+$ est considérée comme une fonction sur X_d ne dépendant que de l'ordonnée.

Pour un observateur chronologique, rien ne distingue le processus λ_t de la seconde coordonnée d'un processus de Markov de semi-groupe $(q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sur X_d. Mais les opérateurs λ_t ne commutent pas entre eux et en fait, il est facile de voir que la dilatation que l'on obtient du semi-groupe q_t n'est pas équivalente à la dilatation commutative canonique (sauf dans le cas où l'état initial est donné par la fonction constante égale à 1 sur H_d). Un phénomène analogue avec le semi-groupe r^- se produit et est décrit dans [vW2].

Pour terminer avec les processus de Bessel non-commutatifs, remarquons que l'on peut déduire du semi-groupe $(q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ des fonctions positives, harmoniques en espace-temps pour le processus de Yule. En effet, en posant $h(s,k) = q_{e^{-s}}\big((e^{-s}, e^{-s}k), (0,r)\big)$ pour $r \in \mathbb{R}_+$, on obtient une fonction harmonique en espace temps pour le semi-groupe r^-. En fait on obtient ainsi toutes les fonctions harmoniques positives minimales en espace temps de ce processus (voir L. Overbeck [O]). Ceci montre que le semi-groupe $(q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, restreint à la partie de X_d d'abscisse négative, s'obtient à partir du processus de Yule, de semi-groupe r^-, en prolongeant ce dernier à son espace de Martin en espace-temps et en effectuant un changement de temps logarithmique. De même, le processus sur la partie d'abscisse positive s'obtient en rajoutant une frontière d'entrée en espace-temps en 0 au processus de mort pure de semi-groupe r^+.

3.4. Fonctions paraboliques non-commutatives bornées.

La dernière remarque du paragraphe 3.3 suggère que la singularité en zéro de la C^*-algèbre de H_d s'interprète naturellement comme une frontière d'entrée et de sortie en espace-temps pour les semi-groupes d'Ornstein-Uhlenbeck non-commutatifs R^+ et R^- sur $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^d))$. Nous allons montrer ci-dessous un résultat dans cette direction en étudiant les fonctions paraboliques non-commutatives bornées dans le demi-espace $\tau < 0$, et donner un théorème de représentation intégrale de ces fonctions.

3.4.1 Définition. *Une fonction parabolique non-commutative bornée (sur $\tau < 0$) est une famille $(H_\tau)_{\tau<0}$ d'éléments $H_\tau \in \mathcal{A}''_\tau$ tels que $\sup_{\tau<0} \|H_\tau\| < \infty$ et pour tous $\sigma < \tau < 0$ on ait*

$$R^\tau_\sigma(H_\tau) = H_\sigma\ .$$

Pour les fonctions paraboliques usuelles, bornées dans un demi-espace, on a un résultat de représentation intégrale au moyen du noyau de la chaleur, qui est un analogue parabolique de la formule de Poisson pour les fonctions harmoniques bornées dans le disque unité (voir par exemple [W], Ch. VII). En fait on sait également que le noyau de la chaleur permet de représenter toutes les fonctions paraboliques positives dans le demi-espace ([W] Ch. VIII), ce qui permet de déterminer la frontière de Martin parabolique de ce demi-espace (cf [Do] 2.XVI et 2.XIX). Ici nous allons nous contenter de donner un résultat simple de représentation intégrale des fonctions paraboliques bornées, le résultat analogue pour les fonctions paraboliques positives est certainement vrai, mais l'énoncé et la démonstration d'un tel résultat, qui impliqueraient d'utiliser des opérateurs non-bornés, nous emmèneraient trop loin pour cet article.

3.4.2. Proposition. *Pour toute fonction parabolique non-commutative bornée, il existe une fonction H_0, mesurable, bornée sur $\mathbb{R}^{2d}$, telle que pour tout $\tau < 0$*

$$H_\tau = R^0_\tau(H_0)\,.$$

Démonstration. Soient $\tau < 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\varepsilon + \tau < 0$. D'après (2.6.1) et (2.6.2), on a

$$\begin{aligned}\hat{R}^\tau_{\varepsilon+\tau}(H_\tau) &= \hat{R}^\tau_{\tau+\varepsilon}(R^{-\varepsilon}_\tau(H_\varepsilon))\\ &= R^0_{\tau+\varepsilon}(\hat{R}^{-\varepsilon}_0(H_{-\varepsilon}))\end{aligned}$$

La condition $\sup_{\tau<0}\|H_\tau\| < \infty$ entraîne que $(\kappa_\varepsilon = \hat{R}^{-\varepsilon}_0(H_{-\varepsilon}))_{\varepsilon\in\mathbf{R}_+}$ est une famille bornée de fonctions universellement mesurables sur $\mathbb{R}^d$, donc il existe une suite $\varepsilon_n \to 0$ telle que $H_{-\varepsilon_n}$ converge faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soient $a, b \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, lorsque $\varepsilon \to 0$ on a

$$< \hat{R}^\tau_{\varepsilon+\tau}(H_\tau)a, b > \to < H_\tau a, b > ;$$

or d'après ce qu'on a vu en 2.6

$$\begin{aligned}< \hat{R}^\tau_{\varepsilon_n+\tau}(H_\tau)a, b > &= \int_{\mathbf{C}^d} \kappa_{\varepsilon_n}(\xi) < \eta_\tau(\xi)a, b > d\xi\\ &\to \int_{\mathbf{C}^d} \kappa_0(\xi) < \eta_\tau(\xi)a, b > d\xi\end{aligned}$$

quand $n \to \infty$, car $\eta_\tau(\xi)$ est faiblement intégrable en ξ (cf 2.6) par conséquent, si on pose $H_0 = \kappa_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $H_\tau = R^0_\tau(H_0)$.

Dans la proposition 3.4.2, les opérateurs $\eta_\tau(\xi)$ jouent le rôle de noyaux de la chaleur non-commutatifs. La théorie du potentiel pour les noyaux de la chaleur dans le cas classique est bien connue, (voir par exemple le livre [Do] Ch. XV à XIX). La théorie non-commutative du potentiel reste à étudier, ce qu'on espère pouvoir faire dans le futur.

Références.

[Ar] H. Araki, *Factorisable representations of current algebras, Pub. R.I.M.S., Kyoto University, Ser. A, Vol. 5, n° 3, 1970, 361-422.*

[At] K.B. Athreya et P.E. Ney, *Branching processes, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg , 1972.*

[Bh] R.V. Bhat, K.R. Parthasarathy, *Markov Dilations of Nonconservative Dynamical Semigroups and a Quantum Boundary theory, à paraître, Ann. I.H.P.*

[B1] P. Biane, *Calcul stochastique non-commutatif, Lectures on Probability Theory, Lecture Notes in Mathematics 1608, Springer, 1995, 1-96.*

[B2] P. Biane, *Quantum random walks on the dual of SU(n), Prob. Th. and Rel. fields, 89, 1991, 117-129.*

[Bo] P. Bougerol, *Théorème central limite local sur certains groupes de Lie, Ann. Sc. Éc. Norm. Sup., 4ᵉ série, 14, 1981, p. 403 à 432.*

[C-H] A.M. Cockroft et R.L. Hudson, *Quantum mechanical Wiener processes, J. Multiv. Anal. 7, 1978, 107-124.*

[D-M] C. Dellacherie et P.A. Meyer, *Probabilités et Potentiel, Chapitres IX à XI, Hermann, Paris , 1983.*

[Di] J. Dixmier, *Les C^*-algèbres et leurs représentations, Gauthiers Villars, Paris, 1964.*

[Do] J.L. Doob, *Classical Potential theory and its Probabilistic Counterpart, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg , 1984.*

[F] J. Faraut, *Analyse harmonique et fonctions spéciales, in J. Faraut, K. Harzalah, Deux cours d'analyse harmonique, Progress in Mathematics, vol. 69, Birkhäuser, Basel 1987.*

[H-P] R.L. Hudson et K.R. Parthasarathy, *Quantum Ito's fromula and stochastic evolutions, Comm. Math. Phys., 93, 1984, 301-323.*

[I-M] K. Ito et H.P. Mac Kean, *Diffusion processes and their sample paths, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1974*

[L] R.Y. Lee, *Field algebras of operator fields trivial except at one point, Indiana Univ. Math. J. 26 (1977) 351-372.*

[M1] P.A. Meyer, *Eléments de Probabilités Quantiques, Séminaire de Probabilités XX, Lecture Notes in Mathematics 1204, Springer, 1986, 186-312.*

[M2] P.A. Meyer, *Quantum Probability for probabilists, Lecture Notes in Mathematics 1538, Springer, 1993*

[O] L. Overbeck, *Martin boundaries of some branching processes, Ann. I.H.P. 30, 2, (1994), 181-196.*

[P] K.R. Parthasarathy, *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus, Monographs in Mathematics, Vol. 85, Birkhäuser, Basel, 1992.*

[P2] K.R. Parthasarathy, *A generalized Biane's process, Séminaire de Probabilités XXIV, Lecture Notes in Mathematics 1426, Springer, 1990, 345-348.*

[P-S] K.R. Parthasarathy et K. Schmidt, *Positive definite kernels, Continuous Tensor Products, and Central Limit Theorems of Probability Theory, Lecture Notes in Mathematics 272, Springer, 1972.*

[Sa] J.L. Sauvageot, *Markov quantum semi-groups admit covariant markov C^*-dilations, Comm. Math. Phys. 106, 1986, 91-103.*

[Sc] M. Schürmann, *White noise on bialgebras, Lecture Notes in Mathematics 1544, Springer, 1993.*

[S-Z] S. Stratila et L. Zsido, *Lectures on von Neumann algebras, Abacus press, Turnbridge Wells, 1979.*

[Tak] M. Takesaki, *Conditionnal expectations in von Neumann algebras, J. Funct. Anal. 9, 1972, 306-321.*

[Tay] M.E. Taylor, *Non commutative harmonic analysis, Mathematical surveys and monographs, 22, A.M.S. Providence, 1986.*

[V] D. Voiculescu, *Remarks on the singular extension in the C^*-algebra of the Heisenberg group, J. Operator Theory 5 (1981) 147-170.*

[vW1] W. von Waldenfels, *Spontaneous light emission described by a quantum stochastic differential equation, Quantum Probability and applications II, Lecture Notes in Mathematics 1136, Springer Berlin, Heidelberg, New York, 1985, 361-374.*

[vW2] W. von Waldenfels, *The inverse oscillator in a heat bath as a quantum stochastic process, preprint, Heidelberg, 1994.*

[W] D. Widder, *The heat equation, Academic Press, New York, 1975.*

Ce travail a été en partie soutenu par le contrat CAPITAL HUMAIN ET MOBILITÉ numéro ERCHRXCT 930094

C.N.R.S. Laboratoire de probabilités
Université PARIS 6
Tour 56, 3ᵉ étage 4, place Jussieu
75252 PARIS CEDEX 05