237

ASTÉRISQUE

1996

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 1994/95
EXPOSÉS 790-804

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque

MAKHLOUF DERRIDJ

La sous-ellipticité pour le problème $\bar{\partial}$-Neumann dans un domaine pseudoconvexe de C^n

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki, exp. n^o 790, p. 7-27

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__7_0>

Séminaire BOURBAKI
47ème année, 1994-95, n° 790

Novembre 1994

LA SOUS-ELLIPTICITÉ POUR LE PROBLÈME $\overline{\partial}$–NEUMANN DANS UN DOMAINE PSEUDOCONVEXE DE $\mathbf{C}^n$ [d'après D. Catlin]

par **Makhlouf DERRIDJ**

1. INTRODUCTION

Notre but, ici, n'est pas de parler des opérateurs sous-elliptiques en général (voir pour cela des ouvrages d'équations aux dérivées partielles tels que [21], [33], [45]), mais de nous focaliser sur la propriété de sous-ellipticité concernant le problème $\overline{\partial}$-Neumann. Avant tout, nous allons introduire ce problème et dire succinctement pourquoi des spécialistes en Analyse complexe s'y intéressent.

L'opérateur à coefficients constants, $\overline{\partial}$ dans $\mathbf{C}^n$, est donné par :

$$\overline{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_j, \text{ pour } f \text{ fonction } C^1, \text{ où } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\,\frac{\partial f}{\partial y_j}\Big). \tag{1.1}$$

De façon plus générale, en considérant des (p,q)-formes :

$$\begin{cases} u = \displaystyle\sum_{\substack{|I|=p\\ |J|=q}} u_{IJ}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J, \ u_{IJ} \text{ étant des fonctions } C^1 \\ I = (i_1, \cdots, i_p),\ J = (j_1, \cdots, j_q) \text{ ordonnés ;} \\ \qquad\qquad dz_I = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p},\ d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}; \end{cases} \tag{1.2}$$

alors $\overline{\partial}_{p,q} u$ est défini par :

$$\overline{\partial}_{p,q} u = \sum_{\substack{|I|=p\\ |J|=q}} \overline{\partial} u_{IJ} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J. \tag{1.3}$$

On remarquera que p joue le rôle d'un simple paramètre et que donc il suffira de considérer $p = 0$. De toute façon, il suffira de noter $\overline{\partial}_q$ (quel que soit p) l'opérateur précédent.

D'autre part, nous avons considéré des formes de classe C^1. Dorénavant on considérera $\overline{\partial}_q$ opérant sur des formes différentielles à coefficients distributions, c'est-à-dire que l'opérateur $\overline{\partial}$ opère au sens des distributions. Donc nous venons de considérer l'opérateur (en prenant $p = 0$) :

$$\overline{\partial}_q : (0,q)\text{-formes} \longrightarrow (0,q+1)\text{-formes},$$

sans préciser pour le moment l'ouvert sur lequel il agit.

Un premier problème qui peut se poser est l'analogue du problème de Poincaré pour d (ici le complexe de Dolbeault remplace le complexe de de Rham). Pour cela, précisons :

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \text{Soit } \Omega \text{ un ouvert de } \mathbf{C}^n. \text{ Résoudre l'équation } : \\ \overline{\partial}_q u = f \ , \ f\,(0,q+1)\text{-forme dans } \Omega, \ 0 \leq q+1 \leq n. \end{cases}$$

Évidemment, comme $\overline{\partial}_{q+1}\,\overline{\partial}_q = 0$, il est nécessaire que $\overline{\partial}_{q+1} f = 0$. D'autre part, on peut préciser l'espace où se trouve f (du point de vue régularité) et savoir où on peut trouver u.

Comme pour le problème de Poincaré pour d, la condition $\overline{\partial} f = 0$ n'est pas suffisante pour résoudre (1.4) globalement dans Ω. Une hypothèse de pseudoconvexité sera suffisante pour résoudre dans le cadre $C^\infty(\Omega)$ (L. Hörmander [30] ; voir plus loin la définition de cette notion).

Une méthode qui s'est révélée puissante pour attaquer le problème (1.4) est la méthode dite L^2 (signalons évidemment L. Hörmander [30][31], mais aussi C.B. Morrey [44], A. Andreotti-E. Vesentini [1] et bien d'autres). Il s'agit de résoudre le problème :

$$(1.5) \qquad \begin{cases} \overline{\partial}_q\, u = f \ \text{ dans } \ \Omega \ \text{ avec } f \in L^2_{(0,q+1)}(\Omega) \ \text{ et } \ \overline{\partial}_{q+1}\, f = 0 \\ u \in L^2_{(0,q)}(\Omega)\,,\ u \perp \operatorname{Ker} \overline{\partial}_q \ \text{dans } L^2_{(0,q)}(\Omega). \end{cases}$$

En fait, L. Hörmander a considéré des espaces L^2 avec poids.

Signalons que cette méthode a été utilisée (et s'est révélée féconde) dans nombre de problèmes touchant à l'Analyse et à la Géométrie (Travaux de A. Andreotti - E. Vesentini [1], J.-P. Demailly [16], L. Hörmander [30], [31], J.J. Kohn [35], H. Skoda [49], etc.).

À partir des solutions précédentes, des résultats de régularité pour la solution u donnée dans (1.5) peuvent être déduits de la régularité de f (dans des espaces de Sobolev locaux par exemple).

Pour aller plus loin dans les exigences, on peut se poser le problème de la régularité de u, non seulement dans l'ouvert Ω, mais dans $\overline{\Omega}$ (lorsque Ω est suffisamment régulier), à partir de la régularité de f dans $\overline{\Omega}$.

Pour cela, il s'est révélé utile de considérer un problème associé à $\overline{\partial}_q$, à savoir un problème aux limites pour un "Laplacien complexe" associé à $\overline{\partial}_q$: c'est le problème de Neumann pour $\overline{\partial}$ (à l'ordre q), que nous développons maintenant.

2. LE PROBLÈME DE NEUMANN POUR $\overline{\partial}$. PSEUDOCONVEXITÉ. SOUS-ELLIPTICITÉ

2.1. Le problème $\overline{\partial}$-Neumann

Nous commençons par considérer le complexe de Dolbeault autour du bidegré $(0,q)$, dans Ω, pour $1 \leq q \leq n-1$:

$$C^{\infty}_{(0,q-1)}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}_{q-1}} C^{\infty}_{(0,q)}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}_q} C^{\infty}_{(0,q+1)}(\Omega). \tag{2.1}$$

Comme il est commode de travailler avec des espaces de Hilbert, on peut regarder plutôt le complexe :

$$L^2_{(0,q-1)}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}_{q-1}} L^2_{(0,q)}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}_q} L^2_{(0,q+1)}(\Omega), \tag{2.2}$$

mais où $\overline{\partial}_{q-1}$ et $\overline{\partial}_q$ sont considérés comme opérateurs non bornés dans des espaces de Hilbert, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \overline{\partial}_q : \{u \in L^2_{(0,q)}(\Omega)\,,\, \overline{\partial}_q u \in L^2_{(0,q+1)}(\Omega)\} \longrightarrow L^2_{(0,q+1)}(\Omega) \\ \text{l'espace en accolade étant dit domaine de } \overline{\partial}_q\,; \end{cases} \tag{2.3}$$

ces opérateurs non bornés sont fermés et à domaine dense et se prêtent donc à la théorie abstraite de tels opérateurs.

En particulier, on peut passer aux adjoints $\overline{\partial}^*_{q-1}$, $\overline{\partial}^*_q$. Il y a un lien entre $\overline{\partial}^*_q$ et l'adjoint formel (c'est-à-dire au sens des distributions) de $\overline{\partial}_q$, noté θ_q : $\overline{\partial}^*_q$ est la restriction de θ_q au domaine de l'opérateur non borné $\overline{\partial}^*_q$, noté $\mathcal{D}(\overline{\partial}^*_q)$.

J.J. Kohn a considéré le Laplacien complexe suivant (tel que suggéré par Spencer) :

$$(2.4)\qquad \begin{cases} \Box_q = \overline{\partial}_{q-1}\,\overline{\partial}^*_{q-1} + \overline{\partial}^*_q\,\overline{\partial}_q : L^2_{(0,q)}(\Omega) \longrightarrow: L^2_{(0,q)}(\Omega). \\ \mathcal{D}(\Box_q) = \{u \in \mathcal{D}(\overline{\partial}_q) \cap \mathcal{D}(\overline{\partial}^*_{q-1}), \overline{\partial}_q u \in \mathcal{D}(\overline{\partial}^*_q), \overline{\partial}^*_{q-1} u \in \mathcal{D}(\overline{\partial}_{q-1})\}. \end{cases}$$

La proposition suivante est élémentaire.

PROPOSITION 2.5.— *Soient* $f \in L^2_{(0,q+1)}(\Omega)$, $\overline{\partial}_{q+1} f = 0$ *et* $u \in L^2_{(0,q+1)}(\Omega)$ *telles que :* $\Box_{q+1} u = f$, $u \in \mathcal{D}(\Box_{q+1})$. $q+1 \leq n$. *Alors* $\overline{\partial}^* u$ *est solution du problème* (1.5) ; $v = \overline{\partial}^* u$ *est dite solution canonique, ou solution de Kohn, du problème* (1.5).

Le problème (2.4) est le problème de Neumann pour $\overline{\partial}$. C'est bien un problème aux limites pour $\Box_q$. Dans le cas où u est assez régulière, la condition abstraite $u \in \mathcal{D}(\Box_q)$ s'écrit de la façon concrète suivante :

Soit Ω, régulier de classe C^∞, borné, donné par la fonction définissante r, *i.e.* :

$$(2.5)\qquad \begin{cases} \Omega = \{r < 0, r \in C^\infty(\mathbf{C}^n)\} \text{ avec } dr \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega = \{r = 0\}. \\ \text{Alors on a :} \\ u \in \mathcal{D}(\overline{\partial}^*_{q-1}) \iff u \rfloor \overline{\partial} r = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \\ \overline{\partial}_q u \in \mathcal{D}(\overline{\partial}^*_q) \iff \overline{\partial} u \rfloor \overline{\partial} r = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Et donc $u \in \mathcal{D}(\Box_q) \iff u \rfloor \overline{\partial} r = 0$ et $\overline{\partial} u \rfloor \overline{\partial} r = 0$ sur $\partial\Omega$.

Dorénavant on ne considérera que des domaines Ω, bornés, réguliers, de classe C^∞ (donc donnés par une fonction r telle que ci-dessus).

Comme notre propos, ici, n'est pas de se poser des problèmes d'existence pour (2.4), mais des questions de régularité, donc à s'intéresser à des techniques permettant de l'obtenir, nous passons rapidement à une de ces techniques, à savoir la sous-ellipticité. Faisons tout de même les remarques suivantes :

Remarques : 1) Dans le cas d'un ouvert borné pseudoconvexe, régulier de $\mathbf{C}^n$, l'opérateur $\Box_q$ admet un inverse N_q dit opérateur de Neumann.

2) Il se pose deux problèmes de régularité : la régularité globale dans $\overline{\Omega}$: si $f \in C^\infty_{(0,q)}(\overline{\Omega})$ et $\Box_q u = f$, a-t-on $u \in C^\infty_{(0,q)}(\overline{\Omega})$? Ce qui est en générale une question ouverte, avec cependant des réponses sous certaines hypothèses supplémentaires ; la question locale : $f \in C^\infty_{(0,q)}(\overline{\Omega} \cap V) \stackrel{?}{\Longrightarrow} u \in C^\infty_{(0,q)}(\overline{\Omega} \cap U)$. Dans le cas global, citons

([6] [8]), en remarquant que le problème de l'existence globale de $u \in C^{\infty}_{(0,q-1)}(\overline{\Omega})$ pour l'équation $\overline{\partial} u = f$, $f \in C^{\infty}_{(0,q)}(\overline{\Omega})$ a été obtenu par J.J. Kohn ([36]).

3) La régularité C^∞ pour le problème $\overline{\partial}$-Neumann entraîne la régularité C^∞ du projecteur de Bergman : en effet, si $P : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \cap H(\Omega)$ est le projecteur de Bergman, alors $P = I - \overline{\partial}^* N_1 \overline{\partial}$, où N_1 est l'inverse de $\Box_1$ (voir [34]). Cela entraîne, d'après un théorème de Bell et Ligocka ([3]), une simplification et une généralisation du théorème de Fefferman sur l'extension au bord d'applications biholomorphes, à des domaines bornés, réguliers, faiblement pseudoconvexes.

4) Lorsqu'on prend $u \in \mathcal{D}^{(0,q)}(\Omega)$ (donc à support compact dans Ω), alors $(\Box_q u, u) = \|\overline{\partial}_q u\|^2 + \|\overline{\partial}^*_{q-1} u\|^2$; cette dernière expression montre que la forme quadratique : $Q(u,v) = (\overline{\partial}_q u, \overline{\partial}_q v) + (\overline{\partial}^*_{q-1} u, \overline{\partial}^*_{q-1} v)$ est intimement liée à l'opérateur $\Box_q$. C'est elle qui interviendra dans la définition de la sous-ellipticité.

2.2. La sous-ellipticité pour le problème $\overline{\partial}$-Neumann

La sous-ellipticité est un ingrédient qui permet de montrer la régularité (de la solution considérée) dans des classes de Sobolev près du bord et donc de la régularité C^∞ jusqu'au bord.

Dorénavant, par simplification d'écriture, $\overline{\partial}_q$ (resp. $\overline{\partial}^*_q$) sera noté $\overline{\partial}$ (resp. $\overline{\partial}^*$).

DÉFINITION 2.2.— *Soit $p \in \partial\Omega$. On dit que le problème $\overline{\partial}$-Neumann vérifie une estimation sous-elliptique (ou encore est sous-elliptique) pour les $(0,q)$-formes, $1 \le q \le n-1$, au point p, s'il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage U de p, tels que :*

$$\|u\|_\varepsilon \le C\,(\|\overline{\partial} u\| + \|\overline{\partial}^* u\| + \|u\|), \quad \forall u \in \mathcal{D}^{(0,q)}(U \cap \overline{\Omega}), \tag{2.6}$$

où $\|u\|_\varepsilon$ est la norme de Sobolev de u, d'ordre ε dans Ω, et $\mathcal{D}^{(0,q)}(U \cap \overline{\Omega})$ désigne l'espace des $(0,q)$-formes à coefficients dans $\mathcal{D}(U \cap \overline{\Omega})$ et qui sont dans $\mathcal{D}(\overline{\partial}^*)$.

Remarquons que dans la définition précédente on ne précise pas la valeur de ε. Mais il y a des travaux où la valeur de ε est précisée, ce qu'on verra plus loin.

2.3. Forme de Levi, pseudoconvexité

Maintenant nous considérons une fonction définissante r de Ω, comme dans (2.5), ainsi que la forme hermitienne définie par la matrice $\left(\frac{\partial^2 r(z)}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k}\right)_{1 \le j,k \le n}$, $z \in \overline{\Omega}$.

DÉFINITION 2.3.— *On appelle forme de Levi en z, $z \in \partial\Omega$, la restriction de la forme précédente à l'espace tangent complexe en z à $\partial\Omega$ (c'est-à-dire l'espace des $t \in \mathbf{C}^n$ tels que $\sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_j}(z)\, t_j = 0$).*

Les propriétés de cette forme (telles que signe des valeurs propres, etc.) sont indépendantes du choix de r. Elles sont intrinsèques à $\partial\Omega$. D'où la définition suivante.

DÉFINITION 2.4.— *On dit que $\partial\Omega$ est pseudoconvexe (resp. strictement pseudoconvexe) en $p \in \partial\Omega$ si la forme de Levi en p est positive (resp. définie positive).*

Un théorème, qui commence maintenant à dater, est le suivant :

THÉORÈME 2.5 ([31],[35]).— *Supposons $\partial\Omega$ strictement pseudoconvexe au point $p \in \partial\Omega$. Alors le problème $\overline{\partial}$-Neumann est sous-elliptique au point p pour $1 \leq q \leq n-1$, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$.*

Remarques : 1) En fait, pour $1 \leq q \leq n-1$, une condition nécessaire et suffisante de sous-ellipticité pour les $(0,q)$-formes avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ est donnée dans ([31],[35]), en terme de nombre de valeurs propres de la forme de Levi, qui sont strictement positives (ou strictement négatives).

Nous arrivons maintenant au cœur du sujet, à savoir l'existence d'une estimation sous-elliptique lorsque “la forme de Levi dégénère” tout en étant positive. (Il y a aussi des résultats dans le cas “non pseudoconvexe”, [17], [29].)

On commence par parler de “l'article pionnier” de J.J. Kohn dans [37] qui, je pense, a donné naissance à tout un foisonnement de travaux qu'il serait trop long d'énumérer ici.

Avant de parler des travaux de J.J. Kohn dans $\mathbf{C}^2$, introduisons des objets de géométrie différentielle qui rendent compte des propriétés de la forme de Levi : plus précisément, on reliera la forme de Levi à des crochets de certains champs de vecteurs.

Un champ de vecteurs holomorphe, de classe $C^\infty(U)$, où U est un ouvert de $\mathbf{C}^n$, est un champ de la forme : $L = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j}$, avec $a_j \in C^\infty(U)$.

Considérons alors notre domaine Ω et soit U voisinage de $p \in \partial\Omega$. Si r est une fonction définissante (comme en (2.5)), on peut considérer la base de champs de vecteurs holomorphes tangents à $\partial\Omega$, donnée par (ici $\frac{\partial r}{\partial z_1} \neq 0$ sur U) :

$$L_j = \frac{\partial r}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial r}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_1} \qquad j = 2, \cdots, n.$$

Cette base est dite standard, une fois que r est choisie (évidemment, il y a une infinité de telles bases).

Soit alors un champ imaginaire pur T, tangent à $\partial\Omega$ dans U. Il est alors aisé de voir que le système des champs $(L_2, \cdots, L_n, \overline{L}_2, \cdots, \overline{L}_n, T)$ est une base de champs (à coefficients fonctions complexes) tangents à $\partial\Omega$. Ainsi on a :

$$(2.7)\qquad \begin{cases} \text{pour } j,k \in \{2,\cdots,n\} \\ [L_j,\overline{L}_k] = a_{jk}T \quad (\text{modulo } L_2,\cdots,L_n,\overline{L}_2,\cdots,\overline{L}_n),\ a_{jk} \in C^\infty(\partial\Omega \in U). \end{cases}$$

Alors (d'après une formule de Cartan de géométrie différentielle), la matrice hermitienne (a_{jk}) exprime la forme de Levi dans la base ci-dessus choisie. En particulier, la pseudoconvexité (ou la stricte pseudoconvexité) correspond à ce que la matrice $(a_{jk})_2^n$ est positive (ou définie positive).

Dans le cas $n = 2$, il n'y a qu'un champ L (à une fonction non nulle multiplicative près) holomorphe tangent à $\partial\Omega$. Ainsi la matrice de Levi est une fonction.

3. SOUS-ELLIPTICITÉ DANS $\mathbf{C}^2$ (d'après J.J. Kohn [37])

Dorénavant, nous notons, suivant J.J. Kohn, λ la fonction de Levi (associée à L) définie par (2.7) (ici $n = 2$). Le domaine Ω étant pseudoconvexe dans $U \ni p$, $p \in \partial\Omega$, on a $\lambda \geq 0$. Le cas $\lambda > 0$ (stricte pseudoconvexité) étant inintéressant ici, on suppose toujours $\lambda(p) = 0$.

L'idée de J.J. Kohn est de considérer des crochets de longueur plus grande que 2 (au lieu de crochets de longueur 2 figurant dans (2.7)). Il introduit ainsi la :

DÉFINITION 3.1.— *Le type m de $p \in \partial\Omega$ est le plus grand "entier" $m \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ tel que tout crochet de longueur plus petite que m, formé à partir de L et $\overline{L}$ a une composante sur T nulle en p.*

Remarquons que, si $\lambda \geq 0$, alors le type m de $p \in \partial\Omega$, lorsqu'il est fini, est nécessairement pair.

THÉORÈME 3.2 (J.J. Kohn [37]) .— *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^2$, pseudoconvexe au voisinage du point p et supposons que p est de type m. Alors le problème $\overline{\partial}$-Neumann est sous-elliptique pour les $(0,1)$-formes avec $\varepsilon = \frac{1}{m}$, en p.*

Une inégalité, propre à $\mathbf{C}^2$, qui ramène la question à celle de la sous-ellipticité d'un système de champs de vecteurs réels est la suivante (en notant ici L_1 un champ holomorphe tangent à $\partial\Omega$, L_2 un champ tel que $L_2(r) = 1$ dans U, $T = L_2 - \overline{L}_2$ et $(\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2)$ une base de $(0,1)$-formes, duale de la base $(\overline{L}_1,\overline{L}_2)$ de champs holomorphes dans U) :

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \|\overline{L}_1 u_1\| + \|L_1 u_1\| + \|L_1 u_2\| + \|\overline{L}_1 u_2\| \leq C \quad (\|\overline{\partial} u\| + \|\overline{\partial}^* u\| + \|u\|) \\ \text{où } u = u_1 \overline{\omega}_1 + u_2 \overline{\omega}_2 \ , \ u \in \mathcal{D}^{(0,1)}(\overline{\Omega} \cap U). \end{cases}$$

Une fois (3.3) établie, une application des résultats de J.J. Kohn [39], L. Hörmander [32] et L. Rothschild-E. Stein [47] donne la sous-ellipticité, avec la précision $\varepsilon = \frac{1}{m}$, d'après Rothschild-Stein.

Ce théorème a été complété par P. Greiner [25] qui a établi que $\varepsilon = \frac{1}{m}$ est optimal. D'autre part, J.J. Kohn a donné des exemples de domaines (domaines à forme de Levi diagonalisable au voisinage de p) pour lesquels il y a sous-ellipticité pour les $(0,1)$-formes. Il faut remarquer (dans $\mathbf{C}^n$) que pour les $(0, n-1)$-formes, la sous-ellipticité se traite de façon analogue au cas $\mathbf{C}^2$.

Lorsqu'on veut attaquer le cas n quelconque, l'inégalité (3.3) n'est plus en général satisfaite. J'ai donné une condition nécessaire et suffisante pour cela (voir [17]) dans le cas des $(0,1)$-formes. Donc hormis ce cas d'estimation dite maximale (voir le livre de B. Helffer-J. Nourrigat pour les opérateurs polynômes de champs de vecteurs [28]), la sous-ellipticité des systèmes de champs de vecteurs est insuffisante. Signalons aussi un travail de J. Nourrigat sur cette question [46].

Une première tentative, qui soit autre, est celle de T. Bloom et I. Graham qui étudient le type en terme d'ordre de contact de $\partial\Omega$ (au point considéré) avec des variétés analytiques complexes de dimension q, $1 \leq q \leq n-1$ (en montrant que dans $\mathbf{C}^2$ cela correspond au type de Kohn). La complication dans $\mathbf{C}^n$ vient du fait qu'il y a “plusieurs directions complexes” et qu'on peut alors s'amuser à définir divers types. Signalons-en d'autres (introduits pour résoudre divers problèmes) : il y a évidemment le q-type de D'Angelo [15], qui nous intéresse ici (et qu'on verra en fait sous une forme plus quantitative donnée par D. Catlin pour les besoins de sa démonstration (voir aussi le lien avec [47]), le type essentiel de M.S. Baouendi et F. Trèves [2], etc.). Un autre invariant important que nous verrons ici est le multiple de D. Catlin.

Avant d'aller plus loin dans cet exposé, notons que J.J. Kohn a étudié la sous-ellipticité dans $\mathbf{C}^n$, en terme d'idéaux de fonctions associés à des mineurs (de taille convenable reliée à q) extraits de la forme de Levi ([38]). Il obtient en particulier (en utilisant un travail de K. Diederich et J.E. Fornaess [19]) que le problème $\overline{\partial}$-Neumann est sous-elliptique, pour $1 \leq q \leq n-1$, en tout point du bord d'un domaine borné, pseudoconvexe, analytique réel de $\mathbf{C}^n$.

4. LES TRAVAUX DE D. CATLIN SUR LA SOUS-ELLIPTICITÉ

Les travaux dont nous donnerons un petit aperçu ont été l'objet de trois publications à Annals of Math. ([8] [10] [11]) et de quelques papiers non publiés, complétant de façon intéressante les résultats publiés. Le théorème essentiel est évidemment publié dans [11], mais les trois publications ci-dessus citées concourent au résultat final.

4.a. Le type de D'Angelo et énoncé du théorème de D. Catlin

L'idée principale de J. D'Angelo est de considérer l'ordre de contact du bord $\partial\Omega$ non seulement avec des variétés complexes de dimension q, mais avec des ensembles analytiques complexes (donc ayant des singularités). J. D'Angelo donne des exemples simples de domaines où il met en évidence la différence entre les deux notions de type, avec des propriétés qui ont pu surprendre (en particulier le q-type de D'Angelo n'est pas semi-continu).

Mais dans son travail, D. Catlin a été amené à donner du type de D'Angelo une version plus quantitative que nous donnons succinctement (et qui est noté D_q, au lieu de la notation Δ_q du q-type de D'Angelo [14], [15]).

Définition de $D_q(p)$, $1 \leq q \leq n-1$, $p \in \partial\Omega$

Comme c'est usuel, G^{n-q+1} est la Grassmannienne des $(n-q+1)$-plans dans $\mathbf{C}^n$. Soit V_q un ensemble analytique complexe en p, de dimension q.

Alors, D. Catlin montre que $S \cap V_q$, $S \in G^{n-q+1}$ est, génériquement, formé d'un nombre fixe de courbes complexes γ_k, $k = i, \cdots, P$ telles que $\max_k(\nu(r \circ \gamma_k)/\nu(\gamma_k))$ est constant, où $\nu(f)$ désigne l'ordre d'annulation en 0 de l'application considérée f (ici $\gamma_k(0) = p$). Ce nombre ne dépendant pas (génériquement) de S est appelé ordre de contact générique de V_q avec $\partial\Omega$ en p. On définit alors :

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \tau(V_q, p) = \text{ordre de contact générique en } p \text{ de } V_q \\ D_q(p) = \sup\limits_{V_q} (\tau(V_q, p)). \end{cases}$$

Ce qui précède est un résumé très condensé du chapitre 3 de [11], où est introduite également la définition de l'ordre de contact d'une famille de *variétés* analytiques complexes d'un certain diamètre avec $\partial\Omega$: $\{M_\sigma\ ,\ \sigma \in \Sigma\}$:

(4.2)

a) Σ est un ensemble de réels positifs s'accumulant en 0 ;

b) $\exists\, g_\sigma : B^q_\sigma(0) \longrightarrow \mathbf{C}^n$, où $B^q_\sigma(0)$ est la boule de centre 0 et de rayon σ dans $\mathbf{C}^q$, g_σ holomorphe et $M_\sigma = g_\sigma(B^q_\sigma(0))$;

c) $\forall \sigma \in \Sigma$, il existe un $q \times q$ mineur de Jg_σ de déterminant, minoré uniformément en σ ;

d) $|Jg_\sigma| \leq C$ sur $B^q_\sigma(0)$, C indépendant de σ.

On dira que cette famille de variétés analytiques complexes de diamètre σ a un ordre de contact $\geq \eta$ si :

$$\text{(4.3)} \qquad \operatorname{Sup}\{|r(z)|\ ,\ z \in M_\sigma\} \leq C\,\sigma^\eta, \quad r \text{ fonction définissante.}$$

Alors on a la :

PROPOSITION 4.4.— *Soit $\eta > 0$, tel que $\eta < D_q(p)$. Alors il existe une famille $\{M_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ de variétés analytiques complexes de diamètre σ, d'ordre de contact $\geq \eta$.*

Voici, maintenant, le théorème principal de D. Catlin :

THÉORÈME 4.5 (D. Catlin [11]).— *Soit Ω, borné, régulier de classe C^∞, pseudoconvexe. Alors le problème $\overline{\partial}$-Neumann est sous-elliptique, en $p \in \partial\Omega$, pour les $(0,q)$-formes si et seulement si $D_q(p) < \infty$.*

Remarques : 1) Dans le théorème précédent, la pseudoconvexité n'est importante qu'au voisinage de p. Cependant, si Ω est pseudoconvexe et si $D_q < \infty$ en tout point de $\partial\Omega$, alors il y a régularité C^∞ pour la solution canonique de $\overline{\partial}_{q-1}$ dans $\overline{\Omega}$, si le second membre l'est.

2) Il est facile de voir que $D_{n-1} \leq \cdots \leq D_1$. Ainsi, si $D_1(p) < \infty$, alors il y a sous-ellipticité pour tout q, $1 \leq q \leq n-1$, au point p.

3) Contrairement au cas $n = 2$, le nombre ε intervenant dans la sous-ellipticité ne peut pas être déterminé exactement. Dans un travail non publié, D. Catlin donne des classes de domaines pour lesquels on a ε-sous-ellipticité pour ε strictement inférieur à une certaine valeur et non pour cette valeur.

Cependant, il donne un encadrement pour ε, en terme de $D_q(p)$ (pour les domaines convexes, ε est optimal d'après [24]).

En fait, la proposition 4.4, précédant l'énoncé du théorème, permet de mieux préciser les choses.

La démonstration du théorème 4.5 est essentiellement publiée en deux articles, l'un concernant la nécessité de $D_q(p) < \infty$ ([8]) et l'autre la suffisance de cette condition ([11]). Nous donnons dans ce qui suit le schéma de chacune des deux démonstrations, renvoyant aux deux articles principaux de D. Catlin concernant ce sujet ([8], [11]).

4) D_q vérifie la propriété : $\exists V = V(p)$ tel que :

$$z \in V \Longrightarrow D_q(z) \leq 2(D_q(p))^{n-q}/2^{n-q} \qquad (i.e.\ D_q \text{ localement borné}).$$

4.b. Schéma de la démonstration de la nécessité de $D_q(p) < \infty$

Au vu de la proposition 4.4, il a suffi à D. Catlin d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME 4.6.— *Supposons qu'il existe une famille de q-variétés analytiques complexes, de diamètre σ, contenues dans U, ayant un ordre de contact $\geq \eta$. Si une estimation sous-elliptique pour les $(0,q)$-formes est satisfaite dans U, avec $\varepsilon > 0$, alors $\varepsilon \leq \frac{1}{\eta}$.*

COROLLAIRE 4.7.— *Sous les hypothèses du théorème* 4.5, *si le problème $\bar{\partial}$-Neumann est sous-elliptique pour les $(0,q)$-formes, avec $\varepsilon > 0$, au point p, alors $\varepsilon \leq \frac{1}{D_q(p)}$.*

La démonstration du théorème 4.6 se fait essentiellement en trois étapes :

— **1ère étape** : En utilisant le théorème des idéaux de Skoda [49], il construit des fonctions $f_w \in L^2(\Omega) \cap H(\Omega)$, $w \in V \cap \Omega$:

$$(4.8) \qquad \begin{cases} \|f_w\|_{L^2(\Omega)} \leq C \\ \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial z_n^k}(w)\right| \geq C'|r(w)|^{-(k+\frac{1}{2})}, \ k \in \mathbf{N}, \ \partial z_n \text{ transverse à } \partial\Omega \text{ sur } V. \end{cases}$$

— **2ème étape** : En représentant $\{M_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ sous forme de graphes (dans V) : $z' \in B^q_{a\sigma}(\zeta'_\sigma) \to (z', h_\sigma(z'))$ avec : $z' = (z_1, \cdots, z_q)$, $a > 0$ assez petit et $\zeta_\sigma = g_\sigma(0)$, $\zeta_\sigma = (\zeta'_\sigma, \zeta''_\sigma)$, et en utilisant l'ordre de contact de $\{M_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ avec r, il découle de la 1ère étape l'existence d'une famille (f_σ) :

$$(4.9) \qquad \begin{cases} \|f_\sigma\| \leq 1, \ f_\sigma \in L^2(\Omega) \cap H(\Omega) \\ \left|\dfrac{\partial^k f_\sigma}{\partial z_n^k}(\zeta_\sigma)\right| \geq C\, \sigma^{-(k+\frac{1}{2})\eta} \qquad k \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Soit alors $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^+)$ avec $\varphi = 1$ sur $]-\infty, 1]$ et $\varphi = 0$ sur $[2, +\infty[$ et posons $\mathcal{X}_\sigma(z') = \varphi\left(\frac{8|z'-\zeta'_\sigma|}{a\sigma}\right)$. Si $\alpha_\sigma(z)$ est la $(0,q)$-forme : $\mathcal{X}_\sigma(z')\, f_\sigma(z)\, d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_q$, on considère v_σ la solution de Kohn : $\overline{\partial} v_\sigma = \alpha_\sigma$ (voir prop. 2.5). Considérons alors $\omega_\sigma(z') = \varphi\left(\frac{8|z'-\zeta'_\sigma|}{3a\sigma}\right) d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_q$.

Alors il vient de (4.8) (après un petit calcul) :

$$(4.10) \qquad \Big| \int_{B^q_{a\sigma(\zeta'_\sigma)}} \Big\langle h^*_\sigma\Big(\frac{\partial^k \alpha_\sigma}{\partial z_n^k}\Big), \omega_\sigma \Big\rangle \Big| \geq c\, \sigma^{2q-(k+\frac{1}{2})\eta}.$$

— **3ème étape** : Dans cette étape, D. Catlin démontre des résultats de régularité, pour la solution canonique de $\overline{\partial} v_\sigma = \alpha_\sigma$ sur des petits ouverts θ_σ (correspondant aux supports de ω_σ), très voisins ; ceci, en examinant plus soigneusement les méthodes habituelles de ([23],[40]) par exemple. En remarquant alors que $h^*_\sigma\left(\frac{\partial^k \alpha_\sigma}{\partial z_n^k}\right) = \overline{\partial}\, h^*_\sigma\left(\frac{\partial^k v_\sigma}{\partial z_n^k}\right)$ et en appliquant les estimations (en fonction de σ) obtenues, on arrive à ce que l'intégrale de (4.10) soit bornée par $C\,\sigma^{2q-1-(k+n+2+2\varepsilon)/\varepsilon}$.

Ainsi on arrive à l'inégalité (en faisant $\sigma \to 0$) :

$$(4.11) \qquad \frac{k+n+2+2\varepsilon}{k\varepsilon} + \frac{1}{k} \geq \Big(1 + \frac{1}{2k}\Big)\eta.$$

Faisant $k \to +\infty$ dans (4.11), on obtient bien $\frac{1}{\varepsilon} \geq \eta$.

4.c. Inégalités à poids et estimations sous-elliptiques

Sur le chemin de la démonstration d'une estimation sous-elliptique, on commence par établir un résultat qui réduit le problème à celui de la démonstration d'une inégalité L^2 avec poids convenable.

THÉORÈME 4.12.— *Soit Ω un domaine borné, régulier, de classe C^∞ dans $\mathbf{C}^n$, pseudoconvexe au voisinage V de $p \in \partial\Omega$. Si r est une fonction définissante de Ω, posons (pour $\delta > 0$) :*

$$S_\delta = \{z \in \Omega\,;\, -\delta < r(z) \leq 0\}.$$

Supposons que, pour δ suffisamment petit, il existe une fonction λ_δ dans V telle que :

1) $|\lambda_\delta| \leq 1$ *dans* $V \cap \overline{\Omega}$; $\lambda_\delta \in C^2(V)$;

2) $\forall z \in V \cap S_\delta$, *on ait, pour K multiindice ordonné :*

$$\sum_{\substack{|K|=q-1\\ j,k=1\cdots n}} \frac{\partial^2 \lambda_\sigma}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z)\, \phi_{jK}\, \overline{\phi}_{kK} \geq C\, \delta^{-2\varepsilon}\, |\phi|^2, \quad \phi \in \Lambda^{0,q}_z.$$

3) *La forme précédente est positive dans* V.

Alors il existe un voisinage V' *de* p, $V' \Subset V$, *dans lequel on a une* q*-estimation sous-elliptique avec constante de sous-ellipticité* ε.

Ce théorème est établi en utilisant d'abord un théorème précis d'inégalité L^2 avec poids $e^{-\lambda}$, $|\lambda| \leq 1$ (ceci en regardant plus soigneusement la démonstration de L. Hörmander sur les inégalités L^2 avec poids) et ensuite en microlocalisant en couronnes sur $\partial\Omega \cap V$. En effet, l'estimation sous-elliptique (2.6) dérive facilement de l'inégalité suivante :

$$\|u_b\|_{\varepsilon - \frac{1}{2}} \leq C\,(\|\overline{\partial} u\| + \|\overline{\partial}^* u\| + \|u\|) \qquad \forall u \in \mathcal{D}^{(0,q)}(V \cap \overline{\Omega}),$$

où le terme de gauche est la norme $H^{\varepsilon - \frac{1}{2}}$ dans $V \cap \partial\Omega$. Ainsi, il suffit de microlocaliser sur le bord (ici $u_b = u_{|\partial\Omega}$).

Le théorème 4.12 nous ramène donc au problème de l'existence des fonctions λ_δ ($\delta \leq \delta_0$) satisfaisant aux hypothèses 1), 2) et 3). Nous allons d'abord le voir dans un cas très simple, mais très instructif, qui va guider en fait le schéma qui sera donné dans le cas général.

4.d. Démonstration de l'inégalité à poids dans quelques cas simples

— *Cas où* Ω *est strictement pseudoconvexe en* p :

Posons $\lambda_\delta(z) = \exp(\delta^{-1} r(z))$, où r définit Ω. La stricte pseudoconvexité assure qu'on peut choisir r strictement plurisousharmonique dans un voisinage V de p. Ainsi on voit qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$H_{\lambda_\delta}(z;t) \geq c\,\delta^{-1}|t|^2 \exp(\delta^{-1} r(z))\ ,\ z \in V\ ,\ \forall t \in \mathbf{C}^n, \tag{4.13}$$

où $H_{\lambda_\delta}(z;t)$ désigne le Hessien complexe de λ_δ appliqué à t. D'autre part, sur S_δ, on a $\exp(\delta^{-1} r(z)) \geq \frac{1}{e}$. Donc les hypothèses 1), 2) et 3) du théorème 4.8 sont satisfaites.

— *Cas particulier dans* $\mathbf{C}^2$:

Supposons que Ω est donné, près de 0, par :

$$\Omega = \{z : \mathcal{R}e\, z_1 + (\mathcal{R}e\, z_2)^{2m} < 0\} \quad \text{avec} \quad m > 1.$$

(Évidemment, on sait d'après J.J. Kohn qu'on a sous-ellipticité pour les $(0,1)$-formes avec $\varepsilon = \frac{1}{2m}$; le but ici est de montrer qu'on a l'existence de fonctions λ_δ comme ci-dessus, avec $\varepsilon = \frac{1}{2m}$). Prenons alors $r = \mathcal{R}e\, z_1 + (\mathcal{R}e\, z_2)^{2m}$.

Le premier essai est, bien sûr, de considérer, comme dans le cas de stricte pseudoconvexité : $\lambda_\delta(z) = \exp(\delta^{-1}r(z))$.

Évidemment, on a toujours $|\lambda_\delta| \leq 1$, car $r \leq 0$ sur $\overline{\Omega} \cap V$; d'autre part, λ_δ est plurisousharmonique dans V. Ce qui doit être vérifié, c'est la propriété 2). Ici, on cherche à montrer :

$$H_{\lambda_\delta}(z;t) \geq c\,\delta^{-\frac{1}{m}}|t|^2, \qquad z \in S_\delta. \tag{4.14}$$

Un calcul semblable au précédent entraîne (4.14) pour $|\mathcal{R}e\, z_2| \geq \delta^{\frac{1}{2m}}$. Donc, pour $|\mathcal{R}e\, z_2| \leq \delta^{\frac{1}{2m}}$, il faudrait modifier λ_δ, en ajoutant un terme correctif. On considère alors :

$$\lambda'_\delta(z) = C' \exp(\delta^{-1}r(z)) + \varphi\big(|\delta^{-\frac{1}{2m}}\,\mathcal{R}e\, z_2|^2\big), \tag{4.15}$$

avec C' convenable et $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+)$, $\varphi = 1$ sur $t \geq 1$; $\varphi(t) = t$ si $t \leq \frac{1}{2}$. Alors on obtient l'inégalité :

$$H_{\lambda'_\delta}(z;t) \geq c'\,\delta^{-\frac{1}{m}}|t|^2 \quad \text{pour} \quad |\mathcal{R}e\, z_2| \leq \frac{1}{2}\,\delta^{\frac{1}{2m}}. \tag{4.16}$$

On voit donc qu'il reste à regarder la propriété 2) pour $\frac{1}{2}\,\delta^{\frac{1}{2m}} \leq |\mathcal{R}e\, z_2| \leq \delta^{\frac{1}{2m}}$. Sur cette bande, le Hessien complexe du terme correctif est (en module) de l'ordre de $\delta^{-\frac{1}{m}}|t|^2$. Mais, pour $\delta < \delta_0$, ceci est dominé par $H_{\lambda_\delta}(z;t)$ sur S_δ et il suffit alors de choisir C' assez grand pour obtenir l'inégalité (4.14) sans restriction sur $\mathcal{R}e\, z_2$.

Cependant, rien n'assure que λ'_δ est plurisousharmonique dans V. Mais ici il suffit de modifier par : $\lambda''_\delta(z) = \psi(\lambda'_\delta(z))$ avec $\psi(t) \equiv 0$ pour $t \leq \widetilde{c}$ et $\psi''(t) > 0$, si $t > \widetilde{c}$. Une simple vérification montre que λ''_δ convient, si $\widetilde{c}$ est bien choisi.

La construction précédente des λ_δ servira de fil pour le cas général. L'idée sera de stratifier $\partial\Omega \cap V$ (le cas précédent correspond à la stratification en : {points de stricte pseudoconvexité} $\cup$ $\{\mathcal{R}e\, z_2 = 0\}$) et de construire λ_δ de façon analogue. La construction que nous allons décrire est une simple idée générale, car les calculs précis pour montrer les hypothèses 1), 2) et 3) du théorème 4.12 sont très élaborés. Remarquons que K. Diederich et J.E. Fornaess ([19]) avaient donné auparavant une telle stratification si $\partial\Omega$ est analytique réelle.

4.e. Multitype et stratification du bord au voisinage d'un point de q-type fini (pour éviter des complications inutiles, on prend $q = 1$).

D. Catlin a introduit dans [10] la notion de multitype qu'il raffine dans [11], pour les besoins de la démonstration de son théorème sur la sous-ellipticité. D'autre part, le multitype semble plus souple, en particulier il est semi-continu, ce que n'est pas le type de D'Angelo. Évidemment, pour $n = 2$, on retrouve la notion de type, donnée par J.J. Kohn.

Définition du multitype :

On note Γ l'ensemble des n-uples $\Lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, tels que : $1 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq +\infty$ et tels que, pour tout k, soit $\lambda_k = +\infty$, soit il existe $(a_1, \cdots, a_k) \in \mathbf{N}^k$, $a_k > 0$ vérifiant : $\sum_{j=1}^k \frac{a_j}{\lambda_j} = 1$. Remarquons que Γ est discret et que ses éléments ne peuvent s'accumuler qu'en $+\infty$. On considère toujours r, fonction définissante.

Soit $p \in \partial\Omega$. On dit que Λ est distingué s'il existe, autour de p, un système de coordonnées $(z_1, \cdots, z_n)$ satisfaisant à : $\frac{\partial^{\alpha+\beta} r}{\partial z^\alpha . \partial \bar{z}^\beta}(p) = 0$ lorsque $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i + \beta_i}{\lambda_i} < 1$.

Il est clair que c'est indépendant de r. On ordonne Γ lexicographiquement.

DÉFINITION 4.13.— *Le multitype $\mathcal{M}(p)$ de p est le plus petit $\mathcal{M} \in \Gamma$ tel que $\mathcal{M} \geq \Lambda$ pour tout Λ distingué.*

Il existe une interprétation du multitype en terme de crochets de champs de vecteurs holomorphes ou antiholomorphes. Cette interprétation est très utile dans la démonstration des ingrédients nécessaires à la démonstration du théorème 4.12.

Le multitype vérifie les propriétés suivantes :

Si $\mathcal{M}(p) = (m_1, \cdots, m_n)$, alors $m_1 = 1$ et on a, pour $q \leq n-1$, $m_1 \leq \cdots \leq m_{n+1-q} \leq D_q(p)$. En particulier, $m_n \leq D_1(p)$.

Remarquons, en outre, que $m_2 = \cdots = m_n = 2$, si p est un point de stricte pseudoconvexité. Avant d'énoncer le théorème principal sur le multitype, nous avons besoin d'une autre définition.

DÉFINITION 4.14.— *Soit $0 \leq \ell \leq n-1$. Une sous-variété M de $\partial\Omega$ (dans V) est de dimension holomorphe ℓ si l'espace des champs holomorphes L, tangents à M et tels que $\partial\bar{\partial}r(L, \overline{L}) = 0$ est de dimension (complexe) $\leq \ell$ et si la dimension C.R. de M est constante (dans V). D'autre part, on note $\mathcal{M}_{n+1-q} = (m_1, \cdots, m_{n+1-q})$, $1 \leq q \leq n-1$.*

THÉORÈME 4.15.— *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, de classe C^∞, pseudoconvexe.*

1) *$\forall p \in \partial\Omega$, $\exists V = V(p)$ tel que : $\forall z \in V \cap \partial\Omega$, $\mathcal{M}_{n+1-q}(z) \leq \mathcal{M}_{n+1-q}(p)$.*

2) *Supposons $\mathcal{M}_{n+1-q}(p) = (m_1, \cdots, m_{n+1-q})$, $m_{n+1-q} < \infty$.*

Il existe un voisinage U de p et une sous-variété M_{n+1-q} de $\partial\Omega$, de dimension *holomorphe* $(q-1)$ *telle que :*

$$\{z \in U \cap \partial\Omega \ , \ \mathcal{M}_{n+1-q}(z) = \mathcal{M}_{n+1-q}(p)\} \subset M_{n+1-q}.$$

PROPOSITION 4.16.— *Si* $D_q(p) < \infty$, *il existe* $V = V(p)$ *tel que* $\mathcal{M}_{n+1-q}$ *prend dans* V *un nombre fini de valeurs :*

$$\mathcal{M}^1_{n+1-q} < \cdots < \mathcal{M}^N_{n+1-q} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}^N_{n+1-q} \subset M_{n+1-q}.$$

Cela découle du fait que $\mathcal{M}_{n+1-q}$ est localement borné puisque D_q l'est (remarque 4 après le théorème 4.5).

Nous obtenons ainsi une *stratification* de $\partial\Omega \cap V$ en les sous-ensembles $\mathcal{M}^j_{n+1-q}$, $1 \leq j \leq N$, donnés par la proposition 4.16.

Idée de la construction d'une fonction p.s.h. convenable

Notre but ici est simplement d'esquisser une construction d'une fonction plurisousharmonique dans V, bornée par 1 et à “Hessien grand”. La vérification de 2) demande bien trop de matériel pour être exposée ici plus précisément.

D'autre part, on prendra $q = 1$. On pose :

$$S_k = \{z \in V \cap \partial\Omega \ , \ \mathcal{M}(z) \geq \mathcal{M}^k\} \quad k = 1, \cdots, N$$

(ici, comme $q = 1$, $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}$). Donc on a : $V \cap \partial\Omega = \cup_{k=1}^N (S_k - S_{k+1})$, avec $S_k - S_{k+1} \subset M_k$, où M_k est une sous-variété de $\partial\Omega$ de dimension holomorphe 0. Dans le cas particulier dans $\mathbf{C}^2$, étudié en détail précédemment, on a $M_1 = \partial\Omega \cap \{\mathcal{R}e\, z_2 = 0\} \cap V$. La construction se fait par récurrence sur k. On suppose que, pour un certain k, on a pu construire une fonction λ_δ plurisousharmonique dans V, $|\lambda_\delta| \leq 1$, de “Hessien grand” hors de S_k. Comme dans le cas de l'exemple dans $\mathbf{C}^2$, on peut construire un voisinage tubulaire de M_k et une fonction bornée à “Hessien grand” près de M_k. En ajoutant cette dernière fonction à λ_δ , on obtient λ'_δ à Hessien grand hors de S_{k+1}. Alors, en remarquant que $S_{N+1} = \emptyset$, on obtient finalement une fonction à Hessien “grand” près de $\partial\Omega \cap V$.

5. REMARQUES SUR LA TAILLE DE LA CONSTANTE ε DE SOUS- ELLIPTICITÉ

Nous avons déjà signalé que, dans le cas de $\mathbf{C}^2$, les travaux de J.J. Kohn [37] et P. Greiner [25] donnent la constante $\varepsilon = \frac{1}{m}$ optimale. Remarquons au passage que ε est alors l'inverse d'un entier, dans $\mathbf{C}^2$, lorsqu'il existe.

Dans les travaux de D. Catlin, seul un encadrement de ε, en fonction du type de D'Angelo, a été établi. Dans une étude plus précise, portant sur une classe de domaines plus particulière, D. Catlin a montré qu'il est vain de chercher une valeur optimale pour la sous-ellipticité. D'une telle étude [12], D. Catlin a tiré deux renseignements intéressants :

1) Soit ε tel que $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$; il existe un domaine pseudoconvexe dans $\mathbf{C}^3$ pour lequel il y a estimation sous-elliptique pour les $(0,1)$-formes de constante de sous-ellipticité optimale ε.

2) Soit $\eta \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$. Il existe un domaine pseudoconvexe de $\mathbf{C}^3$ pour lequel il y a sous-ellipticité pour les $(0,1)$-formes de constante de sous-ellipticité ε si et seulement si $\varepsilon < \eta$ (donc ici il n'y a pas constante de sous-ellipticité optimale).

Il y a une sous-classe de la classe des domaines pseudoconvexes, à savoir les domaines convexes, pour lesquels un résultat précis a été établi par J.E. Fornaess et N. Sibony [24]. En fait, ces auteurs construisent des fonctions λ_δ vérifiant les hypothèses du théorème 4.12.

Ils le font généralement dans $\mathbf{C}^2$, pour des domaines de type fini, en donnant une fonction définissante convenable ; ensuite ils construisent les fonctions λ_δ, avec un δ donnant une estimation sous-elliptique avec ε optimal égal à l'inverse du type du point considéré, dans le cas de domaines convexes de $\mathbf{C}^n$, si $n \geq 3$. Remarquons aussi que pour les domaines convexes, on peut se restreindre, dans la définition de D_1, à considérer des droites complexes ([7]).

Pour certains domaines ayant une forme particulière, H. Hasegawa a aussi obtenu un résultat optimal.

Terminons ici en signalant que, dans un récent preprint, K. Diederich et G. Herbort ont étudié des domaines pour lesquels on peut "dire des choses" sur le "meilleur ε possible" [20].

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDREOTTI and E. VESENTINI - *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds*, Inst. Htes Ét. Sc. Publ. Math., Vol. 24-25.

[2] M.S. BAOUENDI and F. TRÈVES - *About the holomorphic extension of C.R. functions on real hypersurfaces in complex space*, Duke Math. J. **51** (1984), 77-107.

[3] S. BELL and E. LIGOCKA - *A simplification and extension of Fefferman's theorem on biholomorphic mappings*, Invent. Math. **57** (1980), 283-289.

[4] T. BLOOM - *On the contact between complex manifolds and real hypersurfaces in* $\mathbf{C}^3$, Trans. A.M.S. **263** (1981), 515-529.

[5] T. BLOOM and I. GRAHAM - *A geometric characterization of points of type m on real submanifolds of* $\mathbf{C}^n$, J. of Diff. Geom. **12** (1977), 171-182.

[6] H. BOAS and E. STRAUBE - *Sobolev estimates for the* $\overline{\partial}$*-Neumann operator on domains in* $\mathbf{C}^n$ *admitting a defining function that is plurisubharmonic on the boundary*, Math. Z. **206** (1991), 81-88.

[7] H. BOAS and E. STRAUBE - *On equality of line type and variety type of real hypersurfaces in* $\mathbf{C}^n$, J. of Geom. Anal., Vol. n° 2 (1992), 95-98.

[8] D. CATLIN - *Necessary conditions for subellipticity of the* $\overline{\partial}$*-Neumann problem*, Annals of Math. **117** (1983), 147-171.

[9] D. CATLIN - *Global regularity of the* $\overline{\partial}$*-Neumann problem*, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 41 (1984).

[10] D. CATLIN - *Boundary invariants of pseudoconvex domains* Annals of Math. **120** (1984), 529-586.

[11] D. CATLIN - *Subelliptic estimates for the* $\overline{\partial}$*-Neumann problem on pseudoconvex domains*, Annals of Maths. **126** (1987), 131-191.

[12] D. CATLIN - *Examples of sharp subelliptic estimates for the* $\overline{\partial}$*-Neumann problem*, non publié.

[13] D.C. CHANG, A. NAGEL and E. STEIN - *Estimates for the* $\overline{\partial}$*-Neumann problem in pseudoconvex domains of finite type in* $\mathbf{C}^2$, Acta Math. **169** (1992), 153-228.

[14] J. D'ANGELO - *Subelliptic estimates and failure of semi-continuity of orders of contact* Annals of Math. **47** (1980), 955-957.

[15] J. D'ANGELO - *Real hypersurfaces, orders of contact and applications*, Annals of Math. **115** (1982), 615-637.

[16] J.-P. DEMAILLY - *Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe, semi-positif, au-dessus d'une variété kählérienne complète*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup **15** (1982), 457-511.

[17] M. DERRIDJ - *Régularité pour $\overline{\partial}$ dans quelques domaines pseudoconvexes*, J. of Diff. Geom. **13** n° 4 (1978), 559-576.

[18] M. DERRIDJ - *Inégalités a priori et estimation sous-elliptique pour $\overline{\partial}$ dans des ouverts non pseudoconvexes*, Math. Ann. (1980), 27-48.

[19] K. DIEDERICH and J.E. FORNAESS - *Pseudoconvex domains with real analytic boundary*, Ann. of Math. **107** (1978), 371-384.

[20] K. DIEDERICH and G. HERBORT - *Geometric and analytic invariants on pseudoconvex domains. Comparison results*, preprint.

[21] Y. EGOROV - *Subelliptic operators*, Usp. Math. Nauk. **30** (n° 3), 57-104, English transl. Russ. Math. Surv. **30** (n° 3) (1975), 55-105.

[22] C. FEFFERMAN - *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math. **26** (1974), 1-65.

[23] G.B. FOLLAND and J.J. KOHN - *The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex*, Ann. of Math. Studies **75** (1972), Princ. Univ. Press, Princeton.

[24] J.E. FORNAESS and N. SIBONY - *Construction of p.s.h. functions on weakly pseudoconvex domains*, Duke Math. J. Vol. 58 n° 3 (1989), 633-655.

[25] P. GREINER - *On subelliptic estimates for the $\overline{\partial}$-Neumann problem in* $\mathbf{C}^2$, J. of Diff. Geom. **9** (1974), 239-250.

[26] P. GREINER and E. STEIN - *Estimates for the $\overline{\partial}$-Neumann problem*, Math. Notes n° 19, Princ. Univ. Press (1977).

[27] K. HASEGAWA - *Subelliptic estimates for the $\overline{\partial}$-Neumann problem on certain weakly pseudoconvex domains*, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sec. IA, vol. 39 n° 3 (1992), 385-418.

[28] B. HELFFER et J. NOURRIGAT - *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs*, Prog. in Math. **58**, Birkhaüser, 1985.

[29] L.H. HO - *Subellipticity of the $\overline{\partial}$-Neumann problem on non-pseudoconvex domains*, Trans. A.M.S. **291** (1985), 43-73.

[30] L. HÖRMANDER - *An introduction to complex analysis in several variables*, Van Nostrand, Princeton, 1966.

[31] L. HÖRMANDER - *L^2-estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$-operator*, Acta Math. **113** (1965), 89-152.

[32] L. HÖRMANDER - *Hypoelliptic second order equations*, Acta Math. **119** (1967), 147-171.

[33] L. HÖRMANDER - *Subelliptic operators. Seminar on singularities of solutions of linear P.D.E.*, Ann. of Math. Studies **91** (1978), Princeton.

[34] N. KERZMAN - *The Bergman kernel. Differentiability at the boundary*, Math. Ann. **195** (1972), 149-158.

[35] J.J. KOHN - *Harmonic integrals on strongly pseudoconvex manifolds* I, Ann. of Math. **78** (1963), 112-148 ; II, Ann. of Math. **79** (1964), 450-472.

[36] J.J. KOHN -*Global regularity for* $\overline{\partial}$ *on weakly pseudoconvex manifolds*, Trans. A.M.S. **181** (1973), 273-292.

[37] J.J. KOHN -*Boundary behavior of* $\overline{\partial}$ *on weakly pseudoconvex manifolds of dimension two*, J. of Diff. Geom. **6** (1972), 523-542.

[38] J.J. KOHN -*Subellipticity of the* $\overline{\partial}$*-Neumann problem on pseudoconvex domains*, Acta Math. **142** (1979), 79-122.

[39] J.J. KOHN -*Pseudodifferential operators and applications*, Proc. Symp. Pure Math. **43**, 207-219.

[40] J.J. KOHN and L. NIRENBERG -*Non coercive boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 443-492.

[41] J.J. KOHN and L. NIRENBERG -*A pseudoconvex domain not admitting a holomorphic support function*, Math. Ann. **201** (1973), 265-268.

[42] N. LERNER -*Non solvability in* L^2 *for a first order operator satisfying condition* (ψ), Ann. of Math. **139** (1994), 363-393.

[43] H.M. MAIRE -*Hypoelliptic overdetermined systems of partial differential equations*, Comm. in P.D.E. **5** (4) (1980), 331-380.

[44] C.B. MORREY -*The analytic embedding of abstract real analytic manifolds*, Ann. of Math. **68** (1958), 159-201.

[45] L. NIRENBERG and F. TRÈVES -*On local solvability for linear partial differential equations* I, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 1-38.

[46] J. NOURRIGAT - *Reduction microlocale des systèmes d'opérateurs pseudo-différentiels*, Ann. Inst. Fourier, Tome XXXVI, Fasc. 3 (1986).

[47] L. ROTHSCHILD and E. STEIN - *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math. **137** (1977), 248-315.

[48] N. SIBONY - *Une classe de domaines pseudoconvexes*, Duke Math. J. **55** (1987), 299-319.

[49] H. SKODA - *Application des techniques* L^2 *à la théorie des idéaux de fonctions holomorphes avec poids*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. IV, Série 5 (1972), 545-580.

[50] D.C. SPENCER - *Overdetermined systems of linear partial differential equations*, Bull. AMS **75** (1969), 179-239.

[51] W.J. SWEENEY - *A condition for subellipticity in Spencer's Neumann problem*, J. of Diff. Geom. **21** (1976), 316-362.

Makhlouf DERRIDJ

Université de Rouen
Département de Mathématiques
F-76134 MONT-SAINT-AIGNAN

et

URA 757 du CNRS
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY CEDEX

Astérisque

MICHEL DUFLO

Opérateurs transversalement elliptiques et formes différentielles équivariantes

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki, exp. nº 791, p. 29-45

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__29_0>

Séminaire BOURBAKI
47ème année, 1994-95, n° 791

Novembre 1994

OPÉRATEURS TRANSVERSALEMENT ELLIPTIQUES ET FORMES DIFFÉRENTIELLES ÉQUIVARIANTES [d'après N. Berline et M. Vergne]

par Michel DUFLO

Introduction.

Soit G un groupe de Lie compact opérant dans une variété différentiable M et soit D un opérateur pseudo-différentiel G-invariant sur M. Lorsque D est elliptique, le noyau et le conoyau de D sont des espaces de dimension finie dans lequel le groupe G opère linéairement. L'indice équivariant de D est la différence formelle de ces deux représentations de G. Notons $\mathrm{Ind}(D, g)$ la valeur de son caractère en un point $g \in G$:

$$\mathrm{Ind}(D, g) = \mathrm{tr}(g|\ker D) - \mathrm{tr}(g|\operatorname{coker} D).$$

La formule cohomologique d'Atiyah-Segal-Singer [3, 5] donne $\mathrm{Ind}(D, g)$ comme l'intégrale sur l'espace cotangent $T^*M(g)$ de la variété des points fixes de g dans M d'une classe de cohomologie à support compact dont la définition fait intervenir le symbole de D. Supposons D seulement transversalement elliptique, c'est-à-dire elliptique dans les directions transverses aux orbites de l'action de G. Atiyah [1] a montré que l'on pouvait encore définir l'indice de D. Le noyau et le conoyau de D sont des représentations (en général de dimension infinie) traçables, de sorte que le caractère de l'indice est une *distribution* sur G et cela n'a pas de sens en général de calculer sa valeur en un point donné.

Dans [1], Atiyah fournit un algorithme pour calculer cette distribution en fonction du symbole de D. Il ne donne cependant de formule cohomologique que dans certains cas. Cette question ne semble pas avoir progressé jusqu'aux travaux récents de N. Berline et M. Vergne [24, 10, 11, 12, 13]. Dans ces articles, l'indice d'un opérateur transversalement elliptique est obtenu, au voisinage d'un point $s \in G$, comme l'intégrale sur $T^*M(s)$ d'une *forme différentielle équivariante*. Le but de cet exposé est de décrire cette formule et, en particulier, de faire quelques rappels sur les formes différentielles équivariantes, qui sont un des ingrédients qui ne figuraient pas dans [1].

Les formes différentielles équivariantes sur une variété M sur laquelle opère un groupe compact G ont été introduites dans les années 50 (Cartan [15, 16]) pour donner un modèle de de Rham de la cohomologie G-équivariante de la variété M. Depuis une dizaine d'années, avec les travaux de Berline-Vergne [7, 23], Witten [28], Atiyah-Bott [2] cette théorie s'est mise à revivre et les formes différentielles équivariantes et la dérivation d_ζ définie ci-dessous ont trouvé de nombreuses applications pas exclusivement topologiques, particulièrement dans des situations où il est important de disposer de représentants explicites des classes de cohomologie pertinentes. Outre l'application aux opérateurs transversalement elliptiques faisant l'objet de ce rapport, et sans être exhaustif, je mentionnerai les applications aux théorèmes de l'indice équivariant "local", celles se situant dans le contexte hamiltonien – grand pourvoyeur de formes différentielles équivariantes fermées– (interprétation de la formule de Duistermaat-Heckman, formule de localisation "non commutative" de Witten, étude de la cohomologie des variétés obtenues par la réduction de Marsden-Weinstein), dans le contexte des variétés de lacets (où le groupe S^1 agit naturellement), et dans celui des groupes non compacts.

On trouvera un exposé détaillé sur les formes différentielles équivariantes dans le chapitre 7 de [6]. Je ne rappellerai ici que les notions indispensables à l'énoncé de la formule de l'indice des opérateurs transversalement elliptiques.

1 Formes différentielles équivariantes.

1.1 Définitions.

Soit M une variété différentiable. On note $\mathcal{A}(M) = \bigoplus_j \mathcal{A}^j(M)$ l' algèbre des formes différentielles sur M et d sa différentielle. Si ζ est un champ de vecteurs sur M, on note $\iota(\zeta)$ la contraction par le champ de vecteurs ζ, $\mathcal{L}(\zeta)$ l'action de ζ sur $\mathcal{A}(M)$ par dérivation de Lie, et d_ζ la dérivation[1]

$$d_\zeta = d - \iota(\zeta). \tag{1}$$

Supposons M munie d'une action différentiable du groupe de Lie G. Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual. Pour $X \in \mathfrak{g}$ on note X_M le champ de vecteurs sur M donné au point $x \in M$ par $X_M(x) = \frac{d}{d\varepsilon}\exp(-\varepsilon X)\cdot x|_{\varepsilon=0}$ et on pose $d_X = d_{X_M}$, $\iota(X) = \iota(X_M)$ et $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X_M)$. Notons $\alpha = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n$ la décomposition en formes homogènes d'une forme $\alpha \in \mathcal{A}(M)$ (nous supposerons toujours que M a un nombre fini de composantes connexes et n est un majorant de la dimension de M). La relation $\alpha = d_X\gamma$ est équivalente à la série de relations

$$\alpha_0 = -\iota(X)\gamma_1, \quad \alpha_1 = d\gamma_0 - \iota(X)\gamma_2, \ldots, \quad \alpha_n = d\gamma_{n-1}. \tag{2}$$

Dans toute la suite, W désigne un voisinage ouvert G-invariant de 0 dans $\mathfrak{g}$. Une forme différentielle équivariante α sur M est par définition une application $X \mapsto \alpha(X)$

[1] Les algèbres considérées dans la suite ont une graduation naturelle sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et la règle des signes est utilisée.

de W dans $\mathcal{A}(M)$, invariante par l'action naturelle de G déduite de l'action adjointe dans $\mathfrak{g}$ et de l'action sur M. Si α est une forme différentielle équivariante, on définit une nouvelle forme différentielle équivariante $d_{\mathfrak{g}}\alpha$ par la formule

$$(d_{\mathfrak{g}}\alpha)(X) = d_X(\alpha(X)). \tag{3}$$

La relation de Cartan $(d - \iota(X))^2 = -\mathcal{L}(X)$ et l'invariance de α impliquent la relation $d_{\mathfrak{g}}^2\alpha = 0$. Notons $\mathcal{A}_G^\infty(W, M) = C^\infty(W, \mathcal{A}(M))^G$ l'algèbre des formes équivariantes différentiables. L'opérateur $d_{\mathfrak{g}}$ induit dans $\mathcal{A}_G^\infty(W, M)$ une dérivation de carré nul et on peut parler de formes équivariantes fermées et de formes équivariantes exactes. On note $H_G^\infty(W, M)$ la cohomologie de $\mathcal{A}_G^\infty(W, M)$. C'est une algèbre graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Soient N une autre variété dans laquelle G opère et ϕ un morphisme G-équivariant de M dans N. L'image réciproque ϕ^* induit un morphisme d'algèbres de $H_G^\infty(W, N)$ dans $H_G^\infty(W, M)$ et fait de $H_G^\infty(W, M)$ une algèbre sur $H_G^\infty(W, N)$. Si $N = \bullet$ est un point, $H_G^\infty(W, \bullet)$ est égal à l'algèbre $C^\infty(W)^G$ des fonctions différentiables G-invariantes (pour l'action adjointe) sur W. En considérant l'application $M \to \bullet$ on voit que $H_G^\infty(W, M)$ est une algèbre sur $C^\infty(W)^G$.

Dans le même ordre d'idées, si $\phi : H \to G$ est un homomorphisme de groupes et si l'on note aussi $\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ l'application tangente à l'élément neutre, alors ϕ induit une application $\phi^* : H_G^\infty(W, M) \to H_H^\infty(\phi^{-1}(W), M)$. En particulier l'évaluation en $0 \in \mathfrak{g}$ induit un homomorphisme $H_G^\infty(W, M) \to H^\bullet(M)$, où $H^\bullet(M)$ est la cohomologie de de Rham de M.

Notons $\mathcal{A}_c(M)$ l'algèbre des formes à support compact sur M. On définit de même l'algèbre $\mathcal{A}_{G,c}^\infty(W, M) = C^\infty(W, \mathcal{A}_c(M))^G$ des formes équivariantes à support compact et la cohomologie équivariante à supports compacts $H_{G,c}^\infty(W, M)$. Supposons M orientée. Si $\alpha \in \mathcal{A}_c(M)$, on note $\int_M \alpha$ l'intégrale (sur chaque composante connexe) de la composante homogène de degré maximum. Il résulte de la dernière relation de (2) que $\int d_X\gamma = 0$ pour tout $\gamma \in \mathcal{A}_c(M)$. Soit $\alpha \in C^\infty(W, \mathcal{A}_c(M))^G$ une forme fermée. Pour $X \in W$, le nombre $\int_M \alpha(X)$ ne dépend que de la classe $[\alpha] \in H_{G,c}^\infty(W, M)$. On le notera éventuellement $\int_M[\alpha](X)$. Si l'orientation est G-invariante, l'intégrale induit une application $C^\infty(W)^G$-linéaire $H_{G,c}^\infty(W, M) \to C^\infty(W)^G$.

1.2 Connexions et classes caractéristiques équivariantes.

Dans toute la suite de ce rapport, G est supposé compact. La théorie de Chern-Weil permet d'associer à un fibré vectoriel sur M muni d'une connexion des formes différentielles fermées sur M représentant des classes caractéristiques. Ceci s'étend au cas équivariant et permet de construire des formes différentielles équivariantes fermées [8]. Décrivons celles qui interviennent dans la formule de l'indice des opérateurs transversalement elliptiques.

On considère un fibré vectoriel (réel ou complexe) G-équivariant $\mathcal{E}$ sur la variété M et une connexion G-invariante ∇ sur $\mathcal{E}$. Notons $C^\infty(M,\mathcal{E})$ l'espace des sections différentiables de $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}(M,\mathcal{E}) = \oplus_j \mathcal{A}^j(M,\mathcal{E})$ l'espace des formes différentielles à valeurs dans $\mathcal{E}$, $End\,\mathcal{E}$ le fibré des endomorphismes de $\mathcal{E}$. On considère ∇ comme un endomorphisme de degré 1 de $\mathcal{A}(M,\mathcal{E})$ tel que l'on ait

$$\nabla(\omega s) = d\omega\, s + (-1)^{deg(\omega)}\omega\nabla s \tag{4}$$

pour toute forme homogène $\omega \in \mathcal{A}(M)$ et tout $s \in \mathcal{A}(M,\mathcal{E})$. La courbure $F = \nabla^2$ est un endomorphisme $\mathcal{A}(M)$-linéaire de $\mathcal{A}(M,\mathcal{E})$ que l'on identifie à un élément $F \in \mathcal{A}^2(M, End\,\mathcal{E})$. Soit $X \in \mathfrak{g}$. Notons encore $\mathcal{L}(X)$ l'action de X déduite de l'action de G dans $\mathcal{A}(M,\mathcal{E})$. L'endomorphisme

$$\mu(X) = \mathcal{L}(X) - (\iota(X)\nabla + \nabla\iota(X)) \tag{5}$$

de $\mathcal{A}(M,\mathcal{E})$ est $\mathcal{A}(M)$-linéaire. On l'identifie à un élément de $C^\infty(M, End\,\mathcal{E})$. On appelle μ le *moment* de ∇. Posons

$$F_{\mathfrak{g}}(X) = \mu(X) + F. \tag{6}$$

On appelle $F_{\mathfrak{g}}$ la *courbure équivariante* de ∇.

Exemple 1 (Actions hamiltonniennes). Supposons M munie d'une 2-forme G-invariante ω qui en fait une variété symplectique et soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites G-équivariant muni d'une connexion G-invariante ∇ dont la courbure est égale à $i\omega$. Le fibré $\mathcal{L}$ est une préquantification de M au sens de Kostant-Souriau. Ecrivons la formule (5) sous la forme bien connue [19, 22] $\mathcal{L}(X)s = \nabla_{X_M}s + i\nu(X)s$. La fonction ν est une application linéaire G-invariante de $\mathfrak{g}$ dans $C^\infty(M)$ et c'est l'application moment d'une action hamiltonnienne de G sur M. La courbure équivariante de ∇ est égale à $i(\nu+\omega)$. C'est une forme équivariante fermée. Cette remarque explique le rôle des formes différentielles équivariantes dans les questions faisant intervenir des actions hamiltonniennes de groupes (voir [7]).

Pour $X \in \mathfrak{g}$, on pose

$$\mathrm{ch}(\nabla)(X) = \mathrm{tr}(e^{F_{\mathfrak{g}}(X)}) \in \mathcal{A}(M). \tag{7}$$

Donc $\mathrm{ch}(\nabla)$ est une forme équivariante sur M. Par une extension de la théorie classique de Chern-Weil, on montre que cette forme est fermée et que sa classe $\mathrm{ch}(\mathcal{E}) \in H^\infty_G(\mathfrak{g}, M)$ ne dépend pas du choix de ∇. C'est le *caractère de Chern équivariant* de $\mathcal{E}$. L'image de $\mathrm{ch}(\mathcal{E})$ dans $H^\bullet(M)$ obtenue par l'évaluation en $0 \in \mathfrak{g}$ est le caractère de Chern usuel [2] de $\mathcal{E}$.

[2] Il est plus traditionnel d'utiliser $\frac{F}{-2i\pi}$ au lieu de F. Dans ce cas il convient d'utiliser la différentielle équivariante $d + 2i\pi\iota(X)$ au lieu de $d - \iota(X)$. J'utilise ici les conventions de [6]

De même la formule

$$j(\nabla)(X) = \det\left(\frac{e^{F_{\mathfrak{g}}(X)/2} - e^{-F_{\mathfrak{g}}(X)/2}}{F_{\mathfrak{g}}(X)}\right) \tag{8}$$

définit une forme équivariante fermée $j(\nabla) \in \mathcal{A}^\infty_G(\mathfrak{g}, M)$ dont la classe $j(\mathcal{E})$ dans l'algèbre $H^\infty_G(\mathfrak{g}, M)$ ne dépend pas de ∇. Son image dans $H^\bullet(M)$ est "le genre j" usuel de $\mathcal{E}$. Le terme de degré extérieur 0 de $j(\nabla)(X)$ est la fonction $\det(\frac{e^{\mu(X)/2} - e^{-\mu(X)/2}}{\mu(X)}) \in C^\infty(M)$. Au moins si M est compacte, cette fonction est proche de 1 pour X suffisamment petit. Pour X dans un voisinage de 0, on peut donc définir $j(\nabla)(X)^r$ pour tout $r \in \mathbb{C}$. C'est une forme différentielle sur M annulée par d_X.

Dans toute la suite, nous supposons choisie une connexion G-invariante ∇_M sur le fibré tangent TM. On pose $j(M)(X) = j(\nabla_M)(X)$. Au moins si M est compacte, si W est assez petit on peut donc définir pour $X \in W$ les formes différentielles d_X-fermées $j(M)(X)^{-1}$ et $\hat{A}(M)(X) = j(M)(X)^{-\frac{1}{2}}$. On dit que $\hat{A}(M)$ (ou bien sa classe dans $H^\infty_G(W, M)$) est le *$\hat{A}$-genre équivariant de M*. Son image dans $H^\bullet(M)$ est le $\hat{A}$-genre usuel.

La formule des points fixes fait intervenir une généralisation du genre $j(M)$ dépendant d'un point $s \in G$. Si G opère dans un ensemble Z, on note $Z(s)$ l'ensemble des points fixes de s dans Z. On notera aussi $G(s)$ le centralisateur de s dans G et $\mathfrak{g}(s)$ son algèbre de Lie. La variété $M(s)$ est $G(s)$-invariante. On peut identifier l'espace des points fixes de s dans TM à l'espace tangent à $M(s)$, de sorte que la notation $TM(s)$ est sans ambiguïté. La restriction $TM|M(s)$ de TM à $M(s)$ est somme directe de $TM(s)$ et d'un unique supplémentaire s-invariant que nous noterons $\mathcal{N}(s)$. C'est le fibré normal à $M(s)$ dans M. La connexion ∇_M induit sur les fibrés $TM(s)$ et $\mathcal{N}(s)$ sur $M(s)$ des connexions $G(s)$-invariantes. Pour $X \in \mathfrak{g}(s)$, notons $R_s(X)$ la courbure équivariante de la connexion induite dans $\mathcal{N}(s)$. Notons encore s l'endomorphisme du fibré $\mathcal{N}(s)$ induit par l'action de s. On pose

$$d_s(M)(X) = \det(1 - s e^{R_s(X)}). \tag{9}$$

On montre que cette formule définit une forme $G(s)$-équivariante fermée sur $M(s)$. Le terme de degré 0 de $d_s(M)(0)$ est égal à la fonction $\det(1 - s|\mathcal{N}(s))$ sur $M(s)$. Celle-ci est > 0. Donc, au moins si M est compacte, pour X assez petit dans $\mathfrak{g}(s)$ on peut définir les formes $d_s(M)(X)^r \in \mathcal{A}(M(s))$ pour tout $r \in \mathbb{C}$. On pose

$$n_s(M)(X) = (2i\pi)^{\dim(M(s))} j(M(s))(X)\, d_s(M)(X). \tag{10}$$

Donc $n_s(M)$ est une forme $G(s)$-équivariante fermée sur $M(s)$ et, au moins si M est compacte et X dans un voisinage ouvert $G(s)$-invariant W_s de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$ suffisamment petit, $n_s(M)(X)^{-1}$ est une forme différentielle sur $M(s)$ annulée par d_X, et $n_s(M)^{-1} \in \mathcal{A}^\infty_{G(s)}(W_s, M(s))$ une forme équivariante fermée sur $M(s)$.

1.3 Superconnexions et caractère de Chern.

On note $K_G(M)$ l'anneau de K-théorie topologique équivariante (c'est le K^0 à supports compacts). Un élément de $K_G(M)$ peut être représenté par un triplet $(\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-, \sigma)$ où $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ sont des fibrés vectoriels complexes G-équivariants sur M et σ un isomorphisme équivariant de $\mathcal{E}^+$ sur $\mathcal{E}^-$ défini en dehors d'un ensemble compact de M. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $[\sigma]$ la classe de ce triplet. Lorsque M est compacte, $(\mathcal{E}^\pm, 0, 0)$ représente un élément $[\mathcal{E}^\pm]$ de $K_G(M)$, on a $[\sigma] = [\mathcal{E}^+] - [\mathcal{E}^-]$ et le caractère de Chern équivariant de $[\sigma]$ est par définition la classe de cohomologie $\mathrm{ch}([\sigma]) = \mathrm{ch}(\mathcal{E}^+) - \mathrm{ch}(\mathcal{E}^-)$. Lorsque M n'est pas compacte (ce qui est le cas dans les applications au théorème de l'indice), le caractère de Chern de $[\sigma]$ peut être défini comme une classe de cohomologie équivariante à support compact sur M. N. Berline et M. Vergne utilisent en fait des formes à décroissance rapide, construites par la méthode de Quillen [20]. Je décris cette construction.

On considère le fibré $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ comme un superfibré (c'est-à-dire un fibré gradué sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). L'espace $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$ est naturellement un superespace. Une superconnexion $\mathbb{A}$ est un endomorphisme impair de $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$ vérifiant la relation analogue à (4). La courbure $F = \mathbb{A}^2$, le moment $\mu(X)$, et la courbure équivariante $F_{\mathfrak{g}}(X)$ d'une superconnexion G-invariante sont les endomorphismes $\mathcal{A}(M)$-linéaires pairs de $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$ définis comme plus haut dans le cas des connexions.

Exemple 2. On choisit des connexions G-invariantes ∇^+ et ∇^- sur $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ et on note ∇ la connexion $\nabla^+ \oplus \nabla^-$. Soit $\sigma \in C^\infty(M, Hom(\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-))^G$. On munit $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ de structures hermitiennes G-invariantes, on note σ^* l'adjoint de σ et on pose

$$(11) \qquad U(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^* \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \in C^\infty(M, End\,\mathcal{E}) \quad \text{et} \quad \mathbb{A}(\sigma) = \nabla + iU(\sigma).$$

Alors $\mathbb{A}(\sigma)$ est une superconnexion G-invariante sur $\mathcal{E}$. Notant $F = F^+ + F^-$ la courbure de ∇ et $F(\sigma)$ celle de $\mathbb{A}(\sigma)$, on a

$$(12) \qquad F(\sigma) = -\begin{pmatrix} \sigma^*\sigma & 0 \\ 0 & \sigma\sigma^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F^+ & 0 \\ 0 & F^- \end{pmatrix} + i[\nabla, U(\sigma)].$$

Soit $E = E^+ \oplus E^-$ un superespace vectoriel. Soit $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un endomorphisme de E. La *supertrace* $\mathrm{str}(u)$ est par définition le scalaire $\mathrm{str}(u) = \mathrm{tr}(a) - \mathrm{tr}(d)$. Soit $\mathcal{A}$ une superalgèbre associative supercommutative (e.g. $\mathcal{A} = \mathcal{A}(M)$). La supertrace se prolonge en une forme $\mathcal{A}$-linéaire paire sur l'espace des endomorphismes $\mathcal{A}$-linéaires de $\mathcal{A} \otimes E$, nulle sur les supercommutateurs. Plus généralement, la supertrace d'un endomorphisme $\mathcal{A}(M)$-linéaire de $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$ est un élément de $\mathcal{A}(M)$ de même parité.

Soit $X \in \mathfrak{g}$. La forme différentielle équivariante $\mathrm{ch}(\mathbb{A})$ sur M définie par la formule

$$\mathrm{ch}(\mathbb{A})(X) = \mathrm{str}(e^{F+\mu(X)})$$

est fermée et sa classe dans $H_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ (qui ne dépend pas de $\mathbb{A}$) est égale à $\mathrm{ch}(\mathcal{E}^+) - \mathrm{ch}(\mathcal{E}^-)$. Dans le cas de la superconnexion $\mathbb{A}(\sigma)$ de l'exemple 2, le terme $-U(\sigma)^2$ de $F(\sigma)$ permet de rendre $\mathrm{str}(e^{F(\sigma)+\mu(X)})$ "petit" là où σ est inversible. Précisons cette idée dans le cas particulier qui nous intéresse ici.

1.4 Fibrés cotangents et symboles elliptiques.

Soit M une variété compacte munie d'une action du groupe de Lie compact G. On note p la projection de l'espace cotangent T^*M sur M. Nous noterons $\mathcal{A}_{rap}(T^*M) \subset \mathcal{A}(T^*M)$ l'algèbre des formes sur T^*M, à décroissance rapide[3], et $H^\bullet_{rap}(T^*M)$ la cohomologie correspondante. On définit de même l'algèbre $\mathcal{A}^\infty_{G,rap}(W, T^*M) = C^\infty(W, \mathcal{A}_{rap}(T^*M))^G$ des formes équivariantes à décroissance rapide et l'algèbre de cohomologie correspondante $H^\infty_{G,rap}(W, T^*M)$. L'inclusion $\mathcal{A}_c(T^*M) \subset \mathcal{A}_{rap}(T^*M)$ induit des isomorphismes $H^\bullet_c(T^*M) \simeq H^\bullet_{rap}(T^*M)$ et $H^\infty_{G,c}(W, T^*M) \simeq H^\infty_{G,rap}(W, T^*M)$.

Soient $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ deux fibrés vectoriels complexes G-équivariants sur M, munis de connexions G-invariantes ∇^+ et ∇^-. Un *symbole* σ est un homomorphisme C^∞ entre les fibrés $p^*\mathcal{E}^+$ et $p^*\mathcal{E}^-$, défini en dehors d'un compact de T^*M. Si l'on note (x, ξ) un point de T^*M au dessus de $x \in M$, $\sigma(x, \xi)$ est un homomorphisme de $\mathcal{E}^+_x$ dans $\mathcal{E}^-_x$. On dit qu'un symbole est elliptique s'il est inversible en dehors d'un ensemble compact de T^*M. Un symbole elliptique équivariant représente un élément $[\sigma] \in K_G(T^*M)$.

Un notion plus forte est celle de "bon symbole elliptique" [11]. Choisissons des structures hermitiennes G-invariantes sur $\mathcal{E}^\pm$ comme dans l'exemple 2, dont nous conservons les notations. Le symbole σ est un *bon symbole elliptique* s'il est défini et différentiable dans T^*M tout entier, s'il est à croissance lente et si $U(\sigma)^2(x, \xi)$ (qui est un endomorphisme ≥ 0 de $\mathcal{E}_x$) est minoré en dehors d'un compact de T^*M par $c||\xi||^2$, où $||.||$ est une norme sur T^*M et c une constante > 0.

Proposition 1 *[11] Soit σ un bon symbole elliptique équivariant. Alors le caractère de Chern* $\mathrm{ch}(\mathbb{A}(\sigma))(X) = \mathrm{str}(e^{F(\sigma)+\mu(X)})$ *est à décroissance rapide sur T^*M.*

Notons $\mathrm{ch}([\sigma])$ la classe de $\mathrm{ch}(\mathbb{A}(\sigma))$ dans $H^\infty_{G,rap}(\mathfrak{g}, T^*M) \simeq H^\infty_{G,c}(\mathfrak{g}, T^*M)$ —elle ne dépend que de $[\sigma] \in K_G(T^*M)$. Nous dirons que c'est le *caractère de Chern équivariant de* $[\sigma]$. Il est égal au caractère de Chern équivariant usuel [20, 11]. On peut voir que tout élément de $K_G(T^*M)$ peut être représenté par un bon symbole, de sorte que l'on peut

[3] "à décroissance rapide" signifie "à décroissance rapide ainsi que les dérivées". De même pour "croissance lente".

adopter si l'on veut la construction ci-dessus comme définition du caractère de Chern équivariant sur $K_G(T^*M)$.

La formule des points fixes fait intervenir une généralisation du caractère de Chern dépendant du choix d'un point $s \in G$. La décomposition $TM|M(s) = TM(s) \oplus \mathcal{N}(s)$ permet d'identifier l'espace cotangent $T^*M(s)$ de $M(s)$ et l'espace des points fixes de s dans T^*M. La restriction $\mathcal{E}|M(s)$ de $\mathcal{E}$ à $M(s)$ est un superfibré $G(s)$-équivariant. L'action de s induit dans $\mathcal{E}|M(s)$ un endomorphisme qui sera encore noté s. Pour $X \in \mathfrak{g}(s)$ on pose, en notant encore $F(\sigma) + \mu(X)$ la restriction de $F(\sigma) + \mu(X)$ à $T^*M(s) \subset T^*M$,

$$\mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(X) = \mathrm{str}(se^{F(\sigma)+\mu(X)}). \tag{13}$$

C'est une forme différentielle à décroissance rapide sur $T^*M(s)$ et $\mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))$ est une forme $G(s)$-équivariante sur $T^*M(s)$, fermée à décroissance rapide. Sa classe dans $H^\infty_{G(s),rap}(\mathfrak{g}(s), T^*M(s))$ est notée $\mathrm{ch}_s([\sigma])$. La famille $(\mathrm{ch}_s([\sigma]))_{s\in G}$ est appellée le *bouquet de caractères de Chern* de $[\sigma]$.

2 Opérateurs elliptiques et formule de Kirillov.

Dans toute la suite M est une variété compacte munie d'une action du groupe compact G et $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ un superfibré équivariant sur M. On choisit une structure riemannienne G-invariante sur M, et des structures hermitiennes invariantes sur $\mathcal{E}^\pm$. Suivant [1], nous considérons pour tout $m \in \mathbb{Z}$ la classe des opérateurs pseudo-différentiels $\mathcal{P}^m(M, \mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-)$ d'ordre m qui admettent un symbole principal σ_D. Un élément $D \in \mathcal{P}^m(M, \mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-)$ envoie l'espace des sections différentiables $C^\infty(M, \mathcal{E}^+)$ dans l'espace correspondant $C^\infty(M, \mathcal{E}^-)$, et le symbole σ_D est un homorphisme entre les fibrés $p^*\mathcal{E}^+$ et $p^*\mathcal{E}^-$, défini en dehors de la section nulle, homogène de degré m. L'adjoint D^* appartient à $\mathcal{P}^m(M, \mathcal{E}^-, \mathcal{E}^+)$.

Dans la suite de ce paragraphe, on considère un opérateur pseudo-différentiel elliptique G-invariant D. Les espaces $\ker D \subset C^\infty(M, \mathcal{E}^+)$ et $\ker D^* \subset C^\infty(M, \mathcal{E}^-)$ sont G-invariants et de dimension finie. On note $R(G)$ le groupe abélien libre ayant pour base l'ensemble $\hat{G}$ des classes de représentations irréductibles de dimension finie de G. L'*indice équivariant* de D est l'élément de $R(G)$ défini par la formule $\mathrm{Ind}(D) = \ker D - \ker D^*$. Si V est une représentation de G, on note $m(\lambda, V)$ la multiplicité d'un élément $\lambda \in \hat{G}$ dans V: si V_λ est un représentant de λ, on a $m(\lambda, V) = \dim \mathrm{Hom}_G(V_\lambda, V) = \dim(V \otimes V_\lambda^*)^G$. Considérons le superfibré $\mathcal{E} \otimes V_\lambda^*$ sur M. L'opérateur D induit un opérateur elliptique

$$D_\lambda : C^\infty(M, \mathcal{E}^+ \otimes V_\lambda^*) \to C^\infty(M, \mathcal{E}^- \otimes V_\lambda^*). \tag{14}$$

Nous notons D_λ^G la restriction de D_λ aux sections invariantes:

$$D_\lambda^G : C^\infty(M, \mathcal{E}^+ \otimes V_\lambda^*)^G \to C^\infty(M, \mathcal{E}^- \otimes V_\lambda^*)^G. \tag{15}$$

On a $m(\lambda, \ker D) = \dim \ker D_\lambda^G$ et $m(\lambda, \ker D^*) = \dim \ker D_\lambda^{*G}$. Posons

$$m(\lambda, \operatorname{Ind} D) = \dim \ker D_\lambda^G - \dim \ker D_\lambda^{*G}. \tag{16}$$

On a $\operatorname{Ind}(D) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} m(\lambda, \operatorname{Ind} D)\lambda$.

Notons $\operatorname{Ind}(D, g)$ la valeur du caractère de $\operatorname{Ind} D$ en un point $g \in G$. Donc

$$\operatorname{Ind}(D, g) = \operatorname{tr}(g, \ker D) - \operatorname{tr}(g, \ker D^*) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} m(\lambda, \operatorname{Ind} D)\, \chi_\lambda(g) \tag{17}$$

où $\chi_\lambda(g) = \operatorname{tr}(g, V_\lambda)$ est le caractère de la représentation λ. Le caractère $\operatorname{Ind}(D, .)$ est une fonction analytique sur G. Si l'on note dg la mesure de Haar sur G pour laquelle le volume de G est 1 et si l'on connaît le caractère $\operatorname{Ind}(D, .)$, on peut en principe calculer les entiers $m(\lambda, \operatorname{Ind} D)$ par la formule

$$m(\lambda, \operatorname{Ind} D) = \int_G \operatorname{Ind}(D, g)\, \overline{\chi_\lambda(g)}\, dg. \tag{18}$$

Considérons un point s de G. Un point $g \in G$ voisin de s est conjugué d'un point de la forme se^X, où $X \in \mathfrak{g}(s)$ est voisin de 0. Le théorème suivant est dû à Berline-Vergne [9, 11] qui l'appellent “formule de Kirillov” à cause de sa ressemblance remarquable (lorsque $s = 1$) avec la formule proposée par Kirillov pour le caractère des représentations unitaires des groupes de Lie associées à une orbite coadjointe. Dans le théorème suivant, la forme $n_s(M)(X)$ sur $M(s)$ est définie en (10) et on note encore $n_s(M)(X)$ son image réciproque sur $T^*M(s)$. D'autre part la variété $T^*M(s)$ est munie de son orientation symplectique : soient x_i un système de coordonnées locales sur $M(s)$ et y_i les coordonnées duales sur $T^*M(s)$, l'orientation de $T^*M(s)$ est donnée par la forme $\prod dx_i dy_i$.

Théorème 2 *Pour X voisin de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$, on a*

$$\operatorname{Ind}(D, se^X) = \int_{T^*M(s)} \operatorname{ch}_s([\sigma_D])(X)\, n_s(M)(X)^{-1}. \tag{19}$$

En faisant $X = 0$, on retrouve la formule d'Atiyah-Segal-Singer [3, 5] pour $\operatorname{Ind}(D, s)$. La démonstration de [9] consiste à utiliser la formule de localisation de [7]. Celle-ci permet de calculer l'intégrale de la forme équivariante du second membre comme une intégrale sur les points fixes de X dans $T^*M(s)$, c'est-à-dire sur les points fixes de $g = se^X$ dans T^*M. On trouve précisément la formule d'Atiyah-Segal-Singer pour $\operatorname{Ind}(D, g)$.

Remarques. 1. Dans le cas d'un opérateur de Dirac sur une variété spinorielle orientée de dimension paire, l'intégrale ci-dessus peut être écrite comme l'intégrale sur $M(s)$ d'une certaine forme différentielle équivariante faisant intervenir le genre $\hat{A}(M(s))$. Dans cette situation, Bismut a raffiné le théorème 2 en un théorème de l'indice local (voir [14, 6]).

2. La formule 19 permet d'envisager de calculer $\int_G \operatorname{Ind}(D, g)\, \psi(g)\, dg$ lorsque $\psi \in C_c^\infty(G)$ a son support voisin de s. Bien que ce soit un début, ce n'est pas encore suffisant

pour obtenir des formules intéressantes pour $m(\lambda, D)$ par la formule (18) (voir [25, 21]). Mais c'est bien adapté aux problèmes de distributions considérés plus loin.

3. Soit $g \in G$ et supposons que l'on ait deux décompositions de g comme ci-dessus: $g = se^X = s'e^{X'}$. L'identité $\mathrm{Ind}(D, se^X) = \mathrm{Ind}(D, s'e^{X'})$ peut être prouvée directement (grâce à la formule de localisation) à partir de la formule (19). Les familles $(\alpha_s)_{s\in G}$, où chaque α_s est une forme $G(s)$-équivariante, donnant lieu à des identités analogues sont systématiquement étudiées dans [17].

3 Opérateurs transversalement elliptiques.

Les notations sont celles de la section 2. Notons $T^*_G M$ l'espace conormal à l'espace des orbites de G dans M: un vecteur $(x, \xi) \in T^*M$ appartient à $T^*_G M$ si et seulement si $\xi(X_M(x)) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Notons β la 1-forme canonique sur T^*M et posons

(20)
$$\omega_{\mathfrak{g}} = -d_{\mathfrak{g}}\beta.$$

Pour $X \in \mathfrak{g}$, on a $\omega_{\mathfrak{g}}(X) = f(X) + \omega$, où $\omega = -d\beta$ est la structure symplectique canonique de T^*M et $f(X)$ la fonction sur T^*M définie par la formule $f(X)(x, \xi) = \xi(X_M(x))$. Donc f est le moment associé à une action hamiltonnienne sur T^*M (voir l'exemple 1). Considérant le moment f comme une application de T^*M dans $\mathfrak{g}^*$, on voit que $T^*_G M$ est égal à $f^{-1}(0)$.

Suivant [1], un opérateur pseudodifférentiel G-invariant $D \in \mathcal{P}^m(M, \mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-)$ est dit *transversalement elliptique* si son symbole σ_D est inversible dans $T^*_G M\backslash 0$. Soit D un opérateur transversalement elliptique. Atiyah [1] montre que D induit un opérateur de Fredholm de $C^\infty(M, \mathcal{E}^+)^G$ dans $C^\infty(M, \mathcal{E}^-)^G$. De même, pour tout $\lambda \in \hat{G}$, l'opérateur D_λ défini comme ci-dessus est transversalement elliptique et sa restriction D^G_λ aux sections invariantes est un opérateur de Fredholm. On définit les entiers $m(\lambda, D)$ par la formule (16) et l'indice par la somme (formelle) $\mathrm{Ind}(D) = \sum m(\lambda, \mathrm{Ind}\, D)\lambda$. Notons $C^{-\infty}(N)$ l'espace des fonctions généralisées sur une variété N (c'est-à-dire le dual au sens de L. Schwartz de l'espace des densités C^∞ à support compact sur N). Atiyah [1] montre que la somme $\sum m(\lambda, \mathrm{Ind}\, D)\chi_\lambda$ converge dans $C^{-\infty}(G)$. On notera $\mathrm{Ind}(D, .)$ cette fonction généralisée. Avec quelques précautions, on peut encore définir $\mathrm{Ind}(D, .)$ par la première égalité de la formule (17). Notons $R^{-\infty}(G)$ l'espace des fonctions généralisées G-invariantes χ sur G de la forme $\chi = \sum_\lambda m_\lambda \chi_\lambda$, où les coefficients de Fourier m_λ sont entiers.

Le triplet $(\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-, \sigma_D)$, restreint à $T^*_G M$, représente un élément $[\sigma_D]$ de $K_G(T^*_G M)$. Atiyah montre que l'indice $\mathrm{Ind}\, D \in R^{-\infty}(G)$ ne dépend que de $[\sigma_D]$ et, d'autre part, que tout élément de $K_G(T^*_G M)$ peut être représenté par le symbole d'un opérateur transversalement elliptique. L'indice définit donc un homomorphisme de groupes (et même de

$R(G)$-modules)

$$\text{Ind} : K_G(T_G^*M) \to R^{-\infty}(G) \tag{21}$$

appelé *indice analytique*.

Soient U un ouvert G-invariant de M et $t \in K_G(T_G^*U)$, et notons $j_*^M t$ l'image de t dans $K_G(T_G^*M)$. On pose $\text{Ind}(t) = \text{Ind}(j_*^M t)$. Atiyah montre (c'est la *propriété d'excision*) que $\text{Ind}(t)$ est indépendant du choix du plongement équivariant j^M de U dans la G-variété compacte M et donc qu'il est intrinsèquement défini.

Un opérateur elliptique est évidemment transversalement elliptique, mais il y a d'autres exemples intéressants.

Exemple 3 (Représentations induites). Soient H un sous-groupe fermé de G et E l'espace d'une représentation de dimension finie de H. On considère le fibré $\mathcal{E} = G \times_H E$ de base G/H. On pose $\mathcal{E}^+ = \mathcal{E}$, $\mathcal{E}^- = 0$ et $D = 0$. On a $\ker D = C^\infty(G/H, \mathcal{E})$. C'est l'espace de la représentation de G induite par la représentation E de H et la distribution $\text{Ind}(D, .)$ est le caractère de la représentation induite. Plus généralement, on peut induire un opérateur elliptique H-équivariant sur une H-variété Z en un opérateur transversalement elliptique G-équivariant sur la variété $M = G \times_H Z$, et l'indice commute à l'induction.

Remarque. Sauf si G/H est fini, cette opération d'induction est impossible dans le cadre des opérateurs elliptiques. Elle permet de ramener nombre de problèmes sur les opérateurs G-invariants elliptiques ou transversalement elliptiques en des problèmes sur des opérateurs $U(n)$-transversalement elliptiques (en choisissant n de telle sorte qu'il existe un plongement de G dans $U(n)$) puis, par restriction au sous-groupe des matrices diagonales $T = S_1^n$, en des problèmes sur des opérateurs T-transversalement elliptiques. Malheureusement, cette liberté de mouvement est chèrement payée par le fait que, contrairement à $K_T(T^*V)$ qui est donné par l'isomorphisme de Thom, il est beaucoup plus difficile de décrire $K_T(T_T^*V)$ pour un tore T agissant linéairement dans un espace vectoriel réel V (voir [1]).

Exemple 4 (Actions libres). On considère une variété P dans laquelle opèrent à gauche un groupe compact G et à droite un groupe compact H. On suppose que ces actions commutent et que H opère librement dans P, de sorte que P est un fibré principal G-équivariant de base $M = P/H$. L'espace T^*M s'identifie à l'espace des orbites de H dans T_H^*P, de sorte qu'il y a une bijection entre les fibrés vectoriels H-équivariants sur T_H^*P et les fibrés vectoriels sur T^*M. Notant q la projection de P sur P/H, on obtient des isomorphismes[4] $q^* : K_G(T^*M) \simeq K_{G\times H}(T_H^*P)$ et $q^* : K_G(T_G^*M) \simeq K_{G\times H}(T_{G\times H}^*P)$. On peut donc relever[5] un opérateur G-invariant elliptique sur M en

[4] Il serait plus correct dans la suite de considérer le groupe $G \times H^o$, où H^o est le groupe opposé.

[5] au moins au niveau des symboles

un opérateur H-transversalement elliptique $G \times H$-invariant sur P et un opérateur G-invariant transversalement elliptique sur M en un opérateur $G \times H$-transversalement elliptique $G \times H$-invariant sur P. De plus, q^* munit $K_G(T^*_G M)$ d'une structure de $R(H)$-module. Les indices sont reliés par la formule suivante [1]. Soit $[\sigma] \in K_G(T^*_G M)$. On a l'identité de fonctions généralisées sur $G \times H$

$$\operatorname{Ind}(q^*[\sigma], (g,h)) = \sum_{\tau \in \hat{H}} \chi_\tau(h) \operatorname{Ind}(\tau^* \otimes [\sigma], g) \tag{22}$$

où $\tau^* \otimes [\sigma]$ désigne le produit de $\tau^* \in \hat{H} \subset R(H)$ par $[\sigma]$.

Exemple 5 (Représentation régulière). L'opérateur nul $C^\infty(H) \to 0$ est transversalement elliptique pour l'action de H sur lui même par translations (c'est un cas particulier de l'exemple 4 avec $P = H$), son indice est la distribution de Dirac $\delta(h)$, de support $\{1\}$, et la formule (22) est la formule de Peter-Weyl $\delta(h) = \sum_{\tau \in \hat{H}} \chi_\tau(h) \dim \tau$.

Exemple 6 (symbole d'Atiyah). Soient $V = \mathbb{C}$ considéré comme une variété réelle, $G = S^1$ le groupe de nombres complexes de module 1 agissant dans V par multiplication. On identifie V à V^* par la forme $Re(z\bar{\xi})$, et T^*V à $V \times V$. On a $T^*_G V = \{(z,\xi); z \in \mathbb{C}, \xi \in \mathbb{C}, Im(z\bar{\xi}) = 0\}$. Soient $\mathcal{E}^+$ le fibré $V \times \mathbb{C}$ avec l'action triviale de G dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{E}^-$ le fibré $V \times \mathbb{C}$ avec l'action naturelle de G dans $\mathbb{C}$. Posons $m((z,\xi)) = z - i\xi$. Le triplet $(p^*\mathcal{E}^+, p^*\mathcal{E}^-, m)$ représente un élément $[m] \in K_G(T^*V)$. Son indice est calculé dans [1]:

$$\operatorname{Ind}([m], z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n. \tag{23}$$

C'est la valeur au bord de la fonction $-z/(1-z)$ définie pour $|z| < 1$.

4 Indice cohomologique des opérateurs transversalement elliptiques.

N. Berline et M. Vergne associent à $[\sigma] \in K_G(T^*_G M)$ une fonction généralisée $\operatorname{Ind}_c([\sigma]) \in C^{-\infty}(G)^G$, appelée *l'indice cohomologique.* Leur méthode est basée sur la notion de bon symbole transversalement elliptique, généralisant la notion de bon symbole elliptique introduite plus haut: un symbole G-invariant $\sigma \in C^\infty(T^*M, Hom(p^*\mathcal{E}^+, p^*\mathcal{E}^-))^G$ est un *bon symbole transversalement elliptique* s'il est à croissance lente et s'il existe $a > 0$, $c > 0$ et $r > 0$ tels que l'on ait $U(\sigma)^2(x,\xi) \geq c||\xi||^2$ pour tout $(x,\xi) \in T^*M$ tel que $||\xi|| \geq r$ et $||f(x,\xi)|| \leq a||\xi||$. Si D est un opérateur différentiel G-invariant d'ordre ≥ 1 transversalement elliptique, son symbole σ_D est bon. Si D est seulement pseudo-différentiel d'ordre ≥ 1, on obtient un bon symbole en modifiant arbitrairement σ_D dans un voisinage de la section nulle, pour le rendre C^∞. Tout élément de $K_G(T^*_G M)$ peut être représenté par un bon symbole transversalement elliptique.

Nous voulons construire des distributions invariantes sur un ouvert $W \subset \mathfrak{g}$ comme intégrale de formes différentielles équivariantes. Il est naturel d'introduire la notion suivante: une forme différentielle équivariante $\alpha \in \mathcal{A}_G^\infty(W, T^*M)$ sur T^*M est "à décroissance rapide en moyenne" si pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(W)$ la forme différentielle $\int_\mathfrak{g} \alpha(X)\phi(X)dX$ sur T^*M est à décroissance rapide. On note $\mathcal{A}_{G,rap-m}^\infty(W, T^*M)$ l'espace de ces formes. Il est stable par $d_\mathfrak{g}$ et on note $H_{G,rap-m}^\infty(W, T^*M)$ la cohomologie correspondante. Pour $\alpha \in \mathcal{A}_{G,rap-m}^\infty(W, T^*M)$, l'intégrale $\int_{T^*M} \alpha(X)$ est bien définie comme élément de $C^{-\infty}(W)$ et il en est de même pour une classe $\alpha \in H_{G,rap-m}^\infty(W, T^*M)$.

Dans la suite, nous considérons un bon symbole transversalement elliptique σ et sa classe $[\sigma] \in K_G(T_G^*M)$. Pour définir l'indice cohomologique $\mathrm{Ind}_c([\sigma])$, il pourrait être tentant d'essayer directement la formule (19) en utilisant les formes $\mathrm{ch}_s(A(\sigma))$. Mais il semble impossible de donner un sens –même comme distribution– à l'intégrale $\int_{T^*M(s)} \mathrm{ch}_s(A(\sigma))(X)\, n_s(M)(X)^{-1}$ car la forme $\mathrm{ch}_s(A(\sigma))(X)$ ne décroit que dans les directions situées dans un voisinage conique de $f^{-1}(0) \cap T^*M(s)$. On rend $\mathrm{ch}_s(A(\sigma))(X)$ rapidement décroissant en moyenne en le multipliant par un facteur oscillant dans les directions supplémentaires. Rappelons la forme équivariante $\omega_\mathfrak{g} = -d_\mathfrak{g}\beta = f + \omega$ (formule (20) ci-dessus) définissant la structure hamiltonnienne de T^*M. La forme équivariante $e^{i\omega_\mathfrak{g}}$ est fermée. Pour $X \in \mathfrak{g}$, on a $e^{i\omega_\mathfrak{g}}(X) = e^{i(f(X)+\omega)}$.

Théorème 3 *[12] Soit $s \in G$. Pour $X \in \mathfrak{g}(s)$, posons*

$$\mathrm{ch}_s^\omega(\mathbb{A}(\sigma))(X) = e^{i(f(X)+\omega)}\, \mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(X).$$

Cette formule définit une forme $\mathrm{ch}_s^\omega(\mathbb{A}(\sigma)) \in \mathcal{A}_{G(s),rap-m}^\infty(\mathfrak{g}(s), T^*M(s))$.

Sa classe $\mathrm{ch}_s^\omega([\sigma]) \in H_{G(s),rap-m}^\infty(\mathfrak{g}(s), T^*M(s))$ ne dépend que de $[\sigma] \in K_G(T_G^*M)$.

Lorsque σ est elliptique, on voit que $\mathrm{ch}_s^\omega([\sigma])$ est l'image du caractère $\mathrm{ch}_s([\sigma])$ par l'application naturelle de $H_{G(s),rap}^\infty(\mathfrak{g}(s), T^*M(s))$ dans l'espace $H_{G(s),rap-m}^\infty(\mathfrak{g}(s), T^*M(s))$. Il est raisonnable d'appeler la famille $(\mathrm{ch}_s^\omega([\sigma]))_{s\in G}$ le bouquet de caractères de Chern du symbole transversalement elliptique $[\sigma]$.

Remarque. Notons encore β l'endomorphisme de $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$ obtenu par la multiplication par β. On considère la superconnexion $\mathbb{A}(\sigma) - i\beta$ sur $\mathcal{E}$, et on a $\mathrm{ch}_s^\omega(\mathbb{A}(\sigma)) = \mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma) - i\beta)$.

Théorème 4 *Soit σ un bon symbole transversalement elliptique. Il existe une unique fonction généralisée $\mathrm{Ind}_c(\sigma) \in C^{-\infty}(G)^G$ telle que, pour tout $s \in G$, il existe un voisinage ouvert $G(s)$-invariant W_s de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$ tel que l'on ait l'identité de fonctions généralisées dans W_s:*

$$\mathrm{Ind}_c(\sigma)(se^X) = \int_{T^*M(s)} e^{i(f(X)+\omega)}\, \mathrm{ch}_s(A(\sigma))(X)\, n_s(M)(X)^{-1}. \tag{24}$$

De plus, $\mathrm{Ind}_c(\sigma)$ ne dépend que de la classe $[\sigma]$ de σ dans $K_G(T_G^*M)$.

On posera donc $\mathrm{Ind}_c([\sigma]) = \mathrm{Ind}_c(\sigma)$. C'est l'indice cohomologique. Compte tenu du théorème 3, on peut écrire la formule (24) sous la forme plus cohomologique

$$\mathrm{Ind}_c([\sigma])(se^X) = \int_{T^*M(s)} \mathrm{ch}_s^\omega([\sigma])(X)\, n_s(M)(X)^{-1}.$$

La démonstration de ce théorème fait l'objet de [12]. Elle a deux parties. La première consiste à montrer que l'intégrale figurant dans la formule (24) converge bien vers une fonction généralisée dans W_s. Pour ceci, comme expliqué plus haut, le facteur $e^{i(f(X)+\omega)}$ est crucial. La seconde consiste à montrer que les formules (24) sont compatibles entre elles quand s varie. Cela résulte, plus péniblement que dans le cas des symboles elliptiques (voir la remarque 3 suivant le théorème 2), de la formule de localisation.

La formule de l'indice transversalement elliptique peut maintenant être énoncée.

Théorème 5 *[13] Pour tout* $[\sigma] \in K_G(T_G^*M)$, *on a* $\mathrm{Ind}([\sigma]) = \mathrm{Ind}_c([\sigma])$.

Remarque. 1. Lorsque σ est un symbole elliptique, les formes $\mathrm{ch}_s(A(\sigma))(X)$ et $e^{i(f(X)+\omega)}\mathrm{ch}_s(A(\sigma))(X)$ définissent la même classe à décroissance rapide, le facteur $e^{i(f(X)+\omega)}$ de la formule (24) peut être ignoré, et on retrouve la formule (19). Lorsque σ est seulement transversalement elliptique, ce facteur est indispensable pour donner un sens à l'intégrale.

2. Il est intéressant de remarquer que dans le théorème de l'indice de Fedosov [18], qui se situe dans le cadre des variétés symplectiques, le facteur e^ω figure également (voir l'exposé de Weinstein [27]).

Disons quelques mots de la démonstration du théorème 5. Elle consiste à établir que l'indice cohomologique peut être calculé par le même algorithme que celui donné pour l'indice analytique dans [1]. Parmi les points qu'il faut vérifier, mentionnons ceux déjà évoqués dans le paragraphe précédent à propos de l'indice analytique: l'indice cohomologique vérifie la propriété d'excision (permettant de définir l'indice cohomologique pour des variétés U ouvertes dans un espace compact), la formule (22) de l'exemple 4 et la formule (23) de l'exemple 6.

Pour terminer ce rapport, je signale que, comme dans Atiyah [1], les théorèmes ci-dessus, appliqués à des actions presque libres (c'est la situation de l'exemple 4, où l'on suppose seulement que H opère avec des stabilisateurs finis), ont des applications aux orbifolds. Plus précisément, dans [26], M. Vergne donne des formules pour l'indice équivariant des opérateurs elliptiques G-invariants sur les orbifolds compacts munis d'une action du groupe compact G.

Références

[1] M. F. ATIYAH. Elliptic operators and compact groups. *Lecture Notes in Mathematics 401, Springer,* 1974.

[2] M. F. ATIYAH ET R. BOTT. The moment map and equivariant cohomology. *Topology,* **23** (1984), 1–28.

[3] M. F. ATIYAH ET G. B. SEGAL. The index of elliptic operators II. *Ann. Math.,* **87** (1968), 531–545.

[4] M. F. ATIYAH ET I. M. SINGER. The index of elliptic operators. I. *Ann. Math.,* **87** (1968), 484–530.

[5] M. F. ATIYAH ET I. M. SINGER. The index of elliptic operators. III. *Ann. Math.,* **87** (1968), 546–604.

[6] N. BERLINE, E. GETZLER ET M. VERGNE. Heat kernels and Dirac operators. *Grundlehren der math. Wissenschaft 298. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York,* 1991.

[7] N. BERLINE ET M. VERGNE. Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante. *C. R. Acad. Sci. Paris,* **295** (1982), 539–541.

[8] N. BERLINE ET M. VERGNE. Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes. *Duke Math. Journal,* **50** (1983), 539–549.

[9] N. BERLINE ET M. VERGNE. The equivariant index and Kirillov character formula. *Amer. J. of Math,* **107** (1985), 1159–1190.

[10] N. BERLINE ET M. VERGNE. Indice équivariant et caractère d'une représentation induite. *In* D-modules and Microlocal geometry. *Walter de Gruyter* (1992).

[11] N. BERLINE ET M. VERGNE. The equivariant Chern character and index of G-invariant operators. *In* D-modules, representation theory and quantum groups, Venezia 1992. *Springer Lecture Notes in Math.* 1565 (1992.)

[12] N. BERLINE ET M. VERGNE. The equivariant Chern character of a transversally elliptic symbol and the equivariant index. *Invent. Math., à paraître.*

[13] N. BERLINE ET M. VERGNE. L'indice équivariant des opérateurs transversalement elliptiques. *Invent. Math., à paraître.*

[14] J.-M. BISMUT. The infinitesimal Lefschetz formulas: a heat equation proof. *J. Funct. Analysis,* **62** (1985), 435–457.

[15] H. CARTAN. Notions d'algèbre différentielle; applications aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie. In "Colloque de Topologie". *C. B. R. M., Bruxelles,* (1950), 15-27.

[16] H. CARTAN. La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal. In "Colloque de Topologie". *C. B. R. M., Bruxelles,* (1950), 57-71.

[17] M. DUFLO ET M. VERGNE. Cohomologie équivariante et descente. *Astérisque,* **215** (1993), 5–108.

[18] B. V. FEDOSOV. Index theorem in the algebra of quantum observables. *Sov. Phys. Dokl.* , **34** (1989), 318–321.

[19] B. KOSTANT. Quantization and unitary representations. In *Modern analysis and applications,. Lecture Notes in Mathematics,* **39** (1970), 87–207.

[20] D. QUILLEN. Superconnections and the Chern character. *Topology,* **24** (1985), 89–95.

[21] E. MEINRENKEN. On Riemann-Roch formulas for Multiplicities. Preprint, MIT 1994.

[22] J.M. SOURIAU. Structure des systèmes dynamiques. *Dunod, Paris* , 1991.

[23] M. VERGNE. Formule de Kirillov et indice de l'opérateur de Dirac. In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1983, Varsovie. *PWN- Polish Scientific Publishers. North Holland, Amsterdam, New-York, Oxford,* 1984.

[24] M. VERGNE. Sur l'indice des opérateurs transversalement elliptiques. *C. R. Acad. Sci. Paris,* **310** (1990), 329–332.

[25] M. VERGNE. Quantification géométrique et multiplicités. *C. R. Acad . Sci. Paris,* **319** (1994), 327–332.

[26] M. VERGNE. Equivariant index formulas for orbifolds. *Duke Math. J., à paraître.*

[27] A. WEINSTEIN. Deformation quantization. Séminaire Bourbaki, 789, Juin 1994.

[28] E. WITTEN. Supersymmetry and Morse theory. *J. Diff. Geom.*, **17** (1982), 661–692.

Michel DUFLO

UFR de Mathématiques
URA 748 du CNRS
Université Paris 7-Denis Diderot
2 place Jussieu
F-75251 Paris cedex 05

JEAN-LOUIS LODAY

La renaissance des opérades

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki, exp. n° 792, p. 47-74
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__47_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 1994
47ème année, 1994-95, n° 792

LA RENAISSANCE DES OPÉRADES

par **Jean-Louis LODAY**

INTRODUCTION

Soit V un espace vectoriel de base $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $S(V)$ l'algèbre symétrique sur V (i.e. algèbre de polynômes en les x_i) et $\Lambda(V)$ l'algèbre extérieure sur V (i.e. $x_i x_j = -x_j x_i$), considérée comme une algèbre graduée. On sait que l'espace vectoriel gradué $S(V) \otimes \Lambda(V^*)$ peut être muni d'une différentielle de degré -1 qui en fait un complexe de chaînes acyclique. C'est l'exemple le plus simple d'un complexe de Koszul. En 1972 S. Priddy [P] a montré que certaines algèbres associatives quadratiques A avaient, comme $S(V)$, un dual $A^!$ ($= \Lambda(V^*)$ dans notre exemple), tel que sur $A \otimes A^!$ il existe une différentielle qui en fait un complexe acyclique. Ce sont les *algèbres de Koszul.*

Une telle dualité était déjà bien connue pour les algèbres de Lie et les algèbres commutatives : c'est la dualité de Quillen (qui échange algèbres commutatives différentielles graduées et algèbres de Lie différentielles graduées) employée avec succès en homotopie rationnelle [Q]. Stimulés par les travaux de Maxim Kontsevich [K], V. Ginzburg et M. Kapranov viennent de montrer qu'on peut construire une telle dualité pour d'autres types d'algèbres. Comme dans le cas des algèbres de Lie et des algèbres commutatives l'algèbre duale est, en général, d'un autre type que l'algèbre de départ.

Il faut donc expliciter ce qu'on entend par "type d'algèbres" et se donner les moyens de travailler avec. C'est ici que la notion d'*opérades* intervient.

Bien qu'on en trouve déjà trace dans l'article de Lazard [La] sur les groupes formels, l'idée de base a surtout été développée à Chicago dans les années 70 par les topologues algébristes (S. MacLane [McL], J. Stasheff [St], J.P. May [May], J.M. Boardmann, R. Vogt [BV], F.R. Cohen [Coh]) pour étudier les espaces de lacets. Au lieu de décrire un type d'algèbre par ses générateurs (les "opérations") et ses relations (les "identités fondamentales"), on se donne a priori *toutes* les opérations que l'on peut faire sur un nombre fini de variables et *toutes* les relations entre ces opérations. Cette structure a été baptisée par J.P. May : une *opérade*. Le principal intérêt de ce point de vue est de pouvoir comparer entre eux des types d'algèbres de nature a priori différente. En d'autres termes on a une notion de *morphisme d'opérades*.

C'est dans ce contexte que V. Ginzburg et M. Kapranov ont étendu la dualité de Koszul : une opérade quadratique $\mathcal{P}$ admet une opérade duale $\mathcal{P}^!$ et, lorsque le "bar-complexe" de $\mathcal{P}$ est quasi-isomorphe à $\mathcal{P}^!$, l'opérade est dite *de Koszul*. Le dual d'une $\mathcal{P}$-algèbre quadratique est une $\mathcal{P}^!$-algèbre et on peut alors faire une théorie de la dualité de Koszul pour ces algèbres. Pour les opérades **As**, **Lie** et **Com** correspondant respectivement aux algèbres associatives, aux algèbres de Lie et aux algèbres commutatives, on trouve

$$\mathbf{As}^! = \mathbf{As}, \quad \mathbf{Lie}^! = \mathbf{Com}, \quad \mathbf{Com}^! = \mathbf{Lie}.$$

Les résultats de Priddy et de Quillen s'insèrent donc dans un cadre général.

L'intérêt de la dualité de Koszul pour les opérades dépasse la simple généralisation du cas des algèbres associatives. Toute étude des $\mathcal{P}$-algèbres pour une opérade de Koszul $\mathcal{P}$ fait immanquablement intervenir l'opérade duale $\mathcal{P}^!$. Par exemple la cohomologie $H^*_{\mathcal{P}}(A)$ d'une $\mathcal{P}$-algèbre A est munie d'une structure de $\mathcal{P}^!$-algèbre graduée. Ainsi plusieurs résultats récents, par exemple ceux de E. Getzler et J.D.S. Jones [GeJ], ont pour point principal la démonstration qu'une certaine opérade est de Koszul (cf. aussi [Ge1, 2, 3], [GeK2], [Lo2]). On devrait voir plusieurs autres résultats de ce type dans un proche avenir.

L'article de Ginzburg et Kapranov se présente comme une analogie par rapport à la théorie de Priddy. Mais on peut voir une opérade comme une algèbre associative dans une certaine catégorie monoïdale. Donc en fait ces deux théories sont des cas particuliers d'une théorie de la dualité de Koszul dans une catégorie monoïdale.

Signalons que la notion d'opérade joue un rôle primordial dans de nombreux autres domaines : en topologie algébrique bien sûr, mais aussi dans l'étude des espaces de modules (en liaison avec la théorie quantique des champs), dans l'étude des algèbres d'opérateurs vertex, en géométrie algébrique, en combinatoire, etc (voir la liste des références).

Dans le premier paragraphe on présente la notion d'opérade (linéaire) et on donne des exemples. Dans le second paragraphe (indépendant du premier) on rappelle très succinctement la théorie de la dualité de Koszul pour les algèbres associatives. Dans les paragraphes 3 et 4 on expose une partie des résultats de [GK] sur la dualité de Koszul des opérades. Le paragraphe 5 indique quelques autres résultats et sujets d'actualité liés aux opérades linéaires.

Notations. Dans cet exposé $\mathbb{K}$ désigne un corps que l'on supposera de caractéristique zéro. La catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ est notée $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, et $\otimes_{\mathbb{K}} = \otimes$. On note $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, et le groupe des automorphismes de $[n]$ est le groupe de permutations S_n. Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une action de S_n son dual linéaire $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ est aussi un S_n-module. On note $V^\vee$ le tensorisé de V^* par la représentation signature de S_n : $V^\vee = V^* \otimes (\mathrm{sgn})$.

1. OPÉRADES $\mathbb{K}$-LINÉAIRES.

Étant donné un "type d'algèbres" $\mathcal{P}$ on considère l'espace vectoriel $\mathcal{P}(n)$ des opérations sur n variables $x_1, \ldots, x_n$. Donc pour tout $\mu \in \mathcal{P}(n)$ et tout $x_1, \ldots, x_n \in A$, où A est une algèbre de type $\mathcal{P}$, on a un élément $\mu(x_1, \ldots, x_n) \in A$. Plus précisément on a une application linéaire

$$(1.0) \qquad \varphi : \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \longrightarrow A, \ \varphi_n(\mu; x_1, \ldots, x_n) = \mu(x_1, \ldots, x_n).$$

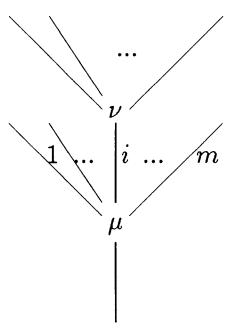
Puisque le groupe symétrique S_n opère (à gauche) sur $A^{\otimes n}$ on peut le faire opérer (à droite) sur $\mathcal{P}(n)$ de façon à ce que φ soit compatible à ces actions :

$$\mu(\sigma.(x_1, \ldots, x_n)) = \mu^\sigma(x_1, \ldots, x_n).$$

On peut *composer* les opérations de la manière suivante. Donnons nous deux opérations $\mu \in \mathcal{P}(m)$ et $\nu \in \mathcal{P}(n)$, et un entier i, $1 \leq i \leq m$. A partir des $m + n - 1$ variables $x_1, \ldots, x_{m+n-1}$ on effectue ν sur $(x_i, \ldots, x_{i+n-1})$, puis μ sur

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, \nu(x_i, \ldots, x_{i+n-1}), x_{i+n}, \ldots, x_{m+n-1}).$$

Ceci nous donne une nouvelle opération notée $\mu \circ_i \nu \in \mathcal{P}(m + n - 1)$.

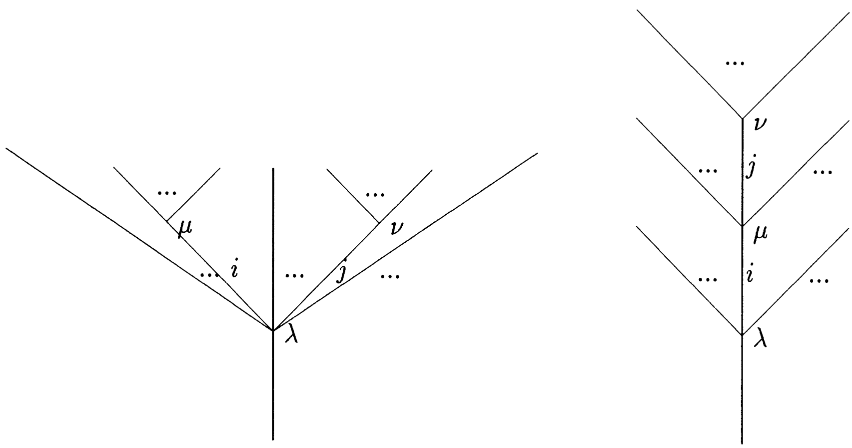


Par action sur les "feuilles" de l'arbre ci-dessus, les permutations $\pi \in S_m$ et $\rho \in S_n$ définissent $\sigma := \pi \circ_i \rho \in S_{m+n-1}$.

On a évidemment

$$(a) \qquad \mu^{\pi} \circ_{\pi(i)} \nu^{\rho} = (\mu \circ_i \nu)^{\sigma}.$$

Si on effectue deux compositions, deux cas peuvent se produire :



Dans chacun de ces cas il y a deux manières d'effectuer successivement les compositions. Chacune de ces deux manières va donner le même résultat, on a donc une propriété d' *associativité* de la composition :

pour $\lambda \in \mathcal{P}(l), \mu \in \mathcal{P}(m), \nu \in \mathcal{P}(n)$ on a

$$(b) \qquad (\lambda \circ_i \mu) \circ_{j+m-1} \nu = (\lambda \circ_j \nu) \circ_i \mu \quad \text{si} \quad 1 \leq i < j \leq l,$$

$$(c) \qquad (\lambda \circ_i \mu) \circ_{i-1+j} \nu = \lambda \circ_i (\mu \circ_j \nu) \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m.$$

Ces propriétés indiquent qu'un parenthésage (i.e. un arbre) quelconque d'opérations donne naissance à une seule opération quelque soit l'ordre dans lequel les compositions prescrites sont effectuées.

1.1. Définitions. Une *opérade* $\mathbb{K}$-*linéaire* (sans unité) $\mathcal{P}$ est la donnée pour tout $n \geq 1$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{P}(n)$ muni d'une action de S_n, et d'applications de composition $\circ_i$ vérifiant les relations (a), (b) et (c) ci-dessus (voir 1.4 pour une définition équivalente).

La définition donnée ici est celle d'une opérade sans unité. On peut aussi définir la notion d'opérade avec unité et la notion d'opérade augmentée. Comme dans le cas des algèbres, il y a une équivalence entre opérades sans unité $\mathcal{P}$ et opérades augmentées $\mathcal{P}^+$. On a $\mathcal{P}^+(n) = \mathcal{P}(n)$ pour $n \neq 1$, et $\mathcal{P}^+(1) = \mathbb{K} \oplus \mathcal{P}(1)$.

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'*opérade des endomorphismes* $\mathcal{E}_V$ consiste en les espaces

$$\mathcal{E}_V(n) := \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V), n \geq 1,$$

où l'action de S_n et la composition sont évidentes.

Par définition une *$\mathcal{P}$-algèbre* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni d'un morphisme d'opérade de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{E}_A$ (voir 1.0).

Par définition un *module* sur la $\mathcal{P}$-algèbre A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel M muni, pour tout n, d'une application linéaire

$$\psi : \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n-1} \otimes M \longrightarrow M$$

compatible à l'action de $S_{n-1} \subset S_n$ et aux compositions. Une $\mathcal{P}$-algèbre est évidemment un module sur elle-même.

Pour une opérade $\mathcal{P}$ donnée les espaces $\mathcal{P}(n)$ sont reliés aux $\mathcal{P}$-algèbres libres de la manière suivante. Soit $F_{\mathcal{P}}(x_1, \ldots, x_n)$ la $\mathcal{P}$-algèbre libre sur n variables. Alors $\mathcal{P}(n)$ est, en tant que S_n-modules, la partie n-multilinéaire de $F_{\mathcal{P}}(x_1, \ldots, x_n)$.

1.2. Exemples : Voici quelques exemples d'opérades unitaires augmentées.

(a) *Algèbres associatives.* On travaille ici avec les algèbres associatives *sans* unité. L'algèbre libre sur V est l'algèbre tensorielle (sans unité)

$$T(V) = V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \oplus \cdots$$

Si $\dim V = n$ la partie n-multilinéaire (engendrée par les monômes à n éléments où chaque vecteur de base x_i de V apparaît une fois et une seule) de $T(V)$ a pour base les $\sigma.(x_1 \cdots x_n) = x_{\sigma^{-1}(1)} \cdots x_{\sigma^{-1}(n)}$. Ainsi l'espace $\mathbf{As}(n)$ de l'opérade $\mathbf{As}$ est isomorphe à la représentation régulière de S_n soit $\mathbf{As}(n) \cong \mathbb{K}[S_n]$. Un module au sens précédent est un bimodule au sens classique.

(b) *Algèbres commutatives* (associatives sans unité). L'opérade associée $\mathbf{Com}$ est telle que $\mathbf{Com}(n) = \mathbb{K}$ est la représentation triviale de S_n. En effet l'algèbre de polynômes sur $x_1, \ldots, x_n$ n'a qu'un générateur en dimension n ; c'est le monôme $x_1 x_2 \ldots x_n$ sur lequel S_n opère trivialement.

(c) *Algèbre de Lie.* Le crochet de Lie $[-,-]$ est une opération binaire qui vérifie

$$[x,y] = -[y,x]$$
$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

On note **Lie** l'opérade des algèbres de Lie. L'espace **Lie**(n) est le sous-espace de l'algèbre de Lie libre sur n générateurs $\{x_1, \ldots, x_n\}$ engendré par les crochets monomiaux contenant x_i une fois et une seule. La représentation de S_n ainsi obtenue est de dimension $(n-1)!$ et a fait l'objet de nombreux travaux (*cf.* [Re], [GeJ], et *cf.* 5.2.).

(d) *Algèbres de Leibniz.* Ces algèbres sont munies d'une opération $[-,-]$ (on ne suppose pas que le crochet est antisymétrique) vérifiant l'identité de Leibniz :

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y].$$

Les algèbres de Leibniz sont aux algèbres de Lie ce que les algèbres associatives sont aux algèbres commutatives. On peut montrer (*cf.* [L-P]) que l'algèbre de Leibniz libre sur V a pour espace vectoriel sous-jacent $T(V)$. On a donc **Leib**$(n) \cong \mathbb{K}[S_n]$ (représentation régulière). La différence entre les opérades **As** et **Leib** est donc dans la composition. Ainsi, si on désigne par 1_n la permutation identique dans S_n, on a

$$1_2 \circ_2 1_2 = 1_3 \quad \text{pour} \quad \textbf{As} \text{ et } 1_2 \circ_2 1_2 = 1_3 - (23) \quad \text{pour} \quad \textbf{Leib}.$$

(e) *Algèbres de Poisson.* Une algèbre de Poisson a deux opérations génératrices. L'une, notée ab, est associative et commutative, l'autre, notée $[a,b]$, est un crochet de Lie. De plus ces deux opérations sont reliées par l'identité

$$[a,bc] = b[a,c] + [a,b]c.$$

L'opérade **Pois** associée est telle que

$$\textbf{Pois}(1) = \mathbf{1}\ ,\ \textbf{Pois}(2) = \mathbf{1} \oplus (\mathrm{sgn})$$

où (sgn) est la représentation signature de S_2, et $\mathbf{1}$ la représentation triviale de dimension 1.

Pour une description de l'opérade associée aux algèbres de Poisson graduées on pourra consulter [GeK1] qui traite aussi des algèbres de Batalin-Vilkovisky.

(f) *Algèbres de Lie k-aires.* On se fixe un entier $k \geq 1$. Pour tout $(k+1)$-uple $\{x_0, \ldots, x_k\}$ on se donne un nouvel élément $[x_0 x_1 \ldots x_k]$, auquel on impose les relations

- $\sigma.[x_0 \ldots x_k] := [x_{\sigma^{-1}(0)} \ldots x_{\sigma^{-1}(k)}] = \mathrm{sgn}(\sigma)[x_0 \ldots x_k], \forall \sigma \in S_{k+1},$

• $\sum_{\sigma \in S_{2k+1}} \sigma.[[x_0 \dots x_k]x_{k+1} \dots x_{2k}] = 0.$

On vérifie que pour $k = 1$ on a la notion d'algèbre de Lie. Les algèbres de Lie k-aires libres apparaissent naturellement dans des questions combinatoires liées au réseau de partition (*cf.* [H-W]). Ici les opérations génératrices ne sont plus binaires (sauf pour $k = 1$). En fait on a

$$\mathbf{Lie}^k(n) = 0 \text{ pour } 1 < n < k + 1.$$

On trouvera dans [Gn] d'autres exemples d'algèbres k-aires.

1.3. Catégories monoïdales et opérades. Le but de ce paragraphe est de montrer qu'une opérade peut s'interpréter comme une algèbre associative dans une certaine catégorie monoïdale. Ce point de vue est dû à M. Markl [Mr1,2].

Par définition une *catégorie monoïdale* est une catégorie $\mathcal{C}$, stable par colimites, munie d'un foncteur

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

et, pour tout triple d'objets U, V, W de $\mathcal{C}$, d'un isomorphisme naturel

$$\varphi(U, V, W) : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)$$

satisfaisant à l'axiome de cohérence suivant : le pentagone de MacLane est commutatif :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & U \otimes (V \otimes (W \otimes Z)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(U \otimes V) \otimes (W \otimes Z) \arrow[dr] & & U \otimes ((V \otimes W) \otimes Z) \arrow[d] \\
 & ((U \otimes V) \otimes W) \otimes Z & (U \otimes (V \otimes W)) \otimes Z \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

On dit que la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est *symétrique* si pour tout U et V on se donne un isomorphisme $\psi : U \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes U$ satisfaisant à certaines conditions de compatibilité (*cf.* [McL]). Ces conditions assurent que pour toute famille $X_1, \dots, X_n$ d'objets de $\mathcal{C}$ et toute permutation $\sigma \in S_n$ on a un isomorphisme canonique $\sigma_* = X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \xrightarrow{\sim} X_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes X_{\sigma^{-1}(n)}$ tel que $\sigma_* \circ \tau_* = (\sigma\tau)_*$.

Exemples. La catégorie des espaces topologiques munie du produit cartésien est monoïdale symétrique. La catégorie $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ avec $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$ est monoïdale symétrique. Sur la catégorie des espaces vectoriels gradués il y a deux structures symétriques différentes : soit $\psi(u \otimes v) = v \otimes u$, soit $\psi(u \otimes v) = (-1)^{|u||v|}(v \otimes u)$. On les note respectivement $g\,\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}^{+}$ et $g\,\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}^{-}$. On peut enrichir les objets de $g\,\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}^{-}$ d'une différentielle, on obtient alors la catégorie monoïdale symétrique des complexes de chaînes sur $\mathbb{K}$ notée $dg\,\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$.

Par définition un *monoïde* (sans unité) dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est un objet C muni d'un morphisme

$$\gamma : C \otimes C \to C$$

qui est associatif :

$$\gamma \circ (1_C \otimes \gamma) \circ \varphi(C, C, C) = \gamma \circ (\gamma \otimes 1_C).$$

Un monoïde dans $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ n'est rien d'autre qu'une $\mathbb{K}$-algèbre associative. Plus généralement un monoïde dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ dont les objets sont des espaces vectoriels est appelé une *algèbre associative* de $\mathcal{C}$.

On note par $\mathbb{S}$ la réunion des groupes symétriques S_n, $n \geq 0$. C'est un groupoïde. Un $\mathbb{S}$-module $\mathcal{P}$ est donc la donnée pour tout $n \geq 1$ d'un S_n-module $\mathcal{P}(n)$ sur $\mathbb{K}$. Dans cet exposé on supposera *toujours* que les $\mathcal{P}(n)$ sont de dimension finie. Un $\mathbb{S}$-module est en fait équivalent à la donnée d'un foncteur de la catégorie des ensembles finis munis des bijections dans $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$. En effet pour tout ensemble fini à n éléments E on peut poser

(1.3.1).
$$\mathcal{P}(E) := \Big(\bigoplus_{f \in \mathrm{Iso}([n], E)} \mathcal{P}(n) \Big)_{S_n}$$

Inversement on a $\mathcal{P}(n) = \mathcal{P}([n])$.

La donnée d'un S_n-module de dimension finie M est équivalente à la donnée d'un foncteur $F^M : \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ (appelé foncteur de Schur), qui est polynomial de degré n et qui commute aux limites inductives :

$$F^M(V) := V^{\otimes n} \otimes_{S_n} M.$$

Qualifions d'analytique un foncteur qui est somme de tels foncteurs polynomiaux (de divers degrés). On constate que le composé de deux foncteurs analytiques est encore analytique. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux $\mathbb{S}$-modules et $F^{\mathcal{P}}$, resp. $F^{\mathcal{Q}}$, les foncteurs analytiques correspondants. On note $\mathcal{P} \boxtimes \mathcal{Q}$ le $\mathbb{S}$-module tel que

$$F^{\mathcal{Q}} \circ F^{\mathcal{P}} = F^{\mathcal{P} \boxtimes \mathcal{Q}}.$$

Explicitement on obtient :

$$(1.3.2) \qquad (\mathcal{P} \boxtimes \mathcal{Q})(n) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}(k) \otimes_{S_k} \Big(\bigoplus_{\pi \in \mathrm{Ens}([n],[k])} \mathcal{Q}(\pi)\Big)$$

Ici $\mathrm{Ens}([n],[k])$ désigne l'ensemble des applications de $[n]$ dans $[k]$ et on prend $\mathcal{Q}(\emptyset) = \mathbb{K}$.

Le produit tensoriel $\boxtimes$ munit alors la catégorie $\mathbb{S} - mod$ d'une structure monoïdale.

1.4. Proposition (Smirnov [S1]). *Une opérade (resp. opérade unitaire) sur* $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ *est une algèbre associative (resp. algèbre associative unitaire) dans la catégorie monoïdale* $(\mathbb{S} - mod, \boxtimes)$.

Un *morphisme d'opérades* est un homomorphisme d'algèbres dans la catégorie $\mathbb{S} - mod$. Une *coopérade* est une cogèbre dans la catégorie $\mathbb{S} - mod$. On étend de manière évidente la notion d'opérade aux espaces vectoriels gradués et aux complexes de chaînes sur $\mathbb{K}$. Notons qu'alors des signes s'introduisent dans la formule (b) de la première définition d'une opérade. Ce point de vue, apparemment compliqué, sur les opérades permet de transposer aux opérades bon nombre de constructions et de résultats sur les algèbres associatives. Il faut néanmoins remarquer une différence essentielle entre les deux catégories monoïdales $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ et $\mathbb{S} - mod$: la première est *symétrique*, pas la seconde.

2. DUALITÉ DE KOSZUL DANS LES ALGÈBRES ASSOCIATIVES (cf. [P]), (très résumé et simplifié).

On se place dans la catégorie des algèbres associatives sans unité, ou plus pompeusement, dans la catégorie des monoïdes sans unité de la catégorie monoïdale $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$.

2.1. Algèbres quadratiques. L'algèbre associative libre sur l'espace vectoriel V a pour espace vectoriel (gradué) sous-jacent le module tensoriel

$$T(V) = V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \oplus \cdots,$$

et le produit est donné par la concaténation. Une *algèbre quadratique* est une algèbre de la forme $A = T(V)/(R)$ où (R) est l'idéal bilatère engendré par un sous-espace vectoriel $R \subset V^{\otimes 2}$. On note $A := A(V,R)$. Par exemple, si V est engendré par les

x_i et que R est engendré par les $x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i$, on obtient l'algèbre symétrique (sans unité) $S(V)$. On remarque qu'une algèbre quadratique est graduée et que $A_1 = V, A_2 = V^{\otimes 2}/R$.

2.2. Dual quadratique. Par définition le *dual quadratique* de $A = A(V, R)$ est l'algèbre quadratique

$$A^! := A(V^*, R^\perp),$$

où V^* est le dual linéaire de V et où $R^\perp$ est l'orthogonal de R dans $V^* \otimes V^* = (V \otimes V)^*$. Notons que l'on a $(A^!)^! = A$ lorsque V est de dimension finie, ce que l'on supposera systématiquement. On voit immédiatement que le dual de l'algèbre symétrique est l'algèbre extérieure : $S(V)^! = \Lambda(V^*)$.

2.3. Constructions de Manin [Ma1], [Ma2]. On définit deux produits $\circ$ et $\bullet$ sur les algèbres quadratiques de la façon suivante :

$$A(V,R) \circ A(W,S) = A(V \otimes W, (23)(R \otimes W^{\otimes 2} + V^{\otimes 2} \otimes S))$$
$$A(V,R) \bullet A(W,S) = A(V \otimes W, (23)(R \otimes S)).$$

La présence de la permutation (23) signifie que l'on doit échanger les facteurs 2 et 3. Notons que l'on utilise ici l'homomorphisme de symétrie dans la catégorie $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$. Ces constructions ont les propriétés suivantes :

$$(A \circ B)^! = A^! \bullet B^!, \qquad (A \bullet B)^! = A^! \circ B^!,$$
$$\mathrm{Hom}(A \bullet B, C) = \mathrm{Hom}(A, B^! \circ C).$$

L'algèbre de polynômes $t\mathbb{K}[t]$ est une unité pour le produit $\circ$ et l'algèbre des nombres duaux $\mathbb{K}\varepsilon \quad (\varepsilon^2 = 0)$ est une unité pour le produit $\bullet$.

Posons $\mathrm{hom}(B, C) := B^! \circ C$. On a ainsi défini un "hom-interne" dans la catégorie des algèbres quadratiques munie du produit tensoriel $\bullet$ car

$$\mathrm{hom}(A, \mathrm{hom}(B, C)) = \mathrm{hom}(A \bullet B, C).$$

2.4. Bar-complexe. La cogèbre libre sur l'espace vectoriel V a pour espace vectoriel sous-jacent le module tensoriel $T(V)$. La comultiplication est donnée par

$$\Delta(v_1, \ldots v_n) = \sum_{p=1}^{n-1} v_1 \ldots v_p \otimes v_{p+1} \ldots v_n.$$

Si A est une algèbre associative, il existe sur la cogèbre graduée $T(A)$ une *unique* coderivation d de degré -1 qui coïncide sur $A^{\otimes 2}$ avec la multiplication de A (cf. [Bbki]).

Explicitement on a $d(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}(a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_n)$. On vérifie que d est une différentielle, i.e. $d^2 = 0$. On a ainsi construit le bar-complexe $\mathbf{B}(A)$, qui est une cogèbre différentielle graduée. Son dual linéaire $\mathbf{D}(A) := \mathbf{B}(A)^*$ est donc une algèbre différentielle graduée.

Supposons que A soit une algèbre graduée de dimension finie en chaque degré (avec $A_0 = 0$). On étend le foncteur $\mathbf{D}$ aux algèbres graduées en posant

$$\mathbf{D}(A) := (T((sA)^*), d).$$

Ici sV désigne la suspension de l'espace vectoriel gradué V, i.e. $(sV)_n = V_{n+1}$. En particulier on a $\mathbf{D}(A)_0 = T(A_1^*) = \bigoplus_{n\geq 1}(A_1^*)^{\otimes n}$.

On peut étendre de manière évidente le foncteur $\mathbf{D}$ aux algèbres associatives différentielles graduées et on montre que l'homomorphisme naturel

$$\mathbf{D}(\mathbf{D}(\mathbf{A})) \to \mathbf{A}$$

est un quasi-isomorphisme.

2.5. Algèbre de Koszul. Supposons maintenant que $A = A(V, R)$ soit une algèbre quadratique. En basses dimensions le complexe $\mathbf{D}(A)$ est

$$\cdots \to \sum_{i,j}(V^*)^{\otimes i} \otimes (V^{\otimes 2}/R)^* \otimes (V^*)^{\otimes j} \to T(V^*)$$

et donc le conoyau de la dernière flèche est précisément $H_0(\mathbf{D}(A)) = A^!$ car $(V^{\otimes 2}/R)^* = R^\perp$.

Par définition, on dit que l'algèbre quadratique A est *de Koszul* si $\mathbf{D}(A) \to A^!$ est un quasi-isomorphisme, c'est-à-dire si $H_i(\mathbf{D}(A)) = 0$ pour tout $i > 0$.

Si A est de Koszul, alors $A^!$ est aussi de Koszul. C'est une conséquence de $\mathbf{D}(\mathbf{D}(A)) \xrightarrow{\sim} A$.

Exemple. L'algèbre symétrique $S(V)$ (et donc aussi $\Lambda(V)$) est de Koszul.

2.6. Quelques propriétés des algèbres de Koszul.

a) *Complexe de Koszul.* Puisque $\mathbb{K}\varepsilon$ est élément neutre pour l'opération $\bullet$ on a :

$$\mathrm{Hom}(A, A) = \mathrm{Hom}(\mathbb{K}\varepsilon \bullet A, A) = \mathrm{Hom}(\mathbb{K}\varepsilon, A^! \circ A).$$

Ainsi l'image de id_A fournit un homomorphisme, qui, appliqué à ε, donne un élément $\xi \in A^! \circ A \subset A^! \otimes A$ de carré nul (puisque $\varepsilon^2 = 0$). Par définition le *complexe de Koszul* de A est $(A^! \otimes A, d_\xi)$, où d_ξ est la multiplication par ξ (comparer avec [Bbki]).

On peut montrer que ce complexe est acyclique si et seulement si $\mathbf{D}(A)$ est acyclique, c'est-à-dire si et seulement si A est de Koszul.

b) *Série de Poincaré d'une algèbre de Koszul.* Pour toute algèbre graduée A de dimension finie en chaque degré on pose

$$f_A(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} \dim A_n t^n.$$

Si A est de Koszul on a

$$f_A(t) f_{A^!}(-t) = 1.$$

Exemples : si $\dim V = n$, $f_{S(V)}(t) = \dfrac{1}{(1-t)^n}$ et $f_{\Lambda(V)}(t) = (1+t)^n$.

Soit $q_1, q_2 \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_4]$ des polynômes définissant une intersection complète de deux quadriques (courbe elliptique), et posons $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_4]/(q_1, q_2)$. On a alors $f_A(t) = \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2$.

c) On peut montrer que les catégories dérivées de modules sur A et sur $A^!$ sont équivalentes lorsque A est de Koszul.

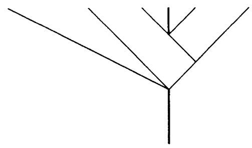
Pour plus de détails, d'information et d'applications des algèbres de Koszul on pourra consulter [P], [Lö], [M1,2], [BGSc], [BGSo].

3. DUAL D'UNE OPÉRADE QUADRATIQUE

Le principe de ce paragraphe et du suivant est de refaire le paragraphe 2 en remplaçant la catégorie monoïdale $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ par la catégorie monoïdale $\mathbb{S}-mod$. On obtiendra ainsi des résultats sur les opérades. Ensuite on examinera brièvement les conséquences pour les algèbres sur ces opérades.

Explicitons tout d'abord la notion d'arbre étiqueté, que nous avons déjà implicitement utilisée. Elle va nous permettre de décrire les opérades et les coopérades libres.

3.1. Arbres. Un *arbre* est un graphe orienté non vide, sans lacet, tel que chaque sommet ait un seul côté sortant et au moins un rentrant.



Un morphisme d'arbres $T \to T'$ est une application continue surjective préservant la structure et telle que l'image inverse d'un sommet de T' est un sous-arbre connexe de T. Si e est un côté interne de T sa contraction donne un nouvel arbre T/e. Tout morphisme est le composé de morphismes élémentaires du type $T \to T/e$.

Arbres étiquetés. Soit I un ensemble d'indice fini de même cardinal que le nombre de feuilles de T. Une bijection entre I et les feuilles de T donne un I-arbre. On parlera de n-arbre si $I = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

On dit qu'un arbre est *binaire* si chaque sommet n'a que deux côtés rentrants. Il y a $(2n-3)!! = 1.3.5.\dots(2n-3)$ arbres binaires n-étiquetés.

Greffe d'arbres. Soient I_1 et I_2 deux ensembles d'indices et $i \in I_2$. Soit T_1 un I_1-arbre et T_2 un I_2-arbre. La *greffe* $T = T_1 \circ_i T_2$ de T_1 et T_2 via i est l'arbre obtenu en identifiant la racine de T_1 à la feuille i de T_2 (cf. fig. 1). Le nouvel ensemble d'indice est $I_1 \bigcup (I_2 - i)$.

3.2. Opérade libre sur un $\mathbb{S}$-module. Le foncteur oubli des opérades dans les $\mathbb{S}$-modules admet un adjoint à gauche, qui associe à un $\mathbb{S}$-module E son opérade libre $\mathbb{T}(E)$. Rappelons que $\mathbb{T}(E)$ est caractérisée par la propriété universelle suivante. Pour tout morphisme de $\mathbb{S}$-modules de E dans une opérade $\mathcal{P}$ il y a un unique morphisme d'opérades $\mathbb{T}(E) \to \mathcal{P}$ le prolongeant. En utilisant l'interprétation d'une opérade comme une algèbre associative dans $\mathbb{S} - mod$ on voit que $\mathbb{T}(E)$ est le module tensoriel

$$\mathbb{T}(E) = E \oplus E^{\boxtimes 2} \oplus \dots \oplus E^{\boxtimes n} \oplus \dots,$$

muni de la structure d'algèbre donnée par la concaténation. Voici une description plus explicite de l'algèbre tensorielle $\mathbb{T}(E)$ obtenue à partir de la propriété universelle. Pour tout arbre T on pose

$$E(T) := \bigotimes_{v \in T} E(\mathrm{In}(v))$$

où v est un sommet de T et $\mathrm{In}(v)$ est l'ensemble (fini) des côtés rentrants de v (voir 1.3.1 pour l'extension de E aux ensembles finis). Pour tout n on a

$$\mathbb{T}(E)(n) = \bigoplus_{n-\text{arbres } T} E(T),$$

où la somme porte sur les classes d'isomorphismes de n-arbres T. C'est donc l'espace de toutes les opérations sur n variables que l'on peut construire à partir des opérations élémentaires, c'est à dire des éléments de E. On notera que la composante $E(T)$ de $\mathbb{T}(E)$ est dans $E^{\boxtimes p}$ lorsque T a p sommets (i.e. $(p-1)$ côtés internes).

La greffe d'arbres permet de construire la composition

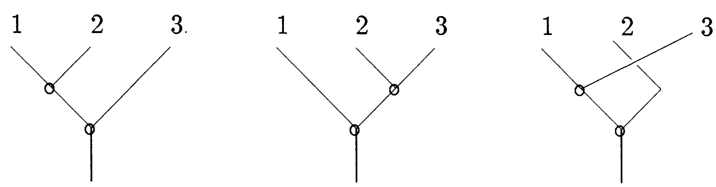
$$\circ_i : \mathbb{T}(E)(m) \otimes \mathbb{T}(E)(n) \to \mathbb{T}(E)(m+n-1).$$

Dans cet article on va se limiter aux opérades n'ayant pas d'opérations unaires, i.e. $\mathcal{P}(1) = 0$. Pour le cas général on renvoie à [GK].

Soit $E = \{E(n) | n \geq 1\}$ une famille de S_n-modules telle que $E(1) = 0$. En basses dimensions on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(E)(1) &= E(1) = 0, \\ \mathbb{T}(E)(2) &= E(2), \\ \mathbb{T}(E)(3) &= E(3) \oplus (3\, E(2) \otimes E(2)), \end{aligned}$$

où chaque copie $E(2) \otimes E(2)$ correspond à l'un des diagrammes



Ces dessins permettent de voir l'action de S_3 sur $3\, E(2) \otimes E(2)$ à partir de l'action de S_2 sur $E(2)$:

$$3\, E(2) \otimes E(2) = \mathrm{Ind}_{S_2}^{S_3}(E(2) \otimes E(2)),$$

où S_2 opère seulement sur la deuxième copie de $E(2)$.

Idéal d'une opérade. Un idéal J d'une opérade $\mathcal{P}$ est une sous-opérade telle que la composition dans $\mathcal{P}$ est à valeur dans J dès que l'une des variables est dans J. La famille quotient $\mathcal{P}(n)/J(n)$ forme une opérade notée $\mathcal{P}\,/J$.

Une *présentation* d'une opérade $\mathcal{P}$ est la donnée d'un $\mathbb{S}$-module E et d'un sous-$\mathbb{S}$-module R de $\mathbb{T}(E)$. L'opérade $\mathcal{P}$ est le quotient $\mathbb{T}(E)/(R)$, où (R) est l'idéal engendré par R.

Si $E(n) = 0$ sauf pour un entier $k+1$ fixé ($k \geq 1$), on parlera d'opérade $(k+1)$-aire (binaire si $k = 1$).

3.3. Opérade quadratique (avec $\mathcal{P}(1) = 0$). Soit E un S_2-module et R un sous-espace de $\mathrm{Ind}_{S_2}^{S_3}(E \otimes E) = 3\ E \otimes E$ stable sous l'action de S_3.

On construit tout d'abord l'opérade libre $\mathbb{T}(E)$ sur $\{E(2) = E, E(n) = 0$ pour $n \neq 2\}$, puis on quotiente par l'idéal (R) de $\mathbb{T}(E)$ engendré par $R \subset 3\ E \otimes E = \mathbb{T}(E)(3)$.

L'opérade $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{K}, E, R)$ ainsi définie est appelée une *opérade quadratique.* On remarquera que les opérades **As**, **Com**, **Lie**, **Leib** et **Pois** sont quadratiques et binaires.

3.4. Opérade quadratique duale. Soit V un S_n-module. On note $V^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ le dual de V muni de l'action de S_n duale *tensorisée* par la représentation signature.

Par définition l'*opérade quadratique duale* de $\mathcal{P}$ est

$$\mathcal{P}^! := \mathcal{P}(\mathbb{K}, E^\vee, R^\perp)$$

où $R^\perp \subset F(E^\vee)(3) = F(E)(3)^\vee$ est le sous-espace vectoriel orthogonal de R.

On vérifie immédiatement que

$$(\mathcal{P}^!)^! = \mathcal{P}\,.$$

3.5. Exemples. On désigne respectivement par **1**, sgn et V_2 les représentations irréductibles de S_3 : triviale, signature, hyperplan $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

(a) **As.** L'espace $E = \mathbf{As}(2)$ est de dimension 2 engendré par x_1x_2 et x_2x_1 (représentation régulière de S_2). Donc $\mathbb{T}(\mathbf{As}(2))(3)$ est de dimension 12 engendré par les expressions $(x_ix_j)x_k$ et $x_i(x_jx_k)$ pour toutes les permutations $\{i, j, k\}$ de $\{1, 2, 3\}$. Le sous-espace S_3-invariant $R_{\mathbf{As}}$ est engendré par les 6 associateurs $(x_ix_j)x_k - x_i(x_jx_k)$. On constate que $R_{\mathbf{As}}^\perp = R_{\mathbf{As}}$ et donc l'opérade associative est auto-duale :

$$\mathbf{As}^! = \mathbf{As}\,.$$

(b) **Com.** L'espace E est de dimension 1 engendré par x_1x_2 (représentation triviale de S_2). On voit aisément que $\mathbb{T}(\mathbf{Com}(2))(3) = \mathbf{1} \oplus V_2$ et que $R_{\mathbf{Com}} = V_2$. On a donc $\mathbf{Com}^! = \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathrm{sgn}, \mathrm{sgn})$. Or cette opérade est précisément l'opérade **Lie**. En effet **Lie**$(2) = \mathrm{sgn}$ (antisymétrie du crochet), $\mathbb{T}(\mathrm{Lie}(2))(3) = \mathrm{sgn} \oplus V_2$ et $R_{\mathbf{Lie}} = \mathrm{sgn}$ (c'est l'identité de Jacobi). Donc on a

$$\mathbf{Com}^! = \mathbf{Lie}.$$

(c) **Lie.** On vient de voir que

$$\mathbf{Lie}^! = \mathbf{Com}.$$

(d) **Leib**. Une *algèbre de Leibniz duale* (cf. [Lo2]) est un espace vectoriel R muni d'une opération binaire $R \otimes R \to R, (r,s) \mapsto rs$, vérifiant $(rs)t = r(st) + r(ts)$ pour tout $r, s, t \in R$. Ce type d'algèbre définit une opérade $\mathbf{Leib}^!$ qui est précisément l'opérade quadratique duale de **Leib**. On pourra vérifier élémentairement que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Leibniz et R une algèbre de Leibniz duale, $\mathfrak{g} \otimes R$, muni du crochet, $[a \otimes r, b \otimes s] := [a,b] \otimes rs - [b,a] \otimes sr$ est une algèbre de Lie, voir proposition 3.7 ci-dessous.

Plus généralement les algèbres définies par une opération binaire et une relation quadratique du type

$$x(yz) = \sum_{\sigma \in S_3} \alpha_\sigma \sigma.((xy)z), \quad \alpha_\sigma \in \mathbb{K},$$

ont pour duales les algèbres définies par une opération binaire et la relation quadratique

$$(xy)z = \sum_{\sigma \in S_3} \alpha_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma^{-1}(x(yz)).$$

Les algèbres associatives et les algèbres de Leibniz en sont deux cas particuliers.

3.6. Morphismes d'opérades. Il est clair qu'on a une notion de morphisme d'opérades, et qu'un tel morphisme $\alpha : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ donne naissance à un foncteur entre catégories d'algèbres $(\mathcal{Q} - \mathrm{alg}) \to (\mathcal{P} - \mathrm{alg})$. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont quadratiques on a évidemment un nouveau morphisme $\alpha^! : \mathcal{Q}^! \to \mathcal{P}^!$.

Les exemples précédents sont reliés par les foncteurs

$$(\mathbf{Leib}^! - alg) \xrightarrow{+} (\mathbf{Com} - alg) \overset{i}{\hookrightarrow} (\mathbf{As} - alg) \xrightarrow{-} (\mathbf{Lie} - alg) \overset{u}{\hookrightarrow} (\mathbf{Leib} - alg).$$

Le foncteur i est l'inclusion évidente. Le foncteur $-$ associe à toute algèbre associative A l'algèbre de Lie ayant pour crochet $[a,b] = ab - ba$. On a en fait $i^! = -$. Le foncteur u est l'inclusion naturelle, son dual $u^! = +$ est le foncteur qui associe a une $\mathbf{Leib}^!$-algèbre R l'algèbre associative et commutative $(R, .)$, $a \cdot b = ab + ba$ (vérifier que c'est bien défini).

Pour toutes opérades quadratiques $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ on peut définir, comme dans le cas des algèbres associatives, des produits $\mathcal{P} \circ \mathcal{Q}$ et $\mathcal{P} \bullet \mathcal{Q}$. On peut alors définir un hom-interne par $\mathrm{hom}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \mathcal{P}^! \circ \mathcal{Q}$. Le rôle de l'unité pour $\circ$ est joué par l'opérade **Lie**, donc

$$\mathcal{P}^! = \mathrm{hom}(\mathcal{P}, \mathbf{Lie}).$$

Au niveau des algèbres, ce résultat a la conséquence suivante (que l'on peut vérifier directement) :

3.7. Proposition. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade quadratique et $\mathcal{P}^!$ son opérade quadratique duale. Pour toute $\mathcal{P}$-algèbre A et toute $\mathcal{P}^!$-algèbre B, le produit tensoriel $A \bigotimes_{\mathbb{K}} B$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie.*

Si $\{\mu_i\}$ est une base de E et $\{\mu_i^\vee\}$ est la base duale, le crochet de Lie est donné par

$$[a \otimes b, a' \otimes b'] = \sum_i \mu_i(a, a') \otimes \mu_i^\vee(b, b') - \mu_i(a', a) \otimes \mu_i^\vee(b', b).$$

3.8. Algèbre quadratique sur une opérade quadratique. Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{K}, E, R)$ une opérade quadratique (on suppose toujours $\mathcal{P}(1) = 0$), V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et S un sous-espace de l'espace des coinvariants $(E \otimes V^{\otimes 2})_{S_2}$. Par définition la *$\mathcal{P}$-algèbre quadratique* $A(V, S)$ est le quotient de la $\mathcal{P}$-algèbre libre $F_{\mathcal{P}}(V)$ sur V par l'idéal (S) engendré par $S \subset F_{\mathcal{P}}(V)_2 = (E \otimes V^{\otimes 2})_{S_2}$. Comme $F_{\mathcal{P}}(V)$ est naturellement graduée et que (S) est homogène, $A(V, S)$ peut être considérée comme une $\mathcal{P}$-algèbre dans $g\,\mathrm{Vect}^+$.

On peut faire la même construction, mais dans la catégorie $g\,\mathrm{Vect}^-$. Il faut alors remplacer E par $E \otimes (\mathrm{sgn})$. On note $A(V, S)^-$ l'algèbre ainsi obtenue.

Par définition l'*algèbre quadratique duale* $A^!$ de $A = A(V, S)$ est la $\mathcal{P}^!$-algèbre dans $g\,\mathrm{Vect}^-$ construite de la manière suivante. On pose $V^\vee = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ et $S^\perp =$ orthogonal de S dans $((E \otimes V^{\otimes 2})_{S_2})^\vee = (E^\vee \otimes (\mathrm{sgn}) \otimes (V^\vee)^{\otimes 2})_{S_2}$. On a $A^! := A(V^\vee, S^\perp)^-$.

4. DUALITÉ DE KOSZUL DES OPÉRADES.

4.1. Bar-construction sur les opérades. Le bar-complexe d'une algèbre associative dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est une cogèbre graduée dans $\mathcal{C}$ construite de la manière suivante. On prend la cogèbre libre (qui est graduée) sur l'objet de $\mathcal{C}$ sous-jacent et on la munit de l'unique différentielle qui, en degré 2, coïncide avec la structure d'algèbre associative. Appliquée à l'opérade $\mathcal{P}$, considérée comme une algèbre associative dans $\mathbb{S} - mod$, on obtient le bar-complexe de $\mathcal{P}$, noté $(\mathbf{B}(\mathcal{P}), \delta)$. Le dual linéaire de cette cogèbre différentielle graduée dans $\mathbb{S} - mod$ nous donne une algèbre associative graduée dans $\mathbb{S} - mod$, c'est-à-dire une opérade différentielle graduée. On la note $\mathbf{D}(\mathcal{P})$. Cette construction étant fonctorielle on l'étend aux opérades graduées en posant :

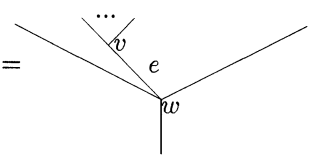
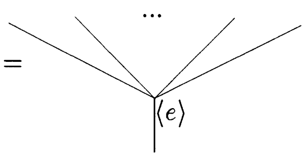
$$\mathbf{D}(\mathcal{P}) := (\mathcal{T}((s\,\mathcal{P})^\vee), d)\ ,$$

où $(s\,\mathcal{P})(n) = s^n(\mathcal{P}(n))$. Puis on l'étend aux opérades différentielles graduées pour obtenir un endofoncteur :

$$\mathbf{D} : (dg - Op_{\mathbb{K}}) \to (dg - Op_{\mathbb{K}}).$$

Explicitons la différentielle d de $\mathbf{D}(\mathcal{P})$ en utilisant la description de $\mathcal{T}(E)$ donnée en 3.2. Le complexe de chaînes $\mathbf{D}(\mathcal{P})$ est une somme d'espaces vectoriels du type $\mathcal{P}(T)^*$ où T est un arbre. La différentielle d est alors une matrice dont la composante $d_{T',T} : \mathcal{P}(T')^* \to \mathcal{P}(T)^*$ est la suivante.

On a $d_{T',T} = 0$ sauf si $T' = T/e$ pour un certain côté interne e de T. On note v et w les sommets de e et $< e >$ le nouveau sommet de T'.

$T =$  $T' =$ 

La composition dans $\mathcal{P}$ définit un homomorphisme

$$\circ_e = \mathcal{P}(\mathrm{In}\, v) \otimes \mathcal{P}(\mathrm{In}\, w) \to \mathcal{P}(\mathrm{In}\langle e\rangle).$$

Comme il y a une bijection entre les autres sommets de T et de T' cet homomorphisme s'étend en un homomorphisme

$$\mathcal{P}(T) = \bigotimes_v \mathcal{P}(\mathrm{In}\, v) \to \bigotimes_{v'} \mathcal{P}(\mathrm{In}\, v') = \mathcal{P}(T').$$

C'est le dual linéaire de $d_{T',T}$.

4.2. Théorème (Ginzburg-Kapranov [GK]). *Soit $\mathcal{P}$ une opérade sur $\mathbb{K}$ telle que $\mathcal{P}(n)$ soit de type fini pour tout n. Alors*

$$\mathbf{D}(\mathbf{D}(\mathcal{P})) \to \mathcal{P}$$

est un quasi-isomorphisme.

Remarque. L'hypothèse de finitude nous a permis de transformer le bar-complexe en un endofoncteur $\mathbf{D}$. Dans le cas général il faut travailler avec les dg-algèbres *et* les dg-cogèbres de la catégorie monoidale $\mathcal{C}$. On a alors deux foncteurs

$$\mathbf{B} : \{dg - alg \text{ de } \mathcal{C}\} \longleftrightarrow \{dg - cog \text{ de } \mathcal{C}\} : \Omega\ ,$$

qui sont adjoints l'un de l'autre et induisent des équivalences entre les catégories homotopiques.

4.3. Bar-complexe pour une opérade quadratique. Supposons maintenant que l'opérade $\mathcal{P}$ soit quadratique (*cf.* 3.3). Comme dans le cas des algèbres associatives dans $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, on a un homomorphisme naturel

$$\mathbf{D}(\mathcal{P}) \to \mathcal{P}^!$$

qui est un isomorphisme en H_0.

4.4. Définition. L'opérade $\mathcal{P}$ est dite de *Koszul* si $H_n(\mathbf{D}(\mathcal{P})) = 0$ pour tout $n > 0$, en d'autres termes si la suite de modules

$$\cdots \to \mathbf{D}(\mathcal{P})_n \to \mathbf{D}(\mathcal{P})_{n-1} \to \cdots \to \mathbf{D}(\mathcal{P})_0 \to \mathcal{P}^! \to 0$$

est exacte.

4.5. Proposition. *Si l'opérade $\mathcal{P}$ est de Koszul, il en est de même de l'opérade $\mathcal{P}^!$.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 4.2.

4.6. Homologie d'une $\mathcal{P}$-algèbre. Avant de passer aux exemples on va énoncer un critère pratique pour vérifier qu'une opérade quadratique $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{K}, E, R)$ est de Koszul.

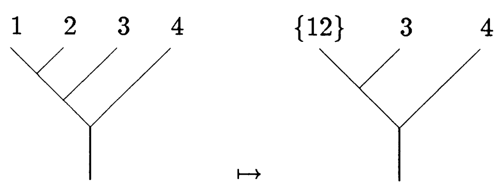
Introduisons l'*homologie d'une $\mathcal{P}$-algèbre A*. On pose

$$C_n^{\mathcal{P}}(A) := A^{\otimes n} \otimes_{S_n} \mathcal{P}^!(n)^\vee.$$

Par construction $\mathcal{P}^!(n)^\vee$ est un sous-espace de $\bigoplus_T E(T)$ (somme sur les n-arbres binaires T). On construit une application

$$\overline{d}_n : A^{\otimes n} \otimes_{S_n} (\bigoplus_T E(T)) \to A^{\otimes n-1} \otimes_{S_{n-1}} (\bigoplus_S E(S)),$$

où la seconde somme est sur les $(n-1)$-arbres binaires, de la façon suivante. Qualifions d'*extrémal* un sommet v de l'arbre T possédant des feuilles. Si on remplace l'ensemble $\mathrm{In}(v)$ des étiquettes de ses feuilles par un seul élément, on obtient un nouvel ensemble noté $[n]/v$. L'arbre T/v est le $[n]/v$-arbre obtenu en enlevant v et en le remplaçant par une feuille :



L'action de l'opérade $\mathcal{P}$ sur l'algèbre A détermine une application

$$A^{\otimes n} \otimes E(T) \longrightarrow A^{\otimes [n]/v} \otimes E(T/v).$$

L'application $\bar{d}_n$ est la matrice ayant pour éléments les applications précédentes. Remarquons qu'a priori il y a une ambiguïté sur l'étiquetage des feuilles, mais celle-ci disparaît lorsqu'on quotiente par l'action du groupe symétrique.

4.7. Proposition (Ginzburg-Kapranov [GK]). *Pour tout n l'application $\bar{d}_n$ envoie $C_n^{\mathcal{P}}(A)$ dans $C_{n-1}^{\mathcal{P}}(A)$ et l'application d_n qui en résulte vérifie $d_{n-1} \circ d_n = 0$.*

L'homologie de la $\mathcal{P}$-algèbre A est alors définie par

$$H_*^{\mathcal{P}}(A) := H_*(C_*^{\mathcal{P}}(A), d).$$

La même méthode permet de définir l'homologie de A à coefficients dans un A-module M, notée $H_*^{\mathcal{P}}(A, M)$. La cohomologie $H_{\mathcal{P}}^*(A)$ est définie par

$$H_{\mathcal{P}}^*(A) = H^*(\operatorname{Hom}(C_*^{\mathcal{P}}(A), \mathbb{K})).$$

Remarque. Examinons le complexe $C_*^{\mathcal{P}}(A)$ en basses dimensions :

$$\cdots \to A^{\otimes 3} \otimes_{S_3} \mathcal{P}^!(3)^\vee \xrightarrow{d_3} A^{\otimes 2} \otimes_{S_2} \mathcal{P}^!(2)^\vee \xrightarrow{d_2} A.$$

Puisque $\mathcal{P}^!(2)^\vee = (E^\vee)^\vee = E$ on constate que $C_2^{\mathcal{P}}(A)$ est un quotient d'autant de copies de $A^{\otimes 2}$ que d'opérations génératrices et que d_2 consiste à *effectuer* ces opérations. De même $C_3^{\mathcal{P}}(A)$ est un quotient d'autant de copies de $A^{\otimes 3}$ que de relations de définitions, le composé $d_2 \circ d_3$ donnant précisément ces relations. Le complexe $C_*^{\mathcal{P}}(A)$ donne donc une réponse à la détermination des "relations entre les relations", etc... (problème des syzygies supérieures).

L'un des critères effectifs pour déterminer si une opérade est de Koszul est le suivant

4.8. Théorème ([GK]). *Soit $\mathcal{P}$ une opérade quadratique. Alors $\mathcal{P}$ est de Koszul si et seulement si pour toute $\mathcal{P}$-algèbre libre $F_{\mathcal{P}}(V)$ on a $H_i^{\mathcal{P}}(F_{\mathcal{P}}(V)) = 0$, $i > 0$.*

4.9. Exemples.

a) $\mathcal{P} = \mathbf{As}$. On a vu que $\mathcal{P}^! = \mathbf{As}$. Le complexe $C_*^{\mathbf{As}}(A)$ de l'algèbre associative A est alors

$$\cdots \to A^{\otimes n+1} \xrightarrow{b'} A^{\otimes n} \to \cdots \to A \otimes A \to A$$

où $b'(a_0, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (a_0, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_n)$.

On trouve ainsi l'homologie de Hochschild de A à coefficients dans le module trivial k (*cf.* par exemple [Lo1]). Remarquons que A est une algèbre sans élément unité, et que par module trivial on entend multiplication nulle.

b) $\mathcal{P} = \mathbf{Lie}$. On sait que $\mathcal{P}^! = \mathbf{Com}$. Le complexe $C_*^{\mathbf{Lie}}(\mathfrak{g})$ est alors

$$\cdots \to \Lambda^n \mathfrak{g} \xrightarrow{d} \Lambda^{n-1} \mathfrak{g} \to \cdots \to \Lambda^2 \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$

$$d(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i-j-1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n.$$

On trouve donc le complexe classique de Chevalley-Eilenberg. Il est bien connu que l'homologie de l'algèbre de Lie libre est triviale, donc **Lie** est une opérade de Koszul, ainsi que **Com** par la proposition 4.5.

c) $\mathcal{P} = \mathbf{Com}$. Pour une algèbre commutative A on peut montrer que $C_*^{\mathbf{Com}}(A)$ s'identifie au sous-complexe du complexe de Hochschild correspondant à l'inclusion $\mathbf{Lie}(n) \subset \mathbb{K}[S_n]$ en dimension n. Ce sous-complexe a pour homologie l'homologie de Harrison de A (*cf.* par exemple [Lo1]).

d) $\mathcal{P} = \mathbf{Leib}$. Puisque $\mathbf{Leib}^!(n) \cong \mathbb{K}[S_n]$, on a, pour toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$,

$$C_*^{\mathbf{Leib}}(\mathfrak{g}) : \qquad \cdots \to \mathfrak{g}^{\otimes n} \xrightarrow{d} \mathfrak{g}^{\otimes n-1} \to \cdots \to \mathfrak{g}^{\otimes 2} \to \mathfrak{g}\,.$$

Le calcul de la différentielle donne

$$d(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^j x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes [x_i, x_j] \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes \hat{x}_j \otimes \cdots \otimes x_n,$$

c'est-à-dire que ce complexe est précisément celui construit dans [Lo1]. Puisque l'homologie de Leibniz d'une algèbre de Leibniz libre est triviale (*cf.* [LP]), **Leib** est une opérade de Koszul, ainsi que $\mathbf{Leib}^!$.

4.10. Propriétés [GK]. Voici quelques-unes des propriétés des opérades de Koszul.

a) *Série de Poincaré.* Soit $\mathcal{P}$ une opérade telle que $\mathcal{P}^+(1) = \mathbb{K}$ (i.e. $\mathcal{P}(1) = 0$). Par définition la série de Poincaré de $\mathcal{P}$ est

$$g_{\mathcal{P}}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dim \mathcal{P}^+(n) \frac{x^n}{n!}\,.$$

(Pour $\dim \mathcal{P}(1) > 0$ il faudrait prendre une série à plusieurs variables). Les séries de Poincaré d'une opérade de Koszul $\mathcal{P}$ et de sa duale $\mathcal{P}^!$ sont reliées par (*cf.* [GK]) :

$$(*) \qquad g_{\mathcal{P}}(g_{\mathcal{P}^!}(x)) = x.$$

On peut se servir de ce résultat pour montrer que certaines opérades ne sont pas de Koszul (*cf.* [GeK1]).

Exemples :

$$g_{\mathbf{As}}(x) = \frac{-x}{1+x}, \quad g_{\mathbf{Com}}(x) = e^{-x} - 1, \quad g_{\mathbf{Lie}} = -\log(1+x).$$

On peut affiner ce résultat en remplaçant $\dim \mathcal{P}^+(n)$ par la série dzêta associée à la représentation $\mathcal{P}^+(n)$ de S_n. Dans la formule $(*)$ il faut alors remplacer la composition par le pléthysme (*cf.* Hanlon [Ha], Getzler-Kapranov [GeK2]).

b) *Cohomologie.* A tout type d'algèbres est associée une théorie de cohomologie qui, par exemple, mesure les déformations de ces algèbres. Cette théorie est d'ordinaire construite à partir du bar-complexe. Lorsque l'opérade associée est de Koszul cette théorie de cohomologie est isomorphe à $H^*_{\mathcal{P}}$ définie en 4.6. On voit immédiatement sur cette définition que

pour toute $\mathcal{P}$-algèbre A, $H^*_{\mathcal{P}}(A)$ est un $\mathcal{P}^!$-algèbre graduée.

c) *$\mathcal{P}$-algèbres de Koszul.* Comme annoncé, si $\mathcal{P}$ est une opérade de Koszul, et A une $\mathcal{P}$-algèbre de Koszul, sa duale $A^!$ est une $\mathcal{P}^!$-algèbre de Koszul et il y a sur $A \otimes A^!$ une différentielle qui en fait un complexe acyclique. En fait les constructions et les résultats pour les algèbres associatives de Koszul se généralisent aux $\mathcal{P}$-algèbres de Koszul, à la différence près que la quadratique duale est une $\mathcal{P}^!$-algèbre (et qu'en général $\mathcal{P}^! \neq \mathcal{P}$).

5. APPLICATIONS.

5.1. Algèbres homotopiques. Motivé par l'étude des espaces de lacets, Stasheff a formalisé dans [S] la notion d'"algèbre associative à homotopie près", ce sont les A_∞-algèbres.

Plus tard ont été introduites les "algèbres commutatives à homotopie près" : les E_∞-algèbres (*cf.* [M]), puis les "algèbres de Lie à homotopie près" (*cf.* [HS, LS]).

Il se trouve qu'en fait une A_∞-algèbre est très précisément une $\mathbf{D}(\mathbf{As})$-algèbre où $\mathbf{D}(\mathcal{P})$ est l'opérade différentielle graduée construite au paragraphe 4. Puis on a démontré qu'une E_∞-algèbre est une $\mathbf{D}(\mathbf{Lie})$-algèbre, et une algèbre de Lie homotopique est une $\mathbf{D}(\mathbf{Com})$-algèbre (*cf.* [LS]).

En conclusion pour toute algèbre sur une opérade de Koszul $\mathcal{P}$ on a une notion d'*algèbre homotopique* : ce sont les $\mathbf{D}(\mathcal{P}^!)$-algèbres (voir par exemple [GeJ]).

5.2. Opérades cycliques [GeK1]. Une opérade $\mathcal{P}$ est dite *cyclique* si $\mathcal{P}(n)$ est en fait un S_{n+1}-module dont l'action supplémentaire de l'opérateur cyclique τ_{n+1} vérifie :

$$\tau_{m+n-1}(\mu \circ_m \nu) = \tau_n(\mu) \circ_1 \tau_m(\nu)$$

pour $\mu \in \mathcal{P}(m)$ et $\nu \in \mathcal{P}(n)$. Cette propriété permet de généraliser la notion de $*$-algèbre.

Par exemple **As**, **Lie** et **Com** sont cycliques, mais pas **Leib**. Pour une $\mathcal{P}$-algèbre A on peut alors définir 3 théories d'homologie, notées HA, HB et HC qui sont reliées entre elles par une longue suite exacte :

$$(**) \qquad \cdots \to HA_n(A) \to HB_n(A) \to HC_n(A) \to HA_{n-1}(A) \to \cdots$$

La cyclicité de $\mathcal{P}$ est la propriété qu'il faut pour pouvoir parler de *forme bilinéaire invariante* sur une $\mathcal{P}$-algèbre. La théorie HA est le foncteur dérivé non abélien de la forme bilinéaire invariante universelle.

Lorsque $\mathcal{P}$ est quadratique, la théorie HB s'exprime en fonction de $H_*^{\mathcal{P}}$: on a $HB_n(A) = H_n^{\mathcal{P}}(A, A)$.

Lorsque $\mathcal{P}$ est de Koszul, $HC_n(A)$ peut s'exprimer en fonction de la théorie HA pour $\mathcal{P}^!$. En particulier pour $\mathcal{P} = \mathbf{As}$, HC est l'homologie cyclique de Connes et l'égalité $\mathbf{As} = \mathbf{As}^!$ implique $HA_n = HC_{n-1}$. Ainsi la suite exacte $(**)$ s'identifie à la longue suite exacte de périodicité de Connes (*cf.* [C], [Lo1]) :

$$\cdots \to HC_{n-1} \to HH_n \to HC_n \to HC_{n-2} \to \cdots .$$

Pour $\mathcal{P} = \mathbf{Lie}$, la suite exacte $(**)$ s'identifie à la longue suite exacte d'homologie relative

$$\cdots \to HR_{n-2}(\mathfrak{g}) \to H_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \to H_{n+1}(\mathfrak{g}) \to \cdots$$

associée à la surjection $\mathfrak{g} \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \to \Lambda^{n+1} \mathfrak{g}$ (*cf.* [Pi] pour une utilisation de cette suite exacte).

Pour $\mathcal{P} = \mathbf{Com}$, Getzler et Kapranov utilisent la suite exacte $(**)$ pour démontrer les résultats suivants sur la S_n-représentation $\mathbf{Lie}(n)$:

a) $\mathbf{Lie}(n)$ est une S_{n+1}-représentation (*cf.* aussi [Ro], [K]).

b) On a un isomorphisme de S_{n+1}-représentations

$$\mathbf{Lie}(n+1) \cong \mathbf{Lie}(n) \otimes V_{n,1}$$

où $V_{n,1}$ est la représentation de dimension n associée à l'hyperplan $x_0+x_1+\cdots+x_n = 0$.

5.3. Espaces de Modules (Moduli spaces). Désignons par $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ l'espace de modules (de Grothendieck-Knudsen) des courbes de genre 0 marquées de n points. La famille $\mathcal{M} = \{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1},\ n = 2,3,\ldots\}$ est un $\mathbb{S}$-objet dans la catégorie (monoïdale symétrique) des variétés différentiables. Ginzburg et Kapranov montrent dans [GK] qu'une opérade $\mathbb{K}$-linéaire est un $\mathbb{S}$-faisceau sur $\mathcal{M}$. Pour d'autres liens entre espaces de modules et opérades on consultera [BG], [KM], [KSV].

5.4. Opérades modulaires [GeK2]. Un $\mathbb{S}$-*module stable* est une famille de complexes de chaînes $\{\mathcal{V}((g,n))|n, g \geq 0\}$ munis d'une action de S_n sur $\mathcal{V}((g,n))$ et telle que $\mathcal{V}((g,n)) = 0$ si $2g+n-2 \leq 0$. On peut étendre la structure de catégorie monoïdale des $\mathbb{S}$-modules aux $\mathbb{S}$-modules stables.

Par définition une *opérade modulaire* est une algèbre dans $\{\mathbb{S} - \text{mod stables}\}$. Dans la description du foncteur libre les arbres sont alors remplacés par les graphes (d'où l'apparition du "graph-complex" de Kontsevich). Ces opérades modulaires sont intimement reliées aux espaces de modules des courbes de genre > 0.

La connaissance exacte de la bar-construction de **Com** dans ce contexte impliquerait la détermination des dimensions des espaces d'invariants de Vassiliev (théorie des noeuds), *cf.* loc. cit.

5.5. Motifs. L'un des problèmes de la géométrie algébrique arithmétique est la construction de la catégorie des "motifs de Tate mixtes". Les opérades ont été utilisées comme outil fondamental pour construire un modèle de cette catégorie par S. Bloch et I. Kriz (*cf.* [BK]).

5.6. Opérades tressées. La catégorie $\mathbb{S} - mod$ est en fait la catégorie des foncteurs de $\mathbb{S}$ dans $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$. On a beaucoup utilisé le fait que la catégorie monoïdale $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ est *symétrique*. Si on relâche cette hypothèse en remplaçant la catégorie monoïdale symétrique par une catégorie monoïdale *tressée* on obtient la notion d'*opérade tressée*. La bar-construction qui en résulte a déjà été étudiée dans [F].

5.7. Biopérades. La notion de co-opérade est assez immédiate par passage au dual linéaire. Par contre si on veut user en même temps d'opérations et de coopérations il faut travailler avec des *biopérations* :

$$\mathcal{P}(n,m) \otimes A^{\otimes m} \to A^{\otimes n}, m, n \geq 1.$$

On laisse le soin au lecteur d'écrire les axiomes de définition d'une *biopérade.*

5.8. Conclusion. Dès le départ on s'est placé sur un corps de caractéristique zéro. Une partie des résultats reste encore valable en caractéristique non nulle (*cf.* par exemple [GeJ], [KriM]), mais si l'on veut travailler avec des théories algébriques moins "linéaires", par exemple les groupes, il faut changer radicalement d'environnement. Dans cette direction on consultera avec profit les travaux de A. Joyal [J] et l'article [JP] de M. Jibladze et T. Pirashvili.

BIBLIOGRAPHIE

[BG] A. BEILINSON, V. GINZBURG, *Infinitesimal structure of moduli spaces of G-bundles*, Intern. Math. Res. Notices (appendix to Duke Math. J.) **66** (1992), 63–74.

[BGSc] A. BEILINSON, V. GINZBURG, W. SCHECHTMAN, *Koszul Duality*, J. Geom. and Phys. **5** (1988), 317–350.

[BGSo] A. BEILINSON, V. GINZBURG, W. SOERGEL, *Koszul Duality Patterns in Representation Theory*, J. Amer. Math. Soc. (to appear).

[BK] S. BLOCH, I. KRIZ, *Mixed Tate Motives*, Ann. of Math. 140 (1994), 557-605.

[BV] J.M. BOARDMAN, R. VOGT, *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Springer Lect. Notes in Math. 347, 1973.

[Bbki] N. BOURBAKI, "Algèbre homologique", (Ch. 10 de "Algèbre"), Masson Ed., 1980.

[Coh] F.R. COHEN, *The homology of C_{n+1}-spaces, $n \geq 0$*, Springer Lect. Notes in Math. **533** (1976), 207–351.

[C] A. CONNES, *Non-commutative differential geometry*, Publ. Math. IHES **62** (1985) 257–360.

[F] Z. FIEDOROWICZ, *Symmetric bar-construction*, J. Pure App. Alg., to appear.

[Ge1] E. GETZLER, *Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories*, Commun. Math. Phys. **159** (1994), 265–285.

[Ge2] E. GETZLER, *Equivariant cohomology and topological gravity*, Commun. Math. Phys. **163** (1994), 473–490.

[Ge3] E. GETZLER, *Operads and moduli spaces of genus 0 Riemann surfaces*, Proc. Texel Conf. on moduli spaces of algebraic curves, Prog. in Maths (Birkhäusher), to appear.

[GeJ] E. GETZLER, J.D.S. JONES, *Operads, homotopy algebra, and iterated integrals for double loop spaces*, preprint (1994). (hep-th/9403055)

[GeK1] E. GETZLER, M.M. KAPRANOV, *Cyclic operads and cyclic homology*, in "Geometry, Topology and Physics for Raoul", ed. B. Mazur, Intern. Press, Cambridge MA 1994, to appear.

[GeK2] E. GETZLER, M.M. KAPRANOV, *Modular operads*, preprint (1994). (dg-ga/9408003)

[GK] V. GINZBURG, M.M. KAPRANOV, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J. 76 (1994), 203-272.

[Gn] V.A. GNEDBAYE, *Les algèbres k-aires et leurs opérades*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, série I (1995), 147-152.

[Ha] P. HANLON, communication personnelle.

[HW] P. HANLON, M. WACHS, *On k-ary Lie algebras*, Adv. in Math. 113 (1995), 206-236.

[HS] V.A. HINICH, V.V. SCHECHTMANN, *Homotopy Lie algebras*, in "I.M. Gelfand Seminar", Adv. Soviet. Math. **16**, part 2 (1993), 1–28.

[HL] Y.-Z. HUANG, J. LEPOWSKY, *Vertex operators algebras and operads*, in "The Gelfand Mathematical Seminars, 1990-1992", Birkhauser (1993), 145–161.

[JP] M. JIBLADZE, T. PIRASHVILI, *Cohomology of algebraic theories*, J. Algebra **137** (1991), 253–296.

[J] A. JOYAL, *Foncteurs analytiques et espèces de structures*, Springer Lect. Notes in Math. **1234** (1986), 126–159.

[KSV] T. KIMURA, J.D. STASHEFF, A.A. VORONOV, *On operad structures on moduli spaces and string theory*, preprint RIMS **936**, 1993.

[K] M. KONTSEVICH, *Formal (non)commutative symplectic geometry*, in "The Gelfand Mathematical Seminars, 1990-1992", Birkhauser (1993), 173–187.

[KM] M. KONTSEVICH, Yu. MANIN, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry*, Commun. Math. Phys. **164** (1994), 525–562.

[KriM] I. KRIZ, J.P. MAY, *Operads, algebras, modules and motives*, preprint 1994.

[LS] T. LADA, J. STASHEFF, *Introduction to sh Lie algebras for physicists*, Intern. J. Th. Ph. **32** (1993), 1087–1103.

[La] M. LAZARD, *Lois de groupes et analyseurs*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris **62** (1955), 299–400.

[Lo1] J.-L. LODAY, "Cyclic Homology" Grund. math. Wiss. **301**, Springer Verlag 1992.

[Lo2] J.-L. LODAY, *Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras*, Math. Scand. (to appear).

[LP] J.-L. LODAY, and T. PIRASHVILI, *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*, Math. Ann. **296** (1993), 291–338.

[Lö] C. LÖFWALL, *On the subalgebra generated by one dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra*, Springer Lect. Notes in Maths **1183** (1986), 299–400.

[McL] S. MACLANE, "Categories for the working mathematician", Springer Graduate Text in Maths **5**, 1971.

[M1] Y.I. MANIN, *Some remarks on Koszul algebras and quantum groups*, Ann. Inst. Fourier **37** (1987), 191-205.

[M2] Y.I. MANIN, *Quantum groups and non-commutative geometry*, Pub. Centre Rech. Math. Montréal, 1988.

[Mr1] M. MARKL, *Models for operads*, preprint, 30 p., 1994.

[Mr2] M. MARKL, *Distributive laws and the Koszulness*, preprint, 24 p., 1994.

[May] J.P. MAY, "The geometry of iterated loop spaces", Springer Lecture Notes in Math. **271**, 1972.

[Pi] T. PIRASHVILI, *On Leibniz homology*, Ann. Inst. Fourier **44** (1994), 401-411.

[P] S.B. PRIDDY, *Koszul resolutions*, Trans. AMS **152** (1970), 39–60.

[Q] D. QUILLEN, *Rational homotopy theory*, Ann. of Maths **90** (1969), 205–295.

[Re] C. REUTENAUER, "Free Lie algebras", Oxford University Press, 1993.

[Ro] A. ROBINSON, *The space of fully-grown trees*, preprint Bielefeld (1992).

[S1] V.A. SMIRNOV, *Cohomology of B and $co-B$ construction*, preprint.

[S2] V.A. SMIRNOV, *Secondary operations in the homology of the operad E*, Russian Acad. Sci. Izv. Math. **40** (1993), 425–442.

[St] J.D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces, I., II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275–312.

Jean-Louis LODAY
Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Université Louis Pasteur et CNRS,
7 rue René-Descartes,
F-67084 STRASBOURG, France
e-mail : loday@math.u-strasbg.fr

WOLFGANG SOERGEL

Conjectures de Lusztig

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki, exp. n° 793, p. 75-85
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__75_0>

Séminaire BOURBAKI
47ème année, 1994-95, n° 793

Novembre 1994

CONJECTURES DE LUSZTIG

par **Wolfgang SOERGEL**

1. INTRODUCTION

Soit $n \geq 2$ un entier. À tout anneau commutatif unitaire A, on peut associer le groupe

$$G(A) = SL_n(A) = \{D \in M(n \times n, A) \mid \det D = 1\}.$$

Problème 1 : *Soient k un corps, p un premier. Quelle est la structure des $kG(\mathbb{F}_p)$-modules simples, c'est-à-dire des représentations irréductibles de $G(\mathbb{F}_p)$ sur k ?*

Le cas $k = \mathbb{C}$ des représentations complexes de $G(\mathbb{F}_p)$ est traité par Deligne-Lusztig et Lusztig, voir par exemple l'exposé [Ca87] dans ce séminaire. Le présent exposé traite le cas $k = \bar{\mathbb{F}}_p$. Remarquons tout de suite que Lusztig ([Lu79], Problem IV et [Lu80]) a conjecturé une solution qui serait valable pour p suffisamment grand. On sait maintenant démontrer que cette conjecture est valable pour presque tout nombre premier p, c'est-à-dire que, pour n donné, il y a au plus un nombre fini d'exceptions. Par contre, pour un nombre premier p donné, on ne sait toujours pas décider s'il est une exception ou non. On s'attend à ce que la conjecture soit valable pour tout $p \geq n$. Plus généralement soit R un système de racines (réduit et fini). On sait lui associer un schéma en groupes G sur $\mathbb{Z}$, semi-simple et simplement connexe. La conjecture de Lusztig donne une description des $kG(\mathbb{F}_p)$-modules simples, pour $k = \bar{\mathbb{F}}_p$. Lusztig a énoncé sa conjecture pour p suffisamment grand. On suppose qu'elle est valable pour $p \geq h$, où h est le nombre de Coxeter de R. On ne sait le démontrer en ce moment que dans l'hypothèse où toutes les racines ont la même longueur, et même dans ce cas seulement pour presque tout nombre premier p.

Dans mon exposé, je veux esquisser une partie de cette démonstration. Sa stratégie globale est due à Lusztig [Lu90b], [Lu90c]. Elle consiste à traduire notre problème en le problème de calculer la cohomologie d'intersection d'une variété de Schubert de dimension finie dans une variété de drapeaux affine. On sait résoudre ce problème. La traduction passe par les algèbres de Lie restreintes, les groupes quantiques à une racine de l'unité et les algèbres de Lie affines. Pour d'autres informations, voir [An94]. Je commence par la première étape qui est bien connue.

2. DES GROUPES DE CHEVALLEY AUX ALGÈBRES DE LIE

Soient p un premier et $k = \bar{\mathbb{F}}_p$. Considérons le groupe algébrique $G(k)$ et notons $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Par exemple, pour $G(k) = SL_n(k)$, on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{k}) = \{\mathfrak{D} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}, \mathfrak{k}) \mid \mathrm{tr}\mathfrak{D} = \mathfrak{o}\}$. Considérons le diagramme fonctoriel :

$$\begin{tikzcd}
 & G(k)\text{-modules rationnels} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
kG(\mathbb{F}_p)\text{-modules} & & \mathfrak{g}\text{-modules}
\end{tikzcd}$$

où la flèche de gauche est la restriction, la flèche de droite la différentiation. L'algèbre de Lie d'un groupe algébrique en caractéristique positive vient toujours avec une opération $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $D \mapsto D^{[p]}$ appelée "puissance p-ième formelle". Dans le cas $\mathfrak{sl}_n(k)$ ce n'est rien d'autre que la puissance p-ième d'une matrice. Une représentation $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathfrak{k}}\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{g}$ est dite "restreinte" si et seulement si $\rho(D)^p = \rho(D^{[p]})$ dans $\mathrm{End}_k V$, pour tout $D \in \mathfrak{g}$. L'algèbre enveloppante restreinte $U^{res}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{U}^{\mathfrak{res}}$ est définie comme le quotient de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ par l'idéal engendré par tous les $D^p - D^{[p]}$. Elle est de dimension finie sur k. Par définition, une représentation restreinte de $\mathfrak{g}$ n'est rien d'autre qu'un objet de U^{res}-mod. On sait qu'en différenciant des $G(k)$-modules algébriques, on obtient toujours des $\mathfrak{g}$-modules restreints. Plus précisement, d'après Steinberg et Curtis [Ca63], on obtient ainsi des bijections :

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c} G(k)\text{-modules rationnels simples} \\ \text{de plus haut poids restreint} \end{array} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\begin{array}{c} kG(\mathbb{F}_p)\text{-modules} \\ \text{simples} \end{array} & & \begin{array}{c} U^{res}\text{-modules} \\ \text{simples} \end{array}
\end{tikzcd}$$

La notion de poids restreint sera expliquée dans la section 3.4. Mais peu importe, notre problème formulé dans l'introduction est alors équivalent au :

Problème 2 : *Quelle est la structure des U^{res}-modules simples?*

C'est là un problème clef de toute la théorie. D'une solution, on saurait déduire (voir [Ca63]) des formules pour les caractères de tous les $G(k)$-modules simples rationnels, ainsi que pour toutes les représentations irréductibles des $G(\mathbb{F}_{p^r})$ sur k.

3. DES ALGÈBRES DE LIE AUX GROUPES QUANTIQUES

3.1. Motivation

Pour tout corps k, le groupe $SL_2(k)$ opère sur l'algèbre symétrique $S(k^2) = k[X,Y]$ et stabilise ses composantes homogènes $k[X,Y]^m$. Pour $k = \mathbb{C}$, les $k[X,Y]^m$ pour $m = 0, 1, \ldots$ sont simples, et tout $SL_2(k)$-module simple rationnel est isomorphe à un et un seul d'entre eux. Pour $k = \bar{\mathbb{F}}_p$, ce n'est plus le cas. En effet, il est facile de voir que $kX^p + kY^p$ est un sous-module de $k[X,Y]^p$. En général, la classification des $G(k)$-modules simples par leur plus haut poids reste valable pour char$k > 0$, mais le caractère de ces modules simples n'est plus en général donné par la formule de caractères de Weyl.

Notons que les éléments $e = \binom{01}{00}$, $f = \binom{00}{10}$, $h = \binom{1\ \ 0}{0\ -1}$ de $\mathfrak{sl}_2(k)$ opèrent sur $k[X,Y]^m$ par les opérateurs $X\partial_Y$, $Y\partial_X$ et $X\partial_X - Y\partial_Y$. Si l'on pose $b_i = X^i Y^{m-i}$ on a alors :

$$\begin{aligned} eb_i &= (m-i)b_{i+1} \\ fb_i &= ib_{i-1} \\ hb_i &= (2i-m)b_i. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas des groupes quantiques. L'algèbre enveloppante quantique U_v correspondant à $\mathfrak{sl}_2$ est une algèbre sur le corps de fonctions $\mathbb{C}(v)$ donnée par les générateurs E, F, K, K^{-1} et les relations $KK^{-1} = K^{-1}K = 1$, $KEK^{-1} = v^2E$, $KFK^{-1} = v^{-2}F$, $EF - FE = \frac{K-K^{-1}}{v-v^{-1}}$. Dans toute dimension $(m+1)$, elle admet deux représentations simples $V_{\pm}^m$. Dans une base appropriée $b_0, \ldots, b_m$, ces représentations sont données par les formules

$$\begin{aligned} Eb_i &= [m-i]b_{i+1} \\ Fb_i &= \pm[i]b_{i-1} \\ Kb_i &= \pm v^{2i-m}b_i \end{aligned}$$

où $[i]$ est le "nombre quantique" $[i] = v^{i-1} + v^{i-3} + \ldots v^{-i+1} = \frac{v^i - v^{-i}}{v-v^{-1}} \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$. En fait U_v et ses modules $V_{\pm}^m$ sont déja définis sur $\mathbb{C}[v, v^{-1}, (v-v^{-1})^{-1}]$ et de là on peut spécialiser v à n'importe quel $\zeta \in \mathbb{C} - \{0, 1, -1\}$. Si l'on prend pour ζ une p-ième racine d'unité, p impair, on a $[i](\zeta) = 0$ si et seulement si i est divisible par p, et l'on voit que la structure de $V_{\pm}^m$ pour $v = \zeta$ est très semblable à celle du $U(\mathfrak{sl}_2(k))$-module $k[X,Y]^m$ pour char$k = p$. On peut alors s'attendre à ce que la théorie des représentations modulaires en caractéristique p soit semblable à celle des groupes quantiques à une p-ième racine de l'unité. Dans les deux sections suivantes, on va formuler ce phénomène de façon plus précise.

3.2. Indépendance de la caractéristique, version brute

Soit A une algèbre (associative, unitaire) de dimension finie sur un corps k. Il se peut que A se décompose en produit de sous-algèbres $A = \times_B B$. Il y a toujours certainement une telle décomposition maximale. Celle-ci est unique, et les sous-algèbres correspondantes sont appelées les blocs de A. Tout A-module simple (ou même indécomposable) M est annulé par tous les blocs sauf un, le bloc de M. Dans un contexte de théorie des représentations, le bloc de la représentation triviale k est appelé le "bloc principal".

Deux algèbres A et B sur un corps k sont dites "Morita-équivalentes" si et seulement si les catégories A-mof et B-mof de leurs modules de dimension finie sont équivalentes (en tant que k-catégories). Soient R, h comme avant. Posons $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}[b^{-1} \mid 1 < b < h]$.

THÉORÈME 1.— *Il existe une algèbre $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{Z}'$, libre de rang fini en tant que $\mathbb{Z}'$-module, telle que :*

(i) *pour tout $p > h$, la $\bar{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{F}}_p$ est Morita-équivalente au bloc principal de l'algèbre enveloppante restreinte U^{res} associée à R et p,*

(ii) *pour tout $\ell > h$ premier à tous les coefficients de la matrice de Killing-Cartan de R et toute racine primitive ℓ-ième de l'unité ζ, la $\mathbb{Q}(\zeta)$-algèbre $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(\zeta)$ est Morita-équivalente au bloc principal de l'algèbre enveloppante restreinte quantique $\mathbf{u}_\zeta$ associée à R et ζ.*

Il faut encore définir cette $\mathbb{Q}(\zeta)$-algèbre $\mathbf{u}_\zeta$. Rappelons d'abord que, dans le cas classique, U^{res} peut s'obtenir comme suit : On commence avec l'algèbre de Lie semi-simple complexe associée à R et on prend son algèbre enveloppante U. Un choix de générateurs de Chevalley dans notre algèbre de Lie nous donne une $\mathbb{Z}$-forme $U_{\mathbb{Z}}$ de U, dite "de Kostant", qui contient nos générateurs. Puis on forme $U_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{F}}_p$ (cette algèbre est connue sous le nom d'hyperalgèbre de $G(\bar{\mathbb{F}}_p)$) et U^{res} en est la sous-algèbre engendrée par les (images des) générateurs de Chevalley.

Le cas quantique est analogue, voir [Lu90a]. On commence avec l'algèbre enveloppante quantique U_v sur $\mathbb{C}(v)$ donnée par générateurs E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} pour i dans un système de racines simples de R, et certaines relations. Puis on y définit une $\mathbb{Q}(v, v^{-1})$-forme qui est un analogue de la $\mathbb{Z}$-forme de Kostant et, en spécialisant v

on obtient des $\mathbb{Q}(\zeta)$-algèbres U_ζ pour tout $\zeta \in \mathbb{C}^\times$. Si $\ell > 2$ est premier à tous les coéfficients de la matrice de Killing-Cartan de R et ζ est une racine primitive ℓ-ième de l'unité, on peut définir $\mathbf{u}_\zeta$ comme la sous-algèbre de U_ζ engendrée par les images de nos générateurs.

Au lieu d'expliquer la démonstration (tres longue) du théorème contenue dans [AJS94], je vais donner $\mathcal{E}$ dans le cas $\mathfrak{sl}_2$. Dans ce cas le bloc principal a deux modules simples: k resp. $\mathbb{Q}(\zeta)$ et $k[X,Y]^{p-2}$ resp. V_+^{l-2}. On peut calculer explicitement les recouvrements projectifs de ces modules ainsi que les homomorphismes entre ces projectifs, et on trouve que le bloc principal est Morita-équivalent à l'algèbre du carquois avec deux points p et q, quatre flèches $a, i : p \to q$, $a, i : q \to p$ et les six relations $aa = ii = ai = 0$. On prendra alors pour $\mathcal{E}$ l'algèbre sur $\mathbb{Z}'$ de ce carquois avec relations.

Notons que le théorème implique :

COROLLAIRE 1 : *La matrice de Cartan du bloc principal de U^{res} ne dépend pas de p, pour p suffisamment grand, et elle est alors égale à la matrice de Cartan du bloc principal de $\mathbf{u}_\zeta$, pour tout ζ comme dans le théorème.*

Il suffit de réaliser que les endomorphismes de tous nos objets simples sont réduits aux scalaires. Le corollaire découle alors du théorème par des arguments standards, voir [Ben].

Malheureusement il n'est pas possible de déduire la structure des modules simples de la connaissance de la matrice de Cartan. Pour cela il nous faut une version beaucoup plus fine du théorème, qui sera expliquée dans la section suivante.

3.3. Indépendance de la caractéristique, version fine

Commençons par des rappels sur la théorie des représentations restreintes de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire des U^{res}-modules. Pour plus de détails on pourra consulter [Jan]. D'abord on travaillera sur un corps fixe $k = \bar{\mathbb{F}}_p$. Soient $T \subset B \subset G(k)$ un tore maximal et un sous-groupe de Borel. Soient $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ les algèbres de Lie correspondantes. Tout caractère du tore $\nu \in X = X(T)$ admet une différentielle $\bar{\nu} \in \mathfrak{h}^*$. Elle nous donne une représentation $k_{\bar{\nu}}$ de $\mathfrak{h}$ que l'on étend à $\mathfrak{b}$ de la manière usuelle. Ensuite on induit pour obtenir le "petit Verma" :

$$Z(\bar{\nu}) = Z_k(\bar{\nu}) = U^{res} \otimes_{U(\mathfrak{b})} k_{\bar{\nu}} \in U^{res}\text{-mod}.$$

Il admet un quotient simple $L(\bar{\nu})$ unique et l'application $\nu \mapsto L(\bar{\nu})$ établit une bijection :

$$X/pX \xrightarrow{\sim} \{U^{res}\text{-modules simples}\}.$$

On connaît très bien les $Z(\bar{\nu})$; on pourrait alors espérer que, pour comprendre les $L(\bar{\nu})$, il suffit de connaître les multiplicités $[Z(\bar{\nu}) : L(\bar{\lambda})]$. Mais la matrice de ces multiplicités est singulière, donc elle ne permet pas de traduire nos connaissances sur les $Z(\bar{\nu})$ en connaissances sur les $L(\bar{\lambda})$.

Pour relever ce défi, notons que le tore T agit sur $\mathfrak{g}$ et U^{res}, qui sont donc X-graduées. On considère alors la catégorie $U^{res}\text{-mof}_X$ de tous les U^{res}-modules X-gradués $M = \bigoplus_{\nu \in X} M_\nu$ de dimension finie, et la sous-catégorie $\mathcal{C} = \mathcal{C}_k$ des M telles que $Hm = \bar{\nu}(H)m$ pour tous $H \in \mathfrak{g}$, $\nu \in X$, $m \in M_\nu$. Cette catégorie est connue sous le nom de G_1T-modules. Tout $\lambda \in X$ nous donne un objet $Z(\lambda) = Z_k(\lambda) = U^{res} \otimes_{U(\mathfrak{b})} k_{\bar{\lambda}} \in \mathcal{C}$ dont la X-graduation est déterminée par $Z(\lambda)_\lambda = k(1 \otimes 1)$. Les $Z(\lambda)$ ont des quotients simples uniques $L(\lambda) = L_k(\lambda)$ et l'application $\lambda \mapsto L(\lambda)$ est une bijection :

$$X \xrightarrow{\sim} \{\text{objets simples de } \mathcal{C}\}.$$

De plus, on sait que $L(\lambda) = L(\bar{\lambda})$ en tant que $\mathfrak{g}$-module. Notre problème 2 peut maintenant se préciser comme suit.

Problème 3 : *Calculer* $\dim_k L(\lambda)_\nu$ *pour* $\lambda, \nu \in X$.

Puisque les $\dim Z(\lambda)_\nu$ sont connues et la matrice des multiplicités de Jordan-Hölder $[Z(\lambda) : L(\mu)]$ est triangulaire unipotente, c'est encore équivalent au :

Problème 4 : *Calculer* $[Z(\lambda) : L(\mu)]$ *pour tous* $\lambda, \mu \in X$.

Soit $\mathcal{W}$ le groupe de Weyl affine. C'est le produit semi-direct du réseau de racines $\mathbb{Z}R$ avec le groupe de Weyl fini W. Il opère sur X de manière standard. Pour tout entier $\ell \geq 1$, on definit une autre opération en posant :

$$x \cdot_\ell \lambda = \ell x \ell^{-1}(\lambda + \rho) - \rho,$$

où ρ est la demi-somme des racines R^+ de B. C'est l'opération standard conjugée avec une homothétie d'abord et une translation par ρ ensuite. Par des principes ("linkage principle" et "Verschiebungsprinzip") que je ne veux pas détailler, il est possible pour tout $p \geq h$ de réduire notre problème aux cas spéciaux suivants.

Problème 5 : *Calculer* $[Z(x \cdot_p 0), L(y \cdot_p 0)]$ *pour tout* $x, y \in \mathcal{W}$.

Lusztig a énoncé dans [Lu80] des conjectures qui expriment ces multiplicités en des termes combinatoires. En particulier, on s'attend à ce que pour $p \geq h$ ils soient indépendants de p, ce qui a déjà été conjecturé par Verma. Le théorème suivant rassemblant quelques résultats de [AJS94] va dans cette direction. Posons :

$$\mathcal{C}_k^{triv} = \{M \in \mathcal{C}_k \mid [M : L(\lambda)] \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \mathcal{W} \cdot_p 0\}.$$

C'est un facteur direct de $\mathcal{C}_k$, plus précisément son "bloc principal".

THÉORÈME 2 : *Il existe une $\mathbb{Z}'$-algèbre $\mathbb{Z}R$-graduée $\mathcal{B}$ avec une famille $Z(x)_{x\in\mathcal{W}}$ de $\mathcal{B}$-modules $\mathbb{Z}R$-graduées, telles que $\mathcal{B}$ et les $Z(x)$ sont libres de rang fini sur $\mathbb{Z}'$, et*

(1) *pour tout premier $p \geq h$ il y a une equivalence de $\bar{\mathbb{F}}_p$-catégories*

$$(\mathcal{B} \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{F}}_p)\text{-mof}_{\mathbb{Z}R} \cong \mathcal{C}_{\bar{\mathbb{F}}_p}^{triv}$$

tel que $Z(x) \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{F}}_p$ corresponde à $Z_{\bar{\mathbb{F}}_p}(x \cdot_p 0)$.

L'algèbre enveloppante restreinte quantique $\mathbf{u}_\zeta$ admet aussi une X-graduation ; on arrive à construire des analogues quantiques $\mathcal{C}_\zeta$, $\mathcal{C}_\zeta^{triv}$, $Z_\zeta(\lambda)$, $L_\zeta(\lambda)$ de nos objets de caractéristique positive d'avant, et maintenant notre théorème admet l'extension suivante :

THÉORÈME 2 (suite) : *... et telles que :*

(2) *pour tout $\ell \geq h$ premier à tous les coefficients de la matrice de Killing-Cartan de R et toute racine primitive ℓ-ième de l'unité ζ, il y a une équivalence de $\mathbb{Q}(\zeta)$-catégories*

$$(\mathcal{B} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(\zeta))\text{-mof}_{\mathbb{Z}R} \cong \mathcal{C}_\zeta^{triv}$$

telle que $Z(x) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(\zeta)$ corresponde à $Z_\zeta(x \cdot_\ell 0)$.

De ce théorème on déduit par des arguments de changement de base standards le

COROLLAIRE 2 : $[Z_\zeta(x \cdot_\ell 0) : L_\zeta(y \cdot_\ell 0)] = [Z_{\bar{\mathbb{F}}_p}(x \cdot_p 0) : L_{\bar{\mathbb{F}}_p}(y \cdot_p 0)]$ *pour tout ζ comme dans le théorème et pour p suffisamment grand.*

La borne inférieure pour p peut même être choisie indépendemment de x et y: Il suffit de remarquer que $L_{\bar{\mathbb{F}}_p}(\lambda + p\nu)$ n'est rien d'autre que $L_{\bar{\mathbb{F}}_p}(\lambda)$ avec son X-graduation translatée, et pareil pour les L_ζ. Donc si l'on connaît les multiplicités dans un nombre fini de cas bien choisis, on les connaît toutes. Et comme on va l'expliquer dans la section suivante, dans le cas quantique beaucoup de ces multiplicités sont connues.

3.4. Conséquences pour les caractères

Soit $\mathbb{Z}[X]$ l'anneau du groupe X. Pour $\nu \in X$, notons $e^{\nu} \in \mathbb{Z}[X]$ l'élément correspondant. À tout espace vectoriel de dimension finie X-gradué M, on associe son caractère $\mathrm{ch} M = \sum(\dim M_{\nu})e^{\nu}$. Soient maintenant $p > h$ un nombre premier et ζ une racine p-ième de l'unité. On connaît les caractères de tous les Z, et en particulier on sait que $\mathrm{ch} Z_{\zeta}(\lambda) = \mathrm{ch} Z_{\bar{\mathbb{F}}_p}(\lambda)$. D'autre part le "linkage principle" et le "Verschiebungsprinzip" permettent de déduire des égalités $[Z_{\zeta}(x \cdot_p 0) : L_{\zeta}(y \cdot_p 0)] = [Z_{\bar{\mathbb{F}}_p}(x \cdot_p 0) : L_{\bar{\mathbb{F}}_p}(y \cdot_p 0)]$ toutes les égalités $[Z_{\zeta}(\lambda) : L_{\zeta}(\mu)] = [Z_{\bar{\mathbb{F}}_p}(\lambda) : L_{\bar{\mathbb{F}}_p}(\mu)]$. Alors le corollaire précédent implique :

COROLLAIRE 3 : *Il existe une borne $b(R)$ telle que $\mathrm{ch} L_{\zeta}(\lambda) = \mathrm{ch} L_{\bar{\mathbb{F}}_p}(\lambda)$ pour tout premier $p \geq b(R)$ et toute racine primitive p-ième ζ de l'unité.*

En fait, Lusztig [Lu90a] sait même définir une $\mathbb{Z}[\zeta]$-forme de $L_{\zeta}(\lambda)$ qui devrait donner $L_{\bar{\mathbb{F}}_p}(\lambda)$ après réduction modulo p. Que cela soit vrai pour $p \geq b(R)$ est une conséquence du corollaire.

Je veux maintenant expliquer comment on arrive à connaître les $[Z_{\zeta}(x \cdot_{\ell} 0) : L_{\zeta}(y \cdot_{\ell} 0)]$ ou, ce qui est équivalent, les $\mathrm{ch} L_{\zeta}(\lambda)$. Soit ℓ un entier qui est premier à tous les coefficients de la matrice de Killing-Cartan et soit ζ une racine primitive ℓ-ième de l'unité. Considérons dans X l'ensemble des poids dominants $X^+ = \{\lambda \mid \langle \lambda, \alpha^{\vee} \rangle \geq 0$ pour tous $\alpha \in R^+\}$ et à l'intérieur de cet ensemble, pour tout ℓ, la boîte des poids restreints $X_{\ell}^{res} = \{\lambda \in X^+ \mid \langle \lambda, \alpha^{\vee} \rangle < \ell$ pour toute racine simple $\alpha\}$. Tout U_{ζ}-module de dimension finie admet une X-graduation naturelle. Dans la catégorie U_{ζ}-mof, on prend la sous-catégorie des modules dites "de type 1". Les modules simples de type 1 sont classifiés par leur plus haut poids $\lambda \in X^+$ et notés $\mathcal{L}_{\zeta}(\lambda)$. Pour tout poids restreint $\lambda \in X_{\ell}^{res}$, la restriction de $\mathcal{L}_{\zeta}(\lambda)$ à $\mathbf{u}_{\zeta}$ donne $L_{\zeta}(\lambda)$, voir [Lu89]. Le problème de déterminer les $\mathrm{ch} L_{\zeta}(\lambda)$ revient alors au problème de déterminer les $\mathrm{ch} \mathcal{L}_{\zeta}(\lambda)$.

Dans ce cas, la conjecture peut s'énoncer facilement. Soit $\bar{A}_{\ell} = \{\lambda \in X \mid 0 \geq \langle \lambda + \rho, \alpha^{\vee} \rangle \geq -\ell$ pour tout $\alpha \in R^+\}$ la fermeture de la plus haute alcôve dans la chambre de Weyl négative. C'est un domaine fondamental pour $(\mathcal{W} \cdot_l)$. Pour tout $\lambda \in X^+$, soit

$$\chi(\lambda) = \frac{\sum_{x \in W}(-1)^x x(\lambda + \rho)}{\sum_{x \in W}(-1)^x x(\rho)} \in \mathbb{Z}[X]$$

le "caractère de Weyl". Ici $(-1)^x \in \{+1, -1\}$ mesure si x change l'orientation ou non. Pour $\lambda \notin X^+$, on mettra $\chi(\lambda) = 0$.

Conjecture (Lusztig) : *Soit* $\lambda \in X^+$ *et soit* $w \in \mathcal{W}$ *de longueur minimale tel que* $w^{-1} \cdot_\ell \lambda \in \bar{A}_\ell$. *Alors on a :*

$$\mathrm{ch}\mathcal{L}_\zeta(\lambda) = \sum_{y \in \mathcal{W}} (-1)^{yw} P_{y,w}(1) \chi(yw^{-1} \cdot_\ell \lambda).$$

Ici $\mathcal{W}$ est considéré comme groupe de Coxeter avec reflections simples données par les murs de l'alcôve la plus basse dans la chambre de Weyl positive. Les $P_{y,w}$ sont les polynômes de Kazhdan-Lusztig définis dans [KL80].

Cette conjecture est établie dans le cas où toutes les racines ont la même longueur, avec des restrictions tres faibles sur ℓ ($\ell > 32$ suffit toujours). Comme Mathieu l'a expliqué dans son exposé récent [Ma94], Kazhdan et Lusztig [KL91], [KL93], [KL94] ont traduit cette conjecture dans une conjecture analogue pour les algèbres de Lie affines, et cette conjecture "affine" vient d'être demontrée par Kashiwara et Tanisaki [KT94], qui ont réussi à généraliser la démonstration pour le cas "classique" [Sp82] au cas affine.

Revenons au cas de caractéristique positive. Pour $\lambda \in X^+$, on notera $\mathcal{L}_{\bar{\mathbb{F}}_p}(\lambda)$ le $G(\bar{\mathbb{F}}_p)$-module simple de plus haut poids λ. Du corollaire 3, on déduit pour un système de racines R (qui maintenant n'est pas supposé ADE) :

THÉORÈME 3 : *Il existe une borne* $b(R)$ *telle que*

$$\mathrm{ch}\mathcal{L}_\zeta(\lambda) = \mathrm{ch}\mathcal{L}_{\bar{\mathbb{F}}_p}(\lambda)$$

pour tout premier $p \geq b(R)$, ζ *une racine* p*-ième de l'unité, et* $\lambda \in X^+$ *soumise aux conditions* $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \leq p(p - h + 2)$ $\forall \alpha \in R^+$.

Rappelons que h est le nombre de Coxeter. On éspère que le théorème reste vrai pour $b(R) = h$. Par contre la condition à λ est essentielle. Elle vient du fait que le théorème de Steinberg a une forme différente pour les groupes quantiques [Lu89] et pour les groupes algébriques [Ca63].

4. RAMIFICATIONS

On sait que, pour $p \geq h$, la conjecture de Lusztig équivaut à la :

Conjecture : $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(Z(x \cdot_p 0), L(y \cdot_p 0)) = 0$ *si* $(-1)^i \neq (-1)^{xy}$.

Dans le cas classique, cette équivalence est attribuée à Vogan ; dans notre cas c'est [Ka89], voir aussi [CPS92]. Sous cette forme, la conjecture admet une généralisation non-triviale aux murs.

Conjecture: *Soit $p \geq h$ un nombre premier (dans le cas modulaire) ou nombre entier premier aux $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ pour tous $\alpha, \beta \in R$ (dans le cas quantique). Alors il existe une fonction $\epsilon : X \to \{\pm 1\}$ telle que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(Z(\lambda), L(\mu)) = 0$ si $(-1)^i \neq \epsilon(\lambda)\epsilon(\mu)$.*

En fait, $\epsilon(\lambda)\epsilon(\mu)$ devrait être la parité du nombre des hyperplans H de reflection de $\mathcal{W}\cdot_p$ tels que $\lambda \in H^+$ et $\mu \in H^- \cup H$, où l'on note H^+ le demi-plan ouvert qui rencontre tout translat de la chambre de Weyl positive. D'après [AJS94], cette conjecture en implique une autre, que j'aime particulièrement. Soit p comme dans la conjecture précédente.

Conjecture: *Les algèbres U^{res} (resp. $\mathbf{u}_\zeta$) admettent des $\mathbb{Z}$-graduations "de Koszul".*

Pour la définition d'une algèbre de Koszul, je me réfère à l'exposé recent de Loday dans ce séminaire. Notons que la conjecture de Lusztig implique déjà que les blocs principaux de ces algèbres admettent des $\mathbb{Z}$-graduations de Koszul. C'est en travaillant avec ces graduations que les coefficients des polynômes de Kazhdan-Lusztig prennent toute leur signification.

BIBLIOGRAPHIE

[AJS94] H. H. ANDERSEN, J. C. JANTZEN and W. SOERGEL - Representations of quantum groups at a p-th root of unity and of semisimple groups in characteristic p : Independence of p, *Astérisque* **220** (1994), 1–321.

[An94] H. H. ANDERSEN - The irreducible characters for semi-simple algebraic groups and for quantum groups, *Proceedings of the ICM94 in Zürich.*

[Ben] D. J. BENSON - *Representations and Cohomology I: Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras* (Cambridge Studies in Advanced Mathematics **30**), Cambridge 1991 (Cambridge Univ).

[Ca63] P. CARTIER - Représentations linéaires des groupes algébriques semi-simples en caractéristique non nulle, *Sém. Bourbaki, exposé* **255** (1963).

[Ca87] P. CARTIER - Détermination des caractères des groupes finis simples: Travaux de Lusztig, *Sém. Bourbaki, Astérisque* **145–146** (1987), 137-161.

[CPS92] E. CLINE, B. PARSHALL and L. SCOTT - Infinitesimal Kazhdan-Lusztig theories, pp. 43–73 in: V. Deodhar (ed.), *Kazhdan-Lusztig Theory and Related Topics*, Proc. Chicago 1989 (Contemporary Mathematics **139**), Providence, R. I. 1992 (Amer. Math. Soc.).

[Jan] J. C. JANTZEN - *Representations of Algebraic Groups* (Pure and Applied Mathematics **131**), Orlando, Fla. 1987 (Academic Press).

[Ka89] M. KANEDA - Extensions of modules for infinitesimal algebraic groups, *Journal of Algebra* **122** (1989), 188–210.

[KL80] D. KAZHDAN and G. LUSZTIG - Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, *Invent. math.* **53** (1980), 191–213.

[KL91] D. KAZHDAN and G. LUSZTIG - Affine Lie algebras and quantum groups, *Internat. Math. Res. Notices* **1991**, no. 2, 21–29, in: *Duke Math. J.* **62** (1991).

[KL93] D. KAZHDAN and G. LUSZTIG - Tensor structures arising from affine Lie algebras I, II, *J. Amer. Math. Soc.* **6** (1993), 905–1011.

[KL94] D. KAZHDAN and G. LUSZTIG - Tensor structures arising from affine Lie algebras III, IV, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), 335–453.

[KT94] M. KASHIWARA and T. TANISAKI - Kazhdan-Lusztig Conjecture for Affine Lie Algebras with Negative Level, *Preprint RIMS-983* (1994).

[Lu79] G. LUSZTIG - Some problems in the representation theory of finite Chevalley groups, pp. 313–317 in: B. Cooperstein, G. Mason (eds.), *The Santa Cruz Conference on Finite Groups (1979),* Proc. Symp. Pure Math. **37**, Providence, R. I. 1980 (Amer. Math. Soc.).

[Lu80] G. LUSZTIG - Hecke algebras and Jantzen's generic decomposition patterns, *Adv. in Math.* **37**(1980), 121–164.

[Lu89] G. LUSZTIG - Modular representations and quantum groups, pp. 59–77 in: A. J. Hahn, D. G. James, Z.-X. Wan (eds.), *Classical Groups and Related Topics,* Proc. Beijing 1987 (Contemporary Mathematics **82**) Providence, R. I. 1989 (Amer. Math. Soc.).

[Lu90a] G. LUSZTIG - Quantum groups at roots of 1, *Geom. Dedicata* **35** (1990), 89–114.

[Lu90b] G. LUSZTIG - On quantum groups, *J. Algebra* **131** (1990), 466–475.

[Lu90c] G. LUSZTIG - Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 257–296.

[Ma94] O. MATHIEU - Equations de Knizhnik-Zamolodchikov et théorie des représentations, *Sém. Bourbaki, exposé* **78** (1994).

[Sp82] T. A. SPRINGER - Quelques applications de la cohomologie d'intersection, *Sém. Bourbaki, Astérisque* **92–93** (1982), 249–273.

Wolfgang SOERGEL

Mathematisches Institut
der Universität Freiburg
Albertstraße 23B
D-79104 FREIBURG

Astérisque

CHRISTOPH SORGER

La formule de Verlinde

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki, exp. nº 794, p. 87-114
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__87_0>

Séminaire BOURBAKI
47ème année, 1994-95, n° 794

Novembre 1994

LA FORMULE DE VERLINDE

par Christoph SORGER

INTRODUCTION

En physique mathématique, une *théorie conforme rationnelle des champs* associe à chaque surface de Riemann compacte avec points marqués, étiquetés par les éléments d'un ensemble fini Λ, un espace vectoriel de dimension finie, appelé *espace des blocs conformes.* Ces espaces satisfont à certaines règles, dont la *règle de factorisation*, qui décrit ce qu'il advient de l'espace des blocs conformes lorsqu'on fait dégénérer la surface de Riemann. A une telle donnée, Verlinde associe un anneau, *l'anneau de fusion*, qui résume de manière concise les informations données par la règle de factorisation. La conjecture de Verlinde ([32], *cf.* (1.3.8)) propose une description explicite des caractères de cet anneau. Il en résulte une formule explicite pour la dimension des espaces des blocs conformes, appelée formule de Verlinde.

Certaines de ces théories conformes rationnelles, les modèles "WZW", c'est-à-dire de Wess, Zumino et Witten, associées à un groupe algébrique semi-simple et simplement connexe G et un entier $\ell \geq 0$ (on prend alors pour Λ l'ensemble des représentation simple de dimension finie de G de niveau $\leq \ell$) sont particulièrement intéressant pour les géomètres algébristes. En effet, il a été conjecturé que les les espaces des blocs conformes de ces théories s'identifierait aux espaces des sections globales de la ℓ-ème puissance tensorielle d'un fibré naturel sur l'espace des modules des G-fibrés principaux semi-stables avec structure parabolique aux points marqués. Si l'ensemble des points marqués Σ est vide, ces sections sont généralement appelées G-*fonctions thêta généralisées de niveau* ℓ, car on peut les voir comme analogues non-abéliennes des fonctions thêta classiques.

Il y a quelques années, la dimension des espaces des G-fonctions thêta généralisées n'était connue que dans le cas $G = SL_r(\mathbb{C})$ et $\ell = 1$, par une formule due à Beauville, Narasimhan et Ramanan [3]. Depuis que l'on disposait d'une formule conjecturale pour la dimension de ces espaces, on a pu établir cette formule par différentes méthodes de géométrie algébrique dans de nouveaux cas. Pour $G = SL_2(\mathbb{C})$ et ℓ quelconque, elle a été démontrée par Szenes [26], Bertram et Szenes [6], Bertram [5] (pour Σ quelconque), Thaddeus [28], Narasimhan et Ramadas [20] et [24], Donaldson [10], Daskalopoulos et

Wentworth [7] et [8] et Zagier [33]. Mais leurs méthodes ne s'adaptent déjà pas au cas $SL_r(\mathbb{C})$, pour $r > 2$.

Pour traiter le cas général, on revient actuellement aux théories conformes dans le cadre des modèles WZW. Tsuchiya, Ueno et Yamada [30] ont donné une formulation mathématique de ces théories en utilisant la théorie des représentations des algèbres de Kac-Moody affines. Les espaces des blocs conformes qu'ils définissent et qu'ils appellent espaces des vacua, satisfont aux règles des théories conformes rationnelles des champs et en particulier aux règles de factorisation. Faltings [13] (*cf.* aussi Beauville [1]) a ensuite donné une description des caractères des anneaux de fusion associés. Cette description, valable au moins dans le cas des groupes classiques et de G_2, n'utilise pas la conjecture de Verlinde proprement dite; mais elle montre que la dimension de l'espace des vacua est donnée par la formule de Verlinde. Le calcul de la dimension des espaces des G-fonctions thêta généralisées se ramène ainsi pour G semi-simple et simplement connexe à prouver qu'ils s'identifient effectivement aux espaces des vacua de [30]. Cette identification a été établie par Beauville et Laszlo [2] dans le cas de $SL_r(\mathbb{C})$, puis étendue au cas de $SL_r(\mathbb{C})$ et Σ quelconque par Pauly [23]. Dans le cas d'un groupe G quelconque, $\Sigma = \emptyset$, elle est traitée par Kumar, Narasimhan et Ramanathan [18] et par Faltings [13] (qui démontre aussi de façon indépendante les règles de factorisation) mais les arguments donnés sont parfois difficiles à suivre [1]. Un point essentiel pour l'obtenir est l'analogue du théorème de Borel-Weil-Bott pour les algèbres de Kac-Moody de Kumar [17] et Mathieu [19].

Si G n'est pas semi-simple, on peut quand même calculer les dimensions des espaces des G-fonctions thêta: si R est un groupe réductif et G sa partie semi-simple, les dimensions des espaces des R-fonctions thêta sont liées à celles des G-fonctions thêta par une formule simple, ce qui permet de les déduire les unes des autres (Donagi et Tu [9] et Panteev [22]). Il en va autrement concernant l'hypothèse de la simple connexité: on n'a pas encore de formule comparant les dimensions des espaces des G-fonctions thêta à celles des G/K-fonctions thêta pour K un sous-groupe du centre de G.

Comme il existe beaucoup de démonstrations, surtout pour $SL_2(\mathbb{C})$, j'ai dû faire un choix dans ce rapport. J'ai suivi Tsuchiya, Ueno et Yamada pour la formulation mathématique des théories conformes de champs dans le cadre des modèles WZW (paragraphe 2). Pour l'identification des espaces des vacua aux fonctions thêta généralisées (relativement délicate du fait que l'on doit considérer des objets géométriques de dimension infinie), je m'en suis tenu au cas de $SL_r(\mathbb{C})$, et j'ai suivi Beauville et Laszlo [2] (paragraphe 3). Le paragraphe 4 est consacré à la description des caractères de l'anneau de fusion et à la formule de Verlinde explicite, d'après Faltings [13].

[1] Depuis l'exposé, Laszlo et le rapporteur (e-print alg-geom/9507002) ont donné une démonstration indépendante, dans l'esprit de [2], du cas général (*i.e.* G et Σ quelconque) et ont calculé aussi le groupe de Picard du champ des G-fibrés paraboliques.

Conventions:

Par *courbe n-pointée*, on entend ici une courbe algébrique C sur $\mathbb{C}$, complète, réduite et connexe, ayant au plus des points doubles ordinaires comme singularités, munie d'une suite de points distincts $\underline{p} = (p_1, ..., p_n) \in \mathrm{C}^n_{lisse}$. Un *morphisme des courbes n-pointées* f : $(\mathrm{C}, \underline{p}) \longrightarrow (\mathrm{C}', \underline{p}')$ est la donnée d'un morphisme de courbes algébriques $f : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{C}'$ tel que $f(p_i) = p'_i$. Si toute composante irréductible de C contient (au moins) un des points p_i, on dira que la courbe pointée satisfait à la condition $(\star)$. Cette hypothèse signifie que le complémentaire des points marqués est affine. On note g le genre arithmétique de C.

J'aimerais remercier les membres du groupe de travail sur le sujet, que j'ai organisé conjointement avec A. Bruguières, F. Ducrot et G. Maltsiniotis à l'Université Denis Diderot (Paris 7). Je remercie aussi O. Mathieu pour les discussions qui ont conduit aux démonstrations des propositions (2.3.2) et (2.5.1).

1. THÉORIES CONFORMES ET CONJECTURE DE VERLINDE

1.1. Théories conformes

(1.1.1) J'aimerais tout d'abord, à titre de motivation pour les constructions ultérieures, donner un aperçu de ce que l'on entend par "théorie conforme rationnelle des champs" en physique mathématique. Je me contenterai ici de mentionner quelques propriétés des objets mathématiques issues de ces théories. Ce paragraphe sera un peu vague; pour une discussion détaillée des théories conformes, surtout en ce qui concerne les fonctions de corrélations qui servent de point de départ aux physiciens, voir l'exposé de Gawedzki "On conformal field theory" dans ce séminaire (n° 704) et dans la littérature donnée dans cet exposé.

(1.1.2) On se donne un ensemble fini d'étiquettes Λ, muni d'une involution $\lambda \mapsto \lambda^*$, et d'une étiquette λ_0 fixée par l'involution $*$. Physiquement, Λ décrit les états de certaines particules, λ_0 correspond à l'état sans particule, et λ^* à l'état opposé de l'état λ. Une théorie rationnelle conforme de champs associe à toute courbe pointée $(\mathrm{C}, p_1, ..., p_n)$ munie de coordonnées $z_1, ..., z_n$ aux points marqués et étiquetée par $\underline{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ aux points marqués, un espace vectoriel de dimension finie $\mathrm{V_C}(\underline{p}; \underline{z}; \underline{\lambda})$ de manière à ce qu'un certain nombre de conditions soient satisfaites. Une des conditions que l'on impose est celle d'invariance conforme, qui peut s'exprimer de la manière suivante. Soit z une coordonnée complexe. Une transformation conforme infinitésimale est donnée par $z \mapsto z + \epsilon f(z)$ où ϵ est vu dans $\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^2)$ et où $f(z)\frac{d}{dz}$ est un champ de vecteurs holomorphe local. Les champs de vecteurs particuliers $\mathrm{L}_n = z^{n+1}\frac{d}{dz}$, avec $n \geq -1$ satisfont à la règle de commutation $[\mathrm{L}_n, \mathrm{L}_m] = (m-n)\mathrm{L}_{n+m}$ et engendrent une algèbre de Lie de dimension infinie contenant l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}\mathrm{L}_{-1} \oplus \mathbb{C}\mathrm{L}_0 \oplus \mathbb{C}\mathrm{L}_1$

des transformations conformes de $\mathbb{P}_1$. La condition de l'invariance conforme signifie en particulier que les espaces $V_C(\underline{p};\underline{z};\underline{\lambda})$ sont invariants sous de telles transformations, *i.e.* ne dépendent pas du choix des coordonnées z_i: on les note $V_C(\underline{p};\underline{\lambda})$.

Mais elle signifie bien plus: les physiciens imposent que la théorie soit aussi invariante sous toutes les transformations infinitésimales $z \mapsto z + \epsilon f(z)$ où $f(z)\frac{d}{dz}$ est seulement *méromorphe*. L'algèbre de Lie doit donc être agrandie en ajoutant les puissances négatives et, pour des raisons de normalisation, on doit considérer une extension centrale, *l'algèbre de Virasoro*, dont le crochet est défini par

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c_\nu}{12}(n^3 - n)\delta_{n,m},$$

où c_ν est la *charge centrale*. De telles transformations correspondent à des déformations infinitésimales de la courbe pointée respectant les singularités (*cf.* (2.7.7)): l'invariance conforme entraîne alors que les $V_C(\underline{p},\underline{\lambda})$ s'organisent en des fibrés vectoriels $V_g(\underline{\lambda})$ sur les espaces de modules des courbes n-pointées lisses de genre g, et que ces fibrés sont munis d'une connexion (qui ne sera que projective pour $g \geq 2$) plate.

D'autre part, les espaces associés à une courbe singulière C doivent se déduire de ceux associés à sa désingularisation $\widetilde{C}$. En termes de propagation de particules, la liaison interrompue par l'éclatement du point singulier $c \in C$ doit être rétablie en étiquetant les points a et b de $\widetilde{C}$, au-dessus de c par ν et ν^* et ceci pour tout $\nu \in \Lambda$, *i.e.* on impose la *règle de factorisation*

$$V_C(\underline{p};\underline{\lambda}) \simeq \bigoplus_{\nu\in\Lambda} V_{\widetilde{C}}(\underline{p}, a, b; \underline{\lambda}, \nu, \nu^*).$$

De plus, on impose que *l'état sans particule se propage*, *i.e.* $V_C(\underline{p},\underline{\lambda}) \simeq V_C(\underline{p}, q, \underline{\lambda}, \lambda_0)$, et que l'on a *invariance sous* *, *i.e.* $V_C(\underline{p},\underline{\lambda}) \simeq V_C(\underline{p},\underline{\lambda}^*)$. On *normalise* la théorie en imposant $V_{\mathbb{P}_1}(\emptyset;\emptyset) = \mathbb{C}$.

(1.1.3) Considérons par exemple le cas $g = 1$ et $n = 0$. Soit $[E] \in \mathcal{M}_1$ une courbe elliptique. La connexion plate sur $V_1(\emptyset)$ définit une action du groupe de difféotopie $SL_2(\mathbb{Z}) = \pi_1(\mathfrak{M}_1)$ sur $V_E(\emptyset;\emptyset)$. La règle de factorisation fournit, en dégénérant à la courbe singulière, l'isomorphisme $V_E(\emptyset;\emptyset) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\Lambda$; d'où une action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{C}^\Lambda$.

1.2. Les champs de modules de courbes stables

(1.2.1) Rappelons qu'une courbe pointée $(C, p_1, ..., p_n)$ est dite *stable* si son groupe d'automorphismes est fini. Cela équivaut à demander que $2g - 2 + n > 0$ et que toute composante de C isomorphe à $\mathbb{P}_1$ contienne au moins 3 points *spéciaux* (les points spéciaux sont les points marqués et les points communs à deux composantes). Par *famille de courbes n-pointées stables* on entend la donnée d'un morphisme $\pi : C \longrightarrow S$, propre de dimension relative 1, muni de n sections $\sigma_1, ..., \sigma_n$ de sorte que les fibres C_s munies des points $\sigma_1(s), ..., \sigma_n(s)$ soient des courbes n-pointées stables.

(1.2.2) On note $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$ le champ algébrique de modules des courbes n-pointées stables de genre g, $\mathfrak{M}_{g,n}$ l'ouvert correspondant aux courbes lisses. Le champ $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$ est projectif, lisse et connexe sur $\mathbb{C}$. Le bord $\Delta_{g,n} = \overline{\mathfrak{M}}_{g,n} \backslash \mathfrak{M}_{g,n}$ est un diviseur à croisements normaux. Pour décrire $\Delta_{g,n}$, il est commode d'associer à une courbe stable pointée $(\mathrm{C}, p_1, ..., p_n)$ son *graphe d'intersection* Γ. Ce graphe a deux types de sommets: les sommets *externes*, qui sont les points marqués numérotés de 1 à n, et les sommets *internes*, qui sont les composantes irréductibles étiquetées par leur genre géométrique g_s. De chaque sommet externe i part une unique arête qui aboutit au sommet interne C_j contenant p_i. Les arêtes entre C_i et C_j sont, pour $i \neq j$, les points d'intersection des deux composantes; enfin, les arêtes liant C_i à C_i sont les points singuliers de C_i. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des sommets internes. Si $k \in \mathcal{I}$, on note e_k le cardinal de l'ensemble E_k des arêtes partant de k et reliées à un sommet externe, et v_k le cardinal de l'ensemble V_k des demi-arêtes partant de k reliées à un sommet interne. On vérifie aisément que

$$g = g(\Gamma) + \sum_{k \in \mathcal{I}} g_k \ , \ n = \sum_{k \in \mathcal{I}} e_k$$

et que la stabilité se traduit par la connexité du graphe et la condition $2g_k - 2 + e_k + v_k > 0$ pour tout $k \in \mathcal{I}$. Réciproquement, chaque graphe Γ satisfaisant à ces conditions est le graphe d'intersection d'une courbe stable n-pointée de genre g. Soit Γ un tel graphe, et choisissons une bijection $\varphi_k : \{1, ..., v_k, v_k + 1, ..., v_k + e_k\} \longrightarrow \mathrm{V}_k \coprod \mathrm{E}_k$ pour chaque $k \in \mathcal{I}$. Alors à tout élément $(\mathrm{C}_k)_{k \in \mathcal{I}} \in \prod_{k \in \mathcal{I}} \overline{\mathfrak{M}}_{g_k, v_k + e_k}$ on associe une courbe n-pointée comme suit. Dans $\coprod \mathrm{C}_k$, on numérote le i-ème point de C_k comme l'arête $\varphi_k(i)$ de Γ si $\varphi_k(i) \in \mathrm{E}_k$; et l'on identifie le i-ème point marqué de C_r au j-ème point marqué de C_t si $\varphi_r(i)$ et $\varphi_t(j)$ sont les deux moitiés de la même arête de Γ. On obtient ainsi un morphisme de champs algébriques

$$\prod_{k \in \mathcal{I}} \overline{\mathfrak{M}}_{g_k, v_k + e_k} \longrightarrow \overline{\mathfrak{M}}_{g,n}.$$

Ce morphisme dépend de la façon dont on a ordonné les V_k, mais son image n'en dépend pas. On le note $\overline{\varphi}_\Gamma$. Le bord $\Delta_{g,n}$ est réunion des images des $\overline{\varphi}_\Gamma$, où Γ parcourt les graphes

avec $\mathrm{I} = \{i_1, ..., i_{\#\mathrm{I}}\}$, $\mathrm{J} = \{j_1, ..., j_{\#\mathrm{J}}\}$ et $\mathrm{I} \cup \mathrm{J} = \{1, ..., n\}, \mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \emptyset$.

1.3. La formule de Verlinde, première approche

La première étape (*cf.* Beauville [1] et Szenes [27]) vers la formule de Verlinde consiste à dériver, à partir de la donnée combinatoire (V1) – (V4′) ci-dessous, une formule qui sera rendu explicite au paragraphe 4.

(1.3.1) Soit Λ un ensemble fini muni d'une involution * et d'un élément $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $\lambda_0^* = \lambda_0$. Supposons donné, pour tout $(g,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $n > 2-2g$ et tout $\underline{\lambda} \in \Lambda^n$ un entier naturel $\mathrm{N}_g(\underline{\lambda})$ de sorte que

$$\begin{array}{lll}
(\mathrm{V1}): & \mathrm{N}_0(\lambda_0,\lambda_0,\lambda_0) = 1 & \text{(normalisation)} \\
(\mathrm{V2}): & \mathrm{N}_g(\underline{\lambda}) = \mathrm{N}_g(\underline{\lambda},\lambda_0) & \text{(propagation)} \\
(\mathrm{V3}): & \mathrm{N}_g(\underline{\lambda}) = \mathrm{N}_g(\underline{\lambda}^*) & \text{(invariance sous } ^*) \\
(\mathrm{V4}): & \mathrm{N}_g(\underline{\lambda}) = \sum_{\mu\in\Lambda} \mathrm{N}_{g-1}(\underline{\lambda},\mu,\mu^*)\,;\ g>0 & \text{(factorisation suivant } \Gamma_{irr}) \\
(\mathrm{V4}'): & \mathrm{N}_g(\underline{\lambda}) = \sum_{\mu\in\Lambda} \mathrm{N}_h(\underline{\lambda}_{\mathrm{I}},\mu)\mathrm{N}_{g-h}(\underline{\lambda}_{\mathrm{J}},\mu^*)\,;\ 0\le h\le g & \text{(factorisation suivant } \Gamma_{h,\mathrm{I}})
\end{array}$$

où dans (V4′) on suppose $\mathrm{I}\cup\mathrm{J} = \{1,...,n\}$, $\mathrm{I}\cap\mathrm{J} = \emptyset$, $\#\mathrm{I} \geq 2$ si $h=0$ et $\#\mathrm{J} \geq 2$ si $h=g$, et pour $\mathrm{K} = \{k_1 < \cdots < k_p\} \subset \{1,\ldots n\}$, on pose $\underline{\lambda}_{\mathrm{K}} = (\lambda_{k_1},...,\lambda_{k_p})$.

Au paragraphe 2, nous construirons sur $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$ un fibré vectoriel $\mathrm{V}_g(\underline{\lambda})$ de sorte que $\mathrm{N}_g(\underline{\lambda}) = \operatorname{rang} \mathrm{V}_g(\underline{\lambda})$ satisfasse à ces conditions.

(1.3.2) Les axiomes (V2) et (V4′) entraînent que $\mathrm{N}_g(\underline{\lambda})$ est invariant sous permutation des λ_i. Conjointement avec (V2), cela permet de définir N_g comme une application $\mathrm{N}_g : \mathbb{N}^{(\Lambda)} \longrightarrow \mathbb{Z}$, où $\mathbb{N}^{(\Lambda)}$ désigne le monoïde libre engendré par Λ.

Les axiomes impliquent notamment que $\mathrm{N}_0(\nu) = 0$ pour $\nu \in \Lambda - \{\lambda_0\}$. En effet, on a $1 = \mathrm{N}_0(0) = \sum_{\nu\in\Lambda} \mathrm{N}_0(\nu)\mathrm{N}_0(\nu^*) = \sum_{\nu\in\Lambda} \mathrm{N}_0(\nu)^2$. De plus, on a $\mathrm{N}_0(\lambda+\nu) = 0$ si $\nu \neq \lambda$ et $\mathrm{N}_0(\lambda+\lambda^*) = 0$ ou 1. En effet, par (V4′) on a $\mathrm{N}_0(\lambda+\lambda^*) = \sum_{\nu\in\Lambda} \mathrm{N}_0(\lambda+\nu)^2 \geq \mathrm{N}_0(\lambda+\lambda^*)^2$. Lorsque $\mathrm{N}_0(\lambda+\lambda^*) = 0$, on a $\mathrm{N}_g(\lambda+x) = 0$ pour tout $g \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$.

On supposera désormais que l'on a $\mathrm{N}_0(\lambda+\lambda^*) = 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Dans la théorie conforme du paragraphe 2, cette condition sera satisfaite.

(1.3.3) Considérons le $\mathbb{Z}$-module libre R engendré par Λ, qu'on munit de l'application $\mathbb{Z}$-bilinéaire $m : \mathrm{R}\times\mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}$ définie par extension bilinéaire à partir de

$$\lambda\cdot\mu = \sum_{\nu\in\Lambda} \mathrm{N}_{\lambda\mu}^{\nu}\nu$$

où, par définition, $\mathrm{N}_{\lambda\mu}^{\nu} = \mathrm{N}_0(\lambda+\mu+\nu^*)$.

(1.3.4) LEMME. — *Le $\mathbb{Z}$-module* R *muni de la multiplication définie par m est un anneau commutatif, d'élément neutre λ_0. On l'appelle* l'anneau de fusion.

Démonstration. La commutativité de la multiplication est évidente, l'associativité est une conséquence de la règle de factorisation. En effet,

$$(\lambda\cdot\mu)\cdot\nu = \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{N}_{\lambda\mu}^{\alpha}\mathrm{N}_{\alpha\nu}^{\beta}\beta = \sum_{\beta} \mathrm{N}_0(\lambda+\mu+\nu+\beta^*)\beta = \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{N}_{\mu\nu}^{\alpha}\mathrm{N}_{\alpha\lambda}^{\beta}\beta = \lambda\cdot(\mu\cdot\nu).$$

En outre, $\lambda_0 \cdot \lambda = \sum_{\nu} \mathrm{N}^{\nu}_{\lambda_0\lambda}\nu = \sum_{\nu} \mathrm{N}_0(\lambda+\nu)\nu = \lambda$.

(1.3.5) L'anneau R est muni d'une forme linéaire naturelle $t : \mathrm{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $t(\lambda) = \delta_{\lambda,\lambda_0}$. Cette forme satisfait à $t(\prod \lambda^{n_\lambda}) = \mathrm{N}_0(\sum n_\lambda \lambda)$ pour $\sum n_\lambda \lambda \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$ et à $t(\lambda\mu^*) = \delta_{\lambda\mu}$ pour $\lambda, \mu \in \Lambda$. Par les règles de factorisation, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_g(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) &= \sum_{\nu_1,\dots,\nu_g \in \Lambda} \mathrm{N}_0(\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \nu_1 + \nu_1^* + \dots + \nu_g + \nu_g^*) \\
&= \sum_{\nu_1,\dots,\nu_g \in \Lambda} t(\lambda_1 \cdots \lambda_n \cdot \nu_1 \cdot \nu_1^* \cdots \nu_g \cdot \nu_g^*) \\
&= t(\lambda_1 \cdots \lambda_n \omega^g)
\end{aligned}$$

où ω désigne le *Casimir* $\sum_{\nu \in \Lambda} \nu\nu^*$. Si l'on identifie R à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{R}, \mathbb{Z})$ via la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto t(xy)$, l'image de ω n'est autre que la forme linéaire $\mathrm{Tr} : \mathrm{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie en associant à $x \in \mathrm{R}$ la trace de l'endomorphisme m_x de R donné par la multiplication par x. En particulier, $\mathrm{Tr}(x) = t(\omega x)$ pour $x \in \Lambda$. Par conséquent, on a $\mathrm{N}_g(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = \mathrm{Tr}(\lambda_1 \cdots \lambda_n \omega^{g-1})$.

(1.3.6) Considérée dans la base Λ, la multiplication m_λ, avec $\lambda \in \Lambda$, est donnée par la matrice $\mathrm{N}_\lambda = (\mathrm{N}^{\nu}_{\lambda\mu})_{(\mu,\nu) \in \Lambda \times \Lambda}$. Pour calculer $\mathrm{Tr}(\lambda_1 \cdots \lambda_n \omega^{g-1})$, on cherche, selon Verlinde, à “diagonaliser les règles de fusion”, *i.e.* on cherche une matrice S telle que $\mathrm{N}_\lambda = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{D}_\lambda \mathrm{S}$, avec D_λ diagonale, pour $\lambda \in \Lambda$. Considérons pour cela le spectre Σ de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathrm{R}_{\mathbb{C}} = \mathrm{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$: c'est l'ensemble des caractères (*i.e.* morphismes d'algèbres) de R dans $\mathbb{C}$. De l'existence de la forme linéaire t et de l'involution * résulte le lemme suivant.

(1.3.7) LEMME. — *([1], cor. 6.2) Le morphisme* $\mathrm{R}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\Sigma}$ *qui associe à* x *l'élément* $(\chi(x))_{\chi \in \Sigma}$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{C}$*-algèbres. De plus* $\chi(x^*) = \overline{\chi(x)}$ *pour* $\chi \in \Sigma$ *et* $x \in \mathrm{R}$.

Dans la base canonique de $\mathbb{C}^{\Sigma}$, la multiplication m_x est donnée par la matrice diagonale ayant $\chi(x)_{\chi \in \Sigma}$ comme coefficients, autrement dit la matrice $\chi(\lambda)_{(\chi,\lambda) \in \Sigma \times \Lambda}$ diagonalise les règles de fusion.

$$\mathrm{N}_g(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = \sum_{\chi \in \Sigma} \chi(\lambda_1) \cdots \chi(\lambda_n)\chi(\omega)^{g-1}$$

avec en outre: $\chi(\omega) = \sum_{\nu \in \Lambda} \mid \chi(\nu) \mid^2$.

(1.3.8) REMARQUE. — (*Conjecture de Verlinde*) Si l'on se donne une théorie rationnelle des champs conforme, les nombres $\mathrm{N}_g = \mathrm{rang}\, \mathrm{V}_g(\lambda)$ satisfont à (V1) – (V4′).

Dans ce cadre, $\mathrm{R_{\mathbb{C}}}$ s'identifie à l'espace $\mathrm{V_E}(\emptyset;\emptyset)$ de (1.1.3), sur lequel $\mathrm{SL_2}(\mathbb{Z})$ opère. La conjecture de Verlinde est que la matrice

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalise les règles des fusion, ce qui donne la liste des caractères.

2. LE MODÈLE DE WESS-ZUMINO-WITTEN

2.1. Représentations des algèbres de Lie affine

(2.1.1) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, simple, de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. Soit Δ le système de racines associé à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On a alors la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$. On se fixe de plus une décomposition de Δ en racines positives et négatives: $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$.

Pour toute racine α, on note H_α la coracine de α, *i.e.* l'unique élément de $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ tel que $\alpha(\mathrm{H}_\alpha) = 2$. Notons $\mathrm{X}_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathrm{X}_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ les éléments tels que

$$[\mathrm{H}_\alpha, \mathrm{X}_\alpha] = 2\mathrm{X}_\alpha, \qquad [\mathrm{H}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}] = -2\mathrm{X}_{-\alpha}, \qquad [\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}] = \mathrm{H}_\alpha.$$

On désigne par $\mathrm{P} \subset \mathfrak{h}^*$ le réseau des *poids entiers*, *i.e.* l'ensemble des formes linéaires $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ telles que $\lambda(\mathrm{H}_\alpha) \in \mathbb{Z}$ pour toute racine α, et par $\mathrm{P}_+ \subset \mathrm{P}$ l'ensemble des *poids dominants*, *i.e.* l'ensemble des formes linéaires $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ telles que $\lambda(\mathrm{H}_\alpha) \in \mathbb{N}$ pour toute racine positive α. L'ensemble P_+ est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules simples. On note L_λ le $\mathfrak{g}$-module associé au poids dominant λ, et v_λ son vecteur de plus haut poids. Enfin, on note $(\ ,\ )$ la forme de Cartan-Killing qu'on normalise de façon à ce que pour la racine maximale θ on ait $(\theta,\theta) = 2$.

(2.1.2) On définit *l'algèbre de Lie affine* $\hat{\mathfrak{g}}$ *associée à l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ par $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z)) \oplus \mathbb{C}c$ avec pour crochet (c étant central)

$$[\mathrm{X} \otimes f, \mathrm{Y} \otimes g] = [\mathrm{X},\mathrm{Y}] \otimes fg + (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \operatorname*{Res}_{z=0}(g\, df)\ c$$

On note $\mathrm{X}[f]$ l'élément $\mathrm{X} \otimes f$ de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z))$; si $f = z^n$ on le note aussi $\mathrm{X}(n)$. Soit $\hat{\mathfrak{g}}_- = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$ et $\hat{\mathfrak{g}}_+ = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} z\mathbb{C}[[z]]$. Ce sont des sous-algèbres de Lie de $\hat{\mathfrak{g}}$.

Soit ℓ un entier. Une représentation de $\hat{\mathfrak{g}}$ est dite *de niveau* ℓ si le centre c opère par multiplication par ℓ. La théorie des représentations des algèbres de Lie affines (*cf.* [15]) affirme que les représentations irréductibles de niveau ℓ intégrables (*i.e.* tel que $\mathrm{X}[f]$ opère de façon localement nilpotent pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}_\alpha$ et tout $f \in \mathbb{C}((z))$) de $\hat{\mathfrak{g}}$ sont classifiées (à isomorphisme près) par les poids appartenant à $\mathrm{P}_\ell = \{\lambda \in \mathrm{P}_+ / (\lambda, \theta) \le \ell\}$.

On note $H_\lambda(\ell)$ (ou simplement H_λ quand il n'y a pas d'ambiguïté) la représentation intégrable de niveau ℓ et de plus haut poids $\lambda \in P_\ell$ de $\mathfrak{g}$.

(2.1.3) Fixons un poids $\lambda \in P_\ell$; soit $\hat{\mathfrak{p}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[z]] \oplus \mathbb{C}c$. Le $\mathfrak{g}$-module simple L_λ devient un $\hat{\mathfrak{p}}$-module, noté $L_\lambda(\ell)$, en faisant agir $\hat{\mathfrak{g}}_+ \subset \hat{\mathfrak{p}}$ trivialement, et c par multiplication par ℓ. La représentation $H_\lambda(\ell)$ s'identifie alors au quotient du *module de Verma* $M_\lambda(\ell) = \mathrm{Ind}_{\hat{\mathfrak{p}}}^{\hat{\mathfrak{g}}}(L_\lambda(\ell))$ par le sous-module $Z_\lambda(\ell)$ engendré par $X_\theta(-1)^{\ell+1-(\lambda,\theta)} \otimes v_\lambda$. Par Poincaré-Birkhoff-Witt, $M_\lambda(\ell) = U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \otimes_{\mathbb{C}} L_\lambda$ où $U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$ désigne l'algèbre enveloppante de $\hat{\mathfrak{g}}_-$, d'où la suite exacte

$$0 \longrightarrow Z_\lambda(\ell) \longrightarrow U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \otimes_{\mathbb{C}} L_\lambda \longrightarrow H_\lambda \longrightarrow 0.$$

(2.1.4) La filtration naturelle de l'algèbre enveloppante $U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$ induit une filtration $F_.$ sur H_λ. On pose $H_\lambda(d) = F_{d+1}H_\lambda/F_dH_\lambda$. Remarquons que $H_\lambda(0) = L_\lambda$ et $H_\lambda \simeq \bigoplus_{d\geq 0} H_\lambda(d)$.

(2.1.5) LEMME. — *([30], p. 552) Il existe une forme bilinéaire unique à $\mathbb{C}^*$ près* $(\ \mid\ ) : H_\lambda \times H_{\lambda^*} \longrightarrow \mathbb{C}$ *telle que pour* $X \in \mathfrak{g}$, $n \in \mathbb{Z}$ *et* $u \in H_\lambda$, $v \in H_{\lambda^*}$ *on ait* $(X(n)u \mid v) = -(u \mid X(-n)v)$. *De plus, cette forme bilinéaire est nulle sur* $H_\lambda(d) \times H_{\lambda^*}(d')$ *si* $d \neq d'$.

Choisissons une base $\{w_k(d)\}_{k=1,\dots,h_d}$ de $H_\lambda(d)$ et la base duale $\{w^k(d)\}_{k=1,\dots,h_d}$ de $H_{\lambda^*}(d)$ par rapport à $(\ \mid\ )$. Dans ce qui suit, on note $\sum_{i=1}^{h_d} w_i(d) \otimes w^i(d)$ par $\gamma_\mu(d)$. Cet élément est bien défini à $\mathbb{C}^*$ près, car il ne dépend que du choix de $(\ \mid\ )$.

(2.1.6) REMARQUE. — Il y a une variantes à n paramètres, définie par

$$\widehat{\mathfrak{g}}_n = \mathfrak{g} \otimes \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}((z_i)) \oplus \mathbb{C}c,$$

et $[X \otimes (f_1, \dots, f_r), Y \otimes (g_1, \dots, g_r)] = [X, Y] \otimes (f_1 g_1, \dots, f_r g_r) + (X, Y) \sum_{i=1}^r \mathrm{Res}_{z=0}(g_i\, df_i)c$. L'espace vectoriel $H_{\underline{\lambda}} := H_{\lambda_1} \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} H_{\lambda_n}$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in P_\ell^n$, devient un $\widehat{\mathfrak{g}}_n$-module en faisant opérer le centre par multiplication par le niveau et en posant

$$(X \otimes F).(u) = \sum_{i=1}^{n} u_1 \otimes \dots \otimes u_{i-1} \otimes (X \otimes F_i).u_i \otimes u_{i+1} \otimes \dots \otimes u_n.$$

(2.1.7) Choisissons une base orthonormale X^i par rapport à la forme de Killing et définissons l'opérateur (dit de Sugawara)

$$L_n = \frac{1}{2(g^* + \ell)} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} {}^{\circ}_{\circ} X^i(m) X^i(n-m) {}^{\circ}_{\circ}$$

où l'on définit l'ordre normal $\circ\circ$ par

$$\circ \mathrm{X}(n)\mathrm{Y}(m) \circ = \begin{cases} \mathrm{X}(n)\mathrm{Y}(m) & \text{si } n < m \\ \frac{1}{2}(\mathrm{X}(n)\mathrm{Y}(m) + \mathrm{Y}(n)\mathrm{X}(m)) & \text{si } n = m \\ \mathrm{Y}(m)\mathrm{X}(n) & \text{si } n > m \end{cases}$$

Les opérateurs L_n agissent sur H_λ et on obtient de cette façon une représentation de l'algèbre de Virasoro de charge centrale $c_\nu = \ell \dim \mathfrak{g}/(g^* + \ell)$, où g^* est le nombre de Coxeter dual de $\mathfrak{g}$. Le tenseur énergie-moment est défini, z étant une variable formelle, par

$$\mathrm{T}(z) = -\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{L}_n z^{-n-2}.$$

Pour $a = a(z)\frac{d}{dz} \in \mathbb{C}((z))\frac{d}{dz}$ on pose $\mathrm{T}(a) = \operatorname{Res}_{z=0}(\mathrm{T}(z)a(z)dz)$. Ceci définit un opérateur sur H_λ. Par calcul direct, on montre que

$$[\mathrm{T}(a), \mathrm{T}(b)] = \mathrm{T}[a, b] + \frac{c_\nu}{12} \operatorname{Res}_{z=0}(a''' b\, dz)$$

Il y a une version à n paramètres: si $\underline{a} = (a_1, \ldots a_n)$, avec $a_i = a_i(z_i)\frac{d}{dz_i} \in \mathbb{C}((z_i))\frac{d}{dz_i}$, on définit un opérateur $\mathrm{T}(\underline{a})$ sur $\mathrm{H}_{\underline{\lambda}}$, pour $\underline{\lambda} \in \mathrm{P}_\ell{}^n$.

2.2. Définition du faisceau des vacua

(2.2.1) Soit $(\mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{S}, \underline{\sigma})$ une famille de courbes n-pointées satisfaisant à $(*)$. Soit $\Sigma_i = \mathrm{Im}(\sigma_i)$, $\mathcal{I}_{\Sigma_i}$ l'idéal de Σ_i et $\Sigma = \Sigma_1 + \ldots \Sigma_n$. Soit $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{C}/\Sigma_i} = \varprojlim_n \mathcal{O}_\mathrm{C}/\mathcal{I}_{\Sigma_i}^{n+1}$ le complété formel de $\mathcal{O}_\mathrm{C}$ le long de Σ_i et $\mathrm{K}_{\mathrm{C}/\Sigma_i} = \varinjlim_p \varprojlim_n \mathcal{O}_\mathrm{C}(p\Sigma_i)/\mathcal{I}_{\Sigma_i}^{n+1}$ le faisceau des fonctions méromorphes formelles le long de Σ_i. Soit $\widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma_i} = \mathfrak{g} \otimes_\mathbb{C} \mathrm{K}_{\mathrm{C}/\Sigma_i} \oplus \mathcal{O}_\mathrm{S} c$ avec pour crochet

$$[\mathrm{X} \otimes f, \mathrm{Y} \otimes g] = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] \otimes fg + (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \operatorname{Res}_{\Sigma_i}(g\, df)\ c.$$

Posons $\widehat{\mathfrak{p}}_{/\Sigma_i} = \mathfrak{g} \otimes_\mathbb{C} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{C}/\Sigma_i} \oplus \mathcal{O}_\mathrm{S} c$. Soit $\lambda \in \mathrm{P}_\ell$ et $\ell \geq 0$. Le $\mathfrak{g} \otimes_\mathbb{C} \mathcal{O}_\mathrm{S}$-module $\mathrm{L}_\lambda \otimes_\mathbb{C} \mathcal{O}_\mathrm{S}$ s'étend en un $\widehat{\mathfrak{p}}_{/\Sigma_i}$-module, noté $\mathrm{L}_{\lambda/\Sigma_i}$, en faisant agir $\mathfrak{g} \otimes_\mathbb{C} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{C}/\Sigma_i}$ via l'évaluation le long de Σ_i, et c, par multiplication par ℓ. Soit $\mathrm{M}_{\lambda/\Sigma_i} = \mathrm{Ind}_{\widehat{\mathfrak{p}}_{/\Sigma_i}}^{\widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma_i}}(\mathrm{L}_{\lambda/\Sigma_i})$. On peut montrer que $\mathrm{M}_{\lambda/\Sigma_i}$ admet un unique quotient intégrable $\mathcal{H}_{\lambda/\Sigma_i}$. La somme direct $\oplus_{i=1}^n \widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma_i}$ contient le sous-faisceau $\mathrm{Z} \subset \oplus_i^n \mathcal{O}_\mathrm{S} c$ des n-uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ tels que $\sum a_i = 0$. On pose $\widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma} = \oplus_{i=1}^n \widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma_i}/\mathrm{Z}$. Alors $\mathcal{H}_{\underline{\lambda}/\Sigma} = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_{\lambda_i/\Sigma_i}$ est naturellement un $\widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma}$-module de niveau ℓ.

(2.2.2) Remarque. — Le choix de coordonnées formelles z_i le long de Σ_i permet d'identifier $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{C}/\Sigma_i}$ à $\mathcal{O}_\mathrm{S}[[z_i]]$ et $\mathrm{K}_{\mathrm{C}/\Sigma_i}$ à $\mathcal{O}_\mathrm{S}((z_i))$. Cela induit les trivialisations $\widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma} \simeq \widehat{\mathfrak{g}}_n \otimes_\mathbb{C} \mathcal{O}_\mathrm{S}$ et $\mathcal{H}_{\underline{\lambda}/\Sigma_i} \simeq \mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes_\mathbb{C} \mathcal{O}_\mathrm{S}$.

(2.2.3) Posons $\mathfrak{g}(C - \Sigma) := \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}(C - \Sigma)$. L'inclusion canonique $\mathcal{O}(C - \Sigma) \longrightarrow \oplus_{i=1}^{n} K_{C/\Sigma_i}$ permet d'identifier $\mathfrak{g}(C - \Sigma)$ à un sous-module de $\widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma}$. Par la formule des résidus, c'est même une sous-algèbre de Lie.

(2.2.4) Définition. — *Posons*

$$\begin{aligned} V_{C/S}(\underline{\sigma};\underline{\lambda}) &:= \mathcal{H}_{\underline{\lambda}/\Sigma} / \mathfrak{g}(C-\Sigma)\mathcal{H}_{\underline{\lambda}/\Sigma} \\ V^*_{C/S}(\underline{\sigma};\underline{\lambda}) &:= \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathfrak{g}(C-\Sigma)}(\mathcal{H}_{\underline{\lambda}/\Sigma}, \mathcal{O}_S) = \{\psi \in \mathcal{H}^*_{\underline{\lambda}/\Sigma} \mid \psi.X[f] = 0 \ \forall X[f] \in \mathfrak{g}(C-\Sigma)\}. \end{aligned}$$

Le faisceau $V_{C/S}(\underline{\sigma};\underline{\lambda})$ est appelé *faisceau des co-vacua*; la condition donnée par $\mathfrak{g}(C-\Sigma)\mathcal{H}_{\underline{\lambda}/\Sigma}$ est dite *condition de jauge*. Le *faisceau des vacua* $V^*_{C/S}(\underline{\sigma};\underline{\lambda})$ s'identifie au $\mathcal{O}_S$-dual de $V_{C/S}(\underline{\sigma},\underline{\lambda})$.

La formation du faisceau des co-vacua commute aux changements de base, *i.e.* si $S' \longrightarrow S$ est un morphisme on a un isomorphisme canonique

$$V_{C'/S'}(\underline{\sigma},\underline{\lambda}) \simeq V_{C/S}(\underline{\sigma},\underline{\lambda}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$$

Par contre, il n'est pas clair, a priori, que le faisceau des vacua commute aux changements de base. Ce sera le cas, a posteriori, quand on aura vu que le faisceau des co-vacua est localement libre.

2.3. Propagation de l'état sans particule

(2.3.1) Soit $(C,\underline{p},\underline{\lambda})$ une courbe marquée satisfaisant à la condition $(\star)$. Soit Σ le diviseur $p_1 + \ldots + p_n$ et $U = C - \Sigma$. Choisissons une fois pour toutes des coordonnées locales z_i en p_i. Cela permet d'identifier $\widehat{\mathfrak{g}}_{/\Sigma}$ à $\widehat{\mathfrak{g}}_n$ et $H_{\underline{\lambda}/\Sigma}$ à $H_{\underline{\lambda}}$. Le morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}(U) \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}_n$ est alors donné par $X \otimes f \mapsto X \otimes (\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_n)$, où $\widehat{f}_i \in \mathbb{C}((z_i))$ désigne le développement de $f \in \mathcal{O}(U)$ en série de Laurent au point p_i, et l'espace des vacua $V^*_C(\underline{p};\underline{\lambda})$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(U)}(H_{\underline{\lambda}}, \mathbb{C})$. Choisissons un nouveau point $q \in C_{lisse}$, étiqueté par le poids $0 \in P_\ell$.

(2.3.2) Proposition. — *L'inclusion* $H_{\underline{\lambda}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \hookrightarrow H_{\underline{\lambda}} \otimes H_0$ *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(U-\{q\})}(H_{\underline{\lambda}} \otimes H_0, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(U)}(H_{\underline{\lambda}}, \mathbb{C}).$$

La démonstration de ce fait illustre bien les méthodes de la théorie des représentations des algèbres de Lie dont on a besoin pour la théorie sur une courbe marquée fixée.

Démonstration. Choisissons une coordonnée régulière z en q telle que z^{-1} soit dans $\mathcal{O}(U - \{q\})$. Ceci est possible, car $(C,\underline{p})$ satisfait à $(\star)$. On obtient la décomposition

$$\mathcal{O}(U - \{q\}) = \mathcal{O}(U) \oplus z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}],$$

d'où, en identifiant $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$ à $\hat{\mathfrak{g}}_-$, la décomposition $\mathfrak{g}(\mathrm{U}-\{q\}) = \mathfrak{g}(\mathrm{U}) \oplus \hat{\mathfrak{g}}_-$. Soit $\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U})$ l'extension centrale triviale de $\mathfrak{g}(\mathrm{U})$ et $\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U}-\{q\})$ l'extension centrale de $\mathfrak{g}(\mathrm{U}-\{q\})$ dont le crochet est donné par $[\mathrm{X}[f], \mathrm{Y}[g]] = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}][fg] + (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \operatorname{Res}_q \hat{g}_q d\hat{f}_q$. Le morphisme injectif

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U}-\{q\}) & \longrightarrow & \widehat{\mathfrak{g}}_n \\ \mathrm{X}[f] & \mapsto & \mathrm{X}[\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n] \\ c & \mapsto & -c \end{array}$$

est, par la formule des résidus, un morphisme d'algèbres de Lie. Ainsi $\mathrm{H}_{\underline{\lambda}}$ devient un $\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U}-\{q\})$-module *de niveau* $-\ell$.

On munit $\mathbb{C}$ d'une structure de $\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U})$-module en faisant agir c par ℓ et $\mathfrak{g}(\mathrm{U})$ par zéro. On note ce module $\mathbb{C}_\ell$. Le module de Verma associé à la représentation triviale s'identifie à $\mathrm{M}_0 = \mathrm{Ind}_{\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U})}^{\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U}-\{q\})}(\mathbb{C}_\ell)$, et par la propriété multiplicative des induits on obtient:

$$\mathrm{H}_\lambda \otimes \mathrm{M}_0 = \mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{Ind}_{\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U})}^{\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U}-\{q\})}(\mathbb{C}_\ell) = \mathrm{Ind}_{\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U})}^{\hat{\mathfrak{g}}(\mathrm{U}-\{q\})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathbb{C}_\ell) = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U})}^{\mathfrak{g}(\mathrm{U}-\{q\})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathbb{C}).$$

Ceci signifie que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U}-\{q\})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{M}_0, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C})$, et l'énoncé est donc vérifié si l'on remplace H_0 par M_0. Il reste, en vertu de (2.1.3), à vérifier que si $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U}-\{q\})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{M}_0, \mathbb{C})$ alors $\psi(u \otimes \mathrm{X}_\theta(-1)^{\ell+1}.v_0) = 0$ pour tout $u \in \mathrm{H}_{\underline{\lambda}}$. Pour cela, soit f une fonction régulière sur U telle que $f(q) = 0$ et $f'(q) \neq 0$. Une telle fonction existe, $(\mathrm{C}, \underline{p})$ satisfaisant à $(\star)$. Le lemme suivant est facile à démontrer

(2.3.3) LEMME. — *Soit v_0 le vecteur de plus haut poids de H_0. Soit $f \in \mathbb{C}[[z]]$ tel que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. On pose $\mathrm{F} = \mathrm{X}_\theta(-1)$, $\mathrm{E} = \mathrm{X}_{-\theta}[f]$ et $\tilde{v} = \mathrm{F}^{\ell+1}.v_0$. Alors pour tout entier $m \geq 1$ il existe une constante non nulle C_m tel que $\mathrm{E}^m\mathrm{F}^m\tilde{v} = \mathrm{C}_m\tilde{v}$.*

Montrons comment le lemme entraîne la proposition. Posons $\mathrm{F} = \mathrm{X}_\theta(-1)$ et $\mathrm{E} = \mathrm{X}_{-\theta}[f]$. Comme $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{M}_0, \mathbb{C})$, on a pour tout $m \geq 1$

$$\psi(u \otimes \mathrm{F}^{\ell+1}.v_0) = \psi(u \otimes \mathrm{C}_m^{-1}\mathrm{E}^m\mathrm{F}^m\mathrm{F}^{\ell+1}.v_0) = \psi(\mathrm{E}^m u \otimes \mathrm{C}_m^{-1}\mathrm{F}^m\mathrm{F}^{\ell+1}.v_0).$$

Mais, pourvu que m soit suffisamment grand, $\mathrm{E}^m u$ est nul, l'action de E sur $\mathrm{H}_{\underline{\lambda}}$ étant localement nilpotente. Ainsi, $\psi(u \otimes \mathrm{F}^{\ell+1}.v_0) = 0$ pour tout $u \in \mathrm{H}_{\underline{\lambda}}$, d'où la proposition. □

On peut aussi étiqueter le point q avec le poids $\mu \in \mathrm{P}_\ell$. Via l'évaluation en q on peut considérer $\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{L}_\mu$ comme $\mathfrak{g}(\mathrm{U})$-module. En remplaçant dans la démonstration de la proposition (2.3.2) et du lemme (2.3.3) la représentation triviale par L_μ on obtient la proposition plus forte suivante:

(2.3.4) PROPOSITION. — *(Beauville [1]) L'inclusion $\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{L}_\mu \hookrightarrow \mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{H}_\mu$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U}-\{q\})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{H}_\mu, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{L}_\mu, \mathbb{C}).$$

(2.3.5) Corollaire. — *Soient $\{q_1, ..., q_m\}$ des points distincts de C_{lisse} et $\underline{\mu} \in \mathrm{P}_\ell^m$. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U}-\{q_1,\ldots,q_m\})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{H}_{\underline{\mu}}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{L}_{\underline{\mu}}, \mathbb{C})$$

2.4. Formule de décomposition

(2.4.1) Soit $(\mathrm{C}, \underline{p})$ une courbe n-pointée et $c \in \mathrm{C}_{sing}$. Soit $\nu : \widetilde{\mathrm{C}} \longrightarrow \mathrm{C}$ la normalisation partielle en c, et soient a et b les points de $\widetilde{\mathrm{C}}$ au-dessus de c.

(2.4.2) Proposition. — *([30], 2.2.6) Il existe un isomorphisme canonique*

$$\bigoplus_{\mu \in \mathrm{P}_\ell} \mathrm{V}_{\widetilde{\mathrm{C}}}(\underline{p}, a, b; \underline{\lambda}, \mu, \mu^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}_{\mathrm{C}}(\underline{p}; \underline{\lambda})$$

Soit $\mathrm{U} \subset \mathrm{C}$ le complémentaire des points marqués p_i, et $\widetilde{\mathrm{U}} \subset \widetilde{\mathrm{C}}$ l'image réciproque de U. D'après le corollaire (2.3.5), il s'agit de montrer que l'on a un isomorphisme canonique

$$\delta : \bigoplus_{\mu \in \mathrm{P}_\ell} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\widetilde{\mathrm{U}})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{L}_\mu \otimes \mathrm{L}_{\mu^*}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}}, \mathbb{C})$$

Pour $\psi_\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\widetilde{\mathrm{U}})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{L}_\mu \otimes \mathrm{L}_{\mu^*}, \mathbb{C})$, on définit l'élément $\delta(\psi_\mu) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathrm{U})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}}, \mathbb{C})$ par $u \mapsto \psi_\mu(u \otimes \gamma_\mu(0))$ avec $\gamma_\mu(0)$ comme dans (2.1.4). [Remarquons que $\delta(\psi_\mu)$ est un vacua car $\gamma_\mu(0) \in (\mathrm{L}_\mu \otimes \mathrm{L}_{\mu^*})^{\mathfrak{g}}$]. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal des fonctions sur U s'annulant en c. C'est aussi l'idéal des fonctions sur $\widetilde{\mathrm{U}}$ s'annulant en a et b. Les espaces des vacua s'identifient respectivement à $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathcal{I})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes \mathrm{M}, \mathbb{C})^{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}}$, avec $\mathrm{M} = \bigoplus_{\mu \in \mathrm{P}_\ell} \mathrm{L}_\mu \otimes \mathrm{L}_{\mu^*}$, et à $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(\mathcal{I})}(\mathrm{H}_{\underline{\lambda}}, \mathbb{C})^{\mathfrak{g}}$. On montre alors, en considérant l'inclusion diagonale $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, que δ définit un isomorphisme entre ces espaces.

2.5. Rationalité

(2.5.1) Proposition. — *On a* $\dim \mathrm{V}_{\mathrm{C}}(\underline{p}, \underline{\lambda}) < \infty$

Pour simplifier on suppose que C ne contient qu'un seul point marqué p étiqueté de la représentation H_λ. On choisit une coordonnée z en p. La proposition est conséquence du lemme suivant, qui m'a été signalé par O. Mathieu.

(2.5.2) Lemme. — *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Lie, H un $\mathcal{A}$-module de type fini (*i.e. *$\mathrm{H} = \mathrm{U}(\mathcal{A}).\mathrm{L}$ avec L espace vectoriel de dimension finie). Supposons qu'il existe une base (e_i) de $\mathcal{A}$ telle que les e_i agissent de façon localement finie sur H (*i.e. *l'espace vectoriel engendré par les puissances de e_i appliqué à $u \in \mathrm{H}$ est de dimension finie). Soient*

$\mathcal{A}_+ = \{X \in \mathcal{A} \mid X.L = 0\}$ *et* $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathcal{A}$ *telle que* $\mathcal{K} + \mathcal{A}_+$ *soit de codimension finie dans* $\mathcal{A}$. *Alors* $H/\mathcal{K}H$ *est de dimension finie.*

Démonstration. C'est une application du théorème de Poincaré, Birkhoff et Witt: d'après les hypothèses, on peut trouver des éléments localement de type fini $e_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, N$, tels que $\mathcal{A} = [\mathcal{K} + \mathcal{A}_+] \oplus (\bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{C}e_i)$. Alors

$$U(\mathcal{A}) = \sum_{m_1, \ldots, m_N} U(\mathcal{K}) \otimes e_1^{m_1} \cdots e_N^{m_N} \otimes U(\mathcal{A}_+).$$

Par définition de $\mathcal{A}_+$, on a $U(\mathcal{A}_+).L = L$. Par conséquent, $H = \sum_{m_1, \ldots, m_N} U(\mathcal{K}) e_1^{m_1} \cdots e_N^{m_N}.L$. Il est facile de voir, par récurrence sur N, que $\sum_{m_1, \ldots, m_N} e_1^{m_1} \cdots e_N^{m_N}.L$ est de dimension finie, en raison du fait que les e_i opèrent de façon localement finie. On en déduit que $H = U(\mathcal{K}).\widetilde{L}$ avec $\widetilde{L}$ de dimension finie. On a donc une surjection $\widetilde{L} \longrightarrow H/\mathcal{K}H$, ce qui démontre le lemme. □

On applique ce lemme à notre situation en posant $\mathcal{A} = \widehat{\mathfrak{g}}$, $\mathcal{A}_+ = \widehat{\mathfrak{g}}_+$, $H = H_\lambda$ et $\mathcal{K} = \mathfrak{g}(C - \{p\})$. D'après le théorème de Riemann-Roch, $\mathcal{K} + \mathcal{A}_+$ est de codimension finie dans $\mathcal{A}$. Pour l'existence d'une base de $\mathcal{A}$ satisfaisant aux hypothèses du lemme on peut procéder par exemple de la manière suivante: on remarque qu'il existe une base d'éléments de $\mathfrak{g}$ qui sont ad-nilpotents puis on prend pour base de $\mathcal{A}$ n'importe quelle base de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ et on lui ajoute le centre et les éléments de type $X(m)$ ou X décrit une base ad-nilpotente et m est un entier strictement positif. On est donc dans les hypothèses du lemme; d'où la proposition.

2.6. L'exemple de $C = \mathbb{P}_1$ muni de trois points ([30], 2.2.8 ou [1])

(2.6.1) La proposition (2.3.2) (avec $q = \infty$) et le corollaire (2.3.5) conduisent à la description suivante de l'espace des vacua. Soit $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ la sous-algèbre de Lie définie par $\mathbb{C}X_\theta \oplus \mathbb{C}X_{-\theta} \oplus \mathbb{C}H_\theta$. Tout $\mathfrak{g}$-module peut être considère comme un $\mathfrak{s}$-module. Si V est un $\mathfrak{s}$-module on note $V^{(j)}$ la composante correspondant au poids j dans la décomposition en facteurs isotypiques de V.

(2.6.2) PROPOSITION. — *L'espace des vacua sur* $\mathbb{P}_1$ *muni de trois points* p, q, r *étiquetés par les poids* $\lambda, \mu, \nu \in P_\ell$ *s'identifie à*

$$\{\psi \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(L_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} L_\mu \otimes_{\mathbb{C}} L_\nu, \mathbb{C}) \mid \psi_{|L_\lambda^{(j_1)} \otimes_{\mathbb{C}} L_\mu^{(j_2)} \otimes_{\mathbb{C}} L_\nu^{(j_3)}} = 0,\ j_1 + j_2 + j_3 > 2\ell\}.$$

2.7. Le faisceau des vacua est localement libre

(2.7.1) On définit $V_g^*(\underline{\lambda})$ (resp. $V_g(\underline{\lambda})$) comme étant le faisceau des vacua (resp. covacua) relatif à la famille universelle sur le champ de modules $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$. Il n'est pas difficile de voir qu'en raison de la proposition (2.5.1), $V_g(\underline{\lambda})$ est un $\mathcal{O}_{\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}}$-module cohérent.

(2.7.2) Soit $(C, \underline{p})$ une courbe n-pointée stable, et Σ le diviseur $\Sigma = p_1 + \ldots + p_n$. L'espace des déformations infinitésimales de $(C, \underline{p})$ est donné par $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\Sigma))$, où Ω^1_C désigne le faisceau des formes différentielles sur C. La suite spectrale des Ext locaux vers les Ext globaux fournit la suite exacte:

$$0 \longrightarrow H^1(\Theta_C(-\Sigma)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\Sigma)) \longrightarrow H^0(\underline{\mathrm{Ext}}^1(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\Sigma))) \longrightarrow 0,$$

où $\Theta_C = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_C}(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C)$. Le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\Sigma))$ est porté par les points singuliers de C et en $q \in C_{sing}$ on a $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\Sigma)) \otimes_{\mathcal{O}_{C,q}} \mathbb{C} = \mathbb{C}$. Par conséquent, $H^0(\underline{\mathrm{Ext}}^1(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\Sigma)) \simeq \mathbb{C}^q$ avec $q = \#C_{sing}$. Les déformations infinitésimales correspondant aux éléments de $H^1(\Theta_C(-\Sigma))$ peuvent être vues comme les déformations infinitésimales de $(C, \underline{p})$ respectant les singularités.

Étant donnée une famille de courbes n-pointées stables $C \longrightarrow S$, la théorie de Kodaira-Spencer fournit un morphisme $\rho_s : T_sS \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\Sigma))$ pour $s \in S$. Une telle famille est dite verselle si le morphisme ρ_s est un isomorphisme pour $s \in S$. Étant donnée une courbe n-pointée, on peut toujours trouver une famille verselle $C \longrightarrow S$ et un point $s_0 \in S$ dont la fibre en $s_0 \in S$ s'identifie à la courbe n-pointée donnée.

(2.7.3) Soit $C \longrightarrow S$ une famille verselle de courbes n-pointées stables. On note $\Gamma \subset C$ la sous-variété correspondant aux points singuliers des courbes C_s, et $\Delta \subset S$ l'image de Γ. Remarquons que Γ est une sous-variété lisse de C de codimension 2, et que Δ est un diviseur à croisements normaux. On se donne de plus des coordonnées formelles $\zeta_i : \widehat{\mathcal{O}}_{C/\Sigma_i} \simeq \mathcal{O}_S[[z]]$ et l'on pose $z_i = \zeta_i^{-1}(z)$.

Considérons le faisceau $\Theta_S(-\log \Delta) \subset \Theta_S$ des champs de vecteurs sur S qui sont tangents à Δ: c'est le faisceau des champs de vecteurs locaux ξ sur S tels que $\xi(\mathcal{I}_\Delta) \subset \mathcal{I}_\Delta$. Le morphisme de Kodaira-Spencer donne une identification $\Theta_S(-\log \Delta) \xrightarrow{\sim} R^1\pi_*\Theta_{C/S}(-\Sigma)$.

Soit $\Theta_{C,\pi}(*\Sigma)$ le faisceau des champs de vecteurs ξ sur $C - \Sigma$ qui sont tangents à Γ et projetables (*i.e.* $x \mapsto d\pi(\xi(x))$ est constant le long des fibres de π). On a la suite exacte de $\mathcal{O}_S$-modules

$$0 \longrightarrow \pi_*\Theta_{C/S}(*\Sigma) \longrightarrow \pi_*\Theta_{C,\pi}(*\Sigma) \xrightarrow{\tau} \Theta_S(-\log \Delta) \longrightarrow 0.$$

Le faisceau $\pi_*\Theta_{C,\pi}(*\Sigma)$ est muni d'une structure naturelle d'algèbre de Lie donnée par le crochet des champs de vecteurs, et la suite exacte ci-dessus est une suite exacte de faisceaux en algèbres de Lie. Le choix des coordonnées formelles le long de Σ définit, en faisant le développement de Laurent le long des diviseurs Σ_i, un monomorphisme

$$\alpha : \pi_*\Theta_{\mathrm{C},\pi}(*\Sigma) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\mathrm{S}}((z_i))\frac{d}{dz_i}.$$

Soit $\mathbb{T} \subset \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\mathrm{S}}((z_i))\frac{d}{dz_i}$ l'image de α, munie de la structure de faisceau d'algèbres de Lie définie par transport de structure. On a pour $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{T}$

$$[\underline{a}, \underline{b}] := [\underline{a}, \underline{b}]_0 + \tau(\underline{a})(\underline{b}) - \tau(\underline{b})(\underline{a})$$

où $[\underline{a}, \underline{b}]_0$ est le crochet habituel des champs de vecteurs formels et où l'action de $\tau(\underline{a})$ sur $\underline{b}$ est prise composante par composante.

Considérons le faisceau en algèbres de Lie $\widehat{\mathbb{T}} := \mathbb{T} \oplus \mathcal{O}_{\mathrm{S}}$ muni du crochet défini par

$$[(\underline{a}, r), (\underline{b}, s)] := \left([\underline{a}, \underline{b}], \frac{c_v}{12} \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_i=0}(a_i'''b_i) + \tau(\underline{a})(s) - \tau(\underline{b})(r) \right).$$

(2.7.4) DÉFINITION. — *Soient* $\mathrm{V} = (\underline{a}, r) \in \widehat{\mathrm{T}}$ *et* $v = u \otimes f \in \mathcal{H}_{\underline{\lambda}} = \mathrm{H}_{\underline{\lambda}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathrm{S}}$. *On pose*

$$\mathrm{D}_{\mathrm{V}}.(v) := u \otimes \tau(\underline{a})(f) + \mathrm{T}[\underline{a}].u \otimes f + u \otimes rf.$$

Supposons $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathrm{S}}$. Par construction, $\mathrm{D}_{(\underline{a},r)}(u \otimes \alpha f) = \alpha \mathrm{D}_{(\underline{a},r)}(u \otimes f) + u \otimes h\tau(\underline{a})(\alpha)$. En particulier, on voit que $\mathrm{D}_{(\underline{a},r)}$ est $\mathbb{C}_{\mathrm{S}}$-linéaire. Par calcul direct, on démontre la proposition suivante.

(2.7.5) PROPOSITION. — *L'opération* D *définit une représentation* $\mathrm{D} : \widehat{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}_{\mathrm{S}}}(\mathcal{H}_{\lambda})$, i.e. *on a* $[\mathrm{D}_{\mathrm{V}}, \mathrm{D}_{\mathrm{V}'}] = \mathrm{D}_{[\mathrm{V},\mathrm{V}']}$. *De plus* D *satisfait à :*

$$\mathrm{D}_{\mathrm{V}}(\alpha.v) = \tau(\underline{a})(\alpha)v + \alpha \mathrm{D}_{\mathrm{V}}(v).$$

Par calcul direct, on voit que l'action de D préserve la condition de jauge. On obtient ainsi une représentation $\mathrm{D} : \widehat{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}_{\mathrm{S}}}(\mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\underline{\lambda}))$ satisfaisant $\mathrm{D}_{\mathrm{V}}(\alpha.v) = \tau(\underline{a})(\alpha)v + \alpha\mathrm{D}_{\mathrm{V}}(v)$ avec $v \in \mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\lambda)$.

(2.7.6) COROLLAIRE. — *Le faisceau des co-vacua est localement libre sur* $\mathrm{S} - \Delta$.

Démonstration. C'est une variante d'un argument standard: le faisceau de co-vacua étant cohérent, le module des germes $\mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\underline{\lambda})_s$ est de type fini pour $s \in \mathrm{S}$. Si $\mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\underline{\lambda})_s$

n'est pas libre on considère des générateurs $e_i \in \mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\underline{\lambda})_s$ qui forment une base de la fibre, et une relation

$$\text{(R)} \quad f_1 e_1 + \ldots + f_m e_m \text{ avec } f_i \in \mathcal{O}_{\mathrm{S},s}$$

entre ces générateurs telle que $m = \min_i\{k \mid f_i \in \mathfrak{m}^k \backslash^{k-1}\}$ soit minimal. En dehors de Δ, l'image de τ est Θ_{S}; on peut donc trouver V tel que la relation obtenue en dérivant (R) suivant $\mathrm{D_V}$ contredise la minimalité de (R). □

(2.7.7) REMARQUE. — En section (1.1), on a dit que le faisceau des vacua était localement libre sur $\mathfrak{M}_{g,n}$ à cause de l'invariance de la théorie sous changements de coordonnées infinitésimaux par des champs de vecteurs locales *méromorphes*. Ceci est relié à la construction ci-dessus de la manière suivante: supposons pour simplifier que S soit un point et considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Theta_{\mathrm{C}}(-\Sigma) \longrightarrow \Theta_{\mathrm{C}}(m\Sigma) \longrightarrow \Theta_{\mathrm{C}}(m\Sigma)/\Theta_{\mathrm{C}}(-\Sigma) \longrightarrow 0.$$

En prenant la cohomologie on obtient, pour m assez grand, la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(\Theta_{\mathrm{C}}(m\Sigma)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\Theta_{\mathrm{C}}(m\Sigma)/\Theta_{\mathrm{C}}(-\Sigma)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Theta_{\mathrm{C}}(-\Sigma)) \longrightarrow 0.$$

Or, le choix des coordonnées définit un isomorphisme,

$$\mathrm{H}^0(\Theta_{\mathrm{C}}(m\Sigma)/\Theta_{\mathrm{C}}(-\Sigma)) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{k=0}^{m} \mathbb{C} z_i^{-k} \frac{d}{dz_i}.$$

La partie négative d'un champ de vecteurs local méromorphe définit ainsi une déformation de $(\mathrm{C}, \underline{p})$ respectant les singularités. De façon faisceautique, en laissant tendre m à l'infini, on obtient la suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$-modules

$$0 \longrightarrow \pi_*\Theta_{\mathrm{C/S}}(*\Sigma) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\mathrm{S}}[z_i^{-1}] \frac{d}{dz_i} \longrightarrow \mathrm{R}^1\pi_*(\Theta_{\mathrm{C/S}}(-\Sigma)) \longrightarrow 0,$$

qui n'est autre que celle donnée dans (2.7.3), le morphisme de Kodaira-Spencer étant un isomorphisme.

(2.7.8) Pour montrer que le faisceau des vacua est aussi localement libre sur le bord, Tsuchiya-Ueno-Yamada procèdent comme suit. Soit $(\mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{S}, \underline{\sigma})$ une famille de courbes n-pointées, paramétrée par la courbe lisse S. Supposons C_s lisse en dehors de $0 \in \mathrm{S}$. Soit $\mathcal{V}$ le faisceau des co-vacua $\mathrm{V}_{\mathrm{C/D}}(\underline{\lambda})$, $\mathcal{V}^*$ le faisceau des vacua $\mathrm{V}^*_{\mathrm{C/D}}(\underline{\lambda})$. On sait déjà que ces faisceaux sont cohérents sur S, localement libre sur $\mathrm{S}^* = \mathrm{S} - \{0\}$. Soit $\widehat{\mathcal{V}}^*_{/0}$ la complétion formelle de $\mathcal{V}^*$ en 0. On a $\widehat{\mathcal{V}}^*_{/0} = \mathcal{V}^* \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}}} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{S}/0}$. Soit K le corps de fractions de $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{S}/0}$.

(2.7.9) LEMME. — *Si* $\dim_{\mathrm{K}} \widehat{\mathcal{V}}^*_{/0} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{S}/0}} \mathrm{K} \geq \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{V}^*_{\mathrm{C}_0}(\underline{\lambda})$, *alors* $\mathcal{V}^*$ *est localement libre sur* S.

Le faisceau de co-vacua commute aux changements de base. On en déduit que l'on a $\mathcal{V}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S},0}} \mathbb{C} \simeq \mathrm{V}_{\mathrm{C}_0}(\underline{p_0}; \underline{\lambda})$ et par conséquence on obtient pour $\operatorname{rang} \mathcal{V}_{|\mathrm{S}^*} = \operatorname{rang} \mathcal{V}^*_{|\mathrm{S}^*}$:

$$\operatorname{rang} \mathcal{V}^*_{|\mathrm{S}^*} = \dim_{\mathrm{K}} \widehat{\mathcal{V}}^*_{/0} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{S}/0}} \mathrm{K} \geq \dim \mathrm{V}^*_{\mathrm{C}_0}(\underline{p_0}; \underline{\lambda}) = \dim \mathrm{V}_{\mathrm{C}_0}(\underline{p_0}; \underline{\lambda}) = \dim \mathcal{V}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S},0}} \mathbb{C}.$$

Par cohérence du faisceau de co-vacua on a l'inégalité dans l'autre sens, d'où le lemme.

(2.7.10) Pour se mettre dans les hypothèses du lemme, il s'agit de construire suffisamment de sections formelles à partir des donnés du bord. Supposons, pour simplifier, que $\mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{D}$ soit une famille de courbes pointées de genre 1, étiquetées par le poids trivial, paramétrée par le disque. Soit $\nu : \widetilde{\mathrm{C}}_0 \longrightarrow \mathrm{C}_0$ la normalisation de la courbe singulière C_0. Alors $\widetilde{\mathrm{C}}_0 \simeq \mathbb{P}_1$ et l'on peut supposer que $\nu(0) = \nu(\infty) = q$ et $\nu(1) = p$. D'après la formule de décomposition on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{V}^*_{\mathrm{C}_0}(p_0; 0) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{P}_\ell} \mathrm{V}^*_{\mathbb{P}_1}(0, \infty, 1; \lambda^*, \lambda, 0)$$

On a $\dim \mathrm{V}^*_{\mathbb{P}_1}(0, \infty, 1; \lambda^*, \lambda, 0) = 1$ si $\lambda \in \mathrm{P}_\ell$. Pour $\lambda \in \mathrm{P}_\ell$ soit $\phi_\lambda \in \mathrm{V}^*_{\mathbb{P}_1}(0, \infty, 1; \lambda^*, \lambda, 0)$ et définissons $\widehat{\phi}_\lambda$ par la série formelle

$$\widehat{\phi}_\lambda(u) = \sum_{d=0}^{\infty} \phi_\lambda(\gamma_\lambda(d) \otimes u) t^d.$$

On vérifie, ce qui est délicat, que $\widehat{\phi}_\lambda$ satisfait à la condition de jauge formelle ([30], 552-556). Supposons que l'on ait une relation de liaison $\sum_{\lambda \in \mathrm{P}_\ell} a_\lambda \hat{\phi}_\lambda = 0$. Quitte à diviser par t^n, on peut supposer qu'il existe λ tel que $a_\lambda(0) \neq 0$. En évaluant ensuite en $t = 0$ on obtient une relation de liaison $\sum_{\lambda \in \mathrm{P}_\ell} a_\lambda(0) \phi_\lambda = 0$ ce qui est une contradiction.

2.8. La connexion projective plate à singularités régulières le long du bord.

(2.8.1) La construction de la connexion projective plate sur le faisceau des co-vacua nécessite un peu plus d'informations sur la géométrie du tenseur énergie-moment. On se place dans le cadre analytique complexe. Pour $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$, notons $\mathrm{X}(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathrm{X}(m) t^{-m-1}$. Un calcul simple montre

$$\mathrm{T}(t) = \frac{1}{2(g^* + \ell)} \lim_{t' \to t} \{ \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} \mathrm{X}^i(t) \mathrm{X}^i(t') - \frac{\ell \dim \mathfrak{g}}{(t - t')^2} \}$$

Soit $\psi \otimes u \in \mathrm{V}^*_{\mathrm{C}}(\underline{p}, \underline{\lambda}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{V}_{\mathrm{C}}(\underline{p}, \underline{\lambda})$, z une coordonnée, $t = g(z)$ une changement de coordonnées. On déduit de la description de $\mathrm{T}(t)$ ci-dessus qu'on a

$$\psi(\mathrm{T}(t).u) dt^2 = \psi(\mathrm{T}(z).u) dz^2 - \frac{c_\nu}{12} (\psi(u)) \mathrm{S}_z(g) dz^2.$$

Ici $\mathrm{S}_z(g)$ désigne la dérivée schwarzienne: si D est un domaine de $\mathbb{C}$ et g une fonction holomorphe sur D telle que $g'(z) \neq 0$, on définit

$$\mathrm{S}_z(g) = \frac{g'''(z)}{g'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{g''(z)}{g'(z)}\right)^2 .$$

Il est bien connu (*cf.* [31]) que l'on a $\mathrm{S}_z(g) = 0$ si et seulement si g est une homographie, et que $\mathrm{S}_z(g \circ f) = \mathrm{S}_z(f)$ si g est une homographie. En outre, si f est une fonction en t et $t = g(z)$ un changement de coordonnées, on a $\mathrm{S}_t(f)dt^2 = \mathrm{S}_z(f \circ g)dz^2 + \mathrm{S}_z(g)dz^2$ Classiquement, la dérivée schwarzienne sert à définir la notion de structure projective sur une surface de Riemann. Si (U_i, z_i) est un atlas sur C, les $s_{ij}dz_i^2$ avec $s_{ij}(z) = \mathrm{S}_{z_i}(z_j)$ défini sur $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j$ définissent un 1-cocycle de $\Omega_{\mathrm{C}}^{\otimes 2}$. Une structure projective est alors la donnée de fonctions g_i sur U_i telle que $g_i dz_i^2 - g_j dz_j^2 = s_{ij}dz_i^2$.

Géométriquement, l'opérateur T peut donc être vu comme un moyen d'associer à un endomorphisme $\varphi \in \mathrm{End}(\mathrm{V_C}(\underline{p}, \underline{\lambda}))$ une structure projective sur C (si $\frac{c_v}{12}(\varphi) = 1$).

Classiquement, on a une autre façon de produire des structures projectives sur C. Pour cela, on se fixe une forme $\omega \in \mathrm{H}^0(\mathrm{C} \times_{\mathbb{C}} \mathrm{C}, \omega_{\mathrm{C}\times_{\mathbb{C}}\mathrm{C}}(2\mathrm{D}))$ symétrique, D étant la diagonale. Localement, si x est une coordonné sur C et y la même sur le deuxième facteur, ω est de la forme

$$\omega = a\frac{dxdy}{(x-y)^2} + \mathrm{H}(x,y)dxdy$$

Supposons que le birésidu a de ω soit égal à 1. Alors $h_\omega(z) = -6\mathrm{H}(z,z)$ définit une structure projective [31].

Ces remarques étant faites, on peut démontrer la proposition suivante:

(2.8.2) PROPOSITION. — *Soit* $\mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{S}$ *une famille de courbes n-pointées avec coordonnées formelles. Il existe un unique morphisme de $\mathcal{O}_\mathrm{S}$-modules φ rendant commutatif le diagramme suivant:*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathrm{T}} & \xrightarrow{\mathrm{D}} & \mathrm{End}_{\mathcal{O}_\mathrm{S}}(\mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\underline{\lambda})) \\ \cup & & \uparrow \scriptstyle{multiplication} \\ \pi_*(\Theta_{\mathrm{C/S}}(*\Sigma)) \oplus \mathcal{O}_\mathrm{S} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}_\mathrm{S} \end{array}$$

i.e. *tel que* $\varphi(\mathrm{V}).v = \mathrm{D_V}.v$ *pour* $\mathrm{V} \in \pi_*(\Theta_{\mathrm{C/S}}(*\Sigma)) \oplus \mathcal{O}_\mathrm{S}$ *et* $v \in \mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\underline{\lambda})$.

Démonstration. Remarquons qu'il suffit de construire φ pour les éléments du type $(\underline{a}, 0)$. En effet, il suffira de poser $\widetilde{\varphi}(\underline{a}, r) = \varphi(\underline{a}) + r$ pour $r \in \mathcal{O}_\mathrm{S}$. Pour simplifier les notations on suppose $n = 1$. Comme le faisceau des co-vacua est localement libre de dual le faisceau des vacua, il suffit de construire φ tel que pour $\psi \in \mathrm{V}^*_{\mathrm{C/S}}(\underline{\lambda})$ on ait $\psi(\mathrm{D}_{(a,0)}.v) = \varphi(a).v$. Pour $a \in \pi_*(\Theta_{\mathrm{C/S}}(*\Sigma))$ on a $\tau(a) = 0$. On en déduit, avec $v = u \otimes f$,

$$\psi(\mathrm{D}_{(a,0)}.v) = \psi(\mathrm{T}[a].u \otimes f) = \operatorname*{Res}_{z=0}(a(z)\psi(\mathrm{T}[z].u \otimes f)dz)$$

Si S est suffisamment petit, on peut trouver une forme symétrique de birésidu 1, $\omega \in H^0(C \times_S C, \omega_{C\times_S C/S}(2D))$. Posons, avec les notations ci-dessus par rapport à une famille de courbes,

$$\varphi(a) := \frac{c_\nu}{12} \operatorname*{Res}_{z=0}(a(z)h_\omega(z)dz)$$

Alors φ convient, car $\psi(T[z].v)dz^2 - \frac{c_\nu}{12}\psi(v)h_\omega(z)dz^2 \in H^0(\omega_{C/S}^{\otimes 2})$ (c'est la différence de deux structures projectives), qui multipliée avec $a(z)$ est de résidu 0. La définition de φ ne dépend pas du choix de ω, la différence entre $h_\omega(z)$ et $h_{\omega'}(z)$ multipliée par un élément de $\pi_*(\Theta_{C/S}(*\Sigma))$ étant pour la même raison de résidu 0. □

On pose $\mathcal{A}(-\log\Delta) = \widehat{\mathbb{T}}/\ker\varphi$. Par construction, c'est un faisceau en algèbres de Lie, muni d'une représentation D : $\mathcal{A}(-\log\Delta) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}_S}(V_{C/S}(\underline{\lambda}))$ satisfaisant à $D_V(\alpha.v) = \tau(\underline{a})(\alpha)v + \alpha D_V(v)$. De plus, on montre facilement que c'est une extension de faisceaux en algèbres de Lie:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{A}(-\log\Delta) \longrightarrow \Theta_S(-\log\Delta) \longrightarrow 0$$

telle que l'image de $1 \in \mathcal{O}_S$ opère sur $\mathrm{End}_{\mathbb{C}_S}(V_{C/S}(\underline{\lambda}))$ par l'identité.

Or, une telle donnée définit une connexion plate, à singularités régulières le long du bord, sur le fibré projectif $\mathbb{P}V_{C/S}(\underline{\lambda})$ des co-vacua.

(2.8.3) Remarque. — Pour $\mathbb{P}_1$ muni de n points, cette connexion est une forme de la connexion de Knizhnik-Zamolodchikov [16].

(2.8.4) Remarque. — Hitchin [14] et Faltings [12] ont construit une connexion projective sur le fibré des G-fonctions thêta généralisées sur $\mathfrak{M}_{g,n}$. Est-ce la même que celle définie ci-dessus via l'identification du paragraphe 3?

(2.8.5) Remarque. — La construction ci-dessus se replace naturellement dans le cadre des algèbres d'Atiyah [4]. Par définition, ces algèbres sont les extensions $\mathcal{A}$ de faisceaux en algèbres de Lie de Θ_S par $\mathcal{O}_S$. Étant donnée une telle algèbre, on note $\mathcal{A}(-\log\Delta)$ l'image inverse de $\mathcal{A}$ par rapport à l'inclusion $\Theta_S(-\log\Delta) \subset \Theta_S$.

Le faisceau des vacua ne dépend pas du choix des coordonnées locales; par contre, la construction donnée ci-dessus de l'algèbre d'Atiyah et de la représentation D sur le faisceau des co-vacua $V_{C/S}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ définissant la connexion en dépendent a priori. Dans [29], Tsuchimoto en donne une construction sans utiliser de coordonnées formelles en se basant sur Beilinson-Schechtmann [4]. De plus, il décrit l'algèbre d'Atiyah en question. Étant donné $\mathcal{A}$ et un scalaire a, on définit l'algèbre d'Atiyah $a\mathcal{A}$ par $(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{A})/(a,1)\mathcal{O}_S$. Si $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ est l'algèbre d'Atiyah des opérateurs différentiels du premier ordre d'un fibré inversible $\mathcal{L}$, l'algèbre $a\mathcal{A}$ n'est autre que $\mathcal{A}_{\mathcal{L}^{\otimes a}}$, quand $a\mathbb{Z}$. Si a est un scalaire quelconque, on peut voir $a\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ comme le faisceau des opérateurs différentiels du premier ordre du "fibré inversible $\mathcal{L}^{\otimes a}$" qui, lui, n'est pas bien défini pour a non entier. Alors Tsuchimoto construit une représentation de l'algèbre d'Atiyah

$$\frac{c_\nu}{2}\mathcal{A}_{\det \mathrm{R}\pi_*\mathcal{O}_\mathrm{C}}(-\log\Delta)+\sum_{i=1}^{n} c_{\lambda_i}\mathcal{A}_{\sigma_i^*(\omega_{\mathrm{C/S}})}(-\log\Delta)$$

sur le faisceau des co-vacua $\mathrm{V}_{\mathrm{C/S}}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ définissant la connexion, où c_{λ_i} est la valeur de l'opérateur de Casimir sur le $\mathfrak{g}$-module L_{λ_i} et où $c_\nu = \ell \dim \mathfrak{g}/(g^* + \ell)$ est la charge centrale.

3. FONCTIONS THÊTA GÉNÉRALISÉES

3.1. L'identification

(3.1.1) Il s'agit d'identifier les espaces des vacua aux espaces des fonctions thêta généralisées. Soit C une courbe algébrique lisse de genre $g \geq 2$. On désigne par $\mathcal{SU}_\mathrm{C}(r)$ l'espace des modules des fibrés vectoriels semi-stables de rang r et de déterminant trivial. C'est une variété algébrique projective irréductible dont les points fermés s'identifient aux sommes directes de fibrés vectoriels stables. Étant donnée un fibré inversible L de degré $g-1$, on définit

$$\Theta_\mathrm{L} = \{[\mathrm{E}] \in \mathcal{SU}(r) \mid \mathrm{h}^0(\mathrm{C}, \mathrm{E}\otimes\mathrm{L}) \geq 1\}$$

Ceci définit un diviseur de Cartier sur $\mathcal{SU}(r)$ dont le fibré inversible associé $\mathcal{D}$ est indépendant du choix de L en raison du théorème de Drezet-Narasimhan [11], qui affirme que l'on a $\mathrm{Pic}(\mathcal{SU}(r)) = \mathbb{Z}\mathcal{D}$. Cette section est dédié à l'explication du théorème suivant.

(3.1.2) THÉORÈME. — *([2]) Soit ℓ un entier; considérons l'espace des vacua* $\mathrm{V}^*_\mathrm{C}(\emptyset)$ *de niveau ℓ. Il existe un isomorphisme canonique* $\mathrm{H}^0(\mathcal{SU}(r), \mathcal{D}^{\otimes\ell}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}^*_\mathrm{C}(\emptyset)$.

3.2. Le théorème d'uniformisation

(3.2.1) Soit $p \in \mathrm{C}$ et $\mathrm{C}^* = \mathrm{C} - \{p\}$. On note $\mathrm{R}_{\mathrm{C}^*}$ l'anneau des fonctions régulières sur C^*. Soit $\widehat{\mathcal{O}}$ le complété de l'anneau local en p et K son corps de fractions. On se donne de plus une coordonnée locale z en p ce qui permet d'identifier $\widehat{\mathcal{O}}$ à $\mathbb{C}[[z]]$ et K à $\mathbb{C}((z))$. On note $\mathrm{D} = \mathrm{Spec}(\widehat{\mathcal{O}})$ et $\mathrm{D}^* = \mathrm{Spec}(\mathrm{K})$.

(3.2.2) Le point de départ de la démonstration est l'observation qu'*ensemblistement* l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang r et de déterminant trivial est en bijection canonique avec l'ensemble des double classes defini par le double quotient $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})\backslash\mathrm{SL}_r(\mathrm{K})/\,\mathrm{SL}_r(\widehat{\mathcal{O}})$. Ceci est facile à voir. L'observation clé pour cela est qu'un fibré vectoriel de déterminant trivial sur C se trivialise sur C^*, car un module projectif sur un anneau de Dedekind est libre si et seulement si son déterminant est libre. Supposons alors donné un fibré vectoriel E muni de deux trivialisations $\tau : \mathcal{O}_{C^*} \xrightarrow{\sim} E_{|C^*}$ et $\sigma : \mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} E_{|D}$ telles que $\Lambda^r\tau = \Lambda^r\sigma$ sur D^*. Ces trivialisations diffèrent par un morphisme $D^* \longrightarrow SL_r(\mathbb{C})$, *i.e.* un élément de $SL_r(K)$. Réciproquement, la donnée d'un élément de $SL_r(K)$ permet de recoller les fibrés triviaux sur C^* et D et de retrouver le fibré E muni de deux trivialisations τ et σ. Ainsi, les éléments de $SL_r(K)$ correspondent aux classes d'isomorphisme (E, τ, σ) tels que $\Lambda^r\tau = \Lambda^r\sigma$ sur D^*. Ensuite, quotienter $SL_r(K)$ par $SL_r(\widehat{\mathcal{O}})$ signifie oublier σ, et quotienter $SL_r(K)/SL_r(\widehat{\mathcal{O}})$ par $SL_r(R_C)$ signifie oublier aussi τ.

(3.2.3) La nature *algébrique* des objets et de l'isomorphisme en question est autrement plus délicate à établir. On appelle $\mathbb{C}$-*espace* (resp. $\mathbb{C}$-*groupe*) un foncteur de la catégorie des $\mathbb{C}$-algèbres dans la catégorie des ensembles (resp. groupes) qui est un faisceau pour la topologie fidèlement plate. On verra la catégorie des $\mathbb{C}$-schémas comme sous-catégorie pleine des $\mathbb{C}$-espaces. La catégorie des $\mathbb{C}$-espaces est fermée par limites inductives. Un $\mathbb{C}$-espace est un *ind-schéma* s'il est limite inductive d'un système filtrant de schémas. Un *ind-groupe* est un $\mathbb{C}$-groupe qui est un ind-schéma.

Soit $SL_r(\mathbb{C}[[z]])$ [resp. $SL_r(\mathbb{C}((z)))$] le $\mathbb{C}$-groupe $A \mapsto SL_r(A[[z]])$ [resp. $A \mapsto SL_r(A((z)))$]. Il est facile de voir que $SL(\mathbb{C}[[z]])$ est représenté par un schéma affine. Pour $SL_r(\mathbb{C}((z)))$ on filtre par l'ordre du pôle: considérons le sous-foncteur $\mathcal{S}^{(N)}$ de $SL_r(\mathbb{C}((z)))$ des matrices $M(z)$ de $SL_r(A((z)))$ telles que $M(z)$ et $M(z)^{-1}$ ont un pôle d'ordre au plus N. Ce sous-foncteur est représentable par un schéma affine S^N, ce qui fait de $SL_r(\mathbb{C}((z)))$ un ind-groupe, limite inductive des schémas S^N. Remarquons que S^0 n'est autre que $SL_r(\mathbb{C}[[z]])$.

Le quotient $X = SL_r(\mathbb{C}((z)))/SL_r(\mathbb{C}[[z]])$ est naturellement un $\mathbb{C}$-espace (c'est le faisceau quotient). C'est un ind-schéma: soit $X^{(N)}$ l'image du $\mathbb{C}$-espace $S^{(N)}/S^{(0)}$ dans X. Alors $X = \varinjlim X^{(N)}$ et on a ([2], cor. 2.4):

(3.2.4) LEMME. — *Le $\mathbb{C}$-espace $X^{(N)}$ est isomorphe à un schéma projectif.*

Considérons maintenant le $\mathbb{C}$-groupe $SL_r(R_C)$ défini par $A \mapsto SL_r(R_{C_A})$ où l'on désigne par R_{C_A} l'anneau des fonctions régulières de $C^*_A = C^* \times_{\mathbb{C}} \mathrm{Spec}(A)$. Ce $\mathbb{C}$-groupe a une structure naturelle de ind-groupe, limite des variétés T^N paramétrisant des matrices M de déterminant 1 dont les coefficients sont des fonctions méromorphes sur C ayant au plus un pôle d'ordre N en p. La version algébrique de l'identification ensembliste ci-dessus est la suivante:

(3.2.5) THÉORÈME. — *([2], Prop. 3.4) Le champ algébrique $\mathcal{SL}_r(C)$ des fibrés vectoriels de rang r et de déterminant trivial est canoniquement isomorphe au champ* $SL_r(R_C)\backslash SL_r(K)/SL_r(\widehat{\mathcal{O}})$.

3.3. De l'espace de modules au champ

(3.3.1) Supposons $g \geq 1$. Soit $\mathcal{SL}_{\mathrm{C}}^{ss}(r) \subset \mathcal{SL}_{\mathrm{C}}(r)$ le sous-champ ouvert correspondant aux fibré vectoriels semi-stables et considérons le morphisme d'oubli $\varphi : \mathcal{SL}_{\mathrm{C}}^{ss}(r) \longrightarrow \mathcal{SU}_{\mathrm{C}}(r)$. L'image réciproque de $\mathcal{D}$ est la restriction d'un fibré inversible naturel sur $\mathcal{SL}_{\mathrm{C}}(r)$: le fibré déterminant défini de la manière suivante. Étant donné une famille de fibrés vectoriels $\mathrm{E} \to \mathrm{S} \times \mathrm{C}$, il existe un complexe parfait $\mathcal{K}^\bullet : \mathcal{K}^0 \to \mathcal{K}^1$ sur S représentant l'image directe dérivée de E. Le déterminant $\mathcal{D}$ de $\mathcal{K}^\bullet$ ne dépend pas du représentant choisi. On définit ainsi un fibré inversible sur le champ $\mathcal{SL}_{\mathrm{C}}(r)$, qu'on note encore $\mathcal{D}$. Il n'est pas difficile de voir qu'on a un isomorphisme

$$\varphi^* : \mathrm{H}^0(\mathcal{SU}_{\mathrm{C}}(r), \mathcal{D}^\ell) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathcal{SL}_{\mathrm{C}}^{ss}(r), \mathcal{D}^\ell)$$

et un argument de codimension montre que le morphisme de restriction est de même un isomorphisme:

$$\rho : \mathrm{H}^0(\mathcal{SL}_{\mathrm{C}}(r), \mathcal{D}^\ell) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathcal{SL}_{\mathrm{C}}^{ss}(r), \mathcal{D}^\ell)$$

3.4. Identifications

(3.4.1) Le quotient $\mathrm{X} = \mathrm{SL}_r(\mathbb{C}((z)))/\mathrm{SL}_r(\mathbb{C}[[z]])$ a été étudié dans le cadre de la théorie des représentations des algèbres de Kac-Moody par Kumar [17] et Mathieu [19] à une différence non-négligeable près. La structure de ind-schéma que définissent Kumar et Mathieu sur le quotient n'est pas *a priori* la même que celle qui est définie ci-dessus. Ceci ne se démontre qu'après quelques vérifications techniques. Par exemple on doit montrer que l'ind-schéma X ci-dessus est réduit (*i.e.* réunion croissante de schémas réduits) (*cf.* [2], Théorème 7.7). L'étape suivante consiste à se ramener à leurs résultats. D'après [25], le $\mathbb{C}$-groupe $\mathrm{SL}_r(\mathrm{K})$ admet une extension centrale universelle $\widehat{\mathrm{SL}_r}(\mathrm{K})$ qui se scinde au dessus du sous-groupe $\mathrm{SL}_r(\widehat{\mathcal{O}})$ de sorte que X soit isomorphe à $\widehat{\mathrm{SL}_r}(\mathrm{K})/(\mathbb{C}^* \times \mathrm{SL}_r(\widehat{\mathcal{O}}))$. Le sous-groupe $\mathbb{C}^* \times \mathrm{SL}_r(\widehat{\mathcal{O}})$ admet un caractère canonique χ, à savoir la projection sur le premier facteur. Comme dans le cas des espaces homogènes en dimension finie, ce caractère définit un fibré inversible $\mathcal{L}_\chi$ sur X, muni d'une linéarisation *canonique* de $\widehat{\mathrm{SL}_r}(\mathrm{K})$. Par conséquent, on obtient une action de l'algèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{sl}_r}$ (on reprend les notations de (2.1.2)) sur les espaces de sections globales $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{L}_\chi^{\otimes \ell})$. L'analogue du théorème de Borel-Weil-Bott dans le cadre des algèbres de Kac-Moody, dû à Kumar et Mathieu, identifie cette représentation:

(3.4.2) THÉORÈME. — *On a un isomorphisme de $\widehat{\mathfrak{sl}_r}$-modules* $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{L}_\chi^{\otimes \ell}) \simeq \mathrm{H}_0^*(\ell)$.

(3.4.3) Considérons la projection $\pi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathcal{SL}_{\mathrm{C}}(r)$. On a la proposition suivante

(3.4.4) PROPOSITION. — *([2], cor. 5.5) L'image réciproque $\pi^*(\mathcal{D})$ s'identifie à $\mathcal{L}_\chi$.*

(3.4.5) Il n'est pas difficile de voir que les sections de $\mathcal{D}^{\otimes \ell}$ sont les sections $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$-invariantes de $\pi^*(\mathcal{D})^{\otimes \ell}$. Mais pour conclure il faut prendre les invariants par *rapport à l'algèbre* $\mathfrak{sl}_r(\mathrm{R_C})$. L'argument crucial pour cela est que l'ind-schéma $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$ est réduit ([2], proposition 6.4). De là, on déduit d'une part que $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$ n'admet comme caractères que le caractère trivial et d'autre part que l'inclusion de $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$ dans $\mathrm{SL}_r(\mathrm{K})$ se relève de façon unique en une inclusion de $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$ dans $\widehat{\mathrm{SL}_r}(\mathrm{K})$. Par conséquent, les $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$-linéarisations de $\mathcal{L}_\chi$ données par d'une part par (3.4.4) et d'autre part par la $\widehat{\mathrm{SL}_r}(\mathrm{K})$-linéarisation canonique, via l'inclusion ci-dessus de $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$ dans $\widehat{\mathrm{SL}_r}(\mathrm{K})$, sont les mêmes. Il s'ensuit que l'action de $\mathfrak{sl}_r(\mathrm{R_C})$ sur $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{L}_\chi^{\otimes \ell})$ est la restriction de l'action de $\widehat{\mathfrak{sl}_r}$ sur $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{L}_\chi^{\otimes \ell}) \simeq \mathrm{H}_0^*(\ell)$. Le théorème se déduit alors du fait que, X et $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$ étant *réduits*, les sections $\mathrm{SL}_r(\mathrm{R_C})$-invariantes de $\mathcal{L}_\chi$ sont les sections $\mathfrak{sl}_r(\mathrm{R_C})$-invariantes ([2], 7.4).

4. FORMULES EXPLICITES

4.1. Les caractères de l'anneau de fusion

(4.1.1) Il reste à expliciter l'expression $\sum_{\chi \in \Sigma} \chi(\lambda_1) \cdots \chi(\lambda_n)\chi(\omega)^{g-1}$ de la formule du paragraphe (1.3.6) dans le cadre de la théorie conforme du paragraphe 2. D'après (1.3.6), il s'agit de décrire le spectre de l'anneau de fusion associé. Ceci est fait dans [13] pour les groupes classiques et pour G_2. On se fixe une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ simple et un entier $\ell \geq 0$. Grâce à la proposition (2.6.2), l'anneau de fusion $\mathrm{R}_\ell(\mathfrak{g})$ s'identifie au $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les classes d'isomorphisme des représentations L_λ, $\lambda \in \mathrm{P}_\ell$, muni du produit défini de la manière suivante. Soient $\lambda, \mu \in \mathrm{P}_\ell$. Définissons le produit tensoriel modifié:

$$\mathrm{L}_\lambda \dot{\otimes} \mathrm{L}_\mu := {\mathrm{L}_\lambda \otimes \mathrm{L}_\mu}/_{\mathrm{M}_{\lambda,\mu}},$$

où $\mathrm{M}_{\lambda,\mu}$ le $\mathfrak{g}$-module engendré par les composantes isotypiques correspondant au poids j_1 de $\mathrm{L}_\lambda^{(j_2)} \otimes \mathrm{L}_\mu^{(j_3)}$ pour tout $\{j_1, j_2, j_3\}$ tel que $j_1 + j_2 + j_3 > 2\ell$. Alors on a $[\mathrm{L}_\lambda] \cdot [\mathrm{L}_\mu] = [\mathrm{L}_\lambda \dot{\otimes} \mathrm{L}_\mu]$.

Le $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{R}_\ell(\mathfrak{g})$ est naturellement un quotient du $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{R}(\mathfrak{g})$ ([1], §8). Par contre, vérifier que c'est un quotient en tant qu'anneau est plus délicat.

(4.1.2) CONJECTURE. — *Le morphisme de $\mathbb{Z}$-modules $\pi : \mathrm{R}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{R}_\ell(\mathfrak{g})$ est un morphisme d'anneau.*

(4.1.3) Cette conjecture est démontrée dans Faltings [13] pour les groupes classiques et G_2. En raison du fait que $\mathrm{R}(\mathfrak{g})$ est engendré en tant que $\mathbb{Z}$-algèbre par les représentations L_ϖ associés aux poids fondamentaux ϖ, il suffit de vérifier que $\pi([\mathrm{E}] \cdot [\mathrm{F}]) = \pi([\mathrm{E}])\pi([\mathrm{F}])$ pour $\mathrm{F} = \mathrm{L}_\varpi$. Dans le cas où l'on a $(\varpi, \theta) = 1$ pour les poids fondamentaux (*i.e.* A_r et C_r) la conjecture est très facile à vérifier. Mais déjà, dans le cas où il existe ϖ tel que $(\varpi, \theta) = 2$ (*i.e.* B_r, D_r et G_2), elle n'est plus évidente. Dans les autres cas, elle est ouverte à présent.

(4.1.4) La conjecture (4.1.2) est équivalente à la description suivante du spectre de $R_\ell(\mathfrak{g})$. Soit G le groupe simplement connexe dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}$ et T le tore maximale de G dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{h}$. Les $\mathfrak{g}$-modules de dimension finies peuvent être considérés comme G-modules. Si $\lambda \in P$, on note e^λ le caractère de T, donnée par $e^\lambda(\exp(H)) = \exp \lambda(H)$. Chaque $t \in T$ définit un caractère

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tr}_*(t): & R(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & [V] & \mapsto & \mathrm{Tr}_V(t) \end{array}$$

On montre, en utilisant la formule de Weyl, que les caractères $\mathrm{Tr}_*(t) : R(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C}$ qui se factorisent (en tant que forme linéaire) à travers $R_\ell(\mathfrak{g})$ sont associés aux caractères $T_\ell = \{t \in T \mid, e^\alpha(t) = 1 \ \forall \alpha \in (\ell + g^*)Q_{lg}\}$ qui sont *réguliers, i.e.* $e^\rho(t) = 1$, ρ étant la demi-somme des racine positives. Ici Q_{lg} désigne le sous-réseau engendré par les racines longues du réseau Q engendré par toutes les racines. Pour $t \in T_\ell^{reg}$, la forme linéaire $R_\ell(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C}$ obtenue par factorisation sera notée χ_t. Cette forme linéaire ne dépend que de la classe de t dans T_ℓ^{reg}/W, où W désigne le groupe de Weyl et deux classes différentes donnent des formes différentes. La conjecture (4.1.2) équivaut à la suivante:

(4.1.5) CONJECTURE. — *Les caractères de* $R_\ell(\mathfrak{g})$ *sont les* $\chi_t : R_\ell(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C}$ *(pour* $t \in T_\ell^{reg}/W$*).*

4.2. La formule de Verlinde explicite

(4.2.1) Moyennant l'égalité $\sum_{\lambda \in P_\ell} \mid \mathrm{Tr}_{L_\lambda}(t) \mid^2 = \#T_\ell/\Gamma(t)$ avec $\Gamma(t) = \prod_{\alpha \in \Delta} (e^\alpha(t) - 1)$ ([1], Lemma 9.7), on obtient, d'après ce que précède, la formule de Verlinde explicite:

(4.2.2) THÉORÈME. — *(Formule de Verlinde) Supposons que* $\mathfrak{g}$ *soit de type classique ou* G_2. *Soit* ℓ *un entier* ≥ 0. *Soit* $(C, \underline{p})$ *une courbe n-pointée dont les points marquées* p_i *sont étiquetés par les poids* $\lambda_i \in P_\ell$ *et* $V_C(\underline{p}; \underline{\lambda})$ *l'espace des vacua associé. Alors*

$$\dim V_C(\underline{p}; \underline{\lambda}) = \sum_{t \in T^{reg}/W} \mathrm{Tr}_{L_{\underline{\lambda}}}(t) \left(\frac{\#T_\ell}{\Gamma(t)} \right)^{g-1}.$$

(4.2.3) La formule ci-dessus peut se reformuler, en identifiant T_ℓ^{reg}/W à P_ℓ ([1], 9.7):

$$\dim V_C(\underline{p}; \underline{\lambda}) = (\#T_\ell)^{g-1} \sum_{\mu \in P_\ell} \mathrm{Tr}_{L_{\underline{\lambda}}}(\exp \frac{2\pi i}{\ell + g^*}(\mu + \rho)) \prod_{\alpha \in \Delta_+} \left| 2 \sin \frac{\pi}{\ell + g^*}(\alpha, \mu + \rho) \right|^{2-2g}.$$

Les inclusions $(\ell + g^*)Q_{lg} \subset Q_{lg} \subset Q \subset P$ montrent $\#T_\ell = (\ell + g^*)^{\mathrm{rang}\, \mathfrak{g}} \#(P/Q) \#(Q/Q_{lg})$. Le cardinal de Q/Q_{lg} est égal à 2 pour B_r, 2^{r-1} pour C_r, 4 pour F_4, 6 pour G_2 et 1 sinon.

(4.2.4) EXEMPLE. — En spécialisant au cas de $\mathfrak{sl}_{r+1}$ sans points marqués, on obtient la formule suivante pour la dimension de l'espace vectoriel $V_C(\emptyset)$:

$$((\ell+r+1)^r(r+1))^{g-1} \sum_{\substack{n_1,\dots,n_r\geq 1\\ n_1+\dots+n_r\leq \ell+r}} \prod_{1\leq i<j\leq r+1} \left(2\sin\frac{\pi}{\ell+r+1}(n_i+\dots+n_{j-1})\right)^{2-2g}.$$

D'autres exemples, dont les séries B,C et D, se trouvent dans [21].

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BEAUVILLE. *Conformal Blocks, Fusion rules and the Verlinde formula,* Prépublication alg-geom/9405001 (1994)

[2] A. BEAUVILLE ET Y. LASZLO. *Conformal blocks and generalized theta functions,* Comm. Math. Physics **164** (1994) 385-419

[3] A. BEAUVILLE, M. S. NARASIMHAN ET S. RAMANAN. *Spectral curves and the generalised theta divisor,* J. reine angew. Math. **398** (1989) 169-179

[4] A. BEILINSON ET V. SCHECHTMANN. *Determinant bundles and Virasoro algebras,* Comm. Math. Phys. **118** (1988) 651-701

[5] A. BERTRAM. *Generalized* SU(2)*-theta functions,* Inv. Math. **113** (1993) 351-372

[6] A. BERTRAM ET A. SZENES. *Hilbert polynomials of moduli spaces of rank 2 vector bundles II,* Topology **32** (1993) 599-609

[7] G. DASKALOPOULOS ET R. WENTWORTH. *Local degeneration of the moduli space of vector bundles and factorisation of rank 2 theta functions,* Math. Annalen **297** (1992) 417-466

[8] G. DASKALOPOULOS ET R. WENTWORTH. *Factorisation of rank 2 theta functions II: the Verlinde formula,* Prépublication (1994)

[9] R. DONAGI ET L. TU. *Theta functions for* SL(n) *versus* GL(n), Prépublication (1992)

[10] S. DONALDSON. *Gluing techniques in the cohomology of moduli spaces,* à paraître au volume en mémoire de Andreas Floer (edité par H. Hofer, C. Taubes, E. Zehnder) (1994)

[11] J. M. DREZET ET M. S. NARASIMHAN. *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques.*, Invent. math. **97** (1989) 53-94

[12] G. FALTINGS. *G-bundles and projective connections,* J. Alg. Geometry **2** (1993) 507-568

[13] G. FALTINGS. *A proof of the Verlinda formula,* J. Alg. Geometry **3** (1994) 347-374

[14] N. HITCHIN. *Flat connections and geometric quantization,* Comm. Math. Phys. **131** (1990) 347-380

[15] V. KAC. *Infinite Dimensional Lie Algebras,* Cambridge University Press, Cambridge (1985)

[16] V. KNIZHNIK ET A. ZAMOLODCHIKOV. *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions,* Nucl. Phys. B **247** (1984)

[17] S. KUMAR. *Demazure character formula in arbitrary Kac-Moody setting,* Inv. math. **89** (1987) 395-423

[18] S. KUMAR, M. S. NARASIMHAN ET A. RAMANATHAN. *Infinite Grassmanians and Moduli Spaces of* G*-bundles,* Math. Annalen **300** (1993) 395-423

[19] O. MATHIEU. *Formules de caractères pour les algèbres de Kac-Moody générales,* Astérisque **159-160** (1988)

[20] M. S. NARASIMHAN ET T. R. RAMADAS. *Factorisation of generalized Theta functions I,* Inv. Math. **114** (1993) 565-623

[21] W. M. OXBURY ET S. M. J. WILSON. *Reciprocity laws in the Verlinde formulae for classical groups,* Prépublication, Durham University (1994)

[22] T. PANTEEV. *Comparison of generalized theta functions,* Prépublication (1993)

[23] C. PAULY. *Espaces de modules de fibrés paraboliques et blocs conformes,* Prépublication (1994)

[24] T. R. RAMADAS. *Factorisation of generalized theta functions II,* Prépublication, TIFR Bombay (1994)

[25] G. SEGAL ET G. WILSON. *Loop groups and equations of KdV type,* Pub. math. IHES **61** (1985) 5-65

[26] A. SZENES. *Hilbert polynomials of moduli spaces of rank 2 vector bundles I,* Topology **32** (1993.1) 587-597

[27] A. SZENES. *The combinatorics of the Verlinde formulas,* Prépublication (1994)

[28] M. THADDEUS. *Stable pairs, linear systems and the Verlinde formula,* Inv. Math. **117** (1994)

[29] Y. TSUCHIMOTO. *On the coordinate-free description of the conformal blocks,* J. Math. Kyoto Univ. **33** (1993) 29-49

[30] A. TSUCHIYA, K. UENO ET Y. YAMADA. *Conformal Field Theory on Universal Family of Stable Curves with Gauge Symmetries,* Adv. Studies in Pure Math. **19** (1989) 459-566

[31] A. TYURIN. *On periods of quadratic differentials,* Russ. Math. Surv. **33 No. 3** (1978) 159

[32] E. VERLINDE. *Fusion rules and modular transformations in 2d-conformal field theory.,* Nucl. Phys. B **300** (1988) 360-376

[33] D. ZAGIER. *On the cohomolgy of moduli spaces of rank two vector bundles over curves,* (1991)

[34] D. ZAGIER. Values of the zeta function and their applications, *à paraître dans les annales du congrès européen des mathématiques* (1992)

Christoph SORGER
Institut de mathématiques de Jussieu
Université Denis Diderot (Paris 7)
Case Postale 7012
2, place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05
e-mail: sorger@mathp7.jussieu.fr

Astérisque

JEAN-BENOÎT BOST

Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki, exp. n° 795, p. 115-161

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__115_0>

Séminaire BOURBAKI
47ème année, 1994-95, n° 795

Mars 1995

PÉRIODES ET ISOGÉNIES DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES SUR LES CORPS DE NOMBRES
[d'après D. Masser et G. Wüstholz]

par **Jean-Benoît BOST**

1. INTRODUCTION

Au cours des dernières années, dans une longue série d'articles ([M-W1-7]), Masser et Wüstholz ont appliqué les "méthodes de transcendance" à l'étude des isogénies et des anneaux d'endomorphisme des variétés abéliennes sur les corps de nombres. Leur approche fournit en particulier une nouvelle démonstration du théorème de finitude suivant, établi par Faltings en 1983 au cours de sa démonstration des conjectures de Tate et de Shafarevitch ([F], [De1] Corollaire 2.8, [Z2] Proposition 3.1):

THÉORÈME 1.1. *Pour tout corps de nombres K et toute variété abélienne A définie sur K, il n'y a qu'un nombre fini de classes de K-isomorphie de variétés abéliennes définies sur K et K-isogènes à A.*

Cet énoncé admet des conséquences arithmétiques spectaculaires: au moyen d'arguments fort ingénieux, mais techniquement assez simples, il entraîne les principaux résultats de [F], à savoir la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur un corps de nombres (d'après Tate lui-même), puis la conjecture de Shafarevitch (par un argument de Faltings), et la conjecture de Mordell (d'après Parshin); *cf.* [F], [De1], [Sz1], [F-W] et [Sz2], exposés VIII, IX et X.

La démonstration originale de Faltings s'appuyait notamment sur des résultats de Tate et Raynaud sur les groupes p-divisibles et les schémas en groupes commutatifs finis ([T], [R1]) qui lui permettaient de borner la différence des hauteurs de deux variétés abéliennes isogènes. Celle de Masser et Wüstholz est très différente. Elle consiste à établir tout d'abord une majoration du degré de la plus petite sous-variété abélienne d'une variété abélienne A sur un corps de nombres K dans $\mathbb{C}$ dont l'espace tangent à l'origine contienne un élément donné du réseau des périodes (complexes) de $A(\mathbb{C})$. Cette majoration – le "théorème des périodes" – est établie dans [M-W3] et constitue le résultat central de toute la série [M-W1-6]. Sa démonstration repose sur l'emploi de la "méthode de Baker" et de "lemmes de zéros".

Au moyen du théorème des périodes, Masser et Wüstholz obtiennent des renseignements quantitatifs auxquels on ne sait accéder par d'autres méthodes. Ainsi, pour étudier les isogénies entre deux variétés abéliennes A et B de dimension g isogènes sur un corps de nombres, Masser et Wüstholz appliquent leur théorème des périodes à une période judicieusement choisie de $A \times B^{2g}$, et produisent ainsi des sous-variétés abéliennes non-triviales de $A \times B^{2g}$, qui permettent de construire une isogénie de degré contrôlé entre A et B ([M-W4]). Des constructions analogues, jointes à des considérations de géométrie des nombres, leur permettent d'étudier les anneaux d'endomorphismes des variétés abéliennes définies sur un corps de nombres, et en particulier de majorer leur discriminant en termes de hauteurs de Faltings ([M-W5-6]).

La première partie de cet exposé est consacrée à la formulation du théorème des périodes (§2) et de ses conséquences (§3). Dans la seconde partie (§4-5), nous avons cherché à en esquisser la démonstration. Nous nous écartons sur plusieurs points de l'argument original de Masser et Wüstholz. Nous nous sommes en effet efforcés d'en donner une version aussi intrinsèque et géométrique que possible: cela nous a conduit à adopter un point de vue "arakelovien", et notamment à faire usage des propriétés de base des fibrés vectoriels hermitiens sur les spectres d'anneaux d'entiers de corps de nombres, de leur degré d'Arakelov et de leurs pentes (ces dernières sont rappelées dans l'Appendice A.1). Cette approche permet d'éviter l'usage systématique des fonctions thêta et les raisonnements sur les espaces de modules de variétés abéliennes polarisées qui apparaîssent dans [M-W3]. Elle évite aussi de construire des fonctions auxiliaires – à ce titre, elle se rapproche de la méthode des déterminants d'interpolation de M. Laurent ([La2]) – et a l'intérêt d'élucider l'effectivité des constantes dans les énoncés de Masser et Wüstholz.

Lors de la préparation de cet exposé, l'auteur a bénéficié des éclaircissements et des conseils de D. Bertrand, S. David et M. Hindry, et tient à les en remercier très chaleureusement.

Notations. Si A est un anneau commutatif, muni d'un morphisme vers un corps k, et si E est un A-module, on désigne par E_k le produit tensoriel $E \otimes_A k$. Plus généralement, si $\mathcal{F}$ est un faisceau de modules sur un A-schéma $\mathcal{X}$, on désigne par $\mathcal{X}_k$

et $\mathcal{F}_k$ le k-schéma et le faisceau sur $\mathcal{X}_k$ qui s'en déduisent par le changement de base $\operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} A$. Lorsque A est un corps de nombre, muni d'un plongement σ dans $\mathbb{C}$, on écrira $\mathcal{X}_\sigma$ et $\mathcal{F}_\sigma$ au lieu de $\mathcal{X}_\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}_\mathbb{C}$.

Les notations et définitions concernant les fibrés vectoriels hermitiens, leur degré d'Arakelov et leurs pentes sont rappelées dans l'Appendice A.

2. PÉRIODES ET SOUS-VARIÉTÉS ABÉLIENNES MINIMALES

2.1. Notations et rappels sur les variétés abéliennes

2.1.1. Si A est une variété abélienne de dimension g sur un corps k et L un fibré en droites sur A, nous noterons $\chi(A, L)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de L et $\deg_L A$ le degré de A relativement à L, *i.e.*, le nombre d'intersection $c_1(L)^g$. On a

$$\chi(A, L) = \frac{1}{g!} \deg_L A \tag{2.1}$$

et, si L est ample,

$$\dim_k H^0(A, L) = \chi(A, L)\,. \tag{2.2}$$

Nous noterons aussi t_A l'espace tangent de A à l'origine (c'est un k-vectoriel de dimension g).

2.1.2. Soit A une variété abélienne de dimension g sur $\mathbb{C}$; $A(\mathbb{C})$ est un groupe de Lie complexe et l'on dispose de l'application exponentielle

$$\exp_A : t_A \to A(\mathbb{C})\,.$$

C'est un morphisme surjectif étale de groupes analytiques complexes. Son noyau Γ_A est un réseau de dimension $2g$ dans t_A – le réseau des périodes de A – et $\exp_A$ détermine par passage au quotient un isomorphisme

$$t_A/\Gamma_A \simeq A(\mathbb{C})\,.$$

Soit de plus L un fibré en droites ample sur A. La classe de Chern $c_1(L)$ en cohomologie de de Rham admet un unique représentant ω qui soit une forme invariante par translation. La forme ω est de type $(1, 1)$ et positive (car L est ample).

Elle s'identifie donc à un élément positif de $\Lambda^{1,1} \overset{\vee}{t_A}$, et définit donc une structure hermitienne $\| \ \|_L$ sur t_A (la "forme de Riemann" de L). Plus précisément si $(e_i)_{1\leq i\leq g}$ est une base de t_A, $(e_i^*)_{1\leq i\leq g}$ la base duale de $\overset{\vee}{t_A}$ et si ω s'identifie à

$$\frac{i}{2} \sum_{1\leq k,\ell\leq g} a_{k\ell}\, e_k^* \wedge \overline{e_\ell^*},$$

on aura

$$\left\| \sum_{k=1}^{g} z_k\, e_k \right\|_L^2 = \sum_{1\leq k,\ell\leq g} a_{k\ell}\, z_k\, \overline{z_\ell}.$$

Le covolume de Γ_A dans t_A muni de $\| \ \|_L$ vaut $\chi(A,L)$. Le théorème de Minkowski montre alors que le rayon d'injectivité

$$\rho(A,L) := \frac{1}{2} \min_{\gamma\in\Gamma_A-\{0\}} \|\gamma\|_L$$

de A muni de la forme de Kähler ω satisfait à

$$\rho(A,L) \leq \pi^{-\frac{1}{2}} (\deg_L A)^{\frac{1}{2g}}. \tag{2.3}$$

2.1.3. Soit A une variété abélienne de dimension g sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Il existe un corps de nombres $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ sur lequel A peut être défini et admet réduction semi-stable. Soient alors $\pi : \mathcal{A} \to S := \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ un modèle semi-abélien de A et $\varepsilon : S \to \mathcal{A}$ sa section nulle. Le fibré en droites sur S

$$\omega_{\mathcal{A}/S} := \varepsilon^* \Omega^g_{\mathcal{A}/S} \simeq \pi_* \Omega^g_{\mathcal{A}/S}$$

admet une structure hermitienne naturelle $\| \ \|$, définie par l'égalité

$$\|\alpha\|^2_\sigma = \frac{i^{g^2}}{(2\pi)^g} \int_{\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{C})} \alpha \wedge \overline{\alpha} \tag{2.4}$$

pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbb{C}$ et tout $\alpha \in \omega_{\mathcal{A}/S} \otimes_\sigma \mathbb{C} \simeq H^0(\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{C}), \Omega^g_{\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{C})})$. Le degré arakelovien normalisé du fibré en droites hermitien $\overline{\omega}_{\mathcal{A}/S} := (\omega_{\mathcal{A}/S}, \| \ \|)$ est indépendant des choix de K et $\mathcal{A}$ et définit la *hauteur de Faltings* (stable normalisée) de A:

$$h(A) := \widehat{\deg}_n\, \overline{\omega}_{\mathcal{A}/S}. \tag{2.5}$$

La hauteur de Faltings est bien une hauteur; à savoir, on a:

THÉORÈME 2.1. (Faltings [F]; voir aussi [De1-2], [MB2], [F-C], V.4., et [Bo2])
i) *Pour tout $g \in \mathbb{N}^*$, il existe $C_0(g) \in \mathbb{R}$ tel que, pour toute variété abélienne A de dimension g sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on ait*

$$h(A) \geq C_0(g)\,.$$

ii) *De plus, à $\overline{\mathbb{Q}}$-isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini de variétés abéliennes de dimension g, définies sur un corps de nombres de degré borné et de hauteur de Faltings borné.*

Cet énoncé joue un rôle central dans la démonstration originale [F] des conjectures de Tate et Shafarevitch; une variante "quantitative" (la comparaison entre la hauteur de Faltings et la hauteur définie par les Thetanullwerte) est aussi utilisée dans [M-W3]. Toutefois, la présentation de leur résultat que nous adoptons ici permet de ne faire appel qu'à l'assertion i) (voir appendice D; cette assertion découle en fait aisément de la proposition 3.4, *cf.* Appendice C).

L'inégalité de hauteurs suivante, qui découle aisément des définitions, sera aussi utile: si $\varphi : A \to B$ est une isogénie de degré $\deg \varphi$ entre deux variétés abéliennes sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on a:

$$h(B) \leq h(A) + \frac{1}{2} \log \deg \varphi\,. \tag{2.6}$$

Enfin, si A et B sont deux variétés abéliennes sur $\overline{\mathbb{Q}}$, il vient:

$$h(A \times B) = h(A) + h(B)\,. \tag{2.7}$$

2.2. Le théorème des périodes

L'énoncé suivant est établi dans [M-W3]. Afin de nous y référer commodément, nous l'appellerons "théorème des périodes".

THÉORÈME 2.2. *Soient A une variété abélienne de dimension g définie sur un corps de nombres K, L un fibré en droites ample sur A, σ un plongement de K dans $\mathbb{C}$ et γ un élément du réseau des périodes Γ_{A_σ}. Si $A_{\{\gamma\}}$ désigne la plus petite sous-variété abélienne de A_σ dont l'espace tangent en l'origine contienne γ, alors*

$$\deg_{L_\sigma} A_{\{\gamma\}} \leq C(g, [K:\mathbb{Q}], \deg_L A)\ \max\left(1, h(A), \|\gamma\|^2_{L_\sigma}\right)^{\kappa(g)}\,,$$

où $C(g, [K : \mathbb{Q}], \deg_L A)$ *(resp.* $\kappa(g)$*) désigne une constante ne dépendant que de* g, $[K : \mathbb{Q}]$, *et* $\deg_L A$ *(resp. de* g*).*

2.3. Remarques

2.3.1. Plus généralement, soient $\overline{K}$ la clôture algébrique de $\sigma(K)$ dans $\mathbb{C}$, S un sous-ensemble de t_{A_σ} tel que $\exp_{A_\sigma}(S) \subset A(\overline{K})$, et soit A_S la plus petite sous-variété abélienne de A_σ dont l'espace tangent à l'origine contienne S. Le "théorème du sous-groupe analytique" de Wüstholz [Wü1-3] affirme que t_{A_S} *coïncide avec le plus petit sous-espace vectoriel de* t_{A_σ} *contenant* S *et défini sur* $\overline{K}$. Wüstholz établit en fait cet énoncé avec, à la place de A, un groupe algébrique commutatif connexe G défini sur K quelconque (espaces tangents à l'origine et applications exponentielles conservent évidemment un sens dans ce cadre). Dans cette généralité, le théorème du sous-groupe analytique résume un grand nombre de résultats de transcendance et d'indépendance linéaire sur les groupes algébriques commutatifs. Par exemple, appliqué à un produit de groupes multiplicatifs, il devient le célèbre théorème de Baker affirmant que des logarithmes de nombres algébriques sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$ s'ils le sont sur $\mathbb{Q}$. La démonstration du théorème du sous-groupe analytique s'appuie notamment sur des "lemmes de zéros" dans des groupes algébriques commutatifs. Nous renvoyons à l'exposé de Bertrand dans ce séminaire [Be1] pour une discussion et des références plus complètes sur ce sujet.

La question de borner le degré du groupe G_S (relativement à une polarisation donnée) se pose naturellement. Le théorème des périodes y répond lorsque G est une variété abélienne et S est réduit à une période. Les premières bornes sur G_S ont en fait été obtenues par Baker, au moyen de la méthode qui porte son nom, lorsque G est un produit de groupes multiplicatifs ([Ba1]; voir aussi [Ba2], chapitres 2 et 3, [Ba3] et les articles cités dans ces références).

2.3.2. Un problème analogue à celui de l'étude des groupes G_S a donné lieu à diverses investigations (voir par exemple [Be2], §4): étant donné un sous-ensemble Σ de $G(\overline{K})$, étudier le plus petit sous-groupe algébrique G^Σ de G contenant Σ. Notamment, lorsque G est une variété abélienne, Bertrand a obtenu des majorations du degré de G^Σ [Be4], en s'appuyant lui aussi sur la méthode de Baker et les lemmes de zéros sur les groupes algébriques commutatifs, dans le prolongement des travaux de Wüstholz, Philippon et Waldschmidt ([Wü2-3], [P], [P-W]).

Soulignons enfin que ce type de techniques, dont le développement avait été motivé par l'étude des formes linéaires en logarithmes, admet encore d'autres applications à la géométrie arithmétique des variétés abéliennes sur les corps de nombres : suivant un programme proposé par Lang [Lg], elle permet ainsi d'établir des minorations effectives des degrés de leurs points de torsion ou des hauteurs de leurs points qui ne sont pas de torsion. Pour plus de détails sur ces questions, on se reportera par exemple aux articles de Masser [M1-2], Bertrand [Be2-4] et David [Da1-2] (voir aussi *infra*, §3.3).

2.3.3. Les constantes $C(g, [K : \mathbb{Q}], \deg_L A)$ et $\kappa(g)$ figurant dans le théorème des périodes sont complètement effectives. Il est même aisé d'en donner des expressions explicites; par exemple, on peut prendre

$$\kappa(g) = (g-1)\, 4^g\, g!\,.$$

Signalons toutefois que la dépendance en g de $C(g, [K : \mathbb{Q}], \deg_L A)$ n'apparaît pas comme vraiment effective dans [M-W3]: elle fait intervenir notamment la comparaison entre hauteurs de Faltings et hauteurs des Thetanullwerte des variétés abéliennes, ainsi que des minorations de ces hauteurs, conséquences de bornes sur certaines formes modulaires de Siegel; ces résultats sont établis par un argument ineffectif, fondé sur la compacité de la compactification de Satake de l'espace des modules des variétés abéliennes complexes principalement polarisées. Ce problème d'effectivité a été résolu récemment par S. David et l'auteur [Bo-D1-2], qui rendent effectives ces comparaisons de hauteurs (voir aussi l'appendice C). L'approche décrite dans cet exposé conduit elle aussi, de façon plus directe, à des constantes effectives.

3. BORNES SUR LES ISOGÉNIES ET LES ANNEAUX D'ENDOMORPHISMES

3.1. Isogénies entre variétés abéliennes polarisées

3.1.1. Dans [M-W4], Masser et Wüstholz démontrent l'énoncé suivant au moyen du théorème des périodes.

THÉORÈME 3.1. *Soient A et B deux variétés abéliennes de dimension g sur $\overline{\mathbb{Q}}$, qui peuvent être munies de polarisations de degrés au plus δ et définies sur un corps de nombre de degré d. Si A et B sont $\overline{\mathbb{Q}}$-isogènes, alors il existe une isogénie de A vers B de degré au plus égal à $C(g,d,\delta)\max(1, h(A))^{\kappa(g)}$, où $C(g,d,\delta)$ (resp. $\kappa(g)$) désigne une constante ne dépendant que de g, d et δ (resp. de g).*

Les constantes $C(g,d,\delta)$ et $\kappa(g)$ dépendent effectivement de g, d et δ, et le théorème 3.1 fournit ainsi une borne effective sur les isogénies entre variétés abéliennes polarisées sur un corps de nombres en termes de hauteurs de Faltings (*cf.* [M-W4], p.469, pour la forme précise de ces constantes).

Avant de démontrer le théorème 3.1 en toute généralité dans [M-W3-4], Masser et Wüstholz avaient traité directement dans [M-W1] le cas des courbes elliptiques (voir aussi [Be3]). Signalons à ce propos que les techniques de transcendance avaient déjà été employées par D. et G. Chudnovsky [C-C] pour obtenir des bornes effectives sur les isogénies entre courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$ ou sur un corps de nombres K admettant un plongement réel ([C-C], Theorem 4, p.2214; voir aussi [La1]).

Grâce à "l'astuce quaternionnienne de Zahrin" (*cf.* [Z1], [MB1] IX.1), le théorème 3.1 suffit à établir le résultat suivant, qui implique le théorème 1.1 d'après la proposition B.3 (*cf.* Appendice B):

COROLLAIRE 3.2. *Pour toute variété abélienne A définie sur un corps de nombres K, il n'y a qu'un nombre fini de classes de $\overline{K}$-isomorphie de variétés abéliennes B définies sur K et $\overline{K}$-isogènes à A.*

Démonstration. Notons $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ les variétés abéliennes duales à A et B. D'après Zahrin, les variétés abéliennes

$$Z(A) := (A \times \widehat{A})^4 \quad \text{et} \quad Z(B) := (B \times \widehat{B})^4$$

admettent des polarisations principales. Elles sont $\overline{K}$-isogènes; le théorème 3.1 montre donc qu'il existe une $\overline{K}$-isogénie de $Z(A)$ vers $Z(B)$, de degré borné en fonction de A. Il n'y a ainsi qu'un nombre fini de classes de $\overline{K}$-isomorphie pour $Z(B)$, donc pour B, d'après la proposition B.2, i).

q.e.d.

Une variante quantitative de cet argument permet d'établir un énoncé de comparaison de hauteurs, dans le style de l'énoncé effectif obtenu par Raynaud ([R2], Théorème 4.4.9) en raffinant l'argument de Faltings [F] au moyen de la théorie des groupes de Barsotti-Tate tronqués ([Il]):

PROPOSITION 3.3. ([M-W4], Proposition, p.470) *Pour toute variété abélienne A sur un corps de nombres K, il existe un sous-ensemble $\mathcal{H}(A)$ de $\mathbb{R}$, de cardinal au plus*

$$H(A) = C(g,[K:\mathbb{Q}]) \max(1, h(A))^{\kappa(g)},$$

où $C(g,[K:\mathbb{Q}])$ (resp. $\kappa(g)$) désigne une constante ne dépendant que de g et $[K:\mathbb{Q}]$ (resp. de g), tel que, pour toute variété abélienne B définie sur K et $\overline{K}$-isogène à A, on ait:

$$h(B) \in \mathcal{H}(A) \quad et \quad |h(B) - h(A)| \leq \log H(A)\,.$$

La comparaison entre les deux énoncés effectifs de comparaison des hauteurs des variétés abéliennes isogènes – celui de Raynaud et cette proposition – est assez délicate (*cf.* [M-W4], p.471). Indiquons seulement qu'aucun des deux n'implique l'autre.

3.1.2. Esquissons maintenant la preuve du théorème 3.1. Outre le théorème des périodes, elle utilise l'énoncé suivant, d'intérêt indépendant (*cf.* [M3], Matrix Lemma, p.115, et [M-W3], lemma 8.6).

PROPOSITION 3.4. *Pour toute variété abélienne A de dimension $g \geq 1$ sur un corps de nombres K et tout fibré en droites L ample sur A, on a*

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma:K\to\mathbb{Q}} \rho(A_\sigma, L_\sigma)^{-2} \leq C(g)\, \max(1, h(A) + \tfrac{1}{2}\log\chi(A,L))$$

où $C(g)$ désigne une constante qui ne dépend que de g.

Une démonstration de cette proposition est présentée dans l'appendice C.

Soient donc A et B deux variétés abéliennes satisfaisant aux hypothèses du théorème 3.1. Considérons une isogénie φ de A vers B et choisissons un plongement σ de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$. La preuve du théorème 3.1 repose sur l'observation suivante: si γ est une période de A_σ et si $(\gamma_1,\ldots,\gamma_{2g})$ est une base du réseau des périodes de B_σ, alors $\widetilde{\gamma} := (\gamma,\gamma_1,\ldots,\gamma_{2g})$ est une période de la variété abélienne $G := A \times B^{2g}$ et la sous-variété abélienne $G_{\{\widetilde{\gamma}\}}$ de G_σ est "non-triviale" (notamment $\neq G$). En effet, si $D\varphi_\sigma : t_{A_\sigma} \to t_{B_\sigma}$ désigne la différentielle en l'origine de $\varphi_\sigma : A_\sigma \to B_\sigma$, il existe $(n_i)_{1\leq i\leq 2g} \in \mathbb{Z}^{2g}$ tel que

$$D\varphi_\sigma(\gamma) = \sum_{i=1}^{2g} n_i\,\gamma_i\,,$$

et donc la composante neutre C du groupe algébrique

$$\left\{(x,x_1,\ldots,x_{2g}) \in A \times B^{2g} \mid \varphi(x) = \sum_{i=1}^{2g} n_i\,x_i\right\}$$

est une sous-variété abélienne propre de G telle que $\widetilde{\gamma} \in t_{C_\sigma}$.

Pour éviter des complications techniques sans grand intérêt à ce stade, supposons en outre que A et B soient simples et munies de polarisations principales définies par des fibrés en droites amples L et M (*i.e.*, $\delta = 1$; pour le cas général, voir [M-W4]). Nous désignerons par $C_1(g)$, $C_2(g), \ldots$ puis $C_4(g,d), \ldots$ des constantes dans $\mathbb{R}_+^*$ ne dépendant que de g et de (g,d). La proposition 3.4, jointe à l'inégalité (2.3), montre que pour tout $\gamma \in \Gamma_{B_\sigma} - \{0\}$, on a

$$\|\gamma\|_{M_\sigma} \geq C_1(g)\ (d \max(1, h(B))^{-1/2}.$$

Comme le covolume du réseau Γ_{B_σ} dans l'espace vectoriel hermitien $(t_{B_\sigma}, \|\cdot\|_{L_\sigma})$ vaut 1, le second théorème de Minkowski montre alors que Γ_{B_σ} admet une base $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g})$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, 2g\}$

$$\|\gamma_i\|_{M_\sigma} \leq C_2(g)\ (d \max(1, h(B))^{g-1/2}.$$

Par ailleurs, l'inégalité (2.3) montre qu'il existe $\gamma \in \Gamma_{A_\sigma} - \{0\}$ tel que

$$\|\gamma\|_{L_\sigma} \leq C_3(g).$$

Appliqué à la période $\widetilde{\gamma}$ de G définie par de tels choix des γ_i et de γ, et à la polarisation principale de G définie par $\mathcal{L} := L \boxtimes M^{\boxtimes 2g}$, le théorème des périodes montre que

$$\chi(G_{\{\widetilde{\gamma}\}}, \mathcal{L}) \leq C_4(g,d) \max(1, h(A), \log \deg \varphi)^{C_4(g)}.$$

En effet,

$$\|\widetilde{\gamma}\|^2_{\mathcal{L}_\sigma} = \|\gamma\|^2_{L_\sigma} + \sum_{i=1}^{2g} \|\gamma_i\|^2_{M_\sigma},$$

et, d'après (2.6) et (2.7),

$$\begin{aligned} h(G) &= h(A) + 2g\, h(B) \\ &\leq (2g+1)\, h(A) + g \log \deg \varphi. \end{aligned}$$

Comme $G_{\{\widetilde{\gamma}\}}$ est incluse dans C, elle ne peut s'écrire comme le produit de sous-variétés abéliennes de A et B^{2g}. Un raisonnement élémentaire (*cf.* [M-W4], Lemma 2.2) montre que cela entraine l'existence d'une isogénie $\psi : A \to B$ de degré au plus $\chi(G_{\{\widetilde{\gamma}\}}, \mathcal{L})^{2g}$.

Partant d'une isogénie $\varphi : A \to B$, on en a ainsi construit une seconde $\psi : A \to B$, telle que

$$\deg \psi \leq C_5(g,d)\ \max(1, h(A), \log \deg \varphi)^{C_4(g)}.$$

En considérant une isogénie de degré minimal, on obtient le théorème 3.1.

3.2. Isogénies non polarisées et anneaux d'endomorphismes

Dans [M-W5-6], Masser et Wüstholz améliorent et complètent le théorème 3.1. En particulier, ils en établissent la version "non polarisée" suivante:

THÉORÈME 3.5. ([M-W6], Theorem II) *Soient A et B deux variétés abéliennes de dimension g définies sur un corps de nombres K de degré d, et soit L un corps extension de K. Si A et B sont L-isogènes, alors il existe une L-isogénie de A vers B de degré au plus $C(g, [K:\mathbb{Q}])\ \max(1, h(A))^{\kappa(g)}$, où $C(g, [K:\mathbb{Q}])$ (resp. $\kappa(g)$) désigne une constante ne dépendant que de g et $[K:\mathbb{Q}]$ (resp. de g).*

Ils démontrent aussi le théorème suivant, qui constitue une version effective du théorème de complète réductibilité de Poincaré pour les variétés abéliennes sur les corps de nombres.

THÉORÈME 3.6. ([M-W6], Theorem I) *Pour toute variété abélienne A de dimension g définie sur un corps de nombres K et tout corps L extension de K, il existe des sous-variétés abéliennes $A_1, \ldots, A_t$ de A, définies et simples sur L, des entiers strictement positifs $e_1, \ldots, e_t$, et une L-isogénie de A vers $A_1^{e_1} \times \ldots \times A_t^{e_t}$ de degré au plus $C(g, [K:\mathbb{Q}])\ \max(1, h(A))^{\kappa(g)}$, où $C(g, [K:\mathbb{Q}])$ (resp. $\kappa(g)$) désigne une constante ne dépendant que de g et $[K:\mathbb{Q}]$ (resp. de g).*

Ce théorème est une conséquence formelle du précédent, mais les deux sont en fait établis simultanément. Leur démonstration s'appuie, comme celle du théorème 3.1, sur le théorème des périodes, combiné avec l'astuce de Zahrin et des constructions ingénieuses de géométrie des réseaux; elle fait aussi appel à une version quantitative originale du théorème de Jordan-Zassenhaus ([M-W6]; voir aussi [Z1] pour le rôle dans ces questions du théorème de Jordan-Zassenhaus).

3.2.2. Dans [M-W5-6], Masser et Wüstholz obtiennent aussi des bornes pour les discriminants des anneaux d'endomorphismes des variétés abéliennes sur un corps de nombres.

Rappelons que si A est une variété abélienne sur un corps k, on note $\mathrm{End}_k\ A$ l'anneau des endomorphismes de A, $\mathrm{End}_k^0\ A$ la $\mathbb{Q}$-algèbre $(\mathrm{End}_k\ A) \otimes \mathbb{Q}$, et

$$\mathrm{Tr} : \mathrm{End}_k^0\ A \to \mathbb{Q}$$

l'application trace (*cf.* [Mu2], §19). Un fibré en droites ample L sur A détermine une involution de Rosati $\varphi \mapsto \varphi'$ sur $\mathrm{End}_k^0\ A$, puis un produit scalaire défini positif

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle_L : (\mathrm{End}_k^0\ A)^2 &\mapsto \mathbb{Q} \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \mathrm{Tr}(\varphi\,\psi') \end{aligned}$$

(*cf.* [Mu2], §20-21). On définit le discriminant de $\mathrm{End}_k\ A$ relativement à L comme

$$\mathcal{D}_L(\mathrm{End}_k\ A) := \det(\langle t_i, t_j\rangle_L)_{1 \leq i,j \leq N}\ ,$$

où $(t_1, \ldots, t_N)$ désigne une base quelconque du $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{End}_k\ A$.

Nous nous contenterons de citer le principal résultat de [M-W5]:

THÉORÈME 3.7. *Pour toute variété abélienne A de dimension g sur un corps de nombres K et tout fibré en droites ample L sur A,*

$$\mathcal{D}_L(\mathrm{End}_K\ A) \leq C(g, [K:\mathbb{Q}], \deg_L\ A) \max(1, h(A))^{\kappa(g)}\ ,$$

où $C(g, [K:\mathbb{Q}], \deg_L\ A)$ (resp. $\kappa(g)$) désigne une constante ne dépendant que de g, $[K:\mathbb{Q}]$ et $\deg_L\ A$ (resp. de g).

3.2.3. Le passage d'énoncés concernant des variétés abéliennes polarisées (tels que le théorème 3.1) à des versions indépendantes des polarisations (telles que le théorème 3.5) conduit naturellement à la question suivante: peut-on majorer le plus petit degré d'une polarisation d'une variété abélienne A de dimension g sur un corps de nombres K par une expression de la forme $C(g, [K:\mathbb{Q}]) \max(1, h(A))^{\kappa(g)}$?

Dans un travail malheureusement non encore publié, Masser et Wüstholz ont étudié cette question par des méthodes voisines de celles de [M-W6]. Ils montrent qu'elle admet une réponse positive dans de nombreuses situations: par exemple, lorsque $g \leq 7$, lorsque $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}\ A = \mathbb{Z}$, ou lorsque A est simple et g sans facteur carré ([M4]).

Par ailleurs, en s'appuyant sur les résultats de [M-W6], ils ont établi dans [M-W7] des raffinements quantitatifs de la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur un corps de nombres ([F], [Z2]).

Signalons enfin que le théorème 3.1 a été étendu aux variétés semi-abéliennes par Yan [Y].

3.3. Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques

Soit E une courbe elliptique définie sur un corps de nombres K. Pour tout entier n, $G := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ agit sur le sous-groupe E_n des points de n-torsion de $E(\overline{K})$. Si $n = \ell$ est premier, E_ℓ est un $\mathbb{F}_\ell$-vectoriel de dimension 2, et l'on dispose ainsi d'une représentation naturelle

$$\varphi_\ell : G \to GL(E_\ell)\,.$$

Un célèbre théorème de Serre ([S2]; voir aussi [S1]) affirme que, *si E n'a pas de multiplication complexe sur $\overline{K}$, alors $\varphi_\ell(G) = GL(E_\ell)$ dès que ℓ est suffisamment grand.*

Leurs bornes sur les isogénies entre courbes elliptiques et surfaces abéliennes ont permis à Masser et Wüstholz d'obtenir une forme quantitative de cet énoncé ([M-W2]):

THÉORÈME 3.8. *Il existe deux constantes absolues c et γ telles que, si E n'a pas de multiplication complexe sur $\overline{K}$, $\varphi_\ell(G)$ contienne $SL(E_\ell)$ dès que*

$$\ell > c\,(\max([K:\mathbb{Q}], h(E))^\gamma$$

et coïncide donc avec $GL(E_\ell)$ lorsque de plus ℓ ne divise pas le discriminant de K.

Une version effective du théorème de Serre, de forme différente de celle de Masser et Wüstholz, avait été indépendamment obtenue par Serre lui-même ([S4]; voir aussi [S2], p.308, et [S3], p.196, pour des résultats effectifs antérieurs).

Rappelons pour terminer que l'approche transcendante aux énoncés affirmant que

$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ "agit beaucoup" sur les points de torsion de $E(\overline{K})$ remonte aux articles de Lang [Lg] et de Masser [M1].

4. COMPLÉMENTS SUR LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES ET LES FIBRÉS VECTORIELS HERMITIENS

Cette section est consacrée à divers résultats, d'intérêt indépendant, sur lesquels reposera la preuve du théorème des périodes exposée au §5.

4.1. Un lemme de zéros

Les sous-variétés abéliennes dont l'existence est assurée par le théorème des périodes seront produites grâce au résultat géométrique suivant, qui en ramènera la construction à celle de sections de fibrés en droites "s'annulant beaucoup en certains points":

THÉORÈME 4.1. *Soient A une variété abélienne de dimension g sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, L un fibré en droite ample sur A, s une section régulière non nulle de L sur A et S un sous-schéma de dimension 0 de A. Soit en outre $S^{\boxplus g}$ le sous-schéma (de dimension 0) de A défini comme l'image schématique de S^g par le morphisme d'addition de A^g vers A.*

Si s s'annule sur $S^{\boxplus g}$, alors il existe une sous-variété abélienne B de A, distincte de A, telle que

$$\ell(p(S)) \cdot \deg_L B \leq \deg_L A\,, \tag{4.1}$$

où p désigne le morphisme quotient de A vers A/B, $p(S)$ l'image schématique de S par p et $\ell(p(S))$ sa longueur.

Les énoncés de ce type apparaissent dans la littérature "transcendante" sous le nom de "lemmes de zéros", et ont fait l'objet d'un exposé par Bertrand dans ce séminaire [Be1], auquel on pourra se reporter pour une discussion et des références détaillées (concernant notamment des travaux antérieurs de Masser et Wüstholz). Signalons seulement que les lemmes de zéros de la forme ci-dessus ont été démontrés en premier lieu par Philippon [P], et que Nakamaye [N] et Denis [D] en ont récemment obtenu de nouvelles variantes. Le Théorème 4.1 peut s'établir en adaptant les méthodes de ces derniers auteurs.

4.2. Sections des fibrés amples sur les schémas abéliens

Soient A une variété abélienne sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et L un fibré en droites ample symétrique sur A. Supposons que A admette une bonne réduction potentielle et considérons un corps de nombres K sur lequel A soit définie et admette bonne réduction. Il existe alors un schéma abélien

$$\pi : \mathcal{A} \to S := \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$$

et un fibré en droite $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{A}$ qui constituent un modèle[1]de A et L sur S. Le fibré en

[1] *i.e.*, il existe un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}$-variétés abéliennes $i : A \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ et un isomorphisme de fibrés en droites sur A : $\varphi^* \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}} \xrightarrow{\sim} L$.

droites $\mathcal{L}$ peut être muni d'une métrique hermitienne C^∞, invariante par conjugaison, dont la forme de courbure est invariante par translation sur chacune des variétés abéliennes complexes $\mathcal{A}_\sigma$, $\sigma : K \to \mathbb{C}$. On notera $\overline{\mathcal{L}}$ le fibré en droites hermitien ainsi défini. Si $\varepsilon : S \to \mathcal{A}$ désigne la section nulle, on peut en outre supposer qu'il existe un isomorphisme de fibrés en droites hermitiens sur S

$$\varepsilon^* \overline{\mathcal{L}} \simeq \overline{\mathcal{O}}_S \tag{4.2}$$

(remplacer si nécessaire $\overline{\mathcal{L}}$ par $\overline{\mathcal{L}} \otimes \pi^* \varepsilon^* \overline{\mathcal{L}}^\vee$). A isomorphisme isométrique près, le fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ est caractérisé par ces conditions. De plus, $\mathcal{L}$ est ample sur $\mathcal{A}$, et son image directe $\pi_* \mathcal{L}$ est une fibré vectoriel de rang $\chi(A, L)$ sur S qui admet une structure hermitienne naturelle $\| \; \|_{L^2}$ définie comme suit: pour tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et tout élément s de $\pi_* \mathcal{L} \otimes_\sigma \mathbb{C} \simeq H^0(\mathcal{A}_\sigma, \mathcal{L}_\sigma)$, on pose

$$\|s\|^2_{L^2,\sigma} = \int_{\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{C})} \|s(x)\|^2_{\overline{\mathcal{L}}} \, d\mu(x) \,, \tag{4.3}$$

où $d\mu$ désigne la mesure de Haar de masse totale 1 sur $\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{C})$. On notera simplement $\pi_* \overline{\mathcal{L}}$ le fibré vectoriel hermitien $(\pi_* \mathcal{L}, \| \; \|_{L^2})$ sur S. Toute cette construction est compatible, en un sens évident, aux extensions du corps de nombres K.

THÉORÈME 4.2. i) *La hauteur sur $A(\overline{\mathbb{Q}})$ définie par le fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ sur le modèle $\mathcal{A}$ de A coïncide avec la hauteur de Néron-Tate associée à L.*

ii) *Le fibré vectoriel hermitien $\pi_* \overline{\mathcal{L}}$ est semi-stable de pente*

$$\widehat{\mu}\,(\pi_* \overline{\mathcal{L}}) = -\frac{1}{2}\, h(A) + \frac{1}{4} \log \frac{\chi(A, L)}{(2\pi)^g} \,. \tag{4.4}$$

L'assertion i) découle par exemple de [Fa-W], II.2, ou de [M-B2], III.3.3 et III.4.4. En effet, $\overline{\mathcal{L}}$ satisfait au théorème du cube en tant que fibré en droites hermitien sur $\mathcal{A}$.

Pour établir la semi-stabilité de $\pi_* \overline{\mathcal{L}}$, considérons le groupe de Mumford $K(L)$, c'est-à-dire le sous-groupe fini de $A(\overline{\mathbb{Q}})$ formé des points x tel qu'il existe un isomorphisme de fibrés en droites sur A

$$\tau_x^* L \simeq L \,, \tag{4.5}$$

où τ_x désigne la translation $y \mapsto x + y$ sur A. Les isomorphismes (4.5) déterminent une représentation projective de $K(L)$ sur $H^0(A, L)$. D'après Mumford [Mu1], §1, Theorem 2, cette représentation est irréductible. Par ailleurs, grâce à la Proposition A.2, nous pouvons remplacer K par une extension de degré fini quelconque, et donc supposer que les points de $K(L)$ sont définis sur K. Si $P \in K(L)$, nous noterons encore τ_P le morphisme de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$ qui induit τ_P sur $A = \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Comme $\overline{\mathcal{L}}$ satisfait au théorème du cube, après avoir si nécessaire remplacé K par une extension de degré fini, on voit que, pour tout $P \in K(L)$, il existe un isomorphisme isométrique de fibrés en droites hermitiens sur $\mathcal{A}$:

$$\tau_P^* \overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}. \tag{4.6}$$

Ces isomorphismes déterminent une représentation projective de $K(L)$ dans le groupe des automorphismes isométriques de $\pi_* \overline{\mathcal{L}}$, qui relève celle sur $H^0(A, L)$. La semi-stabilité de $\pi_* \overline{\mathcal{L}}$ découle alors de la proposition A.3, appliquée au groupe engendré par l'image de cette représentation projective.

L'expression (4.4) pour la pente de $\pi_* \overline{\mathcal{L}}$ a été établie lorsque $\chi(A, L) = 1$ par Moret-Bailly [M3], qui s'appuie sur les résultats de sa monographie [M1] et sur la théorie des fonctions thêta. Elle est prouvée en général dans [Bo2], (4.1.22), au moyen du théorème de Riemann-Roch arithmétique de Gillet-Soulé ([G-S]; voir aussi l'exposé à ce séminaire [Bo1]).

Grâce aux travaux de Moret-Bailly [M-B1], le théorème 4.2 peut s'étendre à la situation où A n'admet pas bonne réduction. Nous renvoyons à [Bo2], 4.3.1-2 pour des énoncés précis, et, pour éviter quelques lourdeurs, nous nous limitons dans cet exposé au cas de bonne réduction.

L'assertion ii) du théorème 4.2 nous permettra d'éviter, lors de la démonstration du théorème des périodes, le recours à la théorie classique des fonctions thêta. Soulignons toutefois le lien étroit entre cette assertion et cette théorie: l'irréductibilité de l'action du groupe $K(L)$, sur laquelle repose la semi-stabilité de $\pi_* \overline{\mathcal{L}}$, constitue aussi le cœur de la théorie algébrique des fonctions thêta ([Mu1]); quant à l'égalité (4.4), c'est un avatar de l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Riemann, qui montre que les Thetanullwerte définissent des formes modulaires de Siegel (*cf.* [MB1,3]; rappelons qu'avec les notations du théorème 4.2, si σ est un plongement de K dans $\mathbb{C}$ et τ une matrice des périodes de $\mathcal{A}_\sigma$ associée à une base symplectique convenable de $H_1(\mathcal{A}_\sigma, \mathbb{Z})$, le vectoriel complexe $\pi_* \mathcal{L}_\sigma$ se décrit naturellement en termes de Thetanullwerte de τ, tandis que l'évaluation en τ d'une forme modulaire de Siegel de poids k définit un élément de la droite vectorielle $\omega^{\otimes k}_{\mathcal{A}/\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K, \sigma}$).

4.3. Pentes et morphismes de fibrés vectoriels hermitiens

4.3.1. Soient K un corps de nombres, $\overline{E}$, $\overline{F}$ deux fibrés vectoriels hermitiens de rang non nul sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, et $\varphi : E \to F$ un morphisme non nul de $\mathcal{O}_K$-modules. Pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbb{C}$, soit $\|\varphi\|_\sigma$ la norme de l'application φ_σ entre les espaces vectoriels complexes hermitiens $\overline{E}_\sigma$ et $\overline{F}_\sigma$.

L'énoncé suivant découle aisément de la définition des polygones canoniques et des pentes des fibrés vectoriels hermitiens (*cf.* Appendice A.1):

PROPOSITION 4.3. 1) *Si $\varphi_K : E_K \to F_K$ est injective, alors*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \log \|\varphi\|_\sigma . \tag{4.7}$$

2) *Si $\varphi_K : E_K \to F_K$ est surjective, alors*

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}_{\min}(\overline{F}) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \log \|\varphi\|_\sigma \tag{4.8}$$

et

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}) \leq \widehat{\deg}_n \overline{F} - (\operatorname{rg} F - 1)\, \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) + \frac{\operatorname{rg} F - 1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \log \|\varphi\|_\sigma . \tag{4.9}$$

4.3.2. Dans la pratique, il est utile de disposer d'une généralisation de la proposition précédente, dans laquelle ce n'est pas le fibré vectoriel F qui est équipé d'une structure hermitienne, mais seulement chacun des sous-quotients successifs associés à une filtration de F. (De telles données ont déjà été considérées, dans un contexte analogue, par L. Lafforgue [L].)

Soient donc $\overline{E} = (E, \| \ \|)$ un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ et F un fibré vectoriel sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Soit en outre

$$F = F_N \supset F_{N-1} \supset \ldots \supset F_1 \supset F_0 = 0$$

une filtration de F par des sous-fibrés vectoriels, *i.e.* par des sous-$\mathcal{O}_K$-modules tels que chacun des quotient $G_i := F_i/F_{i-1}$, $i = 1, \ldots, N$, soit sans torsion, et soit $\| \ \|_i$ une structure hermitienne sur G_i, $i = 1, \ldots, N$. On note $\overline{G_i}$ le fibré vectoriel hermitien $(G_i, \| \ \|_i)$ et φ_i l'application composée

$$\varphi^{-1}(F_i) \xrightarrow{\varphi} F_i \to F_i/F_{i-1} = G_i .$$

Si σ est un plongement de K dans $\mathbb{C}$, on note enfin $\|\varphi_i\|_\sigma$ la norme de l'application $\varphi_{i,\sigma}$ entre les espaces vectoriels complexes hermitiens $(\varphi^{-1}(F_i)_\sigma, \|\ \|)$ et $\overline{G}_{i,\sigma}$.

L'énoncé suivant se déduit alors de la Proposition 4.3, 1):

PROPOSITION 4.4. *Si $\varphi_K : E_K \to F_K$ est injective, alors*
(4.10)

$$\widehat{\deg}_n(\overline{E}) \leq \sum_{i=1}^{N} (\operatorname{rg} \varphi^{-1}(F_i) - \operatorname{rg} \varphi^{-1}(F_{i-1})) \left(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{G}_i) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \log \|\varphi_i\|_\sigma \right).$$

Lors des applications de la proposition 4.4, la filtration $(F_i)_{0 \leq i \leq N}$ est souvent construite à partir d'une suite

$$F = F^N \xrightarrow{p_{N-1}} F^{N-1} \to \cdots \to F^i \xrightarrow{p_{i-1}} F^{i-1} \to \cdots \to F^1 \xrightarrow{p_0} F^0 = 0$$

de morphismes surjectifs $(p_i)_{0 \leq i \leq N-1}$ entre des $\mathcal{O}_K$-modules projectifs de type fini $(F^i)_{0 \leq i \leq N}$: on considère les morphismes composés $q_i : F^N \to F^i$ définis par $q_N = \mathrm{id}$ et $q_{i-1} = p_{i-1} \circ q_i$ $(1 \leq i \leq N)$, et l'on pose $F_i = \ker q_{N-i}$. Le sous-quotient G_i s'identifie alors à $\ker p_{N-i}$ $(1 \leq i \leq N)$, $\varphi^{-1}(F_i)$ coïncide avec $\ker q_{N-i} \circ \varphi$ et φ_i avec la restriction de $q_{N-i+1} \circ \varphi$.

5. ESQUISSE DE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DES PÉRIODES

5.1. De la proposition clé au théorème des périodes

5.1.1. Soient A une variété abélienne de dimension $g \geq 2$ définie sur un corps de nombres K et L un fibré en droites ample symétrique sur A. Ces données permettent de définir la hauteur $h(F)$ d'un sous-vectoriel F du K-vectoriel t_A de la manière suivante.

Soit K' une extension de degré fini de K sur laquelle A admette réduction semi-stable, et soient $\pi : \mathcal{A} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}$ un modèle semi-abélien de A et $\varepsilon : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'} \to \mathcal{A}$ sa section nulle. Le $\mathcal{O}_{K'}$-module projectif de type fini

$$t_{\mathcal{A}} := \varepsilon^* T_{\mathcal{A}/\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}}$$

admet une structure hermitienne naturelle, définie par les métriques $\| \|_{L_\sigma}$, σ décrivant les plongements de K' dans $\mathbb{C}$ (*cf.* 2.1.2). On peut alors considérer le fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathcal{F}}$ sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}$ défini par le $\mathcal{O}_{K'}$-module $\mathcal{F} := t_{\mathcal{A}} \cap (F \otimes_K K')$ muni des restrictions de ces métriques, puis poser:

$$h(F) = -\widehat{\deg}_n \overline{\mathcal{F}} .$$

C'est un réel indépendant des choix de K' et $\mathcal{A}$ et, pour toute extension K'' de degré fini de K, on définit de même la hauteur d'un sous-vectoriel F du K''-vectoriel $t_{A_{K''}}$.

5.1.2. Nous pouvons maintenant formuler l'énoncé technique qui se trouve au cœur de la démonstration du théorème des périodes (*cf.* [M-W3], §9). Pour nous y référer commodément, nous l'appellerons "proposition clé".

PROPOSITION 5.1. *Soient K' une extension de degré fini de K, W un hyperplan du K'-vectoriel $t_{A_{K'}}$, σ_0 un plongement de K' dans $\mathbb{C}$ et γ un élément non nul de $\Gamma_{A_{\sigma_0}} \cap W_{\sigma_0}$. Posons*

$$d = [K : \mathbb{Q}] ,$$

$$h = \max(1, h(A), \log \deg_L A, h(W)) ,$$

et

$$r = \max(1, \|\gamma\|^2_{L_{\sigma_0}}) .$$

Il existe une sous-variété abélienne non-nulle B de A_σ telle que

$$t_B \subset W_{\sigma_0} \tag{5.1}$$

et

$$\deg_{L_{\sigma_0}} B \leq C(g) \max(\deg_L A, h\, r\, d)^{g-1} \tag{5.2}$$

où $C(g)$ désigne une constante ne dépendant que de g.

Indiquons rapidement comment le théorème des périodes se dérive de cette proposition.

Tout d'abord, on en déduit la variante suivante. Soit $(\lambda(g))_{g \geq 2}$ une suite de réels telle que $\lambda(2) > 1$ et que, pour tout $g \geq 3$, $\lambda(g) > g - 1 + (4g - 3)\,\lambda(g - 1)$. Par exemple $\lambda(g) = 4^{g-1}\, g!$ convient.

PROPOSITION 5.2. *Avec les notations de la proposition* 5.1, *il existe une sous-variété abélienne B de A_{σ_0} telle que*

$$t_B \subset W_{\sigma_0}\,, \tag{5.3}$$

$$\gamma \in t_B \tag{5.4}$$

et

$$\deg_{L_{\sigma_0}} B \leq C'(g) \max(\deg_L A, h\,r\,d)^{\lambda(g)}\,. \tag{5.5}$$

où $C(g)$ désigne une constante ne dépendant que de g.

On remarquera que l'information "qualitative" donnée par les relations (5.3) et (5.4) implique à elle seule que $t_{A_{\{\gamma\}}}$ est le plus petit sous-vectoriel de $t_{A_{\sigma_0}}$ défini sur $\overline{K}$, comme l'affirme le théorème du sous-groupe analytique de Wüstholz (*cf.* 2.3.1).

La proposition 5.2 se démontre par récurrence sur la dimension g de A. Si $g = 2$, elle découle immédiatement de la proposition 5.1. Lorsque $g > 2$, soit B_0 la sous-variété abélienne produite par le lemme 1. Si $\gamma \in t_{B_0}$, la proposition 5.2 est démontrée. Sinon, on considère la sous-variété abélienne $B_0^\perp$ complémentaire orthogonal[2] de B_0 dans A_{σ_0} relativement à L_{σ_0}. Les variétés abéliennes B_0 et $B_0^\perp$ sont définies sur un corps de nombres de degré contrôlé (Proposition A.2). De plus, comme $\dim B_0^\perp < \dim A$ (car $B_0 \neq 0$), on peut par récurrence appliquer la proposition 5.2 à $B_0^\perp$, à sa période définie comme la projection orthogonale de $\chi(B_0, L)^2\,\gamma$ sur $t_{B_0^\perp}$ et à l'hyperplan $W_{\sigma_0} \cap t_{B_0^\perp}$ (qui est défini sur un corps de nombres). On obtient ainsi une sous-variété abélienne B_1 de $B_0^\perp$, et l'on peut vérifier que $B = B_0 + B_1$ satisfait aux conclusions de la proposition 5.2 (*cf.* [M-W3], pp.451-452 pour les détails).

La dérivation du théorème des périodes à partir de la proposition 5.2 fait appel aux résultats suivants:

PROPOSITION 5.3. i) *Pour toute sous-variété-abélienne B de $A_{\overline{\mathbb{Q}}}$, on a*

$$h(t_B) \leq C_3(g) \max(1, h(A), \log \deg_L A, \log \deg_L B)\,, \tag{5.6}$$

[2] Si $\varphi_{L_{\sigma_0}} : A_{\sigma_0} \to \widehat{A}_{\sigma_0}$ désigne la polarisation définie par L_{σ_0} et ${}^t i : \widehat{A}_{\sigma_0} \to \widehat{B}_0$ le morphisme dual à l'inclusion $i : B_0 \to A_{\sigma_0}$, $B_0^\perp$ est défini comme la composante neutre du noyau de ${}^t i \circ \varphi_{L_{\sigma_0}}$.

où $C_3(g)$ désigne une constante dans $\mathbb{R}_+^*$ ne dépendant que de g.

ii) *Pour toute extension K' de degré fini de K et tout sous-vectoriel F de $t_{A_{K'}}$, on a*

$$h(F) \geq -C_4(g)\max(1, h(A), \log \deg_L A)\,, \tag{5.7}$$

où $C_4(g)$ désigne une constante dans $\mathbb{R}_+^*$ ne dépendant que de g.

Dans la suite, nous noterons $C_5(g), C_6(g), \ldots$ des constantes dans $\mathbb{R}_+^*$ ne dépendant que de g.

L'assertion i) de la proposition 5.3 est une variante intrinsèque du "Tangent Space Lemma" de [M-W3], §8. Nous en donnons une démonstration dans l'appendice D. L'assertion ii) est équivalente à une majoration de la forme

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{t}_{\mathcal{A}}) \leq C_5(g)\max(1, h(A), \log \deg_L A)$$

et sera établie au §5.3.4.

Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème des périodes. Pour le démontrer, nous pouvons supposer que la codimension c de $A_{\{\gamma\}}$ dans A_σ est non nulle. La proposition 5.3 appliquée à la sous-variété abélienne $A_{\{\gamma\}}$ de A_σ et la proposition B.5 montrent alors qu'il existe une extension de degré fini K' de K et un prolongement $\sigma_0 : K' \to \mathbb{C}$ de σ tel que

$$t_{A_{\{\gamma\}}} = \bigcap_{i=1}^{c} W_{i_{\sigma_0}}$$

et que, si l'on pose

$$h_i = \max(1, h(A), \log \deg_L A, h(W_i))\,,$$

alors on ait:

$$\max_{1\leq i\leq c} h_i \leq C_6(g)\max(1, h(A), \log \deg_L A, \log \deg_{L_\sigma} A_{\{\gamma\}})\,.$$

La proposition 5.2 appliquée à la période γ et à chacun des hyperplans W_i fournit alors des sous-variétés abéliennes B_i de A_σ telles que, pour tout $i \in \{1, \ldots, c\}$,

$$\deg_{L_\sigma} B_i \leq C_2(g)\max(\deg_L A, h_i\, d\, r)^{\lambda(g)}$$

où $r = \max(1, \|\gamma\|^2_{L_\sigma})$, et que $A_{\{\gamma\}}$ soit la composante neutre de $\bigcap_{i=1}^{c} B_i$. Le degré de $A_{\{\gamma\}}$ est donc majoré par le produit des degrés des B_i (voir par exemple [M-W3] Lemma 1.2), et l'on obtient ainsi

$$\deg_{L_\sigma} A_{\{\gamma\}} \leq$$
$$C_7(g)\max(\deg_L A, \max(1, h(A), d\, r \log(\deg_L A), d\, r \log(\deg_{L_\sigma} A_{\{\gamma\}}))^{(g-1)\lambda(g)}\,.$$

Quitte à accroître l'exposant, on peut éliminer le terme logarithmique $\log(\deg_{L_\sigma} A_{\{\gamma\}})$ du membre de droite de cette inégalité. Ainsi, pour tout choix de $\kappa > 3(g-1)\,\lambda(g)$, on obtient la majoration suivante, qui établit le théorème des périodes:

$$\deg_{L_\sigma} A_{\{\gamma\}} \leq C_8(g) \max(\deg_L A, h(A), d, \|\gamma\|^2_{L_\sigma})^\kappa . \tag{5.8}$$

5.2. Démonstration de la proposition clé: le lemme des zéros

Plaçons-nous sous les hypothèses de la proposition clé. Pour l'établir, nous pouvons supposer que γ est primitif, *i.e.*, qu'il ne peut s'écrire $n\gamma'$ où $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, et $\gamma' \in \Gamma_{A_{\sigma_0}}$.

Pour tout point Q de $A_{\sigma_0}(\mathbb{C})$ et tout $i \in \mathbb{N}$, nous noterons $V(Q, W_{\sigma_0}, i)$ le "voisinage infinitésimal d'ordre i de Q le long de W_{σ_0}", défini ainsi: si $i = 0$, $V(Q, W_{\sigma_0}, i)$ est le sous-schéma réduit de A_{σ_0} défini par Q; si $Q = 0$ et $i = 1$, $V(0, W_{\sigma_0}, 1)$ est le sous-schéma de longueur g du voisinage infinitésimal d'ordre 1 de 0 défini par W_{σ_0}; en général, $V(Q, W_{\sigma_0}, i)$ est l'image schématique de $\{Q\} \times V(0, W_{\sigma_0}, 1)^i$ par l'application somme de $A_{\sigma_0}^{i+1}$ vers A_{σ_0}. Si $(X_1, \ldots, X_{g-1})$ désigne une base des champs de vecteurs invariants par translation sur A_{σ_0} dont la valeur en 0 appartient à W_{σ_0}, $V(Q, W_{\sigma_0}, i)$ peut encore être décrit comme le sous-schéma de support Q de A_{σ_0} dont le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ est défini par

$$f \in \mathcal{I} \Leftrightarrow (\forall (j_1, \ldots, j_{g-1}) \in \mathbb{N}^{g-1} \ , \ j_1 + \ldots + j_{g-1} \leq i \Rightarrow X_1^{i_1} \ldots X_{g-1}^{i_{g-1}} f(Q) = 0) .$$

La première étape de la preuve de la proposition clé consiste à établir l'énoncé suivant, qui illustre ce qu'on appelle en transcendance la "méthode de Baker".

LEMME 5.4. *Soit D, M et N trois entiers ≥ 2 et soient*

$$P := \exp_{A_{\sigma_0}}\left(\frac{\gamma}{N}\right) \qquad (\in A_{\sigma_0}(\mathbb{C}))$$

et

$$T := V(0, W_{\sigma_0}, 2g\,M) \cup \bigcup_{i=0}^{N-1} V(iP, W_{\sigma_0}, gM) .$$

Il existe une constante $C_9(g) \in \mathbb{R}_+^*$ telles que, si les conditions suivantes sont réalisées:

$$\begin{cases} M \geq C_9(g)\; D\,r\,, \\ D^g \deg_L A \geq C_9(g)\, M^{g-1} \\ M^2 \geq C_9(g)\, N^{2g}\, D\, d\, r(D + M\,h + \log N) \end{cases} \tag{5.9}$$

alors le morphisme de restriction

$$H^0(A_{\sigma_0}, L_{\sigma_0}^{\otimes D}) \to H^0(T, L_{|T}^{\otimes D}) \tag{5.10}$$

n'est pas injectif.

Nous montrerons ce lemme au §5.3 en nous appuyant sur la proposition 4.4.

Le lemme des zéros 4.1, appliqué à la variété abélienne A_{σ_0} muni du fibré ample $L_{\sigma_0}^{\otimes D}$ et au sous-schéma

$$S = \bigcup_{i=0}^{N-1} V(iP, W_{\sigma_0}, M)$$

donne alors:

COROLLAIRE 5.5. *Si les conditions* (5.9) *sont satisfaites, il existe une sous-variété abélienne B de A_{σ_0}, de codimension $c > 0$, telle que*

$$\ell(p(S)) \ \deg_{L_{\sigma_0}} B \leq D^c \ \deg_L A\,, \tag{5.11}$$

où p désigne l'application quotient de A_{σ_0} vers A_{σ_0}/B.

Observons que, si $B = 0$, la majoration (5.11) devient

$$\ell(S) \leq D^g \ \deg_L A$$

et que

$$\ell(S) = N \binom{g-1+M}{g-1} \geq N \ \frac{M^{g-1}}{(g-1)!}\,.$$

Par ailleurs, si $t_B \not\subset W_{\sigma_0}$, alors $p(S)$ contient le voisinage infinitésimal d'ordre M de 0 dans A_{σ_0}/B, et donc

$$\ell(p(S)) \geq \binom{c+M}{c} \geq \frac{M^c}{c!}\,.$$

Enfin, si $t_B \subset W_{\sigma_0}$, $p(S)$ contient le voisinage infinitésimal d'ordre M de 0 le long d'un hyperplan de $t_{A_{\sigma_0}/B}$ et donc

$$\ell(p(S)) \geq \binom{c-1+M}{c-1} \geq \frac{M^{c-1}}{(c-1)!}\,;$$

la majoration (5.11) donne alors

$$\deg_{L_{\sigma_0}} B \leq \frac{(c-1)!}{M^{c-1}}\, D^c \deg_L A\,.$$

On obtient ainsi:

LEMME 5.6. *Il existe des constantes $C_{10}(g)$ et $C_{11}(g)$ dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que, avec les notations du corollaire* 5.5, *les conditions*

$$N\,M^{g-1} \geq C_{10}(g)\,D^g \deg_L A \tag{5.12}$$

et

$$M \geq C_{10}(g)\,D \deg_L A \tag{5.13}$$

impliquent

$$B \neq 0 \quad et \quad t_B \subset W_\sigma$$

et

$$\chi(B,L) \leq C_{11}(g)\,D \deg_L A\,. \tag{5.14}$$

On obtient finalement la proposition clé en observant que les conditions (5.9), (5.12) et (5.13) sont compatibles et peuvent être satisfaites avec N ne dépendant que de g et avec, comme valeurs de D et M, les parties entières de

$$D^* = \delta(g)\,(\deg_L A)^{-1} \max(\deg_L A, h\,r\,d)^{g-1}$$

et

$$M^* = \mu(g)\,(\deg_L A)^{-1} \max(\deg_L A, h\,r\,d)^{g}\,,$$

où $\delta(g)$ et $\mu(g)$ ne dépendent que de g.

5.3. Démonstration de la proposition clé: la méthode de Baker

Cette section est consacrée à la preuve du lemme 5.4. Pour simplifier, nous nous limiterons au cas où la variété abélienne A admet bonne réduction potentielle. La démonstration peut en fait s'étendre au cas général au moyen de la généralisation de la proposition 4.2, reposant sur les travaux de Moret-Bailly, que nous avons mentionnée à la fin du §4.2.

5.3.1. Reprenons donc les notations de la proposition clé et du lemme 5.4, et supposons que A admette bonne réduction potentielle. Nous pouvons supposer que K' est suffisamment grand pour que $A_{K'}$ ait bonne réduction et que P soit défini sur K'. Soit alors $\pi : \mathcal{A} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}$ un schéma abélien et $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré en droites hermitien sur $\mathcal{A}$, qui constituent des modèles de A et L comme en 4.2. Pour tout $(n,i) \in \mathbb{N}^2$, nous noterons ε_{nP} la section de π définie par nP et $\mathcal{V}(nP, W, i)$ la fermeture schématique dans $\mathcal{A}$ du voisinage infinitésimal d'ordre i de nP le long de W. Enfin, nous poserons

$$\overline{E} = \pi_* \overline{\mathcal{L}}^{\otimes D}$$

(*cf.* 4.2) et

$$F = \pi_*(\mathcal{L}^{\otimes D}_{|\mathcal{V}(0,W,2gM)}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{N-1} \pi_*(\mathcal{L}^{\otimes D}_{|\mathcal{V}(iP,W,gM)}), \tag{5.15}$$

(on a noté $\mathcal{L}_{|\mathcal{V}(\ldots)}$ pour $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}(\ldots)}$). La restriction des sections de $\mathcal{L}^{\otimes D}$ sur $\mathcal{A}$ aux sous-schémas $\mathcal{V}(n, P, W, i)$ définit un morphisme de $\mathcal{O}_{K'}$-modules

$$\varphi : E \to F. \tag{5.16}$$

Par construction, le morphisme de $\mathbb{C}$-vectoriels

$$\varphi_{\sigma_0} : E_{\sigma_0} \to F_{\sigma_0}$$

s'identifie à l'application (5.10). L'injectivité de cette dernière est donc équivalente à celle de

$$\varphi_K : E_K \to F_K.$$

Nous allons utiliser la proposition 4.4 pour obtenir une condition suffisante de non-injectivité de φ_K. Pour cela, il nous faut préciser une filtration de F et des structures hermitiennes sur les sous-quotients associés. Nous allons définir celle-là au moyen d'une suite de morphismes surjectifs de $\mathcal{O}_K$-modules, de la façon décrite à la fin du §4.3.

Nous posons donc

$$F^0 = \{0\} \tag{5.17}$$

$$F^{k+1} = \pi_*(\mathcal{L}^{\otimes D}_{|\mathcal{V}(0,W,k)}) \text{ pour } k \in \{0,\ldots,2gM\}, \tag{5.18}$$

$$F^{2gM+2+\ell} = \pi_*(\mathcal{L}^{\otimes D}_{|\mathcal{V}(0,W,2gM)}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{N-1} \pi_*(\mathcal{L}^{\otimes D}_{|\mathcal{V}(iP,W,\ell)}) \text{ pour } \ell \in \{0,\ldots,gM\}. \tag{5.19}$$

Ainsi $F^{3gM+2} = F$, et l'on dispose de morphismes "de restriction" surjectifs évidents $p_i : F^{i+1} \to F^i$, pour $i \in \{0, \dots, 3gM+1\}$. On pose de plus

$$\mathcal{N} = 3gM + 2\,,$$

$$q_{\mathcal{N}} = \mathrm{id}_F$$

et, pour tout $i \in \{0, \dots, \mathcal{N}-1\}$,

$$q_i = p_i \circ \dots \circ p_{\mathcal{N}-1} : F \to F^i\,.$$

On définit enfin une filtration

$$F_0 = \{0\} \subset F_1 \subset \dots \subset F_{\mathcal{N}} = F \tag{5.20}$$

par

$$F_i = \ker q_{\mathcal{N}-i}\,.$$

Le sous-quotient $G_{\mathcal{N}-k} := F_{\mathcal{N}-k}/F_{\mathcal{N}-k-1}$ s'identifie alors à $\ker p_k$, et donc, d'après la lissité de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{O}_{K'}$, à

$$\varepsilon_0^* \mathcal{L}^{\otimes D} \otimes S^k \overset{\vee}{\mathcal{W}} \quad \text{si } k \in \{0, \dots, 2gM\} \tag{5.21}$$

et à

$$\bigoplus_{i=1}^{N-1} \varepsilon_{iP}^* \mathcal{L}^{\otimes D} \otimes S^\ell \overset{\vee}{\mathcal{W}} \quad \text{si } k = 2gM + 1 + \ell \quad \text{avec } \ell \in \{0, \dots, gM\}\,, \tag{5.22}$$

où, conformément à la notation introduite en 5.1.1, $\mathcal{W}$ désigne le $\mathcal{O}_{K'}$-module $t_{\mathcal{A}} \cap W$. Ce module admet en fait une structure naturelle de fibré vectoriel hermitien $\overline{\mathcal{W}}$ déterminée par les "formes de Riemann" des L_σ (*cf.* 5.1.1). Les structures hermitiennes sur $\overline{\mathcal{L}}$ et $\overline{\mathcal{W}}$ déterminent, par passage au dual, puissances tensorielle et symétrique[3], produit tensoriel et somme directe, des métriques hermitiennes sur les $\mathcal{O}_{K'}$-modules (5.21) et (5.22), et donc sur les sous-quotients G_i, $i \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$. Nous noterons $\overline{G}_i$ les fibrés vectoriels hermitiens ainsi définis.

5.3.2. Soit, pour tout $i \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$,

$$\varphi_i = q_{\mathcal{N}-i+1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(F_i) = \ker q_{\mathcal{N}-i} \to G_i = \ker p_{\mathcal{N}-i}\,.$$

[3] Nous utilisons la convention décrite en A.4 pour la structure hermitienne d'une puissance symétrique.

D'après la proposition 4.4, pour établir la non-injectivité de φ_K lorsque des conditions de la forme (5.9) sont satisfaites, il suffit de montrer que, sous cette dernière hypothèse, si φ_K est injective, alors

(5.23)
$$\widehat{\deg}_n \overline{E} > \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} (\operatorname{rg} \varphi^{-1}(F_i) - \operatorname{rg} \varphi^{-1}(F_{i-1})) \left(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{G}_i) + \frac{1}{[K':\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K' \to \mathbb{C}} \log \|\varphi_i\|_\sigma \right) .$$

Pour cela, nous allons évaluer les divers termes qui apparaissent dans cette inégalité, en supposant φ_K injective.

La valeur de son membre de gauche est fournie par les expressions (2.2) et (4.2) du rang et de la pente de $\overline{E}$:

$$\widehat{\deg}_n \overline{E} = D^g \chi(A, L) \left(-\frac{1}{2} h(A) + \frac{1}{4} \log \frac{D^g \chi(A, L)}{(2\pi)^g} \right) . \tag{5.24}$$

La majoration de son membre de droite va reposer sur les deux lemmes suivants, dont nous esquissons plus loin les démonstrations.

LEMME 5.7. *Il existe une constante $C(g)$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\widehat{\mu}_{\max}(S^n \overset{\vee}{\overline{\mathcal{W}}}) \leq C_{12}(g)\, n\, h . \tag{5.25}$$

Pour tout plongement $\sigma : K' \to \mathbb{C}$, posons $\widetilde{\rho}_\sigma = \min(1, \rho(A_\sigma, L_\sigma))$.

LEMME 5.8. *Il existe des constantes $C_{13}(g)$ et $C_{14}(g)$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout plongement $\sigma : K' \to \mathbb{C}$ et tout $k \in \{0, \dots, \mathcal{N} - 1\}$:*

- *si $k \in \{0, \dots, 2gM\}$, alors*

$$\|\varphi_{\mathcal{N}-k}\|_\sigma^2 \leq \pi^{-g} \chi(A, L) \frac{(k+g)!}{k!} e^{\pi D \widetilde{\rho}_\sigma^2} \widetilde{\rho}_\sigma^{-2(k+g)} ; \tag{5.26}$$

- *si $k = 2gM + 1 + \ell$ avec $\ell \in \{0, \dots, gM\}$, alors*

$$\|\varphi_{\mathcal{N}-k}\|_\sigma^2 \leq (N-1) \pi^{-g} \chi(A, L) \frac{(\ell+g)!}{\ell!} e^{\pi D \widetilde{\rho}_\sigma^2} \widetilde{\rho}_\sigma^{-2(\ell+g)} ; \tag{5.27}$$

- *si $k = 2gM + 1 + \ell$ avec $\ell \in \{0, \dots, gM\}$, si σ et σ_0 coïncident sur le corps de définition de P et si $M \geq C_{13}(g)\, D \|\gamma\|_{\sigma_0}^2$,*

$$\|\varphi_{\mathcal{N}-k}\|_\sigma^2 \leq (N-1) \pi^{-g} \chi(A, L) \frac{(\ell+g)!}{\ell!} e^{\pi D \widetilde{\rho}_\sigma^2 - C_{14}(g) \frac{M^2}{D \|\gamma\|_{L_{\sigma_0}}^2}} \widetilde{\rho}_\sigma^{-2(\ell+g)} . \tag{5.28}$$

Comme les points iP sont de torsion, leur hauteur de Néron-Tate relativement à L est nulle, et donc, d'après la proposition 4.2, i),

$$\widehat{\deg}_n\, \varepsilon_{iP}^* \overline{\mathcal{L}}^{\otimes D} = 0\,.$$

Les relations (A.2) et (A.3) jointes à la majoration (5.25) donnent alors:

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{G}_{\mathcal{N}-k}) \leq C_{15}(g)\, k\, h \quad \text{si } k \in \{0, \ldots, 2gM\} \tag{5.29}$$

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{G}_{\mathcal{N}-k}) \leq C_{16}(g)\, \ell\, h \quad \text{si } k = 2gM+1+\ell, \text{ avec } \ell \in \{0, \ldots, gM\}\,. \tag{5.30}$$

Par ailleurs, comme φ est injective, on a

$$\varphi^{-1}(F_i) - \operatorname{rg} \varphi^{-1}(F_{i-1}) \leq \operatorname{rg} G_i\,, \tag{5.31}$$

tandis que

$$\operatorname{rg} G_{\mathcal{N}-k} = \binom{k+g-2}{g-2} \quad \text{si } k \in \{0, \ldots, 2gM\}\,, \tag{5.32}$$

$$\operatorname{rg} G_{\mathcal{N}-k} = (N-1)\binom{\ell+g-2}{g-2} \quad \text{si } k = 2gM+1+\ell, \text{ avec } \ell \in \{0, \ldots, gM\}\,. \tag{5.33}$$

De plus, comme F_{gM+1} est le noyau de

$$q_{2gM+1} : \pi_* \mathcal{L}^{\otimes D} \to \pi_*(\mathcal{L}^{\otimes D}_{|\mathcal{V}(0,W,2gM)})\,,$$

il vient:

$$\operatorname{rg} F_{gM+1} \geq D^g \chi(A, L) - \binom{2gM+g-1}{g-1}\,. \tag{5.34}$$

Enfin, les majorations (5.26) et la proposition 3.4 montrent que, si $k \in \{0, \ldots, 2gM\}$, alors

$$\frac{1}{[K' : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K' \to \mathbb{C}} \log \|\varphi_{\mathcal{N}-k}\|_\sigma \leq C_{17}(g)\, (D + (k+1)h)\,. \tag{5.35}$$

De même, comme le degré sur $\mathbb{Q}$ du corps de définition de P, qui est un point de N-torsion de A, est au plus égal à $N^{2g}\,d$, on déduit de (5.26) et (5.27), que si $k = 2gM + 1 + \ell$ avec $\ell \in \{0, \dots, gM\}$, alors

(5.36)

$$\frac{1}{[K':\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K' \to \mathbb{C}} \log \|\varphi_{N-k}\|_\sigma \leq C_{18}(g)\,(D + (\ell+1)h + \log N) - \frac{1}{2N^{2g}d} C_{14}(g) \frac{M^2}{D\|\gamma\|^2},$$

pourvu que

$$M \geq C_{13}(g)\,D\,r\,. \tag{5.37}$$

Les inégalités (5.29-34) montrent alors que, si la condition (5.37) est satisfaite, le membre de droite de (5.23) est majoré par

$$\begin{aligned} &C_{17}(g) \sum_{k=0}^{2gM} \binom{k+g-2}{g-2} (D + (k+1)h) + C_{18}(g)\,(N-1) \\ &\sum_{\ell=0}^{gM} \binom{\ell+g-2}{g-2} (D + (\ell+1)h + \log N) \\ &- \frac{1}{2} C_{14}(g)\,(N-1) \left[D^g\,\chi(A,L) - \binom{2gM+g-1}{g-1} \right] \frac{M^2}{N^{2g}Ddr}, \end{aligned}$$

donc par

$$\begin{aligned} &C_{19}(g)\ N\,M^{g-1}\,(D + M\,h + \log N) - \\ &C_{20}(g)\,(N-1)\,[D^g\,\chi(A,L) - C_{21}(g)\,M^{g-1}]\,\frac{M^2}{N^{2g}Ddr}\,. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Si nous supposons que $N \geq 2$ et que

$$D^g\,\chi(A,L) \geq \frac{1}{2} C_{22}(g)\,M^{g-1}, \tag{5.39}$$

(5.38) est à son tour majoré par

$$C_{23}(g)\,N\,D^g\,\chi(A,L) \left(D + M\,h + \log N - C_{24}(g)\,\frac{M^2}{N^{2g}Ddr} \right).$$

Comme, d'après (5.24), le membre de gauche de (5.23) est minoré par $-\frac{1}{2}\,h\,D^g$ $\chi(A,L)$, nous obtenons que (5.23) est alors satisfaite dès que

$$M^2 \geq C_{25}(g)\,N^{2g}\,D\,d\,r\,(D + M\,h + \log N)\,. \tag{5.40}$$

Cela termine la preuve du lemme 5.4, puisque (5.9) est la conjonction de (5.37), (5.39) et (5.40).

5.3.3. Donnons quelques indications sur la preuve du lemme 5.8. Les majorations (5.26) et (5.27) sont des avatars des inégalités de Cauchy. On les obtient par exemple en considérant une trivialisation du fibré en droites holomorphe $\exp_{A_\sigma}^* L_\sigma$ compatible avec la structure hermitienne $\| \ \|_\sigma$ de L_σ, c'est-à-dire satisfaisant à la condition suivante: si s est une section de L_σ sur un ouvert Ω de $A_\sigma(\mathbb{C})$ et f est la fonction holomorphe sur $\exp_{A_\sigma}^{-1}(\Omega)$ que lui associe cette trivialisation, on a, pour tout $z \in \exp_{A_\sigma}^{-1}(\Omega)$,

$$\|s(\exp_{A_\sigma} z)\|_\sigma = e^{-\frac{\pi}{2}\|z\|^2_{L_\sigma}} \, |f(z)| \, .$$

La majoration (5.28), qui joue un rôle central dans la preuve de la proposition clé, est plus subtile: elle affirme qu'une section s de $L^{\otimes D}$ qui admet un zéro de multiplicité $2gM$ le long de W_σ en l'origine est "très petite" ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre gM le long de W_σ en des points de la forme $\exp_{A_\sigma}\left(\frac{i\gamma}{N}\right)$. Si h est la fonction entière sur t_{A_σ} définie par s grâce à une trivialisation compatible de L, la majoration (5.28) découle des calculs conduisant à (5.26) et (5.27) et d'une forme convenable du lemme de Schwarz appliquée aux fonctions entières d'une variable complexe w définies par

$$w(z) = D\, h\,(z\,\gamma)\, ,$$

où D est le composé d'au plus gM dérivations le long de W_σ; le point crucial est que ces fonctions w ont un zéro d'ordre au moins gM en tout point entier.

Les conditions d'annulation sur des schémas non réduits tels que $V(iP, W, n)$ et l'emploi du lemme de Schwarz sont caractéristiques de la méthode de Baker.

5.3.4. Pour établir le lemme 5.7, il suffit d'après la proposition A.4 de montrer que

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overset{\vee}{\overline{\mathcal{W}}}) \leq C_{26}(g)\, h \, . \tag{5.41}$$

La preuve de (5.41) repose sur l'existence d'un morphisme de $\mathcal{O}_{K'}$-modules

$$\Sigma : (\pi_* \mathcal{L}^{\otimes 3})^{\otimes 2} \to \overset{\vee}{t}_{\mathcal{A}}\, ,$$

avatar intrinsèque des "crochets" et des "dérivées de Shimura" qui interviennent dans [Da1,2] et [M-W3] (voir aussi [Sh]).

Si s_1 et s_2 sont deux sections régulières de $\mathcal{L}^{\otimes 3}$ sur $\mathcal{A}$, telles $s_2 \neq 0$, le quotient s_1/s_2 est une fonction méromorphe sur $\mathcal{A}$, qui admet une différentielle $d(s_1/s_2)$, section méromorphe de $\Omega^1_{\mathcal{A}/\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}}$. La section méromorphe $s_2^{\otimes 2}\, d(s_1/s_2)$ de $\mathcal{L}^{\otimes 6} \otimes \Omega^1_{\mathcal{A}/\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}}$ est régulière sur $\mathcal{A}$. On définit ainsi un morphisme bilinéaire de $\mathcal{O}_{K'}$-modules:

$$[\cdot,\cdot] : \pi_* \mathcal{L}^{\otimes 3} \times \pi_* \mathcal{L}^{\otimes 3} \to \pi_* \left(\mathcal{L}^{\otimes 6} \otimes \Omega^1_{\mathcal{A}/\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}}\right).$$

Le morphisme Σ est alors défini en composant $[\cdot,\cdot]$ avec le morphisme de restriction à la section nulle

$$\pi_* \left(\mathcal{L}^{\otimes 6} \otimes \Omega^1_{\mathcal{A}/\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}}\right) \to \varepsilon_0^* \left(\mathcal{L}^{\otimes 6} \otimes \Omega^1_{\mathcal{A}/\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}}\right) \simeq \overset{\vee}{t}_{\mathcal{A}} \ .$$

Notons $p = \overset{\vee}{t}_{\mathcal{A}} \to \overset{\vee}{\mathcal{F}}$ le morphisme dual à l'inclusion de $\mathcal{F}$ dans $t_{\mathcal{A}}$. Comme $L^{\otimes 3}$ est très ample sur A, $\Sigma_{K'}$ est surjectif. Il en va donc de même de $(p \circ \Sigma)_{K'}$. La majoration (5.41) découle alors de la proposition 4.3, ii), (4.9), appliquée au morphisme $p \circ \Sigma$ entre les fibrés vectoriels hermitiens $(\pi_* \overline{\mathcal{L}}^{\otimes 3})^{\otimes 2}$ et $\overset{\vee}{\overline{\mathcal{F}}}$. En effet, la proposition 4.2, ii), appliquée au fibré en droites $\overline{\mathcal{L}}^{\otimes 3} \otimes \overline{\mathcal{L}}^{\otimes 3}$ sur $\mathcal{A} \times_{\mathcal{O}_{K'}} \mathcal{A}$ montre que

$$\widehat{\mu}_{\min}((\pi_* \overline{\mathcal{L}}^{\otimes 3})^{\otimes 2}) = -h(A) + \frac{1}{2} \log \chi(A, L) + \frac{g}{2} \log \frac{3}{2\pi},$$

tandis qu'une variante des majorations (5.26), et la proposition 3.4 donnent:

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K' \to \mathbb{C}} \log \|\Sigma\|_\sigma \leq C_{27}(g) \max(1, h(A), \log \chi(A, L)).$$

Un argument analogue, mais plus simple, établit aussi la majoration

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{t}_{\mathcal{A}}) \leq C_{24}(g) \max(1, h(A), \log \deg_L A)$$

(appliquer (4.8) à Σ). Cela démontre l'assertion ii) de la proposition 5.3.

APPENDICES

A. Fibrés vectoriels hermitiens, degré d'Arakelov et polygones canoniques

A.1. Soit $\mathcal{X}$ un schéma sur $\mathbb{Z}$, dont la fibre générique $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ est lisse. Un *fibré vectoriel hermitien* $\overline{E}$ sur $\mathcal{X}$ est une paire $(E, \| \ \|)$ formée d'un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules localement libres de rang fini E sur $\mathcal{X}$ et d'une métrique hermitienne C^{∞}, invariante par conjugaison, sur le fibré vectoriel holomorphe $E(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{X}(\mathbb{C})$.

On définit de façon évidente la somme directe $\overline{E} \oplus \overline{E}'$, le produit tensoriel $\overline{E} \otimes \overline{E}'$, le dual $\overset{\vee}{\overline{E}}$ et le déterminant $\det \overline{E}$ de tels fibrés vectoriels hermitiens sur $\mathcal{X}$, ainsi que leur image inverse par un morphisme de $\mathbb{Z}$-schémas $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ de fibres génériques lisses: $f^* \overline{E}$ est le $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$-module $f^* E$ sur $\mathcal{Y}$ muni de la métrique hermitienne qui rend isométriques les isomorphismes $(f^* E)_x \simeq E_{f(x)}$, $x \in \mathcal{Y}(\mathbb{C})$.

Le rang d'un fibré vectoriel E est noté $\operatorname{rg} E$. Un *fibré en droites hermitien* est un fibré vectoriel hermitien de rang 1.

Soit K un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers, et $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Les points complexes du $\mathbb{Z}$-schéma S ne sont autres que les plongements $\sigma : K \to \mathbb{C}$. Si $\mathcal{X}$ est un S-schéma dont la fibre générique $\mathcal{X}_K$ est lisse, la variété holomorphe des points $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ de $\mathcal{X}$ vu comme $\mathbb{Z}$-schéma s'écrit comme la réunion disjointe $\bigcup_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \mathcal{X}_{\sigma}(\mathbb{C})$ et la donnée d'une structure hermitienne sur un fibré vectoriel E sur $\mathcal{X}$ n'est autre que celle de métriques hermitiennes C^{∞}, invariantes par conjugaison, sur les fibrés vectoriels holomorphes $E_{\sigma}(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{X}_{\sigma}(\mathbb{C})$, $\sigma : K \to \mathbb{C}$.

En particulier, un fibré vectoriel $\overline{E}$ hermitien sur S n'est autre que la donnée d'un $\mathcal{O}_K$-module projectif de type fini et de métriques hermitiennes $\| \ \|_{\sigma}$, invariantes par conjugaison, sur les espaces vectoriels complexes E_{σ}, $\sigma : K \to \mathbb{C}$. La donnée de ces métriques équivaut à son tour à celle d'une structure euclidienne (resp. hermitienne) sur le complété de E à chaque place archimédienne réelle (resp. complexe) de K.

A.2. Soit donc $\overline{E}$ un tel fibré vectoriel hermitien sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres K. Lorsque $\operatorname{rg} E = 1$, le *degré d'Arakelov* de $\overline{E}$ est défini par l'égalité

$$\widehat{\deg}\, E := \log \#(E/\mathcal{O}_K\, s) - \sum_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \log \|s\|_{\sigma} ,$$

où s désigne un élément non nul quelconque de E; cette expression est en effet indépendante de s, en conséquence de la formule du produit (*cf.* [W], [A], [Sz1]).

En général, on définit le *degré d'Arakelov* de $\overline{E}$ comme

$$\widehat{\deg}\,\overline{E} := \widehat{\deg}\det\overline{E}\,,$$

puis son *degré d'Arakelov normalisé*

$$\widehat{\deg}_n\,\overline{E} := [K:\mathbb{Q}]^{-1}\,\widehat{\deg}\,\overline{E}\,,$$

et, lorsque $E \neq 0$, *sa pente* (normalisée)

$$\widehat{\mu}\,(\overline{E}) := ([K:\mathbb{Q}]\ \mathrm{rg}\,E)^{-1}\,\widehat{\deg}\,\overline{E}\,.$$

Si L est une extension de degré fini de K, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_L$, et si f : $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_L \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ est le morphisme déterminé par l'inclusion $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_L$, il vient:

$$\widehat{\deg}_n\,f^*\,\overline{E} = \widehat{\deg}_n\,\overline{E} \quad \text{et} \quad \widehat{\mu}\,(f^*\,\overline{E}) = \widehat{\mu}\,(\overline{E})\,.$$

A.3. Supposons $E \neq 0$. Si F est un sous-$\mathcal{O}_K$-module de E, les restrictions des métriques hermitiennes sur les E_σ font de F un fibré vectoriel hermitien $\overline{F}$ sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$. Les degrés d'Arakelov de ces sous-modules sont bornés et l'on peut considérer l'enveloppe convexe fermée dans $\mathbb{R}^2$ des points de la forme $(\mathrm{rg}\,F, \widehat{\deg}_n\,\overline{F})$. Il existe une fonction concave

$$P_{\overline{E}} : [0, \mathrm{rg}\,E] \to \mathbb{R}\,,$$

affine sur chaque segment $[i-1,i]$, $i \in \{1,\ldots,\mathrm{rg}\,E\}$, telle que cette enveloppe convexe coïncide avec le "sous-graphe" de $P_{\overline{E}}$

$$\{(x,y) \in [0,\mathrm{rg}\,E] \times \mathbb{R} \mid y \leq P_{\overline{E}}(x)\}\,.$$

On a

$$P_{\overline{E}}(0) = 0 \quad , \quad P_{\overline{E}}(\mathrm{rg}\,E) = \widehat{\deg}_n\,\overline{E}\,,$$

et, pour tout $i \in \{1,\ldots,\mathrm{rg}\,E\}$, l'on définit la *i-ème pente* de $\overline{E}$ comme

$$\widehat{\mu}_i\,(\overline{E}) := P_{\overline{E}}(i) - P_{\overline{E}}(i-1)\,.$$

C'est une suite décroissante de réels, de somme $\widehat{\deg}_n\,\overline{E}$. Lorsque $K = \mathbb{Q}$, $\exp(-\widehat{\mu}_i(\overline{E}))$ est un avatar du i-ème minimum du réseau E dans l'espace vectoriel euclidien $(E_{\mathbb{R}}, \|\ \|)$.

On pose enfin:

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) := \widehat{\mu}_1(\overline{E}) \quad \text{et} \quad \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) := \widehat{\mu}_{\operatorname{rg} E}(\overline{E}) .$$

Le graphe de $P_{\overline{E}}$ est le *polygone canonique* de $\overline{E}$. Il a été introduit par Stuhler [St] et Grayson [Gr], qui se sont inspirés d'une construction analogue concernant les fibrés vectoriels sur les courbes projectives lisses, due à Harder et Narasimhan [H-N]. Le phénomène remarquable mis en évidence par ces auteurs est que, grâce à $P_{\overline{E}}$, on peut munir E d'une filtration canoniquement déterminée par $\overline{E}$:

PROPOSITION A.1. ([St], [Gr]) *Soient $i_1 < \ldots < i_{k-1}$ les points de discontinuité de $P'_{\overline{E}}$ dans $]0, \operatorname{rg} F[$. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, il existe un unique sous-$\mathcal{O}_K$-module E_j de rang i_j dans E tel que*

$$P_{\overline{E}}(i_j) = \widehat{\deg}_n \overline{E}_j .$$

Les quotients E/E_j sont sans torsion, et l'on a

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_{k-1} .$$

La filtration strictement croissante

$$E_0 = 0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_{k-1} \subset E_k := E$$

ainsi définie est la *filtration de Harder-Narasimhan-Stuhler-Grayson* (ou plus brièvement, la *filtration canonique*) de $\overline{E}$.

On dit que le fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ est *semi-stable* lorsque son polygone canonique est un segment, *i.e.*, lorsque $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \quad (= \widehat{\mu}(\overline{E}))$. Les modules projectifs de type fini E_i/E_{i-1}, munis de la structure hermitienne quotient de celle de $\overline{E}$, sont semi-stables, et leurs pentes forment une suite strictement décroissante. Ces propriétés caractérisent en fait la filtration canonique de E.

A.4. Les énoncés suivants se déduisent de la propriété d'unicité des sous-modules apparaîssant dans la filtration canonique.

PROPOSITION A.2. *Soient L une extension de degré fini de K, $\mathcal{O}_L$ son anneau d'entiers, et f : $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_L \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ le morphisme défini par l'inclusion $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_L$. Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ de filtration canonique $(E_i)_{0 \leq i \leq k}$,* *alors le fibré vectoriel hermitien $f^*\overline{E}$ admet $(f^*E_i)_{0\leq i\leq k}$ comme filtration canonique. En particulier,*

$$P_{f^*\overline{E}} = P_{\overline{E}}$$

et, pour tout $i \in \{1,\dots,\operatorname{rg} E\}$,

$$\widehat{\mu}_i\,(f^*\,\overline{E}) = \widehat{\mu}_i\,(\overline{E})\,.$$

PROPOSITION A.3. *S'il existe un groupe d'automorphismes isométriques de $\overline{E}$, agissant de façon irréductible sur E_K, alors $\overline{E}$ est semi-stable.*

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. Pour tout entier naturel k, nous noterons $S^k\,\overline{E}$ le fibré vectoriel hermitien défini par la puissance symétrique $S^k\,E$ muni de la structure hermitienne quotient de la structure hermitienne sur $E^{\otimes k}$, puissance tensorielle de celle sur E.[4] En s'appuyant sur les résultats de Zhang [Zh], on peut établir les propositions suivantes:

PROPOSITION A.4. *Pour tout $k \in N$, on a*

$$\widehat{\mu}_{\max}(S^k\,\overline{E}) \leq k(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + C(\operatorname{rg} E))\,, \tag{A.1}$$

où $C(\operatorname{rg} E)$ désigne une constante fonction du seul rang de E.

PROPOSITION A.5. *Pour tout sous-$\mathcal{O}_K$-module F de E tel que E/F soit un $\mathcal{O}_K$-module sans torsion de rang $r \geq 1$, il existe une extension de degré fini L de K telle que, en notant $f : \operatorname{Spec}\mathcal{O}_L \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ le morphisme défini par l'inclusion $\mathcal{O}_K \hookrightarrow \mathcal{O}_L$, on puisse trouver des sous-fibrés vectoriels $W_1,\dots,W_r$ de $f^*\,E$ de rang $\operatorname{rg} E - 1$ vérifiant les conditions suivantes:*

$$f^*\,E/W_i \text{ est sans torsion} \quad (1 \leq i \leq r)$$

$$F = \bigcap_{i=1}^{r}\; W_i$$

et

$$\widehat{\deg}_n\,\overline{E} - \widehat{\deg}_n\,\overline{F} \leq \sum_{i=1}^{r}(\widehat{\deg}_n\,\overline{E} - \widehat{\deg}_n\,\overline{W}_i) + C(r)\,,$$

[4] Ainsi, pour tout $v \in E$ et tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, on a $\|v^k\|_{S^k\overline{E},\sigma} = \|v\|^k_{\overline{E},\sigma}$. On prendra garde que cette définition de la structure hermitienne d'une puissance symétrique diffère d'un facteur $k!$ de celle introduite dans EVT, V, p.30.

où $C(r)$ désigne une constante ne dépendant que de r.

Comme plus haut, on a noté $\overline{F}$ (resp. $\overline{W_i}$) le fibré hermitien défini par F (resp. W_i) muni de la restriction de la structure hermitienne de $\overline{E}$ (resp. $f^*\overline{E}$).

Enfin, si $\overline{L}$ est un fibré en droites hermitien et $\overline{E}, \overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_N$ des fibrés vectoriels hermitiens non nuls sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, on établit aisément les relations:

$$\widehat{\mu}_i(\overline{L} \otimes \overline{E}) = \widehat{\deg}_n(\overline{L}) + \widehat{\mu}_i(\overline{E}) \ , \quad 1 \leq i \leq \operatorname{rg} E \tag{A.2}$$

$$\widehat{\mu}_{\max}\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \overline{E}_i\right) = \max_{1 \leq i \leq N} \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i) \, , \tag{A.3}$$

et

$$\widehat{\mu}_{\min}\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \overline{E}_i\right) = \min_{1 \leq i \leq N} \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_i) \, . \tag{A.4}$$

B. Quelques énoncés de finitude

Nous rappelons ci-dessous quelques énoncés de finitude "bien connus" concernant les variétés abéliennes, leurs morphismes, leurs polarisations et leurs corps de définition.

La proposition suivante se démontre en considérant les points de 3-torsion (*cf.* [M-W1], §2; voir aussi [Si]).

PROPOSITION B.1. *Soit Ω un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et k un sous-corps de Ω.*

i) *Soit A et B deux variétés abéliennes sur k, de dimension au plus g. Il existe une extension galoisienne k' de k dans Ω de degré $[k' : k] \leq 3^{16g^4}$ telle que tout Ω-morphisme de variétés abéliennes de A_Ω vers B_Ω soit défini sur k'.*

ii) *Soit A une variété abélienne définie sur k de dimension g. Il existe une extension galoisienne k' de k dans Ω, de degré $[k' : k] \leq 2^{4g^2} 3^{16g^4}$ telle que toute sous-variété abélienne de A_Ω (sur Ω) et tout fibré en droite symétrique sur A_Ω soient définis sur k'.*

En appliquant le théorème de Jordan-Zassenhaus à l'anneau des endomorphismes d'une variété abélienne, on obtient (voir par exemple [Del], 1.25-26):

PROPOSITION B.2. *Soit A une variété abélienne définie sur un corps k de caractéristique* 0.

i) *Les variétés abéliennes facteurs directs de A (sur k) ne forment qu'un nombre fini de classes d'isomorphie.*

ii) *Les polarisations de degré n, Θ, de A (sur k) ne fournissent qu'un nombre fini de classes de k-isomorphie de variétés abéliennes polarisées (A, Θ).*

Enfin, en considérant les points de 3-torsion et leur ramification et en utilisant le théorème d'Hermite, on peut montrer (*cf.* [F], p. 357, et [Si]) :

PROPOSITION B.3. *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K. Il n'y a qu'un nombre fini de classes de K-isomorphie de variétés abéliennes définies sur K, $\overline{K}$-isomorphes à A et K-isogènes à A.*

C. Rayons d'injectivité et hauteurs de Faltings

Dans cet appendice, nous esquissons une preuve de la proposition 3.4, due à S. David et à l'auteur, qui permet de borner effectivement la constante $C(g)$ qui y apparaît.

C.1. Rappelons que la hauteur (logarithmique) d'un point $x = (x_1 : \ldots : x_N)$ de $\mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{Q})$ est minorée par l'expression archimédienne $\frac{1}{N} \max\limits_{\substack{x_i \neq 0 \\ x_j \neq 0}} (\log |x_i| - \log |x_j|)$.

L'énoncé suivant est une variante de cette remarque:

LEMME C.1. *Soient K un corps de nombres, $\overline{L}$ et $\overline{M}$ deux fibrés en droites hermitiens sur* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ *et $\varphi_i : L \to M$, $i = 1, \ldots, N$, des morphismes de $\mathcal{O}_K$-modules. Si l'un au moins des φ_i est non nul, alors*

$$\widehat{\deg}_n \overline{L} + \frac{1}{N[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \max_{\substack{\varphi_i \neq 0 \\ \varphi_j \neq 0}} (\log \|\varphi_i\|_\sigma - \log \|\varphi_j\|_\sigma)$$

$$\leq \widehat{\deg}_n \overline{M} + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \log \max_i \|\varphi_i\|_\sigma . \tag{C.1}$$

On a noté $\|\varphi_i\|_\sigma$ la norme de l'application $\varphi_{i,\sigma}$ entre les espaces vectoriels hermitiens $\overline{L}_\sigma$ et $\overline{M}_\sigma$. L'inégalité (C.1) découle des majorations:

$$\widehat{\deg}_n \overline{L} \leq \widehat{\deg}_n \overline{M} + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \log \|\varphi_i\|_\sigma \quad , \quad i = 1, \ldots, N \ , \ \varphi_i \neq 0 \, .$$

C.2. Pour établir la proposition 3.4, on se ramène au cas où la polarisation de A définie par L est principale en considérant un quotient de A par un sous-groupe lagrangien de $K(L)$, quotient dont la hauteur vaut au plus $h(A)+\frac{1}{2}\log\chi(A,L)$ d'après (2.6).

Supposons donc que $\chi(A,L) = 1$ et, pour simplifier, que A admette bonne réduction potentielle (le cas général se traite en faisant appel aux résultats de Moret-Bailly mentionnés en 4.2; *cf.* [Bo2] 4.3.1-2). Soient alors K, $\pi : \mathcal{A} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ et $\overline{\mathcal{L}}$ comme en 4.2. Quitte à remplacer K par une extension finie nous pouvons supposer que tout point de 2-torsion de A est défini sur K. Comme $\overline{\mathcal{L}}$ satisfait au théorème du cube, nous pouvons même supposer que, si ε_P désigne la section de π attachée à un point de 2-torsion P de A, il existe un isomorphisme isométrique

$$\varepsilon_P^* \overline{\mathcal{L}} \simeq \overline{\mathcal{O}}, \tag{C.2}$$

où $\overline{\mathcal{O}}$ désigne le fibré en droite hermitien trivial sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ (défini par le $\mathcal{O}_K$-module $\mathcal{O}_K$ muni des normes hermitiennes $\| \ \|_\sigma$ telles que $\|1\|_\sigma = 1$ pour tout $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$).

C.3. Procédons à quelques rappels sur les variétés abéliennes complexes et les fonctions thêta.

Soit

$$\mathcal{H}_g = \{\tau \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^t\tau = \tau \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\tau > 0\}$$

le demi-espace de Siegel. La fonction thêta de Riemann est la fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^g \times \mathcal{H}^g$ définie par

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp(\pi i\ {}^t n \cdot \tau \cdot n + 2\pi i\ {}^t n \cdot z)\,.$$

On pose aussi:

$$\|\theta\|\,(z,\tau) = (\det \operatorname{Im}\tau)^{\frac{1}{4}}\ \exp(-\pi\ {}^t(\operatorname{Im} z)\cdot(\operatorname{Im}\tau)^{-1}\cdot(\operatorname{Im} z))\,|\theta(z,\tau)|\,.$$

C'est une fonction $\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$-périodique de z.

Le diviseur dans $\mathbb{C}^g$ défini par l'annulation de $\theta(\cdot,\tau)$ est invariant sous les translations par les éléments du réseau $\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$. Il définit donc un diviseur Θ_τ sur le tore complexe $\mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$. Le fibré en droites holomorphe $\mathcal{O}(\Theta_\tau)$ sur $\mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$ est ample, et en fait une variété abélienne complexe principalement polarisée. La structure hermitienne sur $t_{\mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g+\tau\mathbb{Z}^g}$ ($\simeq \mathbb{C}^g$) associée à $\mathcal{O}(\Theta)$ (*cf.* 2.1.2) est définie par la matrice $(\operatorname{Im}\tau)^{-1}$.

Inversement, si A est une variété abélienne complexe munie d'un fibré en droite ample symétrique tel que $\chi(A,L) = 1$, il existe $\tau \in \mathbb{C}^g$, un point de 2-torsion a de $\mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$, un isomorphisme de variétés abéliennes

$$i : \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g \xrightarrow{\sim} A$$

et un isomorphisme de fibrés en droites

$$i^*(L) \simeq \mathcal{O}(\Theta_\tau + a)\,.$$

Supposons de plus que L soit muni d'une métrique hermitienne $\|\ \|$, dont la courbure est invariante par translation. Alors, pour toute section régulière s de L sur A et tout $z \in \mathbb{C}^g$, on a

$$\text{(C.3)} \qquad \|s(i([z]))\|^2 = 2^{g/2}\, \|\theta\|^2\,(z-a,\tau) \int_A \|s(x)\|^2\, d\mu(x)$$

(voir [MB3], 3.2 et 3.4; on observera que $\|\ \|$ et s existent et sont uniques à multiplication par un scalaire non nul près).

Enfin, on définit une fonction $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$-invariante sur $\mathcal{H}_g$ en posant:

$$\text{(C.4)} \qquad \begin{aligned} F(\tau) = \frac{1}{4}\, g \log \pi - \log \max_{a \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}^g+\tau\mathbb{Z}^g)} \|\theta\|\,(a,\tau) \\ + \frac{1}{4^g} \max_{\substack{a,b\in\frac{1}{2}(\mathbb{Z}^g+\tau\mathbb{Z}^g)\\ a,b\notin\Theta_\tau}} (\log\|\theta\|\,(a,\tau) - \log\|\theta\|\,(b,\tau))\,. \end{aligned}$$

C.4. Revenons aux notations de **C.2**, et pour chaque plongement σ de K dans $\mathbb{C}$, choisissons τ_σ dans le demi-espace de Siegel $\mathcal{H}_g$ tel que A_σ, polarisée par L_σ, soit isomorphe à la variété abélienne $\mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau_\sigma\mathbb{Z}^g$, polarisée par $\mathcal{O}(\Theta_\tau)$.

Nous pouvons appliquer le lemme C.1 aux fibrés en droites hermitiens $\overline{L} = \pi_*\overline{\mathcal{L}}$, $\overline{M} = \overline{\mathcal{O}}$ et aux $N = 2^{2g}$ morphismes de $\pi_*\mathcal{L}$ vers $\mathcal{O}$, indexés par les points de 2-torsion P de A, obtenus en composant chacun des morphismes de $\pi_*\mathcal{L}$ vers $\varepsilon_P^*\mathcal{L}$, défini par la restriction à la section ε_P, avec l'isomorphisme (C.2). En effet l'un de ces morphismes est non nul (*cf.* par exemple [I], p.168). Compte-tenu de l'expression de $\widehat{\deg}\, \pi_* \overline{\mathcal{L}}$ (Théorème 4.2, ii)) et des normes de ces morphismes données par (C.3), on obtient ainsi:

PROPOSITION C.2. *La hauteur de Faltings de A vérifie la minoration suivante:*

$$h(A) \geq \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} F(\tau_\sigma) . \tag{C.5}$$

Pour terminer la preuve de la proposition 3.4, il suffit de montrer que, pour une constante $C(g)$ convenable, on a pour toute matrice $\tau \in \mathcal{H}_g$,

$$\rho(\mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g, \mathcal{O}(\Theta_\tau))^{-2} \leq C(g)\ F(\tau) . \tag{C.6}$$

Pour ce faire, on peut supposer que τ est réduite au sens de Siegel (plus précisément qu'elle appartient au "domaine fondamental" $\mathcal{F}_g$ décrit par Igusa, [I], II §4). Soit $\| \cdot \|$ une norme sur $M_g(\mathbb{C})$; la théorie de la réduction fournit alors une constante $C_1(g)$ telle que

$$\rho(\mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g, \mathcal{O}(\Theta_\tau))^{-2} \leq C_1(g)\ \| \operatorname{Im} \tau \| \tag{C.7}$$

(*cf.* [M3], p.121). Enfin, il existe une constante $C_2(g)$ telle que pour toute matrice $\tau \in \mathcal{F}_g$, on ait:

$$\| \operatorname{Im} \tau \| \leq C_2(g)\ F(\tau) . \tag{C.8}$$

Cette inégalité, qui avec (C.7) établit (C.6) et donc la proposition 3.4, est une conséquence des assertions ci-dessous; elles assurent que les Thetanullwerte associées à la 2-torsion ont des modules contrôlés, et que l'une d'entre elles est toujours "grande", et une autre, "petite" mais non nulle:

- pour toute $\tau \in \mathcal{H}_g$, on a

$$\max_{b \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g)} \| \theta \| (b, \tau) \geq (\det \operatorname{Im} \tau)^{\frac{1}{4}} ; \tag{C.9}$$

cela découle de la relation

$$\lim_{n \to \infty} (\det \operatorname{Im}(2^n \tau))^{-\frac{1}{4}}\ \| \theta \| (0, 2^n \tau) = 1$$

et des formules de duplication des fonctions thêta (*cf.* [I], p.139; voir aussi [Da1], p.132-133 pour un argument analogue, et [M-W3], lemma 6.3, pour une variante non effective de (C.9)).

• il existe des constantes $C_3(g)$ et $C_4(g)$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que, pour toute matrice $\tau \in \mathcal{F}_g$ et tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g$:

$$\text{(C.10)} \qquad \|\theta\|\,(m + \tau \cdot {}^t(0, \ldots, 0, \tfrac{1}{2}), \tau) \leq C_3(g)\,(\det \operatorname{Im} \tau)^{\frac{1}{4}} \exp(-C_4(g)\,\|\operatorname{Im} \tau\|)\,;$$

cela découle d'une majoration terme à terme de la série définissant $\theta(m + \tau \cdot {}^t(0, \ldots, 0, \frac{1}{2}), \tau)$.

• pour toute $\tau \in \mathcal{H}_g$, il existe $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g$ tel que $\theta(m + \tau \cdot {}^t(0, \ldots, 0, \frac{1}{2}), \tau) \neq 0$ (*cf.* [I], p.168).

Soulignons que les constantes $C_1(g) - C_4(g)$ qui apparaîssent ci-dessus sont toutes explicitement calculables. Il en va donc de même de la constante $C(g)$ dans (C.6) et dans la proposition 3.4. Remarquons enfin que la proposition C.2 jointe aux inégalités (C.6) et (2.3) fournissent une minoration effective en fonction de g de la hauteur de Faltings des variétés abéliennes principalement polarisée de dimension g sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Comme pour toute variété abélienne A sur $\overline{\mathbb{Q}}$, la variété abélienne $Z(A) := A^4 \times \widehat{A}^4$ admet une polarisation principale et que, d'après (2.7) et l'invariance par dualité de la hauteur de Faltings (*cf.* [R2]), $h(A) = \frac{1}{8}\,h(Z(A))$, on en déduit une minoration effective en fonction de g de la hauteur de Faltings des variétés abéliennes quelconques de dimension g sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (*i.e.*, de la constante $C_0(g)$ dans le théorème 2.1, i)).

D. Hauteurs et degrés des sous-variétés abéliennes

Si A est une variété abélienne sur un corps de nombres muni d'un fibré en droites ample L, nous noterons $h_{A,L}$ la hauteur sur les sous-vectoriels de t_A définie en 5.1. L'énoncé suivant précise alors la proposition 5.3, i).

PROPOSITION D.1. *Pour toute variété abélienne A de dimension $g \geq 1$ sur un corps de nombres et tout fibré en droites L ample sur A, on a:*

$$\text{(D.1)} \qquad h_{A,L}(t_A) = h(A) + \frac{1}{2}\log \chi(A, L) - \frac{g}{2}\log \pi\,.$$

Si de plus B est une sous-variété abélienne propre de A, alors

$$\text{(D.2)} \qquad h(B) \leq h(A) + (2g-1)\,\log \chi(B, L) - \min_{1 \leq i \leq g} C_0(i)\,,$$

où $C_0(1), \ldots, C_0(g)$ désignent les constantes apparaîssant dans le théorème 2.1, i), *et*

$$\text{(D.3)} \qquad 0 \leq h_{A,L}(t_B) - h_{B,L}(t_B) \leq 2g \log \chi(B, L)\,.$$

L'égalité (D.1) découle des définitions des hauteurs $h_{A,L}(t_A)$ et $h(A)$.

Pour montrer (D.2), considérons la sous-variété abélienne $B^\perp$ orthogonale de B dans A relativement à L. Le morphisme d'addition

$$\varphi : B \times B^\perp \to A$$

est une isogénie de degré N au plus égal à $\chi(B, L)^2$ (voir par exemple [M-W3], Lemma 1.4). Soit

$$\psi : A \to B \times B^\perp$$

l'isogénie de degré N^{2g-1} telle que $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$ soient les morphismes de multiplication par N. D'après (2.6) et (2.7), on a

$$h(B) + h(B^\perp) \leq h(A) + \frac{1}{2} \log N^{2g-1}.$$

Compte-tenu de la minoration

$$h(B^\perp) \geq C_0(g - \dim B),$$

cela implique (D.2).

Pour établir (D.3), considérons un corps de nombres K sur lequel A, B et $B^\perp$ sont définis et admettent réduction semi-stable, et des modèles semi-abéliens $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^\perp$ de A, B et $B^\perp$ sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Comme en 5.2, notons $t_{\mathcal{A}}$ et $t_{\mathcal{B}}$ les $\mathcal{O}_K$-modules définis par les restrictions aux sections nulles des fibrés tangents relatifs de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Le morphisme d'inclusion $B \hookrightarrow A$ se prolonge en un morphisme de schémas semi-abéliens $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ (qui n'est pas nécessairement une immersion), et définit donc un morphisme de $\mathcal{O}_K$-modules

$$i : t_{\mathcal{B}} \to t_{\mathcal{A}},$$

qui prend ses valeurs dans $t_B \cap t_{\mathcal{A}}$. Les définitions de $h_{A,L}$ et $h_{B,L}$ montrent que

$$\text{(D.4)} \qquad h_{A,L}(t_B) - h_{B,L}(t_B) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \log \# (t_B \cap t_{\mathcal{A}} / i(t_{\mathcal{B}})).$$

L'isogénie ψ se prolonge en un morphisme de schémas semi-abéliens

$$\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{B}^\perp.$$

Sa différentielle le long de la section nulle détermine un morphisme

$$j : t_B \cap t_{\mathcal{A}} \to t_{\mathcal{B}}$$

tel que $i \circ j$ soit la multiplication par N, et donc

$$\#\,(t_B \cap t_A/i(t_B)) \leq \#\,(t_B \cap t_A/N(t_B \cap t_A)) = N^{[K:\mathbb{Q}]\dim B}\,.$$

Jointe à (D.4), cette majoration implique (D.3).

On observera que, compte tenu de la remarque à la fin de l'appendice C, l'expression $(-\min_{1\leq i\leq g} C_0(i))$ admet un majorant effectif.

BIBLIOGRAPHIE

[A] S.J. ARAKELOV - *Intersection theory for divisors on an arithmetic surface*, Math. U.S.S.R. Izv. **8** (1974), 1167-1189.

[Ba1] A. BAKER - *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers* IV, Mathematika **15** (1968), 204-216.

[Ba2] A. BAKER - *Transcendental number theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

[Ba3] A. BAKER - *The theory of linear forms in logarithms*, in *Transcendence Theory: Advances and Applications*, A. Baker et D.W. Masser ed., Academic Press, London-New York-San Francisco, 1977, 1-27.

[Be1] D. BERTRAND - *Lemmes de zéros et nombres transcendants*, Séminaire Bourbaki, 38ème année, 1985-86, exposé n^0 652, Astérisque **145-6** (1987), 21-44.

[Be2] D. BERTRAND - *Galois representations and transcendental numbers*, in *New Advances in Transcendence Theory, Durham 1986*, A. Baker ed., Cambridge University Press 1988, 37-55.

[Be3] D. BERTRAND - *Hauteurs et isogénies*, in *Séminaire sur les pinceaux de courbes elliptiques (ed. L. Szpiro)*, Astérisque **183** (1990), 107-125.

[Be4] D. BERTRAND - *Transcendental methods in arithmetic geometry*, in *Analytic number theory, Tokyo 1988*, K. Nagusaka et E. Fouvry ed., Lecture Notes in Mathematics **1434**, Springer-Verlag 1990, 31-44.

[Bo1] J.-B. BOST - *Théorie de l'intersection et théorème de Riemann-Roch arithmétiques*, Séminaire Bourbaki n^0 731, 1990-91, Astérique **201-203** (1991), 43-88.

[Bo2] J.-B. BOST - *Intrinsic heights of stable varieties and abelian varieties*, à paraître dans Duke Math. J. **82** (1996).

[Bo-D] J.-B. BOST et S. DAVID - Lettre à D. Masser et G. Wüstholz, mars 1995.

[Bo-D] J.-B. BOST et S. DAVID - en préparation.

[C-C] D.V. CHUDNOVSKY et G.V. CHUDNOVSKY - *Padé approximations and diophantine geometry*, Proc. Math. Acad. Sci. USA **82** (1985), 2212-2216.

[Da1] S. DAVID - *Fonctions thêta et points de torsion des variétés abéliennes*, Compositio Math. **78** (1991), 121-160.

[Da2] S. DAVID - *Minorations de hauteurs sur les variétés abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **121** (1993), 509-544.

[De1] P. DELIGNE - *Démonstration des conjectures de Tate et de Shafarevitch (d'après G. Faltings)*, Séminaire Bourbaki 1983-84, n^0 616, Astérisque **121-122** (1985), 25-41.

[De2] P. DELIGNE - *Le lemme de Gabber*, in [Sz2], 131-150.

[Di] L. DENIS - *Lemmes de multiplicités et intersections*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I **314** (1992), 97-100.

[F] G. FALTINGS - *Endlichkeitsätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern,* Invent. Math. **73** (1983), 349-366.

[F-C] F. FALTINGS et C.-L. CHAI - *Degeneration of abelian varieties*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1990.

[F-W] G. FALTINGS, G. WÜSTHOLZ et al. - *Rational points*, Aspects of Mathematics, vol. E6, Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1984.

[G-S] H. GILLET et C. SOULÉ - *An arithmetic Riemann-Roch theorem*, Invent. Math. **110** (1992), 473-543.

[Gr] D.R. GRAYSON - *Reduction theory using semistability*, Comment. Math. Helvetici **59** (1984), 600-634.

[H-N] G. HARDER et M.S. NARASIMHAN - *On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves*, Math. Ann. **212** (1975), 215-248.

[I] J.I. IGUSA - *Theta functions*, Grundlehren d. Math. Wiss. **194**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[Il] L. ILLUSIE - *Déformations de groupes de Barsotti-Tate*, in [Sz2], 151-198.

[L] L. LAFFORGUE - *Une version en géométrie diophantienne du "lemme de l'indice"*, Preprint Ecole Normale Supérieure, mars 1990.

[Lg] S. LANG - *Division points of elliptic curves and abelian functions over number fields*, Ann. J. of Math. **97** (1975), 124-132.

[La1] M. LAURENT - *Une nouvelle démonstration du théorème d'isogénie, d'après D.V. et G.V. Choodnovsky*, Séminaire de théorie des nombres de Paris, 1985-86, Boston Basel Stuttgart, Birkhäuser, 1987, 119-131.

[La2] M. LAURENT - *Sur quelques résultats récents de transcendance*, in *Journées arithmétiques de Luminy 17-21 juillet 1989*, Astérisque **198-200** (1991), 209-230.

[M1] D.W. MASSER - *Division points of elliptic functions*, Bull. London Math. Soc. **9** (1977), 49-53.

[M2] D.W. MASSER - *Small values of the quadratic part of the Néron-Tate height on a abelian variety*, Compositio Math. **53** (1984), 153-170.

[M3] D.W. MASSER - *Small values of heights on families of abelian varieties*, in *Diophantine Approximation and Transcendence Theory*, G. Wüstholz ed., Lecture Notes in Mathematics **1290**, Springer-Verlag 1987, 109-148.

[M4] D.W. MASSER - *Polarization estimates for abelian varieties*, Conférence au M.S.R.I., *Workshop on Diophantine Geometry*, 31 mars 1993.

[M-W1] D.W. MASSER et G. WÜSTHOLZ - *Estimating isogenies on elliptic curves*, Invent. Math. **100** (1990), 1-24.

[M-W2] D.W. MASSER et G. WÜSTHOLZ - *Galois properties of division fields of elliptic curves*, Bull. London Math. Soc. **25** (1993), 247-254.

[M-W3] D.W. MASSER et G. WÜSTHOLZ - *Periods and minimal abelian subvarieties*, Ann. Math. **137** (1993), 407-458.

[M-W4] D.W. MASSER et G. WÜSTHOLZ - *Isogeny estimates for abelian varieties and finiteness theorems*, Ann. Math. **137** (1993), 459-472.

[M-W5] D.W. MASSER et G. WÜSTHOLZ - *Endomorphism estimates for abelian varieties*, Math. Zeit. **215** (1994), 641-653.

[M-W6] D.W. MASSER et G. WÜSTHOLZ - *Factorization estimates for abelian varieties*, Publ. Math. IHES **81** (1995), 5-24.

[M-W7] D.W. MASSER et G. WÜSTHOLZ - *Refinements of the Tate conjecture for abelian varieties*, in *Abelian varieties*, Barth-Hulek-Lange ed., de Gruyter, Berlin-New York, 1995.

[MB1] L. MORET-BAILLY - *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque **129** (1985).

[MB2] L. MORET-BAILLY - *Compactifications, hauteurs et finitude*, in [Sz], 113-129.

[MB3] L. MORET-BAILLY - *Sur l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Riemann*, Comp. Math. **75** (1990), 203-217.

[Mu1] D. MUMFORD - *On the equations defining abelian varieties* I, Invent. Math. **1** (1966), 287-354.

[Mu2] D. MUMFORD - *Abelian varieties*, 2ème édition, Oxford University Press, 1974.

[N] M. NAKAMAYE - *Multiplicity estimates and the product theorem*, Preprint 1993, *à paraître dans le* Bull. Soc. Math. France.

[P] P. PHILIPPON - *Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bull. Soc. Math. France **114** (1986), 355-383 et **115** (1987), 397-398.

[P-W] P. PHILIPPON et M. WALDSCHMIDT - *Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs*, Illinois J. Math. **32** (1988), 281-314.

[R1] M. RAYNAUD - *Schémas en groupes de type* $(p, \ldots, p)$, Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 241-280.

[R2] M. RAYNAUD - *Hauteurs et isogénies*, in [Sz2], 199-234.

[S1] J.-P. SERRE - *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves*, Benjamin, New York, 1968.

[S2] J.-P. SERRE - *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. Math. **15** (1972), 259-331.

[S3] J.-P. SERRE - *Quelques applications du théorème de densité de Chebotorev*, Publ. Math. IHES **54** (1981), 123-201.

[S4] J.-P. SERRE - Conférence au séminaire Delange-Pisot-Poitou, avril 1988.

[Sh] G. SHIMURA - *On the derivatives of theta functions and modular forms*, Duke Math. J. **44** (1977), 365-387.

[Si] A. SILVERBERG - *Fields of definition for homomorphisms of abelian varieties*, J. Pure and Applied Algebra **77** (1992), 253-262.

[St] U. STUHLER - *Eine Bemerkung zur Reduktionstheorie quadratischen Formen*, Archiv. der Math. **27** (1976), 604-610.

[Sz1] L. SZPIRO - *La conjecture de Mordell (d'après G. Faltings)*, Séminaire Bourbaki 1983-84, n^0 619, Astérisque **121-122** (1985), 83-103.

[Sz2] L. SZPIRO - *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques: la conjecture de Mordell*, Astérisque **127** (1985).

[T] J. TATE - *p-divisible groups*, in *Proceeding of a conference on local fields* (Driebergen 1966), 158-183, Springer, New York, 1967.

[W] A. WEIL - *Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques*, Revue scientifique **77** (1939), 104-106 (= Œuvres scientifiques, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, volume I, 1980, [1939a], 236-240).

[Wü 1] G. WÜSTHOLZ - *Some remarks on a conjecture of Waldschmidt*, in *Approximations diophantiennes et nombres transcendants*, D. Bertrand et M. Waldschmidt eds., Progess in Math. **31**, Birkhäuser (1983), 329-336.

[Wü 2] G. WÜSTHOLZ - *Multiplicity estimates on group varieties*, Ann. of Math. **129** (1989), 471-500.

[Wü 3] G. WÜSTHOLZ - *Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen*, Ann. of Math. **129** (1989), 501-517.

[Y] F. YAN - *Tate property and isogeny estimate for semi-abelian verieties*, Dissertation, E.T.H. Zürich, 1994.

[Z1] Y. ZAHRIN - *Endomorphisms of abelian varieties and points of finite order in characteristic p*, Mat. Zametki **21** (1977), 737-744 (= Math. Notes **21** (1977), 415-419).

[Z2] Y. ZAHRIN - *A finiteness theorem for unpolarized varieties over number fields with prescribed places of bad reduction*, Invent. Math. **79** (1985), 309-332.

[Zh] S. ZHANG - *Positive line bundles on arithmetic varieties*, Journal of the A.M.S. **8** (1995), 187-221.

Jean-Benoît BOST
École Polytechnique
Centre de Mathématiques
URA 169 du CNRS
F-91128 PALAISEAU CEDEX

et

I.H.E.S.
35, route de Chartres
F-91440 BURES-sur-YVETTE

Astérisque

JEAN GINIBRE

Le problème de Cauchy pour des EDP semi-linéaires périodiques en variables d'espace

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki, exp. n° 796, p. 163-187

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__163_0>

Séminaire BOURBAKI
47ème année, 1994-95, n° 796

Mars 1995

LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES EDP SEMI-LINÉAIRES PÉRIODIQUES EN VARIABLES D'ESPACE
[d'après Bourgain]

par **Jean GINIBRE**

1. INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de donner un aperçu d'une série de travaux récents de Bourgain [B 1-8] sur le problème de Cauchy pour un certain nombre d'équations d'évolution classiques lorsque la variable d'espace varie dans le tore $\mathbf{T}^n$. Ces équations sont des EDP semi-linéaires dispersives pour des fonctions définies dans l'espace temps $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ ou $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}$ (n est la dimension d'espace). On s'intéresse principalement aux équations suivantes :

• L'équation de Schrödinger non-linéaire (SNL)

$$i\,\partial_t\, u = -\Delta u + f(u), \tag{1.1}$$

où u est une fonction complexe définie dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ ou $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}$, et $f(u)$ est un terme d'interaction non-linéaire, typiquement :

$$f(u) = \lambda\, |u|^{p-1}\, u \qquad (\lambda \in \mathbf{R}\,,\, p > 1). \tag{1.2}$$

• L'équation de Korteweg-de Vries (KdV)

$$\partial_t\, u + \partial_x^3\, u = u\, \partial_x\, u \tag{1.3}$$

et, plus généralement, l'équation de Korteweg-de Vries généralisée (KdVG)

$$\partial_t\, u + \partial_x^3\, u = \partial_x\, f(u) \tag{1.4}$$

où u est une fonction réelle définie dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ou $\mathbf{T} \times \mathbf{R}$, et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

• L'équation de Kadomtsev-Petviashvili (KP)

$$\partial_t\, u + \partial_x^3\, u + \varepsilon\, \partial_y^2\, v = u\, \partial_x\, u \qquad \text{avec } u = \partial_x\, v, \tag{1.5}$$

où u est une fonction réelle définie dans $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ ou $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}$ et $\varepsilon = +1$ (équation dite KP II) ou $\varepsilon = -1$ (équation dite KP I).

Le problème de Cauchy pour ces équations (au moins pour SNL et KdVG) est assez bien compris dans $\mathbf{R}^n$ (voir [C], [KPV2] et leur bibliographie). On peut l'étudier de la façon suivante. L'équation est du type :

$$\partial_t u = Lu + f_0(u), \tag{1.6}$$

où L est un opérateur linéaire anti-autoadjoint dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, typiquement L^2 ou un espace de Sobolev H^s, et engendre un groupe unitaire à un paramètre $U(t) = \exp(tL)$ dans $\mathcal{H}$. Le problème de Cauchy pour l'équation (1.6) avec donnée initiale $u(t=0) = \varphi \in \mathcal{H}$ est alors équivalent à l'équation intégrale :

$$\begin{aligned} u(t) &= U(t)\varphi + \int_0^t dt'\, U(t-t')\, f_0(u(t')) \\ &\equiv U(t)\varphi + (U *_R f_0)(t) \equiv (Au)(t) \end{aligned} \tag{1.7}$$

où la notation $*_R$ désigne la convolution retardée en temps (retardée référant au fait que $t' \leq t$ dans l'intégrale). On résoud cette équation en deux étapes qui sont les suivantes, dans les cas favorables :

1) On résoud d'abord le problème de Cauchy local, *i.e.* on résoud (1.7) dans un intervalle de temps $[-T, T]$ pour T assez petit, par une méthode de contraction consistant à montrer que l'opérateur A défini dans (1.7) est une contraction dans un espace de Banach X convenable de fonctions de (x,t) pour $\varphi \in \mathcal{H}$ et T assez petit. La méthode donne en même temps l'existence et l'unicité de la solution dans X et la continuité de l'application $\varphi \to u$ de $\mathcal{H}$ dans X. Si cette situation est réalisée, on dira que le problème de Cauchy pour (1.6) avec donnée initiale dans $\mathcal{H}$ est localement bien posé dans X.

2) On étend ensuite les solutions à tout temps $t \in \mathbf{R}$ en itérant la première étape. Cette extension requiert un contrôle a priori de la norme de $u(t)$ dans $\mathcal{H}$, qui est fourni par les lois de conservation associées à l'équation. Par exemple pour toutes les équations ci-dessus, la norme de $u(t)$ dans L^2 est constante et il existe une autre loi de conservation, celle de l'énergie qui, dans les cas favorables, contrôle la norme de $u(t)$ dans H^1. Si les étapes (1) et (2) sont réalisées, on dira que le problème de Cauchy est globalement bien posé (dans les espaces adéquats).

Un élément essentiel du succès de la première étape dans le cas de $\mathbf{R}^n$ est l'existence de propriétés dispersives de l'équation linéaire sous-jacente : les solutions de celle-ci s'étalent dans l'espace au cours du temps, par exemple $\|U(t)\,\varphi\|_r \to 0$ quand $t \to \infty$ pour $r > 2$, tandis que $\|U(t)\,\varphi\|_2$ est constante. La preuve de la propriété de contraction utilise alors deux types d'estimations :

1) des estimations linéaires assurant que l'application $\varphi \to U(\cdot)\,\varphi$ est bornée de $\mathcal{H}$ dans X et que l'application $f \to U *_R f$ est bornée de X' dans X, où X' est un espace auxiliaire. Ces estimations sont souvent appelées inégalités de Strichartz généralisées [S] ;

2) des estimations non-linéaires assurant que l'application $u \to f_0(u)$ est bornée et lipschitzienne de X dans X'. Ces estimations sont souvent des combinaisons d'inégalités de Sobolev et de variantes de la formule de Leibnitz avec des dérivées éventuellement fractionnaires.

On donnera dans la Section 2 l'exemple le plus simple de l'équation SNL dans $\mathbf{R}^n$ comme illustration du schéma précédent.

Dans le cas de $\mathbf{T}^n$, les propriétés dispersives n'existent pas car $U(t)\,\varphi$ ne peut pas tendre vers zéro dans L^r quand $t \to \infty$. Par exemple pour les équations SNL et KdVG, avec φ 2π-périodique en x, $U(\cdot)\,\varphi$ est également 2π-périodique en t. Le problème est alors beaucoup plus difficile. Un élément essentiel de la méthode de Bourgain est de réorganiser les estimations au moyen d'un choix approprié d'espaces fonctionnels de façon à trivialiser les estimations linéaires et à concentrer toute la difficulté sur les estimations non-linéaires. Celles ainsi requises peuvent alors être effectivement obtenues dans le cas de $\mathbf{T}^n$. La méthode n'est cependant pas restreinte dans son principe au cas de $\mathbf{T}^n$ et elle s'applique aussi aux problèmes dans $\mathbf{R}^n$, où elle a des retombées intéressantes. Le cas le plus spectaculaire est celui de l'équation KdV où elle a permis d'améliorer les résultats précédemment connus et de résoudre le problème de Cauchy dans H^s pour des valeurs négatives de s, $s > -\frac{3}{4}$ [KPV3,4]. Par ailleurs, la méthode ne fait pas perdre le bénéfice des inégalités de Strichartz lorsqu'elles existent, et il est facile de les y injecter. On exposera dans la Section 3 les idées générales de la méthode.

Dans le cas de $\mathbf{T}^n$, pour les équations de Schrödinger et d'Airy qui sont les parties linéaires de SNL et KdVG, Bourgain a obtenu un certain nombre d'inégalités de Strichartz qui sont des versions affaiblies de celles connues dans $\mathbf{R}^n$. On passera en revue ces inégalités dans la Section 4. On décrira ensuite l'application de la méthode à l'équation SNL dans la Section 5 et à l'équation KdV dans la Section 6. Dans ce dernier cas, on considérera en parallèle le cas de $\mathbf{R}$ et le cas de $\mathbf{T}$. On mentionnera ensuite brièvement quelques résultats sur l'équation KdVG et sur l'équation KP II. On se borne à citer, faute de place, le traitement par une méthode voisine d'une équation des ondes semi-linéaire avec non-linéarité quadratique dans les dérivées premières [KM].

On note (x, t) les variables d'espace temps, (ξ, τ) les variables conjuguées de Fourier, parfois $m = \xi$ dans le cas périodique, $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier, $\hat{u} = \mathcal{F}u$, $\mathcal{F}_x$ et $\mathcal{F}_t$ les transformations de Fourier partielles en x et t. Les notations d'espaces fonctionnels, en particulier L^p et H^s, sont standard. En cas d'ambiguïté, on indiquera le nom de la variable en indice ou son domaine entre parenthèses. Par exemple, $L^r = L^r_x = L^r(\mathbf{T}^n)$ ou $L^r(\mathbf{R}^n)$ suivant le contexte. De même, $L^q_t(\mathbf{R}, L^r_x)$ désigne l'espace L^q de la variable t à valeurs dans L^r de la variable x. On note $\chi(\mathcal{P})$ la fonction caractéristique de l'ensemble où la propriété $\mathcal{P}$ est vraie, $\langle\lambda\rangle = 1 + |\lambda|$ ou $\sqrt{1+\lambda^2}$ indifféremment. Enfin, $f(N) \ll N^\varepsilon$ signifie $\forall\varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon$ tel que $f(N) \leq C_\varepsilon N^\varepsilon$.

2. LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'ÉQUATION SNL DANS $\mathbf{R}^n$

On suit le schéma précédent. Les inégalités de Strichartz généralisées sont les suivantes [Y] (voir aussi [C] [K] [GV]). On dira qu'un couple d'exposants (q, r) est admissible si $0 \leq \frac{2}{q} = \frac{n}{2} - \frac{n}{r} < 1$ ($\leq \frac{1}{2}$ pour $n = 1$). On note $\bar{r}$ l'exposant Hölder conjugué de r : $\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} = 1$.

PROPOSITION 2.1.— *Les inégalités suivantes sont satisfaites :*

$$\|U(\cdot)\, u\, ;\, L^q_t(\mathbf{R}, L^r_x)\| \leq C_r\, \|u\|_2, \tag{2.1}$$

pour tout $u \in L^2_x$ et tout (q, r) admissible.

$$\|U *_R f\, ;\, L^{q_1}_t(I, L^{r_1}_x)\| \leq C_{r_1}\, C_{r_2}\, \|f\, ;\, L^{\bar{q}_2}_t(I, L^{\bar{r}_2}_x)\|, \tag{2.2}$$

pour tout intervalle $I \subset \mathbf{R}$, toute f dans l'espace adéquat (prolongée par zéro hors de I) et tous (q_i, r_i) admissibles ($i = 1, 2$).

La résolution locale dans l'intervalle $I = [-T, T]$ avec donnée initiale $\varphi \in H^s$, $s \geq 0$, s'effectue selon le schéma précédent dans des espaces qui sont à un détail technique près :

$$X^0(I) = \{u : u \in \mathcal{C}(I, L^2_x) \text{ et } u \in L^q_t(I, L^r_x) \text{ pour tout } (q, r) \text{ admissible}\} \tag{2.3}$$

pour $s = 0$,

$$X^1(I) = \{u : u \in \mathcal{C}(I, H^1) \text{ et } \nabla u \in L^q_t(I, L^r_x) \text{ pour tout } (q, r) \text{ admissible}\} \tag{2.4}$$

pour $s = 1$, et des généralisations appropriées pour les autres $s \geq 0$. On montre alors [CW] :

THÉORÈME 2.1.— *Le problème de Cauchy pour l'équation SNL* (1.1) (1.2) *avec donnée initiale dans H^s, $s \geq 0$, est localement bien posé dans X^s pour $p-1 \leq \frac{4}{n-2s}$, $p-1 > [s]$.*

L'équation (1.1) (1.2) possède deux lois de conservation utiles :

1) La norme dans L^2_x est conservée, *i.e.* $\|u(t)\|_2 = \|\varphi\|_2$ pour tout t.

2) L'énergie est conservée : $E(u(t)) = E(\varphi)$ pour tout t, où

$$E(u) = \|\nabla u\|_2^2 + 2\lambda(p+1)^{-1}\ \|u\|_{p+1}^{p+1} \tag{2.5}$$

dans le cas (1.1) (1.2). Ces deux lois de conservation assurent un contrôle uniforme en temps de $u(t)$ dans H^1 si 1) $\lambda > 0$ ou 2) $p-1 < \frac{4}{n}$ ou 3) $p-1 = \frac{4}{n}$ et $\|\varphi\|_2$ est assez petit ou 4) $p-1 \leq \frac{4}{(n-2)}$ et $\|\varphi\,;H^1\|$ est assez petit. Combinant ces informations avec les résultats de résolution locale, on obtient les résultats globaux suivants [K] (voir aussi [C]).

THÉORÈME 2.2.— *Le problème de Cauchy pour l'équation SNL* (1.1) (1.2) *dans $\mathbf{R}^n$ avec donnée initiale dans H^s, $s \geq 0$, est globalement bien posé*

- *pour $s = 0$ dans $X^0_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R}, L^2)$ si $p-1 < \frac{4}{n}$*
- *pour $s = 1$ dans $X^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R}, H^1)$ si $p-1 < \frac{4}{(n-2)}$ et si l'énergie contrôle la norme H^1*
- *pour $s = 2$ dans $X^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R}, H^1)$ sous les mêmes hypothèses.*

3. LA MÉTHODE DE BOURGAIN. GÉNÉRALITÉS

La méthode reprend la séparation du problème en deux étapes : problème local en temps et globalisation. La seconde étape est la même que précédemment, basée sur des estimations a priori déduites des lois de conservation, qui sont les mêmes dans les cas de $\mathbf{T}^n$ et de $\mathbf{R}^n$. La première étape est modifiée et utilise des espaces fonctionnels différents. Les deux points essentiels sont les suivants :

1) Les normes dans les espaces fonctionnels sont exprimées en terme des modules des transformées de Fourier des fonctions considérées et les estimations principales effectuées sur ces mêmes modules. Dans ce but, on utilise en priorité les espaces de

Sobolev basés sur L^2 :

$$H^{s,b} = \{u : \|u\,;\, H^{s,b}\| \equiv \|\langle\xi\rangle^s \langle\tau\rangle^b \hat{u}\|_2 < \infty\}. \tag{3.1}$$

On utilise aussi des espaces plus compliqués où on met $\hat{u}$ dans diverses combinaisons d'espaces L^p ou ℓ^p (après découpage dyadique par exemple) pondérés dans les variables ξ et τ.

Pour utiliser la transformée de Fourier dans le problème local, c'est-à-dire avec des fonctions définies seulement a priori dans un intervalle de temps fini, il est utile et naturel de tronquer l'équation (1.7). Soit $\psi_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, $0 \leq \psi_1 \leq 1$, $\psi_1(t) = 1$ pour $|t| \leq 1$, $\psi_1(t) = 0$ pour $|t| \geq 2$, et pour $T > 0$, soit $\psi_T(t) = \psi_1(t/T)$. On remplace l'équation (1.7) par l'équation tronquée (avec $T_0 \geq T$) :

$$u(t) = \psi_{T_0}(t)\, U(t)\, \varphi + \psi_T(t) \int_0^t dt'\, U(t-t')\, f_0(u(t')). \tag{3.2}$$

Il est clair que toute solution de (3.2) résoud (1.7) localement en temps dans l'intervalle $[-T, T]$. On concentre son attention sur (3.2) qu'on essaiera de résoudre pour T petit. T sera le temps de résolution locale de (1.7). On suppose désormais $T \leq 1$. En fonction des besoins des estimations, et en particulier en vue d'obtenir un facteur de contraction petit, on pourra prendre $T_0 = T$ ou T_0 fixe, par exemple $T_0 = 1 \geq T$. On pourra aussi effectuer des troncatures supplémentaires, par exemple remplacer $f_0(u)$ par $\psi_{T_1}\, f_0(\psi_{T_1}\, u)$ avec $T_1 = T$, ou $T_1 = 2T$, ou toute autre valeur jugée utile. Dans les cas comme SNL et KdVG où $U(t)\varphi$ est 2π-périodique en t pour tout φ 2π-périodique en x, on pourra aussi 2π-périodiser ψ_T de façon à travailler dans $\mathbf{T}^{n+1}$ et injecter ainsi directement les inégalités de Strichartz démontrées dans ce cas (voir Section 4 ci-dessous). Une autre méthode permettant d'utiliser des fonctions u définies seulement dans un intervalle $I = [-T, T]$ et des espaces fonctionnels X où la norme nécessite l'usage de la transformée de Fourier est de considérer des normes d'extension (ou de restriction) du type :

$$|||u||| = \inf_{\widetilde{u}} \|\widetilde{u}\,;\, X\|,$$

où l'infimum est pris sur tous les prolongements $\widetilde{u}$ de u à $\mathbf{R}$ *i.e.* tels que $\widetilde{u}_{|I} = u$. Il semble que le travail d'estimation est essentiellement le même dans cette deuxième méthode et qu'elle ne dispense pas totalement des troncatures de la première. On se cantonnera donc à la première.

2) Dans la méthode habituelle (voir Section 2), on utilise un espace fonctionnel classique H (construit à partir d'espaces L^p, d'espaces de Sobolev, de Besov, etc.) pour la fonction inconnue et on doit effectuer séparément, comme on l'a vu plus haut, des estimations d'applications linéaires $\varphi \to U(t)\,\varphi$ et $f \to U *_R f$ à valeurs dans H, et des estimations de l'application non-linéaire f_0. Le point essentiel de la méthode de Bourgain est d'utiliser un espace fonctionnel classique pour la fonction $U(-t)\,u$, *i.e.* d'utiliser pour u un espace X défini par :

$$\|u\,;\,X\| = \|U(-t)\,u\,;\,H\|. \tag{3.3}$$

Le résultat immédiat est d'évacuer l'évolution libre des estimations linéaires et de concentrer la difficulté sur l'estimation non-linéaire de f_0 dans des normes du type (3.3). En effet :

$$\|\psi_{T_0}\,U(\cdot)\,\varphi\,;\,X\| \leq C\,\|\varphi\,;\,\mathcal{H}\| \Longleftrightarrow \|\psi_{T_0}\,\varphi\,;\,H\| \leq C\,\|\varphi\,;\,\mathcal{H}\|, \tag{3.4}$$

$$\|\psi_T(U *_R f)\,;\,X\| \leq C\,\|f\,;\,X'\| \Longleftrightarrow \|Kf\,;\,H\| \leq C\,\|f\,;\,H'\|, \tag{3.5}$$

où K est l'opérateur défini par :

$$(Kf)(t) = \psi_T(t)\int_0^t dt'\,f(t'). \tag{3.6}$$

On utilisera en priorité les espaces $X^{s,b}$ associés selon (3.3) aux espaces $H^{s,b}$ définis par (3.1) :

$$X^{s,b} = \{u : \|u\,;\,X^{s,b}\| \equiv \|U(-t)u\,;\,H^{s,b}\| < \infty\}. \tag{3.7}$$

On s'intéresse à des situations où l'opérateur linéaire L est de la forme $L = i\,\phi(-i\nabla)$, avec par exemple $\phi(\xi) = \xi^3$ pour KdV et $\phi(\xi) = -\xi^2$ pour Schrödinger, et dans tous les cas :

$$U(t) = \mathcal{F}_x^*\,\exp[it\,\phi(\xi)]\,\mathcal{F}_x. \tag{3.8}$$

La norme dans $X^{s,b}$ s'écrit alors explicitement sous la forme :

$$\|u\,;\,X^{s,b}\|^2 = \int d\xi\,d\tau\,\langle\xi\rangle^{2s}\,\langle\tau - \phi(\xi)\rangle^{2b}\,|\hat{u}(\xi,\tau)|^2, \tag{3.9}$$

qui est le point de départ des estimations non-linéaires de f_0.

Les estimations linéaires deviennent alors très simples, et en particulier (3.4) devient triviale :

Lemme 3.1 :

$$\|\psi_{T_0}\, U(\cdot)\, \varphi\, ;\, X^{s,b}\| = \|\psi_{T_0}\, ;\, H^b\|\, \|\varphi\, ;\, H^s\| \le C\, T_0^{\frac{1}{2}-b}\, \|\varphi\, ;\, H^s\|. \tag{3.10}$$

(Noter que dans une résolution par contraction dans $X^{s,b}$ avec $b > \frac{1}{2}$ et T petit, on a intérêt à prendre $T_0 = 1$ et non pas $T_0 = T$, de manière à pouvoir travailler dans une boule de taille fixe indépendante de T.)

Une forme typique de l'estimation (3.5) est la suivante :

Lemme 3.2 : *Soit* $-\frac{1}{2} < b' \le 0 \le b \le b' + 1$ *et* $T \le 1$. *Alors :*

$$\|Kg\, ;\, H_t^b\| \le C\; T^{1-(b-b')}\, \|g\, ;\, H_t^{b'}\|, \tag{3.11}$$

$$\|\psi_T(U *_R f)\, ;\, X^{s,b}\| \le C\; T^{1-(b-b')}\, \|f\, ;\, X^{s,b'}\|, \tag{3.12}$$

pour tout $s \in \mathbf{R}$ *et avec le même* C.

Preuve : Intuitivement, (3.11) exprime que l'intégration sur t dans un intervalle $O(T)$ fait gagner un facteur T (petit) à régularité constante ($b = b'$) ou un degré de dérivation en t ($b = b' + 1$) uniformément en T, ou n'importe quel interpolé convexe de ces deux bénéfices.

L'estimation (3.12) résulte trivialement de (3.5), et par intégration sur ξ, de (3.11) appliquée à $\widehat{g}_\xi(\tau) = \widehat{f}(\tau, \xi)$ à ξ fixé.

L'estimation (3.11) peut être démontrée indifféremment en variable t ou en transformée de Fourier. On donne la deuxième preuve, qui est celle de Bourgain. On écrit, en séparant les contributions des régions $|\tau|T \lessgtr 1$,

(3.13)

$$\begin{aligned}\psi_T \int_0^t dt'\, f(t') &= \psi_T \int d\tau (i\tau)^{-1}\, (e^{it\tau} - 1)\, \widehat{f}(\tau)\\ &= \psi_T \sum_{k \ge 1} \frac{t^k}{k!} \int_{|\tau|T \le 1} d\tau\, (i\tau)^{k-1}\, \widehat{f}(\tau) - \psi_T \int_{|\tau|T \ge 1} d\tau\, (i\tau)^{-1}\, \widehat{f}(\tau)\\ &+ \psi_T \int_{|\tau|T \ge 1} d\tau\, (i\tau)^{-1}\, e^{it\tau}\, \widehat{f}(\tau) = I + II + III.\end{aligned}$$

On estime les trois termes successivement dans H^b.

$$(3.14)\qquad \begin{aligned} \|I\,;\,H^b\| &\le \sum_{k\ge 1}\frac{1}{k!}\,\|t^k\psi_T\,;\,H^b\|\,T^{1-k}\,\|f\,;\,H_t^{b'}\|\left\{\int_{|\tau|T\le 1} d\tau\,\langle\tau\rangle^{-2b'}\right\}^{\frac12} \\ &\le C\,T^{1-(b-b')}\,\|f\,;\,H^{b'}\| \qquad \text{pour tout } b\ge 0,\ b'\le 0. \end{aligned}$$

$$(3.15)\qquad \begin{aligned} \|II\,;\,H^b\| &\le \|\psi_T\,;\,H^b\|\,\|f\,;\,H^{b'}\|\left\{\int_{|\tau|T\ge 1} d\tau\,|\tau|^{-2}\,\langle\tau\rangle^{-2b'}\right\}^{\frac12} \\ &\le C\,T^{1-(b-b')}\,\|f\,;\,H^{b'}\| \qquad \text{pour tout } b\ge 0,\ b'> -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On estime l'intégrale J qui figure dans III par :

$$(3.16)\qquad \begin{aligned} \|J\,;\,H^b\| &\le \|f\,;\,H^{b'}\|\,\sup_{|\tau|T\ge 1}\,\tau^{-1}\,\langle\tau\rangle^{b-b'} \\ &\le C\,T^{1-(b-b')}\,\|f\,;\,H^{b'}\| \qquad \text{pour tous } b,b'\in\mathbf{R},\ b-b'\le 1, \end{aligned}$$

et de même :

$$(3.17)\qquad \|J\|_2 \le C\,T^{1+b'}\,\|f\,;\,H^{b'}\| \qquad \text{pour tout } b'\ge -1,$$

si bien que :

(3.18)

$$\begin{aligned} \|III\,;\,H^b\| &= \|\langle\tau\rangle^b(\widehat{\psi}_T * \widehat{J})\|_2 \\ &\le C(\||\tau|^b\,\widehat{\psi}_T\|_1\,\|J\|_2 + \|\widehat{\psi}_T\|_1\,\|J\,;\,H^b\|) \\ &\le C\,T^{1-(b-b')}\,\|f\,;\,H^{b'}\| \qquad \text{pour tout } b\ge 0,\ b'\ge -1,\ b-b'\le 1. \end{aligned}$$

L'estimation (3.11) résulte alors de (3.13) (3.14) (3.15) (3.18). □

Remarques : 1) Pour $b-b'<1$, le facteur $T^{1-(b-b')}$ peut être utilisé directement pour obtenir un facteur de contraction pour T assez petit. Pour $b-b'=1$, un tel facteur doit être cherché dans l'estimation de $f_0(\psi_T\,u)$ en fonction de u.

2) Le cas limite $b'=-\frac{1}{2}$ est autorisé dans l'estimation de I et III, mais non dans celle de II, où par contre on a effectué un gaspillage en utilisant l'inégalité de Schwarz. Dans les cas où on insiste pour utiliser ce cas limite (c'est le cas de l'équation KdV périodique), on doit estimer directement l'intégrale qui figure dans II dans les normes adéquates.

3) Si on utilise des espaces plus compliqués que $X^{s,b}$, il peut arriver que les variables d'espace et de temps ne se découplent pas de façon aussi élémentaire. On utilise alors au lieu de (3.12) des estimations plus compliquées calquées sur les précédentes.

On va voir maintenant qu'on peut injecter dans le cadre précédent des informations du type des inégalités de Strichartz. Ces inégalités sont de la forme :

$$\|U(\cdot)\, u\, ;\, Y\| \leq C\, \|u\|_2 \tag{3.19}$$

pour tout $u \in L^2_x$, où Y est un espace convenable de fonctions de (x, t), par exemple $L^q_t(L^r_x)$, et donnent des estimations dans Y de solutions de l'équation linéaire. On va en déduire des estimations de fonctions de (x, t) quelconques, en fonction de normes du type précédent.

Lemme 3.3 : *On suppose que Y est stable par multiplication par L^∞_t, i.e. que :*

$$\|\psi f\, ;\, Y\| \leq C\, \|\psi\, ;\, L^\infty_t\|\, \|f\, ;\, Y\| \quad \forall \psi \in L^\infty_t, \forall f \in Y. \tag{3.20}$$

On suppose que l'inégalité (3.19) *vaut pour tout $u \in L^2_x$. Alors, pour tout $b > \frac{1}{2}$, on a l'inégalité suivante* :

$$\|f\, ;\, Y\| \leq C_b\, \|f\, ;\, X^{0,b}\| \tag{3.21}$$

pour tout $f \in X^{0,b}$, avec $C_b = C\, b^{\frac{1}{2}}(2b-1)^{-\frac{1}{2}}$.

Preuve : On écrit :

$$f = U(t) \int d\tau\, e^{it\tau} (\mathcal{F}_t U(-\cdot) f)(\tau)$$

et on applique (3.20) et (3.19) à τ fixé avec $\psi = e^{it\tau}$ et $u = (\mathcal{F}_t U(-\cdot) f)(\tau)$. On obtient :

$$\|f\, ;\, Y\| \leq C \int d\tau\, \|(\mathcal{F}_t U(-\cdot) f)(\tau)\, ;\, L^2_x\| \tag{3.22}$$

et, en appliquant l'inégalité de Schwarz :

$$\|f\, ;\, Y\| \leq C\, \|f\, ;\, X^{0,b}\| \left\{ \int d\tau\, \langle \tau \rangle^{-2b} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.23}$$

qui donne (3.21). $\square$

Remarque : Le gaspillage consenti en passant de (3.22) à (3.23) peut être réduit en utilisant des espaces fonctionnels plus compliqués. On peut par exemple utiliser une décomposition dyadique en τ et remplacer l'espace de Sobolev H^b par l'espace de Besov $B^{\frac{1}{2}}_{2,1}$.

Si on dispose d'une famille d'espace Y^θ, $0 \leq \theta \leq 1$ interpolant entre $Y^0 = L^2_{x\times t}$ et $Y^1 = Y$, on déduit du lemme 3.3 par interpolation, le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.1.— *Dans les hypothèses du lemme* 3.1 *et avec* Y^θ *comme ci-dessus, on a l'inégalité suivante pour tout* $b > \frac{\theta}{2}$:

$$\|f\,;\,Y^\theta\| \leq C\,\|f\,;\,X^{0,b}\|. \tag{3.24}$$

Preuve : Interpoler entre $(Y^1, X^{0,b}\,(b > \frac{1}{2}))$ et $(Y^0 = L^2_{x\times t},\, X^{0,0} = L^2_{x\times t})$. □

La méthode de Bourgain pour l'étude du problème de Cauchy local consiste en une méthode de contraction dans des espaces fonctionnels du type précédent, dont les $X^{s,b}$ sont les exemples les plus simples. Les estimations linéaires sont des variantes plus ou moins compliquées du lemme 3.2 et le gros du travail consiste en des estimations non-linéaires de $f_0(u)$ dans les normes précédentes, partant d'expressions comme (3.9). Ces estimations sont soit effectuées directement, soit par l'intermédiaire d'inégalités du type Strichartz, exploitées par des variantes du lemme 3.3 et du corollaire 3.1.

4. INÉGALITÉS DE STRICHARTZ PÉRIODIQUES

Les inégalités de Strichartz considérées ici sont des cas particuliers de réponses au problème suivant :

Problème : Soit $d \geq 1$ et $S \subset \mathbf{Z}^d$, et $q > 2$. Déterminer la (ou une estimation de la) meilleure constante $K_q(S)$ telle que :

$$\|\sum_{s\in S} u(s)\,\exp(i\,\langle x, s\rangle)\,;\,L^q(\mathbf{T}^d)\| \leq K_q(S)\,\|u\,;\,\ell^2(S)\|. \tag{4.1}$$

On considère d'abord le cas de l'équation de Schrödinger dans $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}$. Soit $d = n+1$. Pour $u \in L^2(\mathbf{T}^n)$, on définit :

$$f = U(t)u = \sum_m \hat{u}(m)\,\exp(imx - im^2t). \tag{4.2}$$

Soit :

(4.3) $$S_d = \{(m, -m^2) : m \in \mathbf{Z}^n\} \subset \mathbf{Z}^d.$$

Alors l'inégalité (4.1) avec $S = S_d$ est (à une normalisation près) :

(4.4) $$\|f\,;\, L^q(\mathbf{T}^{n+1})\| \leq K_q(S_d)\,\|u\|_2,$$

c'est-à-dire précisément une inégalité de Strichartz. Plus généralement, pour toute équation $\partial_t u = Lu$ avec $L = i\phi(-i\nabla)$ et $\phi : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}$, on aurait une situation analogue en prenant :

$$S = \{(m, \phi(m)) : m \in \mathbf{Z}^n\}.$$

On s'intéresse aussi à des inégalités plus générales que (4.4) où on introduit une troncature sur $\hat{u}$ pour m grand. Soit χ_N la fonction caractéristique de :

$$\{m : m \in \mathbf{Z}^n \quad \text{et} \quad |m_i| \leq N,\, 1 \leq i \leq n\}.$$

Soit :

(4.5) $$S_{d,N} = S_d \cap (\operatorname{Supp} \chi_N \times \mathbf{Z}).$$

On cherche alors des inégalités du type :

(4.6) $$\|f\,;\, L^q(\mathbf{T}^{n+1})\| \leq K_q(S_{d,N})\,\|u\|_2,$$

valables pour tout $u \in L^2$ avec $\hat{u} = \chi_N\, \hat{u}$. Cette extension est intéressante dans les cas où $K_q(S_{d,N}) \to \infty$ quand $N \to \infty$. Une telle inégalité avec $K_q(S_{d,N}) \leq C\, N^\beta$ est essentiellement équivalente à une inégalité du type :

(4.7) $$\|f\,;\, L^q(\mathbf{T}^{n+1})\| \leq C\,\|u\,;\, H^\beta\|.$$

On se limite maintenant à l'équation de Schrödinger. Dans ce cas, Bourgain a proposé et démontré en partie une conjecture sur les valeurs de $K_q(S_{d,N})$ qu'on comprend bien en comparant (4.7) avec les inégalités de Strichartz valables dans $\mathbf{R}^n$. Dans ce cas, l'inégalité (2.1) admet un exposant critique $q = r = r_S \equiv 2 + \frac{4}{n}$. Pour $q \geq r_S$, on en déduit, par une inégalité de Sobolev :

(4.8) $$\|U(t)u\,;\, L^q(\mathbf{R}^{n+1})\| \leq C\,\|U(t)u\,;\, L^q(\mathbf{R}, W_r^\beta)\| \leq C\,\|u : H^\beta\|,$$

avec $\beta \equiv \beta(q) = \frac{n}{r} - \frac{n}{q} = \frac{n}{2} - \frac{(n+2)}{q}$. La comparaison de (4.7) et (4.8) conduit à la première partie de la conjecture suivante dans le cas périodique :

Conjecture 4.1 :

$$K_q(S_{d,N}) \begin{cases} \leq C_q\, N^{\beta(q)} & \text{pour } q > r_S, \\ \ll N^{\varepsilon} & \text{pour } q = r_S, \\ \leq C_q & \text{pour } q < r_S. \end{cases}$$

La deuxième partie de la conjecture est un affaiblissement par une puissance ε de l'analogue périodique du cas de $\mathbf{R}^n$, imposé par l'existence de contre-exemples. La troisième partie est naturelle en raison de l'emboîtement des espaces L^q sur le tore.

La conjecture a été démontrée partiellement, par l'usage de deux méthodes. La première méthode s'applique au cas où $q = 2s$ est un entier pair. On écrit alors par Plancherel :

$$\|f\,;\, L^q(\mathbf{T}^{n+1})\|^q = C\, \|\mathcal{F}(f^s)\,;\, \ell^2(\mathbf{Z}^{n+1})\|^2 \tag{4.9}$$

et pour $(m,p) \in \mathbf{Z}^n \times \mathbf{Z}$ et $\hat{u} = \chi_N\, \hat{u}$,

$$\mathcal{F}(f^s)(m,p) = \sum_{\{m_1,\cdots,m_s\}}{}' \ \hat{u}(m_1)\cdots\hat{u}(m_s), \tag{4.10}$$

où la somme porte sur tous les $\{m_1,\cdots,m_s\} \in (\mathbf{Z}^n)^s$ tels que :

$$|(m_j)_i| \leq N \qquad \text{pour } 1 \leq j \leq s,\ 1 \leq i \leq n, \tag{4.11}$$

$$m_1 + \cdots + m_s = m, \tag{4.12}$$

$$m_1^2 + \cdots + m_s^2 = -p. \tag{4.13}$$

(Plus généralement, pour une équation $\partial_t u = Lu$, $L = i\phi(-i\nabla)$, on remplacerait (4.13) par $\phi(m_1) + \cdots + \phi(m_s) = p$.)

Soit $r_{m,p}$ le nombre de telles décompositions (à N fixé). On déduit de (4.10) par l'inégalité de Schwarz :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(f^s)\,;\, \ell^2(\mathbf{Z}^{n+1})\|^2 &= \sum_{m,p} |\textstyle\sum' \hat{u}(m_1)\cdots\hat{u}(m_s)|^2 \\ &\leq \sum_{m,p} r_{m,p} \textstyle\sum' |\hat{u}(m_1)|^2\cdots|\hat{u}(m_s)|^2 \\ &\leq \sup_{m,p} r_{m,p}\, \|u\|_2^{2s}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

et on est ramené à estimer $r_{m,p}$. L'étude est simple si n et s ne sont pas trop grands. Pour $q = 4$, *i.e.* $s = 2$, on a seulement deux vecteurs m_1 et m_2 ; on connaît $m_1 + m_2$ et (4.13) détermine $(m_1 - m_2)^2 = -(2p + m^2)$. Le nombre de solutions pour (m_1, m_2) est au plus 2^n fois (à cause des signes des $(m_1 - m_2)_i$) le nombre de décompositions de l'entier $-(2p + m^2)$ en somme de n carrés. En particulier $r_{m,p} \leq 2$ pour $n = 1$ uniformément en N. Les résultats connus pour ce problème [G] permettent essentiellement de démontrer la conjecture pour $q = 4$ et $n \geq 1$. Pour $n = 1$ et $q = 6$, *i.e.* $s = 3$, on est ramené à une équation diophantienne quadratique en deux variables, et les résultats connus permettent encore de démontrer la conjecture dans ce cas avec $K_6(S_{2,N}) \leq \exp\left(\frac{C \operatorname{Log} N}{(\operatorname{Log} \operatorname{Log} N)}\right)$. Le cas $n = 1$, $q = 4$ avait été obtenu précédemment dans [Z].

La deuxième méthode d'étude de la conjecture 4.1 est l'extension au cas périodique d'une méthode générale de démonstration des inégalités de Strichartz dans le cas de $\mathbf{R}^n$ et consiste à obtenir des estimations sur $\sigma = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\sigma})$ où $\hat{\sigma}$ est la mesure :

$$\hat{\sigma} = \sum_{s \in S_{d,N}} \delta_s$$

et sur l'opérateur de convolution avec σ. Le résultat principal est le suivant [B1], proposition 3.82 et [B3], proposition 1.1 :

PROPOSITION 4.1.— *Soit $n \geq 1$, $u \in L^2(\mathbf{T}^n)$ avec $\|u\|_2 \leq 1$ et $\chi_N \hat{u} = \hat{u}$ et soit $f = U(t)\, u$. Alors, pour tout $\lambda \geq N^{\frac{n}{4}}$:*

$$\text{(4.15)} \qquad \operatorname{Mes}\{(x,t) \in \mathbf{T}^{n+1} : |f(x,t)| \geq \lambda\} \leq C_q\, N^{q\beta(q)}\, \lambda^{-q}$$

pour tout $q > r_S$, et :

$$\text{(4.16)} \qquad \operatorname{Mes}\{(x,t) \in \mathbf{T}^{n+1} : |f(x,t)| \geq \lambda\} \ll N^{\varepsilon}\, \lambda^{-r_S}.$$

On renvoie à [B1] pour la preuve, qui est difficile. Si on décompose :

$$f = f\,\chi(|f| < N^{\frac{n}{4}}) + f\,\chi(|f| \geq N^{\frac{n}{4}}) = f_1 + f_2,$$

alors la proposition 4.1 dit que $f_2 \in L^q_w(\mathbf{T}^{n+1})$ pour tout $q \geq r_S$ et par suite $f_2 \in L^q(\mathbf{T}^{n+1})$ pour tout $q > r_S$ par un argument d'interpolation élémentaire, avec l'estimation de norme attendue. Par ailleurs, pour tout $q \geq 2$:

$$\text{(4.17)} \qquad \|f_1\,;\, L^q(\mathbf{T}^{n+1})\| \leq N^{(1-\frac{2}{q})\frac{n}{4}}\, \|f_1\,;\, L^2(\mathbf{T}^{n+1})\|^{\frac{2}{q}},$$

ce qui démontre la conjecture 4.1, pourvu que $(1-\frac{2}{q})\frac{n}{4} \leq \beta(q)$, *i.e.* pour $q \geq 2+\frac{8}{n}$.

Combinant ce résultat avec ceux de la première méthode, on obtient finalement les résultats suivants :

PROPOSITION 4.2.— *La conjecture* 4.1 *est démontrée*

pour $n = 1$ *pour* $2 \leq q \leq 4$ *et tout* $q \geq 6$ $(= r_S)$,

pour $n = 2$ *et tout* $q \geq 4$ $(= r_S)$,

pour $n = 3$ *et tout* $q > 4$ $(> r_S = \frac{10}{3})$,

pour $n \geq 4$ *et tout* $q \geq 2+\frac{8}{n}$ $(> r_S = 2+\frac{4}{n})$.

On conclut cette section avec deux inégalités en dimension $n = 1$, pour l'équation de Schrödinger et l'équation d'Airy. Ces inégalités sont très voisines de (3.24) et sont naturelles dans le cadre du corollaire 3.1. Dans le cas de $\mathbf{R}^n$ pour $n = 1$, pour $L = -i\phi(-i\nabla)$, $\phi(\xi) = \xi^k$ avec k entier ≥ 2, on dispose de l'inégalité de Strichartz (3.19) avec $Y = L^q(\mathbf{R}^2)$ où $q = r_S = 6$ pour $k = 2$ et plus généralement $q = r_S = 2(k+1)$ [KPV1]. Interpolant comme dans le corollaire 3.1 de façon à obtenir $Y^\theta = L^4$, *i.e.* avec $\theta = \frac{(k+1)}{2k}$, on obtient :

$$\|f\,;\,L^4(\mathbf{R}^2)\| \leq C\;\|f\,;\,X^{0,b}\| \tag{4.18}$$

pour $b > \frac{(k+1)}{4k}$. Le chemin précédent n'est pas praticable dans le cas périodique, faute de disposer de l'inégalité de Strichartz de départ avec $L^{2(k+1)}(\mathbf{T}^2)$. On peut néanmoins obtenir pour $k = 2, 3$ l'équivalent de (4.18) par une estimation directe, qui a l'avantage de regagner en outre le cas limite précédemment perdu dans la preuve du lemme 3.3 ([B1], proposition 2.6 et [B2], proposition 7.15).

PROPOSITION 4.3.— *Soit* $n = 1$ *et* $\phi(\xi) = \xi^k$, $k = 2$ *ou* 3. *Alors* :

$$\|f\,;\,L^4(\mathbf{T}^2)\| \leq C\;\|f\,;\,X^{0,b}\| \tag{4.19}$$

pour $b = \frac{(k+1)}{4k}$, *i.e.* $b = \frac{3}{8}$ *pour* $k = 2$ *(équation de Schrödinger) et* $b = \frac{1}{3}$ *pour* $k = 3$ *(équation d'Airy).*

Ces estimations seront utilisées plus loin pour traiter le problème de Cauchy pour les équations SNL et KdV respectivement.

5. LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'ÉQUATION SNL PÉRIODIQUE

On considère le problème de Cauchy pour l'équation SNL en se limitant principalement à une interaction f du type (1.2). Les résultats s'étendent à des f plus généraux sous des hypothèses convenables de régularité locale et de comportement à l'infini en puissance p. On commence par un cas simple où les résultats des Sections 3 et 4 donnent immédiatement le résultat [B1].

THÉORÈME 5.1.— *Soit $n = 1$ et $p = 3$. Alors le problème de Cauchy pour l'équation SNL* (1.1) (1.2) *avec donnée initiale dans $L^2(\mathbf{T})$ est localement bien posé dans $L^4(\mathbf{T} \times \mathbf{R})$ et dans $X^{0,b}$ pour $\frac{3}{8} \leq b < \frac{5}{8}$.*

Preuve : Il suffit de remarquer qu'après périodisation en t (voir Section 3)

$$\|f(u)\,;\, X^{0,-\frac{3}{8}}\| \leq C\,\|f(u)\,;\, L^{\frac{4}{3}}(\mathbf{T}^2)\| \leq C\,\|u\,;\, L^4(\mathbf{T}^2)\|^3 \leq C\,\|u\,;\, X^{0,\frac{3}{8}}\|^3 \tag{5.1}$$

et qu'une chaîne d'inégalités analogue vaut pour la différence $f(u_1) - f(u_2)$. Les troisième et première inégalités de (5.1) sont respectivement (4.19) et sa duale, et la seconde est triviale. Il est alors immédiat de résoudre (3.2) par contraction dans $L^4(\mathbf{T}^2)$ ou dans $X^{0,b}$ pour T assez petit, en utilisant les lemmes 3.1 et 3.2. □

On passe maintenant à une situation plus compliquée qui relève de la conjecture 4.1, *i.e.* de la proposition 4.2 avec une puissance non nulle de N. Cette puissance $\beta(q)$ signifie une perte de dérivée dans l'inégalité de Strichartz (voir (4.7) (4.8)), donc dans l'estimation de f qu'on en déduit par le lemme 3.3, et cette perte n'est pas rattrapée par le lemme 3.2 qui opère à s constant. La démonstration devient alors beaucoup plus difficile. Le résultat est le suivant ([B1], proposition 5.73 (essentiellement)).

THÉORÈME 5.2.— *Soit $n \geq 1$, $s > 0$ et $2 \leq p - 1 < \frac{4}{(n-2s)}$. On suppose de plus qu'il existe $q > p+1$, $q > r_S$ pour lequel la conjecture* 4.1 *est vraie, et tel que $(p+1)\,\beta(q) < (p-1)\,s$. Alors le problème de Cauchy pour l'équation SNL* (1.1) (1.2) *avec donnée initiale dans H^s est bien posé dans $X^{s,\frac{1}{2}}$.*

Commentaires : La condition $p-1 < \frac{4}{(n-2s)}$ est celle qu'on attend par comparaison avec le cas de $\mathbf{R}^n$ (voir théorème (2.1)). La condition $p - 1 \geq 2$ sert à assurer une régularité suffisante de f et pourrait sans doute être remplacé par $f \in C^k$ pour k assez grand. Le besoin d'un q comme indiqué vient du fait qu'on utilise la conjecture 4.1 pour un tel q et qu'on estime une norme L^{p+1} en terme d'une norme L^q. La dernière restriction sur q et s se réduit à $s > 0$ si on dispose de la conjecture 4.1 pour tout $q > r_S$ car $\beta(r_S) = 0$, et à la borne précédente pour p dans le cas limite $q = p + 1$.

Esquisse de preuve : On applique comme précédemment une méthode de contraction à l'équation (3.2), et d'après les lemmes 3.1 et 3.2, il suffit d'estimer $f(u)$ dans $X^{s,b'}$ pour un $b' > -\frac{1}{2}$. Il est commode d'utiliser une décomposition dyadique en τ (voir Section 3), ce qui permet de se ramener à estimer la composante de $\widehat{f(u)}$ avec $\tau - \phi(\xi) \equiv \tau + \xi^2 = O(2^k)$. Fixant désormais k, on effectue en outre une décomposition dyadique en ξ. On illustre le principe de la méthode sur le cas $f(u) = u^3$. Le cas de (1.2) avec p entier impair se traite de la même façon, tandis que le cas général présente des difficultés techniques (partiellement traitées dans [B1]). Soit $B_j = \{\xi : |\xi| < 2^j\}$ et $C_j = B_{j+1} \backslash B_j$. On décompose $u = \sum u_j$ avec $\operatorname{Supp} \hat{u}_j \subset C_j$ et on pose $v_j = \sum_{j' \leq j} u_j$ si bien que $\operatorname{Supp} \hat{v}_j \subset B_{j+1}$. On peut alors décomposer :

$$f(u) = \sum_m f(v_m) - f(v_{m-1}) = \sum_{\ell \leq m} u_m w_\ell = \sum_\ell (u - v_{\ell-1})\, w_\ell, \tag{5.2}$$

avec :

$$w_\ell = u_\ell(v_\ell + v_{\ell-1}) + u_{\ell-1}(v_{\ell-1} + v_{\ell-2}) + v_{\ell-1}(u_\ell + u_{\ell-1})$$

et

$$\operatorname{Supp} \hat{w}_\ell \subset B_{\ell+2}.$$

Une propriété, essentielle ici, de l'équation de Schrödinger est que l'estimation de base (4.6) est invariante par translation de $\hat{u}$ en ξ, *i.e.* que la constante dépend en fait du diamètre de $\operatorname{Supp} \hat{u}$ mais non de sa position. On exploite cette propriété en décomposant $u - v_{\ell-1} = \sum u_\alpha$ où les supports des $\hat{u}_\alpha$ ont pour diamètre $2^{\ell+1}$ et sont presque disjoints, si bien que les u_α et les $u_\alpha\, w_\ell$ sont presque orthogonaux (à un facteur de recouvrement près ne dépendant que de la dimension). Soit $m(\alpha)$ l'exposant de la couronne qui contient le support de $\hat{u}_\alpha$ et $j(\alpha)$ celui de la couronne qui contient celui de $\widehat{u_\alpha\, w_\ell}$. On note que si $j(\alpha) \geq \ell$ ou $m(\alpha) \geq \ell$, alors $j(\alpha) \simeq m(\alpha)$. Pour estimer $f(u)$ dans H^s, on doit pour chaque (α, ℓ) estimer $2^{s\,j(\alpha)} \|u_\alpha\, w_\ell\|_2$ et, laissant pour plus tard la somme sur ℓ et utilisant la presque orthogonalité citée plus haut, estimer le résultat dans ℓ^2 de la variable α. On estime la norme précédente en utilisant l'inégalité duale de (4.6), l'inégalité de Hölder et l'inégalité (4.6) comme dans (5.1). Le point essentiel est que les facteurs qui apparaissent dans l'application de (4.6) et sa duale, grâce à la propriété d'invariance citée plus haut, sont $2^{\ell\,\beta(q)}$ et non pas $2^{m(\alpha)\beta(q)}$ ou $2^{j(\alpha)\beta(q)}$. Par suite, quand on estime la norme dans H^s en prenant la norme dans ℓ^2_α, le facteur $2^{s\,j(\alpha)} \sim 2^{s\,m(\alpha)}$ reconstitue (à ℓ fixé) la norme de u dans H^s et non dans un espace de Sobolev d'ordre supérieur, ce qui permet de rattraper la perte de dérivée citée plus haut. Il ne reste plus alors qu'à effectuer la somme sur ℓ et la somme sur k, qui convergent géométriquement dès qu'on dispose d'un peu de marge dans les exposants, ce qui est le cas avec les conditions d'inégalité strictes imposées aux paramètres p, s et q. $\square$.

Les théorèmes 5.1 et 5.2 résolvent le problème de Cauchy local en temps. Comme on l'a dit plus haut, l'extension à $\mathbf{R}$ entier des solutions ainsi obtenues repose sur les estimations a priori déduites des lois de conservation, et la situation dans le cas de $\mathbf{T}^n$ est très semblable à celle de $\mathbf{R}^n$. L'équation (1.1) (1.2) possède les mêmes lois de conservation, celle de la norme dans L^2_x et celle de l'énergie $E(u)$ encore donnée par (2.5). Ces lois contrôlent la norme dans H^1 dans les mêmes conditions que dans le cas de $\mathbf{R}^n$. En particulier, les solutions du théorème 5.1 sont prolongeables en solutions globales, et il en est de même de celles du théorème 5.2 correspondant au cas $s = 1$ si l'énergie contrôle la norme H^1.

On conclut cette section en citant brièvement quelques résultats complémentaires. Le premier [B3] a trait au problème de Cauchy pour (1.1) en dimension $n = 4$ pour f généralisant (1.2) avec $p = 2$ (*i.e.* $p + 1 = 3 = 2 + \frac{4}{n} = r_S$) et pour des données initiales $\varphi \in H^2$. L'espace X est toujours du type (3.3) avec pour H une variante de $H^{2,\frac{1}{2}}$, où dans la variable temps on remplace $H^{\frac{1}{2}}$ par l'espace de Birman-Solomjak (non comparable mais dimensionnellement équivalent à l'infini en τ) $\mathcal{F}(\ell^1(L^2))$, *i.e.* H est défini par la norme :

$$\|u\,;\,H\| = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left\{ \int_{k\le\tau\le k+1} d\tau \sum_\xi (1 + |\xi| + \gamma\xi^2)^2\, |\hat{u}(\xi,\tau)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{5.4}$$

où $\gamma > 0$ est un paramètre qu'on ajuste en fonction des besoins. On obtient alors [B3] :

THÉORÈME 5.3.— *Soit* $n = 4$ *et* $f(u) = u\,g(|u|^2)$ *avec* $g \in C^2(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ *et* $|g(s)| \le c\,s^{\frac{1}{2}}$, $|g'(s)| \le c\,s^{-\frac{1}{2}}$, $|g''(s)| \le c\,s^{-\frac{3}{2}}$. *Alors le problème de Cauchy pour l'équation SNL* (1.1) *avec donnée initiale* $\varphi \in H^2(\mathbf{T}^4)$ *est localement bien posé dans* X *défini par* (3.3) (5.4).

Les solutions ainsi obtenues se prolongent globalement si l'énergie contrôle la norme dans H^1, *en particulier si* $g \ge 0$ *ou si* $\|\varphi\|_2$ *est petit.*

La preuve du résultat local repose sur une méthode de contraction partielle dans X, dans laquelle on montre que le second membre de l'équation (3.2) laisse invariant un borné de X et y contracte une norme plus faible. La preuve est compliquée et utilise des décompositions dyadiques comme celle du théorème 5.2. La globalisation demande un argument supplémentaire pour contrôler la norme dans H^2. Cet argument utilise de façon essentielle le fait que, à $\|\varphi\,;\,H^1\|$ fixé, le temps de résolution locale dépend logarithmiquement de $\|\varphi\,;\,H^2\|$.

Enfin, les théorèmes 5.1 et 5.2 ont été utilisés pour construire des mesures de Gibbs sur l'espace des données initiales invariantes par le flot local défini par l'équation (1.1) et en déduire des résultats d'existence globale presque partout par rapport à ces mesures [B6,7].

6. LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'ÉQUATION KdV ET SES GÉNÉRALISATIONS

La méthode de Bourgain est conçue pour traiter le cas de l'équation KdV périodique, mais elle s'applique aussi bien au cas de l'équation dans $\mathbf{R}$, où elle améliore les résultats précédemment connus et permet de traiter des données initiales dans H^s pour certains s négatifs. Le résultat initial [B2] donnait $s \geq 0$. Il a été amélioré à $s > -\frac{1}{2}$ dans le cas périodique et successivement à $s > -\frac{5}{8}$ et $s > -\frac{3}{4}$ dans le cas de $\mathbf{R}$ [KPV3,4]. Les méthodes précédentes donnaient seulement $s > \frac{3}{4}$ dans le cas de $\mathbf{R}$ [KPV2]. On énonce directement le meilleur résultat et on esquisse les différentes variantes de preuve donnant accès aux différents cas.

THÉORÈME 6.1.— *Le problème de Cauchy pour l'équation KdV* (1.3) *dans* $\mathbf{T} \times \mathbf{R}$ *avec donnée initiale dans* $H^s(\mathbf{T})$ *est localement bien posé dans* $X^{s,\frac{1}{2}}$ *pour tout* $s > -\frac{1}{2}$. *Le problème de Cauchy pour l'équation KdV* (1.3) *dans* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ *avec donnée initiale dans* $H^s(\mathbf{R})$ *est localement bien posé dans* $X^{s,b}$ *pour tout* $s > -\frac{3}{4}$, *pour un* $b > \frac{1}{2}$ *(dépendant de* s *et assez voisin de* $\frac{1}{2}$*).*

Esquisse de preuve

1) *Arguments généraux*

Dans le cas de $\mathbf{R}$, par le lemme 3.2, il suffit de montrer que l'application $u \to f(u) = u\,\partial_x u$ est bornée de $X^{s,b}$ dans $X^{s,b'}$ pour un $b' > b - 1$. Dans le cas périodique, il semble impossible d'éviter d'utiliser le couple $(X^{s,\frac{1}{2}}, X^{s,-\frac{1}{2}})$. On montre que f est bornée du premier dans le second, mais on doit aussi extraire de cette estimation le facteur de contraction, et on doit en outre estimer séparément l'intégrale venant de II dans (3.13) (voir les remarques 1) et 2) après le lemme 3.2). Par ailleurs, dans le cas périodique, grâce à la loi de conservation $\int u\,dx = const.$, on peut se ramener facilement au cas où $\hat{u}(\xi = 0) = 0$ pour tout t. On se limite ci-dessous à l'estimation de f de $X^{s,b}$ dans $X^{s,b'}$. La propriété de Lipschitz de f résulte immédiatement de cette estimation et du fait que f est quadratique en u. Par dualité et après un changement de fonction approprié pour éliminer les facteurs figurant dans les normes (3.9), on est ramené à établir une estimation du type :

$$\begin{aligned} J \equiv \int d\tau_1\, d\tau_2\, d\xi_1\, d\xi_2\, \frac{\xi \hat{v}(1+2)\,\hat{v}_1(1)\,\hat{v}_2(2)\,\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle\sigma\rangle^c\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_2\rangle^b} \\ \leq C\,\|v\|_2\,\|v_1\|_2\,\|v_2\|_2, \end{aligned} \tag{6.1}$$

où $c = -b' \geq 0$, les arguments des $\hat{v}_{(i)}$ sont $1 = (\xi_1, \tau_1)$, $2 = (\xi_2, \tau_2)$ et $1 + 2 = (\xi = \xi_1 + \xi_2, \tau = \tau_1 + \tau_2)$ et $\sigma_{(i)} = \tau_{(i)} - \xi_{(i)}^3$.

Dans le cas périodique, les intégrales sont des sommes et les sommes sur ξ_1, ξ_2 sont restreintes à $\xi_1 \neq 0$, $\xi_2 \neq 0$, $\xi \neq 0$, si bien que $|\xi_1| \geq 1$, $|\xi_2| \geq 1$ et $|\xi| \geq 1$. Une information cruciale que la méthode permet d'injecter est le fait que :

$$\sigma - \sigma_1 - \sigma_2 = -\xi^3 + \xi_1^3 + \xi_2^3 = -3\,\xi\,\xi_1\,\xi_2, \tag{6.2}$$

si bien que :

$$\mathrm{Max}(|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|) \geq |\xi\,\xi_1\,\xi_2|. \tag{6.3}$$

Le $\sigma_{(i)}$ de module maximum sera dit dominant. Par ailleurs :

$$1 + |\xi| \leq (1 + |\xi_1|)(1 + |\xi_2|),$$

donc J est monotone décroissante en s et la difficulté est de descendre s.

2) *Méthode originale* [B2] [KPV3]

Cette méthode donne $s \geq 0$ dans le cas périodique et $s > -\frac{5}{8}$ dans le cas de $\mathbf{R}$. On estime séparément les contributions des régions σ dominant et σ_1 (ou σ_2) dominant. On se limite ici au cas σ dominant, et dans le cas de $\mathbf{R}$, à la région la plus dangereuse $|\xi_1| \geq 1$, $|\xi_2| \geq 1$ (cette condition est automatique dans le cas périodique).

Dans le cas périodique, on minore par (6.3) :

$$\langle\sigma\rangle^c = \langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}} \geq |\xi\,\xi_1\,\xi_2|^{\frac{1}{2}} \geq \frac{|\xi|}{\sqrt{2}}, \tag{6.4}$$

si bien que, pour $s = 0$:

$$\begin{aligned} |J| &\leq C\,\|v\|_2 \prod_{i=1,2} \|\mathcal{F}^*(\hat{v}_i\,\langle\sigma\rangle^{-\frac{1}{2}})\|_4 \\ &\leq C\,\|v\|_2\,\|v_1\|_2\,\|v_2\|_2, \end{aligned} \tag{6.5}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder en (x,t) ou de Young en (ξ,τ), puis la proposition 4.3 avec $k = 3$, $b = \frac{1}{3}$ et $f = \mathcal{F}^*(\hat{v}_i\,\langle\sigma\rangle^{-\frac{1}{2}})$. De plus un argument supplémentaire simple permet d'exploiter la marge de $\frac{1}{6}$ sur b pour extraire un facteur de contraction T^θ avec $\theta > 0$.

Dans le cas de $\mathbf{R}$, dans la région σ dominant, $|\xi_1| \geq 1$, $|\xi_2| \geq 1$, on élimine $\langle\sigma\rangle^c$ en dénominateur dans J par (6.3) et pour $s \leq c-1$, on estime comme plus haut par Hölder et/ou Young :

$$J \leq C\,\|v\|_2 \prod_{i=1,2} \|\mathcal{F}^*(\hat{v}_i\,\langle\xi\rangle^{-(s+c)}\,\langle\sigma\rangle^{-b})\|_4^2 \tag{6.6}$$

et on conclut en exploitant, au moyen du lemme 3.3 et du corollaire 3.1 les inégalités dites de lissage local de l'équation d'Airy [KPV1], qui sont des inégalités du type (3.19) avec :

$$\|f\,;Y\| = \|\,|\partial_x|^{1-\frac{5\alpha}{2}}\,f\,;\,L_x^q(L_t^r)\| \tag{6.7}$$

et $0 \leq \frac{2}{q} = \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}$. Un choix approprié des paramètres r dans (6.7) et θ dans (3.19) conduit directement à la condition $s > -\frac{5}{8}$ pour un $b > \frac{1}{2}$.

3) *Méthode modifiée* [KPV4]

Cette méthode est une estimation directe élémentaire de J dont on donne le principe dans le cas de $\mathbf{R}$ et dans la même région, σ dominant, $|\xi_1| \geq 1$ et $|\xi_2| \geq 1$. Avec $\zeta_1 = (\xi_1,\tau_1)$, $\zeta_2 = (\xi_2,\tau_2)$, $\zeta = (\xi,\tau)$, l'intégrale à estimer est de la forme :

$$J = \int d\zeta_1\;d\zeta_2\;\widehat{v}(\zeta)\;\widehat{v}_1(\zeta_1)\;\widehat{v}_2(\zeta_2)\;K(\zeta_1,\zeta_2).$$

Appliquant l'inégalité de Schwarz à l'ensemble des variables, on obtient :

$$(6.8)\qquad \begin{aligned} |J| &\leq \|v_1\|_2 \, \|v_2\|_2 \left\{ \int d\zeta_1 \, d\zeta_2 \, |K(\zeta_1, \zeta_2) \, \widehat{v}(\zeta)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|v_1\|_2 \, \|v_2\|_2 \, \|v\|_2 \left\{ \operatorname*{Sup}_{\zeta} \int d\zeta_2 \quad |K(\zeta - \zeta_2 \, , \, \zeta_2)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

On reporte l'expression de K, on estime l'intégrale sur τ_2 à ξ, ξ_2, τ fixés de façon élémentaire, on prend comme variable d'intégration $z = -\xi \, \xi_1 \, \xi_2$, et on obtient, en tenant compte de (6.3) :

$$(6.9)\qquad \begin{aligned} |J| \leq C \operatorname*{Sup}_{\xi,\sigma} \langle \xi \rangle^s \langle \sigma \rangle^{-c} & \left\{ \int_{|z| \leq \sigma} dz \left| \frac{dz}{d\xi_2} \right|_{\xi}^{-1} \langle \sigma - 3z \rangle^{-2b} \langle \xi_1 \rangle^{-2s} \langle \xi_2 \rangle^{-2s} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \times \|v\|_2 \, \|v_1\|_2 \, \|v_2\|_2 , \end{aligned}$$

où $\left(\frac{dz}{d\xi_2}\right)_{\xi} = \xi(\xi_2 - \xi_1)$ à ξ fixé et ξ_1 et ξ_2 sont considérés comme fonctions de ξ et z. Il ne reste plus qu'à estimer une intégrale complètement explicite. Cette estimation (et celle de l'intégrale analogue venant de la région σ_1 (ou σ_2) dominant) conduit à la condition $s > -\frac{3}{4}$ dans le cas de $\mathbf{R}$.

La méthode dans le cas périodique est analogue et donne la condition $s > -\frac{1}{2}$. $\square$

Comme dans le cas de l'équation SNL, le passage du local au global en temps s'effectue en utilisant les estimations a priori résultant des lois de conservation. Pour l'équation KdV, la norme de u dans L^2_x est conservée, et le problème de Cauchy est donc globalement bien posé pour des données dans L_2.

On conclut cette section en citant brièvement quelques résultats relatifs à l'équation [KdVG] (1.4) périodique ([B2], Sec. 8 et [B5]) et à l'équation KP [B4].

Dans le cas le plus simple de l'équation (1.4) avec $f(u) = u^3$ (équation KdV "modifiée"), le problème de Cauchy périodique est localement bien posé pour des données initiales dans H^s avec $s \geq \frac{1}{2}$ et globalement bien posé pour $s \geq 1$, grâce à la conservation de l'énergie qui contrôle la norme dans H^1. Le problème local se résoud par contraction dans un espace voisin de $X^{s,\frac{1}{2}}$, après une réduction du problème au cas où $\hat{u}(\xi = 0) = 0$ pour tout t, permise par la conservation de la norme dans L^2. L'estimation fondamentale qui remplace (6.1) comporte maintenant quatre fonctions au lieu de trois, et l'identité (6.2) est remplacée avec des notations évidentes par :

$$(6.10)\qquad \sigma - \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = -\xi^3 + \xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 = -3(\xi_1 + \xi_2)(\xi_2 + \xi_3)(\xi_3 + \xi_1)$$

donnant encore une minoration du σ dominant si les trois derniers facteurs sont non nuls.

Dans le cas plus général où $f(u)$ est une puissance $f(u) = u^k$, $k > 2$, ou plus généralement une fonction régulière de u, le problème est plus difficile. On ne peut plus se ramener de façon simple au cas où $\hat{u}(\xi = 0) = 0$. On perd le bénéfice de la méthode de contraction et on doit utiliser le théorème de point fixe de Schauder qui donne un résultat d'existence sans unicité pour des données initiales dans H^s avec $s \geq 1$. On retrouve ensuite un résultat d'unicité (donc un problème localement bien posé) pour $s > \frac{3}{2}$ par un argument élémentaire bien connu dans le cas de $\mathbf{R}$, et qui s'applique verbatim dans le cas périodique. Les estimations sont beaucoup plus difficiles et l'espace de résolution locale est taillé sur mesure pour les exploiter.

On considère enfin le cas de l'équation KP (1.5). On note $(x, y) \in \mathbf{T}^2$ ou $\mathbf{R}^2$ les variables d'espace, en accord avec (1.5), et $(\xi, \eta) \in \mathbf{Z}^2$ ou $\mathbf{R}^2$ les variables conjuguées de Fourier. Dans le cas périodique et comme pour l'équation KdV, on se ramène facilement au cas où $\hat{u}(\xi = 0, \eta) = 0$ pour tout η et tout t, si bien que pour u périodique, v est également périodique. L'équation linéaire sous-jacente correspond à $\phi(\xi, \eta) = \xi^3 - \varepsilon\, \frac{\eta^2}{\xi}$. L'espace de résolution locale est une variante $\widetilde{X}^{s,\frac{1}{2}}$ de $X^{s,\frac{1}{2}}$ définie (*cf.* (3.3)) par :

$$\|u\,;\, \widetilde{X}^{s,\frac{1}{2}}\| = \|U(-\cdot)\, u\,;\, \widetilde{H}^{s,\frac{1}{2}}\|,$$

$$\|u\,;\, \widetilde{H}^{s,\frac{1}{2}}\|^2 = \int d\xi\, d\eta\, d\tau\, \langle|\xi| + |\eta|\rangle^{2s} (\mu + |\tau|) \left(1 + \frac{|\tau|}{\mu + |\xi|^3}\right)^{\frac{1}{2}} |\hat{u}(\xi, \eta, \tau)|^2, \tag{6.11}$$

où μ est un paramètre, $\mu = 0(T^{-1})$ et les intégrales deviennent des sommes avec $\xi \neq 0$ dans le cas périodique. Le résultat est le suivant [B4].

THÉORÈME 6.2.— *Le problème de Cauchy pour l'équation KPII* ($\varepsilon = +1$) *dans* $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}$ *(resp.* $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$*) est globalement bien posé dans* $\widetilde{X}^{s,\frac{1}{2}}$ *pour des données initiales dans* $H^s(\mathbf{T}^2)$ *(resp.* $H^s(\mathbf{R}^2)$*) pour* $s \geq 0$.

La preuve suit le schéma général de celle adaptée à l'équation KdV. Les estimations linéaires sont à reprendre en s'inspirant du lemme 3.2 et des remarques qui le suivent. L'estimation non-linéaire porte sur une intégrale analogue à (6.1) avec des facteurs supplémentaires venant de la définition (6.11) de la norme. La relation (6.2) est remplacée par :

$$\begin{aligned} \sigma - \sigma_1 - \sigma_2 &= -\phi(\xi, \eta) + \phi(\xi_1, \eta_1) + \phi(\xi_2, \eta_2) \\ &= -3\,\xi\,\xi_1\,\xi_2 - \varepsilon(\xi\,\xi_1\,\xi_2)^{-1}(\xi_1\,\eta_2 - \xi_2\,\eta_1)^2 \end{aligned} \tag{6.12}$$

qui n'a de bonnes propriétés de signe et ne fournit des minorations utiles du σ dominant que pour $\varepsilon = +1$ (équation KPII), ce qui restreint à ce cas l'application de la méthode. Les estimations utilisent en outre des décomposition dyadiques en ξ et τ (mais non en η) dans le même esprit que pour l'équation SNL (théorème 5.2). La globalisation pour $s = 0$ résulte de la conservation de la norme L^2 et, pour $s > 0$, utilise en outre une estimation linéaire de la norme supplémentaire requise.

BIBLIOGRAPHIE

[B1] J. BOURGAIN - *Fourier restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations* I, *Schrödinger equations*, Geom. and Funct. Anal. **3** (1993), 107-156.

[B2] J. BOURGAIN - Id. II, *The KdV equations*, Ibid. **3** (1993), 209-262.

[B3] J. BOURGAIN - *Exponential sums and nonlinear Schrödinger equations*, Ibid. **3** (1993), 157-178.

[B4] J. BOURGAIN - *On the Cauchy problem for the Kadomtsev-Petviashvili equation*, Ibid. **3** (1993), 315-341.

[B5] J. BOURGAIN - *On the Cauchy problem for periodic KdV type equations*, prétirage IHES (1994).

[B6] J. BOURGAIN - *Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures*, Commun. Math. Phys. **166** (1994), 1-26.

[B7] J. BOURGAIN - *Invariant measures for the 2D-defocusing nonlinear Schrödinger equation*, prétirage IHES (1994).

[B8] J. BOURGAIN - *On the long time behaviour of nonlinear Hamiltonian equations*, prétirage IHES (1994).

[C] T. CAZENAVE - *An introduction to nonlinear Schrödinger equations*, Text. Met. Mat. **22**, Inst. Mat., Rio de Janeiro (1989).

[CW] T. CAZENAVE and F. WEISSLER - *The Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation in H^s*, Nonlinear Anal. TMA **14** (1990), 807-836.

[GV] J. GINIBRE and G. VELO - *Smoothing properties and retarded estimates for some dispersive evolution equations*, Commun. Math. Phys. **144** (1992), 163-188.

[G] E. GROSSWALD - *Representation of integers as sums of squares*, Springer, Berlin (1985).

[K] T. KATO - *On nonlinear Schrödinger equations*, Ann. IHP (Phys. Théor.) **46** (1987), 113-129.

[KPV1] C. KENIG, G. PONCE and L. VEGA - *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana U. Math. J. **40** (1991), 33-69.

[KPV2] C. KENIG, G. PONCE and L. VEGA - *Well posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 527-620.

[KPV3] C. KENIG, G. PONCE and L. VEGA - *The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices*, Duke Math. J. **71** (1993), 1-21.

[KPV4] C. KENIG, G. PONCE and L. VEGA - *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*, prétirage (1994).

[KM] S. KLAINERMAN and M. MACHEDON - *Smoothing estimates for null forms and applications*, prétirage (1994).

[S] R. STRICHARTZ - *Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations*, Duke Math. J. **44** (1977), 705-714.

[Y] K. YAJIMA - *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*, Commun. Math. Phys. **110** (1987), 415-426.

[Z] A. ZYGMUND - *On Fourier coefficients and transforms of functions of two variables*, Studia Math. **50** (1974), 189-201.

Jean GINIBRE

Université de Paris XI
Département de Physique
Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies
URA 063 du CNRS
Bâtiment 211
F-91405 ORSAY CEDEX

I. G. MacDonald

Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 797, p. 189-207
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__189_0>

Séminaire BOURBAKI Mars 1995
47ème année, 1994-95, n° 797

AFFINE HECKE ALGEBRAS AND ORTHOGONAL POLYNOMIALS

by **I.G. MACDONALD**

INTRODUCTION

Orthogonal polynomials in one variable have a long history, going back at least to the 18th century, and a vast literature. The orthogonal polynomials of my title, however, are polynomials in several variables, and are of more recent vintage. They may be regarded as extrapolations and generalizations of Weyl's formula for the characters of a compact Lie group, and the combinatorial infrastructure of such a group (root system, Weyl group) correspondingly plays a preponderant role. At the present time it appears that an appropriate framework for the study of these polynomials is provided by the notion of an affine root system. To each affine root system of rank r, reduced or not, there corresponds a family (in fact, two families) of orthogonal polynomials in r variables. However, in an effort to keep things as simple as possible, we shall in this account restrict ourselves to one type of affine root systems (see (2.1) below).

1. ORTHOGONAL POLYNOMIALS

Let R be an irreducible reduced root system. For the most part we shall adhere to Bourbaki's notation [B]. Thus we shall denote by :

R^+ the set of positive roots relative to a fixed basis of R,

P the weight lattice of R,

P^+ the cone of dominant weights,

Q the root lattice of R,

Q^+ the cone spanned by the positive roots,

W_0 the Weyl group of R.

We have $Q \subset P$ (but $Q^+ \not\subset P^+$), and P/Q is a finite group. Let m be the smallest positive even integer such that $mP \subset Q$, let q be an indeterminate and let

$$K = \mathbf{Q}(q^{\frac{1}{m}}).$$

Let $A = K[P]$ be the group algebra of P over K. For each $\lambda \in P$, let e^λ denote the corresponding element of A (so that $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$, $(e^\lambda)^{-1} = e^{-\lambda}$, and e^0 is the identity element of A). The Weyl group W_0 acts on P, hence on $A : w(e^\lambda) = e^{w\lambda}$. Let $A_0 = A^{W_0}$ denote the subalgebra of W_0-invariants.

Since each W_0-orbit in P meets P^+ exactly once, it follows that the *orbit-sums*

$$m_\lambda = \sum_{\mu \in W_0\lambda} e^\mu, \tag{1.1}$$

where $\lambda \in P^+$ and $W_0\lambda$ is the W_0-orbit of λ, form a K-basis of A_0.

We shall now define a scalar product on A. If $f \in A$, say $f = \sum_\lambda f_\lambda e^\lambda$, with coefficients $f_\lambda \in K$, let

$$\overline{f} = \sum_\lambda f_\lambda e^{-\lambda}$$

and let $[f]_1$ $(= f_0)$ denote the *constant term* of f. Now let k be a non-negative integer and define, for $f, g \in A$

$$\langle f, g\rangle_k = \frac{1}{|W_0|} [f \, \overline{g} \, \Delta_k]_1, \tag{1.2}$$

where

$$\Delta_k = \prod_{\alpha \in R} \prod_{i=0}^{k-1} (1 - q^i e^\alpha). \tag{1.3}$$

This scalar product is symmetric and non-degenerate.

On P^+ we have a partial order defined by

$$\lambda \geq \mu \quad \textit{if and only if} \quad \lambda - \mu \in Q^+. \tag{1.4}$$

With this explained, we can state the following existence theorem [M4] :

THEOREM 1.5.— *There exists a unique K-basis $(P_\lambda)_{\lambda \in P^+}$ of A_0 such that*

a) $P_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} a_{\lambda\mu} m_\mu$, *with coefficients $a_{\lambda\mu}$ rational functions of q and q^k,*

b) $\langle P_\lambda, P_\mu\rangle_k = 0$ *if* $\lambda \neq \mu$.

At this stage we shall say nothing about the proof of 1.5 (see § 6 below). We shall only remark that since the ordering (1.4) is not a total ordering (unless the rank of R is 1), the existence of the P_λ satisfying a) and b) is not immediately obvious. Indeed, we can determine P_λ uniquely to satisfy a) and

c) $\langle P_\lambda, m_\mu\rangle_k = 0$ *whenever* $\mu < \lambda$,

and this would imply b) when either $\lambda > \mu$ or $\lambda < \mu$, but not when λ and μ are incomparable.

In particular, when $k = 0$ (so that $\Delta_k = 1$), P_λ reduces to the orbit-sum m_λ, and when $k = 1$, the polynomial P_λ is given by Weyl's character formula. In the limiting case $q \to 1$, the P_λ are the "Jacobi polynomials" of Heckman and Opdam ([H], [HO], [O1], [O2]).

THEOREM 1.6 [C1].— *We have*

$$\langle P_\lambda, P_\lambda\rangle_k = \prod_{\alpha\in R^+}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{1-q^{\langle\lambda+k\rho,\alpha^\vee\rangle+i}}{1-q^{\langle\lambda+k\rho,\alpha^\vee\rangle-i}}$$

for all $\lambda \in P^+$, where $\alpha^\vee$ is the coroot of α, and

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R^+}\alpha.$$

This formula was conjectured in [M4] and verified there in various particular cases. In the limiting case $q \to 1$, it was proved for all root systems R by Opdam [O3], and in full generality by Cherednik [C1].

Finally, observe that when $\lambda = 0$ (so that $P_\lambda = 1$), the formula (1.6) gives the constant term of Δ_k. This was the subject of earlier conjectures [M3], which at the time of Cherednik's paper had been settled affirmatively for all R with the exception of E_6, E_7 and E_8.

2. THE AFFINE ROOT SYSTEM AND EXTENDED AFFINE WEYL GROUP

As before, let R be a reduced irreducible root system, spanning a real vector space E of dimension r, and let $\langle x, y\rangle$ be a positive definite scalar product on E

invariant under the Weyl group W_0 of R. For each $\alpha \in R$, let

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle},$$

so that

$$R^\vee = \{\alpha^\vee : \alpha \in R\}$$

is the dual root system. Let $Q^\vee$ denote the root lattice and $P^\vee$ the weight lattice of $R^\vee$.

We shall regard each $\alpha \in R$ as a linear function on $E : \alpha(x) = \langle \alpha, x \rangle$ for $x \in E$. Also let δ denote the constant function 1 on E. Then

$$S = S(R) = \{\alpha + n\delta : \alpha \in R,\, n \in \mathbf{Z}\} \tag{2.1}$$

is the *affine root system* associated with R. The elements of S are affine-linear functions on E, called *affine roots.*

For each $a \in S$, let H_a denote the affine hyperplane on which a vanishes,and let s_a denote the orthogonal reflection in this hyperplane. The *affine Weyl group* W_S is the group of affine isometries of E generated by these reflections. For each $\alpha \in R$, the mapping $s_\alpha \circ s_{\alpha+\delta}$ takes $x \in E$ to $x + \alpha^\vee$, so that

$$\tau(\alpha^\vee) = s_\alpha \circ s_{\alpha+\delta}$$

is translation by $\alpha^\vee$. It follows that W_S contains a subgroup of translations isomorphic to $Q^\vee$, and we have

$$W_S = W_0 \ltimes \tau(Q^\vee) \tag{2.2}$$

(semi-direct product).

The *extended affine Weyl group* is

$$W = W_0 \ltimes \tau(P^\vee). \tag{2.3}$$

It acts on E as a discrete group of isometries, and hence by transposition on functions on E. As such, it permutes the affine roots $a \in S$.

Let $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ be a set of simple roots (or basis) of R, let R^+ (resp. R^-) be the set of positive (resp. negative) roots determined by this basis, and let $\varphi \in R^+$ be the highest root. Correspondingly, the affine roots $a_0, a_1, , \cdots, a_r$, where

$$a_0 = -\varphi + \delta \quad , \quad a_i = \alpha_i \quad (1 \le i \le r)$$

form a set of simple roots for S. Let

$$C = \{x \in E : a_i(x) > 0 \quad (0 \le i \le r)\},$$

so that C is an open r-simplex bounded by the hyperplanes H_{a_i} $(0 \le i \le r)$. Then W_S is generated by the reflections $s_i = s_{a_i}$ $(0 \le i \le r)$, subject to the relations

$$s_i^2 = 1, \tag{2.4}$$

$$s_i\, s_j\, s_i \cdots = s_j\, s_i\, s_j \cdots \tag{2.5}$$

whenever $i \ne j$ and $s_i\, s_j$ has finite order m_{ij} in W_S, there being m_{ij} terms on either side of (2.5). In other words, W_S is a Coxeter group on the generators s_i.

The connected components of $E - \cup_{a \in S} H_a$ are open simplexes, each congruent to C; and each such component is of the form wC for a unique $w \in W_S$.

An affine root $a \in S$ is *positive* (resp. *negative*) relative to C if $a(x) > 0$ (resp. $a(x) < 0$) for all $x \in C$. Let S^+ (resp. S^-) denote the set of positive (resp. negative) affine roots. Then $S^- = -S^+$, and $S = S^+ \cup S^-$. Explicitly, we have

$$S^+ = \{\alpha + (n + \chi(\alpha))\,\delta : \alpha \in R,\, n \in \mathbf{N}\} \tag{2.6}$$

where χ is the characteristic function of R^- (*i.e.* $\chi(\alpha) = 0$ if $\alpha \in R^+$, and $\chi(\alpha) = 1$ if $\alpha \in R^-$).

We now define a length function on the extended group W : if $w \in W$, let

$$\ell(w) = \mathrm{Card}(S^+ \cap w^{-1} S^-), \tag{2.7}$$

the number of positive affine roots made negative by w. Equivalently, $\ell(w)$ is the number of hyperplanes H_a separating C from wC. From (2.3), any element of W is uniquely of the form $w\tau(\lambda)$, where $w \in W_0$ and $\lambda \in P^\vee$, and it follows from the description (2.6) of S^+ that

$$\ell(w\tau(\lambda)) = \sum_{\alpha \in R^+} |\langle \lambda, \alpha \rangle + \chi(w\alpha)| \tag{2.8}$$

where as above χ is the characteristic function of R^-.

Now W, unlike W_S, is in general not a Coxeter group (unless $P^\vee = Q^\vee$) and may contain elements $\ne 1$ of length zero. Let

$$\Omega = \{w \in W : \ell(w) = 0\}. \tag{2.9}$$

The elements of Ω stabilize the simplex C, and hence permute the simple affine roots $a_0, \cdots, a_r$. For each $w \in W$, there exists a unique $w' \in W_S$ such that $wC = w'C$, and hence w factorizes uniquely as $w = w'v$ with $w' \in W_S$ and $v \in \Omega$. Consequently we have

$$W = W_S \rtimes \Omega \tag{2.10}$$

(semidirect product). From (2.2), (2.3) and (2.10), it follows that $\Omega \cong W/W_S \cong P^\vee/Q^\vee$, hence is a finite abelian group.

We regard each weight $\mu \in P$, like each root $\alpha \in R$, as a linear function on $E : \mu(x) = \langle \mu, x \rangle$ for $x \in E$. If $w \in W$, then $w\mu$ is an affine-linear function on $E : (w\mu)(x) = \langle \mu, w^{-1}x \rangle$. Suppose that $w = v\tau(\lambda)$, where $v \in W_0$ and $\lambda \in P^\vee$. Then we have

$$w\mu = (v\tau(\lambda))\mu = v\mu - \langle \lambda, \mu \rangle \, \delta. \tag{2.11}$$

3. THE BRAID GROUP

The *braid group* B of W is the group with generators $T(w)$, $w \in W$, and relations

$$T(v)\,T(w) = T(vw) \tag{3.1}$$

whenever $\ell(vw) = \ell(v) + \ell(w)$. We shall denote $T(s_i) = T(s_{a_i})$ by T_i $(0 \leq i \leq r)$, and $T(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ simply by ω. Then B is generated by $T_0, \cdots, T_r$ and Ω subject to the following relations :

a) the counterparts of (2.5), namely the *braid relations*

$$T_i\,T_j\,T_i \cdots = T_j\,T_i\,T_j \cdots \tag{3.2}$$

with m_{ij} terms on either side ;

b) the relations

$$\omega\,T_i\,\omega^{-1} = T_j \tag{3.3}$$

for $\omega \in \Omega$, where $\omega\, a_i = a_j$.

Let λ be a dominant weight for $R^\vee$, and define

$$Y^\lambda = T(\tau(\lambda))$$

where as before $\tau(\lambda)$ is translation by λ. From (2.8) and (3.1) it follows that

$$Y^\lambda Y^\mu = Y^{\lambda+\mu} \tag{3.4}$$

if λ, μ are both dominant. If now λ is any element of $P^\vee$, we can write $\lambda = \mu - \nu$, with $\mu, \nu \in P^\vee$ both dominant, and we define

$$Y^\lambda = Y^\mu (Y^\nu)^{-1}. \tag{3.5}$$

In view of (3.4), this definition is unambiguous. The elements Y^λ, $\lambda \in P^\vee$, form a commutative subgroup of B, isomorphic to $P^\vee$.

3.6.— *Let $\lambda \in P^\vee$, $1 \leq i \leq r$.*
i) *If $\langle \lambda, \alpha_i \rangle = 0$, then $T_i Y^\lambda = Y^\lambda T_i$.*
ii) *If $\langle \lambda, \alpha_i \rangle = 1$, then $Y^\lambda = T_i Y^{s_i\lambda} T_i$.*

Proof : i) Suppose first that λ is dominant, and let $w = s_i \tau(\lambda) = \tau(\lambda) s_i$. From (2.8) we have $\ell(w) = \ell(\tau(\lambda)) + 1$ and hence $T_i Y^\lambda = T(w) = Y^\lambda T_i$. If now λ is not dominant, we can write $\lambda = \mu - \nu$ with μ, ν both dominant and $\langle \mu, \alpha_i \rangle = \langle \nu, \alpha_i \rangle = 0$.

ii) Again suppose first that λ is dominant, and let $p = \ell(\tau(\lambda))$. Then $\pi = \lambda + s_i \lambda$ is dominant and $\langle \pi, \alpha_i \rangle = 0$. Let $w = \tau(\lambda) s_i \tau(\lambda) = s_i \tau(\pi)$. We have, using (2.8), $\ell(\pi) = 2p - 2$, $\ell(w) = 2p - 1$, $\ell(\tau(\lambda) s_i) = p - 1$. Hence

$$T_i Y^\pi = T(w) = T(\tau(\lambda) s_i)\, T(\tau(\lambda)) = Y^\lambda T_i^{-1} Y^\lambda$$

giving $Y^\lambda = T_i Y^{s_i\lambda} T_i$ as required. Finally, if λ is not dominant, we can write $\lambda = \mu - \nu$ with μ, ν both dominant, $\langle \mu, \alpha_i \rangle = 1$, $\langle \nu, \alpha_i \rangle = 0$.

3.7.— *B is generated by $T_1, \cdots, T_r$ and the Y^λ, $\lambda \in P^\vee$.*

4. THE AFFINE HECKE ALGEBRA

As in § 1, let $K = \mathbf{Q}(q^{\frac{1}{m}})$ and let $t = q^{-\frac{k}{2}}$, where k is a non-negative integer. The *Hecke algebra* H of W is the quotient of the group algebra $K[B]$ of the braid group by the ideal generated by the elements $(T_i - t)(T_i + t^{-1})$ $(0 \le i \le r)$. For each $w \in W$, we denote the image of $T(w)$ in H by the same symbol $T(w)$. It is well-known (but requires proof, see e.g. [B], ch. IV, § 2, Ex. 23) that the $T(w)$ form a *K-basis* of H. Thus H is generated by T_i $(0 \le i \le r)$ and Ω subject to the relations (3.2), (3.3) and

$$(4.1) \qquad (T_i - t)(T_i + t^{-1}) = 0 \qquad (0 \le i \le r).$$

The following formula, due to Lusztig [L], is fundamental for what follows.

4.2. *Let* $\lambda \in P^\vee$, $1 \le i \le r$. *Then*

$$Y^\lambda T_i - T_i Y^{s_i\lambda} = \frac{(t - t^{-1})(Y^\lambda - Y^{s_i\lambda})}{(1 - Y^{-\alpha_i^\vee})}.$$

Proof : If this is true for λ and for μ, a simple calculation shows that it is true for $\lambda + \mu$ and $-\lambda$. Hence we may assume that λ is a fundamental weight, so that $\langle \lambda, \alpha_i \rangle = 0$ or 1. If $\langle \lambda, \alpha_i \rangle = 0$, then (4.2) reduces to (3.6) i), and if $\langle \lambda, \alpha_i \rangle = 1$, it follows from (3.6) ii) and (4.1).

Remark : Since $s_i\lambda = \lambda - p\alpha_i^\vee$, where $p = \langle \lambda, \alpha_i \rangle \in \mathbf{Z}$, it follows that the right-hand side in (4.2) is a polynomial in the $Y's$.

From (3.7) and (4.2) it follows (*cf.* [L]) that

4.3. *The elements* $T(w)Y^\lambda$ (resp. *the elements* $Y^\lambda T(w)$), *where* $w \in W_0$ *and* $\lambda \in P^\vee$, *form a K-basis of H.*

Let $A^\vee = K[P^\vee]$ be the group algebra of $P^\vee$ over K. For each $f \in A^\vee$, say $f = \sum f_\lambda e^\lambda$, let

$$f(Y) = \sum f_\lambda Y^\lambda \in H,$$

and let $A^\vee(Y)$ denote the subalgebra of H generated by the Y^λ, $\lambda \in P^\vee$. From (4.3) we have $A^\vee(Y) \cong A^\vee$ and

$$(4.4) \qquad H \cong A^\vee \otimes_K H_0,$$

where H_0 is the Hecke algebra of the finite Weyl group W_0, generated by $T_1, \cdots, T_r$ subject to the braid relations (3.2) (with $i, j \ne 0$) and the Hecke relations (4.1) (with $i \ne 0$).

Let $A_0^\vee = (A^\vee)^{W_0}$ be the subalgebra of W_0-invariants of $A^\vee$.

4.5. *The centre of H is $A_0^\vee(Y)$.*

Proof : It follows from (4.2) that if $f \in A^\vee$ is W_0-invariant, then $f(Y)$ commutes with $T_1, \cdots, T_r$ and hence by (4.3) lies in the centre of H. The reverse inclusion may be proved by a specialization argument (let $q \to 1$).

If $a = \alpha + n\delta \in S$, we define

$$e^a = e^{\alpha + n\delta} = q^{-n}\, e^\alpha$$

(*i.e.* we define e^δ to be q^{-1}). Likewise, if $\mu \in P$ and $w \in W$, where $w = v\,\tau(\lambda)$ as in (2.11), we have

$$e^{w\mu} = q^{\langle \lambda, \mu \rangle}\, e^{v\mu}.$$

The following proposition, due to Cherednik [C1], is a key result.

4.6.— *The Hecke algebra H acts on $A = K[P]$ as follows :*

$$T_i\, e^\mu = te^{s_i\mu} + (t - t^{-1})(1 - e^{a_i})^{-1}(e^\mu - e^{s_i\mu}) \qquad (0 \le i \le r)$$
$$\omega\, e^\mu = e^{\omega\mu} \qquad (\omega \in \Omega).$$

Moreover, this representation is faithful.

We shall sketch a proof. If V is any H_0-module, we can form the induced H-module :

$$\text{(4.7)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{ind}_{H_0}^H(V) &= H \otimes_{H_0} V \\ &\cong A^\vee \otimes_K V \end{aligned}$$

by (4.4). Suppose in particular that V is 1-dimensional and that $T_i v = tv$ for $v \in V$, $1 \le i \le r$. From (4.7) the induced module may be identified with $A^\vee$, and by (4.2) the action of T_i $(1 \le i \le r)$ on $A^\vee$ is given by :

$$\text{(4.8)} \qquad T_i\, e^\lambda = t\, e^{s_i\lambda} + (t - t^{-1})(1 - e^{-\alpha_i^\vee})^{-1}\,(e^\lambda - e^{s_i\lambda})$$

where $\lambda \in P^\vee$. The operators T_i defined by (4.8) therefore define a representation of H_0 on $A^\vee$, and it is not difficult to show that this representation is faithful. Now H_0 depends only on t and the Weyl group W_0, not on the root system $R^\vee$. We may therefore replace $R^\vee$ by R and $A^\vee$ by A, and the basis $\alpha_1^\vee, \cdots \alpha_r^\vee$ of $R^\vee$ by the opposite basis $-\alpha_1, \cdots, -\alpha_r$ of R. This gives us the operators T_i of (4.6) for $1 \leq i \leq r$, and they will by our construction automatically satisfy the braid relations (3.2) and Hecke relations (4.1). But then, if we define T_0 as in (4.6), all the relations (4.2) and (4.3) will be satisfied, and we have a representation of H on A.

4.9. *Let $f \in A_0^\vee$. Then $f(Y)$ maps A_0 into A_0.*

This follows without difficulty from 4.5 and 4.6.

From 4.6 we have an action of $A^\vee = K[P^\vee]$ on $A = K[P]$, with e^λ $(\lambda \in P^\vee)$ acting as Y^λ. Except in simple cases it appears not to be possible to make this action explicit, *i.e.* we cannot calculate $Y^\lambda e^\mu$ explicitly. However, it is possible to calculate the "leading term" of $Y^\lambda e^\mu$, in a sense now to be described, and it will appear that this will be sufficient for our purposes.

For this purpose we shall define a partial ordering on the weight lattice P which extends that defined by (1.4). If $\lambda \in P$, let λ^+ denote the unique dominant weight in the W_0-orbit of λ, and define $(\lambda, \mu \in P)$

4.10. $\lambda \geq \mu$ *if and only if either* i) $\lambda^+ > \mu^+$, *or* ii) $\lambda^+ = \mu^+$, *and* $\mu - \lambda \in Q^+$.

Thus, in a given W_0-orbit, the antidominant weight is highest.

Next, for $\mu \in P$, let

$$\rho(\mu) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \varepsilon(\langle \mu, \alpha^\vee \rangle)\, \alpha \tag{4.11}$$

where $\varepsilon(x) = 1$ if $x > 0$ and $\varepsilon(x) = -1$ if $x \leq 0$; and let

$$\mu^* = \mu + k\rho(\mu). \tag{4.12}$$

Then we have

4.13. *If $\lambda \in P^\vee$, $\mu \in P$,*

$$Y^\lambda e^\mu = q^{\langle \lambda, \mu^* \rangle} e^\mu + \textit{ lower terms},$$

where by lower terms is meant a linear combination of the exponentials e^ν such that $\nu < \mu$.

5. CHEREDNIK'S SCALAR PRODUCT

The symmetric scalar product $\langle f,g\rangle_k$ on A defined in § 1 is not suitable in the present context. With k a non-negative integer as before, let

$$S(k) = \{a \in S : 0 < a(x) < k \text{ for all } x \in C\}.$$

Explicitly (see (2.6)) $S(k)$ consists of the affine roots $a = \alpha + (n+\chi(\alpha))\delta$ for $\alpha \in R$ and $n = 0, 1, \cdots, k-1$. Now define

$$C_k = \prod_{a\in S(k)} (e^{\frac{a}{2}} - e^{-\frac{a}{2}}) \tag{5.1}$$

and if $f \in A$, say $f = \sum f_\lambda e^\lambda$ with coefficients $f_\lambda \in K$, let

$$\widetilde{f} = \sum \widetilde{f_\lambda}\, e^{-\lambda},$$

where $\widetilde{f_\lambda}$ is the image of f_λ under the automorphism $q \mapsto q^{-1}$ of K. Thus we have $(e^a)^\sim = e^{-a}$ for all $a \in S$. We now define

$$(f,g)_k = [f\,\widetilde{g}\,C_k]_1 \tag{5.2}$$

for $f, g \in A$, where as in § 1 the square brackets denote the constant term. This scalar product (due to Cherednik) is non-degenerate and hermitian (relative to the involution $q \mapsto q^{-1}$ of K), because the product (5.1) defining C_k contains an even number of terms, and therefore $\widetilde{C}_k = C_k$.

The advantage of this scalar product is contained in the following proposition [C1] :

5.3.— *Let $w \in W$. Then the adjoint of $T(w)$ for the scalar product* (5.2) *is $T(w)^{-1}$, i.e. we have*

$$(T(w)f, g)_k = (f, T(w)^{-1}\, g)_k$$

for all $f, g \in A$. In particular, the adjoint of Y^λ ($\lambda \in P^\vee$) is $Y^{-\lambda}$, and the adjoint of $u(Y)$, where $u \in A^\vee$, is $\widetilde{u}(Y)$.

Proof : It is enough to show that the adjoint of T_i (resp. $\omega \in \Omega$) is T_i^{-1} (resp. ω^{-1}), and this is verified directly from the definitions.

Finally, when restricted to $A_0 = A^{W_0}$, the scalar product (5.2) is closely related to the symmetric scalar product (1.2). Namely :

5.4.— *For all $f, g \in A_0$ we have*

$$(f, g)_k = c_k \langle f, g^\iota \rangle_k,$$

where $g^\iota = (\overline{g})^\sim$, and c_k depends only on k (and not on f, g).

Proof : From the definitions of C_k and Δ_k it follows that

$$\frac{C_k}{\Delta_k} = q^{-\frac{Nk^2}{2}} \prod_{\alpha \in R^+} \frac{1 - q^k e^\alpha}{1 - e^\alpha},$$

where $N = \mathrm{Card}(R^+)$. Now (5.4) follows from the identity [M2]

$$\sum_{w \in W_0} \prod_{\alpha \in R^+} \frac{1 - q^k e^{w\alpha}}{1 - e^{w\alpha}} = W_0(q^k) \tag{5.5}$$

where $W_0(q^k)$ is the Poincaré polynomial (*loc. cit.*) of W_0. (Explicitly, $c_k = q^{-\frac{Nk^2}{2}} W_0(q^k)$.)

Let

$$\pi_k = \prod_{\alpha \in R^+} (t e^{\frac{\alpha}{2}} - t^{-1} e^{-\frac{\alpha}{2}}). \tag{5.6}$$

Then the same identity (5.5) can be used to prove

5.7.— *For all $f, g \in A_0$ we have*

$$(\pi_k f, \pi_k g)_k = q^{-Nk} c_k \langle f, g^\iota \rangle_{k+1}.$$

6. ORTHOGONAL POLYNOMIALS AGAIN

If $f \in A^\vee$, say $f = \sum f_\lambda e^\lambda$, and $\mu \in P$, we define

$$f(\mu) = \sum f_\lambda q^{\langle \lambda, \mu \rangle}, \tag{6.1}$$

thus regarding f as a K-valued function on P.

As already remarked in § 1, the polynomials $P_\lambda \in A_0$, where $\lambda \in P^+$, are uniquely determined by the two conditions :

i) $P_\lambda = m_\lambda +$ lower terms,

ii) $(P_\lambda, m_\mu)_k = 0$ for $\mu \in P^+$, $\mu < \lambda$.

(We can replace $\langle P_\lambda, m_\mu \rangle_k$ by $(P_\lambda, m_\mu)_k$ in ii) by virtue of (5.4).)

Now let $f \in A_0^\vee$ and consider $f(Y)\, m_\mu$, where $\mu \in P^+$. Since

$$m_\mu = e^{w_0 \mu} + \text{lower terms}$$

for the ordering (4.10), where w_0 is the longest element of W_0, it follows from (4.13) and the definition (6.1) that

$$f(Y)\, m_\mu = f((w_0\mu)^*)\, e^{w_0\mu} + \text{lower terms.}$$

Now $f(Y)\, m_\mu$ is W_0-symmetric, by (4.9), and since $(w_0\mu)^* = w_0(\mu + k\rho)$, we have $f((w_0\mu)^*) = f(\mu + k\rho)$. Hence

$$f(Y)\, m_\mu = f(\mu + k\rho)\, m_\mu + \text{lower terms.} \tag{6.2}$$

By (5.3) the adjoint of $f(Y)$ is $\widetilde{f}(Y)$. Hence if $\mu \in P^+$, $\mu < \lambda$, we have

$$(f(Y)\, P_\lambda, m_\mu)_k = (P_\lambda, \widetilde{f}(Y)\, m_\mu)_k,$$

which is zero by (6.2) and the definition of P_λ. It follows that $f(Y)\, P_\lambda$ is a scalar multiple of P_λ, namely (by (6.2) again)

$$f(Y)\, P_\lambda = f(\lambda + k\rho)\, P_\lambda \tag{6.3}$$

for all $f \in A_0^\vee$. Thus the P_λ diagonalize the action of $A_0^\vee$ on A_0, and it follows from (6.3) that they are pairwise orthogonal :

$$\langle P_\lambda, P_\mu \rangle_k = 0 \quad \text{if} \quad \lambda \neq \mu. \tag{6.4}$$

For if $f \in A_0^\vee$, we have

$$\begin{aligned} f(\lambda + k\rho)(P_\lambda, P_\mu)_k &= (f(Y)\, P_\lambda, P_\mu)_k \\ &= (P_\lambda, \widetilde{f}(Y)\, P_\mu)_k \\ &= (P_\lambda, \widetilde{f}(\mu + k\rho)\, P_\mu)_k \\ &= f(\mu + k\rho)(P_\lambda, P_\mu)_k \end{aligned}$$

by (6.3) and (5.3). Since $\lambda \neq \mu$, we can choose $f \in A_0^\vee$ so that $f(\lambda+k\rho) \neq f(\mu+k\rho)$. Hence $(P_\lambda, P_\mu)_k = 0$ and therefore also $\langle P_\lambda, P_\mu\rangle_k = 0$ by (5.4). This proves (1.5).

Next, for each $\lambda \in P$, there is a unique element $E_\lambda \in A$ satisfying the two conditions :

i) $E_\lambda = e^\lambda +$ lower terms,

ii) $(E_\lambda, e^\mu)_k = 0$ for all $\mu < \lambda$.

If $f \in A^\vee$, it follows from (5.3) that

$$(f(Y)\, E_\lambda, e^\mu)_k = (E_\lambda, \widetilde{f}(Y)\, e^\mu)_k,$$

which is zero if $\mu < \lambda$, by (4.13). Hence $f(Y)\, E_\lambda$ is a scalar multiple of E_λ, namely (by (4.13) again)

$$f(Y)\, E_\lambda = f(\lambda^*)\, E_\lambda. \tag{6.5}$$

Thus the E_λ diagonalize the action of $A^\vee$ on A, and the same argument as in (6.4) shows that they are pairwise orthogonal :

$$(E_\lambda, E_\mu)_k = 0 \quad \text{if} \quad \lambda \neq \mu. \tag{6.6}$$

One shows next that if $\lambda \in P$ is such that $\lambda \neq s_i\,\lambda$, then $T_i\, E_\lambda$ is a linear combination of E_λ and $E_{s_i\,\lambda}$, with coefficients that can be explicitly computed. From this and (6.5), it follows that for each $\lambda \in P^+$, the K-subspace $A(\lambda)$ of A spanned by the E_μ, $\mu \in W_0\lambda$, is stable under the action of H.

Consider now the operators

$$U^+ = \sum_{w\in W_0} t^{\ell(w)}\, T(w),$$
$$U^- = \sum_{w\in W_0} (-t)^{-\ell(w)}\, T(w)$$

on A, where $\ell(w)$ is the length of $w \in W_0$. We have

$$(T_i - t)\, U^+ = U^+(T_i - t) = 0, \tag{6.7}$$

$$(T_i + t^{-1})\, U^- = U^-(T_i + t^{-1}) = 0 \tag{6.8}$$

for $1 \leq i \leq r$. From (6.7) it follows that $U^+ f$ is W_0-symmetric for all $f \in A$ (but $U^- f$ is *not* W_0-skew, unless $q = 1$). In particular, if $\lambda \in P^+$, then $U^+ E_\lambda$ is a scalar multiple of P_λ (because it has the same defining properties). Hence $P_\lambda \in A(\lambda)$, say

$$P_\lambda = \sum_{\mu \in W_0 \lambda} a_{\lambda\mu} E_\mu$$

and the coefficients $a_{\lambda\mu} \in K$ can be calculated explicitly : in fact

$$a_{\lambda\mu} = \prod_{\substack{\alpha \in R^+ \\ \langle \mu, \alpha^\vee \rangle > 0}} \frac{1 - q^{\langle \mu^*, \alpha^\vee \rangle - k}}{1 - q^{\langle \mu^*, \alpha^\vee \rangle}}.$$

Next define, again for $\lambda \in P^+$,

$$Q_\lambda = U^- E_\lambda.$$

If λ is not regular (*i.e.* if $\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle = 0$ for some i), then $Q_\lambda = 0$. We have $Q_\lambda \in A(\lambda)$, say

$$Q_\lambda = \sum_{\mu \in W_0 \lambda} b_{\lambda\mu} E_\mu$$

and as in the case of P_λ, the coefficients $b_{\lambda\mu}$ can be calculated explicitly. In this way $(P_\lambda, P_\lambda)_k$ and $(Q_\lambda, Q_\lambda)_k$ can each be expressed in terms of $(E_\lambda, E_\lambda)_k$, and we obtain (λ dominant and regular) :

$$\text{(6.9)} \qquad \frac{(Q_\lambda, Q_\lambda)_k}{(P_\lambda, P_\lambda)_k} = q^{-Nk} \prod_{\alpha \in R^+} \frac{1 - q^{\langle \lambda + k\rho, \alpha^\vee \rangle + k}}{1 - q^{\langle \lambda + k\rho, \alpha^\vee \rangle - k}}$$

where as before $N = \mathrm{card}(R^+)$.

7. CALCULATION OF $\langle P_\lambda, P_\lambda \rangle_k$

We shall now prove the scalar product formula (1.6) by induction on k, the case $k = 0$ (or $k = 1$) being trivial. The formula (6.9) is one of the two ingredients in the proof, and we shall now briefly sketch the other one. From now on we shall write $P_{\lambda,k}$ and $Q_{\lambda,k}$ in place of P_λ and Q_λ, to stress the dependence on the parameter k.

As in § 5, let

$$\pi_k = \prod_{\alpha \in R^+} \left(t\, e^{\frac{\alpha}{2}} - t^{-1} e^{-\frac{\alpha}{2}} \right).$$

Then it follows from the definition (4.6) of T_i that

(7.1) $$(T_i + t^{-1})\,\pi_k\, f = s_i(\pi_k)\,(T_i - t)\, f \qquad (1 \le i \le r)$$

for $f \in A$. We use this formula to prove

7.2. *Let $f \in A$. Then $(T_i + t^{-1})\, f = 0$ for $1 \le i \le r$ if and only if $f \in \pi_k\, A_0$.*

Proof : Suppose that $(T_i + t^{-1})\, f = 0$, $1 \le i \le r$. Then (7.1) shows that $g = \pi_k^{-1}\, f$ is killed by each $T_i - t$, hence is W_0-symmetric. Hence if w_0 is the longest element of W_0 we have $\pi_k^{-1}\, f = w_0(\pi_k^{-1}\, f)$, *i.e.*

$$w_0(\pi_k)\, f = \pi_k\, w_0(f).$$

Now π_k and $w_0(\pi_k)$ are coprime. Hence π_k divides f in A, *i.e.* we have $g \in A_0$ and hence $f \in \pi_k\, A_0$. Conversely, if $f = \pi_k\, g$ with $g \in A_0$, (7.1) shows that $(T_i + t^{-1})\, f = 0$.

7.3. *Let $\lambda \in P$ be dominant and regular* (so that $\lambda - \rho \in P^+$). *Then we have*

$$Q_{\lambda,k} = q^{\frac{Nk}{2}}\, \pi_k\, P_{\lambda-\rho,k+1}.$$

Proof : It follows from (6.8) that $(T_i + t^{-1})\, Q_{\lambda,k} = 0$ for $1 \le i \le r$, and hence by (7.2) that $Q_{\lambda,k} = \pi_k\, g$ for some $g \in A_0$. Consideration of the leading terms of $Q_{\lambda,k}$ and π_k shows that g is of the form

(1) $$g = \sum_{\mu \le \lambda-\rho} c_{\lambda\mu}\, m_\mu.$$

Now if $\mu \in P^+$, the highest exponential that occurs in $\pi_k\, m_\mu$ is $e^{w_0(\mu+\rho)}$; and since $Q_{\lambda,k}$ is a linear combination of the $E_{w\lambda}$, $w \in W_0$, it follows that

$$(\pi_k\, g\, ,\, \pi_k\, m_\mu)_k = 0$$

for all $\mu < \lambda - \rho$ in P^+, and this in turn implies (using 5.7)

(2) $$\langle g, m_\mu \rangle_{k+1} = 0.$$

From (1) and (2) it follows that g is a scalar multiple of $P_{\lambda-\rho,k+1}$, and the scalar is determined from the coefficient of $e^{w_0\lambda}$.

From (7.3) and (5.7) we obtain

$$(Q_{\lambda,k}, Q_{\lambda,k})_k = q^{-Nk}\, c_k \langle P_{\lambda-\rho,k+1}, P_{\lambda-\rho,k+1}\rangle_{k+1}. \tag{7.4}$$

Together with (6.9) this gives

$$\frac{\langle P_{\lambda-\rho,k+1}, P_{\lambda-\rho,k+1}\rangle_{k+1}}{\langle P_{\lambda,k}, P_{\lambda,k}\rangle_k} = \prod_{\alpha\in R^+} \frac{1-q^{\langle \lambda+k\rho,\alpha^\vee\rangle+k}}{1-q^{\langle \lambda+k\rho,\alpha^\vee\rangle-k}}$$

from which (1.6) follows by induction on k.

Finally, once $\langle P_\lambda, P_\lambda\rangle_k$ is known, it is straightforward to calculate $(E_\lambda, E_\lambda)_k$ for any $\lambda \in P$. Let us write

$$[s] = q^{\frac{s}{2}} - q^{-\frac{s}{2}}$$

for all $s \in \mathbf{Z}$. With this notation we have

$$(E_\lambda, E_\lambda)_k = \prod_{\alpha\in R^+} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{[\langle \lambda^*, \alpha^\vee\rangle + i]}{[\langle \lambda^*, \alpha^\vee\rangle - i - 1]} \right)^{\varepsilon(\langle \lambda^*,\alpha^\vee\rangle)} \tag{7.5}$$

for all $\lambda \in P$, where (as in (4.11)) $\varepsilon(x) = 1$ for $x > 0$, and $\varepsilon(x) = -1$ for $x \le 0$.

8. CONCLUDING REMARKS

The proof of the scalar product formula (1.6) sketched here is somewhat different from that of Cherednik. It was inspired by recent work of Opdam [O4], who defined the non-symmetric orthogonal polynomials E_λ in the limiting case $q \to 1$ and worked out their properties, and suggested that analogous things should exist for arbitrary q.

Cherednik's proof exploited what he calls the "double affine Hecke algebra", which (as an algebra of linear operators on A) is generated by H and operators X^λ ($\lambda \in P$), where X^λ is multiplication by e^λ. In this algebra there is a symmetry as between the X's and the Y's, and very recently [C2] Cherednik has made use of this to confirm two other conjectures of the author relating to the polynomials P_λ.

In this account we have restricted ourselves to affine root systems ot the type $S(R)$ (2.1) and a single parameter k, in an attempt to avoid drowning both author and reader in a sea of technicalities. The general picture is that one can attach to any affine root system S, reduced or not, a family of symmetric orthogonal polynomials

P_λ, and another family of non-symmetric orthogonal polynomials E_λ. These depend (apart from q) on as many parameters k as there are orbits in S under the affine Weyl group W_S. For an irreducible S, the maximum number of orbits is 5, and is attained by the (non-reduced) affine root systems denoted by $C^\vee C_n$ $(n \geq 2)$ in the tables at the end of [M1]. Correspondingly, we have orthogonal polynomials P_λ, E_λ depending on q and five parameters k_i. These P_λ are precisely the polynomials defined by Koornwinder in [K], which are therefore amenable to the Hecke algebra techniques described here. In particular, Koornwinder's conjecture for the value of $\langle P_\lambda, P_\lambda \rangle$ can be shown to be correct.

REFERENCES

[B] N. BOURBAKI - *Groupes et Algèbres de Lie*, ch. IV-VI, Hermann, Paris (1968).

[C1] I. CHEREDNIK - *Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures*, Ann. Math. **141** (1995), 191-216.

[C2] I. CHEREDNIK - *Macdonald's evaluation conjectures and difference Fourier transform*, preprint (Dec. 1994).

[H] G.J. HECKMAN - *Root systems and hypergeometric functions*, II, Comp. Math. **64** (1987), 353-373.

[HO] G.J. HECKMAN and E.M. OPDAM - *Root systems and hypergeometric functions*, I, Comp. Math. **64** (1987), 329-352.

[K] T.H. KOORNWINDER - *Askey-Wilson polynomials for root systems of type BC*, **in** Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials and applications, D. St. P. Richards (ed.), Contemp. Math. **138**, Amer. Math. Soc. (1992), 189-204.

[L] G. LUSZTIG - *Affine Hecke algebras and their graded version*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 599-635.

[M1] I.G. MACDONALD - *Affine root systems and Dedekind's η-function*, Invent. Math. **15** (1972), 91-143.

[M2] I.G. MACDONALD - *The Poincaré series of a Coxeter group*, Math. Annalen **199** (1972), 161-174.

[M3] I.G. MACDONALD - *Some conjectures for root systems*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 988-1007.

[M4] I.G. MACDONALD - *Orthogonal polynomials associated with root systems*, preprint (1987).

[O1] E.M. OPDAM - *Root systems and hypergeometric functions*, III, Comp. Math. **67** (1988), 21-49.

[O2] E.M. OPDAM - *Root systems and hypergeometric functions*, IV, Comp. Math. **67** (1988), 191-209.

[O3] E.M. OPDAM - *Some applications of hypergeometric shift operators*, Invent. Math. **98** (1989), 1-18.

[O4] E.M. OPDAM - *Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras*, preprint (Sept. 1993).

I.G. MACDONALD

8 Blandford Avenue
GB-OXFORD OX2 8DY

Astérisque

OLIVIER MATHIEU

Le modèle des chemins

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 798, p. 209-224
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__209_0>

Séminaire BOURBAKI Mars 1995
47ème année, 1994-95, n° 798

LE MODÈLE DES CHEMINS
[d'après P. Littelmann]

par **Olivier MATHIEU**

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie complexe simple (ou un groupe de Kač-Moody). Soit M un G-module simple de dimension finie (resp. une représentation standard), et notons $\rho : G \to \mathrm{GL}(M)$ le morphisme correspondant. On sait que M peut être entièrement décrit à l'aide de son caractère. De manière informelle, le caractère prescrit, pour chaque élément $g \in G$, le spectre avec multiplicités de l'opérateur $\rho(g)$. En fait, soit H un tore maximal de G. On a $H \cong (\mathbf{C}^*)^\ell$, où ℓ est le rang de G. Puisque tout élément semi-simple de G est conjugué à un élément de H, le caractère de M décrit M comme H-module. Si on note P le groupe des caractères de H, on a :

$$M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda,$$

où $M_\lambda = \{m \in M \mid h \cdot m = \lambda(h)m \ \forall h \in H\}$.

Le caractère de M peut donc être vu comme l'élément $\mathrm{ch}(M)$ de $\mathbf{Z}[P]$ défini par :

$$\mathrm{ch}(M) = \sum_{\lambda \in P} (\dim M_\lambda)\, e^\lambda.$$

Il existe des formules théoriques (formules de Weyl et Steinberg) pour calculer le caractère de M. Ces formules ont une grande importance théorique, mais ne sont pas très satisfaisantes du point de vue combinatoire. En effet, elles s'écrivent sous la forme $\dim M_\lambda = \mathrm{Card}(X(\lambda)) - \mathrm{Card}(Y(\lambda))$, où $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ sont deux ensembles définis de manière intrinsèque à partir de λ et M. Il n'est pas combinatoirement clair que le terme de droite soit ≥ 0. Supposons G de dimension finie pour simplifier. De même, on peut définir les multiplicités de produits tensoriels $C^L_{M,N}$ par

$M \bigotimes N = \bigoplus_L C_{M,N}^L L$, où M, N sont simples et L décrit l'ensemble des G-modules simples. La formule théorique de Kostant, qui calcule les multiplicités $C_{M,N}^L$ contient également de nombreux termes de signes distincts.

La nouveauté de la combinatoire de Littelmann consiste à décrire un ensemble naturellement attaché à M et λ tel que $\dim M_\lambda$ soit le cardinal de cet ensemble. En fait, Littelmann décrit un objet M' (le modèle des chemins) qui est un H-module, qui possède une base naturelle formée de chemins, tel que M' et M soient isomorphes comme H-modules. De même, dans cette combinatoire, les multiplicités de produits tensoriels sont décrites comme le cardinal d'un ensemble de chemins.

Remerciements : Je remercie P. Littelmann et P. Cartier pour d'utiles conseils.

1. LE MODÈLE DES CHEMINS EN RANG 1

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications continues $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ avec $f(0) = 0$. Suivant [Li1], nous allons définir deux applications $E, F : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \cup \{\emptyset\}$ (l'utilité du symbole formel $\emptyset$ sera précisée plus bas).

Définition de E : Pour $f \in \mathcal{C}$, désignons par M_f son minimum. Si $M_f > -1$, on dira que Ef n'est pas défini et on posera $Ef = \emptyset$.

On suppose maintenant que l'on a $M_f \leq -1$. Puisque l'on a $f(0) = 0$ et $M_f + 1 \leq 0$, on a $f([0,1]) \supseteq [M_f, M_f + 1]$. Notons t_0, t_1 les premiers instants auxquels f atteint les valeurs $M_f + 1$ et M_f respectivement. Formellement, on a :

$$t_0 = \min\{t \in [0,1] \mid f(t) = M_f + 1\},$$
$$t_1 = \min\{t \in [0,1] \mid f(t) = M_f\}.$$

Notons que l'on a $t_0 < t_1$. Pour $v \in [t_0, t_1]$, posons $\varphi(v) = \min\{f(t) \mid t \in [t_0, v]\} - (M_f + 1)$. On a $\varphi(t_0) = 0$, $\varphi(t_1) = -1$ et φ est décroissante. Sur la figure ci-dessous, on a représenté le graphe de la fonction $\psi(t) = \varphi(t) + M_f + 1$. Elle est caractérisée par le fait que $\psi(t)$ est décroissante, $\psi(t) \leq f(t)$ et ψ est maximale sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ avec ces propriétés (voir figure page suivante).

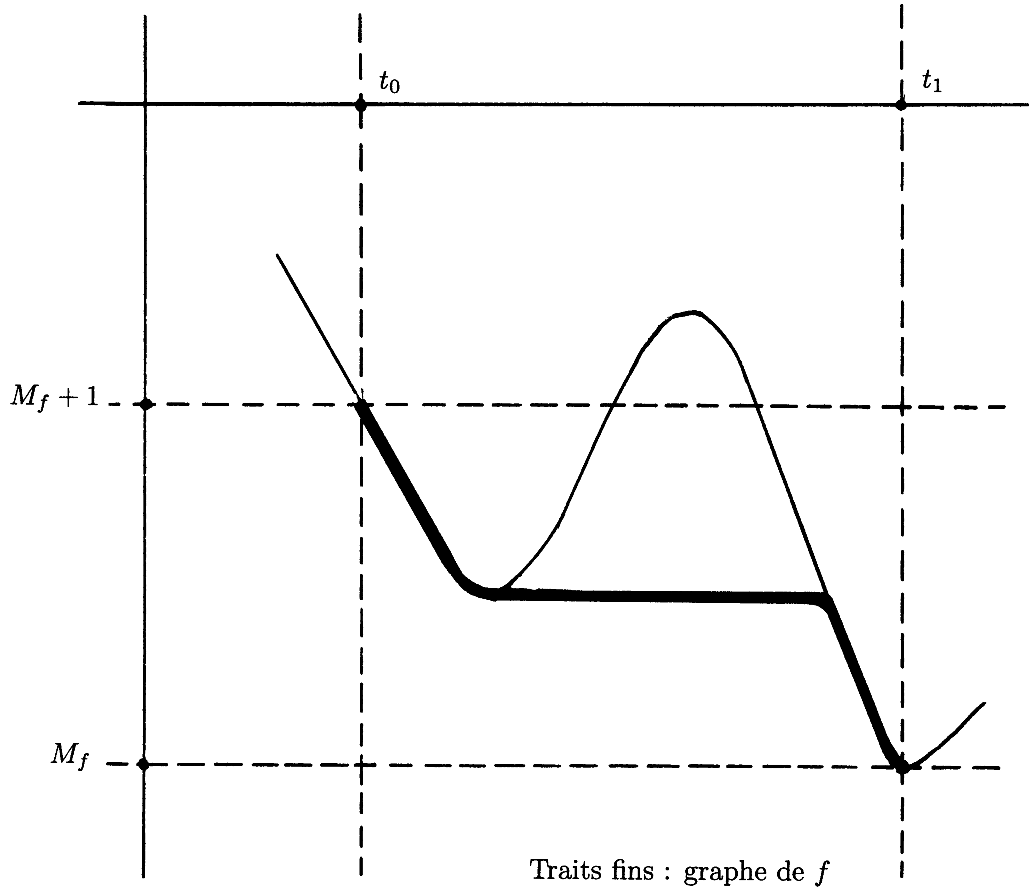
On pose :

$Ef(t) = f(t)$ pour $t \leq t_0$,

$Ef(t) = f(t) - 2\varphi(t)$ pour $t_0 \leq t \leq t_1$,

$$Ef(t) = f(t) + 2 \text{ pour } t \geq t_1.$$

Cette nouvelle fonction Ef est continue, et l'on a $Ef(1) = f(1) + 2$.



Traits fins : graphe de f

Traits gras : graphe de ψ

Autre définition de E : Supposons à nouveau $M_f \leq -1$. Pour tout v dans $[M_f, M_f + 1]$, notons $p(v)$ le premier instant auquel f atteint la valeur v. Formellement, $p(v) = \min\{t \in [0,1] \,|\, f(t) = v\}$. La restriction de f à l'ensemble $\mathcal{P} = \{p(v) | v \in [M_f, M_f + 1]\}$ est strictement décroissante et l'on a $\int f' \, d\mathcal{P} = -1$ où $d\mathcal{P}$ est la mesure de Lebesgue de $\mathcal{P}$. La fonction continue Ef est alors simplement définie par :

$$(Ef)'(u) = f'(u) \qquad \text{si } u \notin \mathcal{P}$$
$$(Ef)'(u) = -f'(u) \qquad \text{si } u \in \mathcal{P}.$$

Pour rendre cette définition rigoureuse, on pourra supposer f à variation bornée (ou remarquer que $(Ef) - f$ est automatiquement à variation bornée).

Notons enfin que E est invariant par reparamétrisation : si $\Phi : [0,1] \to [0,1]$ est un homéomorphisme avec $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(1) = 1$, on a $(Ef) \circ \Phi = E(f \circ \Phi)$.

Définition de F : Soit $* : \mathcal{C} \cup \{\emptyset\} \to \mathcal{C} \cup \{\emptyset\}$ l'involution définie par $*\emptyset = \emptyset$ et :

$$(*f)(t) = f(1-t) - f(1) \qquad \text{pour } f \in \mathcal{C}.$$

On pose $F = *E*$.

De manière plus explicite, soient $f \in \mathcal{C}$ et M_f son minimum. Si $M_f + 1 > f(1)$, on pose $Ff = \emptyset$ et on dit que Ff n'est pas défini. Si $M_f + 1 \leq f(1)$, on a alors $f([0,1]) \supseteq [M_f, M_f + 1]$. Pour tout $v \in [M_f, M_f+1]$, on note $d(v)$ le dernier instant auquel f atteint la valeur v.

On note $\mathcal{D} = \{d(v) \,|\, v \in [M_f, M_f + 1]\}$ l'ensemble des derniers instants. La fonction f est alors croissante sur $\mathcal{D}$ et l'on a $\int f' \, d\mathcal{D} = 1$ où $d\mathcal{D}$ est la mesure de Lebesgue de $\mathcal{D}$. On définit alors Ff par :

$$(Ff)'(u) = f'(u) \qquad \text{si } u \notin \mathcal{D}$$
$$(Ff)'(u) = -f'(u) \qquad \text{si } u \in \mathcal{D}.$$

On a $Ff(1) = f(1) - 2$.

Bien que ces opérateurs E et F aient une définition très élémentaire, ils semblent ne pas avoir été considérés auparavant.

PROPOSITION 1.— *Soit* $f \in \mathcal{C}$.

a) *Si* $Ef \neq \emptyset$, *on a* $FEf = f$.

b) *Si* $Ff \neq \emptyset$, *on a* $EFf = f$.

Posons $\mathcal{C}_{\mathrm{int}} = \{f \in \mathcal{C} \,|\, f(1) \in \mathbf{Z}\}$, et soit $\mathbf{C}\,\mathcal{C}_{\mathrm{int}}$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel de base $\mathcal{C}_{\mathrm{int}}$. Les opérateurs E, F définissent des endomorphismes linéaires de $\mathbf{C}\,\mathcal{C}_{\mathrm{int}}$ (avec la convention que $Ef = 0$ ou $Ff = 0$ si Ef ou Ff n'est pas défini). Soit h l'endomorphisme de $\mathbf{C}\,\mathcal{C}_{\mathrm{int}}$ défini par $hf = f(1) \cdot f$ pour $f \in \mathcal{C}$, et soit $\mathcal{A}$ l'algèbre d'endomorphismes de $\mathbf{C}\,\mathcal{C}_{\mathrm{int}}$ engendrée par E, F et h. L'algèbre $\mathcal{A}$ est très similaire à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathrm{sl}(2, \mathbf{C})$, ainsi que le montrent les lemmes suivants.

Rappelons que $\mathrm{sl}(2,\mathbf{C})$ a pour base les matrices $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (nous avons utilisé la même notation h pour la matrice diagonale de $\mathrm{sl}(2,\mathbf{C})$ et l'élément de $\mathcal{A}$). Les représentations simples de dimension finie de $\mathrm{sl}(2,\mathbf{C})$ sont classifiées par les entiers $n \geq 0$. L'espace de la représentation correspondante, noté $L(n)$, s'identifie à l'espace des polynômes homogènes de degré n en deux variables x, y. L'action de e, h, f est donnée par $x\frac{\partial}{\partial y}$, $x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$ et $y\frac{\partial}{\partial x}$ respectivement. En utilisant le fait que les monômes $x^a y^b$ (pour $a + b = n$) forment une base de $L(n)$, on vérifie aisément les faits suivants.

Lemme 2 : *Soit M un $\mathrm{sl}(2,\mathbf{C})$-module simple de dimension finie.*

a) *Soient $m \in \mathbf{Z}$ et $v \in M - \{0\}$ avec $h \cdot v = mv$. Si p, q sont les entiers positifs définis par :*

$$e^p \cdot v \neq 0 \qquad \text{et} \qquad e^{p+1} \cdot v = 0,$$

$$f^q \cdot v \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f^{q+1} \cdot v = 0,$$

on a $q - p = m$ et $q + p = n$ si M est isomorphe à $L(n)$.

b) *Si M est isomorphe à $L(n)$, le spectre de h sur M est simple et ses valeurs propres sont $n, n-2, n-4, \cdots, -n$.*

c) *Si M est isomorphe à $L(n)$ et $v \in M - \{0\}$ satisfait à $h \cdot v = nv$, alors $\{f^\ell \cdot v \mid 0 \leq \ell \leq n\}$ est une base de M.*

d) *Soient $m \in \mathbf{Z}$ et $v \in M - \{0\}$ avec $h \cdot v = mv$. Si $e \cdot v \neq 0$, alors $f\,e \cdot v = \lambda v$, où $\lambda \neq 0$. De même, si $f \cdot v \neq 0$, alors $e\,f \cdot v = \mu v$ où $\mu \neq 0$. En général, λ et μ sont différents de* 1.

e) *Soient n, m deux entiers ≥ 0. On a :*

$$L(n) \otimes L(m) = L(n+m) \oplus L(n+m-2) \oplus \cdots \oplus L(|n-m|).$$

Nous allons voir en quoi l'algèbre $\mathcal{A}$ est analogue à $U(\mathrm{sl}(2,\mathbf{C}))$. Posons :

$$\mathcal{C}_{\mathrm{int}}^{+} = \{f \in \mathcal{C}_{\mathrm{int}} \mid M_f > -1\}.$$

Pour tout $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{int}}^{+}$, notons $L(f)$ le $\mathcal{A}$-module engendré par f.

On montre que, pour tout $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{int}}^{+}$, le $\mathcal{A}$-module $L(f)$ est simple et l'on a $\mathbf{C}\,\mathcal{C}_{\mathrm{int}} = \bigoplus_{f \in \mathcal{C}_{\mathrm{int}}^{+}} L(f)$. De plus, les $\mathcal{A}$-modules $L(f)$ et $L(g)$ sont isomorphes si et seulement si $f(1) = g(1)$. Les points a), b) et c) du lemme 2 se généralisent aux modules $L(f)$ comme suit.

Lemme 3 : a) *Soient* $m \in \mathbf{Z}$ *et* $f \in \mathcal{C}_{\text{int}}$ *avec* $f(1) = m$. *Si* p, q *sont les entiers positifs définis par :*

$$E^p \cdot f \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad E^{p+1} \cdot f = \emptyset,$$
$$F^q \cdot f \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad F^{q+1} \cdot f = \emptyset,$$

on a $q - p = m$.

b) *Soit* $f \in \mathcal{C}_{\text{int}}^+$. *Le spectre de* h *sur* $L(f)$ *est simple et ses valeurs propres sont* $f(1), f(1) - 2, \cdots, -f(1)$.

c) *Soit* $f \in \mathcal{C}_{\text{int}}^+$. *Alors* $\{F^\ell \cdot f \mid 0 \le \ell \le f(1)\}$ *est une base de* $L(f)$.

La généralisation du point d) du lemme 2 est la proposition 1. On voit que la structure de l'algèbre des chemins est beaucoup plus simple que $U(\mathrm{sl}(2, \mathbf{C}))$. Ici, les constantes λ et μ sont toujours 1.

Enfin, la généralisation du point e) du lemme 2 est la suivante. Pour $f, g \in \mathcal{C}_{\text{int}}$, notons $f * g$ la concaténation de f et de g, définie par :

$$(f * g)(t) = f(2t) \qquad \text{pour } 0 \le t \le \frac{1}{2},$$
$$(f * g)(t) = g(2t - 1) + f(1) \qquad \text{pour } \frac{1}{2} \le t \le 1.$$

Pour $f, g \in \mathcal{C}_{\text{int}}^+$, notons $L(f) * L(g)$ l'espace de base $\varphi * \psi$ où φ, ψ décrivent respectivement les bases de $L(f)$ et $L(g)$ formées de chemins.

PROPOSITION 4.— *$L(f) * L(g)$ est un $\mathcal{A}$-module et l'on a $L(f) * L(g) = \bigoplus_\ell L(f * F^\ell g)$ où ℓ décrit l'ensemble* $\{0, \cdots, \inf(f(1), g(1))\}$.

On voit que le $\mathcal{A}$-module $L(f) * L(g)$ se décompose comme le $U(\mathrm{sl}(2, \mathbf{C}))$-module $L(f(1)) \bigotimes L(g(1))$. Cependant, cette décomposition est beaucoup plus aisée que dans le cas de $\mathrm{sl}(2, \mathbf{C})$. En effet, lorsqu'on décompose le $U(\mathrm{sl}(2, \mathbf{C}))$-module $L(n) \bigotimes L(m)$, les vecteurs de poids des composantes simples de $L(n) \bigotimes L(m)$ sont des tenseurs compliqués (en général, ils ne sont pas de la forme $u \bigotimes v$ où $u \in L(n)$, $v \in L(m)$). En revanche, la $\mathcal{A}$-composante de $L(f) * L(g)$ est simplement formée de concaténations $\varphi * \psi$ où $\varphi \in L(f)$ et $\psi \in L(g)$. Cela provient du lemme élémentaire suivant.

Lemme 5 : *Soient* $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_{\text{int}}$.

a) *Si* $M_\varphi \le \varphi(1) + M_\psi$, *on a :*

$$E(\varphi * \psi) = (E\varphi) * \psi.$$

b) *Sinon, on a* $E(\varphi * \psi) = \varphi * E\psi$.

Dans ce lemme, on convient que $\emptyset * \psi = \varphi * \emptyset = \emptyset$.

Dans le cas du rang un, on peut retrouver l'action de $\mathrm{sl}(2, \mathbf{C})$ à l'aide de l'algèbre des chemins. Notons que les opérateurs E et F sont localement nilpotents. Si l'on pose :

$$e = \sum_{n \geq 0} F^{n-1} E^n$$

$$f = \sum_{n \geq 0} E^{n-1} F^n,$$

alors on a $[e, f] = h$, $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$. Malheureusement, une construction aussi explicite n'est pas encore connue en rang ≥ 1.

Remarque : Soit $L(n)$ l'espace des polynômes homogènes de degré n en x, y. La multiplication par x/y ne stabilise pas $L(n)$. Notons E l'opérateur de multiplication par x/y tronqué, *i.e.* :

$$E\, x^a y^b = \begin{cases} x^{a+1}\, y^{b-1} & \text{si } b > 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et notons de même F l'opérateur tronqué de multiplication par y/x. Soit $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{int}}^{+}$ avec $f(1) = n$. Il est facile d'identifier le $\mathcal{A}$-module $L(f)$ avec $L(n)$.

2. LE MODÈLE DES CHEMINS EN GÉNÉRAL

Soit $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ une algèbre de Kač-Moody déployée sur $\mathbf{R}$ (voir l'annexe pour les définitions). Notons $\prod_{\mathrm{int}}$ l'ensemble des chemins continus $\pi : [0,1] \to \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$ tels que $\pi(0) = 0$ et $\pi(1) \in P$. Soit α une racine simple. Puisque l'on a $\alpha(h_\alpha) = 2$, on peut identifier $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$ à $K_\alpha \bigoplus \mathbf{R} \cdot \frac{\alpha}{2}$ où $K_\alpha = \operatorname{Ker} h_\alpha$. Tout $\pi \in \prod_{\mathrm{int}}$ s'écrit donc sous la forme $\pi(t) = \pi_1(t) + \frac{1}{2} f(t)\, \alpha$, où $\pi_1(t) \in K_\alpha$ et $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{int}}$. On définit des opérateurs de chemins $E_\alpha, F_\alpha : \prod_{\mathrm{int}} \to \prod_{\mathrm{int}} \cup \{\emptyset\}$ en posant :

$$E_\alpha\, \pi = \pi_1 + \frac{1}{2}\, (Ef)\, \alpha,$$

$$F_\alpha\, \pi = \pi_1 + \frac{1}{2}\, (Ff)\, \alpha,$$

avec la convention que $E_\alpha\, \pi = \emptyset$ (ou $F_\alpha\, \pi = \emptyset$) si Ef n'est pas défini (ou si Ff n'est pas défini).

Une définition analogue plus explicite est la suivante. Soit $\pi \in \prod_{\text{int}}$ un chemin qu'on supposera de longueur finie et soit α une racine simple. Notons M le minimum de la fonction $f(t) = \langle \pi(t) \,|\, h_\alpha \rangle$.

Si $M > -1$, on pose $E_\alpha \pi = \emptyset$. Sinon, la fonction f prend toutes les valeurs de l'intervalle $[M, M+1]$ et pour tout $v \in [M, M+1]$, on note $p(v)$ le premier instant auquel f atteint la valeur v. Enfin, on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des premiers instants. On définit $E_\alpha \pi$ par :

$$\begin{aligned} (E_\alpha \pi)'(u) &= \pi'(u) && \text{si } u \notin \mathcal{P} \\ (E_\alpha \pi)'(u) &= s_\alpha \pi'(u) && \text{si } u \in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

On définit de manière analogue $F_\alpha \pi$. Si $M + 1 > f(1)$, on pose $F_\alpha \pi = \emptyset$. Sinon, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des derniers instants auxquels f atteint les valeurs $v \in [M, M+1]$ et l'on définit $F_\alpha \pi$ par :

$$\begin{aligned} (F_\alpha \pi)'(u) &= \pi'(u) && \text{si } u \notin \mathcal{D} \\ (F_\alpha \pi)'(u) &= s_\alpha \pi'(u) && \text{si } u \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Lorsque les opérateurs sont définis, on a :

$$\begin{aligned} E_\alpha \pi(1) &= \pi(1) + \alpha \\ F_\alpha \pi(1) &= \pi(1) - \alpha. \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{R} \prod_{\text{int}}$ l'espace vectoriel de base $\prod_{\text{int}}$. Les opérateurs E_α, F_α définissent des opérateurs linéaires dans $\mathbf{R} \prod_{\text{int}}$. Leurs actions sont données par :

$$\begin{aligned} E_\alpha \cdot \pi &= E_\alpha \pi && \text{si } E_\alpha \pi \text{ est défini,} \\ E_\alpha \cdot \pi &= 0 && \text{si } E_\alpha \pi = \emptyset, \end{aligned}$$

et similairement pour F_α. L'algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ agit sur $\mathbf{R} \prod_{\text{int}}$ par :

$$h \cdot \pi = \langle \pi(1) \,|\, h \rangle \cdot \pi,$$

pour $h \in \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ et $\pi \in \prod_{\text{int}}$. Soit $\lambda \in P^+$. On appelle *modèle de* $L(\lambda)$ un $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$-module V qui soit diagonalisable, tel que $\dim V_\mu = \dim L(\lambda)_\mu$ pour tout $\mu \in P$. Cette condition signifie que V et $L(\lambda)$ sont des $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$-modules isomorphes.

Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre des chemins, c'est-à-dire l'algèbre des endomorphismes de $\mathbf{R} \prod_{\text{int}}$ engendrée par les E_α, F_α où α décrit l'ensemble S des racines simples.

Un chemin π est dit *dominant* si l'on a $\langle \pi(t) \,|\, h_\alpha \rangle \geq 0$ pour tout $t \in [0,1]$ et $\alpha \in S$. Appelons quasi-base d'un espace vectoriel V une collection B de vecteurs de

V telle que l'ensemble des $v \in B$, $v \neq 0$ soit une base de V. Autrement dit, dans une quasi-base, on a éventuellement le même élément qui apparaît plusieurs fois et éventuellement 0, mais, une fois éliminés 0 et les répétitions, on obtient une vraie base.

THÉORÈME 6.— *Soit $\lambda \in P^+$ et soit π un chemin dominant tel que $\pi(1) = \lambda$. Posons $V_\pi = \mathcal{A} \cdot \pi$. Alors V_π est un modèle de $L(\lambda)$ et la collection $B_\pi = (F_{\alpha_1}^{m_1} \cdots F_{\alpha_n}^{m_n} \pi, \alpha_i \in S, m_i > 0)$ forme une quasi-base de V.*

Ainsi, le modèle V_π a une base formée de chemins, et $L(\lambda)_\mu$ a pour dimension le nombre des $\nu \in B_\pi$ tels que $\nu(1) = \mu$.

Étant donnés deux chemins π, π' dans $\prod_{\text{int}}$, on définit leur concaténation $\pi * \pi'$ comme précédemment. Pour simplifier, supposons que $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ soit de dimension finie (ou symétrisable) de sorte que l'on peut définir les multiplicités des produits tensoriels $C_{\lambda\mu}^{\nu}$ $(\lambda, \mu, \nu \in P^+)$ par :

$$L(\lambda) \bigotimes L(\mu) = \bigoplus_{\nu} C_{\lambda\mu}^{\nu} L(\nu).$$

THÉORÈME 7 [Li2].— *Soient π, π' des chemins dominants tels que $\pi(1) = \lambda$ et $\pi'(1) = \mu$. Alors $C_{\lambda\mu}^{\nu}$ est le nombre de chemins dominants θ qui sont des concaténations de la forme $\pi * \varphi$ où $\varphi \in B_{\pi'}$ et $\varphi(1) = \nu - \lambda$.*

Les multiplicités $C_{\lambda\mu}^{\nu}$ sont symétriques en λ, μ, ν. Si, pour tout $\sigma \in P^+$, on définit σ^* par $L(\sigma^*) = L(\sigma)^*$, on a en effet : $C_{\lambda\mu}^{\nu} = C_{\mu\lambda}^{\nu}$ et $C_{\lambda\mu}^{\nu} = C_{\lambda\nu^*}^{\mu^*}$. En revanche, la combinatoire de Littelmann ne traduit pas de manière évidente cette symétrie. Cela suggère l'existence de matrices R et Φ.

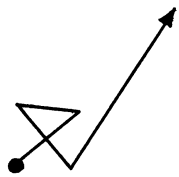
Le théorème est en particulier basé sur le curieux fait suivant difficile à prouver :

Lemme 8 : Soit $\pi' \in \prod_{\text{int}}$ un chemin dominant. Pour tout $\varphi \in B_{\pi'}$ et toute racine simple α, le minimum de la fonction $t \mapsto \langle \varphi(t) \mid h_\alpha \rangle$ est entier.

L'approche dans cette section est théorique. Dans la section suivante, on va voir une réalisation explicite de V_π.

3. UNE RÉALISATION EXPLICITE DU MODÈLE DES CHEMINS

Soit $\lambda \in P^+$. Si l'on prend un chemin dominant π arbitraire, avec $\pi(1) = \lambda$, comme par exemple :



il est difficile d'obtenir une description explicite des chemins de B_π. Le choix le plus simple est de prendre le chemin droit $\pi_\lambda(t) = t\lambda$. Littelmann a alors déterminé tous les chemins de B_{π_λ}. Ces chemins sont appelés dans [Li1] les chemins de Lakshmibai-Seshadri. Pour décrire ces chemins, nous aurons besoin de quelques définitions.

Soient $a \in]0,1[$ et $\tau, \sigma \in W/W_\lambda$ avec $\tau > \sigma$. Posons $s = \ell(\tau) - \ell(\sigma)$. Une a-chaîne de forme λ est une suite d'éléments $\tau = \kappa_0 > \kappa_1 > \cdots > \kappa_s = \sigma$ de W/W_λ avec $\ell(\kappa_i) = \ell(\tau) - i$ tels que :

$$a \cdot (\kappa_i(\lambda) - \kappa_{i-1}(\lambda)) \in Q.$$

Comme $\kappa_i = S_{\beta_i}\, \kappa_{i-1}$ pour une certaine racine réelle β_i, cette condition est en fait équivalente à $a\, \langle \kappa_{i-1}(\lambda) \,|\, h_{\beta_i} \rangle \in \mathbf{Z}$. L'existence d'une a-chaîne signifie donc que a est un nombre rationnel avec une certaine condition sur le dénominateur.

À toute paire de suites $(\underline{\tau}, \mathfrak{a})$, où :

$\underline{\tau} : \tau_1 > \tau_2 > \cdots > \tau_r$ est une suite d'éléments de W/W_λ,

$\mathfrak{a} : 0 = a_1 < a_2 < \cdots < a_r = 1$ est une suite de réels,

on associe un chemin $\pi_{\underline{\tau},\mathfrak{a}}$ ou $\pi : [0,1] \to \mathfrak{h}^*_{\mathbf{R}}$, linéaire par morceaux, et dont les points extrémaux sont 0, $(a_1 - a_0)\, \tau_1(\lambda)$, $(a_1 - a_0)\, \tau_1\, \lambda + (a_2 - a_1)\, \tau_2\, \lambda, \cdots, \sum_{i=1}^{j} (a_i - a_{i-1})\, \tau_i \lambda \cdots$. La paramétrisation exacte de ce chemin est donnée par :

$$\pi(t) = \sum_{i=1}^{j-1} (a_i - a_{i-1})\, \tau_i(\lambda) + (t - a_{j-1})\, \tau_j(\lambda)$$

pour $a_{j-1} \le t \le a_j$. Par définition, π est dit de Lakshmibai-Seshadri de forme λ si et seulement si, pour tout i, il existe une a_i-chaîne reliant τ_i à τ_{i+1}. Cela implique

que :

$$\lambda - \pi(1) = (\lambda - \tau_r \lambda) + \sum_{i=1}^{r-1} a_i(\tau_{i+1}(\lambda) - \tau_i(\lambda))$$

est élément de Q, donc $\pi(1) \in P$.

THÉORÈME 9 [Li1].— *Soient $\lambda \in P^+$ et $\mu \in P$. La dimension de l'espace propre $L(\lambda)_\mu$ est le nombre de chemins de Lakshmibai-Seshadri π de forme λ tels que $\pi(1) = \mu$.*

En fait, on a un résultat plus précis. Pour $w \in W/W_\lambda$, $L(\lambda)_{w\lambda}$ est de dimension 1.

Posons $E_w(\lambda) = U(\mathfrak{b})\, e_{w\lambda}$ où $e_{w\lambda}$ est une base de $L(\lambda)_{w\lambda}$. Notons aussi $\mathcal{P}_w(\lambda)$ l'ensemble des chemins de Lakshmibai-Seshadri de forme λ associés à une suite $(\underline{\tau}, \mathfrak{a})$ avec $\tau_1 \leq w$. Le $\mathfrak{b}$-module $E_w(\lambda)$ est appelé module de Demazure.

THÉORÈME 10.— *Soient $\lambda \in P^+$ et $\mu \in P$. On a :*

$$\dim E_w(\lambda)_\mu = \mathrm{Card}\, \{\pi \in \mathcal{P}_w(\lambda) \,|\, \pi(1) = \mu\}.$$

Comparons le théorème 9 avec les formules connues auparavant. Pour tout $\mu \in Q$, notons $K(\mu)$ le nombre de manières d'exprimer μ comme une somme de racines positives (comptées avec multiplicités). Cette fonction K est classiquement appelée fonction de Kostant et peut être définie par la série génératrice :

$$\sum K(\mu)\, e^\mu = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1}{1 - e^\alpha}$$

(rappelons que Δ^+ est considéré comme un ensemble à multiplicités). La formule classique suivante (due à Steinberg) :

$$\dim L(\lambda)_\mu = \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, K(w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho))$$

a un intérêt théorique considérable. Néanmoins, elle est combinatoirement peu pratique : par exemple, il n'est pas combinatoirement évident que le terme de droite soit ≥ 0, à cause de la présence de signes $+$ et $-$. La formule de Littelmann a l'intérêt de décrire les multiplicités comme le nombre d'éléments d'un ensemble (et non plus comme différence de deux cardinaux).

À ce stade, le modèle des chemins n'a été utilisé que pour le chemin dominant rectiligne $\pi(t) = t\lambda$. Cependant, des chemins dominants plus complexes sont utiles pour trouver les multiplicités de produits tensoriels. Rappelons la formule de Kostant. On supposera que $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ est symétrisable pour simplifier. Alors on a $L(\lambda) \bigotimes L(\mu) = \bigoplus C^{\nu}_{\lambda\mu} L(\nu)$ où :

$$C^{\nu}_{\lambda\mu} = \sum_{x,y\in W} \varepsilon(x)\,\varepsilon(y)\,K(x(\lambda+\rho) + y(\mu+\rho) - (\nu+\rho)).$$

Par comparaison, Littelmann a obtenu (comme corollaire du théorème 7) :

THÉORÈME 11.— *Le coefficient $C^{\nu}_{\lambda\mu}$ est le nombre de chemins de Lakshmibai-Seshadri π de forme μ tels que $\pi_\lambda * \pi$ soit dominant et $\pi_\lambda * \pi(1) = \nu$.*

4. INTERPRÉTATION DES CHEMINS DE LAKSHMIBAI-SESHADRI EN TERMES DE POLYTOPES À SOMMETS ENTIERS

Soit X un ensemble simplicial, c'est-à-dire la donnée d'une collection de parties I de X (appelées simplexes) de sorte que tout sous-ensemble d'un simplexe soit encore un simplexe. Pour éviter des discussions techniques, nous allons supposer X fini. Soit $\mathbf{R}X$ l'espace vectoriel de base X, et soit Δ_X le polytope associé à X, *i.e.* Δ_X est le sous-espace de $\mathbf{R}X$ formé des combinaisons linéaires $\sum_{x\in X} a_x\, x$ où $a_x \geq 0$, $\sum a_x = 1$ et $\{x \,|\, a_x \neq 0\}$ est un simplexe de X. Tout simplexe I de X correspond à un simplexe topologique Δ_I de Δ_X.

Une structure entière sur Δ_X sera la donnée pour tout entier $n > 0$ d'un sous-ensemble $\Delta_X(n)$ de Δ_X de sorte que, pour tout simplexe I de X, il existe un réseau Γ_I de $\mathbf{R}I$ contenant I tel que :

$$\Delta_I(n) = \Delta_I \cap \frac{1}{n}\Gamma_I,$$

où $\Delta_I(n) = \Delta_X(n) \cap \Delta_I$.

Cette définition généralise la notion de polytopes à sommets entiers.

On peut vérifier ([D]) que la condition de a-chaîne pour les chemins de Lakshmibai-Seshadri est indépendante du choix de la chaîne. Soient $\lambda \in P^+$ et $w \in W/W_\lambda$. L'ensemble $X(w) = \{u \in W/W_\lambda \,|\, u \leq w\}$ a une structure simpliciale avec, pour simplexes, tous les sous-ensembles totalement ordonnés. Notons P_w le polytope associé. Alors il existe une structure entière naturelle sur P_w de telle sorte que, pour tout entier $n > 0$, il existe une bijection naturelle :

$$\mathcal{P}_w(n\lambda) \simeq P_w(n).$$

Cela permet d'interpréter les dimensions des modules de Demazure comme des polynômes d'Ehrhart. Je ne sais pas s'il est toujours possible de réaliser P_w comme un polytope à sommets entiers.

Pour une utilisation des bases de Littelmann, voir [S].

5. ANNEXE. ALGÈBRES DE KAČ-MOODY

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est dite *matrice de Cartan généralisée* si elle satisfait aux trois conditions suivantes :

i) $a_{ii} = 2$;

ii) a_{ij} est un entier ≤ 0 pour $i \neq j$;

iii) $a_{ij} = 0$ si et seulement si $a_{ji} = 0$.

Une *réalisation* de A est la donnée d'un espace vectoriel réel $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ et de deux familles d'éléments $h_i \in \mathfrak{h}$, $\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$ tels que $\alpha_i(h_j) = a_{ji}$. On impose aussi aux famille h_i, α_i d'être linéairement indépendantes. Un calcul d'algèbre linéaire implique alors que $\dim \mathfrak{h} \geq 2n - rg(A)$. Lorsque cette inégalité est une égalité, la réalisation est unique à isomorphisme près.

L'*algèbre de Kač-Moody* (réelle déployée) associée à la réalisation $\mathfrak{h}$ de $\mathbf{R}$ est l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ (notée aussi $\mathfrak{g}$) engendrée par l'espace vectoriel $\mathfrak{h}$ et des générateurs f_i, e_i $(1 \leq i \leq n)$ soumis aux seules relations :

$[h, h'] = 0$ pour $h, h' \in \mathfrak{h}$,

$[e_i, f_i] = h_i$ pour $1 \leq i \leq n$,

$[e_i, f_j] = 0$ pour $1 \leq i \neq j \leq n$,

$[h, e_i] = \alpha_i(h)\, e_i$ pour $1 \leq i \leq n$,

$[h, f_i] = -\alpha_i(h)\, f_i$ pour $1 \leq i \leq n$,

et aux relations de Serre :

$ad^{m_{ij}}(e_i)(e_j) = 0$,

$ad^{m_{ij}}(f_i)(f_j) = 0$,

où $m_{ij} = 1 - a_{ij}$, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

Les éléments α_i de $\mathfrak{h}^*$ sont appelés *racines simples* et les éléments h_i les *coracines simples*. Lorsque α est une racine simple, on notera h_α la coracine correspondante.

Pour toute racine simple α, on a $\alpha(h_\alpha) = 2$. Donc $s_\alpha = 1 - \alpha \bigotimes h_\alpha$ est une réflexion hyperplane de $\mathfrak{h}^*$. Le groupe W engendré par ces réflexions est dit *groupe de Weyl.* Puisque $s_\alpha^2 = 1$, tout élément $w \in W$ peut être écrit sous la forme d'un produit $\sigma_1 \cdots \sigma_N$ de réflexions simples. Lorsque N est minimal, une telle décomposition est dite *réduite.* On pose alors $\ell(w) = N$ et $\ell(w)$ s'appelle la *longueur* de w.

Un *poids* est un élément $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tel que $\lambda(h_\alpha) \in \mathbf{Z}$ pour toute racine simple α. L'ensemble des poids est noté P. Il existe un poids ρ tel que $\rho(h_\alpha) = 1$ pour toute racine simple α. Ce poids n'est pas unique, mais $\rho - w\rho$ est indépendant du choix de ρ pour tout $w \in W$. Le réseau des racines est $Q = \bigoplus_{1\leq i\leq n} \mathbf{Z}\,\alpha_i$ (ce n'est vraiment un réseau de $\mathfrak{h}$ que lorsque $\dim \mathfrak{h} = n$). On a $Q \subset P$.

La *chambre dominante* de $\mathfrak{h}$ est le convexe $C = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(h_\alpha) \geq 0$ pour toute racine simple $\alpha\}$. On pose $P^+ = P \cap C$. Pour $\lambda \in P^+$, on notera W_λ le stabilisateur de λ. Toute classe de W/W_λ possède un unique représentant dans W de longueur minimale. On identifiera ainsi W/W_λ à un sous-ensemble de W que l'on munira de l'ordre de Bruhat induit.

Si M est un $\mathfrak{h}$-module et $\lambda \in P$, on pose $M_\lambda = \{m \in M \mid h \cdot m = \lambda(h)m$ pour tout $h \in \mathfrak{h}\}$. On appelle M_λ l'espace de poids λ de M et sa dimension est la multiplicité de λ. Quand $M = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} M_\lambda$, on dit que M est diagonalisable.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est diagonalisable comme $\mathfrak{h}$-module pour la représentation adjointe. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\neq 0} \mathfrak{g}_\alpha$. Les éléments $\alpha \in P - \{0\}$ tels que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ sont appelés les *racines.* On considère l'ensemble Δ des racines comme un ensemble à multiplicités (chaque racine α apparaît avec multiplicité $\dim \mathfrak{g}_\alpha$). Une racine α est *positive* si l'on a $\alpha = \sum_{1\leq i\leq n} m_i\,\alpha_i$ où les m_i sont des entiers ≥ 0 (pour toute racine α, α est positive ou $-\alpha$ est positive). L'ensemble des racines positives est noté Δ^+. On note $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$. Pour $\lambda \in P^+$, on note $L(\lambda)$ le module cyclique sur $U(\mathfrak{g})$ engendré par un vecteur v soumis aux seules relations :

$h \cdot v = \lambda(h)r$ pour $h \in \mathfrak{h}$,

$e_i \cdot v = 0$ pour $1 \leq i \leq n$,

$f_i^{m_i} \cdot v = 0$ pour $1 \leq i \leq n$, où $m_i = \lambda(h_i) + 1$.

Lorsque A est symétrisable (*i.e.* $A = DS$ où D est diagonale et S symétrique), le module $L(\lambda)$ est simple.

Exemple : Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i<n}$, la matrice de Cartan telle que :

$$\begin{cases} a_{ii} = 2, & \\ a_{ij} = -1 & \text{si } |i-j| = 1, \\ a_{ij} = 0 & \text{si } |i-j| > 1. \end{cases}$$

Notons $\mathfrak{h} = \mathbf{R}^n$ avec sa base canonique $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$. Soit $(\varepsilon_i^*)_{1\leq i\leq n}$ la base duale de $\mathfrak{h}^*$ et posons $h_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, $\alpha_i = \varepsilon_i^* - \varepsilon_{i+1}^*$. Alors $(\mathfrak{h}, h_1, \cdots, h_{n-1}, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$ est une réalisation de A et l'algèbre de Kač-Moody associée est $\mathrm{gl}(n, \mathbf{R})$.

Dans le cas du $\mathfrak{g}$-module naturel de dimension n, les chemins de Lakshmibai-Seshadri sont simplement les n chemins rectilignes $t \mapsto t\,\varepsilon_i$. Ce chemin sera simplement noté ε_i. On a $P^+ = \{\sum_{i=1}^n m_i\,\varepsilon_i \,|\, m_i \geq m_{i+1}\}$. Donc pour qu'une concaténation $\varepsilon_{i_1} * \cdots * \varepsilon_{i_m}$ soit un chemin dans C, il est nécessaire et suffisant que l'on ait $\varepsilon_{i_1} + \cdots + \varepsilon_{i_r} \in P^+$ pour tout $1 \leq r \leq m$.

Montrons que ces chemins peuvent être identifiés à des tableaux standard. On a $\varepsilon_{i_1} + \cdots + \varepsilon_{i_m} = \sum_{i=1}^n m_i\,\varepsilon_i$ où $m_1 \geq m_2 \cdots$. Remplissons le diagramme de Young avec les entiers $1, 2, \cdots, m$ comme suit : on place l'indice r sur la ligne i_r et aussi à gauche que possible. Par exemple, le chemin $\varepsilon_1 * \varepsilon_2 * \varepsilon_1 * \varepsilon_3 * \varepsilon_1$ correspond au tableau standard

1	3	5
2		
4		

BIBLIOGRAPHIE

[D] R. DEHY - Thèse (en préparation).

[Jo] A. JOSEPH - *Quantum groups and their primitive ideals*, Springer-Verlag, 1995.

[Hu] J. HUMPHREYS - *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer-Verlag, 1968.

[Kač] V.G. KAČ - *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd edition, Cambridge University Press, 1990.

[Kas1] M. KASHIWARA - *Crystalizing the q-analogue of universal enveloping algebras*, Comm. Math. Phys. **133** (1990), 249-260.

[Kas2] M. KASHIWARA - *Crystal bases and Littelmann's refined Demazure character formula*, RIMS preprint, 1992.

[Ku] S. KUMAR - *Demazure character formula in arbitrary Kač-Moody settings*, Invent. Math. **89** (1987), 395-423.

[La] V. LAKSHMIBAI - *Demazure modules*, preprint, 1994.

[LaS] V. LAKSHMIBAI and C.S. SESHADRI - *Standard monomial theory*, Proceedings of Hyderabad Conference on Algebraic groups, 1991.

[Li1] P. LITTELMANN - *A Littlewood-Richardson rule for symmetrisable Kač-Moody algebras*, Invent. Math. **116** (1994), 329-346.

[Li2] P. LITTELMANN - *Paths and root operators in representation theory*, à paraître aux Ann. of Math.

[Li3] P. LITTELMANN - *A plactic algebra for semi-simple Lie algebras*, preprint, 1994.

[Lu] G. LUSZTIG - *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, II, Prog. Theor. Phys. **102** (1990), 175-201.

[Ma] O. MATHIEU - *Formule de caractères pour les algèbres de Kač-Moody générales*, Astérisque **159-160** (1988).

[S] Y. SANDERSON - *Dimension of Demazure modules for rank* 2 *affine Lie algebras*, thèse, à paraître dans Compositio Mathematica.

Olivier MATHIEU

Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
IRMA
UA 1 du CNRS
7, rue René Descartes
F-67084 STRASBOURG CEDEX
e-mail : mathieu@math.u-strasbg.fr

PIERRE VOGEL

Les invariants récents des variétés de dimension 3

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 799, p. 225-250
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__225_0>

Séminaire BOURBAKI Mars 1995
47ème année, 1994-95, n° 799

LES INVARIANTS RÉCENTS DES VARIÉTÉS DE DIMENSION 3

par **Pierre VOGEL**

Au cours des dix dernières années, sont apparus des objets mathématiques complètement nouveaux reliant des domaines aussi variés que la topologie de basse dimension, la théorie des algèbres de von Neumann, la théorie des algèbres de Lie semisimples, la physique théorique, la théorie des champs. Après la découverte du polynôme de Jones en 1984 suivi par d'autres invariants de nœuds comme le polynôme HOMFLY ou le polynôme de Kauffman, le point de vue de la topologie de basse dimension a beaucoup changé, ces invariants étant de nature entièrement différente des invariants connus comme le polynôme d'Alexander. Contrairement aux anciens invariants qui étaient essentiellement définis en toute dimension et qui se prêtaient aux techniques générales (chirurgie et utilisation de la topologie algébrique), ces nouveaux invariants sont irrémédiablement liés à la théorie des nœuds et entrelacs classiques et reflètent de façon très fine la richesse et la complexité de la topologie de dimension 3.

Ensuite, la construction des groupes quantiques par V. Drinfeld et M. Jimbo en 1985 permit de reconstruire ces invariants et d'en obtenir d'autres à partir de chaque algèbre de Lie simple. Ainsi toute algèbre de Lie simple induit un invariant de nœuds qui est un polynôme en une variable dite quantique. Les algèbres de Lie de la série A redonnent le polynôme HOMFLY, ceux des séries B, C et D redonnent le polynôme de Kauffman, et les algèbres de Lie exceptionnelles donnent chacune un autre invariant de nœuds et d'entrelacs.

En 1988, E. Witten invente la notion de théorie quantique des champs topologique, qui associe à chaque surface S un espace vectoriel de dimension finie $V(S)$, et à chaque cobordisme W de S vers S' une application linéaire de $V(S)$ vers $V(S')$, de façon à transformer union disjointe en produit tensoriel et recollement de cobordisme en composition. Un tel foncteur V associe à toute variété compacte sans bord de dimension 3 un endomorphisme de $V(\emptyset)$ et l'on obtient un invariant des variétés de dimension trois à valeurs dans le corps de base. Enfin, Witten propose une construction d'un tel foncteur V à l'aide d'une intégrale de Feynman.

La première construction mathématique d'un invariant des variétés de dimension 3 correspondant au programme de Witten a été donnée en 1990 par N. Reshetikhin et V. Turaev.

1. CATÉGORIES MONOÏDALES ET INVARIANTS D'ENTRELACS

1.1. Catégories monoïdales

DÉFINITION 1.2. – *On appelle catégorie monoïdale stricte un triplet* $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1})$ *tel que :*

— $\mathcal{M}$ *est une (petite) catégorie*

— $\otimes$ *est un foncteur covariant de* $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ *dans* $\mathcal{M}$

— $\mathbf{1}$ *est un objet de* $\mathcal{M}$

— $\otimes$ *est associatif pour les objets et les morphismes de* $\mathcal{M}$. *C'est-à-dire que pour tout triplet d'objets* X, Y *et* Z *de* $\mathcal{M}$ *et de flèches* f, g *et* h *de* $\mathcal{M}$, *on a :*

$$X \otimes (Y \otimes Z) = (X \otimes Y) \otimes Z \qquad \text{et} \qquad f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h$$

— $\mathbf{1}$ *est un objet neutre. C'est-à-dire que pour tout objet* X *de* $\mathcal{M}$ *et toute flèche* f *de* $\mathcal{M}$, *on a :*

$$X \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes X = X \qquad \text{et} \qquad f \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{1}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{1}} \otimes f = f$$

Remarques. – La condition de petite catégorie n'est pas obligatoire; elle peut sans difficulté être remplacée par la condition que les classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{M}$ forment un ensemble.

Les conditions d'égalité entre objets de $\mathcal{M}$:

$$X \otimes (Y \otimes Z) = (X \otimes Y) \otimes Z \quad \text{et} \quad X \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes X = X$$

peuvent également être assouplies. On peut remplacer ces égalités par des isomorphismes canoniques vérifiant certaines conditions de cohérence. On a alors la notion de catégorie monoïdale [Ma].

La catégorie des modules de type fini sur un anneau commutatif munie du produit tensoriel ou la catégorie des ensembles finis munie du produit sont des exemples de catégories monoïdales.

DÉFINITION 1.3. – *On appelle catégorie enrubannée (stricte), une catégorie monoïdale (stricte) $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1})$ munie d'opérations $c, \theta, *, \omega, e$ telles que :*

— $*$ associe à chaque objet X de $\mathcal{M}$ un objet X^* de $\mathcal{M}$ (son dual)

— c associe à chaque paire d'objets X et Y de $\mathcal{M}$ un isomorphisme $c_{X,Y}$ de $X \otimes Y$ sur $Y \otimes X$

— θ, ω et e associent à chaque objet X de $\mathcal{M}$ un isomorphisme θ_X de X sur X, un morphisme ω_X de $\mathbf{1}$ dans $X \otimes X^*$ et un morphisme e_X de $X^* \otimes X$ dans $\mathbf{1}$

— pour tous les objets X, Y et Z de $\mathcal{M}$, on a :

$$c_{X,Y\otimes Z} = (\mathrm{Id}_Y \otimes c_{X,Z})(c_{X,Y} \otimes \mathrm{Id}_Z)$$

$$c_{X\otimes Y,Z} = (c_{X,Z} \otimes \mathrm{Id}_Y)(\mathrm{Id}_X \otimes c_{Y,Z})$$

— pour les flèches $f : X \to X'$ et $g : Y \to Y'$ de $\mathcal{M}$, on a :

$$(g \otimes f)c_{X,Y} = c_{X',Y'}(f \otimes g)$$

— pour les objets X et Y de $\mathcal{M}$, on a :

$$\theta_{X\otimes Y} = c_{Y,X}c_{X,Y}(\theta_X \otimes \theta_Y)$$

— pour toute flèche $f : X \to Y$ de $\mathcal{M}$, on a :

$$f\theta_X = \theta_Y f$$

— pour tout objet X de $\mathcal{M}$, on a :

$$(\mathrm{Id}_X \otimes e_X)(\omega_X \otimes \mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_X$$

$$(e_X \otimes \mathrm{Id}_{X^*})(\mathrm{Id}_{X^*} \otimes \omega_X) = \mathrm{Id}_{X^*}$$

$$(\theta_X \otimes \mathrm{Id}_{X^*})\omega_X = (\mathrm{Id}_X \otimes \theta_{X^*})\omega_X$$

DÉFINITION 1.4. – *Soit k un anneau commutatif. On appelle k-catégorie enrubannée, une catégorie enrubannée $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, c, \theta, *, \omega, e)$ où les morphismes de $\mathcal{M}$ forment des k-modules et où les compositions et le produit $\otimes$ sont bilinéaires.*

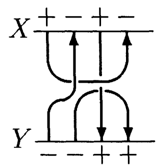
1.5. Exemple fondamental : la catégorie des entrelacs

Pour tout entier $n \geq 0$, notons $[n]$ le sous-ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ de $\mathbf{C}$. On désignera par $\mathrm{Obj}(\mathcal{E})$ l'ensemble des couples $([n], \alpha)$, où n est un entier positif ou nul, et α est une application de $[n]$ dans $\{\pm 1\}$.

Soient $X = ([p], \alpha)$ et $Y = ([q], \beta)$ deux éléments de $\mathrm{Obj}(\mathcal{E})$. On désignera par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, Y)$ l'ensemble des classes d'isotopie (relativement au bord) d'entrelacs parallélisés à bord L contenus dans $\mathbf{C} \times I$ et possédant les propriétés suivantes :

— $\partial L = L \cap (\mathbf{C} \times \partial I) = ([p] \times \{1\}) \cup ([q] \times \{0\})$

— en tout point x de ∂L, le vecteur tangent à L est normal au plan $\mathbf{C} \times \{1\}$ ou $\mathbf{C} \times \{0\}$ et pointe vers le haut ou le bas selon que $\alpha(x)$ (ou $\beta(x)$) est négatif ou positif. De plus les deux autres vecteurs de la parallélisation (qui forment un repère direct) sont les vecteurs $\alpha(x)$ (ou $\beta(x)$) et i de $\mathbf{C}$.



On a ainsi défini une catégorie $\mathcal{E}$ (la catégorie des entrelacs), la composition des morphismes étant obtenue par le recollement des entrelacs à bord.

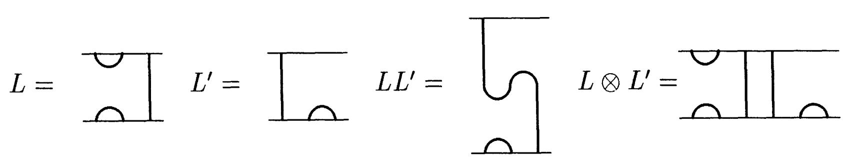
Cependant, outre la composition d'entrelacs, il y a une autre loi, notée $\otimes$. Au niveau des objets, on a :

$$([p], \alpha) \otimes ([q], \beta) = ([p+q], \gamma)$$

avec :

$$\gamma(i) \doteq \begin{cases} \alpha(i) & \text{si} \quad i \leq p \\ \beta(i-p) & \text{sinon} \end{cases}$$

Au niveau des entrelacs, $L \otimes L'$ est obtenu en juxtaposant L' à droite de L.

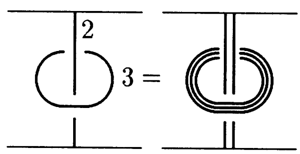


Remarque. – Contrairement à certaines conventions, une parallélisation désigne ici une trivialisation du fibré normal. Cependant, comme l'espace ambient est canoniquement orienté, on peut compléter cette trivialisation en rajoutant un vecteur tangent en première position et obtenir un repère direct de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$. Un entrelacs parallélisé est donc naturellement orienté, et en chaque point de l'entrelacs, on a un repère direct dont le premier vecteur est tangent à l'entrelacs de façon compatible à l'orientation. Enfin, pour des raisons de souplesse, on ne supposera pas le repère orthonormé.

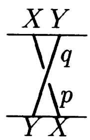
Remarque. – Si L est un entrelacs représenté par un diagramme, on adoptera les conventions suivantes :

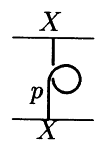
— en tout point de L, le repère (e_1, e_2, e_3) de la parallélisation est direct, e_1 est tangent à L dans le sens correspondant à l'orientation de L, e_2 est horizontal (dans le plan $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \subset \mathbf{C} \times \mathbf{R}$) et orthogonal à e_1 et e_3 est le vecteur vertical $i \times \{0\}$.

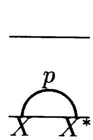
— Si une composante du diagramme apparaît affectée d'un entier n, cela signifie que la composante correspondante de L est répétée n fois parallèlement à elle-même dans la direction du deuxième vecteur e_2 de la parallélisation.

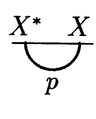


Il est facile de vérifier que la catégorie des entrelacs $\mathcal{E}$ est une catégorie monoïdale stricte, l'objet $\mathbf{1}$ étant l'objet $([0], \alpha)$ correspondant à un ensemble vide de points de $\mathbf{C}$. Cette catégorie est cependant beaucoup plus riche. Si $X = ([p], \alpha)$ et $Y = ([q], \beta)$ sont deux objets de $\mathcal{E}$, on pose :

$X^* = ([p], -\alpha \circ \gamma_p)$ $\quad c_{X,Y} =$ 

$\quad \theta_X =$ 

$\omega_X =$ 

$\quad e_X =$ 

ou γ_p est l'application : $i \mapsto p + 1 - i$.

THÉORÈME 1.6.([Tu]) – *La catégorie des entrelacs $\mathcal{E}$ munie des opérations $\otimes, \mathbf{1}, c, \theta$, $*, \omega, e$ est une catégorie enrubannée stricte. Elle est de plus universelle au sens suivant :*

Pour toute catégorie enrubannée stricte $\mathcal{M}$, et tout objet X de $\mathcal{M}$, il existe un unique foncteur de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{M}$ qui envoie l'objet $([1], 1)$ de $\mathcal{E}$ en l'objet X.

Ce théorème est fondamental pour la raison suivante : si $\mathcal{M}$ est une catégorie enrubannée stricte, et si X est un objet de $\mathcal{M}$, on a un foncteur F de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{M}$ qui envoie $([1], 1)$ en X. Si maintenant L est un entrelacs parallélisé sans bord, il représente un endomorphisme de l'objet vide $\mathbf{1}_{\mathcal{E}}$ et induit un endomorphisme de l'objet $\mathbf{1}_{\mathcal{M}}$ qui ne dépend que de la classe d'isotopie de L. On obtient ainsi un invariant d'entrelacs parallélisés.

Ce résultat est également valable en un certain sens pour une catégorie enrubannée non nécessairement stricte; pour chaque objet X d'une catégorie enrubannée $\mathcal{M}$, on obtient un invariant d'entrelacs parallélisés à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathbf{1}_{\mathcal{M}})$. Ce dernier objet est un monoïde commutatif en général et une k-algèbre commutative dans le cas où $\mathcal{M}$ est une k-catégorie enrubannée.

Il est possible d'enrichir la catégorie $\mathcal{E}$ pour pouvoir, en quelque sorte, prendre en compte tous les objets de la catégorie $\mathcal{M}$ à la fois :

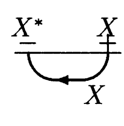
1.7. La catégorie des entrelacs coloriés

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie enrubannée stricte. On notera $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ la catégorie des entrelacs $\mathcal{M}$-coloriés définie comme suit :

Un objet de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ est un triple $([p], \alpha, \varphi)$, où $([p], \alpha)$ est un objet de $\mathcal{E}$ et φ est une application de $[p]$ dans $\mathrm{Obj}(\mathcal{M})$.

Une flèche de $([p], \alpha, \varphi)$ dans $([q], \beta, \psi)$ est un entrelacs $\mathcal{M}$-colorié, c'est-à-dire une paire $([L], f)$ où $[L]$ est une classe d'isotopie d'entrelacs définissant une flèche dans $\mathcal{E}$ de $([p], \alpha)$ dans $([q], \beta)$ et où f associe à chaque composante L_0 de L un objet $f(L_0)$ de $\mathcal{M}$, de telle façon que pour tout $x = (y, 1), y \in [p]$ (resp. $x = (y, 0), y \in [q]$) situé sur une composante L_0 de L, on ait :

$$f(L_0) = \begin{cases} \varphi(y) & \text{(resp.} \quad \psi(y)) \quad \text{si} \quad \alpha(y) = 1 \quad \text{(resp.} \quad \beta(y) = 1) \\ \varphi(y)^* & \text{(resp.} \quad \psi(y)^*) \quad \text{sinon} \end{cases}$$



La structure de catégorie monoïdale de $\mathcal{E}$ s'étend naturellement en une structure de catégorie monoïdale sur $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. L'opérateur de dualité * se définit comme suit : $([p], \alpha, \varphi)^* = ([p], -\alpha \circ \gamma_p, \varphi \circ \gamma_p)$, et les systèmes de flèches θ, ω et e se prolongent à $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ en mettant sur les flèches les seules couleurs possibles. De cette façon, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ hérite d'une structure de catégorie enrubannée.

PROPOSITION 1.8.([Tu]) – *Il existe un unique foncteur de la catégorie enrubannée $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ dans la catégorie enrubannée $\mathcal{M}$ qui transforme l'objet $([1], 1, X)$ en l'objet X de $\mathcal{M}$.*

En corollaire, tout entrelacs $\mathcal{M}$-colorié sans bord possède un invariant bien défini dans $\mathrm{End}(\mathbf{1}_{\mathcal{M}})$.

1.9. Bigèbre de Hopf enrubannée

Pour tout module M sur un anneau commutatif k, on notera P_M l'application $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ de $M \underset{k}{\otimes} M$ dans lui-même. Si M et N sont deux k-modules, on notera $P_{M,N}$ l'application $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ de $M \otimes N$ dans $N \otimes M$.

DÉFINITION 1.10.([D1][D2]) – *Soit k un anneau commutatif. On appelle k-bigèbre de Hopf quasitriangulaire une k-bigèbre de Hopf A (avec comultiplication Δ) munie d'un élément inversible R de $A \otimes A$ vérifiant les conditions suivantes :*

$$\forall a \in A \qquad P_A(\Delta(a)) = R\Delta(a)R^{-1}$$

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})R = R_{13}R_{23}$$

$$(\mathrm{Id} \otimes \Delta)R = R_{13}R_{12}$$

où R_{ij} désigne l'élément R envoyé dans les i-ième et j-ième facteurs de $A \otimes A \otimes A$:

$$R_{12} = R \otimes 1 \qquad R_{23} = 1 \otimes R \qquad R_{13} = (\mathrm{Id}_A \otimes P_A)(R_{12})$$

Une k-bigèbre de Hopf quasitriangulaire (A, R) possède un élément particulier, l'élément $u = u_A = \mu(\gamma \otimes 1)(R)$, γ étant l'antipode de A et μ le produit.

L'élément R est appelé dans la littérature matrice R. C'est une solution de l'équation de Yang-Baxter :

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

LEMME 1.11. – *L'élément u est inversible et vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall a \in A \qquad \gamma^2(a) = uau^{-1}$$

$$u\gamma(u) = \gamma(u)u \text{ est central}$$

$$\varepsilon(u) = 1$$

$$\Delta(u\gamma(u)) = (P_A(R)R)^{-2}(u\gamma(u) \otimes u\gamma(u))$$

ε, γ et Δ désignant la coünité, l'antipode et la comultiplication de A.

DÉFINITION 1.12.([RT1]) – *On appelle bigèbre de Hopf enrubannée une bigèbre de Hopf quasitriangulaire munie d'un élément central $v \in A$ vérifiant les conditions suivantes :*

$$v^2 = u\gamma(u) \qquad \gamma(v) = v \qquad \varepsilon(v) = 1 \qquad \Delta(v) = (P_A(R)R)^{-1}(v \otimes v)$$

Il n'y a pas de différence significative entre les notions de bigèbre de Hopf quasitriangulaire et bigèbre de Hopf enrubannée, car si A est une bigèbre de Hopf quasitriangulaire, d'après le lemme 1.11, l'algèbre $B = A[v]/(v^2 - u\gamma(u))$ a naturellement une unique structure de bigèbre de Hopf enrubannée telle que l'inclusion $A \subset B$ soit un morphisme de bigèbres de Hopf quasitriangulaires.

PROPOSITION 1.13. – *Soit (A, R, v) une bigèbre de Hopf enrubannée sur un anneau commutatif k. Alors la catégorie Rep(A) des A-modules qui sont projectifs de type fini sur k forment une k-catégorie enrubannée, le produit $\otimes$ étant le produit tensoriel au-dessus de k et $*$ étant l'opérateur dual (sur k); les structures de A-modules sur $M \otimes N$ et sur M^* sont définies par :*

$$\forall x \otimes y \in M \otimes N,\ \forall a \in A \qquad a(x \otimes y) = \Delta(a)(x \otimes y)$$

$$\forall f \in M^*,\ \forall x \in M,\ \forall a \in A \qquad af(x) = f(\gamma(a)x).$$

Les transformations c, θ et e sont définies par :

$$c_{M,N}(x \otimes y) = P_{X,Y}(R(x \otimes y)) \qquad \theta_M(x) = v^{-1}x \qquad e_M(f \otimes x) = f(x)$$

et $\omega_M(1)$ est l'unique élément $\Sigma e_i \otimes \varepsilon_i$ de $M \otimes M^*$ tel que, pour tout $x \in M$, on ait : $\Sigma e_i \varepsilon_i(x) = x$.

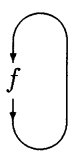
En conséquence, pour chaque bigèbre de Hopf enrubannée (A, R, v), on a des invariants d'entrelacs parallélisés à valeurs dans k, dépendant du choix d'une représentation M de A. On a également un invariant pour les entrelacs parallélisés coloriés par des représentations de A.

2. TRACE ET RÉDUCTION

DÉFINITION 2.1. – *Soit $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1}, c, \theta, *, \omega, e)$ une catégorie enrubannée. Soit X un objet de $\mathcal{M}$ et f un endomorphisme de X. On désigne par trace de f l'endomorphisme $\tau(f)$ de $\mathbf{1}_{\mathcal{M}}$ défini par :*

$$\tau(f) = e_X c_{X,X^*}(f \otimes \theta_{X^*})\omega_X.$$

La trace de f peut être représentée schématiquement par le diagramme suivant :



la partie inférieure du diagramme correspondant à $e_X c_{X,X^*}(\mathrm{Id}_X \otimes \theta_{X^*})$.

LEMME 2.2. – *Soient X et Y deux objets de $\mathcal{M}$, et $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux morphismes. Alors on a :*

$$\tau(fg) = \tau(gf).$$

Si f et g sont deux endomorphismes de $\mathcal{M}$, on a :

$$\tau(f \otimes g) = \tau(f)\tau(g).$$

Enfin si $f : X \to Y$, $g :\to X' \to Y'$ et $\varphi : Y \otimes Y' \to X \otimes X'$ sont des morphismes de $\mathcal{M}$, on a :

$$\tau((f \otimes g)\varphi) = \tau(f\psi)$$

avec : $$\psi = (\mathrm{Id}_X \otimes e_{X'} c_{X',X'^*})(\varphi \otimes \theta_{X'})(\mathrm{Id}_Y \otimes g \otimes \mathrm{Id}_{X'})(\mathrm{Id}_Y \otimes \omega_{X'}).$$

2.3. Réduction des k-catégories enrubannées

Soit $\mathcal{M}$ une k-catégorie enrubannée. On peut définir une catégorie quotient $\mathcal{M}_{red}$ de $\mathcal{M}$ de la façon suivante :

$\mathcal{M}_{red}$ a les mêmes objets que $\mathcal{M}$. Si X et Y sont deux objets de $\mathcal{M}$, on définit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{red}}(X, Y)$ comme le quotient de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)$ par le sous-module de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)$

formé des morphismes $f : X \to Y$ tels que la trace $\tau(fg)$ est nulle pour tout morphisme $g : Y \to X$. Grâce au lemme 2.2, on vérifie que $\mathcal{M}_{red}$ est une k-catégorie enrubannée.

Ainsi, pour définir un invariant pour les entrelacs parallélisés, on peut utiliser à la place de $\mathcal{M}$ la catégorie $\mathcal{M}_{red}$ qui dans certains cas est beaucoup plus petite.

2.4. H_0 des k-catégories enrubannées

DÉFINITION 2.5. – *Soit $\mathcal{M}$ une k-catégorie enrubannée. On désigne par $H_0(\mathcal{M})$ le k-module engendré par les classes d'isomorphisme de paires (X, f) où X est un objet de $\mathcal{M}$ et f un endomorphisme de X et quotienté par les relations suivantes :*

— pour tout objet X de $\mathcal{M}$, l'application canonique de $End_{\mathcal{M}}(X)$ dans $H_0(\mathcal{M})$ est k-linéaire

— si $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ sont deux morphismes de $\mathcal{M}$, les classes de (X, gf) et (Y, fg) sont égales dans $H_0(\mathcal{M})$.

La classe d'un endomorphisme f dans $H_0(\mathcal{M})$ sera notée $tr(f)$.

PROPOSITION 2.6. – *Le produit tensoriel de $\mathcal{M}$ induit sur $H_0(\mathcal{M})$ une structure de k-algèbre commutative.*

L'intérêt de cette algèbre est que, dans les cas connus, c'est un objet infiniment plus simple et petit que la catégorie $\mathcal{M}$. De plus, on peut déterminer des invariants d'entrelacs en coloriant chaque composante d'un entrelacs L par un élément de $\mathrm{H}_0(\mathcal{M})$:

2.7. Coloriage des entrelacs par $\mathrm{H}_0(\mathcal{M})$

Soit L un entrelacs parallélisé sans bord. Il représente donc un morphisme de $\mathcal{E}$ de vide dans vide. Choisissons pour chaque composante L_i $(i = 1, \ldots, p)$ de L un point x_i de façon que les cotes des points x_i soient toutes distinctes et, qu'en ces points, les vecteurs tangents aient tous des cotes non nulles. Quitte à changer la numérotation des composantes, on supposera que les points x_i sont numérotés par cotes croissantes. S'il le faut, on modifiera également par isotopie l'entrelacs L de telle sorte que chaque plan $\mathbf{C} \times \{\alpha\}$ passant par un des points x_i coupe L de façon standard et qu'en découpant L par ces plans, on ait une décomposition $L = L'_p L'_{p-1} \ldots L'_1 L'_0$ comme produit de flèches dans la catégorie $\mathcal{E}$.

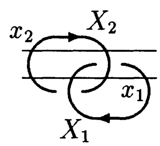
Soit maintenant $f_i : X_i \to X_i$ des endomorphismes de $\mathcal{M}$. On peut colorier chaque composante L_i de L par l'objet X_i, et L ainsi que les entrelacs à bord L_i deviennent des morphismes de la catégorie $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Soit Φ le foncteur canonique de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ dans $\mathcal{M}$. On peut considérer le produit:

$$E = \Phi(L'_p) f'_p \Phi(L'_{p-1}) f'_{p-1} \dots f'_1 \Phi(L_0)$$

où les morphismes f'_i sont définis comme ceci : si le i-ième plan de cote c qui passe par x_i coupe L en un sous-ensemble $[p]$ de $\mathbf{C} \times \{c\}$, si x_i est le k-ième point de cet ensemble et si de plus le j-ième point de $[p]$ appartient à la composante $L_{\alpha(j)}$ de L, alors f'_i est le morphisme suivant:

$$\mathrm{Id}_{X_{\alpha(1)}} \otimes \dots \otimes \mathrm{Id}_{X_{\alpha(k-1)}} \otimes g_i \otimes \dots \otimes \mathrm{Id}_{X_{\alpha(p)}}$$

où g_i est l'endomorphisme f_i si le vecteur tangent à L en x_i pointe vers le bas et l'endomorphisme $f_i^* = (\mathrm{Id}_{X^*} \otimes e_X)(\mathrm{Id}_{X^*} \otimes f_i \otimes \mathrm{Id}_{X^*})(\omega_X \otimes \mathrm{Id}_{X^*})$ sinon.



Dans l'exemple ci-dessus, L a 2 composantes coloriées par X_1 et X_2. On a deux plans de coupe, dans le plan le plus haut, on insère f_2^* en première place et, dans l'autre, on insère f_1 en quatrième place.

Grâce aux propriétés de $\mathcal{M}$, on vérifie que le produit E est indépendant des choix et ne dépend que de L, des couleurs X_i et des endomorphismes f_i. De plus cette expression est linéaire par rapport à chaque f_i. Enfin, si l'on insère sur une composante L_i de L de couleur X_i un endomorphisme $g_i f_i$, où f_i va de X_i dans un module X'_i et g_i va de X'_i dans X_i, on peut faire"glisser" g_i le long de L_i pour le faire arriver "après" f_i. Ainsi, on vérifie que $g_i f_i$ et $f_i g_i$ donnent le même élément. En conséquence, l'expression E ne dépend que des classes des endomorphismes f_i dans $\mathrm{H}_0(\mathcal{M})$. On peut donc colorier chaque composante de L par un élément de $\mathrm{H}_0(\mathcal{M})$, et un tel entrelacs colorié a un invariant bien défini $< L >$ dans la k-algèbre $\mathrm{End}(\mathbf{1}_{\mathcal{M}})$.

Notons $\mathcal{A}$ la k-algèbre $\mathrm{H}_0(\mathcal{M})$. Si maintenant L est un entrelacs $\mathcal{A}$-colorié sans bord contenu dans $S^1 \otimes B^2$, il induit un élément non pas dans $\mathrm{End}(\mathbf{1}_{\mathcal{M}})$ mais dans l'algèbre $\mathcal{A}$. En effet, supposons que le coloriage de L soit défini par des objets X_i de $\mathcal{M}$, des points x_i de L et des endomorphismes $f_i : X_i \to X_i$. Soit c un point de S^1 tel que L soit transverse à $\{c\} \times B^2$. On peut alors découper le tore plein $S^1 \times B^2$ le long de $\{c\} \times B^2$ et on récupère un entrelacs à bord représentant un endomorphisme de la catégorie $\mathcal{E}$. Comme précédemment, on peut décomposer ce morphisme en un produit de morphismes composables $L'_p L'_{p-1} \dots L'_1 L'_0$ et l'on pose $\ll L \gg = tr(\Phi(L'_p) f'_p \dots f'_1 \Phi(L_0))$, les morphismes f'_i étant définis comme ci-dessus. On vérifie que cet élément de $\mathcal{A}$ est indépendant des choix.

Si maintenant un entrelacs $\mathcal{A}$-colorié L est contenu dans un voisinage régulier d'un nœud parallélisé K, on peut transporter L par un homéomorphisme de ce voisinage sur $S^1 \times B^2$ donné par la parallélisation de K, et l'on obtient également un élément $\ll L \gg_K$ de $\mathcal{A}$.

PROPOSITION 2.8. – *Soit $\mathcal{A}$ la k-algèbre $H_0(\mathcal{M})$. Soit K un nœud parallélisé contenu dans S^3 et L un entrelacs $\mathcal{A}$-colorié contenu dans un voisinage régulier de K. Alors l'invariant $< L >$ est égal à l'invariant de K colorié par $\ll L \gg_K$.*

L'algèbre H'($\mathcal{M}$)

L'algèbre $\mathrm{H}_0(\mathcal{M})$ est un objet mathématique plus simple que $\mathcal{M}$. On peut le simplifier encore en considérant l'algèbre $\mathrm{H}_0(\mathcal{M}_{red})$ qui en est un quotient. On peut colorier des entrelacs par des éléments de $\mathrm{H}_0(\mathcal{M}_{red})$ et l'on récupère toujours des invariants. On peut cependant faire encore mieux et définir l'algèbre H'($\mathcal{M}$) suivante :

DÉFINITION 2.9. – *Soit $\mathcal{A}$ la k-algèbre $H_0(\mathcal{M})$. On notera H'($\mathcal{M}$) le quotient linéaire de $\mathcal{A}$ par la relation $\simeq$ suivante :*

Un élément x de $\mathcal{A}$ est équivalent à 0 ($x \simeq 0$) si et seulement si, pour tout nœud parallélisé K de S^3 et tout entrelacs $\mathcal{A}$-colorié L contenu dans $S^3 - K$, l'invariant $< L \cup K(x) >$ est nul, $K(x)$ étant le nœud K colorié par x.

On vérifie que H'($\mathcal{M}$) est une k-algèbre quotient de $\mathcal{A}$ et même de $\mathrm{H}_0(\mathcal{M}_{red})$. De plus, tout entrelacs colorié par des éléments de H'($\mathcal{M}$) a un invariant bien défini dans k. Cette algèbre est a priori plus difficile à déterminer que $\mathcal{A}$ ou que $\mathrm{H}_0(\mathcal{M}_{red})$. Elle va cependant s'avérer très utile.

3. INVARIANTS DES VARIÉTÉS COLORIÉES

Dans tout le paragraphe, $\mathcal{M}$ désignera une algèbre enrubannée sur un anneau commutatif k. On notera K la k-algèbre commutative $\mathrm{End}(\mathbf{1}_{\mathcal{M}})$ et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ les algèbres $\mathrm{H}_0(\mathcal{M})$ et H'($\mathcal{M}$). Quitte à étendre les coefficients, on peut supposer que k est égal à

K. Ainsi tout entrelacs sans bord colorié par des éléments de $\mathcal{A}$ ou de $\mathcal{A}'$ a un invariant bien défini dans k.

DÉFINITION 3.1. – *On appellera variété $\mathcal{A}$-coloriée (resp. $\mathcal{A}'$-coloriée) une paire (M, L) où M est une variété de dimension trois orientée et L est un entrelacs parallélisé (sans bord) $\mathcal{A}$-colorié (resp. $\mathcal{A}'$-colorié) contenu dans l'intérieur de M.*

Comme on vient de le voir, la variété $\mathbf{R}^3$ munie d'un $\mathcal{A}$-coloriage ou d'un $\mathcal{A}'$-coloriage a un invariant bien défini dans k. Il en est de même pour les variétés B^3 et S^3.

DÉFINITION 3.2 – *On appellera $\mathcal{M}$-invariant de type V (V comme variété) un système $(Z, \alpha, \kappa, \Omega)$ où α et κ sont des éléments inversibles de k et Ω un élément de $\mathcal{A}$ et où Z est un invariant qui associe à toute variété $\mathcal{A}$-coloriée compacte sans bord (M, L) un élément $Z(M, L)$ de k et qui possède les propriétés suivantes :*

(I1) $Z(\emptyset) = 1$.

(I2) Si L est un entrelacs $\mathcal{A}$-colorié sans bord contenu dans S^3, $Z(S^3, L)$ est égal au produit de $Z(S^3, \emptyset)$ et de l'invariant $< L >$ de L.

(I3) Si M' est obtenu d'une variété compacte sans bord M par une chirurgie d'indice $p < 2$, et si L est un entrelacs parallélisé sans bord $\mathcal{A}$-colorié contenu dans M et M', on a :

$$Z(M', L) = \begin{cases} \alpha Z(M, L) & si \;\; p = 0 \\ \alpha^{-1} Z(M, L) & si \;\; p = 1. \end{cases}$$

(I4) Si (M, L) est une variété $\mathcal{A}$-coloriée, si K est un noeud parallélisé contenu dans le complémentaire de L dans M et si M' est obtenu par la chirurgie de M le long de K, on a :

$$Z(M', L) = \kappa^{\sigma(W)} Z(M, L \cup K(\Omega)),$$

$\sigma(W)$ désignant la signature du cobordisme W de M vers M' déduit de la chirurgie, et $K(\Omega)$ désignant le nœud K colorié par Ω.

DÉFINITION 3.3 – *On appellera $\mathcal{M}$-invariant de type C (C comme connexe) un système (Z, κ, Ω) où κ est un élément inversible de k et Ω un élément de $\mathcal{A}$ et où Z est un invariant qui associe à toute variété $\mathcal{A}$-coloriée compacte sans bord et connexe (M, L) un élément $Z(M, L)$ de k et qui possède les propriétés (I2), (I4) et la propriété :*

(I'1) $Z(S^3, \emptyset) = 1$.

Remarques

Dans les définitions ci-dessus, on peut sans difficulté considérer Ω comme un élément de $\mathcal{A}'$ au lieu de $\mathcal{A}$.

Soit $(Z, \alpha, \kappa, \Omega)$ un $\mathcal{M}$-invariant de type V. Alors Z est multiplicatif pour la somme disjointe et vérifie :

$$Z(S^3) = \alpha \qquad \text{et} \qquad Z(S^1 \times S^2) = 1.$$

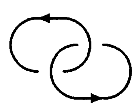
Si Z_0 est un invariant de type C, Z_0 est multiplicatif pour la somme connexe. Tout $\mathcal{M}$-invariant $(Z, \alpha, \kappa, \Omega)$ de type V induit un invariant $(\alpha^{-1}Z, \kappa, \Omega)$ de type C, et tout invariant Z_0 de type C se relève en un unique invariant de type V si et seulement si $Z_0(S^1 \times S^2)$ est inversible.

On peut envisager des $\mathcal{M}$-invariants d'autres types, en considérant d'autres classes de variétés, comme les variétés non nécessairement orientées, les variétés spinorielles, etc. On conservera les propriétés importantes (I2) et (I4) et on adaptera les autres.

Pour tout objet X de $\mathcal{M}$, la composition par θ_X induit une application de $\mathrm{End}(X)$ dans lui-même. Ces applications passent au quotient et définissent un isomorphisme linéaire θ de $\mathcal{A}$ dans lui-même (le *twist*). Cette application peut s'interpréter de la façon suivante : si L est un entrelacs parallélisé sans bord $\mathcal{A}$-colorié, si L' est obtenu en effectuant un "twist" direct sur une composante de L et L'' en modifiant par θ la couleur de cette composante, alors L' et L'' ont le même invariant.

L'invariant du nœud trivial colorié par un élément u de $\mathcal{A}$ sera noté $\varepsilon(u)$. La forme ε est un morphisme d'algèbre.

Soit H l'entrelacs de Hopf positif :



Si l'on colorie les composantes de H par deux éléments u et v de $\mathcal{A}$, cet entrelacs a un invariant $< u, v >_H$ dans k. L'expression $<?, ? >_H$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{A}$ que l'on appellera forme de Hopf sur $\mathcal{A}$.

THÉORÈME 3.4. – *Soit κ un élément inversible de k et Ω un élément de $\mathcal{A}$. Alors il existe un $\mathcal{M}$-invariant de type C (Z_0, κ, Ω) si et seulement si κ et Ω vérifient les conditions* *suivantes :*

$$(I5) \qquad \forall a = \pm 1 \ \ \forall u \in \mathcal{A} \qquad < \theta^a(u), \theta^a(\Omega) >_H = \varepsilon(u)\kappa^a$$

et cet invariant se relève en un (unique) $\mathcal{M}$-invariant de type V si et seulement si $\varepsilon(\Omega)$ est inversible.

Remarque. – Un $\mathcal{M}$-invariant est uniquement déterminé par l'élément Ω de $\mathcal{A}$. On a :

$$(I6) \qquad \kappa = \varepsilon\theta(\Omega)$$

et, si l'invariant est de type V, $\varepsilon(\Omega)$ est inversible et l'on a :

$$(I7) \qquad \alpha = \varepsilon(\Omega)^{-1}.$$

Esquisse de démonstration :

D'après une remarque prédédente, un $\mathcal{M}$-invariant de type V est caractérisé par l'invariant associé de type C, et un invariant Z_0 de type C se relève en un invariant de type V si et seulement si $Z_0(S^1 \times S^2)$ est inversible. Il suffit donc de considérer les invariants de type C définis sur les variétés orientées connexes.

Un résultat de Lickorish et Wallace dit que toute variété de dimension 3 compacte connexe sans bord et orientée peut être décrite comme résultat d'une chirurgie sur S^3 le long d'un certain entrelacs parallélisé. On peut étendre sans difficulté ce résultat au cas des variétés $\mathcal{A}$-coloriées, et toute variété $\mathcal{A}$-coloriée connexe (M, L) peut être obtenue comme résultat d'une chirurgie sur une variété $\mathcal{A}$-coloriée (S^3, L), le long d'un entrelacs parallélisé L' disjoint de L. Si alors (Z_0, κ, Ω) est un $\mathcal{M}$-invariant de type C, on a :

$$Z_0(M, L) = \kappa^p < L \cup L'(\Omega) >,$$

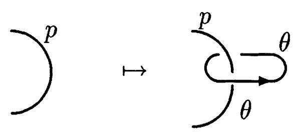
$L'(\Omega)$ étant l'entrelacs L' où chaque composante est coloriée par Ω et où p est égal à la signature du cobordisme donné par la chirurgie, c'est-à-dire à la signature de la matrice d'enlacement de l'entrelacs chirurgical L'. Ceci montre que, lorsqu'il existe, l'invariant Z est uniquement déterminé par κ et Ω.

Plus précisément, cette méthode donne une formule permettant de définir $Z_0(M, L)$, et il suffit de montrer que cet élément $\kappa^p < L \cup L'(\Omega) >$ est indépendant des choix.

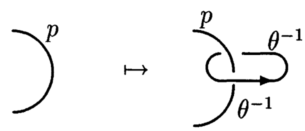
Appelons entrelacs mixte une paire (L, K) où L est un entrelacs parallélisé sans bord $\mathcal{A}$-colorié contenu dans la sphère S^3, et K est un entrelacs parallélisé disjoint de L. Par chirurgie le long de K, on obtient une variété $\mathcal{A}$-coloriée $M(L,K)$, et un cobordisme $W(L,K)$ de S^3 à la variété $M(L,K)$.

Un théorème de Kirby ([Ki]) dit que l'on peut passer d'une présentation de chirurgie d'une variété à une autre en effectuant une suite de modifications élémentaires (appelées mouvements de Kirby). D'autres types de modifications plus maniables ont été proposés par Fenn et Rourke ([FR]). On peut généraliser ces opérations élémentaires au cas des variétés $\mathcal{A}$-coloriées et l'on obtient que deux entrelacs mixtes (L_0, K_0) et (L_1, K_1) définissent la même variété $\mathcal{A}$-coloriée si et seulement si, on peut passer de (L_0, K_0) à (L_1, K_1) par une suite d'opérations élémentaires de type E_+ ou E_- ou de leur inverse :

E_+ :



E_- :



Dans ces dessins, les branches marquées d'un p désignent p portions d'entrelacs coloriés ou chirurgicaux d'orientation quelconque et les autres représentent des composantes chirurgicales. Un symbole θ ou θ^{-1} signifie un twist positif ou négatif. Outre la présence d'entrelacs coloriés, la différence avec les mouvements de Fenn et Rourke est qu'ici, les entrelacs sont parallélisés et donc orientés. Cependant, il n'est pas difficile de montrer que les opérations E_+ et E_- permettent de changer l'orientation d'une composante de l'entrelacs chirurgical.

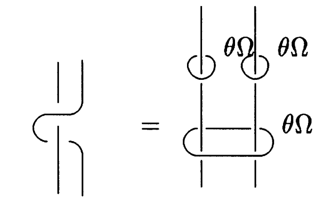
En conséquence, pour montrer que la formule proposée pour $Z_0(M,L)$ est indépendante des choix, il suffit de montrer que les opérations E_+ et E_- ne modifient pas cette formule. Comme l'opération E_+ (resp. E_-) modifie la signature de la variété de dimension 4 $W(L,K)$ de 1 (resp. -1), on voit que l'invariance par E_+ et E_- est équivalente à la condition (I5). Et la valeur de κ s'en déduit aisément.

THÉORÈME 3.5. – *Désignons par $\mathcal{A}'_0 \subset \mathcal{A}'$ l'annulateur du noyau de ε, et par v et v' les restrictions de $\varepsilon\theta$ et $\varepsilon\theta^{-1}$ à $\mathcal{A}'_0$. Soit κ un élément inversible de k et Ω un élément de $\mathcal{A}$. Alors il existe un $\mathcal{M}$-invariant de type C (Z_0, κ, Ω) à valeurs dans une extension quadratique de k si et seulement si les applications v et v' sont bijectives de $\mathcal{A}'_0$ sur k,* *et dans ce cas, κ et Ω sont donnés par les formules :*

$$\kappa^2 = vv'^{-1}(1) \qquad \Omega = \kappa v^{-1}(1).$$

Démonstration :

Supposons qu'il existe un $\mathcal{M}$-invariant (Z, κ, Ω) de type C. Soit x un élément du noyau de la forme de Hopf sur $\mathcal{A}'$. Considérons un nœud parallélisé K dans S^3 et L un entrelacs $\mathcal{A}'$-colorié situé à l'extérieur de K. Si l'on a deux croisements positifs consécutifs sur K, on peut effectuer trois opérations correspondant à la formule (I5) et l'on obtient :



le symbole = signifiant que les diagrammes $\mathcal{A}'$-coloriés ont même invariants. On a également une formule pour des croisements négatifs. Ainsi, si K' est obtenu à partir de K en faisant se croiser deux branches de K, il existe un entrelacs $\mathcal{A}'$-colorié L' tel que $< K(x) \cup L > = < K'(x) \cup L' >$. On peut ainsi dénouer entièrement K et il existe un nœud parallélisé K_0 trivial et un entrelacs $\mathcal{A}'$-colorié L' tel que $< K(x) \cup L >$ soit égal à $< K_0(x) \cup L' >$. Il existe donc un élément y de $\mathcal{A}'$ tel que :

$$< K(x) \cup L > = < x, y >_H .$$

Comme x appartient au noyau de la forme de Hopf, $< K(x) \cup L >$ est nul et, d'après la définition de $\mathcal{A}'$, x est nul. Ainsi le noyau de la forme de Hopf sur $\mathcal{A}'$ est trivial.

D'autre part, faire un twist positif sur chacune des deux composantes de l'entrelacs de Hopf revient (pour le calcul de l'invariant associé) à mettre les deux composantes parallèles à elles-mêmes et effectuer un twist positif global. On a donc la formule :

$$\forall x, y \in \mathcal{A} \quad < \theta x, \theta y >_H = \varepsilon\theta(xy).$$

On peut aussi montrer cette formule directement en utilisant les relations entre les transformations c et θ de $\mathcal{M}$.

Considérons l'opération "changement d'orientation" qui consiste à multiplier par -1 les deux premiers vecteurs des parallélisations. Cette opération induit une transformation

γ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ qui commutte avec θ. Si l'on désigne par $<?,?>'$ la forme induite par l'entrelacs de Hopf négatif, on a alors :

$$\forall x, y \in \mathcal{A} \quad < \theta^{-1}x, \theta^{-1}y > = < \theta^{-1}\gamma x, \theta^{-1}y >' = \varepsilon\theta^{-1}(\gamma(x)y).$$

On en déduit que les noyaux des formes $\varepsilon\theta(??)$ et $\varepsilon\theta^{-1}(??)$ sont triviaux. Ce qui implique que si I désigne le noyau du caractère ε, les deux sous-k-modules θI et $\theta^{-1}I$ ne contiennent aucun idéal non trivial. Soit x un élément de l'annulateur $\mathcal{A}'_0$ de I dans $\mathcal{A}'$. Soit $a = \pm 1$. Si $\varepsilon\theta^a(x)$ est nul, on a pour tout y de $\mathcal{A}'$:

$$\varepsilon\theta^a(xy) = \varepsilon\theta^a(x\varepsilon(y)) + \varepsilon\theta^a(x(y - \varepsilon(y)) = \varepsilon\theta^a(x)\varepsilon(y) = 0,$$

ce qui implique que x est nul et les applications v et v' de $\mathcal{A}'_0$ dans k sont toutes les deux injectives. On vérifie d'autre part que Ω appartient à $\mathcal{A}'_0$ et est envoyé en des éléments inversibles par v et v', ce qui montre la bijectivité des deux applications v et v'.

Réciproquement, si ces deux applications sont bijectives, on vérifie que (Z, κ, Ω) est un $\mathcal{M}$-invariant de type C si et seulement si on a :

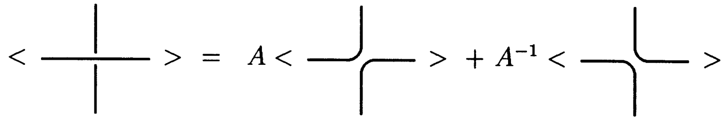
$$\Omega = \kappa v^{-1}(1) \qquad \kappa^2 = vv'^{-1}(1).$$

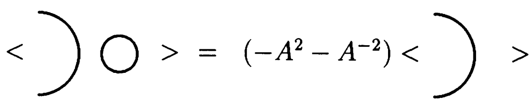
COROLLAIRE 3.6. – *Unicité : on suppose que (Z, κ, Ω) est un $\mathcal{M}$-invariant de type C. Alors les autres $\mathcal{M}$-invariants de type C sont de la forme $(e^{\chi}Z, e\kappa, e\Omega)$, e étant un élément quelconque de k de carré 1, et χ désignant la semi-caractéristique d'Euler (rang du H_0 plus rang du H_1).*

COROLLAIRE 3.7. – *On suppose que k est un corps, que $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}'$ est de dimension finie sur k et que la forme de Hopf sur $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}'$ est non dégénérée. Alors il existe un $\mathcal{M}$-invariant de type C à valeurs dans une extension quadratique de k.*

4. LE CAS DU CROCHET DE KAUFFMAN

Le crochet de Kauffman est un invariant d'entrelacs en bandes à valeurs dans l'anneau $\mathbf{Z}[A, A^{-1}]$. Un entrelacs en bandes est un entrelacs non orienté muni en tout point d'un vecteur unitaire normal à la courbe. La bande est un épaississement de dimension 2 normal au champ de vecteur et donc orienté. Un diagramme de nœud représente un entrelacs en bandes, le champ de vecteur étant vertical (c'est-à-dire normal au plan du dessin), et les bandes horizontales et orientées par l'orientation du plan. Le crochet de Kauffman $<?>$ vérifie les relations "skein" suivantes :





Contrairement à l'usage, on initialisera le crochet en affectant au nœud vide la valeur 1. Avec cette convention, le crochet de Kauffman est multiplicatif pour l'union disjointe.

4.1 La catégorie de Temperley-Lieb

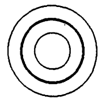
Soit k un anneau commutatif muni d'un élément inversible $A \in k$. On peut considérer la catégorie suivante :

— Les objets sont ceux de la catégorie des entrelacs $\mathcal{E}$.

— Les morphismes sont les k-combinaisons linéaires d'entrelacs en bandes contenus dans $\mathbf{C} \times [0,1]$ et rencontrant $\mathbf{C} \times \partial[0,1]$ de façon standard, définies modulo l'isotopie régulière des entrelacs en bandes et les relations skein de Kauffman.

La composition est définie comme pour la catégorie des entrelacs $\mathcal{E}$. On a donc une k-catégorie $\mathcal{TL}$ que l'on appellera catégorie de Temperley-Lieb. Le point important est que, comme dans le cas de la catégorie $\mathcal{E}$, on peut définir une opération associative $\otimes$, un objet neutre $\mathbf{1}$, ainsi que des transformations $c, \theta, *, \omega$ et e et la catégorie $\mathcal{TL}$ est munie d'une structure de k-catégorie enrubannée. De plus, l'oubli de l'orientation induit un foncteur de catégorie enrubannée de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{TL}$.

Comme les relations skein permettent de réduire entièrement tout entrelacs en bandes, on vérifie que la k-algèbre $\mathrm{End}(\mathbf{1})$ est égale à k. Plus généralement, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{TL}}([p],[q])$ possède une k-base formée des classes d'isotopie d'entrelacs en bandes représentés par les diagrammes sans croisement et sans boucle fermée. Quant à l'algèbre $\mathcal{A} = \mathrm{H}_0(\mathcal{TL})$, ses éléments sont représentés par les combinaisons linéaires d'entrelacs en bandes contenus dans $S^1 \times B^2$, définies modulo les relations skein et $\mathcal{A}$ est l'algèbre $k[z]$ où z est le nœud standard essentiel sans twist de $S^1 \times B^2$.

$z =$  $= \mathrm{tr}(\mathrm{Id}_{[1]})$.

Cette algèbre est de dimension infinie, on ne peut donc pas appliquer tel quel le théorème 3.5 pour construire des invariants de variétés de dimension 3. Il est cependant possible de décrire complètement la forme de Hopf ainsi que le twist θ ([BHMV1]). On obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 4.2.([BHMV1]) – *Si l'anneau k est intègre, il existe un $\mathcal{TL}$-invariant de type V (dans une extension de k) si et seulement si il existe un entier $p \geq 1$ tel que p soit inversible et que : $A^p = -1$.*

Supposons que l'on soit dans ce cas, c'est-à-dire que k est intègre, que p est inversible dans k et que $A^p = -1$. On prendra p le plus petit possible. On supposera également $p \geq 3$. Posons tout d'abord pour tout $n \geq 0$:

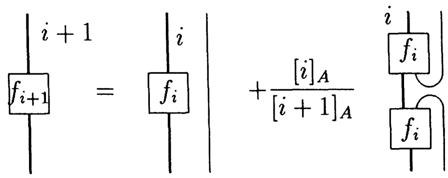
$$[n]_A = \frac{A^{2n} - A^{-2n}}{A^2 - A^{-2}}.$$

Soit q le plus petit entier tel que $A^{4q} = 1$. Alors les éléments $[1]_A, [2]_A, \ldots, [q-1]_A$ sont inversibles dans k et $[q]_A$ est nul. On peut définir des idempotents $f_0, \ldots, f_{q-1}$ de $\mathcal{TL}$ par les formules :

$$f_0 = \mathrm{Id}_{[0]} \qquad f_1 = \mathrm{Id}_{[1]}$$

$$\forall i > 0 \quad f_{i+1} = f_i \otimes \mathrm{Id}_{[1]} + \frac{[i]_A}{[i+1]_A}(f_i \otimes \mathrm{Id}_{[1]})(\mathrm{Id}_{[i-1]} \otimes e)(f_i \otimes \mathrm{Id}_{[1]});$$

l'élément e désigne le vecteur de la base standard de End([2]) distinct de Id.



Ces éléments sont des idempotents vérifiant :

$$\forall i < q \quad \forall x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{TL}}([i],[i]) \qquad x f_i = \varepsilon(x) f_i,$$

ε étant le caractère annulant tous les vecteurs de la base canonique sauf 1. De plus la trace $\tau(f_i)$ est égale à $(-1)^i[i+1]_A$. On en déduit :

$$\forall x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{TL}}([q-1],[q-1]) \qquad \tau(xf_{q-1}) = \varepsilon(x)\tau(f_{q-1}) = 0$$

et ceci implique que f_{q-1} est nul dans la catégorie $\mathcal{TL}_{red}$. Sa classe $\mathrm{tr}(f_{q-1})$ est donc nulle dans l'algèbre $\mathcal{A}' = \mathrm{H}_0(\mathcal{TL}_{red})$.

Pour tout $i = 0, \ldots, q-1$, désignons par e_i la classe $\mathrm{tr}(f_i)$ de f_i dans $\mathcal{A}$. On vérifie que e_i est égal au i-ième polynôme de Tchebychev de z. C'est-à-dire que si z est égal à $y + y^{-1}$ dans une extension de $k[z]$, on a :

$$e_i = \frac{y^{i+1} - y^{-i-1}}{y - y^{-1}.}$$

Ceci implique que e_i est un polynôme unitaire de z. Comme e_{q-1} est nul dans l'algèbre $\mathcal{A}'$, cette dernière est de type fini sur k.

Lorsque p est pair, q est égal à p/2 et on vérifie que le théorème 3.5 s'applique intégralement. Si p est impair, q est égal à p et, dans ce cas, le théorème ne s'applique plus. On a :

$$\mathcal{A}' = k[z]/(e_{q-1})$$

mais la forme de Hopf est dégénérée sur $\mathcal{A}'$.

Si p est égal à 1 ou 2, l'algèbre $\mathcal{A}'$ est égale à $\mathcal{A}$ et la forme de Hopf est également dégénérée. Dans ces deux cas, $p = 1$ ou 2 ou p impair, on peut cependant directement construire un triplet (α, κ, Ω) vérifiant les conditions (I5) et (I6), ce qui donne également un $\mathcal{TL}$-invariant qui est d'ailleurs toujours de type V ([BHMV1]).

On a de plus :

$$\mathrm{H}'(\mathcal{TL}) = \begin{cases} k[z]/(e_k + e_{k-1}) & \text{si} \quad p = 2k+1 \\ k[z]/(z+2) & \text{si} \quad p = 1 \\ k[z]/(z^2-4) & \text{si} \quad p = 2. \end{cases}$$

Dans le cas p pair ≥ 4, cet invariant a été conjecturé par Witten puis construit par Reshetikhin et Turaev à l'aide des groupes quantiques ([RT2]). Signalons également une construction de cet invariant à l'aide des algèbres de Temperley-Lieb par Lickorish ([Li2]). L'invariant pour p impair correspond à l'invariant construit par Kirby et Melvin ([KM]).

Remarque. – On peut appliquer cette méthode à d'autres invariants connus des entrelacs. Si l'on considère par exemple le polynôme de HOMFLY ou le polynôme de Kauffman, on construit une catégorie enrubannée en quotientant la catégorie linéaire engendrée par la catégorie des entrelacs $\mathcal{E}$ par les relations skein qui apparaissent dans ces polynômes. On obtient alors un analogue de la catégorie $\mathcal{TL}$. Dans les deux cas, l'algèbre correspondante $\mathcal{A}$ est une algèbre de polynôme en une suite de variables. Et les calculs devraient pouvoir se poursuivre dans ce cadre. Ils sont malheureusement trop compliqués, et rien de décisif n'a été fait actuellement.

5. LE CAS DES GROUPES QUANTIQUES

Les groupes quantiques sont des bigèbres de Hopf qui apparaissent comme déformation d'algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie ([D1] [D2] [J] [Lu] [Ro]). Le point important est que l'on peut enrichir ces algèbres en des bigèbres de Hopf quasitriangulaires. L'élément R a été construit par Drinfeld en utilisant un objet appelé double quantique d'une bigèbre de Hopf ([D1] [D2]).

5.1. Groupes quantiques classiques

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$ une matrice de Cartan d'une algèbre de Lie L de type classique, c'est-à-dire dans l'une des séries A, B, C ou D. La matrice A est symétrique et l'on peut définir une algèbre $U_q(L)$ par générateurs et relations :

— générateurs : X_i^+, X_i^-, k_i $(1 \leq i \leq m)$

— relations :

(GQ1) les éléments k_i sont inversibles et commutent entre eux

(GQ2) $\forall i,j \quad k_i X_j^{\pm} k_i^{-1} = q^{\pm a_{ij}/2} X_j^{\pm}$

(GQ3) $\forall i,j \quad [X_i^+, X_j^-] = \delta_{ij}\frac{k_i^2 - k_i^{-2}}{q-q^{-1}}$

(GQ4) $\forall i \neq j \quad \sum_{k=0}^{k=1-a_{ij}} (-1)^k \frac{[1-a_{ij}]!}{[k]![1-a_{ij}-k]!}(X_i^{\pm})^{1-a_{ij}-k} X_j^{\pm} (X_i^{\pm})^k = 0,$

où l'on note :

$$[n]! = \prod_{j=1}^{n} \frac{q^j - q^{-j}}{q - q^{-1}}.$$

On vérifie que l'algèbre $U_q(L)$, qui est une déformation de l'algèbre enveloppante de L, est définie sur l'anneau commutatif $\mathbf{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}, (q - q^{-1})^{-1}]$. De plus $U_q(L)$ a une structure de bigèbre de Hopf en définissant la comultiplication Δ, l'antipode γ et la coünité ε par :

$$\Delta(X_i^{\pm}) = k_i \otimes X_i^{\pm} + X_i^{\pm} \otimes k_i \qquad \text{et} \qquad \Delta(k_i) = k_i \otimes k_i$$

$$\gamma(X_i^{\pm}) = -q^{\pm 1} X_i^{\pm} \qquad \text{et} \qquad \gamma(k_i) = k_i^{-1}$$

$$\varepsilon(X_i^{\pm}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(k_i) = 1.$$

5.2. Matrice R

Supposons maintenant l'anneau $\mathbf{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}, (q - q^{-1})^{-1}]$ envoyé dans $\mathbf{C}$. L'élément $q^{1/2}$ est donc un paramètre complexe distinct de $0, \pm 1, \pm i$.

La description explicite de $U_q(L)$ permet d'identifier l'algèbre $U_q(L)$ tensorisée par la sous-algèbre commutative engendrée par les k_i avec le double de Drinfeld de la sous-algèbre engendrée par l'algèbre de Borel, elle-même engendrée par les éléments k_i et X_i^+. Ceci permet de construire un élément R appartenant à un complété de $U_q(L) \otimes U_q(L)$ et $U_q(L)$ est "presque" une bigèbre de Hopf quasitriangulaire. La catégorie $Rep(U_q(L))$ est une catégorie monoïdale, mais si M et N sont deux représentations de $Rep(U_q(L))$, il n'est pas sûr que R puisse agir par multiplication sur $M \otimes N$.

Si q n'est pas une racine de l'unité, la catégorie $Rep(U_q(L))$ est semi-simple et R agit sur tout produit tensoriel $M \otimes N$. Dans ce cas la catégorie $Rep(U_q(L))$ est une $\mathbf{C}$-catégorie enrubannée, mais elle ne possède pas de $Rep(U_q(L))$-invariant.

Supposons que q soit une racine primitive l-ième de l'unité. La catégorie $Rep(U_q(L))$ n'est plus semi-simple. On peut cependant construire une famille finie de modules simples V_λ indexée par certains types de tableaux de Young ([TW]). Par exemple, si l'algèbre de Lie L est égale à sl_k, ces tableaux sont les tableaux ayant au plus $k-1$ lignes et dont la première ligne est de longueur au plus $l-k$.

Turaev et Wenzl montrent que la sous-catégorie pleine de la catégorie $Rep(U_q(L))$ engendrée par les produits tensoriels de tels modules forme une $\mathbf{C}$-catégorie enrubannée $\mathcal{M}_q(L)$. Soit $\mathcal{M}'_q(L)$ la sous-catégorie enrubannée de $\mathcal{M}_q(L)$ engendrée par les objets de $\mathcal{M}_q(L)$ et les endomorphismes scalaires des modules V_λ. Alors Turaev et Wenzl montrent (sous une forme différente) que l'algèbre $\mathcal{A}=\mathrm{H}_0(\mathcal{M}'_q(L)_{red})$ est de dimension finie sur $\mathbf{C}$, engendrée par les éléments $\mathrm{tr}(\mathrm{Id}_{V_\lambda})$, et que la forme de Hopf est non-dégénérée sur $\mathcal{A}$. On a donc :

THÉORÈME 5.3.([TW]) – *Si L est une algèbre de Lie de type A, B, C ou D et si q est une racine primitive de l'unité, il existe un $\mathcal{M}'_q(L)$-invariant de type V, unique à un signe près.*

Remarque. – Si L est l'algèbre de Lie sl_2, l'invariant associé correspond à l'invariant obtenu pour le crochet de Kauffman lorsque A est une racine paire de -1. Cette correspondance provient en fait du foncteur canonique des entrelacs dans les k-catégories enrubannées. Ce foncteur induit un foncteur de $\mathcal{TL}$ dans la catégorie $\mathcal{M}'_q(L)$, avec $q = A^4$. Les éléments $\mathrm{tr}(\mathrm{Id}_{V_\lambda})$ correspondent aux traces des idempotents f_i trouvés en section 4. Le tableau de Young λ a ici une seule ligne, c'est donc un nombre i et $\mathrm{tr}(\mathrm{Id}_{V_\lambda})$ est envoyé en $\mathrm{tr}(f_i) = e_i$.

BIBLIOGRAPHIE

[BHMV1] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum et P. Vogel – *Three-manifold invariants derived from the Kauffman bracket*, Topology **31** (1992), 685–699.

[BHMV2] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum et P. Vogel – *Topological quantum field theories derived from the Kauffman bracket*, Topology, à paraître.

[BW] J. Birman et H. Wenzl – *Braids, link polynomials and a new algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 249–273.

[D1] V. Drinfeld – *Quantum groups*, Proceedings for the ICM, Berkeley (1986), 798–820.

[D2] V. Drinfeld – *On almost cocommutative Hopf algebras*, Algebra i Analis (1) **2** (1989), 30–46 (en russe).

[FR] R. Fenn et C. Rourke – *On Kirby's calculus of links*, Topology **18** (1979), 1–15.

[J] M. Jimbo – *Introduction to the Yang-Baxter equation, braid group, knot theory and statistical mechanics*, World Scientific (1989), 111–134.

[Ka1] L. H. Kauffman – *State models and the Jones polynomial*, Topology **26** (1987), 395–407.

[Ka2] L. H. Kauffman – *An invariant of regular isotopy*, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), 417–471.

[Ki] R. Kirby – *A calculus for framed links*, Invent. Math. **45** (1978), 33–56.

[KM] R. Kirby et R. Melvin – *On the 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for $sl_2(\mathbf{C})$*, Invent. Math. **105** (1990), 473–545.

[Li1] W. B. R. Lickorish – *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. Math. **76** (1962), 531–540.

[Li2] W. B. R. Lickorish – *Three-manifold invariants and the Temperley-Lieb algebra*, Comm. Math. Helv. **67** (1992), 571–591.

[Lu] G. Lusztig – *Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras*, Adv. Math. **70** (1988), 237–249.

[Ma] S. Mac Lane – *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Math. **5** Springer-Verlag (1971).

[Ro] M. Rosso – *Finite dimensional representations of the quantum analog of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), 581–593.

[RT1] N. Yu. Reshetikhin et V. G. Turaev – *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 1–26.

[RT2] N. Yu. Reshetikhin et V. G. Turaev – *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. **103** (1991), 547–597.

[Tu] V. G. Turaev – *Quantum invariants of 3-manifolds*, preprint 1992.

[TW] V. G. Turav et H. Wenzl – *Quantum invariants of 3-manifolds associated with classical simple Lie algebras*, Int. J. of Math. **4**, 2 (1993), 323–358.

[Wa] K. Walker – *On Witten's 3-manifold invariants*, preprint 1991.

[Wal] A. H. Wallace – *Modifications and cobounding manifolds*, Can. J. of Math. **12** (1960), 503–528.

[Wi] E. Witten – *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), 351–399.

Pierre VOGEL
Université de Paris VII
Département de Mathématiques
Tour 45-55, 5ième étage
2 place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05
vogel@mathp7.jussieu.fr

Vaughan Jones

Fusion en algèbres de von Neumann et groupes de lacets

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 800, p. 251-273
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__251_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 1995
47ème année, 1994-95, n° 800

FUSION EN ALGÈBRES DE VON NEUMANN ET GROUPES DE LACETS [d'après A. WASSERMANN]

par **Vaughan JONES**

1. INTRODUCTION

A. Connes a défini une notion de produit tensoriel $\mathcal{H}_1 \otimes_B \mathcal{H}_2$ où A, B, C sont des algèbres de von Neumann, $\mathcal{H}_1$ est un espace de Hilbert qui est un $A - B$ bimodule et $\mathcal{H}_2$ est un espace de Hilbert qui est un $B - C$ bimodule. Bien entendu $\mathcal{H}_1 \otimes_B \mathcal{H}_2$ est un $A - C$ bimodule. Cette notion donne une généralisation de celle d'automorphisme où la composition d'automorphismes est remplacée par ce produit tensoriel. Pour une algèbre de von Neumann donnée, il serait souhaitable de comprendre, dans la mesure du possible, la structure de ses bimodules avec produit tensoriel. Le cas, déjà bien étudié, des automorphismes montre que c'est un problème difficile mais riche en conséquences. Comme premier pas, on peut chercher des petits sous-systèmes de bimodules, fermés pour le produit tensoriel. Les travaux d'Antony Wassermann donnent de tels systèmes où l'algèbre de von Neumann est le facteur hyperfini de type III_1. La structure de ces systèmes de bimodules est très intéressante car il y a des liens avec la théorie des champs conformes, les variétés de dimension 3 (TQFT), les sous-facteurs, la mécanique statistique, les groupes quantiques et d'autres domaines de mathématiques et physique.

On trouve les algèbres de von Neumann qu'on veut, agissant concrètement sur leurs bimodules, en regardant les représentations unitaires (projectives) des groupes de lacets $LG = \{f : S^1 \to G \mid f \text{ est } C^\infty\}$, où G est un groupe de Lie compact, simplement connexe. Soit $(\mathcal{H}, \pi)$ une représentation dans la série discrète de LG (représentations irréductibles à énergie positive, indexées par le "niveau" ℓ et une représentation irréductible de G), soit I un intervalle de S^1, et notons $(L_I G)''$ l'algèbre de von Neumann engendrée sur $\mathcal{H}$ par $\{\pi(f) : f(\theta) = 1 \text{ pour } \theta \in S^1 \backslash I\}$. On sait que $(L_I G)''$ est un facteur hyperfini de type III_1 et $\mathcal{H}$ devient donc un $(L_I G)'' - (L_{I^c} G)''^{\mathrm{op}}$-bimodule où I^c est l'intervalle complémentaire à I. La fusion de Connes devient, dans ce contexte, une opération de produit tensoriel $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{H}'$ où $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ sont dans la série discrète de LG, et $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{H}'$ reçoit une structure de $L_I G \times L_{I^c} G$-module. Les résultats principaux de Wassermann sont les suivants (dans le cas où $G = SU(N)$):

(1) $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{H}'$ se décompose en somme directe d'un nombre fini de $L_I G \times L_{I^c} G$ modules irréductibles $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{H}' \cong \bigoplus_i \mathcal{H}_i$.

(2) Chaque $\mathcal{H}_i$ dans la décomposition est obtenue par restriction à $L_I G \times L_{I^c} G$ d'une représentation de la série discrète de LG.

(3) Si $N^{\rho}_{\pi,\nu}$ est le nombre de fois que l'élément ρ de la série discrète intervient dans la décomposition de $\mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H}_\nu$, $N^{\rho}_{\pi,\nu}$ est la modification, connue en théorie conforme, de la multiplicité de ρ dans $\pi \otimes \nu$ où π, ν et ρ sont des représentations irréductibles de G. Par exemple, pour $G = SU(2)$ on obtient la formule de Clebsch-Gordan tronquée:

$$i \boxtimes j = \bigoplus_{\substack{k=|j-i| \\ i+j+k \leq \ell}}^{j+i} k \, .$$

(4) Le sous-facteur $(L_I G)'' \subset (L_{I^c} G)'$ est d'indice fini, l'indice donné par le carré de la dimension "quantique" de la représentation de G. Par exemple, pour la représentation $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ de $SU(2)$, on obtient $4 \cos^2 \pi/(\ell+2)$ comme indice. (C'était la conjecture originale de Jones-Wassermann.)

L'outil fondamental pour démontrer ces résultats est l'étude des opérateurs à vertex de Knizhnik et Zamolodchikov, découverts dans [KZ] et définis au niveau purement algébrique dans [TK]. Il faut les développer en tant que distribution à valeur opératorielle entre espaces de Hilbert. Dès le départ, il faut une construction globale, manifestement unitaire, des représentations de la série discrète. Cette construction est fournie par la seconde quantification fermionique et les opérateurs à vertex sont construits avec les champs fermioniques. Les relations de tresses entre les opérateurs à vertex permettent de définir un entrelacement entre $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{H}'$ et $\oplus \mathcal{H}_i$, qui est unitaire par le lemme de Schur et le fait que la restriction de π à $L_I G \times L_{I^c} G$ reste irréductible. Les propriétés nécessaires de ces relations de tresses sont démontrées par le calcul de la monodromie de l'équation de Knizhnik et Zamolodchikov.

Les travaux de Wassermann sont très liés à la théorie quantique des champs. En théorie algébrique des champs quantiques, on associe une algèbre de von Neumann à chaque région de l'espace-temps. L'algèbre $(L_I G)''$ serait l'algèbre associée à l'intervalle I dans une moitié chirale de la théorie des champs du modèle de Wess-Zumino-Novikov-Witten.

Dans [DHR] Doplicher, Haag et Roberts ont vu plusieurs ingrédients de la fusion. Ils se servaient des endomorphismes plutôt que des bimodules (c'est équivalent dans les facteurs de type III) et ce qu'ils appelaient "secteur de supersélection" correspondra ici à une représentation à énergie positive de LG. Comme ils travaillaient surtout en dimension 4, la fusion était très commutative et les opérations de tresse étaient des permutations. Avec le nouvel accent mis sur les théories en basse dimension et l'intérêt des groupes de tresses et les sous-facteurs ([Jo1],[Jo4]), les idées de [DHR] ont été reprises par plusieurs chercheurs, notamment dans [Fr],[FRS],[Lo]. Ils ont trouvé les conséquences formelles d'une théorie des secteurs de supersélection, y compris les sous-facteurs et les groupes de tresses. Mais il n'y avait aucun exemple non trivial de leurs théories. Ces exemples sont fournis par Wassermann. Ainsi ses travaux s'inscrivent tout à fait dans le programme de la théorie ***constructive*** des champs quantiques.

2. FUSION DE CONNES ("Connes-fusion")

(Toute algèbre aura une identité 1 et si elle agit sur un espace vectoriel, 1 agira par l'identité.)

En algèbre associative les bimodules sont fondamentaux. Si A et B sont des algèbres, un $A-B$ bimodule est un espace vectoriel V avec action à gauche de A et à droite de B. Pour $a \in A$, $b \in B$ et $v \in V$, on écrit $a\xi b$ et on écrit ${}_AV_B$ pour signifier un tel bimodule. En particulier une algèbre A devient un bimodule sur elle-même: ${}_AA_A$. La notation du produit tensoriel est simple: si on a ${}_AV_B$ et ${}_BV_C$, on définit ${}_AV \otimes_B W_C$ comme quotient de $V \otimes W$ par le sous-espace engendré par les $vb \otimes w - v \otimes bw$. Si α est un automorphisme de A, on peut tordre l'action à droite de A pour obtenir un bimodule ${}_AA_A^\alpha : a.b.a' = ab\alpha(a')$. On a évidemment $({}_AA_A^\alpha) \otimes_A ({}_AA_A^\beta) \cong {}_AA_A^{\alpha\beta}$. Le système de tous les bimodules constitue donc une généralisation du groupe des automorphismes de A (modulo automorphismes intérieurs). Sur les bimodules, on dispose en plus d'une opération de somme directe. On peut sans doute parler de catégories.

Pour les algèbres de von Neumann (dorénavant écrites avN), on impose aux espaces vectoriels d'être des espaces de Hilbert et aux actions, à gauche et à droite, d'être continues. La somme directe de bimodules se fait sans problème, mais pour faire un produit tensoriel il faut procéder avec soin pour deux raisons.

(1) Même dans les cas les plus simples, si on a ${}_A\mathcal{H}_B$ et ${}_B\mathcal{K}_C$, le sous-espace engendré par les $vb \otimes w - v \otimes bw$ sera ***dense*** dans $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$,

(2) Même pour rendre A un bimodule sur elle-même, on a besoin de la théorie de Tomita-Takesaki, que nous allons esquisser.

C'est A. Connes qui a surmonté ces difficultés pour la première fois (voir [Co1],[Sa]).

Théorie de Tomita-Takesaki-Connes (simplifiée!)

Soient M une avN sur un Hilbert $\mathcal{H}_\Omega$ et $\Omega \in \mathcal{H}_\Omega$ un vecteur privilégié qu'on appelle "vide", tels que $M\Omega$ et $M'\Omega$ soient denses dans $\mathcal{H}_\Omega$. (On écrit X' pour le commutant d'un ensemble X d'opérateurs bornés sur un Hilbert.) L'opérateur $S : \mathcal{H}_\Omega \to \mathcal{H}_\Omega$ est alors la fermeture (dans le sens des opérateurs non-bornés) de l'application antilinéaire $* : x\Omega \to x^*\Omega$. On écrit $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$ la décomposition polaire de S où J est unitaire antilinéaire et Δ est positif, à noyau égal a zéro. Le théorème de Tomita-Takesaki affirme que :

(1) $\Delta^{it} M \Delta^{-it} = M$ — d'où l'existence d'un groupe à un paramètre d'automorphismes de M, le groupe "modulaire": $\sigma_t^\Omega(x) = \Delta^{it} x \Delta^{-it}$.

(2) $JMJ = M'$ — ainsi le choix du vide Ω fait de $\mathcal{H}_\Omega$ un bimodule ${}_M(\mathcal{H}_\Omega)_M$ et on a $x\xi y = xJy^*J\xi$. C'est l'analogue de ${}_M M_M$ en algèbre.

Les facteurs, c'est-à-dire les avN dont le centre est égal à $\mathbb{C}1$, ont une première classification en types I, II et III, due à Murray et von Neumann ([MvN]). C'est le cas des types III qui nous intéresse. D'après [MvN], on sait que, si p et q sont des projecteurs non nuls et différents de 1, dans un facteur de type III, il existe un unitaire u dans l'algèbre tel que $upu^* = q$. Connes a défini un invariant $S(M)$, l'intersection des spectres de Δ quand Ω parcourt tous les vides possibles. Un facteur est dit de type III$_1$ lorsque $S(M) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Pour définir la fusion (ici égale au produit tensoriel de bimodules), Wassermann prend un point de vue légèrement différent de celui de Connes, s'inspirant de la théorie quantique des champs conformes où les états sont identifiés avec les opérateurs qui les créent à partir du vide. Soit donc $(M, \mathcal{H}_\Omega)$ comme ci-dessus et ${}_N\mathcal{H}_M$ et ${}_M\mathcal{K}_P$ deux bimodules. On écrit $\mathrm{Hom}_{-M}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H})$ et $\mathrm{Hom}_{M-}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{K})$ pour les ensembles d'opérateurs bornés qui entrelacent les actions indiquées de M. On peut identifier $\mathrm{Hom}_{-M}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H})$ avec un sous-espace dense de $\mathcal{H}$ via $x \leftrightarrow x\Omega$. Le produit tensoriel $\mathrm{Hom}_{-M}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}) \otimes \mathrm{Hom}_{M-}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{K})$ est de manière naturelle un $N - P$ bimodule. On définit sur cet espace un produit scalaire par $\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle = \langle x_2^* x_1 y_2^* y_1 \Omega, \Omega \rangle$ et le complété correspondant est encore un $N - P$ bimodule noté $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{K}$ et appelé ***fusion de Connes*** de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$.

Il est à noter qu'on n'a ***pas*** $vm \otimes w = v \otimes mw$ (pour $m \in M$) mais plutôt $vm \otimes w = v \otimes \sigma_{-\frac{i}{2}}(m)$.

La fusion est associative (résultat de Connes). Si en plus ${}_N\mathcal{H}_M$ et ${}_M\mathcal{K}_N$ sont irréductibles, le bimodule $\mathcal{K}$ est appelé ***conjugué*** de $\mathcal{H}$ si et seulement si $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{K}$ et

$\mathcal{K} \boxtimes \mathcal{H}$ contiennent $\mathcal{H}_\Omega$. On montre qu'un tel $\mathcal{K}$ est unique à isomorphisme près et les bimodules vides apparaissent sans multiplicité. En effet $\mathcal{K}$ est isomorphe à l'espace Hilbertien conjugué $\overline{\mathcal{H}}$. On définit des "projecteurs de Jones" e dans $\mathcal{H} \boxtimes \overline{\mathcal{H}}$ et $\overline{\mathcal{H}} \boxtimes \mathcal{H}$ et on a les relations de [J1] pour les projecteurs de Jones $e \otimes$ id et id $\otimes e$ sur $\mathcal{H} \boxtimes \overline{\mathcal{H}} \boxtimes \mathcal{H}$. La constante dans ces relations définit l'indice du sous-facteur $N \subset M^{\mathrm{opp}}$.

3. REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES DE LACETS

Soit $G = SU(N)$, agissant sur $V = \mathbb{C}^N$. On note LG le groupe des fonctions C^∞, $f : S^1 \to G$ avec $(f_1 f_2)(z) = f_1(z) f_2(z)$ où S^1 sera $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. C'est un groupe de Lie de dimension infinie ([PS]). Pour une représentation de G sur W, LG agit de manière évidente sur les fonctions $C^\infty(S^1, W)$. Cette action s'étend au produit semi-direct $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$, avec action évidente de $\mathrm{Rot}(S^1)$ — le groupe des rotations du cercle — sur LG et $C^\infty(S^1, W)$.

Il y a une série discrète de représentations projectives irreductibles de $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$ qui ont la propriété remarquable que le spectre de $i\frac{d}{d\theta}$ (le générateur infinitésimal de l'action de $\mathrm{Rot}(S^1)$) est non-négatif. C'est la définition d'une représentation ***à énergie positive***. Pour comprendre cette série discrète, on commence par construire une représentation "fondamentale". Pour les applications aux avN, il faut que cette construction soit manifestement unitaire et globale (sans référence à l'algèbre de Lie). On se sert de la seconde quantification fermionique de $L^2(S^1, V)$.

L'espace de Fock fermionique, $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, d'un Hilbert $\mathcal{H}$, est l'espace de Hilbert $\oplus_{n=0}^\infty \Lambda^n \mathcal{H}$ ($\Lambda^0 \mathcal{H} = \mathbb{C}\Omega$ — le "vide" Ω) et on a une action sur $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ de l'algèbre $CAR(\mathcal{H})$ — la C^*-algèbre engendrée sur $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ par les opérateurs $\tilde{a}(v)$: $\tilde{a}(v)(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n) = v \wedge_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$. On a $\tilde{a}(v)\tilde{a}(w) + \tilde{a}(w)\tilde{a}(v) = 0$ et $\tilde{a}(v)\tilde{a}^*(w) + \tilde{a}^*(w)\tilde{a}(v) = \langle v, w\rangle \mathrm{id}$. Si on pose $c(v) = \tilde{a}(v) + \tilde{a}(v)^*$, on vérifie que $c(v)c(w) + c(w)c(v) = 2\mathrm{Re}(\langle v, w\rangle)$ (l'algèbre de Clifford), et que n'importe quelle structure complexe $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{H}$ définit une nouvelle représentation irréductible de l'algèbre $CAR(\mathcal{H})$ via $a(f) = \frac{1}{2}(c(f) - ic(\mathcal{J}f))$. Si P est un projecteur sur $\mathcal{H}$, on peut définir un tel $\mathcal{J}$ par $\mathcal{J}(Pv + (1-P)v) = iPv - i(1-P)v$. On sait ([PS],[BS]) que les représentations qui correspondent à 2 projecteurs P et Q sont équivalentes si et seulement si $P - Q$ est de Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}$. D'où on déduit une représentation projective π_P sur $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ du groupe $U_{\mathrm{res}}(\mathcal{H})$ des unitaires u tels que $[u, P]$ est de Hilbert-Schmidt. On a $\pi_P(u) a(f) \pi_P(u)^* = a(uf)$. On a aussi un isomorphisme entre $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{F}(P\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}(\overline{(1-P)\mathcal{H}})$.

L'exemple qui nous intéresse est celui où on prend $\mathcal{H} = L^2(S^1, V)$ et $P =$ le projecteur sur l'espace de Hardy des valeurs au bord des fonctions L^2, holomorphes à l'intérieur de $S^1 \subset \mathbb{C}$. Un calcul facile montre que $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$ agit sur $L^2(S^1, V)$ par des éléments de $U_{\mathrm{res}}(\mathcal{H})$. D'où l'existence de la représentation (projective) fondamentale de $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$. En fait cette représentation s'étend à $LG \rtimes \mathrm{Diff}(S^1)$. En particulier le groupe de Möbius agit sur $L^2(S^1, V)$ en préservant P, et par conséquence agit canoniquement sur $\mathcal{F}(L^2(S^1, V))$.

Toute autre représentation irréductible à énergie positive de $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$ se trouve comme sous-espace d'un produit tensoriel $\otimes^\ell \pi_P$. L'entier ℓ, appelé le "niveau", est un invariant (qui définit l'extension centrale de $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$) et on sait que les représentations irréductibles à énergie positive sont classées (après multiplication préalable par un caractère de $\mathrm{Rot}(S^1)$) par le sous-module des points fixes pour $\mathrm{Rot}(S^1)$, qui est une représentation irréductible W de G. La représentation de niveau ℓ qui correspond à la représentation triviale de G est la fermeture du sous-espace $LG \rtimes \mathrm{Rot}\ S^1$-invariant engendré par le "vide" $\Omega \otimes \Omega \otimes \cdots \otimes \Omega$.

Pour un niveau ℓ donné, il n'y a qu'un nombre fini de représentations W de G qui interviennent. Les représentations irréductibles de G sont classées par les ***partitions*** $(f_1, f_2, \ldots, f_N)$ avec $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f_N \geq 0$ et seules les partitions avec $f_1 - f_N \leq \ell$ sont permises. On dit qu'une représentation de $SU(N)$ est ***admissible*** si sa partition est permise. Pour $SU(2)$, par exemple, il y a $\ell + 1$ représentations irréductibles à énergie positive au niveau ℓ.

Définition. *Pour ℓ un entier ≥ 1 et W une représentation irréductible admissible de G on note π_W sur $\mathcal{H}_W$ la représentation à énergie positive décrite et construite ci-dessus. Le cas où W est la représentation triviale est notée π_Ω sur $\mathcal{H}_\Omega$.*

Du point de vue des algèbres de Lie, l'algèbre complexifiée de $LG \rtimes \mathrm{Rot}\ S^1$ est $L\mathfrak{g} \rtimes \mathbb{C}$ où $\mathfrak{g} = su(N)$. L'algèbre $L\mathfrak{g} \rtimes \mathbb{C}$ a des extensions centrales données par des 2-cocycles $c : L\mathfrak{g} \times L\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ où $c(f,g) = (\mathrm{constante})\int_{S^1} \langle f, dg \rangle$ et où le niveau ℓ correspond à un choix de la constante (l'extension centrale est triviale sur $\mathrm{Rot}(S^1)$). Les lacets polynomiaux $\mathfrak{g} \otimes \{\sum_{n=-k}^{k} c_n z^n\}$ forment une sous-algèbre dense de $L\mathfrak{g}$ et on voit apparaître les algèbres de Kac-Moody affines ([PS],[Kc]).

4. LES GROUPES LOCAUX ET LES ALGÈBRES LOCALES

Si I est un intervalle de S^1 avec intervalle complémentaire I^c, on définit $L_I G$ comme le sous-groupe de LG de tous le lacets qui sont égaux à 1 en dehors de I. Par l'action du groupe de Möbius, on peut toujours se ramener au cas $I = \{z \in S^1 \mid \mathrm{Im}\ z \geq 0\}$. Dans une représentation donnée, on veut connaître la structure de l'avN $(L_I G)''$ engendrée par les unitaires qui représentent $L_I G$.

Dans un premier temps, on calcule les ingrédients de la théorie de Tomita-Takesaki-Connes pour l'avN $\mathfrak{A}_I$ engendrée par les $a(f)$ sur $\mathcal{F}(L^2(S^1,V))$, où $\mathrm{supp}(f) \subseteq I$. La théorie abstraite de ce calcul est bien connue (voir [Ar]). Dans notre cas particulier, on obtient :

Théorème A.

(i) *Le commutant de* $\mathfrak{A}_I$ *est l'avN engendrée par les* $Ua(f)$ *où* $\mathrm{supp}(f) \subset I^c$, *et* U *est l'unitaire canonique sur* $\mathcal{F}(L^2(S^1,V))$ *qui implémente la transformation* $f \mapsto -f$ *sur* $L^2(S^1,V)$.

(ii) $\sigma_t^{\Omega}(a(f)) = a(f')$ *où* $f'(z) = \frac{1}{z\sinh t+\cosh t}\, f\left(\frac{z\cosh t+\sinh t}{z\sinh t+\cosh t}\right)$.

(iii) J *est l'opérateur antilinéaire obtenu de* $\tilde{J} : L^2(S^1,V) \to L^2(S^1,V)$, $(\tilde{J}f)(z) = \bar{z}f(\bar{z})$.

(iv) $\mathfrak{A}_I$ *est un facteur de type* III_1.

La partie (iv) se déduit de (ii) par un résultat de Connes dans [Co3], et le fait que l'action du groupe modulaire est ***ergodique*** (c'est-à-dire les points fixes sont les scalaires).

Un résultat de Takesaki dans [Ta2] nous permet de passer directement aux sous-algèbres stables par σ_t^{Ω}. C'est évidemment le cas des $(L_IG)''$ car σ_t^{Ω} est géométrique. On voit tout de suite que $(L_IG)''$ est un facteur de type III_1. On peut également passer aux produits tensoriels de $\mathcal{F}(L^2(S^1,V))$ pour obtenir le résultat suivant.

Théorème B.

(i) *Dans la représentation* $\mathcal{H}_{\Omega}$ *(au niveau* ℓ*),* $(L_IG)''$ *est un facteur de type* III_1 *et le groupe modulaire est donné par la même formule que dans le Théorème A. De plus* $J\pi_{\Omega}(g)J = \pi_{\Omega}(g')$ *où* $g'(z) = g(\bar{z})^*$. $(g : S^1 \to G)$.

(ii) *Le commutant de* $(L_IG)''$ *est* $(L_{I^c}G)''$ *sur* $\mathcal{H}_{\Omega}$.

(iii) *Toutes les représentations irréductibles à un niveau donné sont équivalentes quand on les restreint à* L_IG.

On sait d'ailleurs que $(L_IG)'' \subset (L_{I^c}G)'$ (car G est simplement connexe) pour toute représentation à énergie positive. On dispose donc d'un ***sous-facteur***. Dans le langage de la théorie algébrique des champs, l'égalité de $(L_IG)''$ et $(L_{I^c}G)'$ sur $\mathcal{H}_{\Omega}$ (le "secteur du vide") s'appelle ***dualité de Haag*** et le sous-facteur mesure le défaut de dualité de Haag (voir [DHR]). L'étude de ce sous-facteur nécessite bien du travail, mais on a un résultat immédiat assez facile.

Théorème C.

(i) *Les représentations irréductibles à énergie positive restent irréductibles (et inéquivalentes) lorsqu'on les restreint à* $L_I G \times L_{I^c} G$.

(ii) *Le sous-facteur* $(L_I G)'' \subset (L_{I^c} G)'$ *est irréductible.*

Fusion de Connes définie par LG

L'espace $\mathcal{H}_\Omega$ est un $L_I G \times L_{I^c} G$-module. Si $M = \pi_\Omega(L_I G)''$ et $N = \pi_\Omega(L_{I^c} G)''$, $\mathcal{H}_\Omega$ devient donc un $M - N^{\text{opp}}$ module. Par (iii) du théorème B, l'application $\pi_\Omega(g) \mapsto \pi_W(g)$ s'étend en un isomorphisme de M (resp. N) et $\pi_W(L_I G)''$ (resp. $\pi(L_{I^c}(G))''$) (W est une représentation irréductible admissible de G). Ainsi tout $\mathcal{H}_W$ est doté d'une structure canonique de ($M - N^{\text{opp}}$) bimodule. De plus, le calcul de la conjugaison modulaire J dans $\mathcal{H}_\Omega$ permet d'identifier M et N^{opp}. On dispose donc, pour chaque ℓ, d'un système fini de $M - M$ bimodules.

Dans la définition de la fusion de Connes, pour faire $\mathcal{H}_{W_1} \boxtimes \mathcal{H}_{W_2}$, on remplace $\mathcal{H}_W$ par les opérateurs bornés entre $\mathcal{H}_\Omega$ et $\mathcal{H}_W$ qui entrelacent M. Entrelacer l'action à gauche de M équivaut à entrelacer $L_I G$ et on vérifie qu'entrelacer M à droite équivaut à entrelacer $L_{I^c} G$. On peut donc, si on veut, éliminer les algèbres de von Neumann de la définition de la fusion $\mathcal{H}_{W_1} \boxtimes \mathcal{H}_{W_2}$.

5. LES OPÉRATEURS À VERTEX DE KNIZHNIK ET ZAMOLODCHIKOV

La partie (iii) du théorème B découle de la partie (i). En effet, si P_{W_1} et P_{W_2} sont les projecteurs sur $\otimes^\ell \mathcal{F}(L^2(S^1, V))$ sur des sous-espaces isomorphes à $\mathcal{H}_{W_1}$ et $\mathcal{H}_{W_2}$, on sait qu'il existe un unitaire u dans le facteur de type III, $(L_I G)'$, tel que $u P_{W_1} u^* = P_{W_2}$. Cet unitaire fournit l'équivalence de $L_I G$-modules $\mathcal{H}_{W_1}$ et $\mathcal{H}_{W_2}$. Mais pour des renseignements quantitatifs, il faut des opérateurs d'entrelacements plus explicites que ceux donnés par la théorie abstraite d'équivalence de projecteurs dans un facteur. On va trouver ces opérateurs dans les "opérateurs à vertex" découverts par Knizhnik et Zamolodchikov dans [KZ].

Nous avons déjà défini les représentations ***ordinaires*** de $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$ dans $L^2(S^1, W)$ et les représentations projectives irréductibles π_W sur $\mathcal{H}_W$. Si on fixe le niveau ℓ, les π_W correspondent toutes à une extension centrale fixée de $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$ et on a donc le droit de chercher des opérateurs d'entrelacement $\phi : L^2(S^1, W) \otimes \mathcal{H}_{W_1} \to \mathcal{H}_{W_2}$. Un tel ϕ peut aussi s'écrire $\phi(f) : \mathcal{H}_{W_1} \to \mathcal{H}_{W_2}$. Ce ϕ sera en général une distribution à valeurs dans les opérateurs non-bornés, d'où la nécessité de restreindre les domaines.

On définit $L^2(S^1, W)^0$ et $\mathcal{H}_W^0$ comme les espaces des combinaisons linéaires finies des vecteurs propres pour les actions de $\mathrm{Rot}(S^1)$. Ce sont des espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués et $\mathbb{N}$-gradués. Quand on passe à l'algèbre de Lie, la relation d'entrelacement

$$(EL) \qquad \pi_{W_2}(g)\phi(f) = \phi(gf)\pi_{W_1}(g) \qquad (\text{pour} \quad g \in LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1))$$

devient

$$(V1) \qquad [x(n), \phi(v, m)] = \phi(xv, m+n)$$

$$(V2) \qquad [d, \phi(v, m)] = -m\phi(v, m)$$

où $x(n)$ est la fonction $z \mapsto z^n x$ pour $x \in \mathfrak{g}$, $\phi(v, m) = \phi(z^m v)$, $v \in W_0$ ($z^m v$ est la fonction de S^1 dans W qui vaut $z^m v$ sur z) et d est $i\,\frac{d}{d\theta}$ — le générateur infinitésimal de Rot S^1. C'est ce genre de formule qu'on voit dans [TK]. Les opérateurs $\phi(v, m)$ envoient $\mathcal{H}_{W_1}^0$ dans $\mathcal{H}_{W_2}^0$ et $x(n)$ est défini sur $\mathcal{H}_{W_1}^0$, et $\mathcal{H}_{W_2}^0$.

Définition. *Un **opérateur à vertex primaire** est une application linéaire $\phi : L^2(S^1, W_0)^0 \otimes \mathcal{H}_{W_1}^0 \to \mathcal{H}_{W_2}^0$ telle que ses composantes $\phi(v, m)$ satisfont à* (V1) *et* (V2).

Un tel ϕ ($\neq 0$) n'existe que pour certains choix de W_0, W_1, W_2. Pour dire exactement les choix possibles, il nous faut une petite discussion.

Il est commode d'indexer les représentations de $SU(2)$ par leur "spin", un demi-entier $j \geq 0$. La représentation V_j est de dimension $2j+1$ et on a

$$V_j \otimes V_k \cong \bigoplus_{\substack{j'+j+k \text{ entier} \\ |j-k| \leq j' \leq j+k}} V_{j'}$$

On dit qu'un triplet $(V_j, V_k, V_{k'})$ est admissible au niveau ℓ si $\dim(V_j \otimes V_k \otimes V_{k'}) \neq 0$ et $j + k + k' \leq \ell$. C'est un résultat de Tsuchiya et Kanie que, pour $SU(2)$ au niveau ℓ, un opérateur à vertex $\phi : L^2(S^1, V_j)^0 \otimes \mathcal{H}_{V_k}^0 \to \mathcal{H}_{V_{k'}}^0$ existe si et seulement si le triplet $(V_j, V_k, V_{k'})$ est admissible. En général on prend une copie de $SU(2)$ dans $SU(N)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & & & & 0 \\ c & d & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2) \right\} ,$$

que l'on note H.

Définition. *Un triplet (W_0, W_1, W_2) de représentations irréductibles de $G = SU(N)$ est admissible au niveau ℓ si :*

(i) *W_0, W_1 et W_2 sont admissibles au niveau ℓ.*

(ii) *Il existe un $\phi_0 \in \mathrm{Hom}_G(W_0 \otimes W_1, W_2)$ tel que sa restriction à tout mauvais triplet (V_0, V_1, V_2) est nul. (On dit qu'un triplet (V_0, V_1, V_2) de sous-espaces de W_0, W_1, W_2, invariants et irréductibles pour H, est* ***mauvais*** *s'il n'est pas admissible pour* SU(2) *au niveau ℓ.)*

On a alors le théorème suivant :

Théorème D. *Si (W_0, W_1, W_2) est admissible au niveau ℓ, il existe pour tout $\phi_0 \in \mathrm{Hom}_G(W_0 \otimes W_1, W_2)$ satisfaisant à (ii) ci-dessus, un et un seul opérateur à vertex primaire $\phi : W_0 \otimes \mathcal{H}^0_{W_1} \to \mathcal{H}^0_{W_2}$ avec $\phi|_{W_0 \otimes W_1} = \phi_0$. (Rappelons que W_i est le sous-espace de $\mathcal{H}_{W_i}$ des points fixes pour* $\mathrm{Rot}(S^1)$*.) Si le triplet n'est pas admissible, tout opérateur à vertex primaire est zéro.*

Il faut maintenant donner un sens à ces ϕ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{W_1}$. C'est ce que l'on n'a pas vu avant Wassermann dans les travaux sur les opérateurs à vertex de Knizhnik et Zamolodchikov. Dans le cas spécial où $W_0 = \mathbb{C}^n$ (la représentation identique de $SU(N)$), on a le résultat suivant:

Théorème E. *Si $W_0 = \mathbb{C}^n$, soit $f \in L^2(S^1, W_0)^0$. On a alors $\|\phi(f)(v)\| \leq \|f\|\|v\|$ pour $v \in \mathcal{H}^0_{W_1}$, d'où $\phi(f)$ s'étend en un opérateur* ***borné*** *de $\mathcal{H}_{W_1}$ en $\mathcal{H}_{W_2}$ (et en fait ϕ a un sens pour tout $f \in L^2$).*

Ce résultat, extrêmement utile, est facile à démontrer. On n'a qu'à remarquer que les opérateurs fermioniques $a(f)$, pour $f \in L^2(S^1, \oplus^\ell W_0)$, entrelacent $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$. Donc si P_{W_1} et P_{W_2} sont des projecteurs sur des sous-espaces de $\mathcal{F}(L^2(S^1, \oplus^\ell W_0))$ ($\cong \otimes^\ell \mathcal{F}(L^2(S^1, W_0))$) isomorphes à $\mathcal{H}_{W_1}$ et $\mathcal{H}_{W_2}$ (au niveau ℓ), on peut définir $\phi(f)$ comme $P_{W_2} a(f) P_{W_1}$. Pour démontrer (V1) et (V2) on n'a qu'à prendre la dérivée de (EL). Il faut aussi se convaincre que les $\phi(f)$ ainsi construits sont non-zéros pour les triplets admissibles $(\mathbb{C}^n, W_1, W_2)$. Pour cela on peut travailler avec les termes initiaux ϕ_0, car, pour les représentations W qui se trouvent dans $\Lambda(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^\ell)$, le sous-espace des points fixes pour $\mathrm{Rot}(S^1)$ sur $\mathcal{F}(L^2(S^1, \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^\ell))$ est dans $\Lambda(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^\ell)$, vu comme sous-espace de cet espace de Fock. Les $a(v)$ ($v =$ fonction constante sur S^1, à valeur $v \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^\ell$) agissent par multiplication extérieure. On a tout de suite que $P_{W_0} a(v) P_{W_1}$ est non-zéro lorsque la multiplication extérieure par v a une composante non-zéro entre $W_1 \subset \Lambda(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^\ell)$ et $W_2 \subset \Lambda(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^\ell)$.

On étend cette méthode pour avoir les opérateurs à vertex primaires quelconques en prenant des produits tensoriels des $a(f)$, cette fois pour l'algèbre de Lie. Si $a(v,k) = a(z^k v)$ pour $v \in \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^\ell = W$, on montre que la formule

$$a(v_1 \wedge v_2 \cdots \wedge v_k, m) = \sum_{p_1+p_2+\cdots+p_k=m} a(v_1,p_1)\ldots a(v_k,p_k)$$

(les v_i sont orthogonales) définit une application de $\Lambda^k W$ dans $\mathrm{End}(\mathcal{F}(L^2(S^1,W)^0)$ qui satisfait à (V1) et (V2) pour $v \in \Lambda^k W$, vu comme G-module. On obtient $\phi(v,m)$ comme "compression" $P_{W_2} a(v,m) P_{W_1}$ comme avant.

On voit que les opérateurs à vertex (au niveau ℓ) obtenus ainsi sont non-zéros précisément pour les triplets (W_0, W_1, W_2) satisfaisant les propriétés suivantes:

(i) $W_i \subset \Lambda(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^\ell)$.

(ii) Il existe $v \in W_0 \subset \Lambda(\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^\ell)$ tel que la multiplication extérieure par v a une composante non-zéro entre W_1 et W_2 ($\subset \Lambda(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^\ell)$). Cette "compression" de la multiplication extérieure par v donne le ϕ_0 de l'opérateur à vertex ϕ.

Wassermann montre que ces triplets-ci sont les mêmes que les triplets admissibles. On a construit donc tous les opérateurs à vertex primaires par compression des fermions.

Le passage des $\phi(v,n)$ aux opérateurs (non-bornés) sur un Hilbert est technique mais standard — par des estimées de Sobolev sur les $\phi(v,n)$, conséquences d'estimées de Sobolev sur les fermions, on montre que $\sum_n \phi(f_n,n)$ (où $f(\theta) = \sum_n f_n e^{in\theta}$) est un opérateur à domaine dense pour $f \in C^\infty(S^1,W_0)$ et il a un adjoint à domaine dense — $\sum_n \phi(f_n^*,n)$. D'où l'existence du vrai $\phi(f)$ comme fermeture de l'opérateur préfermé $\sum_n \phi(f_n,n)$.

La dernière chose à faire est de récupérer la relation d'entrelacement (EL) des relations (V1),(V2). Pour cela il faut avoir des propriétés de continuité de $\phi(f)$ et utiliser des techniques élaborées de passage entre l'algèbre de Lie $L\mathfrak{g} \rtimes \mathbb{R}$ et le groupe $LG \rtimes \mathrm{Rot}(S^1)$.

6. CALCUL DE LA FUSION

Rappelons que, pour définir la fusion $\mathcal{H} \boxtimes \mathcal{K}$ de deux $M-M$ bimodules ${}_M\mathcal{H}_M$ et ${}_M\mathcal{K}_M$, nous avons défini le produit scalaire suivant sur $\mathrm{Hom}_{-M}(\mathcal{H}_\Omega,\mathcal{H}) \otimes \mathrm{Hom}_{M-}(\mathcal{H}_\Omega,\mathcal{K})$:

$$(PS) \qquad \langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2\rangle = \langle x_2^* x_1 y_2^* y_1 \Omega, \Omega\rangle\ .$$

Si $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{W_1}$, $\mathcal{K} = \mathcal{H}_{W_2}$, on a vu que $\mathrm{Hom}_{-M}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}_{W_1}) = \mathrm{Hom}_{L_{I^c}G}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}_{W_1})$ et $\mathrm{Hom}_{M-}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}_{W_2}) = \mathrm{Hom}_{L_IG}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}_{W_2})$. On aura donc des éléments ***concrets*** x_i et y_i si on peut trouver des opérateurs qui entrelacent L_IG et $L_{I^c}G$.

Remarque essentielle: Les opérateurs à vertex primaires $\phi(f) : \mathcal{H}_{W_1} \to \mathcal{H}_{W_2}$ nous fournissent des éléments de Hom_{L_IG} et $\mathrm{Hom}_{L_{I^c}G}$. En effet, si $\mathrm{supp}(f) \subset I^c$, la relation (EL) devient $\pi_{W_2}(g)\phi(f) = \phi(f)\pi_{W_1}(g)$ si $g \in L_IG$ (et le résultat est analogue si on échange I et I^c).

Si $W_1 = \Omega$, l'isométrie partielle de la décomposition polaire de $\phi(f)$, et tout autre opérateur borné obtenu de $\phi(f)$, seront donc un élément de $\mathrm{Hom}_{L_IG}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}_{W_2})$. Si on écrit $x_{W_1\Omega}, x_{W_2\Omega}$ deux tels opérateurs, on a les quantités explicites $\langle x^*_{W_1\Omega} x_{W_1\Omega} y^*_{W_2\Omega}) y_{W_2\Omega}\Omega, \Omega\rangle$ à calculer. Ce produit scalaire est une version distributionelle de la "fonction à 4 points" des physiciens.

L'idée de Wassermann est d'utiliser certaines relations de commutation ("relations de tresse") entre les $\phi(f)$ pour récrire ce produit scalaire comme somme finie d'autres produits scalaires.

On reconnaîtra ces autres produits scalaires comme fonctions à 2 points pour d'autres représentations. Pour ce faire, il faudra prendre un opérateur d'entrelacement comme $x^\Omega_W : \mathcal{H}_\Omega \to \mathcal{H}_W$ et en créer d'autres d'une manière linéaire, $x_{W_2,W_1} : \mathcal{H}_{W_1} \to \mathcal{H}_{W_2}$. Notons que, si x est de la forme $\phi(f)$, pour $f \in C^\infty(S^1, W)$, l'opérateur $\phi(f) : \mathcal{H}_\Omega \to \mathcal{H}_W$ n'est qu'une composante, qu'on va appeler ***partie principale***, de tout l'opérateur à vertex $\phi(f)$, qui possède aussi des composantes $\phi(f) : \mathcal{H}_{W_1} \to \mathcal{H}_{W_2}$ pour tout triplet admissible (W, W_1, W_2). (C'est particulièrement clair avec la construction qu'on a donnée des $\phi(f)$ comme compression de fermions.) Si on pouvait ajuster $\phi(f)$ de façon à ce que ses composantes $a^{W_1}_{W_2}$ soient ***unitaires***, on pourrait définir des parties ***non-principales*** de n'importe quel opérateur x^Ω_W par la formule

$$x_{W_1W_2} = a_{W_2W_1}\pi_{W_1}((a_{W\Omega})^* x_{W\Omega})$$

(où on utilise de nouveau l'équivalence locale pour faire agir $\mathrm{End}_{L_IG}(\mathcal{H}_\Omega)$ sur $\mathcal{H}_{W_1}$). Les $x_{W_1W_2}$ hériteront des mêmes relations de tresse que les $a_{W_2W_1}$.

Heureusement, on n'a pas besoin de faire tout ce travail dans le cas général d'un triplet (W, W_1, W_2). Quand on aura calculé la fusion avec $\mathcal{H}_\Box$, on pourra déduire les règles générales de fusion au moyen d'un anneau de représentations. C'est un anneau commutatif pour lequel la représentation identique de $SU(N)$, que l'on notera $\Box$, se révèlera comme générateur. Il suffira donc de calculer la fusion $\mathcal{H}_\Box \boxtimes \mathcal{H}_W$. On aura l'existence de constantes $\lambda_X \neq 0$ telles que

$$x_{W\Omega}(y_{\square\Omega})^* = \sum_X \lambda_X (y_{XW})^* x_{X\square} \ ,$$

$$x_{X\square} y_{\square\Omega} = \left(\frac{\bar{\lambda}_X}{|\lambda_X|}\right) y_{XW} x_{W\Omega} \ .$$

Notre produit scalaire (PS) devient donc :

$$\begin{aligned}\langle (x_{W\Omega})^* x_{W\Omega} (y_{\square\Omega})^* y_{\square\Omega} \Omega, \Omega\rangle &= \sum_X \lambda_X \langle (x_{W\Omega})^* (y_{XW})^* x_{X\square} y_{\square\Omega} \Omega, \Omega\rangle \\ &= \sum_X |\lambda_X| \langle y^*_{\square\Omega} x^*_{X\square} x_{X\square} y_{\square\Omega}\Omega, \Omega\rangle.\end{aligned}$$

L'opérateur $U : \mathcal{H}_W \boxtimes \mathcal{H}_\square \to \oplus_X \mathcal{H}_X$, $U(x_{W\Omega} \otimes y_{\square\Omega}) = \oplus_X |\lambda_X|^{\frac{1}{2}} x_{X\square} y_{\square\Omega}\Omega$ est alors une ***isométrie*** et par construction il entrelace $L_I G \times L_{I^c} G$. Les X qui interviennent dans la somme sont ceux pour lesquels le triplet $(\square, W, X)$ est admissible — on sait qu'il n'y a pas de multiplicité dans la formule — tout $\mathcal{H}_X$ n'intervient qu'une fois, comme dans la formule du produit tensoriel par $\square$ dans les représentations de G. Par le lemme de Schur et l'irréductibilité ((ii) du théorème C), U est unitaire. La fusion est donc entièrement calculée. On voit que le travail se divise en deux parties:

(1) Calcul des relations de tresse entre les $\phi(f)$.
(2) Définition et relations de tresse pour les parties non-principales des éléments de $\mathrm{Hom}_{L_I G}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}_W)$.

Relations de tresse entre les $\phi(f)$

Notations. Si $f \in C^\infty(S^1, \mathbb{C})$, (W_0, W_1, W_2) est un triplet admissible de représentations de G, et $v \in W_0$, on va noter $\phi^{W_0}_{W_2 W_1}(f, v)$ un opérateur à vertex primaire fermé $\phi(f \otimes v) : \mathcal{H}_{W_1} \to \mathcal{H}_{W_2}$ où $f \otimes v : S^1 \to V$ est la fonction $(f \otimes v)(z) = f(z)v$. La relation générale qu'on aimerait démontrer est la suivante:

$$(T\phi) \qquad \begin{aligned}&\text{Si} \quad f \in C^\infty(I, \mathbb{C}), \quad g \in C^\infty(I^c, \mathbb{C}), \\ &\text{il existe des constantes } \ c_{W,W'}, \mu_{W,W'} \ \text{ telles que} \\ &\phi^X_{ZW}(f, u)\phi^Y_{WT}(g, v) = \sum_{W'} c_{W,W'} \phi^Y_{ZW'}(g', v)\phi^X_{W'T}(f', u)\end{aligned}$$

où, pour une fonction $h \in C^\infty(S^1 \backslash \{1\}, \mathbb{C})$, $h'(e^{i\theta}) = e_\mu(h)(e^{i\theta}) = e^{i\mu\theta} h(e^{i\theta})$ avec $\mu = \mu_{WW'}$. Les $c_{W,W'}$ et les $\mu_{W,W'}$ dépendent de X, Y, Z, T. (Remarquons que ces

ϕ sont toujours définis sur les vecteurs C^∞ pour $\mathrm{Rot}(S^1)$ et les envoient dans des vecteurs C^∞, ce qui implique que la composition des ϕ a un domaine dense.)

On va trouver $(T\phi)$ comme valeur au bord d'une relation de tresse entre des fonctions définies par des séries convergentes dans $\{z : |z| < 1\}$. Si on écrit $f = \sum_n f_n z^n$ et $g = \sum_n g_n z^n$, on voit qu'il faudra considérer des sommes de la forme :

$$\sum_{m,n} f_n g_m \langle \phi(v_2, n)\phi(v_3, m)v_4, v_1\rangle z^n w^m$$

où $v_1 \in Z,\ \ v_2 \in X,\ \ v_3 \in Y,\ \ v_4 \in T$. On voit tout de suite que (V2) implique, pour $n \neq -m$, $a_{nm} = \langle \phi(v_2, n)\phi(v_3, m)v_4, v_1\rangle = 0$, et que $a_{nm} = 0$ si $m > 0$. On définit donc la série ***formelle***

$$(SF) \qquad F_W(v, z) = \sum_{n\geq 0} \langle \phi(v_2, n)\phi(v_3, -n)v_4, v_1\rangle z^n \ , \quad v = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4 \ .$$

$F(v, z)$ est un élément de $\mathrm{Hom}_G(V_2 \otimes V_3 \otimes V_4, V_1)$. $V_1 = Z,\ V_2 = X,\ V_3 = Y,\ V_4 = T$ (et $\phi(v_3, -n) : \mathcal{H}^0_{V_4} \to \mathcal{H}^0_W$).

Si $\{x_i\}$ est une base orthormée de $\mathfrak{g}$, on sait (voir [PS]) que

$$d + \frac{\Delta_W}{2(N + \ell)} = \frac{1}{N + \ell}\left(-\tfrac{1}{2}\sum x_i(0)x_i(0) - \sum_{n>0} x_i(-n)x_i(n)\right)$$

sur $\mathcal{H}^0_W$ où $\sum_i x_i^2 = \Delta_W$ sur W. (Rappelons que d est le générateur de $\mathrm{Rot}(S^1)$, $[d, x(n)] = -nx(n)$.) Si on applique cette égalité entre $\phi(v_2, n)$ et $\phi(v_3, -n)$ dans (SF) et qu'on utilise (V1),(V2) on obtient l'équation de Knizhnik-Zamolodchikov pour F:

$$(KZ) \qquad (N + \ell)\frac{dF}{dZ} = \left(\frac{\Omega_{34} - \lambda_W}{z} + \frac{\Omega_{23}}{z - 1}\right) F(z)$$

où on note Ω_{34} l'opérateur linéaire sur $\mathrm{Hom}(V_2 \otimes V_3 \otimes V_4, V_1)$ défini par $\Omega_{34}T = T(-\sum_k \mathrm{id} \otimes x_k \otimes x_k)$ et Ω_{ij} est défini de manière analogue pour $2 \leq i, j \leq 4$. (Les x_k agissent sur les $\mathfrak{g}$-modules V_i.) Et $\lambda_W = (\Delta_W - \Delta_3 - \Delta_4)/2$.

On peut vérifier directement des estimées de Sobolev provenant de la construction fermionique des $\phi(f)$ que la série (SF) converge pour $|z| < 1$ et définit une distribution sur $C^\infty(S^1)$ par ses valeurs au bord.

Plaçons-nous dans le meilleur des cas: où il n'y a pas de multiplicité dans les produits tensoriels de représentations irréductibles de G et où on ne sent pas les restrictions imposées par l'admissibilité (par exemple, si on fixe V_1, V_2, V_3, V_4 et k niveau est très grand). L'équation (KZ) est à valeurs dans $\mathrm{Hom}_G(V_2 \otimes V_3 \otimes V_4, V_1)$, et on s'attend à autant de solutions linéairement indépendantes que le nombre de représentations W avec $\phi^{V_2}_{V,W}, \phi^{V_2}_{W,V_4}$ non nuls. En effet, comme Ω_{34} agit comme le scalaire λ_W sur $W \subset V_3 \otimes V_4$, les fonctions $z^{\lambda_W} F_W(z)$ sont des solutions près de 0 (linéairement indépendantes si les λ_W sont distinctes) de l'équation de K-Z :

$$(N+\ell)\frac{dF}{dz} = \left(\frac{\Omega_{34}}{z} + \frac{\Omega_{23}}{z-1}\right) F(z) .$$

Pour faire intervenir la partie droite de l'équation $(T\phi)$, on introduit aussi la série $G_{W'}(z) = \sum_{n\geq 0}\langle \phi(v_3,n)\phi(v_2,-n)v_4, v_1\rangle z^{-n}$ (où $\phi(v_2,-n) : \mathcal{H}^0_{V_4} \to \mathcal{H}^0_{W'}$) et on trouve que ∞, $G(z)$ satisfait à ***la même équation*** (KZ) que F_W. Si on est toujours dans le bon cas, on voit qu'on a des $c_{W,W'}$ avec :

$$F_W(z) = \sum_{W'} c_{W,W'} G_{W'}(z)$$

dans un domaine où les deux fonctions existent par prolongement analytique. Cette matrice $c_{W,W'}$ est la matrice de transport ou de connexion entre 0 et ∞ pour l'équation (KZ). On passe de cette relation à la relation $(T\phi)$, d'abord pour les produits scalaires de la forme $\langle \phi(f,u)\phi(g,v)v_4, v_1\rangle$ avec des vecteurs dans V_4 et V_1, en écrivant ces produits scalaires comme couplage entre les distributions $F_W(z), G_{W'}(z)$ au bord avec la convolution de $\tilde{f}$ et g. Ensuite on trouve $(T\phi)$ pour des produits scalaires avec v_4 et v_1 quelconques dans $\mathcal{H}^0_{V_4}$ et $\mathcal{H}^1_{V_0}$ en appliquant les $x(-n)$ aux vecteurs dans V_4 et V_1 et les relations de commutation entre les ϕ et les $x(-n)$. On trouve la relation $(T\phi)$.

Dans notre argument nous avons fait trois hypothèses simplificatrices: sur les multiplicités, sur les valeurs propres λ_W et enfin sur l'admissibilité. Quant aux problèmes dûs à la multiplicité, en gros, on les évite en se restreignant à des cas de fusion où il n'y a pas de multiplicité, par exemple si on veut seulement la fusion avec $\square$. Un cas particulièrement facile est le cas $V_1 = V$, $V_2 = \square$, $V_3 = \Omega$, $V_4 = V'$ où V' intervient dans $V \otimes \square$. Dans ce cas, dim $W = 1$ et la relation de tresse ne font intervenir qu'un scalaire ε de norme égale à 1:

$$(TA) \qquad \phi^{V}_{V'\square}(u,f)\phi^{\square}_{\square\Omega}(v,g) = \varepsilon\phi^{\square}_{V'V}(v,e_{-\mu}g)\phi^{V}_{V\Omega}(u,e_{-\mu}f) .$$

La manière dont Wassermann traite les problèmes d'admissibilité est beaucoup plus intéressante et difficile. Il lui faut une étude approfondie des solutions de KZ

— en gros le but est de montrer que $c_{W,W'}$ est non nul si et seulement si l'opérateur $\phi^{V_3}_{W'V_4}$ est admissible. Dans le cas où dim $\mathrm{Hom}_G(V_2 \otimes V_3 \otimes V_4, V_1) = 2$, on ne rencontre pas plus que les fonctions hypergéométriques de Gauss et les méthodes de Gauss sont suffisantes. Mais en général Wassermann fait appel à un certain nombre d'astuces. Il rend imaginaire la constante $N + \ell$ dans KZ et le transport devient unitaire et il trouve le résultat voulu — une formule explicite pour les $c_{W,W'}$ en termes de fonctions Γ — pour des valeurs réelles de $N + \ell$, par prolongement analytique. Comme outil technique, il se sert d'un théorème Tauberien de Karamata.

Un cas de relation de tresse importante où on a besoin de tout ce travail est le suivant :

$$\text{Si } f \in C_c^\infty(I) \text{ et } g \in C_c^\infty(I^c), \text{ on a}$$

$$(T\bar{\square}) \qquad \phi^W_{W\Omega}(u,f)\phi^{\bar{\square}}_{\Omega\square}(v,g) = \sum_{W'} e^{-2\pi i \mu_W}\, \phi^{\bar{\square}}_{W,W'}(v, e_{\mu_{W'}} g)\phi^W_{W'\square}(e, e_{\mu_{W'}} f)$$

où W' parcourt l'ensemble de toutes les représentations irréductibles (admissibles au niveau ℓ) dans $W \otimes \square$ et :

$$\mu_{W'} = (N+\ell)^{-1}(f_j - j + 1 - N^{-1}(\Sigma f_i))$$

si $(f_1, \ldots, f_N)$ est la partition de W et la partition de W' est $(f_1, f_2, \ldots, f_j{+}1, \ldots, f_N)$.

Définition et relations de tresse pour les parties non-principales des éléments de $\mathbf{Hom}_{L_IG}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}_W)$

Le premier but est de rendre les $\phi(f)$ bornés et aussi inversibles que possible, sans toutefois perdre les relations de tresse.

On part des relations de tresse $(T\bar{\square})$,

$$a_{W\Omega} b^*_{\square\Omega} = \sum_X \lambda_X b^*_{XW} a_{X\square}$$

pour des opérateurs à vertex primaires et aussi les relations

$$a_{W\square} b_{\square\Omega} = \frac{\bar{\lambda}_W}{|\lambda_W|}\, b_{WW'} a_{W'\Omega} \quad \text{(voir (TA))}$$

et on montre, par des arguments standards de fermeture d'opérateurs non-bornés que l'on peut remplacer $a_{W\square}$ par l'isométrie partielle de la décomposition polaire de sa fermeture, et $a_{X\square}$ par $a_{X\square}(\Sigma|\lambda_X|a^*_{X\square}a_{X\square})^{-\frac{1}{2}}$. Les $b_{\square\Omega}$ et b_{XW} sont déjà bornés.

On veut maintenant rendre ***unitaires*** les parties principales $a_{W\Omega}$ et $b_{\square\Omega}$. C'est d'abord un argument d'ergodicité: on choisit une suite $\{g_n\}$, dense dans $L_I G$, et une suite $\{u_n\}$ d'isométries partielles dans $\pi_\Omega(L_I G)''$ avec $u_n u_n^* = \delta_{n,m}\mathrm{id}$, $\sum u_n^* u_n = 1$. On forme la somme $A_{XW} = \sum_n 2^{-n}\pi_X(g_n)a_{XW}\pi_W(u_n)$ et on montre que support $(AA^*) = 1$. On remplace $a_{W\Omega}$ par l'isométrie partielle de la décomposition polaire de $A_{W\Omega}$ et $a_{X\square}$ par $A_{X\square}(\Sigma|\lambda_X|A^*_{X\square}A_{X\square})^{-\frac{1}{2}}$ comme avant. On remplace enfin a_{XV} par $a_{XV}\pi_V(u)$ où u est une isométrie partielle entre a^*a et 1. On ne perd jamais la relation de tresse au cours de ce procédé.

Nous avons donc le resultat suivant:

Théorème F. *Il existe des opérateurs d'entrelacement bornés $a_{W\Omega}, a_{W'W}, b_{\square\Omega}, b_{W'W}$ entre les $\mathcal{H}_V$ correspondants, tels que :*

$$a_{W\Omega}b^*_{\square\Omega} = \sum_{W'} \lambda_{W'} b^*_{W'W} a_{W'\square}$$

et

$$a_{W'\square}b_{\square\Omega} = \varepsilon_{W'} b_{W'W} a_{W\Omega}$$

où $|\varepsilon_{W'}| = 1$, $|\lambda_{W'}| = \varepsilon_W \lambda_{W'}$. Les parties principales $a = a_{W\Omega}$ et $b = b_{\square\Omega}$ sont unitaires. Les opérateurs "a" entrelacent $L_{I^c}G$ et les " b" entrelacent $L_I G$.

Muni de ce résultat, on peut définir les parties non-principales $x_{W_1W_2} = a_{W_1W_2}\pi_{W_2}(a^*_{W\Omega}x)$ pour $x \in \mathrm{Hom}_{L_{I^c}G}(\mathcal{H}_\Omega, \mathcal{H}_W)$ et calculer la fusion de Connes comme nous l'avons esquissée ; on trouve le résultat suivant.

Théorème G. *$\mathcal{H}_\square \boxtimes \mathcal{H}_W \cong \oplus_{W'}\mathcal{H}_{W'}$ où les W' sont les représentations irréductibles qui interviennent dans $\square \otimes W$ et telles que W' est admissible au niveau ℓ.*

7. CONSÉQUENCES

1) La première conséquence est l'existence d'une loi de fusion entre les représentations à énergie positive de LG. Car les règles de fusion $\mathcal{H}_{W_1} \boxtimes \mathcal{H}_{W_2} \cong \oplus N^W_{W_1W_2}\mathcal{H}_W$ montrent que la représentation sur $\mathcal{H}_{W_1} \boxtimes \mathcal{H}_{W_2}$ de $L_I G \times L_{I^c}G$ s'étend en une représentation à énergie positive de LG. Une telle loi de fusion a été envisagée par Graeme Segal qui associe un $\mathcal{H}_W$ à chaque cercle, composante connexe du bord d'un disque deux fois troué, et cherche à trouver les $N^W_{W_1W_2}$ dans les extensions holomorphes des lacets à l'intérieur du disque troué. On peut penser à la méthode de Wassermann comme passage au bord de cette méthode de Segal, où les deux cercles intérieurs tendent vers le bord du grand cercle. Le seul défaut de la méthode de Wassermann est qu'elle dépend d'un calcul explicite de la fusion — il n'y a pas de raison a priori pour laquelle $\mathcal{H}_{W_1} \boxtimes \mathcal{H}_{W_2}$ est un LG-module.

2) On a des systèmes finis très intéressants de bimodules sur le facteur hyperfini de type III_1. On verra par la suite que ces systèmes existent en fait pour le facteur hyperfini de type II_1 et le passage aux types III se fait par un simple produit tensoriel.

3) Nous avons calculé la fusion $\mathcal{H}_W \boxtimes \mathcal{H}_\square$, le résultat étant une somme de tous les $\mathcal{H}_{W'}$ pour les W', permissibles au niveau ℓ, et contenus dans $W \otimes \square$. On voit immédiatement que tout $\mathcal{H}_W$ se trouve dans une puissance convenable $\boxtimes^k(\square)$, que les $\mathcal{H}_W$ sont fermées sous l'opération de fusion et que tout $\mathcal{H}_W$ possède un conjugé unique $\overline{\mathcal{H}_W}$. Si on note par R l'opérateur de rotation par 180°, la formule $B(x \otimes y) = R^*[RyR^* \otimes RxR^*]$ donne un unitaire entrelaçant $X \boxtimes Y$ et $Y \boxtimes X$. L'anneau de représentations $\mathcal{R}$ devient donc un anneau commutatif involutif à trace non-dégénérée. Sa structure est entièrement déterminée par son spectre. On trouve un sous-ensemble fini $\mathcal{S}$ du tore maximal de $SU(N)$ tel que tout caractère est donné par $\mathcal{H}_W \mapsto \mathrm{tr}_W(z)$ pour un unique $z \in \mathcal{S}$. Donc $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}^{\mathcal{S}}$ et on trouve ainsi les règles de fusion générales. Elles sont en accord avec les "formules de Verlinde" bien connues (les formules habituelles de Clebsch-Gordon sont modifiées par une action du groupe de Weyl affine ([Kc], 13.35)). Les règles de fusion sont également données par la description suivante (tirée de [G-W]).

L'application $W \mapsto \mathcal{H}_W$ s'étend en un homomorphisme de $R(SU(N))$ (l'anneau des représentations de $SU(N)$) sur $\mathcal{R}$ et son noyau est l'idéal engendré par les représentations irréductibles non-admissibles qui correspondent aux partitions $(f_1, f_2, \dots, f_N)$ telles que $f_1 - f_N = \ell + 1$.

4) Les sous-facteurs. Wenzl a construit dans [We1] une série de sous-facteurs du facteur hyperfini de type II_1 par le moyen des représentations de l'algèbre de Hecke de type A, avec variable $q = e^{2\pi i/k}$. Par un résultat de Popa [Po2] et la construction explicite d'une algèbre de Hecke agissant sur $\boxtimes\mathcal{H}_\square$ on montre que le sous-facteur $N \subset M = \pi_\square(L_I G)'' \subset \pi_\square(L_{I^c} G)'$ est isomorphe au produit tensoriel d'un sous-facteur de Wenzl par un facteur hyperfini de type III_1. Peut-être la chose la plus importante à faire dans ce calcul est de montrer que $N \subset M$ est d'indice fini. C'est une conséquence du fait que $\mathcal{H}_{\overline{\square}}$ est conjugé à $\mathcal{H}_\square$. Plus généralement, on montre que la "dimension quantique" $d(X)$ d'une représentation π_X définit un homomorphisme de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'indice du sous-facteur $\pi_X(L_I G)'' \subset \pi_X(L_{I^c} G)'$ (défini à partir de projecteurs de Jones) est égal a $d(X)^2$.

La fusion $\mathcal{H}\boxtimes\mathcal{H}_{\bar{W}}$ correspond à la "construction de base" de [Jo1], d'où on peut calculer les invariants de sous-facteur ("commutants relatifs supérieurs") pour $N \subset M$ en calculant $\mathrm{End}_{LG}(\mathcal{H}_W \boxtimes \mathcal{H}_{\bar{W}} \boxtimes \mathcal{H}_W \cdots \boxtimes \mathcal{H}_{\bar{W}})$. En général le calcul de $\mathrm{End}_{LG}(\boxtimes_i \mathcal{H}_{W_i})$ constitue une généralisation "quantique" du calcul $\mathrm{End}_G(\otimes_i W_i)$ de la théorie des invariants classique. On y trouve toutes les représentations de l'algèbre de Hecke et le groupe et le groupoïde de tresses auxquelles on s'attend d'après la théorie des groupes quantiques (Cartier [Ca]).

BIBLIOGRAPHIE

[Ar] H. Araki - *Canonical anticommutation relations*, Contemporary Math. **62** (1987), 23–186.

[A] M. Atiyah - *Topological quantum field theory*, Publ. IHES **68** (1989), 175–186.

[BSZ] J. C. Baez, I. E. Segal et Z. Zhou - *Introduction to algebraic and constructive quantum field theory*, Princeton University Press (1992).

[Ba] R. Baxter - *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, New York, 1982.

[BW] J.Birman et H.Wenzl - *Braids, link polynomials and a new algebra*, Trans. AMS **313** (1989), 269–273.

[Bi] J. Birman - *Braids, links and mapping class groups*, Ann. Math. Studies **82** (1974).

[Bo] R. Borcherds - *Vertex algebras, Kac-Moody algebras and the Monster*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **83** (1986), 3068–3071.

[Br] R. Brauer - *On algebras which are connected with the semisimple continuous groups*, Ann. Math. **38** (1937), 856–872.

[Ca] P. Cartier - *Développements récents sur les groupes de tresses. Applications à la topologie et à l'algèbre*, Sém. Bourbaki, exp. 716, Astérisque **189-190** (1990), 17–67.

[CIZ] A. Cappelli, C. Itzykson et J. B. Zuber, Nucl. Phys. B **280** (1987), 445– .

[Co1] A. Connes - *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994.

[Co2] A. Connes - *Classification of injective factors*, Ann. Math. **104** (1976), 73–115.

[Co3] A. Connes - *Une classification des facteurs de type* III, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4^e série **6** (1973), 133–252.

[DHR] S. Doplicher, R. Haag et J. Roberts - *Local observables and particle statistics*, I, II, Comm. Math. Phys. **23** (1971), 199–230 and **35** (1974), 49–85.

[Dr] V. Drinfeld - *Quantum groups*, Proc. ICM 1986, vol. **1**, 798–820.

[Fa] L. Faddeev - *Integrable models in* $(1+1)$*-dimensional quantum field theory*, (Lectures in Les Houches, 1982) Elsevier Science Publishers, 1984, 563–608.

[FR] R. Fenn et C. Rourke - *On Kirby's calculus of links*, Topology **18** (1979), 1–15.

[FRS] K. Fredenhagen, Rehren, et B. Schroer - *Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras*, Comm. Math. Phys. **125** (1989), 201–226.

[F+] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. Lickorish, K. Millett et A. Ocneanu - *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. AMS **12** (1985), 183–190.

[FQS] D. Friedan, Z. Qiu et S. Shenker - *Conformal invariance, unitarity and critical exponents in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984), 1575–1578.

[Fr] J. Frölich - *Statistics of fields, the Yang-Baxter equation and the theory of knots and links*, Proceedings of Cargèse, ed. G. 't Hooft et al. (1987).

[GO] P. Goddard et D. Olive - *Kac-Moody and Virasoro algebras*, Adv. Series in Math. Phys. **3**, World Scientific (1988).

[GHJ] F. Goodman, P. de la Harpe et V. Jones - *Coxeter graphs and towers of algebras*, MSRI Publications (Springer) **14** (1989).

[GW] F. Goodman et H. Wenzl - *Littlewood Richardson coefficients for Hecke algebras at roots of unity*, Adv. Math. **82** (1990), 244–265.

[HK] R. Haag et D. Kastler - *An algebraic approach to quantum field theory*, J. Math. Phys. **5** (1964), 848–861.

[H] R. Haag - *Local quantum physics*, Springer-Verlag (1992).

[Ha] U. Haagerup - *Connes' bicentralizer problem and the uniqueness of the injective factor of type* III_1, Acta Math. **158** (1987), 95–148.

[Ji1] M. Jimbo - *A q-difference analogue of* $U(\mathfrak{g})$ *and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **102** (1986), 537–567.

[Ji2] M. Jimbo - it A q-analogue of $U(sl(N+1))$, Hecke algebra and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247–252.

[Jo1] V. Jones - *Index for subfactors*, Invent. Math. **72** (1983), 1–25.

[Jo2] V. Jones - *Notes on subfactors and statistical mechanics*, in : Braid Groups, Knot Theory and Statistical Mechanics (ed. Yang & Ge), World Scientific, 1989, 1–25.

[Jo4] V. Jones - *Braid groups, Hecke algebras and type* II_1 *factors*, in : Geometric Methods in Operator Algebras. (ed. Araki and Effros), Pitman Res. Notes in Math. (1983), 242–273.

[Jo5] V. Jones - *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, Bull. AMS **12** (1985), 103–111.

[JW] V. Jones and A. Wassermann - *Fermions on the circle and representations of loop groups*, à paraître.

[Kc] V. Kac - *Infinite dimensional Lie algebras*, 3ème édition, Cambridge University Press (1990).

[KL] V. Kazhdan and G. Lusztig - *Tensor structures arising from affine Lie algebras*, IV, Journal AMS **7** (1994), 383–453.

[KZ] V. Knizhnik et A. Zamolodchikov - *Current algebra and Weiss-Zumi no models in two dimensions*, Nucl. Phys. B **247** (1984), 83–103.

[KR] P. Kulish et N. Reshetikhin - *Quantum linear problem for the sine-Gordon equation and higher representations*, J. Sov. Math. **23** (1983), 2435–2441.

[Li1] W. Lickorish - *Polynomials for links*, Bull. AMS **20** (1988), 558–588.

[Lo] R. Longo - *Index of subfactors and statistics of quantum fields*, I, Comm. Math. Phys. **126** (1989), 217–247.

[LO] T. Loke - *Operator algebras and conformal field theory of the discrete series representations of Diff(S^1)*, Thèse, Université de Cambridge (1994).

[MSe] G. Moore et N. Seiberg - *Classical and quantum conformal field theory*, Comm. Math. Phys. **123** (1989), 177–254.

[MvN] F. Murray et J. von Neumann - *On rings of operators*, Ann. Math. **37** (1936), 116–229.

[NT] T. Nakanishi and A. Tsuchiya - *Level-rank duality of* WZW *models in conformal field theory*, Comm. Math. Phys. **144** (1992), 351–372.

[O2] A. Ocneanu - *Quantized groups, string algebras and Galois theory for algebras*, in : Operator Algebras and Applications (eds. Evans and Takesaki), 1988, 119–172.

[Pa] V. Pasquier - *Two-dimensional critical systems labeled by Dynkin diagrams*, Nucl. Phys. B **285** (1987), 162–172.

[Po1] S. Popa - *Classification of subfactors: the reduction to commuting squares*, Invent. Math. **101** (1990), 19–43.

[Po2] S. Popa - *Classification of subfactors and of their endormorphisms*, à paraître dans Lecture Notes, CBMS series.

[PP] M. Pimsner et S. Popa - *Entropy and index for subfactors*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **19** (1986), 57–106.

[PS] A. Pressley et G. Segal - *Loop Groups*, Oxford Science Publications (1986).

[PSt] R. Powers et E. Størmer - *Free states of the canonical anticommutation relations*, Comm. Math. Phys. **16** (1970), 1–33.

[Sa] J.-L. Sauvageot - *Sur le produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert*, J. Operator Theory, **9** (1983), 237-252.

[Se] G. Segal - *Notes on conformal field theory*, unpublished manuscript.

[Sk] E. Sklyanin - *Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation*, J. Sov. Math. **19** (1982), 1546–1596.

[Ta1] M. Takesaki - *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*, Lecture Notes in Math., vol. **128**, Springer, 1970.

[Ta2] M. Takesaki - *Conditional expectations in von Neumann algebras*, Journal Funct. Analysis **9** (1972), 306–321.

[TL] H. Temperley et E. Lieb - *Relations between the 'percolation' and...* , Proc. Roy. Soc. Ser. A **322** (1971), 251–280.

[TK] A. Tsuchiya et Y. Kanie - *Vertex operators in conformal field theory on* $\mathbb{P}^1$ *and monodromy representations of braid group*, Adv. Stud. Pure Math. **16** (1988), 297–372.

[TUY] A. Tsuchiya, K. Ueno et Y.Yamada - *Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries*, Adv. Studies in Pure Maths. **19** (1989), 459–566.

[Tu] V. Turaev - *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. **92** (1988), 527–553.

[V] E. Verlinde - *Fusion rules and modular transformations in* 2D *conformal field theory*, Nuclear Phys. B **300** (1988), 360–376.

[Wa1] A. Wassermann - *Coactions and Yang-Baxter equations for ergodic actions and subfactors*, in : Operator Algebras and Applications (eds. Evans and Takesaki), 1988 (LMS Lecture Notes **136**), 203–236.

[Wa2] A. Wassermann - *Fusion for von Neumann algebras and loop groups*, à paraître.

[Wa3] A. Wassermann - *Loop groups, invariant theory and subfactors*, à paraître.

[Wa4] A. Wassermann - *Operator algebras and conformal field theory*, à paraître dans Proceedings du Congrès International (1994).

[We1] H. Wenzl - *Hecke algebras of type* A_n *and subfactors*, Invent. Math. **92** (1988), 349–383.

[We2] H. Wenzl - *Quantum groups and subfactors of type* B, C *and* D, Comm. Math. Phys. **133** (1990), 383–432.

[We3] H. Wenzl - *On the structure of Brauer's centralized algebras*, Ann. Math. **128** (1988), 173–193.

[Wi] E. Witten - *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), 351–399.

Vaughan JONES
Department of Mathematics
University of California at Berkeley
BERKELEY, CA 94720, USA

Astérisque

MAXIM KONTSEVICH

Mirror symmetry in dimension 3

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 801, p. 275-293
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__275_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 1995
47ème année, 1994-95, n° 801

MIRROR SYMMETRY IN DIMENSION 3

by **Maxim KONTSEVICH**

1. CALABI-YAU MANIFOLDS

1.1. Definition and first properties

A *Calabi-Yau manifold* is a compact connected Riemannian manifold X of even dimension $2n$ with holonomy group contained in $SU(n) \subset O(2n, \mathbf{R})$. In other words, it is an n-dimensional complex manifold with a Kähler metric with $(1,1)$-form g and a holomorphic volume element non-vanishing everywhere $vol \in \Gamma(X, K_X)$ such that $|vol \wedge \overline{vol}|$ is equal to the Riemannian volume element arising from the metric. The volume element vol defines a holomorphic trivialization of the canonical line bundle $K_X = \wedge^n(T^*_X)$. Thus $h^{n,0}(X) = 1$. In what follows we will not fix the holomorphic volume element, i.e. we are free to multiply it by a non-zero complex number. In 1954 E. Calabi [13] conjectured and in 1976 S.-T.Yau [59] proved the following

Theorem (Yau). *If X is a compact complex manifold with $K_X = 0 \in Pic(X)$ and with a Kähler metric $g \in \Omega^{1,1}(X)$ then there exists a unique Calabi-Yau Kähler metric $g_{CY} \in \Omega^{1,1}(X)$ such that $[g_{CY}] = [g] \in H^{1,1}(X)$.*

Theorem (Bogomolov-Beauville, [12,7]). *If X is a Calabi-Yau manifold then there exists a finite covering $Y \longrightarrow X$ which is isometrically isomorphic to $A \times H \times C$ where*

1) *A is a complex torus $\mathbf{C}^k/\mathbf{Z}^{2k}$ with a flat Kähler metric (the holonomy group of A is trivial),*
2) *H is a 1-connected hyperkähler manifold (the holonomy group of H is contained in the quaternionic unitary group $Sp(l) \subset O(4l, \mathbf{R})$ and $\pi_1(H) = \{id\}$),*
3) *C is a Calabi-Yau manifold in the proper sense, i.e. $\pi_1(H) = \{id\}$ and $H^{2,0}(X) = 0$.*

Notice that the factors of type 3) in this decomposition are always projective algebraic varieties. Also, complex manifolds arising as factors of the second type (the third type respectively) can be characterized as connected simply connected smooth projective varieties with a trivial canonical class which admit a holomorphic symplectic form (for which $h^{1,0} = h^{2,0} = \ldots = h^{dimX-1,0} = 0$ respectively).

1.2. Moduli spaces

Each complex manifold X defines a deformation functor Def_X. For a germ of based analytic space (S, s_0) the set $Def_X(S, s_0)$ is the set of equivalence classes of analytic families of manifolds X_s parametrized by S, $s \in S$ with the fixed isomorphism $X_{s_0} \simeq X$.

Theorem (Bogomolov-Tian-Todorov, [11,53,55,45]). *If X is a Calabi-Yau manifold then the local deformation theory of complex structures on X is unobstructed. In other words, the deformation functor is representable by a germ of complex manifold of dimension equal to $rk\, H^1(X, T_X) = rk\, H^1(X, \wedge^{n-1} T_X^*) = h^{n-1,1}(X)$.*

The group of biholomorphic transformations of any Calabi-Yau manifold is an extension of a complex torus by a discrete group. In general, automorphism groups cause trouble in constructing moduli space. We will overcome this difficulty by considering *marked polarized* Calabi-Yau manifolds. Namely, for a given Calabi-Yau manifold X consider the set of equivalence classes of Calabi-Yau manifolds Y together with an isomorphism of graded rings $i_Y : H^*(Y; \mathbf{Z}) \simeq H^*(X; \mathbf{Z})$ inducing the identification of cohomology classes of Kähler forms. This set has a natural structure of a complex analytic space. We denote its connected component containing X by $\mathcal{M}_X^{marked}$. This space is a complex manifold of dimension equal to $h^{n-1,1}(X)$.

For algebraic X with the integral polarization we can forget marking and get an algebraic space of finite type $\mathcal{M}_X$ (moduli space) with orbifold singularities.

We define the period map from $\mathcal{M}_X^{marked}$ to the complex projective space $P(H^n(X; \mathbf{C}))$ by formula

$$Period((Y, i_Y)) = i_Y(H^{n,0}(Y)) \subset H^n(X; \mathbf{C})$$

It follows from the Kodaira-Spencer theory that the period map is locally an embedding. On the vector space $H^n(X; \mathbf{C})$ we have a pseudo-hermitean form

$$([\alpha], [\beta]) = \int_X \overline{\alpha} \wedge \beta$$

where α and β are smooth closed n-forms on X. This form induces a pseudo-Kähler metric on an open subset of $P(H^n(X;\mathbf{C}))$ by formulas analogous to formulas for the Fubini-Study metrics. The pullback of this pseudo-metric to $\mathcal{M}_X^{marked}$ by the period map is everywhere defined and strictly negative. Thus, after changing the sign we get a canonical Kähler metric on the moduli space called the Weil-Petersson metric.

For complex tori and for hyperkähler manifolds moduli spaces are pretty well understood, they are hermitean symmetric domains locally.

From now on we will consider only 3-dimensional Calabi-Yau manifolds in the proper sense. If X is such a manifold then it has the following diagram of Hodge numbers:

$$\left(h^{i,j}(X)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = h^{1,1}(X),\ b = h^{2,1}(X) \quad .$$

Calabi-Yau metrics on X depend on b complex parameters (moduli of complex structures) and a real parameters (classes of Kähler forms). The cone over the image of the period map is (locally) a complex Lagrangian cone in $H^3(X;\mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}^{2b+2}$. The symplectic form on $H^3(X;\mathbf{C})$ is the Poincaré pairing.

1.3. Constructions

A large class of Calabi-Yau manifolds can be obtained as complete intersections in Fano varieties, i.e. complex algebraic manifolds with very ample anticanonical class (see [49,tangent61]). The simplest example is a quintic 3-fold, i.e. a smooth hypersurface in $\mathbf{C}P^4$ given by a homogeneous equation of degree 5 in 5 variables. Our next example is an intersection of two cubics in $\mathbf{C}P^5$. The rule is that the sum of degrees of equations should be equal to the number of variables.

One can replace projective spaces by products of projective spaces, by weighted projective spaces, by flag varieties etc. One of most general construction covering 90% of examples is due to V. Batyrev [4,5], it is based on the consideration of toric Fano varieties.

Also one can start from a Calabi-Yau manifold admitting an action of a finite group preserving the holomorphic volume element and try to resolve singularities of the quotient space. By results of S. Roan, D. Markushevich et al. [47,40,48,39,10] for all finite subgroups $\Gamma \subset SU(3)$ the quotient space $X := \mathbf{C}^3/\Gamma$ admits a resolution of singularities X' with the trivial canonical class. Some other singularities (like the toric ones) also have such resolutions.

Earlier constructions (due to F. Hirzebruch [29]) were obtained following deformation arguments from the next section. Some other constructions were proposed by C. Voisin [56].

Playing with all this hundreds of thousands of families of 3-dimensional manifolds can be constructed, but still up to now only a *finite* number of different families of Calabi-Yau manifolds in the proper sense is known. E. Calabi conjectured that there are finitely many connected families of Calabi-Yau manifolds in any given dimension.

1.4. Rational curves

H. Clemens and R. Friedman [19,22] introduced a construction transforming the topology of 3-dimensional complex manifolds using rational curves. We define $(-1,-1)$-*curve* on X as a smooth complex rational curve $C \subset X$, $C \simeq \mathbf{C}P^1$ with the normal bundle $\mathcal{N}_C = (T_X)_{|C}/T_C$ isomorphic to $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$. In a sense, it is typical for rational curves because the degree of the normal bundle is

$$(c_1(T_X) - c_1(T_C))[C] = 0 - c_1(T_C)[C] = -2$$

and in the space of $\overline{\partial}$-connections on a 2-dimensional C^∞-bundle $\mathcal{N}$ over $\mathbf{C}P^1$ with $c_1(\mathcal{N})[\mathbf{C}P^1] = -2$ the set of connections giving holomorphic bundles equivalent to $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ is open and dense with the complement of real codimension 2.

It is easy to see that $(-1,-1)$-curves are isolated and do not disappear after small deformations of the complex structure on X. As we will see, it is reasonable to expect infinitely many $(-1,-1)$-curves on Calabi-Yau manifolds.

H. Clemens' idea was to take a finite set of non-intersecting $(-1,-1)$-curves $\{C_i\}_{i\in I}$, contract each of them to a point and try to deform the resulting analytic space X' into a smooth manifold via flat deformations.

Locally all $(-1,-1)$-curves are alike. There exists a neigbourhood of C_i in X analytically isomorphic to a neigbourhood of the zero section in the total space of the vector bundle $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ over $\mathbf{C}P^1$. The result of the contraction of C_i into a point is an analytic space with the simple quadratic singularity looking like

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{C}^4 | \sum x_j^2 = 0\} \quad .$$

In fact, this singular space can be obtained as a result of contraction of a $(-1,-1)$-curve on another 3-dimensional complex manifold $\tilde{X}$ with the trivial canonical class. This manifold $\tilde{X}$ is not necessarily a Kähler one. The passing from X

to $\tilde{X}$ is called *flop* and it is very important in Mori's theory of minimal models of algebraic varieties.

We can try to deform the complex structure on X' outside singular points and modify it near these points as

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{C}^4 | \sum x_j^2 = \epsilon_i\}$$

where ϵ_i, $i \in I$ are small parameters. Topologically it is a simple surgery: we replace $(S^2 \times D^4)_i$ in X by $(D^3 \times S^3)_i$ with the common boundary $(S^2 \times S^3)_i$.

Theorem (Tian [54]). *The deformation theory of X' is unobstructed. If we choose a holomorphic volume element on X then the tangent space $\mathbf{T}$ to the local moduli space at the base point is inserted naturally into the following exact sequence:*

$$0 \longrightarrow H^1(X, T_X) \longrightarrow \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{C}^I \longrightarrow H_2(X; \mathbf{C})$$

where the last map is defined on the base vectors as $i \mapsto [C_i] \in H_2(X; \mathbf{C})$.

One can normalize holomorphic volume elements on deformed manifolds by the condition $\int_\gamma vol = 1$ where $\gamma \in H_3(X; \mathbf{Z})$ is a non-trivial cycle. Local parameters ϵ_i can be defined as integrals of normalized forms vol over the vanishing cycles $(S^3)_i$. One can check that the vector of ϵ_i lies in the kernel of the last arrow in Tian's theorem.

Hence if we have enough rational curves C_i such that fundamental classes of C_i span $H_2(X; \mathbf{Z})$ and there is a linear relation $\sum_i \epsilon_i [C_i] = 0 \in H_2(X; \mathbf{C})$ with all numbers ϵ_i non-zero, then there is a deformation Y of X' which is a smooth space with $\pi_1(Y) = \{id\}$ and $H_2(Y; \mathbf{Z}) = 0$. By a classification theorem of C. T. Wall [57], the manifold Y is diffeomorphic to the connected sum of several copies of $S^3 \times S^3$.

Complex manifolds appearing in such a way are not Kähler ones because the second Betti number is zero. Nevertheless there is a pure Hodge structure on their cohomology by deformation arguments. Hence we can realize moduli spaces from section 1.2 as "boundaries" of larger smooth moduli spaces with natural Kähler metrics. Also we can increase dimensions of these moduli spaces by contracting/deforming more and more rational curves. M. Reid [46] conjectured that the moduli spaces of *all* 3-dimensional Calabi-Yau manifolds (in the proper sense) can be connected in such a way. It seems to be true. Physicists proved [26], without using computers, by purely abstract arguments that all the thousands of complete intersections in products of projective spaces are on the boundary of only one connected component of moduli space of complex structures on $(S^3 \times S^3)\# \ldots \#(S^3 \times S^3)$.

2. STRINGS AND MIRROR SYMMETRY

2.1. Few words about string theory

String theory is a project for the Grand Unification of all interactions in Nature. The total Feynman integral is taken over the space of maps from all surfaces to the target pseudo-riemannian manifold M. The action functional is the Dirichlet functional plus some fermionic terms. The theory is supersymmetric only for 10-dimensional manifolds with special metrics close enough to Einstein metrics. In order to have a chance to be related to the physical world this manifold should be approximately equal to the product of the Minkowski space $\mathbf{R}^4$ and a six-dimensional manifold X of very small size. This X is essentially the Calabi-Yau 3-fold. The spectrum of particles of the physics arising in 4 dimensions is determined by the string theory on X.

It was later realized that one can replace X by any $(2,2)$-supersymmetric conformal field theory with the central charge $\hat{c} = 3$. We want to mention here that the whole notion of conformal field theory is completely rigorously defined in mathematical terms [52,23]. One of important unresolved problems is the description of the conformal theory corresponding to a given Calabi-Yau manifold.

In fact, there is an additional parameter in theory. It is called a B-field and can be identified with an element of $\sqrt{-1}H^2(X;\mathbf{R})$. This field multiplies the contribution of each map ϕ from a closed surface Σ to X by the topological factor $\exp\left(\int_\Sigma \phi^*(B)\right)$. The total moduli space of conformal field theories close to the theory associated with a given Calabi-Yau manifold X has the structure of the product of two Kähler complex manifolds of dimensions $a = h^{2,1}(X)$ and $b = h^{1,1}(X)$. The field B and a real parameters of the Kähler class of X together form complex coordinates in a domain of $H^2(X;\mathbf{C})$. The string theory on X is not well-defined when the size of X is too small. In a sense the Feynman integral is not convergent in this case.

There are two classes of observables in $N = 2$-theory which depend only on a part of parameters [58]. In the *B-model* correlators depend only on the complex structure of X and in the *A-model* they depend only on the symplectic structure of X together with the B-field. Moreover, one can argue that the correlators are holomorphic functions of parameters.

2.2. Discovery of Mirror Symmetry

The correspondence between Calabi-Yau manifolds and conformal field theories is locally one-to-one. Globally there is no reasons for this, and there is no natural way to reconstruct the manifold from its string theory. For example, for the target

($\mathbf{R}^{24}$/Leech lattice) the automorphism group of a version of the superstring theory is the Monster group, i.e. much larger than the symmetry group of the target.

In supersymmetric conformal field theories there is no intrinsic difference between the A and B model. Based on this, Lerche-Vafa-Werner [35] and Dixon [20] conjectured that Calabi-Yau manifolds come in pairs giving equivalent string theories. The A-model on one manifold X is equivalent to the B-model on the dual manifold Y and vice versa. Hodge diagrams of dual manifolds should be mirror reflections of each other, $h^{i,j}(X) = h^{3-i,j}(Y)$. At the same time Green and Plesser [25] proposed a first explicit pair of points in the moduli of Calabi-Yau manifolds as candidates to the Mirror symmetry and proposed very convincing arguments. Physicists [15, 27] made a table of Hodge numbers (a, b) for all 7868 families of Calabi-Yau manifolds arising as complete intersections in products of projective spaces. Very surprisingly the plot of this numbers in the plane $\mathbf{Z}^2$ was almost symmetric, with only a few ($\simeq 10$) exceptions.

The first actual calculation by Candelas et al. [17] of correlators gives an extremely beautiful prediction relating numbers of rational curves and Picard-Fuchs equations. We reproduce the results of their calculations in 3.3. Physicists realized that one can make explicit calculations in both A and B models by a standard trick in supersymmetry. One can show formally that the Feynman integral in the A-model is equivalent to the summation over all holomorphic curves on X and the B-model corresponds to the Hodge theory. The reason is that the Feynman integral over the space of all maps can be localized to the space of holomorphic maps and constant maps respectively.

3. PREDICTIONS FROM MIRROR SYMMETRY

3.1. Results from symplectic topology

Let X be a 3-dimensional Calabi-Yau manifold on which all rational curves are smooth $(-1,-1)$-curves and they do not intersect each other. Then there is a finite number n_d of these curves in each degree $d = [C] \in H_2(X; \mathbf{Z})$, $d \neq 0$. This number does not change if we vary the complex structure on X a little bit. We want to define analogous numbers for an arbitrary 3-dimensional Calabi-Yau manifold, also including curves of higher genus. The simplest way to do it, after Y. Ruan [50], is the following.

We perturb generically the almost-complex structure on X leaving it compatible in the evident way with the symplectic Kähler form. Then, by Gromov's theorem [28] there is a nice compactification of the space of smooth holomorphic curves $C \subset X$ of a given area (equivalently, of a given homology class). By theorems of D. McDuff [41] this compact space is stratified by smooth manifolds with the dimension given by indices of appropriate $\overline{\partial}$-operators. All this works for an arbitrary compact symplectic manifold. The case of $c_1(T_X) = 0$ and $dim_{\mathbf{R}}(X) = 6$ is exceptional because this index is equal to zero for all degrees d and all genera g. Thus the set of curves of given degree and genus is finite.

We associate with any such curve a sign with values in $\{+1, -1\}$. Namely, each curve is a solution of a non-linear differential equation (the Cauchy-Riemann equation). We can linearize the problem near each solution and get an invertible linear differential operator

$$\overline{\partial}' : \Gamma(C, \mathcal{N}_C) \longrightarrow \Gamma\left(C, \mathcal{N}_C \otimes \left(T^{0,1}\right)^*\right) .$$

This operator acts from a complex vector space to another complex vector space, but it is not $\mathbf{C}$-linear. Nevertheless the principal symbol of $\overline{\partial}'$ is $\mathbf{C}$-linear. We can choose an invertible $\mathbf{C}$-linear operator $\overline{\partial}$ with the same principal symbol. The quotient $\overline{\partial}' \circ (\overline{\partial})^{-1}$ is an invertible $\mathbf{R}$-linear operator of the form (Id + compact operator). The space of such operators has two connected components labeled by the sign of the determinant of a finite-dimensional approximation. This is the sign which we attach to curves.

We define the "number of curves" $n_{d,g} \in \mathbf{Z}$ as the sum of signs over all curves of degree d and genus g.

Theorem (Ruan). *The number $n_{d,g}$ is independent of the choice of generic almost-complex structure. It is invariant under continuous deformations of the symplectic form on X.*

In fact, Y. Ruan made this statement only for genus zero curves, but his argument works for higher genera too. If $n_{d,0} < 0$ for some d then there are unavoidably whole continuous families of rational curves for arbitrary integrable complex structure compatible with the symplectic form. It follows from the positivity of multiplicities of complete intersections in algebraic/analytic geometry.

The number of curves $n_{d,g}^{phys}$ used in string theory is not the same as the number defined above. It is not an integer number in general. The reason is that in string theory one wants to count in a sense the number of equivalence classes of holomorphic maps from curves to X. Any such a map is a composition of a (ramified) covering map $C \longrightarrow C'$ and an embedding $C' \hookrightarrow X$. The space of ramified coverings has a positive dimension, and one needs an additional perturbation argument in an auxiliary space which is an infinite-dimensional orbifold with finite isotropy groups. The intersection theory on orbifolds relevant to physics contains non-trivial denominators.

For example, ramified coverings of degree k of a $(-1,-1)$-curve give the contribution equal to $1/k^3$. This formula was proposed by P. Aspinwall and D. Morrison [3] and recently checked by Yu. Manin [38] using a new definition [34] of numbers $n_{d,g}^{phys}$ (so called Gromov-Witten invariants) which we will not reproduce here. Hence

$$n_{d,0}^{phys} = \sum_{k|d} \frac{1}{k^3} n_{d/k,0} \ .$$

3.2. Two Lagrangian cones

For a 3-dimensional Calabi-Yau manifold X with $h^{1,0}(X) = 0$ we define two complex lagrangian cones $\mathcal{L}_A(X)$ and $\mathcal{L}_B(X)$. The second cone $\mathcal{L}_B(X)$ is simply the cone over the image of the period map. It lies in the symplectic vector space $H^{odd}(X;\mathbf{C}) = H^3(X;\mathbf{C})$.

In order to describe the first cone we need to construct a certain analytic function (prepotential) in an open domain of the complex vector space $H^2(X;\mathbf{C})$:

$$F([\omega]) := \frac{1}{3!}\int_X \omega^3 + \sum_d n_{d,0}\mathrm{Li}_3\left(\exp\left(\int_d \omega\right)\right) = \frac{1}{3!}\int_X \omega^3 + \sum_d n_{d,0}^{phys}\exp\left(\int_d \omega\right)$$

Here $\omega \in \Omega^2(X)$ is a closed 2-form and $\mathrm{Li}_3(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k/k^3$, $|z|<1$ is the usual 3-logarithm function. One expects that the series defining F converges absolutely in some domain "$\mathrm{Re}[\omega] \longrightarrow -\infty$". The cubic term in the formula for F represents the contribution of constant holomorphic maps from rational curves to X.

We define an analytic function $F^{(2)}$ of homogeneity degree 2 in a conical domain of the vector space $V := H^2(X;\mathbf{C}) \oplus \mathbf{C}$ by formula $F^{(2)}(x,t) := t^2F(\frac{x}{t})$ where $x \in H^2(X;\mathbf{C})$ and $t \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$. Let us consider the graph of the differential of $F^{(2)}$. It is clear that it is a Lagrangian cone in the symplectic vector space $V \oplus V^* \simeq H^{even}(X)$. We define $\mathcal{L}_A(X)$ to be the analytic continuation of this graph.

Mirror Conjecture. *For dual varieties X, Y, the associated cones are equivalent after linear symplectic transformations:*

$$\mathcal{L}_A(X) \simeq \mathcal{L}_B(Y), \ \ \mathcal{L}_B(X) \simeq \mathcal{L}_A(Y) \ .$$

Some open domains in projectivizations of cones $\mathcal{L}_A(X)$, $\mathcal{L}_A(Y)$ can be identified with some open domains in $H^2(X;\mathbf{C})$, $H^2(Y;\mathbf{C})$ respectively. Mirror symmetry give rise to a certain biholomorphic map between these domains in affine spaces and domains in the moduli spaces of dual manifolds. This map is called the *mirror map*. Affine coordinates on the second cohomology correspond to so-called *flat coordinates* on moduli spaces.

3.3. Example of quintics

The most popular example is a quintic 3-fold. Hodge numbers here are $a = 1$ and $b = 101$. The dual family of varieties consists of resolutions of singularities of quotient spaces

$$\{(x_1 : \ldots : x_5) \in \mathbf{C}P^4 | \sum_j x_j^5 = z^{-1/5} \prod_j x_j\} / (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^3 \ , \quad z \in \mathbf{C} \text{ is a parameter}$$

where the group $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^3 \subset PGL(5,\mathbf{C})$ acts by diagonal transformations $x_j \mapsto \xi_j x_j$ preserving the equation from above and the volume element $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_5$:

$$(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^3 \simeq \{(\xi_j) | \xi_j^5 = 1, \ \prod_j \xi_j = 1\} / \{(\xi_j) | \xi_1 = \ldots = \xi_5 = \xi, \ \xi^5 = 1\} \ .$$

The cone $\mathcal{L}_A(X)$ comes from the function in one variable

$$F(t) = \frac{5}{6} t^3 + \sum_{d \geq 1} n_d \mathrm{Li}_3\left(e^{dt}\right)$$

which is defined for $\mathrm{Re}(t) < t_0 = -7.590\ldots$.

The variation of Hodge structures on 1-parameter family of dual manifolds Y can be described by a fourth-order linear differential equation:

$$\left(\left(z\frac{d}{dz}\right)^4 - 5z(5z\frac{d}{dz}+1)(5z\frac{d}{dz}+2)(5z\frac{d}{dz}+3)(5z\frac{d}{dz}+4)\right)\psi(z) = 0 \ .$$

It has four linearly independent solutions in domain $|z| \ll 1$, $|\mathrm{Arg}\ z| \ll 1$:

$$\psi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} z^n$$

$$\psi_1(z) = \log z \cdot \psi_0(z) + 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} \left(\sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k} \right) z^n$$

$$\psi_2(z) = \frac{1}{2}(\log z)^2 \cdot \psi_0(z) + \dots$$

$$\psi_3(z) = \frac{1}{6}(\log z)^3 \cdot \psi_0(z) + \dots$$

The Mirror prediction [17, 42] is the following identity:

$$F\left(\frac{\psi_1}{\psi_0}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{\psi_1\psi_2 - \psi_0\psi_3}{\psi_0^2} \ .$$

One can write easily a computer program and get numbers

$$n_1 = 2875, \ n_2 = 609250, \ n_3 = 317206375, \ n_4 = 242467530000, \dots$$

Miraculously, all numbers n_d coming from the mirror prediction are integers. It is still not proven. It is known that all rational curves up to degree 4 on generic quintics are smooth $(-1,-1)$-curves. Results of the mirror prediction for generic quintics were confirmed by more or less direct algebro-geometric calculations up to degree 4 [21,34]. Another remarkable virtue is that the exponent of the ratio of periods appearing in the mirror map expands into a series with integral coefficients in appropriate algebraic coordinates on the moduli space of complex structures of Y. In the case of quintics one has

$$\exp\left(\psi_1(z)/\psi_0(z)\right) \in z + z\mathbf{Z}[[z]] \ .$$

This fact was recently proved by B. Lian and S.-T. Yau [36] for complete intersections in projective spaces using p-adic results of B. Dwork.

3.4. Other examples

There are hundreds of other manifolds for which numbers of rational curves of small degrees were computed and mirror predictions checked (see [21,33,37,6,56,30, 31,16,18]).

An evident trouble is that there are rigid Calabi-Yau manifolds X with $h^{2,1}(X) = 0$ which cannot have any mirror manifold Y because $h^{1,1}(Y) > 0$ for any Kähler Y. Still one can count curves on X and make generating functions. Physicists conjectured that the dual variation of Hodge structures comes from certain higher dimensional Fano varieties [14]. For example, the H^7 of cubics in $\mathbf{C}P^8$ looks like the H^3 of a non-existing mirror to one of rigid manifolds. Mathematically more natural possibility of Hodge structures on non-Kähler 3-dimensional manifolds, as in 1.4, has not been explored yet.

The most general construction of dual manifolds for complete intersections in toric varieties was proposed by V. Batyrev and L. Borisov [5] in terms of the usual duality between convex polyhedra.

P. Aspinwall, B. Green and D. Morrison [2] studied the behavior of A and B models under birational transformations. It seems that both cones are invariant under such transformations. For the B-model it is clear because the moduli space and the variation of Hodge structure of birationally equivalent manifolds are essentially the same. If we apply the simplest birational transformation (the flop) then we get new numbers of curves but the whole analytic continuation of the cone of the A-model will be the same.

We do not discuss higher dimensional generalizations here (see [43,44,24,1,32]).

4. HOLOMORPHIC ANOMALY EQUATIONS

We describe in this section predictions for numbers of curves of positive genus from remarkable papers by Bershadsky, Cecotti, Ooguri and Vafa [8,9]. It is impossible to explain here all the arguments of physicists. We just formulate final results in mathematical terms.

4.1. Flat coordinates on Kähler manifolds

The moduli space of Calabi-Yau manifolds carries a natural Kähler metric (Weil-Petersson metric). We describe now a general construction applicable to arbitrary manifold M with a real-analytic Kähler form ω.

Denote by $\overline{M}$ the same manifold M endowed with the complex structure conjugate to the original one. The diagonal submanifold M^{diag} of $M \times \overline{M}$ is totally real. Hence the differential form ω on M^{diag} has the analytic continuation to the holomorphic form $\omega^{\mathbf{C}}$ in a neighbourhood U of M^{diag}. Thus U is a complex symplectic manifold. By the Kähler property submanifolds $M \times \{\overline{m}\} \cap U$ where $\overline{m} \in \overline{M}$ are Lagrangian. It means that we have a Lagrangian foliation of U. It is well known that leaves of such a foliation carry a natural flat affine structure. Hence we construct holomorphic affine structures on open subsets of M depending antiholomorphically on points of M. For functions on affine space there are canonically defined higher derivatives which are symmetric covariant tensors.

Résumé. *For any smooth function f on a Kähler manifold M we defined its canonical higher derivatives $\partial^k(f) \in \Gamma\left(M, S^k\left(T_M^{1,0}\right)^*\right)$.*

Analogously, if L is a hermitean line bundle over M such that the curvature form of L is proportional to ω and s is a smooth section of L then higher derivatives of s are defined. The reason is that the pullback of L to $M \times \overline{M}$ carries a flat connection along the Lagrangian foliation as above.

4.2. Equations

Let X be a 3-dimensional Calabi-Yau manifold and $\mathcal{M}_X$ be its moduli space. We consider now $M = \mathcal{M}_X$ not as an algebraic space but as an orbifold. It carries the Weil-Petersson metric ω_{WP} and a hermitean line bundle L with fiber over each point (X) equal to $\left(H^{3,0}(X)\right)^*$.

Physicists claim that there are canonical global objects

$$\partial^k(F_g) \in \Gamma\left(M, S^k\left(T^{1,0}\right)^* \otimes L^{2-2g}\right)$$

for all integers $g, k \geq 0$ obeying inequality $2-2g-k<0$. This inequality is exactly the condition of hyperbolicity for surfaces of genus g with k punctures. The first constraint on these objects is that locally there exist sections F_g of L^{2g-2} such that global sections $\partial^k(F_g)$ are its derivatives. Thus everything can be obtained from $\partial^3(F_0)$, $\partial^1(F_1)$ and F_g for $g \geq 2$.

The second constraint is an explicit formula for $\partial^3(F_0)$. Namely, the Kodaira-Spencer theory defines a map $T_{(X)}M \longrightarrow H^1(X, T_X)$. Its third tensor power gives a map of vector bundles $S^3(T_{(X)}M) \longrightarrow H^3(X, \wedge^3 T_X) = L^2_{|(X)}$. This tensor field is equal to $\partial^3(F_0)$ after obvious identifications. Because this construction is complex-analytic we have

0) $\overline{\partial}(\partial^3(F_0)) = 0$. In general one can write the formula for $\overline{\partial}(\partial^k(F_0))$, $k \geq 4$ with the r.h.s. equal to an expression quadratic in $\partial^l(F_0)$, $l<k$ and linear in $\overline{\partial^3(F_0)}$.

Holomorphic anomaly equations:

1) $\overline{\partial}(\partial^1(F_1)) = \omega_0 - \frac{\chi(X)}{24}\omega_{WP}$.

Here $\chi(X)$ is the Euler characteristic of X and ω_0 is certain canonical $(1,1)$-form on M. Namely, there are holomorphic vector bundles $H^{i,j}$ over M with fibers at (X) equal to $H^j(X, \wedge^i T_X^*))$. By Hodge theory these bundles are endowed with natural hermitean forms. We define closed $(1,1)$-form ω_0 on M by formula

$$\omega_0 = -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} j\, c_1(H^{j,3-j}, \text{hermitean form}) \ .$$

2) For $g \geq 2$ we have

$$\overline{\partial}(F_g) = 1/2 \times Contraction\left(\overline{\partial^3(F_0)} \otimes \left(\partial^2(F_{g-1}) + \sum_{r=1}^{g-1} \partial^1(F_r)\partial^1(F_{g-r})\right)\right)$$

The operator *Contraction* maps sections of $S^3\left(\left(T_M^{0,1}\right)^*\right)\otimes S^2\left(\left(T_M^{1,0}\right)^*\right)\otimes\overline{L}^2\otimes L^{4-2g}$ to sections of $(T_M^{0,1})^*\otimes L^{2-2g}$. It is essentially the contraction with natural hermitean forms on T_M^* and L.

One can deduce formulas for $\overline{\partial}(\partial^k(F_g))$ and get expressions quadratic in previous objects and linear in $\overline{\partial^3(F_0)}$. Terms in this formula correspond to the boundary divisors of the moduli space of stable complex curves of genus g with k punctures.

It is not possible to compute F_g inductively using these equations. In each step one has certain indeterminacy. Namely, one can add to F_g any global holomorphic section of L^{2-2g} satisfying certain growth conditions at infinity (see 4.3). Thus the number of unknown parameters is finite. Up to now it is unknown how to fix this indeterminacy and what is the Hodge-theoretic meaning of holomorphic anomaly equations.

The generating function $\mathcal{F}$ of all F_g is (locally) a function on the total space of bundle L^*. It satisfies a nice system of differential equations of type $\overline{\partial}(\exp(\mathcal{F}))=\partial^2(\exp(\mathcal{F}))$.

4.3. Predictions

Flat structure in an open domain $\mathcal{U}$ of the moduli space $\mathcal{M}_Y$ arising from the Mirror symmetry is the limit of canonical affine structures (from 4.1) when the base point $\overline{m}\in\mathcal{M}_Y$ tends to a point "$-\infty$" on some compactification of the moduli space, which is usually an intersection of normally crossing compactification divisors. Also the line bundle L is trivialized in $\mathcal{U}$. Thus all objects $\overline{\partial}(\partial^g(F_k))$ can be considered as real-analytic functions on a domain of $H^2(X;\mathbf{C})$ after applying the mirror map. We can consider them as analytic functions in two groups of variables $\left([\omega],\overline{[\omega]}\right)$, where again ω is a closed 2-form on X. The next step is to evaluate these functions at the limit $\overline{[\omega]}\longrightarrow-\infty$ using the analytic continuation. We get as a result holomorphic symmetric tensor fields on a domain of $H^2(X;\mathbf{C})$.

The predictions of Mirror symmetry are as follows:

genus=0: $\partial^3(F_0)_{|\overline{[\omega]})=-\infty}=\partial^3(F):=\partial^3\left(\frac{1}{3!}\int_X\omega^3+\sum_d n_{d,0}^{phys}\exp\left(\int_d\omega\right)\right)$.

This symmetric 3-tensor is called the *Yukawa coupling.*

genus=1: $\partial^1(F_1)_{|\overline{[\omega]})=-\infty}=\partial^1\left(\frac{1}{24}\int_X\omega\wedge c_1(T_X)+\sum_d n_{d,1}^{phys}\exp\left(\int_d\omega\right)\right)$

genus$\geq$ 2: $F_g([\omega])_{|\overline{[\omega]})=-\infty}=constant_g\chi(X)+\sum_d n_{d,g}^{phys}\exp\left(\int_d\omega\right)$. The constant term comes from the contribution of constant maps to X.

Rational numbers $n_{d,g}^{phys}$ are not equal to integers $n_{d,g}$. The difference comes again from multiple coverings. In genus 1 we have the following relations:

$$n_{d,1}^{phys} = \sum_{a,b:\, ab|d} \frac{1}{a} n_{d/ab,1} + \frac{1}{12} \sum_{a|d} \frac{1}{a} n_{d/a,0} \quad .$$

Again, a few predictions for elliptic curves were checked by algebraic geometers.

BIBLIOGRAPHY

[1] P. S. Aspinwall, B. R. Green and D. R. Morrison, *The monomial-divisor mirror map*, Int. Math. Res. Notices (1993), 319 - 337, alg-geom/9309007.

[2] P. S. Aspinwall, B. R. Green and D. R. Morrison, *Calabi-Yau moduli space, mirror manifolds and space-time topology change in string theory*, Nucl. Phys. **B416** (1994), 414 - 480, hep-th/9309097.

[3] P. S. Aspinwall and D. R. Morrison, *Topological field theory and rational curves*, Comm. Math. Phys. **151** (1993), 245 - 262.

[4] V. V. Batyrev, *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties*, Jour. Alg. Geom. **3** (1994), 493 - 535, alg-geom/9310003.

[5] V. V. Batyrev and L. A. Borisov, *Dual cones and mirror symmetry for generalized Calabi-Yau manifolds*, alg-geom/9402002.

[6] V. V. Batyrev and D. van Straten, *Generalized hypergeometric functions and rational curves on Calabi-Yau complete intersections in toris varieties*, alg-geom/ 9307010.

[7] A. Beauville, *Variétés kählériennes dont la première classe de Chern est nulle*, Jour. Diff. Geom. **18** (1983), 755 - 782.

[8] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, *Holomorphic anomalies in topological field theories*, with an appendix by S. Katz, Nucl. Phys. **B405** (1993), 298 - 304.

[9] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, *Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), 311 - 427.

[10] J. Bertin and D. Markushevich, *Singularités quotients non abéliennes de dimension 3 et variétés de Bogomolov*, Prépublication de l'Institut Fourier **216** (1992).

[11] F. A. Bogomolov, *Hamiltonian Kähler manifolds*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **245** (1978), 1101 - 1104.

[12] F. A. Bogomolov, *On the decomposition of Kähler manifolds with trivial canonical class*, Math. USSR Sbornik **22** (1974), 580 - 583.

[13] E. Calabi, *The space of Kähler metrics*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Amsterdam 1954), Vol. 2, pp. 206 - 207.

[14] P. Candelas, E. Derrick and L. Parkes, *Generalized Calabi-Yau manifolds and the mirror of a rigid manifold*, Nucl. Phys. B **407** (1993), 115 - 154.

[15] P. Candelas, C. A. Lütken and R. Schimmrigk, *Complete intersection Calabi-Yau manifolds. II. Three generation manifolds*, Nucl. Phys. **B306** (1988), 113 - 136.

[16] P. Candelas, X. C. de la Ossa, A. Font, S. Katz and D. G. Morrison, *Mirror symmetry for two-parameter models (I)*, Nucl. Phys. **B416** (1994), 481 - 562, hep-th/9308083.

[17] P. Candelas, X. C. de la Ossa, P. S. Green and L. Parkes, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nucl. Phys. **B359** (1991), 21 - 74, and also in [60], pp. 31 - 95.

[18] P. Candelas, A. Font, S. Katz and D. G. Morrison, *Mirror symmetry for two-parameter models - II*, Nucl. Phys. **B429** (1994), 624 - 674, hep-th/9403187.

[19] H. Clemens, *Double solids*, Adv. Math. **47** (1983), 107 - 230.

[20] L. J. Dixon, *Some world-sheet properties of superstring compactifications, on orbifolds and otherwise*, Superstrings, Unified Theories and Cosmology 1987 (G. Furlan et al. eds.), World Scientific, Singapore, 1988, pp. 67 - 126.

[21] G. Ellingsrud and S. A. Strømme, *The number of twisted cubic curves on the general quintic threefold*, Math. Scan., to appear.

[22] R. Friedman, *On threefolds with trivial canonical bundle*, Complex Geometry and Lie Theory (Proc. Symp. Pure Math., vol. 53), American Mathematical Society, Providence, 1991, pp. 103 - 134.

[23] K.Gawedzky, *Conformal field theory*, Séminaire Bourbaki 1988/89, n° 704, in Astérisque 177-178, pp. 95 - 126.

[24] B. R. Green, D. R. Morrison and M. R. Plesser, *Mirror symmetry in higher dimension*, hep-th/9402119.

[25] B. R. Green and M. R. Plesser, *Duality in Calabi-Yau moduli space*, Nucl. Phys. **B338** (1990), 15 - 37.

[26] P. S. Green and T. Hübsch, *Connecting moduli spaces of Calabi-Yau threefolds*, Comm. Math. Phys. **119** (1988), 431 - 441.

[27] P. Green, T. Hübsch and C. A. Lütken, *All the Hodge numbers for all Calabi-Yau complete intersections*, Class. Quantum Grav. **6** (1989), 105 - 124.

[28] M. Gromov, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307 - 247.

[29] F. Hirzebruch, *Some examples of threefolds with trivial canonical bundle*, Gesammelte Abhandlungen, Bd. II, Springer-Verlag, 1987, pp. 757 - 770.

[30] S. Hosono, A. Klemm, S. Theisen and S.-T. Yau, *Mirror symmetry, mirror map and applications to Calabi-Yau hypersurfaces*, Comm. Math. Phys. **167** (1995), 301 - 350, hep-th/9308122.

[31] S. Hosono, A. Klemm, S. Theisen and S.-T. Yau, *Mirror symmetry, mirror map and applications to complete intersections Calabi-Yau spaces*, Nucl. Phys. **B433** (1995), 501 - 544, hep-th/9406055.

[32] M. Jinzenji and M. Nagura, *Mirror Symmetry and An Exact Calculation of $N-2$ Point Correlation Function on Calabi-Yau Manifold embedded in $\mathbf{C}P^{N-1}$*, hep-th/9409029.

[33] S. Katz, *Rational curves on Calabi-Yau manifolds: verifying predictions of mirror symmetry*, Projective Geometry with Applications (E. Ballico, ed.), Marcel Dekker, 1994, pp. 231 - 239, alg-geom/9301006.

[34] M. Kontsevich, *Enumeration of rational curves via toric actions*, MPI preprint 94-39, 1994, hep-th/9405035.

[35] W. Lerche, C. Vafa and N. Warner, *Chiral rings in $N = 2$ superconformal theories*, Nucl. Phys. **B324** (1984), 427 - 474.

[36] B. Lian and S.-T. Yau, *Mirror Maps, Modular Relations and Hypergeometric Series I*, hep-th/9507151.

[37] A. Libgober and J. Teitelbaum, *Lines on Calabi-Yau complete intersections, mirror symmetry and Picard-Fuchs* equations, Intern. Math. Res. Not. **1** (1993), 29 - 39.

[38] Yu. Manin, *Generating functions in algebraic geometry and sums over trees*, MPI preprint, 1994, alg-geom/9407005.

[39] D. Markushevich, *Resolution of $\mathbf{C}^3/H_{168}$*, preprint.

[40] D. G. Markushevich, M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov, *Description of a class of superstring compactifications related to semi-simple Lie algebras*, Comm. Math. Phys. **111** (1987), 247 - 274.

[41] D. McDuff and D. Salamon, *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, University Lecture Series, vol. 6, American Mathematical Society, Providence, 1994.

[42] D. Morrison, *Mirror symmetry and rational curves on quintic threefolds: A guide for mathematicians*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 223 - 247.

[43] D. Morrison, *Picard-Fuchs equations and mirror maps for hypersurfaces*, in [60], pp. 241 - 264.

[44] D. Morrison, *Making enumerative predictions by means of mirror symmetry*, alg-geom/9504013.

[45] Z. Ran, *Deformations of manifolds with torsion or negative canonical bundle*, J. Alg. Geom. **1** (1992), 279 - 291.

[46] M. Reid, *The moduli space of 3-folds with $K = 0$ may nevertheless be irreducible*, Math. Ann. **278** (1987), 329 - 334.

[47] S. S. Roan, *On the generalization of Kummer surfaces*, Jour. Diff. Geom. **30** (1983), 523 - 537.

[48] S. S. Roan, *On $c_1 = 0$ resolution of quotient singularity*, preprint.

[49] S. S. Roan and S.-T. Yau, *On Ricci flat 3-fold*, Acta Math. Sinica (N. S.) **3** (1987), 256 - 288.

[50] Y. Ruan, *Topological sigma model and Donaldson type invariants in Gromov theory*, preprint, 1993.

[51] Y. Ruan and G. Tian, *A mathematical theory of quantum cohomology*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 269 - 278.

[52] G. Segal, *The definitions of conformal field theory*, in *Links Between Geometry and Mathematical Physics*, MPI preprint 87-58, 1987, pp. 13 - 17.

[53] G. Tian, *Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Peterson-Weil metric*, in "Mathematical Aspects of String Theory" (S.-T. Yau, ed.), World Scientific, Singapore, 1987, pp. 629 - 646.

[54] G. Tian, *Smoothing 3-folds with trivial canonical bundle and ordinary double points*, in [60], pp. 458 - 479.

[55] A. Todorov, *The Weil-Petersson geometry of the moduli space of $SU(n \geq 3)$ (Calabi-Yau) manifolds, I*, Comm. Math. Phys. **126** (1989), 325 - 346.

[56] C. Voisin, *Miroirs et involutions sur les surfaces $K3$*, Journées de Géométrie Algébrique d'Orsay (Juillet 1992), Astérisque, vol. 218, Société Mathématique de France, 1993, pp. 273 - 323.

[57] C. T. C. Wall, *Classification problems in topology V: On certain 6-manifolds*, Invent. Math. **1** (1966), 355 - 374.

[58] E. Witten, *Mirror manifolds and topological field theory*, in [60], 120 - 159.

[59] S.-T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampere equation. I*, Comm. Pure and Appl. Math. **31** (1978), 339 - 411.

[60] S.-T. Yau (ed.), *Essays on Mirror Manifolds*, International Press Co., Hong Kong (1992).

[tangent61] S.-T. Yau, *Compact three-dimensional Kähler manifolds with zero Ricci curvature*, Symposium on Anomalies, Geometry, Topology (Chicago, Ill., 1985), 395 - 406.

Maxim KONTSEVICH

Department of Mathematics
University of California at Berkeley
BERKELEY, CA 94720, USA

HANSPETER KRAFT

Challenging problems on affine n-space

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 802, p. 295-317

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__295_0>

Séminaire BOURBAKI
47ème année, 1994-95, n° 802

Juin 1995

CHALLENGING PROBLEMS ON AFFINE n-SPACE

by **Hanspeter KRAFT**

1. INTRODUCTION

There is no doubt that complex affine n-space $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ is one of the basic objects in algebraic geometry. It is therefore surprising how little is known about its geometry and its symmetries. Although there has been some remarkable progress in the last few years, many basic problems remain open. The new interest in the subject came mainly from questions related to algebraic transformation groups and invariant theory. In fact, a number of exciting new examples (and counterexamples) were discovered in studying general group actions on affine spaces. They gave us important new insight. However, our knowledge of these spaces is still very incomplete.

Following is a list of eight basic problems in this context. Some of them—like the *Cancellation Problem* and the *Embedding Problem*—are rather well-known and have been studied by several authors. Others—such as the *Linearization Problem* and the *Complement Problem*—might appear new in this setting although they have been around since a long time. The *Jacobian Problem* is certainly the most famous one. Although it is strongly related to some of the others, we will not have the time to discuss it here in detail.

- **Characterization Problem.** Find an algebraic-geometric characterization of $\mathbb{A}^n$.
- **Cancellation Problem.** Does an isomorphism $Y \times \mathbb{A}^k \simeq \mathbb{A}^{n+k}$ imply that Y is isomorphic to $\mathbb{A}^n$?
- **Embedding Problem.** Is every closed embedding $\mathbb{A}^k \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ equivalent to the standard embedding?
- **Automorphism Problem.** Give an algebraic description of the group of (polynomial) automorphisms of $\mathbb{A}^n$.
- **Linearization Problem.** Is every automorphism of $\mathbb{A}^n$ of finite order linearizable?

- **Complement Problem.** Given two irreducible hypersurfaces $E, F \subset \mathbb{A}^n$ and an isomorphism of their complements, does it follow that E and F are isomorphic?
- **Fixed Point Problem.** Does every reductive group action on $\mathbb{A}^n$ have fixed points?
- **Jacobian Problem.** Is every polynomial morphism $\varphi: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ of maximal rank an isomorphism?

There are some obvious relations between these problems. For instance, a positive solution of the *Linearization Problem* would imply a positive solution of the *Cancellation Problem*. In fact, if $Y \times \mathbb{A}^k$ is isomorphic to an affine space $\mathbb{A}^n$ consider the automorphism of $\mathbb{A}^n \simeq Y \times \mathbb{A}^k$ given by $(y, z) \mapsto (y, -z)$. Then $Y \times \{0\}$ is the fixed point set, hence is isomorphic to $\mathbb{A}^{n-k}$ in case the automorphism is linearizable. Some more hidden connections will appear during our discussion in the next paragraphs.

All problems above can be formulated in more algebraic terms as questions about the polynomial ring $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ considered as the algebra of regular functions on $\mathbb{A}^n$. For instance, the *Embedding Problem* for the line into the plane has the following equivalent formulation (see §4):

If $a(t), b(t) \in \mathbb{C}[t]$ are two polynomials generating the polynomial ring $\mathbb{C}[t]$ where $\deg a \leq \deg b$, then the degree of b is a multiple of the degree of a.

The complex affine line $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ is, of course, well understood. It has many nice properties which characterize it among all curves. For instance

- *$\mathbb{A}^1$ is the only affine normal rational curve without non-constant invertible functions;*
- *$\mathbb{A}^1$ is the only affine factorial curve without non-constant invertible functions;*
- *$\mathbb{A}^1$ is the only acyclic (or contractible) normal curve.*

Also we know that

- *Every non-constant morphism $\varphi: \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ is a finite (ramified) covering;*
- *The automorphism group of $\mathbb{A}^1$ is the (algebraic) group of affine transformations.*

It is easy to see that with these well-known facts about $\mathbb{A}^1$ the problems formulated above have nice and satisfactory solutions. On the other hand, these properties do not hold in higher dimension and the situation becomes much more complicated. For the affine plane $\mathbb{A}^2$ there are some fundamental theorems which give a rather clear picture and an almost complete understanding of its algebraic and geometric properties. However, for larger dimension we have only very few general results. But there are several exciting new examples which shed some light into the mystery.

In the next paragraphs we give a short account on the present situation of the different problems. Some of them are already discussed in our report [Kr89a] from 1989. Since then there was some interesting development, mainly in connection with the *general Linearization Problem*. Nevertheless, the problems formulated above are still far from being solved. We are convinced that they will finally have a negative solution, at least for large dimension. Recent work on unipotent group actions even suggests possible ways to construct counterexamples.

Acknowlegment. I thank SHULIM KALIMAN, PETER RUSSELL and MIKHAIL ZAIDENBERG for their help in preparing this report.

2. CONTRACTIBLE VARIETIES AND CHARACTERIZATION OF $\mathbb{A}^n$

Based on fundamental work by FUJITA, MIYANISHI and SUGIE there is an important and simple *algebraic* characterization of the affine plane ([MiS80], cf. [Su89]).

Theorem 1. *Let Y be a smooth affine surface. Assume that Y is factorial and that there is a dominant morphism $\mathbb{A}^N \to Y$ for some N. Then Y is isomorphic to $\mathbb{A}^2$.*[(1)]

The second condition can be replaced by the two assumptions that Y has no non-constant invertible functions and that the *logarithmic Kodaira-dimension* $\bar{\kappa}(Y)$ of Y is $-\infty$. (We refer to the literature for the definition of the logarithmic Kodaira dimension; see [Ii82] Chap. 11.) The essential step in the proof is to show that Y contains a "cylinderlike" open set $U \simeq C \times \mathbb{A}^1$, C a curve (see [Su89]).

The theorem has a number of important consequences. In particular, it solves the *Cancellation Problem* in dimension 2 (see §3), even in the following slightly stronger form:

If Y is of dimension 2 and $Y \times Z \simeq \mathbb{A}^n$ for some n then $Y \simeq \mathbb{A}^2$.

But there are some other interesting applications as well. For example, a two-dimensional quotient of an action of a semisimple group G on $\mathbb{A}^n$ is isomorphic to $\mathbb{A}^2$, and the same holds for an action of a unipotent group.

We will see in Example 1 below that a similar theorem does not hold in dimension > 2. On the other hand, MIYANISHI has given an interesting characterization of $\mathbb{A}^3$ [Mi87], but it is not strong enough to solve the *Cancellation Problem*. We refer to the report [Su89] of SUGIE for a discussion of these results and for further references.

(1) This result holds for any algebraically closed field k if we assume that the dominant morphism is separable [Ru81].

In an important paper RAMANUJAM [Ra71] has given a beautiful *topological* characterization of $\mathbb{A}^2$ (as an algebraic surface).

Theorem 2. *An affine smooth contractible surface which is simply connected at infinity is isomorphic to $\mathbb{A}^2$. In particular, every normal affine surface which is homeomorphic to $\mathbb{A}^2$ is isomorphic to $\mathbb{A}^2$.*

This result, too, does not hold in dimension > 2. RAMANUJAM has constructed a contractible smooth affine surface R which is not isomorphic to $\mathbb{A}^2$. It follows now from h-cobordism theory that the threefold $Y := R \times \mathbb{A}^1$ is homeomorphic to $\mathbb{A}^3$ (cf. Proposition 1 below). But Y is not isomorphic to $\mathbb{A}^3$, because of Theorem 1 above. Thus there exists an *exotic algebraic structur* on $\mathbb{C}^3$.

Contractible smooth surfaces have been studied extensively by GURJAR and MIYANISHI, by TOM DIECK and PETRIE and by ZAIDENBERG (see [GuM87], [tDP89], [tDP90]). Using the examples in [GuM87] the second authors were able to describe all those of logarithmic Kodaira dimension $\bar{\kappa} = 1$. They showed that many of them appear as hypersurfaces in affine 3-space(2). Moreover, they produced infinitely many examples with logarithmic Kodaira dimension $\bar{\kappa} = 2$. ZAIDENBERG pointed out that this leads to new exotic structures (cf. Proposition 2 of §3) and produced an infinite series of non-isomorphic exotic $\mathbb{C}^n$'s [Za91].

ZAIDENBERG also discovered the first *exotic analytic structures* on $\mathbb{C}^3$ [Za93]. He proves an analytic cancellation theorem which implies that for the RAMANUJAM surfaces R mentioned above the threefold $R \times \mathbb{C}$ is not biholomorphic to $\mathbb{A}^3$ (cf. [Ka94]). We refer to his recent report [Za95] for a thorough discussion of these results.

In this context, we should mention the following general result which seems to be known to the specialists. It is explicitely formulated in [Di90].

Proposition 1. *A smooth contractible affine variety X of dimension $d \geq 3$ is diffeomorphic to $\mathbb{C}^d$.*

The proof given by DIMCA is based on the famous h-cobordism theorem of SMALE and uses a result of HAMM showing that the link at infinity of X is simply connected (cf. [Di92] Chap. 5, 4.25 (ii) and Chap. 1, 6.12).

An important input to the study of contractible varieties came from the *Linearization Problem* for $\mathbb{C}^*$-actions on $\mathbb{A}^3$ (see §6). It had a major influence on the further development. It turned out that a certain class of contractible threefolds have

(2) Recently, KALIMAN and MAKAR-LIMANOV proved that all smooth contractible surfaces of logarithmic Kodaira dimension 1 can be realized as hypersurfaces in $\mathbb{A}^3$ [KaM95a].

to be understood in detail: They all appear in an explicit way as hypersurfaces in four-dimensional representation spaces of $\mathbb{C}^*$ and were the candidates for possible counterexamples. The first examples of contractible smooth hypersurfaces in $\mathbb{A}^n$ were discovered by LIBGOBER in a different context [Li77]. His list was generalized by DIMCA [Di90], by KALIMAN [Ka93] and finally completed by RUSSELL [Ru92]. Following is the simplest example from RUSSELL's list:

Example 1. Let Y be the hypersurface in $\mathbb{A}^4$ defined by the equation

$$x + x^2y + z^3 + t^2 = 0.$$

Then we have:

(a) *Y is smooth and diffeomorphic to $\mathbb{C}^3$.*

(b) *The closed subset $Z := \{x = 0\}$ is isomorphic to $C \times \mathbb{A}^1$ where C is the cusp given by $z^3 + t^2 = 0$, and the complement $Y_x := Y \setminus \{x = 0\}$ is isomorphic to $\mathbb{C}^* \times \mathbb{A}^2$.*

(c) *Y admits a $\mathbb{C}^*$-action given by $s \cdot (x, y, t, z) = (s^6x, s^{-6}y, s^2z, s^3t)$ with quotient morphism $\pi: Y \to \mathbb{A}^2$, $(x, y, t, z) \mapsto (xy, yz^3)$.*

(d) *Y is factorial and there is a dominant morphism $\mathbb{A}^3 \to Y$.*

The last assertion indicates that Y might be isomorphic to $\mathbb{A}^3$ and thus provides us with a counterexamples to the *Linearization Conjecture for $\mathbb{C}^*$-actions on $\mathbb{A}^3$* (see §6), to the *Complement Problem* and to the ABHYANKAR-SATAYE *Conjecture* about embeddings of $\mathbb{A}^2$ into $\mathbb{A}^3$ (see §4). In fact, the zero set of the function y on Y is isomorphic to $\mathbb{A}^2$ whereas the subvariety given by $y = 1$ has Euler characteristic 3. However, MAKAR-LIMANOV recently showed in a remarkable paper [Ma94] that

(e) *Y is not isomorphic to $\mathbb{A}^3$.*

Thus, the example implies that the characterization of $\mathbb{A}^2$ given in Theorem 1 does not extend to higher dimension even if we assume, in addition, that the variety is contractible.

The basic idea of MAKAR-LIMANOV was to study *locally nilpotent vector fields* on the variety Y (i.e., locally nilpotent derivations of the coordinate ring $\mathcal{O}(Y)$ of Y) and to show that they have a common kernel different from the constants $\mathbb{C}$. This is obviously impossible for $\mathbb{A}^n$. (Recall that locally nilpotent vector fields on Y are in bijective correspondence with actions of the additive group $\mathbb{C}^+$.) Generalizing this idea KALIMAN and MAKAR-LIMANOV introduced a new invariant for affine varieties, namely the subalgebra

$$\mathrm{ML}(Y) := \bigcap_\delta \ker \delta \subset \mathcal{O}(Y)$$

where δ runs through all locally nilpotent derivations of $\mathcal{O}(Y)$ [KaM95b]. It turned out that this invariant can be calculated in many cases. For instance, we have $\mathrm{ML}(Y) = \mathbb{C}[x]$ in Example 1 above. In fact, they show that in all examples of RUSSELL's list the invariant $\mathrm{ML}(Y)$ is strictly larger than $\mathbb{C}$. Thus none of these threefolds is isomorphic to $\mathbb{A}^3$.

In a second paper [KaM95a] KALIMAN and MAKAR-LIMANOV give another criterion to decide whether a hypersurface $H \subset \mathbb{A}^n$ is isomorphic to $\mathbb{A}^{n-1}$. It is based on the remark that the existence of a dominant morphism $\mathbb{A}^{n-1} \to H \subset \mathbb{A}^n$ implies certain restrictions on the degrees of the monomials occuring in the equation of H. The application of this criterion is rather easy. It follows again that most of the examples from RUSSELL's list are not isomorphic to $\mathbb{A}^3$.

Remark 1. It is an open problem if all vector bundles on these contractible threefolds are trivial. For the examples from RUSSELL's list there is a $\mathbb{C}^*$-action with an isolated fixed point which implies that the "zero fiber" contains an embedded line $L \simeq \mathbb{A}^1$ (see §4; in Example 1 above the line is given by $x = z = t = 0$). If every rank 2 vector bundle is trivial then, by a famous result of SERRE [Se61], the line L has to be complete intersection, i.e., defined by 2 equations. So far we have not been able to verify this.

3. CANCELLATION OF VARIETIES

The general *Cancellation Problem* was already discussed in the early 70's. It is sometimes refered to as *Zariski's Problem* although ZARISKI's question was different (see [Na67]). The problem at that time was to decide for which rings A, B an isomorphism $A[x] \simeq B[x]$ implies that A and B are isomorphic ("uniqueness of coefficient rings", see [EaH73]). It was shown by HOCHSTER [Ho72] that this fails in general. In his counterexample, he takes the coordinate ring A of the tangent bundle over the 2-sphere which is a finitely generated $\mathbb{R}$-algebra and uses the geometric fact that the tangent bundle is stably trivial, but not trivial.

A geometric formulation of the *Cancellation Problem* in dimension 2 can be found in RAMANUJAM's paper [Ra71], but his topological characterization of $\mathbb{A}^2$ (§2 Theorem 2) does not solve the problem. Only the algebraic characterization of $\mathbb{A}^2$ given later by FUJITA, MIYANISHI and SUGIE was sufficient as already mentioned in the previous paragraph (see §2 Theorem 1).

Theorem 3. ([Fu79]) *If $Y \times \mathbb{A}^k \simeq \mathbb{A}^{2+k}$ then Y is isomorphic to $\mathbb{A}^2$.*(3)

(3) This result holds for any perfect base field k (cf. [Kam80]).

Earlier, under additional assumptions FUJITA and IITAKA [IiF77] have proved the following more general result.(4) (Since RAMANUJAM's surface R has logarithmic Kodaira dimension 2 it already follows from this proposition that $R \times \mathbb{A}^1$ is not isomorphic to $\mathbb{A}^3$.)

Proposition 2. *Let X, Y be two varieties and assume that the $\bar{\kappa}(Y) \geq 0$. Then any isomorphism $\varphi: X \times \mathbb{A}^k \xrightarrow{\sim} Y \times \mathbb{A}^k$ induces an isomorphism of X and Y.*

However, the following example which is due to DANIELEWSKI [Da89] shows that the additional assumption here is essential.

Example 2. Consider the smooth surfaces $Y_n \subset \mathbb{C}^3$ defined by the equations

$$x^n y + z^2 = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) *The varieties $Y_n \times \mathbb{A}^1$ are all isomorphic.*
(b) (FIESELER) *The topological spaces Y_n are not homeomorphic. In fact, $\pi_1^\infty(Y_n) \simeq \mathbb{Z}/2n$.* ($\pi_1^\infty$ denotes the fundamental group at infinity.)

In the construction of DANIELEWSKI the varieties Y_n appear as total spaces of principal $\mathbb{C}^+$-bundles over the prevariety $\tilde{\mathbb{A}}$—the affine line with a point doubled, obtained by identifying two copies of $\mathbb{A}^1$ along $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. The interesting point is that these total spaces are all *affine* varieties. This immediately implies assertion (a) by forming the fiber product of two such bundles over the base $\tilde{\mathbb{A}}$ and using the fact that every principal $\mathbb{C}^+$-bundle over an affine variety is trivial (Hilbert's Theorem 90).

There is a nice geometric description of these examples given by TOM DIECK and KRAFT. Consider the subgroups $\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^+ \subset \mathrm{SL}_2$ embedded in the usual way as diagonal and upper triangular unipotent matrices, respectively. Then the quotient $Y := \mathrm{SL}_2 / \mathbb{C}^*$ by right multiplication with $\mathbb{C}^*$ is an affine quadric ($\simeq Y_2$) on which $\mathbb{C}^+$ acts from the left. This action is locally free and determines a $\mathbb{C}^+$-bundle over $\tilde{\mathbb{A}}$. (This can be seen by first forming the quotient $\mathbb{C}^+ \backslash \mathrm{SL}_2 \simeq \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ by left multiplication with $\mathbb{C}^+$ and then studying the action of $\mathbb{C}^*$.) Moreover, considering the fiber bundle $Y \to \mathrm{SL}_2 / B \simeq \mathbb{P}^1$ where B is the subgroup of all upper triangular matrices it follows easily that Y is diffeomorphic to the line bundle $\mathcal{O}(-2)$ on $\mathbb{P}^1$ and so its fundamental group at infinity is $\mathbb{Z}/2$. (With a slight modification we also obtain the other examples Y_n of DANIELEWSKI.)

In the paper [Fi94] FIESELER studies (and classifies) $\mathbb{C}^+$-actions on normal affine surfaces. If the action is free (and the surface therefore smooth) then the geometric

(4) An interesting cancellation result for complete varieties can be found in [Fu81].

quotient exists as a smooth affine curve $\tilde{C}$ with several multiple points. If, in addition, all fibers are reduced then it is a principal $\mathbb{C}^+$-bundle over $\tilde{C}$. Conversely, a principal $\mathbb{C}^+$-bundle on such a non-separated curve is an affine surface if and only if the total space is separated. As before, all these surfaces become isomorphic when crossed with $\mathbb{A}^1$. In this way FIESELER obtains many new examples of the same kind as in DANIELEWSKI's example above.

Remark 2. There is an interesting example of a $\mathbb{C}^+$-action on $\mathbb{A}^5$ given by WINKELMANN [Wi90] which is a principal bundle over a non-affine variety. Following an idea of POPOV we have constructed, starting from this example, an infinite series of affine varieties Z_n of dimension 5, all total spaces of non-equivalent principal $\mathbb{C}^+$-bundles with the property that $Z_n \times \mathbb{A}^1 \simeq \mathbb{A}^6$ for all n. So far we have not been able to show that the Z_n are not isomorphic to $\mathbb{A}^5$!
Another interesting feature of WINKELMANN's example is that the quotient $\mathbb{A}^5/\mathbb{C}^+$ is a *non-affine* variety which is diffeomorphic to $\mathbb{A}^4$. It follows from this that all varieties Z_n are diffeomorphic to $\mathbb{A}^5$.

4. EMBEDDINGS OF VARIETIES AND COMPLEMENTS

The starting point of this problem was the following famous result by ABHYANKAR-MOH and SUZUKI [AbM75], [Suz74]. It first appeared with a faulty proof in a paper of SEGRE [Seg57] and was later corrected by CANALS and LLUIS [CaL70] who made a similar mistake in their arguments!

Theorem 4. *All embeddings of the line $\mathbb{A}^1$ into the plane $\mathbb{A}^2$ are equivalent.*(5)

(Here *embedding* of a variety Y means an isomorphism of Y with a closed subvariety of $\mathbb{A}^n$, and two embeddings $\alpha, \beta: Y \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ are called *equivalent* if there is a (polynomial) automorphism φ of $\mathbb{A}^n$ such that $\varphi \circ \alpha = \beta$.)

The original proofs given by ABHYANKAR-MOH and SUZUKI are rather different. The first uses approximate roots and Tschirnhausen transformation whereas the second is based on subharmonic partitions. There are several new proofs of this result, using quite different methods, e.g. by RUDOLPH [Rud82] using knot theory, by MIYANISHI and SUZUKI using resolution of singularities, by GURJAR-MIYANISHI [GuM95] using the classification of acyclic surfaces and by A'CAMPO-OKA [AO95] using Tschirnhausen resolution towers. Before we proceed to possible generalizations of this result we give two equivalent formulations of the theorem.

(5) The result does not hold in positive characteristic $p > 0$ as one can see from the following example of an embedded line: $L : y^{p^2} - x - x^{2p} = 0$ [Sa76].

(i) *If* $f: \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$ *is a polynomial map such that the fiber* $f^{-1}(0)$ *is isomorphic to* $\mathbb{A}^1$*, then* f *is a trivial fibration.*

(ii) *If* $a(t), b(t) \in \mathbb{C}[t]$ *are two polynomials generating* $\mathbb{C}[t]$*, then the degree of one is a multiple of the degree of the other.*

The equivalence of Theorem 4 with (i) is easy. A priori, formulation (ii) is slightly stronger because it implies the equivalence of any two embeddings under a *tame* automorphism, i.e., an automorphism from the subgroup generated by the affine transformations and the Jonquière transformations $(x, y) \mapsto (x, y + ax^n)$ $(a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N})$. But it is known since JUNG [Ju42] that in dimension 2 every automorphism is tame (see §5).

A first generalization would be to replace the line $\mathbb{A}^1$ by any other curve. This does not work in general: It is easy to see that the two embeddings $t \mapsto (t, t^{-1})$ and $t \mapsto (t^2, t^{-1})$ of $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ are not equivalent. However, it is known that the theorem generalizes to smooth curves of genus 1 or 2 with only one place at infinity, but again this fails for higher genus. An example is given by the isomorphic smooth curves $C: y^4 + x^3 + 1 = 0$ and $D: y^7 + x^2 + 1 = 0$ of genus 3 with one place at infinity which are not equivalently embedded (cf. [AO95]). We should remark here that NEUMANN used the link at infinity as a tool to classify affine plane curves [Ne89b] (cf. [Ne89a]).

It is an easy exercise to show, using Theorem 4, that all embeddings of the cross $xy = 0$ into $\mathbb{A}^2$ are equivalent. JELONEK has remarked that a negative solution of the *Embedding Problem* for the n-cross $x_1 x_2 \cdots x_n = 0$ would imply that the *Jacobian Conjecture* for $\mathbb{A}^n$ is false [Je92].

Another interesting generalization is due to LIN and ZAIDENBERG [ZaL83] (see also [GuM95]). It concerns all curves homeomorphic to $\mathbb{A}^1$ (i.e., irreducible and of Euler characteristic 1).

Theorem 5. *Let* $\varphi: \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ *be an injective morphism. Then* φ *is equivalent to one of the maps* $t \mapsto (t^p, t^q)$ *where* p *and* q *are relatively prime. In particular, an irreducible affine plane curve of Euler characteristic 1 has at most one cusp and is given by an equation of the form* $x^q + y^p = 0$*, up to equivalence.*[6]

It is well-known that every smooth affine variety of dimension d can be embedded into $\mathbb{A}^{2d+1}$ and that the bound $2d + 1$ is optimal (see [Sr91]. The question whether these embeddings are all equivalent was settled by a very general embedding theorem

(6) Actually, their result is more general and also includes all *reducible* curves of Euler characteristic 1.

due to KALIMAN [Ka91] and NORI (unpublished, cf. [Sr91]). A weaker statement was proved independently by JELONEK [Je87].

Theorem 6. *Let Z be a smooth affine variety of dimension d. If $n \geq 2d+2$ then all embeddings of Z into $\mathbb{A}^n$ are equivalent.*(7)

As an example we see that all embeddings of the line $\mathbb{A}^1$ into $\mathbb{A}^n$ are equivalent for $n > 3$. Thus the only open case are the embeddings of the line into affine 3-space $\mathbb{A}^3$.

An important case of the *Embedding Problem* is given by the hypersurface embedding $\mathbb{A}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ (ABHYANKAR-SATHAYE Conjecture(8)). This problem occurs in the study of $\mathbb{C}^*$-actions on affine n-space in the following way (cf. §6). Let us assume that there is an isolated fixed point x_0 and consider the corresponding "zero fiber" $F_0 := \{x \in \mathbb{A}^n \mid \overline{\mathbb{C}^* x} \ni x_0\}$. (Here $\overline{\mathbb{C}^* x}$ denotes the closure of the $\mathbb{C}^*$-orbit of x.) It follows from BIAŁYNICKI-BIRULA's theorem [Bi76] (or from the slice theorem of LUNA [Lu73]) that F_0 contains a unique irreducible component H of codimension 1 which is isomorphic to $\mathbb{A}^{n-1}$ and defined by a semi-invariant polynomial f, i.e., $f(t \cdot x) = t^m f(x)$ for some $m \in \mathbb{Z}$ ($t \in \mathbb{C}^*$). If the action is *linearizable* then f is necessarily equivalent to a coordinate function, i.e., the embedding is equivalent to the standard embedding. A typical situation is described in Example 1 from §2: The threefold Y carries a $\mathbb{C}^*$-action whose zero fiber contains the 2-dimensional component $H \simeq \mathbb{A}^2$ given by the semi-invariant y of weight -6. But the action cannot be linearized because the hypersurface given by $y = 1$ has Euler characteristic 3.

Remark 3. In this context we should mention two related problems, the *Extension Problem* and the *Identity Problem.* The first one asks if every automorphism of a closed subvariety $Z \subset \mathbb{A}^n$ extends to an automorphism of $\mathbb{A}^n$. The second asks for subvarieties Z with the following property: Every automorphism of $\mathbb{A}^n$ fixing pointwise Z is the identity. These questions have been studied by JELONEK [Je91,93,94].

The *Complement Problem* is in some way the complementary problem to the embedding problem for hypersurfaces. Here we assume that we know something about the complement $\mathbb{A}^n \setminus H$ of a hypersurface and want to retrieve information about H itself. Clearly, there are some strong relations between the problems. For example,

(7) The theorem is true for any infinite base field k, and there is also a formulation for singular varieties; see [Ka91], [Sr91].

(8) SATHAYE did ask a weaker question [Sa76]: Given a polynomial map $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{C}$ such that $f^{-1}(0)$ is isomorphic to $\mathbb{A}^{n-1}$, does it follow that all fibers are isomorphic to $\mathbb{A}^{n-1}$? (SATHAYE Conjecture)

it is easy to see that a positive solution of the SATHAYE Conjecture would imply a positive answer to the *Complement Problem* if one of the hypersurfaces is isomorphic to $\mathbb{A}^{n-1}$.

In dimension 2 we can prove the following result:

Proposition 3. (KRAFT, VUST) *Let $C_1, C_2 \subset \mathbb{A}^2$ be two irreducible curves and assume that there is an isomorphism $\varphi: \mathbb{A}^2 \setminus C_1 \to \mathbb{A}^2 \setminus C_1$.*

(a) *If the genus of C_1 is ≥ 1, then φ extends to $\mathbb{A}^2$ inducing an isomorphism $C_1 \xrightarrow{\sim} C_2$.*

(b) *If the Euler characteristic of C_1 is one, then $C_1 \simeq C_2$.*

The assumption of irreducibility is essential as shown by the following example given by VUST: Consider the morphism $\psi: \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, $(x, y) \mapsto (xy, y)$ and let $L := \{y = 0\}$ be the x-axis and $C := \{y^2 = x^3\}$ the cusp. Then $\psi^{-1}(L \cup C) = L \cup C'$ where C' is the smooth curve given by $x^3 y = 1$ which is disjoint from L, and ψ induces an isomorphism $\mathbb{A}^2 \setminus (L \cup C) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^2 \setminus (L \cup C')$.

Another example was suggested by DERKSEN. Start with the configuration of four projective lines in $\mathbb{P}^2$ given by $xyz(x - y) = 0$. Removing the line $z = 0$ or the line $y = 0$ we obtain two different configurations of three lines in $\mathbb{A}^2$, corresponding to $xy(x - y) = 0$ and $xy(x - 1) = 0$, whose complements are isomorphic.

This problem arose in connection with the study of *free actions* of the additive group $\mathbb{C}^+$ on $\mathbb{A}^n$. There is the following conjecture:

Conjecture. *Every free action of the additive $\mathbb{C}^+$ on $\mathbb{A}^3$ is equivalent to a translation action $(s, (x, y, z)) \mapsto (x + s, y, z)$.*

We can prove this under the additional assumption that the action is separated. The conjecture is true in dimension 2 (see §5 Corollary 2), but in higher dimension there are free actions which are not translations as shown by WINKELMANN's example ([Wi90]; see §3 Remark 2).

5. AUTOMORPHISMS OF AFFINE n-SPACE

The structure of the automorphism group of $\mathbb{A}^n$—the *affine Cremona group*—still remains a mystery. Only in dimension 2 is there a satisfactory description (besides the trivial case $n = 1$). For the following discussion let us introduce some notation. First recall that a polynomial map $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n): \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, $\varphi_i \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, is an isomorphism (i.e., has a polynomial inverse) if and only if it is bijective. This is equivalent to the condition that the polynomials φ_i generate the polynomial ring $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

We denote by $\mathcal{G}_n$ the group all polynomial automorphism of $\mathbb{A}^n$ and define the two subgroups $\mathcal{A}_n$ of *affine transformation* and $\mathcal{J}_n$ of *triangular transformation* (also called the *Jonquière subgroup*) in the following way:

$$\mathcal{A}_n := \{\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{G}_n \mid \varphi_i \text{ of degree 1 for all } i\},$$

$$\mathcal{J}_n := \{\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{G}_n \mid \varphi_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_i] \text{ for all } i\}.$$

Clearly, $\mathcal{A}_n$ is the semidirect product of GL_n with the subgroup $\mathcal{T}_n$ of translations. Also, $\mathcal{A}_n$ is an algebraic group whereas $\mathcal{J}_n$ is infinite dimensional (for $n > 1$).

In dimension 2 the structure of $\mathcal{G}_2$ is given by the following theorem which goes back to VAN DER KULK [Ku53]. Another proof, based on the theory of trees, was given by DANILOV-GIZATULLIN [GiD75].

Theorem 7. *The automorphism group $\mathcal{G}_2$ is the amalgamated product $\mathcal{A}_2 *_{\mathcal{B}_2} \mathcal{J}_2$ where $\mathcal{B}_2 := \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{J}_2$.*(9)

The theorem claims that every automorphism φ has a decomposition of the form

$$\varphi = \alpha_1\gamma_1\alpha_2\gamma_2 \cdots \alpha_k\gamma_k, \quad \alpha_i \in \mathcal{A}_2,\ \gamma_i \in \mathcal{J}_2$$

which is unique modulo the obvious relations $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ and $(\gamma\beta)\alpha = \gamma(\beta\alpha)$ for $\alpha \in \mathcal{A}_2$, $\beta \in \mathcal{B}_2$, $\gamma \in \mathcal{J}_2$. In particular, every element has a well defined *length*, namely the minimal number of elements from $\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{J}_2$ needed to express it as a product.

As an immediate consequence we get a positive answer to the *Linearization Problem* in dimension 2. In fact, if a power of an element $\varphi = \alpha_1\gamma_1\alpha_2\gamma_2 \cdots \alpha_k\gamma_k$ is the identity then there must be some cancellation in the product

$$\varphi\varphi = \alpha_1\gamma_1 \cdots \alpha_k\gamma_k\alpha_1\gamma_1 \cdots \alpha_k\gamma_k.$$

This is possible only if either $\beta := \alpha_k\gamma_k\alpha_1 \in \mathcal{B}_2$ or $\beta' := \gamma_k\alpha_1\gamma_1 \in \mathcal{B}_2$. In the first case the conjugate element $\alpha_1^{-1}\varphi\alpha = \gamma_1\alpha_2 \cdots \alpha_{k-1}\gamma_{k-1}(\alpha_k\beta)$ has shorter length than φ and similarly in the second case. Now it follows easily by induction that φ is conjugate to an element of GL_2.

More generally, one knows by a result due to SERRE (see [Se80]) that every subgroup of bounded length in an amalgamated product is conjugate to a subgroup of one of the factors. It was shown by WRIGHT [Wr79] that an *algebraic* subgroup of $\mathcal{G}_2$ (i.e., the image of an algebraic group G acting algebraically on $\mathbb{A}^2$) is of bounded length. Hence we obtain the following corollary (see [Kam79]):

(9) This holds for any base field k.

Corollary 1. *Every algebraic subgroup G of $\mathcal{G}_2$ is conjugate to a subgroup of $\mathcal{A}_2$ or of $\mathcal{J}_2$. In particular, every reductive subgroup of $\mathcal{G}_2$ is conjugate to a subgroup of* GL_2.

A second application is the following result which goes back to RENTSCHLER [Re68].

Corollary 2. *Every locally nilpotent vector field on $\mathbb{A}^2$ can be triangularized, i.e., is equivalent to one of the form $f(x)\dfrac{\partial}{\partial y}$ where $f(x)$ is a polynomial.*

Recall that there is a 1-1 correspondence between locally nilpotent vector fields and $\mathbb{C}^+$-actions. Thus, Corollary 2 says that every $\mathbb{C}^+$-action on $\mathbb{A}^2$ is equivalent to one of the form $t \cdot (x, y) = (x, y + tf(x))$.

Remark 4. Another consequence of the structure theorem is the non-existence of non-trivial forms of $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ (see [Sh66]). More precisely, if $k \subset \mathbb{C}$ is any subfield and A a k-algebra such that $\mathbb{C} \otimes_k A \simeq \mathbb{C}[x, y]$, then $A \simeq k[x, y]$ as a k-algebra.(10) Again, this problem is completely open in dimension ≥ 3. We even do not know if $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ is the only real form of $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$.

It is well-known that a similar amalgamated product structure as in Theorem 7 does not exist in dimension $n \geq 3$. For example, consider the following two automophisms of $\mathbb{A}^3$:

$$\sigma(x, y, z) = (y, x, z) \quad \text{and} \quad \tau(x, y, z) = (x, y, z + x^2).$$

Then $\sigma \in \mathcal{A}_3$, $\tau \in \mathcal{J}_3$ and $\sigma, \tau \notin \mathcal{A}_3 \cap \mathcal{J}_3$. The composition $\sigma \circ \tau \circ \sigma$ maps (x, y, z) to $(x, y, z + y^2)$, hence $\sigma \circ \tau \circ \sigma \in \mathcal{J}_3$ which contradicts the uniqueness of the decomposition. It is also known that Corollary 2 does not generalize to higher dimension: Consider the locally nilpotent vector filed $D := (xz + y^2)(x\frac{\partial}{\partial y} - 2y\frac{\partial}{\partial z})$ given by BASS [Ba84]. Its zero set is given by $xz + y^2 = 0$ and has an isolated singularity at 0. Hence D cannot be put into triangular form.

The subgroup of $\mathcal{G}_n$ generated by $\mathcal{A}_n$ and $\mathcal{J}_n$ is called the group of *tame* automorphisms. We do not know if every automorphism of $\mathbb{A}^n$ is tame. But it is interesting to remark here that the main result about embeddings (§4, Theorem 6) holds for the subgroup of tame automorphism.

(10) This holds for any perfect field k, cf. [Kam75].

6. LINEARIZATION OF ALGEBRAIC GROUP ACTIONS

The *Linearization Problem* was originally formulated for reductive group actions on affine space (see [Kam79]):

> *Given a reductive algebraic group G acting on affine n-space $\mathbb{A}^n$, can one always find a polynomial change of coordinates such that the action becomes linear?*

Of course, a necessary condition is the existence of a fixed point. More precisely, the fixed point set has to be an affine space $\mathbb{A}^d$ whose embedding into $\mathbb{A}^n$ must be equivalent to a linear one. It is not difficult to see that every non-linearly reductive group admits an action on some affine space without fixed points (see [KrP85]).

The first results here looked very promising. Every such action on $\mathbb{A}^2$ is linearizable as a consequence of the structure theorem (§5, Corollary 1 of Theorem 7), any torus action with an orbit of codimension one is linearizable by BIAŁYNICKI-BIRULA [Bi66/67] (see [KaR82] for related results), and for $\mathbb{A}^3$ and $\mathbb{A}^4$ it was shown by KRAFT-POPOV and PANYUSHEV that every semisimple group action is linearizable [KrP85], [Pa84]. We refer to [Kr89a, §5] for more details and further references.

In 1989 SCHWARZ discovered the first counterexamples, namely non-linearizable actions of the orthogonal group O_2 on $\mathbb{A}^4$ and of SL_2 on $\mathbb{A}^7$ ([Sc89], see [KrS89/92]). Using these results KNOP showed that every connected reductive group which is not a torus admits a faithful non-linearizable action on some affine space $\mathbb{A}^n$ [Kn91]. Using a different approach, MASUDA, MOSER-JAUSLIN and PETRIE produced more examples and discovered the first non-linearizable actions of finite groups, e.g., for dihedral groups of order ≥ 10 on $\mathbb{A}^4$ (see [MaP91] and [MMP91]).

So far, all examples of non-linearizable actions have been obtained from non-trivial G-vector bundles on representation spaces V of G by using an idea of BASS and HABOUSH ([BaH87], see [Kr89b]). As usual, a *G-vector bundle* on a G-variety Y is an algebraic vector bundle $p: \mathcal{V} \to Y$ together with an action of G such that the projection p is G-equivariant and the action is linear on the fibers. A G-vector bundle is called *trivial* if it is isomorphic to a bundle of the form $Y \oplus W \xrightarrow{\text{pr}} Y$ where W is a G-representation.

Since every algebraic vector bundle on affine n-space is trivial by the famous theorem of QUILLEN and SUSLIN, and hence has an affine space as its total space, non-trivial G-vector bundles on representation spaces V of G provide us with interesting G-actions on affine space. In fact, many of these turned out to be non-linearizable! Recently, MEDERER constructed non-trivial equivariant vector bundles for the symmetric group S_3 over $\mathbb{A}^2$. Moreover, he shows that the "moduli space" is infinite dimensional [Me95].

So far there are no counterexamples to the *Linearization Problem* for commutative reductive groups, in particular for tori and for automorphisms of finite order.[(11)] Moreover, the following result of MASUDA, MOSER-JAUSLIN and PETRIE [MMP95] shows that our previous approach via G-vector bundles cannot produce counterexamples here. (See [KrS95] for a more geometric proof.)

Theorem 8. *Let G be a commutative reductive group (i.e., a product of a torus and a finite commutative group) and let V be a representation of G. Then every G-vector bundle on V is trivial.*

An essential ingredient in the proof is the theorem of GUBELADZE [Gu88] saying that every vector bundle on a normal affine toric variety is trivial. Here, it can be applied to the "algebraic quotient" $V/\!\!/G$ (= the maximal spectrum of the invariant ring) since G is commutative.

In the last few years a lot of work has been done in the first open case, namely for $\mathbb{C}^*$-actions on $\mathbb{A}^3$. We have already seen in §2 and §4 that this problem is strongly related to the *Characterization Problem* and the *Embedding Problem*. A number of special cases have been settled earlier (see [KoR86/89ab], [Kr90]), some others led to a list of acyclic hypersurfaces in $\mathbb{A}^4$ as possible counterexamples, one of them being Example 1 in §2. As already mentioned earlier, KALIMAN and MAKAR-LIMANOV have been able to prove that all these hypersurfaces are non-isomorphic to $\mathbb{A}^3$. It is now reasonable to assume that the following conjecture will be proved in the near future. We refer to the forthcoming report [KoR95] of KORAS and RUSSELL for a thorough investigation of the problem.

Conjecture. *Every $\mathbb{C}^*$-action on $\mathbb{A}^3$ is linearizable.*

On the other hand, there is absolutely no progress concerning automorphisms of finite order of $\mathbb{A}^3$. For example,

- *Is every involution of $\mathbb{A}^3$ with an isolated fixed point equivalent to* -id*?*
- *Is every involution of $\mathbb{A}^3$ whose fixed point set is of dimension 2 equivalent to a reflection on a linear plane?*

In their approach to the *Linearization Problem* KRAFT and SCHWARZ [KrS92] realized that all non-trivial G-vector bundles became trivial (and the corresponding action linearizable) if one allows *holomorphic* changes of coordinates. The explanation of this

(11) In positive characteristic there are counterexamples by ASANUMA [As94].

phenomena was given by a general equivariant Oka-principle proved by HEINZNER and KUTZSCHEBAUCH [HeK94]:

Theorem 9. *Let V be a representation of a complex reductive group. Then every holomorphic G-vector bundle on V is trivial.*

As a consequence, all examples of non-linearizable actions obtained so far become linearizable if we allow holomorphic changes of coordinates. Thus the linearization problem in the holomorphic setting is completely open.

Concerning the *Fixed Point Problem* there are a number of results from topological transformation groups which can be applied to the algebraic situation. E.g., for every action of a *torus* $T = \mathbb{C}^{*m}$ on $\mathbb{A}^n$ the fixed point set is an acyclic smooth subvariety and in particular non-empty. One also knows that every *finite cyclic group* acting on $\mathbb{A}^n$ has fixed points (see [PeR86]), a result which does not hold in the topological setting. It is based on the existence of an equivariant completion which allows to apply Lefschetz type arguments. For more details we refer again to the survey [Kr89a, §3]. So far, we have not been able to construct reductive group actions on affine n-space without fixed points although we believe that such actions exist for all semisimple groups. But there is an interesting example over $\mathbb{R}$ given by DOVERMANN, MASUDA and PETRIE [DMP89]:

> *For every $n \geq 24$ there exists an effective fixed point free real algebraic action of the icosahedral group on a real algebraic variety diffeomorphic to $\mathbb{R}^n$.*

Substantial progress was made recently by FANKHAUSER [Fa95]. He was able to extend several results of HSIANG and STRAUME [HsS86] about compact Lie group actions on acyclic manifolds to the algebraic setting. Among other things he shows:

> *There exist always fixed points provided the algebraic quotient $\mathbb{A}^n /\!\!/ G$ has at most dimension 3 or is small compared with the rank of G.*

We should point out that all these results about fixed points hold more generally for actions on *acyclic smooth affine varieties* and do not use the fact that the underlying variety is affine n-space.

REFERENCES

[AC95] N. A'CAMPO, M. OKA – *Geometry of plane curves via Tschirnhausen resolution towers.* J. Alg. Geometry (1995) (to appear).

[AbM75] S.S. ABHYANKAR, T.T. MOH – *Embeddings of the line in the plane.* J. Reine Angew. Math. **276** (1975) 149–166.

[As94] T. ASANUMA – *Non-linearizable algebaic group actions on* $\mathbb{A}^n$. J. Algebra **166** (1994) 72–79.

[Ba84] H. BASS – *A non-triangular action of* G_a *on* $\mathbb{A}^3$. J. Pure Appl. Algebra **33** (1984) 1–5.

[BaH85] H. BASS, W. HABOUSH – *Linearizing certain reductive group actions.* Trans. Amer. Math. Soc. **292** (1985) 463–482.

[BaH87] H. BASS, W. HABOUSH – *Some equivariant K-theory of affine algebraic group actions.* Comm. Algebra **15** (1987) 181–217.

[Bi66] A. BIAŁYNICKI-BIRULA – *Remarks on the action of an algebraic torus on* k^n*, I.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. **14** (1966) 177–181.

[Bi67] A. BIAŁYNICKI-BIRULA – *Remarks on the action of an algebraic torus on* k^n*, II.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. **15** (1967) 123–125.

[Bi76] A. BIAŁYNICKI-BIRULA – *Some properties of the decompositions of algebraic varieties determined by actions of a torus.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. **24** (1976) 667–674.

[CaL70] I. CANALS, E. LLUIS – *Acerca de un resultado de Segre.* Anales del Inst. de Metam., Univ. Nac. Aut. México **10** (1970) 1–15.

[Da89] W. DANIELEWSKI – *On the cancellation problem and automorphism group of affine algebraic varieties.* Preprint 1989. (Appendix by K. Fieseler)

[Di90] A. DIMCA – *Hypersurfaces in* $\mathbb{C}^n$ *diffeomorphic to* $\mathbb{R}^{4n-2}$. Max-Planck Institut Bonn, preprint 1990.

[Di92] A. DIMCA – *Singularities and topology of hypersurfaces.* Universitext, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1992.

[DMP89] K.-H. DOVERMANN, M. MASUDA, T. PETRIE – *Fixed point free algebraic actions on varieties diffeomorphic to* $\mathbb{R}^n$. In: Topological methods in algebraic transformation groups (H. Kraft et al., eds.). Progress in Math. vol. 80, Birkhäuser Verlag, Basel - Boston, 1989, pp. 47–80.

[EaH73] P. EAKIN, W. HEINZER – *A cancellation problem for rings.* In: Conference on Commutative Algebra (Brewer, J.W.; Rutter, E.A., eds.). Lecture Notes in Mathematics vol. 311, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973, pp. 61–77.

[Fa95] M. FANKHAUSER – *Fixed points for reductive group actions on acyclic varieties.* Ann. Inst. Fourier (1995) to appear. (Thesis Basel 1994)

[Fi94] K.-H. FIESELER – *On complex affine surfaces with* $\mathbb{C}^+$*-action.* Comment. Math. Helv. **69** (1994) 5–27.

[Fu79] T. FUJITA – *On Zariski problem.* Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. **55** (1979) 106–110.

[Fu81] T. FUJITA – *Cancellation problem for complete varieties.* Invent. Math. **64** (1981) 119–121.

[Fu82] T. FUJITA – *On the topology of non-complete surfaces.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **29** (1982) 503–566.

[GiD75] M.H. GIZATULLIN, V.I. DANILOV – *Automorphisms of affine surfaces, I.* Math. USSR-Izv. **9** (1975) 493–534.

[Gu88] J. GUBELADZE – *Anderson's conjecture and the maximal monoid class over which projective modules are free.* Math. USSR-Sb. **63** (1988) 165–180.

[GuM87] R.V. GURJAR, M. MIYANISHI – *Affine surfaces with $\bar{\kappa} \leq 1$.* In: "Algebraic Geometry and Commutative Algebra" in Honor of Masayoshi Nagata., 1987, pp. 99–124.

[GuM95] R.V. GURJAR, M. MIYANISHI – *On contractible curves in $\mathbb{C}^2$.* Preprint 1995.

[HeK94] P. HEINZNER, F. KUTZSCHEBAUCH – *An equivariant version of Grauert's Oka principle.* Invent. Math. **119** (1994) 317–346.

[Ho72] M. HOCHSTER – *Nonuniqueness of coefficient rings in a polynomial ring.* Proc. Amer. Math. Soc. **34** (1972) 81–82.

[HsS86] W. HSIANG, E. STRAUME – *Actions of compact connected Lie groups on acyclic manifolds with low dimensional orbit space.* J. Reine Angew. Math. **369** (1986) 21–39.

[Ii82] S. IITAKA – *Algebraic Geometry: An introduction to birational geometry of algebraic varieties.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 76, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1982.

[IiF77] S. IITAKA, T. FUJITA – *Cancellation theorem for algebraic varieties.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **24** (1977) 123–127.

[Je87] Z. JELONEK – *The extension of regular and rational embeddings.* Math. Ann. **113** (1987) 113–120.

[Je91] Z. JELONEK – *Identity sets for polynomial automorphisms.* J. Pure Appl. Algebra **76** (1991) 333–339.

[Je92] Z. JELONEK – *The Jacobian Conjecture and the extension of a polynomial embeddings.* Math. Annalen **294** (1992) 289–293.

[Je93] Z. JELONEK – *Irreducible identity sets for polynomial automorphisms.* Math. Zeitschrift **212** (1993) 601–617.

[Je94] Z. JELONEK – *Affine smooth varieties with finite group of automorphisms.* Math. Zeitschrift **216** (1994) 575–591.

[Ju42] H.W.E. JUNG – *Über ganze birationale Transformationen der Ebene.* J. Reine Angew. Math. **184** (1942) 161–174.

[Ka91] S. KALIMAN – *Extensions of isomorphisms between affine algebraic subvarieties of k^n to automorphisms of k^n.* Proc. Amer. Math. Soc. **113** (1991) 325–334.

[Ka93] S. KALIMAN – *Smooth contractible hypersurfaces in $\mathbb{C}^n$ and exotic algebraic structures on $\mathbb{C}^3$.* Math. Zeitschrift **214** (1993) 499–510.

[Ka95] S. KALIMAN – *Exotic structures on $\mathbb{C}^n$ and $\mathbb{C}^*$-actions on $\mathbb{C}^3$.* In: Proceedings on "Complex Analysis and Geometry". Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Marcel Dekker Inc., 1995 (to appear)

[KaM95a] S. KALIMAN, L. MAKAR-LIMANOV – *Affine algebraic manifolds without dominant morphisms from euclidean space.* Preprint 1995.

[KaM95b] S. KALIMAN, L. MAKAR-LIMANOV – *On Russell's contractible threefolds.* Preprint 1995.

[Kam75] T. KAMBAYASHI – *On the absence of nontrivial separable forms of the affine plane.* J. Algebra **35** (1975) 449–456.

[Kam79] T. KAMBAYASHI – *Automorphism group of a polynomial ring and algebraic group action on an affine space.* J. Algebra **60** (1979) 439–451.

[Kam80] T. KAMBAYASHI – *On Fujita's strong cancellation theorem for the affine plane.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA **27** (1980) 535–548.

[KaR82] T. KAMBAYASHI, P. RUSSELL – *On linearizing algebraic torus actions.* J. Pure Appl. Algebra **23** (1982) 243–250.

[Kn91] F. KNOP – *Nichtlinearisierbare Operationen halbeinfacher Gruppen auf affinen Räumen.* Invent. Math. **105** (1991) 217–220.

[KoR86] M. KORAS, P. RUSSELL – *G_m-actions on $\mathbb{A}^3$.* In: Canad. Math. Soc. Confer. Proc.. vol. 6, 1986, pp. 269–276.

[KoR89a] M. KORAS, P. RUSSELL – *Codimension 2 torus actions on affine n-space.* In: Canad. Math. Soc. Confer. Proc.. Proceedings of the Conference on "Group Actions and Invariant Theory", Montreal 1988 vol. 10, 1989, pp. 103–110.

[KoR89b] M. KORAS, P. RUSSELL – *On linearizing "good" $\mathbb{C}^*$-actions on $\mathbb{C}^3$.* In: Canad. Math. Soc. Confer. Proc.. Proceedings of the Conference on "Group Actions and Invariant Theory", Montreal 1988 vol. 10, 1989, pp. 93–102.

[KoR95] M. KORAS, P. RUSSELL – *Contractible algebraic threefolds and $\mathbb{C}^*$-actions on $\mathbb{C}^3$*. Preprint 1995.

[Kr89a] H. KRAFT – *Algebraic automorphisms of affine space.* In: Topological methods in algebraic transformation groups (H. Kraft et al., eds.). Progress in Math. vol. 80, Birkhäuser Verlag, Basel–Boston, 1989, pp. 81–105.

[Kr89b] H. KRAFT – *G-vector bundles and the linearization problem.* In: Proceedings of the Conference on "Group Actions and Invariant Theory", Montreal 1988. Can. Math. Soc. Conf. Proc. vol. 10, 1989, pp. 111–123.

[Kr90] H. KRAFT – *$\mathbb{C}^*$-actions on affine space.* In: Operator Algebras, Unitary Representations, Envelopping Algebras, and Invariant Theory (A. Connes, M. Duflo, A. Joseph, R. Rentschler, eds.). Progress in Mathematics vol. 92, Birkhäuser Verlag, Basel–Boston, 1990, pp. 561-579.

[KrP85] H. KRAFT, V.L. POPOV – *Semisimple group actions on the three dimensional affine space are linear.* Comment. Math. Helv. **60** (1985) 466–479.

[KrS89] H. KRAFT, G.W. SCHWARZ – *Linearizing reductive group actions on affine space with one-dimensional quotient.* In: Proceedings of the Conference on "Group Actions and Invariant Theory," Montreal 1988. Contemp. Math. vol. 10, 1989

[KrS92] H. KRAFT, G.W. SCHWARZ – *Reductive group actions with one-dimensional quotient.* Publ. Math. IHES **76** (1992) 1–97.

[KrS95] H. KRAFT, G.W. SCHWARZ – *Finite automorphisms of affine n-space.* In: Proceedings of the Curaçao Conference on "Automorphisms of Affine Space". to appear, 1995

[Li77] A. LIBGOBER – *A geometrical procedure for killing the middle dimensional homology groups of algebraic hypersurfaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **63** (1977) 198–202.

[Lu73] D. LUNA – *Slices étales.* Bull. Soc. Math. France, Mémoire **33** (1973) 81–105.

[Ma94] L. MAKAR-LIMANOV – *On the hypersurface $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$ in $\mathbb{C}^4$.* Preprint 1994.

[MMP91] M. MASUDA, L. MOSER-JAUSLIN, T. PETRIE – *Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups: Applications.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **88** (1991) 9065–9066.

[MMP95] M. MASUDA, L. MOSER-JAUSLIN, T. PETRIE – *The equivariant Serre Problem for abelian groups.* J. Amer. Math. Soc (1995).

[MaP91] M. MASUDA, T. PETRIE – *Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups: Theory.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **88** (1991) 9061–9064.

[Me95] K. MEDERER – *Moduli of equivariant G-vector bundles.* Thesis Brandeis 1995.

[Mi87] M. MIYANISHI – *Algebraic characterization of the affine* 3*-space.* Proc. Alg. Geometry Seminar, Singapore, World Scientific, 1987, pp. 53–67.

[MiS80] M. MIYANISHI, T. SUGIE – *Affine surfaces containing cylinderlike open sets.* J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980) 11–42.

[MiT87] M. MIYANISHI, S. TSUNODA – *Open algebraic surfaces with Kodaira dimension* $-\infty$. Proc. Sympos. Pure Math. **46** (1987) 435–450.

[Na67] M. NAGATA – *A theorem on valuation rings and its applications.* Nagoya Math. J. **29** (1967) 85–91.

[Ne89a] W.D. NEUMANN – *On the topology of curves in complex surfaces.* In: Topological methods in algebraic transformation groups (H. Kraft et al, eds.). Progress in Math. vol. 80, Birkhäuser Verlag, Basel–Boston, 1989, pp. 117—133.

[Ne89b] W.D. NEUMANN – *Complex algebraic plane curves via their links at infinity.* Invent. math. **98** (1989) 445–489.

[Pa84] D.I. PANYUSHEV – *Semisimple automorphism groups of four-dimensional affine space.* Math. USSR-Izv. **23** (1984) 171–183.

[PeR86] T. PETRIE, J.D. RANDALL – *Finite-order algebraic automorphisms of affine varieties.* Comment. Math. Helv. **61** (1986) 203–221.

[Ra71] C.P. RAMANUJAM – *A topological characterization of the affine plane as an algebraic variety.* Ann. of Math. **94** (1971) 69–88.

[Re68] R. RENTSCHLER – *Opérations du groupe additif sur le plan affine.* C. R. Acad. Sci. Paris **267 A** (1968) 384–387.

[Rud82] L. RUDOLPH – *Embedding of the line in the plane.* J. Reine Angew. Math. **337** (1982) 113–118.

[Ru81] P. RUSSELL – *On affine-ruled rational surfaces.* Math. Ann. **255** (1981) 287–302.

[Ru92] P. RUSSELL – *On a class of* $\mathbb{C}^3$*-like threefolds.* Preliminary report 1992.

[Ru95] P. RUSSELL – *Open problems on open algebraic varieties (Montreal 1994 Problems).* Prépublication de l'Institut Fourier, Laboratoire Mathématiques, n^0 311, Grenoble 1995, 23 p.)

[Sa76] A. SATHAYE – *On linear planes.* Proc. Amer. Math. Soc. **56** (1976) 1–7.

[Sc89] G.W. SCHWARZ – *Exotic algebraic group actions.* C. R. Acad. Sci. Paris **309** (1989) 89–94.

[Seg57] B. SEGRE – *Corrispondenze di Möbius e transformazioni cremoniane intere.* Atti Acad. Sci. Torino **91** (1957) 1–17.

[Se61] J.-P. SERRE – *Sur les modules projectifs.* In Séminaire Dubreil-Pisot 1960/61, n^{o}2.

[Se80] J.-P. SERRE – *Trees.* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[Sh66] I.R. SHAFAREVICH – *On some infinite dimensional groups.* Rend. Mat. e Appl. (5) **25** (1966) 208–212.

[Sr91] V. SRINIVAS – *On the embedding dimension of an affine variety.* Math. Annalen **289** (1991) 125–132.

[Su89] T. SUGIE – *Algebraic characterization of the affine plane and the affine 3-space.* In: Topological methods in algebraic transformation groups (H. Kraft et al., eds.). Progress in Math. vol. 80, Birkhäuser Verlag, Basel - Boston, 1989, pp. 177–190.

[Suz74] M. SUZUKI – *Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébriques de l'espace $\mathbb{C}^2$.* J. Math. Soc. Japan **26** (1974) 241–257.

[tDP89] T. TOM DIECK, T. PETRIE – *Homology planes: An announcement and survey.* In: Topological methods in algebraic transformation groups (H. Kraft et al., eds.). Progress in Math. vol. 80, Birkhäuser Verlag, Basel - Boston, 1989, pp. 27–48.

[tDP90] T. TOM DIECK, T. PETRIE – *Contractible affine surfaces of Kodaira dimension one.* Japan J. Math. **16** (1990) 147–169.

[Ku53] W. VAN DER KULK – *On polynomial rings in two variables.* Nieuw Arch. Wisk. **1** (1953) 33–41.

[Wi90] J. WINKELMANN – *On free holomorphic $\mathbb{C}$-actions on $\mathbb{C}^n$ and homogeneous Stein manifolds.* Math. Ann. **286** (1990) 593–612.

[Wr79] D. WRIGHT – *Abelian subgroups of $Aut_k(k[X,Y])$ and applications to actions on the affine plane.* Ill. J. Math. **23** (1979) 579–634.

[Za91] M.G. ZAIDENBERG – *Ramanujam surfaces and exotic algebraic structures on $\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$.* Soviet Math. Dokl. **42** (1991) 636–640.

[Za93] M.G. ZAIDENBERG – *An analytic cancellation theorem and exotic algebraic structures on $\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$.* In: Astérisque 217 (1993), 251–282., 1993 (Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, 1991. Preprint MPI/91–26, 33p.)

[Za95] M.G. ZAIDENBERG – *On exotic algebraic structures on affine spaces.* In: Proceedings of a Conference "Geometric Complex Analysis". Tokyo, March 19–29, World Scientific, 1995 (Prépublication de l'Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques, n^0 309, Grenoble 1995, 32 p.)

[ZaL83] M.G. ZAIDENBERG, V. Ya. LIN – *An irreducible simply connected algebraic curve in $\mathbb{C}^2$ is a quasihomogeneous curve.* Soviet Math. Dokl. **28** (1983).

Hanspeter KRAFT
Mathematisches Institut
Universität Basel
Rheinsprung 21
CH-4051 BASEL
SWITZERLAND

JEAN-PIERRE SERRE

Travaux de Wiles (et Taylor, ...), partie I

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 803, p. 319-332
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__319_0>

Séminaire BOURBAKI
47ème année, 1994-95, n° 803

Juin 1995

TRAVAUX DE WILES (ET TAYLOR,...), PARTIE I

par **Jean-Pierre SERRE**

Le théorème qui fait l'objet de cet exposé, et de celui d'Oesterlé, est le suivant :

THÉORÈME (Wiles [37], complété par Taylor-Wiles [34]).— *Toute courbe elliptique sur* $\mathbf{Q}$ *qui est semi-stable est modulaire.*

(Pour les définitions de "semi-stable" et de "modulaire", voir § 1.)

En d'autres termes :

La conjecture de Taniyama-Weil est vraie pour les courbes elliptiques semi-stables sur $\mathbf{Q}$.

(En fait, la semi-stabilité en 3 et 5 suffit, d'après Diamond [10].)

La démonstration est longue, et utilise des méthodes très diverses, dues notamment à Faltings, Langlands, Mazur, Ribet,... On se bornera à en expliquer la stratégie générale. Pour la vérification(*) des points techniques (qui sont essentiels, bien entendu), le lecteur devra se reporter à [34] et [37] ; on recommande aussi l'exposé qu'en donnent Darmon, Diamond et Taylor, cf. [7].

1. LA CONJECTURE DE TANIYAMA-WEIL

1.1. Énoncés

À tout entier $N \geq 1$ est associée une certaine courbe $X_0(N)$ sur $\mathbf{Q}$, dont on trouvera la définition par exemple dans [32]. C'est une courbe *modulaire* au sens suivant : ses points (les "pointes" mises à part) paramètrent les isogénies cycliques de degré N entre courbes elliptiques.

La jacobienne $J_0(N)$ de $X_0(N)$ est une variété abélienne, définie sur $\mathbf{Q}$. La forme la plus simple de la conjecture de Taniyama-Weil est :

(*) vérification que le rédacteur ne prétend pas avoir entièrement faite.

Conjecture 1.— *Toute courbe elliptique sur* $\mathbf{Q}$ *est* $\mathbf{Q}$*-isogène à un quotient de* $J_0(N)$*, pour* N *convenable.*

Ou, ce qui est équivalent :

Conjecture 1′.— *Pour toute courbe elliptique* E *sur* $\mathbf{Q}$*, il existe un entier* $N \geq 1$ *et un* $\mathbf{Q}$*-morphisme non constant* $X_0(N) \to E$*.*

Cet énoncé peut être précisé en termes du *conducteur* $N(E)$ de la courbe E. Rappelons quelques propriétés de $N(E)$ (pour une définition générale, voir [27]) :

On a :

$$N(E) = \prod p^{n(p,E)},$$

où p parcourt l'ensemble des nombres premiers, et où :

$n(p,E) = 0$ si E a bonne réduction en p,

$n(p,E) = 1$ si E a mauvaise réduction de type multiplicatif (cubique à point double à tangentes distinctes),

$n(p,E) \geq 2$ sinon (et même $n(p,E) = 2$ sauf si $p = 2$ ou 3).

On dit que E est *semi-stable en* p si $n(p,E) = 0$ ou 1 ; on dit que E est *semi-stable* si elle est semi-stable en tout nombre premier, *i.e.* si son conducteur est sans facteur carré. (Pour une interprétation en termes de modèles de Néron et une généralisation aux variétés abéliennes, voir par exemple [2].)

La forme plus précise de la conjecture de Taniyama-Weil est :

Conjecture 2.— *L'entier* N *de la conjecture* $1'$ *peut être pris égal à* $N(E)$*.*

En fait, on sait (Carayol [3]) que ces divers énoncés sont *équivalents.* De plus, le conducteur $N(E)$ est le plus petit (au sens multiplicatif) des N intervenant dans la conjecture $1'$.

Une autre formulation est :

Conjecture 2′.— *Il existe une forme parabolique primitive* ("newform", au sens d'Atkin-Lehner [1]) $f = \sum a_n q^n$*, de poids* 2 *et de niveau* $N(E)$*, telle que la série de Dirichlet* $L(f,s) = \sum a_n n^{-s}$ *soit égale à la fonction* L *associée à* E (au sens de [27]).

En particulier, on a :

$a_p = 0$, si $n(p,E) = 2$;

$a_p = \pm 1$, si $n(p,E) = 1$;

$a_p = 1 + p - |E(\mathbf{F}_p)| =$ Trace du Frobenius de E en p, si $n(p,E) = 0$.

Exemple.— La courbe elliptique d'équation $y^2 - y = x^3 - x^2$ est de conducteur 11. Elle est liée par une isogénie de degré 5 à $J_0(11)$, qui est de dimension 1. La forme primitive correspondante est :

$$f = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^2 (1 - q^{11n})^2 = q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6 + \cdots$$

1.2. Historique de la conjecture de Taniyama-Weil

Le point de départ est un travail d'Eichler [13], publié en 1954, qui démontre (au moins dans un cas particulier) que la fonction L de $X_0(N)$ est essentiellement la même qu'un produit de fonctions L attachées par Hecke aux formes paraboliques de poids 2 et de niveau N. Quelques années plus tard, ceci est clarifié et généralisé par Shimura [31], et complété sur un point important ("bonne réduction en dehors de N") par Igusa [17].

En 1955, dans un recueil de problèmes distribué aux participants du colloque de Tokyo-Nikko [33], Taniyama propose une réciproque :

"Let C be an elliptic curve over an algebraic number field k, and $L_C(s)$ denote the L function of C over k, namely $\zeta_C(s) = \zeta_k(s)\,\zeta_k(s-1)/L_C(s)$, is the zeta function of C over k. If a conjecture of Hasse is true for $\zeta_C(s)$, then the Fourier series obtained from $L_C(s)$ by the inverse Mellin-transformation must be an automorphic form of dimension -2, of some special type (cf. Hecke). If so, it is very plausible that this form is an elliptic differential of the field of that automorphic functions. The problem is to ask if it is possible to prove Hasse's conjecture for C, by going back this considerations, and by finding a suitable automorphic form from which $L_C(s)$ may be obtained."

Ce texte ne semble guère avoir eu d'écho, à cause de sa distribution limitée et de sa rédaction imprécise (par exemple : qu'est-ce que le "field of automorphic functions" lorsque k n'est pas totalement réel ?).

La situation change en 1967, avec la publication du mémoire de Weil [36] donnant une caractérisation des séries de Dirichlet provenant de formes modulaires. Non que Weil insiste sur la conjecture en question : il se borne à la mentionner comme un "Übungsaufgabe" pour le lecteur que cela peut intéresser. Mais il lui apporte deux compléments essentiels :

a) Il montre que toute fonction L, dont les "tordues" par des caractères ont des prolongements analytiques satisfaisant à des équations fonctionnelles de type raisonnable, provient d'une forme modulaire.

b) Il suggère la forme précise appelée plus haut "conjecture 2", mettant en jeu le conducteur. Du coup, cela permet toute une série de vérifications : courbes à multiplication complexe, courbes à petit conducteur (exemple : pourquoi ne trouve-t-on pas de courbe elliptique de conducteur < 11 ? Parce que $X_0(N)$ est de genre 0 pour $N < 11$).

Ces résultats ont eu une profonde influence, d'autant plus qu'ils arrivaient en même temps que la théorie des motifs de Grothendieck et la philosophie de Langlands : visiblement, une belle synthèse restait (et reste encore) à faire !

(Le lecteur qui s'intéresse aux relations entre les idées de Weil et celles de Langlands aura intérêt à lire les commentaires sur [36], rédigés par Weil lui-même, dans le troisième volume de ses *Oeuvres.*)

1.3. Terminologie

Elle a varié, au fil des années et des modes :

Une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ pour laquelle la conjecture $1'$ est vraie a été longtemps appelée une courbe "de Weil". On dit maintenant que c'est une courbe elliptique "modulaire".

Le terme de "conjecture de Weil" a été d'abord utilisé pour désigner l'ensemble des conjectures du n$^{\text{o}}$ 1.1 ; c'était un peu fâcheux, vu le risque de confusion avec d'autres conjectures de Weil. On est passé de là à "conjecture de Taniyama-Weil" ; c'est la terminologie utilisée ici. Plus récemment, on trouve "conjecture de Shimura-Taniyama-Weil", ou même "conjecture de Shimura-Taniyama", le nom de Shimura étant ajouté en hommage à son étude des quotients de $J_0(N)$. Le lecteur choisira. L'essentiel est qu'il sache qu'il s'agit du même énoncé.

1.4. Quelques applications du théorème de Wiles

a) La plus spectaculaire – et celle qui semble avoir motivé Wiles – est le *théorème de Fermat.* On sait en effet, grâce à Ribet [25], que :

$$\text{“Taniyama-Weil dans le cas semi-stable} \implies \text{Fermat”.}$$

La démonstration de cette implication utilise une construction de Hellegouarch et Frey, cf. [15]. Elle a été exposée au Séminaire Bourbaki 1987/88 par Oesterlé [23]. Je n'y reviens pas.

Je profite quand même de l'occasion pour rectifier une assertion de [30], fin du n$^{\text{o}}$ 4.2 : "La relation existant entre solutions de l'équation de Fermat... figure déjà dans un travail de Hurwitz...". C'est faux, comme me l'a signalé N. Schappacher : il n'y a rien de tel dans Hurwitz. *Mea culpa.*

b) Le même genre d'argument s'applique à des équations voisines de celle de Fermat. Par exemple cf. [30], n° 4.3), si L est un nombre premier appartenant à l'ensemble $\{3,5,7,11,13,17,19,19,23,29,53,59\}$ et si p est un nombre premier > 7, l'équation $x^p + y^p = L^\alpha \cdot z^p$ n'a pas de solution avec $x, y, z \in \mathbf{Z}$, $xyz \neq 0$, α entier ≥ 0.

D'autres exemples sont donnés dans Darmon [6].

c) Lorsqu'on applique la méthode de Goldfeld et Gross-Zagier à la détermination des corps imaginaires quadratiques de petit nombre de classes, on a besoin de savoir que certaines courbes elliptiques (par exemple les courbes $y^2 - y = x^3 - 7x + 6$ et $y^2 - y = x^3 - x + 6$, de conducteurs 5077 et 16811) sont modulaires, cf. [24]. C'était assez pénible. C'est maintenant un cas particulier du théorème de Wiles.

d) Le fait de savoir qu'une courbe est modulaire permet de définir l'ordre de sa fonction L au point $s = 1$, et du coup d'énoncer (et parfois de démontrer) les conjectures de Birch et Swinnerton-Dyer.

2. REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES MODULAIRES

Commençons par rappeler quelques résultats connus.

2.1. Représentations galoisiennes de degré 2 en caractéristique ℓ

Soit $\overline{\mathbf{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbf{Q}$. Si K est une sous-extension de $\overline{\mathbf{Q}}$, on note G_K le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/K)$.

Soit ℓ un nombre premier. Vu les applications que nous avons en vue, *on supposera* $\ell \neq 2$ (bien que le cas $\ell = 2$ pose des problèmes fort intéressants, cf. [30], n° 5.2). Soit $\mathbf{F}$ une clôture algébrique de $\mathbf{F}_\ell$. Une *représentation de* $G_{\mathbf{Q}}$ *de degré* 2 *à coefficients dans* $\mathbf{F}$ est un homomorphisme continu

$$\rho : G_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}).$$

Son image est finie ; elle est donc contenue dans $\mathbf{GL}_2(F')$, où F' est une extension finie de $\mathbf{F}_\ell$ (le cas le plus important pour la suite est celui où $F' = \mathbf{F}_\ell$).

On note $\det \rho$ le déterminant de ρ. On dit que ρ est *impaire* si $\det \rho(c) = -1$, où c est la conjugaison complexe (pour un plongement quelconque de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans $\mathbf{C}$).

Une telle représentation n'est ramifiée qu'en un nombre fini de nombres premiers. Pour presque tout p, on peut donc parler de l'élément de Frobenius $\rho(\mathrm{Frob}_p)$, défini à conjugaison près dans $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F})$; en particulier, $\mathrm{Tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_p)$ et $\det \rho(\mathrm{Frob}_p)$

sont des éléments bien déterminés de $\mathbf{F}$ et de $\mathbf{F}^*$ respectivement. Si ρ est semi-simple, la connaissance des $\operatorname{Tr}\rho(\mathrm{Frob}_p)$, pour presque tout p, détermine ρ à conjugaison près.

Les formes modulaires $(\bmod\,\ell)$ fournissent de telles représentations, d'après un théorème de Deligne (cf. [8], [9]). De façon plus précise (voir [9] pour les détails), si f est une forme modulaire $(\bmod\,\ell)$ de type (N,k,ε), qui est fonction propre des opérateurs de Hecke T_p (pour $p \nmid \ell N$), il existe une représentation ρ semi-simple qui est *associée* à f au sens que :

$$(*) \qquad \operatorname{Tr}\rho(\mathrm{Frob}_p) = a_p \quad \text{pour tout} \quad p \quad \text{assez grand},$$

où a_p est la valeur propre de T_p correspondant à f.

Cette représentation est unique, à conjugaison près. Elle est non ramifiée en tout p ne divisant pas ℓN. De plus, pour un tel p, la formule $(*)$ est vraie et l'on a :

$$(**) \qquad \det\rho(\mathrm{Frob}_p) = \varepsilon(p)\,p^{k-1}.$$

On peut reformuler $(**)$ en disant que le caractère $\det\rho$ est égal au produit du caractère ε par χ^{k-1}, où χ est le caractère cyclotomique, cf. [30], § 1. Comme $\varepsilon(-1) = (-1)^k$, on a $\det\rho(c) = -1$, *i.e.* ρ est impaire.

Remarque.— Ce qui précède est vrai que l'on interprète le terme de "forme modulaire $\bmod\,\ell$" au sens "réduction en caractéristique ℓ de formes modulaires en caractéristique 0", ou, lorsque $(\ell, N) = 1$, au sens de Katz [18].

2.2. Les conjectures de [30]

Convenons de dire qu'une représentation $\rho : G_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{GL}_2(\mathbf{F})$ est *modulaire* si elle peut être obtenue à partir d'une forme modulaire $(\bmod\,\ell)$ par la méthode que l'on vient d'indiquer.

Conjecture 3 ([29], [30]).— *Toute représentation irréductible impaire*

$$\rho : G_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{F})$$

est modulaire.

De même que pour Taniyama-Weil, il est essentiel d'avoir une forme plus précise de la conjecture qui fournisse explicitement un triplet (N,k,ε) permettant d'obtenir la représentation ρ donnée. On trouvera dans [30] la définition d'un tel triplet, que nous noterons $(N(\rho), k(\rho), \varepsilon(\rho))$. Le poids $k(\rho)$ ne dépend que de la ramification de ρ

en ℓ, tandis que le niveau $N(\rho)$, qui est premier à ℓ, ne dépend que de la ramification en dehors de ℓ (c'est essentiellement le *conducteur d'Artin* de ρ). La forme précisée de la conjecture 3 est alors :

Conjecture 4.— *Si ρ satisfait aux hypothèses de la conjecture* 3, *et si $\ell \neq 3$, ou si $\ell = 3$ et la restriction de ρ à $G_{\mathbf{Q}(\sqrt{-3})}$ est irréductible, alors ρ est associée à une forme modulaire de type $(N(\rho), k(\rho), \varepsilon(\rho))$.*

Remarques.— 1) Si l'on utilise la définition des formes modulaires mod ℓ de Katz, le cas "$\ell = 3$ et la restriction de ρ à $G_{\mathbf{Q}(\sqrt{-3})}$ est réductible" n'est plus exceptionnel.

2) On sait maintenant, grâce aux travaux de Ribet et d'autres (cf. [4], [5], [10], [11], [12], [16], [25], [26], [37]) que les conjectures 3 et 4 sont *équivalentes.* De façon plus précise, *si une représentation ρ est modulaire, elle l'est pour* $(N(\rho), k(\rho), \varepsilon(\rho))$ – avec la même exception que ci-dessus. C'est là un résultat difficile, qui joue un rôle important dans la démonstration de Wiles (cf. l'exposé d'Oesterlé).

3) Les conjectures ci-dessus, utilisées pour une suite de ℓ tendant vers l'infini, entraînent (facilement) la conjecture de Taniyama-Weil, cf. [30], n° 4.6. La méthode de Wiles est différente : au lieu de faire varier ℓ, il le remplace par ℓ^n, avec $n \to \infty$, cf. plus loin. C'est assez naturel : l'anneau $\mathbf{Z}_\ell = \varprojlim \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$ a une structure plus simple que le produit des $\mathbf{F}_\ell$ pour ℓ variable.

Un exemple

THÉORÈME 1 ([30], prop. 11).— *Si $\ell = 3$, et si ρ prend ses valeurs dans $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_3)$, la conjecture* 3 *est vraie pour ρ.*

Rappelons la démonstration, qui est une simple application de la *théorie de Langlands* [20], complétée par Tunnell [35] :

On utilise le fait que $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ se relève dans $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}[\sqrt{-2}])$. La représentation $\rho : G_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ donne ainsi une représentation

$$\rho_0 : G_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]) \longrightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{C}).$$

D'après Langlands et Tunnell (*loc. cit.*), la fonction L de ρ_0 est associée, au sens de [9], à une forme modulaire de poids 1. La réduction de cette forme en caractéristique 3 convient. (Si l'on désire une forme de poids 2, et non de poids 1, on multiplie par une série d'Eisenstein convenable, par exemple $\theta = \sum_{x,y\in\mathbf{Z}} q^{x^2+xy+y^2}$ $= 1 + 6(q + q^3 + \cdots)$.)

2.3. Représentations galoisiennes dans des anneaux locaux

Le cas d'un corps ne suffit pas. On a besoin d'anneaux locaux complets. En fait, il suffira (dans le présent exposé, mais pas dans celui d'Oesterlé) du cas de l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbf{Q}_\ell$. Soit donc A un tel anneau, soit $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, et choisissons un plongement de $A/\mathfrak{m}$ dans $\mathbf{F} = \overline{\mathbf{F}}_\ell$, cf. n° 2.1. On s'intéresse à des homomorphismes continus $\rho : G_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{GL}_2(A)$.

Par réduction $(\operatorname{mod} \mathfrak{m})$, un tel homomorphisme définit une représentation en caractéristique ℓ

$$\overline{\rho} : G_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}).$$

Ici encore, la théorie de Deligne (cf. [3], [8], [19]) fournit de telles représentations, à partir de formes modulaires. L'une des façons d'énoncer le résultat est d'introduire, pour tout couple (N, k), l'espace $S_1(N, k)$ des formes paraboliques de poids k sur $\Gamma_1(N)$, ainsi que la $\mathbf{Z}$-sous-algèbre $\mathbf{T}$ de $\operatorname{End}(S_1(N, k))$ engendrée par les opérateurs de Hecke T_n, pour n premier à ℓN. On dit alors que ρ est *modulaire* de type (N, k) s'il existe un homomorphisme $a : \mathbf{T} \to A$ tel que, pour tout $p \nmid \ell N$, ρ soit non ramifiée en p et $\operatorname{Tr} \rho(\operatorname{Frob}_p) = a(T_p)$; on a $\det \rho(\operatorname{Frob}_p) = a(R_p)\, p^{k-1}$, où R_p désigne l'opérateur "losange" $\langle p \rangle$, qui appartient à $\mathbf{T}$.

Une représentation est dite *modulaire* si elle l'est pour un couple (N, k) convenable.

Exemple : représentation ℓ-adique associée à une courbe elliptique

Soit E une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$, et soit $T_\ell(E) = \varprojlim E[\ell^n]$ son module de Tate. C'est un $\mathbf{Z}_\ell$-module libre de rang 2, muni d'une action de $G_{\mathbf{Q}}$. Si l'on identifie $T_\ell(E)$ à $\mathbf{Z}_\ell \times \mathbf{Z}_\ell$, on en déduit une représentation

$$\rho_{E,\ell} : G_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell).$$

THÉORÈME 2.— *Pour que la représentation $\rho_{E,\ell}$ soit modulaire au sens ci-dessus, il faut et il suffit que E soit modulaire au sens du* n° 1.3 (autrement dit, la conjecture de Taniyama-Weil est vraie pour E).

L'implication "E-modulaire $\Longrightarrow$ $\rho_{E,\ell}$ modulaire" est facile. Pour l'implication réciproque, on remarque que, si $\rho_{E,\ell}$ est modulaire de type (N, k), on a $k = 2$, et le caractère correspondant $\varepsilon : p \mapsto a(R_p)$ est égal à 1 (cela résulte du fait que $\det \rho_{E,\ell}$ est égal au ℓ-ième caractère cyclotomique χ_ℓ). On déduit de là qu'il existe un $G_{\mathbf{Q}}$-homomorphisme non trivial de $T_\ell(E)$ dans $T_\ell(J_0(N))$, et il en résulte que E est $\mathbf{Q}$-isogène à un quotient de $J_0(N)$ d'après un théorème de Faltings [14] (ex "conjecture de Tate").

2.4. Un cas particulier du théorème principal de Wiles

Je me borne à un cas simple, mais suffisant pour la suite ; le lecteur trouvera des énoncés plus généraux dans [7], [10] et [37].

On considère une représentation ℓ-adique $\rho : G_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{GL}_2(A)$ du type du n° 2.3 (avec $\ell \neq 2$, bien entendu). On fait les hypothèses suivantes :

(0) ρ est non ramifiée en dehors d'un ensemble fini de nombres premiers.

(1) La réduction $(\operatorname{mod} \mathfrak{m})$ $\overline{\rho}$ de ρ est modulaire au sens du n° 2.2.

(2) La représentation $\overline{\rho}$ est irréductible ; si $\ell = 3$, sa restriction à $G_{\mathbf{Q}(\sqrt{-3})}$ est irréductible.

(3) Le déterminant de ρ est égal au caractère cyclotomique χ_ℓ.

(4) La représentation ρ est semi-stable en ℓ (au sens de l'exposé d'Oesterlé) et, pour tout $p \neq \ell$, l'image par ρ du groupe d'inertie en p est un groupe unipotent, *i.e.* est conjuguée d'un sous-groupe de $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

THÉORÈME 3 (Wiles [37]).— *Si les conditions ci-dessus sont réalisées, ρ est modulaire au sens du* n° 2.3.

La démonstration de ce résultat fait l'objet de l'exposé d'Oesterlé. Indiquons seulement son point de départ, qui consiste à comparer *déformations universelles* de $\overline{\rho}$ (au sens de Mazur [22]) et *déformations de Hecke* ; tout revient alors à montrer que ces déformations coïncident.

COROLLAIRE.— *Soit E une courbe elliptique semi-stable sur $\mathbf{Q}$. S'il existe $\ell \geq 3$ tel que la représentation $\overline{\rho}_{E,\ell}$ associée à E et ℓ soit modulaire au sens du* n° 2.2 *et vérifie* (2) *ci-dessus, alors E est modulaire.*

Cela résulte du th. 2, et du fait que $\rho_{E,\ell}$ a les propriétés (0), (3) et (4).

On verra au § 3 comment cet énoncé, appliqué avec $\ell = 3$ ou 5, entraîne la conjecture de Taniyama-Weil dans le cas semi-stable.

3. FIN DE LA DÉMONSTRATION

Dans tout ce qui suit, E désigne une courbe elliptique semi-stable sur $\mathbf{Q}$. On se propose de montrer que E est modulaire.

3.1. La représentation $\overline{\rho}_{E,\ell}$

Soit ℓ premier ≥ 3, et soit $E[\ell]$ le groupe des points de ℓ-division de E. L'action de $G_{\mathbf{Q}}$ sur $E[\ell]$ définit une représentation :

$$G_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \operatorname{Aut} E[\ell] \simeq \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell).$$

Par extension des scalaires de $\mathbf{F}_\ell$ à $\mathbf{F} = \overline{\mathbf{F}}_\ell$, cela donne la représentation $\overline{\rho}_{E,\ell}$ du n° 2.4.

PROPOSITION 1.— *Deux cas seulement sont possibles :*

a) $G_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell)$ *est surjectif.*

b) *L'image de* $G_{\mathbf{Q}}$ *dans* $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_\ell)$ *est contenue dans un sous-groupe de Borel.*

(Le cas b) signifie que $E(\overline{\mathbf{Q}})$ contient un sous-groupe d'ordre ℓ stable par $G_{\mathbf{Q}}$.)

Pour $\ell \geq 7$, ceci est démontré dans [28], prop. 21. Des arguments analogues s'appliquent à $\ell = 3$ et 5. Indiquons par exemple comment on traite le cas où $\ell = 3$. Soit G l'image de $G_{\mathbf{Q}}$ dans $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ et soit PG son image dans $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{F}_3) = S_4$. Supposons que ni a), ni b) ne soient vrais. Alors PG est distinct de S_4, et ne fixe aucun point ; comme PG n'est pas contenu dans A_4 (à cause de la surjectivité du déterminant de la représentation), il en résulte que PG est, soit le groupe diédral D_4 d'ordre 8, soit un sous-groupe d'indice 2 de D_4. Mais le fait que E soit semi-stable entraîne que, pour tout $p \neq 3$, le groupe d'inertie de p dans PG est trivial. On obtient alors une extension galoisienne de $\mathbf{Q}$ de groupe de Galois PG, qui est non ramifiée en dehors de 3. Or il est facile de voir qu'une telle extension n'existe, ni quand $PG = D_4$, ni quand PG est d'indice 2 dans D_4.

Remarques

1) Le cas b) n'est possible que si la courbe E, ou une courbe ℓ-isogène à E, possède un point d'ordre ℓ rationnel sur $\mathbf{Q}$ ([28], *loc. cit.*).

2) Il résulte d'un théorème de Mazur (cf. [21]) que le cas b) ne se produit *que pour une valeur de* ℓ ($\ell \geq 3$) *au plus*, et que cette valeur est ≤ 7.

3.2. Le cas a) pour $\ell = 3$

PROPOSITION 2.— *Supposons que, pour* $\ell = 3$, *on soit dans le cas* a) *de la prop.* 1. *du* n° 3.1. *Alors* E *est modulaire.*

En effet, la représentation $G_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ est modulaire (th. 1), et surjective. D'où le résultat, d'après le corollaire au th. 3.

3.3. Le cas b) pour $\ell = 3$

Supposons maintenant que l'on soit dans le cas b) pour $\ell = 3$. D'après la remarque 2) du n° 3.1, on est alors dans le cas a) pour tout $\ell > 3$, et en particulier pour $\ell = 5$. La représentation $\overline{\rho}_{E,5}$ a donc une image isomorphe à $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_5)$. De plus :

PROPOSITION 3.— $\overline{\rho}_{E,5}$ *est modulaire.*

Soit X la courbe qui paramètre les courbes elliptiques E' munies d'un isomorphisme $E'[5] \simeq E[5]$ compatible avec les isomorphismes de Weil :

$$\wedge^2 E[5] \simeq \mu_5 \qquad \text{et} \qquad \wedge^2 E'[5] \simeq \mu_5.$$

On vérifie par descente galoisienne que X est une courbe affine lisse absolument irréductible sur $\mathbf{Q}$. Sa compactification lisse $\overline{X}$ est $\mathbf{C}$-isomorphe à la courbe modulaire $X(5)$, qui est de genre 0. De plus, $\overline{X}$ *est isomorphe à la droite projective* $\mathbf{P}_1$. Cela peut se voir de deux façons : soit en construisant par descente un fibré inversible de degré impair sur $\overline{X}$, soit en remarquant que X a un point $\mathbf{Q}$-rationnel, à savoir le point P_0 correspondant à $E' = E$ et à l'application identique $E[5] \to E[5]$.

Choisissons maintenant une suite de points rationnels P_n de X, correspondant à des courbes elliptiques E_n, ayant les propriétés suivantes :

(i) *Le groupe de Galois des points de* 3-*division de* E_n *est* $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_3)$.

(ii) *Les* P_n *tendent* 5-*adiquement vers le point* P_0 *correspondant à* E.

Une telle suite de points existe ; cela résulte du théorème d'irréductibilité de Hilbert (applicable parce que $\overline{X} \simeq \mathbf{P}_1$) compte tenu de ce que (i) est vrai pour un point générique de $\overline{X}$.

Si $p \neq 5$, les courbes E_n sont semi-stables en p : cela provient de ce que $E_n[5]$ est isomorphe à $E[5]$, car la semi-stabilité en p se "lit" sur les points de division par 5. Cet argument ne s'applique pas pour $p = 5$: certaines des E_n peuvent ne pas être semi-stables en 5. Mais, pour $n \to \infty$, les E_n tendent 5-adiquement vers E (en un sens évident), et comme E est semi-stable en 5, il en est de même des E_n pour n assez grand.

Ainsi, on peut choisir un n tel que E_n soit semi-stable. Vu (i), on peut appliquer la prop. 2 à E_n. Donc E_n est modulaire, et il en est *a fortiori* de même de $\overline{\rho}_{E_n,5}$. Comme $\overline{\rho}_{E,5}$ est isomorphe à $\overline{\rho}_{E_n,5}$, cela démontre la proposition.

COROLLAIRE.— *La courbe E est modulaire.*

Cela résulte de la proposition, combinée au corollaire au th. 3.

Ce corollaire, joint à la prop. 2, achève la démonstration de la conjecture de Taniyama-Weil dans le cas semi-stable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.O.L. ATKIN et J. LEHNER - *Hecke operators on* $\Gamma_0(m)$, Math. Ann. **185** (1970), 134-160.

[2] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT et M. RAYNAUD - *Néron Models*, Springer-Verlag, 1990.

[3] H. CARAYOL - *Sur les formes modulaires p-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. E.N.S. **19** (1986), 409-468.

[4] H. CARAYOL - *Sur les représentations galoisiennes modulo ℓ attachées aux formes modulaires*, Duke Math. J. **59** (1989), 785-801.

[5] R.F. COLEMAN et J.F. VOLOCH - *Companion forms and Kodaira-Spencer theory*, Invent. math. **110** (1992), 263-281.

[6] H. DARMON - *The equations $x^n + y^n = z^2$ and $x^n + y^n = z^3$*, Intern. Math. Research Notices (1993), 263-274.

[7] H. DARMON, F. DIAMOND et R. TAYLOR - *Fermat's Last Theorem*, Current Developments in Math. 1995, International Press, Cambridge MA.

[8] P. DELIGNE - *Formes modulaires et représentations ℓ-adiques*, Sém. Bourbaki 1968/69, Exposé 355, Lect. Notes in Math. **179** (1971), 139-172.

[9] P. DELIGNE et J.-P. SERRE - *Formes modulaires de poids* 1, Ann. Sci. E.N.S. **7** (1974), 507-530 (= J.-P. Serre, *Oe.* 101).

[10] F. DIAMOND - *On deformation rings and Hecke rings*, Ann. of Math., à paraître.

[11] F. DIAMOND - *The refined conjecture of Serre*, Conference on Elliptic Curves, Hong-Kong 1993, International Press, Cambridge MA (1995), 22-37.

[12] B. EDIXHOVEN - *The weight in Serre's conjectures on modular forms*, Invent. math. **109** (1992), 563-594.

[13] M. EICHLER - *Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion*, Archiv der Mat. **5** (1954), 355-366.

[14] G. FALTINGS - *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. math. **73** (1983), 349-366 ; *Erratum, ibid.* **75** (1984), 381.

[15] G. FREY - *Links between solutions of $A - B = C$ and elliptic curves*, Lect. Notes in Math. **1380** (1989), 31-62.

[16] B.H. GROSS - *A tameness criterion for Galois representations associated to modular forms* mod p, Duke Math. J. **61** (1990), 445-517.

[17] J.-I. IGUSA - *Kroneckerian model of fields of elliptic modular functions*, Amer. J. Math. **81** (1959), 561-577.

[18] N. KATZ - *p-adic properties of modular schemes and modular forms*, Lect. Notes in Math. **350** (1973), 69-190.

[19] R.P. LANGLANDS - *Modular forms and ℓ-adic representations*, Lect. Notes in Math. **349** (1973), 361-500.

[20] R.P. LANGLANDS - *Base change for* GL(2), Ann. of Math. Studies **96**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1980.

[21] B. MAZUR - *Modular curves and the Eisenstein ideal*, Publ. Math. I.H.E.S. **47** (1977), 33-186.

[22] B. MAZUR - *Deforming Galois representations*, in : Galois groups over $\mathbf{Q}$, Y. Ihara, K. Ribet, J.-P. Serre, edit., Springer-Verlag, 1989, 385-437.

[23] J. OESTERLÉ - *Nouvelles approches du "théorème" de Fermat*, Sém. Bourbaki 1987/88, exposé 694, Astérisque **161-162**, S.M.F. (1988), 165-186.

[24] J. OESTERLÉ - *Le problème de Gauss sur le nombre de classes*, L'Ens. Math. **34** (1988), 43-67 (noter que $h(-43) = h(-67) = 1$).

[25] K.A. RIBET - *On modular representations of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ *arising from modular forms*, Invent. math. **100** (1990), 431-476.

[26] K.A. RIBET - *Report on* mod ℓ *representations of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Proc. Symp. Pure Math. **55**, A.M.S. (1994), vol. 2, 639-676.

[27] J.-P. SERRE - *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures)*, Sém. Delange-Pisot-Poitou 1969/1970, exposé 19 (= *Oe.* 87).

[28] J.-P. SERRE - *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. math. **15** (1972), 259-331 (= *Oe.* 94).

[29] J.-P. SERRE - *Lettre à J.-F. Mestre*, Contemp. Math. **67**, A.M.S. (1987), 263-268.

[30] J.-P. SERRE - *Sur les représentations modulaires de degré* 2 *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Duke Math. J. **54** (1987), 179-230.

[31] G. SHIMURA - *Correspondances modulaires et les fonctions* ζ *de courbes algébriques*, J. Math. Soc. Japan **10** (1958), 1-28.

[32] G. SHIMURA - *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Publ. Math. Soc. Japan **11**, Princeton Univ. Press, 1971.

[33] Y. TANIYAMA - *Problem* 12, in : "Some unsolved problems in mathematics", polycopié, Tokyo-Nikko, 1955.

[34] R. TAYLOR et A. WILES - *Ring theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math. **141** (1995), 553-572.

[35] J. TUNNELL - *Artin's conjecture for representations of octahedral type*, Bull. A.M.S. **5** (1981), 173-175.

[36] A. WEIL - *Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen*, Math. Ann. **168** (1967), 149-156 (= *Oe. Sci.* [1967a]).

[37] A. WILES - *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. **141** (1995), 443-551.

Jean-Pierre SERRE

Collège de France
3, rue d'Ulm
75005 PARIS

JOSEPH OESTERLÉ

Travaux de Wiles (et Taylor, ...), partie II

Astérisque, tome 237 (1996), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 804, p. 333-355
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__333_0>

Séminaire BOURBAKI
47ème année, 1994-95, n° 804

Juin 1995

TRAVAUX DE WILES (ET TAYLOR, ...), PARTIE II

par Joseph OESTERLÉ

Cet exposé fait suite à celui de J.-P. Serre, auquel nous référerons par [S]. On note ℓ un nombre premier ≥ 3 et $\overline{\mathbf{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbf{Q}$. Pour toute sous-extension K de $\overline{\mathbf{Q}}$, on pose $\mathrm{G_K} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathrm{K})$. On note $\chi_\ell : \mathrm{G_{\mathbf{Q}}} \to \mathbf{Z}_\ell^\times$ le caractère cyclotomique via lequel $\mathrm{G_{\mathbf{Q}}}$ opère sur les racines de l'unité de $\overline{\mathbf{Q}}$ d'ordre une puissance de ℓ. Par abus, si A est une $\mathbf{Z}_\ell$-algèbre, on note encore χ_ℓ l'homomorphisme composé $\mathrm{G_{\mathbf{Q}}} \xrightarrow{\chi_\ell} \mathbf{Z}_\ell^\times \to \mathrm{A}^\times$.

Pour tout nombre premier p, on note D_p le groupe de décomposition d'une place de $\overline{\mathbf{Q}}$ au-dessus de p, I_p son groupe d'inertie, $\mathrm{Frob}_p \in \mathrm{D}_p$ un élément de Frobenius arithmétique et $\overline{\mathbf{Q}}_p$ la fermeture algébrique de $\mathbf{Q}_p$ dans le complété de $\overline{\mathbf{Q}}$ en la place choisie.

Soient A l'anneau des entiers d'une extension de degré fini de $\mathbf{Q}_\ell$, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et ρ un homomorphisme continu de $\mathrm{G_{\mathbf{Q}}}$ dans $\mathbf{GL}_2(\mathrm{A})$, non ramifié en dehors d'un ensemble fini de nombres premiers. Choisissons un plongement de $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$ dans une clôture algébrique $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ de $\mathbf{F}_\ell$ et notons $\overline{\rho} : \mathrm{G_{\mathbf{Q}}} \to \mathbf{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_\ell)$ la représentation déduite de ρ par réduction mod $\mathfrak{m}$. Le théorème suivant fournit des conditions suffisantes pour que ρ soit modulaire (au sens de [S], 2.3) lorsque $\overline{\rho} : \mathrm{G_{\mathbf{Q}}} \to \mathbf{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_\ell)$ est modulaire (au sens de [S], 2.2). Il résout en partie une conjecture de Fontaine et Mazur ([6]).

THÉORÈME 1.— *Supposons satisfaite l'une des deux conditions suivantes :*

a) *Le $\mathbf{Z}_\ell$-module A^2, muni de l'action de D_ℓ définie par ρ, est isomorphe au module de Tate d'un groupe ℓ-divisible sur $\mathbf{Z}_\ell$, et $\det\rho$ coïncide avec χ_ℓ dans I_ℓ.*

b) *La restriction de ρ à D_ℓ est conjuguée à $\begin{pmatrix} \varphi & * \\ 0 & \psi \end{pmatrix}$, où ψ est un caractère non ramifié de D_ℓ, φ est un caractère de D_ℓ dont la restriction à un sous-groupe d'indice fini de I_ℓ est χ_ℓ^{k-1} pour un entier $k \geq 2$, et $\varphi \not\equiv \psi \bmod \mathfrak{m}_\mathrm{A}$.*

Si $\overline{\rho}$ est modulaire et que sa restriction à $G_{\mathbf{Q}(\sqrt{\ell^*})}$ (où $\ell^* = (-1)^{(\ell-1)/2}\ell$) est irréductible, ρ est modulaire.

Ce théorème est démontré par Wiles [16], complété par Taylor-Wiles [15], sous l'hypothèse restrictive suivante : pour tout nombre premier $p \equiv -1 \bmod \ell$ tel que $\overline{\rho}_{|I_p}$ soit réductible, $\overline{\rho}_{|D_p}$ l'est aussi. Dans [4], Diamond montre comment s'affranchir de cette hypothèse.

Nous ne traiterons ici que le cas particulier du th. 1 utilisé par Serre dans son exposé ([S], 2.4), pour démontrer la conjecture de Taniyama-Weil pour les courbes elliptiques semi-stables : celui où l'on a $\det \rho = \chi_\ell$ et où, pour tout nombre premier $p \neq \ell$, le groupe $\rho(I_p)$ est unipotent, *i.e.* conjugué d'un sous-groupe de $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On trouvera un exposé détaillé de la preuve de Wiles dans ce cas dans [2'] ; nous en résumerons les grandes lignes.

Le principe de la démonstration est le suivant. On part d'une représentation continue ρ_0 de $G_{\mathbf{Q}}$, de degré 2 sur un corps fini F de caractéristique ℓ, qui est semi-stable (n° 1) et vérifie des conditions convenables d'irréductibilité. À chaque ensemble fini Σ de nombres premiers est associé un type de déformations de ρ_0 (n° 2). Il existe une déformation universelle de ρ_0 de type Σ, définie sur un anneau R_Σ (*loc. cit.*). Les représentations galoisiennes associées aux formes modulaires fournissent, lorsque ρ_0 est supposée modulaire, une déformation de ρ_0 de type Σ à un anneau $\mathbf{T}_\Sigma$ construit à partir des algèbres de Hecke (n° 3 et 4). On déduit de la propriété universelle de R_Σ un homomorphisme d'anneaux $\pi_\Sigma : R_\Sigma \to \mathbf{T}_\Sigma$ (n° 5) ; il est surjectif. Soit Σ_1 l'ensemble formé de ℓ et des nombres premiers $p \neq \ell$ en lesquels ρ_0 est non ramifiée. Pour traiter le cas particulier du th. 1 considéré ci-dessus, il suffit de prouver π_Σ est bijectif pour tout sous-ensemble fini Σ de Σ_1. Deux critères pour qu'un homomorphisme d'anneaux soit un isomorphisme entre anneaux d'intersection complète sont énoncés dans l'appendice III. Le premier, appliqué au n° 6, permet de prouver d'une part que $\pi_\varnothing$ est bijectif, d'autre part que $\mathbf{T}_\varnothing$ est un anneau d'intersection complète. (C'est dans la preuve de ces énoncés que se trouvait le "trou" de la démonstration initiale de Wiles, comblé par Taylor-Wiles.) La variation de certains invariants numériques des anneaux locaux R_Σ et $\mathbf{T}_\Sigma$ en fonction de Σ est décrite au n° 7. Leur comparaison permet en appliquant le second critère de conclure par récurrence que, pour tout sous-ensemble fini Σ de Σ_1, π_Σ est bijectif et $\mathbf{T}_\Sigma$ est un anneau d'intersection complète, ce qui termine la démonstration.

1. REPRÉSENTATIONS SEMI-STABLES

Soient F un corps fini de caractéristique ℓ et ρ une représentation continue de $G_{\mathbf{Q}}$ dans un espace vectoriel V de dimension 2 sur F. Soit $\overline{\rho}: G_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{GL}_2(\overline{\mathrm{F}})$ une représentation déduite de ρ par choix d'une base de V et extension des scalaires à une clôture algébrique de F. Le triplet associé à $\overline{\rho}$ dans le n° 2.2 de [S] ne dépend que de ρ ; nous le noterons $(\mathrm{N}(\rho), k(\rho), \varepsilon(\rho))$. Nous dirons que ρ est *modulaire* si $\overline{\rho}$ est modulaire au sens de *loc. cit.*.

Nous dirons que ρ est *bonne en* ℓ si le D_ℓ-module V provient d'un schéma en groupes fini et plat sur $\mathbf{Z}_\ell$ et que $\det \rho$ coïncide avec χ_ℓ dans I_ℓ. Nous dirons que ρ est *semi-stable en* ℓ si elle est bonne en ℓ ou que $\rho_{|\mathrm{I}_\ell}$ s'écrit $\begin{pmatrix} \chi_{\ell|\mathrm{I}_\ell} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base convenable de V. Pour que ρ soit bonne (resp. semi-stable) en ℓ, il faut et il suffit d'après [14] que $k(\rho)$ soit égal à 2 (resp. à 2 ou à $\ell+1$).

Soit p un nombre premier distinct de ℓ. Nous dirons que ρ est *bonne en* p si elle est non ramifiée en p. Nous dirons que ρ est *semi-stable* en p si $\rho(\mathrm{I}_p)$ est un sous-groupe unipotent de $\mathbf{GL}(\mathrm{V})$; il est alors d'ordre 1 ou ℓ.

Nous dirons que la représentation ρ est *semi-stable* si elle est semi-stable en tout nombre premier. Pour cela, il faut et il suffit que $k(\rho)$ soit égal à 2 ou $\ell+1$, que $\mathrm{N}(\rho)$ soit sans facteurs carrés et que $\varepsilon(\rho) = 1$. Si ρ est semi-stable, on a $\det \rho = \chi_\ell$. Notons alors $\overline{\mathrm{N}}(\rho)$ le produit des nombres premiers en lesquels ρ n'est pas bonne : on a $\overline{\mathrm{N}}(\rho) = \mathrm{N}(\rho)$ si ρ est bonne en ℓ, et $\overline{\mathrm{N}}(\rho) = \ell\mathrm{N}(\rho)$ sinon.

Remarque 1. — Si ρ est irréductible et de déterminant χ_ℓ, elle est absolument irréductible ([14], 3.3). Si de plus ρ est semi-stable en ℓ et $\ell \geq 5$, la restriction de ρ à $\mathrm{H} = G_{\mathbf{Q}(\sqrt{\ell^*})}$ (où $\ell^* = (-1)^{(\ell-1)/2}\ell$) est absolument irréductible. Il résulte en effet de [14] que $\overline{\rho}(\mathrm{I}_\ell)$ est contenu dans un sous-groupe de Borel de $\mathbf{GL}_2(\overline{\mathrm{F}})$ et qu'un élément au moins de $\overline{\rho}(\mathrm{I}_\ell \cap \mathrm{H})$ a deux valeurs propres distinctes. On en déduit que toute droite stable par $\overline{\rho}(\mathrm{I}_\ell \cap \mathrm{H})$ est aussi stable par $\overline{\rho}(\mathrm{I}_\ell)$. Le groupe d'inertie I_ℓ n'est pas contenu dans H ; on a donc $G_{\mathbf{Q}} = \mathrm{I}_\ell \mathrm{H}$. S'il existait une droite stable par $\overline{\rho}(\mathrm{H})$, elle serait aussi stable par $\overline{\rho}(G_{\mathbf{Q}})$, ce qui est absurde.

Pour $k \geq 2$ et $\mathrm{N} \geq 1$, notons $\mathrm{S}(\mathrm{N}, k, 1)_{\overline{\mathrm{F}}}$ l'espace vectoriel des formes modulaires paraboliques de type $(\mathrm{N}, k, 1)$ à coefficients dans $\overline{\mathrm{F}}$, au sens de [14], 3.1.

PROPOSITION 1.— *Supposons ρ semi-stable et irréductible. Si $\ell = 3$, supposons de plus que la restriction de ρ à $G_{\mathbf{Q}(\sqrt{-3})}$ soit absolument irréductible. Alors, si ρ est modulaire, elle est associée au sens de* [S], 2.1, *à une forme modulaire $f \in \mathrm{S}(\overline{\mathrm{N}}(\rho), 2, 1)_{\overline{\mathrm{F}}}$, fonction propre des opérateurs de Hecke T_p pour $p \nmid \ell\overline{\mathrm{N}}(\rho)$.*

C'est là un résultat difficile, qui a requis les efforts combinés de nombreux mathématiciens. On prouve d'abord que ρ est associée à une forme modulaire $g \in \mathrm{S}(\mathrm{N}(\rho), k(\rho), 1)_{\overline{\mathrm{F}}}$, fonction propre des opérateurs T_p pour $p \not| \ \ell\overline{\mathrm{N}}(\rho)$ (cf. [5], cor. 1.2 du th. 1.1 où sont récapitulés les travaux cités dans [S], 2.2, remarque 2). La prop. 1 en résulte si $k(\rho) = 2$. Si $k(\rho) = \ell + 1$ et $\ell \geq 5$, on utilise le fait que, pour tout entier $\mathrm{N} \geq 1$ premier à ℓ, les éléments de $\mathrm{S}(\mathrm{N}, \ell+1, 1)_{\overline{\mathrm{F}}}$ coïncident avec ceux de $\mathrm{S}(\ell\mathrm{N}, 2, 1)_{\overline{\mathrm{F}}}$ possédant un relèvement en caractéristique 0 dont la trace de $\Gamma_0(\ell\mathrm{N})$ à $\Gamma_0(\mathrm{N})$ est nulle (pour $\mathrm{N} = 1$, voir [13], 3.3 ; le cas général est analogue). Le cas où $k(\rho) = \ell + 1$ et $\ell = 3$, plus subtil, est traité dans [5], th. 5.1 et lemme 2.1.

Remarque 2. — La forme modulaire f est en fait unique à un scalaire multiplicatif près et est fonction propre de tous les opérateurs de Hecke T_n $(n \geq 1)$. Pour tout nombre premier p, la valeur propre a_p de T_p associée à f est la trace de Frob_p opérant sur le plus grand quotient de V non ramifié en p.

2. DÉFORMATIONS D'UNE REPRÉSENTATION SEMI-STABLE

Soient F un corps fini de caractéristique ℓ et ρ_0 une représentation continue de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$ de degré 2 sur F, qui est *semi-stable* (cf. n° 1) et irréductible (donc absolument irréductible, d'après la remarque 1 du n° 1) ; rappelons que son déterminant est χ_ℓ.

Soient A un anneau local noethérien complet de corps résiduel F et ρ une déformation de ρ_0 à A (*i.e.* une représentation continue de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$ dans un A-module M_ρ libre de rang 2, dont la représentation résiduelle est isomorphe à ρ_0 ; cf. App. II, n° 2). Supposons son déterminant égal à χ_ℓ. Nous dirons que ρ est *bonne en* ℓ si, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ d'indice fini de A, le D_ℓ-module $\mathrm{M}_\rho/\mathfrak{a}\mathrm{M}_\rho$ provient d'un schéma en groupes fini et plat sur $\mathbf{Z}_\ell$. Nous dirons que ρ est *ordinaire en* ℓ si $\rho_{|\mathrm{I}_\ell}$ s'écrit $\begin{pmatrix} \chi_{\ell|\mathrm{I}_\ell} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base convenable de M_ρ ; il suffit pour cela qu'il existe un sous-groupe fermé M' de M_ρ, stable par I_ℓ, tel que I_ℓ opère par χ_ℓ sur M' et par 1 sur $\mathrm{M}_\rho/\mathrm{M}'$. Nous dirons que ρ est *semi-stable en* ℓ si elle est bonne ou ordinaire en ℓ.

Remarques. — 1) Il arrive que ρ soit à la fois bonne et ordinaire en ℓ. Plus précisément, supposons ρ ordinaire en ℓ. Le $\mathrm{A}[\mathrm{I}_\ell]$-module M_ρ est alors isomorphe à une extension

$$0 \to \mathrm{A}(1) \xrightarrow{\iota} \mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{A} \to 0$$

de A (muni de l'action triviale de I_ℓ) par $\mathrm{A}(1) = \mathrm{A} \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \varprojlim \mu_{\ell^n}$. Associons à ρ un idéal principal $\mathfrak{a}_\rho$ de A la manière suivante. Si l'anneau A est fini, l'extension E est caractérisée par sa classe de cohomologie $\xi_{\mathrm{E}} \in \mathrm{H}^1(\mathrm{I}_\ell, \mathrm{A}(1))$ (c'est la classe commune des cocycles $\sigma \mapsto \sigma(x) - x$, où $x \in \pi^{-1}(1)$), et $\mathrm{H}^1(\mathrm{I}_\ell, \mathrm{A}(1))$ s'identifie par la théorie de Kummer à $(\mathbf{Q}_\ell^{nr})^\times \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{A}$ (où $\mathbf{Q}_\ell^{nr}$ est l'extension non ramifiée maximale de $\mathbf{Q}_\ell$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$). À multiplication près par un élément de $\mathrm{A}^\times$, ξ_{E} ne dépend que de ρ. Par définition, $\mathfrak{a}_\rho$ est l'idéal de A engendré par $(v \otimes 1_{\mathrm{A}})(\xi_{\mathrm{E}})$, où $v : (\mathbf{Q}_\ell^{nr})^\times \to \mathbf{Z}$ est la valuation ℓ-adique. Lorsque A n'est pas fini, on applique ce qui précède aux quotients finis de A et on définit $\mathfrak{a}_\rho$ par passage à la limite projective. Pour que ρ soit bonne en ℓ, il faut et il suffit que l'on ait $\mathfrak{a}_\rho = 0$.

2) Supposons ρ semi-stable en ℓ. Alors ρ est ordinaire en ℓ si ρ_0 est ordinaire en ℓ.

Soit Σ un ensemble fini de nombres premiers. Disons qu'une déformation ρ de ρ_0 est *de type* Σ si son déterminant est χ_ℓ, qu'elle est semi-stable en ℓ et qu'elle a le même type de propriétés que ρ_0 en dehors de Σ, à savoir :

— si $\ell \notin \Sigma$ et que ρ_0 est bonne en ℓ, ρ est bonne en ℓ ;

— si $p \notin \Sigma \cup \{\ell\}$ et que ρ_0 est non ramifiée en p, ρ est non ramifiée en p ;

— si $p \notin \Sigma \cup \{\ell\}$ et que ρ_0 est ramifiée en p, $\rho_{|\mathrm{I}_p}$ s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base convenable de M_ρ. (Il suffit pour cela qu'il existe un sous-groupe fermé M' de M_ρ, stable par I_p, tel que I_p opère trivialement sur M' et $\mathrm{M}_\rho/\mathrm{M}'$.)

Une déformation de ρ_0 de type Σ est non ramifiée en dehors de l'ensemble fini des nombres premiers qui divisent $\ell\mathrm{N}(\rho_0)$ ou appartiennent à Σ. Une déformation de ρ_0, non ramifiée en dehors d'un ensemble fini S de nombres premiers, de déterminant χ_ℓ et semi-stable en ℓ, est de type $\mathrm{S} \cup \{\ell\}$.

PROPOSITION 2.— *Il existe un anneau local noethérien complet* R_Σ, *de corps résiduel* F, *et une déformation* ρ_Σ *de type* Σ *de* ρ_0 *à* R_Σ, *possédant la propriété universelle suivante : pour tout anneau local noethérien complet* A, *de corps résiduel* F, *et toute déformation* ρ *de type* Σ *de* ρ_0 *à* A, *il existe un unique homomorphisme d'anneaux* $u : \mathrm{R}_\Sigma \to \mathrm{A}$, *induisant l'identité sur les corps résiduels, tel que* ρ *soit isomorphe à* $\rho_\Sigma \otimes_{\mathrm{R}_\Sigma} 1_{\mathrm{A}}$.

Compte tenu des définitions précédentes et de la remarque 2, c'est un cas particulier de la situation considérée dans la prop. 2 et la remarque 1 de l'appendice II, n° 2.

Le couple $(\mathrm{R}_\Sigma, \rho_\Sigma)$ est unique à isomorphisme unique près. Nous dirons que R_Σ est *l'anneau universel de déformation de type* Σ *de* ρ_0 et que ρ_Σ est *la déformation universelle de type* Σ *de* ρ_0. Soit Σ' un sous-ensemble de Σ. Il existe d'après la prop. 2 un unique homomorphisme d'anneaux $u_{\Sigma'\Sigma} : \mathrm{R}_\Sigma \to \mathrm{R}_{\Sigma'}$, induisant l'identité sur les corps résiduels, tel que $\rho_{\Sigma'}$ soit isomorphe à $\rho_\Sigma \otimes_{\mathrm{R}_\Sigma} \mathrm{R}_{\Sigma'}$; cet homomorphisme est *surjectif* (App. II, n° 1, remarque 2).

Remarque 3. — Soit V l'espace de la représentation ρ_0 et soit $\mathfrak{sl}(\mathrm{V})$ le $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$-module formé des endomorphismes de V de trace nulle (cf. App. II, n° 2, remarque 2). Les classes d'isomorphisme de déformations de ρ_0 à $k[\varepsilon]$ de déterminant χ_ℓ correspondent bijectivement aux éléments de $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{sl}(\mathrm{V}))$ (*loc. cit.*). Celles des déformations de type Σ correspondent aux éléments d'un sous-groupe $\mathrm{H}^1_\Sigma(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{sl}(\mathrm{V}))$ (*loc. cit.*), qui est en fait un groupe de Selmer (cf. App. IV), défini par une famille $\mathcal{L}_\Sigma = (\mathrm{L}_{\Sigma,p})$, où, pour chaque p, $\mathrm{L}_{\Sigma,p}$ est un sous-groupe de $\mathrm{H}^1(\mathrm{D}_p, \mathfrak{sl}(\mathrm{V}))$ qui reflète les exigences locales en p imposées à une déformation de type Σ. (Nous ne parlons pas de la place à l'infini, car le groupe de cohomologie local correspondant est nul.) Pour $p \neq \ell$, par exemple, $\mathrm{L}_{\Sigma,p}$ est égal à $\mathrm{H}^1(\mathrm{D}_p, \mathfrak{sl}(\mathrm{V}))$ si $p \in \Sigma$ et à $\mathrm{H}^1_{nr}(\mathrm{D}_p, \mathfrak{sl}(\mathrm{V}))$ si $p \notin \Sigma$.

3. ALGÈBRES DE HECKE ET REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES ASSOCIÉES

Soit N un entier ≥ 1. Notons $\mathrm{S} = \mathrm{S}(\mathrm{N}, 2, 1)$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des formes modulaires paraboliques de type $(\mathrm{N}, 2, 1)$, $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathrm{N})$ l'anneau d'endomorphismes de S engendré par les opérateurs de Hecke T_n ($n \geq 1$) et $\mathbf{T}' = \mathbf{T}'(\mathrm{N})$ celui engendré par les opérateurs T_n pour n premier à $\ell\mathrm{N}$. L'anneau $\mathbf{T}$ est commutatif et libre de rang fini sur $\mathbf{Z}$; son sous-anneau $\mathbf{T}'$ est réduit. On définit une application $\mathbf{T}$-linéaire bijective de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{T}, \mathbf{C})$ sur S par $u \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u(\mathrm{T}_n) q^n$. Par cette bijection, les formes modulaires $f \in \mathrm{S}$ qui sont fonctions propres de tous les opérateurs de Hecke correspondent aux homomorphismes d'anneaux de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{C}$; les formes modulaires dont le développement à l'infini est à coefficients dans un sous-anneau R de $\mathbf{C}$ correspondent aux éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{T}, \mathrm{R})$.

PROPOSITION 3.— *Soit* $\mathfrak{m}$ *un idéal maximal de* $\mathbf{T}'$, *de caractéristique résiduelle* ℓ.

a) *Il existe une représentation continue semi-simple* $\tilde{\rho}_\mathfrak{m}$ *de degré* 2 *de* $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$ *sur le corps* $\mathbf{T}'/\mathfrak{m}$, *non ramifiée en dehors de* $\ell\mathrm{N}$, *telle que* $\mathrm{Tr}\, \tilde{\rho}_\mathfrak{m}(\mathrm{Frob}_p) = \mathrm{T}_p$ *et* $\det \tilde{\rho}_\mathfrak{m}(\mathrm{Frob}_p) = p$ *pour* $p \nmid \ell\mathrm{N}$. *Une telle représentation est unique à isomorphisme près.*

b) *Supposons* $\tilde{\rho}_\mathfrak{m}$ *irréductible. Notons* $\mathbf{T}'_\mathfrak{m}$ *le complété* $\mathfrak{m}$*-adique de* $\mathbf{T}'$. *Il existe une représentation continue* $\rho_\mathfrak{m}$ *de degré* 2 *de* $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$ *sur l'anneau* $\mathbf{T}'_\mathfrak{m}$, *non ramifiée en dehors de* $\ell\mathrm{N}$, *telle que* $\mathrm{Tr}\, \rho_\mathfrak{m}(\mathrm{Frob}_p) = \mathrm{T}_p$ *et* $\det \rho_\mathfrak{m}(\mathrm{Frob}_p) = p$ *pour* $p \nmid \ell\mathrm{N}$. *Une telle représentation est unique à isomorphisme près.*

Soit $\mathbf{F}$ une clôture algébrique du corps fini $\mathbf{T}'/\mathfrak{m}$. L'homomorphisme canonique $\mathbf{T}' \to \mathbf{T}'/\mathfrak{m}$ se prolonge en un homomorphisme d'anneaux $u : \mathbf{T} \to \mathbf{F}$, et $f = \sum u(\mathrm{T}_n)q^n$ est un élément de $\mathrm{S}(\mathrm{N}, 2, 1)_{\mathbf{F}}$ (avec les notations du n° 1) ; toute représentation semi-simple de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$ de degré 2 sur $\mathbf{F}$ associée à f au sens de [S], 2.1, possède les propriétés de a), et est réalisable sur $\mathbf{T}'/\mathfrak{m}$ ([3], lemme 6.13). Cela prouve l'existence de $\tilde{\rho}_{\mathfrak{m}}$. L'unicité résulte de la prop. 1 de l'appendice I.

Le groupe $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$ opère continûment sur le module de Tate $\mathbb{T}_\ell(\mathrm{J}_0(\mathrm{N}))$ de la jacobienne de $\mathrm{X}_0(\mathrm{N})$, et $\mathbb{T}_\ell(\mathrm{J}_0(\mathrm{N})) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ est un $\mathbf{T} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_\ell$-module libre de rang 2, d'où une représentation linéaire continue ρ_ℓ de degré 2 de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{T} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_\ell$. Cette représentation est non ramifiée en dehors de $\ell\mathrm{N}$, et l'on a $\mathrm{Tr}\,\rho_\ell(\mathrm{Frob}_p) = \mathrm{T}_p$ et $\det \rho_\ell(\mathrm{Frob}_p) = p$ pour $p \not| \ell\mathrm{N}$, d'après les relations d'Eichler-Shimura. Notons $\rho_{\ell,\mathfrak{m}}$ la représentation déduite de ρ_ℓ par extension des scalaires de $\mathbf{T} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_\ell$ à $\mathbf{T}_{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. L'homomorphisme canonique $\mathbf{T}'_{\mathfrak{m}} \to \mathbf{T}_{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ est injectif et la trace de $\rho_{\ell,\mathfrak{m}}$ prend ses valeurs dans $\mathbf{T}'_{\mathfrak{m}}$ d'après le théorème de Cebotarev. Supposons la représentation $\widetilde{\rho}_{\mathfrak{m}}$ irréductible. Elle est alors absolument irréductible puisque son déterminant est impair, et $\rho_{\ell,\mathfrak{m}}$ provient par extension des scalaires d'une représentation $\rho_{\mathfrak{m}}$ de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$ de degré 2 sur $\mathbf{T}'_{\mathfrak{m}}$ (App. I, prop. 2 et remarque). Une telle représentation $\rho_{\mathfrak{m}}$ est nécessairement continue et satisfait aux conditions de b). Son unicité à isomorphisme près résulte de *loc. cit.*, prop. 1.

Remarques. — 1) Sous les hypothèses de b), la représentation résiduelle de $\rho_{\mathfrak{m}}$ est isomorphe à $\widetilde{\rho}_{\mathfrak{m}}$ (App. I, cor. de la prop. 1), et il existe un sous-$\mathbf{T}'_{\mathfrak{m}}$-module libre de rang 2 de $\mathbb{T}_\ell(\mathrm{J}_0(\mathrm{N}))_{\mathfrak{m}}$, stable par $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$, qui fournit un modèle de $\rho_{\mathfrak{m}}$.

2) Conservons les notations de la prop. 2. Soit N_1 un multiple de N. On dispose d'une application de restriction $r : \mathbf{T}'(\mathrm{N}_1) \to \mathbf{T}'(\mathrm{N})$ qui applique T_n sur T_n pour $n \geq 1$ premier à $\ell\mathrm{N}_1$. Posons $\mathfrak{m}_1 = r^{-1}(\mathfrak{m})$; c'est un idéal maximal de $\mathbf{T}'(\mathrm{N}_1)$. La représentation $\widetilde{\rho}_{\mathfrak{m}}$ provient (à isomorphisme près) de $\widetilde{\rho}_{\mathfrak{m}_1}$ par l'extension des scalaires $\mathbf{T}(\mathrm{N}_1)/\mathfrak{m}_1 \to \mathbf{T}(\mathrm{N})/\mathfrak{m}$ (App. I, cor. de la prop. 1). Si $\widetilde{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est irréductible, la représentation $\rho_{\mathfrak{m}}$ provient (à isomorphisme près) de $\rho_{\mathfrak{m}_1}$ par l'extension des scalaires $\widehat{r} : \mathrm{T}(\mathrm{N}_1)_{\mathfrak{m}_1} \to \mathrm{T}(\mathrm{N})_{\mathfrak{m}}$ (*loc. cit.*) ; on en déduit, en considérant les traces de ces représentations, que $\widehat{r}$ est surjectif. (On peut démontrer mieux : le conoyau de r est un 2-groupe fini ; il est réduit à un élément si $2 \not| \mathrm{N}_1$ ou si $2 \mid \mathrm{N}$.)

4. DÉFORMATIONS DE HECKE D'UNE REPRÉSENTATION SEMI-STABLE

Soient F un corps fini de caractéristique ℓ et ρ_0 une représentation continue de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$, de degré 2 sur F, *semi-stable, modulaire et irréductible* (cf n° 1). Si $\ell = 3$, on suppose que la restriction de ρ_0 à $G_{\mathbf{Q}(\sqrt{-3})}$ est absolument irréductible. Soit $\overline{N} = \overline{N}(\rho_0)$ le produit des nombres premiers p en lesquels ρ_0 n'est pas bonne(*loc.cit.*).

PROPOSITION 4.— *Il existe un unique homomorphisme d'anneaux* $a : \mathbf{T}'(\overline{N}) \to F$ *qui applique* T_p *sur* $\operatorname{Tr} \rho_0(\mathrm{Frob}_p)$ *pour tout nombre premier* p *tel que* $p \nmid \ell\overline{N}$. *Soit* $\mathfrak{m}$ *son noyau. C'est un idéal maximal de* $\mathbf{T}'(\overline{N})$, *et la représentation* ρ_0 *est isomorphe à celle déduite de* $\widetilde{\rho}_{\mathfrak{m}}$ (cf. n° 3) *par l'extension des scalaires* $\mathbf{T}'(\overline{N})/\mathfrak{m} \to F$.

C'est une autre formulation de la prop. 1 du n° 1. En effet, soit $f \in S(\overline{N}, 2, 1)_{\overline{F}}$ une forme modulaire, fonction propre des opérateurs de Hecke T_p pour $p \nmid \ell\overline{N}$, satisfaisant les conclusions de cette proposition. Soit $a : \mathbf{T}'(\overline{N}) \to \overline{F}$ l'homomorphisme d'anneaux tel que $T(f) = a(T)f$ pour $T \in \mathbf{T}'(\overline{N})$. On a alors $a(T_p) = \operatorname{Tr} \rho_0(\mathrm{Frob}_p)$ pour tout nombre premier p tel que $p \nmid \ell\overline{N}$. Cela prouve l'existence de a ; son unicité est claire. La dernière assertion de la prop. 4 résulte de la prop. 1 de l'appendice I.

Pour tout ensemble fini Σ de nombres premiers, notons $N_\Sigma(\rho_0)$, ou simplement N_Σ, l'entier $\prod p^{n_p}$, où n_p est l'exposant de p dans $\overline{N}$ si $p \notin \Sigma$, est 2 si $p \in \Sigma$ et $p \neq \ell$, et 1 si $p \in \Sigma$ et $p = \ell$. On a $N_\varnothing = \overline{N}$. Notons m_Σ l'idéal maximal de $\mathbf{T}'(N_\Sigma)$, image réciproque de $\mathfrak{m}$ (cf. prop. 4) par l'application de restriction $\mathbf{T}'(N_\Sigma) \to \mathbf{T}'(\overline{N})$.

PROPOSITION 5.— *Soient* A *un anneau local noethérien complet de corps résiduel* F, ρ *une déformation de* ρ_0 *à* A, *et* Σ *un ensemble fini de nombres premiers. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *La représentation* ρ *est non ramifiée en dehors de* ℓN_Σ *et il existe un homomorphisme d'anneaux* $\alpha : \mathbf{T}'(N_\Sigma) \to A$ *tel que* $\operatorname{Tr} \rho(\mathrm{Frob}_p) = \alpha(T_p)$ *pour* $p \nmid \ell N_\Sigma$.

b) *Il existe un homomorphisme d'anneaux* $\widehat{\alpha} : \mathbf{T}'(N_\Sigma)_{\mathfrak{m}_\Sigma} \to A$ *tel que* ρ *soit isomorphe à la représentation déduite de* $\rho_{\mathfrak{m}_\Sigma}$ (cf. n° 3) *par l'extension des scalaires* $\widehat{\alpha}$.

Lorsqu'elles sont satisfaites, a) détermine α *de façon unique,* $\widehat{\alpha}$ *est le prolongement continu de* α, *et* ρ *est une déformation de* ρ_0 *de type* Σ (cf. n° 2).

Supposons la condition b) satisfaite. La condition a) l'est alors aussi, avec pour α la restriction de $\widehat{\alpha}$, et l'homomorphisme $\widehat{\alpha}$ est local, donc continu. Il résulte de la remarque 1 du n° 3, des propriétés des modules de Tate des variétés abéliennes semi-stables sur un corps local, et du fait que $J_0(N_\Sigma)$ a bonne réduction en un nombre premier p si $p \nmid N$ et réduction semi-stable en p si $p^2 \nmid N$, que ρ est une déformation de type Σ de ρ_0.

Supposons la condition a) satisfaite. Elle détermine α de façon unique, et les applications composées $\mathbf{T}'(N_\Sigma) \xrightarrow{\alpha} A \to F$ et $\mathbf{T}'(N_\Sigma) \to \mathbf{T}'(\overline{N}) \xrightarrow{a} F$ (avec a comme dans la prop. 4) sont égales. Il en résulte que $\alpha(\mathfrak{m}_\Sigma)$ est contenu dans l'idéal maximal de A, donc que α se prolonge par continuité en un homomorphisme $\widehat{\alpha} : \mathbf{T}'(N_\Sigma)_{\mathfrak{m}_\Sigma} \to A$. Celui-ci satisfait b) (App. I, cor. de la prop. 1).

Nous dirons qu'une déformation de ρ_0 satisfaisant les conditions a) et b) de la prop. 5 est une *déformation modulaire de type* Σ *de* ρ_0.

Soit F_0 le sous-corps de F engendré par $\mathrm{Tr}\,\rho_0(G_{\mathbf{Q}})$. Il s'identifie au corps résiduel de $\mathfrak{m}_\Sigma$, de sorte que $\mathbf{T}'(N_\Sigma)_{\mathfrak{m}_\Sigma}$ est une algèbre sur l'anneau des vecteurs de Witt $W(F_0)$. Notons $\mathbf{T}_\Sigma(\rho_0)$, ou simplement $\mathbf{T}_\Sigma$, l'anneau $\mathbf{T}'(N_\Sigma)_{\mathfrak{m}_\Sigma} \otimes_{W(F_0)} W(F)$. Il est local noethérien et complet, son corps résiduel est F, et la représentation déduite de $\rho_{\mathfrak{m}_\Sigma}$ par extension des scalaires à $\mathbf{T}_\Sigma$ est une déformation modulaire de type Σ de ρ_0. Notons-là ρ_Σ^{Hecke}. La prop. 5 peut s'interpréter en disant que le couple $(\mathbf{T}_\Sigma, \rho_\Sigma^{Hecke})$ possède la propriété universelle suivante.

PROPOSITION 6.— *Pour tout anneau local noethérien complet* A *de corps résiduel* F *et toute déformation modulaire de type* Σ *de* ρ_0 *à* A, *il existe un unique homomorphisme d'anneaux* $v : \mathbf{T}_\Sigma \to A$, *induisant l'identité sur les corps résiduels, tel que* ρ *soit isomorphe à* $\rho_\Sigma^{Hecke} \otimes_{\mathbf{T}_\Sigma} 1_A$.

Nous dirons que $\mathbf{T}_\Sigma$ est *l'anneau universel de déformation modulaire de type* Σ *de* ρ_0 et que ρ_Σ^{Hecke} est *la déformation de Hecke de type* Σ *de* ρ_0. Soit Σ' un sous-ensemble de Σ. Il existe d'après la prop. 6 un unique homomorphisme d'anneaux $v_{\Sigma'\Sigma} : \mathbf{T}_\Sigma \to \mathbf{T}_{\Sigma'}$, induisant l'identité sur les corps résiduels, tel que $\rho_{\Sigma'}^{Hecke}$ soit isomorphe à $\rho_\Sigma^{Hecke} \otimes_{\mathbf{T}_\Sigma} \mathbf{T}_{\Sigma'}$; cet homomorphisme est *surjectif* (n° 3, remarque 2).

Remarque. — L'anneau $\mathbf{T}'(N_\Sigma)$ est réduit et libre de rang fini sur $\mathbf{Z}$. Il en résulte que l'anneau $\mathbf{T}_\Sigma$ est réduit et libre de rang fini sur $W(F)$.

5. ÉNONCÉ DU THÉORÈME PRINCIPAL

Soient F un corps fini de caractéristique ℓ et ρ_0 une représentation continue de $G_{\mathbf{Q}}$, de degré 2 sur F, *semi-stable, modulaire et irréductible* (cf n° 1). Si $\ell = 3$, on suppose que la restriction de ρ_0 à $G_{\mathbf{Q}(\sqrt{-3})}$ est absolument irréductible. Soit Σ un ensemble fini de nombres premiers. Rappelons que ρ_0 possède une déformation universelle ρ_Σ de type Σ à un anneau R_Σ (n° 2, prop. 2) et une déformation de Hecke ρ_Σ^{Hecke} de type Σ à un anneau $\mathbf{T}_\Sigma$ (n° 4, prop. 6). Les anneaux R_Σ et $\mathbf{T}_\Sigma$ sont locaux; ce sont des $W(F)$-algèbres, et leurs corps résiduels s'identifient canoniquement à F. Il existe un unique homomorphisme d'anneaux $\pi_\Sigma : R_\Sigma \to \mathbf{T}_\Sigma$, induisant l'identité sur les corps résiduels, tel que ρ_Σ^{Hecke} se déduise (à isomorphisme près) de ρ_Σ par l'extension des scalaires π_Σ (n° 2, prop. 2). L'homomorphisme π_Σ

est surjectif : en effet la $W(F)$-algèbre $\mathbf{T}_\Sigma$ est engendrée par les opérateurs de Hecke T_p, pour p nombre premier qui ne divise pas ℓN_Σ, et T_p est l'image par π_Σ de la trace de $\rho_\Sigma(\mathrm{Frob}_p)$. Notons Σ_1 l'ensemble formé de ℓ et des nombres premiers $p \neq \ell$ en lesquels ρ_0 n'est pas ramifiée.

THÉORÈME 2.— *Si* $\Sigma \subset \Sigma_1$, *l'homomorphisme* $\pi_\Sigma : R_\Sigma \to \mathbf{T}_\Sigma$ *est bijectif et* $\mathbf{T}_\Sigma$ *est un anneau d'intersection complète* (cf. App. III, n° 1).

COROLLAIRE.— *Si* $\Sigma \subset \Sigma_1$, *toute déformation de* ρ_0 *de type* Σ (cf. n° 2) *est une déformation modulaire de type* Σ (cf. n° 4).

Indiquons comment le th. 1 (dans le cas particulier considéré dans l'introduction) se déduit du th. 2. La représentation ρ dans ce cas particulier est par hypothèse de déterminant χ_ℓ. Elle peut être considérée comme une déformation de sa représentation résiduelle $\widetilde{\rho}$. Pour tout $p \neq \ell$, le groupe $\widetilde{\rho}(I_p)$ est supposé unipotent : cela signifie que $\widetilde{\rho}$ est semi-stable en p. Sous chacune des hypothèses a) et b) du th. 1, $\widetilde{\rho}$ et ρ sont semi-stables en ℓ. Soit S l'ensemble des nombres premiers en lesquels ρ est ramifiée et $\widetilde{\rho}$ non ramifiée. L'ensemble $\Sigma = \{\ell\} \cup S$ est fini et contenu dans Σ_1, et ρ est une déformation de type Σ de $\widetilde{\rho}$. D'autre part, $\widetilde{\rho}$ est irréductible et, si $\ell = 3$, sa restriction à $G_{\mathbf{Q}(\sqrt{-3})}$ est absolument irréductible. D'après le cor. du th. 2, ρ est une déformation modulaire de $\widetilde{\rho}$ de type Σ. Elle satisfait donc la condition a) de la prop. 5, ce qui prouve qu'elle est une représentation modulaire au sens de [S],2.3.

Remarque. — Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète, libre de rang fini sur $W(F)$. Notons $\pi_{\Sigma,\mathcal{O}} : R_{\Sigma,\mathcal{O}} \to \mathbf{T}_{\Sigma,\mathcal{O}}$ l'homomorphisme d'anneaux déduit de π par extension des scalaires de $W(F)$ à $\mathcal{O}$. Pour que $\mathbf{T}_\Sigma$ soit un anneau d'intersection complète, il faut et il suffit que $\mathbf{T}_{\Sigma,\mathcal{O}}$ en soit un ; pour que π_Σ soit un isomorphisme, il faut et il suffit que $\pi_{\Sigma,\mathcal{O}}$ en soit un. Lorsque $\mathcal{O} = W(F')$, où F' est une extension finie de F, $R_{\Sigma,\mathcal{O}}$ et $\mathbf{T}_{\Sigma,\mathcal{O}}$ s'identifient aux anneaux universels de déformations associés à $\rho_0 \otimes_F 1_{F'}$ (App. II, n° 1, remarque 4). Lorsque le corps résiduel de $\mathcal{O}$ est F, $R_{\Sigma,\mathcal{O}}$ et $\mathbf{T}_{\Sigma,\mathcal{O}}$ possèdent des propriétés universelles analogues à celles des anneaux R_Σ et $\mathbf{T}_\Sigma$ pour les déformations de ρ aux $\mathcal{O}$-algèbres locales noethériennes complètes de corps résiduel F.

6. LE THÉORÈME 2 DANS LE CAS MINIMAL

6.1. Étude locale de certaines déformations

Soient F un corps fini de caractéristique ℓ et q un nombre premier congru à $1 \bmod \ell$. Soient A un anneau local noethérien complet, de corps résiduel F et ρ une représentation continue du groupe de décomposition D_q dans un A-module libre M de rang n.

LEMME.— *Si la représentation résiduelle $\widetilde{\rho}$ de ρ est non ramifiée et que $\rho_0(\mathrm{Frob}_q)$ est diagonalisable, à valeurs propres simples, il existe une base de* M *sur* A *dans laquelle ρ se diagonalise. Dans cette base, $\rho_{|\mathrm{I}_q}$ s'écrit* $\mathrm{diag}(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ *où les* $\chi_i : \mathrm{I}_q \to \mathrm{A}^\times$ *sont d'ordre une puissance de ℓ qui divise $q-1$.*

D'après le lemme de Hensel, il existe une base de M sur A dans laquelle $\rho(\mathrm{Frob}_q)$ opère par une matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit $x \in \mathrm{I}_q$. La matrice de $\rho(x)$ dans la base précédente est de la forme $I_n + (a_{ij})$, avec les a_{ij} dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. Comme $\widetilde{\rho}$ est non ramifiée et $q \neq \ell$, ρ est modérément ramifiée; par suite

$$(1) \qquad \rho(\mathrm{Frob}_q)\rho(x)\rho(\mathrm{Frob}_q)^{-1} = \rho(x^q) = \rho(x)^q.$$

Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de A engendré par les a_{ij} pour $i \neq j$. On déduit de (1) que, pour $i \neq j$, on a $\lambda_i a_{ij} \lambda_j^{-1} \equiv q a_{ij} \equiv a_{ij} \bmod \mathfrak{m}\mathfrak{a}$ et par suite $a_{ij} \in \mathfrak{m}\mathfrak{a}$. Mais alors on a $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}\mathfrak{a}$, d'où $\mathfrak{a} = 0$ (lemme de Nakayama). Cela prouve que $\rho(x)$, et par suite tout élément de $\rho(\mathrm{D}_q)$, opère diagonalement dans la base considérée. La relation (1) s'écrit alors $\rho(x) = \rho(x)^q$, de sorte que les caractères χ_i sont d'ordre fini divisant $q-1$; comme ils sont congrus à 1 modulo $\mathfrak{m}$, leurs ordres sont des puissances de ℓ.

Remarque. — Soit Δ_q le plus grand quotient de $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^\times$ d'ordre une puissance de ℓ. Par l'application composée $\mathrm{I}_q \to \mathrm{G}_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_q)/\mathbf{Q}) \to (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^\times \to \Delta_q$, il s'identifie à un quotient de I_q. La dernière assertion du lemme signifie que les caractères χ_i se factorisent par Δ_q. À chaque valeur propre de $\widetilde{\rho}(\mathrm{Frob}_q)$ est canoniquement associé l'un des caractères χ_i, et donc un homomorphisme de Δ_q dans $\mathrm{A}^\times$.

6.2. Construction d'ensembles auxiliaires de nombres premiers

Soient F un corps fini de caractéristique ℓ et ρ_0 une représentation continue de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$, de degré 2 sur F, de déterminant χ_ℓ, dont la restriction à $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}(\sqrt{\ell^*})}$, où $\ell^* = (-1)^{(\ell-1)/2}\ell$, est absolument irréductible (cette dernière condition est automatiquement satisfaite lorsque $\ell \geq 5$ et que ρ_0 est semi-stable et irréductible; cf. n° 1, remarque 1).

Notons V l'espace de la représentation ρ_0, et $\mathfrak{sl}(\mathrm{V})$ l'espace vectoriel des endomorphismes de V de trace nulle, muni de l'action adjointe de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$ (cf. App. II, n° 2, remarque 2). On définit un isomorphisme canonique du $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$-module $\mathfrak{sl}(\mathrm{V})(1) = \mathfrak{sl}(\mathrm{V}) \otimes \mu_\ell$ (où μ_ℓ désigne le groupe des racines ℓ-ièmes de l'unité de $\overline{\mathbf{Q}}$) sur le

$G_{\mathbf{Q}}$-module $\mathfrak{sl}(V)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(V, \overline{\mathbf{Q}}^{\times})$ (cf. App. IV) en associant à $x \otimes \zeta$ l'homomorphisme $y \mapsto \zeta^{t(xy)}$, où $t = \mathrm{Tr}_{F/\mathbf{F}_\ell} \circ \mathrm{Tr}$.

Fixons un entier $n \geq 1$.

PROPOSITION 7.— *Soit $\sigma \to a_\sigma$ un 1-cocycle continu de $G_{\mathbf{Q}}$ dans $\mathfrak{sl}(V)(1)$, non cohomologue à 0. Il existe $g \in G_{\mathbf{Q}}$ tel que :*

a) *les racines ℓ^n-ièmes de l'unité de $\overline{\mathbf{Q}}$ soient fixées par g ;*

b) *$\rho_0(g)$ ait deux valeurs propres distinctes dans $\overline{\mathrm{F}}$;*

c) *on ait $a_{g^m} \neq 0$, en notant m l'ordre de $\rho_0(g)$.*

C'est un exercice de théorie des groupes qui utilise la classification des images possibles de $G_{\mathbf{Q}}$ dans $\mathbf{PGL}(V)$ et que nous ne reproduirons pas ici.

Notons Q_n l'ensemble des nombres premiers $q \equiv 1 \bmod \ell^n$ tels que ρ_0 soit non ramifiée en q et que $\rho_0(\mathrm{Frob}_q)$ ait deux valeurs propres distinctes dans $\overline{\mathrm{F}}$.

COROLLAIRE 1.— *Il existe une infinité de nombres premiers $q \in Q_n$ tels que la restriction au groupe de décomposition D_q du cocyle $\sigma \to a_\sigma$ ne soit pas cohomologue à 0.*

Cela résulte de la prop. 1, d'après le théorème de densité de Cebotarev.

Remarque. — Si $q \in Q_n$, les espaces vectoriels $H^1_{nr}(D_q, \mathfrak{sl}(V))$ et $H^1_{nr}(D_q, \mathfrak{sl}(V)(1))$ (cf. App. IV) sont de dimension 1 sur F. Ils sont en effet isomorphes (D_q opère trivialement sur μ_ℓ puisque $q \equiv 1 \bmod \ell$) et leur dimension est égale à celle de $H^0(D_q, \mathfrak{sl}(V))$ puisque q est premier à l'ordre de $\mathfrak{sl}(V)$ (*loc. cit.*). Mais $H^0(D_q, \mathfrak{sl}(V))$ se compose des endomorphismes de V de trace nulle qui commutent à $\rho_0(\mathrm{Frob}_q)$; il est de dimension 1 puisque les deux valeurs propres de $\rho_0(\mathrm{Frob}_q)$ dans $\overline{\mathrm{F}}$ sont distinctes.

COROLLAIRE 2.— *Soit H un sous-espace vectoriel de $H^1(G_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{sl}(V)(1))$ de dimension finie d. Il existe un sous-ensemble Q de Q_n, de cardinal d, tel que l'application $H \to \prod_{q \in Q} H^1_{nr}(D_q, \mathfrak{sl}(V)(1))$ déduite des applications de restriction soit bijective.*

Notons S l'ensemble des nombres premiers q tels que l'image de H dans $H^1(D_q, \mathfrak{sl}(V)(1))$ ne soit pas contenue dans $H^1_{nr}(D_q, \mathfrak{sl}(V)(1))$; il est fini (App. IV). Posons $Q'_n = Q_n - S$. L'application $H \to \prod_{q \in Q'_n} H^1_{nr}(D_q, \mathfrak{sl}(V)(1))$ déduite des applications de restriction est injective (cor.1) et $H^1_{nr}(D_q, \mathfrak{sl}(V)(1))$ est de dimension 1 pour tout $q \in Q'_n$ (remarque). Il existe donc un sous-ensemble Q de Q'_n, de cardinal d, tel que l'application $H \to \prod_{q \in Q} H^1_{nr}(D_q, \mathfrak{sl}(V)(1))$ soit bijective.

COROLLAIRE 3.— *Supposons que* ρ_0 *soit semi-stable* (cf. n° 1). *Soit* d *la dimension de* $H^1_\varnothing(G_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{sl}(V))$ (cf. n° 2, remarque 3) *sur* F. *Il existe un sous-ensemble* Q *de* Q_n, *de cardinal* d, *tel que l'application canonique* $H^1_\varnothing(G_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{sl}(V)) \to H^1_Q(G_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{sl}(V))$ *soit bijective.*

Le groupe $H^1_\varnothing(G_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{sl}(V))$ est le groupe de Selmer associé à une famille $\mathcal{L} = (L_p)$ de sous-groupes des groupes de cohomologie locaux, avec $L_p = H^1_{nr}(D_p, \mathfrak{sl}(V))$ pour $p \neq \ell$ (*loc. cit.*). Le groupe $H^1_Q(G_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{sl}(V))$ est le groupe de Selmer associé à la famille $\mathcal{L}' = (L'_p)$, où $L'_p = L_p$ pour $p \notin Q$ et $L'_p = H^1(D_p, \mathfrak{sl}(V))$ pour $p \in Q$ (*loc. cit.*). Identifions $\mathfrak{sl}(V)^*$ à $\mathfrak{sl}(V)(1)$, notons H le sous-groupe de Selmer de $H^1(G_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{sl}(V)(1))$ associé à la famille $\mathcal{L}^\perp$ (cf. App. IV) et d' sa dimension. Il existe un sous-ensemble Q de Q_n, de cardinal d', satisfaisant les conditions du cor. 2 pour H. Dans la suite exacte de la remarque de l'App. IV, appliquée au $G_{\mathbf{Q}}$-module $\mathfrak{sl}(V)$, l'application γ est duale de l'application $H \to \prod_{q\in Q} H^1_{nr}(D_q, \mathfrak{sl}(V)(1))$, donc est injective ; par suite l'application canonique $H^1_\varnothing(G_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{sl}(V)) \to H^1_Q(G_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{sl}(V))$ est bijective.

Il reste à prouver que l'on a $d = d'$. Or la formule (1) de l'App. IV s'écrit $d - d' = d_0 - d'_0 - d_+ + d_\ell$, avec $d_0 = \dim H^0(G_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{sl}(V))$, $d'_0 = \dim H^0(G_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{sl}(V)(1))$, $d_+ = \dim H^0(D_\infty, \mathfrak{sl}(V))$ et $d_\ell = \dim L_\ell - \dim H^0(D_\ell, \mathfrak{sl}(V))$. On a $d_0 = 0$ car ρ_0 est absolument irréductible, $d'_0 = 0$ car la restriction de ρ_0 à $G_{\mathbf{Q}(\sqrt{\ell^*})}$ est absolument irréductible, et $d_+ = 1$ car 1 est valeur propre simple de la conjugaison complexe opérant dans $\mathfrak{sl}(V)$. Le calcul de d_ℓ, plus compliqué, utilise la théorie de Fontaine-Lafaille qui établit une équivalence entre la catégorie des schémas en groupes fini et plat sur $\mathbf{Z}_\ell$ et une catégorie "concrète", relevant de l'algèbre linéaire. On trouve que d_ℓ est égal à 1. On a donc bien $d = d'$.

6.3. Fin de la démonstration du théorème 2 dans le cas minimal

Soient F un corps fini de caractéristique ℓ et ρ_0 une représentation continue de $G_{\mathbf{Q}}$ de degré 2 sur F, satisfaisant les hypothèses du th.2. On se propose de démontrer ce théorème lorsque Σ est l'ensemble vide. Quitte à étendre les scalaires (n° 5, remarque), on peut supposer que les valeurs propres des éléments de $\rho_0(G_{\mathbf{Q}})$ appartiennent à F. Posons alors $d = dim\, H^1_\varnothing(G_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{sl}(V))$. Soit n un entier ≥ 1. Choisissons un ensemble Q de nombres premiers, de cardinal d, satisfaisant les conditions du cor. 3 de la prop. 7 et, pour chaque $q \in Q$, choisissons une des deux valeurs propres de $\rho_0(\mathrm{Frob}_q)$, ce qui définit (cf. 6.1, remarque), un homomorphisme de $\Delta_Q = \prod_{q\in Q} \Delta_q$ dans l'anneau $R_Q^\times$ de déformation universel de ρ_0 de type Q. Cela munit R_Q, et par suite son quotient T_Q, de structures de $W(F)[\Delta_Q]$-algèbres.

Notons $\mathfrak{a}_Q$ l'idéal d'augmentation de $W(F)[\Delta_Q]$. Pour qu'une déformation de type Q de ρ_0 à un anneau local noethérien complet A soit non ramifiée en les $q \in Q$, il faut et il suffit, par construction, que le noyau de l'homomorphisme associé $R_Q \to A$ contienne $\mathfrak{a}_Q R_Q$. L'homomorphisme canonique $R_Q \to R_\varnothing$ définit donc par passage au quotient un isomorphisme de $R_Q/\mathfrak{a}_Q R_Q$ sur $R_\varnothing$.

Nous utiliserons le résultat suivant (th. 3.13 de [2']), voisin du th. 2 de [15].

PROPOSITION 8.— $\mathbf{T}_Q$ *est un* $W(F)[\Delta_Q]$*-module libre et l'homomorphisme canonique* $\mathbf{T}_Q \to \mathbf{T}_\varnothing$ *définit par passage au quotient un isomorphisme de* $\mathbf{T}_Q/\mathfrak{a}_Q\mathbf{T}_Q$ *sur* $\mathbf{T}_\varnothing$.

Définissons alors un homomorphisme u de l'anneau $A = W(F)[[S_1, \dots, S_d]]$ dans $W(F)[\Delta_Q]$ en ordonnant les éléments $q_1, \dots, q_d$ de Q et en envoyant $1 + S_i$ sur un générateur du groupe Δ_{q_i}. Son noyau $\mathfrak{b}$ est engendré par les $(1 + S_i)^{l^{n(i)}} - 1$, où $l^{n(i)}$ est l'ordre de Δ_{q_i}. Il est contenu dans l'idéal $\mathfrak{m}_A^n(S_1, \dots, S_d)$ de A. Il résulte des propriétés décrites ci-dessus que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R_Q & \xrightarrow{\pi_Q} & \mathbf{T}_Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_\varnothing & \xrightarrow{\pi_\varnothing} & \mathbf{T}_\varnothing \end{array}$$

est une $\mathfrak{b}$-structure pour $\pi_\varnothing$, au sens de l'App. III, n° 2. Il existe a fortiori une $\mathfrak{m}_A^n(S_1, \dots, S_d)$-structure pour $\pi_\varnothing$. Comme ceci est le cas pour tout $n \geq 1$, l'application $\pi_\varnothing$ est bijective et $\mathbf{T}_\varnothing$ est un anneau d'intersection complète (*loc. cit.*).

7. LE THÉORÈME 2 DANS LE CAS GÉNÉRAL

Les hypothèses et notations sont celles du th. 2. Choisissons un homomorphisme d'anneaux de $\mathbf{T}_\varnothing$ dans l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ d'une extension finie de $\mathbf{Z}_\ell$. Cela munit la $\mathcal{O}$-algèbre $\mathbf{T}_{\varnothing,\mathcal{O}}$ d'une augmentation $\varepsilon_\varnothing : \mathbf{T}_{\varnothing,\mathcal{O}} \to \mathcal{O}$. Par composition avec la surjection canonique $\mathbf{T}_{\Sigma,\mathcal{O}} \to \mathbf{T}_{\varnothing,\mathcal{O}}$, on en déduit une augmentation $\varepsilon_\Sigma : \mathbf{T}_{\Sigma,\mathcal{O}} \to \mathcal{O}$ pour tout ensemble fini Σ de nombres premiers. Notons $\mathfrak{t}_\Sigma$ son noyau et $\mathfrak{r}_\Sigma$ l'image réciproque de $\mathfrak{t}_\Sigma$ par la surjection canonique $R_{\Sigma,\mathcal{O}} \to \mathbf{T}_{\Sigma,\mathcal{O}}$. La $\mathcal{O}$-algèbre $R_{\Sigma,\mathcal{O}}$ est locale, noethérienne et complète, et la $\mathcal{O}$-algèbre $\mathbf{T}_{\Sigma,\mathcal{O}}$ est libre de rang fini sur $\mathcal{O}$ et réduite. Notons a_Σ la longueur du $\mathcal{O}$-module $\mathfrak{r}_\Sigma/\mathfrak{r}_\Sigma^2$ et b_Σ celle du $\mathcal{O}$-module

$\mathbf{T}_{\Sigma,\mathcal{O}}/(\mathfrak{t}_\Sigma + \mathrm{Ann}\,\mathfrak{t}_\Sigma)$ (où l'annulateur de $\mathfrak{t}_\Sigma$ est pris dans $\mathbf{T}_{\Sigma,\mathcal{O}}$). Compte tenu de l'App. III, n° 3, prop. 2 et cor., et de la remarque du n° 5, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\pi_\Sigma : \mathrm{R}_\Sigma \to \mathbf{T}_\Sigma$ est une bijection et $\mathbf{T}_\Sigma$ est un anneau d'intersection complète.

b) $\pi_{\Sigma,\mathcal{O}} : \mathrm{R}_{\Sigma,\mathcal{O}} \to \mathbf{T}_{\Sigma,\mathcal{O}}$ est une bijection et $\mathbf{T}_{\Sigma,\mathcal{O}}$ est un anneau d'intersection complète.

c) On a $a_\Sigma \leq b_\Sigma$.

d) On a $a_\Sigma = b_\Sigma$.

Elles sont satisfaites pour $\Sigma = \varnothing$ (n° 6). On les démontre pour tout $\Sigma \subset \Sigma_1$ par récurrence sur le cardinal de Σ. Pour cela, il suffit de prouver que, si Σ est un sous-ensemble fini de Σ_1 et p un élément de $\Sigma_1 - \Sigma$, il existe un nombre c_p tel que l'on ait, en posant $\Sigma' = \Sigma \cup p$,

$$(*) \qquad a_{\Sigma'} \leq a_\Sigma + c_p \qquad b_{\Sigma'} \geq b_\Sigma + c_p.$$

En fait, on peut prendre pour c_p la longueur de $\mathcal{O}/\varepsilon_\Sigma(\gamma_p)$, où γ_p est un élément convenable de $\mathbf{T}_\Sigma$ (par exemple $\gamma_p = (p-1)(\mathrm{T}_p^2 - (p+1)^2)$ si $p \neq \ell$).

Les premières des inégalités (*) sont démontrées dans [2'] en donnant des groupes $\mathfrak{r}_\Sigma/\mathfrak{r}_\Sigma^2$ une interprétation cohomologique analogue à celle donnée dans l'App. II, n° 2, remarque 2. Les secondes font l'objet de la prop. 3.16 de [2'] (énoncée sous des hypothèses plus restrictives que dans [2]). Des énoncés voisins, dans un cadre plus général, sont démontrés dans le chapitre 2 de [16].

Appendice I. REPRÉSENTATIONS D'UN GROUPE SUR UN ANNEAU LOCAL (d'après Carayol [1])

Soient A un anneau local commutatif, k son corps résiduel, G un groupe et ρ une représentation de G de degré n sur A (*i.e.* dans un A-module libre M_ρ de rang n). La *trace* de ρ est l'application $g \mapsto \mathrm{Tr}\,\rho(g)$ de G dans A. Pour toute A-algèbre A$'$, on note $\rho_{(\mathrm{A}')}$ la représentation déduite de ρ par extension des scalaires de A à A$'$. On appelle *représentation résiduelle de* ρ la représentation $\rho_{(k)}$.

PROPOSITION 1.— *Supposons la représentation résiduelle de* ρ *absolument irréductible.*

a) *Le commutant de* ρ *est réduit aux homothéties.*

b) *Toute représentation de* G *de degré* n *sur* A, *de même trace que* ρ, *est isomorphe à* ρ.

Soit $u : \mathrm{A}[\mathrm{G}] \to \mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}_\rho)$ l'application A-linéaire qui prolonge ρ. Comme la représentation $\rho_{(k)}$ est absolument irréductible, l'application $u_{(k)}$ est surjective (théorème de Jacobson). L'application u est donc surjective (lemme de Nakayama), d'où a). Pour l'assertion b), voir [1], th. 1.

COROLLAIRE.— *Soient u un homomorphisme local de* A *dans un anneau local commutatif* A' *et ρ' une représentation de* G *de degré n sur* A'. *Pour que ρ' soit isomorphe à $\rho_{(\mathrm{A}')}$, il faut et il suffit que l'on ait* $\mathrm{Tr}\rho' = u \circ \mathrm{Tr}\rho$.

PROPOSITION 2.— *Supposons l'anneau local* A *hensélien. Soient* A' *un anneau commutatif contenant* A *et ρ' une représentation de degré n de* G *sur* A' *telle que :*

a) *la trace de ρ' prenne ses valeurs dans* A ;

b) *la réduction modulo* $\mathfrak{m}_{\mathrm{A}}$ *de* $\mathrm{Tr}\rho'$ *soit la trace d'une représentation absolument irréductible ρ_0 de degré n de* G *sur k.*

Il existe alors une représentation ρ de G *de degré n sur* A *de même trace que ρ'. Sa représentation résiduelle est isomorphe à ρ_0.*

C'est une variante du th. 2 de [1]. Considérons les applications A-linéaires $u : \mathrm{A}[\mathrm{G}] \to \mathrm{End}_{\mathrm{A}'}(\mathrm{M}_{\rho'})$ et $u_0 : \mathrm{A}[\mathrm{G}] \to \mathrm{End}_k(\mathrm{M}_{\rho_0})$ prolongeant ρ' et ρ_0. La seconde est surjective (théorème de Jacobson). Il existe donc un sous-ensemble S de G, de cardinal n^2, que ρ_0 applique sur une base de $\mathrm{End}_k(\mathrm{M}_{\rho_0})$. La matrice $(\mathrm{Tr}\,\rho'(st))_{(s,t)\in \mathrm{S}\times\mathrm{S}}$ de $\mathbf{M}_{n^2}(\mathrm{A})$ est inversible car sa réduction modulo $\mathfrak{m}_{\mathrm{A}}$ l'est. Par suite, $\big(\rho'(s)\big)_{s\in\mathrm{S}}$ est une base de $\mathrm{End}_{\mathrm{A}'}(\mathrm{M}_{\rho'})$ sur A'. Soit B l'image de u ; c'est une A-algèbre. On a $\mathrm{Tr}(\rho'(gt)) \in \mathrm{A}$ pour $g \in \mathrm{G}$, $t \in \mathrm{S}$, d'où, par les formules de Cramer, $\rho'(g) \in \sum_{s\in\mathrm{S}} \mathrm{A}\rho'(s)$ pour $g \in \mathrm{G}$. Il en résulte que $\big(\rho'(s)\big)_{s\in\mathrm{S}}$ est une base de B sur A.

Soit $x \in \mathrm{Ker}\, u$. Pour $t \in \mathrm{S}$, on a $\mathrm{Tr}\big(u(x)\rho'(t)\big) = 0$, d'où $\mathrm{Tr}\big(u_0(x)\rho_0(t)\big) = 0$ par réduction modulo $\mathfrak{m}_{\mathrm{A}}$; on a par suite $u_0(x) = 0$. Il existe donc un homomorphisme de A-algèbres $\mathrm{B} \to \mathrm{End}_k(\mathrm{M}_{\rho_0})$ qui applique $\rho'(s)$ sur $\rho_0(s)$ pour tout $s \in \mathrm{S}$; on en déduit que la k-algèbre $\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}} k$ est isomorphe à $\mathrm{End}_k(\mathrm{M}_{\rho_0})$. Comme l'anneau A est hensélien, B est, d'après un théorème d'Azumaya, isomorphe à l'algèbre des endomorphismes d'un A-module libre M de rang n. Identifions B à une telle algèbre. L'application $\rho : g \to \rho'(g)$ de G dans B est alors une représentation linéaire de G dans M. Par dualité de Morita, on sait que le $\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$-module $\mathrm{M}_{\rho'}$ est isomorphe à $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{N}$, où N est un A'-module. Puisque M et $\mathrm{M}_{\rho'}$ sont libres de rang n sur A et A' respectivement, le A'-module N est projectif de rang 1. Il en résulte que l'on a $\mathrm{Tr}\,\rho(g) = \mathrm{Tr}\,\rho'(g)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. La dernière assertion de la prop. 2 résulte du cor. de la prop. 1.

Remarque. — On prendra garde que ρ' n'est pas nécessairement isomorphe à $\rho_{(\mathrm{A}')}$. Il résulte de la démonstration qu'elle est isomorphe à $\rho \otimes_{\mathrm{A}} 1_{\mathrm{N}}$, où N est un A′-module projectif de rang 1 ; elle est donc isomorphe à $\rho_{(\mathrm{A}')}$ lorsque l'anneau A′ est local (ou même semi-local).

Appendice II. DÉFORMATIONS DE REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES

1. Le critère de représentabilité de Schlessinger

Soit k un corps fini de caractéristique p. Notons $\mathcal{A}_k$ la catégorie dont les objets sont les anneaux locaux noethériens complets (commutatifs) de corps résiduel k et dont les morphismes sont les homomorphismes d'anneaux induisant l'identité par passage aux corps résiduels. Tout objet de $\mathcal{A}_k$ est canoniquement muni d'une structure d'algèbre sur l'anneau des entiers de Witt $\mathrm{W}(k)$.

Soit $\mathcal{F}$ un foncteur covariant de la catégorie $\mathcal{A}_k$ dans celle des ensembles. On dit que $\mathcal{F}$ est *représenté* par un couple (R, r), où R est un objet de $\mathcal{A}_k$ et r un élément de $\mathcal{F}(\mathrm{R})$ si, pour tout objet A de $\mathcal{A}_k$ et tout $a \in \mathcal{F}(\mathrm{A})$, il existe un unique morphisme $u : \mathrm{R} \to \mathrm{A}$ tel que $\mathcal{F}(u)$ applique r sur a. On dit que $\mathcal{F}$ est *représentable* s'il existe un couple (R, r) qui le représente ; ce couple est alors unique à isomorphisme unique près. Le critère de représentabilité suivant est un cas particulier d'un théorème de Schlessinger ([11]).

PROPOSITION 1.— *Pour que $\mathcal{F}$ soit représentable, il faut et il suffit qu'il possède les propriétés suivantes :*

a) *L'ensemble $\mathcal{F}(k)$ est réduit à un élément.*

b) *Si* A, B, C *sont des anneaux artiniens de corps résiduel k, $u : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$ un morphisme et $v : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ un morphisme surjectif, l'application canonique de $\mathcal{F}(\mathrm{A} \times_{\mathrm{C}} \mathrm{B})$ dans $\mathcal{F}(\mathrm{A}) \times_{\mathcal{F}(\mathrm{C})} \mathcal{F}(\mathrm{B})$ est bijective.* (Noter que sous les hypothèses faites, le produit fibré $\mathrm{A} \times_{\mathrm{C}} \mathrm{B}$ est un anneau local artinien de corps résiduel k.)

c) *Soit* A *un objet de $\mathcal{A}_k$; l'application canonique $\mathcal{F}(\mathrm{A}) \to \varprojlim \mathcal{F}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}_{\mathrm{A}}^n)$ est bijective.*

d) *L'ensemble $\mathcal{F}(k[\varepsilon])$, où $k[\varepsilon]$ est l'algèbre des nombres duaux sur k, est fini.*

Remarques. — Supposons que $\mathcal{F}$ soit représenté par un couple (R, r). Alors :

1) L'ensemble $\mathcal{F}(k[\varepsilon])$ s'identifie au dual du k-espace vectoriel $\mathfrak{m}_{\mathrm{R}}/(\mathfrak{m}_{\mathrm{R}}^2 + p\mathrm{R})$.

2) Soient $\mathcal{F}'$ un sous-foncteur représentable de $\mathcal{F}$ et (R', r') un couple qui le représente. L'homomorphisme $u : \mathrm{R} \to \mathrm{R}'$ tel que $\mathcal{F}(u)(r) = r'$ est surjectif. En

effet, d'après 1), l'application $\mathfrak{m}_R/(\mathfrak{m}_R^2 + pR) \to \mathfrak{m}_{R'}/(\mathfrak{m}_{R'}^2 + pR')$ déduite de u est surjective, et donc aussi l'application $\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2 \to \mathfrak{m}_{R'}/\mathfrak{m}_{R'}^2$; comme les anneaux locaux R et R' sont noethériens et complets et ont même corps résiduel, l'application u est surjective.

3) Si pour tout anneau artinien A de corps résiduel k et tout idéal $\mathfrak{a}$ de carré nul de A, l'application canonique $\mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(A/\mathfrak{a})$ est surjective, R est isomorphe à une algèbre de séries formelles en un nombre fini d'indéterminées à coefficients dans $W(k)$.

4) Soit k' une extension de degré fini de k. Si A est un objet de $\mathcal{A}_{k'}$, notons A_* l'anneau formé des $a \in A$ qui se réduisent modulo $\mathfrak{m}_A$ en un élément de k. C'est un objet de $\mathcal{A}_k$. Le foncteur $\mathcal{F}' : A \mapsto \mathcal{F}(A_*)$ de la catégorie $\mathcal{A}_{k'}$ dans celle des ensembles est représenté par $\big(R\otimes_{W(k)} W(k'), \mathcal{F}(u)(r)\big)$, où $u : R \to \big(R\otimes_{W(k)} W(k')\big)_*$ est le morphisme canonique.

2. Déformations universelles de représentations galoisiennes

Soient k un corps fini de caractéristique p, n un entier ≥ 1 et ρ_0 une représentation continue de $G_{\mathbf{Q}}$ de degré n sur k. Soit A un anneau local noethérien complet de corps résiduel k. Appelons *déformation de* ρ_0 *à* A une représentation continue ρ de $G_{\mathbf{Q}}$ dans un A-module M_ρ libre de rang n, dont la représentation résiduelle $\widetilde{\rho} = \rho \otimes 1_k$ est isomorphe à ρ_0.

PROPOSITION 2 (Mazur [9] et Ramakrishna [10]).— *Supposons ρ_0 absolument irréductible. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de $G_{\mathbf{Q}}$-modules finis, stable par produits finis, sous-objets et quotients, et dont $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, muni de l'action triviale de $G_{\mathbf{Q}}$, est un objet. Soit* S *un ensemble fini de nombres premiers contenant ceux en lesquels ρ_0 est ramifiée. Pour tout anneau local noethérien complet* A *de corps résiduel k, notons $\mathcal{F}(A)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de déformations ρ de ρ_0 à* A*, non ramifiées en dehors de* S *et telles que, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ d'indice fini de* A*, le $G_{\mathbf{Q}}$-module $M_\rho/\mathfrak{a}M_\rho$ soit un objet de $\mathcal{C}$. Le foncteur $\mathcal{F}$ ainsi défini, de la catégorie $\mathcal{A}_k$* (cf. n°1) *dans celle des ensembles, est représentable.*

Il suffit de vérifier que les conditions a), b), c), d) du critère de Schlessinger sont satisfaites. Pour a) et c), c'est facile. Pour b), cela résulte de ce que le commutant de toute déformation de ρ_0 est réduit aux homothéties (App. I, prop. 1). Enfin d) résulte de ce que $\mathbf{Q}$ ne possède dans $\overline{\mathbf{Q}}$ qu'un nombre fini d'extensions de degré donné non ramifiées en dehors de S.

Remarques. — 1) Soit $\chi : G_{\mathbf{Q}} \to W(k)^\times$ un relèvement de $\det \rho_0$ à l'anneau des vecteurs de Witt de k. La prop. 1 reste valable si l'on se restreint aux déformations de ρ_0 de déterminant χ.

2) Soit V l'espace de la représentation ρ_0. Notons $\mathfrak{gl}(\mathrm{V})$ le k-espace vectoriel des endomorphismes de V, sur lequel $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$ opère par la représentation adjointe $(g, M) \mapsto \rho_0(g)M\rho_0(g^{-1})$. Il existe une bijection canonique ι de $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{gl}(\mathrm{V}))$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de déformations de ρ_0 à la k-algèbre des nombres duaux $k[\varepsilon]$: à la classe de cohomologie d'un 1-cocycle $a : \mathrm{G}_{\mathbf{Q}} \mapsto \mathfrak{gl}(\mathrm{V})$ correspond la classe d'isomorphisme de la déformation obtenue en faisant opérer $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$ sur $\mathrm{V}\otimes_k k[\varepsilon]$ par $\sigma \mapsto (1 + a(\sigma) \otimes \varepsilon) \circ (\rho_0(\sigma) \otimes 1)$.

Sous les hypothèses de la prop. 2, notons $\mathrm{H}^1_{\mathcal{C}}(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{gl}(\mathrm{V}))$ l'image réciproque de $\mathcal{F}(k[\varepsilon])$ par ι. C'est un sous-k-espace vectoriel de $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{gl}(\mathrm{V}))$. Si (R, r) représente le foncteur $\mathcal{F}$, la bijection de $\mathrm{H}^1_{\mathcal{C}}(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{gl}(\mathrm{V}))$ sur le dual du k-espace vectoriel $\mathfrak{m}_{\mathrm{R}}/\mathfrak{m}_{\mathrm{R}}^2 + p\mathrm{R}$, déduite de ι modulo l'identification de la remarque 1 du n° 1, est k-linéaire. Par suite, R est isomorphe à un quotient de $\mathrm{W}(k)[[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]]$, où $n = \dim_k \mathrm{H}^1_{\mathcal{C}}(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}, \mathfrak{gl}(\mathrm{V}))$.

Tout ce qui précède reste valable lorsqu'on se restreint aux déformations de déterminant fixé (cf. remarque 1), à condition de remplacer $\mathfrak{gl}(\mathrm{V})$ par l'espace vectoriel $\mathfrak{sl}(\mathrm{V})$ des endomorphismes de V de trace nulle.

Appendice III. ANNEAUX D'INTERSECTION COMPLÈTE

1. Définition

Un anneau local noethérien complet (commutatif) Λ est isomorphe au quotient d'un anneau local noethérien régulier et complet A par un idéal $\mathfrak{a}$. On dit que Λ est un *anneau d'intersection complète* si $\mathfrak{a}$ est engendré par une suite régulière d'éléments de A, *i.e.* une suite finie $(a_1, \ldots, a_n)$ telle que l'homothétie de rapport a_i dans $\mathrm{A}/(a_1\mathrm{A} + \ldots + a_{i-1}\mathrm{A})$ soit injective pour $1 \leq i \leq n$; cette définition ne dépend pas du couple $(\mathrm{A}, \mathfrak{a})$ choisi ([8], th. 21.2).

2. Premier critère d'isomorphisme

Soient $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel fini et $\pi : \mathrm{R} \to \mathrm{T}$ un homomorphisme de $\mathcal{O}$-algèbres. Soit r un entier ≥ 0. Posons $\mathrm{A} = \mathcal{O}[[\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_r]]$. Considérons R et T comme des A-algèbres en faisant opérer les S_i par 0. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A contenu dans $\sum A\mathrm{S}_i$. Appellons $\mathfrak{a}$-structure pour π la donnée de deux A-algèbres R′ et T′ et d'un diagramme commutatif d'homomorphismes surjectifs de A-algèbres

$$\begin{array}{ccc} R' & \xrightarrow{\pi'} & T' \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ R & \xrightarrow{\pi} & T \end{array}$$

satisfaisant les conditions suivantes :

a) en tant que $\mathcal{O}$-algèbre, R' est isomorphe à un quotient de $\mathcal{O}[[X_1,\ldots,X_r]]$;

b) pour tout idéal $\mathfrak{b}$ de A contenant $\mathfrak{a}$, $T'/\mathfrak{b}T'$ est une $A/\mathfrak{b}$-algèbre fidèle ;

c) le noyau de α est $\sum S_iR'$ et celui de β est $\sum S_iT'$.

Notons que lorsqu'une telle structure existe, R et T sont des anneaux locaux, noethériens et complets.

PROPOSITION 1.— *Supposons que* T *soit libre de rang fini sur* $\mathcal{O}$. *Soit* $(\mathfrak{a}_n)_{n\geq 0}$ *une suite décroissante d'idéaux de* A, *d'intersection nulle. S'il existe pour tout* $n \geq 0$ *une* $\mathfrak{a}_n$*-structure pour* π, T *est un anneau d'intersection complète et* π *est bijectif.*

Pour la démonstration, on pourra consulter [2'] (th. 3.20 prouvé en 5.10).

3. Deuxième critère d'isomorphisme

Soient $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète complet et T une $\mathcal{O}$-algèbre locale, libre de rang fini sur $\mathcal{O}$, munie d'une augmentation, *i.e.* d'un homomorphisme de $\mathcal{O}$-algèbres $\varepsilon : T \to \mathcal{O}$. Posons $\mathfrak{t} = \operatorname{Ker}\varepsilon$ et supposons que $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}^2$ soit de longueur finie sur $\mathcal{O}$ (ce qui signifie que $V(\mathfrak{t})$ est une composante irréductible de multiplicité 1 de Spec T) ; cette condition est satisfaite par exemple lorsque l'anneau T est réduit.

PROPOSITION 2.— *La longueur sur* $\mathcal{O}$ *de* $T/(\mathfrak{t}+\operatorname{Ann}_T\mathfrak{t})$ *est inférieure à celle de* $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}^2$, *et l'on a égalité si et seulement si* T *est un anneau d'intersection complète.*

Wiles démontre cette proposition dans [16] en supposant que l'anneau T est de Gorenstein. Cette hypothèse est superflue, comme le remarque Lenstra ([7], formule (6) et cor. 10), auquel nous renvoyons pour la démonstration.

COROLLAIRE.— *Soit* R *une* $\mathcal{O}$*-algèbre locale noethérienne et complète et soit* $\pi : R \to T$ *un homomorphisme surjectif de* $\mathcal{O}$*-algèbres. Posons* $\mathfrak{r} = \pi^{-1}(\mathfrak{t})$. *Si la longueur sur* $\mathcal{O}$ *de* $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2$ *est inférieure à celle de* $T/(\mathfrak{t}+\operatorname{Ann}_T\mathfrak{t})$, π *est bijectif et* T *est un anneau d'intersection complète.*

L'application $u : \mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2 \to \mathfrak{t}/\mathfrak{t}^2$ déduite de π est surjective. La longueur de $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}^2$ est donc inférieure à celle de $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2$. D'après la prop. 2, ces longueurs sont égales, *i.e.* u est bijective, et l'anneau T est d'intersection complète. Choisissons des relèvements $r_1, \ldots, r_n$ dans $\mathfrak{r}$ de générateurs du $\mathcal{O}$-module $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2$. L'homomorphisme de $\mathcal{O}$-algèbres $\psi : \mathcal{O}[[X_1, \ldots, X_n]] \to R$ qui applique X_i sur r_i est surjectif. Comme T est un anneau d'intersection complète de dimension 1, $\mathrm{Ker}(\pi \circ \psi)$ est engendré par une suite régulière $(f_1, \ldots, f_n)$ d'éléments de $\mathcal{O}[[X_1, \ldots, X_n]]$. Ces éléments sont sans terme constant. Soient $f_i^{(1)} = \sum a_{ij} X_j$ leurs composantes homogènes de degré 1. Le $\mathcal{O}$-module $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}^2$ s'identifie à $\sum \mathcal{O}X_j / \sum \mathcal{O} f_i^{(1)}$; comme il est de longueur finie, on a $\det(a_{ij}) \neq 0$. On a $\pi(\sum a_{ij} r_j) \in \mathfrak{t}^2$, d'où $\sum a_{ij} r_j \in \mathfrak{r}^2$ puisque l'application u est injective. Il existe donc des éléments $g_i \in \mathcal{O}[[X_1, \ldots, X_n]]$, sans terme constant et de mêmes composantes homogènes de degré 1 que les f_i, tels que $\psi(g_i) = 0$. Ils appartiennent au noyau de $\pi \circ \psi$, donc s'écrivent $\sum h_{il} f_l$, avec les h_{il} dans $\mathcal{O}[[X_1, \ldots, X_n]]$. En comparant les composantes homogènes de degré 1, on constate que l'on a $a_{ij} = \sum h_{il}(0) a_{lj}$ quels que soient i et j. Cela implique, puisque $\det(a_{ij}) \neq 0$, que $\big(h_{ij}(0)\big)$ est la matrice unité et par suite que la matrice (h_{ij}) est inversible. Ainsi les f_i appartiennent au noyau de ψ, d'où $\mathrm{Ker}(\pi \circ \psi) = \mathrm{Ker}\, \psi$; cela prouve que l'homomorphisme π est injectif.

Appendice IV. GROUPES DE SELMER

Soient K un corps de nombres, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, et M un groupe abélien fini sur lequel $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ opère continûment. Notons M^* le G-module $\mathrm{Hom}(M, \overline{K}^\times)$.

Choisissons au-dessus de chaque place v de K une place de $\overline{K}$, et notons D_v son groupe de décomposition. Le groupe (de cohomologie continue) $H^1(D_v, M)$ est fini. On obtient, en composant le cup-produit et le plongement canonique de $H^2(D_v, \overline{K}^\times)$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, une forme $\mathbf{Z}$-bilinéaire inversible (dualité de Tate locale)

$$H^1(D_v, M) \times H^1(D_v, M^*) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

Si v est une place finie de K, on note I_v le sous-groupe d'inertie de D_v et $H^1_{nr}(D_v, M)$ le noyau de l'application de restriction $H^1(D_v, M) \to H^1(I_v, M)$; l'ordre de $H^1_{nr}(D_v, M)$ est égal à celui de $H^0(D_v, M)$. Lorsque la caractéristique résiduelle de v ne divise pas l'ordre de M, l'orthogonal (pour la dualité de Tate locale) de $H^1_{nr}(D_v, M)$ est $H^1_{nr}(D_v, M^*)$.

Les images x_v d'un élément $x \in \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathrm{M})$ par les applications de restriction $\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathrm{M}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{D}_v,\mathrm{M})$ appartiennent à $\mathrm{H}^1_{nr}(\mathrm{D}_v,\mathrm{M})$ pour presque toute place finie v de K. (Pour tout cela, voir [12], ch. II, §6.)

Supposons donné, pour chaque place v de K, un sous-groupe L_v de $\mathrm{H}^1(\mathrm{D}_v,\mathrm{M})$, égal pour presque toute place finie v à $\mathrm{H}^1_{nr}(\mathrm{D}_v,\mathrm{M})$. L'ensemble des éléments $x \in \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathrm{M})$ tels que $x_v \in \mathrm{L}_v$ pour tout v s'appelle le *groupe de Selmer associé à la famille* $\mathcal{L} = (\mathrm{L}_v)$; notons-le $\mathrm{H}^1_{\mathcal{L}}(\mathrm{G},\mathrm{M})$. Soit $\mathcal{L}^\perp$ la famille $(\mathrm{L}_v^\perp)$, où $\mathrm{L}_v^\perp$ est l'orthogonal de L_v dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{D}_v,\mathrm{M}^*)$. Les groupes de Selmer $\mathrm{H}^1_{\mathcal{L}}(\mathrm{G},\mathrm{M})$ et $\mathrm{H}^1_{\mathcal{L}^\perp}(\mathrm{G},\mathrm{M}^*)$ sont finis et leurs ordres sont liés par relation

$$(1) \qquad \frac{|\mathrm{H}^1_{\mathcal{L}}(\mathrm{G},\mathrm{M})|}{|\mathrm{H}^1_{\mathcal{L}^\perp}(\mathrm{G},\mathrm{M}^*)|} = \frac{|\mathrm{H}^0(\mathrm{G},\mathrm{M})|}{|\mathrm{H}^0(\mathrm{G},\mathrm{M}^*)|} \prod_v \frac{|\mathrm{L}_v|}{|\mathrm{H}^0(\mathrm{D}_v,\mathrm{M})|}.$$

Cette formule se déduit des théorèmes de Poitou-Tate : on pourra consulter [2], th. 2.14 où est traité le cas $\mathrm{K} = \mathbf{Q}$, qui nous suffira ; le cas général est similaire.

Remarque. — Soit $\mathcal{L}' = (\mathrm{L}'_v)$ une autre famille de sous-groupes des $\mathrm{H}^1(\mathrm{D}_v,\mathrm{M})$, telle que L_v soit contenu dans L'_v pour tout v et égal à L'_v pour presque tout v. On déduit de la suite exacte de Poitou-Tate une suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^1_{\mathcal{L}}(\mathrm{G},\mathrm{M}) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{H}^1_{\mathcal{L}'}(\mathrm{G},\mathrm{M}) \xrightarrow{\beta} \prod_v \mathrm{L}'_v/\mathrm{L}_v \xrightarrow{\gamma} \mathrm{H}^1_{\mathcal{L}^\perp}(\mathrm{G},\mathrm{M}^*)^\vee \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1_{\mathcal{L}'^\perp}(\mathrm{G},\mathrm{M}^*)^\vee \to 0$$

où α est l'injection canonique, β se déduit des applications de restriction, $\mathrm{X}^\vee$ désigne pour tout groupe fini X le groupe $\mathrm{Hom}(\mathrm{X},\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et δ, γ se déduisent des applications analogues à α et β par dualité. Cette suite exacte montre que la validité de la formule (1) ne dépend pas du choix de $\mathcal{L}$.

BIBLIOGRAPHIE

[S] J-P. SERRE, *Travaux de Wiles (et Taylor, ...), partie I*, Séminaire Bourbaki 1994/95, exposé 803.

[1] H. CARAYOL, *Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet*, Contemporary Math. **165** (1994), 213-237.

[2] H. DARMON, F. DIAMOND et R. TAYLOR, *Fermat's Last Theorem*, Current Developments in Math. 1995, International Press, Cambridge MA.

[2'] H. DARMON, F. DIAMOND et R. TAYLOR, *Fermat's Last Theorem*, Current Developments in Math., International Press, Cambridge MA, version révisée et complétée, à paraître.

[3] P. DELIGNE et J-P. SERRE, *Formes modulaires de poids* 1, Ann. Sci. E.N.S. **7** (1974), 507-530.

[4] F. DIAMOND, *On deformation rings and Hecke rings*, Ann. of Math., à paraître.

[5] F. DIAMOND, *The refined conjecture of Serre*, Conference on Elliptic Curves, Hong-Kong 1993, International Press, Cambridge MA (1995), 22-37.

[6] J-M. FONTAINE et B. MAZUR, *Geometric Galois representations*, Conference on Elliptic Curves, Hong-Kong 1993, International Press, Cambridge MA (1995), 41-78.

[7] H. W. LENSTRA Jr, *Complete intersections and Gorenstein rings*, Conference on Elliptic Curves, Hong-Kong 1993, International Press, Cambridge MA (1995), 99-109.

[8] H. MATSUMURA, *Commutative ring theory*, Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge Univ. Press, 1986.

[9] B. MAZUR, *Deforming Galois representations*, in : Galois groups over $\mathbf{Q}$, MSRI Publ. **16**, (1989), 385-437.

[10] R. RAMAKRISHNA, *On a variation of Mazur's deformation functor*, Comp. Math. **87** (1993), 269-286.

[11] M. SCHLESSINGER, *Functors of Artin rings*, Trans. A.M.S. **130**, (1968), 208–222.

[12] J-P. SERRE, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Math. **5**, Springer-Verlag. 1973.

[13] J-P. SERRE, *Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques*, Lect. Notes in Math **350**, 1973, Springer-Verlag, 191-268.

[14] J-P. SERRE, *Sur les représentations modulaires de degré* 2 *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Duke Math. J. **54** (1987), 179-230.

[15] R. TAYLOR et A. WILES, *Ring theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math. **141** (1995), 553-572.

[16] A. WILES, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. **141** (1995), 443-551.

Joseph OESTERLÉ
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
F-75005 PARIS