SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MAKHLOUF DERRIDJ

La sous-ellipticité pour le problème $\bar{\partial}$-Neumann dans un domaine pseudoconvexe de C^n

Séminaire N. Bourbaki, 1994-1995, exp. n° 790, p. 7-27.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1994-1995__37__7_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 1994
47ème année, 1994-95, n° 790

LA SOUS-ELLIPTICITÉ POUR LE PROBLÈME $\overline{\partial}$–NEUMANN DANS UN DOMAINE PSEUDOCONVEXE DE $\mathbf{C}^n$ [d'après D. Catlin]

par **Makhlouf DERRIDJ**

1. INTRODUCTION

Notre but, ici, n'est pas de parler des opérateurs sous-elliptiques en général (voir pour cela des ouvrages d'équations aux dérivées partielles tels que [21], [33], [45]), mais de nous focaliser sur la propriété de sous-ellipticité concernant le problème $\overline{\partial}$-Neumann. Avant tout, nous allons introduire ce problème et dire succinctement pourquoi des spécialistes en Analyse complexe s'y intéressent.

L'opérateur à coefficients constants, $\overline{\partial}$ dans $\mathbf{C}^n$, est donné par :

$$\overline{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_j, \text{ pour } f \text{ fonction } C^1, \text{ où } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\,\frac{\partial f}{\partial y_j}\Big). \tag{1.1}$$

De façon plus générale, en considérant des (p, q)-formes :

$$\begin{cases} u = \displaystyle\sum_{\substack{|I|=p\\ |J|=q}} u_{IJ}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J, \ u_{IJ} \text{ étant des fonctions } C^1 \\ I = (i_1, \cdots, i_p),\ J = (j_1, \cdots, j_q) \text{ ordonnés ;} \\ \qquad dz_I = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p},\ d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}; \end{cases} \tag{1.2}$$

alors $\overline{\partial}_{p,q} u$ est défini par :

$$\overline{\partial}_{p,q} u = \sum_{\substack{|I|=p\\ |J|=q}} \overline{\partial} u_{IJ} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J. \tag{1.3}$$

On remarquera que p joue le rôle d'un simple paramètre et que donc il suffira de considérer $p = 0$. De toute façon, il suffira de noter $\overline{\partial}_q$ (quel que soit p) l'opérateur précédent.

D'autre part, nous avons considéré des formes de classe C^1. Dorénavant on considérera $\overline{\partial}_q$ opérant sur des formes différentielles à coefficients distributions, c'est-à-dire que l'opérateur $\overline{\partial}$ opère au sens des distributions. Donc nous venons de considérer l'opérateur (en prenant $p = 0$) :

$$\overline{\partial}_q : (0,q)\text{-formes} \longrightarrow (0,q+1)\text{-formes},$$

sans préciser pour le moment l'ouvert sur lequel il agit.

Un premier problème qui peut se poser est l'analogue du problème de Poincaré pour d (ici le complexe de Dolbeault remplace le complexe de de Rham). Pour cela, précisons :

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \text{Soit } \Omega \text{ un ouvert de } \mathbf{C}^n. \text{ Résoudre l'équation :} \\ \overline{\partial}_q u = f \,,\ f\,(0,q+1)\text{-forme dans } \Omega,\ 0 \le q+1 \le n. \end{cases}$$

Évidemment, comme $\overline{\partial}_{q+1}\,\overline{\partial}_q = 0$, il est nécessaire que $\overline{\partial}_{q+1}\, f = 0$. D'autre part, on peut préciser l'espace où se trouve f (du point de vue régularité) et savoir où on peut trouver u.

Comme pour le problème de Poincaré pour d, la condition $\overline{\partial} f = 0$ n'est pas suffisante pour résoudre (1.4) globalement dans Ω. Une hypothèse de pseudoconvexité sera suffisante pour résoudre dans le cadre $C^\infty(\Omega)$ (L. Hörmander [30] ; voir plus loin la définition de cette notion).

Une méthode qui s'est révélée puissante pour attaquer le problème (1.4) est la méthode dite L^2 (signalons évidemment L. Hörmander [30][31], mais aussi C.B. Morrey [44], A. Andreotti-E. Vesentini [1] et bien d'autres). Il s'agit de résoudre le problème :

$$(1.5) \qquad \begin{cases} \overline{\partial}_q\, u = f \quad \text{dans} \quad \Omega \quad \text{avec } f \in L^2_{(0,q+1)}(\Omega) \quad \text{et} \quad \overline{\partial}_{q+1}\, f = 0 \\ u \in L^2_{(0,q)}(\Omega) \,,\ u \perp \operatorname{Ker} \overline{\partial}_q \text{ dans } L^2_{(0,q)}(\Omega). \end{cases}$$

En fait, L. Hörmander a considéré des espaces L^2 avec poids.

Signalons que cette méthode a été utilisée (et s'est révélée féconde) dans nombre de problèmes touchant à l'Analyse et à la Géométrie (Travaux de A. Andreotti - E. Vesentini [1], J.-P. Demailly [16], L. Hörmander [30], [31], J.J. Kohn [35], H. Skoda [49], etc.).

À partir des solutions précédentes, des résultats de régularité pour la solution u donnée dans (1.5) peuvent être déduits de la régularité de f (dans des espaces de Sobolev locaux par exemple).

Pour aller plus loin dans les exigences, on peut se poser le problème de la régularité de u, non seulement dans l'ouvert Ω, mais dans $\overline{\Omega}$ (lorsque Ω est suffisamment régulier), à partir de la régularité de f dans $\overline{\Omega}$.

Pour cela, il s'est révélé utile de considérer un problème associé à $\overline{\partial}_q$, à savoir un problème aux limites pour un "Laplacien complexe" associé à $\overline{\partial}_q$: c'est le problème de Neumann pour $\overline{\partial}$ (à l'ordre q), que nous développons maintenant.

2. LE PROBLÈME DE NEUMANN POUR $\overline{\partial}$. PSEUDOCONVEXITÉ. SOUS-ELLIPTICITÉ

2.1. Le problème $\overline{\partial}$-Neumann

Nous commençons par considérer le complexe de Dolbeault autour du bidegré $(0,q)$, dans Ω, pour $1 \leq q \leq n-1$:

$$C^{\infty}_{(0,q-1)}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}_{q-1}} C^{\infty}_{(0,q)}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}_q} C^{\infty}_{(0,q+1)}(\Omega). \tag{2.1}$$

Comme il est commode de travailler avec des espaces de Hilbert, on peut regarder plutôt le complexe :

$$L^2_{(0,q-1)}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}_{q-1}} L^2_{(0,q)}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}_q} L^2_{(0,q+1)}(\Omega), \tag{2.2}$$

mais où $\overline{\partial}_{q-1}$ et $\overline{\partial}_q$ sont considérés comme opérateurs non bornés dans des espaces de Hilbert, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \overline{\partial}_q : \{u \in L^2_{(0,q)}(\Omega)\,,\ \overline{\partial}_q u \in L^2_{(0,q+1)}(\Omega)\} \longrightarrow L^2_{(0,q+1)}(\Omega) \\ \text{l'espace en accolade étant dit domaine de } \overline{\partial}_q\,; \end{cases} \tag{2.3}$$

ces opérateurs non bornés sont fermés et à domaine dense et se prêtent donc à la théorie abstraite de tels opérateurs.

En particulier, on peut passer aux adjoints $\overline{\partial}^*_{q-1}$, $\overline{\partial}^*_q$. Il y a un lien entre $\overline{\partial}^*_q$ et l'adjoint formel (c'est-à-dire au sens des distributions) de $\overline{\partial}_q$, noté θ_q : $\overline{\partial}^*_q$ est la restriction de θ_q au domaine de l'opérateur non borné $\overline{\partial}^*_q$, noté $\mathcal{D}(\overline{\partial}^*_q)$.

J.J. Kohn a considéré le Laplacien complexe suivant (tel que suggéré par Spencer) :

$$(2.4)\qquad \begin{cases} \square_q = \overline{\partial}_{q-1}\,\overline{\partial}^*_{q-1} + \overline{\partial}^*_q\,\overline{\partial}_q : L^2_{(0,q)}(\Omega) \longrightarrow: L^2_{(0,q)}(\Omega). \\ \mathcal{D}(\square_q) = \{u \in \mathcal{D}(\overline{\partial}_q) \cap \mathcal{D}(\overline{\partial}^*_{q-1}), \overline{\partial}_q u \in \mathcal{D}(\overline{\partial}^*_q), \overline{\partial}^*_{q-1} u \in \mathcal{D}(\overline{\partial}_{q-1})\}. \end{cases}$$

La proposition suivante est élémentaire.

PROPOSITION 2.5.— *Soient* $f \in L^2_{(0,q+1)}(\Omega)$, $\overline{\partial}_{q+1} f = 0$ *et* $u \in L^2_{(0,q+1)}(\Omega)$ *telles que :* $\square_{q+1} u = f$, $u \in \mathcal{D}(\square_{q+1})$. $q+1 \leq n$. *Alors* $\overline{\partial}^* u$ *est solution du problème* (1.5) ; $v = \overline{\partial}^* u$ *est dite solution canonique, ou solution de Kohn, du problème* (1.5).

Le problème (2.4) est le problème de Neumann pour $\overline{\partial}$. C'est bien un problème aux limites pour $\square_q$. Dans le cas où u est assez régulière, la condition abstraite $u \in \mathcal{D}(\square_q)$ s'écrit de la façon concrète suivante :

Soit Ω, régulier de classe C^∞, borné, donné par la fonction définissante r, *i.e.* :

$$(2.5)\qquad \begin{cases} \Omega = \{r < 0, r \in C^\infty(\mathbf{C}^n)\} \text{ avec } dr \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega = \{r = 0\}. \\ \text{Alors on a :} \\ u \in \mathcal{D}(\overline{\partial}^*_{q-1}) \Longleftrightarrow u \rfloor \overline{\partial} r = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \\ \overline{\partial}_q u \in \mathcal{D}(\overline{\partial}^*_q) \Longleftrightarrow \overline{\partial} u \rfloor \overline{\partial} r = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Et donc $u \in \mathcal{D}(\square_q) \Longleftrightarrow u \rfloor \overline{\partial} r = 0$ et $\overline{\partial} u \rfloor \overline{\partial} r = 0$ sur $\partial\Omega$.

Dorénavant on ne considérera que des domaines Ω, bornés, réguliers, de classe C^∞ (donc donnés par une fonction r telle que ci-dessus).

Comme notre propos, ici, n'est pas de se poser des problèmes d'existence pour (2.4), mais des questions de régularité, donc à s'intéresser à des techniques permettant de l'obtenir, nous passons rapidement à une de ces techniques, à savoir la sous-ellipticité. Faisons tout de même les remarques suivantes :

Remarques : 1) Dans le cas d'un ouvert borné pseudoconvexe, régulier de $\mathbf{C}^n$, l'opérateur $\square_q$ admet un inverse N_q dit opérateur de Neumann.

2) Il se pose deux problèmes de régularité : la régularité globale dans $\overline{\Omega}$: si $f \in C^\infty_{(0,q)}(\overline{\Omega})$ et $\square_q u = f$, a-t-on $u \in C^\infty_{(0,q)}(\overline{\Omega})$? Ce qui est en générale une question ouverte, avec cependant des réponses sous certaines hypothèses supplémentaires ; la question locale : $f \in C^\infty_{(0,q)}(\overline{\Omega} \cap V) \overset{?}{\Longrightarrow} u \in C^\infty_{(0,q)}(\overline{\Omega} \cap U)$. Dans le cas global, citons

([6] [8]), en remarquant que le problème de l'existence globale de $u \in C^\infty_{(0,q-1)}(\overline{\Omega})$ pour l'équation $\overline{\partial} u = f$, $f \in C^\infty_{(0,q)}(\overline{\Omega})$ a été obtenu par J.J. Kohn ([36]).

3) La régularité C^∞ pour le problème $\overline{\partial}$-Neumann entraîne la régularité C^∞ du projecteur de Bergman : en effet, si $P : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \cap H(\Omega)$ est le projecteur de Bergman, alors $P = I - \overline{\partial}^* N_1 \overline{\partial}$, où N_1 est l'inverse de $\Box_1$ (voir [34]). Cela entraîne, d'après un théorème de Bell et Ligocka ([3]), une simplification et une généralisation du théorème de Fefferman sur l'extension au bord d'applications biholomorphes, à des domaines bornés, réguliers, faiblement pseudoconvexes.

4) Lorsqu'on prend $u \in \mathcal{D}^{(0,q)}(\Omega)$ (donc à support compact dans Ω), alors $(\Box_q u, u) = \|\overline{\partial}_q u\|^2 + \|\overline{\partial}^*_{q-1} u\|^2$; cette dernière expression montre que la forme quadratique : $Q(u,v) = (\overline{\partial}_q u, \overline{\partial}_q v) + (\overline{\partial}^*_{q-1} u, \overline{\partial}^*_{q-1} v)$ est intimement liée à l'opérateur $\Box_q$. C'est elle qui interviendra dans la définition de la sous-ellipticité.

2.2. La sous-ellipticité pour le problème $\overline{\partial}$-Neumann

La sous-ellipticité est un ingrédient qui permet de montrer la régularité (de la solution considérée) dans des classes de Sobolev près du bord et donc de la régularité C^∞ jusqu'au bord.

Dorénavant, par simplification d'écriture, $\overline{\partial}_q$ (resp. $\overline{\partial}^*_q$) sera noté $\overline{\partial}$ (resp. $\overline{\partial}^*$).

DÉFINITION 2.2.— *Soit $p \in \partial\Omega$. On dit que le problème $\overline{\partial}$-Neumann vérifie une estimation sous-elliptique (ou encore est sous-elliptique) pour les $(0,q)$-formes, $1 \leq q \leq n-1$, au point p, s'il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage U de p, tels que :*

$$\|u\|_\varepsilon \leq C\,(\|\overline{\partial} u\| + \|\overline{\partial}^* u\| + \|u\|), \quad \forall u \in \mathcal{D}^{(0,q)}(U \cap \overline{\Omega}), \tag{2.6}$$

où $\|u\|_\varepsilon$ est la norme de Sobolev de u, d'ordre ε dans Ω, et $\mathcal{D}^{(0,q)}(U \cap \overline{\Omega})$ désigne l'espace des $(0,q)$-formes à coefficients dans $\mathcal{D}(U \cap \overline{\Omega})$ et qui sont dans $\mathcal{D}(\overline{\partial}^*)$.

Remarquons que dans la définition précédente on ne précise pas la valeur de ε. Mais il y a des travaux où la valeur de ε est précisée, ce qu'on verra plus loin.

2.3. Forme de Levi, pseudoconvexité

Maintenant nous considérons une fonction définissante r de Ω, comme dans (2.5), ainsi que la forme hermitienne définie par la matrice $\left(\frac{\partial^2 r(z)}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k}\right)_{1\leq j,k\leq n}$, $z \in \overline{\Omega}$.

DÉFINITION 2.3.— *On appelle forme de Levi en z, $z \in \partial\Omega$, la restriction de la forme précédente à l'espace tangent complexe en z à $\partial\Omega$ (c'est-à-dire l'espace des $t \in \mathbf{C}^n$ tels que $\sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_j}(z)\, t_j = 0$).*

Les propriétés de cette forme (telles que signe des valeurs propres, etc.) sont indépendantes du choix de r. Elles sont intrinsèques à $\partial\Omega$. D'où la définition suivante.

DÉFINITION 2.4.— *On dit que $\partial\Omega$ est pseudoconvexe (resp. strictement pseudoconvexe) en $p \in \partial\Omega$ si la forme de Levi en p est positive (resp. définie positive).*

Un théorème, qui commence maintenant à dater, est le suivant :

THÉORÈME 2.5 ([31],[35]).— *Supposons $\partial\Omega$ strictement pseudoconvexe au point $p \in \partial\Omega$. Alors le problème $\overline{\partial}$-Neumann est sous-elliptique au point p pour $1 \leq q \leq n-1$, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$.*

Remarques : 1) En fait, pour $1 \leq q \leq n-1$, une condition nécessaire et suffisante de sous-ellipticité pour les $(0,q)$-formes avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ est donnée dans ([31],[35]), en terme de nombre de valeurs propres de la forme de Levi, qui sont strictement positives (ou strictement négatives).

Nous arrivons maintenant au cœur du sujet, à savoir l'existence d'une estimation sous-elliptique lorsque "la forme de Levi dégénère" tout en étant positive. (Il y a aussi des résultats dans le cas "non pseudoconvexe", [17], [29].)

On commence par parler de "l'article pionnier" de J.J. Kohn dans [37] qui, je pense, a donné naissance à tout un foisonnement de travaux qu'il serait trop long d'énumérer ici.

Avant de parler des travaux de J.J. Kohn dans $\mathbf{C}^2$, introduisons des objets de géométrie différentielle qui rendent compte des propriétés de la forme de Levi : plus précisément, on reliera la forme de Levi à des crochets de certains champs de vecteurs.

Un champ de vecteurs holomorphe, de classe $C^\infty(U)$, où U est un ouvert de $\mathbf{C}^n$, est un champ de la forme : $L = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j}$, avec $a_j \in C^\infty(U)$.

Considérons alors notre domaine Ω et soit U voisinage de $p \in \partial\Omega$. Si r est une fonction définissante (comme en (2.5)), on peut considérer la base de champs de vecteurs holomorphes tangents à $\partial\Omega$, donnée par (ici $\frac{\partial r}{\partial z_1} \neq 0$ sur U) :

$$L_j = \frac{\partial r}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial r}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_1} \qquad j = 2, \cdots, n.$$

Cette base est dite standard, une fois que r est choisie (évidemment, il y a une infinité de telles bases).

Soit alors un champ imaginaire pur T, tangent à $\partial\Omega$ dans U. Il est alors aisé de voir que le système des champs $(L_2, \cdots, L_n, \overline{L}_2, \cdots, \overline{L}_n, T)$ est une base de champs (à coefficients fonctions complexes) tangents à $\partial\Omega$. Ainsi on a :

$$\text{(2.7)} \quad \begin{cases} \text{pour } j,k \in \{2,\cdots,n\} \\ [L_j,\overline{L}_k] = a_{jk}T \quad (\text{modulo } L_2,\cdots,L_n,\overline{L}_2,\cdots,\overline{L}_n), \ a_{jk} \in C^\infty(\partial\Omega \in U). \end{cases}$$

Alors (d'après une formule de Cartan de géométrie différentielle), la matrice hermitienne (a_{jk}) exprime la forme de Levi dans la base ci-dessus choisie. En particulier, la pseudoconvexité (ou la stricte pseudoconvexité) correspond à ce que la matrice $(a_{jk})_2^n$ est positive (ou définie positive).

Dans le cas $n = 2$, il n'y a qu'un champ L (à une fonction non nulle multiplicative près) holomorphe tangent à $\partial\Omega$. Ainsi la matrice de Levi est une fonction.

3. SOUS-ELLIPTICITÉ DANS $\mathbf{C}^2$ (d'après J.J. Kohn [37])

Dorénavant, nous notons, suivant J.J. Kohn, λ la fonction de Levi (associée à L) définie par (2.7) (ici $n = 2$). Le domaine Ω étant pseudoconvexe dans $U \ni p$, $p \in \partial\Omega$, on a $\lambda \geq 0$. Le cas $\lambda > 0$ (stricte pseudoconvexité) étant inintéressant ici, on suppose toujours $\lambda(p) = 0$.

L'idée de J.J. Kohn est de considérer des crochets de longueur plus grande que 2 (au lieu de crochets de longueur 2 figurant dans (2.7)). Il introduit ainsi la :

DÉFINITION 3.1.— *Le type m de $p \in \partial\Omega$ est le plus grand "entier" $m \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ tel que tout crochet de longueur plus petite que m, formé à partir de L et $\overline{L}$ a une composante sur T nulle en p.*

Remarquons que, si $\lambda \geq 0$, alors le type m de $p \in \partial\Omega$, lorsqu'il est fini, est nécessairement pair.

THÉORÈME 3.2 (J.J. Kohn [37]) .— *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^2$, pseudoconvexe au voisinage du point p et supposons que p est de type m. Alors le problème $\overline{\partial}$-Neumann est sous-elliptique pour les $(0,1)$-formes avec $\varepsilon = \frac{1}{m}$, en p.*

Une inégalité, propre à $\mathbf{C}^2$, qui ramène la question à celle de la sous-ellipticité d'un système de champs de vecteurs réels est la suivante (en notant ici L_1 un champ holomorphe tangent à $\partial\Omega$, L_2 un champ tel que $L_2(r) = 1$ dans U, $T = L_2 - \overline{L}_2$ et $(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2)$ une base de $(0,1)$-formes, duale de la base $(\overline{L}_1, \overline{L}_2)$ de champs holomorphes dans U) :

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \|\overline{L}_1 u_1\| + \|L_1 u_1\| + \|L_1 u_2\| + \|\overline{L}_1 u_2\| \leq C \quad (\|\overline{\partial} u\| + \|\overline{\partial}^* u\| + \|u\|) \\ \text{où } u = u_1 \overline{\omega}_1 + u_2 \overline{\omega}_2 \ , \ u \in \mathcal{D}^{(0,1)}(\overline{\Omega} \cap U). \end{cases}$$

Une fois (3.3) établie, une application des résultats de J.J. Kohn [39], L. Hörmander [32] et L. Rothschild-E. Stein [47] donne la sous-ellipticité, avec la précision $\varepsilon = \frac{1}{m}$, d'après Rothschild-Stein.

Ce théorème a été complété par P. Greiner [25] qui a établi que $\varepsilon = \frac{1}{m}$ est optimal. D'autre part, J.J. Kohn a donné des exemples de domaines (domaines à forme de Levi diagonalisable au voisinage de p) pour lesquels il y a sous-ellipticité pour les $(0,1)$-formes. Il faut remarquer (dans $\mathbf{C}^n$) que pour les $(0, n-1)$-formes, la sous-ellipticité se traite de façon analogue au cas $\mathbf{C}^2$.

Lorsqu'on veut attaquer le cas n quelconque, l'inégalité (3.3) n'est plus en général satisfaite. J'ai donné une condition nécessaire et suffisante pour cela (voir [17]) dans le cas des $(0,1)$-formes. Donc hormis ce cas d'estimation dite maximale (voir le livre de B. Helffer-J. Nourrigat pour les opérateurs polynômes de champs de vecteurs [28]), la sous-ellipticité des systèmes de champs de vecteurs est insuffisante. Signalons aussi un travail de J. Nourrigat sur cette question [46].

Une première tentative, qui soit autre, est celle de T. Bloom et I. Graham qui étudient le type en terme d'ordre de contact de $\partial\Omega$ (au point considéré) avec des variétés analytiques complexes de dimension q, $1 \leq q \leq n-1$ (en montrant que dans $\mathbf{C}^2$ cela correspond au type de Kohn). La complication dans $\mathbf{C}^n$ vient du fait qu'il y a "plusieurs directions complexes" et qu'on peut alors s'amuser à définir divers types. Signalons-en d'autres (introduits pour résoudre divers problèmes) : il y a évidemment le q-type de D'Angelo [15], qui nous intéresse ici (et qu'on verra en fait sous une forme plus quantitative donnée par D. Catlin pour les besoins de sa démonstration (voir aussi le lien avec [47]), le type essentiel de M.S. Baouendi et F. Trèves [2], etc.). Un autre invariant important que nous verrons ici est le multiple de D. Catlin.

Avant d'aller plus loin dans cet exposé, notons que J.J. Kohn a étudié la sous-ellipticité dans $\mathbf{C}^n$, en terme d'idéaux de fonctions associés à des mineurs (de taille convenable reliée à q) extraits de la forme de Levi ([38]). Il obtient en particulier (en utilisant un travail de K. Diederich et J.E. Fornaess [19]) que le problème $\overline{\partial}$-Neumann est sous-elliptique, pour $1 \leq q \leq n-1$, en tout point du bord d'un domaine borné, pseudoconvexe, analytique réel de $\mathbf{C}^n$.

4. LES TRAVAUX DE D. CATLIN SUR LA SOUS-ELLIPTICITÉ

Les travaux dont nous donnerons un petit aperçu ont été l'objet de trois publications à Annals of Math. ([8] [10] [11]) et de quelques papiers non publiés, complétant de façon intéressante les résultats publiés. Le théorème essentiel est évidemment publié dans [11], mais les trois publications ci-dessus citées concourent au résultat final.

4.a. Le type de D'Angelo et énoncé du théorème de D. Catlin

L'idée principale de J. D'Angelo est de considérer l'ordre de contact du bord $\partial\Omega$ non seulement avec des variétés complexes de dimension q, mais avec des ensembles analytiques complexes (donc ayant des singularités). J. D'Angelo donne des exemples simples de domaines où il met en évidence la différence entre les deux notions de type, avec des propriétés qui ont pu surprendre (en particulier le q-type de D'Angelo n'est pas semi-continu).

Mais dans son travail, D. Catlin a été amené à donner du type de D'Angelo une version plus quantitative que nous donnons succinctement (et qui est noté D_q, au lieu de la notation Δ_q du q-type de D'Angelo [14], [15]).

Définition de $D_q(p)$, $1 \leq q \leq n-1$, $p \in \partial\Omega$

Comme c'est usuel, G^{n-q+1} est la Grassmannienne des $(n-q+1)$-plans dans $\mathbf{C}^n$. Soit V_q un ensemble analytique complexe en p, de dimension q.

Alors, D. Catlin montre que $S \cap V_q$, $S \in G^{n-q+1}$ est, génériquement, formé d'un nombre fixe de courbes complexes γ_k, $k = i, \cdots, P$ telles que $\max_k(\nu(r \circ \gamma_k)/\nu(\gamma_k))$ est constant, où $\nu(f)$ désigne l'ordre d'annulation en 0 de l'application considérée f (ici $\gamma_k(0) = p$). Ce nombre ne dépendant pas (génériquement) de S est appelé ordre de contact générique de V_q avec $\partial\Omega$ en p. On définit alors :

$$\left\{\begin{array}{l} \tau(V_q, p) = \text{ordre de contact générique en } p \text{ de } V_q \\ D_q(p) = \sup\limits_{V_q} (\tau(V_q, p)). \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Ce qui précède est un résumé très condensé du chapitre 3 de [11], où est introduite également la définition de l'ordre de contact d'une famille de *variétés* analytiques complexes d'un certain diamètre avec $\partial\Omega$: $\{M_\sigma\,,\ \sigma \in \Sigma\}$:

(4.2)
a) Σ est un ensemble de réels positifs s'accumulant en 0 ;

b) $\exists\, g_\sigma : B^q_\sigma(0) \longrightarrow \mathbf{C}^n$, où $B^q_\sigma(0)$ est la boule de centre 0 et de rayon σ dans $\mathbf{C}^q$, g_σ holomorphe et $M_\sigma = g_\sigma(B^q_\sigma(0))$;

c) $\forall \sigma \in \Sigma$, il existe un $q \times q$ mineur de Jg_σ de déterminant, minoré uniformément en σ ;

d) $|Jg_\sigma| \leq C$ sur $B^q_\sigma(0)$, C indépendant de σ.

On dira que cette famille de variétés analytiques complexes de diamètre σ a un ordre de contact $\geq \eta$ si :

(4.3) $$\operatorname{Sup}\{|r(z)|\,,\ z \in M_\sigma\} \leq C\,\sigma^\eta, \quad r \text{ fonction définissante.}$$

Alors on a la :

PROPOSITION 4.4.— *Soit $\eta > 0$, tel que $\eta < D_q(p)$. Alors il existe une famille $\{M_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ de variétés analytiques complexes de diamètre σ, d'ordre de contact $\geq \eta$.*

Voici, maintenant, le théorème principal de D. Catlin :

THÉORÈME 4.5 (D. Catlin [11]).— *Soit Ω, borné, régulier de classe C^∞, pseudoconvexe. Alors le problème $\overline{\partial}$-Neumann est sous-elliptique, en $p \in \partial\Omega$, pour les $(0,q)$-formes si et seulement si $D_q(p) < \infty$.*

Remarques : 1) Dans le théorème précédent, la pseudoconvexité n'est importante qu'au voisinage de p. Cependant, si Ω est pseudoconvexe et si $D_q < \infty$ en tout point de $\partial\Omega$, alors il y a régularité C^∞ pour la solution canonique de $\overline{\partial}_{q-1}$ dans $\overline{\Omega}$, si le second membre l'est.

2) Il est facile de voir que $D_{n-1} \leq \cdots \leq D_1$. Ainsi, si $D_1(p) < \infty$, alors il y a sous-ellipticité pour tout q, $1 \leq q \leq n-1$, au point p.

3) Contrairement au cas $n = 2$, le nombre ε intervenant dans la sous-ellipticité ne peut pas être déterminé exactement. Dans un travail non publié, D. Catlin donne des classes de domaines pour lesquels on a ε-sous-ellipticité pour ε strictement inférieur à une certaine valeur et non pour cette valeur.

Cependant, il donne un encadrement pour ε, en terme de $D_q(p)$ (pour les domaines convexes, ε est optimal d'après [24]).

En fait, la proposition 4.4, précédant l'énoncé du théorème, permet de mieux préciser les choses.

La démonstration du théorème 4.5 est essentiellement publiée en deux articles, l'un concernant la nécessité de $D_q(p) < \infty$ ([8]) et l'autre la suffisance de cette condition ([11]). Nous donnons dans ce qui suit le schéma de chacune des deux démonstrations, renvoyant aux deux articles principaux de D. Catlin concernant ce sujet ([8], [11]).

4) D_q vérifie la propriété : $\exists V = V(p)$ tel que :

$$z \in V \Longrightarrow D_q(z) \leq 2(D_q(p))^{n-q}/2^{n-q} \qquad (i.e.\ D_q \text{ localement borné}).$$

4.b. Schéma de la démonstration de la nécessité de $D_q(p) < \infty$

Au vu de la proposition 4.4, il a suffi à D. Catlin d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME 4.6.— *Supposons qu'il existe une famille de q-variétés analytiques complexes, de diamètre σ, contenues dans U, ayant un ordre de contact $\geq \eta$. Si une estimation sous-elliptique pour les $(0,q)$-formes est satisfaite dans U, avec $\varepsilon > 0$, alors $\varepsilon \leq \frac{1}{\eta}$.*

COROLLAIRE 4.7.— *Sous les hypothèses du théorème* 4.5, *si le problème $\overline{\partial}$-Neumann est sous-elliptique pour les $(0,q)$-formes, avec $\varepsilon > 0$, au point p, alors $\varepsilon \leq \frac{1}{D_q(p)}$.*

La démonstration du théorème 4.6 se fait essentiellement en trois étapes :

— **1ère étape** : En utilisant le théorème des idéaux de Skoda [49], il construit des fonctions $f_w \in L^2(\Omega) \cap H(\Omega)$, $w \in V \cap \Omega$:

$$(4.8) \qquad \begin{cases} \|f_w\|_{L^2(\Omega)} \leq C \\ \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial z_n^k}(w)\right| \geq C'|r(w)|^{-(k+\frac{1}{2})}, \ k \in \mathbf{N},\ \partial z_n \text{ transverse à } \partial\Omega \text{ sur } V. \end{cases}$$

— **2ème étape** : En représentant $\{M_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ sous forme de graphes (dans V) : $z' \in B^q_{a\sigma}(\zeta'_\sigma) \to (z', h_\sigma(z'))$ avec : $z' = (z_1, \cdots, z_q)$, $a > 0$ assez petit et $\zeta_\sigma = g_\sigma(0)$, $\zeta_\sigma = (\zeta'_\sigma, \zeta''_\sigma)$, et en utilisant l'ordre de contact de $\{M_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ avec r, il découle de la 1ère étape l'existence d'une famille (f_σ) :

$$(4.9) \qquad \begin{cases} \|f_\sigma\| \leq 1\,,\ f_\sigma \in L^2(\Omega) \cap H(\Omega) \\ \left|\dfrac{\partial^k f_\sigma}{\partial z_n^k}(\zeta_\sigma)\right| \geq C\ \sigma^{-(k+\frac{1}{2})\eta} \qquad k \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Soit alors $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^+)$ avec $\varphi = 1$ sur $]-\infty, 1]$ et $\varphi = 0$ sur $[2, +\infty[$ et posons $\mathcal{X}_\sigma(z') = \varphi\left(\frac{8|z'-\zeta'_\sigma|}{a\sigma}\right)$. Si $\alpha_\sigma(z)$ est la $(0,q)$-forme : $\mathcal{X}_\sigma(z')\, f_\sigma(z)\, d\bar z_1 \wedge \cdots \wedge d\bar z_q$, on considère v_σ la solution de Kohn : $\overline{\partial} v_\sigma = \alpha_\sigma$ (voir prop. 2.5). Considérons alors $\omega_\sigma(z') = \varphi\left(\frac{8|z'-\zeta'_\sigma|}{3a\sigma}\right) d\bar z_1 \wedge \cdots \wedge d\bar z_q$.

Alors il vient de (4.8) (après un petit calcul) :

$$\left| \int_{B^q_{a\sigma(\zeta'_\sigma)}} \left\langle h^*_\sigma\left(\frac{\partial^k \alpha_\sigma}{\partial z_n^k}\right), \omega_\sigma \right\rangle \right| \geq c\, \sigma^{2q-(k+\frac{1}{2})\eta}. \tag{4.10}$$

— **3ème étape** : Dans cette étape, D. Catlin démontre des résultats de régularité, pour la solution canonique de $\overline{\partial} v_\sigma = \alpha_\sigma$ sur des petits ouverts θ_σ (correspondant aux supports de ω_σ), très voisins ; ceci, en examinant plus soigneusement les méthodes habituelles de ([23],[40]) par exemple. En remarquant alors que $h^*_\sigma\left(\frac{\partial^k \alpha_\sigma}{\partial z_n^k}\right) = \overline{\partial}\, h^*_\sigma\left(\frac{\partial^k v_\sigma}{\partial z_n^k}\right)$ et en appliquant les estimations (en fonction de σ) obtenues, on arrive à ce que l'intégrale de (4.10) soit bornée par $C\,\sigma^{2q-1-(k+n+2+2\varepsilon)/\varepsilon}$.

Ainsi on arrive à l'inégalité (en faisant $\sigma \to 0$) :

$$\frac{k+n+2+2\varepsilon}{k\varepsilon} + \frac{1}{k} \geq \left(1 + \frac{1}{2k}\right)\eta. \tag{4.11}$$

Faisant $k \to +\infty$ dans (4.11), on obtient bien $\frac{1}{\varepsilon} \geq \eta$.

4.c. Inégalités à poids et estimations sous-elliptiques

Sur le chemin de la démonstration d'une estimation sous-elliptique, on commence par établir un résultat qui réduit le problème à celui de la démonstration d'une inégalité L^2 avec poids convenable.

THÉORÈME 4.12.— *Soit Ω un domaine borné, régulier, de classe C^∞ dans $\mathbf{C}^n$, pseudoconvexe au voisinage V de $p \in \partial\Omega$. Si r est une fonction définissante de Ω, posons (pour $\delta > 0$) :*

$$S_\delta = \{z \in \Omega\,;\, -\delta < r(z) \leq 0\}.$$

Supposons que, pour δ suffisamment petit, il existe une fonction λ_δ dans V telle que :

1) $|\lambda_\delta| \leq 1$ *dans* $V \cap \overline{\Omega}$; $\lambda_\delta \in C^2(V)$;

2) $\forall z \in V \cap S_\delta$, *on ait, pour K multiindice ordonné :*

$$\sum_{\substack{|K|=q-1 \\ j,k=1\cdots n}} \frac{\partial^2 \lambda_\sigma}{\partial z_j \partial \bar z_k}(z)\, \phi_{jK}\, \overline{\phi}_{kK} \geq C\, \delta^{-2\varepsilon}\, |\phi|^2\,, \quad \phi \in \Lambda^{0,q}_z.$$

3) *La forme précédente est positive dans* V.

Alors il existe un voisinage V' *de* p, $V' \Subset V$, *dans lequel on a une* q-*estimation sous-elliptique avec constante de sous-ellipticité* ε.

Ce théorème est établi en utilisant d'abord un théorème précis d'inégalité L^2 avec poids $e^{-\lambda}$, $|\lambda| \leq 1$ (ceci en regardant plus soigneusement la démonstration de L. Hörmander sur les inégalités L^2 avec poids) et ensuite en microlocalisant en couronnes sur $\partial\Omega \cap V$. En effet, l'estimation sous-elliptique (2.6) dérive facilement de l'inégalité suivante :

$$\|u_b\|_{\varepsilon-\frac{1}{2}} \leq C\,(\|\overline{\partial}u\| + \|\overline{\partial}^* u\| + \|u\|) \qquad \forall u \in \mathcal{D}^{(0,q)}(V \cap \overline{\Omega}),$$

où le terme de gauche est la norme $H^{\varepsilon-\frac{1}{2}}$ dans $V \cap \partial\Omega$. Ainsi, il suffit de microlocaliser sur le bord (ici $u_b = u_{|\partial\Omega}$).

Le théorème 4.12 nous ramène donc au problème de l'existence des fonctions λ_δ ($\delta \leq \delta_0$) satisfaisant aux hypothèses 1), 2) et 3). Nous allons d'abord le voir dans un cas très simple, mais très instructif, qui va guider en fait le schéma qui sera donné dans le cas général.

4.d. Démonstration de l'inégalité à poids dans quelques cas simples

— *Cas où* Ω *est strictement pseudoconvexe en* p :

Posons $\lambda_\delta(z) = \exp(\delta^{-1} r(z))$, où r définit Ω. La stricte pseudoconvexité assure qu'on peut choisir r strictement plurisousharmonique dans un voisinage V de p. Ainsi on voit qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$H_{\lambda_\delta}(z;t) \geq c\,\delta^{-1}|t|^2 \exp(\delta^{-1} r(z)) \ , \ z \in V \ , \ \forall t \in \mathbf{C}^n, \tag{4.13}$$

où $H_{\lambda_\delta}(z;t)$ désigne le Hessien complexe de λ_δ appliqué à t. D'autre part, sur S_δ, on a $\exp(\delta^{-1} r(z)) \geq \frac{1}{e}$. Donc les hypothèses 1), 2) et 3) du théorème 4.8 sont satisfaites.

— *Cas particulier dans* $\mathbf{C}^2$:

Supposons que Ω est donné, près de 0, par :

$$\Omega = \{z : \mathcal{R}e\, z_1 + (\mathcal{R}e\, z_2)^{2m} < 0\} \quad \text{avec} \quad m > 1.$$

(Évidemment, on sait d'après J.J. Kohn qu'on a sous-ellipticité pour les $(0,1)$-formes avec $\varepsilon = \frac{1}{2m}$; le but ici est de montrer qu'on a l'existence de fonctions λ_δ comme ci-dessus, avec $\varepsilon = \frac{1}{2m}$). Prenons alors $r = \mathcal{R}e\, z_1 + (\mathcal{R}e\, z_2)^{2m}$.

Le premier essai est, bien sûr, de considérer, comme dans le cas de stricte pseudoconvexité : $\lambda_\delta(z) = \exp(\delta^{-1} r(z))$.

Évidemment, on a toujours $|\lambda_\delta| \leq 1$, car $r \leq 0$ sur $\overline{\Omega} \cap V$; d'autre part, λ_δ est plurisousharmonique dans V. Ce qui doit être vérifié, c'est la propriété 2). Ici, on cherche à montrer :

$$H_{\lambda_\delta}(z;t) \geq c\,\delta^{-\frac{1}{m}}|t|^2, \qquad z \in S_\delta. \tag{4.14}$$

Un calcul semblable au précédent entraîne (4.14) pour $|\mathcal{R}e\, z_2| \geq \delta^{\frac{1}{2m}}$. Donc, pour $|\mathcal{R}e\, z_2| \leq \delta^{\frac{1}{2m}}$, il faudrait modifier λ_δ, en ajoutant un terme correctif. On considère alors :

$$\lambda'_\delta(z) = C' \exp(\delta^{-1} r(z)) + \varphi\big(|\delta^{-\frac{1}{2m}}\, \mathcal{R}e\, z_2|^2\big), \tag{4.15}$$

avec C' convenable et $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+)$, $\varphi = 1$ sur $t \geq 1$; $\varphi(t) = t$ si $t \leq \frac{1}{2}$. Alors on obtient l'inégalité :

$$H_{\lambda'_\delta}(z;t) \geq c'\,\delta^{-\frac{1}{m}}|t|^2 \quad \text{pour} \quad |\mathcal{R}e\, z_2| \leq \frac{1}{2}\,\delta^{\frac{1}{2m}}. \tag{4.16}$$

On voit donc qu'il reste à regarder la propriété 2) pour $\frac{1}{2}\,\delta^{\frac{1}{2m}} \leq |\mathcal{R}e\, z_2| \leq \delta^{\frac{1}{2m}}$. Sur cette bande, le Hessien complexe du terme correctif est (en module) de l'ordre de $\delta^{-\frac{1}{m}}|t|^2$. Mais, pour $\delta < \delta_0$, ceci est dominé par $H_{\lambda_\delta}(z;t)$ sur S_δ et il suffit alors de choisir C' assez grand pour obtenir l'inégalité (4.14) sans restriction sur $\mathcal{R}e\, z_2$.

Cependant, rien n'assure que λ'_δ est plurisousharmonique dans V. Mais ici il suffit de modifier par : $\lambda''_\delta(z) = \psi(\lambda'_\delta(z))$ avec $\psi(t) \equiv 0$ pour $t \leq \widetilde{c}$ et $\psi''(t) > 0$, si $t > \widetilde{c}$. Une simple vérification montre que λ''_δ convient, si $\widetilde{c}$ est bien choisi.

La construction précédente des λ_δ servira de fil pour le cas général. L'idée sera de stratifier $\partial\Omega \cap V$ (le cas précédent correspond à la stratification en : {points de stricte pseudoconvexité} $\cup$ $\{\mathcal{R}e\, z_2 = 0\}$) et de construire λ_δ de façon analogue. La construction que nous allons décrire est une simple idée générale, car les calculs précis pour montrer les hypothèses 1), 2) et 3) du théorème 4.12 sont très élaborés. Remarquons que K. Diederich et J.E. Fornaess ([19]) avaient donné auparavant une telle stratification si $\partial\Omega$ est analytique réelle.

4.e. Multitype et stratification du bord au voisinage d'un point de q-type fini (pour éviter des complications inutiles, on prend $q = 1$).

D. Catlin a introduit dans [10] la notion de multitype qu'il raffine dans [11], pour les besoins de la démonstration de son théorème sur la sous-ellipticité. D'autre part, le multitype semble plus souple, en particulier il est semi-continu, ce que n'est pas le type de D'Angelo. Évidemment, pour $n = 2$, on retrouve la notion de type, donnée par J.J. Kohn.

Définition du multitype :

On note Γ l'ensemble des n-uples $\Lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, tels que : $1 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq +\infty$ et tels que, pour tout k, soit $\lambda_k = +\infty$, soit il existe $(a_1, \cdots, a_k) \in \mathbf{N}^k$, $a_k > 0$ vérifiant : $\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{\lambda_j} = 1$. Remarquons que Γ est discret et que ses éléments ne peuvent s'accumuler qu'en $+\infty$. On considère toujours r, fonction définissante.

Soit $p \in \partial\Omega$. On dit que Λ est distingué s'il existe, autour de p, un système de coordonnées $(z_1, \cdots, z_n)$ satisfaisant à : $\frac{\partial^{\alpha+\beta} r}{\partial z^{\alpha} . \partial \bar{z}^{\beta}}(p) = 0$ lorsque $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i + \beta_i}{\lambda_i} < 1$.

Il est clair que c'est indépendant de r. On ordonne Γ lexicographiquement.

DÉFINITION 4.13.— *Le multitype $\mathcal{M}(p)$ de p est le plus petit $\mathcal{M} \in \Gamma$ tel que $\mathcal{M} \geq \Lambda$ pour tout Λ distingué.*

Il existe une interprétation du multitype en terme de crochets de champs de vecteurs holomorphes ou antiholomorphes. Cette interprétation est très utile dans la démonstration des ingrédients nécessaires à la démonstration du théorème 4.12.

Le multitype vérifie les propriétés suivantes :

Si $\mathcal{M}(p) = (m_1, \cdots, m_n)$, alors $m_1 = 1$ et on a, pour $q \leq n-1$, $m_1 \leq \cdots \leq m_{n+1-q} \leq D_q(p)$. En particulier, $m_n \leq D_1(p)$.

Remarquons, en outre, que $m_2 = \cdots = m_n = 2$, si p est un point de stricte pseudoconvexité. Avant d'énoncer le théorème principal sur le multitype, nous avons besoin d'une autre définition.

DÉFINITION 4.14.— *Soit $0 \leq \ell \leq n-1$. Une sous-variété M de $\partial\Omega$ (dans V) est de dimension holomorphe ℓ si l'espace des champs holomorphes L, tangents à M et tels que $\partial\overline{\partial} r(L, \overline{L}) = 0$ est de dimension (complexe) $\leq \ell$ et si la dimension C.R. de M est constante (dans V). D'autre part, on note $\mathcal{M}_{n+1-q} = (m_1, \cdots, m_{n+1-q})$, $1 \leq q \leq n-1$.*

THÉORÈME 4.15.— *Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, de classe C^∞, pseudoconvexe.*

1) $\forall p \in \partial\Omega$, $\exists V = V(p)$ tel que : $\forall z \in V \cap \partial\Omega$, $\mathcal{M}_{n+1-q}(z) \leq \mathcal{M}_{n+1-q}(p)$.

2) Supposons $\mathcal{M}_{n+1-q}(p) = (m_1, \cdots, m_{n+1-q})$, $m_{n+1-q} < \infty$.

Il existe un voisinage U de p et une sous-variété M_{n+1-q} de $\partial\Omega$, de dimension *holomorphe* $(q-1)$ *telle que :*

$$\{z \in U \cap \partial\Omega \ , \ \mathcal{M}_{n+1-q}(z) = \mathcal{M}_{n+1-q}(p)\} \subset M_{n+1-q}.$$

PROPOSITION 4.16.— *Si* $D_q(p) < \infty$, *il existe* $V = V(p)$ *tel que* $\mathcal{M}_{n+1-q}$ *prend dans* V *un nombre fini de valeurs :*

$$\mathcal{M}^1_{n+1-q} < \cdots < \mathcal{M}^N_{n+1-q} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}^N_{n+1-q} \subset M_{n+1-q}.$$

Cela découle du fait que $\mathcal{M}_{n+1-q}$ est localement borné puisque D_q l'est (remarque 4 après le théorème 4.5).

Nous obtenons ainsi une *stratification* de $\partial\Omega \cap V$ en les sous-ensembles $\mathcal{M}^j_{n+1-q}$, $1 \leq j \leq N$, donnés par la proposition 4.16.

Idée de la construction d'une fonction p.s.h. convenable

Notre but ici est simplement d'esquisser une construction d'une fonction plurisousharmonique dans V, bornée par 1 et à “Hessien grand”. La vérification de 2) demande bien trop de matériel pour être exposée ici plus précisément.

D'autre part, on prendra $q = 1$. On pose :

$$S_k = \{z \in V \cap \partial\Omega \ , \ \mathcal{M}(z) \geq \mathcal{M}^k\} \quad k = 1, \cdots, N$$

(ici, comme $q = 1$, $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}$). Donc on a : $V \cap \partial\Omega = \cup_{k=1}^N (S_k - S_{k+1})$, avec $S_k - S_{k+1} \subset M_k$, où M_k est une sous-variété de $\partial\Omega$ de dimension holomorphe 0. Dans le cas particulier dans $\mathbf{C}^2$, étudié en détail précédemment, on a $M_1 = \partial\Omega \cap \{\mathcal{R}e\, z_2 = 0\} \cap V$. La construction se fait par récurrence sur k. On suppose que, pour un certain k, on a pu construire une fonction λ_δ plurisousharmonique dans V, $|\lambda_\delta| \leq 1$, de “Hessien grand” hors de S_k. Comme dans le cas de l'exemple dans $\mathbf{C}^2$, on peut construire un voisinage tubulaire de M_k et une fonction bornée à “Hessien grand” près de M_k. En ajoutant cette dernière fonction à λ_δ , on obtient λ'_δ à Hessien grand hors de S_{k+1}. Alors, en remarquant que $S_{N+1} = \emptyset$, on obtient finalement une fonction à Hessien “grand” près de $\partial\Omega \cap V$.

5. REMARQUES SUR LA TAILLE DE LA CONSTANTE ε DE SOUS- ELLIPTICITÉ

Nous avons déjà signalé que, dans le cas de $\mathbf{C}^2$, les travaux de J.J. Kohn [37] et P. Greiner [25] donnent la constante $\varepsilon = \frac{1}{m}$ optimale. Remarquons au passage que ε est alors l'inverse d'un entier, dans $\mathbf{C}^2$, lorsqu'il existe.

Dans les travaux de D. Catlin, seul un encadrement de ε, en fonction du type de D'Angelo, a été établi. Dans une étude plus précise, portant sur une classe de domaines plus particulière, D. Catlin a montré qu'il est vain de chercher une valeur optimale pour la sous-ellipticité. D'une telle étude [12], D. Catlin a tiré deux renseignements intéressants :

1) Soit ε tel que $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$; il existe un domaine pseudoconvexe dans $\mathbf{C}^3$ pour lequel il y a estimation sous-elliptique pour les $(0,1)$-formes de constante de sous-ellipticité optimale ε.

2) Soit $\eta \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$. Il existe un domaine pseudoconvexe de $\mathbf{C}^3$ pour lequel il y a sous-ellipticité pour les $(0,1)$-formes de constante de sous-ellipticité ε si et seulement si $\varepsilon < \eta$ (donc ici il n'y a pas constante de sous-ellipticité optimale).

Il y a une sous-classe de la classe des domaines pseudoconvexes, à savoir les domaines convexes, pour lesquels un résultat précis a été établi par J.E. Fornaess et N. Sibony [24]. En fait, ces auteurs construisent des fonctions λ_δ vérifiant les hypothèses du théorème 4.12.

Ils le font généralement dans $\mathbf{C}^2$, pour des domaines de type fini, en donnant une fonction définissante convenable ; ensuite ils construisent les fonctions λ_δ, avec un δ donnant une estimation sous-elliptique avec ε optimal égal à l'inverse du type du point considéré, dans le cas de domaines convexes de $\mathbf{C}^n$, si $n \geq 3$. Remarquons aussi que pour les domaines convexes, on peut se restreindre, dans la définition de D_1, à considérer des droites complexes ([7]).

Pour certains domaines ayant une forme particulière, H. Hasegawa a aussi obtenu un résultat optimal.

Terminons ici en signalant que, dans un récent preprint, K. Diederich et G. Herbort ont étudié des domaines pour lesquels on peut "dire des choses" sur le "meilleur ε possible" [20].

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDREOTTI and E. VESENTINI - *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds*, Inst. Htes Ét. Sc. Publ. Math., Vol. 24-25.

[2] M.S. BAOUENDI and F. TRÈVES - *About the holomorphic extension of C.R. functions on real hypersurfaces in complex space*, Duke Math. J. **51** (1984), 77-107.

[3] S. BELL and E. LIGOCKA - *A simplification and extension of Fefferman's theorem on biholomorphic mappings*, Invent. Math. **57** (1980), 283-289.

[4] T. BLOOM - *On the contact between complex manifolds and real hypersurfaces in* $\mathbf{C}^3$, Trans. A.M.S. **263** (1981), 515-529.

[5] T. BLOOM and I. GRAHAM - *A geometric characterization of points of type* m *on real submanifolds of* $\mathbf{C}^n$, J. of Diff. Geom. **12** (1977), 171-182.

[6] H. BOAS and E. STRAUBE - *Sobolev estimates for the* $\overline{\partial}$*-Neumann operator on domains in* $\mathbf{C}^n$ *admitting a defining function that is plurisubharmonic on the boundary*, Math. Z. **206** (1991), 81-88.

[7] H. BOAS and E. STRAUBE - *On equality of line type and variety type of real hypersurfaces in* $\mathbf{C}^n$, J. of Geom. Anal., Vol. n° 2 (1992), 95-98.

[8] D. CATLIN - *Necessary conditions for subellipticity of the* $\overline{\partial}$*-Neumann problem*, Annals of Math. **117** (1983), 147-171.

[9] D. CATLIN - *Global regularity of the* $\overline{\partial}$*-Neumann problem*, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 41 (1984).

[10] D. CATLIN - *Boundary invariants of pseudoconvex domains* Annals of Math. **120** (1984), 529-586.

[11] D. CATLIN - *Subelliptic estimates for the* $\overline{\partial}$*-Neumann problem on pseudoconvex domains*, Annals of Maths. **126** (1987), 131-191.

[12] D. CATLIN - *Examples of sharp subelliptic estimates for the* $\overline{\partial}$*-Neumann problem*, non publié.

[13] D.C. CHANG, A. NAGEL and E. STEIN - *Estimates for the* $\overline{\partial}$*-Neumann problem in pseudoconvex domains of finite type in* $\mathbf{C}^2$, Acta Math. **169** (1992), 153-228.

[14] J. D'ANGELO - *Subelliptic estimates and failure of semi-continuity of orders of contact* Annals of Math. **47** (1980), 955-957.

[15] J. D'ANGELO - *Real hypersurfaces, orders of contact and applications*, Annals of Math. **115** (1982), 615-637.

[16] J.-P. DEMAILLY - *Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe, semi-positif, au-dessus d'une variété kählérienne complète*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup **15** (1982), 457-511.

[17] M. DERRIDJ - *Régularité pour $\bar{\partial}$ dans quelques domaines pseudoconvexes*, J. of Diff. Geom. **13** n° 4 (1978), 559-576.

[18] M. DERRIDJ - *Inégalités a priori et estimation sous-elliptique pour $\bar{\partial}$ dans des ouverts non pseudoconvexes*, Math. Ann. (1980), 27-48.

[19] K. DIEDERICH and J.E. FORNAESS - *Pseudoconvex domains with real analytic boundary*, Ann. of Math. **107** (1978), 371-384.

[20] K. DIEDERICH and G. HERBORT - *Geometric and analytic invariants on pseudoconvex domains. Comparison results*, preprint.

[21] Y. EGOROV - *Subelliptic operators*, Usp. Math. Nauk. **30** (n° 3), 57-104, English transl. Russ. Math. Surv. **30** (n° 3) (1975), 55-105.

[22] C. FEFFERMAN - *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math. **26** (1974), 1-65.

[23] G.B. FOLLAND and J.J. KOHN - *The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex*, Ann. of Math. Studies **75** (1972), Princ. Univ. Press, Princeton.

[24] J.E. FORNAESS and N. SIBONY - *Construction of p.s.h. functions on weakly pseudoconvex domains*, Duke Math. J. Vol. 58 n° 3 (1989), 633-655.

[25] P. GREINER - *On subelliptic estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann problem in $\mathbf{C}^2$*, J. of Diff. Geom. **9** (1974), 239-250.

[26] P. GREINER and E. STEIN - *Estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann problem*, Math. Notes n° 19, Princ. Univ. Press (1977).

[27] K. HASEGAWA - *Subelliptic estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann problem on certain weakly pseudoconvex domains*, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sec. IA, vol. 39 n° 3 (1992), 385-418.

[28] B. HELFFER et J. NOURRIGAT - *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs*, Prog. in Math. **58**, Birkhaüser, 1985.

[29] L.H. HO - *Subellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem on non-pseudoconvex domains*, Trans. A.M.S. **291** (1985), 43-73.

[30] L. HÖRMANDER - *An introduction to complex analysis in several variables*, Van Nostrand, Princeton, 1966.

[31] L. HÖRMANDER - *L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator*, Acta Math. **113** (1965), 89-152.

[32] L. HÖRMANDER - *Hypoelliptic second order equations*, Acta Math. **119** (1967), 147-171.

[33] L. HÖRMANDER - *Subelliptic operators. Seminar on singularities of solutions of linear P.D.E.*, Ann. of Math. Studies **91** (1978), Princeton.

[34] N. KERZMAN - *The Bergman kernel. Differentiability at the boundary*, Math. Ann. **195** (1972), 149-158.

[35] J.J. KOHN - *Harmonic integrals on strongly pseudoconvex manifolds* I, Ann. of Math. **78** (1963), 112-148 ; II, Ann. of Math. **79** (1964), 450-472.

[36] J.J. KOHN -*Global regularity for $\overline{\partial}$ on weakly pseudoconvex manifolds*, Trans. A.M.S. **181** (1973), 273-292.

[37] J.J. KOHN -*Boundary behavior of $\overline{\partial}$ on weakly pseudoconvex manifolds of dimension two*, J. of Diff. Geom. **6** (1972), 523-542.

[38] J.J. KOHN -*Subellipticity of the $\overline{\partial}$-Neumann problem on pseudoconvex domains*, Acta Math. **142** (1979), 79-122.

[39] J.J. KOHN -*Pseudodifferential operators and applications*, Proc. Symp. Pure Math. **43**, 207-219.

[40] J.J. KOHN and L. NIRENBERG -*Non coercive boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 443-492.

[41] J.J. KOHN and L. NIRENBERG -*A pseudoconvex domain not admitting a holomorphic support function*, Math. Ann. **201** (1973), 265-268.

[42] N. LERNER -*Non solvability in L^2 for a first order operator satisfying condition* (ψ), Ann. of Math. **139** (1994), 363-393.

[43] H.M. MAIRE -*Hypoelliptic overdetermined systems of partial differential equations*, Comm. in P.D.E. **5** (4) (1980), 331-380.

[44] C.B. MORREY -*The analytic embedding of abstract real analytic manifolds*, Ann. of Math. **68** (1958), 159-201.

[45] L. NIRENBERG and F. TRÈVES -*On local solvability for linear partial differential equations* I, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 1-38.

[46] J. NOURRIGAT - *Reduction microlocale des systèmes d'opérateurs pseudo-différentiels*, Ann. Inst. Fourier, Tome XXXVI, Fasc. 3 (1986).

[47] L. ROTHSCHILD and E. STEIN - *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math. **137** (1977), 248-315.

[48] N. SIBONY - *Une classe de domaines pseudoconvexes*, Duke Math. J. **55** (1987), 299-319.

[49] H. SKODA - *Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux de fonctions holomorphes avec poids*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. IV, Série 5 (1972), 545-580.

[50] D.C. SPENCER - *Overdetermined systems of linear partial differential equations*, Bull. AMS **75** (1969), 179-239.

[51] W.J. SWEENEY - *A condition for subellipticity in Spencer's Neumann problem*, J. of Diff. Geom. **21** (1976), 316-362.

Makhlouf DERRIDJ

Université de Rouen
Département de Mathématiques
F-76134 MONT-SAINT-AIGNAN

et

URA 757 du CNRS
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY CEDEX