

Astérisque

FRANÇOISE DAL'BO

MARC PEIGNÉ

**Comportement asymptotique du nombre de géodésiques
fermées sur la surface modulaire en courbure non constante**

Astérisque, tome 238 (1996), p. 111-177

http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__238__111_0

© Société mathématique de France, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU NOMBRE DE GÉODÉSQUES FERMÉES SUR LA SURFACE MODULAIRE EN COURBURE NON CONSTANTE

Françoise DAL'BO & Marc PEIGNÉ

Soit \bar{g}_ε une perturbation de la métrique hyperbolique sur $M = \mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, nous démontrons que le nombre de géodésiques fermées sur (M, \bar{g}_ε) de longueur au plus a est équivalent quand a tend vers $+\infty$ à $e^{a\delta_\varepsilon}/a\delta_\varepsilon$ (où δ_ε est l'exposant critique de la série de Poincaré associée à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$). La démonstration de ce résultat repose sur un codage des géodésiques fermées de (M, \bar{g}_ε) relié au développement en fractions continues des réels et sur l'utilisation d'un théorème du renouvellement harmonique nécessitant une étude spectrale précise de l'opérateur de transfert mis en jeu. Nous retrouvons également par cette méthode probabiliste la distribution asymptotique des constantes de Lévy des nombres quadratiques.

Let \bar{g}_ε be a variation of the hyperbolic metric on $M = \mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, we prove that the number of closed geodesics on (M, \bar{g}_ε) with length less or equal to a is equivalent to $e^{a\delta_\varepsilon}/a\delta_\varepsilon$ (where δ_ε is the critical exponent of the Poincaré series associated with $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$). The proof of this result is based on a coding of closed geodesics related to the continuous fractions expansion of the reals and on an harmonic renewal theorem which requires a precise description of the spectrum of the appropriate transfer operator. Using this probabilistic method, we give a new proof of the asymptotic distribution of the Lévy constants of the quadratic numbers.

TABLE DES MATIÈRES

	Introduction	115
1	Codage des géodésiques de M en courbure constante	121
1.1	Points de changement des géodésiques de \mathbb{H}^2	122
1.2	Propriétés des éléments hyperboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$	125
1.3	Passage au quotient	127
2	Flot géodésique et codage en courbure constante	129
2.1	Représentation du flot géodésique par un flot spécial	129
2.2	Lien entre mesure de Gauss et mesure de Liouville	130
3	Comportement asymptotique du nombre de géodésiques fermées de M en courbure constante	131
3.1	Le théorème A se déduit du théorème B	132
3.2	Démonstration du théorème B	134
4	Distribution asymptotique des constantes de Lévy des nombres quadratiques	139
4.1	Résumé de la démonstration du théorème 4.0.1, partie (i)	140
4.2	Résumé de la démonstration du théorème 4.0.1 partie (ii)	142
5	Étude du comportement asymptotique du potentiel harmonique d'une marche de Markov sur \mathbb{R}	145
5.1	Démonstration du théorème du renouvellement harmonique	147
5.2	Le couple (P, f) vérifie les hypothèses H_0, H_1, H_2, H_3, H_4	151
6	Perturbation de la métrique de Poincaré sur M	155
6.1	Codage des géodésiques fermées de (M, \bar{g}_ε)	155
6.2	Transformation dilatante et mesure T_ε -invariante sur Λ^+	157
6.3	Comportement asymptotique de $\pi_\varepsilon(a)$	161
6.4	Le couple $(P_\varepsilon, f_\varepsilon)$ vérifie les hypothèses H_0, H_1, H_2, H_3, H_4	165
6.5	Mélange du flot géodésique sur (M, \bar{g}_ε)	171
	Bibliographie	175

INTRODUCTION

Notons d la distance de Poincaré sur \mathbb{H}^2 et \bar{g} la métrique de Poincaré sur la surface modulaire $M = \mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Soit $\varepsilon \geq 0$, une métrique \bar{g}_ε sur M est une ε -perturbation de \bar{g} si la distance d_ε induite par \bar{g}_ε sur \mathbb{H}^2 et la courbure K_ε de (M, \bar{g}_ε) satisfont les hypothèses suivantes :

1. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$,

$$(1 + \varepsilon)^{-1}d(z_1, z_2) \leq d_\varepsilon(z_1, z_2) \leq (1 + \varepsilon)d(z_1, z_2).$$

En d'autres termes, les espaces métriques (\mathbb{H}^2, d) et $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$ sont $(1 + \varepsilon, 0)$ -quasi-isométriques [11].

2. Il existe $b \in]0, 1]$ et $R > 0$ tels que pour tout $z \in \mathbb{H}^2$, $K_\varepsilon(z) \leq -b^2$ et $K_\varepsilon(z) = -1$ si $\mathrm{Im}z \geq R$.

En d'autres termes, la courbure de M est strictement négative et égale à -1 dans la pointe.

Une telle métrique est obtenue par exemple en perturbant la métrique \bar{g} « régulièrement » dans un compact de M .

Notons δ_ε l'exposant critique de la série de Poincaré $\sum_{\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} e^{-sd_\varepsilon(i, \gamma(i))}$, si $\varepsilon = 0$ alors $\delta_0 = 1$, nous démontrons le

Théorème A. — *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, le nombre $\pi_\varepsilon(a)$ de géodésiques primitives fermées orientées de (M, \bar{g}_ε) de longueur au plus a soit équivalent à $e^{a\delta_\varepsilon}/a\delta_\varepsilon$ lorsque a tend vers $+\infty$.*

Si $\varepsilon \neq 0$, ce théorème est nouveau, le cas de la courbure variable ayant été abordé (à notre connaissance) jusqu'à présent pour des variétés compactes ([23], [20] et [27] pour le problème plus général des flots d'axiome A). La méthode classique utilisée en courbure variable s'appuie sur l'existence d'une partition de Markov associée au flot géodésique, garantie par la compacité de la variété. Cette méthode semble s'étendre au cas convexe cocompact mais n'est apparemment pas adaptée à l'étude des variétés avec pointes.

Si $\varepsilon = 0$, la courbure est alors constante égale à -1 et dans ce cas le théorème A est connu ([15], [26], [10]). Différentes méthodes ont été développées

en courbure constante. L'une d'elles, basée sur la formule des traces de Selberg [29], est particulièrement bien adaptée aux variétés de volume fini (même infini si la variété est une surface dont l'exposant critique $\delta \in]\frac{1}{2}, 1]$ (cf. [10]) et précise dans certains cas [15] l'asymptotique par un reste. Cette approche ne paraît pas appropriée à la courbure variable.

La méthode que nous utilisons ici pour démontrer le théorème A a été introduite par S. Lalley [19] pour dénombrer les géodésiques fermées des quotients de \mathbb{H}^n par des groupes de Schottky (dans [8] nous étendons cette étude à des groupes libres contenant des transformations paraboliques). Le fait que les groupes de Schottky soient purement hyperboliques est essentiel dans le travail de S. Lalley, cela assure, dans le codage des géodésiques fermées mis en jeu, le caractère dilatant du décalage et la régularité höldérienne de la fonction plafond. Dans notre cas, afin de conserver cette propriété de dilatation, nous sommes amenés à introduire un codage d'alphabet infini. Nous compensons cette difficulté en exploitant la géométrie du problème et notamment la dynamique des transformations de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Voici le résumé du déroulement de la démonstration du théorème A :

Notons $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ le bord de $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$ (cf. [11] chap. 7). Nous introduisons une transformation dilatante T_ε sur $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$, traduisant la dynamique des éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur le bord. Nous codons alors les géodésiques fermées de (M, \bar{g}_ε) par des points T_ε -périodiques de $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ et exprimons leur longueur à l'aide d'une fonction f_ε définie sur $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$. En un deuxième temps nous construisons une mesure de probabilité ν_ε sur $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ invariante par T_ε et absolument continue par rapport à la mesure de Patterson σ_ε [17]. Nous relierons ensuite $\pi_\varepsilon(a)$ aux mesures $N_{(\xi,a)}^\varepsilon$ définies pour tout $\xi \in \partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ et pour toute fonction continue par morceaux et bornée φ sur $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ par

$$N_{(\xi,a)}^\varepsilon(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\xi'/T_\varepsilon^{2n}\xi'=\xi} \varphi(\xi') \mathbf{1}_{[0,a]}(S_{2n}f_\varepsilon(\xi'))$$

où $S_{2n}f_\varepsilon(\xi') = f_\varepsilon(\xi') + f_\varepsilon(T_\varepsilon\xi') + \dots + f_\varepsilon(T_\varepsilon^{2n-1}\xi')$.

Le théorème A se déduit alors du

Théorème B. — Soient $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et A un intervalle de $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ tel que $\nu_\varepsilon(A) > 0$. Lorsque a tend vers $+\infty$ $N_{(\xi,a)}^\varepsilon(\mathbf{1}_A)$ est équivalent à $h_\varepsilon(\xi)\sigma_\varepsilon(A)e^{a\delta_\varepsilon}/a\delta_\varepsilon$ uniformément par rapport à $\xi \in \partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ (la fonction h_ε représentant la densité de ν_ε par rapport à σ_ε).

Les mesures $N_{(\xi,a)}^\varepsilon$ s'expriment comme potentiel harmonique de la chaîne de Markov $(Y_n, f_\varepsilon(Y_1) + \dots + f_\varepsilon(Y_n))$ sur $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, les transitions du processus Y_n étant gouvernées par l'opérateur P_ε adjoint de T_ε par rapport à ν_ε . Après une étude spectrale précise de P_ε , on montre que le théorème B découle directement du résultat général suivant : soient X un espace métrique compact, $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur X de noyau de transition Q et g une fonction borélienne positive sur X ; on note \tilde{Q} le noyau de transition sur $X \times \mathbb{R}$ associé à la chaîne de Markov $(X_n, g(X_1) + \dots + g(X_n))_{n \geq 0}$. On a le

Théorème du renouvellement harmonique. — Supposons que le couple (Q, g) satisfasse les hypothèses H_0, H_1, H_2, H_3 et H_4 explicitées dans le paragraphe 5. Soient μ l'unique mesure de probabilité Q -invariante sur X et m la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . La famille de mesures $\left(a \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \tilde{Q}^n((x, a), dy, dt)\right)$ converge vaguement lorsque a tend vers $+\infty$ vers la mesure produit $\mu(dy) \otimes m(dt)$ uniformément par rapport à $x \in X$.

Pour démontrer ce théorème nous reprenons des arguments développés dans [1], [13] et [21]. Soulignons que l'étude directe du comportement asymptotique de ces potentiels évite l'utilisation, comme dans [19] d'un théorème des grands écarts. L'étude spectrale de P_ε permet aussi d'appliquer un théorème du renouvellement « classique » (c'est-à-dire sans le facteur $\frac{1}{n}$) et, en reprenant les arguments de Y. Guivarc'h et J. Hardy [13], d'obtenir la

Proposition. — Pour tout $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent de (M, \bar{g}_ε) est mélangeant relativement à la mesure $\overline{\mu_\varepsilon \otimes m}$ (voir § 6.5).

La démonstration que nous proposons de ce résultat repose sur l'étude de l'opérateur de transfert P_ε .

Nous donnons également une application de notre méthode « probabiliste » à l'arithmétique en retrouvant des résultats de C. Faivre concernant la distribution asymptotique des constantes de Lévy des nombres quadratiques. Introduisons brièvement quelques notations : si $x \in]0, 1[$ est un irrationnel quadratique, on note $N(x)$ la plus petite période de son développement en fractions continues et $\ell(x)$ la « longueur » de x définie par $\ell(x) = -2 \sum_{i=0}^{N(x)-1} \log T^i(x)$ si $N(x)$ est pair et $\ell(x) = -4 \sum_{i=0}^{N(x)-1} \log T^i(x)$ sinon. De plus, si $[a_0(x), a_1(x), \dots]$ est le développement en fractions continues de x , on pose $\frac{p_n(x)}{q_n(x)} = [a_0(x), \dots, a_n(x)]$; si x est un irrationnel quadratique alors la suite $\left(\frac{1}{n} \log q_n(x)\right)_{n \geq 1}$ converge vers un réel noté $\beta(x)$ et appelé « constante de Lévy » de x . Nous avons le

Théorème [9]. — Soient $a > 0$ et \mathcal{I}_a l'ensemble des irrationnels quadratiques $x \in]0, 1[$ tels que $\ell(x) \leq a$.

- i) Le cardinal de \mathcal{I}_a est équivalent à $\frac{3 \log 2}{\pi^2} e^a$ lorsque a tend vers $+\infty$.
- ii) La somme $\sum_{x \in \mathcal{I}_a} \beta(x)$ est équivalente à $\frac{e^a}{4}$ lorsque a tend vers $+\infty$.

À PROPOS DU PLAN...

Les paragraphes 1 à 5 sont rédigés dans le but d'exposer une méthode nouvelle permettant de retrouver des résultats connus. Suite à la rédaction de ce travail nous avons été encouragés à l'adapter au cas de la courbure « légèrement » variable. Souhaitant conserver l'esprit initial dans lequel nous nous étions placés, nous avons ajouté le paragraphe 6 dans lequel nous indiquons les modifications à apporter à la démonstration du théorème A en courbure constante pour obtenir l'asymptotique de $\pi_\varepsilon(a)$ avec $\varepsilon \neq 0$. Cette extension à la courbure variable s'appuie sur différents travaux parus sur les variétés hyperboliques (au sens de M. Gromov). Les références que nous utilisons sont : le livre de É. Ghys et P. de la Harpe [11], un article de M. Bourdon [4] sur le bord des CAT(-1)-espaces et un article de V. Kaimanovitch [17] sur les mesures invariantes.

Nous tenons à remercier Y. Guivarc'h pour ses précieux conseils, E. Le Page pour l'intérêt permanent qu'il a porté à ce travail ainsi que L. Guillopé pour la précision avec laquelle il a lu notre première rédaction.

Les discussions que nous avons eues avec F. Ledrappier et ses encouragements nous ont aidés à aboutir à la rédaction du paragraphe 6.

1 CODAGE DES GÉODÉSIIQUES DE M EN COURBURE CONSTANTE

Jusqu'au paragraphe 4, la surface modulaire est munie de la métrique de Poincaré.

Le codage décrit dans ce paragraphe est bien connu ([30], [14]). Nous développons ici la présentation donnée dans [14].

On rappelle que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par la translation $\tau_1(z) = z+1$ et la rotation d'ordre trois $r(z) = \frac{z-1}{z}$. Soit D le domaine fondamental de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ représenté par la figure 1.1, la réunion $D \cup rD \cup r^2D$ forme un triangle idéal dont les images par $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ pavent \mathbb{H}^2 (Fig. 1.2).

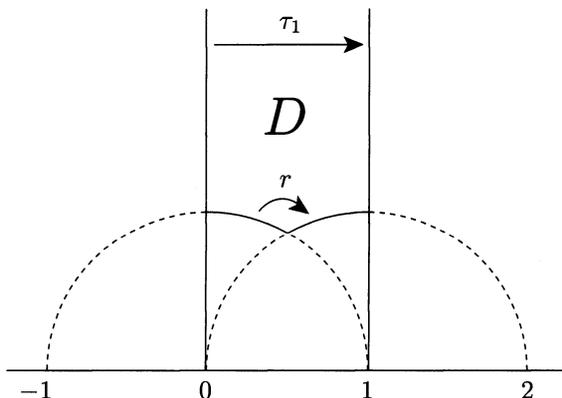


FIG. 1.1.

Les côtés de ces triangles idéaux appelés *lignes de Farey* correspondent aux images par $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ de l'axe imaginaire $L = \{iy \mid y > 0\}$. Notons \bar{L} la projection sur M de L , les deux points iy et $r^2\tau_1(iy)$ de L , se projettent donc sur le même point de \bar{L} .

Dans la suite du texte, le terme *géodésique* de \mathbb{H}^2 est synonyme de géodésique orientée d'extrémités irrationnelles. Une telle *géodésique* coupe une infinité de lignes de Farey et se projette sur M en une géodésique orientée restant dans un compact. Pour alléger le texte, on appelle *géodésique* de M la projection sur M d'une *géodésique*

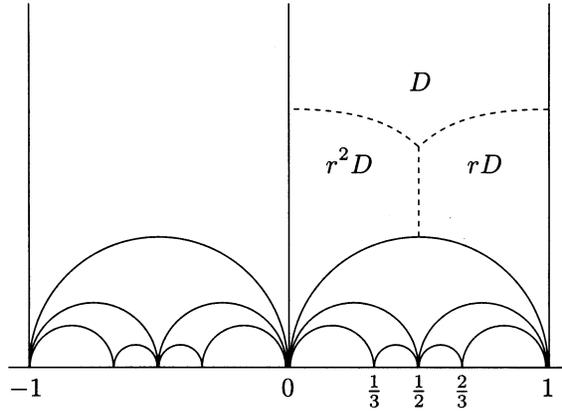


FIG. 1.2.

de \mathbb{H}^2 . Pour coder les géodésiques de M , l'idée est d'associer à chaque géodésique ses points d'intersection avec \bar{L} (fig. 1.3) ce qui sur \mathbb{H}^2 revient à associer à une géodésique ses points d'intersection avec les lignes de Farey.

1.1 Points de changement des géodésiques de \mathbb{H}^2

Soit α une géodésique de \mathbb{H}^2 ; elle coupe une infinité de lignes de Farey. Choisissons un point F_0 situé à l'intersection d'une ligne de Farey L_0 et de α . En se déplaçant sur α à partir de F_0 dans le sens positif (resp. sens négatif), on rencontre successivement des lignes de Farey L_1, L_2, \dots (resp. L_{-1}, L_{-2}, \dots) en des points F_1, F_2, \dots (resp. F_{-1}, F_{-2}, \dots) appelés *points de Farey* de α (fig. 1.4). Nous orientons les géodésiques L_n selon la convention : $(\alpha, L_n) \in]0, \pi[$. Notons γ_n l'unique élément de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ envoyant l'axe imaginaire L orienté dans le sens croissant sur L_n ; on obtient ainsi une suite bilatère $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Soit $\tau_{-1} = r\tau_1$; pour tout $z \in \mathbb{H}^2$ on a $\tau_{-1}(z) = \frac{z}{z+1}$.

Lemme 1.1.1. — Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $\varepsilon_{n+1} \in \{\pm 1\}$ tel que $\gamma_{n+1} = \gamma_n \tau_{\varepsilon_{n+1}}$.

Démonstration. — La géodésique $\gamma_n^{-1}(\alpha)$ coupe $\gamma_n^{-1}(L_n) = L$ au point de Farey $\gamma_n^{-1}(F_n)$. Le point de Farey suivant est $\gamma_n^{-1}(F_{n+1})$ et se situe sur $\gamma_n^{-1}(L_{n+1}) = \gamma_n^{-1}\gamma_{n+1}(L)$. Deux cas se présentent (fig. 1.5) : soit $\gamma_n^{-1}(L_{n+1}) = \tau_1(L)$ soit $\gamma_n^{-1}(L_{n+1}) = \tau_{-1}(L)$.

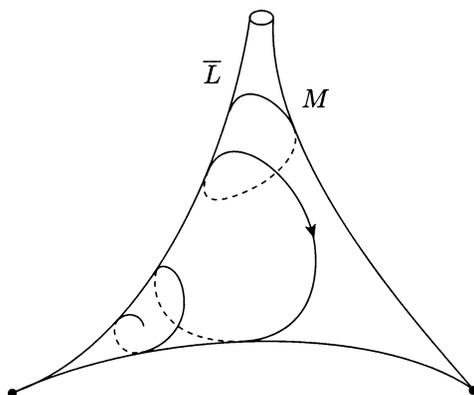


FIG. 1.3.

Corollaire 1.1.2. — Il existe une suite $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ formée de $+1$ et de -1 telle que :

1. si $n \geq 1$, alors $\gamma_n = \gamma_0 \tau_{\varepsilon_1} \cdots \tau_{\varepsilon_n}$
2. si $n \leq 0$, alors $\gamma_n = \gamma_0 \tau_{\varepsilon_0}^{-1} \tau_{\varepsilon_{-1}}^{-1} \cdots \tau_{\varepsilon_{n+1}}^{-1}$

Parmi les points de Farey de α on distingue les points particuliers suivants :

Définition 1.1.3. — Le point F_n est un point de changement de α si $\varepsilon_n \neq \varepsilon_{n+1}$.

Soit C_0 un point de changement de α . Par une construction analogue à celle des points de Farey, on associe à α la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des points de changement rencontrés en se déplaçant sur α à partir de C_0 . Les points C_n se situent sur des lignes de Farey orientées notées $\gamma_{C_n}(L)$ (fig. 1.6). En utilisant le corollaire 1.1.2 on montre la

Propriété 1.1.4. — Il existe une suite bilatère d'entiers strictement positifs $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tels que :

1. si $k \geq 1$, alors $\gamma_{C_k} = \gamma_{C_0} \tau_{\varepsilon}^{n_1} \tau_{-\varepsilon}^{n_2} \cdots \tau_{(-1)^{k+1} \varepsilon}^{n_k}$
2. si $k \leq 0$, alors $\gamma_{C_k} = \gamma_{C_0} \tau_{-\varepsilon}^{-n_0} \tau_{\varepsilon}^{-n_{-1}} \cdots \tau_{(-1)^{k+1} \varepsilon}^{-n_{k+1}}$

Soit $s(z) = -\frac{1}{z}$, on a la relation $\tau_{\varepsilon}^{-1} = s \tau_{-\varepsilon} s$. Par conséquent si $k \leq 0$ on a $\gamma_{C_k} = \gamma_{C_0} s \tau_{\varepsilon}^{n_0} \tau_{-\varepsilon}^{n_{-1}} \cdots \tau_{(-1)^{k+1} \varepsilon}^{n_{k+1}} s$.

Les extrémités de α se déduisent de la suite $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ grâce à la

Proposition 1.1.5. — Soient ξ_- et ξ les extrémités de α orientée de ξ_- vers ξ ; on a

$$\xi_- = \gamma_{C_0} s([n_0 n_{-1} n_{-2} \cdots]^{-\varepsilon}) \quad \text{et} \quad \xi = \gamma_{C_0} ([n_1 n_2 n_3 \cdots]^{-\varepsilon})$$

où $[n_1 n_2 n_3 \cdots] = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} [n_1 n_2 n_3 \cdots n_{\ell}]$ avec la convention $[n_1] = \frac{1}{n_1}$ et $[n_1 n_2 n_3 \cdots n_{\ell}] = 1/(n_1 + [n_2 n_3 \cdots n_{\ell}])$ pour $\ell > 1$.

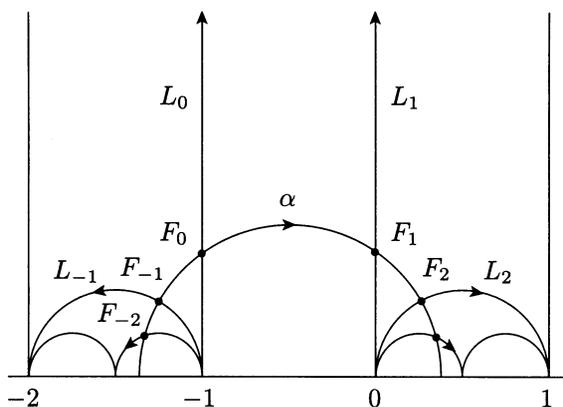


FIG. 1.4.

Démonstration. — Commençons par le cas $k \geq 1$ et $\varepsilon = -1$. On remarque que

$$\tau_{-1}^{n_1} \cdots \tau_{(-1)^k}^{n_k}(0) = [n_1 n_2 \cdots n_{k'}] \quad \text{et} \quad \tau_{-1}^{n_1} \cdots \tau_{(-1)^k}^{n_k}(\infty) = [n_1 n_2 \cdots n_{k''}]$$

avec si k est pair, $k' = k$, $k'' = k - 1$ et sinon, $k' = k - 1$, $k'' = k$. Ces deux suites de fractions convergent quand k tend vers $+\infty$, vers un même nombre $x \in [0, 1]$ dont le développement en fractions continues est $[n_1 n_2 \cdots]$. Par conséquent, $\gamma_{C_k}(0)$ et $\gamma_{C_k}(\infty)$ convergent vers $\gamma_{C_0}(x)$. La suite des points de changement $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de α converge donc vers $\gamma_{C_0}(x)$ ce qui entraîne que $\xi = \gamma_{C_0}(x)$. Si maintenant on suppose $k \geq 1$ et $\varepsilon = 1$, on a alors

$$\tau_1^{n_1} \cdots \tau_{(-1)^{k+1}}^{n_k}(0) = n_1 + [n_2 \cdots n_{k''}] \quad \text{et} \quad \tau_1^{n_1} \cdots \tau_{(-1)^{k+1}}^{n_k}(\infty) = n_1 + [n_2 \cdots n_{k'}]$$

et le raisonnement précédent s'applique en remplaçant x par x^{-1} . Le cas où $k \leq 0$ se traite de façon analogue.

On est à présent en mesure de coder les *géodésiques* de \mathbb{H}^2 marquées en des points de changement. Etant donné une *géodésique* α de \mathbb{H}^2 et C_0 un point de changement sur α , on associe à (α, C_0) le quadruplet $([n_0 n_{-1} \cdots], [n_1 n_2 \cdots], \varepsilon, \gamma_{C_0})$. On note Θ la transformation de décalage sur les quadruplets définie par

$$\Theta([n_0 n_{-1} \cdots], [n_1 n_2 \cdots], \varepsilon, \gamma) = ([n_1 n_0 n_{-1} \cdots], [n_2 n_3 \cdots], -\varepsilon, \gamma \tau_\varepsilon^{n_1}).$$

Remarquons que la projection de Θ sur la seconde coordonnée correspond à l'application de Gauss T (déjà introduite par A. Broise § 3) qui à $x \in]0, 1]$ associe la partie fractionnaire de $\frac{1}{x}$. Les propriétés suivantes découlent directement du codage.

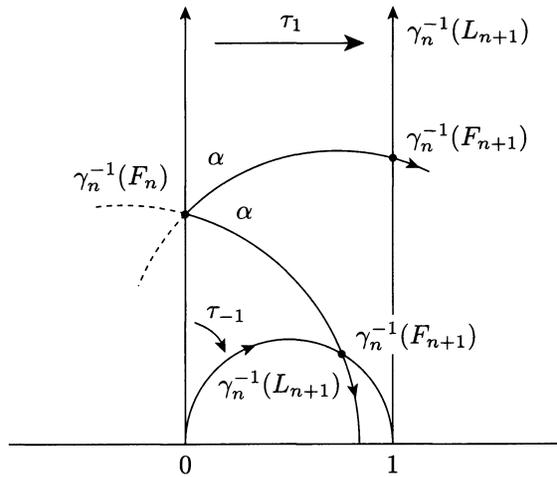


FIG. 1.5.

Propriétés 1.1.6. —

1. Soit C_1 le point de changement de α qui suit C_0 , le couple (α, C_1) est codé par $\Theta([n_0 n_{-1} \dots], [n_1 n_2 \dots], \varepsilon, \gamma_{C_0})$.
2. Soit $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$, le couple $(g(\alpha), g(C_0))$ est codé par $([n_0 n_{-1} \dots], [n_1 n_2 \dots], \varepsilon, g\gamma_{C_0})$.

En résumé, une géodésique α de \mathbb{H}^2 d'extrémités ξ_- et ξ marquée en un point de changement C est codée par l'unique quadruplet $(x_-, x, \varepsilon, \gamma) \in]0, 1]^2 \times \{\pm 1\} \times \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ défini par :

1. $C \in \gamma(L)$ et $(\alpha, \gamma(L)) \in]0, \pi[$;
2. $\xi = \gamma(x^{-\varepsilon})$;
3. $\xi_- = \gamma s(x_-^{-\varepsilon})$.

1.2 Propriétés des éléments hyperboliques de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$

Soient γ une transformation hyperbolique de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ et $\text{Fix}(\gamma)$ la géodésique fixée par γ orientée du point répulsif vers le point attractif de γ . Choisissons sur $\text{Fix}(\gamma)$ un point de changement C_0 et notons $(x_-, x, \varepsilon, \gamma_0)$, le quadruplet associé au couple $(\text{Fix}(\gamma), C_0)$. Comme $(\text{Fix}(\gamma), \gamma(C_0)) = (\gamma \text{Fix}(\gamma), \gamma(C_0))$, le couple $(\text{Fix}(\gamma), \gamma(C_0))$ est représenté d'après la propriété 1.1.6 par $(x_-, x, \varepsilon, \gamma_0)$. Par ailleurs, $\gamma(C_0)$ est un point de changement C_k avec $k \geq 1$; donc, toujours d'après la même propriété, on a $(x_-, x, \varepsilon, \gamma_0) = \Theta^k(x_-, x, \varepsilon, \gamma_0)$. En développant x_- et x en fractions continues et en revenant à la définition de Θ , on établit la :

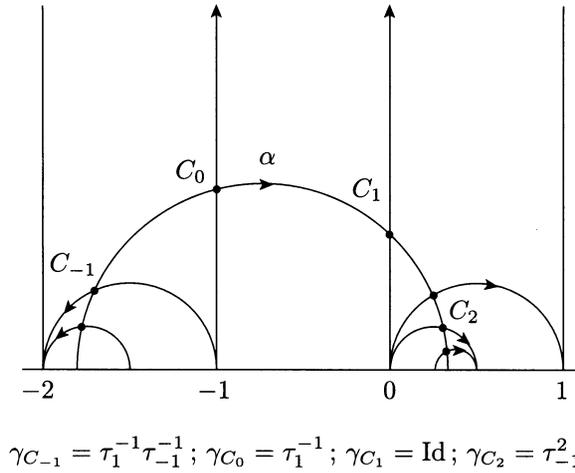


FIG. 1.6.

Proposition 1.2.1. — Soit γ un élément hyperbolique de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Il existe $\gamma_0 \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z}), \varepsilon \in \{\pm 1\}$, une suite d'entiers $(n_i)_i$ strictement positifs et un entier pair $k \geq 1$ tels que : $\gamma = \gamma_0 \tau_\varepsilon^{n_1} \cdots \tau_{-\varepsilon}^{n_k} \gamma_0^{-1}$. De plus, les extrémités de $\text{Fix}(\gamma)$ sont $\xi_- = \gamma_0 s([\overline{n_k n_{k-1} \cdots n_1}]^{-\varepsilon})$ et $\xi = \gamma_0 ([\overline{n_1 n_2 \cdots n_k}]^{-\varepsilon})$ où $[\overline{n_1 \cdots n_k}]$ désigne la fraction continue T -périodique de période $[n_1 n_2 \cdots n_k]$.

Notons qu'alors $(\text{Fix}(\gamma), C_0)$ est codé par le quadruplet $([\overline{n_k n_{k-1} \cdots n_1}], [\overline{n_1 n_2 \cdots n_k}], \varepsilon, \gamma_0)$. Déterminons le module de la valeur propre $|\lambda_\gamma| > 1$ de γ . D'après la proposition précédente, on peut se restreindre au cas où $\gamma = \tau_\varepsilon^{n_1} \cdots \tau_{-\varepsilon}^{n_k}$. Le lemme suivant se trouve dans [2] et [30], nous reprenons ici la démonstration de M. Bauer.

Lemme 1.2.2 (Lemme clef). — La valeur propre supérieure à 1 de $\tau_\varepsilon^{n_1} \cdots \tau_{-\varepsilon}^{n_k}$ est égale à $\prod_{p=0}^{k-1} (T^p([\overline{n_1 \cdots n_k}]))^{-1}$.

Démonstration. — Soient $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ les matrices de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$, associées à τ_1 et τ_{-1} . D'après la proposition 1.2.1 on a :

$$M_\varepsilon^{n_1} \cdots M_{-\varepsilon}^{n_k} \begin{pmatrix} [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-\varepsilon} \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-\varepsilon} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Les matrices M_1^n et M_{-1}^n s'écrivent également $M_1^n = S D_n$ et $M_{-1}^n = D_n S$ avec $D_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Puisque $S^2 = \text{Id}$, la relation (*) devient

$$D_{n_1} \cdots D_{n_k} \begin{pmatrix} 1 \\ [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-1} \end{pmatrix}.$$

L'égalité $D_{n_k} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ n_k + \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ nous donne

$$D_{n_1} \cdots D_{n_k} \begin{pmatrix} 1 \\ [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-1} \end{pmatrix} = [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-1} D_{n_1} \cdots D_{n_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ [\overline{n_k n_1 \cdots n_{k-1}}]^{-1} \end{pmatrix}$$

ce qui entraîne

$$D_{n_1} \cdots D_{n_k} \begin{pmatrix} 1 \\ [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-1} \end{pmatrix} = [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-1} [\overline{n_2 \cdots n_k n_1}]^{-1} [\overline{n_k n_1 \cdots n_{k-1}}]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-1} \end{pmatrix}$$

1.3 Passage au quotient

Une géodésique $\bar{\alpha}$ de M est marquée en un point de changement \bar{C} si elle se relève sur \mathbb{H}^2 en une géodésique α marquée en un point de changement C .

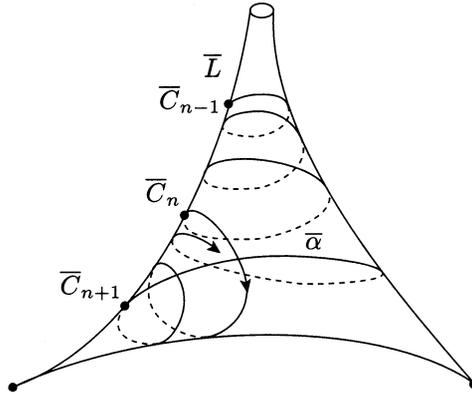


FIG. 1.7.

D'un point de vue géométrique, si \bar{C}_{n-1} , \bar{C}_n , \bar{C}_{n+1} sont trois points de changement consécutifs sur $\bar{\alpha}$, l'un des deux arcs géodésiques $\bar{C}_{n-1}\bar{C}_n$, $\bar{C}_n\bar{C}_{n+1}$ tourne autour de la pointe et l'autre non (Fig. 1.7).

Les différents relevés sur \mathbb{H}^2 de $(\bar{\alpha}, \bar{C})$ correspondent aux images par $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ de (α, C) . Si (α, C) est codé par $(x_-, x, \varepsilon, \gamma)$ (cf. § 1.1), l'ensemble de tous ses relevés est représenté par $\{(x_-, x, \varepsilon, g\gamma), g \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})\}$ (cf. propriété 1.1.6). Pour coder $(\bar{\alpha}, \bar{C})$ choisissons le représentant $(x_-, x, \varepsilon, \text{Id})$, noté plus simplement (x_-, x, ε) . Géométriquement, (x_-, x, ε) représente l'unique géodésique marquée de \mathbb{H}^2 se projetant sur $(\bar{\alpha}, \bar{C})$ dont les extrémités ξ_-, ξ vérifient : $\xi_- < 0$, $\xi > 0$, $(1+\xi_-)(1-\xi) < 0$, et qui est marquée en son point d'intersection avec l'axe imaginaire L .

Si maintenant $\bar{\alpha}$ est une géodésique primitive fermée de M , elle se relève sur \mathbb{H}^2 en un axe $\text{Fix}(\gamma)$ d'un élément hyperbolique $\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ primitif (i.e. $\gamma \neq g^n$ avec

$g \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ et $n > 1$). Soit $P \in \text{Fix}(\gamma)$, la longueur de $\bar{\alpha}$ est égale à la distance de Poincaré de P à $\gamma(P)$, c'est-à-dire à $2 \log |\lambda_\gamma|$ où λ_γ est la valeur propre de module > 1 de γ . Soit (x, x_-, ε) le triplet codant $(\bar{\alpha}, \bar{C})$. D'après la proposition 1.2.1, il existe un entier pair $k \geq 1$ et k entiers strictement positifs $(n_i)_{i=1}^k$ tels que $x = [\overline{n_1 \cdots n_k}]$ et $x_- = [\overline{n_k \cdots n_1}]$. Pour coder $(\bar{\alpha}, \bar{C})$ on peut ne retenir que (x, ε) puisque x_- se déduit directement de x . Le couple $\Theta([\overline{n_1 \cdots n_k}], \varepsilon) = ([\overline{n_2 \cdots n_k n_1}], -\varepsilon)$ code la géodésique marquée au point de changement qui suit \bar{C} . La géodésique $\bar{\alpha}$ contient donc k points de changement différents et d'après le Lemme-Clef 1.2.2 on a la

Propriété 1.3.1. — Soit $(\bar{\alpha}, \bar{C})$ une géodésique fermée et marquée de M codée par le couple $([\overline{n_1 \cdots n_k}], \varepsilon)$. La longueur de $\bar{\alpha}$ est égale à $-2 \log \prod_{p=0}^{k-1} T^p[\overline{n_1 \cdots n_k}]$.

En résumé, une géodésique fermée de M est codée par un couple $(x, \varepsilon) \in]0, 1] \times \{\pm 1\}$ vérifiant $T^k x = x$ pour un certain entier pair $k \geq 1$. Soit $f(x) = -2 \log x$; la longueur de $\bar{\alpha}$ est égale à $S_k f(x) = f(x) + f(Tx) + \cdots + f(T^{k-1}x)$ (où k est la plus petite période de x). Ce codage permet d'exprimer le nombre $\pi_0(a)$ de géodésiques fermées primitives de longueur au plus a sur M munie de la métrique de Poincaré sous la forme :

$$\pi_0(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \#\{x \in]0, 1] \mid T^{2n} x = x,$$

$$S_{2n} f(x) \leq a \text{ et } 2n \text{ est la plus petite période paire de } x\}.$$

Remarque. — Si on remplace $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ par un sous-groupe Γ d'indice fini, les couples $(\bar{\alpha}, \bar{C})$ de la surface $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ sont alors codés par $(x_-, x, \varepsilon, \bar{\gamma}_i) \in]0, 1]^2 \times \{\pm 1\} \times \text{PSL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma$. Notons $F = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma$; le nombre $\pi_\Gamma(a)$ de géodésiques fermées de S de longueur au plus a s'écrit alors :

$$\pi_\Gamma(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \#\{(x, \varepsilon, \bar{\gamma}) \in]0, 1] \times \{\pm 1\} \times F \mid \hat{T}^{2n}(x, \varepsilon, \bar{\gamma}) = (x, \varepsilon, \bar{\gamma}),$$

$$S_{2n} f(x) \leq a \text{ et } 2n \text{ est la plus petite période paire de } x\}.$$

où $\hat{T}(x, \varepsilon, \bar{\gamma}) = (Tx, -\varepsilon, \bar{\gamma}\tau_\varepsilon^{[1/x]})$.

2 FLOT GÉODÉSIQUE ET CODAGE EN COURBURE CONSTANTE

Notons $(a_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le flot géodésique défini sur le fibré unitaire tangent de la surface M privée de ses points singuliers.

2.1 Représentation du flot géodésique par un flot spécial

Soit \bar{G} l'ensemble des *géodésiques* de M marquées en un point de changement. Cet ensemble est une section du flot géodésique puisque l'orbite par ce flot d'une *géodésique* $\bar{\alpha}$ marquée en un point quelconque rencontre \bar{G} . À tout couple $(\bar{\alpha}, \bar{C}) \in \bar{G}$, on associe le réel strictement positif $t(\bar{\alpha}, \bar{C})$ correspondant au temps de premier retour de $a_t(\bar{\alpha}, \bar{C})$ sur \bar{G} . Notons \bar{T} l'application de Poincaré sur \bar{G} définie par $\bar{T}(\bar{\alpha}, \bar{C}) = a_{t(\bar{\alpha}, \bar{C})}(\bar{\alpha}, \bar{C})$; le réel $t(\bar{\alpha}, \bar{C})$ représente la distance de \bar{C} au point de marquage de $\bar{T}(\bar{\alpha}, \bar{C})$.

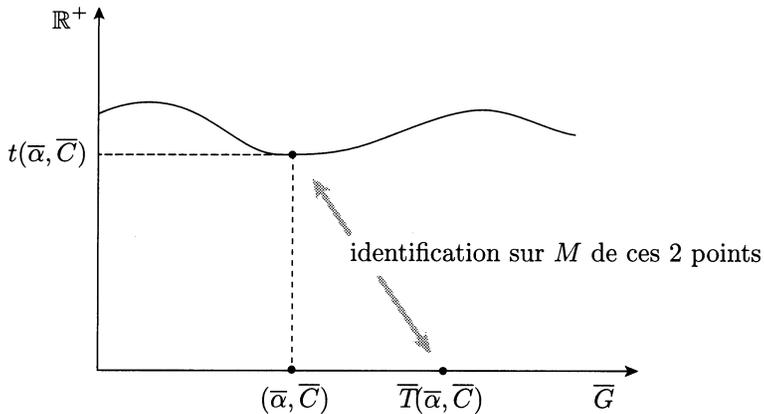


FIG. 2.1.

2.2 Lien entre mesure de Gauss et mesure de Liouville

La relation que nous établissons entre ces deux mesures est connue ([30]). Relevons la situation sur \mathbb{H}^2 et notons G l'ensemble des *géodésiques* de \mathbb{H}^2 d'extrémités ξ_- et ξ vérifiant : $\xi_- < 0, \xi > 0, (1 + \xi_-)(1 - \xi) < 0$. D'après les § 1.1 et 1.2, une *géodésique* marquée $(\bar{\alpha}, \bar{C})$ de \bar{G} codée par (x_-, x, ε) se relève en une unique géodésique de G d'extrémités $\xi_- = \left(-\frac{1}{x_-}\right)^{-\varepsilon}$, $\xi = x^{-\varepsilon}$, marquée en son point d'intersection avec l'axe imaginaire. Notons T_1 l'application sur G qui relève \bar{T} . L'image par T_1 d'une géodésique α de G d'extrémités ξ_-, ξ est la géodésique $\gamma(\alpha)$ où $\gamma = \tau_1^{-[\xi]}$ si $\xi > 1$ et $\gamma = \tau_{-1}^{-[\xi^{-1}]}$ si $\xi < 1$. Il existe donc une partition dénombrable $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de G telle que sur chaque G_i l'application T_1 corresponde à l'action d'un élément $\tau_{\varepsilon_i}^{-n_i}$. Soit μ la restriction à G de la mesure de Liouville $\frac{d\xi_- d\xi}{|\xi_- - \xi|^2}$ sur le fibré unitaire tangent de \mathbb{H}^2 , où $|\xi_- - \xi|$ désigne ici la longueur euclidienne de la corde reliant ξ_- à ξ . L'invariance de μ sous l'action de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ entraîne son invariance sous l'action de T_1 .

Si maintenant on code les éléments de G par les triplets (x, x_-, ε) de $[0, 1]^2 \times \{-1, 1\}$, l'application T_1 se traduit par le décalage Θ , et μ devient la mesure Θ -invariante (encore notée μ) définie par $\mu(dx_- dx d\varepsilon) = \frac{dx_- dx}{(1 + xx_-)} (\delta_{+1} + \delta_{-1})(d\varepsilon)$. Considérons la projection p de $[0, 1]^2 \times \{\pm 1\}$ sur la seconde coordonnée et l'application de Gauss T sur $]0, 1]$. Puisque $p \circ \Theta = T \circ p$, la mesure image $p(\mu)$ est T -invariante. Pour tout borélien A de $[0, 1]$, on a $p(\mu)(A) = \mu([0, 1] \times A \times \{\pm 1\})$ ce qui s'écrit encore

$$p(\mu)(A) = 2 \int_A dx \int_0^1 \frac{dx_-}{(1 + xx_-)^2} = 2 \int_A \frac{dx}{1 + x}.$$

Après normalisation de $p(\mu)$, on retrouve la mesure de Gauss (introduite également par A. Broise § 4.4) sur $[0, 1]$ définie par $h(x) dx$ où $h(x) = \frac{1}{(1+x) \log 2}$.

3 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU NOMBRE DE GÉODÉSIIQUES FERMÉES DE M EN COURBURE CONSTANTE

On rappelle que le codage des géodésiques fermées de M (§ 1.3) conduit à l'expression suivante de $\pi_0(a)$:

$$\pi_0(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \# \{x \in]0, 1[\mid T^{2n}x = x, \\ S_{2n}f(x) \leq a \text{ et } 2n \text{ est la plus petite période paire de } x\}.$$

Dans ce paragraphe, nous démontrons le

Théorème 3.0.1 (Théorème A en courbure constante). — *Le nombre $\pi_0(a)$ de géodésiques primitives fermées de M (ou d'un revêtement fini de M) de longueur au plus a est équivalent à $\frac{e^a}{a}$ lorsque $a \rightarrow +\infty$.*

Pour $a > 0$, on pose $N(a) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \# \{x \in]0, 1[\mid T^{2n}x = x \text{ et } S_{2n}f(x) \leq a\}$; on a $N(a) - N(\frac{a}{2}) \leq \pi_0(a) \leq N(a)$. Pour établir le théorème A, il suffit donc de montrer que $N(a)$ est équivalent à $\frac{e^a}{a}$ lorsque $a \rightarrow +\infty$. Pour ce faire, nous reprenons une idée de S. Lalley [19] et approchons $N(a)$ par des quantités de la forme

$$N_{(x,a)}(\mathbf{1}_{[\alpha,\beta]}) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{\{y \mid T^{2n}(y)=x\}} \mathbf{1}_{[\alpha,\beta]}(y) \mathbf{1}_{[0,a]}(S_{2n}f(y))$$

où $[\alpha, \beta]$ est un intervalle inclus dans $]0, 1[$ et x un élément de $]0, 1[$. En exprimant $N_{(x,a)}$ comme potentiel harmonique d'un opérateur positif \tilde{P} (§ 3.2), on obtient le

Théorème 3.0.2 (Théorème B en courbure constante). — *Soit $[\alpha, \beta] \subset]0, 1[$; lorsque a tend vers $+\infty$, $N_{(x,a)}(\mathbf{1}_{[\alpha,\beta]})$ est équivalent à $\frac{\beta-\alpha}{(1+x)\log 2} \times \frac{e^a}{a}$ uniformément par rapport à $x \in]0, 1[$.*

Ce théorème permet d'expliciter le comportement asymptotique de $N(a)$ (§ 3.1) ; sa preuve se fait en appliquant le théorème du renouvellement harmonique au couple (P, f) (§ 3.2).

3.1 Le théorème A se déduit du théorème B

Notation. — Soit $x = [n_1, n_2, \dots]$; pour tout entier $p \geq 1$, on note $R_p(x)$ le rationnel $[n_1, n_2, \dots, n_p]$.

La première étape consiste à relier $N(a)$ aux mesures $N_{(x,a)}$. Pour ce faire, nous fixons $k \geq 1$ et nous numérotions les différents k -uplets d'entiers non nuls :

$$\mathbb{N}^{*k} = \left\{ \left(n_1^{(i)}, \dots, n_k^{(i)} \right), i \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Pour chaque $i \geq 1$, nous notons I_i l'intervalle formé des irrationnels $x \in]0, 1]$ tels que $R_k(x) = [n_1^{(i)}, \dots, n_k^{(i)}]$ et nous fixons un élément $x^{(i)}$ de I_i ; remarquons que $(I_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ forme une partition de l'ensemble des irrationnels de $]0, 1]$. Soit $x \in I_i$; si x vérifie $T^{2n}x = x$ pour un certain entier $n \geq 1$, on lui associe le réel $x' \in I_i$ tel que $R_{2n}(x') = R_{2n}(x)$ et $T^{2n}x' = x^{(i)}$:

$$x = [p_1 p_2 \cdots p_{2n} p_1 p_2 \cdots] \longleftrightarrow x' = [p_1 p_2 \cdots p_{2n} n_1^{(i)}, \dots, n_k^{(i)}, \dots] \quad (3.1)$$

$$\text{avec } p_1 = n_1^{(i)}, p_2 = n_2^{(i)}, \dots, p_k = n_k^{(i)}. \quad (3.2)$$

On construit ainsi une bijection entre l'ensemble des $x \in I_i$ tels que $T^{2n}x = x$ pour un certain entier $n \geq 1$ et l'ensemble des $x' \in I_i$ tels que $T^{2n}x' = x^{(i)}$; soulignons que pour tout $0 \leq \ell \leq 2n$, on a $R_{2n+k-\ell}(T^\ell x) = R_{2n+k-\ell}(T^\ell x')$. Le lemme 3.1.1 permet un contrôle précis de $|f(T^\ell x) - f(T^\ell x')|$.

Lemme 3.1.1. — *Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ et $A > 0$ tels que pour tout $p \geq N_0$ et tous irrationnels $x, y \in]0, 1]$ vérifiant $R_p(x) = R_p(y)$, on ait $|\log x - \log y| \leq \frac{A}{2^p}$.*

Grâce à ce lemme, on a

$$|S_{2n}f(x) - S_{2n}f(x')| \leq A \sum_{p=k}^{+\infty} \frac{1}{2^p} = \varepsilon_k$$

d'où les inégalités

$$\sum_{i=1}^{+\infty} N_{(x^{(i)}, a - \varepsilon_k)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq N(a) \quad (*) \quad \text{et} \quad N(a) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} N_{(x^{(i)}, a + \varepsilon_k)}(\mathbf{1}_{I_i}) \quad (**).$$

Notons que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0$. Le comportement asymptotique de $N(a)$ est donc étroitement lié à celui de $N_{(x,a)}$. Le théorème B est démontré dans le paragraphe 3.2; admettons le momentanément et expliquons comment le théorème A s'en déduit.

Démonstration du théorème A. — Le lemme de Fatou appliqué à l'inégalité (*) nous donne

$$e^{-\varepsilon_k} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{m(I_i)}{(1 + x^{(i)}) \log 2} \leq \liminf_{a \rightarrow +\infty} \frac{a}{e^a} N(a)$$

où $m(I_i)$ désigne la mesure de Lebesgue de l'intervalle I_i . Le passage à la limite lorsque a tend vers $+\infty$ dans l'inégalité (**) est plus délicat et nécessite un argument

de domination afin de pouvoir utiliser le théorème de Lebesgue. Signalons que cette difficulté n'existe pas dans [19], puisque dans ce cas la famille des indices i est finie. Le lemme suivant résout cette difficulté.

Lemme 3.1.2. — *Il existe une suite $(C_j)_{j \geq 1}$ de \mathbb{R}^+ , vérifiant $\sum_{j=1}^{+\infty} C_j < +\infty$ telle que pour tout $a > 0$ et tout $i \geq 1$, on ait $N_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq C_i \frac{e^a}{a}$.*

Grâce à ce lemme et au théorème B, nous avons $\limsup_{a \rightarrow +\infty} \frac{a}{e^a} N(a) \leq e^{\varepsilon k} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{m(I_i)}{(1+x^{(i)}) \log 2}$. Il suffit pour achever la preuve du théorème A de faire tendre k vers $+\infty$ et de remarquer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{m(I_i)}{(1+x^{(i)}) \log 2} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^{(i)}) \log 2} = 1.$$

Démonstrons maintenant les lemmes 3.1.1 et 3.1.2.

Démonstration du lemme 3.1.1. — Pour tout irrationnel $x \in]0, 1]$, on a $|x - R_p(x)| \leq \frac{1}{2^{p-1}}$ ([K]). En notant $n_1 = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$, on obtient pour $p \geq 3$,

$$|x - R_p(x)| = \left| \frac{1}{n_1 + Tx} - \frac{1}{n_1 + R_{p-1}(Tx)} \right| \leq \frac{|Tx - R_{p-1}(Tx)|}{n_1^2} \leq \frac{x}{2^{p-3}}$$

d'où la double inégalité $1 - \frac{1}{2^{p-3}} \leq \frac{R_p(x)}{x} \leq 1 + \frac{1}{2^{p-3}}$. Puisque $R_p(x) = R_p(y)$, on a alors

$$\frac{1 - \frac{1}{2^{p-3}}}{1 + \frac{1}{2^{p-3}}} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{1 + \frac{1}{2^{p-3}}}{1 - \frac{1}{2^{p-3}}}$$

Il existe donc deux constantes A et N_0 indépendantes de x et y telles que pour $p \geq N_0$, on ait $|\log x - \log y| \leq \frac{A}{2^p}$.

Démonstration du lemme 3.1.2. — On a

$$N_{(x^{(i)}, a)} \mathbf{1}_{I_i} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{\{y \mid T^{2n}(y) = x^{(i)}\}} \mathbf{1}_{I_i}(y) \mathbf{1}_{[0, a]}(S_{2n} f(y)).$$

Sans perdre en généralité, on peut supposer que $k = 2\ell$. Notons que si $R^n(x) = [p_1 \cdots p_n]$ alors $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = p_1$, $\lfloor \frac{1}{Tx} \rfloor = p_2, \dots$, $\lfloor \frac{1}{T^{n-1}x} \rfloor = p_n$, d'où $S_n f(x) \geq \log p_1 \cdots p_n$. Décomposons alors $N_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i})$ en $N'_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) + N''_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i})$ avec

$$N'_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) = \sum_{n=1}^{\ell} \frac{1}{n} \sum_{\{y \mid T^{2n}(y) = x^{(i)}\}} \mathbf{1}_{I_i}(y) \mathbf{1}_{[0, a]}(S_{2n} f(y))$$

et

$$N''_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) = \sum_{n=\ell+1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{\{y \mid T^{2n}(y) = x^{(i)}\}} \mathbf{1}_{I_i}(y) \mathbf{1}_{[0, a]}(S_{2n} f(y)).$$

Pour tout $1 \leq n \leq \ell$, si $y \in I_i$ et $T^{2n}y = x^{(i)}$ alors $R_{2n}(y) = R_{2n}(x^{(i)})$ et donc $S_n f(y) \geq 2 \log n_1^{(i)} \cdots n_n^{(i)}$. Par conséquent

$$N'_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq \sum_{n=1}^{\ell} \frac{1}{n} \mathbf{1}_{[0, a]}(2 \log n_1^{(i)} \cdots n_n^{(i)}).$$

La fonction $x \mapsto \frac{e^x}{1+x}$ étant croissante sur \mathbb{R}^+ , on a pour tout réel a positif

$$\mathbf{1}_{[0, a]} \leq \mathbf{1}_{[0, \frac{e^a}{1+a}]} \left(\frac{e^x}{1+x} \right) \leq \frac{e^a}{a} \frac{1+x}{e^x}$$

d'où $N'_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq C'_i \frac{e^a}{a}$ avec $C'_i = \sum_{n=1}^{\ell} \frac{1}{n} \frac{1+2 \log n_1^{(i)} \cdots n_n^{(i)}}{(n_1 \cdots n_n)^2}$. Notons que la série $\sum_{i=1}^{+\infty} C'_i$ est convergente.

Majorons maintenant le terme $N''_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i})$. On a

$$N''_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) = \sum_{n=\ell+1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{\{z \mid T^{2n-\ell}(z) = x^{(i)}\}} \sum_{\{y \mid T^\ell(y) = z\}} \mathbf{1}_{I_i}(y) \mathbf{1}_{[0, a]}(S_{2n-\ell} f(z) + S_\ell f(y)).$$

La condition $y \in I_i$ entraîne $R_\ell(y) = [n_1^{(i)} \cdots n_\ell^{(i)}]$ d'où $S_\ell f(y) \geq A_i$ avec $A_i = 2 \log n_1^{(i)} \cdots n_\ell^{(i)}$. On obtient alors $N''_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq N_{(x^{(i)}, a-A_i)}(\mathbf{1}_{[0, 1]})$.

D'après le théorème B, il existe $A > 0$ tel que $N_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq A \frac{e^{a-A_i}}{1+a-A_i}$ pour tous $i \in \mathbb{N}^*$ et $a > A_i$. Pour $A_i \leq 1$, on obtient $N_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq A \frac{e^a}{a} \leq A \frac{e^a}{a} A_i e^{-A_i}$. Il suffit pour conclure de remarquer que la série $\sum_i A_i e^{-A_i}$ est convergente.

3.2 Démonstration du théorème B

Introduisons l'opérateur de transfert associé à la transformation T , c'est-à-dire l'opérateur P adjoint de T par rapport à la mesure de Gauss $\nu(dx) = h(x) dx$ avec $h(x) = \frac{1}{(1+x) \log 2}$. Pour toute fonction borélienne bornée φ sur $]0, 1]$, on a

$$\forall x \in]0, 1], \quad P\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+x}{(n+x)(n+1+x)} \varphi\left(\frac{1}{n+x}\right) = \frac{1}{h(x)} \sum_{\{y \mid T(y) = x\}} h(y) e^{-f(y)} \varphi(y)$$

avec $f(y) = -2 \log y$. Les itérés de P sont donnés par la formule

$$\forall n \geq 1, \quad P^n \varphi(x) = \frac{1}{h(x)} \sum_{\{y \mid T^n(y) = x\}} h(y) e^{-S_n f(y)} \varphi(y) \text{ avec } S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k.$$

Remarques. —

1. La mesure de Gauss ν étant une probabilité T -invariante, l'opérateur P est markovien, i.e. $P1 = 1$.
2. La transformation T est définie sur $]0, 1]$ mais prend ses valeurs dans l'intervalle compact $[0, 1]$; ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, on a $T(\frac{1}{n}) = 0$. L'opérateur P joue le rôle d'inverse de T , ce qui explique que les formules ci-dessus restent valables pour toute fonction borélienne bornée φ définie sur le compact $[0, 1]$; dans le paragraphe 5.2, nous montrerons même que P opère sur l'espace des fonctions lipschitziennes sur $[0, 1]$.

Dans le paragraphe 2.2, nous avons vu que l'intervalle $[0, 1]$ peut être lu comme une section du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent de M , la transformation T correspondant alors à l'application de premier retour sur cette section; le flot géodésique sur M induit une autre transformation \tilde{T} définie sur le produit croisé $]0, 1] \times \mathbb{R}$ par $\tilde{T}(x, s) = (Tx, s + f(x))$.

D'un point de vue géométrique, il serait plus satisfaisant de remplacer f par la fonction hauteur t (§ 2.1) correspondant à la distance parcourue entre deux points de changement consécutifs sur une géodésique. Néanmoins, lorsque x vérifie $T^n x = x$, on a $S_n t(x) = S_n f(x)$; dans un certain sens, on peut donc dire que la transformation « mémorise » la distance parcourue entre deux passages consécutifs sur la section.

La mesure $\nu \otimes m$ sur le produit $]0, 1] \times \mathbb{R}$ est \tilde{T} -invariante. Comme précédemment, introduisons l'adjoint \tilde{P} de la transformation \tilde{T} par rapport à la mesure $\nu \otimes m$; pour toute fonction borélienne bornée ψ sur $]0, 1] \times \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \tilde{P}\psi(x, s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+x}{(n+x)(n+1+x)} \psi\left(\frac{1}{n+x}, s - f\left(\frac{1}{n+x}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{h(x)} \sum_{\{y | T(y)=x\}} h(y) e^{-f(y)} \psi(y, s - f(y)) \end{aligned}$$

Les itérés de \tilde{P} sont donnés par $\tilde{P}^n \psi(x, s) = \frac{1}{h(x)} \sum_{\{y | T^n(y)=x\}} h(y) e^{-S_n f(y)} \psi(y, s - S_n f(y))$.

Notons $\chi_a(s) = e^{-s} \mathbf{1}_{[-a, 0]}(s)$. Pour tout $(x, a) \in]0, 1] \times \mathbb{R}^+$ et toute fonction borélienne bornée φ sur $[0, 1]$ on a alors $N_{(x,a)}(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tilde{P}^{2n} \left(\frac{\varphi}{h} \otimes \chi_a\right)(x, 0)$.

Remarque. — Lorsque l'on remplace $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ par un sous-groupe Γ d'indice fini, le nombre $\pi_\Gamma(a)$ de géodésiques fermées de longueur au plus a de la surface \mathbb{H}^2/Γ s'écrit (voir remarque du § 1.3) :

$$\pi_\Gamma(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} \#\{(x, \varepsilon, \bar{\gamma}) \in]0, 1] \times \{\pm 1\} \times F \mid \hat{T}^{2n}(x, \varepsilon, \bar{\gamma}) = (x, \varepsilon, \bar{\gamma}),$$

$$S_{2n} f(x) \leq a \text{ et } 2n \text{ est la plus petite période paire de } x\}.$$

avec $F = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma$ et $\hat{T}(x, \varepsilon, \bar{\gamma}) = (Tx, -\varepsilon, \bar{\gamma}\tau_\varepsilon^{[1/x]})$.

Notons m' la mesure uniforme sur $\{\pm 1\} \times F$; la mesure $\nu \otimes m'$ est \hat{T} -invariante. L'opérateur \hat{P} , adjoint de \hat{T} par rapport à la mesure $\nu \otimes m'$ s'écrit alors

$$\hat{P}\varphi(x, \varepsilon, \bar{\gamma}) = \sum_{\{y \mid T(y)=x\}} \frac{h(y)}{h(x)} e^{-f(y)} \varphi(y, -\varepsilon, \bar{\gamma} \tau_{-\varepsilon}^{-[\frac{1}{y}]})$$

pour toute fonction borélienne bornée φ sur $[0, 1] \times \{\pm 1\} \times F$. L'étude du comportement asymptotique de $\pi_\Gamma(a)$ est modélée sur celle de $\pi_0(a)$, en changeant P en \hat{P} et en reprenant les arguments développés dans ([14]).

Démonstration du théorème B. — Notons g la fonction indicatrice de l'intervalle $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$. Fixons $\varepsilon > 0$ et posons $K = \lceil \frac{\alpha}{\varepsilon} \rceil$. On a

$$\sum_{\ell=0}^{K-1} e^{\ell\varepsilon} \mathbf{1}_{[-(\ell+1)\varepsilon, -\ell\varepsilon]} \leq \chi_a \leq \sum_{\ell=0}^K e^{(\ell+1)\varepsilon} \mathbf{1}_{[-(\ell+1)\varepsilon, -\ell\varepsilon]}$$

d'où les deux inégalités

$$h(x) \sum_{\ell=0}^{K-1} e^{\ell\varepsilon} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \tilde{P}^{2n} \left(\frac{g}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-(\ell+1)\varepsilon, -\ell\varepsilon]} \right) (x, 0) \leq N_{(x,a)}(g)$$

et

$$N_{(x,a)}(g) \leq h(x) \sum_{\ell=0}^K e^{(\ell+1)\varepsilon} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \tilde{P}^{2n} \left(\frac{g}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-(\ell+1)\varepsilon, -\ell\varepsilon]} \right) (x, 0).$$

Notons que, d'après la définition de \tilde{P} , pour tout $\ell \geq 1$ on a

$$\tilde{P}^{2n} \left(\frac{g}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-(\ell+1)\varepsilon, -\ell\varepsilon]} \right) (x, 0) = \tilde{P}^{2n} \left(\frac{g}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-\varepsilon, 0]} \right) (x, \ell\varepsilon).$$

Ainsi, nous sommes amenés à étudier le comportement lorsque ℓ tend vers $+\infty$ du potentiel $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \tilde{P}^{2n}((x, \ell\varepsilon), dy dt)$. Cette étude fait l'objet du paragraphe 5; nous montrons en particulier dans ce paragraphe que le couple (P, f) vérifie les hypothèses H_0, H_1, H_2, H_3 , et H_4 du théorème de renouvellement harmonique 5.0.2. En appliquant ce théorème au couple $(P^2, f + f \circ T)$ on obtient

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,1]} \left| \ell \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tilde{P}^{2n} \left(\frac{g}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-\varepsilon, 0]} \right) (x, \ell\varepsilon) - \nu \left(\frac{g}{h} \right) \right| = 0. \quad (*)$$

Par ailleurs, nous avons le

Lemma 3.2.1. — Soient $(u_\ell(x))_{\ell \geq 0}$ une suite de fonctions strictement positives sur $[0, 1]$ et $(v_\ell)_{\ell \geq 0}$ une série à termes positifs divergente. Sous l'hypothèse $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{u_\ell(x)}{v_\ell} - 1 \right| = 0$, on a

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{\sum_{\ell=0}^n u_\ell(x)}{\sum_{\ell=0}^n v_\ell} \right| = 0.$$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES GÉODÉSIQUES FERMÉES

En combinant ce lemme avec l'égalité (*), on obtient

$$\sum_{\ell=1}^K e^{\ell\varepsilon} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tilde{P}^{2n} \left(\frac{\varphi}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-(\ell+1)\varepsilon, -\ell\varepsilon]} \right) (x, 0) \underset{K \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\sum_1^K \frac{e^{\ell\varepsilon}}{\ell} \right) \int_0^1 \varphi(t) dt$$

uniformément par rapport à $x \in [0, 1]$.

Remarquons l'équivalence $\sum_{\ell=1}^K \frac{e^{\ell\varepsilon}}{\ell} \underset{K \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{K\varepsilon}}{K\varepsilon}$; le choix de ε étant arbitraire, on obtient finalement $N_{(x,a)}(\varphi) \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} h(x) \frac{e^a}{a} \int_0^1 \varphi(t) dt$ uniformément par rapport à $x \in [0, 1]$, ce qui achève la démonstration du théorème B.

4 DISTRIBUTION ASYMPTOTIQUE DES CONSTANTES DE LÉVY DES NOMBRES QUADRATIQUES

Nous expliquons ici comment retrouver par la méthode développée dans le paragraphe précédent des résultats déjà démontrés dans C. Faivre [9]. Soient x un irrationnel de $]0, 1]$, $[n_1(x), n_2(x), \dots]$ son développement en fractions continues et $\frac{p_k(x)}{q_k(x)}$ le rationnel $[n_1(x), \dots, n_k(x)]$ (cf. proposition 1.1.5). Le théorème de P. Lévy [22] établit, pour presque tout $x \in]0, 1]$ la convergence suivante :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \log q_k(x) = \frac{\pi^2}{12 \log 2}.$$

Supposons maintenant que x soit un irrationnel quadratique, c'est-à-dire racine d'un polynôme du second degré à coefficients entiers ; son développement en fractions continues est alors périodique et l'on a $x = [n_1(x), \dots, n_N(x)]$ où N est la plus petite période de ce développement. Dans [9], C. Faivre montre que la suite $(\frac{1}{k} \log q_k(x))_{k \geq 1}$ converge vers la « constante de Lévy » $\beta(x) = -\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log T^i(x)$. Lorsque N est pair, d'après le paragraphe 1, le réel x code une géodésique fermée de M marquée en un point de changement, de longueur $\ell(x) = -2 \sum_{i=0}^{N-1} \log T^i(x) = S_N f(x)$. Lorsque N est impair il faut doubler la période ; le réel $x = [\overline{a_1 \cdots a_N a_1 \cdots a_N}]$ code alors une géodésique fermée de M marquée en un point de changement, de longueur $\ell(x) = -4 \sum_{i=0}^{N-1} \log T^i(x) = 2S_N f(x)$.

En supposant l'équivalent $\frac{e^a}{a}$ de $\pi_0(a)$ *a priori* connu, C. Faivre établit le théorème suivant :

Théorème 4.0.1 ([9]). — Soient a un réel positif et \mathcal{J}_a l'ensemble des nombres irrationnels quadratiques x de $[0, 1]$ tels que $\ell(x) \leq a$.

- i) Le cardinal \mathcal{J}_a est équivalent à $\frac{3 \log 2 e^a}{\pi^2}$ lorsque a tend vers $+\infty$.
- ii) La somme $\sum_{x \in \mathcal{J}_a} \beta(x)$ est équivalente à $\frac{e^a}{4}$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Comme corollaire immédiat, C. Faivre obtient la convergence suivante :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\#\mathcal{J}_a}{\sum_{x \in \mathcal{J}_a} \beta(x)} = \frac{\pi^2}{12 \log 2}$$

qui exprime le fait qu'en « moyennisant » convenablement les constantes $\beta(x)$ on retrouve asymptotiquement la constante $\frac{\pi^2}{12 \log 2}$ établie par P. Lévy.

4.1 Résumé de la démonstration du théorème 4.0.1, partie (i)

Notons \mathcal{G}_a^p (resp. \mathcal{G}_a^i) l'ensemble des éléments de \mathcal{G}_a dont la plus petite période du développement en fractions continues est paire (resp. impaire). On a

$$\begin{aligned} \#\mathcal{G}_a^p &= \sum_{n=1}^{+\infty} \#\{x \in]0, 1[\mid T^{2n}x = x, \quad S_{2n}f(x) \leq a \text{ et } 2n \text{ plus petite période}\} \\ \#\mathcal{G}_a^i &= \sum_{n=0}^{+\infty} \#\left\{x \in]0, 1[\mid T^{2n+1}x = x, \quad S_{2n+1}f(x) \leq \frac{a}{2} \text{ et } 2n+1 \text{ plus petite période}\right\} \end{aligned}$$

L'assertion (i) du théorème 4.0.2 résultera des deux lemmes suivants :

Lemme 4.1.1. — *Le cardinal de \mathcal{G}_a^p est équivalent à $\frac{3 \log 2}{\pi^2} e^a$ lorsque a tend vers $+\infty$.*

Lemme 4.1.2. — *Le cardinal de \mathcal{G}_a^i est équivalent à $\frac{3 \log 2}{\pi^2} e^{\frac{a}{2}}$ lorsque a tend vers $+\infty$.*

Pour établir ces lemmes, nous suivons la méthode développée dans le paragraphe 3 ; nous indiquons seulement ici les étapes essentielles de la preuve du lemme 4.1.1, celles de la preuve du lemme 4.1.2 étant rigoureusement les mêmes.

Soit $U(a) = \sum_{n \geq 1} \#\{x \in]0, 1[\mid T^{2n}x = x \text{ et } S_{2n}f(x) \leq a\}$.

En utilisant l'encadrement $U(a) - U(\frac{a}{2}) \leq \#\mathcal{G}_a^p \leq U(a)$, on constate que pour établir le lemme 4.1.1, il suffit de montrer que $U(a)$ est équivalent à $\frac{3 \log 2}{\pi^2} e^a$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Étape 1. Perturbation des points périodiques.

Pour toute fonction borélienne positive φ sur $[0, 1]$, on considère le noyau $U_{(x,a)}(\varphi)$ défini par :

$$U_{(x,a)}(\varphi) = \sum_{n \geq 1} \sum_{\{y \mid T^{2n}y = x\}} \varphi(y) \mathbf{1}_{[0,a]}(S_{2n}f(y));$$

En introduisant pour k fixé, la partition $(I_i)_{i \geq 1}$ du § 3.1, on obtient les inégalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} U_{(x^{(i)}, a - \varepsilon_k)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq U(a) \tag{*}$$

et

$$U(a) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} U_{(x^{(i)}, a + \varepsilon_k)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq U(a) \tag{**}$$

avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0$.

Étape 2. Théorème du renouvellement « classique » et comportement des $U_{(x,a)}(\varphi)$.

En introduisant le noyau \tilde{P} associé au couple (P, f) , on obtient

$$U_{(x,a)}(\varphi) = h(x) \sum_{n \geq 1} \tilde{P}^{2n} \left(\frac{\varphi}{h} \otimes \chi_a \right) (x, 0)$$

où $h(x) = \frac{1}{(1+x) \log 2}$ et $\chi_a(s) = e^{-s} \mathbf{1}_{[-a,0]}(s)$.

Fixons alors $\varepsilon > 0$ et posons $K = \lceil \frac{a}{\varepsilon} \rceil$. On a

$$\sum_{\ell=0}^{K-1} e^{\ell\varepsilon} \mathbf{1}_{[-(\ell+1)\varepsilon, -\ell\varepsilon]} \leq \chi_a \leq \sum_{\ell=0}^K e^{(\ell+1)\varepsilon} \mathbf{1}_{[-(\ell+1)\varepsilon, -\ell\varepsilon]}$$

d'où les deux inégalités

$$h(x) \sum_{\ell=0}^{K-1} e^{\ell\varepsilon} \sum_{n \geq 1} \tilde{P}^{2n} \left(\frac{\varphi}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-\varepsilon, 0]} \right) (x, \ell\varepsilon) \leq U_{(x,a)}^k(\varphi)$$

et

$$U_{(x,a)}(\varphi) \leq h(x) \sum_{\ell=0}^{K-1} e^{(\ell+1)\varepsilon} \sum_{n \geq 1} \tilde{P}^{2n} \left(\frac{\varphi}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-\varepsilon, 0]} \right) (x, \ell\varepsilon)$$

En appliquant le théorème de renouvellement « classique » (§ 5) au couple $(P^2, f + f \circ T)$, on établit la convergence suivante :

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} \tilde{P}^{2n} \left(\frac{\varphi}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-\varepsilon, 0]} \right) (x, \ell\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{E} \nu \left(\frac{\varphi}{h} \right)$$

uniformément par rapport à $x \in [0, 1]$, avec $E = \int_0^1 (f(t) + f \circ T(t)) \nu(dt) = 2\nu(f) = \frac{\pi^2}{3 \log 2}$. En appliquant alors le lemme 3.2.1, et en faisant tendre ε vers 0, on montre que lorsque a tend vers $+\infty$, le réel $U_{(x,a)}(\varphi)$ est équivalent à $h(x) \frac{3 \log 2}{\pi^2} e^a \int_0^1 \varphi(t) dt$ uniformément par rapport à $x \in [0, 1]$.

Étape 3. Asymptotique de $U(a)$

Reprenons ici les inégalités (*) et (**) de l'étape 1. Le lemme de Fatou appliqué à (*) donne :

$$\frac{e^{-\varepsilon k}}{E} \sum_{i=1}^{+\infty} m(I_i) h(x^{(i)}) \leq \liminf_{a \rightarrow +\infty} \frac{U(a)}{e^a}.$$

Par ailleurs, en adaptant la preuve du lemme 3.1.2, on établit l'existence d'une série à termes positifs convergente $(D_i)_{i \geq 1}$ telle que $U_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq D_i e^a$. Ceci autorise le passage à la limite dans (**)

$$\limsup_{a \rightarrow +\infty} \frac{U(a)}{e^a} \leq \frac{e^{\varepsilon_k}}{E} \sum_{i=1}^{+\infty} m(I_i) h(x^{(i)}).$$

Pour achever la preuve du lemme 4.1.1, il suffit de faire tendre k vers $+\infty$.

4.2 Résumé de la démonstration du théorème 4.0.1 partie (ii)

L'assertion ii) du théorème 4.0.1 résultera des deux lemmes suivants :

Lemme 4.2.1. — La somme $\sum_{x \in \mathcal{Y}_a^p} \beta(x)$ est équivalente à $\frac{e^a}{4}$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Lemme 4.2.2. — La somme $\sum_{x \in \mathcal{Y}_a^i} \beta(x)$ est équivalente à $\frac{e^{\frac{a}{2}}}{4}$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Indiquons les étapes essentielles de la preuve du lemme 4.2.1. On a

$$\sum_{x \in \mathcal{Y}_a^p} \beta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n} \sum_{\substack{\{x \mid T^{2n}x=x\} \\ 2n \text{ plus petite période}}} S_{2n}f(x) \mathbf{1}_{[0,a]}(S_{2n}f(x)).$$

Posons $V(a) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n} \sum_{\{x \mid T^{2n}x=x\}} S_{2n}f(x) \mathbf{1}_{[0,a]}(S_{2n}f(x))$. On vérifie que pour établir le lemme 4.2.1, il suffit de montrer que $V(a)$ est équivalent à $\frac{e^a}{4}$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Étape 1. Perturbation des points périodiques.

Posons $V_{(x,a)}(\varphi) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n} \sum_{\{y \mid T^{2n}y=x\}} \varphi(y) S_{2n}f(y) \mathbf{1}_{[0,a]}(S_{2n}f(y))$.

Du lemme 3.1.1 découlent les deux inégalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} V_{(x^{(i)}, a - \varepsilon_k)}(\mathbf{1}_{I_i}) - \frac{\varepsilon_k}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} N_{(x^{(i)}, a - \varepsilon_k)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq V(a) \quad (*)$$

et

$$V(a) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} V_{(x^{(i)}, a + \varepsilon_k)}(\mathbf{1}_{I_i}) + \frac{\varepsilon_k}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} N_{(x^{(i)}, a + \varepsilon_k)}(\mathbf{1}_{I_i}) \quad (**)$$

avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0$.

Étape 2. Théorème du renouvellement harmonique et comportement de $V_{(x,a)}(\varphi)$.

On a $V_{(x,a)}(\varphi) = \frac{h(x)}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \tilde{P}^{2n} \left(\frac{\varphi}{h} \otimes \xi_a \right) (x, a)$ avec $\xi_a(t) = -te^{-t} \mathbf{1}_{[-a,0]}(t)$.

En approchant alors ξ_a par une fonction en escalier et en appliquant le théorème de renouvellement harmonique au couple $(P^2, f + f \circ T)$, on montre que $V_{(x,a)}(\varphi)$ est équivalent à $\frac{h(x)}{4} e^a \int_0^1 \varphi(t) dt$ lorsque a tend vers $+\infty$

Étape 3. Asymptotique de $V(a)$.

Le lemme de Fatou permet de passer à la limite en a dans l'inégalité (*) de l'étape 1 ; pour faire de même dans l'inégalité (**), on adapte le lemme 3.1.2 et on utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue. On conclut en faisant tendre k vers $+\infty$.

5 ÉTUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU POTENTIEL HARMONIQUE D'UNE MARCHE DE MARKOV SUR \mathbb{R}

On considère un espace métrique compact (X, d) et une probabilité de transition $Q(x, dy)$ sur X . Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de noyau Q sur X , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Le noyau Q contrôle les transitions du processus $(X_n)_{n \geq 0}$: le point $x \in X$ est transformé en y avec la probabilité $Q(x, dy)$. On associe au noyau Q un opérateur (noté encore Q) défini sur l'espace des fonctions boréliennes bornées φ sur X par :

$$\forall x \in X, \quad Q\varphi(x) = \int_X \varphi(y) Q(x, dy).$$

Soit g une fonction borélienne positive sur X ; on établit sous certaines hypothèses un théorème limite relatif aux sommes ergodiques $S_n = \sum_{k=1}^n g(X_k)$. Pour ce faire, on se place sur l'espace produit $X \times \mathbb{R}$ et l'on considère sur cet espace la chaîne de Markov $(X_n, S_n)_{n \geq 0}$ de noyau de transition \tilde{Q} : le point (x, s) est transformé en $(y, s - g(y))$ avec la probabilité $Q(x, dy)$. Ainsi, pour toute fonction borélienne bornée φ sur $X \times \mathbb{R}$, on a

$$\tilde{Q}\varphi(x, s) = \int_X \varphi(y, s - g(y)) Q(x, dy).$$

Fixons $(x, a) \in X \times \mathbb{R}$. Les trajectoires partant de (x, a) de la chaîne $(X_n, S_n)_{n \geq 0}$ s'écrivent $(X_n(\omega), S_n(\omega))_{n \geq 0}$ avec $X_0(\omega) = x$ et $S_n(\omega) = a - \sum_{k=1}^n g(X_k(\omega))$. Notons que les transitions sur $X \times \mathbb{R}$ de cette chaîne sont gouvernées par le noyau \tilde{Q} ; on dit que $(X_n, S_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne *semi-markovienne* sur $X \times \mathbb{R}$. Le processus $(S_n)_{n \geq 0}$ apparaît comme une généralisation des marches aléatoires à pas indépendants sur \mathbb{R} et est parfois appelé « marche de Markov » sur \mathbb{R} ([12]).

Fixons un intervalle I dans \mathbb{R} . Le théorème du renouvellement ([5]) donne le comportement asymptotique du temps moyen de passage $T_{(x,a)}(I)$ dans l'intervalle I du processus $(S_n)_{n \geq 0}$ lorsque le point origine $S_0 = a$ est « rejeté » en $+\infty$; l'expression « temps moyen » signifie que l'on pondère les différentes trajectoires du

processus $(S_n)_{n \geq 0}$ par leurs probabilités de réalisation. Si on note $\mathbb{E}_{(x,a)}[\varphi(X_n, S_n)] = \mathbb{E}[\varphi(X_n, S_n) |_{X_0=x, S_0=a}]$, on a :

$$T_{(x,a)}(I) = \mathbb{E}_{(x,a)} \left[\sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_I(S_n) \right] = \sum_{n \geq 0} \tilde{Q}^n(\mathbf{1}_X \otimes \mathbf{1}_I)(x, a).$$

Lorsque g est constante sur \mathbb{R} , égale à $E > 0$, pour tout $\omega \in \Omega$ on a $S_n(\omega) = S_0(\omega) - nE$; ainsi pour toute trajectoire partant de a assez grand, le temps moyen de passage dans I est approximativement $\frac{m(I)}{E}$ où $m(I)$ désigne la longueur de I . Si g n'est pas constante, le fait de « rejeter » a en $+\infty$, permet d'atteindre un régime stationnaire lors du passage dans l'intervalle I ; on peut alors remplacer g par « la valeur moyenne » E des variables aléatoires $g(X_k)$ ce qui donne le même comportement asymptotique que lorsque g est constante.

Nous introduisons la famille $(Q_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ des opérateurs « transformée de Fourier » associés au couple (Q, g) et définis, pour toute fonction borélienne bornée φ sur X , par

$$Q_\lambda \varphi(x) = \int_X \varphi(y) e^{i\lambda g(y)} Q(x, dy).$$

Soit $L(X)$ l'espace des fonctions lipschitziennes sur X , muni de la norme

$$\|\varphi\| = |\varphi|_\infty + m(\varphi) \text{ avec } |\varphi|_\infty = \sup_{x \in X} |\varphi(x)| \text{ et } m(\varphi) = \sup_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{d(x, y)}.$$

Introduisons les hypothèses suivantes :

H₀ Q opère sur $L(X)$.

H₁ Il existe sur X une unique mesure de probabilité Q -invariante μ et le rayon spectral sur $L(X)$ de l'opérateur $R = Q - \mu$ est strictement inférieur à 1.

H₂ Le rayon spectral sur $L(X)$ des opérateurs Q_λ est inférieur ou égal à 1 et, pour λ non nul, l'opérateur $(I - Q_\lambda)$ est inversible sur $L(X)$.

H₃ $\sup_{x \in X} Qg^3(x) < +\infty$ et $\int_X g(x) \mu(dx) > 0$.

H₄ Les opérateurs Q_λ opèrent sur $L(X)$ et la fonction $\lambda \rightarrow Q_\lambda$ est de classe \mathcal{C}^3 de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans l'espace de Banach $(\mathcal{L}(L(X), \|\cdot\|), \|\cdot\|)$ des applications linéaires sur $(L(X), \|\cdot\|)$ muni de la norme usuelle.

Lorsque g est une fonction lipschitzienne et positive sur X , l'hypothèse **H₃** est satisfaite; si de plus, Q opère sur $L(X)$ (hypothèse **H₀**), il en est de même pour les opérateurs Q_λ et l'on montre aisément que la fonction $\lambda \mapsto Q_\lambda$ est \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans $\mathcal{L}(L(X), \|\cdot\|)$ ([13]). Dans l'exemple que nous traitons, $g(x) = -2 \log x$ n'est pas lipschitzienne sur $]0, 1]$, la condition **H₄** ne se déduit donc plus des hypothèses **H₀** et **H₃**; la « géométrie » de l'opérateur P intervient alors fortement. Enfin, l'hypothèse **H₂** est parfois délicate à vérifier ([26], [28]); dans l'exemple géométrique traité ici, la vérification de cette condition repose sur le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [16]. Dans ce qui suit, m désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} et l'on pose $\mu(g) = \int_X g(x) \mu(dx)$.

Théorème 5.0.1 (Théorème du renouvellement). — Supposons que le couple (Q, g) vérifie les hypothèses H_0, H_1, H_2, H_3 et H_4 . Alors, lorsque a tend vers $+\infty$, la famille de mesures $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{Q}^n((x, a), dy dt)\right)_{a>0}$ converge vaguement vers la mesure $\frac{1}{\mu(g)}\mu(dy) \otimes m(dt)$, uniformément par rapport à $x \in X$.

On trouve dans ([13]) une preuve de ce théorème dans le cas particulier où $g \in L(X)$. Le problème de la convergence uniforme est traité en détail dans ([25]). Enfin, dans ([2]) est abordé le cas où la fonction g prend ses valeurs dans \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Sous les hypothèses H_0, H_1, H_2, H_3 et H_4 la preuve s'adapte aisément. Dans le paragraphe 5.1, nous établissons une variante de ce théorème.

Théorème 5.0.2 (Théorème du renouvellement harmonique). — Sous les hypothèses H_0, H_1, H_2, H_3 et H_4 , la famille de mesures $\left(a \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \tilde{Q}^n((x, a), dy dt)\right)_{a>0}$ converge vaguement lorsque a tend vers $+\infty$ vers la mesure $\mu(dy) \otimes m(dt)$, uniformément par rapport à $x \in X$.

Dans le paragraphe 5.2, nous montrerons que le couple (P, f) introduit dans le paragraphe 3 vérifie les hypothèses H_0, H_1, H_2, H_3 et H_4 .

5.1 Démonstration du théorème du renouvellement harmonique

Par un argument probabiliste classique ([5]), il suffit pour prouver le théorème 5.0.2 de montrer que, pour tout fonction $\varphi \in L(X)$ et toute fonction u strictement positive sur \mathbb{R} et dont la transformée de Fourier \hat{u} est \mathcal{C}^∞ à support compact, on a :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sup_{x \in X} \left| a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tilde{Q}^n(\varphi \otimes u)(x, a) - \mu(\varphi) \int_{\mathbb{R}} u(y) dy \right| = 0.$$

En utilisant la transformée de Fourier inverse, on établit les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} \tilde{Q}^n(\varphi \otimes u)(x, a) &= \int_0^t \sum_{n=1}^{+\infty} s^{n-1} \tilde{Q}^n(\varphi \otimes u)(x, a) ds \\ &= \int_0^t \sum_{n=1}^{+\infty} s^{n-1} \mathbb{E}_{(x,0)}[\varphi(X_n) u(a + S_n)] ds \\ &= \int_0^t \sum_{n=1}^{+\infty} s^{n-1} \mathbb{E}_{(x,0)}[\varphi(X_n) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\lambda) e^{i\lambda(a+S_n)} d\lambda] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda a} \hat{u}(\lambda) \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{+\infty} s^{n-1} Q_\lambda^n \varphi(x) ds \right) d\lambda \end{aligned}$$

l'interversion des signes \sum et \int étant possible puisque $t \in [0, 1[$.

Comme $s \in [0, 1]$, les opérateurs $(I - sQ_\lambda)$ sont inversibles sur $L(X)$ et l'on a $\sum_{n=1}^{+\infty} s^{n-1} Q_\lambda^n = (I - sQ_\lambda)^{-1} \circ Q_\lambda$. Posons alors

$$I_{(x,a,t)}(u, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda a} \hat{u}(\lambda) \left(\int_0^t (I - sQ_\lambda)^{-1} (Q_\lambda \varphi)(x) ds \right) d\lambda;$$

pour démontrer le théorème 5.0.2, il nous faut établir la convergence suivante :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sup_{x \in X} \left| a \lim_{t \rightarrow 1} I_{(x,a,t)}(u, \varphi) - \mu(\varphi) \hat{u}(0) \right| = 0.$$

L'étude, lorsque $t \rightarrow 1$, de l'intégrale $\int_0^t (I - sQ_\lambda)^{-1} (Q_\lambda \varphi)(x) ds$ est étroitement liée au comportement au voisinage de 0 de la fonction $\lambda \mapsto (I - sQ_\lambda)^{-1}$ (définie sur \mathbb{R}^* d'après l'hypothèse H_4). Le lemme suivant est démontré à la fin de ce paragraphe.

Lemme 5.1.1. — *Sous les hypothèses H_0, H_1, H_3 et H_4 , il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall \lambda \in [-\delta, \delta] \quad Q_\lambda = k(\lambda)\mu_\lambda + R_\lambda$$

où

1. $k(\lambda)$ est la valeur propre dominante de Q_λ sur $L(X)$.
2. μ_λ est le projecteur propre sur $L(X)$ associé à $k(\lambda)$ et R_λ est un opérateur borné sur L de rayon spectral $\rho(R_\lambda)$ strictement inférieur à 1.
3. $R_\lambda \mu_\lambda = \mu_\lambda R_\lambda = 0$.
4. Les fonctions $\lambda \rightarrow k(\lambda), R_\lambda, \mu_\lambda$ sont de classe \mathcal{C}^3 sur $[-\delta, \delta]$.

De plus, il existe une fonction $\theta: \lambda \mapsto \theta(\lambda)$ de classe \mathcal{C}^1 sur $[-\delta, \delta]$ telle que $k(\lambda) = 1 + i\mu(g)\lambda + \lambda^2\theta(\lambda)$.

Décomposons \hat{u} en $\hat{u}_1 + \hat{u}_2$, le support (compact) U_1 de \hat{u}_1 étant inclu dans \mathbb{R}^* et celui de \hat{u}_2 dans $[-\delta, \delta]$. Sous les hypothèses H_2 et H_4 , la fonction $(s, \lambda) \mapsto (I - sQ_\lambda)^{-1}$ est de classe \mathcal{C}^3 sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^*$. Elle est donc bornée sur $[0, 1] \times U_1$, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 3 ; en particulier, il existe une constante K_1 (indépendante de $x \in X$ puisque les opérateurs mis en jeu sont bornés sur $L(X)$) telle que pour tout $a > 0$ et tout $x \in X$, on ait

$$\left| \lim_{t \rightarrow 1} I_{(x,a,t)}(u_1, \varphi) \right| \leq \frac{K_1}{a^3},$$

inégalité qui découle du lemme classique suivant :

Lemme 5.1.2. — *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} . On suppose que les fonctions $f, f', \dots, f^{(k)}$ sont intégrables sur \mathbb{R} . Alors, pour tout réel a , on a*

$$\left| a^k \int_{\mathbb{R}} e^{ixa} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| dx.$$

Étudions maintenant l'intégrale $I_{(x,a,t)}(u_2, \varphi)$. D'après le lemme 5.1.2, pour tous $s \in [0, 1[$ et $\lambda \in [\delta, -\delta]$, on a :

$$(I - sQ_\lambda)^{-1} = \frac{1}{1 - sk(\lambda)}\mu_\lambda + (I - sR_\lambda)^{-1}$$

Notons $J_{(x,a,t)}$ l'intégrale $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda a} \hat{u}_2(\lambda) \left(\int_0^t (I - sR_\lambda)^{-1} (Q_\lambda \varphi)(x) ds \right) d\lambda$. La fonction $(s, \lambda) \mapsto (I - sR_\lambda)^{-1}$ étant de classe \mathcal{C}^3 sur $[0, 1] \times [-\delta, \delta]$, il existe, comme pour l'intégrale $I_{(x,a,t)}(u_1, \varphi)$, une constante $K_2 > 0$ telle que pour tout $a > 0$ et tout $x \in X$, on ait :

$$\left| \lim_{t \rightarrow 1} J_{(x,a,t)} \right| \leq \frac{K_2}{a^3}.$$

Il nous reste donc à étudier le comportement lorsque $t \rightarrow 1$ de l'intégrale

$$J'_{(x,a,t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda a} \hat{u}_2(\lambda) \mu_\lambda(Q_\lambda \varphi)(x) \left(\int_0^t \frac{ds}{1 - sk(\lambda)} \right) d\lambda.$$

Pour ce faire, on effectue une intégration par partie, si bien que cette intégrale se décompose en $K_{(x,a,t)} + L_{(x,a,t)}$ avec

$$K_{(x,a,t)} = \frac{-1}{2i\pi a} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda a} \hat{u}_2(\lambda) \mu_\lambda(Q_\lambda \varphi)(x) \frac{k'(\lambda)}{k(\lambda)} \frac{t}{1 - tk(\lambda)} d\lambda$$

$$L_{(x,a,t)} = \frac{-1}{2i\pi a} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda a} \left(\frac{d}{d\lambda} (\hat{u}_2(\lambda) \mu_\lambda(Q_\lambda \varphi)(x)) - \hat{u}_2(\lambda) \mu_\lambda(Q_\lambda \varphi)(x) \frac{k'(\lambda)}{k(\lambda)} \right) \int_0^t \frac{ds}{1 - sk(\lambda)} d\lambda.$$

L'étude du comportement lorsque t tend vers 1 de l'intégrale $K_{(x,a,t)}$ est délicate et fait apparaître une identité approchée. Le lemme suivant est démontré à la fin du paragraphe.

Lemme 5.1.3. — *Soit f une fonction continue sur $[-\delta, \delta]$ telle que $\lambda \rightarrow b(\lambda) = \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda}$ admette un prolongement continu en 0. On a*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\lambda a} \frac{f(\lambda)}{1 - tk(\lambda)} d\lambda = \\ \frac{f(0)}{\mu(g)} \left(\pi + \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin \lambda a}{\lambda} d\lambda \right) - \frac{i}{\mu(g)} \int_{-\delta}^{\delta} b(\lambda) e^{i\lambda a} d\lambda - \frac{i}{\mu(g)} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\lambda f(\lambda) \theta(\lambda)}{1 - k(\lambda)} e^{i\lambda a} d\lambda. \end{aligned}$$

Appliquons le lemme 5.1.3 à la fonction $f_x(\lambda) = \hat{u}_2(\lambda) \mu_\lambda(Q_\lambda \varphi)(x) \frac{k'(\lambda)}{k(\lambda)}$. Cette fonction étant de classe \mathcal{C}^2 sur $[-\delta, \delta]$, la fonction $b_x: \lambda \mapsto \frac{f_x(\lambda) - f_x(0)}{\lambda}$ est continûment dérivable sur $[-\delta, \delta]$; on obtient alors, via le lemme 5.1.3, l'existence d'une constante $K_3 > 0$ telle que, pour tout $a > 0$ et $x \in X$, on ait :

$$\left| \lim_{t \rightarrow 1} aK_{(x,a,t)} - \mu(\varphi) \hat{u}(0) \right| \leq \frac{C_3}{a};$$

Enfin notons que la fonction $\lambda \mapsto \int_0^1 \frac{ds}{1-sk(\lambda)}$ est intégrable sur $[-\delta, \delta]$. L'intégrale $L_{(x,a,t)}$ converge donc, quand t tend vers 1, vers

$$L_{(x,a,1)} = \frac{-1}{2i\pi a} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda a} \left(\frac{d}{d\lambda} (\hat{u}_2(\lambda)\mu_\lambda(Q_\lambda\varphi)(x)) - \hat{u}_2(\lambda)\mu_\lambda(Q_\lambda\varphi)(x) \frac{k'(\lambda)}{k(\lambda)} \right) \int_0^1 \frac{ds}{1-sk(\lambda)} d\lambda.$$

et l'on a $\sup_{\substack{x \in X \\ a > 0}} a |L_{(x,a,1)}| < +\infty$. Par conséquent, on a de même

$\sup_{\substack{x \in X \\ a > 0}} a \left| \lim_{t \rightarrow 1} J'_{(x,a,t)} \right| < +\infty$. En remplaçant dans l'intégrale $J'_{(x,a,t)}$ la fonction $\lambda \mapsto \hat{u}_2(\lambda)\mu_\lambda(Q_\lambda\varphi)(x)$ par $\lambda \mapsto \frac{d}{d\lambda} (\hat{u}_2(\lambda)\mu_\lambda(Q_\lambda\varphi)(x)) - \hat{u}_2(\lambda)\mu_\lambda(Q_\lambda\varphi)(x) \frac{k'(\lambda)}{k(\lambda)}$, on obtient l'existence d'une constante $K_4 > 0$ telle que, pour tout $x \in X$ et tout $a > 0$, on ait

$$\left| \lim_{t \rightarrow 1} L_{(x,a,t)} \right| \leq \frac{K_4}{a^2}.$$

Pour résumer, on a décomposé $I_{(x,a,t)}(u, \varphi)$ en $I_{(x,a,t)}(u_1, \varphi) + J_{(x,a,t)} + K_{(x,a,t)} + L_{(x,a,t)}$ et établi l'existence de constantes K_1, K_2, K_3 et K_4 telles que

$$\begin{aligned} \left| \lim_{t \rightarrow 1} a I_{(x,a,t)}(u_1, \varphi) \right| &\leq \frac{K_1}{a^2}, \\ \left| \lim_{t \rightarrow 1} a J_{(x,a,t)} \right| &\leq \frac{K_2}{a^2}, \\ \left| \lim_{t \rightarrow 1} a K_{(x,a,t)} - \mu(\varphi)\hat{u}(0) \right| &\leq \frac{K_3}{a}, \\ \text{et } \left| \lim_{t \rightarrow 1} a L_{(x,a,t)} \right| &\leq \frac{K_4}{a}. \end{aligned}$$

Il nous reste à démontrer les lemmes 5.1.1 et 5.1.3.

Démonstration du lemme 5.1.1. — La décomposition spectrale sur $L(X)$ des opérateurs $Q_\lambda, \lambda \in [-\delta, \delta]$, découle de celle de Q et du fait que Q_λ est une perturbation de classe \mathcal{C}^3 de l'opérateur Q au voisinage de 0. Pour obtenir la dernière assertion du lemme, il suffit de faire le développement limité d'ordre 3 de $k(\lambda)$ au voisinage de 0 et de calculer $k'(0)$; ce dernier point mérite d'être explicité. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$Q_{\lambda/n}^n \mathbf{1}(x) = \mathbb{E}_x \left[e^{i\lambda/n S_n} \right] = k \left(\frac{\lambda}{n} \right)^n \mu_{\lambda/n} \mathbf{1}(x) + R_{\lambda/n}^n \mathbf{1}(x).$$

En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{i}{n} \mathbb{E}_x \left[S_n e^{i\lambda/n S_n} \right] &= k' \left(\frac{\lambda}{n} \right) k \left(\frac{\lambda}{n} \right)^{n-1} \mu_{\lambda/n} \mathbf{1}(x) + \\ &+ \frac{1}{n} k \left(\frac{\lambda}{n} \right)^n \mu'_{\lambda/n} \mathbf{1}(x) + \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} R_{\lambda/n}^\ell R'_{\lambda/n} R_{\lambda/n}^{n-\ell-1} \mathbf{1}(x) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{i}{n} \mathbb{E}_x [S_n] = k'(0) + \frac{1}{n} \mu'_0 \mathbf{1}(x) + \frac{1}{n} R^{n-1} R'_0 \mathbf{1}(x).$$

On conclut en intégrant les deux membres de l'égalité par rapport à la mesure μ puis en faisant tendre n vers $+\infty$.

Démonstration du lemme 5.1.3. — On a

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(\lambda)e^{i\lambda a} \left(\frac{1}{1-tk(\lambda)} - \frac{1}{1-t(1+i\mu(g)\lambda)} \right) d\lambda = t \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\lambda^2 f(\lambda)\Theta(\lambda)}{(1-tk(\lambda))(1-t(1+i\mu(g)\lambda))} e^{i\lambda a} d\lambda$$

ainsi, grâce au théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow 1} \int_{-\delta}^{\delta} f(\lambda)e^{i\lambda a} \left(\frac{1}{1-tk(\lambda)} - \frac{1}{1-t(1+i\mu(g)\lambda)} \right) d\lambda = -\frac{1}{i\mu(g)} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\lambda f(\lambda)\Theta(\lambda)}{1-k(\lambda)} e^{i\lambda a} d\lambda.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(\lambda)e^{i\lambda a}}{1-t(1+i\mu(g)\lambda)} d\lambda &= \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1-t}{(1-t)^2 + t^2\mu(g)^2\lambda^2} f(\lambda)e^{i\lambda a} d\lambda + \\ &+ \frac{ti\mu(g)}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\lambda(f(\lambda)e^{i\lambda a} - f(-\lambda)e^{-i\lambda a})}{(1-t)^2 + t^2\mu(g)^2\lambda^2} d\lambda \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow 1} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(\lambda)e^{i\lambda a}}{1-t(1+i\mu(g)\lambda)} d\lambda = \frac{f(0)}{\mu(g)} \left(\pi + \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin \lambda a}{\lambda} d\lambda \right) + \frac{i}{\mu(g)} \int_{-\delta}^{\delta} b(\lambda)e^{i\lambda a} d\lambda.$$

5.2 Le couple (P, f) vérifie les hypothèses $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3, \mathbf{H}_4$

Introduisons les « opérateurs de Fourier » $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ définis, pour toute fonction borélienne bornée φ sur $[0, 1]$ et pour $x \in [0, 1]$, par $P_\lambda \varphi(x) = P(e^{i\lambda f} \varphi)(x)$, ce qui s'écrit encore

$$P_\lambda \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+x}{(n+x)(n+1+x)} e^{2i\lambda \log(n+x)} \varphi\left(\frac{1}{n+x}\right).$$

Soit L l'espace des fonctions lipschitziennes sur $[0, 1]$, normé par $\|\varphi\| = |\varphi|_\infty + m(\varphi)$ où $|\cdot|_\infty$ désigne la norme de la convergence uniforme sur $[0, 1]$ et $m(\varphi) = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|}$; l'espace $(L, \|\cdot\|)$ est un \mathbb{R} -espace de Banach et l'application identité est compacte de $(L, \|\cdot\|)$ dans $(L, |\cdot|_\infty)$. Nous allons montrer que les opérateurs P_λ opèrent sur L et contrôler leur spectre sur cet espace. Dans la proposition suivante, ν désigne la mesure de Gauss introduite dans le paragraphe 2.2.

Proposition 5.2.1. —

1. L'opérateur P opère sur L et le rayon spectral sur L de l'opérateur $P - \nu$ est strictement inférieur à 1.
2. Pour λ non nul, l'opérateur P_λ opère sur L et son rayon spectral sur L est strictement inférieur à 1.

Démonstration. — Nous énonçons tout d'abord deux lemmes dont les preuves reposent sur des arguments développés dans ([14]) et qui vont nous permettre de contrôler le spectre des opérateurs P_λ .

Lemme 5.2.2. — *Il existe deux constantes positives A et B telles que, pour toute fonction $\varphi \in L$ et tout réel λ , on ait*

$$|P_\lambda \varphi|_\infty \leq |\varphi|_\infty \text{ et } \|P_\lambda \varphi\| \leq \frac{5}{8} \|\varphi\| + (A + B|\lambda|) |\varphi|_\infty.$$

Lemme 5.2.3. — *Soient $\varphi \in L$ et α un nombre complexe de module 1. Si $P_\lambda \varphi = \alpha \varphi$, alors $\alpha = 1, \lambda = 0$, et φ est constante sur $[0, 1]$.*

Les inégalités du lemme 5.2.2 montrent que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'opérateur P_λ est un opérateur de Doebelin-Fortet sur L à puissances bornées ([16], [24]) ; ainsi d'après le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu ([16], [24]), P_λ a au plus un nombre fini de valeurs propres de module 1, les sous-espaces propres associés sont de dimension finie et le reste du spectre est inclu dans un disque de rayon strictement inférieur à 1. Lorsque λ est non nul, l'opérateur P_λ ne possède pas de valeur propre de module 1 (lemme 5.2.3) si bien que son rayon spectral est strictement inférieur à 1. (Hypothèse H_2). En revanche, pour $\lambda = 0$, la valeur propre 1 est simple, l'espace propre $\ker(P - \text{Id})$ est celui des fonctions constantes sur $[0, 1]$, et le projecteur propre associé à 1 s'identifie à une mesure de probabilité P -invariante sur $[0, 1]$. Ainsi, on peut écrire $P = \nu + R$ avec $\rho(R) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|R^n\|^{1/n} < 1$. (Hypothèse H_1).

Démonstration du lemme 5.2.2. — La première inégalité découle du fait que P est un opérateur markovien sur $[0, 1]$. Posons $p_n(x) = \frac{1+x}{(n+x)(n+1+x)}$; pour tous $x, y \in [0, 1]$ et $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} |P_\lambda \varphi(x) - P_\lambda \varphi(y)| &\leq |\varphi|_\infty \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |p_n(x) - p_n(y)| + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(y) \left| e^{i\lambda \log(n+x)} - e^{-i\lambda \log(n+y)} \right| \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(y) \left| \varphi\left(\frac{1}{n+x}\right) - \varphi\left(\frac{1}{n+y}\right) \right| \\ &\leq |\varphi|_\infty \left(6|x-y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(y) \left| \sin\left(\frac{\lambda}{2} \log\left(\frac{n+x}{n+y}\right)\right) \right| \right) \\ &\quad + m(\varphi) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n(y)}{n^2} |x-y| \end{aligned}$$

d'où la seconde inégalité du lemme.

Démonstration du lemme 5.2.3. — Considérons d'abord le cas où $\lambda = 0$. Les égalités $P(\varphi) = e^{i\theta} \varphi$ et $\nu P = \nu$ entraînent $P|\varphi|(x) = |\varphi(x)|$, $\nu(dx)$ -presque sûrement ; les fonctions φ et $P\varphi$ étant continues sur $[0, 1]$ et le support de ν étant $[0, 1]$, cette égalité est en fait satisfaite pour tous les points x de $[0, 1]$.

Soient x_0 et x_1 dans $[0, 1]$ tels que $|\varphi(x_0)| = \inf_{x \in [0, 1]} |\varphi(x)|$ et $|\varphi(x_1)| = \sup_{x \in [0, 1]} |\varphi(x)|$; par convexité on a

$$\forall n \geq 1 \quad |\varphi(x_0)| = \left| \varphi \left(\frac{1}{n+x_0} \right) \right| \quad \text{et} \quad |\varphi(x_1)| = \left| \varphi \left(\frac{1}{n+x_1} \right) \right|$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $|\varphi(x_0)| = |\varphi(0)|$ et $|\varphi(x_1)| = |\varphi(0)|$; ainsi, φ est de module constant sur $[0, 1]$.

Montrons à présent que la fonction φ est constante sur $[0, 1]$; en supposant φ non nulle, l'égalité $P\varphi = e^{i\theta}\varphi$ nous donne

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \geq 1 \quad \varphi \left(\frac{1}{n+x} \right) = e^{i\theta}\varphi(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $\varphi(x) = e^{-i\theta}\varphi(0)$; la fonction φ est donc constante sur $[0, 1]$ et $e^{i\theta} = 1$.

Considérons à présent le cas où λ est quelconque. Les égalités $P_\lambda\varphi = e^{i\theta}\varphi$ et $\nu P = \nu$ entraînent $P|\varphi| = |\varphi|$ et donc φ est de module constant sur $[0, 1]$. Par convexité, on obtient

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \geq 1 \quad e^{2i\lambda \log(n+x)} \varphi \left(\frac{1}{n+x} \right) = e^{i\theta}\varphi(x)$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2i\lambda \log(n+x)} = e^{-i\theta} \frac{\varphi(x)}{\varphi(0)}$; en particulier

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{2i\lambda \log(2n+x)}}{e^{2i\lambda \log(n+x)}} = e^{2i\lambda \log 2} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{2i\lambda \log(3n+x)}}{e^{2i\lambda \log(n+x)}} = e^{2i\lambda \log 3} = 1$, d'où $\lambda = 0$. Pour $\lambda \neq 0$, l'opérateur P_λ ne possède donc pas de valeur propre de module 1.

Il nous reste à étudier la régularité de la fonction $\lambda \mapsto P_\lambda$. Nous avons la

Proposition 5.2.4. — *L'application $\lambda \mapsto P_\lambda$ est développable en série entière en tout point de \mathbb{R} .*

Démonstration. — Fixons $\lambda_0 \in \mathbb{R}$; pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$P_{\lambda_0+t}\varphi(x) = P \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(it)^\ell}{\ell!} e^{i\lambda_0 f} f^\ell \varphi \right) (x).$$

Nous allons montrer que pour $|t|$ assez petit la série $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(it)^\ell}{\ell!} e^{i\lambda_0 f} f^\ell$ est normalement convergente dans $(L, \|\cdot\|)$. En posant alors

$$\forall \varphi \in L \quad S_N(\lambda_0, t)(\varphi) = \sum_{\ell=0}^N \frac{(it)^\ell}{\ell!} P(e^{i\lambda_0 f} f^\ell \varphi)$$

on en déduit que la suite d'opérateurs $(S_N(\lambda_0, t))_{N \geq 1}$ converge vers P_{λ_0+t} dans l'espace $(\mathcal{L}(L, \|\cdot\|), \|\cdot\|)$ des applications linéaires de $(L, \|\cdot\|)$; ainsi la fonction $\lambda \mapsto P_\lambda$ est développable en série entière au voisinage de λ_0 et

$$\forall \ell \geq 1, \forall \varphi \in L \quad \frac{dP_\lambda}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} (\varphi) = i^\ell P(e^{i\lambda_0 f} f^\ell \varphi).$$

Il nous suffit donc de montrer que la série $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(it)^\ell}{\ell!} e^{i\lambda_0 f} f^\ell$ est normalement convergente dans $(L, \|\cdot\|)$.

Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0, 1]$, posons $f_n(x) = 2 \log(n + x)$; on a $\|f_n\|_\infty \leq 2 \log(n + 1)$, $m(f_n) \leq 2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|e^{i\lambda f_n}\| \leq 1 + |\lambda| m(f_n)$.

Par ailleurs, il existe $K > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $\|p_n\| \leq \frac{K}{n^2}$. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \|P(e^{i\lambda_0 f} f^\ell)\| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|p_n\| \|e^{i\lambda_0 f_n}\| \|f_n\|^\ell \\ &\leq C \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2 + 2 \log(n + 1))^\ell}{n^2}. \end{aligned}$$

Notons que la somme $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|t|^\ell (2 + 2 \log(n + 1))^\ell}{\ell! n^2} = e^{2|t|} \sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)^{2|t|}}{n^2}$ est finie si $|t| < 1/2$; par conséquent, pour $|t| < 1/2$, la série $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{|t|^\ell}{\ell!} \|P(e^{i\lambda_0 f} f^\ell)\|$ converge. Ceci achève la démonstration de la proposition 5.2.4.

6 PERTURBATION DE LA MÉTRIQUE DE POINCARÉ SUR M

Fixons à présent une *perturbation* \bar{g}_ε de la métrique de Poincaré sur M . On note d_ε la distance induite par la métrique relevée sur \mathbb{H}^2 , K_ε la courbure de \bar{g}_ε et d la distance de Poincaré sur \mathbb{H}^2 . On rappelle que les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

1. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$,

$$(1 + \varepsilon)^{-1}d(z_1, z_2) \leq d_\varepsilon(z_1, z_2) \leq (1 + \varepsilon)d(z_1, z_2).$$

2. Il existe $b \in]0, 1]$ et $R > 0$ tels que pour tout $z \in \mathbb{H}^2$, $K_\varepsilon(z) \leq -b^2 < 0$. et $K_\varepsilon(z) = -1$ si $\text{Im } z \geq R$.

L'hypothèse (1) traduit le fait que les espaces métriques $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$ et (\mathbb{H}^2, d) sont quasi-isométriques et l'hypothèse (2) entraîne que $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$ est un $\text{CAT}(-b^2)$ -espace [4]. On note $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ son bord (au sens des classes d'équivalences de rayons géodésiques asymptotes) et $\partial \mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

6.1 Codage des géodésiques fermées de (M, \bar{g}_ε)

Soient $\xi \in \partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ et $r_\varepsilon(t)$ un rayon géodésique pointé en ξ . Étant donnés $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$, la limite, quand t tend vers $+\infty$, de $d_\varepsilon(z_1, r_\varepsilon(t)) - d_\varepsilon(z_2, r_\varepsilon(t))$ existe et est indépendante du rayon choisi, on la note $B_\xi^\varepsilon(z_1, z_2)$ ([4], [11]). Géométriquement $|B_\xi^\varepsilon(z_1, z_2)|$ correspond à la distance entre les horosphères basées en ξ et passant respectivement par z_1, z_2 . Si ξ_γ est le point fixe attractif d'une isométrie hyperbolique γ de $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$, la quantité $B_{\xi_\gamma}^\varepsilon(z, \gamma(z))$ est indépendante de z et correspond au déplacement d_γ d'un point de l'axe de γ sous l'action de γ . Nous choisissons comme point base dans \mathbb{H}^2 le point i , on pose :

$$d_\gamma = B_{\xi_\gamma}^\varepsilon(i, \gamma(i)).$$

Soient $\xi_1, \xi_2 \in \partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ et z un point appartenant à la géodésique passant par ξ_1 et ξ_2 ; le produit de Gromov $(\xi_1 | \xi_2)_\varepsilon$ défini par

$$(\xi_1 | \xi_2)_\varepsilon = \frac{1}{2} (B_{\xi_1}^\varepsilon(i, z) + B_{\xi_2}^\varepsilon(i, z))$$

est indépendant du point z et représente, au signe près, la distance entre les horosphères passant par i et basées respectivement en ξ_1, ξ_2 .

Considérons sur $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2 \times \partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ l'application D_ε définie par

$$\begin{aligned} D_\varepsilon(\xi_1, \xi_1) &= 0 \\ D_\varepsilon(\xi_1, \xi_2) &= e^{-b(\xi_1|\xi_2)_\varepsilon} \text{ (où } b \text{ est la borne supérieure de la courbure } K_\varepsilon\text{).} \end{aligned}$$

L'espace \mathbb{H}^2 muni de la distance bd_ε étant un $\text{CAT}(-1)$ -espace, D_ε est une *distance visuelle* sur $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ ([4]). Ce résultat est dû à M. Bourdon que nous remercions ici pour les éclaircissements qu'il nous a apportés sur les $\text{CAT}(-1)$ -espaces. On note $D_0 = D$.

Le théorème suivant établit une correspondance entre les deux espaces métriques $(\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2, D_\varepsilon)$ et $(\partial \mathbb{H}^2, D)$.

Théorème 6.1.1 ([11] Proposition 4.14). — *L'application $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon) \xrightarrow{\text{Id}} (\mathbb{H}^2, d)$ s'étend en un homéomorphisme bi-Hölder $(\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2, D_\varepsilon) \xrightarrow{\varphi} (\partial \mathbb{H}^2, D)$ équivariant par rapport à l'action de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ (i.e. $\varphi \circ \gamma = \gamma \circ \varphi$).*

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$; on définit le produit de Gromov sur $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$ par

$$(z_1 | z_2)_\varepsilon = \frac{1}{2} (d_\varepsilon(i, z_1) + d_\varepsilon(i, z_2) - d_\varepsilon(z_1, z_2)).$$

On note $(z_1 | z_2)_0 = (z_1 | z_2)$. Les espaces (\mathbb{H}^2, d) et $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$ étant quasi-isométriques, il existe $A_1 > 0$ tel que ([11] p. 90)

$$(1 + \varepsilon)^{-1} (z_1 | z_2) - A_1 \leq (z_1 | z_2)_\varepsilon \leq (1 + \varepsilon) (z_1 | z_2) + A_1. \quad (*)$$

Considérons $\xi_1, \xi_2 \in \partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ et $r_1(t), r_2(t)$ les rayons géodésiques issus de i et pointés respectivement en ξ_1, ξ_2 . En appliquant l'inégalité (*) à $r_1(t)$ et $r_2(t)$ et en utilisant le fait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (r_1(t), r_2(t))_\varepsilon = (\xi_1 | \xi_2)_\varepsilon$ on conclut qu'il existe $B > 1$ tel que

$$\frac{1}{B} [D(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2))]^{b(1+\varepsilon)} \leq D_\varepsilon(\xi_1, \xi_2) \leq B [D(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2))]^{b/1+\varepsilon} \quad (**)$$

Cette inégalité précise le théorème 6.1.1. On déduit du théorème 6.1.1 le

Corollaire 6.1.2. —

1. Une transformation de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ fixe le même nombre de points sur $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ que sur $\partial \mathbb{H}^2$.
2. L'ensemble limite de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ agissant sur $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$ est $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$.

Notons ξ_{-1} le point fixe de τ_{-1} agissant sur $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ et Λ l'ensemble $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ privé de l'orbite sous $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ de ξ_{-1} . En utilisant le théorème 6.1.1 et le codage des points de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ en fractions continues développé dans le paragraphe 1, on obtient la

Proposition 6.1.3 (codage des points de Λ). — Soit $\xi \in \Lambda$, il existe une unique suite $\omega(\xi)$ de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$

$$\omega(\xi) = \tau_r^{sn_1}, \tau_{-r}^{sn_2}, \tau_r^{sn_3}, \dots \text{ où } n_i \in \mathbb{N}^* \text{ et } r, s \in \{\pm 1\}$$

telle que

$$\xi = \lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_r^{sn_1} \cdots \tau_{(-1)^{k+1}r}^{sn_k}(\xi_{-1}).$$

Notation. — On note Λ^+ l'ensemble des $\xi \in \Lambda$ tels que le premier terme de $\omega(\xi)$ soit de la forme τ_{-1}^n ou τ_1^n avec $n \in \mathbb{N}^*$. (Remarquons que $\varphi(\Lambda^+) = \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}^+$).

On rappelle (proposition 1.2.1) que toute transformation hyperbolique de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est conjuguée à une transformation de la forme $\tau_r^{n_1} \tau_{-r}^{n_2} \cdots \tau_{-r}^{n_k}$ avec $r \in \{\pm 1\}$, $k \in 2\mathbb{N}^*$, et $n_i \in \mathbb{N}^*$. Considérons à présent une géodésique primitive fermée $\bar{\alpha}$ sur (M, \bar{g}_ε) de longueur $\ell_\varepsilon(\bar{\alpha})$, il existe donc $\gamma = \tau_r^{n_1} \tau_{-r}^{n_2} \cdots \tau_{-r}^{n_k}$ dont l'axe se projette sur $\bar{\alpha}$. Notons ξ_γ le point fixe attractif de γ sur $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$, on a la relation :

$$\ell_\varepsilon(\bar{\alpha}) = B_{\xi_\gamma}^\varepsilon(i, \gamma(i)).$$

Soient $\xi \in \Lambda^+$ et ω_1 le premier terme de la suite $\omega(\xi)$ on définit $T_\varepsilon: \Lambda^+ \rightarrow \Lambda^+$ et $f_\varepsilon: \Lambda^+ \rightarrow \Lambda^+$ par :

$$T_\varepsilon(\xi) = \omega_1^{-1}\xi \text{ et } f_\varepsilon(\xi) = B_\xi^\varepsilon(i, \omega_1(i)).$$

Remarquons que $T_\varepsilon^k \xi_\gamma = \xi_\gamma$ et $S_k f_\varepsilon(\xi_\gamma) = f_\varepsilon(\xi_\gamma) + \cdots + f_\varepsilon(T^{k-1} \xi_\gamma) = \ell_\varepsilon(\bar{\alpha})$. Fixons $a > 0$ et notons $\pi_\varepsilon(a)$ le nombre de géodésiques primitives fermées orientées de (M, \bar{g}_ε) de longueur au plus a , en reprenant les arguments développés dans le paragraphe 1, on obtient la relation :

$$\pi_\varepsilon(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} \# \{ \xi \in \Lambda^+ \mid T_\varepsilon^{2n} \xi = \xi, 2n \text{ plus petite période de } \xi, S_{2n} f_\varepsilon(\xi) \leq a \}.$$

Remarque. — Si $\varepsilon = 0$, autrement dit si la courbure est constante on obtient

$$\pi_0(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} \# \{ x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+ \mid T_0^{2n} x = x, 2n \text{ plus petite période de } x, S_{2n} f_0(x) \leq a \}.$$

Cette expression de $\pi_0(a)$ diffère de celle donnée à la fin du paragraphe 1, toutefois en prenant l'image de l'intervalle $[1, +\infty[$ par la transformation $1/x$, en remplaçant T_0 par l'application de Gauss T et $f_0(x)$ par $f(x) = \log x$ (qui est cohomologue à $B_x(i, \tau_{-1}^n i)$ si $x = [n_1, n_2, \dots]$), on retrouve l'expression initiale de $\pi_0(a)$.

6.2 Transformation dilatante et mesure T_ε -invariante sur Λ^+

En revenant à la définition de D_ε et en utilisant les propriétés de $B_\xi^\varepsilon(z_1, z_2)$ on obtient pour tout $\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ et tous $\xi_1, \xi_2 \in \partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$:

$$D_\varepsilon(\gamma(\xi_1), \gamma(\xi_2)) = e^{\frac{1}{2}(B_{\xi_1}^\varepsilon(i, \gamma^{-1}(i)) + B_{\xi_2}^\varepsilon(i, \gamma^{-1}(i)))} D_\varepsilon(\xi_1, \xi_2). \quad (*)$$

Remarquons que si γ est parabolique et si ξ_γ est son point fixe $B_{\xi_1}^\varepsilon(i, \gamma^{-1}(i)) = 0$. En effet, $B_{\xi_1}^\varepsilon(i, \gamma^{-1}(i)) = \frac{1}{n} B_{\xi_1}^\varepsilon(i, \gamma^{-n}(i)) \leq \frac{1}{n} d_\varepsilon(i, \gamma^{-n}(i)) \leq \frac{1}{n} (1 + \varepsilon) d(i, \gamma^{-n}(i))$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} d_\varepsilon(i, \gamma^{-n}(i)) = 0$. On obtient en particulier

$$D_\varepsilon(\gamma(\xi), \xi_\gamma) = D_\varepsilon(\xi_1, \xi_2) e^{\frac{1}{2} B_{\xi_1}^\varepsilon(i, \gamma^{-1}(i))}.$$

On rappelle que $f_\varepsilon(\xi) = B_\xi^\varepsilon(i, \tau_s^n(i))$ où τ_s^n est le premier terme du développement de ξ .

Proposition 6.2.1. — *Il existe $\varepsilon_0 > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $\xi \in \Lambda^+$:*

$$S_N f_\varepsilon(\xi) > \alpha.$$

En utilisant la relation (*) on déduit le

Corollaire 6.2.2. — *Pour tout $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, il existe $\beta > 1$ tel que pour tout $\xi \in \Lambda^+$ dont le développement commence par $\tau_r^{n_1}, \tau_{-r}^{n_2}, \dots, \tau_{-r}^{n_N}$ on ait :*

$$e^{B_\xi^\varepsilon(i, \tau_s^{n_1} i) + B_{T(\xi)}^\varepsilon(i, \tau_{-s}^{n_2} i) + \dots + B_{T^{N-1}(\xi)}^\varepsilon(i, \tau_{-s}^{n_N} i)} > \beta.$$

En particulier si $\xi_1, \xi_2 \in \Lambda^+$ et si $\omega(\xi_1), \omega(\xi_2)$ commencent par les mêmes N premiers termes alors

$$D_\varepsilon(T_\varepsilon^N \xi_1, T_\varepsilon^N \xi_2) > \beta^b D_\varepsilon(\xi_1, \xi_2).$$

Avant de démontrer la proposition, commençons par démontrer les deux lemmes suivants.

Lemme 6.2.3. — *Il existe $A > 0$ tel que pour tous $\xi \in \partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ et $z \in \mathbb{H}^2$:*

$$(1 + \varepsilon)^{-1} (B_{\varphi(\xi)}(i, z) - (\varepsilon^2 + 2\varepsilon) d(i, z)) - A \leq B_\xi^\varepsilon(i, z) \leq (1 + \varepsilon) (B_{\varphi(\xi)}(i, z) + (1 - (1 + \varepsilon)^{-2}) d(i, z)) + A.$$

Démonstration. — Soient $\xi \in \Lambda$ et $r_\varepsilon(t)$ le rayon géodésique issu de i dans (\mathbb{H}^2, d) et pointé en ξ ; pour tout $z \in \mathbb{H}^2$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (z | r_\varepsilon(t))_\varepsilon = \frac{1}{2} (d_\varepsilon(z, i) + B_\xi^\varepsilon(i, z))$$

De même si $r(t)$ représente la rayon géodésique issu de i dans (\mathbb{H}^2, d) et pointé en $\varphi(\xi)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (z | r(t)) = \frac{1}{2} (d(z, i) + B_{\varphi(\xi)}(i, z))$$

Appliquons l'inégalité (*) du paragraphe 6.1 aux points $r_\varepsilon(t)$ et z :

$$(1 + \varepsilon)^{-1} (z | r_\varepsilon(t)) - A_1 \leq (z | r_\varepsilon(t))_\varepsilon \leq (1 + \varepsilon) (z | r_\varepsilon(t)) + A_1. \quad (6.1)$$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES GÉODÉSQUES FERMÉES

Pour faire tendre t vers $+\infty$, nous avons à estimer $(z \mid r_\varepsilon(t))$. Le demi-plan de Poincaré étant log 3-hyperbolique, on a ([11] p. 28) :

$$(z \mid r_\varepsilon(t)) \geq \min \{(z \mid r(t)), (r(t) \mid r_\varepsilon(t))\} - \log 3. \quad (6.2)$$

Par ailleurs, le triangle géodésique de sommets $r_\varepsilon(t)$, $r(t)$, i est 4 log 3-fin ([11] p. 41), et donc ([11] p. 38) :

$$d(i, [r_\varepsilon(t), r(t)]) \leq (r_\varepsilon(t) \mid r(t)) + 4 \log 3. \quad (6.3)$$

Les points $r_\varepsilon(t)$ et $r(t)$ convergent vers $\varphi(\xi)$, ce qui entraîne que la distance du point i au segment géodésique $[r_\varepsilon(t), r(t)]$ converge vers $+\infty$. On déduit alors des inégalités 6.2 et 6.3 que pour t grand

$$(z \mid r_\varepsilon(t)) \geq (z \mid r(t)) - \log 3.$$

L'inégalité suivante (pour t grand) découle alors de 6.1 :

$$(1 + \varepsilon)^{-1}(z \mid r(t)) - (1 + \varepsilon)^{-1} \log 3 - A_1 \leq (z \mid r_\varepsilon(t))_\varepsilon.$$

En faisant tendre t vers $+\infty$ et en utilisant l'hypothèse de quasi-isométrie $d_\varepsilon(i, z) \leq (1 + \varepsilon) d(i, z)$, on obtient l'existence d'une constante $B \in \mathbb{R}$ telle que pour tous $z \in \mathbb{H}^2$ et $\xi \in \Lambda^+$:

$$(1 + \varepsilon)^{-1} B_{\varphi(\xi)}(i, z) + d(i, z)[(1 + \varepsilon)^{-1} - (1 + \varepsilon)] + B \leq B_\xi^\varepsilon(i, z).$$

La majoration est obtenue en intervertissant les rôles de d_ε et d .

Lemme 6.2.4. — *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $\eta > 0$ tels que pour tous $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $x \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}^+$ dont le développement en fractions continues est $\tau_s^{n_1}, \tau_{-s}^{n_2}, \dots, \tau_{(-1)^{k+1}s}^{n_k}, \dots$ l'inégalité suivante soit satisfaite :*

$$B_x(i, \tau_s^{n_1}(i)) - (2\varepsilon + \varepsilon^2) d(i, \tau_s^{n_1}(i)) > \eta.$$

Démonstration. — Soit $x \notin \mathbb{Q}$ et $0 < x < 1$, son développement en fractions continues est de la forme $\tau_{-1}^{n_1} \tau_1^{n_2} \tau_{-1}^{n_3} \dots$. On pose $x_1 = \tau_{-1}^{-n_1} x$. Un calcul élémentaire montre que

$$B_x(i, \tau_{-1}^{n_1} i) = \log \frac{x_1^2 + (n_1 x_1 + 1)^2}{1 + x_1^2}$$

$$d(i, \tau_{-1}^{n_1} i) = \log \frac{1}{2} \left(2 + n_1^2 + n_1 \sqrt{n_1^2 + 4} \right)$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} B_x(i, \tau_{-1} i) \geq \log 2 & \text{si } n_1 = 1 \\ B_x(i, \tau_{-1}^{n_1} i) \geq \log \frac{1 + (n_1 + 1)^2}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons $\varepsilon_1 = 2\varepsilon + \varepsilon^2$, on a

$$\begin{cases} B_x(i, \tau_{-1}i) - \varepsilon_1 d(i, \tau_{-1}i) \geq \log \frac{2^{1+\varepsilon_1}}{(3+\sqrt{5})^{\varepsilon_1}} & \text{si } n_1 = 1 \\ B_x(i, \tau_{-1}^{n_1}i) - \varepsilon_1 d(i, \tau_{-1}^{n_1}i) \geq \log \frac{5^{1-\varepsilon_1}}{2} & \text{si } n_1 \geq 2 \end{cases}$$

En prenant ε suffisamment petit on obtient le lemme.

Il reste le cas où $x > 1$; notons $\tau_1^{-n_1}, \tau_{-1}^{-n_2} \dots$ son développement en fractions continues. Soit $s(z) = -\frac{1}{z}$, on rappelle que $s\tau_1^{-n_1}s = \tau_{-1}^{n_1}$, ainsi $d(i, \tau_1^{n_1}i) = d(i, \tau_{-1}^{n_1}i)$ et $B_x(i, \tau_{-1}^{n_1}i) = B_{1/x}(i, \tau_{-1}^{n_1}i)$ ce qui nous ramène au cas précédent.

Démonstration de la proposition 6.2.1. — Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\xi \in \Lambda^+$. On pose $\omega(\xi) = \tau_s^{n_1} \tau_{-s}^{n_2} \dots$. Par définition $S_k f_\varepsilon(\xi) = B_\xi^\varepsilon(i, \tau_s^{n_1} \tau_{-s}^{n_2} \dots \tau_{(-1)^{k+1}s}^{n_k}(i))$, ainsi d'après le lemme 6.2.3,

$$S_k f_\varepsilon(\xi) \geq (1 + \varepsilon)^{-1} \left(S_k f_0(\varphi(\xi)) - (\varepsilon^2 + 2\varepsilon) d(i, \tau_s^{n_1} \dots \tau_{(-1)^{k+1}s}^{n_k}(i)) \right) - A.$$

Notons $x = \varphi(\xi)$; on a

$$S_k f_0(x) = f_0(x) + f_0(Tx) + \dots + f_0(T^{k-1}x)$$

et

$$d(i, \tau_s^{n_1} \dots \tau_{(-1)^{k+1}s}^{n_k}(i)) \leq \sum_{p=1}^k d(i, \tau_{(-1)^{p+1}s}^{n_p}(i))$$

ainsi

$$S_k f_\varepsilon(\xi) \geq (1 + \varepsilon)^{-1} \left(\sum_{p=1}^k f_0(T^{p-1}x) - (\varepsilon^2 + 2\varepsilon) d(i, \tau_{(-1)^{p+1}s}^{n_p}(i)) \right) - A.$$

Comme $f_0(T^p x) = B_{T^p x}(i, \tau_{(-1)^{p+1}s}^{n_p}(i))$ on obtient grâce au lemme 6.2.4 l'inégalité $S_k f_\varepsilon(\xi) \geq (1 + \varepsilon)^{-1} \times k\eta - A$. Il suffit alors de choisir k assez grand, de sorte que $(1 + \varepsilon)^{-1} \times k\eta - A > 0$.

Notons $\sigma_\varepsilon(d\xi)$ une mesure de Patterson sur Λ et δ_ε l'exposant critique de la série de Poincaré $\sum_{\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})} e^{-s d_\varepsilon(i, \gamma(i))}$. Puisque la courbure de M est égale à -1 en dehors d'un compact (hypothèse 2), on a $\sigma_\varepsilon(\Lambda) > 0$. En courbure constante ($\varepsilon = 0$), la mesure σ_0 correspond à la mesure de Lebesgue et $\delta_0 = 1$. La construction de la mesure σ_ε est due, en courbure variable, à V. Kaimanovitch; nous le remercions ici pour les discussions que nous avons eues avec lui sur ce sujet. Pour tout borélien A de $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ et tout $\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$, la relation suivante est vérifiée :

$$\sigma_\varepsilon(\gamma(A)) = \int_A e^{\delta_\varepsilon b B_\xi^\varepsilon(i, \gamma^{-1}i)} \sigma_\varepsilon(d\xi).$$

À l'aide de σ_ε , on construit la mesure $\mu_\varepsilon(d\xi_-d\xi)$ sur $\Lambda \times \Lambda$ définie par

$$\mu_\varepsilon(d\xi_-d\xi) = \frac{\sigma_\varepsilon(d\xi_-)\sigma_\varepsilon(d\xi)}{D_\varepsilon(\xi, \xi_-)^{2\frac{\delta_\varepsilon}{b}}}.$$

Il découle de l'égalité (*) introduite au début du paragraphe 6.2 que μ_ε est invariante sous l'action de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Soit $s \in \{\pm 1\}$, introduisons les ensembles $\Lambda_s^+ = \{\xi \in \Lambda^+ \mid \omega(\xi) = \tau_s^{n_1}\tau_s^{n_2}\dots\}$ et $\Lambda_s^- = \{\xi \in \Lambda - \Lambda^+ \mid \omega(\xi) = \tau_s^{-n_1}\tau_s^{-n_2}\dots\}$. L'ensemble $\varphi(\Lambda_s^+)$ (resp. $\varphi(\Lambda_s^-)$) représente les réels positifs (resp. négatifs) dont le développement en fractions continues commence par τ_s^n (resp. τ_s^{-n}). On note $\bar{\Lambda} = \bigcup_{s=\pm 1} \Lambda_s^- \times \Lambda_s^+$; l'image par $\varphi \times \varphi$ de $\bar{\Lambda}$ est relativement compacte dans $\varphi(\Lambda) \times \varphi(\Lambda)$ privé de la diagonale, il existe donc $c > 0$ tel que pour tout $(\xi_-, \xi) \in \bar{\Lambda}$,

$$D_\varepsilon(\xi_-, \xi) \geq c > 0.$$

Ceci montre que la mesure μ_ε en restriction à $\bar{\Lambda}$ est finie. Considérons l'application \bar{T}_ε sur $\bar{\Lambda}$ définie par $\bar{T}_\varepsilon(\xi_-, \xi) = (\omega_1^{-1}\xi_-, T_\varepsilon\xi)$ où ω_1 désigne le premier terme de $\omega(\xi)$, l'invariance de μ_ε par $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ entraîne $\bar{T}_\varepsilon\mu_\varepsilon = \mu_\varepsilon$. Soient $c_1^{-1} = \mu_\varepsilon(\bar{\Lambda})$ et $\bar{\Lambda} \xrightarrow{p} \Lambda$ la projection de (ξ_-, ξ) sur ξ , la mesure ν_ε définie sur Λ par $\nu_\varepsilon = c_1 p(\mu_\varepsilon)$ est une mesure de probabilité T_ε -invariante. De façon plus explicite, $\nu_\varepsilon(d\xi)$ est définie par :

$$\nu_\varepsilon(d\xi) = h_\varepsilon(\xi)\sigma_\varepsilon(d\xi) \text{ où } h_\varepsilon(\xi) = \int_{\Lambda_s^-} \frac{\sigma_\varepsilon(d\xi_-)}{D_\varepsilon(\xi, \xi_-)^{2\frac{\delta_\varepsilon}{b}}} \text{ si } \xi \in \Lambda_s^+.$$

6.3 Comportement asymptotique de $\pi_\varepsilon(a)$

Nous détaillons ici les modifications à apporter au paragraphe 3 pour obtenir le théorème A lorsque ε est non nul. Pour tout point $\xi \in \Lambda^+$ et tout borélien $A \subset \Lambda^+$, posons

$$N_{(\xi, a)}^\varepsilon(\mathbf{1}_A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} \sum_{\{\eta \mid T_\varepsilon^{2n}\eta = \xi\}} \mathbf{1}_A(\eta) \mathbf{1}_{[0, a]}(S_{2n}f_\varepsilon(\eta)).$$

Soit P_ε l'opérateur adjoint de T_ε relativement à la mesure ν_ε ; pour toute fonction borélienne bornée φ de Λ^+ dans \mathbb{C} , on a

$$\forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad P_\varepsilon\varphi(\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_\varepsilon(\tau_{-r}^n\xi)}{h_\varepsilon(\xi)} e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n\xi)} \varphi(\tau_{-r}^n\xi).$$

Notons \tilde{P}_ε l'adjoint par rapport à la mesure $\nu_\varepsilon \otimes m$ de la transformation \tilde{T}_ε définie par $\tilde{T}_\varepsilon(\xi, s) = (T_\varepsilon(\xi), s + f_\varepsilon(\xi))$; pour toute fonction borélienne Ψ de $\Lambda^+ \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{C} on a

$$\forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad \tilde{P}_\varepsilon\Psi(\xi, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_\varepsilon(\tau_{-r}^n\xi)}{h_\varepsilon(\xi)} e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n\xi)} \Psi(\tau_{-r}^n\xi, t - f_\varepsilon(\tau_{-r}^n\xi)).$$

En posant $\chi_a(t) = e^{-\delta_\varepsilon t} \mathbf{1}_{[-a,0]}(t)$ on obtient

$$N_{(\xi,a)}^\varepsilon(\mathbf{1}_A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} h_\varepsilon(\xi) \tilde{P}_\varepsilon^{2n} \left(\frac{\mathbf{1}_A}{h_\varepsilon} \otimes \xi_a \right) (\xi, 0).$$

Dans le paragraphe 6.4 nous montrons qu'il existe ε_0 , tel que pour $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ le couple $(P_\varepsilon, f_\varepsilon)$ vérifie les hypothèses H_0, H_1, H_2, H_3 et H_4 du théorème du renouvellement harmonique (théorème 5.0.2). Admettons cette propriété; on obtient alors le

Théorème 6.3.1 (Théorème B). — *Soit A un borélien de Λ^+ tel que $\nu_\varepsilon(A) > 0$ et dont la frontière est ν_ε -négligeable. Lorsque a tend vers $+\infty$, le nombre $N_{(\xi,a)}^\varepsilon(\mathbf{1}_A)$ est équivalent à $h_\varepsilon(\xi) \sigma_\varepsilon(A) \frac{e^{\delta_\varepsilon a}}{\delta_\varepsilon a}$ uniformément par rapport à $\xi \in \Lambda^+$.*

Pour obtenir le comportement asymptotique de $\pi_\varepsilon(a)$ nous suivons le paragraphe 3.1. Nous relient donc $\pi_\varepsilon(a)$ aux quantités $N_{(\xi,a)}^\varepsilon(\mathbf{1}_A)$. Fixons un entier pair $k > 0$ et une numérotation $((n_1^{(j)}, \dots, n_k^{(j)}))_{j \geq 1}$ de tous les k -uplets différents d'entiers strictement positifs. Soient $r = \pm 1$ et $j \geq 1$, on note Λ_{rj}^+ l'ensemble des points ξ de $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ dont le développement $\omega(\xi)$ commence par $\tau_r^{n_1^{(j)}}, \tau_{-r}^{n_2^{(j)}}, \dots, \tau_{-r}^{n_k^{(j)}}$. Soit ξ_{rj} un point fixé dans Λ_{rj} ; à tout $\xi \in \Lambda_{sj}$ tel que $T_\varepsilon^{2n} \xi = \xi$ on associe le point $\xi' \in \Lambda_{rj}$ défini par $T_\varepsilon^{2n} \xi' = \xi_{rj}$. Il nous reste à présent à contrôler les variations de f_ε (analogue du lemme 3.1.1) et sa taille (analogue du lemme 3.1.2). Le lemme suivant est essentiel pour cette étude.

Lemme 6.3.2. — *Il existe $C > 0$ et, pour tout $n \geq 1$, il existe $K_n > 0$ tels que*

1. *Pour tout $\xi \in \Lambda_{-r}^+$,*

$$\frac{1}{C} K_n \leq e^{bf_\varepsilon(\tau_r^n \xi)} \leq C K_n.$$

2. *Pour tous $\xi, \eta \in \Lambda_{-r}^+$,*

$$\left| e^{bf_\varepsilon(\tau_r^n \xi)} - e^{bf_\varepsilon(\tau_r^n \eta)} \right| \leq C K_n D_\varepsilon(\xi, \eta).$$

De plus, $\frac{1}{K} n^{\frac{2b}{1+\varepsilon}} \leq K_n \leq K n^{2b(1+\varepsilon)}$.

Démonstration. — On suppose $r = 1$ et on note ξ_1 le point fixe de τ_1 .

1. — Soit $\xi \in \Lambda_{-1}^+$, on rappelle que $f_\varepsilon(\tau_1^n \xi) = B_\xi^\varepsilon(i, \tau_1^n i)$. En utilisant la relation (*) du paragraphe 6.2 et le fait que $B_{\xi_1}^\varepsilon(i, \tau_1^{-1}(i)) = 0$ on obtient

$$e^{bf_\varepsilon(\tau_1^n \xi)} = \frac{D_\varepsilon^2(\xi, \xi_1)}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \xi, \xi_1)}.$$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES GÉODÉSIIQUES FERMÉES

Les espaces $(\partial\mathbb{H}^2, D)$ et $(\partial_\varepsilon\mathbb{H}^2, D_\varepsilon)$ étant en correspondance bi-Hölder, il existe $A > 1$ tel que $D_\varepsilon(\eta, \xi) < A$ pour tous $\xi, \eta \in \Lambda^+$ et de plus $D_\varepsilon(\Lambda_{-1}^+, \xi_1) > \frac{1}{A}$. Par conséquent

$$\frac{1}{A^2} \times \frac{1}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \xi, \xi_1)} \leq e^{bf_\varepsilon(\tau_1^n \xi)} \leq \frac{A^2}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \xi, \xi_1)}.$$

Pour tous $\eta_1, \eta_2 \in \Lambda^+$ posons $\Delta_1(\eta_1, \eta_2) = \frac{D_\varepsilon(\eta_1, \eta_2)}{D_\varepsilon(\eta_1, \xi_1)D_\varepsilon(\eta_2, \xi_1)}$. Remarquons que si $\eta_1, \eta_2 \in \Lambda_{-1}^+$ alors $\Delta_1(\eta_1, \eta_2) \leq A^3$. On vérifie de plus que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\Delta_1(\tau_1^n \eta_1, \tau_1^n \eta_2) = \Delta_1(\eta_1, \eta_2)$. Fixons un point $\xi_0 \in \Lambda_{-1}^+$, on déduit de la propriété précédente que $\Delta_1(\xi, \xi_0) < A^3$.

Ainsi $\left| \frac{1}{D_\varepsilon(\tau_1^n \xi, \xi_1)} - \frac{1}{D_\varepsilon(\tau_1^n \xi_0, \xi_1)} \right| \leq \Delta_1(\tau_1^n \xi, \tau_1^n \xi_0) = \Delta_1(\xi, \xi_0)$. En utilisant le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_1^n \xi_0 = \xi_1$ on obtient l'existence d'une constante $K > 0$ telle que pour n assez grand

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} D_\varepsilon(\tau_1^n \xi_0, \xi_1) &\leq \frac{D_\varepsilon(\tau_1^n \xi_0, \xi_1)}{1 + A^3 D_\varepsilon(\tau_1^n \xi_0, \xi_1)} \leq D_\varepsilon(\tau_1^n \xi, \xi_1) \\ &\leq \frac{D_\varepsilon(\tau_1^n \xi_0, \xi_1)}{1 - A^3 D_\varepsilon(\tau_1^n \xi_0, \xi_1)} \leq K D_\varepsilon(\tau_1^n \xi_0, \xi_1). \end{aligned}$$

L'assertion 1 découle directement de cette inégalité, la constante K_n est ici égale à $\frac{1}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \xi_0, \xi_1)}$. D'après l'inégalité (***) du paragraphe 6.1 on a

$$\frac{1}{B^2 D(\varphi(\xi_0), \varphi(\xi_1))^{\frac{2b}{1+\varepsilon}}} \leq K_n \leq \frac{B^2}{D(\varphi(\tau_1^n \xi_0), \varphi(\xi_1))^{2b(1+\varepsilon)}}.$$

Un calcul explicite en courbure constante conduit à l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{K} n^{\frac{2b}{1+\varepsilon}} \leq K_n \leq K n^{2b(1+\varepsilon)}.$$

2. — Soient $\xi, \eta \in \Lambda_{-1}^+$. Posons $\lambda(\xi, \eta) = |e^{bf_\varepsilon(\tau_1^n \xi)} - e^{bf_\varepsilon(\tau_1^n \eta)}|$. On a

$$\begin{aligned} \lambda(\xi, \eta) &= \left| \frac{D_\varepsilon^2(\xi, \xi_1)}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \xi, \xi_1)} - \frac{D_\varepsilon^2(\eta, \xi_1)}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \eta, \xi_1)} \right| \text{ d'où} \\ \lambda(\xi, \eta) &\leq D_\varepsilon^2(\xi, \xi_1) \left| \frac{1}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \xi, \xi_1)} - \frac{1}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \eta, \xi_1)} \right| + \frac{1}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \eta, \xi_1)} |D_\varepsilon^2(\xi, \xi_1) - D_\varepsilon^2(\eta, \xi_1)| \\ &\leq A^2 \left| \frac{1}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \xi, \xi_1)} - \frac{1}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \eta, \xi_1)} \right| + e^{bf_\varepsilon(\tau_1^n \eta)} A^2 |D_\varepsilon^2(\xi, \xi_1) - D_\varepsilon^2(\eta, \xi_1)|. \end{aligned}$$

L'assertion 2 se déduit alors de l'assertion 1 et de la relation :

$$D_\varepsilon(\xi, \eta) = e^{\frac{b}{2}(f_\varepsilon(\tau_1^n \eta) + f_\varepsilon(\tau_1^n \xi))} D_\varepsilon(\tau_1^n \eta, \tau_1^n \xi).$$

Le cas où $r = -1$ se traite de la même façon.

On déduit de ce lemme l'analogue du lemme 3.1.1.

Corollaire 6.3.3. — Soit $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ (donné dans la proposition 6.2.1), il existe $0 < \rho < 1, N_0 > 1$ et deux constantes B et C tels que pour tout $p > N_0$ et tous $\xi, \eta \in \Lambda^+$ dont les développements $\omega(\xi), \omega(\eta)$ coïncident jusqu'au rang p on ait

$$|f_\varepsilon(\xi) - f_\varepsilon(\eta)| \leq BD_\varepsilon(T_\varepsilon\xi, T_\varepsilon\eta) \leq C\rho^p.$$

Démonstration. — Soient $\xi, \eta \in \Lambda_r^+$ dont les développements commencent par τ_r^n et coïncident jusqu'au rang p ; d'après le lemme 6.3.2, on a

$$\left| \frac{e^{bf_\varepsilon(\xi)}}{e^{bf_\varepsilon(\eta)}} - 1 \right| \leq \frac{CK_n D_\varepsilon(T_\varepsilon\xi, T_\varepsilon\eta)}{\frac{K_n}{C}} \leq C^2 D_\varepsilon(T_\varepsilon\xi, T_\varepsilon\eta).$$

Par ailleurs d'après le corollaire 6.2.2, pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, il existe $\beta > 1$ tel que pour tous η_1, η_2 , dont les développements ont les mêmes N premiers termes on ait

$$D_\varepsilon(T_\varepsilon^N \xi, T_\varepsilon^N \eta) \geq \beta D_\varepsilon(\xi, \eta).$$

Les suites $\omega(\xi)$ et $\omega(\eta)$ coïncident jusqu'au rang p , donc

$$D_\varepsilon(T_\varepsilon\xi, T_\varepsilon\eta) \leq A \left(\frac{1}{\beta} \right)^\ell \text{ avec } \ell = \left\lfloor \frac{p-1}{N} \right\rfloor.$$

Le corollaire se déduit de cette inégalité et du fait que $|\log(1+u)| < 2|u|$ au voisinage de 0.

Revenons à l'approximation des points périodiques. On suppose $k \geq N_0$. Soit $\xi \in \Lambda^+$ tel que $T_\varepsilon^{2n}\xi = \xi$; d'après le corollaire 6.3.3, $|S_{2n}f_\varepsilon(\xi) - S_{2n}f_\varepsilon(\xi')| \leq \theta_k$ où $\theta_k = A \sum_{p=k}^{+\infty} \frac{1}{\beta^p}$. Notons $N^\varepsilon(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} \# \{ \xi \in \Lambda^+ \mid T_\varepsilon^{2n}\xi = \xi \text{ et } S_{2n}f_\varepsilon(\xi) \leq a \}$. On a l'encadrement suivant :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{r=\pm 1} N_{(\xi_{rj}, a-\theta_k)}^\varepsilon (\mathbf{1}_{\Lambda_{rj}}) \leq N^\varepsilon(a) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{r=\pm 1} N_{(\xi_{rj}, a+\theta_k)}^\varepsilon (\mathbf{1}_{\Lambda_{rj}}).$$

Il nous reste pour obtenir l'asymptotique de $\pi_\varepsilon(a)$ à démontrer un analogue du lemme 3.1.2. En reprenant la démonstration de ce lemme, on constate que le seul point à vérifier est l'existence pour tous $r = \pm 1$ et $j \geq 1$ d'une constante α_{rj} vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall \xi \in \Lambda_{rj}^+ \quad S_k f_\varepsilon(\xi) \geq \alpha_{rj}$.
2. $\sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{r=\pm 1} \alpha_{rj} e^{-\alpha_{rj}} < +\infty$.

L'existence des constantes α_{rj} découle du

Lemme 6.3.4. — Il existe $D > 0$ tel que pour tout $\xi \in \Lambda_{-r}^+$, on ait :

$$\frac{2}{1+\varepsilon} \log n - D \leq f_\varepsilon(\tau_r^n \xi) \leq 2(1+\varepsilon) \log n + D.$$

Démonstration. — Ce lemme est une conséquence directe du lemme 6.3.2 (1) et de l'encadrement de K_n .

D'après le lemme 6.3.4, on a $S_k f_\varepsilon(\xi) \geq \frac{2}{1+\varepsilon} \log(n_1^{(j)} \dots n_k^{(j)}) - kD$ si $\xi \in \Lambda_{rj}^+$. En choisissant $\varepsilon < 1$, la constante $\alpha_{rj} = \frac{2}{1+\varepsilon} \log(n_1^{(j)} \dots n_k^{(j)}) - kD$ vérifie les hypothèses (1) et (2).

6.4 Le couple $(P_\varepsilon, f_\varepsilon)$ vérifie les hypothèses H_0, H_1, H_2, H_3, H_4

Dans le paragraphe précédent, nous avons expliqué comment le théorème A se déduit du théorème B. Pour établir ce dernier théorème, il suffit de prouver que le couple $(P_\varepsilon, f_\varepsilon)$ vérifie les hypothèses H_0, H_1, H_2, H_3 , et H_4 du théorème du renouvellement harmonique (Théorème 5.0.2).

L'opérateur P_ε est l'adjoint de T_ε relativement à la mesure de probabilité $h_\varepsilon(\xi)\sigma_\varepsilon(d\xi)$ sur Λ^+ ; ainsi, pour toute fonction borélienne bornée φ de Λ^+ dans \mathbb{C} on a

$$\forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad P_\varepsilon \varphi(\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)}{h_\varepsilon(\xi)} e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)} \varphi(\tau_{-r}^n \xi).$$

Remarquons que P_ε s'étend aux fonctions boréliennes bornées de $\overline{\Lambda^+}$ dans \mathbb{C} et que $\overline{\Lambda^+}$ est compact. On rappelle (paragraphe 6.2) que si $\xi \in \Lambda_r^+$, alors $h_\varepsilon(\xi) = \int_{\Lambda_{-r}^-} \frac{\sigma_\varepsilon(d\xi_-)}{D_\varepsilon(\xi, \xi_-)^{2\frac{\delta_\varepsilon}{b}}}$. De par son expression, lorsque $\frac{\delta_\varepsilon}{b} < 1$ (resp. $\frac{\delta_\varepsilon}{b} \geq 1$), la fonction h_ε est $\frac{\delta_\varepsilon}{b}$ -höldérienne (resp. lipschitzienne) sur chaque ensemble $(\Lambda_r^+, D_\varepsilon)$.

Posons $\alpha = \frac{\delta_\varepsilon}{b}$; pour fixer les idées, nous supposerons $\alpha = \frac{\delta_\varepsilon}{b} < 1$, l'autre cas se traitant de façon analogue.

Introduisons l'espace $L_\alpha(\Lambda^+)$ des fonctions φ de Λ^+ dans \mathbb{C} telles que $\|\varphi\| = |\varphi|_\infty + m(\varphi) < +\infty$ avec $m(\varphi) = \sup_{s=+1} \sup_{\xi, \eta \in \Lambda_s^+} \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(\eta)|}{D_\varepsilon(\xi, \eta)^\alpha}$. La fonction h_ε étant α -höldérienne et bornée, on a $h_\varepsilon \in L_\alpha(\Lambda^+)$. Nous allons montrer que P_ε opère sur $L_\alpha(\Lambda^+)$ et contrôler son spectre sur cet espace; pour ce faire, nous décrivons d'abord la régularité sur Λ^+ des fonctions $p_n, n \geq 1$ définies par

$$\forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad p_n(\xi) = \frac{h_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)}{h_\varepsilon(\xi)} e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)}.$$

Pour tout $\varphi \in L_\alpha(\Lambda^+)$, notons φ_n la fonction définie par $\forall \xi \in \Lambda_r^+, \varphi_n(\xi) = \varphi(\tau_{-r}^n \xi)$. Nous avons :

Lemme 6.4.1. — *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, les fonctions $p_n, n \geq 1$, appartiennent à $L_\alpha(\Lambda^+)$ et tel que la série $\sum_{n \geq 1} \|p_n\|$ soit convergente. De plus, pour tout $\varphi \in L_\alpha(\Lambda^+)$, la famille $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ est bornée dans $(L_\alpha(\Lambda^+), \|\cdot\|)$.*

Démonstration. — Montrons tout d'abord que les fonctions $p_n, n \geq 1$, sont bornées sur Λ^+ et que la série $\sum_{n \geq 1} |p_n|_\infty$ est convergente. D'après le lemme 6.3.2, il existe

$C_1 > 0$ tel que

$$\forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} \leq \frac{C_1}{n^{2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}}$$

d'où, pour tout $n \geq 1$, $\|p_n\|_\infty \leq \frac{C_1}{n^{2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}} \left| \frac{1}{h} \right|_\infty |h|_\infty < +\infty$.

La série de Poincaré $\sum_{\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})} e^{-sd_\varepsilon(i, \gamma(i))}$ converge pour $s > \delta_\varepsilon$, on a $\delta_0 = 1$ et $d_\varepsilon(i, \gamma(i)) \leq (1+\varepsilon)d(i, \gamma(i))$; donc $\delta_\varepsilon \geq \frac{1}{1+\varepsilon}$. La série $\sum_{n \geq 1} \|p_n\|_\infty$ converge si $\frac{2\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon} > 1$ et en particulier si $\frac{2}{(1+\varepsilon)^2} > 1$.

Étudions maintenant la régularité des fonctions p_n , $n \geq 1$; pour tous $\xi, \eta \in \Lambda_r^+$ on a

$$\left| e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} - e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \eta)} \right| = \frac{|e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} - e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \eta)}|}{e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \eta)}}.$$

Rappelons que $\alpha = \frac{\delta_\varepsilon}{6} < 1$; ainsi, d'après le lemme 6.3.2, il existe $C_2 > 0$ telle que

$$\left| e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} - e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \eta)} \right| \leq \frac{C_2 D_\varepsilon^\alpha(\xi, \eta)}{n^{2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}}. \quad (*)$$

Par ailleurs, pour tous $\xi, \eta \in \Lambda_s^+$, et tout $n \geq 1$ on a

$$D_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi, \tau_{-r}^n \eta) = e^{-\frac{\delta_\varepsilon}{2}(f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi) + f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \eta))} D_\varepsilon(\xi, \eta)$$

si bien que, d'après le lemme 6.3.2 (i), il existe $C_3 > 0$ telle que :

$$\forall \xi, \eta \in \Lambda_r^+, \forall n \geq 1 \quad D_\varepsilon^\alpha(\tau_{-r}^n \xi, \tau_{-r}^n \eta) \leq \frac{C_3}{n^{2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}} D_\varepsilon^\alpha(\xi, \eta). \quad (**)$$

Combinons maintenant ces deux inégalités pour contrôler le coefficient $m(p_n)$; pour tous $\xi, \eta \in \Lambda_r^+$, on a

$$\begin{aligned} |p_n(\xi) - p_n(\eta)| &\leq \left| \frac{1}{h_\varepsilon(\xi)} - \frac{1}{h_\varepsilon(\eta)} \right| h_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi) e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} \\ &\quad + \frac{1}{h_\varepsilon(\eta)} |h_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi) - h_\varepsilon(\tau_{-r}^n \eta)| e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} \\ &\quad + \frac{h_\varepsilon(\tau_{-r}^n \eta)}{h_\varepsilon(\eta)} \left| e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} - e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \eta)} \right| \\ &\leq C_4 \left(\frac{m\left(\frac{1}{h_\varepsilon}\right) |h_\varepsilon|_\infty}{n^{2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}} + \frac{\left| \frac{1}{h_\varepsilon} \right|_\infty m(h_\varepsilon)}{n^{4\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}} + \frac{\left| \frac{1}{h_\varepsilon} \right|_\infty |h_\varepsilon|_\infty}{n^{2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}} \right) D_\varepsilon^\alpha(\xi, \eta), \end{aligned}$$

où C_4 est une constante strictement positive. Il existe donc $C > 0$ telle que, pour tout $n \geq 1$, $\|p_n\| \leq \frac{C}{n^{2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}}$. La fonction p_n appartient donc à $L_\alpha(\Lambda^+)$ et pour ε assez petit (plus précisément si $2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon} > 1$) la série $\sum_{n \geq 1} \|p_n\|$ est convergente.

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES GÉODÉSIIQUES FERMÉES

Pour établir la deuxième assertion du lemme, il suffit de remarquer que grâce à l'inégalité (**) ci-dessus, on a

$$m(\varphi_n) \leq \frac{C_3}{n^{2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}} m(\varphi).$$

Ceci achève la démonstration du lemme 6.4.1.

Corollaire 6.4.2 (Hypothèse H_0). — Pour $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, l'opérateur P_ε opère continûment sur $L_\alpha(\Lambda^+)$ et $P\mathbf{1}_{\Lambda^+} = \mathbf{1}_{\Lambda^+}$.

Démonstration. — Soit $\varphi \in L_\alpha(\Lambda^+)$. On a $\|P_\varepsilon\varphi\| \leq \sum_{n \geq 1} \|p_n\| \|\varphi_n\|$ si bien que d'après le lemme précédent, pour $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, il existe $K > 0$ tel que

$$\|P_\varepsilon\varphi\| \leq K \|\varphi\|.$$

Pour montrer que $P_\varepsilon\mathbf{1}_{\Lambda^+} = \mathbf{1}_{\Lambda^+}$, il suffit de rappeler que P_ε est l'adjoint de T_ε par rapport à ν_ε et que la mesure ν_ε est une mesure de probabilité T_ε -invariante sur Λ^+ . Ainsi $P_\varepsilon\mathbf{1}_{\Lambda^+}(\xi) = \mathbf{1}_{\Lambda^+}(\xi)$ pour ν_ε -presque tout ξ ; cette égalité est en fait vérifiée en tout point ξ de Λ^+ puisque $P_\varepsilon\mathbf{1}_{\Lambda^+}$ est continue sur Λ^+ et que le support de ν_ε est Λ^+ .

Introduisons à présent les opérateurs transformée de Fourier $P_{\lambda,\varepsilon}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, associés au couple $(P_\varepsilon, f_\varepsilon)$ et définis par

$$\forall \varphi \in L_\alpha(\Lambda^+), \forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad P_{\lambda,\varepsilon}\varphi(\xi) = \sum_{n \geq 1} p_n(\xi) e^{i\lambda f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)} \varphi(\tau_{-r}^n \xi);$$

D'après le corollaire 6.3.3, on a :

$$\forall \xi, \eta \in \Lambda_r^+ \quad \left| e^{i\lambda f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)} - e^{i\lambda f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \eta)} \right| \leq \left| e^{i\lambda(f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi) - f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \eta))} - 1 \right| \\ \leq |\lambda| |f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi) - f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \eta)| \leq B |\lambda| D_\varepsilon(\xi, \eta).$$

Ainsi, en remplaçant $\varphi(\tau_{-r}^n \xi)$ par $\varphi_{\lambda,n}(\xi) = e^{i\lambda f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)} \varphi(\tau_{-r}^n \xi)$ dans la preuve du lemme 6.4.1 on montre que la famille des $(\varphi_{\lambda,n})_{n \geq 1}$ est bornée dans $(L_\alpha(\Lambda^+), \|\cdot\|)$. Comme dans le corollaire 6.4.2, on en déduit que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P_{\lambda,\varepsilon}$ opère sur $(L_\alpha(\Lambda^+), \|\cdot\|)$.

Il nous reste à contrôler le spectre de $P_{\lambda,\varepsilon}$ sur $L_\alpha(\Lambda^+)$ (hypothèses H_1 et H_2). Nous allons utiliser le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu. Les hypothèses de ce théorème sont vérifiées grâce au lemme suivant (analogue du lemme 5.2.2).

Lemme 6.4.3. — Pour $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $\rho \in]0, 1[$ et deux constantes positives A et B tels que, pour tout $\varphi \in L_\alpha(\Lambda^+)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on ait :

$$|P_{\lambda,\varepsilon}\varphi|_\infty \leq |\varphi|_\infty \quad \text{et} \quad \|P_{\lambda,\varepsilon}^N \varphi\| \leq \rho \|\varphi\| + (A + B|\lambda|) |\varphi|_\infty.$$

Démonstration. — Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute fonction $\varphi \in L_\alpha(\Lambda^+)$ on a

$$|P_{\lambda,\varepsilon}\varphi|_\infty \leq P_\varepsilon |\varphi|_\infty \leq |\varphi|_\infty$$

d'où la première inégalité.

Nous allons maintenant établir la deuxième inégalité en supposant $\lambda = 0$; on se ramène à ce cas en remplaçant $\varphi(\tau_{-r}^n \xi)$ par $\varphi(\tau_{-r}^n \xi) e^{i\lambda f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)}$ dans ce qui suit.

D'après le corollaire 6.2.2 il existe $\beta > 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tous ξ et η dont les développements $\omega(\xi)$ et $\omega(\eta)$ coïncident jusqu'au rang N on ait :

$$D_\varepsilon(T_\varepsilon^N \xi, T_\varepsilon^N \eta) \geq \beta D_\varepsilon(\xi, \eta). \quad (*)$$

Pour tous $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}^*$ notons $p_{k_1 \dots k_N}$ la fonction définie par

$$\forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad p_{k_1 \dots k_N}(\xi) = p_{k_1}(\xi) p_{k_2}(\tau_{-r}^{k_1} \xi) \cdots p_{k_N}(\tau_{(-1)N-1-r}^{k_{N-1}} \cdots \tau_{-r}^{k_1} \xi).$$

Soulignons que pour tout $\xi \in \Lambda_r^+$, $\sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} p_{k_1 \dots k_N}(\xi) = 1$ car $P_\varepsilon^N \mathbf{1} = \mathbf{1}$.

On a pour tout $\xi \in \Lambda_r^+$, $P_\varepsilon^N \varphi(\xi) = \sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} p_{k_1 \dots k_N}(\xi) \varphi(\tau_{(-1)N-r}^{k_N} \cdots \tau_{-r}^{k_1} \xi)$. Ainsi, pour tous $\xi, \eta \in \Lambda_r^+$, on obtient :

$$\begin{aligned} |P_\varepsilon^N \varphi(\xi) - P_\varepsilon^N \varphi(\eta)| &\leq \sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} p_{k_1 \dots k_N}(\xi) \left| \varphi(\tau_{(-1)N-r}^{k_N} \cdots \tau_{-r}^{k_1} \xi) - \varphi(\tau_{(-1)N-r}^{k_N} \cdots \tau_{-r}^{k_1} \eta) \right| \\ &\quad + |\varphi|_\infty \sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} |p_{k_1 \dots k_N}(\xi) - p_{k_1 \dots k_N}(\eta)| \\ &\leq m(\varphi) \sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} p_{k_1 \dots k_N}(\xi) D_\varepsilon^\alpha(\tau_{(-1)N-r}^{k_N} \cdots \tau_{-r}^{k_1} \xi, \tau_{(-1)N-r}^{k_N} \cdots \tau_{-r}^{k_1} \eta) \\ &\quad + |\varphi|_\infty \sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} |p_{k_1 \dots k_N}(\xi) - p_{k_1 \dots k_N}(\eta)| \end{aligned}$$

À partir de l'inégalité (*) on obtient

$$\sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} p_{k_1 \dots k_N}(\xi) D_\varepsilon^\alpha(\tau_{(-1)N-r}^{k_N} \cdots \tau_{-r}^{k_1} \xi, \tau_{(-1)N-r}^{k_N} \cdots \tau_{-r}^{k_1} \eta) \leq \frac{1}{\beta^\alpha} D_\varepsilon^\alpha(\xi, \eta).$$

Par ailleurs $D_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi, \tau_{-r}^n \eta) = e^{-\frac{\hbar}{2}(f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi) + f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \eta))} D_\varepsilon(\xi, \eta)$; donc d'après le lemme 6.3.2, il existe $C_1 > 0$ tel que pour tous $\xi, \eta \in \Lambda_r^+$, on ait $D_\varepsilon^\alpha(\tau_{-r}^n \xi, \tau_{-r}^n \eta) \leq C_1 D_\varepsilon^\alpha(\xi, \eta)$, d'où :

$$\sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} |p_{k_1 \dots k_N}(\xi) - p_{k_1 \dots k_N}(\eta)| \leq \sum_{\ell=1}^N \sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} M_{k_1 \dots k_N}(\ell, \xi, \eta)$$

avec

$$\begin{aligned}
 M_{k_1 \dots k_N}(\ell, \xi, \eta) &= p_{k_1 \dots k_{\ell-1}}(\xi) \\
 &\quad \left| p_{k_\ell} \left(\tau_{(-1)^{\ell-1} r}^{k_{\ell-1}} \dots \tau_{-r}^{k_1} \xi \right) - p_{k_\ell} \left(\tau_{(-1)^{\ell-1} r}^{k_{\ell-1}} \dots \tau_{-r}^{k_1} \eta \right) \right| \\
 &\quad p_{k_{\ell+1} \dots k_N} \left(\tau_{(-1)^\ell r}^{k_\ell} \dots \tau_{-r}^{k_1} \eta \right) \\
 &\leq \sum_{\ell=1}^N \sum_{k_\ell \geq 1} m(p_{k_\ell}) C_1^{\ell-1} D_\varepsilon^\alpha(\xi, \eta)
 \end{aligned}$$

et $\sum_{n \geq 1} m(p_n) < +\infty$ d'après le lemme 6.4.1. Finalement il existe une constante $K > 0$ telle que $m(P^N \varphi) \leq \frac{1}{\beta^\alpha} m(\varphi) + K \|\varphi\|_\infty$, d'où $\|P^N \varphi\| \leq \rho m(\varphi) + A \|\varphi\|_\infty$ avec $\rho = \frac{1}{\beta^\alpha} \in]0, 1[$ et $A = K + 1$.

D'après le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu, l'opérateur $P_{\varepsilon, \lambda}$ sur $L_\alpha(\Lambda^+)$ a au plus un nombre fini de valeurs propres de module 1 ; les sous-espaces propres associés sont de dimension finie et le reste du spectre est inclus dans un disque de rayon strictement inférieur à 1. Pour que les hypothèses H_1 et H_2 soient vérifiées par le couple $(P_\varepsilon^2, f_\varepsilon + f_\varepsilon \circ T_\varepsilon)$ il nous reste à établir le :

Lemme 6.4.4. — Soient $\varphi \in L(\Lambda^+)$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $P_{\varepsilon, \lambda} \varphi = e^{i\theta} \varphi$. Deux cas peuvent alors se présenter :

1. $\lambda = 0$, $e^{i\theta} = 1$ et φ est constante sur Λ^+ ;
2. $\lambda = 0$, $e^{i\theta} = -1$ et $\varphi = C \left(\mathbf{1}_{\Lambda_1^+} - \mathbf{1}_{\Lambda_{-1}^+} \right)$.

Démonstration. — Considérons d'abord le cas où $\lambda = 0$. On a $P_\varepsilon \mathbf{1}_{\Lambda_1^+} = \mathbf{1}_{\Lambda_{-1}^+}$, $P_\varepsilon \mathbf{1}_{\Lambda_{-1}^+} = \mathbf{1}_{\Lambda_1^+}$ et P_ε^2 opère sur chacun des espaces $L(\Lambda_{+1}^+)$ et $L(\Lambda_{-1}^+)$; il suffit donc de montrer que $e^{i2\theta} = 1$ et que φ est constante sur Λ_1^+ et Λ_{-1}^+ .

Les égalités $P_\varepsilon \varphi = e^{i\theta} \varphi$ et $\nu_\varepsilon P_\varepsilon = \nu_\varepsilon$ entraînent $P_\varepsilon |\varphi|(\xi) = |\varphi(\xi)|$, $\nu_\varepsilon(d\xi)$ -presque sûrement ; les fonctions φ et $P_\varepsilon \varphi$ étant continues sur $L(\Lambda_{+1}^+)$ et $L(\Lambda_{-1}^+)$, et le support de ν_ε étant Λ^+ , cette égalité est satisfaite en tout point $\xi \in \Lambda^+$.

Étudions par exemple la restriction de φ à Λ_1^+ ; il existe ξ_0 et ξ_1 dans $\overline{\Lambda_1^+}$ tels que $|\varphi(\xi_0)| = \inf_{\xi \in \Lambda_1^+} |\varphi(\xi)|$ et $|\varphi(\xi_1)| = \sup_{\xi \in \Lambda_{-1}^+} |\varphi(\xi)|$. Par convexité on a

$$\forall n, m \geq 1 \quad |\varphi(\xi_0)| = |\varphi(\tau_1^n \tau_{-1}^m \xi_0)| \quad \text{et} \quad |\varphi(\xi_1)| = |\varphi(\tau_1^n \tau_1^m \xi_1)|.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $|\varphi(\xi_0)| = |\varphi(\xi_1)|$ et φ est donc de module constant sur Λ_1^+ ; l'égalité $P_\varepsilon \varphi = e^{2i\theta} \varphi$ nous donne alors, par convexité

$$\forall \xi \in \Lambda_1^+, \forall n, m \geq 1 \quad \varphi(\tau_1^n \tau_{-1}^m \xi) = e^{2i\theta} \varphi(\xi).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\varphi(\xi) = e^{-2i\theta} \varphi(\text{Fix}(\tau_1))$; la fonction φ est donc constante sur Λ_1^+ et $e^{2i\theta} = 1$.

Considérons à présent le cas où λ est quelconque. Les égalités $P_\lambda \varphi = e^{i\theta} \varphi$ et $\nu_\varepsilon P_\varepsilon = \nu_\varepsilon$ entraînent $P_\varepsilon |\varphi| = |\varphi|$ et donc φ est de module constant sur Λ^+ . Par convexité, on obtient

$$\forall \xi \in \Lambda_r^+, \forall n \geq 1 \quad e^{i\lambda f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} \varphi(\tau_{-r}^n \xi) = e^{i\theta} \varphi(\xi)$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{i\lambda f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} = e^{i\theta} \frac{\varphi(\xi)}{\varphi(\text{Fix}(\tau_{-r}))}$. En particulier, pour toute suite $(n_k)_{k \geq 1}$ strictement croissante d'entiers on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{i\lambda(f_\varepsilon(\tau_{-r}^{n_{k+1}} \xi) - f_\varepsilon(\tau_{-r}^{n_k} \xi))} = 1$. D'après le lemme 6.3.2, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi) = +\infty$ et d'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\varepsilon(\tau_{-r}^{n+1} \xi) - f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi) = 0$

$$\left(\text{car } |f_\varepsilon(\tau_{-r}^{n+1} \xi) - f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)| = \left| B_{\tau_{-r}^n, \xi}^\varepsilon(\tau_{-r}^{-1} i, \tau_{-r}^n i) - B_{\tau_{-r}^n, \xi}^\varepsilon(i, \tau_{-r}^n i) \right| = \left| B_{\tau_{-r}^n, \xi}^\varepsilon(i, \tau_{-r}^{-1} i) \right|, \right. \\ \left. \text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| B_{\tau_{-r}^n, \xi}^\varepsilon(i, \tau_{-r}^{-1} i) \right| = \left| B_{\text{Fix}(\tau_{-r})}^\varepsilon(i, \tau_{-r}^{-1} i) \right| = 0 \right).$$

Nous avons le

Lemme 6.4.5. — *Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Alors, pour tout $a > 0$, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \geq 1}$ telle que*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (u_{n_{k+1}} - u_{n_k}) = a.$$

Démonstration. — Il suffit de poser $n_0 = 1$ et $n_{k+1} = \sup\{p > n_k \mid u_p \leq u_{n_k} + a\}$, pour tout $k \geq 1$.

On applique ce lemme à la suite $f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)$; pour tout $a > 0$ on a $e^{i\lambda a} = 1$ d'où $\lambda = 0$. Ainsi, lorsque λ est non nul, $P_{\varepsilon, \lambda}^2$ ne possède pas de valeurs propres de module 1 si bien que son rayon spectral sur $L_\alpha(\Lambda^+)$ est strictement inférieur à 1 (Hypothèse H₂). En revanche, pour $\lambda = 0$, la valeur propre 1 est simple, l'espace propre associé est celui des fonctions constantes sur Λ^+ et le projecteur propre s'identifie à une mesure de probabilité P_ε -invariante sur Λ^+ ; on peut alors écrire $P_\varepsilon^2 = \nu_\varepsilon + R_\varepsilon$ avec $\rho(R_\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_\varepsilon^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$ (Hypothèse H₁).

L'hypothèse H₃ est simple à vérifier puisque d'une part, d'après le lemme 6.4.1 il existe $C_1 > 0$ tel que

$$\forall n \geq 1 \quad \|p_n\| \leq \frac{C_1}{n^{\frac{2\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}} \quad (\text{avec } \frac{2\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon} > 1 \text{ pour } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$$

et d'autre part, d'après le lemme 6.3.4, il existe $C_2 > 0$ tel que

$$\forall n \geq 1, \forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad |f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)| \leq 2(1 + \varepsilon) \log n + C_2.$$

Par conséquent, pour tout $\xi \in \Lambda_r^+$, on a $|P_\varepsilon f_\varepsilon^3(\xi)| \leq C_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2(1+\varepsilon) \log n + C_2)^3}{n^{\frac{2\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}}$, qui est fini; en particulier $\nu_\varepsilon(f_\varepsilon^3) = \nu_\varepsilon(P_\varepsilon f_\varepsilon^3) < +\infty$.

Par ailleurs, d'après le corollaire 6.2.2, il existe $\varepsilon_0 > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $C_0 > 0$ tels que pour tout $\xi \in \Lambda_r^+$, on ait $S_N f_\varepsilon(\xi) \geq C_0$. Ainsi $\nu_\varepsilon(f_\varepsilon) = \frac{1}{N} \nu_\varepsilon(S_N f_\varepsilon) \geq C_0$. L'hypothèse H₃ est donc bien satisfaite. Il nous reste à vérifier l'hypothèse H₄. Nous avons la

Proposition 6.4.6. — *L'application $\lambda \mapsto P_{\varepsilon, \lambda}$ est développable en série entière en tout point de \mathbb{R} .*

La preuve de cette proposition est analogue à celle de la proposition 5.2.4. Les seules modifications à apporter portent sur les ordres de grandeur des normes des fonctions $\xi \mapsto p_n(\xi)$ et $\xi \mapsto f_\varepsilon(\tau_r^n \xi)$; d'après les lemmes 6.3.4 et 6.4.1, il existe des constantes C_1 et C_2 telles que

$$\forall n \geq 1 \quad \|p_n\| \leq \frac{C_1}{n^{\frac{2\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}} \text{ et } \forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad |f_\varepsilon(\tau_r^n \xi)| \leq 2(1 + \varepsilon) \log n + C_2.$$

Ces majorations permettent d'établir l'analyticité sur \mathbb{R} de la fonction $\lambda \mapsto P_{\varepsilon, \lambda}$.

6.5 Mélange du flot géodésique sur (M, \bar{g}_ε)

On rappelle (§ 6.2) que toute géodésique orientée de M se relève de façon unique en une géodésique orientée de $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$ dont les extrémités ξ_-, ξ appartiennent à l'ensemble $\bar{\Lambda} = \bigcup_{s=\pm 1} \Lambda_s^- \times \Lambda_s^+$. L'ensemble E formé des éléments $((\xi_-, \xi), t)$ de $\bar{\Lambda} \times \mathbb{R}$ tels que $0 \leq t \leq f_\varepsilon(\xi)$, quotienté par la relation $((\xi_-, \xi), f_\varepsilon(\xi)) \sim (\bar{T}_\varepsilon(\xi_-, \xi), 0)$ s'identifie au fibré unitaire tangent UM de (M, \bar{g}_ε) (voir § 6.2 pour la définition de \bar{T}_ε).

Rappelons que la mesure définie sur $\bar{\Lambda} \times \mathbb{R}$ par

$$(\mu_\varepsilon \otimes m)(d\xi_- d\xi dt) = \frac{\sigma_\varepsilon(d\xi_-) \sigma_\varepsilon(d\xi)}{D_\varepsilon(\xi_-, \xi)^{\frac{2\delta_\varepsilon}{b_\varepsilon}}} m(dt)$$

est invariante par l'application qui à $((\xi_-, \xi), t)$ associe $(\bar{T}_\varepsilon(\xi_-, \xi), t - f_\varepsilon(\xi))$ et par le flot $(a_s)_{s \in \mathbb{R}}$ défini par $a_s((\xi_-, \xi), t) = ((\xi_-, \xi), t + s)$. Notons $(\bar{a}_s)_{s \in \mathbb{R}}$ la projection de $(a_s)_{s \in \mathbb{R}}$ sur E , ce flot correspond au flot géodésique sur UM . La mesure $\mu_\varepsilon \otimes m$ induit sur E une mesure $\overline{\mu_\varepsilon \otimes m}$ invariante par le flot $(\bar{a}_s)_{s \in \mathbb{R}}$. On déduit de l'étude spectrale des opérateurs $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la

Proposition 6.5.1. — *Pour tout $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent de (M, \bar{g}_ε) est mélangeant relativement à la mesure $\overline{\mu_\varepsilon \otimes m}$.*

Démonstration. — Nous adaptons ici la démonstration de Y. Guivarc'h et J. Hardy [13] du mélange d'un flot spécial construit à l'aide d'une fonction höldérienne sur un sous-décalage de type fini.

Quitte à normaliser μ_ε on a $\overline{\mu_\varepsilon \otimes m}(E) = \nu_\varepsilon(f_\varepsilon)$; pour établir la proposition, il faut montrer que pour toutes fonctions Φ et Ψ de $\mathbb{L}^2(E, \overline{\mu_\varepsilon \otimes m})$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I_t(\Phi, \Psi) = \frac{1}{\nu_\varepsilon(f_\varepsilon)} \overline{\mu_\varepsilon \otimes m}(\Phi) \overline{\mu_\varepsilon \otimes m}(\Psi)$$

avec $I_t(\Phi, \Psi) = \int_E \Phi((\xi_-, \xi), s) \Psi \circ \bar{a}_t((\xi_-, \xi), s) \overline{\mu_\varepsilon \otimes m}(d\xi_- d\xi ds)$.

Par un argument de densité, il suffit d'établir cette convergence pour toute fonction Φ (resp. Ψ) de la forme $\varphi \otimes u$ (resp. $\psi \otimes v$) où φ est hölderienne sur $\bar{\Lambda}$, u est une fonction

de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et le support de $\varphi \otimes u$ est inclus dans $\{((\xi_-, \xi), s) \in \bar{\Lambda} \times \mathbb{R} \mid 0 < s < f_\varepsilon(\xi)\}$ (idem pour ψ et v); comme $(\psi \otimes v)((\xi_-, \xi), s - S_n f_\varepsilon(\xi)) = 0$ pour tout $n \neq 0$, on peut écrire

$$\psi(\xi_-, \xi)v(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi(\bar{T}_\varepsilon^n(\xi_-, \xi))v(s - S_n f_\varepsilon(\xi))$$

d'où $(\psi \otimes v) \circ \bar{a}_t((\xi_-, \xi), s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi(\bar{T}_\varepsilon^n(\xi_-, \xi))v(s + t - S_n f_\varepsilon(\xi))$ et on obtient alors

$$I_t(\varphi \otimes u, \psi \otimes v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\bar{\Lambda} \times \mathbb{R}} \varphi(\xi_-, \xi)u(s)\psi(\bar{T}_\varepsilon^n(\xi_-, \xi))v(s + t - S_n f_\varepsilon(\xi))\mu_\varepsilon \otimes m(d\xi_- d\xi ds).$$

Remarquons que φ et ψ s'identifient à des fonctions des suites bilatères $(\tau_i^{n_i})_{i \in \mathbb{Z}}$, avec $\omega(\xi_-) = (\tau_{-i}^{-n_i})_{i \leq 0}$ et $\omega(\xi) = (\tau_i^{n_i})_{i \geq 1}$. En utilisant de nouveau un argument de densité dans $L^2(\bar{\Lambda}, \mu_\varepsilon)$ il suffit de considérer les projections de φ et ψ sur les espaces correspondant aux suites unilatères de coordonnées d'indices $\geq -\ell$ avec $\ell \geq 0$; quitte à translater par une puissance de \bar{T}_ε (ce qui ne modifie pas l'intégrale ci-dessus car la mesure μ_ε est \bar{T}_ε -invariante), il suffit alors de considérer le cas $\ell = 0$, c'est-à-dire le cas où φ et ψ appartiennent à $L_\alpha(\Lambda^+)$.

On a alors

$$\begin{aligned} I_t(\varphi \otimes u, \psi \otimes v) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\Lambda^+ \times \mathbb{R}} \frac{\varphi(\xi)}{h_\varepsilon(\xi)} u(s)\psi(T_\varepsilon^n \xi)v(s + t - S_n f_\varepsilon(\xi))\nu_\varepsilon(d\xi)m(ds) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\Lambda^+ \times \mathbb{R}} \tilde{P}_\varepsilon^n \left(\frac{\varphi}{h_\varepsilon} \otimes \tilde{u} \right) (\xi, t - s)\psi(\xi)v(s)\nu_\varepsilon(d\xi)m(ds) \end{aligned}$$

avec $\tilde{u}(s) = u(-s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. D'après l'étude spectrale des $P_{\varepsilon, \lambda}$, le couple $(P_\varepsilon, f_\varepsilon)$ vérifie les hypothèses H_0, H_1, H_2, H_3 et H_4 . En utilisant alors le théorème 5.0.1 (théorème du renouvellement « classique ») on a

$$\forall (\xi, s) \in \Lambda^+ \times \mathbb{R} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{P}_\varepsilon^n(\varphi \otimes \tilde{u})(\xi, t - s) = \frac{\nu_\varepsilon(\varphi) \int_{\mathbb{R}} u(s)m(ds)}{\nu_\varepsilon(f_\varepsilon)}.$$

Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue nous donne alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I_t(\varphi \otimes u, \psi \otimes v) = \frac{\overline{\mu_\varepsilon \otimes m}(\varphi \otimes u) \overline{\mu_\varepsilon \otimes m}(\psi \otimes v)}{\nu_\varepsilon(f_\varepsilon)}$$

d'où la proposition.

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES GÉODÉSIQUES FERMÉES

IRMAR

Université de Rennes I

Campus de Beaulieu

35042 RENNES CEDEX

France

`dalbo@univ-rennes1.fr`

`peigne@univ-rennes1.fr`

Bibliographie

- [1] BABILLOT (M). — *Théorie du renouvellement pour des chaînes semi-markoviennes transientes*, Ann. I.H.P. 24 n° 4, (1988) 507–569.
- [2] BAUER (M). — *Dilatations and continued fractions* Linear Algebra and its applications, 174 (1992) 183–213.
- [3] BEARDON (A.-F). — *The Hausdorff dimension of singular sets of properly discontinuous group*, Amer. J. Math. 88 (1966) 722–736.
- [4] BOURDON (M). — *Structures conformes au bord et flot géodésique d'un CAT(−1)-espace*, L'Enseignement Mathématique, 41 (1995) 63–102.
- [5] BREIMAN (L). — *Probability*, Addison Wesley (1968).
- [6] BOWEN (R), SERIES (C). — *Markov maps associated to Fuchsian groups* Publ. IHES 50 (1979), 153–170.
- [7] DOEBLIN (N), FORTET (R). — *Sur les chaînes à liaisons complètes*, Bull. Soc. Math. France 65, (1937) 132–148.
- [8] DAL'BO (F), PEIGNÉ (M). — *Groupes de Ping-Pong et géodésiques fermées en courbure −1*, Annales de l'Institut Fourier, 46, n° 3 (1996).
- [9] FAIVRE (C). — *Distribution of Lévy constants for quadratic numbers*, Acta. Arith., LXI.1 (1992) 13–34.
- [10] GUILLOPE (L). — *Fonctions Zeta de Selberg et surfaces de géométrie finie*, Adv. Studies in Pure Math., 21 (1992) 33–70.
- [11] GHYS (Ét), DE LA HARPE (P). — *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhaël Gromov*, Progress in Mathematics, Vol. 83, Birkhäuser (1990).
- [12] GUIVARC'H (Y). — *Application d'un théorème limite local à la transience et à la récurrence de Marches de Markov*, Springer Verlag, Lect. Notes n° 1096, (1984), 301–332.
- [13] GUIVARC'H (Y), HARDY (J). — *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov*, Ann. I.H.P., Vol. 24, n° 1, 1988, p. 73–98.

- [14] GUIVARC'H (Y), LE JAN (Y). — *Asymptotic winding of the geodesic flow on modular surfaces and continued fractions* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t. 26, (1993) 23-50.
- [15] HEIJHAL (D). — *The Selberg trace formula and the Riemann zeta function*, Duke Math. J., 43 (1976) 441-482.
- [16] HENNION (H). — *Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipschitziens*, Proceeding of the A.M.S., n° 118 (1993) 627-634.
- [17] KAIMANOVITCH (V). — *Invariant measures of the geodesic flow and measures at infinity on negative curved manifolds*, Ann. I.H.P., Vol. 53, n°4 (1990) 361-393.
- [18] KHINTCHINE (A.-Y). — *Continued fractions*, The university of Chicago Press, Chicago 1964.
- [19] LALLEY (S.-P). — *Renewal theorems in symbolic dynamics, with applications to geodesic flows, non euclidean tessellations and their fractal limits*, Acta Math., 163 (1989) 1-55.
- [20] LALLEY (S.-P). — *Closed geodesics in homology classes on surfaces of variable negative curvature*, Duke Math. Journal, Vol. 58, n°3 (1989) 795-821.
- [21] LE PAGE (E). — *Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires*, Springer Verlag, Lect. Notes, n° 928, (1982) 258-303.
- [22] LÉVY (P). — *Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue*, Bull. S.M.F., 57 (1929) 178-194.
- [23] MARGULIS (G.-A). — *Applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature*, Functionnal Anal. Appl., 3 (1969) 335-336.
- [24] NORMAN (X). — *Markov processes and learning models*, New York Academy Press, Vol. 84, 1972.
- [25] PEIGNÉ (M). — *Vitesse de convergence dans le théorème du renouvellement sur \mathbb{R}* , Cahier des séminaires de Rennes, 1989-1990.
- [26] POLLICOTT (M). — *Distribution of closed geodesics on the modular surface and quadratic irrationals*, Bull. S.M.F., 114 (1986) 431-446.
- [27] PARRY (W), POLLICOTT (M). — *An analogue of prime number theorem for closed orbits of axiom A flows* Ann. of Prob.n 118 (1983) 573-591.
- [28] RUELLE (D). — *Thermodynamic Formalism*, Addison-Wesley, 1978.
- [29] SELBERG (A). — *Harmonic analysis and discontinuous group in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc., 20 (1956) 47-87.

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES GÉODÉSIQUES FERMÉES

- [30] SERIES (C). — *The Modular Surface and continued fractions* J. London Math. Soc., Vol. 31, (1985) 69–80.

Astérisque

ANNE BROISE

**Transformations dilatantes de l'intervalle
et théorèmes limites**

Astérisque, tome 238 (1996), p. 1-109

http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__238__R1_0

© Société mathématique de France, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

238

ASTÉRISQUE

1996

**ÉTUDES SPECTRALES
D'OPÉRATEURS DE
TRANSFERT ET APPLICATIONS**

Anne BROISE, Françoise DAL'BO et Marc PEIGNÉ

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

TABLE DES MATIÈRES

Préface.....	i
Anne Broise :	
Transformations dilatantes de l'intervalle et théorèmes limites.....	1
Françoise Dal'bo & Marc Peigné :	
Comportement asymptotique du nombre de géodésiques fermées sur la surface modulaire en courbure non constante.....	111

PRÉFACE

Les deux articles de ce volume sont consacrés à l'étude de deux aspects différents de systèmes dynamiques hyperboliques pour des situations explicites. Le premier article aborde les propriétés stochastiques des sommes de Birkhoff d'une fonction régulière le long des trajectoires d'une transformation dilatante T de l'intervalle, la mesure de référence étant la mesure de Lebesgue. Le deuxième article considère l'asymptotique du nombre de trajectoires périodiques; la situation considérée est celle du flot géodésique sur certaines surfaces à courbure négative, non compactes mais d'aire finie. Les deux aspects sont étudiés par une méthode commune, celle de la théorie spectrale des opérateurs de transfert.

Dans le premier cas cet opérateur n'est autre que l'adjoint P de la transformation T par rapport à la mesure de Lebesgue; si f est la fonction régulière donnée, l'étude de la loi des sommes de Birkhoff $S_n(x) = \sum_0^{n-1} f \circ T^k(x)$ se ramène à celle de l'itération des opérateurs « transformés de Fourier » P_λ définis par $P_\lambda \varphi = P [e^{i\lambda f} \varphi]$. Les deux problèmes principaux étudiés sont celui du théorème central limite et celui du théorème limite local. L'étude du premier problème met en jeu la famille des opérateurs P_λ pour λ petit; elle est menée sous des conditions très générales concernant la partition (dénombrable) de l'intervalle définie par T et elle aboutit à un théorème central limite avec reste de la forme $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Une difficulté importante qui apparaît et est contournée, est le manque d'informations précises sur la densité de la mesure T -invariante dans le cas d'une partition dénombrable. Dans l'étude du théorème local il est essentiel de contrôler le spectre P_λ pour tout λ réel; ceci dépend d'une inégalité fonctionnelle introduite pour $\lambda = 0$ par Doeblin et Fortet dans l'étude des chaînes à liaisons complètes. Cette étude met en évidence certaines équations fonctionnelles satisfaites par f qui sont discutées en utilisant les points périodiques de T . L'article se présente comme un travail de synthèse et les principaux résultats nouveaux sont relatifs au cas d'une partition dénombrable comme celle par exemple de la transformation « en fraction continue ».

Le deuxième article est basé sur la méthode du codage et la représentation du flot géodésique comme flot spécial au-dessus d'une certaine transformation dilatante T définie sur le bord du disque; cette transformation traduit la dynamique du groupe fondamental sur le bord et est analogue à la transformation en « fraction continue ». Le principal résultat dit que le nombre de géodésiques fermées de longueur au plus a est équivalent à $\frac{e^{ha}}{ha}$ où h est l'exposant critique de la série de Poincaré correspondante,

comme dans le cas général des surfaces compactes. Le nombre de géodésiques fermées de longueur au plus a s'exprime à l'aide des potentiels (ou de la résolvante) de l'opérateur adjoint de T par rapport à la mesure naturelle. L'asymptotique recherchée dépend alors d'une étude précise du spectre d'opérateurs de la forme P_λ pour tout λ réel. La fonction f qui intervient ici est la fonction plafond du flot spécial et contrairement à la situation précédente, elle est bornée mais de taille contrôlée. La situation géométrique explicite permet l'étude du spectre P_λ ; elle fait appel en particulier à la propriété de mélange du flot géodésique qui se trouve donc établie au cours de cette étude. Les difficultés principales sont liées à la non compacité de la surface qui se traduit ici par le fait que la fonction f est non bornée et la partition associée à T infinie. L'article se présente comme une première étape de l'étude de ce sujet complexe par la méthode des opérateurs de transfert. Ce sujet est étudié par de très nombreux auteurs, en général par la méthode de la fonction zêta ou bien par la formule des traces. On peut, par exemple, citer le travail de Parry et Pollicott qui fait l'objet d'un volume de cette série où l'on trouvera de nombreuses références. L'étude prend comme point de départ le cas de la formule modulaire qui a l'avantage de se prêter à une étude très explicite ; le résultat obtenu est nouveau dans le cas considéré par les auteurs d'une perturbation de la courbure constante et la méthode peut s'étendre de manière beaucoup plus générale. Clairement, il s'agit là de cas très particuliers où l'asymptotique mentionnée plus haut reste valable. Le domaine de validité d'une telle asymptotique n'est pas entièrement connu mais la méthode des opérateurs de transfert permet au moins d'aborder cette question pour les variétés non compactes géométriquement finies même en courbure variable.

Dans de nombreuses situations naturelles, la présence de singularités ne permet pas l'application immédiate du formalisme thermodynamique. La méthode des opérateurs de transfert est cependant assez souple pour permettre des variantes comme celles développées ici. Elle permet aussi de traduire de manière analytique certaines propriétés géométriques, elle admet des interprétations probabilistes utiles et son formalisme s'étend naturellement au cas où la fonction f est à valeurs matricielles au lieu d'être à valeurs réelles comme c'est en particulier le cas dans l'étude des produits de matrices aléatoires. Elle est donc susceptible d'applications nouvelles dans des situations de type hyperbolique de plus grande dimension.

Y. Guivarc'h

TRANSFORMATIONS DILATANTES DE L'INTERVALLE ET THÉORÈMES LIMITES

Anne BROISE

On fait ici un travail de synthèse sur les transformations dilatantes de l'intervalle ayant une partition finie ou dénombrable. On montre l'existence de mesures invariantes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue pour une classe de transformations dilatantes plus large que celle étudiée habituellement. Ensuite, on montre des théorèmes limites central et local, on donne la vitesse de convergence et des conditions d'annulation de la variance basées sur les points périodiques de la transformation. On précise les théorèmes limites obtenus par des théorèmes de grands écarts. Enfin on montre comment s'appliquent ces théorèmes sur divers exemples de transformations.

A synthesis on interval expanding maps is done. We prove the existence of invariant measures which are absolutely continued with respect to Lebesgue measure for a larger class of expanding maps. Then we prove central and local limit theorems, we give the convergence rate and some conditions on the variance annulation based on the periodic points of the map. We precise these limit theorems by large deviation theorems. To conclude we show how to apply these theorems on various examples.

TABLE DES MATIÈRES

	Introduction	5
1	Notations et premières définitions	9
2	Une classe de transformations	11
	2.1 Définition de \mathcal{C}	11
	2.2 Exemples d'éléments de \mathcal{C}	13
3	L'opérateur de Perron-Frobenius	17
4	Le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu	19
	4.1 Les hypothèses	19
	4.2 Le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu	22
	4.3 Conséquences	28
	4.4 Exemples et remarques	28
	4.5 Hypothèse sur le système (I, \mathcal{B}, T, hm)	33
5	Les perturbations de l'opérateur Φ	37
6	Théorème limite central	49
	6.1 Calcul de la variance	49
	6.2 Le théorème limite central	55
7	Remarques à propos de l'hypothèse (H)	63
8	La vitesse de convergence	67
9	Théorème limite local	69
	9.1 Décomposition spectrale de l'opérateur $\Phi_f(i\theta)$	69
	9.2 Le théorème limite local	72
	9.3 Conditions sur f pour que $\Phi_f(it)$ n'ait pas de valeur propre de module 1	76
	9.4 Théorème limite local dans le cas d'une fonction à valeurs entières	80

10	Théorème des grands écarts	83
10.1	Introduction, définition de \tilde{T} et $\tilde{\Phi}$	83
10.2	Relativisation du noyau $\tilde{\Phi}$	84
10.3	Étude de la chaîne $({}^\theta X_n, {}^\theta S_n)_{n \geq 0}$	86
10.4	Théorèmes des grands écarts	90
11	Applications sur des exemples	93
11.1	Premier exemple : La transformation $Tx = 2x[1]$	93
11.2	Deuxième exemple : La transformation $Tx = \beta x + \alpha[1]$, $\beta > 0$, $\beta^2 = \beta + 1$ et $\alpha = \frac{3-\beta}{2}$	98
11.3	Troisième exemple : Les transformations « homographiques par morceaux »	99
	Bibliographie	107

INTRODUCTION

Ce travail est une synthèse des théorèmes limites pour les transformations dilatantes de l'intervalle : existence de mesures invariantes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, théorèmes limites central et local, vitesse de convergence. Ensuite, on complète les théorèmes limites obtenus par des théorèmes de grands écarts. Il s'agit d'un prolongement du travail de J. Rousseau-Egèle [RE]. Cette dernière étude est complète pour le cas des transformations dilatantes de l'intervalle ayant une partition finie, car la densité de la mesure invariante est alors assez bien connue. Ce n'est pas le cas des transformations dilatantes de l'intervalle ayant une partition infinie dénombrable sous les hypothèses de J. Rousseau-Egèle sauf dans certains cas bien particuliers.

On étend ici les énoncés au cas général des transformations dilatantes ayant une partition dénombrable sous des hypothèses qui généralisent de façon naturelle celles données par A. Lasota et J. Yorke [L.Y] dans le cas des partitions finies. Les hypothèses faites par J. Rousseau-Egèle sur la densité des mesures invariantes permettent de se ramener à des opérateurs markoviens. Comme il est difficile de préciser les mesures invariantes pour une transformation dilatante quelconque, on a évité d'employer ces hypothèses dans la preuve des résultats annoncés. Ici, on envisage surtout le cas des transformations dilatantes admettant une partition dénombrable ; mais cette étude contient évidemment comme cas particulier celle des transformations ayant une partition finie, ce qui justifie ce travail de synthèse.

On se donne une transformation dilatante T de $[0, 1]$ (ici le lecteur peut supposer que T est monotone, dilatante et de classe C^2 sur un ensemble fini ou dénombrable d'intervalles). Dans un premier temps, on construit hm , la mesure de probabilité invariante par T absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m ; sa densité h est à variation bornée. La construction de hm se fait par l'étude spectrale de l'opérateur de Perron-Frobenius Φ associé à T , comme Φ préserve les fonctions à variation bornée, on peut utiliser le théorème de C. Ionescu-Tulcea et G. Marinescu [IT.M]. On prouve une inégalité d'un type considéré par W. Doeblin et R. Fortet [D.F], en généralisant la démonstration de A. Lasota et J. Yorke [L.Y].

On suppose alors que le système (T, hm) est ergodique (donc que 1 est une valeur propre simple de Φ), on doit d'ailleurs pouvoir s'affranchir de cette hypothèse —voir K. Ishitani [I] ainsi que T. Li et J. Yorke [L.Y]— en se restreignant aux différentes classes ergodiques de T .

On se donne maintenant une fonction f à variation bornée, on note $S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ et on pose $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 (S_n f)^2 h dm \geq 0$; si σ n'est pas nul (voir plus loin) alors, on démontre que les sommes $S_n f$ suivent :

– un théorème limite central avec vitesse de convergence :

$$\sup_{v \in \mathbb{R}} \left| hm \left[\left\{ x \in [0, 1] : \frac{S_n f(x) - nm(fh)}{\sigma \sqrt{n}} \leq v \right\} \right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-t^2/2} dt \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

– un théorème limite local : pour tout intervalle Δ de \mathbb{R} de longueur finie, uniformément en z dans \mathbb{R} , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sigma \sqrt{n} hm[\{x \in [0, 1] : z + S_n f(x) - nm(fh) \in \Delta\}] - \frac{m(\Delta)}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 n}} \right| = 0,$$

et on précise ces deux théorèmes à l'aide de deux théorèmes de grands écarts. Pour faire cela, on adapte la méthode spectrale de S.V. Nagaev [N], qui a déjà été utilisée par Y. Guivarc'h et J. Hardy dans le cas des difféomorphismes d'Anosov [G.H] et par E. Le Page pour les produits de matrices aléatoires [L]. Elle consiste à normaliser l'opérateur Φ , c'est-à-dire à le rendre markovien en posant :

$$Pg = \frac{\Phi(gh)}{h}$$

et à considérer la chaîne de Markov associée à P . On obtient des théorèmes limites en perturbant P et en faisant des développements limités en utilisant la décomposition spectrale de l'opérateur perturbé. Pour pouvoir normaliser Φ , voir [I], [Mo], [RE], on doit supposer que sur $\{h \neq 0\}$, $\frac{1}{h}$ est encore à variation bornée, pour que P préserve lui aussi l'espace vectoriel des fonctions à variation bornée. G. Keller [Ke], R. Adler et L. Flatto [A.F], [M.P.V] ont donné des conditions sur T pour que cette hypothèse soit satisfaite. Comme en général on peut difficilement préciser les propriétés de h , on ne sait pas si elle est vérifiée pour les transformations admettant une partition dénombrable. Dans la classe de transformations dilatantes choisies ici, il existe d'ailleurs des contre-exemples, on en donnera un. On ne va donc pas normaliser Φ , mais le perturber directement et utiliser la méthode des développements limités. La technique employée permet aussi de donner des conditions précises sur f pour que σ ne soit pas nul, en utilisant des points périodiques de T . Ces conditions sont essentielles dans les théorèmes précédents et sont nouvelles. Finalement on donne quelques exemples d'applications de ces théorèmes, en particulier pour les β -transformations et la transformation « fraction continue ».

Ce travail complète donc l'article de J. Rousseau-Egèle. Il généralise les travaux de T. Morita [Mo] qui considère des transformations dilatantes qui ont une partition dénombrable « markovienne », il peut alors se ramener à des opérateurs markoviens. On pourrait envisager une application à des généralisation des travaux de V. Baladi et G. Keller [B.K] ainsi qu'à ceux de F. Hofbauer et G. Keller [H.K] pour des transformations dilatantes avec une partition dénombrable. Pour être complet, il faut signaler l'approche de M. Rychlik [Ry] pour obtenir des propriétés supplémentaires

TRANSFORMATIONS DILATANTES DE L'INTERVALLE

de la densité de la mesure invariante pour des transformations dilatantes de l'intervalle avec des propriétés plus restrictives que celles introduites ici sans utiliser le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu. Dans tous les travaux que l'on vient de citer, on se place dans des espaces de fonctions à variation bornée ; d'autres espaces fonctionnels ont été envisagés, par exemple K. Krzyzewski et W. Szlenk [Kr1], [Kr2], [Kr.S] utilisent des fonctions différentiables. Ils obtiennent alors d'autres propriétés pour la densité h de la mesure invariante, c'est le cas aussi de D. Mayer [Ma] et de R. Mañé [M]. Bien sûr les conditions sur les transformations envisagées sont différentes de celles adoptées ici.

J'ai réalisé en partie ce travail à l'IRMAR à l'Université de Rennes I pendant que je préparais ma thèse. C'est avec plaisir que je me permets de remercier ici Yves Guivarc'h pour tout ce que j'ai appris en travaillant avec lui.

1 NOTATIONS ET PREMIÈRES DÉFINITIONS

On note l'intervalle $[0, 1]$ par I . On munit I de la tribu de ses boréliens \mathcal{B} et de la mesure de Lebesgue m . On note $L^1(m)$ l'espace des fonctions de I dans \mathbb{C} qui sont intégrables sur I .

Définition 1.1. — Soit f une fonction de I dans \mathbb{C} , on dit que f est à variation bornée si :

$$v(f) = \sup \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i+1})|$$

est fini, on prend le supremum sur l'ensemble des subdivisions finies de I $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, n dans \mathbb{N}^* .

Un élément f de $L^1(m)$ est dit à variation bornée si

$$v(f) = \inf_{g \in \bar{f}} v(g)$$

est fini, on prend l'infimum sur la classe de f modulo m , $\bar{f} = \{g : I \rightarrow \mathbb{C} : f = g \text{ m-p.p.}\}$.

On note V l'ensemble $\{f \in L^1(m) : v(f) < \infty\}$.

Remarque. — On peut considérer que V est l'ensemble des fonctions continues à droite sur I , ayant un nombre au plus dénombrable de sauts dans I . À chaque élément f de V , on peut associer une mesure μ dont la variation totale est bornée telle que pour tout x de I , $f(x) = \mu([0, x])$.

V est un sous espace de $L^1(m)$ qui n'est pas fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$ [car la suite de fonctions $f_n(x) = \sin \frac{1}{x} \mathbf{1}_{]1/n, 1]}(x)$ est dans V mais elle converge vers $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ qui appartient à $L^1(m)$ mais n'est pas dans V].

On définit alors la norme $\|\cdot\|_v$ sur V par :

$$\|f\|_v = v(f) + \|f\|_1.$$

Cette norme rend l'espace $(V, \|\cdot\|_v)$ complet car la boule unité de l'espace des mesures dont la variation totale est bornée est compacte pour la topologie de la convergence faible des mesures à variation totale bornée.

On a pour tout f de V , pour tout x, y dans I :

$$|f|(x) - |f|(y) \leq v(f),$$

on a donc :

$$\int_0^1 [|f|(x) - |f|(y)] dy = |f|(x) - \|f\|_1 \leq v(f).$$

Ainsi $\|f\|_\infty - \|f\|_1 \leq v(f)$ c'est-à-dire $\|f\|_\infty \leq \|f\|_v$. On en déduit qu'une suite $(f_n)_{n>0}$ d'éléments de V qui converge dans V vers f converge uniformément sur I .

Comme si f et g sont dans V , on a : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1 + \|f\|_1 \|g\|_\infty$ et comme pour une subdivision $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ finie de I on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} |(fg)(a_i) - (fg)(a_{i+1})| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} [|f(a_i)| |g(a_i) - g(a_{i+1})| + |g(a_i)| |f(a_i) - f(a_{i+1})|] \\ &\leq \|f\|_\infty \sum_{i=1}^{n-1} |g(a_i) - g(a_{i+1})| + \|g\|_\infty \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i+1})|. \end{aligned}$$

On en déduit que : $v(fg) \leq \|f\|_\infty v(g) + \|g\|_\infty v(f)$, et donc :

$$\begin{aligned} \|fg\|_v &\leq \|f\|_\infty \|g\|_v + \|g\|_\infty \|f\|_v \\ \|fg\|_v &\leq 2\|f\|_v \|g\|_v. \end{aligned}$$

On construit maintenant une classe de transformations dilatantes pour lesquelles on pourra montrer le théorème limite central.

2 UNE CLASSE DE TRANSFORMATIONS DILATANTES

2.1 Définition de \mathcal{C}

On va maintenant donner la classe des transformations dilatantes sur laquelle on travaillera ensuite. Dans un premier temps, on va définir la partition associée à une transformation.

On appelle \mathcal{D} l'ensemble des applications de I dans lui-même, vérifiant la condition suivante :

Il existe une partition finie ou dénombrable de $I : (I_j)_{j \in J}$ telle que la restriction de T à chaque intervalle I_j se prolonge en une fonction de classe C^1 et strictement monotone sur \bar{I}_j .

On remarque que si T est dans \mathcal{D} , alors :

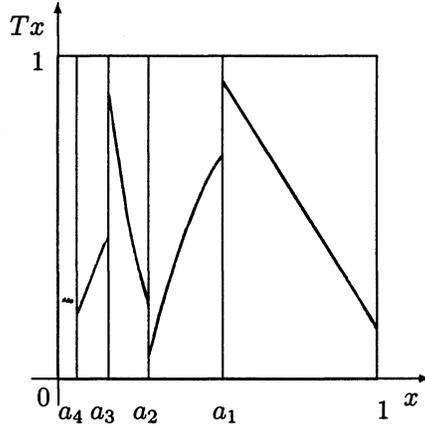
- il existe une partition, parmi toutes celles qui vérifient la condition précédente, qui est la plus grossière (ou la moins fine) ; on l'appellera *la partition associée à T* , on la notera $(I_j)_{j \in J}$;
- pour tout entier $k > 0$, T^k est aussi dans \mathcal{D} (car T envoie I dans I). La partition associée à T^k est d'ailleurs un raffinement de la partition associée à T .

Dans toute la suite on ne travaillera qu'avec des applications de \mathcal{D} .

On appelle alors \mathcal{C} la classe des applications T de I dans lui-même qui appartiennent à \mathcal{D} et telles que :

- (1) La restriction de T à I_j est strictement monotone et se prolonge en une application dérivable à dérivée lipschitzienne sur \bar{I}_j où $(I_j)_{j \in J}$ est la partition de I associée à T .
- (2) Il existe un entier $n_0 > 0$, tel que $\gamma = \inf_{j \in J_{n_0}} \inf_{x \in I_j} |(T^{n_0})'(x)| > 2$, où $(I_j)_{j \in J_{n_0}}$ est la partition associée à T^{n_0} .
- (3) $\inf_{j \in J_{n_0}} m(T^{n_0}(\bar{I}_j)) > 0$.
- (4) $\sup_{j \in J_{n_0}} \sup_{x \neq y \in I_j} \left| \frac{(T^{n_0})'(x) - (T^{n_0})'(y)}{x - y} \right| = K < \infty$.

Par exemple :



Ces hypothèses sont suffisantes pour démontrer l'existence d'une mesure invariante par T absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ainsi que le théorème limite central. Par contre, pour démontrer le théorème limite local on a besoin d'une condition apparemment beaucoup plus restrictive, on prendra T dans \mathcal{C}' où \mathcal{C}' est la classe des applications T de \mathcal{C} vérifiant la condition supplémentaire suivante :

(3') Pour tout $k > 0$, $\inf_{j \in J_k} m(T^k(\bar{I}_j)) > 0$, où $(I_j)_{j \in J_k}$ est la partition associée à T^k .

Remarques. —

Quand la partition associée à T est finie, les conditions (3), (3') et (4) sont évidentes.

Si pour tout j de J , $T(I_j) = I$, alors (3) et (3') sont vérifiées.

La condition (4) entraîne que pour tout $N > 0$,

$$\sup \left| \frac{(T^{Nn_0})'(x) - (T^{Nn_0})'(y)}{x - y} \right| = K^N < \infty.$$

Si T est dans \mathcal{C}' , alors pour tout entier $n > 0$, T^n est aussi dans \mathcal{C}' .

Si les restrictions de T aux ensembles I_j se prolongent de façon C^2 sur \bar{I}_j , on peut remplacer la condition (4) par la condition (4') suivante :

$$\sup \left| \frac{(T^{n_0})''(x)}{[(T^{n_0})'(x)]^2} \right| = K' < \infty.$$

On note $\bar{I}_j = [a_j, a_{j+1}]$. Au point a_j , T n'est pas définie a priori, cependant, on dira souvent que T est définie sur chaque intervalle fermé de la partition en prenant aux bords de l'intervalle la valeur limite, par exemple ici :

$$T(a_j) = \lim_{x \rightarrow a_j, x > a_j} T(x).$$

La condition (3') est nécessaire pour démontrer le théorème limite local (voir la proposition 9.1). Il suffit par contre pour démontrer l'existence d'une mesure invariante ou le théorème limite central pour T de supposer (3) (voir la proposition 4.1).

2.2 Exemples d'éléments de \mathcal{C}

- **Les β -transformations** : elles sont définies par $Tx = \beta x [1]$ où β est un réel strictement supérieur à 1. La partition associée à T est $0 < \frac{1}{\beta} < \dots < \frac{[\beta]}{\beta} \leq 1$. Sur chaque intervalle : $[\frac{j}{\beta}, \frac{j+1}{\beta}]$ où $0 \leq j \leq [\beta] - 1$ et sur $[\frac{[\beta]}{\beta}, 1]$, T est linéaire donc on a (1), $\gamma = \beta > 1$ par hypothèse d'où (2) (on prend le plus petit entier n_0 tel que $\beta^{n_0} > 2$) et comme la subdivision est finie, T est dans \mathcal{C} .
- On vérifie aisément que **la généralisation des β -transformations** : les applications $Tx = \beta x + \alpha [1]$ où $\beta > 1, 0 \leq \alpha < 1$ sont encore dans \mathcal{C} .
- **Les applications linéaires par morceaux** telles qu'il existe une partition (I_k) finie ou dénombrable telle que $T(I_k) = I$, T est linéaire sur I_k et $|T'x| \geq 1 + \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$ sont aussi des éléments de \mathcal{C} . (Là aussi, on prend le plus petit entier n_0 tel que $(1 + \varepsilon)^{n_0} > 2$.)
- **La transformation « fraction continue »** : elle est définie par $T(0) = 0$ et pour $x \in]0, 1[$ $Tx = \{\frac{1}{x}\}$. La partition de I associée à T est $(I_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et sur I_n , $Tx = \frac{1}{x} - n$ qui est une fonction de classe C^∞ strictement monotone sur $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, d'où (1). Pour tout $n > 0$, $T(I_n) = I$, d'où (3). On remarque que $T'(1) = -1$.

On a :

$$\inf_{x \in \cup I_n} |(T \circ T)'(x)| = 4,$$

en effet $T'x = -\frac{1}{x^2}$ sur $\cup_n I_n$, $T''x = \frac{2}{x^3}$, et

$$(T \circ T)'(x) = T'(Tx)T'(x) = \frac{1}{(Tx)^2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(1 - nx)^2} \text{ si } x \in \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[.$$

Alors :

$$\inf_{x \in \cup I_n} |(T^2)'(x)| = \inf_{n > 0} \inf_{x \in I_n} \frac{1}{(1 - nx)^2} = \inf_{n > 0} \frac{1}{(1 - \frac{n}{n+1})^2} = 4,$$

d'où (2)

$$\begin{aligned} (T^2)''(x) &= T''(x)T'(Tx) + T''(Tx)(T'(x))^2 \\ &= \frac{-1}{(Tx)^2} \frac{2}{x^3} + \frac{2}{(Tx)^3} \frac{1}{x^4} = \frac{2(1 - xTx)}{x^4(Tx)^3} \\ \frac{(T^2)''(x)}{[(T^2)'(x)]^2} &= 2(1 - xTx)Tx = 2nx\left(\frac{1}{x} - n\right) \text{ si } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]. \end{aligned}$$

D'où $\sup_{x \in \cup I_n} \left| \frac{(T^2)''(x)}{[(T^2)'(x)]^2} \right| = \sup_{n > 0} \frac{2n}{n+1} = 2 < \infty$. Ainsi T est dans \mathcal{C} .

Remarque. — Il existe des transformations T qui vérifient (1), (2) et (3) mais qui n'appartiennent pas à \mathcal{C} , en effet : soit T définie par

$$\begin{cases} T0 &= 0 \\ Tx &= \frac{1}{n} \log(nx + b_n) + a_n \text{ sur } \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \quad n \geq 2 \\ Tx &= 4x - 2 \text{ sur } \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ Tx &= 4x - 3 \text{ sur } \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

avec $a_n = \frac{1}{n} \log[(n+1)(e^n - 1)]$ et $b_n = \frac{e^n \frac{n}{n+1} - 1}{1 - e^n}$, ils sont choisis de façon à ce que $T(\frac{1}{n}) = 1$, $T(\frac{1}{n+1}) = 0$, d'où (3). Sur I_n , T est une fonction de classe C^2 , on a :

$$T'x = \frac{1}{nx + \frac{e^n \frac{n}{n+1} - 1}{1 - e^n}}$$

qui est une fonction décroissante sur $] - \infty, x_0[$ et sur $]x_0, +\infty[$ où

$$x_0 = \frac{e^n n / (n+1) - 1}{n(e^n - 1)}$$

comme on a : $-\infty < x_0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \infty$ et comme sur $]x_0, \infty[$, $T'x$ est dans \mathbb{R}_+^* , on en déduit que T est strictement croissante sur I_n , la condition (1) est donc vérifiée

$$\begin{aligned} \inf_{x \in I} |T'x| &= \inf \left\{ \inf_{n > 2} T'\left(\frac{1}{n}\right), 4 \right\} = \inf \left\{ 4, \frac{(e^n - 1)(n+1)}{(n+1)(e^n - 1) - e^n n + n + 1} \right\} \\ &= \inf \{ 4, (1 - e^{-n})(n+1), n > 2 \} = 3(1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

car la fonction $x \mapsto (x+1)(1 - e^{-x})$ est strictement croissante sur $[1, \infty[$.

$\gamma = 3(1 - e^{-2}) = 2,59 > 2$, la condition (2) est donc vérifiée. Mais la condition (4) n'est pas vérifiée, en effet :

$$\left| \frac{T'(x) - T'(y)}{x - y} \right| = n \text{ sur } I_n \text{ pour } n \geq 2.$$

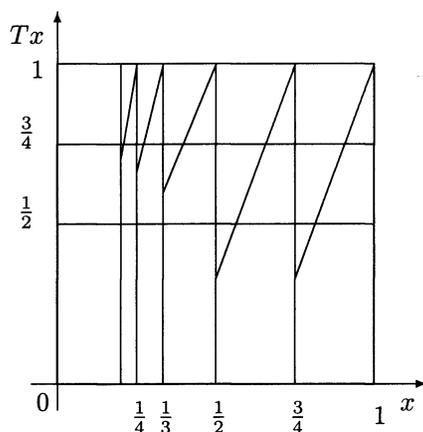
On a donc

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \sup_{x \neq y \in I_n} \left| \frac{T'(x) - T'(y)}{x - y} \right| = \infty.$$

TRANSFORMATIONS DILATANTES DE L'INTERVALLE

Remarque. — Il existe des transformations T qui sont dans \mathcal{C} mais qui n'appartiennent pas à \mathcal{C}' . On en donne maintenant un exemple qui reprend une idée de A. Boubakri. On définit la transformation linéaire par morceaux T par :

$$\left\{ \begin{array}{l} T(0) = 0 \\ Tx = \frac{8}{3}x - \frac{5}{3} \text{ sur } I_0 = [\frac{3}{4}, 1] \\ Tx = \frac{8}{3}x - 1 \text{ sur } I_1 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ Tx = \frac{8}{3}x - \frac{1}{3} \text{ sur } I_2 = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \\ Tx = a_n(x - \frac{1}{n}) + 1 \text{ sur } I_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \text{ pour } n \geq 3. \end{array} \right.$$



On choisit a_n de façon à ce que T envoie I_n sur $[\frac{3}{4} - \frac{1}{2n^2}, 1]$, on prend $a_n = \frac{(n+1)(n^2+2)}{4n}$. Toutes les pentes des applications linéaires sont plus grandes que 2. Ceci montre que T est dans \mathcal{C} et aussi que $n_0 = 1$.

T envoie

$$\left\{ \begin{array}{l} I_0 \text{ et } I_1 \text{ sur } [\frac{1}{3}, 1] = I_0 \cup I_1 \cup I_2 \\ I_2 \text{ sur } [\frac{5}{9}, 1] = [\frac{5}{9}, \frac{3}{4}] \cup I_0 \text{ et } [\frac{5}{9}, \frac{3}{4}] \subset I_1 \\ I_n \text{ sur } [\frac{3}{4} - \frac{1}{2n^2}, 1] = [\frac{3}{4} - \frac{1}{2n^2}, \frac{3}{4}] \cup I_0 \text{ et } [\frac{3}{4} - \frac{1}{2n^2}, \frac{3}{4}] \subset I_1 \text{ si } n \geq 3. \end{array} \right.$$

Alors pour construire la partition associée à T^2 , on découpe I_0 et I_1 en trois intervalles : $I_{i,j} = I_i \cap T^{-1}(I_j)$ où i vaut 0 ou 1, j vaut 0, 1 ou 2. Par contre, pour $n \geq 2$, on découpe I_n en deux intervalles : $I_{n,i} = I_n \cap T^{-1}(I_i)$ où i vaut 0 ou 1. Pour $n > 2$, T envoie $I_{n,1}$ sur $[\frac{3}{4} - \frac{1}{2n^2}, \frac{3}{4}]$, T^2 l'envoie sur $[1 - \frac{4}{3n^2}, 1]$. Ainsi $\inf m(T^2(I_{i,j})) = \inf_{n>3} \frac{4}{3n^2} = 0$, ce qui prouve que T n'est pas dans \mathcal{C}' . Pour cette transformation on va montrer le théorème limite central mais pas le théorème limite local.

3 L'OPÉRATEUR DE PERRON-FROBENIUS

On considère un élément T de \mathcal{C} , on définit alors l'opérateur de Perron-Frobenius associé à T , $\Phi_T: L^1(m) \rightarrow L^1(m)$ par :

$$\int_0^1 \Phi_T f \cdot g dm = \int_0^1 f \cdot g \circ T dm \quad \text{où } f \in L^1(m) \text{ et } g \in L^\infty(m).$$

Les principales propriétés de Φ_T sont :

- (i) Φ_T est un opérateur linéaire continu de $L^1(m)$.
- (ii) Φ_T est positif : $f \geq 0 \Rightarrow \Phi_T f \geq 0$, donc $|\Phi_T f| \leq \Phi_T |f|$ pour f dans V .
- (iii) Φ_T est une contraction de $L^1(m)$.
- (iv) Φ_T préserve l'intégrale : $\int_0^1 \Phi_T f dm = \int_0^1 f dm$.
- (v) $\Phi_{T^n} = (\Phi_T)^n$.
- (vi) $\Phi_T f = f$ si et seulement si T laisse la mesure $\mu = fm$ invariante.

Démonstration de (iii) et de (vi) : Pour f dans $L^1(m)$, on a :

$$\begin{aligned} \|\Phi_T f\|_1 &= \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \left| \int_0^1 \Phi_T f \cdot g dm \right| \leq \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \int_0^1 |f| \cdot |g \circ T| dm \\ &\leq \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \|f\|_1 \|g \circ T\|_\infty \leq \|f\|_1. \end{aligned}$$

Si $\Phi_T f = f$ alors pour tout g de $L^\infty(m)$ on a : $\int_0^1 f g dm = \int_0^1 f g \circ T dm$ en particulier pour $g = \mathbf{1}_A$, avec A dans \mathcal{B} on a

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)).$$

Si $\mu = fm$ est invariante par T , pour tout g de $L^\infty(m)$ on a :

$$\int_0^1 g \circ T d\mu = \int_0^1 g d\mu \quad \text{i.e. : } \int_0^1 f g \circ T dm = \int_0^1 f g dm \quad \text{d'où } \Phi_T f = f.$$

□

Remarque. — m est une mesure invariante par T si et seulement si $\Phi_T 1 = 1$.

Les conditions imposées aux transformations T de \mathcal{C} permettent une écriture explicite de Φ_T , pour m -presque tout x de I on a :

$$\Phi_T f(x) = \sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x),$$

où $\sigma_j : T(I_j) \rightarrow I_j$ est la réciproque de T restreinte à I_j . En effet, l'égalité de définition de Φ_T donne par changement de variables pour tout f de $L^1(m)$, pour tout g de $L^\infty(m)$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f \cdot g \circ T dm &= \sum_{j \in J} \int_{I_j} f \cdot g \circ T dm \\ &= \sum_{j \in J} \int_{T^{-1}(I_j)} f(\sigma_j y) g(y) \frac{1}{|T'(\sigma_j y)|} dm(y) \\ &= \sum_{j \in J} \int_I f(\sigma_j x) g(x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) dm(x) \\ &= \int_I \left[\sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) \right] g(x) dm(x) \end{aligned}$$

[par le théorème de la convergence monotone dans le cas d'une subdivision dénombrable et en découpant f en $f^+ - f^-$ avec f^+ et f^- positives.] D'où :

$$\Phi_T f(x) = \sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) \text{ } m\text{-p.p.}$$

Désormais on note Φ à la place de Φ_T et on définit pour tout x de I

$$\Phi f(x) = \sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x).$$

4 LE THÉORÈME DE IONESCU-TULCEA ET MARINESCU

4.1 Les hypothèses

Ce théorème permet de faire la décomposition spectrale de Φ et de montrer l'existence d'une mesure invariante pour T et absolument continue par rapport m . On énonce d'abord ses hypothèses.

Les hypothèses. — $(\mathfrak{V}, \|\cdot\|_{\mathfrak{V}})$ et $(\mathfrak{L}, \|\cdot\|_{\mathfrak{L}})$ sont deux espaces de Banach sur \mathbb{C} , \mathfrak{V} est contenu dans \mathfrak{L} , ils vérifient de plus l'hypothèse :

- (a) si $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments de \mathfrak{V} qui converge dans \mathfrak{L} vers f et si pour tout $n \geq 0$ $\|f_n\|_{\mathfrak{V}} \leq C$, alors f est dans \mathfrak{V} et on a $\|f\|_{\mathfrak{V}} \leq C$.

Φ est un opérateur de \mathfrak{L} dans \mathfrak{L} qui laisse stable \mathfrak{V} et qui est borné par rapport à la norme $\|\cdot\|_{\mathfrak{V}}$, il vérifie les conditions :

- (b) $\sup_{n \geq 0} \{\|\Phi^n f\|_{\mathfrak{L}}, f \in \mathfrak{V}, \|f\|_{\mathfrak{L}} \leq 1\} \leq H < \infty$.

- (c) Il existe $n_0 \geq 0, \alpha < 1$ et $\beta < \infty$ tels que :

$$\|\Phi^{n_0} f\|_{\mathfrak{V}} \leq \alpha \|f\|_{\mathfrak{V}} + \beta \|f\|_{\mathfrak{L}}.$$

- (d) si V est une partie bornée de $(\mathfrak{V}, \|\cdot\|_{\mathfrak{V}})$ alors $\Phi^{n_0} V$ est relativement compacte dans $(\mathfrak{L}, \|\cdot\|_{\mathfrak{L}})$.

Avant d'énoncer et de prouver le théorème de Marinescu et Ionescu-Tulcea, on remarque que :

Proposition 4.1. — Si T est dans \mathcal{C} , Φ vérifie les hypothèses (a), (b), (c) et (d).

Démonstration. — On prend pour \mathfrak{L} l'espace $L^1(m)$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ et pour \mathfrak{V} le sous espace de \mathfrak{L} constitué des fonctions dont la variation est finie, on le munit de la norme $\|f\|_v = v(f) + \|f\|_1$, c'est en fait $(V, \|\cdot\|_v)$.

(a) - On a $A = \{f \in L^1(m) : \|f\|_v \leq C\}$ est une partie compacte de $L^1(m)$. On le voit en remarquant que toute fonction à variation bornée peut être considérée comme

la fonction de répartition d'une mesure μ non nécessairement positive. On dispose de la convergence faible des mesures.

Soit $(\phi_n)_{n \geq 0}$ une suite de A on associe alors une suite de mesures $(\mu_n)_{n \geq 0}$ de variation totale bornée sur $[0, 1]$. Il existe donc une sous-suite de mesures $(\mu_{n_k})_{k \geq 0}$ qui converge faiblement vers μ . Soit $\phi(x) = \mu([0, x])$, comme l'ensemble des points de discontinuité de μ est dénombrable, on en déduit que $\phi_{n_k} \rightarrow \phi$ p.s. Les ϕ_n sont bornées on peut donc appliquer le théorème de Lebesgue et alors : $\phi_n \rightarrow \phi$ dans $L^1(m)$ et $\|\phi\|_v \leq C$, d'où la compacité de A dans $L^1(m)$.

Soit alors une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de points de A qui converge vers f un élément de $L^1(m)$ et telle que $\|f_n\|_v \leq C$. On a alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_1 = 0$ et $\|f_n\|_v \leq C$. Comme A est compacte dans $L^1(m)$ alors f est dans A , donc f est dans V et vérifie $\|f\|_v \leq C$.

(b) - Comme Φ est une contraction de $L^1(m)$, on a pour f dans V , $\|\Phi f\|_1 \leq \|f\|_1$ ainsi $\sup_{n \geq 0} \{\|\Phi^n f\|_1, f \in V, \|f\|_1 \leq 1\} \leq 1 < \infty$.

(c) - Pour démontrer la condition de Doeblin-Fortet, on s'inspire des travaux de Lasota et Yorke [L.Y] pour une transformation dilatante à subdivision finie.

On sait qu'il existe un entier $n_0 > 0$, tel que $\inf |(T^{n_0})'(x)| = \gamma > 2$. On considère alors la transformation T^{n_0} . L'opérateur de Perron-Frobenius associé est Φ^{n_0} , que l'on va écrire ainsi :

$$\Phi^{n_0} f(x) = \sum_{j \in J_{n_0}} f(\sigma_j x) \frac{1}{|(T^{n_0})'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T^{n_0}(\bar{I}_j)}(x).$$

où $(I_j)_{j \in J_{n_0}}$ est la partition associée à T^{n_0} , σ_j la réciproque de la restriction de T à I_j . Soit f un élément de V fixé, on calcule la variation de $\Phi^{n_0} f$:

$$\begin{aligned} v(\Phi^{n_0} f) &= v \left[\sum_{j \in J_{n_0}} \left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|} \right) \circ \sigma_j \cdot \mathbf{1}_{T^{n_0}(\bar{I}_j)} \right] \\ &\leq \sum_{j \in J_{n_0}} v \left[\left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|} \right) \circ \sigma_j \cdot \mathbf{1}_{T^{n_0}(\bar{I}_j)} \right]. \end{aligned}$$

On pose $T^{n_0}(\bar{I}_j) = [a_j, b_j]$. Comme $\left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|} \right) \circ \sigma_j$ est une fonction à variation bornée sur I , on en déduit que :

$$v \left[\left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|} \right) \circ \sigma_j \mathbf{1}_{[a_j, b_j]} \right] \leq v_{[a_j, b_j]} \left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|} \circ \sigma_j \right) + \left| \frac{f}{(T^{n_0})'}(\sigma_j a_j) \right| + \left| \frac{f}{(T^{n_0})'}(\sigma_j b_j) \right|$$

où $v_{[a_j, b_j]}(g)$ désigne la variation de la fonction g sur l'intervalle $[a_j, b_j]$. On a :

$$\left| \frac{f}{(T^{n_0})'}(\sigma_j a_j) \right| + \left| \frac{f}{(T^{n_0})'}(\sigma_j b_j) \right| \leq v_{[a_j, b_j]} \left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|} \circ \sigma_j \right) + 2 \inf_{x \in [a_j, b_j]} \left| \frac{f}{(T^{n_0})'}(\sigma_j x) \right|$$

et

$$\begin{aligned} \inf_{x \in [a_j, b_j]} \left| \frac{f}{(T^{n_0})'}(\sigma_j x) \right| &\leq \frac{1}{b_j - a_j} \int_{[a_j, b_j]} \left| \frac{f}{(T^{n_0})'}(\sigma_j x) \right| dm(x) \\ &\leq \frac{1}{m(T^{n_0}(\bar{I}_j))} \int_{\bar{I}_j} |f| dm \end{aligned}$$

par changement de variable.

D'après (3), on sait qu'il existe $\delta > 0$, tel que $\inf_{j \in J_{n_0}} m(T^{n_0}(\bar{I}_j)) = \delta > 0$. Donc :

$$v(\Phi^{n_0} f) \leq 2 \sum_{j \in J_{n_0}} v_{[a_j, b_j]} \left[\left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|} \right) \circ \sigma_j \right] + \frac{2}{\delta} \|f\|_1$$

On calcule maintenant

$$v_{[a_j, b_j]} \left[\left(\frac{f}{|(T^{n_0})'|} \right) \circ \sigma_j \right] = \sup_{\theta \in S_j} \sum_{\ell=1}^m \left| \frac{f}{|(T^{n_0})'|}(\sigma_j \theta_\ell) - \frac{f}{|(T^{n_0})'|}(\sigma_j \theta_{\ell-1}) \right|$$

où $\theta = (\theta_\ell)_{0 \leq \ell < m}$ est une subdivision finie de $[a_j, b_j]$.

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^m \left| \frac{f}{|(T^{n_0})'|}(\sigma_j \theta_\ell) - \frac{f}{|(T^{n_0})'|}(\sigma_j \theta_{\ell-1}) \right| \\ & \leq \sum_{\ell=1}^m |f(\sigma_j \theta_\ell) - f(\sigma_j \theta_{\ell-1})| \frac{1}{|(T^{n_0})'(\sigma_j \theta_\ell)|} \\ & + \sum_{\ell=1}^m |f(\sigma_j \theta_{\ell-1})| \left| \frac{1}{|(T^{n_0})'|}(\sigma_j \theta_\ell) - \frac{1}{|(T^{n_0})'|}(\sigma_j \theta_{\ell-1}) \right| \\ & \leq \sup_{1 \leq \ell \leq m} \left| \frac{1}{|(T^{n_0})'(\sigma_j \theta_\ell)|} \right| \sum_{\ell=1}^m |f \circ \sigma_j(\theta_\ell) - f \circ \sigma_j(\theta_{\ell-1})| \\ & + \sup_{1 \leq \ell \leq m} \left| \frac{\frac{1}{|(T^{n_0})'|}(\sigma_j \theta_\ell) - \frac{1}{|(T^{n_0})'|}(\sigma_j \theta_{\ell-1})}{\theta_\ell - \theta_{\ell-1}} \right| \\ & \cdot \sum_{\ell=1}^m |f \circ \sigma_j(\theta_{\ell-1})| \cdot |\theta_\ell - \theta_{\ell-1}|. \end{aligned}$$

On passe alors à la limite et on prend le supremum sur l'ensemble des subdivisions finies de $[a_j, b_j] : S_j$. Comme on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq \ell \leq m} \left| \frac{1}{|(T^{n_0})'(\sigma_j \theta_\ell)|} \right| \leq \sup \left| \frac{1}{|(T^{n_0})'(\sigma_j x)|} \right| \leq \frac{1}{\gamma} ; \\ c = & \sup_{1 \leq \ell \leq m} \left| \frac{\frac{1}{|(T^{n_0})'|}(\sigma_j \theta_\ell) - \frac{1}{|(T^{n_0})'|}(\sigma_j \theta_{\ell-1})}{\theta_\ell - \theta_{\ell-1}} \right| \\ & \leq \sup_{1 \leq \ell \leq m} \left| \frac{(T^{n_0})'(\sigma_j \theta_\ell) - (T^{n_0})'(\sigma_j \theta_{\ell-1})}{(\theta_\ell - \theta_{\ell-1})(T^{n_0})'(\sigma_j \theta_\ell)(T^{n_0})'(\sigma_j \theta_{\ell-1})} \right| \leq \frac{K}{\gamma^2} < \infty ; \\ & \sup_{S_j} \sum_{\ell=1}^m |f \circ \sigma_j(\theta_\ell) - f \circ \sigma_j(\theta_{\ell-1})| = v_{I_j}(f) ; \\ & \sup_{S_j} \sum_{\ell=1}^m |f \circ \sigma_j(\theta_{\ell-1})| \cdot |\theta_\ell - \theta_{\ell-1}| = \int_{I_j} |f| dm. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$v(\Phi^{n_0} f) \leq 2 \left(\frac{1}{\gamma} v(f) + \frac{K}{\gamma^2} \|f\|_1 \right) + \frac{2}{\delta} \|f\|_1.$$

Alors :

$$\|\Phi^{n_0} f\|_v \leq \alpha \|f\|_v + \beta \|f\|_1$$

avec $\alpha = \frac{2}{\gamma} < \frac{2}{2} = 1$ et $0 \leq \beta < \infty$.

On remarque ici que dans le cas d'une partition dénombrable, l'hypothèse (4) sur T est nécessaire. En fait, les hypothèses qu'on a prises pour les éléments de \mathcal{C} sont les plus faibles possibles pour faire la démonstration de la proposition 4.1 en suivant la méthode de Lasota et Yorke [L.Y] et sa généralisation donnée par Kowalski [Ko].

On remarque aussi que si pour tout j de J , $T^{n_0}[a_j, b_j] = I$, on a directement :

$$v(\Phi^{n_0} f) \leq \frac{1}{\gamma} v(f) + \frac{K}{\gamma^2} \|f\|_1.$$

(d) - Si V est une partie bornée de $(V, \|\cdot\|_v)$, comme Φ est un opérateur borné de V alors $\Phi^{n_0} V$ est une partie bornée de $(V, \|\cdot\|_v)$ donc de $(L^1(m), \|\cdot\|_1)$.

On en déduit alors que $\Phi^{n_0} V$ est une partie relativement compacte de $(V, \|\cdot\|_v)$ car d'après la preuve du (a) l'injection de $(V, \|\cdot\|_v)$ dans $(L^1(m), \|\cdot\|_1)$ est compacte. \square

4.2 Le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu

Théorème 4.2. — *Sous les hypothèses (a), (b), (c) et (d), Φ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1 : $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et Φ s'écrit alors :*

$$\Phi = \sum_{i=1}^p \lambda_i \Phi_i + \Psi.$$

Les Φ_i sont des opérateurs linéaires bornés de \mathcal{V} dans $\Phi_i(\mathcal{V})$ qui est de dimension finie et est contenu dans \mathcal{V} . Ψ est un opérateur linéaire borné de \mathcal{V} qui a un rayon spectral $\rho(\Psi) < 1$ dans $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$. De plus on a :

$$\Psi \Phi_i = \Phi_i \Psi = 0 \Phi_i \Phi_j = 0 \text{ si } i \neq j \Phi_i^2 = \Phi_i.$$

On peut alors écrire : $\Phi^n = \sum_{i=1}^p \lambda_i^n \Phi_i + \Psi^n$ pour tout $n > 0$.

Démonstration. — La démonstration donnée ici reprend celle de C. Ionescu-Tulcea et G. Marinescu dans [IT.M], on peut aussi se reporter au travail de H. Hennion dans [H]. Elle se fait en plusieurs étapes.

1ÈRE ÉTAPE : on démontre que Φ a un nombre fini de valeurs propres de module 1 et que les espaces propres associés sont de dimension finie.

Lemme 4.3. — *Soit $m \geq 1$ alors, $\|\Phi^{mn_0} f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha^m \|f\|_{\mathcal{V}} + L \|f\|_{\mathcal{E}}$.*

Démonstration. — D'après les hypothèses (b) et (c) pour tout entier m on a :

$$\|\Phi^m\|_{\mathcal{E}} \leq H < \infty \text{ donc } \|\Phi^m f\|_{\mathcal{E}} \leq H\|f\|_{\mathcal{E}} \text{ et } \|\Phi^{n_0} f\|_{\mathfrak{V}} \leq \alpha\|f\|_{\mathfrak{V}} + \beta\|f\|_{\mathcal{E}}.$$

Alors, pour $m \geq 1$, on a :

$$\|\Phi^{mn_0} f\|_{\mathfrak{V}} \leq \alpha\|\Phi^{(m-1)n_0} f\|_{\mathfrak{V}} + \beta\|\Phi^{(m-1)n_0} f\|_{\mathcal{E}} \leq \alpha\|\Phi^{(m-1)n_0} f\|_{\mathfrak{V}} + \beta H\|f\|_{\mathcal{E}}$$

par récurrence on obtient alors :

$$\|\Phi^{mn_0} f\|_{\mathfrak{V}} \leq \alpha^m\|f\|_{\mathfrak{V}} + \beta H(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1})\|f\|_{\mathcal{E}}.$$

Comme $0 < \alpha < 1$ on en déduit que $\beta H(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1}) \leq \frac{\beta H}{1-\alpha}$. \square

On en déduit alors le lemme 4.4.

Lemme 4.4. — *Les normes $(\|\Phi_1^n\|_{\mathfrak{V}})_{n \geq 1}$ sont uniformément bornées.*

Démonstration. — D'après le lemme 4.3 si $m \geq 0$, on a :

$$\|\Phi^{mn_0}\|_{\mathfrak{V}} \leq \alpha^m + L.$$

Comme Φ est un opérateur borné par rapport à la norme de \mathfrak{V} , il en est de même pour Φ^n , $n < n_0$, il existe donc $M > 0$ tel que, $\|\Phi^n\|_{\mathfrak{V}} \leq M < \infty$ pour $n < n_0$. D'où $\{\|\Phi^n\|_{\mathfrak{V}}\}_{n \geq 0}$ est uniformément bornée. \square

On note pour tout λ de \mathbb{C} ,

$$\mathfrak{V}(\lambda) = \{f \in \mathfrak{V} : \Phi f = \lambda f\}$$

c'est l'espace propre associé à λ , si $\mathfrak{V}(\lambda) \neq \{0\}$ alors λ est une valeur propre de Φ .

Lemme 4.5. — *$\mathfrak{V}(\lambda)$ est de dimension finie si $|\lambda| = 1$.*

Démonstration. — Pour cela, on montre que $X = \mathfrak{V}(\lambda) \cap \{f \in \mathfrak{V} : \|f\|_{\mathcal{E}} \leq 1\}$ est compact. Soit f dans X , on a donc $\|f\|_{\mathcal{E}} \leq 1$ et $\Phi f = \lambda f$. Alors on a :

$$\|\Phi^{n_0} f\|_{\mathfrak{V}} = \|\lambda^{n_0} f\|_{\mathfrak{V}} = \|f\|_{\mathfrak{V}} \leq \alpha\|f\|_{\mathfrak{V}} + \beta\|f\|_{\mathcal{E}} \leq \alpha\|f\|_{\mathfrak{V}} + \beta.$$

Comme $0 < \alpha < 1$ alors on a $\|f\|_{\mathfrak{V}} \leq \frac{\beta}{1-\alpha}$. X est donc une partie bornée de \mathfrak{V} , par (d) elle est transformée en une partie compacte de \mathcal{L} par Φ^{n_0} . Mais X est invariant par Φ^{n_0} . X est donc une partie compacte de \mathcal{L} donc $\dim \mathfrak{V}(\lambda)$ est finie. \square

Lemme 4.6. — *Φ n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1.*

Démonstration. — Dans le cas contraire, il existerait une suite infinie de valeurs propres distinctes de module 1 : $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Pour tout n , on choisit f_n dans $\mathfrak{V}(\lambda_n)$, $f_n \neq 0$. Les $(f_n)_{n \geq 0}$ sont linéairement indépendants (dans \mathcal{L} comme dans \mathfrak{V}). On note $X(n) = \text{vect}\{f_1, \dots, f_n\}$. $X(n)$ est strictement inclus dans $X(n+1)$. Le lemme de F. Riesz prouve alors l'existence d'une suite g_1, \dots, g_n, \dots telle que $\|g_n\|_{\mathcal{E}} = 1$ et $\|g_n - f\|_{\mathcal{E}} \geq \frac{1}{2}$ où f est dans $X(n-1)$ et g_n dans $X(n)$. Si une

fonction f est dans $X(n)$, elle s'écrit : $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i$, alors $\Phi^m(f)$ vaut $\sum_{i=1}^n \lambda_i^m a_i f_i$ et est dans $X(n)$. Si f est dans $X(m)$ alors pour tout entier $p > 0$, $\frac{1}{\lambda_m^p} \Phi^p(f) - f$ est dans $X(m-1)$. En effet

$$\frac{1}{\lambda_m^p} \Phi^p f - f = \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^p f - \sum_{i=1}^m a_i f_i = \sum_{i=1}^{m-1} a_i \left(\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^p - 1\right) f_i.$$

Pour $n \geq n_0$, on a :

$$\left\| \frac{1}{\lambda_j^n} \Phi^n g_j \right\|_{\mathcal{V}} = \|\Phi^n g_j\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha^{k(n)} \|g_j\|_{\mathcal{V}} + L \|g_j\|_{\mathcal{L}} = \alpha^{k(n)} \|g_j\|_{\mathcal{V}} + L.$$

Comme $0 < \alpha < 1$, il existe alors $n(j) > 0$ tel que pour tout $n \geq n(j)$ et $n \geq n_0$,

$$\alpha^{k(n)} \|g_j\|_{\mathcal{V}} \leq 1.$$

On en déduit que l'ensemble $\left\{ \frac{1}{\lambda_j^n} \Phi^n g_j, j \in \mathbb{N}^*, n \geq \sup\{n(j), n_0\} \right\}$ est la transformée par Φ^{n_0} d'une partie bornée de \mathcal{V} , d'après (4) c'est donc une partie compacte de \mathcal{L} , il existe donc deux sous-suites (j_s) et (n_s) croissantes de (j) et (n) telles que la suite $\left(\frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}} \Phi^{n_s} g_{j_s}\right)_{s>0}$ converge dans \mathcal{L} . Mais :

$$\begin{aligned} D &= \left\| \frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}} \Phi^{n_s} g_{j_s} - \frac{1}{\lambda_{j_{s+1}}^{n_{s+1}}} \Phi^{n_{s+1}} g_{j_{s+1}} \right\|_{\mathcal{L}} \\ D &= \left\| g_{j_{s+1}} + \left(\frac{1}{\lambda_{j_{s+1}}^{n_{s+1}}} \Phi^{n_{s+1}} g_{j_{s+1}} - g_{j_{s+1}} - \frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}} \Phi^{n_s} g_{j_s} \right) \right\|_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{\lambda_{j_{s+1}}^{n_{s+1}}} \Phi^{n_{s+1}} g_{j_{s+1}} - g_{j_{s+1}}$ est dans $X(j_{s+1}-1)$ et comme $\frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}} \Phi^{n_s} g_{j_s}$ est dans $X(j_s)$ qui est contenu dans $X(j_{s+1}-1)$ on en déduit que $D \geq \frac{1}{2}$ par hypothèse sur la suite $(g_n)_{n \geq 0}$. Ceci contredit le fait que $\left(\frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}} \Phi^{n_s} g_{j_s}\right)$ converge dans \mathcal{L} et donc il existe un nombre fini de valeurs propres de module 1. \square

2ÈME ÉTAPE : On construit les opérateurs Φ_λ .

Lemme 4.7. — *Quelque soit le nombre complexe λ de module 1, quelque soit f dans \mathcal{V} , il existe \bar{f} dans \mathcal{V} tel que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k f - \bar{f} \right\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

Démonstration. — Soit $\bar{\mathcal{V}} = \{f \in \mathcal{L} : \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_{\mathcal{L}} = 0 \text{ avec } (g_n)_{n>0} \text{ une suite de } \mathcal{V}\}$, $\bar{\mathcal{V}}$ est un espace de Banach quand on le munit de la norme $\|\cdot\|_{\bar{\mathcal{V}}}$ qui est la restriction à $\bar{\mathcal{V}}$ de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$. L'opérateur Φ préserve l'espace $\bar{\mathcal{V}}$ et il existe $H > 0$, tel que pour tout entier $m \geq 1$, on ait $\|\Phi^m\|_{\mathcal{L}} \leq H$, par le théorème de Hahn-Banach

il existe un prolongement $\hat{\Phi}$ de Φ à $\overline{\mathcal{V}}$ qui vérifie pour tout f de \mathcal{V} , pour tout entier $m > 0$:

$$\hat{\Phi}^m f = \Phi^m f \text{ et } \|\hat{\Phi}^m\|_{\overline{\mathcal{V}}} \leq H.$$

Le lemme 4.4 entraîne que les normes $\|\Phi^m\|_{\mathcal{V}}$ $m \geq 1$ sont uniformément bornées par $M = \sup_{1 \leq m < \infty} \|\Phi^m\|_{\mathcal{V}}$. Pour f dans \mathcal{V} , on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{k+n_0}} \hat{\Phi}^k f \right\|_{\mathcal{V}} &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|\hat{\Phi}^k f\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{n-1}{n} M \|f\|_{\mathcal{V}} + \frac{1}{n} \|f\|_{\mathcal{V}} \\ &\leq \begin{cases} \|f\|_{\mathcal{V}} & \text{si } M \leq 1 \\ M \|f\|_{\mathcal{V}} & \text{si } M > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{k+n_0}} \hat{\Phi}^k f, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est une partie bornée de \mathcal{V} par (d) elle est transformée par Φ^{n_0} en une partie compacte de \mathcal{L} . C'est

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k f, n > 0 \right\}.$$

On peut donc en extraire une sous-suite convergente dans \mathcal{L} donc dans $\overline{\mathcal{V}}$. Il existe donc une suite $(n_p)_p$ strictement croissante d'entiers et une fonction \overline{f} de $\overline{\mathcal{V}}$ telle que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n_p} \sum_{k=n_0}^{n_p+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k(f) - \overline{f} \right\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

On montre maintenant que \overline{f} est dans \mathcal{V} , on observe que :

$$\left\| \frac{1}{n_p} \sum_{k=n_0}^{n_0+n_p-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k f \right\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{n_p} \sum_{k=n_0}^{n_0+n_p-1} \|\Phi^k f\|_{\mathcal{V}} \leq M \|f\|_{\mathcal{V}}.$$

\overline{f} est donc limite dans \mathcal{L} d'une suite de points de \mathcal{V} qui sont bornés par $M \|f\|_{\mathcal{V}}$ dans \mathcal{V} , l'hypothèse (a) permet de conclure que \overline{f} est dans \mathcal{V} et $\|\overline{f}\|_{\mathcal{V}} \leq M \|f\|_{\mathcal{V}}$.

En fait, on montre que la suite $f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k f$ converge aussi dans \mathcal{L} et donc dans $\overline{\mathcal{V}}$ vers \overline{f} , on remarque d'abord que :

$$\Phi \overline{f} = \lambda \overline{f}.$$

En effet, on a :

$$\|\Phi f_{n_p} - \lambda f_{n_p}\|_{\mathcal{L}} = \left\| \frac{1}{n_p} \left(\sum_{k=n_0}^{n_0+n_p-1} \frac{\Phi^{k+1} f}{\lambda^k} - \sum_{k=n_0}^{n_0+n_p-1} \frac{\Phi^k f}{\lambda^{k-1}} \right) \right\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{2}{n_p} \|f\|_{\mathcal{L}}.$$

On montre ensuite que la suite f_n converge dans $\overline{\mathcal{V}}$ vers \overline{f} , on a :

$$f = \overline{f} + (f - \overline{f}).$$

Alors :

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k [\bar{f} + (f - \bar{f})] = \bar{f} + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k (f - \bar{f}).$$

Il suffit donc de montrer que la suite $\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k (f - \bar{f})$ converge dans $\bar{\mathcal{V}}$ vers 0 pour conclure. On remarque que la suite :

$$\left[I - \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k \right] f = \left(I - \frac{\Phi}{\lambda} \right) \left[I + \frac{\Phi}{\lambda} + \dots + \frac{\Phi^{n_0-1}}{\lambda^{n_0-1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} \frac{\Phi^{n_0+k-1}}{\lambda^{n_0+k-1}} \right] f$$

converge vers $f - \bar{f}$ dans $\bar{\mathcal{V}}$, on en déduit donc que : $f - \bar{f}$ est dans la fermeture de $\text{Im}(I - \frac{\Phi}{\lambda})$ prise dans $\bar{\mathcal{V}}$. Il suffit donc de montrer que pour tout g de cet ensemble, la suite $g_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k (g)$ converge vers 0. D'abord, si g est dans $\text{Im}(I - \frac{\Phi}{\lambda})$, il existe z dans \mathcal{V} tel que $g = (I - \frac{\Phi}{\lambda})z$. Alors :

$$\|g_n\|_{\mathcal{E}} = \frac{1}{n} \left\| \frac{1}{\lambda^{n_0}} \Phi^{n_0} z - \frac{1}{\lambda^{n_0+n-1}} \Phi^{n_0+n-1} z \right\|_{\mathcal{E}} \leq \frac{2}{n} \|z\|_{\mathcal{E}}.$$

Maintenant si g est dans la fermeture de $\text{Im}(I - \frac{\Phi}{\lambda})$, il existe $g' = (I - \frac{\Phi}{\lambda})z$, z dans \mathcal{V} tel que $\|g - g'\|_{\mathcal{E}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors :

$$\|g_n\|_{\mathcal{E}} = \left\| \frac{1}{n} \left(\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{\Phi^k}{\lambda^k} (g - g') + \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{\Phi^k}{\lambda^k} (g') \right) \right\|_{\mathcal{E}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{n} \|z\|_{\mathcal{E}}.$$

Cette suite tend vers 0, ce qui termine la démonstration. \square

On peut alors poser pour tout f de \mathcal{V} , $\bar{f} = \Phi_{\lambda} f$, Φ_{λ} est un opérateur linéaire, il envoie \mathcal{V} dans $\Phi_{\lambda}(\mathcal{V})$ qui est contenu dans \mathcal{V} . L'inégalité $\|\bar{f}\|_{\mathcal{V}} \leq M \|f\|_{\mathcal{V}}$ entraîne alors que

$$\|\Phi_{\lambda}\|_{\mathcal{V}} \leq M \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1.$$

On a aussi, pour tout n :

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{\Phi^k f}{\lambda^k} \right\|_{\mathcal{E}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \|\Phi^k f\|_{\mathcal{E}} \leq H \|f\|_{\mathcal{E}},$$

on a donc :

$$\|\Phi_{\lambda} f\|_{\mathcal{E}} \leq H \|f\|_{\mathcal{E}} \text{ et donc } \|\Phi_{\lambda}\|_{\mathcal{E}} \leq H.$$

3ÈME ÉTAPE : On démontre les dernières assertions du théorème.

Lemme 4.8. — *L'image de \mathcal{V} par Φ_{λ} est $\mathcal{V}(\lambda)$.*

Démonstration. — Soit f dans $\mathfrak{V}(\lambda)$, on a : $\Phi^k f = \lambda^k f, k \geq 1$. Alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k f = \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} f = f \Rightarrow \Phi_\lambda f = f.$$

Ainsi $\mathfrak{V}(\lambda)$ est contenu dans $\Phi_\lambda(\mathfrak{V})$. Soit f dans $\Phi_\lambda(\mathfrak{V})$ alors il existe g dans \mathfrak{V} tel que $f = \Phi_\lambda g$ pour tout $n > 0$ on a :

$$\begin{aligned} \Phi \left[\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k(g) \right] &= \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^{k+1}(g) \\ &= \frac{n+1}{n} \lambda \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0}^{n_0+n} \frac{1}{\lambda^k} \Phi^k(g) - \frac{1}{n} \frac{1}{\lambda^{n_0-1}} \Phi^{n_0} g. \end{aligned}$$

On passe alors à la limite dans \mathfrak{L} , on obtient : $\Phi_\lambda f = \lambda f$. On en déduit alors que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$, non valeur propre de Φ , $\Phi_\lambda = 0$. \square

Lemme 4.9. — Soit λ une valeur propre de module 1 de Φ alors $\Phi_\lambda^2 = \Phi_\lambda$.

Démonstration. — Soit f dans \mathfrak{V} alors $\Phi_\lambda f$ est dans $\mathfrak{V}(\lambda)$ comme si f est dans $\mathfrak{V}(\lambda)$ on a : $\Phi_\lambda f = f$ on en déduit alors que $\Phi_\lambda^2 f = \Phi_\lambda f$. Φ_λ est donc une projection de \mathfrak{V} sur $\mathfrak{V}(\lambda)$. \square

Lemme 4.10. — Si μ et λ sont distinctes alors $\Phi_\lambda \Phi_\mu = 0$.

Démonstration. — Si f est dans \mathfrak{V} , alors $\Phi_\mu f$ est dans $\mathfrak{V}(\mu)$, ce qui entraîne que $\Phi_\lambda \Phi_\mu f$ est dans $\mathfrak{V}(\mu) \cap \mathfrak{V}(\lambda) = \{0\}$. On peut alors décomposer \mathfrak{V} en :

$$\mathfrak{V} = \oplus_{i=1}^p \mathfrak{V}(\lambda_i) \oplus \mathfrak{W}.$$

On note maintenant Φ_i à la place de Φ_{λ_i} . Les Φ_i sont des projections de \mathfrak{V} dans $\mathfrak{V}(\lambda_i)$ qui sont de dimension finie. Une fonction f de \mathfrak{V} s'écrit alors de façon unique

$$f = \Phi_1 f + \dots + \Phi_p f + g \text{ où } g \text{ appartient à } \mathfrak{W}.$$

Alors pour tout $m > 0$ on a :

$$\Phi^m f = \lambda_1^m \Phi_1 f + \dots + \lambda_p^m \Phi_p f + \Phi^m g,$$

en effet : si on note σ la projection de \mathfrak{V} sur \mathfrak{W} , on pose $\Psi f = \Phi g = \Phi \sigma f = \sigma \Phi f$. On a $\sigma \Psi = \Psi$ car Ψ préserve l'espace \mathfrak{W} . On a donc : $\Phi^m \sigma = \Psi^m$ ce qui entraîne $\Psi \Phi_i = \Phi_i \Psi = 0$ car $\mathfrak{V}(\lambda_i) \cap \mathfrak{W} = \{0\}$. Par construction, Ψ n'a pas de valeur propre de module 1 dans \mathfrak{V} . C'est un opérateur borné de \mathfrak{V} et de \mathfrak{L} on a :

$$\|\Psi^m\|_{\mathfrak{L}} = \|\Phi^m - \lambda_1^m \Phi_1 - \dots - \lambda_p^m \Phi_p\|_{\mathfrak{L}} \leq \|\Phi^m\|_{\mathfrak{L}} + \|\Phi_1\|_{\mathfrak{L}} + \dots + \|\Phi_p\|_{\mathfrak{L}},$$

d'où $\|\Psi^m\|_{\mathfrak{L}} \leq (p+1)M$. De même on a : $\|\Psi^m\|_{\mathfrak{V}} \leq (p+1)H$. Ainsi $\Psi(\mathfrak{V})$ est contenu dans \mathfrak{V} et Ψ a un rayon spectral $\rho(\Psi) < 1$ dans $(\mathfrak{V}, \|\cdot\|_{\mathfrak{V}})$. \square

4.3 Conséquences

D'après la proposition 4.1, on peut appliquer ce théorème à Φ . On s'intéresse à la valeur $\lambda = 1$, on définit alors $h = \Phi_1(1)$. Comme la fonction 1 est un élément de V , d'après la démonstration du théorème (2ème étape) on sait que h est dans V , il reste à montrer que h n'est pas nulle. On a $\int_0^1 h dm = 1$. En effet h est définie comme la limite dans \mathcal{V} des fonctions $h_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \Phi^k(1)$. La propriété (iv) de l'opérateur de Perron-Frobenius entraîne que pour tout $n > 0$,

$$\int_0^1 h_n dm = \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \int_0^1 \Phi^k(1) dm = 1.$$

Comme h est dans V donc dans $L^1(m)$, on en déduit alors que $\int_0^1 h dm = 1$ donc que h n'est pas nulle. Par construction h est positive d'après (ii) et (iv). On en déduit alors que Φ admet 1 pour valeur propre et qu'une fonction propre associée est h .

4.4 Exemples et remarques

Exemples. —

- La transformation « fraction continue » :

$$\text{sur }]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[, \text{ on a : } Tx = \frac{1}{x} - n.$$

La réciproque vaut donc :

$$\sigma_n x = \frac{1}{x+n} \text{ et } \sigma'_n x = \frac{-1}{(x+n)^2}.$$

L'opérateur Φ vaut alors :

$$\Phi f(x) = \sum_{n \geq 1} f\left(\frac{1}{x+n}\right) \frac{1}{(x+n)^2} \text{ et } h(x) = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{1+x}$$

car $\int_0^1 h(x) dx = 1$ et on vérifie aisément que :

$$\Phi h(x) = \frac{1}{\log 2} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{1+x}.$$

- Dans le cas d'une transformation linéaire par morceaux et vérifiant $T(\overline{I_j}) = I_j$, on a $h = 1$ et m est T -invariante.
- Pour les β -transformations, si $\beta \in \mathbb{N}$ et $\alpha = 0$, $\Phi f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\beta-1} f\left(\frac{x+k}{\beta}\right)$ et $\Phi 1 = 1$ donc $h = 1$.

Remarque 1. — La fonction h n'est pas obligatoirement strictement positive, par exemple si on prend $Tx = \beta x + \alpha[1]$, $\beta^2 = \beta + 1$, $\beta > 0$ et $\alpha = \frac{3-\beta}{2}$. On a :

$$h = \frac{1}{5}(3 + 4\beta)(\mathbf{1}_{[0, (2-\beta)/2[} + \mathbf{1}_{[\beta/2, 1[}) + \frac{1}{5}(3\beta + 1)(\mathbf{1}_{[(2-\beta)/2, (\beta-1)/2[} + \mathbf{1}_{[\alpha, \beta/2[}).$$

On a ainsi construit une mesure hm absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue mais non nécessairement équivalente à m tel que (T, hm) soit un système dynamique.

Remarque 2. — Dans le cas où la partition est finie, G. Keller [Ke] a montré que $\{h \neq 0\}$ est une réunion finie d'intervalles ouverts et qu'il existe $D > 0$ tel que sur $\{h \neq 0\}$, on a :

$$1/D \leq h(x) \leq D.$$

L'hypothèse de partition finie est capitale et la démonstration de Keller [Ke] ne peut pas être généralisée au cas dénombrable. Cela tient essentiellement au fait suivant : si $\{x_n, n \in \mathcal{D}\}$ est une famille dénombrable de réels strictement positifs alors $a = \inf_{n \in \mathcal{D}} x_n$ est positif ou nul tandis que dans le cas d'une famille finie il est strictement positif.

Un élément T de \mathcal{C} sera dit markovien s'il vérifie de plus la condition suivante :

Dans le cas d'une partition finie :

(5f) Pour tout $j \in J$, il existe $K_j \subset J$ tel que $T(\bar{I}_j) = \cup_{k \in K_j} \bar{I}_k$ et il existe un entier $p > 0$ tel que pour tout $j \in J$, $T^p(\bar{I}_j) = I$.

Dans le cas d'une partition dénombrable :

(5d) Pour tout $j \in J$, $T(\bar{I}_j) = I$.

Dans le cadre markovien le "folklore theorem" donne des résultats analogues à celui de Keller :

Théorème. — Si $T \in \mathcal{C}$ est markovien, alors T admet une mesure invariante hm équivalente à la mesure de Lebesgue et ergodique. De plus la densité h est continue par morceaux les discontinuités ont lieu uniquement aux points de séparation de la partition et il existe $D > 0$ tel que :

$$\frac{1}{D} \leq h(x) \leq D.$$

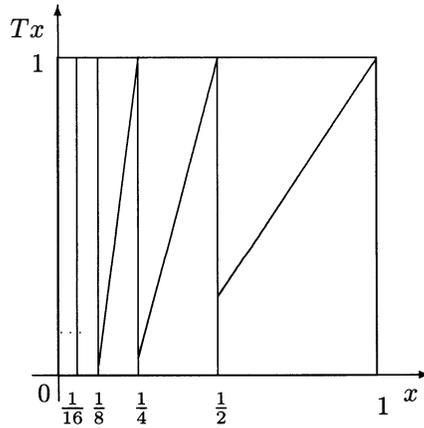
La démonstration est donnée dans [A.F] dans le cas d'une partition finie et dans [M.P.V] dans le cas d'une partition dénombrable.

Si on remplace la condition (5d) par la condition (5d') suivante :

(5d') L'ensemble $\{T(\bar{I}_j), j \in J\}$ est constitué d'un nombre fini d'intervalles distincts et $\{T(a_j) : j \in J\}$ est contenu dans $\{a_j : j \in J\}$.

Si on suppose que le système (T, hm) est mélangeant et que le support de h est I , alors la fonction $\frac{1}{h}$ est à variation bornée. Ce dernier résultat a été montré par Morita dans [Mo].

Remarque 3. — Dans le cas d'une partition finie comme dans le cas markovien, la fonction $\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h \neq 0\}}$ est dans V , on peut donc normaliser l'opérateur Φ ou éventuellement sa restriction à $\{h \neq 0\}$ en posant $Pg = \frac{\Phi(gh)}{h}$, ce qui simplifie les calculs car P est markovien. Cependant dans \mathcal{C} il existe des éléments tels que $\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h \neq 0\}}$ n'appartient pas à V . On va maintenant en donner un exemple qui montre bien que l'hypothèse (3) suffit pour que l'hypothèse $\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h \neq 0\}}$ est à variation bornée ne soit pas réalisée. Cet exemple est capital ici, car il justifie aussi la façon dont seront menées les démonstrations dans toute la suite : on ne normalisera pas l'opérateur Φ pour qu'il devienne markovien. Cet exemple vérifie aussi l'hypothèse (3') et alors les théorèmes limites central et local sont vérifiés pour cette transformation. On prend la transformation T linéaire par morceaux suivante :



$$\text{si } x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right], Tx = a_n x + b_n, n > 0$$

$$\text{avec } a_n = 2^n - \frac{1}{2^n} \text{ et } b_n = \frac{2}{4^n} - 1.$$

T envoie l'intervalle $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ dans $[\frac{1}{4^n}, 1]$. L'opérateur de Perron-Frobenius associé à T est :

$$\Phi f(x) = \sum_{n>0} f\left(\frac{x - b_n}{a_n}\right) \frac{1}{a_n} \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^n}, 1]}(x).$$

T est bien dans \mathcal{C} et donc il existe h dans V , h positive et d'intégrale 1 telle que $\Phi h = h$, h est la limite dans V de la suite

$$h_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Phi^k \mathbf{1}.$$

On a :

$$\Phi \mathbf{1}(x) = \sum_{n>0} \frac{1}{a_n} \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^n}, 1]}(x).$$

On remarque que :

$$\mathbf{1}_{[\frac{1}{4^n}, 1]}(x) = \sum_{k=1}^{2n} \mathbf{1}_{[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}]}(x),$$

ce qui prouve d'ailleurs que T est dans \mathcal{C}' , on a donc :

$$\begin{aligned} \Phi \mathbf{1}_{[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}]}(x) &= \sum_{n>0} \frac{1}{a_n} \mathbf{1}_{[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}]} \left(\frac{x - b_n}{a_n} \right) \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^n}, 1]}(x) \\ &= \sum_{n>0} \frac{1}{a_n} \mathbf{1}_{[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}] \cap [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]} \left(\frac{x - b_n}{a_n} \right) \\ &= \frac{1}{a_k} \mathbf{1}_{[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}]} \left(\frac{x - b_k}{a_k} \right) = \frac{1}{a_k} \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^k}, 1]}(x). \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\Phi^2 \mathbf{1}(x) = \sum_{k_1>0} \sum_{k_2=1}^{2k_1} \frac{1}{a_{k_1} a_{k_2}} \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^{k_2}}, 1]}(x).$$

Par récurrence, on obtient alors pour tout entier $\ell > 0$,

$$\Phi^\ell \mathbf{1}(x) = \sum_{k_1>0} \sum_{k_2=1}^{2k_1} \cdots \sum_{k_\ell=1}^{2k_{\ell-1}} \frac{1}{a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_\ell}} \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^{k_\ell}}, 1]}(x).$$

Ce que l'on peut aussi écrire en utilisant le théorème de Fubini :

$$\Phi^\ell \mathbf{1}(x) = \sum_{k_\ell>0} \sum_{k_{\ell-1} \geq \frac{k_\ell}{2}} \sum_{k_{\ell-2} \geq \frac{k_{\ell-1}}{2}} \cdots \sum_{k_1 \geq \frac{k_2}{2}} \frac{1}{a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_\ell}} \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^{k_\ell}}, 1]}(x),$$

ou encore :

$$\Phi^\ell \mathbf{1}(x) = \sum_{k_1>0} \sum_{k_2 \geq \frac{k_1}{2}} \sum_{k_3 \geq \frac{k_2}{2}} \cdots \sum_{k_\ell \geq \frac{k_{\ell-1}}{2}} \frac{1}{a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_\ell}} \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^{k_1}}, 1]}(x).$$

Ainsi :

$$h_n(x) = \sum_{k>0} p_k(n) \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^k}, 1]}(x),$$

avec

$$p_k(n) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{k_2 \geq \frac{k}{2}} \sum_{k_3 \geq \frac{k_2}{2}} \cdots \sum_{k_\ell \geq \frac{k_{\ell-1}}{2}} \frac{1}{a_{k_2} a_{k_3} \cdots a_{k_\ell}} \right).$$

On remarque que les $p_k(n)$ sont strictement positifs car les a_k le sont. On peut donc chercher h sous la forme :

$$h(x) = \sum_{k>0} p_k \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^k}, 1]}(x) \text{ avec } p_k = \lim_{n \rightarrow \infty} p_k(n) \geq 0.$$

p_k existe bien car la fonction h existe dans V , on en déduit aussi que la série $\sum_{k>0} p_k$ est finie, c'est la valeur de h sur l'intervalle $[\frac{1}{4}, 1]$. Comme $\Phi h = h$, on a :

$$\Phi h(x) = \sum_{k>0} p_k \sum_{\ell=1}^{2k} \frac{1}{a_\ell} \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^\ell}, 1]}(x) = \sum_{\ell>0} \sum_{k \geq \frac{\ell}{2}} \frac{p_k}{a_\ell} \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^\ell}, 1]}(x) = \sum_{\ell>0} p_\ell \mathbf{1}_{[\frac{1}{4^\ell}, 1]}(x) = h(x).$$

Ainsi on a pour tout $\ell > 0$:

$$p_\ell = \sum_{k \geq \frac{\ell}{2}} \frac{p_k}{a_\ell} = \frac{1}{a_\ell} \sum_{k \geq \frac{\ell}{2}} p_k.$$

Comme la suite des a_ℓ est croissante et comme les p_k sont positifs ou nuls, on en déduit alors que les p_k forment une suite positive décroissante elle est donc convergente vers 0 car la somme $\sum_{k>0} p_k$ est finie. On montre maintenant que les p_k ne sont pas nuls, on suppose le contraire : il existe donc un plus petit entier $\ell > 0$ tel que $p_\ell = 0$, la relation précédente entraîne alors que :

$$p_\ell = \frac{1}{a_\ell} \sum_{k \geq \frac{\ell}{2}} p_k = 0$$

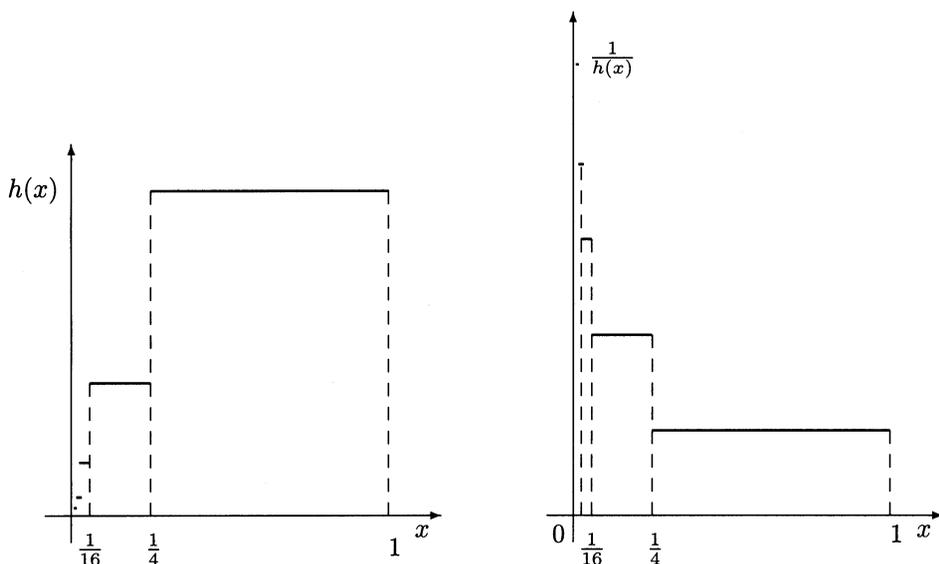
et donc :

$$p_{[\frac{\ell+1}{2}]} = \dots = p_{\ell-1} = 0,$$

ce qui contredit le fait que ℓ soit le plus petit possible, ainsi p_ℓ est strictement positif. On en déduit que pour tout x non nul de I , $h(x)$ n'est pas nul en effet il existe un entier n_x tel que x soit dans l'intervalle $[4^{-n_x}, 4^{-(n_x-1)}]$ et alors $h(x) = \sum_{k \geq n_x} p_k$. Cette dernière égalité montre alors que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0.$$

D'autre part, comme 0 n'est dans aucun des intervalles $[\frac{1}{4^n}, 1]$, on a $h(0) = 0$ et donc $\frac{1}{h} \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}}$ n'est pas dans V car h est continue et s'annule en 0.



On rappelle ici que T est dans \mathcal{C}' , les théorèmes limites central et local sont donc vérifiés pour cette transformation.

4.5 Hypothèse sur le système (I, \mathcal{B}, T, hm)

Dans toute la suite, on suppose que 1 est une valeur propre simple de Φ . Tant que l'on ne le précisera pas (jusqu'au théorème limite local), on suppose que T est dans \mathcal{C} et non pas dans \mathcal{C}' .

Alors le système (I, \mathcal{B}, T, hm) est ergodique. On en déduit :

Proposition 4.11. — *Les autres valeurs propres de module 1 de Φ sont toutes simples et sont des racines p -ièmes de l'unité. De plus, il existe une fonction v de $L^2(hm)$ de module 1 sur I telle que pour tout $0 < j < p$, $v^j h$ est dans V , $v^p \equiv 1$ et $\Phi(v^j h) = \lambda^j v^j h$ où $\lambda = e^{2i\pi/p}$.*

La décomposition spectrale de Φ donnée par le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu peut alors s'écrire, pour f dans V et pour $k > 0$,

$$\Phi^k(f) = \Phi_0(f) + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda^{jk} \Phi_j(f) + \Psi^k(f)$$

où Φ_j est la projection de V sur l'espace $\mathbb{C}v^j h$.

Démonstration. — D'abord on montre que s'il existe u non nul dans V tel que $\Phi u = \lambda u$, avec λ de module 1, distinct de 1 alors il existe v dans $L^2(hm)$ ne s'annulant pas sur I tel que $u = vh$. En effet $|\Phi u| = |u|$, mais d'après (ii) $|\Phi u| \leq \Phi|u|$ donc

A. BROISE

$\Phi|u| \geq |u| \geq 0$. D'après (iv) $\int_0^1 \Phi|u|dm = \int_0^1 |u|dm$. Ainsi $\Phi|u| = |u|$ m -p.p. donc on a $\Phi|u| = |u|$ dans V , comme 1 est valeur propre simple de Φ associée à h , on en déduit que $|u| = kh$ où k est une constante positive, qu'on peut toujours choisir égale à 1. On peut donc écrire $u = vh$, v est une fonction de module 1 de $L^2(hm)$ avec vh dans V et on a :

$$\Phi(vh) = \lambda vh.$$

Sur $\{h \neq 0\}$, on peut poser $P(v) = \frac{\Phi(vh)}{h}$. P admet T pour adjoint dans $L^2(hm)$ et est une contraction de $L^2(hm)$, en effet, si on note $\langle v, w \rangle_{hm}$ le produit scalaire de $L^2(hm)$:

$$\begin{aligned} \langle Pv, w \rangle_{hm} &= \int_0^1 \Phi(vh) \cdot w dm = \int_0^1 v \cdot w \circ Th dm = \langle v, w \circ T \rangle_{hm} \\ \|Pv\|_{2,hm} &= \sup_{\|w\|_{2,hm} \leq 1} |\langle Pv, w \rangle_{hm}|. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} |\langle Pv, w \rangle_{hm}| &= \left| \int_0^1 \Phi(vh) w dm \right| = \left| \int_0^1 v \cdot w \circ Th dm \right| \leq \int_0^1 |v \cdot w \circ T| h dm \\ &\leq \left[\int_0^1 v^2 h dm \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 w^2 \circ Th dm \right]^{\frac{1}{2}} = \|v\|_{2,hm} \|w\|_{2,hm}, \end{aligned}$$

on a donc :

$$\|Pv\|_{2,hm} \leq \|v\|_{2,hm}.$$

Soit, maintenant, $\lambda \neq 1$ une valeur propre de module 1 de Φ . Il existe donc v dans $L^2(hm)$, ne s'annulant pas sur I et vh dans V qui vérifie :

$$\Phi(vh) = \lambda vh \text{ donc } Pv = \lambda v,$$

λ est donc une valeur propre de module 1 de P . v est un point fixe de l'opérateur $\frac{P}{\lambda}$ qui est une contraction de $L^2(hm)$ car $|\lambda| = 1$. Son adjoint dans $L^2(hm)$ est λT , en effet :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{P}{\lambda} v, w \right\rangle_{hm} &= \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \Phi(vh) w dm = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 v \cdot w \circ Th dm \\ &= \frac{1}{\lambda} \langle v, w \circ T \rangle_{hm} = \langle v, \frac{1}{\lambda} w \circ T \rangle_{hm} \end{aligned}$$

et $\lambda \bar{\lambda} = 1$ d'où $\frac{1}{\lambda} = \bar{\lambda}$. Dans un espace de Hilbert, les points fixes d'une contraction sont ceux de son adjoint. Ainsi

$$\lambda v \circ T = v.$$

Si v_1 est dans V et vérifie aussi $\lambda v_1 \circ T = v_1$ alors comme v ne s'annule pas sur I on a :

$$\left(\frac{v_1}{v} \right) \circ T = \frac{v_1}{v}.$$

Alors

$$\Phi\left(\frac{v_1}{v} \circ T \cdot h\right) = \Phi\left(\frac{v_1}{v} \cdot h\right) \text{ i.e. } \frac{v_1}{v} h = \Phi\left(\frac{v_1}{v} \cdot h\right).$$

Donc $\frac{v^1}{v}$ est une constante et $\frac{P}{\lambda}$ n'admet qu'un espace vectoriel de dimension 1 comme invariant, c'est-à-dire λ est une valeur propre simple de P et donc de Φ .

On montre maintenant que les valeurs propres de Φ sont les racines p -ièmes de l'unité. Si $a \neq 1$ est une valeur propre de Φ de module 1 associée à vh , on a pour tout x de I :

$$av(x)h(x) = \sum_{j \in J} v(\sigma_j x) \frac{h(\sigma_j x)}{|T(\sigma_j x)'|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x).$$

Pour tout x de $\{h \neq 0\}$, l'équation précédente représente un barycentre de points de module 1 qui reste de module 1 donc, pour tout x de I tel que $h(\sigma_j x) \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) \neq 0$ et $h(x) \neq 0$ on a :

$$av(x) = v(\sigma_j x).$$

On a aussi, pour tout $n > 0$, pour tout j de J :

$$a^n v^n(x) = v^n(\sigma_j x),$$

donc

$$\Phi(v^n h) = a^n v^n h.$$

$v^n h$ est dans $L^2(hm)$, V est dense dans $L^2(hm)$, $v^n h$ peut s'écrire à une constante multiplicative près comme la limite de la suite $\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{a^{nj}} \Phi^j(\varphi)$ où φ est une fonction quelconque bien choisie de V , d'après la preuve du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu cette suite admet une limite dans V , $v^n h$ est donc dans V et est une fonction propre de Φ associée à a^n . Comme Φ n'admet que p valeurs propres de module 1 distinctes, on en déduit qu'elles forment un groupe fini de cardinal p du disque unité. Ainsi :

$$\{1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} = \{1, \lambda, \dots, \lambda^{p-1}\}$$

avec $\lambda = e^{2i\pi/p}$. Les fonctions propres s'écrivent $h, vh, \dots, v^{p-1}h$, comme elles sont simples, on en déduit que $v^p \equiv 1$. \square

On veut maintenant démontrer le théorème limite central suivant : soit f un élément de V à valeurs réelles, on pose

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k,$$

sous l'hypothèse

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\frac{S_n f}{\sqrt{n}} \right)^2 h dm > 0$$

et si $m(fh) = 0$ on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} hm \left[\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \leq v \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-u^2/2} du \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathbb{R}.$$

D'après la méthode des fonctions caractéristiques de Paul Lévy, il suffit de prouver que pour tout t de \mathbb{R} ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} h dm = e^{-t^2/2}.$$

On remarque que :

$$\int_0^1 e^{it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} h dm = \int_0^1 e^{it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} \cdot h \cdot 1 \circ T^n dm = \int_0^1 \Phi^n[e^{it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} \cdot h] dm.$$

On est donc amené à étudier $\Phi^n[e^{it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} \cdot h]$ et pour cela à construire un nouvel opérateur $\Phi_f(i\theta)$ vérifiant pour tout g de V et tout θ réel :

$$\Phi_f^n(i\theta)(g) = \Phi^n[e^{i\theta S_n f} g].$$

5 LES PERTURBATIONS DE L'OPÉRATEUR Φ

On perturbe l'opérateur Φ : soit f une fonction réelle appartenant à V , pour tout θ dans \mathbb{C} , on définit l'opérateur $\Phi_f(\theta)$ par :

$$\Phi_f(\theta)(g) = \Phi[\exp(\theta f) \cdot g] \text{ où } g \text{ est dans } V.$$

Proposition 5.1. — *L'opérateur $\Phi_f(\theta)$ vérifie les propriétés suivantes :*

(P1) $\Phi_f(0) = \Phi$.

(P2) Pour tout θ de \mathbb{C} , $\Phi_f(\theta)$ est un opérateur continu de V .

(P3) L'application $\theta \mapsto \Phi_f(\theta)$ est analytique.

(P4) Pour tout entier $n > 0$, pour tout complexe θ , on a l'égalité m -presque partout :

$$\Phi_f^n(\theta)(g) = \Phi^n[\exp(\theta S_n f) \cdot g] \text{ où } S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k.$$

La propriété (P4) permet de faire l'étude de $S_n f$ en utilisant les propriétés spectrales de $\Phi_f(\theta)$.

Démonstration. —

(P2) : On montre d'abord que si f est dans V et θ dans \mathbb{C} alors $\exp(\theta f)$ est dans V .
On a :

$$\|\exp(\theta f)\|_1 = \int_0^1 |\exp(\theta f)| dm = \int_0^1 \exp(\operatorname{Re} \theta f) dm \leq \exp(|\operatorname{Re} \theta| \|f\|_v) < \infty,$$

donc $\exp(\theta f)$ est dans $L^1(m)$. Pour toute subdivision $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ finie de $[0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} |\exp(\theta f)(a_i) - \exp(\theta f)(a_{i+1})| &= \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\exp(\theta f(a_{i-1})) - \exp(\theta f(a_i))}{f(a_i) - f(a_{i-1})} \right| |f(a_i) - f(a_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i-1})| \sup_{x \in f(I)} [|\theta \exp(\theta x)|]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$v[\exp(\theta f)] \leq K_f |\theta| v(f) < \infty.$$

On fixe maintenant θ dans \mathbb{C} et g dans V

$$\|\Phi_f(\theta)(g)\|_v \leq \|\Phi\|_v \cdot \|\exp(\theta f) \cdot g\|_v \leq 2\|\Phi\|_v \cdot \|\exp(\theta f)\|_v \cdot \|g\|_v.$$

D'où la continuité de $\Phi_f(\theta)$ dans V et on a : $\|\Phi_f(\theta)\|_v \leq 2\|\Phi\|_v \cdot \|\exp(\theta f)\|_v$.

(P3) : Comme

$$\left\| \frac{\theta^n}{n!} \Phi(f^n \cdot g) \right\|_v \leq \frac{|\theta|^n}{n!} \|\Phi\|_v \cdot \|f^n g\|_v \leq 2\|\Phi\|_v \cdot \|g\|_v \frac{[2|\theta| \cdot \|f\|_v]^n}{n!},$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \Phi(f^n g)$ est normalement convergente dans V et sa limite vaut $\Phi_f(\theta)(g)$. Ainsi la fonction $\theta \mapsto \Phi_f(\theta)$ est analytique.

(P4) : On montre d'abord que pour f, g dans V l'on a :

$$\Phi[f \circ T \cdot g] = f \cdot \Phi g \text{ m-presque partout.}$$

Si f est dans V et ϕ dans $L^\infty(m)$, on note $\langle f, \phi \rangle$ pour $\int_0^1 f \phi dm$. On a par définition de Φ ,

$$\begin{aligned} \langle \Phi(f \circ T \cdot g), \phi \rangle &= \langle f \circ T \cdot g, \phi \circ T \rangle \\ &= \langle g, (f \cdot \phi) \circ T \rangle \text{ car } f \in V \Rightarrow f \in L^\infty(m) \\ &= \langle \Phi g, \phi \cdot f \rangle = \langle f \cdot \Phi g, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout ϕ de $L^\infty(m)$, on en déduit que $\Phi[f \circ T \cdot g] = f \cdot \Phi g$ m-presque partout. On peut alors démontrer (P4) par récurrence sur n :

c'est vrai au rang 1 par définition de $\Phi_f(\theta)$.

On suppose que $\Phi_f^n(\theta)(g) = \Phi^n[\exp(\theta S_n f) \cdot g]$ m-p.p.

Alors, il existe N_1 dans \mathfrak{B} , $m(N_1) = 0$ et sur $I \setminus N_1$ on a :

$$\begin{aligned} \Phi_f^{n+1}(\theta)(g) &= \Phi_f^n(\theta)[\Phi_f(\theta)(g)] \\ &= \Phi^n[\exp(\theta S_n f) \cdot \Phi_f(\theta)(g)] \\ &= \Phi^n[\exp(\theta S_n f) \Phi(\exp(\theta f)g)]. \end{aligned}$$

Il existe N_2 dans \mathfrak{B} tel que $m(N_2) = 0$ et sur $I \setminus N_2$ on a :

$$\begin{aligned} \Phi[\exp(\theta f) \cdot g] \exp(\theta S_n f) &= \Phi[\exp(\theta S_n f) \circ T \cdot \exp(\theta f) \cdot g] \\ &= \Phi[\exp(\theta S_{n+1} f) \cdot g]. \end{aligned}$$

Soit alors $N_3 = N_1 \cup N_2$, on a : $m(N_3) = 0$ et sur $I \setminus N_3$,

$$\Phi_f^{n+1}(\theta)(g) = \Phi^n[\Phi((\exp \theta S_{n+1} f) \cdot g)] = \Phi^{n+1}[\exp(\theta S_{n+1} f)g]. \quad \square$$

Le spectre de $\Phi_f(\theta)$ est donné par le théorème des perturbations.

Proposition 5.2. — *Il existe un réel $a > 0$ tel que si $|\theta| < a$, alors pour tout $n \geq 1$, pour tout g de V , on peut écrire :*

$$\Phi_f^n(\theta)(g) = \lambda_0^n(\theta)\Phi_0(\theta)(g) + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k^n(\theta)\Phi_k(\theta)(g) + \Psi_f^n(\theta)(g).$$

Avec :

- les applications $\theta \mapsto \Phi_k(\theta)$, $\theta \mapsto \lambda_k(\theta)$ et $\theta \mapsto \Psi_f(\theta)$ sont analytiques dans un voisinage de $\theta = 0$;
- $\lambda_k(0) = \lambda^k$ et $\lambda_k(\theta)$ est une valeur propre de $\Phi_f(\theta)$ de module plus grand que $\frac{2+\rho(\Psi)}{3} = \rho_2$;
- les opérateurs $\Phi_k(\theta)$ sont des projections de V sur le sous espace propre $V(\lambda_k(\theta))$ qui est de dimension 1 et $\Phi_k(0) = \Phi_k$, $(\Phi_0(f) = m(fh) \cdot h)$;
- l'opérateur $\Psi_f(\theta)$ est un opérateur sur V de rayon spectral $\rho(\Psi_f(\theta)) \leq \rho_2$, $\Psi_f(0) = \Psi$ et pour tout $0 \leq k \leq p-1$:

$$\Psi_f(\theta)\Phi_k(\theta) = \Phi_k(\theta)\Psi_f(\theta) = 0 \text{ et } \|\Psi_f^n(\theta)(h)\|_v \leq C\rho_2^{n+1}|\theta|.$$

Démonstration. — Elle est reprise du chapitre VII du livre de Dunford et Schwartz [D.S].

Résultats préliminaires

Notations. — \mathfrak{D} est l'ensemble des opérateurs de V à valeurs dans V .

Si Φ est dans \mathfrak{D} , on note :

$$\begin{aligned} \rho(\Phi) &= \{z \in \mathbb{C} : \lambda I - \Phi \text{ est inversible dans } \mathfrak{D}\} \\ \sigma(\Phi) &= \mathbb{C} \setminus \rho(\Phi). \end{aligned}$$

Si z est dans $\rho(\Phi)$, $R(z, \Phi) = (zI - \Phi)^{-1}$ existe dans V . $\mathcal{F}(\Phi)$ est l'ensemble de toutes les fonctions f qui sont analytiques dans un voisinage de $\sigma(\Phi)$. Si f est dans $\mathcal{F}(\Phi)$, si U est un ouvert qui contient $\sigma(\Phi)$ dont la frontière B est constituée d'un nombre fini d'arcs rectifiables de Jordan orientés positivement et si $U \cup B$ est contenu dans le domaine d'analyticité de f , alors $f(\Phi)$ est défini par :

$$f(\Phi) = \frac{1}{2i\pi} \oint_B f(z)R(z, \Phi)dz.$$

Cette égalité est la généralisation de la formule de Cauchy dans \mathbb{C} , elle est la clé de toute la démonstration.

Lemme 5.3. — *L'ensemble \mathfrak{S} des éléments de \mathfrak{D} qui admettent un inverse dans \mathfrak{D} est un ouvert pour la topologie de la convergence uniforme des opérateurs dans \mathfrak{D} .*

De plus l'application $\begin{cases} \mathfrak{S} & \rightarrow \mathfrak{S} \\ A & \mapsto A^{-1} \end{cases}$ *est un homéomorphisme pour la topologie de la convergence uniforme des opérateurs dans \mathfrak{D} .*

Démonstration. — On rappelle d'abord que dans V , on a :

$$\|AB\|_v \leq 2\|A\|_v\|B\|_v.$$

\mathcal{G} n'est pas vide, car l'opérateur identité est dans \mathcal{G} . On montre que si A est dans \mathcal{G} , alors \mathcal{G} contient la sphère $S_A = \{B \in \mathcal{D} : \|B - A\|_v < \frac{1}{4}\|A^{-1}\|_v^{-1}\}$. Si B est dans S_A , B^{-1} vaut $A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} ((A - B)A^{-1})^n$ et alors :

$$\begin{aligned} \|B^{-1} - A^{-1}\|_v &\leq 2\|A^{-1}\|_v \sum_{n=1}^{\infty} \|((A - B)A^{-1})^n\|_v \\ &\leq 2\|A^{-1}\|_v \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \|A - B\|_v^n \cdot \|A^{-1}\|_v^n \\ &\leq C\|A - B\|_v \text{ car } B \text{ est dans } S_A \\ \text{ainsi } \begin{cases} \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ A &\mapsto A^{-1} \end{cases} &\text{ est un homéomorphisme. } \square \end{aligned}$$

Corollaire 5.4. — Si Φ_0 et Φ sont dans \mathcal{D} , si z est dans $\rho(\Phi)$ et si $\|\Phi - \Phi_0\|_v < \frac{1}{4}\|R(z, \Phi)\|_v^{-1}$ alors z est dans $\rho(\Phi_0)$ et :

$$R(z, \Phi_0) = R(z, \Phi) \sum_{n=0}^{\infty} [(\Phi - \Phi_0)R(z, \Phi)]^n.$$

On a pour z et z' , $z \neq z'$, dans $\rho(\Phi)$:

$$R(z, \Phi)R(z', \Phi) = \frac{1}{z' - z} [R(z, \Phi) - R(z', \Phi)].$$

En effet :

$$(zI - \Phi)R(z, \Phi)R(z', \Phi)(z'I - \Phi) = I$$

$$\text{et } (zI - \Phi)[R(z, \Phi) - R(z', \Phi)](z'I - \Phi) = [z'I - \Phi - zI + \Phi] = (z' - z)I.$$

Lemme 5.5. — Soit U un ouvert de \mathbb{C} dont l'adhérence est contenue dans $\rho(\Phi)$, alors il existe $r > 0$ tel que si $|\theta| < r$, on a :

$$\bar{U} \subset \rho(\Phi_f(\theta))$$

et pour tout z de U , $\theta \mapsto R(z, \Phi_f(\theta))$ est une fonction analytique au voisinage de $\theta = 0$.

Démonstration. — D'après le corollaire 5.4, on sait que pour tout z de $\rho(\Phi)$,

$$\text{si } \|\Phi - \Phi_f(\theta)\|_v < \frac{1}{4}\|R(z, \Phi)\|_v^{-1} \text{ alors } z \in \rho(\Phi_f(\theta)).$$

Soit U un ouvert de \mathbb{C} dont l'adhérence est contenue dans $\rho(\Phi)$, alors pour tout λ de \bar{U} , $R(\lambda, \Phi)$ est dans V et n'est pas nul. Comme :

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \|R(z, \Phi)\|_v = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{|z|} \|(I - \frac{\Phi}{z})^{-1}\|_v = 0,$$

on a alors :

$$\delta = \inf_{z \in \bar{U}} \frac{1}{4} \|R(z, \Phi)\|_v^{-1} > 0.$$

Maintenant, si pour tout z de \bar{U} , on a :

$$\|\Phi - \Phi_f(\theta)\|_v < \delta$$

on en déduit que :

$$\|\Phi - \Phi_f(\theta)\|_v < \frac{1}{4} \|R(z, \Phi)\|_v^{-1}$$

et donc z est dans $\rho(\Phi_f(\theta))$, ainsi \bar{U} est contenu dans $\rho(\Phi_f(\theta))$.

De plus $R(z, \Phi_f(\theta)) = R(z, \Phi) \sum_{n=0}^{\infty} [(\Phi - \Phi_f(\theta))R(z, \Phi)]^n$ est une série qui converge normalement pour $\|\cdot\|_v$ et pour la norme de la convergence uniforme des opérateurs de \mathfrak{D} . Comme la fonction $\theta \mapsto \Phi - \Phi_f(\theta)$ est analytique au voisinage de 0, on en déduit alors que $\theta \mapsto R(z, \Phi_f(\theta))$ est analytique pour tout z de U dès que $\|\Phi - \Phi_f(\theta)\|_v < \delta$. Cette condition, à cause de (P1) et (P4) revient à $|\theta| < r$. D'où le lemme 5.5. \square

Lemme 5.6. — Soit g un élément de $\mathfrak{F}(\Phi)$, alors il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $|\theta| < r$, g est dans $\mathfrak{F}(\Phi_f(\theta))$ et $g(\Phi_f(\theta))$ est un opérateur qui dépend analytiquement de θ au voisinage de $\theta = 0$.

Démonstration. — Soit U un voisinage de $\sigma(\Phi)$ sur lequel g est analytique. Soit U_1 un voisinage de $\sigma(\Phi)$ dont la frontière B est constituée d'un nombre fini d'arcs de Jordan orientés positivement et tel que $U_1 \cup B$ soit contenu dans U . D'après le lemme précédent, il existe un réel $r > 0$ tel que si $|\theta| < r$ alors la fonction $\theta \mapsto R(z, \Phi_f(\theta))$ est analytique le long de B et la série $R(z, \Phi_f(\theta)) = R(z, \Phi) \sum_{n=0}^{\infty} [(\Phi - \Phi_f(\theta))R(z, \Phi)]^n$ converge uniformément pour la topologie de la convergence uniforme des opérateurs de \mathfrak{D} et normalement dans $(V, \|\cdot\|_v)$. Ainsi

$$g(\Phi_f(\theta)) = \frac{1}{2i\pi} \oint_B g(z) R(z, \Phi_f(\theta)) dz$$

se développe au voisinage de 0 en une série entière en θ et donc $g(\Phi_f(\theta))$ est un opérateur qui dépend analytiquement de θ si $|\theta| < r$.

Démonstration de la Proposition 5.2. —

On construit dans un premier temps les opérateurs $\Phi_k(\theta)$ et $M(\theta)$. Les points $(\lambda^k)_{0 \leq k \leq p-1}$ sont des points isolés du spectre de Φ , pour tout k , il existe donc un réel $r_k > 0$ tel que :

$$B(\lambda^k, r_k) \cap \sigma(\Phi) = \{\lambda^k\},$$

on prend par exemple $r_k = \inf\{\frac{1-\rho(\Psi)}{3}, \frac{|\lambda^k - \lambda^j|}{2} | j \neq k\}$. Ainsi les cercles $(C(\lambda^k, r_k))_k$ et $C(0, \frac{2\rho(\Psi)+1}{3}) = C(0, \rho_2)$ sont entièrement contenus dans $\rho(\Phi)$. On note B la réunion de tous ces cercles, c'est une courbe constituée d'un nombre fini d'arcs rectifiables de Jordan, on va supposer que B est orientée positivement.

Pour $0 \leq k \leq p-1$, on définit les opérateurs :

$$\Phi_k(\theta) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\lambda^k, r_k)} R(z, \Phi_f(\theta)) dz.$$

$$M(\theta) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(0, \rho_2)} R(z, \Phi_f(\theta)) dz.$$

Comme pour tout z de B , la fonction $\theta \mapsto R(z, \Phi_f(\theta))$ est analytique au voisinage de $\theta = 0$, on en déduit qu'il existe un réel $\theta_0 > 0$ tel que les fonctions $\theta \mapsto \Phi_k(\theta)$ et $\theta \mapsto M(\theta)$ sont analytiques sur $\{|\theta| < \theta_0\}$.

On remarque l'opérateur $\Phi_k(\theta)$ ne dépend pas du domaine d'intégration choisi, on peut prendre n'importe quel arc rectifiable de Jordan contenu dans $\rho(\Phi)$ dont l'intérieur ne contient que le point λ^k de $\sigma(\Phi)$. Il en est de même pour $M(\theta)$. On peut donc écrire que :

$$\Phi_k(\theta) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\lambda^k, r_k)} R(z, \Phi_f(\theta)) dz = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\lambda^k, r'_k)} R(z', \Phi_f(\theta)) dz'$$

avec $0 < r'_k < r_k$.

On peut alors montrer que ces opérateurs sont des projections :

$$\begin{aligned} \Phi_k(\theta)\Phi_k(\theta) &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint_{C(\lambda^k, r_k)} R(z, \Phi_f(\theta)) dz \oint_{C(\lambda^k, r'_k)} R(z', \Phi_f(\theta)) dz' \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint_{C(\lambda^k, r_k) \times C(\lambda^k, r'_k)} R(z, \Phi_f(\theta)) R(z', \Phi_f(\theta)) dz' dz \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint_{C(\lambda^k, r_k) \times C(\lambda^k, r'_k)} \frac{[R(z, \Phi_f(\theta)) - R(z', \Phi_f(\theta))]}{z' - z} dz' dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\lambda^k, r'_k)} R(z', \Phi_f(\theta)) \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\lambda^k, r_k)} \frac{dz}{z - z'} dz' \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\lambda^k, r_k)} R(z, \Phi_f(\theta)) \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\lambda^k, r'_k)} \frac{dz'}{z' - z} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\lambda^k, r'_k)} R(z', \Phi_f(\theta)) dz' = \Phi_k(\theta) \end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Fubini et le théorème des résidus. De la même façon on obtient :

$$\Phi_k(\theta)M(\theta) = M(\theta)\Phi_k(\theta) = \Phi_k(\theta)\Phi_j(\theta) = 0, \quad M(\theta)M(\theta) = M(\theta).$$

De plus pour $|\theta| < \theta_0$ on peut écrire :

$$I = \Phi_0(\theta) + \Phi_1(\theta) + \cdots + \Phi_{p-1}(\theta) + M(\theta)$$

où les fonctions $\theta \mapsto \Phi_k(\theta)$ et $\theta \mapsto M(\theta)$ sont analytiques en θ et $\Phi_k(0) = \Phi_k$.

On montre maintenant qu'il existe $0 < b_k \leq \theta_0$ tel que si $|\theta| < b_k$ alors $\dim \Phi_k(\theta)(V) = \dim \Phi_k(V) = 1$.

Comme $\Phi_k(0) = \Phi_k$ et comme $\theta \mapsto \Phi_k(\theta)$ est analytique en θ au voisinage de 0, il existe $0 < b_k \leq \theta_0$ tel que :

$$\text{si } |\theta| < b_k \text{ alors } \|\Phi_k(\theta) - \Phi_k\|_v < 1.$$

Si on suppose que $\dim \Phi_k(\theta)(V) \geq 2$, alors il existe h_1 et h_2 dans $\Phi_k(\theta)(V)$ qui sont linéairement indépendantes. Comme $\dim \Phi_k(V) = 1$, il existe un scalaire λ tel que : $\Phi_k(h_1) = \lambda\Phi_k(h_2)$, on pose $h = h_1 - \lambda h_2$. h n'est pas nulle et appartient à V . Comme on a : $[\Phi_k - \Phi_k(\theta)](h) = -h$, la condition $\|\Phi_k - \Phi_k(\theta)\|_v < 1$ n'est pas valable. Donc si $|\theta| < b_k$ on a :

$$\dim \Phi_k(\theta)(V) = 1.$$

On construit maintenant les fonctions $\theta \mapsto \lambda_k(\theta)$. Soit g_k une base $\Phi_k(V)$, il existe $0 < \bar{b}_k \leq b_k$ tel que si $|\theta| < \bar{b}_k$ alors $\Phi_k(\theta)(g_k)$ est une base de $\Phi_k(\theta)(V)$. En effet $\Phi_k(g_k) = g_k$ qui n'est pas nulle en $\theta = 0$ donc elle n'est pas nulle dans un voisinage de 0 car $\theta \mapsto \Phi_k(\theta)$ est analytique en θ . $\Phi_k(\theta)(g_k)$ est donc bien une base de $\Phi_k(\theta)(V)$ si $|\theta| < \bar{b}_k$. On a alors pour $|\theta| < \bar{b}_k$:

$$\Phi_f(\theta)[\Phi_k(\theta)(g_k)] = \Phi_k(\theta)[\Phi_f(\theta)(g_k)] = \lambda_k(\theta)\Phi_k(\theta)(g_k).$$

La fonction $\theta \mapsto \lambda_k(\theta)$ vaut λ_k en 0 et est analytique en θ comme produit de fonctions analytiques en θ . On en déduit alors qu'il existe $0 < \bar{\bar{b}}_k \leq \bar{b}_k$ tel que si $|\theta| < \bar{\bar{b}}_k$ alors $\lambda_k(\theta)$ est dans $B(\lambda^k, r_k)$. On a alors démontré que $\lambda_k(\theta)$ est une valeur propre de $\Phi_f(\theta)$ et que l'espace propre associé $\Phi_k(\theta)(V)$ est de dimension 1 pour $|\theta| \leq \bar{\bar{b}}_k$.

On construit maintenant l'opérateur $\Psi_f(\theta)$. On pose d'abord

$$a = \inf\{\bar{\bar{b}}_k, 1 \leq k \leq p\},$$

a est strictement positif. Pour $|\theta| < a$, on a, si $k \neq j$:

$$\Phi_k(\theta)\Phi_j(\theta) = 0.$$

On pose maintenant $\Psi_f(\theta) = M(\theta)\Phi_f(\theta) = \Phi_f(\theta)M(\theta)$. Pour $|\theta| < a$, la fonction $\theta \mapsto \Psi_f(\theta)$ est analytique en θ comme composée de fonctions analytiques en θ et on a pour tout n de \mathbb{N}^* , pour tout g de V :

$$|\theta| < a \Rightarrow \Phi_f^n(\theta)(g) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k^n(\theta)\Phi_k(\theta)(g) + \Psi_f^n(\theta)(g).$$

Comme $\Phi_f(\theta) = \frac{1}{2i\pi} \oint_B zR(z, \Phi_f(\theta))dz$ et comme $\Psi_f(\theta) = \Phi_f(\theta)M(\theta)$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \Psi_f(\theta) &= \frac{1}{2i\pi} \oint_B zR(z, \Phi_f(\theta))M(\theta)dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(0, \rho_2)} zR(z, \Phi_f(\theta))dz \end{aligned}$$

car on a $R(z, \Phi_f(\theta))M(\theta) = 0$ le long de $C(\lambda^k, r_k)$ et $R(z, \Phi_f(\theta))M(\theta) = R(z, \Phi_f(\theta))$ le long de $C(0, \rho_2)$. On a donc de même pour n dans \mathbb{N}^* :

$$\Psi_f^n(\theta) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(0, \rho_2)} z^n R(z, \Phi_f(\theta))dz = \frac{1}{2\pi} \rho_2^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha(n+1)} R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(\theta))d\alpha.$$

Alors :

$$\|\Psi_f^n(\theta)(h)\|_v \leq \frac{\rho_2^{n+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(\theta))(h)\|_v d\alpha.$$

Mais $R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(\theta))(h)$ vaut 0 en $\theta = 0$. Comme $\theta \mapsto R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(\theta))$ est un opérateur analytique pour tout α de $[0, 2\pi]$ on en déduit que :

$$\|R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(\theta))\|_v \leq C|\theta|$$

avec

$$C = \sup_{\substack{\alpha \in [0, 2\pi] \\ |\theta| < a}} \|R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi) \left(\frac{\Phi - \Phi_f(\theta)}{\theta} \right) R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(\theta))\|_v$$

comme $\theta \mapsto \frac{\Phi - \Phi_f(\theta)}{\theta}$ est analytique en θ , la constante C est finie. Alors on a :

$$\|\Psi_f^n(\theta)(h)\| \leq \int_0^{2\pi} C|\theta|d\alpha \frac{\rho_2^{n+1}}{2\pi} = C\rho_2^{n+1}|\theta|.$$

Ce qui termine la preuve de la proposition 5.2. \square

Remarques. —

Si θ est un imaginaire pur alors $|e^{\theta f}| = 1$, on a donc

$$\|\Phi_f(\theta)\|_1 \leq \|\Phi\|_1 \leq 1 \text{ et donc } |\lambda_k(\theta)| \leq 1.$$

L'hypothèse, les valeurs propres de Φ de module 1 sont simples, est capitale pour avoir $\theta \mapsto \lambda_k(\theta)$ est analytique en θ dans un voisinage de $\theta = 0$. Sinon, si λ^k est une valeur propre de module 1 de multiplicité m , on a $\theta \mapsto \lambda_k(\theta)$ est une fonction analytique de la variable $\theta^{1/m}$.

Ici on a fait la démonstration avec une perturbation analytique, on aurait très bien pu prendre une famille d'opérateurs qui dépend de θ de façon C^k , $k \geq 0$ dans un voisinage de $\theta = 0$. On aurait alors les mêmes conclusions en remplaçant « analytique dans un voisinage de $\theta = 0$ » par « de classe C^k dans un voisinage de $\theta = 0$ ». On peut même améliorer un peu l'étude spectrale de $\Phi_f(\theta)$.

On va prouver la proposition suivante, elle servira quand on démontrera les théorèmes de grands écarts :

Proposition 5.7. — *Il existe un réel $0 < b < a$, tel que pour tout nombre complexe $\theta = \theta_1 + i\theta_2$, avec $|\theta_1| < b$, l'opérateur $\Phi_f(\theta_1 + i\theta_2)$ a un ensemble fini $G(\theta_1 + i\theta_2)$ de valeurs propres de module $|\lambda(\theta_1)|$ où $|\lambda(\theta_1)| = \sup_{0 \leq k \leq p-1} |\lambda_k(\theta_1)|$. On peut alors écrire, pour tout g de V , pour tout entier n ,*

$$\Phi_f^n(\theta_1 + i\theta_2)(g) = \sum_{\mu \in G(\theta_1 + i\theta_2)} \mu^n \Phi_\mu(\theta_1 + i\theta_2)(g) + \Psi_f^n(\theta_1 + i\theta_2)(g)$$

où $\Phi_\mu(\theta_1 + i\theta_2)$ est le projecteur de V sur $V(\mu)$ qui est de dimension finie et où $\Psi_f(\theta_1 + i\theta_2)$ est un opérateur de rayon spectral strictement inférieur à $|\lambda(\theta_1)|$, ils vérifient de plus :

$$\Phi_\mu(\theta_1 + i\theta_2)\Phi_{\mu'}(\theta_1 + i\theta_2) = 0 \quad \text{si } \mu \neq \mu',$$

$$\Phi_\mu^2(\theta_1 + i\theta_2) = \Phi_\mu(\theta_1 + i\theta_2)$$

$$\Phi_\mu(\theta_1 + i\theta_2)\Psi_f(\theta_1 + i\theta_2) = \Psi_f(\theta_1 + i\theta_2)\Phi_\mu(\theta_1 + i\theta_2) = 0.$$

Remarques. —

Pour θ dans \mathbb{R} , $|\theta| < b$ l'opérateur $\Phi_f(\theta)$ vérifie aussi le théorème des perturbations, c'est-à-dire que l'on peut développer, au voisinage de $\alpha = 0$, $\Phi_f(\theta + i\alpha)$ en α .

Ce résultat est uniquement local, on utilise pour le démontrer uniquement le fait que T est dans \mathcal{C} et non pas la condition plus forte (3') que vérifient les éléments de \mathcal{C}' .

Démonstration. — On va utiliser le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu ; on l'applique à l'opérateur $\frac{1}{\lambda(\theta_1)}\Phi_f(\theta_1 + i\theta_2)$ où $\lambda(\theta_1)$ désigne la valeur propre de $\Phi_f(\theta_1)$ qui réalise le supremum :

$$|\lambda(\theta_1)| = \sup_{0 \leq k \leq p-1} |\lambda_k(\theta_1)|.$$

On doit donc vérifier les conditions (b) et (c) du théorème 4.2. Soit g dans V , on a :

$$|\Phi_f^n(\theta_1 + i\theta_2)(g)| = |\Phi^n(e^{(\theta_1 + i\theta_2)S_n} f g)| \leq \Phi^n(e^{\theta_1 S_n} f |g|) = \Phi_f^n(\theta_1)(|g|).$$

D'après le théorème des perturbations, comme $|\theta_1| < a$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi_f^n(\theta_1)(|g|) &= \sum_{k=0}^{p-1} [\lambda_k(\theta_1)]^n \Phi_k(\theta_1)(|g|) + \Psi_f^n(\theta_1)(|g|) \\ &\leq |\lambda(\theta_1)|^n \sum_{k=0}^{p-1} \Phi_k(\theta_1)(|g|) + \Psi_f^n(\theta_1)(|g|).\end{aligned}$$

Donc :

$$\left\| \frac{\Phi_f^n(\theta_1 + i\theta_2)(g)}{\lambda^n(\theta_1)} \right\|_1 \leq \sum_{k=0}^{p-1} \|\Phi_k(\theta_1)(|g|)\|_1 + \|\Psi_f^n(\theta_1)(|g|)\|_1.$$

Comme Φ_k est une projection, on a :

$$\|\Phi_k(\theta_1)(|g|)\|_1 \leq \|g\|_1.$$

Comme Ψ_f est un opérateur de rayon spectral strictement plus petit que 1 sur V , on a :

$$\|\Psi_f^n(\theta_1)(|g|)\|_1 \leq C\|g\|_1.$$

Donc il existe H tel que

$$\sup_{n>0} \left\{ \left\| \frac{\Phi_f^n(\theta_1 + i\theta_2)(g)}{\lambda^n(\theta_1)} \right\|_1, \|g\|_1 \leq 1, g \in V \right\} \leq H < \infty.$$

On vérifie maintenant la condition de Doeblin-Fortet, il suffit de montrer qu'il existe $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$ tels que pour g dans V , on ait :

$$v\left(\frac{\Phi_f^{n_0}(\theta_1 + i\theta_2)(g)}{\lambda^{n_0}(\theta_1)}\right) \leq \alpha v(g) + \beta \|g\|_1.$$

Or

$$v\left(\frac{\Phi_f^{n_0}(\theta_1 + i\theta_2)(g)}{\lambda^{n_0}(\theta_1)}\right) = \frac{1}{|\lambda(\theta_1)|^{n_0}} \sup \sum_{\ell=1}^{n_0} |\Phi_f^{n_0}(\theta_1 + i\theta_2)(g)(a_\ell) - \Phi_f^{n_0}(\theta_1 + i\theta_2)(g)(a_{\ell+1})|.$$

Comme :

$$\begin{aligned}& |\Phi_f^{n_0}(\theta_1 + i\theta_2)(g)(a_\ell) - \Phi_f^{n_0}(\theta_1 + i\theta_2)(g)(a_{\ell+1})| \\ &= \left| \sum_{j \in J_{n_0}} \left[\left[\frac{e^{(\theta_1 + i\theta_2)S_{n_0}f} \cdot g}{|(T^{n_0})'|} \right] \circ \sigma_j \mathbf{1}_{T^{n_0}(\bar{I}_j)} \right](a_\ell) \right. \\ &\quad \left. - \left[\left[\frac{e^{(\theta_1 + i\theta_2)S_{n_0}f} \cdot g}{|(T^{n_0})'|} \right] \circ \sigma_j \mathbf{1}_{T^{n_0}(\bar{I}_j)} \right](a_{\ell-1}) \right| \\ &\leq |\Phi_f^{n_0}(\theta_1)(|g|)(a_\ell) - \Phi_f^{n_0}(\theta_1)(|g|)(a_{\ell-1})| + 2|\Phi_f^{n_0}(\theta_1)(|g|)(a_\ell)|\end{aligned}$$

et comme :

$$\begin{aligned}
 |\Phi_f^{n_0}(\theta_1)(|g|)(a_\ell) - \Phi_f^{n_0}(\theta_1)(|g|)(a_{\ell-1})| & \\
 & \leq |\Phi^{n_0}(|g|)(a_\ell) - \Phi^{n_0}(|g|)(a_{\ell-1})| \cdot \sup |e^{\theta_1 S_{n_0} f}| \\
 & + |e^{\theta_1 S_{n_0} f(a_\ell)} - e^{\theta_1 S_{n_0} f(a_{\ell-1})}| \cdot \sum_{j \in J_{n_0}} \left| \frac{g}{(T^{n_0})'} \circ \sigma_j \mathbf{1}_{T^{n_0}(\bar{I}_j)} \right|(a_{\ell-1}) \\
 & \leq [\sup e^{\theta_1 f}]^{n_0} [|\Phi^{n_0}(|g|)(a_\ell) - \Phi^{n_0}(|g|)(a_{\ell-1})| \\
 & + 2 \sum_{j \in J_{n_0}} \left| \frac{g}{(T^{n_0})'} \circ \sigma_j(a_{\ell-1}) \mathbf{1}_{T^{n_0}(I_j)}(a_{\ell-1}) \right|].
 \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$v\left(\frac{\Phi_f^{n_0}(\theta_1 + i\theta_2)(g)}{[\lambda(\theta_1)]^{n_0}}\right) \leq \frac{1}{|\lambda(\theta_1)|^{n_0}} [[\sup e^{\theta_1 f}]^{n_0} [v(\Phi^{n_0}(|g|)) + 2\|g\|_1] + 2\|\Phi_f^{n_0}(\theta_1)(|g|)\|_1].$$

Mais il existe $K(f, \theta_1, n_0)$ et $K_1(n_0)$ tels que

$$\begin{aligned}
 \|\Phi_f^{n_0}(\theta_1)(|g|)\|_1 & \leq K(f, \theta_1, n_0)\|g\|_1, \\
 v(\Phi^{n_0}|g|) & \leq \frac{2}{\gamma}v(g) + K_1(n_0)\|g\|_1.
 \end{aligned}$$

Comme il existe $0 < b < a$ tel que si $|\theta_1| < b$

$$\left[\frac{\sup e^{\theta_1 f}}{|\lambda(\theta_1)|} \right] < 1,$$

alors comme $\gamma > 2$:

$$\alpha = \frac{2}{\gamma} \left[\frac{\sup e^{\theta_1 f}}{|\lambda(\theta_1)|} \right]^{n_0} < 1.$$

Alors :

$$0 < \beta = [K(f, \theta_1, n_0) + (K_1(n_0) + 2) \cdot (\sup e^{\theta_1 f})^{n_0}] \frac{1}{|\lambda(\theta_1)|} < \infty.$$

On applique alors le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu, on a donc les résultats annoncés. \square

On dispose maintenant de tous les outils, on peut alors démontrer le théorème limite central.

6 THÉORÈME LIMITE CENTRAL

Jusqu'ici, on n'a eu besoin que de l'hypothèse (3) et non (3') pour démontrer les résultats précédents qui sont les seuls qui vont servir dans la démonstration du théorème limite central. On fixe donc une transformation T de \mathcal{C} et on rappelle que le système dynamique (I, \mathcal{B}, T, hm) est ergodique. On fixe f un élément de V , à valeurs réelles, on suppose, quitte à lui enlever une constante, que $m(fh) = 0$. On veut étudier le comportement des sommes

$$S_N f = \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^k.$$

On va d'abord démontrer le résultat capital de cette partie.

6.1 Calcul de la variance

Proposition 6.1. — *La suite $M_N = \int_0^1 (\frac{S_N f}{\sqrt{N}})^2 hdm$ est convergente dans \mathbb{R}_+ , soit σ^2 sa limite. On a les équivalences suivantes.*

$$\begin{aligned} \sigma^2 = 0 &\Leftrightarrow f = u - u \circ T \text{ dans } L^2(hm), \text{ avec } u \text{ dans } L^2(hm) \text{ et } uh \text{ dans } V \\ &\Leftrightarrow fh = uh - u \circ T \cdot h \text{ dans } V. \end{aligned}$$

Démonstration. — Elle se fait en plusieurs étapes.

1ÈRE ÉTAPE : On démontre l'existence de la limite de la suite $(M_N)_{N>0}$

$$\begin{aligned} M_N &= \int_0^1 \left(\frac{S_N f}{\sqrt{N}}\right)^2 hdm = \frac{1}{N} \langle S_N f, S_N f \rangle_{hm} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} \langle f \circ T^k, f \circ T^\ell \rangle_{hm} \\ &= \frac{1}{N} \left[N \langle f, f \rangle_{hm} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (N-k) \langle f \circ T^k, f \rangle_{hm} \right] \end{aligned}$$

car la mesure hm est invariante par T .

On désigne par P l'opérateur adjoint de T par rapport à la mesure hm dans l'espace de Hilbert $L^2(hm)$, P est défini par l'égalité :

$$\langle Pf, g \rangle_{hm} = \langle f, g \circ T \rangle_{hm} \quad f, g \text{ appartenant à } L^2(hm).$$

Les deux remarques suivantes vont permettre de donner la décomposition spectrale de P au point f .

Remarque 1. —

Si f et g sont dans V , alors P est aussi l'opérateur adjoint de T pour la dualité $L^1(hm)$ - $L^\infty(hm)$.

Si f est dans V , donc dans $L^1(hm)$ et $L^2(hm)$ on a :

$$Pf \cdot h = \Phi(fh) \text{ m-p.p.}$$

et donc :

$$Pf = \frac{\Phi(fh)}{h} \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}} \text{ hm-p.p.}$$

Comme f est dans V , on en déduit que pour tout $k > 0$, on a :

$$\begin{aligned} P^k f &= \frac{\Phi^k(fh)}{h} \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}} \\ &= m(fh) \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}} + \sum_{j=2}^p \lambda_j^k \frac{\Phi_j(fh)}{h} \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}} + \frac{\Psi^k(fh)}{h} \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}} \\ P^k f &= \sum_{j=2}^p \lambda_j^k \frac{\Phi_j(fh)}{h} \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}} + \frac{\Psi^k(fh)}{h} \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}} \end{aligned}$$

où :

$$\left\| \frac{\Psi^k(fh)}{h} \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}} \right\|_{1, hm} \leq \|\Psi^k(fh)\|_v \leq \rho^k \|fh\|_v \leq C_f \rho^k \|f\|_{1, hm}$$

avec $0 < \rho < 1$. Comme $\|fh\|_v = \|fh\|_1 + v(fh) = \|f\|_{1, hm} + v(fh)$. $v(fh)$ étant fini, il existe donc une constante $C_f \geq 1$ telle que $v(fh) \leq (C_f - 1)\|f\|_{1, hm}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} M_N &= \langle f, f \rangle_{hm} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \langle f \circ T^k, f \rangle_{hm} \\ &= -\langle f, f \rangle_{hm} + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \langle f, P^k f \rangle_{hm} \\ &= -\langle f, f \rangle_{hm} + 2 \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) P^k f, f \right\rangle_{hm} \end{aligned}$$

TRANSFORMATIONS DILATANTES DE L'INTERVALLE

Maintenant, on démontre que la suite $(\sum_{k=0}^{N-1} (1 - \frac{k}{N}) P^k f)_{N>0}$ converge dans $L^1(hm)$. D'après la décomposition spectrale, on a :

$$\sum_{k=0}^{N-1} (1 - \frac{k}{N}) P^k f = \sum_{k=0}^{N-1} (1 - \frac{k}{N}) \left[\sum_{j=1}^{p-1} \lambda^{jk} \Phi_j(fh) + \Psi^k(fh) \right] \frac{1}{h} \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}}.$$

Comme $\sum_{k=0}^{N-1} \lambda^k = \frac{1-\lambda^N}{1-\lambda}$ et comme $\sum_{k=0}^{N-1} k \lambda^k = -\frac{N\lambda^N}{1-\lambda} - \frac{1}{1-\lambda} + \frac{1-\lambda^{N+1}}{(1-\lambda)^2}$, alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} (1 - \frac{k}{N}) P^k f &= \sum_{j=1}^{p-1} \left[\frac{1}{1-\lambda^j} + \frac{1}{N} \frac{1}{1-\lambda^j} - \frac{1}{N} \frac{1-\lambda^{j(N+1)}}{(1-\lambda^j)^2} \right] \frac{\Phi_j(fh)}{h} \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}} \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Psi^k(fh)}{h} \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}} - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k \frac{\Psi^k(fh)}{h} \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}}. \end{aligned}$$

Comme :

$$\left\| \frac{\Psi^k(fh)}{h} \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}} \right\|_{1, hm} \leq C_f \rho^k \|f\|_{1, hm},$$

on en déduit que les suites $\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Psi^k(fh)}{h}$ et $\sum_{k=0}^{N-1} k \frac{\Psi^k(fh)}{h} \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}}$ sont convergentes dans $L^1(hm)$.

Comme $\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-\lambda^j} + \frac{1}{N} \frac{1}{1-\lambda^j} - \frac{1}{N} \frac{1-\lambda^{j(N+1)}}{(1-\lambda^j)^2} \right] = \frac{1}{1-\lambda^j}$, on en déduit la convergence dans $L^1(hm)$ de la suite $\sum_{k=0}^{N-1} (1 - \frac{k}{N}) P^k f$, soit G dans $L^1(hm)$ sa limite. G vérifie $(I - P)G = f$. D'ailleurs :

$$G = \frac{1}{h} \left[\sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{1-\lambda^j} \Phi_j(fh) + \sum_{k=0}^{\infty} \Psi^k(fh) \right] \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}}.$$

Exactement de la même façon, on montre que $h \sum_{k=0}^{N-1} (1 - \frac{k}{N}) P^k f$ converge dans V , sa limite vaut Gh . Ainsi on en déduit que la suite M_N admet une limite σ^2 dans \mathbb{R}_+ et que :

$$\sigma^2 = 2\langle G, f \rangle_{hm} - \langle f, f \rangle_{hm}$$

avec G dans $L^1(hm)$, Gh appartenant à V et $(I - P)G = f$. On a aussi :

$$\sigma^2 = 2 \left[\sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{1-\lambda^j} \langle \Phi_j(fh), f \rangle_m + \sum_{k=0}^{\infty} \langle \Psi^k(fh), f \rangle_m \right] - \langle f, f \rangle_{hm}.$$

2ÈME ÉTAPE : On suppose que $\sigma^2 = 0$, on montre les deux assertions annoncées.

Lemme 6.2. — La suite $(S_N f)_{N>0}$ est uniformément bornée dans $L^2(hm)$.

Démonstration. — Comme σ^2 est nul, on a :

$$\begin{aligned} \|S_N f\|_{2,hm}^2 &= NM_N \\ &= -2N \sum_{k=N}^{\infty} \langle \Psi^k(fh), f \rangle_m - 2 \sum_{k=0}^{N-1} k \langle \Psi^k(fh), f \rangle_m \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\lambda^j(\lambda^{jN} - 1)}{(1 - \lambda^j)^2} \langle \Phi_j(fh), f \rangle_m. \end{aligned}$$

On a :

$$|\langle \Psi^k(fh), f \rangle_m| = \left| \int_0^1 \Psi^k(fh) \cdot f dm \right| \leq \|\Psi^k(fh)\|_v \cdot \|f\|_1 \leq C\rho^k$$

avec $0 < \rho < 1$. Donc :

$$\left| N \sum_{k=N}^{\infty} \langle \Psi^k(fh), f \rangle_m \right| \leq CN \frac{\rho^N}{1 - \rho}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} k \langle \Psi^k(fh), f \rangle_m \right| \leq C \sum_{k=0}^{N-1} k\rho^k = C \left[\frac{\rho(1 - \rho^N)}{(1 - \rho)^2} - \frac{N\rho^N}{1 - \rho} \right].$$

λ est de module 1 donc $|1 - \lambda^{jN}| \leq 2$. Ainsi :

$$\|S_N f\|_{2,hm}^2 \leq \frac{2C}{(1 - \rho)^2} + 2 \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{|1 - \lambda^j|^2} |\langle \Phi_j(fh), f \rangle_m| \leq r^2. \quad \square$$

Lemme 6.3. — Pour tout g de $L^2(hm)$, pour tout $0 \leq j \leq p - 1$, il existe S_j dans $L^2(hm) \cap L^1(hm)$, $m(S_j h) = 0$ tel que l'on ait :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_{Np+j} f, g \rangle_{hm} = \langle S_j, g \rangle_{hm}.$$

Démonstration. — Pour tout $N > 0$, pour tout g de $L^2(hm)$ tel que gh soit dans V , on a :

$$\langle S_N f, g \rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1 - \lambda^{iN}}{1 - \lambda^i} \langle f, \Phi_i(gh) \rangle_m + \sum_{k=0}^{N-1} \langle f, \Psi^k(gh) \rangle_m.$$

Comme la suite $\sum_{k=0}^{N-1} \langle f, \Psi^k(gh) \rangle_m$ est convergente et comme $\lambda^p = 1$, on en déduit que pour $0 \leq j \leq p - 1$, les suites $(\langle S_{Np+j} f, g \rangle_{hm})_{N>0}$ sont convergentes.

On prend maintenant g dans $L^2(hm)$, gh n'est pas nécessairement dans V . V est dense dans $L^2(hm)$. D'après le lemme 6.2, la suite $(S_{Np+j} f)_{N>0}$ est uniformément bornée par r dans $L^2(hm)$, on en déduit alors que la convergence de la suite $(\langle S_{Np+j} f, g \rangle_{hm})_{N>0}$.

On en déduit donc que les suites $S_{Np+j}f$ sont faiblement convergentes dans $L^2(hm)$, on appelle S_j leurs limites faibles, elles sont dans $L^2(hm)$. Alors comme 1 est dans $L^2(hm)$, on en déduit que :

$$\langle S_j, 1 \rangle_{hm} = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_{Np+j}f, 1 \rangle_{hm}.$$

Or

$$\langle S_N f, 1 \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \langle f \circ T^k, 1 \rangle_{hm} = N \langle f, 1 \rangle_{hm} = 0,$$

donc $\langle S_j, 1 \rangle_{hm} = m(S_j h) = 0$. Comme la fonction signe de S_j est dans $L^2(hm)$ on en déduit que $m(|S_j| h)$ est fini, donc que S_j est dans $L^1(hm)$. \square

Lemme 6.4. — On a : $f = S - S \circ T$ dans $L^2(hm)$ avec $S = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} S_j$.

Démonstration. — Pour tout $N > 0$, pour tout $0 \leq j \leq p-1$ on a :

$$f - f \circ T^{Np+j} = S_{Np+j}f - S_{Np+j}f \circ T.$$

Donc, pour tout g de $L^2(hm)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f - f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} &= \langle S_{Np+j}f - S_{Np+j}f \circ T, g \rangle_{hm} \\ &= \langle S_{Np+j}f, g \rangle_{hm} - \langle S_{Np+j}f \circ T, g \rangle_{hm} \\ &= \langle S_{Np+j}f, g \rangle_{hm} - \langle S_{Np+j}f, Pg \rangle_{hm}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle f - f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} = \langle S_j, g \rangle_{hm} - \langle S_j, Pg \rangle_{hm}$$

donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} = -\langle S_j, g \rangle_{hm} + \langle S_j \circ T, g \rangle_{hm} + \langle f, g \rangle_{hm}.$$

Or $\langle f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} = \langle f \circ T^{Np+j}, gh \rangle_m$.

D'abord si gh est dans V on a : $\langle f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} = \langle f, \Phi^{Np+j}(gh) \rangle_m$ que l'on peut décomposer :

$$\begin{aligned} \langle f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} &= \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{(Np+j)i} \langle \Phi_i(gh), f \rangle_m + m(gh) \langle h, f \rangle_m \\ &\quad + \langle \Psi^{Np+j}(gh), f \rangle_m \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ij} \langle \Phi_i(gh), f \rangle_m + \langle \Psi^{Np+j}(gh), f \rangle_m. \end{aligned}$$

On a $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \Psi^N(gh), f \rangle_m = 0$ car Ψ a un rayon spectral $\rho < 1$, donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ij} \langle \Phi_i(gh), f \rangle_m.$$

Maintenant si gh n'est pas dans V , gh est donc simplement dans $L^2(hm)$. V est dense dans $L^2(hm)$, il existe donc une suite d'éléments de V qui approche uniformément gh dans $L^2(hm)$. On en déduit que l'on a aussi :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle f \circ T^{Np+j}, g \rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ij} \langle \Phi_i(gh), f \rangle_m.$$

Donc pour tout g dans $L^2(hm)$, pour tout $0 \leq j \leq p-1$, on a :

$$\langle f, g \rangle_{hm} = \langle S_j - S_j \circ T, g \rangle_{hm} + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ij} \langle \Phi_i(gh), f \rangle_m.$$

On fait la somme de ces p équations, comme $\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{ij} = 0$, on en déduit que, pour tout g de $L^2(hm)$, on a :

$$\langle f, g \rangle_{hm} = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \langle S_j - S_j \circ T, g \rangle_{hm}.$$

C'est-à-dire $f = S - S \circ T$ dans $L^2(hm)$, en posant $S = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} S_j$. \square

Maintenant on veut calculer explicitement S .

Lemme 6.5. — On a : $P(S \circ T) = S$ dans $L^2(hm)$.

Démonstration. — On sait que S est dans $L^2(hm)$, donc $S \circ T$ est aussi dans $L^2(hm)$ car

$$\int_I (S \circ T)^2 hdm = \int_I S^2 \circ T hdm = \int_I S^2 hdm < \infty.$$

Par définition de P on a pour tout g de $L^2(hm)$:

$$\langle P(S \circ T), g \rangle_{hm} = \langle S \circ T, g \circ T \rangle_{hm} = \langle S, g \rangle_{hm}$$

et donc $P(S \circ T) = S$ dans $L^2(hm)$. \square

Lemme 6.6. — $S = f - G$ dans $L^1(hm)$ et $Sh = (f - G)h$ dans V .

Démonstration. — Des lemmes 6.4 et 6.5, on déduit que pour tout $0 \leq j \leq p-1$, pour tout $N > 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{Np+j} P^k f = P^{Np+j} S - S \text{ dans } L^2(hm).$$

Donc pour tout g de $L^2(hm)$, on a :

$$\left\langle \sum_{k=0}^{Np+j} P^k f, g \right\rangle_{hm} - \langle f, g \rangle_{hm} = \langle P^{Np+j} S, g \rangle_{hm} - \langle S, g \rangle_{hm}.$$

On a :

$$\left\langle \sum_{k=0}^{Np+j} P^k f, g \right\rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1 - \lambda^{i(j+1)}}{1 - \lambda^i} \langle \Phi_i(fh), g \rangle_m + \sum_{k=0}^{Np+j} \langle \Psi^k(fh), g \rangle_m.$$

On appelle u la fonction de $L^2(hm)$ telle que uh appartient à V et $(I - \Psi)(uh) = fh$.

On a alors :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=0}^{Np+j} P^k f, g \right\rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1 - \lambda^{i(j+1)}}{1 - \lambda^i} \langle \Phi_i(fh), g \rangle_m + \langle u, g \rangle_{hm}.$$

S est dans $L^2(hm)$, V est dense dans $L^2(hm)$, quitte à approcher uniformément S par une suite d'éléments de V , on a donc :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle P^{Np+j} S, g \rangle_{hm} = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ij} \langle \Phi_i(Sh), g \rangle_m.$$

Ainsi pour tout g de $L^2(hm)$, pour tout $0 \leq j \leq p-1$, on a :

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1 - \lambda^{i(j+1)}}{1 - \lambda^i} \langle \Phi_i(fh), g \rangle_m + \langle u, g \rangle_{hm} - \langle f, g \rangle_{hm} = -\langle S, g \rangle_{hm} + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{ij} \langle \Phi_i(Sh), g \rangle_m.$$

On fait la somme de ces p équations, on obtient, pour tout g de $L^2(hm)$:

$$\langle S, g \rangle_{hm} = \langle f - u, g \rangle_{hm} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{1 - \lambda^i} \langle \Phi_i(fh), g \rangle_m = \langle f - G, g \rangle_{hm}.$$

Donc dans $L^2(hm)$, S est égal à $f - G$, où G vérifie $(I - P)G = f$, comme fh et Gh sont dans V , on en déduit que Sh est aussi dans V . \square

3ÈME ÉTAPE : On démontre la réciproque. Si $f = u \circ T - u$, avec u dans $L^2(hm)$ et uh dans V . Alors $S_N f = u \circ T^N - u$. Donc

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{N}} S_N f \right)^2 h dm = \frac{1}{N} \int_0^1 (u^2 \circ T^N - 2u \circ T^N \cdot u + u^2) h dm$$

qui tend bien vers 0 quand N tend vers $+\infty$ donc $\sigma^2 = 0$. \square

On peut alors démontrer le théorème limite central.

6.2 Le théorème limite central

Définition 6.7. — On dit qu'une fonction f de V , $m(fh) = 0$, vérifie l'hypothèse (H) s'il existe u dans $L^2(hm)$ avec uh dans V tel que

$$f = u - u \circ T \text{ dans } L^2(hm) \text{ ou } fh = uh - u \circ T \cdot h \text{ dans } V.$$

Théorème 6.8. — Soit f dans V , si $f - m(fh)$ ne vérifie pas (H), alors pour tout réel v , on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} hm \left[\frac{S_N f - N m(fh)}{\sigma \sqrt{N}} \leq v \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-t^2/2} dt.$$

Démonstration. — La démonstration de ce théorème se fait en plusieurs étapes.

1ÈRE ÉTAPE : On montre que $\lambda'_0(0) = hm(f)$.

D'après la proposition 5.2 pour tout $|\theta| < a$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp(i\theta S_n f) h dm &= \int_0^1 \Phi^n(\exp(i\theta S_n f) h) dm = \int_0^1 \Phi_f^n(i\theta)(h) dm \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k^n(i\theta) \int_0^1 \Phi_k(i\theta)(h) dm + \int_0^1 \Psi^n(i\theta)(h) dm. \end{aligned}$$

Toutes les fonctions écrites sont analytiques en θ . On fixe t dans \mathbb{R} , alors pour n suffisamment grand, on a : $|\frac{t}{n}| < a$. Alors :

$$\int_0^1 \exp(it \frac{S_n f}{n}) h dm = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k^n(\frac{it}{n}) \int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{n})(h) dm + \int_0^1 \Psi^n(\frac{it}{n})(h) dm.$$

On peut alors développer $\int_0^1 \exp(it \frac{S_n f}{n}) h dm$:

$$\begin{aligned} \lambda_k^n(\frac{it}{n}) &= [\lambda^k + \frac{it}{n} \lambda'_k(0) - \frac{t^2}{2n^2} \lambda''_k(0) + \frac{t^2}{n^2} \varepsilon(\frac{it}{n})]^n \text{ avec } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(\frac{it}{n}) = 0 \\ &= \lambda^{nk} \exp(it \frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k}) \left[1 - \frac{t^2}{2n} \left(\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} - \frac{\lambda_k''(0)}{\lambda^{2k}} \right) + \frac{t^2}{n^2} \bar{\varepsilon}(\frac{it}{n}) \right] \\ \Phi_k(\frac{it}{n}) &= \Phi_k + \frac{it}{n} \Phi_k^{(1)} + \frac{it}{n} \varepsilon(\frac{it}{n}) \end{aligned}$$

où $\Phi_k^{(1)}$ et $\varepsilon(\frac{it}{n})$ sont des opérateurs bornés de V et où $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varepsilon(\frac{it}{n})\|_v = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{n})(h) dm &= \int_0^1 \Phi_k(h) dm + \frac{it}{n} \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm + \frac{it}{n} \bar{\varepsilon}(\frac{it}{n}), \\ \text{avec } \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varepsilon}(\frac{it}{n}) &= 0 \text{ et } \int_0^1 \Phi_k(h) dm = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ 1 & \text{si } k = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp(it \frac{S_n f}{n}) h dm &= \exp(it \lambda'_0(0)) + \frac{it}{n} \int_0^1 \Phi_0^{(1)}(h) dm \cdot \exp(it \lambda'_0(0)) \\ &\quad - \frac{t^2}{2n} (\lambda''_0(0) - \lambda_0''(0)) \exp(it \lambda'_0(0)) \\ &\quad + \frac{it}{n} \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{nk} \exp(it \frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k}) \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm \\ &\quad + \int_0^1 \Psi^n(\frac{it}{n})(h) dm + \frac{it}{n} \varepsilon(\frac{it}{n}). \end{aligned}$$

Comme $\|\Psi^n(\frac{it}{n})(h)\|_v \leq \frac{t}{n} |C\rho_2^{n+1}|$, on peut passer à la limite dans le second membre, on obtient alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \exp(it \frac{S_n f}{n}) h dm = \exp[it\lambda'_0(0)].$$

Mais le théorème de Birkhoff entraîne, comme (I, \mathfrak{B}, T, hm) est un système dynamique ergodique et comme f est dans $L^1(m)$ donc dans $L^1(hm)$, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n f}{n} = m(fh) \text{ hm-p.p.},$$

cette dernière fonction étant hm -intégrable on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \exp(it \frac{S_n f}{n}) h dm = \exp(itm(fh)) = \exp(it\lambda'_0(0)).$$

Ainsi pour tout t fixé dans \mathbb{R} , on a $\exp(itm(fh)) = \exp(it\lambda'_0(0))$, donc $m(fh) = \lambda'_0(0)$ que l'on suppose pour la suite de la preuve égale à 0. \square

2ÈME ÉTAPE : On démontre que $\sigma^2 = \lambda'_0(0)$. Il est bien connu que :

$$\int_0^1 [\frac{S_n f}{\sqrt{n}}]^2 h dm = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} [\int_0^1 \exp(\frac{it}{\sqrt{n}} S_n f) h dm]_{t=0}.$$

On fixe t dans \mathbb{R} , alors pour n suffisamment grand :

$$\int_0^1 \exp(\frac{it}{\sqrt{n}} S_n f) h dm = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k^n(\frac{it}{\sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm + \int_0^1 \Psi^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm,$$

on peut alors faire un développement de $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^1 \exp(\frac{it}{\sqrt{n}} S_n f) h dm$, car toutes les fonctions écrites sont analytiques en $\frac{t}{\sqrt{n}}$. Pour dériver le premier terme on utilise $(uv)'' = u''v + u\bar{v}'' + 2u'v'$, avec $u(t) = \lambda_k^n(\frac{it}{\sqrt{n}})$ et $v(t) = \int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm$. Si $k \neq 0$, on a :

$$v(0) = 0, u(0) = \lambda^{nk}, u'(0) = i\sqrt{n}\lambda^{k(n-1)}\lambda'_k(0).$$

On a aussi :

$$\Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) = \frac{it}{\sqrt{n}}\Phi_k^{(1)}(h) - \frac{t^2}{2n}\Phi_k^{(2)}(h) + \frac{t^2}{n}\varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)$$

où les opérateurs $\Phi_k^{(1)}$, $\Phi_k^{(2)}$ et $\varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})$ sont des opérateurs bornés de V et où : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})\|_v = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\lambda_k^n(\frac{it}{\sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm]_{t=0} &= -\lambda^{nk} \frac{1}{n} \int_0^1 \Phi_k^{(2)}(h) dm \\ &\quad - 2\lambda^{(n-1)k} \lambda'_k(0) \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm. \end{aligned}$$

Si $k = 0, v(0) = 1, u(0) = 1, u'(0) = 0, u''(0) = -\lambda_0''(0)$.

$$v'(0) = \frac{i}{\sqrt{n}} \int_0^1 \Phi_0^{(1)}(h) dm \text{ et } v''(0) = \frac{-1}{n} \int_0^1 \Phi_0^{(2)}(h) dm.$$

On sait que :

$$\Psi_f^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(0, \rho_2)} \lambda^n R(\lambda, \Phi_f\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right))(h) d\lambda.$$

La fonction $\theta \mapsto R(\lambda, \Phi_f(i\theta))$ est analytique si $|\theta| < a$, il existe donc $N > 0$ tel que $n > N$ entraîne que :

$$R(\lambda, \Phi\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)) = R(\lambda, \Phi) - \frac{it}{\sqrt{n}} R^{(1)}(\lambda, \Phi) - \frac{t^2}{2n} R^{(2)}(\lambda, \Phi) + \frac{t^2}{n} \bar{R}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)$$

où les opérateurs $R^{(1)}(\lambda, \Phi), R^{(2)}(\lambda, \Phi)$ et $\bar{R}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)$ sont des opérateurs bornés de V et où $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{R}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h)\|_v = 0$. Ainsi :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^1 \Psi_f^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h) dm|_{t=0} = \frac{1}{n} \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(\rho_2, 0)} \lambda^n R^{(2)}(\lambda) d\lambda$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{S_n f}{\sqrt{n}}\right)^2 h dm &= \lambda_0''(0) + 2 \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{k(n-1)} \lambda_k'(0) \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm \\ &+ \frac{1}{n} \left[\int_0^1 \Phi_1^{(2)}(h) dm + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{nk} \int_0^1 \Phi_k^{(2)}(h) dm \right] + \frac{\varepsilon(n)}{n}. \end{aligned}$$

Comme $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\frac{S_n f}{\sqrt{n}}\right)^2 h dm$. Et comme dans le second terme tout a une limite sauf éventuellement le terme borné $2 \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{(n-1)k} \lambda_k'(0) \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm$ qui « tourne », on en déduit qu'il tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Et donc :

$$\sigma^2 = \lambda_0''(0). \quad \square$$

3ÈME ÉTAPE : On démontre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Phi_f^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h) dm = \exp\left(\frac{-t^2 \sigma^2}{2}\right)$.

On fixe t dans \mathbb{R} , alors pour n suffisamment grand, on peut écrire d'après la proposition 5.2 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi_f^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h) dm &= \lambda_0^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right) \int_0^1 \Phi_0\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h) dm \\ &+ \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right) \int_0^1 \Phi_k\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h) dm + \int_0^1 \Psi_f^n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)(h) dm. \end{aligned}$$

On a : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Psi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm = 0$ comme dans la 1ère étape,

$$\begin{aligned} [\lambda_0(\frac{it}{\sqrt{n}})]^n &= [1 - \frac{t^2}{2n} \lambda_0''(0) - \frac{it^3}{6n\sqrt{n}} \lambda_0'''(0) + \frac{t^3}{n\sqrt{n}} \varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})]^n \\ &= e^{-t^2 \lambda_0''(0)/2} [1 - \frac{it^3}{\sqrt{n}} \lambda_0'''(0) + \frac{t^3}{6\sqrt{n}} \varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})] \\ &\text{avec } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}}) = 0, \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \Phi_0(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm = 1 + \frac{it}{\sqrt{n}} \int_0^1 \Phi_0^{(1)}(h) dm + \frac{it}{\sqrt{n}} \varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}}).$$

Pour $k \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} [\lambda_k(\frac{it}{\sqrt{n}})]^n &= \lambda^{nk} [1 - \frac{it}{\sqrt{n}} \frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k} - \frac{t^2}{2n} \frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} - \frac{it^3}{6n\sqrt{n}} \frac{\lambda'''_k(0)}{\lambda^k} + \frac{it^3}{n\sqrt{n}} \varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})]^n \\ &= \lambda^{nk} \exp[\sqrt{n} \frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k} it - t^2 (\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} + \frac{2\lambda'_k(0)}{\lambda^{2k}})] \\ &\cdot [1 - \frac{it^3}{6\sqrt{n}} B_k + \frac{it^3}{\sqrt{n}} \varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})], \\ \int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm &= \frac{it}{\sqrt{n}} \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm + \frac{it}{\sqrt{n}} \varepsilon(\frac{it}{\sqrt{n}}). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) dm &= e^{-t^2 \lambda_0''(0)/2} \\ &+ \frac{it}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{kn} e^{it \lambda'_k(0) \frac{\sqrt{n}}{\lambda^k}} e^{-t^2 [A_k]} \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h) dm + o(\frac{1}{\sqrt{n}}). \end{aligned}$$

Comme la fonction $\theta \mapsto \lambda_k(i\theta)$ est analytique et comme il existe $a > 0$ tel que si $|\theta| < a$, on a $|\lambda_k(i\theta)| \leq 1$, on en déduit que $\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k}$ est réel. En effet :

$$\lambda_k(i\theta) = \lambda^k [1 + i\theta \frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k} - \frac{\theta^2}{2} \frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} + o(\theta^2)].$$

On passe au module :

$$1 \geq [1 - \theta \operatorname{Im} \left(\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k} \right) - \frac{\theta^2}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} \right)]^2 + [\theta \operatorname{Re} \left(\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k} \right) - \frac{\theta^2}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} \right)]^2 + o(\theta^2)$$

d'où

$$1 \geq 1 - 2\theta \operatorname{Im} \left(\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k} \right) + \theta^2 [[\operatorname{Re} \left(\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k} \right)]^2 + [\operatorname{Im} \left(\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k} \right)]^2 - \operatorname{Re} \left(\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k} \right)] + o(\theta^2)$$

ce qui est possible uniquement si $Im \frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k} = 0$. Donc on peut passer à la limite et on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Phi_f^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) dm = e^{-t^2 \frac{\lambda''_0(0)}{2}} = e^{-t^2 \frac{\sigma^2}{2}}. \quad \square$$

4ÈME ÉTAPE : Conclusion.

On a démontré que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Phi_f^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \exp \left(\frac{it}{\sqrt{n}} S_n f \right) h dm = e^{-t^2 \frac{\sigma^2}{2}}.$$

On a donc aussi : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \exp(it \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}) h dm = e^{-\frac{t^2}{2}}$ qui est la transformée de Fourier de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. La méthode des fonctions caractéristiques de Paul Lévy entraîne alors la convergence en loi de $\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}$ vers la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Donc pour tout v de \mathbb{R} , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} hm \left[\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \leq v \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad \square$$

Remarque. — Le théorème limite central reste valable pour toute mesure de probabilité $\nu = h_1 hm$ avec $h_1 h$ dans V . Alors, pour f dans V , $m(fh) = 0$ et ne vérifiant pas (H), pour tout réel v , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu \left[\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \leq v \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

La démonstration est exactement celle qui précède, il suffit de montrer que l'on a pour tout t de \mathbb{R} :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Phi_f^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h_1 h) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \exp(it \frac{S_n f}{\sqrt{n}}) d\nu = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

Les développements limités précédents restent valables et donnent :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi_f^n \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) (h_1 h) dm &= e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \int_0^1 \Phi_0(h_1 h) dm \\ &+ \frac{it}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{kn} e^{it \lambda'_k(0) \frac{\sqrt{n}}{\lambda^k}} e^{-t^2 [A_k]} \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(hh_1) dm + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Comme $\int_0^1 \Phi_0(h_1 h) dm = m(h_1 h) = 1$, on a le résultat voulu en passant à la limite.

Application. — Si on sait que la fonction $\frac{1}{h} \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}}$ est dans V , on prend

$$h_1 = \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}} \frac{1}{h} \frac{1}{m(\{h \neq 0\})}$$

on obtient alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m[\{\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \leq v\} \cap \{h \neq 0\}]}{m(\{h \neq 0\})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Par exemple pour la transformation fraction continue, on a :

$$h(x) = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{1+x} \text{ donc } \{h \neq 0\} = I \text{ et } m(\{h \neq 0\}) = 1.$$

On a donc pour tout f de V , $m(fh) = 0$, f ne vérifiant pas (H), pour tout réel v :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} m[\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \leq v] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ \lim_{n \rightarrow \infty} hm[\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \leq v] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{u^2}{2}} du. \end{aligned}$$

Pour la transformation $T(x) = \beta x + \alpha[1]$, $\beta = (1 + \sqrt{5})/2$, $\alpha = (3 - \beta)/2$, on a : $\{h = 0\} = [(\beta - 1)/2, \alpha]$ et $m(\{h \neq 0\}) = \beta - 1$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} m[\{\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \leq v\} \setminus [(\beta - 1)/2, \alpha]] &= \frac{\beta - 1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ \lim_{n \rightarrow \infty} hm[\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \leq v] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{u^2}{2}} du. \end{aligned}$$

7 REMARQUES À PROPOS DE L'HYPOTHÈSE (H)

Pratiquement, pour appliquer le théorème central limite à une fonction f , on doit être capable de décider si elle vérifie l'hypothèse (H) ou non.

Remarque 1. — Dans le cas où f est une fonction continue sauf en un nombre dénombrable (au plus) de points de $I : \mathcal{S}_f$, on peut préciser (H). Si $f = u - u \circ T$ hm-p.p ($m(fh) = 0$), la proposition 6.1 et le lemme 6.6 donnent la valeur de u :

$$u = S = \frac{1}{h} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \Psi^j(hf) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{1-\lambda^k} \Phi_k(fh) \right] \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}}.$$

On peut maintenant trouver les points de discontinuité de u , ils correspondent aux points de discontinuité de h , de $(\Psi^j(fh))_{j \in \mathbb{N}^*}$ et de $(\Phi_k(fh))_{2 \leq k \leq p}$ [ce sont les points de discontinuité de $(\Phi^j(fh))_{j \geq n_0}$ car :

$$\Phi_k(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=n_0}^{n+n_0-1} \Phi^j(fh) \text{ dans } V,$$

on utilise ici le fait que si $f_n \rightarrow f$ dans V alors $f_n \rightarrow f$ uniformément sur I].

Points de discontinuité de h , h est définie comme la limite dans V de la suite :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=n_0}^{n+n_0-1} \Phi^k(1),$$

ses points de discontinuité sont donc ceux des fonctions $(\Phi^k(1))$. On a :

$$\Phi(1)(x) = \sum_{j \in J} \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(I_j)}(x),$$

la fonction $x \mapsto \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|}$ étant continue sur I , les points de discontinuité de $\Phi(1)$ sont donc les $\{T(a_j), j \in J\}$. L'ensemble des sauts de h est donc :

$$\mathcal{S}_h = \{T^n(a_j) | j \in J, n \geq 1\}.$$

Points de discontinuité de $\Phi(fh)$, on a :

$$\Phi(fh)(x) = \sum_{j \in J} (fh)(\sigma_j x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x).$$

Les sauts de $\Phi(fh)$ sont alors les sauts de $(f \circ \sigma_j)_{j \in J}$ donc l'ensemble $T(\mathcal{S}_f)$, ceux de $(h \circ \sigma_j)_{j \in J}$ donc $T(\mathcal{S}_h)$ et l'ensemble $\{T(a_j)\}_{j \in J}$. Donc :

$$\mathcal{S}_{\Phi(fh)} = T(\mathcal{S}_h \cup \mathcal{S}_f \cup \{a_j\}_{j \in J}).$$

Alors les sauts de Φ_k sont dans l'ensemble :

$$\cup_{n \geq n_0} T^n[\mathcal{S}_h \cup \mathcal{S}_f \cup \{a_j\}_{j \in J}].$$

Comme $\Psi^n(fh) = \Phi^n(fh) - \lambda^n \Phi_1(fh) - \dots - \lambda^{n(p-1)} \Phi_{p-1}(fh)$ car $m(fh) = 0$ on a :

$$\mathcal{S}_u = \bigcup_{n \geq 1} T^n[\mathcal{S}_h \cup \mathcal{S}_f \cup \{a_j\}_{j \in J}].$$

Soit $\mathcal{S} = \mathcal{S}_u \cup \mathcal{S}_f \cup T^{-1}(\mathcal{S}_u)$. C'est un ensemble dénombrable de points de I et sur $(I \setminus \{h \neq 0\}) \setminus \mathcal{S}$ on a $f = u - u \circ T$. \mathcal{S} se compose de l'ensemble des images par $T^n, n \geq 0$, des points de discontinuité de f et des points de la subdivision de I associée à T :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n \geq 0} T^n[\{a_j, j \in J\} \cup \mathcal{S}_f].$$

Ainsi si on est capable de montrer qu'un point y T -périodique de période k n'est pas dans $\mathcal{S} \cup T^{-1}(\mathcal{S}) \cup \dots \cup T^{-k}(\mathcal{S})$, on peut utiliser le test des points périodiques pour décider si f vérifie la condition (H) ou non : on calcule $a = S_k f(y)$, si a n'est pas nul alors f ne vérifie pas (H), si $a = 0$, éventuellement, f vérifie (H).

Remarque 2. — Dans le cas où h est minorée par une constante strictement positive sur $\{h \neq 0\}$, la fonction $\frac{1}{h} \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}}$ est dans V alors :

$$u = G - f = \frac{1}{h} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \Psi^j(fh) + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{1 - \lambda^j} \Phi_j(fh) \right] \mathbf{1}_{\{h \neq 0\}}$$

est dans V .

L'équation : $fh = uh - u \circ T \cdot h$ dans V revient donc à : $f = u - u \circ T$ dans V et donc $u \circ T = u - f$ est dans V . Ceci n'est pas possible si la subdivision associée à T admet un nombre dénombrable de morceaux.

Ainsi on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 7.1. — Si T est une transformation dilatante telle que :

1. la partition associée admet un nombre dénombrable de morceaux;
2. h est minorée par une constante strictement positive sur $\{h \neq 0\}$.

Alors pour toute fonction non constante de V , on peut appliquer le théorème limite central.

Cette proposition s'applique par exemple à la transformation « fraction continue ».

Une classe intéressante de fonctions f est celle des indicateurs de borélien, on a :

Proposition 7.2. — Si $\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h \neq 0\}}$ est dans V , si f est l'indicatrice d'un borélien A de \mathfrak{B} , si $f - hm(A)$ vérifie (H), donc s'il existe u de V tel que $f - hm(A) = u \circ T - u$ alors :

1. ou $hm(A) = 0$ ou 1
2. ou il existe $1 \leq k \leq p - 1$ tel que $hm(A) = \frac{k}{p}$.

Démonstration. — On suppose donc que $f - hm(A) = u \circ T - u$ avec u dans V . On a alors :

$$e^{2i\pi[f-hm(A)]} = e^{[u \circ T - u]2i\pi}$$

f vaut 0 ou 1, donc :

$$e^{-2\pi i h m(A)} = e^{2i\pi(u \circ T - u)}.$$

Ainsi, on a :

$$\Phi(e^{2iu\pi} \circ T.h) = e^{2iu\pi} \cdot h = e^{-2i\pi h m(A)} \Phi(e^{2iu\pi} \cdot h),$$

car $e^{iu2\pi} \cdot h$ est dans V . Donc, $e^{2i\pi h m(A)}$ est une valeur propre de module 1 de Φ , elle vaut donc 1 ou λ^k , $1 \leq k \leq p - 1$.

Si $e^{2i\pi h m(A)} = 1$, alors comme $hm(A)$ est dans $[0, 1]$, on a : $hm(A) = 0$ ou 1 .

Si $e^{2i\pi h m(A)} = \lambda^k$ alors $hm(A) = \frac{k}{p}$. \square

Cette proposition s'applique par exemple aux transformations linéaires par morceaux suivantes $T: x \mapsto \beta x + \alpha[1]$, avec $\alpha = 0$ et $\beta > 1$ ou $\alpha \in]0, 1[$ et $\beta > 2$. Ce sont les cas où elles sont faiblement mélangeantes, voir Wilkinson [W]. On en déduit qu'on peut appliquer le théorème limite central à l'indicatrice de n'importe quel intervalle non vide strictement contenu dans $[0, 1]$.

8 LA VITESSE DE CONVERGENCE

La méthode employée pour démontrer le théorème central limite permet aussi de donner la vitesse de convergence.

Théorème 8.1. — *Sous les hypothèses du théorème 6.8 et si $m(fh) = 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\sup_{v \in \mathbb{R}} |hm[\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \leq v] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{u^2}{2}} du| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Démonstration. — Elle repose sur l'inégalité de Berry-Esseen [F] qui peut s'écrire ici :

Il existe $K > 0$ tel que pour tout $U > 0$, tout n vérifiant $\frac{U}{\sigma \sqrt{n}} < a$, on a :

$$\sup_{v \in \mathbb{R}} |hm[\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \leq v] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{u^2}{2}} du| \leq \frac{K}{U} + \frac{1}{\pi} \int_{-U}^U \frac{|\int_0^1 e^{iu \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} h dm - e^{-\frac{u^2}{2}}|}{|u|} du.$$

Comme $\frac{U}{\sigma \sqrt{n}} < a$, alors pour tout u dans $[-U, U]$ qui vérifie $\frac{u}{\sigma \sqrt{n}} < a$, on peut alors utiliser la proposition 5.2, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{iu \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} h dm &= \int_0^1 \Phi_f^n(\frac{iu}{\sigma \sqrt{n}})(h) dm \\ &= \lambda_0^n(\frac{iu}{\sigma \sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_0(\frac{iu}{\sigma \sqrt{n}})(h) dm \\ &+ \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k^n(\frac{iu}{\sigma \sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_k(\frac{iu}{\sigma \sqrt{n}})(h) dm + \int_0^1 \Psi_f^n(\frac{iu}{\sigma \sqrt{n}})(h) dm \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} |\int_0^1 e^{iu \frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}}} h dm - e^{-\frac{u^2}{2}}| &\leq \sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k^n(\frac{iu}{\sigma \sqrt{n}})| \int_0^1 |\Phi_k(\frac{iu}{\sigma \sqrt{n}})(h) dm| \\ &+ |\int_0^1 \Psi_f^n(\frac{iu}{\sigma \sqrt{n}})(h) dm| \\ &+ |\lambda_0^n(\frac{iu}{\sigma \sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_0(\frac{iu}{\sigma \sqrt{n}})(h) dm - e^{-\frac{u^2}{2}}|. \end{aligned}$$

Les applications $\frac{u}{\sigma\sqrt{n}} \mapsto \lambda_k(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})$ sont analytiques. Les opérateurs $\frac{u}{\sigma\sqrt{n}} \mapsto \Phi_k(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})$ et $\Psi_f(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})$ sont analytiques on a alors :

$$|\int_0^1 \Psi_f^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm| \leq \frac{C\rho_2^{n+1}}{\sigma\sqrt{n}}|u|.$$

D'après les calculs de la 3ème étape de la preuve du théorème limite central on a :

$$\begin{aligned} |\lambda_0^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_0(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm - e^{-\frac{u^2}{2}}| &= |e^{-\frac{u^2}{2}} [\frac{-iu^3}{6\sigma^3\sqrt{n}} \lambda_0''(0) \\ &+ \frac{iu}{\sigma\sqrt{n}} \int_0^1 \Phi_0^{(1)}(h)dm + \frac{k}{\sqrt{n}} \varepsilon(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})]| \\ &\leq e^{-\frac{u^2}{2}} [\frac{A|u|^3}{\sqrt{n}} + \frac{B|u|}{\sqrt{n}}]. \end{aligned}$$

$|\lambda_k^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_k(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm| \leq \exp[-\frac{u^2}{\sigma^2} C_k^2] D_k \frac{|u|}{\sqrt{n}}$ où C_k est dans \mathbb{R} . On peut alors intégrer

$$\int_{-U}^U \frac{|\int_0^1 e^{iu\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} hdm - e^{-\frac{u^2}{2}}|}{|u|} du \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-U}^U [e^{-\frac{u^2}{2}} (Au^2+B) + \sum_{k=2}^p D_k e^{-\frac{u^2}{\sigma^2} C_k^2} + \frac{C\rho_2^{n+1}}{\sigma}] du$$

comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-U}^U \frac{|\int_0^1 e^{iu\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} hdm - e^{-\frac{u^2}{2}}|}{|u|} du &\leq (\frac{A}{\sqrt{n}} + \frac{B}{\sqrt{n}}) \sqrt{2\pi} \sum_{k=2}^p D_k \frac{\sigma\sqrt{n}}{C_k\sqrt{n}} + \frac{2C\rho_2^{n+1}U}{\sigma\sqrt{n}} \\ &= \frac{C_1}{\sqrt{n}} + C_2\rho_2^{n+1} \frac{U}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sup_{v \in \mathbb{R}} |hm[\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] - \int_{-\infty}^v e^{-\frac{u^2}{2}} du| \leq \frac{K}{U} + \frac{C_1}{\pi\sqrt{n}} + C_2\rho_2^{n+1} \frac{U}{\sqrt{n}}$$

et ceci pour $\frac{U}{\sigma\sqrt{n}} < a$, on peut prendre $U = \alpha\sqrt{n}\sigma$ avec $\alpha < a$. On a alors :

$$\sup_{v \in \mathbb{R}} |hm[\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] - \int_{-\infty}^v e^{-\frac{u^2}{2}} du| \leq \frac{K}{\sigma\alpha\sqrt{n}} + \frac{C_1}{\pi\sqrt{n}} + \frac{C_2\rho_2^{n+1}}{\sigma\alpha}$$

comme ρ_2^{n+1} est négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\rho_2 < 1$ on a le résultat voulu en posant $C = \frac{K}{\sigma\alpha} + \frac{C_1}{\pi} + \frac{C_2}{\sigma\alpha}$:

$$\sup_{v \in \mathbb{R}} |hm[\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{u^2}{2}} du| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}. \quad \square$$

On remarque ici qu'il suffit que T soit dans \mathcal{C} pour montrer ce résultat, l'hypothèse (3') n'a pas encore servi.

9 THÉORÈME LIMITE LOCAL

Jusqu'ici, seule l'hypothèse (3) a servi, maintenant on va utiliser l'hypothèse plus forte (3'). On suppose donc que T est dans \mathcal{C}' et bien sûr que le système dynamique (I, \mathcal{B}, T, hm) est ergodique. Soit f une fonction à variation bornée et à valeurs réelles fixée. D'abord on va prouver un résultat préliminaire, il donne la décomposition spectrale de l'opérateur $\Phi_f(i\theta)$ pour tout θ de \mathbb{R} et non plus simplement au voisinage de $\theta = 0$ comme dans le théorème des perturbations. Ce résultat spectral étant prouvé, on pourra alors démontrer un théorème limite local en adaptant simplement la méthode de Rousseau-Egèle [RE].

9.1 Décomposition spectrale de l'opérateur $\Phi_f(i\theta)$

Proposition 9.1. — *Pour tout θ de \mathbb{R} , l'opérateur $\Phi_f(i\theta)$ vérifie les hypothèses du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu.*

Il faut déjà remarquer que ce résultat est beaucoup plus fort que ceux de la partie 6, car il est global, on verra ici que l'hypothèse (3) ne suffit plus et que l'on va vraiment utiliser (3').

Démonstration. — On remarque qu'il suffit de vérifier l'inégalité de Doeblin-Fortet, car $\Phi_f(i\theta)(g) = \Phi(e^{i\theta f}g)$ si g est dans V . Il suffit donc de montrer qu'il existe un entier $N > 0$ et des constantes $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < \infty$, tels que pour g dans V on ait :

$$v(\Phi_f^{Nn_0}(i\theta)(g)) \leq \alpha v(g) + \beta \|g\|_1.$$

La démonstration est à peu près la même que celle de la proposition 4.1. On fixe g dans V , θ dans \mathbb{R} , on écrit :

$$\Phi_f^{Nn_0}(i\theta)(g) = \Phi^{Nn_0}(e^{i\theta S_{Nn_0}f} \cdot g)$$

$$\Phi^{Nn_0}(g)(x) = \sum_{j \in J_{Nn_0}} \left[\frac{g}{|(T^{Nn_0})^j|} \circ \sigma_j \cdot \mathbf{1}_{T^{Nn_0}(\bar{I}_j)} \right](x).$$

Ici la partition $(I_j)_{j \in J_{Nn_0}}$ est relative à la transformation T^{Nn_0} les $(\sigma_j)_{j \in J_{Nn_0}}$ sont les réciproques partielles de T^{Nn_0} . Ainsi :

$$\begin{aligned} v(\Phi_f^{Nn_0}(i\theta)(g)) &= v\left[\sum_{j \in J_{Nn_0}} \left(\frac{g \cdot e^{i\theta S_{Nn_0}f}}{|(T^{Nn_0})'|}\right) \circ \sigma_j \cdot \mathbf{1}_{T^{Nn_0}(\bar{I}_j)}\right] \\ &\leq \sum_{j \in J_{Nn_0}} v\left[\frac{g \cdot e^{i\theta S_{Nn_0}f}}{|(T^{Nn_0})'|} \circ \sigma_j \cdot \mathbf{1}_{T^{Nn_0}(\bar{I}_j)}\right]. \end{aligned}$$

Dès que la partition associée à T contient un nombre infini de morceaux, la fonction $S_{Nn_0}f$ n'est plus à variation bornée sur I ; par contre, $S_{Nn_0}f$ est à variation bornée sur $T^{Nn_0}(\bar{I}_j)$ pour tout $j \in J_{Nn_0}$. On peut donc utiliser la propriété suivante dès que φ est à variation bornée au moins sur $[a, b]$, on a :

$$v[\varphi \cdot \mathbf{1}_{[a,b]}] \leq |\varphi(a)| + |\varphi(b)| + v_{[a,b]}(\varphi),$$

où $v_{[a,b]}(\varphi)$ désigne la variation de φ dans l'intervalle $[a, b]$. On désigne par $[a_j, b_j]$ l'intervalle $T^{Nn_0}(\bar{I}_j)$, j étant dans J_{Nn_0} . Alors,

$$\begin{aligned} v\left[\frac{g \cdot e^{i\theta S_{Nn_0}f}}{|(T^{Nn_0})'|} \circ \sigma_j \cdot \mathbf{1}_{[a_j, b_j]}\right] &\leq v_{[a_j, b_j]}\left[\frac{g \cdot e^{i\theta S_{Nn_0}f}}{|(T^{Nn_0})'|} \circ \sigma_j\right] \\ &\quad + \left|\frac{g}{|(T^{Nn_0})'|} \circ \sigma_j(a_j)\right| + \left|\frac{g}{|(T^{Nn_0})'|} \circ \sigma_j(b_j)\right|. \end{aligned}$$

D'après les calculs faits dans la proposition 4.1, on a :

$$\left|\frac{g}{|(T^{Nn_0})'|} \circ \sigma_j(a_j)\right| + \left|\frac{g}{|(T^{Nn_0})'|} \circ \sigma_j(b_j)\right| \leq \frac{1}{\gamma^N} v_{I_j}(g) + \left(\frac{K^N}{\gamma^{2N}} + \frac{2}{\delta}\right) \int_{I_j} |g| dm.$$

Où

$$\begin{aligned} \delta &= \inf_{j \in J_{Nn_0}} [m(T^{Nn_0}(\bar{I}_j))] > 0, \\ K &= \sup \left| \frac{(T^{n_0})'(x) - (T^{n_0})'(y)}{x - y} \right| < \infty, \end{aligned}$$

on prend le supremum pour x et y dans le même intervalle I_j quelconque de la partition de T^{n_0} , x distinct de y . Il reste donc à majorer : $v_{[a_j, b_j]}\left[\frac{g \cdot e^{i\theta S_{Nn_0}f}}{|(T^{Nn_0})'|} \circ \sigma_j\right] = A_j$.

$$A_j = \sup_S \sum_{\ell=1}^m \left| \frac{g \cdot e^{i\theta S_{Nn_0}f}}{|(T^{Nn_0})'|} \circ \sigma_j(\alpha_\ell) - \frac{g \cdot e^{i\theta S_{Nn_0}f}}{|(T^{Nn_0})'|} \circ \sigma_j(\alpha_{\ell-1}) \right|$$

où $(\alpha_\ell)_{0 \leq \ell \leq m}$ est une subdivision finie de l'intervalle $[a_j, b_j]$ et S est l'ensemble de toutes ces subdivisions. Mais :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{g \cdot e^{i\theta S N n_0 f}}{|(T^{N n_0})'|} \circ \sigma_j(\alpha_\ell) - \frac{g \cdot e^{i\theta S N n_0 f}}{|(T^{N n_0})'|} \circ \sigma_j(\alpha_{\ell-1}) \right| \\
 \leq \frac{|g \circ \sigma_j(\alpha_\ell) - g \circ \sigma_j(\alpha_{\ell-1})|}{|(T^{N n_0})' \circ \sigma_j(\alpha_\ell)|} \\
 + |g \circ \sigma_j(\alpha_\ell)| \left| \frac{1}{(T^{N n_0})'} \circ \sigma_j(\alpha_\ell) - \frac{1}{(T^{N n_0})'} \circ \sigma_j(\alpha_{\ell-1}) \right| \\
 + \sum_{k=0}^{N n_0 - 1} \left| \frac{g}{(T^{N n_0})'}(\sigma_j \alpha_{\ell-1})(e^{i\theta f(T^k(\sigma_j \alpha_\ell))} - e^{i\theta f(T^k(\sigma_j \alpha_{\ell-1}))}) \right|.
 \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$A_j \leq \frac{1}{\gamma^N} v_{I_j}(g) + \frac{K^N}{\gamma^{2N}} \int_{I_j} |g| dm + |\theta| N n_0 v(f) \sup_{x \in [a_j, b_j]} \left[\left| \frac{g}{(T^{N n_0})'} \circ \sigma_j(x) \right| \right].$$

Comme g est à variation finie, on peut toujours supposer que $\left| \frac{g}{(T^{N n_0})'} \circ \sigma_j \right|$ atteint son supremum sur $[a_j, b_j]$, ne serait-ce que par valeur limite, au point $x_j \in [a_j, b_j]$. Or :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{g}{(T^{N n_0})'} \circ \sigma_j(x_j) \right| &\leq \frac{1}{2} \left[\left| \frac{g}{(T^{N n_0})'} \circ \sigma_j(x_j) - \frac{g}{(T^{N n_0})'} \circ \sigma_j(a_j) \right| \right. \\
 &+ \left| \frac{g}{(T^{N n_0})'} \circ \sigma_j(b_j) - \frac{g}{(T^{N n_0})'} \circ \sigma_j(x_j) \right| \\
 &+ \left| \frac{g}{(T^{N n_0})'} \circ \sigma_j(a_j) \right| + \left| \frac{g}{(T^{N n_0})'} \circ \sigma_j(b_j) \right| \\
 &\leq \frac{1}{2} [v_{[a_j, b_j]} \left(\left| \frac{g}{(T^{N n_0})'} \circ \sigma_j \right| \right) + \frac{1}{\gamma^N} v_{I_j}(g) + \left(\frac{K^N}{\gamma^{2N}} + \frac{2}{\delta} \right) \int_{I_j} |g| dm] \\
 &\leq \frac{1}{\gamma^N} v_{I_j}(g) + \left(\frac{K^N}{\gamma^{2N}} + \frac{1}{\delta} \right) \int_{I_j} |g| dm.
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$A_j \leq \frac{1}{\gamma^N} v_{I_j}(g) + \frac{K^N}{\gamma^{2N}} \int_{I_j} |g| dm + N n_0 v(f) |\theta| \left[\frac{1}{\gamma^N} v_{I_j}(g) + \left(\frac{K^N}{\gamma^{2N}} + \frac{1}{\delta} \right) \int_{I_j} |g| dm \right].$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 v[\Phi_f^{N n_0}(i\theta)(g)] &\leq \sum_{j \in J_{N n_0}} \left[\frac{1}{\gamma^N} v_{I_j}(g) + \left(\frac{K^N}{\gamma^{2N}} + \frac{1}{\delta} \right) \int_{I_j} |g| dm \right] [2 + N n_0 v(f) |\theta|] \\
 &\leq [2 + N n_0 v(f) |\theta|] \left[\frac{1}{\gamma^N} v(g) + \left(\frac{K^N}{\gamma^{2N}} + \frac{1}{\delta} \right) \|g\|_1 \right].
 \end{aligned}$$

On a : $0 < \frac{1}{\gamma} < \frac{1}{2}$, donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2 + N n_0 v(f) |\theta|}{\gamma^N} = 0,$$

f et θ étant fixés, on en déduit l'existence d'un entier $N > 0$ tel que

$$\alpha = \frac{2 + Nn_0v(f)|\theta|}{\gamma^N} < 1.$$

D'autre part, comme δ n'est pas nul, (c'est l'hypothèse (3')), le nombre $\beta = (\frac{K^N}{\gamma^{2N}} + \frac{1}{\delta})(2 + Nn_0v(f)|\theta|)$ est fini. On en déduit alors la décomposition spectrale de l'opérateur $\Phi_f(i\theta)$. Pour tout θ de \mathbb{R} , pour tout f de V fixés, si g est dans V , n dans \mathbb{N} alors :

$$\Phi_f^n(i\theta)(g) = \sum_{\xi \in E(\theta)} \lambda_\xi^n \Phi_\xi(g) + R_f^n(i\theta)(g)$$

où $E(\theta)$ est un ensemble fini, éventuellement vide, λ_ξ est une valeur propre de module 1 de $\Phi_f(i\theta)$, Φ_ξ est le projecteur de V sur le sous-espace propre $V(\lambda_\xi)$ qui est de dimension finie. $R_f(i\theta)$ est un opérateur de V dans V de rayon spectral strictement plus petit que 1, il vérifie pour ξ dans $E(\theta)$, $\Phi_\xi \circ R_f(i\theta) = R_f(i\theta) \circ \Phi_\xi = 0$. Il faut remarquer qu'en général pour θ grand, il n'y a pas de valeur propre de module 1 et que $\Phi_f(i\theta)$ est un opérateur de rayon spectral strictement plus petit que 1. On remarque ici que l'on a vraiment utilisé l'hypothèse (3'), si on avait simplement supposé l'hypothèse affaiblie (3) : $\inf_{j \in J_{n_0}} m(T^{n_0}(\bar{I}_j)) = \delta > 0$, comme on peut le faire pour démontrer que Φ vérifie les hypothèses du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu, on aurait déduit de

$$\alpha = \frac{2 + n_0v(f)|\theta|}{\gamma} < 1$$

l'existence d'un $\theta_0 > 0$ tel que pour $|\theta| < \theta_0$, $\Phi_f(i\theta)$ vérifie le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu, cela ne suffirait pas pour montrer alors le théorème limite local car on a vraiment besoin d'avoir la décomposition spectrale de $\Phi_f(i\theta)$ pour θ grand et non pas simplement dans un voisinage de 0. \square

9.2 Le théorème limite local

On va maintenant pouvoir démontrer un théorème limite local pour T une transformation de \mathcal{C}'

Théorème 9.2. — *On se place sous les hypothèses du théorème limite central pour f . On suppose de plus que pour tout θ de \mathbb{R}^* , l'opérateur $\Phi_f(i\theta)$ n'admet aucune valeur propre de module 1. Alors pour tout intervalle fini Δ de \mathbb{R} , uniformément en z , on a :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma\sqrt{nh}m[\{x \in I : z + S_n f - nm(fh) \in \Delta\}] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2 n}} m(\Delta)| = 0.$$

Démonstration. — Quitte à enlever une constante à f , on peut toujours supposer que $m(fh) = 0$, il suffit donc de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma\sqrt{nh}m[\{x \in I : z + S_n f \in \Delta\}] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2 n}} m(\Delta)| = 0.$$

On définit la suite de mesures $(\nu_n)_{n>0}$ par :

$$\nu_n(g) = \sigma\sqrt{n}e^{\frac{z^2}{2\sigma^2n}} \int_0^1 g(z + S_n f) h \, dm.$$

Ce théorème limite local est donc une conséquence de la convergence vague de la suite (ν_n) vers la mesure de Lebesgue $\frac{m}{\sqrt{2\pi}}$. En effet on aura alors, pour tout borélien Δ , donc en particulier tout intervalle fini Δ de \mathbb{R} ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(\Delta) = \frac{m(\Delta)}{\sqrt{2\pi}}.$$

Donc uniformément en z réel, au voisinage de $n = \infty$,

$$\sigma\sqrt{n}hm[z + S_n f \in \Delta] \sim \frac{e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2n}}}{\sqrt{2\pi}} m(\Delta).$$

Il est bien connu que pour prouver une convergence vague, il suffit de tester sur \mathfrak{K} , l'ensemble des fonctions de $L^1_m(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est continue à support compact, voir par exemple Breiman [B]. \mathfrak{K} n'est pas vide car il contient $\lambda \mapsto (\frac{\sin \lambda}{\lambda})^2$. On fixe g un élément de \mathfrak{K} , on suppose que le support de \hat{g} est dans $[-\delta, \delta]$, où :

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-itx} \, dx.$$

Le théorème d'inversion s'écrit alors :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(t) e^{itx} \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} \hat{g}(t) e^{itx} \, dt.$$

Pour montrer le théorème limite local, il suffit de prouver que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f) h \, dm - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2n}} \, dt \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_n(z)}{\sqrt{2\pi}} \right| = 0.$$

D'abord, on a :

$$\begin{aligned} e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2n}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} e^{-t^2/2} \, dt, \\ \hat{g}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \, dt, \\ g(z + S_n f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} \hat{g}(t) e^{it(z + S_n f)} \, dt. \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}
 \sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f) h dm &= \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \left[\int_{-\delta}^{+\delta} \hat{g}(t) e^{it(z+S_n f)} dt \right] h dm \\
 &= \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} \hat{g}(t) e^{itz} \left[\int_0^1 e^{itS_n f} h dm \right] dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta\sigma\sqrt{n}}^{+\delta\sigma\sqrt{n}} \hat{g}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} \left[\int_0^1 e^{it\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} h dm \right] dt.
 \end{aligned}$$

En appliquant successivement le théorème de Fubini et le théorème du changement de variable. On remarque que :

$$\int_0^1 e^{it\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} h dm = \langle e^{\frac{itS_n f}{\sigma\sqrt{n}}}, 1 \rangle_{hm} = \langle \Phi_f^n\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h), 1 \rangle_m.$$

Ainsi :

$$\sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f) h dm = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta\sigma\sqrt{n}}^{+\delta\sigma\sqrt{n}} \hat{g}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} \langle \Phi_f^n\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h), 1 \rangle_m dt.$$

On a alors :

$$A_n(z) = \int_{-\delta\sigma\sqrt{n}}^{+\delta\sigma\sqrt{n}} \hat{g}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} \langle \Phi_f^n\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h), 1 \rangle_m dt - \hat{g}(0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\frac{z}{\sigma\sqrt{n}}} e^{-t^2/2} dt.$$

Pour calculer la limite on va séparer deux cas : t est proche de 0, on appliquera le théorème des perturbations, t est assez éloigné de 0, on utilisera l'hypothèse $\Phi_f(it)$ n'admet pas de valeurs propre de module 1.

1ÈRE ÉTAPE : t est proche de 0, le théorème des perturbations permet d'écrire

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi_f^n\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h), 1 \rangle_m &= \lambda_0^n\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right) \langle \Phi_0\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h), 1 \rangle_m \\
 &+ \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j^n\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right) \langle \Phi_j\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h), 1 \rangle_m + \langle \Psi_f^n\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h), 1 \rangle_m.
 \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto [\lambda_0^n\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right) \langle \Phi_0\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h), 1 \rangle_m + \langle \Psi_f^n\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h), 1 \rangle_m] \hat{g}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ que l'on nomme U_n converge vers $\hat{g}(0)e^{-t^2/2}$ de manière dominée pour $|\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}| < \alpha, \alpha > 0$. En effet, on a déjà vu que :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_0^n\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right) &= e^{-t^2/2}, \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Phi_0\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h), 1 \rangle_m &= 1, \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Psi_f\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h), 1 \rangle_m &= 0.
 \end{aligned}$$

De plus, il existe $\alpha_0 > 0$, tel que : si $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$ est dans $] -\alpha_0, \alpha_0[$ alors :

$$\begin{aligned} |\lambda_0^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})\langle\Phi_0(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m - e^{-t^2/2}| &\leq C_1 e^{-t^2/4}, \\ |\langle\Psi_f^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m| &\leq C_2 \rho_2^n < C_3 e^{-t^2/4}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$|\lambda_0^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})\langle\Phi_0(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m + \langle\Psi_f^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m - e^{-t^2/2}| \leq C_4 e^{-t^2/4}.$$

La fonction \hat{g} est continue sur $[-\delta, \delta]$, il existe donc $\alpha_2 > 0$ tel que : si $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$ est dans $] -\alpha_2, \alpha_2[$ alors :

$$|\hat{g}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}) - \hat{g}(0)| \leq 1.$$

Donc, il existe $\alpha = \inf\{\alpha_1, \alpha_2\} > 0$ tel que si : $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$ est dans $] -\alpha, \alpha[$ on ait :

$$|U_n(t) - \hat{g}(0)e^{-t^2/2}| \leq C_4 e^{-t^2/4} \|\hat{g}\|_\infty + e^{-t^2/2}.$$

Cette dernière fonction étant intégrable sur \mathbb{R} , on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\alpha\sigma\sqrt{n}}^{+\alpha\sigma\sqrt{n}} [U_n(t) - \hat{g}(0)e^{-t^2/2}] e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} dt = 0.$$

2ÈME ÉTAPE : On s'occupe maintenant des termes :

$$\int_{-\alpha\sigma\sqrt{n}}^{+\alpha\sigma\sqrt{n}} e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} \lambda_j^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})\langle\Phi_j(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m \hat{g}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}) dt.$$

Comme :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle\Phi_j(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m = 0 \text{ car } \Phi_j h = 0, \\ |\lambda_j(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})| \leq 1, \\ \hat{g} \text{ est bornée.} \end{cases}$$

On en déduit que pour tout t fixé :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle\Phi_j(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m \lambda_j^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}) \hat{g}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}) = 0.$$

$\lambda_j(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})$ est une valeur propre de $\Phi_f(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})$, son module est donc strictement plus petit que 1 sauf pour $t = 0$. Donc, si $0 < \varepsilon \leq |\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}| \leq \alpha$ alors :

$$|\langle\Phi_j(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})(h), 1\rangle_m \lambda_j^n(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})| \leq C \rho^n \leq C' e^{-t^2/4}.$$

Quitte à changer C' , on peut supposer que cette majoration est aussi valable sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue entraîne alors que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\alpha\sigma\sqrt{n}}^{+\alpha\sigma\sqrt{n}} e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} \lambda_j^n \left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}} \right) \langle \Phi_j \left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}} \right) (h), 1 \rangle_m \hat{g} \left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}} \right) dt = 0.$$

3ÈME ÉTAPE : On suppose maintenant $\alpha < \left| \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right| < \delta$. Comme, on a fait l'hypothèse que $\Phi_f(it)$ n'admet pas de valeur propre de module 1 si $t \neq 0$, le rayon spectral de l'opérateur $\Phi_f(it)$ est donc strictement plus petit que 1. Il existe donc $0 < \rho < 1$ tel que si $\alpha < \left| \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right| < \delta$, alors :

$$\left| \langle \Phi_f^n \left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}} \right) (h), 1 \rangle_m \right| < C\rho^n.$$

Ainsi :

$$\left| \int_{\alpha < \left| \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right| < \delta} e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} \langle \Phi_f^n \left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}} \right) (h), 1 \rangle_m \hat{g} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) dt \right| \leq C'\rho^n \sqrt{n},$$

qui tend vers 0 quand n tend vers ∞ .

4ÈME ÉTAPE : Il reste $\int_{|t| > \alpha\sigma\sqrt{n}} e^{-t^2/2} \hat{g}(0) e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} dt$ à étudier. Cette dernière intégrale tend vers 0 quand n tend vers ∞ , car elle est majorée par $\int_{|t| > \alpha\sigma\sqrt{n}} e^{-t^2/2} |\hat{g}(0)| dt$ qui est le reste d'une intégrale convergente.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n(z)| = 0$. Ceci achève la preuve du théorème limite local. \square

9.3 Conditions sur f pour que $\Phi_f(it)$ n'ait pas de valeur propre de module 1

On va maintenant discuter l'hypothèse faite pour démontrer le théorème limite local : $\Phi_f(it)$ n'admet pas de valeur propre de module 1 si $t \neq 0$. On va prouver une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\Phi_f(it)$ ne vérifie pas cette hypothèse.

Proposition 9.3. — Soit f dans V , $hm(f) = 0$, soit ξ dans \mathbb{R} , $\xi \neq 0$, les conditions (1) et (2) sont équivalentes :

(1) il existe r dans $[0, 2\pi[$, g dans V , $g \neq 0$: $\Phi_f(i\xi)(g) = e^{ir}g$

(2) il existe φ à valeurs réelles vérifiant $e^{i\varphi}h$ dans V telle que :

$$e^{i\xi f} = e^{ir} e^{i\varphi \circ T} e^{-i\varphi} \text{ hm-p.p.}$$

Démonstration. — (2) \Rightarrow (1)

On a : $e^{i\xi f} = e^{ir} e^{i\varphi \circ T} e^{-i\varphi}$ hm-p.p. avec $e^{i\varphi}h$ appartenant à V . Alors

$$\begin{aligned} \Phi_f(i\xi)(e^{i\varphi}h) &= e^{ir} \Phi(e^{i\varphi \circ T} e^{-i\varphi} e^{i\varphi}h) \text{ m-p.p.} \\ &= e^{ir} \Phi(e^{i\varphi \circ T} h) = e^{ir} \Phi(e^{i\varphi} \circ Th) \text{ m-p.p.} \\ &= e^{ir} e^{i\varphi} \text{ hm-p.p.} \end{aligned}$$

Il existe donc g dans V , $g = e^{i\varphi}$ hm -p.p. tel que $\Phi_f(i\xi)(g) = e^{ir}g$.

(1) \Rightarrow (2)

On a : $\Phi_f(i\xi)(g) = e^{ir}g$, donc :

$$|g| = |\Phi_f(i\xi)(g)| = |\Phi(e^{i\xi f} \cdot g)| \leq \Phi|g|.$$

Comme $m(|g|) = m(\Phi|g|)$, on en déduit que $\Phi|g| = |g|$ m -p.p. et donc que $|g| = kh$ où k est une constante positive (on va prendre $k = 1$). On peut donc écrire que $g = e^{i\varphi}$ hm -p.p. où φ est à valeurs réelles, $e^{i\varphi}h$ est dans V . La condition (1) entraîne alors qu'il existe N dans \mathcal{B} , $hm(N) = 0$, il existe φ à valeurs réelles, $e^{i\varphi}h$ dans V tels que pour tout x de $I \setminus N$, on ait :

$$\Phi(e^{i\xi f} e^{i\varphi} h)(x) = e^{ir} e^{i\varphi(x)} h(x).$$

ou :

$$(*) \quad \sum_{j \in J} e^{i\xi f(\sigma_j x)} e^{i\varphi(\sigma_j x)} h(\sigma_j x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) = e^{ir} e^{i\varphi(x)} h(x).$$

Comme pour tout x de I ,

$$h(x) = \sum_{j \in J} h(\sigma_j x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x)$$

l'équation (*) représente donc pour tout x de $\{h \neq 0\} \cap (I \setminus N)$ un barycentre de points de module 1 qui reste de module 1 ; ceci n'est possible uniquement si on a l'égalité de tous ces points. Ainsi, pour tout x dans $\{h \neq 0\} \cap (I \setminus N)$, pour tout j de J tel que x soit dans $T(\bar{I}_j)$, on a :

$$e^{i\xi f(\sigma_j x)} e^{i\varphi(\sigma_j x)} = e^{ir} e^{i\varphi(x)}.$$

Donc, pour tout y de $\cup_{j \in J} \sigma_j[\{h \neq 0\} \setminus N] = T^{-1}[\{h \neq 0\} \setminus N]$, on a :

$$e^{i\xi f(y)} = e^{ir} e^{i\varphi \circ T(y)} e^{-i\varphi(y)}.$$

De plus on a : $T^{-1}(\{h \neq 0\}) \subset \{h \neq 0\}$. En effet, si x est dans $\{h \neq 0\}$ alors :

$$0 \neq h(x) = \sum_{j \in J} h(\sigma_j x) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x),$$

il existe donc j dans J tel que :

$$h(\sigma_j x) \neq 0 \text{ et } x \text{ est dans } T(\bar{I}_j),$$

donc tel que $\sigma_j x$ soit dans $\{h \neq 0\}$, c'est-à-dire x dans $T(\{h \neq 0\})$. Comme $hm[T^{-1}\{h \neq 0\}] = hm[\{h \neq 0\}] = 1$, il existe N_1 dans \mathcal{B} tel que $T^{-1}[\{h \neq 0\}] = \{h \neq 0\} \setminus N_1$ avec $hm(N_1) = 0$. Alors

$$\begin{aligned} T^{-1}[\{h \neq 0\}] &= T^{-1}\{h \neq 0\} \setminus T^{-1}(N) \\ &= \{h \neq 0\} \setminus N_1 \setminus T^{-1}(N) \\ &= I \setminus [\{h = 0\} \cup N_1 \cup T^{-1}(N)]. \end{aligned}$$

Il existe donc $\bar{N} = \{h = 0\} \cup N_1 \cup T^{-1}(N)$, $hm(\bar{N}) = 0$ tel que pour tout x de $I \setminus \bar{N}$ on ait :

$$e^{i\xi f(x)} = e^{ir} e^{i\varphi \circ T(x)} e^{-i\varphi(x)}.$$

Ainsi il existe φ à valeurs réelles, $e^{i\varphi}h$ appartenant à V , telle que

$$e^{i\xi f} = e^{ir} e^{i\varphi \circ T} e^{-i\varphi} \text{ hm-p.p. } \square$$

Pratiquement f de V est une fonction continue sur I , sauf en un nombre (au plus) dénombrable de points de I , soit \mathcal{S}_f cet ensemble. $e^{i\varphi}h$ est dans V , on peut donc aussi supposer que l'on a une représentation continue sauf en un nombre (au plus) dénombrable de points de I . À l'aide du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu, on peut préciser dans quel ensemble sont contenus les points de discontinuité de $e^{i\varphi}$. D'abord, on remarque que e^{ir} est une valeur propre simple de $\Phi_f(i\xi)$ dans V . Sinon il existerait φ_1 et φ_2 à valeurs réelles, $e^{i\varphi_1}h$, $e^{i\varphi_2}h$ dans V , telles que :

$$e^{i\xi f} = e^{ir} e^{i\varphi_1 \circ T} e^{-i\varphi_1} = e^{ir} e^{i\varphi_2 \circ T} e^{-i\varphi_2} \text{ hm-p.p.}$$

D'où

$$\Phi(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2) \circ T} h) = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} h = \Phi(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} h)$$

et donc $e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = k$ ce qui contredit le fait que $\Phi_f(\xi)$ admet e^{ir} comme valeur propre multiple dans V . On en déduit alors que $e^{i\varphi}h$ est l'unique solution (à une constante multiplicative près) de l'équation $K(\psi) = \psi$ où K est l'opérateur de V dans V défini comme la limite de la suite d'opérateurs de V dans V :

$$\left(\sum_{k=n_0}^{N+n_0-1} e^{-irk} \Phi_f^k(i\xi) \right)_{N \geq 1}.$$

Comme e^{ir} est une valeur propre simple de $\Phi_f(i\xi)$, K est un projecteur sur l'espace vectoriel engendré par $e^{i\varphi}h$. Alors pour tout ψ de V , $K(\psi) = c(\psi)e^{i\varphi}h$. On choisit ψ dans V , continue sur I et telle que $c(\psi) = 1$. On a alors, pour tout x de I ,

$$e^{i\varphi}h(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=n_0}^{N+n_0-1} e^{-irk} \Phi_f^k(i\xi)(\psi) \right](x).$$

On connaît donc les points de discontinuité de $e^{i\varphi}h$ dans I , ils appartiennent à

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n \geq 1} T^n[\mathcal{S}_f \cup \{a_j\}_{j \in \mathcal{J}}].$$

Ceux de $e^{i\varphi}$ sont donc dans $\{h = 0\} \cup \mathcal{S}$ (qui est un ensemble de mesure nulle). Ainsi dans le cas, où f est continue sauf en un nombre au plus dénombrable de points de I , l'équation

$$e^{i\xi f} = e^{ir} e^{i\varphi \circ T} e^{-i\varphi} \text{ hm-p.p.}$$

revient donc à l'équation suivante : pour tout x de $I \setminus [\{h = 0\} \cup \mathcal{S}]$,

$$e^{i\xi f(x)} = e^{ir} e^{i\varphi \circ T(x)} e^{-i\varphi(x)}.$$

Maintenant, on peut préciser comment vérifier si $\Phi_f(i\xi)$ admet une valeur propre de module 1. On prend deux points T -périodiques x et y n'appartenant pas à $\mathcal{J} \cup T^{-1}(\mathcal{J}) \cup \dots \cup T^{-p}(\mathcal{J})$ où p est la plus petite période commune de x et y . On calcule pour ξ de \mathbb{R}^* , $e^{\frac{i\xi S_p f}{p}}$ en x et y . Si $e^{\frac{i\xi S_p f}{p}}(x) \neq e^{\frac{i\xi S_p f}{p}}(y)$, alors $\Phi_f(i\xi)$ n'admet pas de valeur propre de module 1.

Si maintenant on suppose que h est minorée par une constante strictement positive sur $\{h \neq 0\}$, on peut préciser la proposition 9.3.

Proposition 9.4. — *On suppose que $\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h \neq 0\}}$ est dans V . S'il existe t de \mathbb{R}^* et s de \mathbb{R}^* tels que $\Phi_f(it)$ et $\Phi_f(is)$ admettent une valeur propre de module 1 alors $\Phi_f(i(t+s))$ admet aussi une valeur propre de module 1.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente on a :

$$\begin{aligned} e^{itf} &= e^{ir_t} e^{i\varphi_t \circ T} e^{-i\varphi_t} \text{ hm-p.p.} \\ e^{isf} &= e^{ir_s} e^{i\varphi_s \circ T} e^{-i\varphi_s} \text{ hm-p.p.} \end{aligned}$$

où φ_t, φ_s sont dans V et prennent des valeurs réelles, car $\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h \neq 0\}}$ est dans V . Ceci entraîne que :

$$\begin{aligned} e^{i(t+s)f} &= e^{i(r_t+r_s)} e^{i(\varphi_t+\varphi_s) \circ T} e^{-i(\varphi_t+\varphi_s)} \text{ hm-p.p.} \\ &= e^{ir_{t+s}} e^{i\varphi_{t+s} \circ T} e^{-i\varphi_{t+s}} \text{ hm-p.p.} \end{aligned}$$

où $e^{i\varphi_{t+s}}$ est dans V et φ_{t+s} prend ses valeurs dans \mathbb{R} . Si $t+s \neq 0$, on en déduit que $\Phi_f(i(t+s))$ admet une valeur propre de module 1. \square

Corollaire 9.5. — *On suppose que $\frac{1}{h}\mathbf{1}_{\{h \neq 0\}}$ est dans V . Alors, $G = \{t \in \mathbb{R} : \Phi_f(it)$ admet une valeur propre de module 1 $\}$ est un sous-groupe additif de \mathbb{R} .*

Les sous-groupes additifs de \mathbb{R} sont de la forme $G = \{n\theta, n \in \mathbb{Z}\}$ ou \mathbb{R} .

D'après les calculs de la 3ème étape de la démonstration du théorème limite central, dans un voisinage de $\theta = 0$ on a :

$$\begin{aligned} |\lambda_k(i\theta)| &= 1 - 2\theta \operatorname{Im}\left[\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k}\right] \\ &\quad + \theta^2 \left[\operatorname{Re}^2\left[\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k}\right] + \operatorname{Im}^2\left[\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k}\right] - \operatorname{Re}\left[\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k}\right] \right] + o(\theta^2). \end{aligned}$$

Comme $|\lambda_k(i\theta)| \leq 1$ on en déduit donc que :

$$\operatorname{Im}\left[\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k}\right] = 0, \quad \operatorname{Re}^2\left[\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k}\right] + \operatorname{Im}^2\left[\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k}\right] - \operatorname{Re}\left[\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k}\right] \leq 0.$$

Donc si pour tout $1 \leq k \leq p-1$ on a : $\operatorname{Re}^2\left[\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k}\right] + \operatorname{Im}^2\left[\frac{\lambda'_k(0)}{\lambda^k}\right] - \operatorname{Re}\left[\frac{\lambda''_k(0)}{\lambda^k}\right] < 0$, on en déduit que dans un voisinage de $\theta = 0$, l'opérateur $\Phi_f(i\theta)$ n'admet pas de valeur propre de module 1, il existe donc un plus petit $\theta_0 > 0$, éventuellement infini tel que $0 < |\theta| < \theta_0$ entraîne $\Phi_f(i\theta)$ n'admet pas de valeur propre de module 1 et éventuellement (si θ_0 est fini) $\Phi_f(i\theta_0)$ admet une valeur propre de module 1. On en déduit alors que $G = \{n\theta_0, n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}, +)$.

9.4 Théorème limite local dans le cas d'une fonction à valeurs entières

Maintenant, on va montrer que si $f = k - m(kh)$ où k est dans V et prend des valeurs entières, on a aussi un théorème limite local. (On ne suppose plus que h est minorée par une constante strictement positive sur $\{h \neq 0\}$.)

Théorème 9.6. — *Si $f = k - m(kh)$ ne vérifie pas (H), alors uniformément en z réel, pour tout intervalle fini Δ de \mathbb{R} , on a :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma\sqrt{n}hm[z + S_n f \in \Delta] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 n}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{\Delta}(z - nm(kh) + \ell)| = 0.$$

Démonstration. — Comme dans le théorème limite local, il suffit de montrer que si g est dans \mathcal{H} , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f) h dm - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 n}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g(z - nm(kh) + \ell)| = 0.$$

Comme g est dans \mathcal{H} on a,

$$\sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f) h dm = \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(t) e^{itz} \langle \Phi_f^n(it)(h), 1 \rangle_m dt.$$

Comme $S_n f = S_n k - nm(kh)$, on a :

$$\Phi_f^n(it)(h) = \Phi^n(e^{itS_n f} \cdot h) = \Phi^n(e^{itS_n k} \cdot h) e^{-itm(kh)n} = e^{-itm(kh)n} \Phi_k^n(it)(h).$$

Comme k ne prend que des valeurs entières, alors la fonction $t \mapsto \langle \Phi_f^n(it)(h), 1 \rangle_m$ est périodique de période 2π . Alors :

$$\begin{aligned} A &= \sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f) h dm \\ &= \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi+2\ell\pi}^{+\pi+2\ell\pi} \hat{g}(t) e^{itz} e^{-itm(kh)n} \langle \Phi_k^n(it)(h), 1 \rangle_m dt \\ &= \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \hat{g}(t + 2\ell\pi) e^{i(t+2\ell\pi)(z-nm(kh))} \langle \Phi_k^n(it)(h), 1 \rangle_m dt \\ &= \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} G(t) e^{itz} \langle \Phi_f^n(it)(h), 1 \rangle_m dt, \end{aligned}$$

où $G(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(t + 2\ell\pi) e^{i2\ell\pi(z-nm(kh))}$ et donc

$$\sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f) h dm = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma\sqrt{n}\pi}^{+\sigma\sqrt{n}\pi} G\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} \langle \Phi_f^n\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h), 1 \rangle_m dt.$$

TRANSFORMATIONS DILATANTES DE L'INTERVALLE

La formule sommatoire de Poisson entraîne que pour tout x de \mathbb{R} on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g\left[\frac{x+2\pi\ell}{2\pi}\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(2\pi n) e^{inx}.$$

Pour $x = 2\pi(z - nm(kh))$, on obtient :

$$G(0) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(2\pi\ell) e^{i\ell(z-nm(kh))} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g(z - nm(kh) + \ell).$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 n}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g(z - nm(kh) + \ell) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} G(0) dt.$$

Donc,

$$\begin{aligned} & \left| \sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f) h dm - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 n}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g(z - nm(kh) + \ell) \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma\sqrt{n}\pi}^{+\sigma\sqrt{n}\pi} e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} \left[G\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \langle \Phi_f^n\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)(h), 1 \rangle_m - e^{-t^2/2} G(0) \right] dt \right| \\ & + \frac{|G(0)|}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{|t| < \sigma\sqrt{n}\pi} e^{-t^2/2} e^{\frac{itz}{\sigma\sqrt{n}}} dt \right|. \end{aligned}$$

Maintenant on refait exactement le même raisonnement que dans le théorème précédent car G est une fonction continue (c'est une somme finie de fonctions continues car g est dans \mathfrak{H}), on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \mathbb{R}} \left| \sigma\sqrt{n} \int_0^1 g(z + S_n f) h dm - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 n}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} g(z - nm(kh) + \ell) \right| = 0,$$

ce qui achève la preuve. \square

10 THÉORÈME DES GRANDS ÉCARTS

10.1 Introduction, définition de \tilde{T} et $\tilde{\Phi}$

Le but de cette partie est de donner un équivalent au voisinage de $n = +\infty$ de la quantité $hm[\frac{S_n f}{n} > \varepsilon]$ où ε est positif, assez petit et où f est dans V , $m(fh) = 0$. Cela permettra d'avoir le comportement de $hm[\frac{S_n f}{\sqrt{n}} > x]$ quand n tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $+\infty$ comme \sqrt{n} c'est-à-dire

$$\lim_{n, x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{n}} = \varepsilon > 0.$$

Pour montrer les résultats de cette partie, on s'est aidé de l'article de E. Le Page [L] pour les produits de matrices aléatoires. Afin de pouvoir exprimer facilement $hm[\frac{S_n f}{n} > \varepsilon]$, on introduit le produit croisé associé à T et f . On pose :

$$\begin{aligned} \tilde{T}: \quad I \times \mathbb{R} &\rightarrow I \times \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto (Tx, t + f(x)). \end{aligned}$$

On remarque que pour $n \geq 0$, $\tilde{T}^n(x, t) = (T^n(x), t + S_n f(x))$.

On définit l'adjoint $\tilde{\Phi}$ de \tilde{T} par rapport à la mesure $m \otimes l$ où l est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Pour tous g_1 de $L^1_{m \otimes l}(I \times \mathbb{R})$, g_2 de $L^\infty_{m \otimes l}(I \times \mathbb{R})$ on a :

$$\langle \tilde{\Phi}g_1, g_2 \rangle_{m \otimes l} = \langle g_1, g_2 \circ \tilde{T} \rangle_{m \otimes l}.$$

Alors pour tout g de $L^1_{m \otimes l}(I \times \mathbb{R})$, on obtient :

$$\tilde{\Phi}g(x, t) = \sum_{j \in J} g(\sigma_j x, t - f(\sigma_j x)) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\tilde{I}_j)}(x).$$

Remarque. — Si $g(x, t) = g_1(x)g_2(t)$ avec g_1 dans V , on a :

$$\int_I \tilde{\Phi}g(x, 0) dm(x) = \int_I g(x, -f(x)) dm(x).$$

On en déduit alors que :

Proposition 10.1. — Pour tout f de V , on a :

$$hm\left[\frac{S_n f}{n} > \varepsilon\right] = \int_I \tilde{\Phi}^n(\mathbf{1}_{[-\infty, -n\varepsilon]} \cdot h)(x, 0) dm(x).$$

Démonstration. — On a :

$$\begin{aligned} hm\left[\frac{S_n f}{n} > \varepsilon\right] &= \int_I \mathbf{1}_{\{S_n f > n\varepsilon\}}(x) h(x) dm(x) \\ &= \int_I h(x) \mathbf{1}_{[-\infty, -n\varepsilon]}(-S_n f(x)) dm(x) \\ &= \int_I \tilde{\Phi}^n(h \cdot \mathbf{1}_{[-\infty, -n\varepsilon]})(x, 0) dm(x) \end{aligned}$$

en utilisant la remarque précédente pour $g(x, t) = h(x) \mathbf{1}_{[-\infty, -n\varepsilon]}(t)$. \square

Pour démontrer le théorème des grands écarts, dans le cas de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées de loi μ , on utilise le procédé de relativisation de Cramér [F], [C]. Cela consiste à choisir un t dans \mathbb{R} tel que $\tilde{\mu}(t) = \int e^{tx} d\mu(x)$ soit fini et à construire une nouvelle mesure de probabilité ${}^t\mu$ de la façon suivante :

$${}^t\mu(dx) = \frac{e^{tx} \mu(dx)}{\tilde{\mu}(t)}.$$

Les résultats que l'on obtient pour la marche aléatoire de probabilité ${}^t\mu$ donnent alors des résultats similaires pour la marche associée à μ . On va faire à peu près la même chose ici. Ce qui va jouer le rôle de la transformée de Laplace ici est l'existence de l'opérateur $\Phi_f(\theta)$, θ dans \mathbb{R} .

10.2 Relativisation du noyau $\tilde{\Phi}$

D'après la théorie des perturbations, on connaît la décomposition spectrale dans V de $\Phi_f(\theta)$ pour tout réel θ , $|\theta| < a$, il a pour valeurs propres $\lambda_0(\theta)$, $\lambda_1(\theta)$, \dots , $\lambda_{p-1}(\theta)$, elles sont simples associées aux fonctions propres $h_0(\theta)$, $h_1(\theta)$, \dots , $h_{p-1}(\theta)$. De plus les fonctions $\theta \mapsto \lambda_k(\theta)$ et $\theta \mapsto h_k(\theta)$ sont continues. Les autres valeurs spectrales de $\Phi_f(\theta)$ sont celles de l'opérateur $\Psi_f(\theta)$ qui est de rayon spectral $\rho_\theta \leq \rho < 1$. Si a est suffisamment petit, comme $\lambda_0(0) = 1$ et $h_0(0) = h$ par continuité on peut toujours supposer que $|\theta| < a$ entraîne :

$$\begin{cases} \lambda_0(\theta) > 0, h_0(\theta) \geq 0 \\ \{h_0(\theta) = 0\} \subseteq \{h = 0\}, \end{cases}$$

car la convergence dans V entraîne la convergence uniforme et car $h_1(\theta)$ et h admettent des représentants continus par morceaux ayant un nombre dénombrable de sauts. On a, de plus, le résultat suivant :

Proposition 10.2. — Si $|\theta| < a$, alors $\lambda_0(\theta)$ est la valeur propre dominante de $\Phi_f(\theta)$.

Démonstration. — Pour tout $k \leq p - 1$, on a :

$$\Phi_f(\theta)h_k(\theta) = \lambda_k(\theta)h_k(\theta).$$

On définit sur $\{h_0(\theta) \neq 0\}$ l'opérateur Q_θ suivant : pour φ dans V :

$$Q_\theta\varphi = \frac{\Phi_f(\theta)(\varphi \cdot h_0(\theta))}{\lambda_0(\theta)h_0(\theta)}.$$

Comme $\{h_0(\theta) \neq 0\}$ contient $\{h \neq 0\}$, on restreint l'étude de Q_θ à $\{h \neq 0\}$. Pour x dans $\{h \neq 0\}$, on a :

$$Q_\theta\varphi(x) = \sum_{j \in J} \frac{e^{\theta f(\sigma_j x)} h_0(\theta)(\sigma_j x) \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x)}{\lambda_0(\theta)h_0(\theta)(x) |T'(\sigma_j x)|} \varphi(\sigma_j x),$$

Q_θ est un opérateur positif markovien sur $\{h \neq 0\}$. On a pour $1 < k \leq p - 1$,

$$Q_\theta\left(\frac{h_k(\theta)}{h_0(\theta)}\right) = \frac{\lambda_k(\theta)}{\lambda_0(\theta)} \cdot \frac{h_k(\theta)}{h_0(\theta)}.$$

Donc :

$$\left\| \frac{h_k(\theta)}{h_0(\theta)} \mathbf{1}_{\{h_0(\theta) \neq 0\}} \right\|_v \geq \left\| Q_\theta\left(\frac{h_k(\theta)}{h_0(\theta)}\right) \mathbf{1}_{\{h_0(\theta) \neq 0\}} \right\|_v = \left| \frac{\lambda_k(\theta)}{\lambda_0(\theta)} \right| \cdot \left\| \frac{h_k(\theta)}{h_0(\theta)} \mathbf{1}_{\{h_0(\theta) \neq 0\}} \right\|_v.$$

Ce qui entraîne :

$$|\lambda_k(\theta)| \leq |\lambda_0(\theta)| = \lambda_0(\theta). \quad \square$$

On note maintenant h_θ et λ_θ à la place de $h_0(\theta)$ et $\lambda_0(\theta)$. Dans toute la suite, on notera pour $r \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} e_r : \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{rt}. \end{aligned}$$

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $|\theta| < a$, fixé, on définit

$$\begin{aligned} \varphi_\theta : \quad I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto h_\theta(x)e_{-\theta}(t), \end{aligned}$$

φ_θ est une fonction propre de $\tilde{\Phi}$ associée à la valeur propre λ_θ . En effet :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}\varphi_\theta(x, t) &= \sum_{j \in J} \varphi_\theta(\sigma_j x, t - f(\sigma_j x)) \frac{1}{|T'(\sigma_j x)|} \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) \\ &= e_{-\theta}(t) \Phi_f(\theta)h_\theta(x) \\ &= \lambda_\theta\varphi_\theta(x, t). \end{aligned}$$

Sur $\{h \neq 0\}$, h_θ ne s'annule pas, on peut donc construire un opérateur markovien sur $\{h \neq 0\}$ en posant : pour φ dans V :

$$(*) \quad \theta \tilde{\Phi}(\varphi) = \frac{\tilde{\Phi}(\varphi\varphi_\theta)}{\lambda_\theta\varphi_\theta}.$$

Remarque. — ${}^\theta\tilde{\Phi}(\varphi)(x)$ n'est défini que si x est dans $\{h \neq 0\}$. Ce n'est pas gênant car dans la suite, on ne l'appliquera qu'à des fonctions $\varphi = g \cdot h$ où g est telle que pour tout t de \mathbb{R} , $x \mapsto g(x, t)$ est dans V .

Proposition 10.3. — Soit $({}^\theta X_n, {}^\theta S_n)_{n \geq 0}$ la chaîne de Markov de noyau de transition ${}^\theta\tilde{\Phi}$, alors on a :

$$hm[S_n f > n\varepsilon] = [\lambda_\theta e^{-\theta\varepsilon}]^n E_{0, h_\theta}[(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^-} \cdot e_\theta)({}^\theta S_n + n\varepsilon) \frac{h}{h_\theta}({}^\theta X_n)]$$

$E_{0, h_\theta}(g({}^\theta S_n, {}^\theta X_n))$ désigne l'espérance de la variable $g({}^\theta S_n, {}^\theta X_n)$ par rapport à la mesure $h_\theta m$ quand $({}^\theta S_0, {}^\theta X_0) = (0, 0)$.

Démonstration. — On sait que :

$$\begin{aligned} hm[S_n f > n\varepsilon] &= \int_I \tilde{\Phi}^n[\mathbf{1}_{[-\infty, -n\varepsilon]} \cdot h](x, 0) dm(x) \\ &= \int_{\{h \neq 0\}} \tilde{\Phi}^n[\mathbf{1}_{[-\infty, -n\varepsilon]} \cdot h](x, 0) dm(x) \\ &= \lambda_\theta^n \int_{\{h \neq 0\}} \tilde{\Phi}^n[\mathbf{1}_{[-\infty, -n\varepsilon]} \cdot \frac{h}{h_\theta} \cdot e_\theta](x, 0) h_\theta(x) dm(x) \\ &= \lambda_\theta^n E_{0, h_\theta}[(\mathbf{1}_{[-\infty, -n\varepsilon]} \cdot e_\theta)({}^\theta S_n) \frac{h}{h_\theta}({}^\theta X_n)] \\ &= [\lambda_\theta e^{-\theta\varepsilon}]^n E_{0, h_\theta}[(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^-} \cdot e_\theta)({}^\theta S_n + n\varepsilon) \frac{h}{h_\theta}({}^\theta X_n)], \end{aligned}$$

on utilise ici la formule de relativisation (*) précédente. \square

10.3 Étude de la chaîne $({}^\theta X_n, {}^\theta S_n)_{n \geq 0}$

Dans ce paragraphe, on va démontrer que la chaîne $({}^\theta X_n, {}^\theta S_n)_{n \geq 0}$ vérifie une loi des grands nombres, un théorème limite central et un théorème limite local fonctionnels, ils permettent d'obtenir les équivalents de $hm[S_n f > n\varepsilon]$ grâce à un bon choix de θ . D'abord, on va démontrer deux résultats sur l'opérateur $\Phi_f(\theta + i\alpha)$, α dans \mathbb{R} .

Lemme 10.4. — Pour tout α de \mathbb{R} , on a : pour g dans V

$$E_{0, h_\theta}[e^{-i\alpha}({}^\theta S_n)(g \cdot h)({}^\theta X_n)] = \frac{1}{\lambda_\theta^n} \int_I \Phi_f^n(\theta + i\alpha)(h_\theta g \cdot h)(x) dm(x).$$

De plus, on peut développer cette expression au voisinage de $\alpha = 0$.

Démonstration. — On a, d'après la formule de relativisation (*) :

$$\begin{aligned} E_{0,h_\theta}[e_{-i\alpha}({}^\theta S_n)(g \cdot h)({}^\theta X_n)] &= \int_{\{h \neq 0\}}^{\theta} \tilde{\Phi}^n[e_{-i\alpha}g \cdot h](x, 0)h_\theta(x)dm(x) \\ &= \frac{1}{\lambda_\theta^n} \int_{\{h \neq 0\}} \tilde{\Phi}^n[e_{-i\alpha}e_{-\theta}h_\theta g \cdot h](x, 0)\frac{h_\theta(x)}{\varphi_\theta(x, 0)}dm(x) \\ &= \frac{1}{\lambda_\theta^n} \int_I \tilde{\Phi}^n[e_{-(\theta+i\alpha)}h_\theta g \cdot h](x, 0)dm(x). \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^n[e_{-(\theta+i\alpha)}h_\theta g \cdot h](x, 0) &= \Phi^n[e_{(\theta+i\alpha)}(S_n f)h_\theta g \cdot h](x) \\ &= \Phi_f^n(\theta + i\alpha)(h_\theta g \cdot h)(x). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$E_{0,h_\theta}[e_{-i\alpha}({}^\theta S_n)(g \cdot h)({}^\theta X_n)] = \frac{1}{\lambda_\theta^n} \int_I \Phi_f^n(\theta + i\alpha)(h_\theta g \cdot h)(x)dm(x).$$

D'après le théorème des perturbations 5.7, on sait que l'on peut développer $\Phi_f^n(\theta + i\alpha)$ au voisinage de $\alpha = 0$. On a pour g dans V , pour α assez petit :

$$\Phi_f(\theta + i\alpha)(g) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k(\theta + i\alpha)\Phi_k(\theta + i\alpha)(g) + \Psi_f(\theta + i\alpha)(g),$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_k(\theta + i\alpha) = \lambda_k(\theta) + i\alpha\lambda'_k(\theta) - \frac{\alpha^2}{2}\lambda''_k(\theta) + \alpha^2\varepsilon(\alpha) \\ \Phi_k(\theta + i\alpha)(g) = \Phi_k(\theta)(g) + i\alpha\Phi_k^{(1)}(\theta)(g) - \frac{\alpha^2}{2}\Phi_k^{(2)}(\theta)(g) + \alpha^2\varepsilon_k(\alpha)(g) \\ \Psi_f(\theta + i\alpha) \text{ a pour rayon spectral } \rho_2 \leq \rho < 1, \end{array} \right.$$

ce qui prouve le résultat annoncé. \square

On notera dans toute la suite :

$$\lambda_0(\theta + i\alpha) = \lambda_{\theta+i\alpha} = \lambda_\theta + i\alpha\lambda'_\theta - \frac{\alpha^2}{2}\lambda''_\theta + \alpha^2\varepsilon(\alpha)$$

et ν_θ la mesure de probabilité définie pour tout g de V , g s'annulant avec h par :

$$\Phi_1(\theta)(g) = \nu_\theta\left(\frac{g}{h_\theta}\right)h_\theta.$$

Lemme 10.5. — On suppose que pour tout ξ de \mathbb{R}^* , l'opérateur $\Phi_f(i\xi)$ n'admet pas de valeur propre de module 1. Alors pour tout α dans \mathbb{R}^* , l'opérateur

$$Q_\alpha: g \in V \mapsto Q_\alpha(g) = \frac{\Phi_f(\theta + i\alpha)(gh_\theta)}{\lambda_\theta h_\theta} \in V$$

qui est défini sur $\{h \neq 0\}$ est de rayon spectral strictement plus petit que 1.

Démonstration. — On suppose le contraire : il existe g dans V , r dans \mathbb{R} tels que $Q_\alpha g = e^{ir} g$. Alors :

$$|\Phi_f(\theta + i\alpha)(gh_\theta)| = \lambda_\theta h_\theta |g|.$$

Mais :

$$\begin{aligned} |\Phi_f(\theta + i\alpha)(gh_\theta)| &= |\Phi[e^{(\theta+i\alpha)f} gh_\theta]| \\ &\leq \Phi[e^{\theta f} |g| h_\theta] \\ &\leq \Phi(\theta)(|g| h_\theta). \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\Phi(\theta)(|g| h_\theta) \geq \lambda_\theta h_\theta |g|.$$

On intègre par rapport à la mesure ν_θ qui invariante pour Q_0 , on obtient donc :

$$\nu_\theta(|g|) \leq \nu_\theta\left(\frac{\Phi_f(\theta)(|g| h_\theta)}{\lambda_\theta h_\theta}\right) = \nu_\theta(|g|).$$

On a donc l'égalité :

$$\Phi(\theta)(|g| h_\theta) = \lambda_\theta h_\theta |g| \text{ hm-p.p.}$$

Ainsi $g = e^{i\varphi}$ où φ est à valeurs réelles. L'équation $Q_\alpha g = e^{ir} g$ devient alors, pour x de $\{h \neq 0\}$:

$$\sum_{j \in J} e^{i\alpha f(\sigma_j x)} e^{i\varphi(\sigma_j x)} \left[\frac{e^{\theta f(\sigma_j x)} h_\theta(\sigma_j x)}{\lambda_\theta h_\theta(x) |T'(\sigma_j x)|} \right] \mathbf{1}_{T(\bar{I}_j)}(x) = e^{ir} e^{i\varphi(x)}.$$

On a un barycentre de points de module 1 qui reste de module 1 donc pour tout x de $T(\bar{I}_j) \cap \{h \neq 0\}$, j dans J , on a :

$$e^{i\alpha f(\sigma_j x)} e^{i\varphi(\sigma_j x)} = e^{ir} e^{i\varphi(x)}.$$

Ce qui revient à $e^{i\alpha f} = e^{ir} e^{i\varphi} e^{-i\varphi \circ T}$ hm-p.p. Ceci contredit l'hypothèse $\Phi_f(i\xi)$ n'admet pas de valeur propre de module 1 si $\xi \neq 0$. \square

Le lemme suivant permettra, par la suite, de montrer une loi des grands nombres et un théorème limite central pour la marche considérée :

Lemme 10.6. — *On a :*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_{0, h_\theta} [e^{-i\frac{\alpha}{n}} (\theta S_n) h(\theta X_n)] &= e^{+i\alpha \frac{\lambda'_\theta}{\lambda_\theta}} \nu_\theta(h), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} E_{0, h_\theta} [e^{-i\frac{\alpha}{\sqrt{n}}} (\theta S_n - \frac{\lambda'_\theta}{\lambda_\theta} n) h(\theta X_n)] &= e^{-\frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{\lambda''_\theta \lambda_\theta - (\lambda'_\theta)^2}{\lambda_\theta^2} \right]} \nu_\theta(h). \end{aligned}$$

Démonstration. — On applique le lemme 10.4 avec $\alpha = \frac{\alpha}{n}$, $g = 1$.

$$E_{0, h_\theta} [e^{-i\frac{\alpha}{n}} (\theta S_n) h(\theta X_n)] = \frac{1}{\lambda_\theta^n} \int_I \Phi_f^n(\theta + i\frac{\alpha}{n})(hh_\theta)(x) dm(x) = A(n, \theta).$$

que l'on développe pour n assez grand.

$$\begin{aligned} A(n, \theta) &= \frac{1}{\lambda_\theta^n} \langle \Phi_f^n(\theta + i\frac{\alpha}{n})(hh_\theta), 1 \rangle_m \\ &= \frac{1}{\lambda_\theta^n} [\lambda_\theta + i\frac{\alpha}{n}\lambda'_\theta + \frac{\alpha}{n}\varepsilon(\frac{\alpha}{n})]^n \cdot [\nu_\theta(h) + i\frac{\alpha}{n}\langle \Phi_1^{(1)}(hh_\theta), 1 \rangle_m + \frac{\alpha}{n}\langle \varepsilon(\frac{\alpha}{n})(hh_\theta), 1 \rangle_m] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{\lambda_k(\theta + i\alpha)}{\lambda_\theta}\right)^n \langle \Phi_k(\theta + i\frac{\alpha}{n})(hh_\theta), 1 \rangle_m + \langle \Psi_f^n(\theta + i\frac{\alpha}{n})(hh_\theta), 1 \rangle_m. \end{aligned}$$

On passe alors à la limite quand n tend vers $+\infty$, à cause du lemme 10.5 et comme :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Psi_f^n(\theta + i\frac{\alpha}{n})(hh_\theta), 1 \rangle_m = 0,$$

on trouve :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{0, h_\theta} [e_{-i\frac{\alpha}{n}}(\theta S_n) h(\theta X_n)] = e^{+i\alpha \frac{\lambda'_\theta}{\lambda_\theta} \nu_\theta(h)}.$$

Pour le second résultat, on développe jusqu'au rang 2, on emploie exactement les mêmes arguments, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{0, h_\theta} [e_{-i\frac{\alpha}{\sqrt{n}}}(\theta S_n - \frac{\lambda'_\theta}{\lambda_\theta} n) h(\theta X_n)] = e^{-\frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{\lambda''_\theta \lambda_\theta - (\lambda'_\theta)^2}{\lambda_\theta^2} \right] \nu_\theta(h)}. \quad \square$$

On va noter

$$\sigma_\theta^2 = \frac{\lambda''_\theta \lambda_\theta - (\lambda'_\theta)^2}{\lambda_\theta^2}.$$

En $\theta = 0$, σ_θ^2 vaut σ^2 qui est strictement positif, il existe donc un intervalle centré en 0 sur lequel σ_θ^2 est strictement positif, car la fonction $\theta \mapsto \sigma_\theta^2$ est continue au voisinage de 0.

Remarque. — On peut aussi faire la preuve du lemme 10.6 sans utiliser le lemme 10.5 mais c'est un peu plus long. On raisonne comme dans la démonstration du théorème limite central pour $S_n f$, (donc sous des hypothèses un peu plus larges pour f).

On va maintenant montrer un théorème limite local fonctionnel pour la suite de variables aléatoires $(\theta X_n, \theta S_n)$, on choisit $|\theta| < a$ tel que $\sigma_\theta > 0$.

Lemme 10.7. — Pour toute fonction g continue à support compact sur \mathbb{R} , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \mathbb{R}} |\sqrt{2\pi n} \sigma_\theta E_{0, h_\theta} [g(z + \theta S_n - n\varepsilon) \frac{h(\theta X_n)}{h_\theta(\theta X_n)}] - e^{-\frac{z^2}{2n\sigma_\theta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \nu_\theta(h)| = 0.$$

Démonstration. — Il suffit de le montrer pour g dans \mathcal{H} , \hat{g} est donc continue à support compact par exemple dans $[-\delta, +\delta]$. On a :

$$g(z + \theta S_n - n\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} \hat{g}(u) e^{i(z + \theta S_n - n\varepsilon)u} du.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
 E_{0,h_\theta}[g(z + {}^\theta S_n - n\varepsilon) \frac{h({}^\theta X_n)}{h_\theta({}^\theta X_n)}] \\
 &= E_{0,h_\theta}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} \hat{g}(u) e^{i(z + {}^\theta S_n - n\varepsilon)u} du \frac{h({}^\theta X_n)}{h_\theta({}^\theta X_n)}] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} E_{0,h_\theta}[e^{iu} (\frac{{}^\theta S_n}{-} n\varepsilon) h({}^\theta X_n) h_\theta({}^\theta X_n)] \hat{g}(u) e^{iuz} du.
 \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 C_n &= E_{0,h_\theta}[g(z + {}^\theta S_n - n\varepsilon) \frac{h({}^\theta X_n)}{h_\theta({}^\theta X_n)}] \sqrt{2\pi n\sigma_\theta} - e^{-\frac{z^2}{2n\sigma_\theta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \nu_\theta(h) \\
 &= \int_{-\delta\sqrt{n}\sigma_\theta}^{+\delta\sqrt{n}\sigma_\theta} \hat{g}(\frac{u}{\sqrt{n}\sigma_\theta}) e^{i\frac{uz}{\sqrt{n}\sigma_\theta}} E_{0,h_\theta}[e^{iu} (\frac{{}^\theta S_n}{\sqrt{n}\sigma_\theta} - n\varepsilon) \frac{h({}^\theta X_n)}{h_\theta({}^\theta X_n)}] du \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} e^{i\frac{uz}{\sigma\sqrt{n}}} du \hat{g}(0) \nu_\theta(h).
 \end{aligned}$$

On passe à la limite en utilisant le lemme 10.5, comme dans le théorème limite local pour $S_n f$ et on a le résultat voulu exactement pour les mêmes raisons. \square

10.4 Théorèmes des grands écarts

On peut alors démontrer deux versions du théorème des grands écarts, on remarque d'abord que pour $|\theta| < a$, la fonction $\psi: \theta \mapsto \log \lambda_\theta$ est bien définie. De plus on a :

$$\begin{aligned}
 \psi(0) &= 0, \\
 \psi'(0) &= \frac{\lambda'_0}{\lambda_0} = m(fh) = 0, \\
 \psi''(0) &= \frac{\lambda''_0}{\lambda_0} - (\frac{\lambda'_0}{\lambda_0})^2 = \sigma^2 > 0, \\
 \psi''(\theta) &= \sigma_\theta^2.
 \end{aligned}$$

Au voisinage de $\theta = 0$, la fonction ψ est donc strictement convexe. On suppose avoir choisi a suffisamment petit pour que ψ soit strictement convexe sur $[-a, +a]$. On choisit maintenant ε dans $]0, \frac{\psi(a)}{a}[$. La droite $y = t\varepsilon$ coupe alors la courbe $y = \psi(t)$ en 2 points : 0 et $\theta_\varepsilon > 0$. Comme ψ est une fonction convexe, θ_ε vérifie l'équation :

$$\psi'(\theta_\varepsilon) = \varepsilon.$$

On peut alors montrer les deux résultats suivants :

Théorème 10.8. — *Si pour tout ξ de \mathbb{R}^* , $\Phi_f(i\xi)$ n'admet pas de valeur propre de module 1, alors :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (hm[\frac{S_n f}{n} > \varepsilon])^{\frac{1}{n}} = \lambda_{\theta_\varepsilon} e^{-\theta_\varepsilon \varepsilon}.$$

Théorème 10.9. — Sous les mêmes hypothèses pour f , au voisinage de $n = +\infty$, on a :

$$hm\left[\frac{S_n f}{n} > \varepsilon\right] \sim \frac{(\lambda_{\theta_\varepsilon} e^{-\theta_\varepsilon \varepsilon})^n \nu_{\theta_\varepsilon}(h)}{\sqrt{2\pi n \theta_\varepsilon \sigma_{\theta_\varepsilon}}}.$$

Démonstration du théorème 10.8. — La proposition 10.3 entraîne que :

$$hm\left[\frac{S_n f}{n} > \varepsilon\right] = (\lambda_\theta e^{-\theta \varepsilon})^n E_{0, h_\theta}[(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} \cdot e_\theta)(^\theta S_n + n\varepsilon)] \frac{h}{h_\theta} (^\theta X_n).$$

D'après le lemme 10.6,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{0, h_\theta} [e_{i \frac{\varepsilon}{n}} (^\theta S_n + n\varepsilon)] \frac{h}{h_\theta} (^\theta X_n) = e^{i\alpha(\psi'(\theta) - \varepsilon)} \nu_\theta(h),$$

pour $\theta = \theta_\varepsilon$, on en déduit que la chaîne $((^\theta S_n + n\varepsilon, ^\theta X_n))_{n \geq 0}$ vérifie la loi des grands nombres :

$$\frac{^\theta S_n + n\varepsilon}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

On en déduit alors que :

$$[E_{0, h_{\theta_\varepsilon}} [(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} \cdot e_{\theta_\varepsilon})(^\theta S_n + n\varepsilon)] \frac{h}{h_{\theta_\varepsilon}} (^\theta X_n)]^{\frac{1}{n}} \geq E_{0, h_{\theta_\varepsilon}} [(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} \cdot e_{\theta_\varepsilon}) \left(\frac{\theta_\varepsilon S_n}{+} n\varepsilon n\right) \left[\frac{h}{h_{\theta_\varepsilon}} (^\theta X_n)\right]^{\frac{1}{n}}].$$

Comme la quantité $\frac{h}{h_{\theta_\varepsilon}} (^\theta X_n)$ est bornée et comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{0, h_{\theta_\varepsilon}} [(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} \cdot e_{\theta_\varepsilon}) \left(\frac{^\theta S_n + n\varepsilon}{n}\right)] = 1,$$

on en déduit alors que :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} [E_{0, h_{\theta_\varepsilon}} [(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} \cdot e_{\theta_\varepsilon}) \left(\frac{\theta_\varepsilon S_n + n\varepsilon}{n}\right) \frac{h}{h_{\theta_\varepsilon}} (^\theta X_n)]]^{\frac{1}{n}} \geq 1.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} [E_{0, h_{\theta_\varepsilon}} [(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} \cdot e_{\theta_\varepsilon}) \left(\frac{\theta_\varepsilon S_n + n\varepsilon}{n}\right) \frac{h}{h_{\theta_\varepsilon}} (^\theta X_n)]]^{\frac{1}{n}} &\leq [E_{0, h_{\theta_\varepsilon}} \left[\frac{h}{h_{\theta_\varepsilon}} (^\theta X_n)\right]]^{\frac{1}{n}} \\ &\leq [\nu_{\theta_\varepsilon}(h) + \eta]^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

qui converge vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} hm[S_n f > n\varepsilon]^{\frac{1}{n}} = e^{-\theta_\varepsilon \varepsilon} \cdot \lambda_{\theta_\varepsilon}. \quad \square$$

Démonstration du théorème 10.9. — La fonction $t \mapsto e^{-\theta_\varepsilon t} \mathbf{1}_{\{t \leq 0\}}$ est directement Riemann-intégrable. Le lemme 10.7 est donc encore valable pour cette fonction, pour $\theta = \theta_\varepsilon$, $z = 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\sqrt{2\pi n \sigma_{\theta_\varepsilon}} E_{0, h_{\theta_\varepsilon}} [(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} \cdot e_{\theta_\varepsilon}) \left(\frac{\theta_\varepsilon S_n + n\varepsilon}{n}\right) \frac{h}{h_{\theta_\varepsilon}} (^\theta X_n)] - \int_{-\infty}^0 e^{-\theta_\varepsilon t} dt \cdot \nu_{\theta_\varepsilon}(h)| = 0.$$

Donc la limite quand n tend vers $+\infty$ de la quantité suivante :

$$|\sqrt{2\pi n}\sigma_{\theta_\varepsilon}(\lambda_{\theta_\varepsilon}e^{-\theta_\varepsilon\varepsilon})^n E_{0,h_{\theta_\varepsilon}}[(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} \cdot e_{\theta_\varepsilon})\left(\frac{\theta_\varepsilon S_n + n\varepsilon}{n}\right)\frac{h}{h_{\theta_\varepsilon}}(\theta_\varepsilon X_n)] - \frac{(\lambda_{\theta_\varepsilon}e^{-\theta_\varepsilon\varepsilon})^n}{\theta_\varepsilon}\nu_{\theta_\varepsilon}(h)|$$

est nulle. Car :

$$\lambda_{\theta_\varepsilon}e^{-\theta_\varepsilon\varepsilon} = e^{(\psi(\theta_\varepsilon) - \theta_\varepsilon\varepsilon)} < 1$$

et car :

$$\theta_\varepsilon\varepsilon - \psi(\theta_\varepsilon) = \sup_{t \in [0, a]} [t\varepsilon - \psi(t)] > 0.$$

C'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sqrt{2\pi n}\sigma_{\theta_\varepsilon}hm[S_n f > n\varepsilon] - \frac{(\lambda_{\theta_\varepsilon}e^{-\theta_\varepsilon\varepsilon})^n}{\theta_\varepsilon}\nu_{\theta_\varepsilon}(h)| = 0.$$

Donc, au voisinage de $n = +\infty$, on a :

$$hm[S_n f > n\varepsilon] \sim \frac{(\lambda_{\theta_\varepsilon}e^{-\theta_\varepsilon\varepsilon})^n \nu_{\theta_\varepsilon}(h)}{\theta_\varepsilon \sqrt{2\pi n}\sigma_{\theta_\varepsilon}}. \quad \square$$

Remarque. — On peut aussi avoir en utilisant des méthodes similaires la vitesse de convergence dans le théorème limite central pour la marche $(\theta S_n, \theta X_n)$. On obtient alors un théorème des grands écarts un peu plus précis mais tout à fait analogue à celui obtenu pour des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, voir par exemple Crépel [C] et Feller [F]. Les calculs étant ici longs et peu intéressants, on s'en dispensera.

11 APPLICATIONS SUR DES EXEMPLES

11.1 Premier exemple : La transformation $Tx = 2x[1]$

La mesure m est invariante par T . L'opérateur de Perron-Frobenius associé à T est :

$$\Phi f(x) = \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right].$$

On va prendre plusieurs types de fonctions et voir si on peut leur appliquer les théorèmes limites précédents.

11.1.1 Les polynômes de degré 1 : $f(x) = ax + b$

Quitte à enlever une constante, on peut supposer que $m(f) = \frac{a}{2} + b = 0$, donc que $f(x) = \alpha(2x - 1)$, α dans \mathbb{R}^* . Dans ce cas on peut calculer directement σ^2 :

$$\sigma^2 = \langle f, f \rangle_m + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f \circ T^k \rangle_m.$$

On a :

$$\langle f, f \rangle_m = \alpha^2 \int_0^1 (2x - 1)^2 dx = \frac{\alpha^2}{3},$$

pour tout $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} \langle f, f \circ T^k \rangle_m &= \alpha^2 \int_0^1 (2x - 1)(2T^k x - 1) dx \\ &= \alpha^2 \left[4 \int_0^1 x T^k x dx - 2 \int_0^1 x dx - 2 \int_0^1 T^k x dx + 1 \right] \\ &= \alpha^2 \left[4 \int_0^1 x T^k x dx - 1 \right], \end{aligned}$$

on a de plus :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x T^k x dx &= \int_0^1 x \{2^k x\} dx = \sum_{p=0}^{2^k-1} \int_{p/2^k}^{(p+1)/2^k} x(2^k x - p) dx \\ &= \sum_{p=0}^{2^k-1} \left[\frac{2^k}{3} \left(\left(\frac{p+1}{2^k} \right)^3 - \left(\frac{p}{2^k} \right)^3 \right) - \frac{p}{2} \left(\left(\frac{p+1}{2^k} \right)^2 - \left(\frac{p}{2^k} \right)^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2^{2k}} \sum_{p=0}^{2^k-1} \left(\frac{1}{3} + \frac{p}{2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \frac{1}{2^k}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\langle f, f \circ T^k \rangle_m = \alpha^2 \frac{1}{3} \frac{1}{2^k}.$$

Ainsi $\sigma^2 = \frac{\alpha^2}{3} [1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-1/2}] = \alpha^2 > 0$, pour tout polynôme de degré 1, on peut appliquer le théorème limite central. Pour appliquer le théorème limite local, il faut trouver les valeurs propres de module 1 de $\Phi_f(i\xi)$. On a pour x de I , g dans V :

$$\Phi_f(i\xi)(g)(x) = \frac{1}{2} e^{i\xi\alpha x} [e^{-i\xi\alpha} g(\frac{x}{2}) + g(\frac{x+1}{2})].$$

On remarque que pour $g(x) = e^{2i\xi\alpha x}$ on a :

$$\Phi_f(i\xi)(g)(x) = \cos(\xi\alpha)g(x).$$

g est donc une fonction propre associée à la valeur propre $\cos(\xi\alpha)$, qui est de module 1 si ξ est dans $\frac{\pi}{\alpha}\mathbb{Z}$. À l'aide du test des points périodiques, on voit qu'il n'y a pas d'autres valeurs de ξ pour lesquelles $\Phi_f(i\xi)$ admet des valeurs propres de module 1, on cherche à résoudre dans $]0, \frac{\pi}{\alpha}[$ l'équation $e^{i\xi S_1 f(1)} = e^{i\xi S_2 f(1/3)/2}$, c'est-à-dire $e^{i\xi\alpha} = 1$, ses solutions dans \mathbb{R} appartiennent à $\frac{2\pi}{\alpha}\mathbb{Z}$ qui ne rencontre pas $]0, \frac{\pi}{\alpha}[$. Alors f s'écrit $u - u \circ T + \alpha k$, u dans V , k dans V à valeurs entières, $m(k) = 0$, on peut même préciser que $u(x) = -2\alpha x$ et que $k(x) = \mathbf{1}_{[1/2, 1]}(x) - \mathbf{1}_{[0, 1/2]}(x)$. u n'étant pas nul, on ne peut donc pas appliquer le théorème limite local à f polynôme de degré 1.

11.1.2 Les polynômes de degré 2

On prend $f(x) = \alpha(3x^2 - 1) + \beta(2x - 1)$. On trouve par un calcul analogue.

$$\sigma^2 = \beta^2 + \frac{8}{3}\alpha^2 + \frac{5}{2}\alpha\beta$$

qui est positif si $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ car

$$\Delta = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{8}{3} = -\frac{53}{12} < 0.$$

On a donc le théorème limite central. Pour le théorème limite local, on résout l'équation

$$(*) \quad e^{i\xi S_k f(p)/k} = e^{i\xi S_{k'}(p')/k'}$$

où p et p' sont des points périodiques de T de période k et k' , pour $p = 0$ et $p = 1$, on trouve ξ dans $\frac{2\pi}{3\alpha+2\beta}\mathbb{Z}$, pour $p = 0$ et $p = 1/3$, on trouve ξ dans $\frac{12\pi}{5\alpha+6\beta}\mathbb{Z}$. Si $\frac{6(3\alpha+2\beta)}{5\alpha+6\beta}$ n'est ni un entier ni l'inverse d'un entier, alors on a le théorème limite local.

11.1.3 Les indicateurs d'intervalle : $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$, $(a, b) \neq (0, 1)$, $0 \leq a < b \leq 1$

La proposition 7.2 entraîne le théorème limite central car $m([a, b]) = b - a$ est dans $]0, 1[$. La fonction f étant à valeurs entières, telle que $f - m(f)$ ne s'écrit pas $u - u \circ T$, on a alors le 2ème théorème limite local pour f et T : uniformément en z , pour tout intervalle fini Δ de \mathbb{R} , au voisinage de $n = +\infty$, on a :

$$m(\{x \in I : \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[a,b]}(T^k x) \in z + n(b-a) + \Delta\}) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \frac{e^{-\frac{z^2}{2n}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\Delta}(z - n(b-a) + \ell).$$

11.1.4 Les fonctions $f = a\mathbf{1}_{[0,1/3]} + b\mathbf{1}_{[1/3,2/3]}$, $ab \neq 0$, $|b/a|$ non inclus dans $\{n, \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*\}$

On a $\mathcal{F} = \{1/3, 2/3\}$, f ne s'écrit pas $u - u \circ T + \frac{a+b}{3}$ avec u dans V en effet $1/7$ est un point 3-périodique n'appartenant pas à $\mathcal{F} \cup T^{-1}(\mathcal{F}) \cup T^{-2}(\mathcal{F})$ et

$$\frac{S_3 f(1/7)}{3} - \frac{a+b}{3} = \frac{f(1/7) + f(2/7) + f(4/7)}{3} - \frac{a+b}{3} = \frac{a}{3} \neq 0.$$

On a donc le théorème limite central. f n'est pas à valeurs entières car $|b/a|$ et $|a/b|$ ne sont pas dans \mathbb{N} . On résoud l'équation

$$(*) \quad e^{i\xi S_k f(p)/k} = e^{i\xi S_{k'}(p')/k'}$$

où p et p' sont des points périodiques de T de période k et k' n'appartenant pas à $\cup_{\ell < k} T^{-\ell}(\mathcal{F})$ et $\cup_{\ell < k'} T^{-\ell}(\mathcal{F})$. Pour $p = 3/7$, $p' = 7/15$ on trouve : ξ dans $\frac{24\pi}{b}\mathbb{Z}$. Pour $p = 1/7$, $p' = 1/15$ on trouve : ξ dans $\frac{24\pi}{b-a}\mathbb{Z}$.

Les sous groupes $\frac{24\pi}{b}\mathbb{Z}$ et $\frac{24\pi}{b-a}\mathbb{Z}$ sont d'intersection non réduite à 0 s'il existe k dans \mathbb{Z} tel que :

$$\frac{24\pi}{b} = \frac{24\pi}{b-a}k \Rightarrow a = (1-k)b \text{ ou } \frac{24\pi}{b}k = \frac{24\pi}{b-a} \Rightarrow b = \frac{k}{k-1}a.$$

Ce qui est impossible. On peut donc appliquer le 1er théorème limite local à f et T . Donc uniformément en z réel, pour tout intervalle fini Δ de \mathbb{R} , au voisinage de $n = +\infty$, on a :

$$m(\{x \in I : S_n f(x) \in z + n(b-a) + \Delta\}) \sim \frac{e^{-\frac{z^2}{2n}}}{\sigma\sqrt{n}} \frac{m(\Delta)}{\sqrt{2\pi}}.$$

11.1.5 Les polynômes trigonométriques

On choisit pour fonction f un polynôme trigonométrique, on l'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=1}^N a_k \cos(2k\pi x) + \sum_{\ell=1}^N b_\ell \sin(2\pi\ell x).$$

On a $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

Conditions sur les a_k, b_ℓ pour que f vérifie la condition (H)

On suppose $f = \phi - \phi \circ T$. ϕ admet un développement en série trigonométrique :

$$\phi(x) = \sum_k \alpha_k \cos(2\pi kx) + \sum_\ell \beta_\ell \sin(2\pi\ell x).$$

On a :

$$\begin{aligned} \phi(x) - \phi(Tx) &= \sum_k \alpha_k \cos(2\pi kx) + \sum_\ell \beta_\ell \sin(2\pi\ell x) \\ &\quad - \sum_k \alpha_k \cos(4\pi kx) - \sum_\ell \beta_\ell \sin(4\pi\ell x) \\ &= \sum_k (\alpha_{2k} - \alpha_k) \cos(4\pi kx) + \sum_k \alpha_{2k+1} \cos(2(2k+1)\pi x) \\ &\quad + \sum_\ell (\beta_{2\ell} - \beta_\ell) \sin(4\pi\ell x) + \sum_\ell \beta_{2\ell+1} \sin(2(2\ell+1)\pi x). \end{aligned}$$

Ainsi si $f = \phi - \phi \circ T$, on a :

$$1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \begin{cases} a_{2k} &= \alpha_{2k} - \alpha_k \\ a_{2k+1} &= \alpha_{2k+1} \end{cases} \quad \text{et } k > N \quad \alpha_k = 0$$

$$1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor \begin{cases} b_{2\ell} &= \beta_{2\ell} - \beta_\ell \\ b_{2\ell+1} &= \beta_{2\ell+1} \end{cases} \quad \text{et } \ell > M \quad \beta_\ell = 0.$$

On en déduit alors que : si $2^k \leq N$ donc si $k \leq \frac{\log N}{\log 2}$, on a :

$$\alpha_1 = a_1, \alpha_2 = a_1 + a_2, \dots, \alpha_{2^k} = \sum_{\ell=0}^k a_{2^\ell},$$

et donc

$$\alpha_{2^k} = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \log N / \log 2 \rfloor} a_{2^\ell} \quad \text{si } 2^k > N.$$

De même, pour : $2^k \leq \frac{N}{3}$ donc pour $k \leq \frac{\log N - \log 3}{\log 2}$, on a :

$$\alpha_3 = a_3, \alpha_6 = a_3 + a_6, \alpha_{12} = a_3 + a_6 + a_{12}, \dots, \alpha_{3 \cdot 2^k} = \sum_{\ell=0}^k a_{3 \cdot 2^\ell}$$

et donc :

$$\alpha_{3 \cdot 2^k} = \sum_{\ell=0}^{[(\log N - \log 3) / \log 2]} a_{3 \cdot 2^\ell} \text{ si } 3 \cdot 2^k > N.$$

On obtient donc les relations suivantes pour $f = \phi - \phi \circ T$:

1. $\sum_{\ell=0}^{[(\log N - \log k) / \log 2]} a_{k2^\ell} = 0$ pour k entier non multiple de 2 compris entre 1 et N .
2. $\sum_{\ell=0}^{[(\log M - \log k) / \log 2]} b_{k2^\ell} = 0$ pour k entier non multiple de 2 compris entre 1 et M .

Si l'une de ces conditions n'est pas vérifiée, on sait alors que σ^2 est strictement positif. Ici, on peut même calculer la valeur exacte de σ^2 :

$$\sigma^2 = \int_0^1 f^2 dm + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f f \circ T^k dm.$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos(2k\pi x) \cos(2q\pi x) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq k \\ \frac{1}{2} & \text{si } q = k \end{cases} \\ \int_0^1 \sin(2k\pi x) \sin(2q\pi x) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq k \\ \frac{1}{2} & \text{si } q = k \end{cases} \\ \int_0^1 \sin(2k\pi x) \cos(2q\pi x) dx &= 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2 dm &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N a_k^2 + \sum_{\ell=1}^M b_\ell^2 \right], \\ \int_0^1 f f \circ T^p dm &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{[N/2^p]} a_k a_{k2^p} + \sum_{\ell=1}^{[M/2^p]} b_\ell b_{\ell 2^p} \right]. \end{aligned}$$

Dans le cas où $[N/2^p]$ ou $[M/2^p]$ est nul on impose à la somme correspondante d'être nulle. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N a_k^2 + \sum_{\ell=1}^M b_\ell^2 \right] + \sum_{p=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{[N/2^p]} a_{k2^p} a_k + \sum_{\ell=1}^{[M/2^p]} b_{\ell 2^p} b_\ell \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{1 \leq k \text{ impair} \leq N} \left[\sum_{p=0}^{[(\log N - \log k) / \log 2]} a_{k2^p} \right]^2 + \sum_{1 \leq \ell \text{ impair} \leq M} \left[\sum_{p=0}^{[(\log M - \log \ell) / \log 2]} b_{\ell 2^p} \right]^2 \right]. \end{aligned}$$

On peut alors appliquer le théorème central limite et même donner la vitesse de convergence pour f un polynôme trigonométrique.

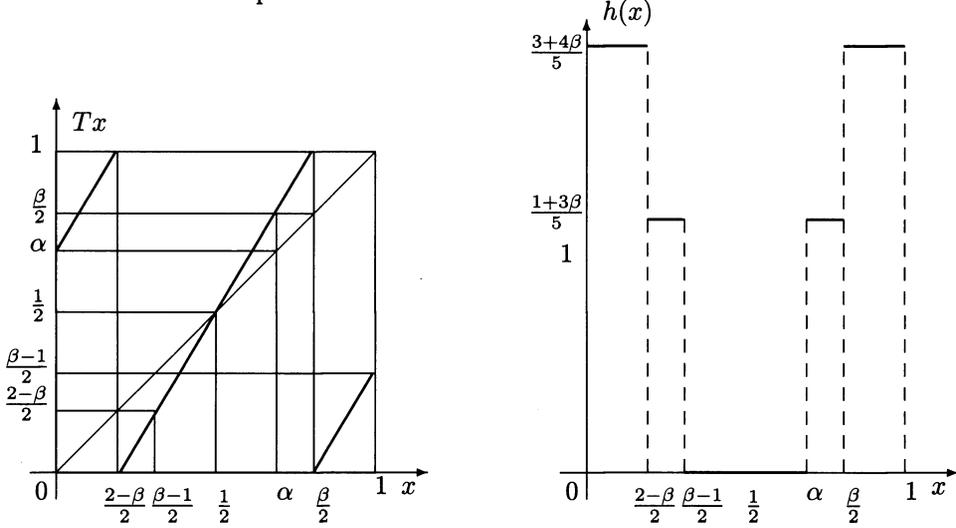
Remarque. — On obtient des résultats analogues si on prend pour transformation $T(x) = rx[1]$, avec r un entier supérieur à 2.

11.2 Deuxième exemple : La transformation $Tx = \beta x + \alpha[1]$, $\beta > 0$, $\beta^2 = \beta + 1$ et $\alpha = \frac{3-\beta}{2}$

On a

$$h(x) = \frac{3+4\beta}{5} [1_{[0, \frac{2-\beta}{2}]}(x) + 1_{[\frac{\beta}{2}, 1]}(x)] + \frac{1+3\beta}{5} [1_{[\frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta-1}{2}]}(x) + 1_{[\alpha, \frac{\beta}{2}]}(x)].$$

La fonction h a pour points de discontinuité l'ensemble $\{0, \frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta-1}{2}, \alpha, \frac{\beta}{2}, 1\}$. Cet ensemble est invariant par T .



Si on prend f une fonction continue sur I , \mathcal{I}_f est alors vide et

$$\mathcal{I} = \cup_{n \geq 0} T^n \{0, \frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta-1}{2}, \alpha, \frac{\beta}{2}, 1\} = \{0, \frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta-1}{2}, \alpha, \frac{\beta}{2}, 1\}.$$

On peut donc appliquer le test des points périodiques à f en prenant des points n'appartenant pas à \mathcal{I} ni à $[\frac{\beta-1}{2}, \alpha]$ qui est l'ensemble $\{h = 0\}$.

Ainsi on peut appliquer le théorème central limite à T et f « bien choisie » continue sur I . C'est un exemple de β -transformation tel que le système (T, μ) est ergodique et non faiblement mélangeant, voir Wilkinson[W].

Par exemple, pour un polynôme de degré 1 $f(x) = ax + b$, on a :

$$\mu(f) = \int_0^1 f(x)h(x) dx = \frac{a}{2} + b = 0 \text{ si } \frac{a}{2} = -b.$$

On se limite à $f(x) = \frac{1-\beta}{2}(2x - 1)$, on remarque que si $u(x) = x$ alors on a :

$$u(x) - u(Tx) = \begin{cases} (1-\beta)x - \frac{3-\beta}{2} = \frac{1-\beta}{2}(2x-1) - 1 & \text{sur } [0, \frac{2-\beta}{2}] \\ (1-\beta)x - \frac{1-\beta}{2} = \frac{1-\beta}{2}(2x-1) & \text{sur } [\frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta}{2}] \\ (1-\beta)x + \frac{1+\beta}{2} = \frac{1-\beta}{2}(2x-1) + 1 & \text{sur } [\frac{\beta}{2}, 1]. \end{cases}$$

Ainsi $f(x) = u(x) - u(Tx) + k(x)$, avec : $k(x) = \mathbf{1}_{[\frac{\beta}{2}, 1]}(x) - \mathbf{1}_{[0, \frac{2-\beta}{2}]}(x)$.

On remarque que si $v(x) = \mathbf{1}_{[0, \frac{\beta-1}{2}]}(x) - \mathbf{1}_{[\alpha, 1]}(x)$, alors :

$$v \circ T - v = \mathbf{1}_{[\frac{\beta}{2}, 1]} + \mathbf{1}_{[\frac{2-\beta}{2}, \gamma]} - \mathbf{1}_{[0, \frac{2-\beta}{2}]} - \mathbf{1}_{[\delta, \frac{\beta-1}{2}]} - \mathbf{1}_{[0, \frac{\beta-1}{2}]} + \mathbf{1}_{[\alpha, 1]}$$

avec $T\gamma = \frac{\beta-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}$ et $T\delta = \alpha$, $\frac{1}{2} < \delta < \alpha$. Donc :

$$v \circ T - v = 2(\mathbf{1}_{[\frac{\beta}{2}, 1]} - \mathbf{1}_{[0, \frac{2-\beta}{2}]}) + (\mathbf{1}_{[\frac{\beta-1}{2}, \gamma]} - \mathbf{1}_{[\delta, \alpha]}) = 2k + w.$$

Comme $\{h = 0\} =]\frac{\beta-1}{2}, \alpha[$, on en déduit que hm -p.p.

$$k(x) = \frac{1}{2}[v(Tx) - v(x)],$$

donc que $f = \phi - \phi \circ T$ hm -presque partout, ainsi pour un polynôme de degré 1, $\sigma = 0$.

Si maintenant, on prend $f(x) = \cos(2\pi x)$, on a : $\mu(f) = -2\frac{3+4\beta}{5} \sin(\pi\beta)$. Pour le point 2-périodique $p = \frac{2\beta-3}{2}$, on a :

$$S_2 f(p) - 2\mu(f) = -2 \cos(2\pi\beta) + 4\frac{3+4\beta}{5} \sin(\pi\beta) \neq 0.$$

Donc on a le théorème limite central pour f .

11.3 Troisième exemple : Les transformations « homographiques par morceaux »

Ce sont des généralisations de la transformation « fraction continue » : $T_1 x = \{\frac{1}{x}\}$. La proposition suivante donne toutes les bijections de $[0, 1]$ qui sont des homographies :

Proposition 11.1. — *Si φ est une bijection croissante de $[0, 1]$ qui est une homographie, alors il existe un paramètre α de \mathbb{R}_+^* tel que :*

$$\varphi(x) = \frac{\alpha x}{(\alpha - \frac{1}{\alpha})x + \frac{1}{\alpha}} = f_\alpha(x).$$

Alors les bijections de $[0, 1]$ qui sont des homographies sont de la forme f_α ou $1 - f_\alpha$.

Démonstration. — φ est entièrement déterminée par $(\varphi(0), \varphi(1)) = (0, 1)$ et par $\varphi'(0) = \alpha^2$ où α est dans \mathbb{R}_+^* , ce qui donne le résultat annoncé. \square

Pour α dans \mathbb{R}_+^* , on définit les transformations de l'intervalle suivantes :

$$T_\alpha = T_1 \circ f_{\frac{1}{\alpha}}.$$

Alors pour tout x de I , on a :

$$T_\alpha(x) = \{\alpha^2(\frac{1}{x} - 1)\},$$

en effet :

$$\frac{1}{f_{\frac{1}{\alpha}}(x)} = \frac{(1/\alpha - \alpha)x + \alpha}{x/\alpha} = 1 - \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{x} = \alpha^2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + 1.$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 11.2. — Pour tout α de \mathbb{R}_+^* , T_α est dans \mathcal{C} et la densité de la mesure invariante est

$$h_\alpha(x) = \frac{1}{\log(1 + 1/\alpha^2)} \frac{1}{x + \alpha^2}.$$

Démonstration. — L'appartenance à \mathcal{C} des transformations T_α se montre exactement comme celle de T_1 . Pour calculer la densité de la mesure invariante, on calcule l'opérateur de Perron-Frobenius associé, il vaut :

$$\Phi_\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{\alpha^2}{x+n+\alpha^2}\right) \frac{\alpha^2}{(x+n+\alpha^2)^2},$$

on vérifie aisément que h_α est solution de $\Phi_\alpha h_\alpha = h_\alpha$. \square

Remarque. — Pour $\alpha \neq 1$, il n'existe pas de bijection φ strictement monotone de I telle que :

$$T_\alpha = \varphi^{-1} \circ T_1 \circ \varphi.$$

Sinon, on aurait :

$$h_\alpha = h \circ \varphi \cdot |\varphi'| \quad \text{avec } h(x) = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{1+x},$$

et donc :

$$\varphi_\varepsilon(x) = C(x + \alpha^2)^{\varepsilon c_\alpha} - 1 \quad \text{avec } c_\alpha = \frac{\log 2}{\log(1 + 1/\alpha^2)}$$

$\varepsilon = 1$ si φ est croissante, $\varepsilon = -1$ si elle est décroissante, C est une constante déterminée par $\varphi_1(0) = 0$ et $\varphi_{-1}(1) = 0$. On trouve :

$$\varphi_1(x) = \left(\frac{x + \alpha^2}{\alpha^2} \right)^{c_\alpha} - 1 \quad \text{et } \varphi_{-1}(x) = \left(\frac{x + \alpha^2}{1 + \alpha^2} \right)^{-c_\alpha} - 1.$$

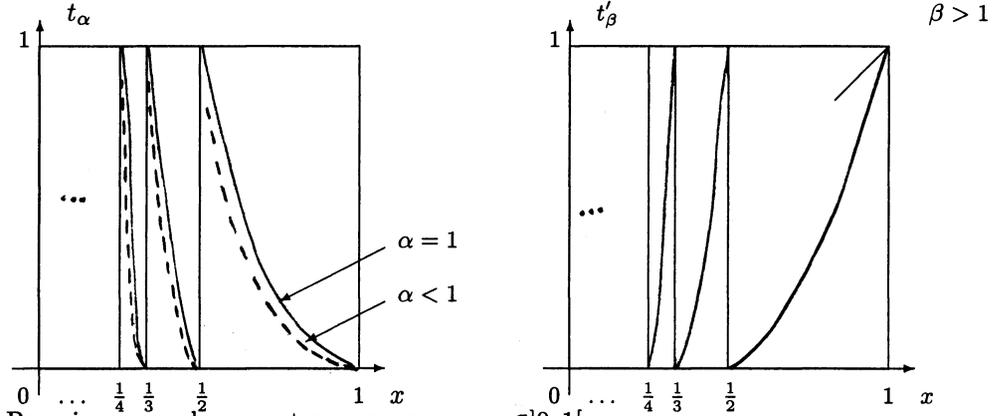
On calcule alors $\varphi_\varepsilon^{-1} \circ T_1 \circ \varphi_\varepsilon$ pour les bijections que l'on a trouvées, on remarque que l'on ne retrouve pas la quantité T_α , on en déduit alors que T_α et T_1 ne sont pas conjuguées (au sens où il n'existe pas de bijection φ strictement monotone de I telle que $T_\alpha = \varphi^{-1} \circ T_1 \circ \varphi$).

Pour avoir des transformations croissantes par morceaux, on compose T_β par $g(x) = 1 - x$, on trouve pour β dans $]1, +\infty[$:

$$T'_\beta(x) = 1 - \left\{ \beta^2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \right\} \quad \text{et } h'_\beta(x) = \frac{-1}{\log(1 - 1/\beta^2)} \frac{1}{\beta^2 - x}.$$

TRANSFORMATIONS DILATANTES DE L'INTERVALLE

Pour représenter ces transformations, il est plus facile de se ramener à une partition fixe. Ici la partition associée à T_α est : $I = \cup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{\alpha^2}{\alpha^2+n+1}, \frac{\alpha^2}{\alpha^2+n}]$. On passe de cette partition à la partition : $I = \cup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ par l'homographie f_α . On a : $T_\alpha = f_\alpha \circ t_\alpha \circ f_{1/\alpha}$, où t_α est la transformation qui consiste à joindre le point $(\frac{1}{n+1}, 1)$ au point $(\frac{1}{n}, 0)$ de façon homographique, avec pour pente $\frac{-n^2}{\alpha^2}$ au point $(\frac{1}{n}, 0)$. On fait de même pour T'_β , on définit t'_β en inversant les rôles de 0 et de 1. On représente ici les transformations t_α et t'_β .

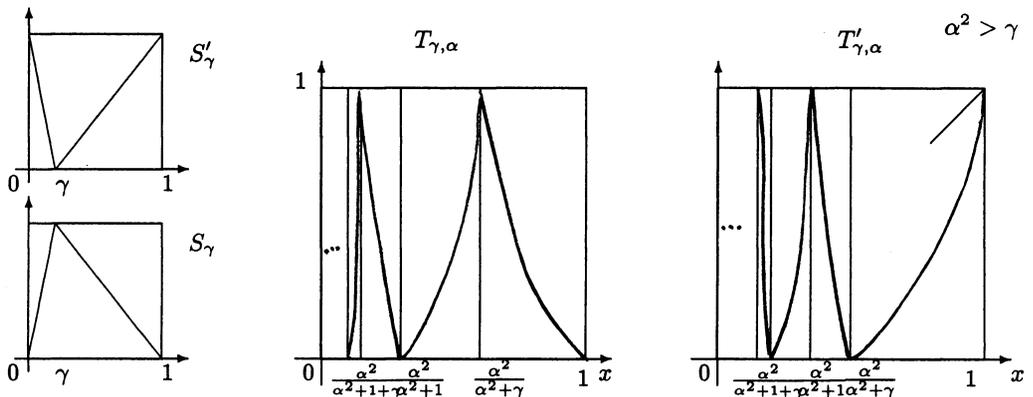


Pour jouer sur deux pentes on pose pour $\gamma \in]0, 1[$:

$$S_\gamma(x) = \begin{cases} \frac{x}{\gamma} & \text{sur } [0, \gamma] \\ \frac{1-x}{1-\gamma} & \text{sur } [\gamma, 1] \end{cases}$$

$$S'_\gamma(x) = \begin{cases} \frac{\gamma-x}{\gamma} & \text{sur } [0, \gamma] \\ \frac{x-\gamma}{1-\gamma} & \text{sur } [\gamma, 1]. \end{cases}$$

En composant S_γ ou S'_γ par T_α , on peut jouer sur 2 pentes, avoir 2 paramètres et avoir une transformation continue sur I . On note $T_{\gamma,\alpha} = S_\gamma \circ T_\alpha$ et $T'_{\gamma,\alpha} = S'_\gamma \circ T_\alpha$. Pour que $T_{\gamma,\alpha}$ soit dans \mathcal{C} , il faut supposer que $\alpha^2 > \gamma$ car 1 est un point fixe et car la pente en 1 vaut $\frac{\alpha^2}{\gamma}$.



L'opérateur de Perron-Frobenius associé vaut :

$$\begin{aligned}\Phi_{\gamma,\alpha}f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} [f(\frac{\alpha^2}{\gamma x + n + \alpha^2}) \frac{\alpha^2 \gamma}{(\gamma x + n + \alpha^2)^2} \\ &\quad + f(\frac{\alpha^2}{(\gamma - 1)x + n + \alpha^2 + 1}) \frac{\alpha^2(1 - \gamma)}{((\gamma - 1)x + n + \alpha^2 + 1)^2}] \\ \Phi'_{\gamma,\alpha}f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} [f(\frac{\alpha^2}{\gamma - \gamma x + n + \alpha^2}) \frac{\alpha^2 \gamma}{(\gamma - \gamma x + n + \alpha^2)^2} \\ &\quad + f(\frac{\alpha^2}{(1 - \gamma)x + n + \gamma + \alpha^2}) \frac{\alpha^2(1 - \gamma)}{((1 - \gamma)x + n + \gamma + \alpha^2)^2}].\end{aligned}$$

On pose

$$g_A(x) = \frac{1}{(A + 1/\alpha^2)x + 1} \frac{1}{Ax + 1} = \alpha^2 \left[\frac{1}{x + \frac{1}{A+1/\alpha^2}} - \frac{1}{x + \frac{1}{A}} \right]$$

g_A est dans V si $A \geq -1$. Pour trouver les densités des mesures de probabilité invariantes par les $T_{\gamma,\alpha}$ on calcule les images de g_A par $\Phi_{\gamma,\alpha}$ et par $\Phi'_{\gamma,\alpha}$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi_{\gamma,\alpha}g_A(x) &= \frac{\alpha^2 \gamma}{A\alpha^2 + \gamma x + \alpha^2} + \frac{\alpha^2(1 - \gamma)}{A\alpha^2 + (\gamma - 1)x + 1 + \alpha^2} \\ &= \alpha^2 \left[\frac{1}{x + \frac{\alpha^2(1+A)}{\gamma}} - \frac{1}{x - \frac{1+\alpha^2(1+A)}{1-\gamma}} \right] \\ \Phi'_{\gamma,\alpha}g_A(x) &= \frac{\alpha^2 \gamma}{A\alpha^2 + \gamma - \gamma x + \alpha^2} + \frac{\alpha^2(1 - \gamma)}{A\alpha^2 + (1 - \gamma)x + 1 + \alpha^2 + \gamma} \\ &= \alpha^2 \left[\frac{1}{x + \frac{\alpha^2(1+A)+\gamma}{1-\gamma}} - \frac{1}{x - \frac{\alpha^2(1+A)+\gamma}{\gamma}} \right].\end{aligned}$$

Ainsi g_A est une fonction propre de $\Phi_{\gamma,\alpha}$ associée à 1 si :

$$\frac{\alpha^2(1+A)}{\gamma} = \frac{1}{A+1/\alpha^2} \text{ et } -\frac{(A+1)\alpha^2+1}{1-\gamma} = \frac{1}{A}$$

donc si $\alpha^2 A^2 + (\alpha^2 + 1)A + 1 - \gamma = 0$, pour que g_A soit dans V on doit prendre

$$A = \sqrt{\frac{(\alpha^2 - 1)^2 + 4\alpha^2 \gamma}{-}} (\alpha^2 + 1) 2\alpha^2.$$

De même g_A est une fonction propre de $\Phi'_{\gamma,\alpha}$ associée à 1 si :

$$\frac{\alpha^2(A+1)+\gamma}{1-\gamma} = \frac{1}{A+1/\alpha^2} \text{ et } -\frac{(A+1)\alpha^2+\gamma}{\gamma} = \frac{1}{A}$$

d'où si :

$$\alpha^2 A^2 + (\alpha^2 + \gamma + 1)A + \frac{\gamma}{\alpha^2} + \gamma = 0 \text{ et } \alpha^2 A^2 + (\alpha^2 + \gamma)A + \gamma = 0.$$

$A = -\frac{\gamma}{\alpha^2}$ est l'unique solution du système. Comme on a supposé que $\alpha^2 > \gamma$, on en déduit que h_A est bien dans V et est la densité de la mesure invariante par $T'_{\gamma,\alpha}$.

Dans tous ces cas, la densité h de la mesure invariante est majorée par une constante strictement positive sur $[0, 1]$, alors $\frac{1}{h}$ est encore dans V , on en déduit d'après la proposition 7.1 que l'on peut appliquer le théorème limite central à toute fonction f non constante de V . D'après la proposition 9.3, on sait que l'opérateur $\Phi_f(i\xi)$ admet une valeur propre de module 1 s'il existe φ à valeurs réelles, avec $e^{i\varphi} \cdot h$ dans V telle que :

$$e^{if} = e^{ir} e^{i\varphi \circ T} e^{-i\varphi} \text{ hm-p.p.}$$

Comme f et $\frac{1}{h}$ sont dans V on en déduit que $e^{i\varphi \circ T}$ et $e^{i\varphi}$ sont toutes les deux dans V , ceci n'est possible que si $e^{i\varphi}$ est constante et donc si f est à valeurs entières. Ainsi pour toute fonction f de V , on peut appliquer un théorème limite local, le second si f est à valeurs entières, le premier sinon.

On a trouvé par le calcul la valeur explicite des densités des mesures invariantes par $T_\alpha, T'_\beta, T_{\gamma,\alpha}, T'_{\gamma,\alpha}$. On va maintenant essayer d'expliquer pourquoi la densité a une forme aussi simple. Dans un premier temps, on va se restreindre au cas de T_α . D'abord, on va voir comment on code les points de l'intervalle I à l'aide de T_α ; ensuite, on va prolonger T_α de façon à ce qu'elle devienne bijective, cela consiste en fait à trouver un ensemble \mathcal{P} qui représente tous les « passés » d'un point quelconque de I , on notera \tilde{T}_α cette bijection. Alors l'action de \tilde{T}_α sur $I \times \mathcal{P}$ n'est rien d'autre que l'action d'un semi-groupe contenu dans $Sl(2, \mathbb{R})$. Ainsi, la mesure de Liouville restreinte à $I \times \mathcal{P}$ est invariante par \tilde{T}_α , on obtient alors naturellement en projetant cette mesure sur I la mesure invariante par T_α .

Le cas des transformations $T'_\beta, T_{\gamma,\alpha}, T'_{\gamma,\alpha}$ se traite de la même façon, la principale difficulté est de trouver l'expression explicite de l'ensemble \mathcal{P} qui représente tous les « passés » possibles de I .

L'intérêt de la construction faite pour T_α est qu'on peut définir « le » développement en fractions continues dans $\mathbb{Z}(\alpha)$ d'un point de I et aussi qu'on peut poursuivre l'analogie avec les fractions continues classiques ($\alpha = 1$) en construisant une dissection de Farey associée à T_α et interpréter l'action de T_α sur les géodésiques du demi-plan de Poincaré qui pour extrémités x dans I et y dans \mathcal{P} .

La principale différence avec le cas classique est qu'ici on utilise uniquement un semi-groupe de matrices de $Sl(2, \mathbb{R})$ et non un groupe : $Sl(2, \mathbb{Z})$ pour faire cette construction, voir C. Series [S1] [S2] et R. Moeckel [Moe]. Le fait d'utiliser uniquement un semi-groupe entraîne que l'ensemble limite n'est pas \mathbb{R} mais $I \cup \mathcal{P}$. Cependant, le fait que le semi-groupe soit en quelque sorte discret permet de faire le même type de raisonnement que dans le cas de $Sl(2, \mathbb{Z})$ qui lui est discret. Il faut aussi noter qu'en général le groupe associé à T_α n'est lui pas discret.

Pour x dans I , on a :

$$\begin{aligned} T_\alpha x &= \left\{ \alpha^2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \right\} \\ &= \alpha^2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) - n_1 \text{ si } x \text{ est dans } \left[\frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2 + n_1}, \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + n_1} \right], n_1 \geq 0. \end{aligned}$$

On a alors si x est dans $[\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2+n_1}, \frac{\alpha^2}{\alpha^2+n_1}]$, $n_1 \geq 0$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha^2}{T_\alpha x + n_1 + \alpha^2} = \frac{\alpha}{\frac{T_\alpha x}{\alpha} + \frac{n_1}{\alpha} + \alpha} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha + \frac{n_1}{\alpha} \end{bmatrix} \cdot \frac{T_\alpha x}{\alpha} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n_1} \cdot \frac{T_\alpha x}{\alpha}. \end{aligned}$$

où $M \cdot z$ désigne l'action de la matrice M sur le complexe z :

$$M \cdot z = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

On note M_α et N_α les matrices $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Si $T_\alpha x$ n'est pas nul, on peut recommencer, on trouve :

$$x = \alpha M_\alpha N_\alpha^{n_1} M_\alpha N_\alpha^{n_2} \cdot \frac{T_\alpha^2 x}{\alpha}.$$

Plus généralement si pour tout k , $T_\alpha^k x$ est défini, on trouve :

$$x = \alpha M_\alpha N_\alpha^{n_1} M_\alpha N_\alpha^{n_2} \dots M_\alpha N_\alpha^{n_k} \cdot \frac{T_\alpha^k x}{\alpha}$$

$$\text{et } x = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} M_\alpha N_\alpha^{n_1} M_\alpha N_\alpha^{n_2} \dots M_\alpha N_\alpha^{n_k} \cdot 0.$$

Ainsi x est entièrement déterminé par la suite des entiers $(n_i)_{i>0}$ et T_α n'est rien d'autre que le décalage de la suite (n_i) . Pour rendre T_α bijective, on considère le décalage sur les suites indexées par \mathbb{Z} et non plus par \mathbb{N}^* et donc on considère le passé \mathcal{P} des points x de I .

Si y est dans \mathcal{P} , alors on peut écrire que :

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha N_\alpha^{-n_0} M_\alpha^{-1} N_\alpha^{-n_1} M_\alpha^{-1} \dots N_\alpha^{-n_k} M_\alpha^{-1} \cdot 0,$$

comme $N_\alpha^{-1} M_\alpha^{-1} = M_\alpha^{-1t} N_\alpha^{-1}$, on a aussi :

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha M_\alpha^{-1t} N_\alpha^{-n_0} M_\alpha^{-1t} N_\alpha^{-n_1} \dots M_\alpha^{-1t} N_\alpha^{-n_k} \cdot 0,$$

$\frac{1}{\alpha} \mathcal{P}$ est donc l'ensemble limite du semi-groupe engendré par $\{M_\alpha^{-1t} N_\alpha^{-n} : n \geq 0\}$, donc \mathcal{P} n'est rien d'autre que l'intervalle $]-\infty, -\alpha^2]$. On remarque l'on peut voir I comme l'ensemble limite du semi-groupe engendré par $\{M_\alpha N_\alpha^n : n \geq 0\}$. On définit alors le prolongement naturel de T_α par :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\alpha &: I \times \mathcal{P} \rightarrow I \times \mathcal{P} \\ (x, y) &\mapsto (T_\alpha x, \alpha^2(\frac{1}{y} - 1) - n_1(x)). \end{aligned}$$

TRANSFORMATIONS DILATANTES DE L'INTERVALLE

\tilde{T}_α est bijectif et correspond au décalage sur la suite bilatère qui détermine entièrement le couple (x, y) . Il n'est pas difficile alors de vérifier que la mesure de Liouville sur $I \times \mathcal{P}$: $d\nu(x, y) = \frac{dx dy}{(x-y)^2}$ est invariante par \tilde{T}_α . En la projetant sur la première coordonnée on en déduit la mesure invariante par T_α , c'est $h_\alpha m$, en effet :

$$\int_{-\infty}^{-\alpha^2} \frac{dy}{(x-y)^2} = \frac{1}{x + \alpha^2}.$$

On peut alors continuer l'analogie avec la transformation « fraction continue » et adapter la vision géométrique faite dans le travail de F. Dal'bo et M. Peigné qui suit.

Bibliographie

- [A.F] ADLER (R), FLATTO (L). — *Geodesic flows, interval maps and symbolic dynamics*. Bull. Amer. Math. Soc., 25, p. 229–334, 1992.
- [B.K] BALADI (V), KELLER (G). — *Zeta functions and transfer operators for piecewise monotone transformations*. Commun. Math. Phys. 127, p. 459–477, 1990.
- [B] BREIMAN (L). — *Probability*. Addison-Wesley, 1968.
- [C] CRÉPEL (P). — *Loi des grands écarts pour les marches aléatoires sur \mathbb{R}* . Séminaire de probabilités de Rennes, 1978.
- [D] DOEBLIN (W). — *Remarques sur la théorie métrique des fractions continues*. Compositio Math, 7, p. 353–371, 1940.
- [D.F] DOEBLIN (W), FORTET (R). — *Sur les chaînes à liaisons complètes*. Bulletin Soc. Math. Fr., t. 69, p. 132–148, 1937.
- [D.S] DUNFORD (N), SCHWARTZ (J.-T). — *Linear operators, part I*. Interscience, New York, 1958.
- [F] FELLER (W). — *An introduction to probability theory and its applications, vol. II*. J. Wiley, New-York, 1966.
- [G.K] GNEDENKO (B.-V), KOLMOGOROV (A.-N). — *Limit distributions for sums of independent random variables*. Addison Wesley Reading, 1954.
- [G.H] GUIVARC'H (Y), HARDY (J). — *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov*. Annales de l'Institut Henri Poincaré, 24, p. 73–98, 1988.
- [H] HENNION (H). — *Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipschitziens*. Proceedings of the A.M.S., 118, p. 622–634, 1993.
- [H.K] HOFBAUER (F), KELLER (G). — *Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformation*. Math. Zeitschrift, 180, p. 119–140, 1982.
- [I.L] IBRAGIMOV (I.-A), LINNIK (YU.-V). — *Independent and stationnary sequences of random variables*. Wolters-Noordhoff, 1971.

- [IT.M] IONESCU-TULCEA (C.-T), MARINESCU (G). — *Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues*. Ann. Math., 52, p. 140–147, 1950.
- [I] ISHITANI (H). — *A central limit theorem of mixed type for a class of 1-dimensional transformations*. Hiroshima Math. J., 16, p. 161–188, 1986.
- [Ka] KAC (M). — *On the distribution of the values of sums of the type $\sum f(2^k t)$* . Ann. Math., 47, p. 33–49, 1946.
- [Ke] KELLER (G). — *Piecewise monotonic transformations and exactness*. Séminaires de Probabilités de Rennes, 1978.
- [Ko] KOWALSKI (Z.-S). — *Ergodic properties of piecewise monotonic transformations*. S.M.F., Astérisque 49, p. 145–149, 1977.
- [Kr1] KRZYZEWSKI (K). — *On expanding mappings*. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sc. Math., Astr. et Phys. vol. XIX, n. 1, p. 23–24, 1971.
- [Kr2] KRZYZEWSKI (K). — *Note on topological entropy*. Bulletin de l'Académie Polonaise des sciences, série des sc. math., astr. et phys. vol. XVI, n. 6, p. 465–467, 1968.
- [Kr.S] KRZYZEWSKI (K), SZLENK (W). — *On invariant measures for expanding differentiable mappings*. Studia mathematica, vol. 33, p. 83–92, 1969.
- [L.Y] LASOTA (A), YORKE (J.-A). — *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations*. Trans. Amer. Math. Soc., 186, p. 481–488, 1973.
- [L] LE PAGE (E). — *Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires*. Lecture Notes in Math., 928, p. 258–303, 1982.
- [L.Y] LI (T), YORKE (J.-A). — *Ergodic transformations from an interval into itself*. Trans. Amer. Math. Soc., 235, p. 182–192, 1978.
- [M] MAÑÉ (R). — *Ergodic theory and differentiable dynamics*. Springer Verlag, 1987.
- [Ma] MAYER (D). — *Approach to equilibrium for locally expanding maps in \mathbb{R}^k* . Commun. Math. Phys. 95, p. 1–15, 1984.
- [Moe] MOECKEL (R). — *Geodesics on modular surfaces and continued fractions*. Ergod. Th. & Dynam. Sys., 2, p. 69–83, 1982.
- [Mo] MORITA (T). — *Local limit theorem and distribution of periodic orbits of Lasota-Yorke transformations with infinite Markov partition*. J. Math. Soc. Japan, 46, p. 309–343, 1994.

TRANSFORMATIONS DILATANTES DE L'INTERVALLE

- [M.P.V] MOSER (J), PHILLIPS (E), VARADHAN (S). — *Ergodic Theory*. Seminar, Courant Inst. Math. Sci. New-York Univ., p. 111–120, 1975.
- [N] NAGAEV (S.-V). — *Some limit theorems for Markov chains*. Theor. Prob. Appl., 2, p. 378–416, 1957.
- [P] PARRY (W). — *Representation for real numbers*. Acta Math. Acad. Sc. Hungar, 15, p. 95–105, 1964.
- [S1] SERIES (C). — *The modular surface and continued fractions*. J. London Math. Soc., 31, p. 69–80, 1985.
- [S2] SERIES (C). — *Geometrical Markov coding of geodesics on surfaces of constant negative curvature*. Ergod. Th. & Dynam. Sys., 6, p. 601–625, 1986.
- [R] RENYI (A). — *Representation for real numbers and their ergodic properties*. Acta Math. Acad. Sc. Hungar, 8, p. 477–493, 1957.
- [RE] ROUSSEAU-EGELE (J). — *Un théorème de la limite locale pour une classe de transformations dilatantes et monotones par morceaux*. Annals of Probability, 3, p. 772–788, 1983.
- [Ry] RYCHLIK (M). — *Bounded variation and invariant measures*. Studia mathematica, vol. 76, p. 69–80, 1983.
- [W] WILKINSON (K.-M). — *Ergodic properties of certain linear mod one transformations*. Advances in Mathematics, 14, p. 64–72, 1974.

Anne BROISE
Université de Paris-Sud
Topologie et Dynamique
C.N.R.S. – U.R.A. 1169
Mathématique bat 425
91405 ORSAY cedex
broise@topo.math.u-psud.fr