

# *Astérisque*

CLAIRE ANANTHARAMAN-DELAROCHE

**Classification des  $C^*$ -algèbres purement infinies nucléaires**

*Astérisque*, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki, exp. n° 805, p. 7-27

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1995-1996\\_\\_38\\_\\_7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__7_0)

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CLASSIFICATION DES  $C^*$ -ALGÈBRES PUREMENT  
INFINIES NUCLÉAIRES

[d'après E. KIRCHBERG]

par Claire ANANTHARAMAN-DELAROCHE

## INTRODUCTION

Depuis une vingtaine d'années, l'utilisation en théorie des  $C^*$ -algèbres de méthodes issues de la topologie algébrique a remporté de nombreux succès. Ils ont conduit G. Elliott à lancer, au début des années 90, le programme ambitieux suivant : classifier les  $C^*$ -algèbres nucléaires séparables, à isomorphisme près, à l'aide d'invariants ayant la  $K$ -théorie comme principal ingrédient.

La réalisation de ce programme progresse de façon remarquable grâce aux efforts de nombreux chercheurs, notamment G. Elliott, E. Kirchberg et M. Rørdam (voir [23] pour un aperçu des nombreux résultats obtenus et pour une bibliographie complète jusqu'en 1994).

Nous nous limitons ici à la présentation des résultats récents de E. Kirchberg [32] qui règlent le cas des  $C^*$ -algèbres simples, purement infinies, nucléaires : à une nuance près, le couple formé par leurs groupes (abéliens dénombrables) de  $K$ -théorie est un invariant complet pour la classification de ces algèbres. On sait par ailleurs, grâce au travail de Rørdam [38], que tous les couples de groupes abéliens dénombrables apparaissent comme invariants.

Plus précisément, Kirchberg montre que deux  $C^*$ -algèbres simples, purement infinies, séparables, nucléaires, sont  $KK$ -équivalentes (voir §8) si et seulement si elles sont isomorphes après tensorisation par la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{K}$  des opérateurs compacts. Parmi les conséquences immédiates de ce résultat, mentionnons les deux suivantes :

- une  $C^*$ -algèbre  $A$ , simple, séparable, nucléaire, est purement infinie si et seulement si elle est isomorphe à  $A \otimes \mathcal{O}_\infty$ , où  $\mathcal{O}_\infty$  désigne la  $C^*$ -algèbre universelle engendrée par une infinité dénombrable d'isométries  $s_i$  telles que  $s_i^* s_j = 0$  si  $i \neq j$ ;
- deux  $C^*$ -algèbres  $A$  et  $B$  simples, séparables, nucléaires, sont  $KK$ -équivalentes si et seulement si  $A \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{K}$  et  $B \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{K}$  sont isomorphes.

On voit en particulier que cette étude dépasse le cadre des  $C^*$ -algèbres purement infinies.

Notons que la  $KK$ -équivalence entraîne l'isomorphisme des groupes de  $K$ -théorie et que pour une classe très vaste de  $C^*$ -algèbres la réciproque est vraie. Savoir si c'est toujours le cas pour les  $C^*$ -algèbres nucléaires est un problème important et non résolu.

Les outils fondamentaux de l'approche de Kirchberg sont les suivants :

- les résultats de J. Cuntz [15] donnant une description très simple de la  $K$ -théorie des  $C^*$ -algèbres purement infinies;
- des résultats d'absorption d'homomorphismes dits "triviaux", dans l'esprit des travaux de D. Voiculescu [44] et G.G. Kasparov [26] sur les extensions de  $C^*$ -algèbres, faisant suite à ceux de Brown, Douglas et Fillmore [8];
- sa caractérisation remarquable des  $C^*$ -algèbres exactes — une classe de  $C^*$ -algèbres plus générale que les nucléaires, très intéressante en elle-même — , aboutissement de toute une série de travaux sur cette notion qu'il avait définie vers 1977 [31] (à la même époque S. Wassermann avait également introduit une propriété voisine de l'exactitude [45]);
- des techniques de  $KK$ -théorie développées par Kasparov [27].

Signalons que N. C. Phillips a aussi obtenu de son côté [36] le résultat de classification 8.1 de ce texte, en s'appuyant sur les cas particuliers 8.2 et 8.3 de Kirchberg.

Avant d'aborder le travail de Kirchberg, nous consacrons les quatre premiers paragraphes aux définitions des termes "nucléaire", "exact", "purement infini", ainsi qu'à des exemples, et nous donnons les éléments de  $K$ -théorie nécessaires à l'exposé. *Nous ne considérons ici que des  $C^*$ -algèbres ayant une unité approchée dénombrable* (et l'hypothèse plus forte de séparabilité sera souvent nécessaire). Nous notons  $\mathcal{B}$  la  $C^*$ -algèbre des opérateurs bornés sur l'espace hilbertien de dimension infinie dénombrable, et  $\mathcal{K}$  la  $C^*$ -algèbre des opérateurs compacts. Enfin  $M_n(\mathbb{C})$  désigne la  $C^*$ -algèbre des matrices  $n \times n$  complexes.

Je remercie Joachim Cuntz, Eberhard Kirchberg et Georges Skandalis pour leurs commentaires durant la préparation de ce texte.

## 1. NUCLÉARITÉ ET EXACTITUDE

Une norme sur le produit tensoriel algébrique  $A \odot B$  de deux  $C^*$ -algèbres  $A$  et  $B$  telle que le complété soit lui aussi une  $C^*$ -algèbre est appelée une  $C^*$ -norme. Takesaki a montré [40] l'existence d'une plus petite  $C^*$ -norme, la  $C^*$ -norme spatiale, obtenue en représentant fidèlement  $A$  et  $B$  dans des espaces de Hilbert et  $A \odot B$  dans leur produit tensoriel hilbertien. Le complété sera noté  $A \otimes B$ .

En général, il peut exister plus d'une  $C^*$ -norme sur  $A \odot B$  [40]. En cas d'unicité quelle que soit  $B$ , on dit que  $A$  est *nucléaire*. Des exemples importants sont fournis par les  $C^*$ -algèbres associées aux groupes localement compacts. Soit  $\Gamma$  un groupe discret (nous nous bornons ici à ce cas). La  $C^*$ -algèbre *réduite*  $C_r^*(\Gamma)$  est la fermeture normique de l'algèbre  $\ell^1(\Gamma)$  agissant par convolution sur  $\ell^2(\Gamma)$ , et la  $C^*$ -algèbre *pleine*  $C^*(\Gamma)$  est la  $C^*$ -algèbre universelle associée à l'algèbre de Banach involutive  $\ell^1(\Gamma)$ . On montre [34] que  $C_r^*(\Gamma)$  (ou  $C^*(\Gamma)$ ) est nucléaire si et seulement si le groupe  $\Gamma$  est moyennable.

La classe des  $C^*$ -algèbres nucléaires est stable par de nombreuses opérations, mais à partir d'un exemple de M.-D. Choi [9], on voit que la  $C^*$ -algèbre non nucléaire  $C_r^*(\mathbb{F}_2)$  associée au groupe libre  $\mathbb{F}_2$  à deux générateurs se plonge dans la  $C^*$ -algèbre nucléaire  $\mathcal{O}_2$  qui sera introduite au §2.

Il était donc intéressant de caractériser les sous- $C^*$ -algèbres des nucléaires. Kirchberg montre (nous le verrons au §6) que ce sont les  $C^*$ -algèbres exactes. Nous les présentons succinctement et nous renvoyons au livre de S. Wassermann [46] pour une excellente exposition des résultats connus sur ce sujet avant 1993.

Etant donnés des  $C^*$ -algèbres  $A$  et  $B$  et un idéal  $I$  de  $B$ , l'algèbre  $A \odot (B/I)$  est isomorphe à  $(A \odot B)/(A \odot I)$  qui s'injecte dans  $(A \otimes B)/(A \otimes I)$ , d'où une  $C^*$ -norme sur  $A \odot (B/I)$ . Par conséquent, si  $A$  est nucléaire, la suite

$$0 \longrightarrow A \otimes I \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow A \otimes (B/I) \longrightarrow 0$$

est exacte. Sans hypothèse de nucléarité il n'en est pas toujours ainsi, et  $A$  est dite *exacte* si toute suite exacte  $0 \rightarrow I \rightarrow B \rightarrow B/I \rightarrow 0$  le reste après tensorisation par  $A$  (en considérant la  $C^*$ -norme spatiale). Toute sous- $C^*$ -algèbre d'une  $C^*$ -algèbre exacte est bien sûr exacte, mais c'est beaucoup plus difficile de voir que cette propriété passe au quotient [30].

L'exactitude des  $C^*$ -algèbres associées aux groupes discrets pose des questions très intéressantes dont les réponses sont encore partielles. Pour un groupe discret  $\Gamma$  possédant une famille séparatrice de représentations de dimension finie, on sait [29] que  $C^*(\Gamma)$  est exacte si et seulement si  $\Gamma$  est moyennable. Le cas général reste ouvert. D'après une remarque de A. Connes, pour tout sous-groupe discret  $\Gamma$  d'un groupe de Lie connexe,  $C_r^*(\Gamma)$  se plonge dans une  $C^*$ -algèbre nucléaire. S. Adams a montré [1] qu'il en est de même si  $\Gamma$  est un groupe hyperbolique au sens de Gromov. Il est conjecturé que la  $C^*$ -algèbre réduite de tout groupe discret est exacte.

## 2. $C^*$ -ALGÈBRES PUREMENT INFINIES

On classe les  $C^*$ -algèbres en divers types suivant les propriétés de leurs projecteurs (i.e. idempotents auto-adjoints). On dit que deux projecteurs  $p$  et  $q$  d'une  $C^*$ -algèbre  $A$

sont *équivalents* s'il existe  $x \in A$  avec  $x^*x = p$  et  $xx^* = q$ . La classe de  $p$  sera notée  $[p]$ . Un projecteur  $p$  est dit *infini* s'il est équivalent à un projecteur strictement plus petit. Sinon  $p$  est fini. On dit qu'une  $C^*$ -algèbre simple  $A$  est *purement infinie* si pour tout  $x$  non nul dans  $A$ , la  $C^*$ -algèbre  $\overline{x^*Ax}$  contient un projecteur infini. Cela signifie que  $A$  a "beaucoup" de projecteurs, et qu'ils sont tous (sauf 0) infinis.

Cette notion de  $C^*$ -algèbre purement infinie admet d'autres caractérisations utiles. Par exemple, on voit facilement qu'une  $C^*$ -algèbre simple unifère  $A$ , distincte de  $\mathbb{C}$ , est purement infinie si et seulement si pour tout  $a$  non nul dans  $A$ , il existe  $x, y$  dans  $A$  avec  $xay = 1$ . Signalons aussi que plusieurs questions importantes ne sont toujours pas éclaircies, dont celle concernant la caractérisation des  $C^*$ -algèbres purement infinies en terme de traces. Supposons toujours  $A$  simple avec unité. Une trace  $f$  sur  $A$  est une forme linéaire positive (c'est-à-dire telle que  $f(x^*x) \geq 0$  si  $x \in A$ ) vérifiant  $f(xy) = f(yx)$  pour tous  $x, y$  dans  $A$ . Si  $A$  est purement infinie, elle n'a évidemment pas de trace non nulle. Réciproquement, si  $A$  n'a pas de trace non nulle, et si de plus  $A$  est exacte, on voit que  $A \otimes \mathcal{K}$  possède un projecteur infini en combinant des travaux difficiles de Cuntz [14], de Blackadar et Handelman [6], et de Haagerup [25]. Mais on ne sait pas si cela entraîne que  $A \otimes \mathcal{K}$  (et donc  $A$ ) est purement infinie. On ne sait même pas si une  $C^*$ -algèbre simple peut posséder à la fois des projecteurs finis ( $\neq 0$ ) et des projecteurs infinis.

Bien entendu, la  $C^*$ -algèbre quotient  $\mathcal{B}/\mathcal{K}$  est simple et purement infinie, mais elle n'est pas séparable. C'est seulement en 1977 qu'ont été découverts, par J. Cuntz [13], les premiers exemples concrets de  $C^*$ -algèbres simples purement infinies séparables, les  $C^*$ -algèbres (dites de Cuntz)  $\mathcal{O}_n$ .

Pour  $n$  entier  $\geq 2$ , on note  $\mathcal{O}_n$  la  $C^*$ -algèbre universelle engendrée par  $n$  éléments  $s_1, \dots, s_n$  tels que  $s_i^*s_i = 1$  pour tout  $i$ ,  $s_i s_i^* \perp s_j s_j^*$  si  $i \neq j$ , et  $\sum_{i=1}^n s_i s_i^* = 1$ . J. Cuntz a démontré que ces algèbres sont simples, purement infinies, nucléaires. Ceci reste vrai pour la  $C^*$ -algèbre universelle  $\mathcal{O}_\infty$  engendrée par une infinité dénombrable d'isométries  $s_i$  vérifiant  $s_i s_i^* \perp s_j s_j^*$  si  $i \neq j$ .

Le rôle des algèbres de Cuntz est crucial dans la classification, spécialement celui de  $\mathcal{O}_\infty$  qui est équivalente en  $KK$ -théorie à la  $C^*$ -algèbre  $\mathbb{C}$  (voir §8), et celui de  $\mathcal{O}_2$  à cause du résultat de contractibilité suivant.

**LEMME 2.1** (Cuntz).— *L'endomorphisme  $\alpha : x \mapsto s_1 x s_1^* + s_2 x s_2^*$  de  $\mathcal{O}_2$  (c'est-à-dire "deux fois l'identité" de  $\mathcal{O}_2$ ) est homotope à l'identité de  $\mathcal{O}_2$ .*

En effet, l'unitaire  $u = s_1 \alpha(s_1^*) + s_2 \alpha(s_2^*)$  appartient à la sous- $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{O}_2$  engendrée par les  $s_i s_j s_i^* s_j^*$  ( $1 \leq i, j \leq 2$ ), qui est isomorphe à  $M_4(\mathbb{C})$ . Il existe donc une application continue  $t \mapsto u_t$  de  $[0, 1]$  dans le groupe unitaire de  $\mathcal{O}_2$  avec  $u_0 = 1_{\mathcal{O}_2}$  (unité de  $\mathcal{O}_2$ ) et  $u_1 = u$ . L'égalité  $\alpha_t(s_i) = u_t^* s_i$  ( $i = 1, 2$ ) définit un endomorphisme de  $\mathcal{O}_2$  et  $t \mapsto \alpha_t$  est un chemin continu d'endomorphismes de  $\mathcal{O}_2$  reliant l'identité à  $\alpha$ . ■

Notons que les C\*-algèbres nucléaires, simples, purement infinies, apparaissent maintenant dans de nombreux contextes. Par exemple, soit  $A$  une matrice  $n \times n$  à coefficients dans  $\{0, 1\}$ , irréductible (c'est-à-dire telle que pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$  il existe  $k \in \mathbb{N}$  avec  $A^k(i, j) \neq 0$ ), et distincte d'une matrice de permutation. Notons  $\mathcal{O}_A$  la C\*-algèbre universelle engendrée par des isométries partielles  $s_1, \dots, s_n$  avec les relations

$$s_i s_i^* \perp s_j s_j^* \quad \text{si } i \neq j, \quad s_i^* s_i = \sum_{j=1}^n A(i, j) s_j s_j^* \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

J. Cuntz et W. Krieger ont montré [17] que  $\mathcal{O}_A$  est une C\*-algèbre nucléaire, simple, purement infinie, étroitement liée à la dynamique de la chaîne de Markov topologique définie par la matrice  $A$ . L'algèbre  $\mathcal{O}_n$  correspond au cas où tous les coefficients de  $A$  sont égaux à 1.

Voici une autre construction d'exemples intéressants. Considérons un réseau  $\Gamma$  d'un groupe de Lie semi-simple  $G$  sans facteurs compacts et de centre trivial. Notons  $\alpha$  l'action naturelle de  $\Gamma$  sur la frontière de Furstenberg  $G/P$  de  $G$ , où  $P$  est un sous-groupe parabolique minimal de  $G$ . Rappelons que le produit croisé  $B \rtimes_{\alpha} \Gamma$  de la C\*-algèbre  $B$  des fonctions continues sur  $G/P$  par l'action  $\alpha$  de  $\Gamma$  est la C\*-algèbre universelle engendrée par  $B$  et une représentation unitaire  $\gamma \mapsto u_{\gamma}$  de  $\Gamma$ , vérifiant les relations  $u_{\gamma} f u_{\gamma}^* = f \circ \alpha_{\gamma^{-1}}$  pour  $f \in B$  et  $\gamma \in \Gamma$ . Cette C\*-algèbre  $B \rtimes_{\alpha} \Gamma$  est nucléaire, simple, purement infinie. Des exemples analogues sont aussi obtenus en faisant agir les groupes hyperboliques non élémentaires de Gromov sur le bord de leurs graphes de Cayley (voir [2] et [33]).

### 3. LES GROUPES DE K-THÉORIE

Rappelons brièvement quelques éléments de la  $K$ -théorie des C\*-algèbres. Le groupe  $K_0(A)$  est celui de la  $K$ -théorie algébrique complexe. Nous le définissons ici à l'aide des projecteurs de  $A \otimes \mathcal{K}$ . L'ensemble  $\mathcal{K}_0(A)$  des classes d'équivalence de ces projecteurs a une structure naturelle de semi-groupe abélien (on additionne les projecteurs en les plaçant en position orthogonale). Si  $A$  est unifère,  $K_0(A)$  est le groupe des différences formelles des éléments de  $\mathcal{K}_0(A)$ . Sinon,  $K_0(A)$  est le noyau de l'homomorphisme naturel de  $K_0(\tilde{A})$  dans  $K_0(\mathbb{C})$ , où  $\tilde{A}$  désigne la C\*-algèbre déduite de  $A$  par adjonction d'une unité. L'image de  $[p] \in \mathcal{K}_0(A)$  dans  $K_0(A)$  sera notée  $[p]_0$ , et  $K_0(A)_+$  désignera l'image de  $\mathcal{K}_0(A)$ .

Pour  $n \geq 0$ , on pose  $K_n(A) = K_0(A \otimes C_0(\mathbb{R}^n))$ . Le théorème de périodicité de Bott qui établit l'existence d'un isomorphisme naturel de  $K_0(A)$  sur  $K_2(A)$  est fondamental dans la théorie. Le groupe  $K_1(A)$  (différent de celui de la  $K$ -théorie algébrique) peut se décrire comme le groupe des composantes connexes du groupe unitaire de  $(A \otimes \mathcal{K})^{\sim}$ .

On voit donc que deux C\*-algèbres  $A$  et  $B$  *stablement isomorphes* — i.e. telles que

$A \otimes \mathcal{K}$  et  $B \otimes \mathcal{K}$  soient isomorphes — possèdent les mêmes groupes de  $K$ -théorie. Pour affiner les invariants il faut bien sûr se donner en plus, dans le cas où  $A$  possède une unité  $1_A$ , l'élément  $[1_A]_0$  de  $K_0(A)_+$ .

La classification des  $C^*$ -algèbres nucléaires par la  $K$ -théorie a connu son premier résultat significatif en 1976. Il concerne les  $C^*$ -algèbres dites  $AF$  (Approximativement de dimension Finie). Ce sont celles qui s'obtiennent comme limite inductive d'une suite de  $C^*$ -algèbres de dimension finie. Pour une telle algèbre  $A$ , le groupe  $K_1(A)$  est nul, et  $(K_0(A), K_0(A)_+)$  est un groupe ordonné — ce qui n'est pas le cas en général —. G. Elliott a montré [20] que deux  $C^*$ -algèbres  $AF$  unifères  $A$  et  $B$  sont isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme de groupe ordonné de  $K_0(A)$  sur  $K_0(B)$  envoyant  $[1_A]_0$  sur  $[1_B]_0$ . En outre les groupes ordonnés apparaissant dans cette classification sont caractérisés par des axiomes simples [19].

Dans son programme général de classification des  $C^*$ -algèbres nucléaires, G. Elliott fait figurer d'autres invariants naturels comme le cône convexe topologique des traces positives sur  $A$  (voir [23]). Dans le cas considéré ici d'une  $C^*$ -algèbre simple purement infinie, la liste des invariants d'Elliott se formule plus aisément. Une telle algèbre  $A$  ne possède pas de trace non triviale. En outre les groupes  $K_0(A)$  et  $K_1(A)$  admettent une description très simple [15]. On voit facilement que tout élément de  $K_0(A)$  est représenté par un projecteur non nul de  $A$ , d'où  $K_0(A)_+ = K_0(A)$ . De plus deux tels projecteurs sont équivalents si et seulement si ils ont même image dans  $K_0(A)$ . Dans le cas unifère,  $K_1(A)$  est canoniquement isomorphe au groupe des composantes connexes du groupe unitaire de  $A$  (sans stabilisation). J. Cuntz a aussi montré que les groupes unitaires des algèbres  $\mathcal{O}_n$  sont connexes, que  $K_0(\mathcal{O}_\infty) = \mathbb{Z}$ , et que  $K_0(\mathcal{O}_n) = \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$  ( $n$  fini). En particulier, tous les projecteurs non nuls de  $\mathcal{O}_2$  sont équivalents.

#### 4. LE BIFONCTEUR $Ext(A, B)$ DE KASPAROV

Dans la stratégie de Kirchberg, l'invariance par homotopie du bifoncteur de Kasparov [27] est cruciale. Ce bifoncteur admet des réalisations variées qui, ajoutées à la richesse de ses propriétés fonctorielles, lui confèrent une grande souplesse. Nous renvoyons à [4] et à [24] pour des informations détaillées sur le sujet, et à [42] pour un exposé très accessible.

Nous privilégierons ici la description du bifoncteur comme groupe d'extensions de  $C^*$ -algèbres. Si  $A$  et  $B$  sont deux  $C^*$ -algèbres, rappelons qu'une *extension* de  $A$  par  $B$  est une suite exacte de  $C^*$ -algèbres  $0 \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$ .

Il est intéressant de remonter au problème initial de la théorie d'un seul opérateur qui est l'une des origines de l'apparition des techniques de topologie algébrique en théorie des  $C^*$ -algèbres. Pour un opérateur  $T \in \mathcal{B}$ , le spectre de son image dans  $\mathcal{B}/\mathcal{K}$

est appelé le *spectre essentiel* de  $T$  et noté  $\sigma_e(T)$ . Par des travaux de H. Weyl [47] et J. von Neumann [35], on sait depuis longtemps que deux opérateurs auto-adjoints dans un espace hilbertien sont unitairement équivalents modulo les opérateurs compacts si et seulement si leurs spectres essentiels sont égaux. Ce résultat fut étendu par la suite au cas des opérateurs normaux. L'exemple du "shift" unilatéral montre que  $\sigma_e(T)$  n'est plus un invariant complet pour la classification des opérateurs  $T$  tels que  $TT^* - T^*T \in \mathcal{K}$  (dits essentiellement normaux).

Au début des années 70, Brown, Douglas et Fillmore résolurent le problème de la classification de ces opérateurs en le remplaçant par l'étude des extensions d'une C\*-algèbre commutative par  $\mathcal{K}$ . A tout opérateur  $T$  essentiellement normal de spectre essentiel  $X$ , on associe l'extension  $0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow E \rightarrow C(X) \rightarrow 0$ , où  $E$  désigne la sous-C\*-algèbre de  $\mathcal{B}$  engendrée par  $T$ ,  $\mathcal{K}$  et  $1_{\mathcal{B}}$ , et on identifie deux extensions associées à des opérateurs unitairement équivalents modulo les compacts. L'ensemble  $Ext(X)$  de ces classes d'extensions a une structure naturelle de groupe abélien ([7], [8]), dont l'élément neutre représente les perturbations compactes des opérateurs normaux de spectre essentiel  $X$ .

Dépasant ce cadre, on s'aperçoit que  $Ext(X)$  a un sens pour tout espace compact, d'où un foncteur covariant, qui à tout espace compact métrisable  $X$  associe le groupe abélien  $Ext(X)$ . L'identification de ce foncteur comme théorie homologique associée à la  $K$ -théorie [8] a été décisive pour l'interaction des algèbres d'opérateurs avec la  $K$ -théorie.

Par la suite, on s'est évidemment intéressé ([44], [3]) au cas des extensions d'une C\*-algèbre  $A$  par  $\mathcal{K}$ . Enfin, l'étude des extensions du type

$$0 \rightarrow B \otimes \mathcal{K} \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$$

est intervenue dans le développement de la  $K$ -théorie de Kasparov [27] (la présence de  $\mathcal{K}$  est indispensable pour l'addition des extensions).

L'introduction du bifoncteur  $Ext$  de Kasparov nécessite quelques définitions préliminaires. Un idéal  $B$  d'une C\*-algèbre  $E$  est dit *essentiel* si on a  $B \cap J \neq 0$  pour tout idéal  $J$  non nul de  $B$ . Il existe une plus grande C\*-algèbre, appelée algèbre des *multiplicateurs* de  $B$  et notée  $M(B)$ , contenant  $B$  comme idéal essentiel. Pour  $B$  unifère, on a bien entendu  $M(B) = B$ . Pour  $X$  localement compact, notons  $C_0(X, B)$  la C\*-algèbre des fonctions normiquement continues de  $X$  dans  $B$ , tendant vers 0 à l'infini. En supposant  $B$  unifère,  $M(C_0(X, B))$  est la C\*-algèbre  $C_b(X, B)$  des fonctions continues bornées de  $X$  dans  $B$ . Signalons aussi que  $M(\mathcal{K}) = \mathcal{B}$ .

Soit  $0 \rightarrow B \otimes \mathcal{K} \rightarrow E \xrightarrow{f} A \rightarrow 0$  une extension de  $A$  par  $B \otimes \mathcal{K}$ , d'où un homomorphisme  $\alpha$  de  $E$  dans  $M(B \otimes \mathcal{K})$  qui définit sans ambiguïté l'homomorphisme  $\sigma$  de  $A$

dans  $Q^s(B) = M(B \otimes \mathcal{K})/(B \otimes \mathcal{K})$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B \otimes \mathcal{K} & \longrightarrow & E & \xrightarrow{f} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \alpha & & \downarrow \sigma & & \\ 0 & \longrightarrow & B \otimes \mathcal{K} & \longrightarrow & M(B \otimes \mathcal{K}) & \xrightarrow{\pi} & Q^s(B) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Toute l'information sur l'extension est contenue dans  $\sigma$ . Réciproquement, à la donnée d'un homomorphisme  $\sigma : A \rightarrow Q^s(B)$  on associe l'extension

$$E = \{(a, m) \in A \times M(B \otimes \mathcal{K}), \sigma(a) = \pi(m)\}.$$

On dit que l'extension est *triviale* si  $\sigma$  se relève en un homomorphisme de  $A$  dans  $M(B \otimes \mathcal{K})$ , ou encore s'il existe un homomorphisme  $s : A \rightarrow E$  tel que  $f \circ s = id_A$ . Notons que  $\sigma$  est injectif si et seulement si  $B \otimes \mathcal{K}$  est un idéal essentiel de  $E$ , et dans ce cas on dit que l'extension est *essentielle*.

Deux extensions  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont (*unitairement*) *équivalentes* s'il existe un unitaire  $U$  de  $M(B \otimes \mathcal{K})$  tel que  $Ad \pi(U) \circ \sigma_1 = \sigma_2$ . On notera  $\mathcal{E}xt(A, B)$  l'ensemble des classes  $[\sigma]$  d'extensions  $\sigma : A \rightarrow M(B \otimes \mathcal{K})/(B \otimes \mathcal{K})$ . Muni de l'addition  $[\sigma_1] + [\sigma_2] = [\sigma_1 \oplus \sigma_2]$ , où  $\sigma_1 \oplus \sigma_2$  est l'homomorphisme

$$a \mapsto \begin{pmatrix} \sigma_1(a) & 0 \\ 0 & \sigma_2(a) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \otimes Q^s(B) \simeq Q^s(B),$$

$\mathcal{E}xt(A, B)$  est un semi-groupe abélien. Son quotient modulo les classes d'extensions triviales est le semi-groupe  $Ext(A, B)$  de Kasparov.  $Ext(A, B)$  admet la classe des extensions triviales comme élément neutre, mais ce n'est pas un groupe en général. Signalons que  $Ext(A, B)$  est un groupe lorsque  $A$  est nucléaire séparable, et que  $Ext$  fait le lien entre  $K$ -théorie et  $K$ -homologie :  $Ext(\mathbb{C}, B) = K_1(B)$ , et  $Ext(C(X), \mathbb{C}) = K_1(X) = K^1(C(X))$  pour  $X$  compact métrisable. La preuve de l'invariance par homotopie du bifoncteur  $(A, B) \mapsto Ext(A, B)^{-1}$  (groupe des éléments inversibles de  $Ext(A, B)$ ) est l'un des succès majeurs de la théorie de Kasparov [27].

$Ext(A, B)$  présente toutefois le défaut de décrire seulement les classes d'équivalence stables d'extensions (modulo l'addition d'extensions triviales). La généralisation remarquable par D. Voiculescu ([44], [3]) de la théorie de Weyl-von Neumann permet d'y remédier dans le cas  $B = \mathbb{C}$ . Rappelons d'abord qu'une extension  $\sigma : A \rightarrow Q^s(B)$  est dite *absorbante* si  $[\sigma] + [\tau] = [\sigma]$  pour toute extension triviale  $\tau$ .

**THÉORÈME 4.1** (Voiculescu [44]).- *Toute extension non unifère essentielle d'une  $C^*$ -algèbre séparable  $A$  par  $\mathcal{K}$  est absorbante.*

Comme il existe des extensions triviales essentielles non unifères, on voit que tout élément de  $Ext(A, \mathbb{C})$  est représenté par une et une seule (à équivalence unitaire près)

extension essentielle non unifière. En particulier, l'équivalence unitaire de toutes celles qui sont triviales généralise la théorie classique de Weyl-von Neumann. Dans le cas de  $\text{Ext}(A, B)$  avec  $B$  quelconque la situation est moins satisfaisante :

**THÉORÈME 4.2** (Kasparov [26]). – *Soient  $A$  et  $B$  deux C\*-algèbres avec  $A$  ou  $B$  nucléaire, et  $A$  séparable. Il existe une extension triviale absorbante, et par conséquent dans chaque classe de  $\text{Ext}(A, B)$  il existe une et une seule extension absorbante (à équivalence unitaire près).*

La caractérisation des extensions absorbantes est un problème difficile. Kirchberg le résoud pour  $B$  simple purement infinie : de façon inattendue le résultat est le même que pour  $B = \mathbb{C}$ , comme nous allons le voir maintenant.

## 5. LES THÉORÈMES DE TYPE WEYL-VON NEUMANN DE KIRCHBERG

Introduisons d'abord une classe de morphismes qui intervient naturellement dans les problèmes liés aux produits tensoriels de C\*-algèbres. Soit  $\varphi : A \rightarrow B$  une application linéaire et pour  $n \geq 1$  notons  $\varphi_n : M_n(A) \rightarrow M_n(B)$  l'application définie par  $\varphi_n([a_{ij}]) = [\varphi(a_{ij})]$  (où  $M_n(A)$  est la C\*-algèbre des matrices  $n \times n$  à coefficients dans  $A$ ). On dit que  $\varphi$  est *complètement positive* si  $\varphi_n$  est positive pour tout  $n$ . Bien entendu les homomorphismes sont des applications complètement positives. Pour  $B \supset A$  et  $b \in B$ , l'application  $a \mapsto b^*ab$  est complètement positive.

Une contraction complètement positive  $\varphi : A \rightarrow B$  est dite *nucléaire* si elle est limite (en topologie de la convergence simple normique) d'applications de la forme  $\tau \circ \sigma$  où  $\sigma : A \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  et  $\tau : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow B$  sont des contractions complètement positives. Le lien avec les C\*-algèbres nucléaires se fait par un théorème d'approximation qui rappelle celui de Grothendieck pour les espaces de Banach :  $A$  est nucléaire si et seulement si l'application identique de  $A$  est nucléaire ([34], [10]).

**PROPOSITION 5.1.** – *Soient  $B$  une C\*-algèbre simple purement infinie et  $A$  une sous-C\*-algèbre séparable de  $M(B)$ . Considérons une contraction complètement positive nucléaire  $\varphi : A \rightarrow B$ . Il existe une suite  $(v_n)$  d'éléments de  $B$ , de norme  $\leq 1$ , telle que  $\varphi(a) = \lim_n v_n^* a v_n$  pour tout  $a \in A$ .*

Esquisons la preuve dans le cas où  $B$  est unifière pour simplifier. On peut supposer que  $\varphi$  est de la forme  $\tau \circ \sigma$  comme ci-dessus. Comme  $B$  contient des isométries  $s_1, \dots, s_n$  avec  $\sum_1^n s_i s_i^* \leq 1$ , on montre aisément l'existence de  $e_1, \dots, e_n$  dans  $B$  tels que  $\tau$  soit de la forme  $[x_{ij}] \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto \sum x_{ij} e_i^* e_j$ . Le lemme de Glimm (voir [18], §11.2), appliqué

à la représentation irréductible associée à un état pur  $\omega$  arbitrairement choisi sur  $B$ , permet d'approximer  $\sigma$  par une application complètement positive de la forme  $a \mapsto [\omega(f_i^* a f_j)] \in M_n(\mathbb{C})$ , avec  $f_1, \dots, f_n \in B$ . On est donc ramené au cas où  $\varphi$  est de la forme  $a \mapsto \sum_{i,j=1}^n e_i^* \omega(f_i^* a f_j) e_j$ , et il suffit en fait de traiter le cas  $\varphi : a \mapsto \omega(a) 1_B$ . On se donne une partie finie  $K$  de  $B$  et  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\omega$  est un état pur, on trouve  $b \in B$ , de norme 1, avec  $\|b^*(x - \omega(x)1_B)b\| \leq \varepsilon$  pour  $x \in K$ . C'est ici qu'intervient vraiment le fait que  $B$  est simple purement infinie : il existe  $c \in B$  de norme 1 tel que  $\|1 - c^*b^*bc\| \leq \varepsilon$ . Par conséquent,  $\varphi$  est approché par  $x \mapsto (bc)^*x(bc)$ . ■

A partir de cette proposition, les techniques utilisées par Voiculescu, puis par Kasparov dans son étude de  $Ext(A, B)$ , donnent :

**PROPOSITION 5.2.** – *Soient  $B$  une  $C^*$ -algèbre simple purement infinie et  $A$  une sous- $C^*$ -algèbre unifère séparable de  $M(B \otimes \mathcal{K})$ , avec  $A$  ou  $B$  nucléaire. Soit  $\varphi$  un homomorphisme unifère de  $A$  dans  $M(B \otimes \mathcal{K})$ , nul sur  $A \cap (B \otimes \mathcal{K})$ . Alors il existe une suite  $(u_n)$  d'unitaires de  $M(B \otimes \mathcal{K})$  telle que pour tout  $x \in A$ ,*

$$(x \oplus \varphi(x)) - u_n^* x u_n \in B \otimes \mathcal{K} \quad \text{et} \quad (x \oplus \varphi(x)) = \lim_n u_n^* x u_n.$$

**COROLLAIRE 5.3.** – *Soient  $A$  et  $B$  deux  $C^*$ -algèbres avec  $B$  simple purement infinie,  $A$  séparable, et  $A$  ou  $B$  nucléaire. Toute extension non unifère essentielle de  $A$  par  $B \otimes \mathcal{K}$  est absorbante.*

**REMARQUES** – a) Kirchberg remarque que les cas  $B$  stablement isomorphe à  $\mathbb{C}$  et  $B$  simple purement infinie sont les deux seuls pour lesquels, quelle que soit  $A$  nucléaire séparable, toute extension essentielle non unifère de  $A$  par  $B \otimes \mathcal{K}$  est absorbante.

– b) Son article contient aussi plusieurs variantes utiles mais un peu techniques de la proposition 5.1, qui lui permettent de travailler avec des hypothèses sur  $B$  un peu moins contraignantes que la propriété d'être purement infinie.

## 6. CARACTÉRISATION DES $C^*$ -ALGÈBRES EXACTES

**THÉORÈME 6.1.** – *Une  $C^*$ -algèbre séparable  $A$  est exacte si et seulement si elle est isomorphe à une sous- $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{O}_2$ .*

La démonstration part d'une première caractérisation remarquable des  $C^*$ -algèbres exactes obtenue par Kirchberg dans [30] (voir [46] pour une preuve plus accessible): une  $C^*$ -algèbre est exacte si et seulement si elle est isomorphe à un quotient d'une sous- $C^*$ -algèbre de  $M_{2^\infty} = \varinjlim M_{2^n}(\mathbb{C})$  (produit tensoriel infini d'algèbres  $M_2(\mathbb{C})$ ). Comme  $M_{2^\infty}$  se plonge dans  $\mathcal{O}_2$ , on voit que  $A$  s'insère dans une suite exacte  $0 \rightarrow I \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$ ,

où  $E$  est une sous-C\*-algèbre de  $\mathcal{O}_2$ . Par des arguments standards, on peut supposer que  $I$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{K}$ . On obtient ainsi une extension  $\sigma$  de  $A$  par  $\mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{K}$ . Pour simplifier, le principe de la preuve restant le même, nous continuons la démonstration en supposant  $A$  nucléaire. L'homotopie des endomorphismes  $id_{\mathcal{O}_2}$  et " $2 id_{\mathcal{O}_2}$ " (lemme 2.1) de  $\mathcal{O}_2$ , et l'invariance par homotopie du foncteur  $Ext(A, \cdot)$  donnent  $Ext(A, \mathcal{O}_2) = 0$ . A priori, ceci montre seulement que  $\sigma$  est stablement triviale. Mais on se ramène aisément au cas d'une extension essentielle, et à l'aide du corollaire 5.3 on voit que  $\sigma$  est triviale. L'homomorphisme section  $s : A \rightarrow E \subset \mathcal{O}_2$  donne alors le plongement recherché. ■

**REMARQUE** – Kirchberg montre aussi qu'une C\*-algèbre séparable unifère  $A$  est nucléaire si et seulement elle est isomorphe à une sous-C\*-algèbre unifère de  $\mathcal{O}_2$ , image de  $\mathcal{O}_2$  par une projection de norme 1.

## 7. MORPHISMES D'UNE C\*-ALGÈBRE NUCLÉAIRE VERS UNE PUREMENT INFINIE

Soient  $A$  et  $B$  deux C\*-algèbres avec  $A$  séparable. On note  $SB$  la suspension  $C_0(\mathbb{R}) \otimes B$  de  $B$ . Grâce au résultat fondamental de Kasparov [27], nous identifierons le groupe  $Ext(A, SB)^{-1}$  avec le groupe  $KK(A, B)$ , objet de base de sa théorie. Nous n'en rappellerons pas la définition. Disons seulement que par construction même,  $KK$  est invariant par homotopie et que l'efficacité de cette théorie provient en grande partie de l'existence d'un produit associatif de  $KK(A, B) \times KK(B, C)$  dans  $KK(A, C)$ , noté  $(x, y) \mapsto x \otimes_B y$ . On peut comprendre les éléments de  $KK(A, B)$  comme des morphismes généralisés et ce produit comme une composition de morphismes. La  $E$ -théorie introduite par N. Higson et A. Connes [11] précise ce point de vue. La notion de base est très simple, c'est celle de morphisme asymptotique. Pour les détails nous renvoyons à ([12], Appendix II-B).

**DÉFINITION 7.1.** – On appelle *morphisme asymptotique* de  $A$  dans  $B$  la donnée d'une famille  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  d'applications de  $A$  dans  $B$  telle que

(i)  $t \mapsto \varphi_t(a)$  est continue pour tout  $a \in A$ ;

(ii) pour tous  $a, a' \in A$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi_t(a) + \lambda \varphi_t(a') - \varphi_t(a + \lambda a')) = 0;$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi_t(aa') - \varphi_t(a)\varphi_t(a')) = 0;$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(a) - \varphi_t(a^*) = 0.$$

À équivalence près, les morphismes asymptotiques correspondent exactement aux homomorphismes de  $A$  dans  $B_\infty = C_b(\mathbb{R}_+, B)/C_0(\mathbb{R}_+, B)$ . A toute extension de  $A$  par

$SB \otimes \mathcal{K}$ , on associe sans trop de difficultés un morphisme asymptotique de  $SA$  dans  $SB \otimes \mathcal{K}$ , d'où une flèche naturelle de  $KK(A, B)$  dans le groupe  $E(A, B)$  des classes d'homotopie des morphismes asymptotiques de  $SA$  dans  $SB \otimes \mathcal{K}$ . Ce n'est pas toujours un isomorphisme [43], mais Connes et Higson montrent que c'est le cas si  $A$  est nucléaire.

L'originalité de l'approche de Kirchberg consiste à considérer les morphismes asymptotiques de  $A$  dans  $B$  (sans prendre les suspensions) et à travailler avec la relation d'équivalence suivante (plus fine a priori que l'homotopie usuelle lorsque  $B$  est stable) :

**DÉFINITION 7.2.** – Deux morphismes asymptotiques  $(\varphi_t)$  et  $(\psi_t)$  de  $A$  dans  $B$  sont dits (*asymptotiquement*) *unitairement équivalents* s'il existe une application  $t \mapsto u(t)$  de  $\mathbb{R}_+$  dans le groupe unitaire de  $M(B)$  telle que pour tout  $b \in B$ ,  $t \mapsto u(t)b$  soit normiquement continue, et telle que pour tout  $a \in A$ , on ait  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)\varphi_t(a)u(t)^* - \psi_t(a) = 0$ . La classe de  $\varphi = (\varphi_t)$  sera notée  $[\varphi]$ .

Nous considérons maintenant des  $C^*$ -algèbres unifères  $A$  et  $B$ , et nous supposons que  $B$  contient une copie unifère de  $\mathcal{O}_2$ . Nous notons  $\mathcal{R}(A, B)$  l'ensemble des classes d'équivalence unitaires des morphismes asymptotiques unifères de  $A$  dans  $B$ . Il a une structure naturelle de semi-groupe abélien, en posant  $[\varphi_1] + [\varphi_2] = [\varphi_1 \oplus \varphi_2]$ , où  $\varphi_1 \oplus \varphi_2$  est le morphisme asymptotique  $s_1\varphi_1s_1^* + s_2\varphi_2s_2^*$ , bien défini (à équivalence près) par le choix d'isométries  $s_1, s_2$  de  $B$  telles que  $s_1s_1^* + s_2s_2^* = 1$ . Grâce aux résultats du type Weyl-von Neumann de Kirchberg, l'étude de  $\mathcal{R}(A, B)$  se déroule de façon analogue à celle de  $\mathcal{E}xt(A, B)$ .

Un morphisme asymptotique unifère  $\varphi : A \rightarrow B_\infty$  est dit *trivial* si le commutant  $\varphi(A)' \cap B_\infty$  de  $\varphi(A)$  dans  $B_\infty$  contient une copie unifère de  $\mathcal{O}_2$  (ou encore si  $[\varphi] + [\varphi] = [\varphi]$ ). Il est dit *absorbant* si, pour tout morphisme asymptotique unifère trivial  $\tau$ , on a  $[\varphi] + [\tau] = [\varphi]$ . Il est dit *complètement fidèle* si pour tout  $a \in A$ , on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_t(a)\| = \|a\|$ .

**LEMME 7.3.** – *Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre nucléaire unifère séparable et soit  $B$  une  $C^*$ -algèbre simple, purement infinie, contenant une copie unifère de  $\mathcal{O}_2$ .*

- (i) *Il existe dans  $\mathcal{R}(A, B)$  des éléments complètement fidèles triviaux.*
- (ii) *Un morphisme asymptotique unifère de  $A$  dans  $B$  est absorbant si et seulement il est complètement fidèle.*

Pour (i) on utilise le théorème 6.1 : un plongement unifère

$$\tau_0 : A \longrightarrow \mathcal{O}_2 \otimes 1_{\mathcal{O}_2} \subset \mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_2 \subset B \subset B_\infty$$

fait l'affaire. Pour (ii), considérons un morphisme asymptotique complètement fidèle  $\varphi$  et un élément trivial  $\tau$ . Une variante un peu technique de la proposition 5.1 assure

l'existence de  $s \in B_\infty$  tel que  $\tau(x) = s^* \varphi(x) s$  pour tout  $x \in A$ . En notant  $p$  le projecteur  $ss^*$  (qui commute avec l'image de  $\varphi$ ), on obtient  $[\varphi] = [\tau] + [(1-p)\varphi]$ , d'où

$$[\varphi] + [\tau] = [\tau] + [\tau] + [(1-p)\varphi] = [\varphi].$$

■

En conservant les hypothèses du lemme 7.3, posons

$$R(A, B) = \{[\varphi] + [\tau_0], [\varphi] \in \mathcal{R}(A, B)\},$$

où  $\tau_0$  est défini comme ci-dessus. Remarquons que  $R(A, B)$  n'est autre que l'ensemble des classes de morphismes asymptotiques unifères complètement fidèles. Il est clair que  $[\tau_0]$  est l'élément neutre de  $R(A, B)$ . A nouveau, un argument de type Weyl-von Neumann montre :

**PROPOSITION 7.4.** – *Soit  $A$  une C\*-algèbre nucléaire unifère séparable et soit  $B$  une C\*-algèbre contenant une copie unifère de  $\mathcal{O}_2$ . Alors  $R(A, B)$  est un groupe.*

Nous allons maintenant expliciter l'homomorphisme naturel  $F$  de  $R(A, B)$  dans  $Ext(A, SB) = KK(A, B)$ . Fixons un projecteur  $e$  de rang 1 dans  $\mathcal{K}$ . Pour  $f \in C_b(\mathbb{R}_+, B)$ , nous choisissons un prolongement  $\hat{f}$  de  $f$  en une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $B$  telle que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{f}(t) = 0$ . L'application qui à  $f$  associe la classe de  $\hat{f} \otimes e$  dans  $Q^*(SB) = M(SB \otimes \mathcal{K}) / (SB \otimes \mathcal{K})$  donne, par passage au quotient, un plongement canonique de  $B_\infty = C_b(\mathbb{R}_+, B) / C_0(\mathbb{R}_+, B)$  dans  $Q^*(SB)$ . De cette façon, tout morphisme asymptotique de  $A$  dans  $B$  peut être vu comme un homomorphisme de  $A$  dans  $Q^*(SB)$ , et définit donc un élément de  $Ext(A, SB)$ . De plus, deux morphismes asymptotiques unitairement équivalents donnent le même élément de  $Ext(A, SB)$ . L'application  $F : R(A, B) \rightarrow Ext(A, SB)$  ainsi obtenue respecte l'addition.

Voici le résultat central du travail de Kirchberg :

**THÉORÈME 7.5.** – *Soient  $A$  et  $B$  deux C\*-algèbres contenant chacune une copie unifère de  $\mathcal{O}_2$ , avec  $A$  nucléaire séparable et  $B$  simple purement infinie. Alors  $F$  est un isomorphisme naturel du groupe  $R(A, B)$  sur le groupe  $KK(A, B)$ .*

C'est la partie la plus délicate de l'article. La preuve (que nous ne pouvons pas esquisser ici) combine habilement des raisonnements classiques de  $KK$ -théorie dans lesquels la  $K$ -contractibilité de  $\mathcal{O}_2$  est essentielle.

**THÉORÈME 7.6.** – *Soient  $A$  et  $B$  comme dans le théorème précédent.*

- (i) *Pour tout morphisme asymptotique unifère complètement fidèle  $\varphi$  de  $A$  dans  $B$ , il existe un homomorphisme  $\psi : A \rightarrow B$  et une application normiquement continue  $t \mapsto u(t)$  de  $\mathbb{R}_+$  dans le groupe unitaire de  $B$  tels que, pour tout  $a \in A$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi_t(a) - u(t)\psi(a)u(t)^*\| = 0.$$

(ii) *Tout élément de  $KK(A, B)$  est représenté par un et un seul (à équivalence unitaire asymptotique près) homomorphisme unifère injectif de  $A$  dans  $B$ .*

Donnons une idée de la preuve de (i). Soit  $\alpha$  un homéomorphisme de  $\mathbb{R}_+$ . Nous le prolongeons en un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  par  $\alpha(t) = t$  si  $t \leq 0$ . Alors  $f \mapsto f \circ \alpha$  définit un automorphisme  $\hat{\alpha}$  de la  $C^*$ -algèbre  $SB = C_0(\mathbb{R}, B)$ , d'où par functorialité un automorphisme  $\hat{\alpha}_*$  du groupe  $Ext(A, SB)$ . En notant  $\tilde{\alpha} \circ \varphi$  le morphisme asymptotique  $(\varphi_{\alpha(t)})_{t \geq 0}$ , on voit immédiatement que  $F([\tilde{\alpha} \circ \varphi]) = \hat{\alpha}_*F([\varphi])$ . Mais  $\hat{\alpha}$  est homotope à l'identité de  $SB$ , et donc, grâce à l'invariance par homotopie de  $Ext$  par rapport à la seconde variable,  $\hat{\alpha}_*$  est l'identité de  $Ext(A, SB)$ . On déduit alors de l'injectivité de  $F$  que  $\varphi$  et  $\tilde{\alpha} \circ \varphi$  sont unitairement équivalents pour tout homéomorphisme  $\alpha$  de  $\mathbb{R}_+$ , et (i) en résulte assez facilement. L'assertion (ii) est alors une conséquence immédiate du théorème 7.5. ■

Notons que l'hypothèse concernant l'existence d'une copie unifère de  $\mathcal{O}_2$  dans  $A$  n'est pas essentielle, et aurait pu être évitée si on avait choisi de travailler avec des morphismes non unifères, ou des morphismes de  $A$  dans  $B \otimes \mathcal{K}$ . En fait, Kirchberg obtient de façon analogue le résultat plus fort ci-dessous :

**THÉORÈME 7.7.** – *Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre unifère, nucléaire, séparable, et  $B$  une  $C^*$ -algèbre contenant une copie unifère de  $\mathcal{O}_2$ .*

(i) *Tout élément de  $KK(A, B)$  est représenté par un homomorphisme injectif de  $A$  dans  $B \otimes \mathcal{K}$ .*

(ii) *Deux homomorphismes  $\varphi$  et  $\psi$  de  $A$  dans  $B \otimes \mathcal{K}$  définissent le même élément de  $KK(A, B)$  si et seulement si les homomorphismes  $\varphi \oplus (\tau_0 \otimes e)$  et  $\psi \oplus (\tau_0 \otimes e)$  sont asymptotiquement unitairement équivalents (où  $\tau_0$  désigne un plongement unifère de  $A$  dans  $\mathcal{O}_2 \otimes 1_{\mathcal{O}_2} \subset \mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_2 \subset B \subset B_\infty$ ).*

(iii) *Si de plus  $B$  est simple purement infinie, deux homomorphismes injectifs  $\varphi$  et  $\psi$  de  $A$  dans  $B \otimes \mathcal{K}$  définissent le même élément de  $KK(A, B)$  si et seulement si ils sont asymptotiquement unitairement équivalents.*

**REMARQUE** – Une  $C^*$ -algèbre  $B$  unifère, simple, purement infinie, contient une copie unifère de  $\mathcal{O}_2$  si et seulement si  $[1_B]_0 = 0$ . Notons que cette hypothèse n'est pas une restriction sérieuse. En effet, si  $B$  est unifère, simple, purement infinie, il existe une et une seule (à isomorphisme près)  $C^*$ -algèbre unifère  $C$  stablement isomorphe à  $B$  et telle que  $[1_C]_0 = 0$  (on prend  $C = pBp$  où  $p$  est un projecteur non nul de  $B$  tel que  $[p]_0 = 0$ ). On dit que  $C$  est la *forme standard* (de Cuntz) de  $B$ .

## 8. LA CLASSIFICATION DES C\*-ALGÈBRES P.I.S.U.N.

C'est ainsi sous l'abréviation p.i.s.u.n. que nous désignerons dorénavant les C\*-algèbres purement infinies, simples, séparables, unifères, nucléaires. Dans ce paragraphe, nous supposons toujours  $A$  et  $B$  séparables.

Rappelons d'abord comment la  $KK$ -théorie agit sur la  $K$ -théorie. A toute extension

$$0 \rightarrow SB \otimes \mathcal{K} \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} A \rightarrow 0$$

est associée la suite exacte à 6 termes

$$\begin{array}{ccccccc} K_0(SB \otimes \mathcal{K}) & \xrightarrow{K_0(i)} & K_0(E) & \xrightarrow{K_0(f)} & K_0(A) & & \\ \delta \uparrow & & & & \downarrow \delta & & \\ K_1(A) & \xleftarrow{K_1(f)} & K_1(E) & \xleftarrow{K_1(i)} & K_1(SB \otimes \mathcal{K}) & & \end{array}$$

Par périodicité de Bott et stabilité de la  $K$ -théorie, les groupes  $K_0(SB \otimes \mathcal{K})$  et  $K_1(SB \otimes \mathcal{K})$  sont naturellement isomorphes à  $K_1(B)$  et  $K_0(B)$  respectivement, d'où une flèche naturelle

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1) : KK(A, B) \rightarrow Hom(K_0(A), K_0(B)) \oplus Hom(K_1(A), K_1(B)).$$

On dit qu'un élément  $\mathbf{x} \in KK(A, B)$  est une  $KK$ -équivalence s'il existe  $\mathbf{y} \in KK(B, A)$  tel que  $\mathbf{x} \otimes_B \mathbf{y} = \mathbf{1}_A$  et  $\mathbf{y} \otimes_A \mathbf{x} = \mathbf{1}_B$  (où  $\mathbf{1}_A$  est ici l'élément de  $KK(A, A)$  qui représente l'application identité de  $A$ ). A l'aide du produit de Kasparov, on voit immédiatement que  $(\gamma_0(\mathbf{x}), \gamma_1(\mathbf{x}))$  est, dans ce cas, un isomorphisme du couple de groupes abéliens  $(K_0(A), K_1(A))$  sur  $(K_0(B), K_1(B))$ .

**THÉORÈME 8.1.** – Soient  $A$  et  $B$  deux C\*-algèbres purement infinies, simples, séparables, nucléaires.

(i)  $A$  et  $B$  sont  $KK$ -équivalentes si et seulement si elles sont stablement isomorphes (i.e.  $A \otimes \mathcal{K} \simeq B \otimes \mathcal{K}$ ).

(ii) Si de plus  $A$  et  $B$  sont unifères et s'il existe une  $KK$ -équivalence  $\mathbf{x} \in KK(A, B)$  telle que  $\gamma_0(\mathbf{x})([1_A]_0) = [1_B]_0$  alors  $A$  et  $B$  sont isomorphes.

Pour la preuve de (i) on peut supposer que  $A$  et  $B$  sont sous forme standard. Soit  $\mathbf{x} \in KK(A, B)$  d'inverse  $\mathbf{y} \in KK(B, A)$ . Par le théorème 7.6 il existe des homomorphismes  $\varphi : A \rightarrow B$  et  $\psi : B \rightarrow A$  tels que  $[\psi \circ \varphi] = [id_A]$  et  $[\varphi \circ \psi] = [id_B]$ . En particulier, on peut trouver des suites d'unitaires  $(u_n)$  et  $(v_n)$  dans  $A$  et  $B$  respectivement telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (Ad u_n) \circ \psi \circ \varphi = id_A$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (Ad v_n) \circ \varphi \circ \psi = id_B$  (convergence simple normique). Un argument simple de G. Elliott [21] implique alors que  $A$  et  $B$  sont isomorphes.

Avec les hypothèses supplémentaires de (ii), on contrôle bien les unités de  $A$  et  $B$ , d'où la conclusion. ■

Kirchberg démontre en fait plus : la  $KK$ -équivalence  $\mathbf{x}$  est elle-même représentée par un isomorphisme de  $A$  sur  $B$ .

On déduit du théorème 8.1 les trois résultats remarquables suivants :

**COROLLAIRE 8.2.** – *Pour toute  $C^*$ -algèbre simple, séparable, unifère, nucléaire  $A$ , les  $C^*$ -algèbres  $\mathcal{O}_2$  et  $A \otimes \mathcal{O}_2$  sont isomorphes.*

C'est immédiat puisque  $KK(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_2)$  et  $KK(A \otimes \mathcal{O}_2, A \otimes \mathcal{O}_2)$  sont nuls. ■

Signalons que plusieurs cas particuliers de ce résultat étaient déjà connus; G. Elliott avait notamment établi (voir [37]) l'isomorphisme des  $C^*$ -algèbres  $\mathcal{O}_2$  et  $\mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{O}_2$ .

**COROLLAIRE 8.3.** – *Une  $C^*$ -algèbre simple, séparable, unifère, nucléaire  $A$  est purement infinie si et seulement si elle est isomorphe à  $A \otimes \mathcal{O}_\infty$ .*

En effet, on sait que le plongement unifère  $i : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}_\infty$  induit une  $KK$ -équivalence entre les algèbres  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{O}_\infty$ , qui préserve les classes des unités dans  $K_0$ . Par tensorisation,  $id_A \otimes i$  définit une  $KK$ -équivalence de  $A = A \otimes \mathbb{C}$  avec  $A \otimes \mathcal{O}_\infty$ , qui préserve aussi les classes des unités. Lorsque  $A$  est p.i.s.u.n. on est donc exactement dans la situation du théorème 8.1(ii), en posant  $B = A \otimes \mathcal{O}_\infty$ . On voit même que l'injection  $id_A \otimes i$  est asymptotiquement unitairement équivalente à un isomorphisme de  $A$  sur  $A \otimes \mathcal{O}_\infty$ . ■

**COROLLAIRE 8.4.** – *Deux  $C^*$ -algèbres simples, séparables, nucléaires  $A$  et  $B$  sont  $KK$ -équivalentes si et seulement si les  $C^*$ -algèbres  $A \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{K}$  et  $B \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{K}$  sont isomorphes.*

C'est immédiat puisque les  $C^*$ -algèbres  $A$  et  $B$  sont  $KK$ -équivalentes aux  $C^*$ -algèbres (purements infinies, simples, séparables, nucléaires)  $A \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{K}$  et  $B \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{K}$  respectivement. ■

Si on veut une classification exprimée en termes de  $K_0$  et  $K_1$  on rencontre la difficulté suivante : un isomorphisme de la paire de groupes abéliens  $(K_0(A), K_1(A))$  sur la paire  $(K_0(B), K_1(B))$  ne provient pas toujours d'une  $KK$ -équivalence [41]. C'est toutefois le cas lorsque  $A$  et  $B$  appartiennent à une classe très vaste  $\mathcal{N}$  de  $C^*$ -algèbres, celles qui satisfont au théorème des coefficients universels [39]. Rappelons que  $A$  est dans la classe  $\mathcal{N}$  si et seulement si pour toute  $C^*$ -algèbre  $B$ , on a une suite exacte naturelle

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=0,1} Ext_{\mathbb{Z}}^1(K_i(A), K_{i+1}(B)) \xrightarrow{\delta} KK(A, B) \xrightarrow{\gamma} \bigoplus_{i=0,1} Hom(K_i(A), K_i(B)) \rightarrow 0,$$

où  $\delta$  est l'inverse de l'application qui à  $\mathbf{x} \in \ker(\gamma)$  associe la paire d'extensions de groupes abéliens

$$0 \rightarrow K_0(B) \rightarrow K_1(E) \rightarrow K_1(A) \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow K_1(B) \rightarrow K_0(E) \rightarrow K_0(A) \rightarrow 0$$

définie par la suite exacte à 6 termes relative à  $\mathbf{x}$ . Mentionnons que la classe  $\mathcal{N}$  contient en particulier les  $C^*$ -algèbres qui se construisent à partir des commutatives par les

opérations usuelles de la théorie (tensorisation par  $\mathcal{K}$  ou  $M_n(\mathbb{C})$ , limites inductives, extensions, produits croisés par  $\mathbb{Z} \dots$ ). Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 8.1 (ii) :

**THÉORÈME 8.5.** – Soient  $A$  et  $B$  deux C\*-algèbres p.i.s.u.n. dans la classe  $\mathcal{N}$ . Si les invariants  $(K_0(A), [1_A]_0, K_1(A))$  et  $(K_0(B), [1_B]_0, K_1(B))$  sont isomorphes (en tant que groupes abéliens, avec élément distingué dans  $K_0$ ), alors  $A$  et  $B$  sont isomorphes.

**EXEMPLES** – 1) Les C\*-algèbres  $\mathcal{O}_n$  sont dans la classe  $\mathcal{N}$ . Comme  $(\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}, \hat{k}, 0)$  est l'invariant de  $M_k(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_n$ , on voit que  $M_k(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_m$  et  $M_l(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_n$  sont isomorphes si et seulement si  $m = n$  et  $p.g.c.d.(k, n-1) = p.g.c.d.(l, n-1)$ .

L'invariant de  $\mathcal{O}_p \otimes \mathcal{O}_q$  est  $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}, \hat{1}, (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}))$ , où  $r$  désigne le p.g.c.d. de  $p-1$  et  $q-1$ . Il en résulte par exemple que  $\mathcal{O}_p \otimes \mathcal{O}_q$  et  $\mathcal{O}_2$  sont isomorphes si et seulement si  $p-1$  et  $q-1$  sont premiers entre eux.

– 2) Soit  $\Gamma$  un réseau de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , agissant par isométries sur le demi-plan de Poincaré  $H$ . Le quotient  $\Gamma \backslash H$  est une surface de Riemann de genre  $g \geq 0$ , privée, lorsque  $\Gamma$  n'est pas cocompact, d'un nombre fini  $q \geq 1$  de points. Notons  $\alpha$  l'action de  $\Gamma$  sur la frontière  $S$  de  $H$ . La C\*-algèbre produit croisé  $D = C(S) \rtimes_{\alpha} \Gamma$  est p.i.s.u.n. et elle appartient à la classe  $\mathcal{N}$ . Le calcul de sa  $K$ -théorie montre que  $K_0(D)$  est un groupe abélien finiment engendré dont la composante sans torsion est isomorphe à  $K_1(D)$ . Son rang vaut  $2g + 1$  si  $\Gamma$  est cocompact et  $2g + q$  sinon. De plus, on observe que  $(K_0(D), K_1(D))$  ne dépend que du groupe  $\Gamma$ , et non pas de la façon dont il est plongé comme réseau dans  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Rappelons par ailleurs que la  $K$ -théorie de toute algèbre de Cuntz-Krieger  $\mathcal{O}_A$  est du même type que celle de  $D$ , c'est-à-dire que  $K_0(\mathcal{O}_A)$  est un groupe abélien finiment engendré dont la composante sans torsion est isomorphe à  $K_1(\mathcal{O}_A)$  (voir [16]). Enfin, pour tout couple  $(G_0, g_0)$  formé d'un groupe abélien finiment engendré  $G_0$  et d'un élément  $g_0$  de  $G_0$ , il existe une C\*-algèbre simple de Cuntz-Krieger  $\mathcal{O}_A$  telle que  $(K_0(\mathcal{O}_A), [1_A]_0)$  soit isomorphe à  $(G_0, g_0)$ . Comme ces algèbres  $\mathcal{O}_A$  sont aussi p.i.s.u.n. dans la classe  $\mathcal{N}$ , le théorème de classification de Kirchberg permet d'obtenir le résultat non évident suivant:  $D$  est isomorphe à une C\*-algèbre simple de Cuntz-Krieger (ce qui la relie à la théorie des chaînes de Markov topologiques); elle ne dépend, à isomorphisme stable près, que du groupe  $\Gamma$ , et non pas de son plongement comme réseau dans  $PSL(2, \mathbb{R})$ . En outre, on s'aperçoit que toutes les algèbres simples de Cuntz-Krieger, sauf les  $\mathcal{O}_n$ , s'obtiennent de cette façon à partir d'un réseau non cocompact de  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Pour terminer, énonçons le joli résultat de Rørdam, qui montre que toutes les valeurs possibles de l'invariant apparaissent dans la classe  $\mathcal{N}$ . Soit  $\alpha$  un isomorphisme d'une C\*-algèbre unifère  $B$  sur un coin  $pBp$  ( $p = \alpha(1)$  projecteur de  $B$ ). On note  $B \rtimes_{\alpha} \mathbb{N}$  la C\*-algèbre universelle engendrée par une copie de  $B$  et une isométrie  $s$  telle que

$sbs^* = \alpha(b)$  pour tout  $b$  dans  $B$ . Par ailleurs on dit que  $B$  est une  $C^*$ -algèbre  $AT$  si elle est limite inductive d'une suite  $(B_n \otimes C(\mathbb{T}))$  de  $C^*$ -algèbres, où  $B_n$  est de dimension finie pour tout  $n$ . Dans ce cas  $B \rtimes_{\alpha} \mathbb{N}$  est nucléaire et appartient à la classe  $\mathcal{N}$ .

**THÉORÈME 8.6** (Rørdam [38]).— *Soient  $G_0, G_1$  deux groupes abéliens dénombrables et  $g_0 \in G_0$ . Il existe une  $C^*$ -algèbre  $AT$  simple unifère  $B$ , et un isomorphisme  $\alpha$  de  $B$  sur un coin  $pBp$  de  $B$  tels que  $A = B \rtimes_{\alpha} \mathbb{N}$  soit simple purement infinie avec  $(G_0, g_0, G_1)$  isomorphe à  $(K_0(A), [1_A, ]_0, K_1(A))$ .*

La classification des  $C^*$ -algèbres p.i.s.u.n. sera donc complètement résolue en cas de réponse positive au problème suivant, posé depuis longtemps :

**PROBLÈME :**  $\mathcal{N}$  contient-elle toutes les  $C^*$ -algèbres simples, séparables, nucléaires ? D'après une remarque de Kirchberg, cette question est équivalente à la résolution du cas particulier le "plus simple" de la classification des p.i.s.u.n. : une  $C^*$ -algèbre p.i.s.u.n.  $A$  telle que  $K_0(A) = 0$  et  $K_1(A) = 0$  est-elle isomorphe à  $\mathcal{O}_2$  ?

## RÉFÉRENCES

- [1] S. ADAMS, *Boundary amenability for word hyperbolic groups and an application to smooth dynamics of simple groups*, *Topology* **33** (1994), 765–783.
- [2] C. ANANTHARAMAN-DELAROCHE,  *$C^*$ -algèbres purement infinies et groupes hyperboliques*, Prépublication, Université d'Orléans (1995).
- [3] W. ARVESON, *Notes on extensions of  $C^*$ -algebras*, *Duke Math. J.* **44** (1977), 329–355.
- [4] B. BLACKADAR,  *$K$ -theory for operator algebras*, M.S.R.I. Publications **5**, Springer Verlag, New York (1986).
- [5] B. BLACKADAR, J. CUNTZ, *The structure of stable algebraically simple  $C^*$ -algebras*, *Amer. J. Math.* **104** (1982), 813–822.
- [6] B. BLACKADAR, D. HANDELMAN, *Dimension functions and traces on  $C^*$ -algebras*, *J. Functional Anal.* **45** (1982), 297–340.
- [7] L.G. BROWN, R.G. DOUGLAS, P.A. FILLMORE, *Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of  $C^*$ -algebras*, *Proc. Conf. on Operator Theory*, Springer Lecture Notes in Math. **345** (1973), 58–128.
- [8] L.G. BROWN, R.G. DOUGLAS, P.A. FILLMORE, *Extensions of  $C^*$ -algebras and  $K$ -homology*, *Ann. of Math.* **105** (1977), 265–324.

- [9] M.-D. CHOI, *A simple C\*-algebra generated by two finite order unitaries*, Can. J. Math. **31** (1979), 887–890.
- [10] M.-D. CHOI, E. EFFROS, *Nuclear C\*-algebras and the approximation property*, Amer. J. Math. **100** (1978), 61–97.
- [11] A. CONNES, N. HIGSON, *Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie*, C. R. Acad. Sci. Paris **310** (1990), 101–106.
- [12] A. CONNES, *Noncommutative geometry*, Academic Press (1994).
- [13] J. CUNTZ, *Simple C\*-algebras generated by isometries*, Commun. Math. Phys. **57** (1977), 173–185.
- [14] J. CUNTZ, *Dimension functions on simple C\*-algebras*, Math. Ann. **233** (1978), 145–153.
- [15] J. CUNTZ, *K-theory for certain C\*-algebras*, Ann. of Math. **113** (1981), 181–197.
- [16] J. CUNTZ, *A class of C\*-algebras and topological Markov chains II : Reducible chains and the Ext-functor for C\*-algebras*, Invent. Math. **63** (1981), 25–40.
- [17] J. CUNTZ, W. KRIEGER, *A class of C\*-algebras and topological Markov chains*, Invent. Math. **56** (1980), 251–268.
- [18] J. DIXMIER *Les C\*-algèbres et leurs représentations*, Gauthiers-Villars, Paris (1969).
- [19] E. EFFROS, D. HANDELMAN, C. L. SHEN, *Dimension groups and their affine representations*, Amer. J. Math. **102** (1980), 385–407.
- [20] G.A. ELLIOTT, *On the classification of inductive limits of sequences of semi-simple finite dimensional algebras*, J. Algebra. **38** (1976), 29–44.
- [21] G.A. ELLIOTT, *On the classification of C\*-algebras of real rank zero*, J. Reine Angew. Math. **443** (1993), 179–219.
- [22] G.A. ELLIOTT, *Are amenable C\*-algebras classifiable?*, in Representation theory of groups and algebras, Contemporary Mathematics **145** (1993), 423–426.
- [23] G.A. ELLIOTT, *The classification problem for amenable C\*-algebras*, Proc. I.C.M., Zurich (1994).
- [24] T. FACK, *K-théorie bivariante de Kasparov*, Séminaire Bourbaki, Astérisque **105-106** (1983), 149–166.
- [25] U. HAAGERUP, *Quasitraces on exact C\*-algebras are traces*, Notes manuscrites.

- [26] G.G. KASPAROV, *Hilbert  $C^*$ -modules: theorems of Stinespring and Voiculescu*, J. Operator Theory **4** (1980), 133–150.
- [27] G.G. KASPAROV, *The operator  $K$ -functor and extensions of  $C^*$ -algebras*, Math. U.S.S.R. Izv. **16** (1981), 513–572. Traduit de Izv. Acad. Nauk S.S.S.R., Ser. Math. **44** (1980), 571–636.
- [28] E. KIRCHBERG, *Positive maps and  $C^*$ -nuclear algebras*, Proc. Intern. Conf. on Operator Algebras, Ideals and their applications in theoretical Physics, Leipzig (1977), 225–257, Teubner, Leipzig, 1978.
- [29] E. KIRCHBERG, *On non-semi-split extensions, tensor products and exactness of group  $C^*$ -algebras*, Invent. Math. **112** (1993), 449–489.
- [30] E. KIRCHBERG, *On subalgebras of the CAR-algebra*, J. Functional Analysis **129** (1995), 35–63.
- [31] E. KIRCHBERG, *Exact  $C^*$ -algebras, tensor products, and classification of purely infinite algebras*, Proc. I.C.M., Zurich (1994).
- [32] E. KIRCHBERG, *The classification of purely infinite  $C^*$ -algebras using Kasparov's theory*, version préliminaire, Humboldt Universität zu Berlin (1994).
- [33] M. LACA, J. SPIELBERG, *Purely infinite  $C^*$ -algebras from boundary actions of discrete groups*, Prépublication (1995).
- [34] C. LANCE, *On nuclear  $C^*$ -algebras*, J. Functional Analysis **12** (1973), 157–176.
- [35] J. von NEUMANN, *Charakterisierung des Spectrums eines Integraloperators*, Hermann, Paris (1935).
- [36] N. C. PHILLIPS, *A classification theorem for purely infinite simple  $C^*$ -algebras*, Prépublication, Univ. Oregon et Fields Inst. (1995).
- [37] M. RØRDAM, *A simple proof of Elliott's result  $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{O}_2$* , C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **16** (1994), 31–36.
- [38] M. RØRDAM, *Classification of certain infinite simple  $C^*$ -algebras*, J. Functional Analysis, à paraître.
- [39] J. ROSENBERG, C. SCHOCHET, *The Künneth theorem and the universal coefficient theorem for Kasparov's generalized  $K$ -functor*, Duke J. Math. **55** (1987), 431–474.
- [40] M. TAKESAKI, *On the cross norm of the direct product of  $C^*$ -algebras*, Tôhoku Math J. **16** (1964), 111–122.

- [41] G. SKANDALIS, *Une notion de nucléarité en K-théorie (d'après J. Cuntz)*, *K-theory* **1** (1988), 549–573.
- [42] G. SKANDALIS, *Kasparov's bivariant K-theory and applications*, *Expo. Math.* **9** (1991), 193–250.
- [43] G. SKANDALIS, *Le bifoncteur de Kasparov n'est pas exact*, *C. R. Acad. Sci. Paris* **313** (1991), 939–941.
- [44] D. VOICULESCU, *A non-commutative Weyl-von Neumann theorem*, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* **21** (1976), 97–113.
- [45] S. WASSERMANN, *On tensor products of certain group C\*-algebras*, *J. Functional Analysis* **23** (1976), 239–254.
- [46] S. WASSERMANN, *Exact C\*-algebras and related topics*, *Lecture Notes Series* **19**, Seoul National University (1994).
- [47] H. WEYL, *Über beschränkte quadratischen Formen deren Differenz vollstetig ist*, *Rend. Circ. mat. Palermo* **27** (1909), 373–392.

Claire Anantharaman-Delaroche  
U.R.A. 747  
Département de Mathématiques  
Université d'Orléans  
BP 6759  
45067 ORLEANS Cedex 2

# *Astérisque*

MICHÈLE AUDIN

## **Cohomologie quantique**

*Astérisque*, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki, exp. n° 806, p. 29-58

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1995-1996\\_\\_38\\_\\_29\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__29_0)

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## COHOMOLOGIE QUANTIQUE

par Michèle AUDIN

*A la mémoire de Claude Itzykson*

Les personnages principaux de cet exposé sont des invariants (dits de *Gromov-Witten*, mais construits, dans la plus grande généralité, par Ruan et Tian [51]) pour les variétés symplectiques, définis à l'aide des espaces de modules de courbes pseudo-holomorphes.

Ces espaces de modules ont été introduits et utilisés par Gromov en 1985 dans un article célèbre [28], notamment pour distinguer des variétés symplectiques, puis par McDuff en 1990 dans [43]<sup>1</sup> pour classifier certaines variétés symplectiques de dimension 4. Plus récemment, certains des invariants numériques qu'ils permettent de définir ont servi à Ruan [50] pour distinguer les classes de déformation de deux variétés kählériennes diffeomorphes et Taubes en a relié d'autres aux invariants de Seiberg-Witten des variétés symplectiques de dimension 4 pour démontrer une suite de résultats spectaculaires [54] (voir aussi [36]) dont l'unicité de la structure symplectique sur  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ .

Si l'on en croit les physiciens, ces invariants symplectiques seraient utiles pour décrire les fonctions de corrélation en théorie topologique des champs. A ce titre, ils devraient satisfaire un axiome fondamental, la *règle de décomposition* (en anglais *composition law*) qui décrit le comportement de ces fonctions quand la surface de Riemann dégénère sur une surface singulière, et Ruan et Tian démontrent que c'est bien le cas.

En se restreignant aux courbes pseudo-holomorphes de genre 0 (c'est à dire aux sphères, dites *courbes rationnelles*), comme une sphère ne peut dégénérer que sur une réunion de sphères (le genre n'augmente pas), cette règle de décomposition permet de construire un produit *associatif* — dit *produit quantique* — sur la cohomologie de certaines variétés symplectiques, qui tient compte, grâce aux invariants de Gromov-Witten, de toutes les courbes rationnelles qu'elles contiennent — se restreindre aux courbes rationnelles constantes donnant le cup-produit usuel.

Dans cet exposé, je vais décrire assez de la construction des invariants pour pouvoir donner des énoncés précis sur le produit quantique et le calculer dans quelques exemples.

---

<sup>1</sup>Voir aussi la conclusion récente de ce travail, en collaboration avec Lalonde, dans [37].

Au § 1, je décrirai les invariants et ce qu'il faut démontrer pour les définir, ainsi que les règles de décomposition qu'ils satisfont. Au § 2, je donnerai des indications sur les démonstrations et au § 3 je définirai le produit quantique, donnerai certaines de ses propriétés ainsi que quelques exemples de calculs. Je terminerai par une liste d'allusions à des questions connexes (symétrie miroir et variétés de Frobenius notamment).

J'ai choisi d'axer ce texte sur les invariants "symplectiques" tels qu'ils sont définis par Ruan et Tian dans [51], mais j'ai utilisé au maximum les explications contenues dans le livre [45] de McDuff et Salamon. Il existe des approches algébro-géométriques (la plus féconde sans doute via les "application stables" de Kontsevich [33], voir aussi [11, 12, 15, 38]), mais je n'en parlerai pas. Pour une approche complémentaire, on se reportera aux notes [23] de Fulton et Pandharipande.

*Actualisation (septembre 1996).* — Depuis la présentation orale et la première version de ce texte en novembre 1995, différents auteurs ont annoncé des améliorations significatives de certains des résultats qu'il expose.

Il s'agit principalement de la démonstration par Givental de la conjecture des miroirs ([26], voir le § 3.3.3) et de la définition des invariants de Gromov-Witten pour toutes les variétés symplectiques (suppression des hypothèses de monotonie décrites ici dans les définitions 1.1.5 ou 1.1.3) notamment par Li et Tian [39], Behrend et Fantechi [9, 10] dans le cadre algébro-géométrique et par Fukaya et Ono [22] et Siebert [52] dans le cadre symplectique. Ces derniers auteurs raffinent sérieusement les méthodes présentées ici au § 2 pour se débarrasser des problèmes évoqués avant la définition 1.1.3.

En plus de cette note d'actualisation, le présent texte diffère de celui distribué en novembre 1995 par la mise à jour de la bibliographie et la correction de certaines des erreurs qu'il contenait.

*Remerciements.* — Je remercie les nombreuses personnes qui m'ont aidée et notamment Dusa McDuff, Jean-Yves Mérindol, Claude Sabbah et Claire Voisin aux conseils et suggestions desquels la mise au point de ce texte doit beaucoup, ainsi qu'O. Gabber et H. Spielberg pour m'avoir signalé des erreurs dans sa première version.

## 1. Les invariants de Gromov-Witten

On considère ici une variété symplectique  $(X, \omega)$  et l'espace  $\mathcal{J}$  des structures presque complexes adaptées à la forme symplectique. Rappelons qu'une *structure presque complexe* sur une variété  $X$  est une structure de fibré vectoriel complexe sur son fibré tangent, en symboles un champ  $J$  d'endomorphismes

$$J_x : T_x X \longrightarrow T_x X \text{ tels que } J_x^2 = -\text{Id} \quad \forall x \in X$$

et qu'elle est *adaptée* à une 2-forme non dégénérée  $\omega$  si la forme bilinéaire  $(\xi, \eta) \mapsto \omega(\xi, J\eta)$  est symétrique définie positive (bref, une métrique riemannienne).

Toute variété presque complexe a des classes de Chern (celles du fibré vectoriel complexe  $(TX, J)$ ). En particulier, comme l'ensemble des structures presque complexes adaptées à une forme symplectique est contractile<sup>2</sup>, donc connexe, une variété symplectique a des classes de Chern — ne dépendant pas de la structure presque complexe adaptée choisie.

Une des qualités des variétés presque complexes est que, à défaut de fonctions holomorphes<sup>3</sup>, elles possèdent localement beaucoup de courbes holomorphes<sup>4</sup>. Si  $\Sigma$  est une surface de Riemann (sa structure complexe  $j$  est fixée), une application  $u : \Sigma \rightarrow X$  est dite *J-holomorphe* si son application tangente est linéaire sur  $\mathbf{C}$ , c'est à dire si

$$(1) \quad T_x u \circ j(\xi) = J \circ T_x u(\xi), \quad \forall x \in \Sigma, \quad \forall \xi \in T_x \Sigma.$$

### 1.1. Définition des invariants

On choisit sur  $X$  une structure presque complexe  $J$  adaptée à  $\omega$ . Les invariants définis par Ruan et Tian dans [51] sont des homomorphismes

$$\Psi_{g,k,\ell}^A : H_*(X^{k+\ell}; \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}.$$

Dans cette écriture,

- l'exposant  $A$  est une classe d'homologie,  $A \in H_2(X; \mathbf{Z})$ ,
- l'indice  $g$  est le genre d'une surface de Riemann  $\Sigma$ ,
- celle-ci est équipée d'un  $k$ -uplet de points marqués distincts  $\vec{z} = (z_1, \dots, z_k)$  (on suppose  $2g + k \geq 3$ ),
- le dernier indice est un entier,  $\ell \in \mathbf{N}$ .

L'idée, proche de celle utilisée par Donaldson ([18]) pour définir ses polynômes, est la suivante : étant données des classes d'homologie  $a_1, \dots, a_k$  et  $b_1, \dots, b_\ell \in H_*(X; \mathbf{Z})$  (représentées par des cycles auxquels je donne le même nom), l'image de  $a_1 \otimes \dots \otimes a_k \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_\ell$ , notée  $\Psi_{g,k,\ell}^A(a_1 \otimes \dots \otimes a_k | b_1 \otimes \dots \otimes b_\ell)$  va compter toutes les applications  $J$ -holomorphes  $u : \Sigma \rightarrow X$  qui représentent la classe  $A$  (c'est à dire telles que  $u_*[\Sigma] = A \in H_2(X; \mathbf{Z})$ ), qui envoient les  $k$  points marqués dans  $a_1, \dots, a_k$  et qui coupent  $b_1, \dots, b_\ell$  (voir la figure 1).

*Remarque.* — Les “courbes”  $J$ -holomorphes dont il est question ici sont bien des applications  $\Sigma \rightarrow X$ , c'est à dire des courbes paramétrées. On pourrait aussi, mais je ne le ferai pas ici, admettre moins, ou pas, de points marqués (c'est à dire oublier la condition  $2g + k \geq 3$ ) et quotienter par l'opération du groupe de reparamétrages. Le lien entre paramétrage, points marqués et courbe image devrait être clarifié par l'exemple suivant.

<sup>2</sup>Simplement parce que le groupe symplectique  $Sp(2n; \mathbf{R})$  se rétracte sur le groupe unitaire  $U(n)$ , qui est sa composante compacte (voir par exemple [3]).

<sup>3</sup>Il n'y a en général pas de fonctions holomorphes, même localement : s'il y avait assez de fonctions holomorphes, on pourrait en faire des cartes analytiques et  $J$  serait intégrable.

<sup>4</sup>Une référence commode et assez complète pour les propriétés des courbes holomorphes dans les variétés symplectiques et presque complexes est le livre [4], que je cite donc systématiquement.

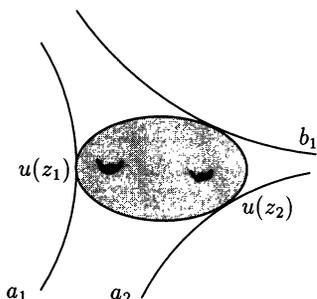


Figure 1

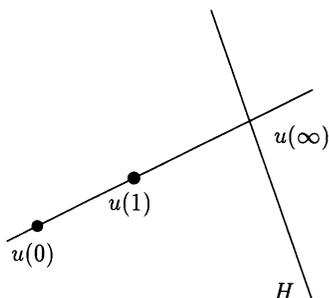


Figure 2

1.1.1. *Exemple.* — Prenons pour  $X$  l'espace projectif complexe  $\mathbf{P}^n$ , avec sa forme de Kähler et sa structure complexe usuelles, et pour  $A$  le générateur de  $H_2(\mathbf{P}^n; \mathbf{Z})$  (la classe des droites projectives). Soit  $H \in H_{2(n-1)}(\mathbf{P}^n; \mathbf{Z})$  la classe des hyperplans.

L'invariant  $\Psi_{0,3,0}^A(\text{pt} \otimes \text{pt} \otimes H)$  devrait compter les courbes rationnelles ( $g = 0$ ) paramétrées de la classe  $A$  (c'est à dire les droites paramétrées), contraintes à passer par deux points donnés et à rencontrer un hyperplan fixé. Les deux points déterminent la droite (image) et son point de rencontre avec l'hyperplan, ces trois points ensemble fixent enfin le paramétrage (figure 2). L'invariant  $\Psi_{0,3,0}^A$ , une fois défini, devrait donner

$$\Psi_{0,3,0}^A(\text{pt} \otimes \text{pt} \otimes H) = 1$$

dans cet exemple.

Plus précisément, on considère l'espace  $\mathcal{M}_g^A(J)$  des applications  $J$ -holomorphes  $u : \Sigma \rightarrow X$  telles que  $u_*[\Sigma] = A$  et l'application d'évaluation  $\text{ev}_{z,\ell}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_g^A(J) \times \underbrace{\Sigma \times \cdots \times \Sigma}_{\ell \text{ fois}} &\longrightarrow \underbrace{X \times \cdots \times X}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{X \times \cdots \times X}_{\ell \text{ fois}} \\ (u, \zeta_1, \dots, \zeta_\ell) &\longmapsto (u(z_1), \dots, u(z_k), u(\zeta_1), \dots, u(\zeta_\ell)). \end{aligned}$$

Si  $\mathcal{M}_g^A(J)$  était une variété compacte orientée, elle porterait une classe fondamentale et on pourrait définir  $\Psi_{g,k,\ell}^A(a)$  comme le nombre d'intersection

$$\Psi_{g,k,\ell}^A(a) = (\text{ev}_{z,\ell})_*([\mathcal{M}_g^A(J) \times \Sigma^\ell] \cdot a \text{ pour } a \in H_*(X^{k+\ell}; \mathbf{Z}).$$

Que l'espace de modules  $\mathcal{M}_g^A(J)$  soit une variété pour une structure presque complexe  $J$  assez générale ne pose pas de gros problème, à condition toutefois de se restreindre aux courbes *simples* (celles qui ne se factorisent pas par des revêtements multiples, voir le § 2.1). Le prototype des énoncés de régularité est le suivant (voir [45]) :

1.1.2 PROPOSITION. — Soit  $(X, \omega)$  une variété symplectique compacte de dimension  $2n$  et soit  $c_1 \in H^2(X; \mathbf{Z})$  sa première classe de Chern. Il existe une partie  $\mathfrak{J}_{\text{rég}}(A)$  dans l'espace  $\mathfrak{J}$  des structures presque complexes adaptées à  $\omega$ , qui contient une intersection dénombrable d'ouverts denses et telle que

1. Si  $J \in \mathcal{J}\text{rég}(A)$ , l'espace  $\mathcal{M}_g^A(J)$  des courbes  $J$ -holomorphes simples de la classe  $A$  est une variété (lisse) orientée de dimension  $2\langle c_1, A \rangle + 2n(1 - g)$ .
2. Si  $J_0$  et  $J_1 \in \mathcal{J}\text{rég}(A)$ , il existe une partie dense  $\mathcal{J}\text{rég}(J_0, J_1)$  dans l'espace des homotopies de  $J_0$  à  $J_1$  telle que, pour toute homotopie  $(J_t)_{t \in [0,1]}$  dans cette partie, l'espace

$$\mathcal{M}_g^A((J_t)_{t \in [0,1]}) = \{(t, u) \mid u \in \mathcal{M}_g^A(J_t)\}$$

soit une variété orientée dont le bord orienté est  $\mathcal{M}_g^A(J_1) - \mathcal{M}_g^A(J_0)$ .

J'expliquerai les idées de la démonstration au §2.1. Le problème de compacité est plus sérieux : une suite de courbes  $J$ -holomorphes peut converger vers une courbe à bulles (penser à une suite de coniques planes dégénéralant sur deux droites). On peut compactifier l'espace de modules et prolonger l'application d'évaluation, mais il n'est pas vrai en général que l'image de la frontière soit assez petite : une suite de courbes simples peut converger vers une courbe à bulles dont certaines composantes sont des revêtements multiples. Celles de ces bulles qui sont des revêtements multiples de courbes dont la classe de Chern est nulle peuvent donner des contributions de trop grande dimension. De même, en contemplant la formule pour la dimension dans la proposition 1.1.2, on voit que l'existence de classes  $A$  contenant des courbes  $J$ -holomorphes et pour lesquelles  $\langle c_1, A \rangle \ll 0$  peut poser des problèmes. On se restreint donc à des variétés symplectiques dans lesquelles la première classe de Chern, calculée sur les courbes holomorphes, est assez positive :

1.1.3 DÉFINITION. — Une variété symplectique de dimension  $2n$  est faiblement monotone si toute classe d'homologie  $A$  telle que  $\langle \omega, A \rangle > 0$  et  $\langle c_1, A \rangle \geq 3 - n$  vérifie  $\langle c_1, A \rangle \geq 0$ .

Remarques. — C'est notamment le cas, trivialement, pour toutes les variétés symplectiques de dimension  $\leq 6$ . D'autre part, pour  $J$  dans  $\mathcal{J}\text{rég}(A)$ , si  $\mathcal{M}_0^A(J)$  contient une courbe rationnelle non constante, sa dimension est au moins 6, la dimension du groupe de reparamétrage  $PSL(2; \mathbf{C})$ . Donc, pour toute courbe  $J$ -holomorphe simple  $u$  de la classe  $A$ ,  $\langle c_1, A \rangle = \langle u^*c_1, [\mathbf{P}^1] \rangle \geq 3 - n$  et  $\langle \omega, A \rangle = \langle u^*\omega, [\mathbf{P}^1] \rangle > 0$ , et donc sur une variété faiblement monotone, la première classe de Chern, évaluée sur toutes les courbes  $J$ -holomorphes est positive ou nulle.

Pour éviter les problèmes de revêtements multiples, Ruan et Tian exploitent une ruse due à et utilisée par Gromov ([28], voir aussi par exemple le §4 de [48] et le §5 de [5]) : on perturbe l'équation (1) des courbes holomorphes en se donnant une section anti- $\mathbf{C}$ -linéaire  $\nu$  de  $\text{Hom}(T\Sigma, TX)$  au-dessus de  $\Sigma \times X$  et en considérant les applications  $u$  qui vérifient

$$(2) \quad \frac{1}{2} (T_x u + J \circ T_x u \circ j) = \nu(x, u(x)).$$

La courbe

$$\begin{aligned} \tilde{u} : \Sigma &\longrightarrow \Sigma \times X \\ x &\longmapsto (x, u(x)) \end{aligned}$$

est alors  $\tilde{J}_\nu$ -holomorphe, pour une structure presque complexe  $\tilde{J}_\nu$  sur  $\Sigma \times X$  qui est la structure produit  $j \times J$  quand  $\nu = 0$ . Notons qu'un tel  $\tilde{u}$  ne peut pas être un revêtement multiple, et même qu'une limite de telles courbes ne peut contenir de revêtement multiple (voir le § 2.2). On appelle  $\mathcal{M}_g^A(J, \nu)$  l'espace des courbes de la classe  $A$  satisfaisant (2).

1.1.4 THÉORÈME ([51]). — *Soit  $(X, \omega)$  une variété symplectique compacte faiblement monotone de dimension  $2n$ . Dans l'espace des  $(J, \nu)$ , il existe une partie  $\tilde{\mathcal{D}}\text{rég}(A)$  qui contient une intersection dénombrable d'ouverts denses et telle que, pour  $(J, \nu) \in \tilde{\mathcal{D}}\text{rég}(A)$ ,  $\mathcal{M}_g^A(J, \nu)$  est une variété lisse orientée de dimension  $2\langle c_1, A \rangle + 2n(1 - g)$ . De plus*

$$\bigcap_{\substack{\mathcal{K}\text{compact} \\ \mathcal{K} \subset \mathcal{M}_g^A(J, \nu)}} \overline{\text{ev}_{\vec{z}, \ell} \left[ \left( \mathcal{M}_g^A(J, \nu) - \mathcal{K} \right) \times \Sigma^\ell \right]}$$

est contenue dans une réunion finie d'images de variétés de dimensions majorées par

$$2\langle c_1, A \rangle + 2n(1 - g) + 2\ell - 2.$$

Les idées de la démonstration seront résumées au § 2.2. Ce théorème permet d'affirmer que  $\left( \mathcal{M}_g^A(J, \nu) \times \Sigma^\ell, \text{ev}_{\vec{z}, \ell} \right)$  est un pseudo-cycle de  $X^{k+\ell}$ . Un pseudo-cycle d'une variété  $M$  est une application différentiable  $f : V \rightarrow M$  définie sur une variété orientée de dimension  $r$ , et dont la frontière de l'image est assez petite, au sens précis où

$$\dim \left( \bigcap_{\substack{\mathcal{K}\text{compact} \\ \mathcal{K} \subset V}} \overline{f(V - \mathcal{K})} \right) \leq r - 2.$$

Je renvoie à [45] pour les propriétés des pseudo-cycles. L'important ici est que tout pseudo-cycle définisse un morphisme d'intersection  $H_*(M) \rightarrow \mathbf{Z}$ . Il y a une relation évidente de bordisme entre pseudo-cycles et, bien sûr, deux pseudo-cycles bordants définissent le même morphisme.

Revenons à notre application d'évaluation. Un énoncé analogue à la dernière assertion de la proposition 1.1.2 donne des bordismes entre ces pseudo-cycles quand on change de  $J$ , de  $\nu$  ou de  $\vec{z}$ . On peut donc définir, pour tout  $d$ ,

$$\Psi_{g, k, \ell}^A : H_d(X^{k+\ell}; \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

le morphisme d'intersection avec ce pseudo-cycle, qui ne dépend que de  $A, g, k$  et  $\ell$ . En particulier,  $\Psi_{g, k, \ell}^A(a)$  ne peut être non nul que si la codimension de  $a$  dans  $X^{k+\ell}$  coïncide avec la dimension de  $\mathcal{M}_g^A(J, \nu) \times \Sigma^\ell$ , c'est à dire si la dimension  $d$  de  $a$  vaut

$$d = 2n(g + k - 1) + 2\ell(n - 1) - 2\langle c_1, A \rangle.$$

*Propriétés.*

1. Comme  $\Psi_{g,k,\ell}^A$  ne dépend pas du choix des points marqués,  $\Psi_{g,k,\ell}^A(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_\ell)$  est une fonction symétrique (au signe près) des  $a_i$  d'une part et des  $b_j$  de l'autre (c'est pourquoi on la note plutôt  $\Psi_{g,k,\ell}^A(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k | b_1 \otimes \cdots \otimes b_\ell)$ ). Elle est, bien sûr, multilinéaire en les  $a_i$  et les  $b_j$ .
2. C'est un invariant de la classe de déformation de  $(X, \omega)$ .
3. Les invariants  $\Psi$  vérifient aussi une propriété d'invariance par monodromie (utile pour étudier les familles de variétés symplectiques), voir [55].

*Remarque.* — Plus surprenant, comme conséquence des résultats de Taubes [54], en dimension 4, certains des invariants  $\Psi_{0,0,\ell}^A(\text{pt} \otimes \cdots \otimes \text{pt})$  (ainsi que des invariants un peu différents en genre  $> 0$ ) sont des invariants du type de difféomorphisme orienté de  $X$  puisqu'ils coïncident avec les invariants de Seiberg-Witten. Remarquons qu'il s'agit dans  $\Psi_{0,0,\ell}^A$  de courbes rationnelles sans point marqué, ce qui oblige à quotienter par le groupe de reparamétrage. D'autre part, ce type de résultats est réservé à la dimension 4 : en dimension 6, Ruan a produit dans [50] des exemples de variétés kählériennes difféomorphes avec des invariants différents.

*Le cas des variétés symplectiques monotones.* — La seule méthode dont on dispose vraiment pour calculer les invariants de Gromov-Witten consiste à évaluer des nombres de courbes *holomorphes* dans des variétés *complexes* comme dans l'exemple 1.1.1. Pour justifier une telle démarche, il faut notamment se débarrasser du terme perturbatif  $\nu$ . C'est possible pour certains des invariants (notamment pour les  $\Psi_{0,3,0}^A$ , qu'on utilisera pour définir le produit quantique) dans les variétés symplectiques *monotones*. C'est une propriété nettement plus restrictive que celle de monotonie faible.

1.1.5 DÉFINITION. — *Une variété symplectique est monotone s'il existe un  $\lambda > 0$  tel que  $[\omega] = \lambda c_1 \in H^2(X; \mathbf{R})$ .*

Notons le cas des *variétés de Fano* : une variété algébrique complexe  $X$  est de Fano si elle possède une classe de Kähler  $\omega$  telle que  $(X, \omega)$  soit une variété symplectique monotone<sup>5</sup>.

1.1.6 PROPOSITION. — *Soit  $(X, \omega)$  une variété symplectique monotone de dimension  $2n$ . Soit  $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$  un triplet de points distincts sur  $\mathbf{P}^1$ . Pour  $J$  générique (dans une partie de  $\mathcal{J}$  contenant une intersection dénombrable d'ouverts denses), l'application d'évaluation*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_0^A(J) & \longrightarrow & X \times X \times X \\ u & \longmapsto & (u(z_1), u(z_2), u(z_3)) \end{array}$$

définit un invariant  $\Phi_3^A : H_*(X^3) \rightarrow \mathbf{Z}$  qui coïncide avec  $\Psi_{0,3,0}^A$ .

<sup>5</sup>Plus techniquement, ce sont des variétés algébriques dont le fibré tangent est assez positif pour que la première classe de Chern soit dans le cône de Kähler.

## 1.2. Les règles de décomposition

La version simple de la règle de décomposition dont on a besoin pour définir la cohomologie quantique concerne une sphère avec quatre points marqués qui dégénère sur un bouquet de deux sphères, chacune gardant deux des points marqués (figure 3).

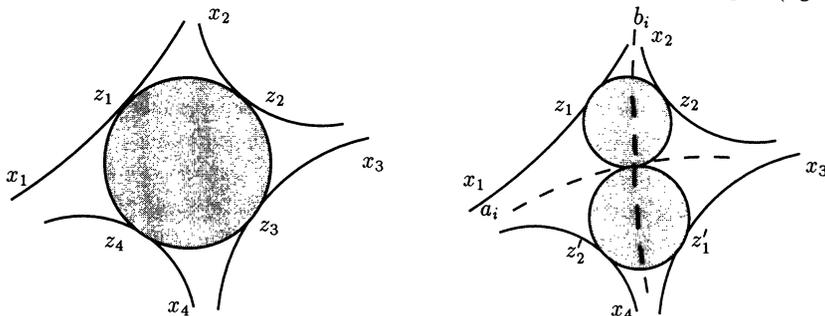


Figure 3 : règle de décomposition

Fixons une base  $(a_1, \dots, a_N)$  de  $H_*(X; \mathbf{Z})/\text{Torsion}$  et la base duale  $(b_1, \dots, b_N)$  au sens où  $a_i \cdot b_j = \delta_{i,j}$ .

1.2.1 THÉORÈME. — *Sur une variété symplectique faiblement monotone,*

$$\Psi_{0,4,0}^A(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4) = \sum_{A=A_1+A_2} \sum_{i=1}^N \Psi_{0,3,0}^{A_1}(x_1 \otimes x_2 \otimes a_i) \Psi_{0,3,0}^{A_2}(b_i \otimes x_3 \otimes x_4).$$

Ruan et Tian donnent en fait une version beaucoup plus générale, décrivant le comportement de tous les invariants quand  $\Sigma$  dégénère sur une surface singulière. On vient de considérer leur comportement pour l'application

$$\sigma : \mathcal{M}_{0,3} \times \mathcal{M}_{0,3} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,4}$$

(on ajoute le point double de chaque côté, voir la figure 3). Comme il est d'usage,  $\mathcal{M}_{g,k}$  désigne l'espace de modules des surfaces de Riemann de genre  $g$  avec  $k$  points marqués et  $\overline{\mathcal{M}}_{g,k}$  sa compactification de Deligne-Mumford. Ruan et Tian considèrent plus généralement les applications naturelles

$$\sigma : \mathcal{M}_{g_1, k_1+1} \times \mathcal{M}_{g_2, k_2+1} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g_1+g_2, k_1+k_2}$$

(associée à une partition de  $\{1, \dots, k_1 + k_2\}$  en deux parties à  $k_1$  et  $k_2$  éléments), et

$$\tau : \mathcal{M}_{g-1, k+2} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g, k}$$

(on identifie les deux derniers points marqués). Pour simplifier l'écriture du théorème général (qui est constitué de deux formules), je vais considérer (suivant Tian [55]) des applications d'évaluation un peu plus générales qu'au § 1.1. On autorise  $\Sigma$  et  $\vec{z}$  à varier, en définissant :

$$\mathcal{M}_{g,k}^A(J, \nu) = \{(\Sigma, \vec{z}, u) \mid (\Sigma, \vec{z}) \in \mathcal{M}_{g,k}, u : \Sigma \rightarrow X \text{ } J\text{-holomorphe, } u_*[\Sigma] = A\}$$

et l'application

$$\begin{aligned} \text{ev} : \mathcal{M}_{g,k}^A(J, \nu) &\longrightarrow \mathcal{M}_{g,k} \times X^k \\ (\Sigma, \vec{z}, u) &\longmapsto ((\Sigma, \vec{z}), u(z_1), \dots, u(z_k)). \end{aligned}$$

Un énoncé analogue au théorème 1.1.4, qu'il n'est pas indispensable d'écrire ici, autorise à définir des homomorphismes

$$\tilde{\Psi}_{g,k}^A : H_*(\overline{\mathcal{M}}_{g,k} \times X^k) \longrightarrow \mathbf{Z}.$$

*Remarque.* — Les invariants du § 1.1 s'en déduisent : on vérifie que

$$\Psi_{g,k,\ell}^A(a) = \tilde{\Psi}_{g,k+\ell}^A(N_{k,\ell} \otimes a),$$

où  $N_{k,\ell} \in H_*(\overline{\mathcal{M}}_{g,k+\ell})$  est la classe représentée par l'adhérence de

$$\mathcal{N}_{\Sigma, \vec{z}, \ell} = \{(\Sigma, \vec{z}, \zeta_1, \dots, \zeta_\ell) \mid \zeta_1, \dots, \zeta_\ell \in \Sigma\}.$$

**1.2.2 THÉORÈME** (Règles de décomposition [51]). — *Soit  $(X, \omega)$  une variété symplectique faiblement monotone. Pour toutes classes d'homologie  $m_1 \in H_*(\mathcal{M}_{g_1, k_1+1})$ ,  $m_2 \in H_*(\mathcal{M}_{g_2, k_2+1})$ ,  $\tilde{\Psi}_{g_1, k_1+1}^A(\sigma_*(m_1 \otimes m_2)) \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_k$  se décompose en*

$$\sum_{A=A_1+A_2} \sum_{i=1}^N \tilde{\Psi}_{g_1, k_1+1}^{A_1}(m_1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_{k_1} \otimes a_i) \tilde{\Psi}_{g_2, k_2+1}^{A_2}(m_2 \otimes b_i \otimes x_{k_1+1} \otimes \dots \otimes x_{k_1+k_2}).$$

Pour toute classe  $m \in H_*(\mathcal{M}_{g-1, k+2})$ ,

$$\tilde{\Psi}_{g,k}^A(\tau_*(m) \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = \sum_{i=1}^N \tilde{\Psi}_{g-1, k+2}^A(m \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_k \otimes a_i \otimes b_i).$$

*Remarque.* — Il y a une différence importante entre ces invariants plus généraux et ceux que j'ai décrits au § précédent du fait que la surface de Riemann est autorisée à varier. Ceci rend les théorèmes de compacité plus délicats et techniques. Pour rester dans des limites de place et de technicité acceptables, je me restreindrai au cas des invariants  $\Psi$  à  $(\Sigma, j)$  fixées, ce qui est bien suffisant pour les courbes rationnelles, le théorème 1.2.1 et les applications que j'ai en vue.

## 2. Propriétés des espaces de modules de courbes holomorphes

### 2.1. Propriétés de régularité

Etant donnée une classe d'homologie  $A \in H_2(X; \mathbf{Z})$ , on s'intéresse à l'espace<sup>6</sup>  $\mathcal{X}(A)$  des applications  $u : \Sigma \rightarrow X$  représentant la classe  $A$ . Si  $J$  est une structure presque

<sup>6</sup>Tous les espaces d'applications sont des espaces d'applications  $\mathcal{C}^\infty$  munis de la topologie  $\mathcal{C}^\infty$ .

complexe sur  $X$ , on peut considérer la partie anti- $\mathbf{C}$ -linéaire de  $du$  :

$$\bar{\partial}_J u = \frac{1}{2}(du + J \circ du \circ j)$$

comme un élément de  $\Omega^{0,1}(u^*TX)$  c'est à dire de  $C^\infty(\Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes_J u^*TX)$ .

Les courbes  $J$ -holomorphes dans  $\mathcal{X}(A)$  sont les zéros de  $\bar{\partial}_J$  (“équation de Cauchy-Riemann”). On peut considérer le “fibré vectoriel”  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}(A)$  dont la fibre  $\mathcal{E}_u$  en  $u \in \mathcal{X}(A)$  est  $\Omega^{0,1}(u^*TX)$ ;  $\bar{\partial}_J$  est alors une section de  $\mathcal{E}$ , et l'espace des courbes  $J$ -holomorphes de la classe  $A$  est l'ensemble des zéros de cette section. On peut alors se demander si cette section est transverse à la section nulle, en d'autres termes si la composition  $D_u^J$

$$C^\infty(u^*TX) = T_u\mathcal{X} \xrightarrow{T_u(\bar{\partial}_J)} T_{(u,0)}\mathcal{E} = T_u\mathcal{X} \oplus \mathcal{E}_u \xrightarrow{\text{proj}} \mathcal{E}_u = \Omega^{0,1}(u^*TX)$$

est une application linéaire surjective pour toute solution  $u$  de  $\bar{\partial}_J u = 0$ .

C'est un fait que  $D_u^J$  est Fredholm. Elle n'est pas en général linéaire sur  $\mathbf{C}$  (elle l'est quand  $J$  est intégrable), mais sa partie antilinéaire est un opérateur d'ordre 0 (s'exprimant à l'aide du tenseur de Nijenhuis de  $J$ ). On peut donc homotoper  $D_u^J$ , parmi les opérateurs de Fredholm, à sa partie  $\mathbf{C}$ -linéaire, un opérateur  $\bar{\partial}$ , qui définit une structure holomorphe sur  $u^*TX$ . L'indice de  $D_u^J$  est alors donné par le théorème de Riemann-Roch (voir par exemple [24]) :

$$(3) \quad \text{Ind } D_u^J = 2\langle c_1, A \rangle + 2n(1 - g),$$

c'est la dimension virtuelle de l'espace de modules des courbes  $J$ -holomorphes de genre  $g$  dans la classe  $A$ .

*Remarque importante.* — Il n'y a aucun espoir que cet espace soit, en général, une variété, même pour des structures presque complexes assez générales. Considérons par exemple l'espace  $\widetilde{\mathbf{P}^2}$  obtenu en éclatant un point dans le plan projectif complexe  $\mathbf{P}^2$  et la classe  $E$  du diviseur exceptionnel. La formule (3) appliquée à la classe  $2E$ , à la structure complexe usuelle et aux courbes rationnelles ( $\Sigma = \mathbf{P}^1$ ) de cette classe donne une dimension virtuelle égale à 8. Mais les applications holomorphes de degré 2 de  $\mathbf{P}^1$  dans lui-même forment un espace de dimension (réelle) 10 et donc, pour toute structure complexe  $J$  assez proche de la structure standard, il y a une famille de dimension au moins 10 de courbes  $J$ -holomorphes rationnelles dans la classe  $2E$ . Le problème provient de l'existence de courbes qui sont des revêtements multiples (et ne se pose que pour des classes  $A$  de la forme  $mB$  pour  $m \geq 2$ ). Il y a deux façons possibles de le contourner. L'une, celle choisie par Ruan et Tian, est celle qui mène aux invariants  $\Psi$  : on perturbe l'équation de Cauchy-Riemann par un  $\nu$  comme en 1.1. L'autre est de ne considérer dans  $\mathcal{X}(A)$  que des courbes “injectives quelque part”. C'est l'approche choisie par McDuff et Salamon dans [45], suivant une remarque déjà ancienne de McDuff [42] : une courbe  $J$ -holomorphe est

- soit un revêtement multiple, c'est dire qu'elle peut s'écrire comme une composition

$$\Sigma \xrightarrow{\pi} \Sigma' \xrightarrow{\tilde{u}} X$$

où  $\pi$  est un revêtement ramifié,

- soit "injective quelque part", c'est dire qu'il existe un point  $x$  de  $\Sigma$  avec  $du(x) \neq 0$  et  $u^{-1}(u(x)) = \{x\}$  (et alors l'ensemble de tels points  $x$  est un ouvert dense dans  $\Sigma$ ). On appelle donc *simples* ces courbes injectives quelque part.

Soit  $\mathcal{X}^s(A)$  l'espace des applications *simples*  $u : \Sigma \longrightarrow X$  représentant la classe  $A$ . On considère l'"espace de modules universel"

$$\mathcal{M}_g^A = \{(u, J) \in \mathcal{X}^s(A) \times \mathcal{J} \mid \bar{\partial}_J u = 0\},$$

c'est un fibré sur  $\mathcal{J}$  dont la fibre en  $J$  est  $\mathcal{M}_g^A(J)$ . On dira qu'un point  $(u, J) \in \mathcal{M}_g^A$  est *régulier* si  $D_u^J$  est surjective et que  $J \in \mathcal{J}$  est *régulière* pour  $A$  ( $J \in \mathcal{J}^{\text{rég}}(A)$ ) si  $D_u^J$  est surjective pour tout  $u$  dans  $\mathcal{M}_g^A(J)$ .

Les démonstrations de la proposition 1.1.2 comme de la première assertion du théorème 1.1.4 utilisent des arguments standard : espaces d'applications  $\mathcal{C}^k$  plutôt que  $\mathcal{C}^\infty$  (de sorte que l'analogue de  $\mathcal{J}$  est une variété banachique), régularité elliptique et Sard-Smale, je renvoie par exemple au chapitre 3 de [45].

*Remarque.* — La variété  $\mathcal{M}_g^A(J)$  est mieux qu'orientée. Si  $J$  est intégrable, on a dit que  $D_u^J$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire, en particulier  $\mathcal{M}_g^A(J)$  est *complexe*. Quand  $J$  n'est pas intégrable,  $\mathcal{M}_g^A(J)$  n'a même pas de structure *presque* complexe en général, mais possède une structure presque complexe stable naturelle, qui définit son orientation (voir [42]).

*Régularité de structures complexes usuelles.* — On va vouloir calculer les invariants pour certaines variétés *projectives complexes*. C'est un changement de perspective : il y a une structure complexe (intégrable) meilleure que les autres et on veut savoir si on peut calculer les invariants en comptant les vraies courbes holomorphes (au moins rationnelles), autrement dit si cette structure complexe est régulière. On a déjà signalé que, pour une structure complexe intégrable  $J$ ,  $D_u^J$  n'était autre que le  $\bar{\partial}$  de Dolbeault. En particulier,  $D_u^J$  est surjective si et seulement si

$$\text{Im}(\bar{\partial} : \mathcal{C}^\infty(u^*TX) \longrightarrow \Omega^{0,1}(u^*TX)) = \Omega^{0,1}(u^*TX).$$

Comme  $\Sigma$  est une surface, c'est équivalent à demander que  $H_{\bar{\partial}}^{0,1}(u^*TX) = 0$ .

Supposons maintenant que  $\Sigma$  soit une sphère ( $g = 0$ ). Alors, grâce au théorème de Birkhoff,  $u^*TX$  est une somme de fibrés en droites. Pour tout fibré en droites  $L \rightarrow \mathbf{P}^1$ , on a

$$H_{\bar{\partial}}^{0,1}(L) = \left(H_{\bar{\partial}}^{1,0}(L^*)\right)^* = \left(H^0(L^*(-2))\right)^*$$

de sorte que  $\bar{\partial}$  est surjective si et seulement si pour chaque fibré en droites  $L$  apparaissant dans  $u^*TX$ , le fibré  $L^*(-2)$  n'a pas de section holomorphe, c'est à dire si  $c_1(L^*(-2)) < 0$ , ou encore si  $c_1(L) > -2$  :

2.1.1 PROPOSITION. — Soit  $u : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  une courbe  $J$ -holomorphe avec  $J$  intégrable. Pour que  $D_u^J$  soit surjective, il faut et il suffit que tous les facteurs de  $u^*TX$  aient une classe de Chern  $c_1 \geq -1$ .

Exemple. — Considérons l'espace projectif  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  avec sa structure complexe naturelle  $J$ . Soit  $A$  la classe des droites projectives. Soit  $u : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^n$  une courbe holomorphe de la classe  $A$  (c'est à dire une droite). Alors  $u^*T\mathbf{P}^n = \mathcal{O}(1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(1)$ ,  $D_u^J$  est surjective (ceci pour tout  $u$ ) et  $J$  est régulière pour  $A$ .

2.1.2 COROLLAIRE. — Supposons  $J$  intégrable et le fibré tangent  $TX$  engendré par ses sections holomorphes. Alors  $J$  est régulière pour toutes les classes contenant des courbes rationnelles.

En dimension 4, grâce à la formule d'adjonction, on déduit de la proposition 2.1.1 un critère simple et efficace :

2.1.3 PROPOSITION. — Soit  $J$  une structure complexe (intégrable) sur une variété  $X$  de dimension 4. Soit  $A \in H_2(X; \mathbf{Z})$  une classe qui contient une sphère  $J$ -holomorphe plongée. Alors  $J$  est régulière pour  $A$  si et seulement si  $A \cdot A \geq -1$ .

Contre-exemples. — On verra des exemples d'applications de ce résultat au §3.2. Voici une famille de contre-exemples. Il s'agit de la variété différentiable  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$  ou  $\tilde{\mathbf{P}}^2$ , avec la structure complexe de la surface de Hirzebruch  $X_k$  (espace total du fibré  $\mathbf{P}(\mathcal{O}(-k) \oplus \mathbf{1}) \rightarrow \mathbf{P}^1$ ,  $k \geq 0$ ). Elle possède une sphère holomorphe plongée d'auto-intersection  $-k$  (la section nulle du fibré  $\mathcal{O}(-k)$ ). Pour  $k \neq 0, 1$ , la structure complexe n'est pas régulière pour cette classe.

Remarques. — Ces résultats s'appliquent à des courbes holomorphes rationnelles de variétés complexes, notamment pour calculer les invariants  $\Phi$  définis par la proposition 1.1.6. Pour calculer des invariants en genre supérieur, on peut (toujours en dimension 4) utiliser les résultats de [30].

## 2.2. Propriétés de compacité

Les espaces  $\mathcal{M}_g^A(J)$  et  $\mathcal{M}_g^A(J, \nu)$  ne sont pas compacts en général : il peut se former des bulles, comme c'est le cas pour une suite de coniques planes qui converge vers deux droites. Le théorème de compacité de Gromov affirme qu'il n'arrive rien de pire. Pour mémoire :

2.2.1 THÉORÈME ([28]). — Sur une variété symplectique compacte  $(X, \omega)$ , soit une suite  $(J_m)_{m \geq 0}$  de structures presque complexes adaptées qui converge (au sens  $C^\infty$ ) vers une structure presque complexe adaptée  $J$ . Soit  $(u_m)_{m \geq 0}$  une suite de courbes d'aire bornée telles que  $u_m$  soit  $J_m$ -holomorphe. Elle a une sous-suite qui converge faiblement vers une courbe à bulles  $J$ -holomorphe.

Ici, la convergence faible est une notion intermédiaire entre convergence des images et convergence des applications que je ne détaille pas : ce n'est pas cette version du théorème de compacité que je veux utiliser. Celui-ci a toutefois une conséquence immédiate de finitude dont j'aurai besoin. Une constante  $K$  étant fixée, considérons l'ensemble des classes  $A$  dans le réseau  $H_2(X; \mathbf{Z})$  telles que  $\langle \omega, A \rangle \leq K$ . Etant donnée une structure presque complexe  $J$ , il y a un nombre fini de telles classes qui ont des représentants  $J$ -holomorphes (et même  $J'$ -holomorphes pour  $J'$  assez proche de  $J$ ).

Voici maintenant la version du théorème 2.2.1 que je vais utiliser :

**2.2.2 THÉORÈME.** — Soient sur une variété symplectique compacte  $(X, \omega)$  une suite  $(J_m, \nu_m)$  convergent (au sens  $C^\infty$ ) vers  $(J, \nu)$  et une suite  $(u_m)$  de courbes  $\Sigma \rightarrow X$  d'aires bornées telles que  $\widetilde{u}_m : \Sigma \rightarrow \Sigma \times X$  soit  $(\widetilde{J}_m)_{\nu_m}$ -holomorphe. Alors, il existe une partie finie  $F \subset \Sigma$  et une courbe  $u : \Sigma \rightarrow X$  telle que

- La courbe  $\tilde{u}$  est  $\widetilde{J}_\nu$ -holomorphe.
- On peut extraire de  $(\widetilde{u}_m)$  une suite qui converge vers  $\tilde{u}$  (ainsi que toutes ses dérivées) en dehors de  $F$ .
- Si  $z \in F$  et si  $\widetilde{u}_m(z)$  ne converge pas vers  $\tilde{u}(z)$ , alors il y a une courbe rationnelle non constante

$$u^z : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \{z\} \times X$$

passant par  $\tilde{u}(z)$ .

Je renvoie pour la démonstration aux explications de Pansu [48]. On remarquera que toutes les bulles (les  $u^z$ ) sont verticales (parce que les  $\widetilde{u}_m$  sont des graphes) et que ce sont des sphères. De plus, la composante principale de la courbe limite, étant un graphe, est simple, ce qui évite les problèmes de revêtements multiples dont on peut se faire une idée en lisant [45] (par contre, rien n'oblige les bulles à être simples).

*Idées de la démonstration de 1.1.4.* — D'après le théorème 2.2.2, il y a, dans l'adhérence de  $\mathcal{M}_g^A(J, \nu)$ , des courbes à bulles  $(u, v_1, \dots, v_N)$  (où les  $v_i$  sont des courbes rationnelles). La classe d'homologie  $A$  est décomposée en

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^N d_i B_i$$

où  $d_i \geq 1$  est la multiplicité du revêtement  $v_i$  et  $A_0$  la classe représentée par  $u$ . Oublions les multiplicités et écrivons  $A' = A_0 + \sum B_i$ . Comme  $(X, \omega)$  est faiblement monotone,  $\langle c_1, B_i \rangle \geq 0$  et  $\langle c_1, A' \rangle \leq \langle c_1, A \rangle$ . Pour décrire l'adhérence de  $\mathcal{M}_g^A(J, \nu)$ , il faut considérer des espaces d'applications  $(u, v_1, \dots, v_N)$  représentant des classes  $A'$  avec  $\langle c_1, A' \rangle \leq \langle c_1, A \rangle$ .

On s'intéresse au prolongement de l'application d'évaluation à ces espaces (pour simplifier, on suppose ici que  $\ell = 0$ ). Il faut donc s'inquiéter de la façon dont les

points marqués interfèrent avec la formation des bulles. Certains de ces points, disons  $z_1, \dots, z_r$ , sont dans  $F$ . Alors, tous les points de la  $i$ -ème bulle ( $i \leq r$ ) sont des points d'accumulation d'une suite  $u_m(z_i)$  de sorte qu'on doit ajouter à la frontière un paramètre  $\zeta_i$  pour chacune de ces bulles : l'application d'évaluation  $ev_{z_0}$  se prolonge en

$$e : (u, v_1, \dots, v_N, \zeta_1, \dots, \zeta_r) \longmapsto (v_1(\zeta_1), \dots, v_r(\zeta_r), u(z_{r+1}), \dots, u(z_k)).$$

Il y a un groupe de reparamétrage pour chacune des bulles, c'est le sous-groupe  $G_0$  de  $PSL(2; \mathbf{C})$  formé des transformations fixant un point (celui où s'accroche la bulle). Les évaluations  $N \geq 1$ ,  $\langle c_1, A' \rangle \leq \langle c_1, A \rangle$  et  $\dim G_0 = 4$  permettent de conclure que, malgré l'ajout possible des  $r$  facteurs  $\mathbf{P}^1$ , la dimension de l'image de  $e$  est inférieure ou égale à  $\dim \mathcal{M}_g^A(J, \nu) - 2$ .

La finitude du nombre de ces petites strates est encore une conséquence de la positivité des classes de Chern (c'est à dire de la faible monotonie de  $(X, \omega)$ ) qui donne un nombre fini de décompositions possibles de  $A$  en  $A_0 + \sum d_i B_i$ .

*Remarque.* — J'ai choisi pour cet exposé des hypothèses simplifiant le plus possible la démonstration :

- d'une part l'utilisation de l'équation de Cauchy-Riemann *perturbée* qui donne une composante principale *simple* à toutes les courbes limites, comme dans [51],
- d'autre part le fait que la surface de Riemann (avec sa structure complexe) est fixée, comme dans [45].

*Idées de la démonstration de la règle de décomposition 1.2.1.* — La démonstration des règles de décomposition, dans la généralité de l'énoncé 1.2.2, occupe une grande partie du gros article [51] de Ruan et Tian. Il existe plusieurs démonstrations du théorème plus faible 1.2.1, ou de versions encore plus faibles, telles que

$$(4) \quad \Psi_{0,4,0}^A(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4) = \sum_{A=A_1+A_2} \sum_{i=1}^N \Phi_3^{A_1}(x_1 \otimes x_2 \otimes a_i) \Phi_3^{A_2}(b_i \otimes x_3 \otimes x_4)$$

pour des variétés symplectiques *monotones* (voire même avec des hypothèses plus restrictives, telles que  $\langle c_1, A \rangle \geq 2$  pour toute classe  $A$  contenant des courbes rationnelles). Voir [45, 40].

Avec des différences assez notables dans la réalisation, toutes sont basées sur une sorte de réciproque au théorème de compacité : on considère les deux sphères avec leurs deux points marqués et leur point commun comme une courbe à bulles. Appelons  $z_1, z_2, z_3, z_4$  les quatre points marqués et imaginons deux autres points  $z$  et  $t$  tendant l'un vers l'autre. Les courbes décomptées par le membre de gauche de (4) tendent vers des courbes à bulles qui ressemblent beaucoup à celles décomptées par le membre de droite (voir la figure 3). Reste à montrer que cette correspondance est bijective. Un argument de recollement de courbes holomorphes inspiré par les recollements de trajectoires ou

d'instantons décrits par Floer [21] ou Donaldson & Kronheimer [19] et diffèrent suivant les auteurs, permet de construire de vraies courbes holomorphes arbitrairement près de la "courbe à bulles" et de conclure.

### 3. La cohomologie quantique

L'homologie et la cohomologie d'une variété orientée  $X$  portent respectivement la forme d'intersection  $\cdot$  et le cup-produit  $\smile$ , reliés entre eux par la dualité de Poincaré  $D : H^* \rightarrow H_*$  de telle façon que  $a \cdot b = \langle \alpha, b \rangle = D(\alpha \smile \beta)$  si les dimensions de  $a$  et  $b$  sont complémentaires, et que

$$(5) \quad \langle \alpha \smile \beta, c \rangle = a \cdot b \cdot c.$$

*Convention.* — Dans les formules de ce §, les lettres latines désignent en général des classes d'homologie, les lettres grecques des classes de cohomologie, la dualité de Poincaré transformant logiquement grecques en latines et en particulier  $\alpha$  en  $a$ , etc.

Supposons que  $X$  soit une variété algébrique complexe. L'idée (due à Vafa [56] et Witten [59]) de la cohomologie quantique est de remplacer le cup-produit par une autre structure d'anneau qui tienne compte non seulement des triples intersections comme dans (5) mais aussi de toutes les courbes rationnelles qui rencontrent des cycles représentant  $a, b, c$ . Le terme  $a \cdot b \cdot c$ , qui décrit, quand  $c$  varie, le cup-produit  $\alpha \smile \beta$  correspondrait au décompte des courbes rationnelles *constants* et il faudrait définir un terme analogue pour chaque classe d'homologie  $A$  de courbes rationnelles dans  $X$ .

#### 3.1. Le produit quantique

Parce que je trouve les anneaux gradués plus agréables, pour éviter des problèmes de convergence et pour d'autres raisons que j'évoquerai au § 3.3.5, je vais essayer de définir ce produit sur le  $\mathbf{Z}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$ -module libre<sup>7</sup>

$$QH^*(X) = H^*(X) \otimes \mathbf{Z}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$$

où  $r$  est le rang de  $H_2(X; \mathbf{Z})$  et  $q_1, \dots, q_r$  sont  $r$  nouvelles variables inversibles : on choisit une base  $(A_1, \dots, A_r)$  de  $H_2(X; \mathbf{Z})$ , les  $q_i$  en sont une version multiplicative. Le produit sera  $\mathbf{Z}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$ -linéaire et défini par les valeurs des  $\alpha \star \beta$  pour  $\alpha, \beta \in H^*(X; \mathbf{Z})$ . On écrira

$$(6) \quad \alpha \star \beta = \sum_{m \in \mathbf{Z}^r} (\alpha \star \beta)_m q^m$$

où  $m \in \mathbf{Z}^r$  représente la classe  $\sum m_i A_i$  et  $\langle (\alpha \star \beta)_m, c \rangle = \Psi_{0,3,0}^m(a \otimes b \otimes c) \in \mathbf{Z}$ . Pour alléger les notations, j'écrirai  $\Psi_k^m$  ou  $\Psi_k^A$  pour  $\Psi_{0,k,0}^m$  ou  $\Psi_{0,k,0}^A$ . Ces invariants sont dits "à  $k$  points".

<sup>7</sup>Je néglige la torsion, considérant  $H_*(X; \mathbf{Z})$  comme  $H_*(X; \mathbf{Z})/\text{Torsion}$  et  $H^*(X; \mathbf{Z})$  comme son dual.

Dans (6), le terme  $(\alpha \star \beta)_0$  est décrit par les invariants  $\Psi_3^0(a \otimes b \otimes c)$  obtenus en “comptant” les courbes dont la classe d’homologie est nulle. Comme  $J$  est adaptée à la forme symplectique,

$$\langle \omega, A \rangle = \langle \omega, u_*[\mathbf{P}^1] \rangle = \int_{\mathbf{P}^1} u^* \omega > 0$$

pour toute courbe  $J$ -holomorphe  $u$  non constante. Les courbes représentant la classe nulle sont donc constantes, ainsi, à cause des points marqués,  $\langle (\alpha \star \beta)_0, c \rangle = \Psi_3^0(a \otimes b \otimes c)$  est le nombre d’intersection  $a \cdot b \cdot c$  et  $(\alpha \star \beta)_0$  est le cup-produit ordinaire.

*Remarques.* — Il est possible (et bien plus élégant) de considérer l’anneau de polynômes  $\mathbf{Z}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$  comme l’anneau de groupe  $\mathbf{Z}[H_2(X; \mathbf{Z})]$  et donc l’anneau  $QH^*(X)$  comme  $H^*(X; \mathbf{Z}[H_2(X; \mathbf{Z})])$  (c’est à dire de ne pas choisir de base).

Le degré de la classe de cohomologie  $(\alpha \star \beta)_m$  est  $\deg \alpha + \deg \beta - 2\langle c_1, \sum m_i A_i \rangle$ . Ecrivons la première classe de Chern de  $X$  dans la base  $(p_1, \dots, p_r)$  de  $H^2(X; \mathbf{Z})$  duale à  $(A_1, \dots, A_r) : c_1 = d_1 p_1 + \dots + d_r p_r$ . On définit ainsi  $r$  entiers  $d_1, \dots, d_r$ . Il suffit d’assigner à  $q_i$  le degré  $2d_i$  pour avoir une multiplication graduée (la graduation est triviale quand  $c_1 = 0$ ).

Malheureusement, même sur une variété faiblement monotone, il n’y a pas de raison que la somme dans (6) soit finie. La solution est de remplacer l’anneau de polynômes  $\mathbf{Z}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$  par l’anneau de Novikov  $\Lambda_\omega$  (voir [47, 31]) associé à l’homomorphisme

$$\begin{aligned} \omega : \Gamma \subset H_2(X; \mathbf{Z}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ A &\longmapsto \langle \omega, A \rangle \end{aligned}$$

où  $\Gamma$  est le sous-groupe des classes sphériques : on considère l’ensemble  $\Lambda_\omega$  de toutes les séries formelles

$$\lambda = \sum_{m \in \mathbf{Z}^r} \lambda_m q^m$$

telles que, pour tout  $K$ , l’ensemble

$$\left\{ m \in \mathbf{Z}^r \mid \lambda_m \neq 0 \text{ et } \langle \omega, \sum m_i A_i \rangle \leq K \right\}$$

soit fini. La formule

$$\lambda \mu = \sum_{m', m''} \lambda_{m'} \mu_{m''} q^{m' + m''}$$

définit bien (exercice) un produit sur  $\Lambda_\omega$ , qui devient ainsi un anneau gradué (avec la même graduation que  $\mathbf{Z}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$ ).

Le théorème de compacité 2.2.1 garantit que la somme (6) est bien définie dans le  $\Lambda_\omega$ -module  $H^*(X) \otimes \Lambda_\omega$ .

3.1.1 THÉORÈME. — Soit  $(X, \omega)$  une variété symplectique faiblement monotone de dimension  $2n$ . Les formules

$$\alpha \star \beta = \sum_{m \in \mathbf{Z}^r} (\alpha \star \beta)_m q^m \in H^*(X) \otimes \Lambda_\omega \text{ avec } \langle (\alpha \star \beta)_m, c \rangle = \Psi_3^m(a \otimes b \otimes c) \in \mathbf{Z}$$

définissent sur  $H^*(X) \otimes \Lambda_\omega$  une structure d'anneau commutatif gradué dont  $1 \in H^0(X)$  est l'unité.

Démonstration. — L'associativité est une conséquence de la règle de décomposition en genre 0 pour les invariants à 3 ou 4 points, c'est à dire du théorème 1.2.1 :

$$\sum_{m'+m''=m} \sum_{i=1}^N \Psi_3^{m'}(a \otimes b \otimes a_i) \Psi_3^{m''}(b_i \otimes c \otimes d) = \Psi_{0,4,0}^m(a \otimes b \otimes c \otimes d).$$

Comme  $\Psi_3^{m''}(D(\alpha \star \beta)_{m'} \otimes c \otimes d) = \sum_i \Psi_3^{m'}(a \otimes b \otimes a_i) \Psi_3^{m''}(b_i \otimes c \otimes d)$ , elle donne

$$\sum_{m'+m''=m} \Psi_3^{m''}(D(\alpha \star \beta)_{m'} \otimes c \otimes d) = \Psi_{0,4,0}^m(a \otimes b \otimes c \otimes d).$$

On peut donc écrire

$$(\alpha \star \beta) \star \gamma = \sum_m (\alpha \star \beta \star \gamma)_m q^m,$$

en définissant  $\langle (\alpha \star \beta \star \gamma)_m, d \rangle$  comme  $\Psi_{0,4,0}^m(a \otimes b \otimes c \otimes d)$ . Cette dernière expression est symétrique en  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . Comme le produit défini est commutatif (au sens gradué), cette propriété donne l'associativité.

Que la classe  $1 \in H^0(X; \mathbf{Z})$  soit l'unité du produit quantique n'est pas difficile. La classe duale est la classe fondamentale  $[X]$  et l'invariant  $\Psi_3^A([X] \otimes b \otimes c)$  est nul quand la classe  $A$  est non nulle. On considère en effet l'intersection de l'image de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_0^A(J, \nu) & \longrightarrow & X \times X \\ u & \longmapsto & (u(z_2), u(z_3)) \end{array}$$

avec un cycle représentant  $b \otimes c$ . On a  $\dim \mathcal{M}_0^A(J, \nu) = 2n + 2\langle c_1, A \rangle = \deg \beta + \deg \gamma$  mais l'application se factorise par le sous-groupe  $\mathbf{C}^*$  de  $PSL(2; \mathbf{C})$  constitué des éléments qui fixent les points marqués  $z_2$  et  $z_3$ . Si  $\mathcal{M}_0^A(J, \nu)$  contient des applications non constantes (c'est à dire si  $A \neq 0$ ), cette opération n'est pas triviale et la dimension de l'image est  $\leq 2n + 2\langle c_1, A \rangle - 2$ , ce qui fait qu'elle ne rencontre pas un représentant assez général de  $b \otimes c$ .  $\square$

Un cas particulièrement agréable est celui des variétés symplectiques monotones : sur ces variétés, grâce à la remarque suivant le théorème de compacité 2.2.1, le nombre de classes  $A$  intervenant dans la somme (6) est fini, de sorte qu'on peut définir le produit quantique directement sur  $H^*(X) \otimes \mathbf{Z}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$ , et même calculer avec les invariants  $\Phi$  de la proposition 1.1.6. L'associativité est, comme ci-dessus, conséquence de la règle de décomposition, précisément de sa version contenue dans l'équation (4).

3.1.2 THÉORÈME. — Soit  $(X, \omega)$  une variété symplectique monotone de dimension  $2n$ . Les formules

$$\alpha \star \beta = \sum_{m \in \mathbf{Z}^r} (\alpha \star \beta)_m q^m \text{ avec } \langle (\alpha \star \beta)_m, c \rangle = \Phi_3^m(a \otimes b \otimes c) \in \mathbf{Z}$$

définissent sur  $H^*(X) \otimes \mathbf{Z}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$  une structure d'anneau commutatif gradué dont  $1 \in H^0(X)$  est l'unité.

Remarques et variantes.

1. Il arrive que le produit quantique soit une *déformation* du cup-produit. C'est le cas quand on peut choisir la base  $(A_1, \dots, A_r)$  de façon que les monomes apparaissant effectivement dans la somme (6) ne fassent pas intervenir d'exposant négatif, c'est à dire quand  $H^2(X; \mathbf{Z})$  a une base  $(p_1, \dots, p_r)$  telle que  $\langle p_i, A \rangle > 0$  pour toutes les classes  $A$  qui contiennent des sphères  $J$ -holomorphes<sup>8</sup>. On peut alors définir le produit quantique sur  $H^*(X; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}[q_1, \dots, q_r]$  (un sous-anneau<sup>9</sup> de  $QH^*(X)$ )... ce qui permet de spécialiser en  $q = 0$  pour retrouver le cup-produit.
2. Une autre variante consiste — dans le cas monotone — à spécialiser en  $q = 1$ . C'est pourquoi on trouve des formules sans variables  $q$ , notamment dans [60].
3. On trouve aussi dans la plupart des articles sur le sujet, et notamment dans [51], des formules analogues à (6), mais avec des  $\exp(-t\langle \omega, A \rangle)$  à la place des  $q^m$ . Sur les variétés monotones, il suffit de spécialiser en  $q_i = \exp(-t\lambda\langle c_1, A_i \rangle)$ ; sur les autres, la démarche soulève un délicat problème de convergence.
4. On peut généraliser le produit défini par l'équation (6) en définissant, pour tout  $\xi \in H^*(X)$

$$(7) \quad \langle \alpha \star_\xi \beta, c \rangle = \sum_m \sum_{\ell \geq 0} \frac{1}{\ell!} \Psi_{0,3,\ell}^m(a \otimes b \otimes c | x \otimes \dots \otimes x) q^m,$$

où, bien sûr,  $x = D\xi$ . On vérifie sans mal que, pour chaque  $m$ , la somme

$$\sum_{\ell \geq 0} \frac{1}{\ell!} \Psi_{0,3,\ell}^m(a \otimes b \otimes c | x \otimes \dots \otimes x)$$

contient un nombre fini de termes non nuls si  $\deg \xi \neq 2$  ou est une série convergente (une exponentielle) si  $\deg \xi = 2$ . Ainsi l'équation (7) définit-elle un produit  $\star_\xi$  sur  $QH^*(X) \otimes \mathbf{C}$  (on sort de la cohomologie entière à cause des exponentielles) qui est le produit  $\star$  quand  $\xi = 0$  puisque  $\Psi_{0,3,\ell}^m(a \otimes b \otimes c | 0) = 0$  pour  $\ell \geq 1$ . La règle de décomposition en genre 0 implique que le produit  $\star_\xi$  est associatif. Ceci nous entraîne vers l'équation WDVV et les variétés de Frobenius (voir les §§ 3.3.2 et 3.3.4).

<sup>8</sup>C'est le cas pour toutes celles des variétés de Fano qui vérifient que  $H^{2,0} = 0$ .

<sup>9</sup>C'est  $H^*(X; \mathbf{Z}[M])$  où  $M$  est un sous-monoïde de  $H_2(X; \mathbf{Z})$  dont je laisse aux lecteurs le plaisir d'écrire la définition.

### 3.2. Exemples

*Propriétés.* — La cohomologie quantique manque de propriétés fonctorielles. Il est d'ailleurs plus correct de parler de produit quantique sur la cohomologie que de cohomologie quantique. Il est donc assez difficile d'utiliser la connaissance de la cohomologie quantique de telle variété pour calculer celle de telle autre. La seule propriété qui puisse aider à faire des calculs est le bon comportement par rapport au produit cartésien :

$$QH^*(X \times Y) = QH^*(X) \otimes QH^*(Y),$$

les invariants de Gromov-Witten de  $X \times Y$  s'exprimant de façon évidente en fonction de ceux de  $X$  et de  $Y$ .

*Une liste.* — Il existe toutefois un certain nombre de (pré-)publications où est calculée la cohomologie quantique de tel ou tel espace (les démonstrations sont plus ou moins heuristiques selon les cas). Voici une liste<sup>10</sup> qui ne prétend à aucune exhaustivité : grassmanniennes [11, 53, 60] (voir aussi le § 3.3.7), intersections complètes [8], surfaces rationnelles [15], variétés de drapeaux [14, 27] (voir aussi le § 3.3.5), variétés de drapeaux partielles [2], variétés homogènes [38], variétés toriques [6].

Je vais présenter ici deux exemples simples qui appartiennent à plusieurs des familles de cette liste, ceux de l'espace projectif et du plan éclaté en un point. Ce sont des exemples de variétés symplectiques monotones. J'évoquerai pour finir une famille de variétés faiblement monotones, celle des quintiques de  $\mathbf{P}^4$ .

*L'espace projectif complexe  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ .* — Appelons  $p$  le générateur de la cohomologie de  $\mathbf{P}^n$ , de sorte que

$$H^*(\mathbf{P}^n; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[p]/p^{n+1} \text{ et } c_1 = (n+1)p.$$

On introduit une variable inversible  $q$  de degré  $2(n+1)$ . Le seul produit quantique à calculer est  $p^n \star p$ . Mais

$$(p^n \star p)_{mA} \in H^{2(n+1)(1-m)}(\mathbf{P}^n)$$

( $A$  est toujours le générateur du  $H_2$ ) et le seul terme qui pourrait être non nul est  $(p^n \star p)_A$ , qui s'évalue sur des classes de dimension 0. On a vu au § 2.1 que la structure complexe de  $\mathbf{P}^n$  est régulière pour  $A$ , de plus  $\mathbf{P}^n$  est évidemment monotone, de sorte que le calcul de l'exemple 1.1.1 est valide et que

$$\langle (p^n \star p)_A, \text{pt} \rangle = \Psi_3^A(H \otimes \text{pt} \otimes \text{pt}) = \Phi_3^A(H \otimes \text{pt} \otimes \text{pt}) = 1.$$

On a ainsi montré :

**3.2.1 PROPOSITION.** — *L'anneau de cohomologie quantique  $QH^*(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$  est isomorphe à l'anneau  $\mathbf{Z}[p, q, q^{-1}]/(p^{n+1} - q)$ .*

<sup>10</sup>Par ordre alphabétique des variétés puis des auteurs.

*Remarque.* — Dans cet exemple comme dans le suivant, on calcule avec une structure complexe intégrable, de sorte que les espaces  $\mathcal{M}_A(J)$  sont complexes (voir le § 2.1) et que tous les nombres d'intersection avec des cycles représentés par des sous-variétés complexes sont positifs.

*Le plan éclaté en un point.* — C'est l'exemple que je vais traiter en détail ici. On considère  $X = \widetilde{\mathbf{P}^2}$  avec sa structure complexe (intégrable!) naturelle et une forme de Kähler adaptée. C'est une variété de Fano et il n'y a aucun problème de finitude. Appelons  $A_1$  la classe d'une droite de  $\mathbf{P}^2$  ne passant pas par le point éclaté et  $A_2$  la classe du diviseur exceptionnel. On a ainsi une base de  $H_2(X; \mathbf{Z})$ , avec les intersections

$$A_1 \cdot A_1 = 1, \quad A_1 \cdot A_2 = 0, \quad A_2 \cdot A_2 = -1.$$

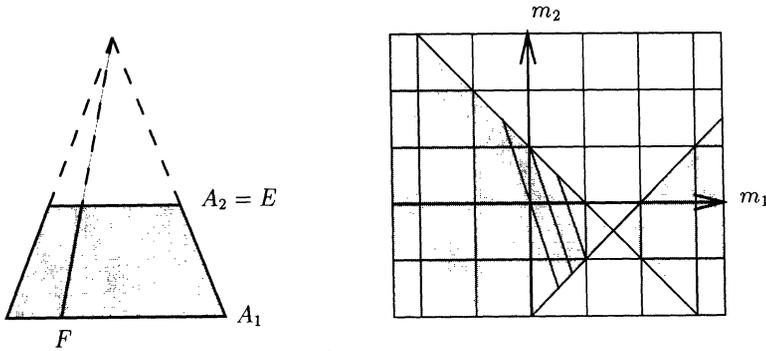


Figure 4 :  $\widetilde{\mathbf{P}^2}$  et son homologie

Soit  $p_1, p_2$  la base duale, de sorte que  $H^*(X; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[p_1, p_2]/(p_1^2 + p_2^2, p_1 p_2)$ . La première classe de Chern de  $X$  est  $3p_1 + p_2$ . On ajoute donc deux variables  $q_1$  et  $q_2$  de degrés respectifs 6 et 2.

Pour que  $A = m_1 A_1 + m_2 A_2$  intervienne dans les sommes définissant le produit quantique, il faut que  $\langle c_1, A \rangle = 3m_1 + m_2$  vaille 0, 1 ou 2. D'autre part,  $A$  doit être la classe d'une courbe rationnelle holomorphe et doit donc vérifier la formule d'adjonction<sup>11</sup>, ici

$$2g - 2 = A \cdot A - \langle c_1, A \rangle \text{ avec } g \geq 0$$

(et égalité si et seulement si  $A$  est la classe d'une courbe plongée). On en déduit  $A \cdot A - \langle c_1, A \rangle + 2 \geq 0$ , soit

$$(m_1 + m_2 - 1)(m_1 - m_2 - 2) \geq 0.$$

Les classes autorisées sont en nombre fini (égal à 3) : ce sont les points du réseau qui sont à la fois dans le cône grisé défini par cette inégalité et sur les droites  $c_1 = 0, 1$  ou 2 (figure 4). Il s'agit de 0, classe des courbes constantes,  $A_2$ , classe de l'exceptionnel et

<sup>11</sup>La même formule est vraie dans le cas non intégrable, voir [44].

$F = A_1 - A_2$ , classe d'une fibre en considérant  $\widetilde{\mathbf{P}}^2$  comme fibré sur  $\mathbf{P}^1$ . Il est à remarquer que ces deux classes contiennent des sphères holomorphes plongées (je viens d'en montrer) et ont une auto-intersection  $\geq -1$ . Grâce à la proposition 2.1.3, la structure complexe considérée est régulière pour ces classes. On peut donc continuer à calculer tranquillement.

Pour déterminer la structure multiplicative de  $QH^*(\widetilde{\mathbf{P}}^2)$ , il suffit de déterminer les trois produits  $p_i \star p_j$ . Les invariants à déterminer ont les valeurs suivantes :

- D'abord,  $\Phi_{A_1-A_2}(A_i \otimes A_j \otimes \text{pt})$  : il s'agit de compter les courbes rationnelles dans la classe de la fibre, c'est à dire les droites de  $\mathbf{P}^2$  passant par le point éclaté, contraintes à passer par un point fixé de  $\mathbf{P}^2$ . Il n'y en a qu'une, et elle rencontre des représentants de  $A_1$  et de  $A_2$ . Ainsi  $\Phi_{A_1-A_2}(A_i \otimes A_j \otimes \text{pt}) = 1$  et, pour tous  $i$  et  $j$ ,

$$\langle (p_i \star p_j)_{A_1-A_2}, [\text{pt}] \rangle = 1.$$

- Ensuite  $\Phi_{A_2}(A_i \otimes A_j \otimes A_k)$  : ces courbes sont dans la classe de l'exceptionnel  $A_2$ , qui contient une seule courbe, et celle-ci ne rencontre pas  $A_1$ . Tous les invariants considérés ici sont donc nuls, sauf  $\Phi_{A_2}(A_2 \otimes A_2 \otimes A_2)$ . On trouve donc

$$\langle (p_2 \star p_2)_{A_2}, A_2 \rangle = 1 \text{ et } \langle (p_i \star p_j)_{A_2}, A_k \rangle = 0 \text{ si } i, j \text{ ou } k \neq 2.$$

Il ne reste plus qu'à utiliser la dualité de Poincaré ( $Dp_1 = A_1$  et  $Dp_2 = -A_2$ ) pour obtenir les produits

$$\begin{aligned} p_1 \star p_1 &= p_1^2 + q_1 q_2^{-1} \\ p_1 \star p_2 &= -q_1 q_2^{-1} \\ p_2 \star p_2 &= p_2^2 + p_2 q_2 + q_1 q_2^{-1} \end{aligned}$$

et finalement :

**3.2.2 PROPOSITION.** — *L'anneau de cohomologie quantique  $QH^*(\widetilde{\mathbf{P}}^2)$  du plan projectif éclaté en un point est isomorphe à l'anneau*

$$\mathbf{Z}[p_1, p_2, q_1, q_1^{-1}, q_2, q_2^{-1}] / (p_1^2 + p_2^2 - p_2 q_2 - 2q_1 q_2^{-1}, p_1 p_2 + q_1 q_2^{-1}).$$

Après ces deux exemples de variétés de Fano, venons-en à des exemples faiblement monotones puisque de dimension  $\leq 6$ , mais où  $c_1 = 0$ .

*Les surfaces K3.* — Si  $n = 2$  et  $c_1 = 0$ , la formule (3) donne dimension 4 à tous les  $\mathcal{M}_0^A(J)$ . Les invariants à trois points se calculent sur  $H_8(X^3; \mathbf{Z})$  donc forcément sur des classes  $a \otimes b \otimes [X]$  avec  $\dim a + \dim b = 4$ . Comme dans la démonstration du théorème 3.1.1, on en déduit qu'ils sont tous nuls. Ainsi le produit quantique coïncide avec le cup-produit pour toutes les variétés hyperkähleriennes<sup>12</sup> de dimension 4.

<sup>12</sup>Ce qui prouve que la nullité de  $c_1$  n'est pas une catastrophe.

*Quantique des quintiques.* — Soit  $X$  une hypersurface de degré 5 (quintique) dans  $\mathbf{P}^4$ . Grâce au théorème de Lefschetz, elle vérifie  $H^2(X; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ , engendré par la classe  $\alpha$  duale à une section hyperplane  $H \in H_4(X; \mathbf{Z})$  ( $\alpha$  contient une forme de Kähler  $\omega$ ), et elle est simplement connexe. De plus, la première classe de Chern est nulle : les quintiques sont des exemples de variétés de Calabi-Yau. D'après la formule (3), la dimension virtuelle de tous les espaces de modules de courbes rationnelles  $J$ -holomorphes est 6. Tous les invariants à trois points se calculent donc sur  $H_{12}(X^3; \mathbf{Z})$ . La contribution des éléments de ce groupe contenant un facteur  $[X]$  est triviale comme dans la démonstration du théorème 3.1.1. Il ne reste donc à calculer que les  $\Psi_3^{mA}(H \otimes H \otimes H)$  pour  $m \in \mathbf{Z}$  et  $A$  le générateur de  $H_2(X; \mathbf{Z})$ .

Soit  $C$  une courbe rationnelle (non paramétrée) de la classe  $mA$ . Elle possède un paramétrage simple  $u : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  (avec  $u_*[\mathbf{P}^1] = mA$ ). Comme  $A \cdot H = 1$ ,  $(mA) \cdot H = m$  et  $C$  compte pour  $m^3$  dans  $\Psi_3^{mA}(H \otimes H \otimes H)$ .

En composant  $u$  avec une application rationnelle  $\varphi : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$  de degré  $k$ , on voit que la même courbe (image)  $C$  va aussi contribuer à l'invariant  $\Psi_3^{k(mA)}(H \otimes H \otimes H)$ . Considérons le graphe

$$\tilde{v} : \zeta \longmapsto (\zeta, u \circ \varphi(\zeta)).$$

La structure complexe produit sur  $\mathbf{P}^1 \times X$  n'est pas régulière pour la classe représentée par  $\tilde{v}$ , comme on peut le voir en appliquant la proposition 2.1.1 ou en remarquant, comme les applications rationnelles de degré  $k$  forment un espace de dimension  $4k + 2$ , que  $\tilde{v}$  est dans une famille de dimension  $4k + 8$ . Il faut donc *vraiment* utiliser ici une perturbation de la structure complexe. Il existe une formule d'Aspinwall et Morrison [1] qui indique que la contribution d'un revêtement d'ordre  $k$  de  $C$  à  $\Psi_3^{k(mA)}(H \otimes H \otimes H)$  devrait aussi être  $m^3$ . On en trouvera une démonstration dans [41] et une autre plus récente dans [58], travail dans lequel C. Voisin a calculé les invariants de Gromov-Witten en question. Une conjecture (non démontrée) de Clemens affirme que les courbes rationnelles simples d'une quintique générale devraient être isolées. Si cette conjecture était vraie, le résultat de [58] permettrait de calculer complètement la cohomologie quantique des quintiques générales, en donnant :

$$(8) \quad \begin{aligned} \alpha \star \alpha &= \left[ 5 + \sum_{m \geq 1} \sum_{\{C \mid \deg C = m\}} m^3 (q^m + q^{2m} + \dots) \right] h \\ &= \left[ 5 + \sum_{m \geq 1} n_m m^3 \frac{q^m}{1 - q^m} \right] h \end{aligned}$$

où  $h$  est le générateur de  $H^4(X; \mathbf{Z})$  (de sorte que  $\alpha \smile \alpha = 5h$ ) et  $n_m$  est le nombre de courbes rationnelles de degré  $m$  (voir aussi le § 3.3.4) :

$$n_m = \# \{C \mid \deg C = m\}.$$

### 3.3. Motivations et autres références

Dans ce §, je cite sans beaucoup d'explications quelques mots-clés liés à ceux de "cohomologie quantique". Les références données ne sont pas exhaustives, mais devraient être suffisantes pour permettre aux lecteurs de trouver leur chemin dans la littérature. Si certaines de ces allusions sont écrites au conditionnel, c'est que beaucoup des (remarquables) idées ayant engendré la cohomologie quantique sont dues à des physicien(ne)s.

3.3.1. *Le point de vue de Kontsevich et Manin.* — Ces auteurs décrivent dans [35] une théorie axiomatique (ou construction virtuelle, selon la terminologie de [57]) assez générale des invariants de Gromov-Witten : on peut imaginer par exemple qu'il existe une application

$$K_{0,k}^A : H^*(X^k) \longrightarrow H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,k})$$

de sorte que

$$\Psi_{0,k,0}^A(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k) = \langle K_{0,k}^A(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k), [\overline{\mathcal{M}}_{0,k}] \rangle \in \mathbf{Q}$$

et plus généralement imaginer des

$$K_{g,k}^A : H^*(X^k) \longrightarrow H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,k})$$

satisfaisant une liste d'axiomes assez naturels dont l'un est une version de la règle de décomposition. La plupart des notions qui suivent trouvent leur expression dans ce langage. Voir [35].

3.3.2. *Variétés de Frobenius.* — Dans le produit  $\star_\xi$  défini par l'équation (7) au § 3.1, remplaçons  $q^m$  par  $\exp(-\langle \omega, A \rangle)$ . Si la série est convergente (par exemple si  $(X, \omega)$  est monotone),  $\star_\xi$  munit  $H^*(X; \mathbf{C}) = T_\xi H^*(X; \mathbf{C})$  d'une structure d'algèbre. Comme celle-ci dépend de  $\xi$ , on considère  $H^*(X; \mathbf{C})$  ou au moins sa partie de degré pair, notée  $\mathcal{H}$ , comme une variété. On a ainsi un produit  $\star_\xi$  sur chaque espace tangent  $T_\xi \mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}$  est munie d'une structure de variété de Frobenius, ce qui la rapproche des systèmes intégrables et des déformations isomonodromiques.

Pour le dire autrement, on considère la série  $S$  définie sur  $H^*(X; \mathbf{C})$  par

$$S(\xi) = \sum_A \sum_{\ell \geq 0} \frac{1}{(\ell + 3)!} \Psi_{0,3,\ell}^A(x \otimes x \otimes x | x \otimes \cdots \otimes x) \exp(-\langle \omega, A \rangle),$$

le *potentiel de Gromov-Witten*. Dire que  $\star_\xi$  est associatif équivaut à dire que  $S$  satisfait un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 3, dit équation WDVV (pour Witten, Dijkgraaf, Verlinde, Verlinde).

On peut aussi considérer la *connexion de Dubrovin*  $\nabla_t$  définie sur le fibré tangent à  $\mathcal{H}$  par  $\nabla_t = d + t\Omega$ , où la 1-forme  $\Omega$  à valeurs dans les endomorphismes de  $\mathcal{H}$  est la multiplication  $\star_\xi$  :

$$\Omega_\xi(\alpha)\beta = \alpha \star_\xi \beta.$$

L'associativité de  $\star_\xi$  et l'existence du potentiel  $S$  se traduisent par la *platitude* de la connexion  $\nabla_t$  pour tout  $t$ . Voir [20] et [29].

3.3.3. *Symétrie miroir.* — Les motivations pour définir la cohomologie quantique viennent de la physique — ou au moins des physiciens. Pour une part importante, il s’agit de la symétrie miroir, une étrange symétrie entre variétés de Calabi-Yau. Elle associerait à une variété  $X$  de Calabi-Yau une autre variété de Calabi-Yau  $X^*$  en échangeant certaines de leurs propriétés (voir [56, 59, 16, 34], le guide de Morrison [46] et le panorama [57] de C. Voisin).

L’accouplement de Yukawa normalisé sur  $X$  est une  $n$ -forme symétrique

$$\mathrm{Sym}^n H^1(X; TX) \longrightarrow \mathrm{Hom} \left( H^{n,0}(X), H^{0,n}(X) \right) \cong \left( H^{n,0}(X)^* \right)^{\otimes 2} \stackrel{\kappa}{\cong} \mathbf{C}$$

définie par le cup-produit des  $n$ -formes et le choix d’un élément  $\kappa \in (H^{n,0}(X))^{\otimes 2}$ . La symétrie miroir est supposée identifier  $H^1(X; TX)$  avec  $H^1(X^*; \Omega_{X^*}^1)$  et l’accouplement de Yukawa de  $X$  avec une  $n$ -forme symétrique

$$Y^* : \mathrm{Sym}^n H^1(X^*; \Omega_{X^*}^1) \longrightarrow \mathbf{C}$$

qui devrait être définie à l’aide du potentiel de Gromov-Witten (voir ci-dessus au § 3.3.2) :

$$Y^*(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}) = \frac{\partial^n S}{\partial t_{i_1} \dots \partial t_{i_n}}(0)$$

si  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  est une base de  $H^*(X^*; \mathbf{C})$  et  $(t_1, \dots, t_k)$  sont les coordonnées dans cette base.

Un autre point de vue<sup>13</sup> relie la connexion de Dubrovin définie par le produit quantique de  $X^*$  (§ 3.3.2) à la connexion de Gauss-Manin d’une famille de déformations de  $X$  (voir [57]).

3.3.4. *Géométrie énumérative.* — Les invariants de Gromov-Witten étant définis en comptant des courbes, la théorie devrait avoir des conséquences en géométrie énumérative (voir [1, 35, 32, 16, 51]). Dans le cas simple de  $\mathbf{P}^2$ , si l’on décompose une classe de cohomologie  $\alpha$  sur la base  $(1, p, p^2)$  en  $\alpha = t_0 + t_1 p + t_2 p^2$ , le potentiel de Gromov-Witten<sup>14</sup> est

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}(t_0 t_1^2 + t_0^2 t_2) + \sum_{d \geq 1} N(d) \frac{t_2^{3d-1}}{(3d-1)!} e^{d t_1}$$

où  $N(d)$  est le nombre de courbes rationnelles de degré  $d$  passant par  $3d-1$  points donnés en position générale. L’associativité du produit quantique  $\star_\xi$  permet de calculer<sup>15</sup>  $N(d)$  par récurrence [35] (voir aussi [16]).

Les phénomènes les plus spectaculaires se produisent via la symétrie miroir dans le cas des quintiques. Supposons qu’on sache vraiment déterminer la variété miroir  $X^*$  à

<sup>13</sup>C’est cette version de la conjecture des miroirs dont Givental [26] a annoncé récemment une démonstration pour les intersections complètes.

<sup>14</sup>Il y a une petite modification par rapport à la définition de celui-ci en 3.3.2 : on a spécialisé en  $q = 1$ .

<sup>15</sup>Que la série soit ou non convergente n’a aucune importance pour ce calcul.

partir de  $X$ . L'accouplement de Yukawa de  $X^*$  est facile à calculer, il devrait donner le potentiel de Gromov-Witten de  $X$  et celui-ci devrait permettre de calculer des nombres de courbes rationnelles dans  $X$ . On arrive aux prédictions impressionnantes de Candelas, de la Ossa, Green et Parkes [13] sur les nombres  $n_m$  déjà apparus dans la formule (8) pour certaines quintiques (voir [46]).

3.3.5. *Géométrie homologique.* — On a considéré au § 3.3.2 la cohomologie comme une variété. Pourquoi ne pas y faire de la géométrie? C'est le point de vue de Givental [25]. Voici un exemple : on garde les notations  $p, q$  du § 3.1, mais on remplace  $\mathbf{Z}$  par  $\mathbf{C}$ , on considère  $\mathbf{C}[q_1, q_1^{-1}, \dots, q_r, q_r^{-1}]$  comme l'anneau des fonctions régulières sur  $H^2(X; \mathbf{C}^*)$  (que j'identifie à  $H^2(X; \mathbf{C}/\mathbf{Z})$ ). Une fois la base  $(A_1, \dots, A_r)$  de  $H_2(X; \mathbf{Z})$  choisie, on peut considérer  $q_j$  comme la fonction

$$\begin{array}{ccc} H^2(X; \mathbf{C}/\mathbf{Z}) & \longrightarrow & \mathbf{C}^* \\ \alpha & \longmapsto & \exp(2i\pi\langle \alpha, A_j \rangle). \end{array}$$

Supposons que l'anneau de cohomologie de  $X$  soit engendré par ses classes de degré 2 (les  $p$ , donc), la cohomologie quantique va naturellement être un quotient

$$QH^*(X) \otimes \mathbf{C} \cong \mathbf{C}[p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r, q_1^{-1}, \dots, q_r^{-1}]/I.$$

L'idéal  $I$  décrit une sous-variété de l'espace des  $(p, q)$  c'est à dire  $T^*H^2(X; \mathbf{C}/\mathbf{Z}) \dots$  qui est *lagrangienne*<sup>16</sup> quand l'anneau  $QH^*(X)$  est semi-simple. Dans le cas des variétés de drapeaux, c'est même un niveau d'un célèbre système intégrable, le système de Toda [27].

3.3.6. *Cohomologie de Floer.* — La cohomologie de Floer de l'espace des lacets de  $X$  peut être munie d'une structure multiplicative qui la rend isomorphe à la cohomologie quantique de  $X$  (voir [49]).

3.3.7. *Algèbre de fusion et cohomologie de la grassmannienne.* — Witten indique dans [60] comment la cohomologie quantique de la grassmannienne est liée aux espaces de modules de fibrés et à l'algèbre de fusion (voir la description de Beauville dans [7]). Considérons l'algèbre  $\mathcal{R}_n$  des représentations de dimension finie du groupe unitaire  $U(n)$ . On sait qu'elle est isomorphe (sur  $\mathbf{Q}$ ) à la cohomologie de l'espace classifiant  $BU(n)$  : à chaque représentation  $\lambda$  est associé un fibré vectoriel  $E_\lambda$  sur la grassmannienne  $G_n(\mathbf{C}^N)$  des sous-espaces de dimension  $n$  de  $\mathbf{C}^N$ . En composant avec le caractère de Chern, on en déduit des morphismes

$$\text{ch} : \mathcal{R}_n \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow H^*(G_n(\mathbf{C}^N); \mathbf{Q})$$

compatibles lorsque  $N$  augmente et qui définissent un isomorphisme

$$\text{ch} : \mathcal{R}_n \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow H^*(BU(n); \mathbf{Q}).$$

<sup>16</sup>Le cotangent a sa structure symplectique canonique. On appréciera le choix des notations.

Witten construit dans [60] une sous-algèbre  $\mathcal{R}_{n,N}$  de  $\mathcal{R}_n$  (c'est l'algèbre de fusion) et un produit sur celle-ci, le *produit de Verlinde*, qui est différent du produit usuel (le produit tensoriel). Pour le définir, on commence par construire des nombres  $N(\Sigma, \vec{\lambda})$  associés à une surface de Riemann  $\Sigma$  munie d'un  $k$ -uplet  $\vec{z}$  de points marqués (qui n'apparaissent pas dans la notation) et d'un  $k$ -uplet  $\vec{\lambda}$  de représentations de  $U(n)$  : on associe à ces données un fibré vectoriel sur l'espace de modules des connexions plates sur le  $U(n)$ -fibré principal  $\Sigma \times U(n)$ , dont  $N(\Sigma, \vec{\lambda})$  est la dimension de l'espace des sections holomorphes. Ces nombres satisfont des *règles de fusion* très similaires aux règles de décomposition du § 1.2, ce qui fait que le cas où  $\Sigma = \mathbf{P}^1$  permet de construire le produit associatif recherché.

Selon Witten, le produit de Verlinde devrait être analogue au produit quantique au sens où on devrait pouvoir définir un *caractère de Chern*<sup>17</sup>

$$\text{qh} : \mathcal{R}_{n,N} \longrightarrow QH^*(G_n(\mathbf{C}^N))$$

qui soit un isomorphisme d'anneaux.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ASPINWALL, D. MORRISON, *Topological field theory and rational curves*, Commun. Math. Phys. **151** (1993), 245–262.
- [2] A. ASTACHKEVICH, V. SADOV, *Quantum cohomology of partial flag manifolds*, Commun. Math. Phys. **170** (1995), 503–528.
- [3] M. AUDIN, *Symplectic and almost complex manifolds*, in [4].
- [4] M. AUDIN, J. LAFONTAINE, EDS, *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progress in Math. 117, Birkhäuser, 1994.
- [5] M. AUDIN, F. LALONDE, L. POLTEROVICH, *Symplectic rigidity: Lagrangian submanifolds*, in [4].
- [6] V. BATYREV, *Quantum cohomology ring of toric manifolds*, Astérisque **218** (1993), 9–34.
- [7] A. BEAUVILLE, *Conformal blocks, fusion rules and the Verlinde formula*, Israel Math. Conferences Proc. **9** (1996), 75–96.

---

<sup>17</sup>Analogie quantique du caractère de Chern.

- [8] A. BEAUVILLE, *Quantum cohomology of complete intersections*, Математическая физика, анализ, геометрия **2** (1995), 384–398.
- [9] K. BEHREND, *GW-invariants in algebraic geometry*, preprint (1996).
- [10] K. BEHREND, B. FANTECHI, *The intrinsic normal cone*, preprint (1996).
- [11] A. BERTRAM, *Modular Schubert calculus*, Advances in Math. (à paraître).
- [12] A. BERTRAM, G. DASKALOPOULOS, R. WENTWORTH, *Gromov invariants for holomorphic maps from Riemann surfaces to Grassmannians*, Journ. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 529–571.
- [13] P. CANDELAS, X. DE LA OSSA, P. GREEN, L. PARKES, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal field theory*, Nucl. Phys. **B359** (1991), 21–74.
- [14] I. CIOCAN-FONTANINE, *Quantum cohomology of flag varieties*, IMRN **6** (1995), 263–277.
- [15] B. CRAUDER, R. MIRANDA, *Quantum cohomology of rational surfaces*, in [17].
- [16] P. DI FRANCESCO, C. ITZYKSON, *Quantum intersection rings*, in [17].
- [17] R. DIJKGRAAF, C. FABER, G. VAN DER GEER, EDS, *The moduli space of curves*, Progress in Math. 129, Birkhäuser, 1995.
- [18] S. DONALDSON, *The orientation of Yang-Mills moduli spaces and 4-manifold topology*, J. Diff. Geom. **26** (1987), 397–428.
- [19] S. DONALDSON, P. KRONHEIMER, *The geometry of four-manifolds*, Oxford University Press, 1990.
- [20] B. DUBROVIN, *Integrable systems and classification of 2-dimensional topological field theories* in *Integrable systems, the Verdier memorial conference*, edited by O. BABELON, P. CARTIER, Y. KOSMANN-SCHWARZBACH, Progress in Math. 115, Birkhäuser, 1994, et *Geometry of 2D topological field theories*, Lecture Notes in Math. 1620, Springer, 1995.
- [21] A. FLOER, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Comm. Math. Phys. **120** (1989), 575–611.
- [22] K. FUKAYA, K. ONO, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant* (sic), preprint (1996).
- [23] W. FULTON, R. PANDHARIPANDE, *Notes on stable maps and quantum cohomology*, preprint (1996).

- [24] P. GAUDUCHON, *Conneziions linéaires, classes de Chern, théorème de Riemann-Roch*, in [4].
- [25] A. GIVENTAL, *Homological geometry and mirror symmetry*, in *I.C.M. Zürich (1994)*, Birkhäuser, 1995, 473–480.
- [26] A. GIVENTAL, *Equivariant Gromov-Witten invariants*, IMRN (1996, à paraître).
- [27] A. GIVENTAL, B. KIM, *Quantum cohomolgy of flag manifolds and Toda lattices*, *Commun. Math. Phys.* **168** (1995), 609–641.
- [28] M. GROMOV, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, *Invent. Math.* **82** (1985), 307–347.
- [29] N. HITCHIN, *Frobenius manifolds*, in *Gauge Theory and Symplectic Geometry*, Séminaire de Mathématiques Supérieures, Montréal, 1995, Kluwer, à paraître.
- [30] H. HOFER, V. LIZAN, J.-C. SIKORAV, *On genericity for holomorphic curves in 4-dimensional almost-complex manifolds*, *The Journ. of Geom. Anal.* (à paraître).
- [31] H. HOFER, D. SALAMON, *Floer homology and Novikov rings*, in *the Floer memorial volume*, *Progress in Math.* 133, Birkhäuser, 1995.
- [32] C. ITZYKSON, *Counting rational curves on rational surfaces*, preprint (1994).
- [33] M. KONTSEVICH, *Enumeration of rational curves via torus actions*, in [17].
- [34] M. KONTSEVICH, *Mirror symmetry in dimension 3*, in *Séminaire Bourbaki 1994-95*, *Astérisque* **237** (1996).
- [35] M. KONTSEVICH, YU. MANIN, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry*, *Commun. Math. Phys.* **164** (1994), 525–562.
- [36] D. KOTSCHICK, *The Seiberg-Witten invariants of symplectic four-manifolds [after C. H. Taubes]*, in *Séminaire Bourbaki 1995-96*, *Astérisque*, ce volume.
- [37] F. LALONDE, D. MCDUFF, *The classification of ruled symplectic 4-manifolds*, *Math. Res. Letters* (1996), à paraître.
- [38] J. LI, G. TIAN, *The quantum cohomology of homogeneous varieties*, preprint (1995).
- [39] J. LI, G. TIAN, *Virtual moduli cycles and GW-invariants*, preprint (1996).
- [40] G. LIU, *Associativity of quantum multiplication*, preprint (1995).
- [41] YU. MANIN, *Generating functions in algebraic geomerty and sums over trees*, in [17].

- [42] D. MCDUFF, *Examples of symplectic structures*, Invent. Math. **89** (1987), 13–36.
- [43] D. MCDUFF, *The structure of rational and ruled symplectic 4-manifolds*, Journ. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 679–712.
- [44] D. MCDUFF, *Singularities and positivity of intersections of  $J$ -holomorphic curves*, in [4].
- [45] D. MCDUFF, D. SALAMON,  *$J$ -holomorphic curves and quantum cohomology*, Amer. Math. Soc., 1994, tirage corrigé, 1995.
- [46] D. MORRISON, *Mirror symmetry and rational curves on quintic threefolds: a guide for mathematicians*, Journ. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 223–247.
- [47] S. NOVIKOV, *Multivalued functions and functionals — an analogue of the Morse theory*, Soviet Math. Dokl. **24** (1981), 222–225.
- [48] P. PANSU, *Compactness*, in [4].
- [49] S. PIUNIKHIN, D. SALAMON, M. SCHWARZ, *Symplectic Floer-Donaldson theory and quantum cohomology*, preprint (1995).
- [50] Y. RUAN, *Symplectic topology on algebraic 3-folds*, Journal of Diff. Geometry **39** (1994), 215–227.
- [51] Y. RUAN, G. TIAN, *A mathematical theory of quantum cohomology* (annonce), Math. Res. Letters **1** (1994), 269–278, et *A mathematical theory of quantum cohomology*, Journal of Diff. Geometry **42** (1995), 259–367.
- [52] B. SIEBERT, *Gromov-Witten invariants for general symplectic manifolds*, preprint (1996).
- [53] B. SIEBERT, G. TIAN, *On quantum cohomology rings of Fano manifolds and a formula of Vafa and Intriligator*, preprint (1994).
- [54] C. H. TAUBES, *The Seiberg-Witten and the Gromov Invariants*, Math. Res. Letters **2** (1995), 221–238.
- [55] G. TIAN, *Quantum cohomology and its associativity*, preprint (1995).
- [56] C. VAFA, *Topological mirrors and quantum rings*, in *Essays on Mirror manifolds*, S. T. Yau Ed., International Press, Hong-Kong, 1992.
- [57] C. VOISIN, *Symétrie miroir*, Panoramas et Synthèses, volume 2, Société Mathématique de France, 1996.
- [58] C. VOISIN, *A mathematical proof of Aspinwall-Morrison formula*, Compositio Math. (à paraître).

- [59] E. WITTEN, *Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space*, Surveys in Diff. Geometry **1** (1991), 243–310.
- [60] E. WITTEN, *The Verlinde algebra and the cohomology of the Grassmannian*, preprint (1993).

Michèle AUDIN  
Institut de Recherche Mathématique Avancée  
Université Louis Pasteur et CNRS  
7 rue René-Descartes  
F-67084 Strasbourg Cedex  
maudin@math.u-strasbg.fr

# *Astérisque*

DANIEL BENNEQUIN

## **Monopôles de Seiberg-Witten et conjecture de Thom**

*Astérisque*, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki, exp. n° 807, p. 59-96

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1995-1996\\_\\_38\\_\\_59\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__59_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**MONOPÔLES DE SEIBERG-WITTEN ET CONJECTURE DE THOM**  
[d'après Kronheimer, Mrowka et Witten]

par Daniel BENNEQUIN

**1. SURVOL**

À nouveau l'autodualité, l'étoile de Hodge, mais l'apparition des spineurs de Dirac et Cartan, la géométrie  $\text{spin}^c$  d'Atiyah et Penrose, racine carrée de la géométrie euclidienne ; éclairé par de nouvelles dualités en théorie quantique des champs, Witten a découvert un raccourci profond qui mène au trésor de la dimension 4.

Soit  $X$  une variété compacte orientée de dimension 4 ; le produit extérieur définit une structure conforme canonique de signature  $(3, 3)$  sur le fibré  $\Lambda^2 T^*(X)$  des formes de degré 2. Toute décomposition orthogonale  $\Lambda^2 = \Lambda_+^2 \oplus \Lambda_-^2$ , avec  $\Lambda_+^2$  dans le cône positif, correspond à une structure conforme sur  $X$ . L'opérateur  $*$  de Hodge vaut  $+1$  sur  $\Lambda_+^2$  et  $-1$  sur  $\Lambda_-^2$ . Une métrique riemannienne compatible sur  $X$  est déterminée par la donnée supplémentaire d'un élément de volume dans  $\Lambda^4$  (cf. [Be], [D.K.]).

Un théorème topologique de Whitney ([Wh]), à l'origine de la théorie des classes caractéristiques, se traduit en ces termes :

Il existe deux fibrés vectoriels complexes de rang 2 sur  $X$ ,  $E_+$  et  $E_-$ , munis de structures hermitiennes définies positives et d'un isomorphisme unitaire des déterminants  $\Lambda^2(E_-) \rightarrow \Lambda^2(E_+)$ , tels que  $\Lambda_+^2$  et  $\Lambda_-^2$  soient respectivement isomorphes aux fibrés  $su(E_+)$  et  $su(E_-)$  des endomorphismes anti-hermitiens sans trace.

Le fibré tangent  $T(X)$  s'identifie canoniquement à un sous-fibré réel de  $\text{Hom}(E_-, E_+)$  (cf. § 4).

Les fibrés  $E_+$ ,  $E_-$  relèvent le groupe structural  $SO_3$  de  $\Lambda_+^2$ ,  $\Lambda_-^2$  au groupe unitaire  $U_2$ . Ils permettent de relever le groupe structural  $SO_4$  de  $T(X)$  à l'unique fibré en cercle non-trivial  $Spin_4^c = Spin_4 \times_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} S^1 \rightarrow SO_4$ .

La donnée de  $E_+$ ,  $E_-$ , comme dans l'énoncé de Whitney, forme une  $\text{spin}^c$ -structure sur  $X$  ; les sections de  $E_+$  (resp.  $E_-$ ) sont les champs de spineurs positifs

(resp. négatifs). Le fibré en droite complexe  $L = \Lambda^2 E_+ (\approx \Lambda^2 E_-)$  est le fibré caractéristique de la structure ; sa première classe de Chern est congrue modulo 2 à la deuxième classe de Stiefel-Whitney de  $X$ .

Les classes d'équivalence de  $\text{spin}^c$ -structures associées à une métrique et une orientation sur  $X$  forment un ensemble homogène principal  $\Sigma^c(X)$  pour le groupe de cohomologie  $H^2(X; \mathbf{Z})$  ; l'action sur  $c_1(L)$  est  $c \mapsto c_1(L) + 2c$  (cf. [L.M.]).

(Les §§ 2 à 4 détailleront les rapports de  $\text{spin}^c$  avec l'autodualité.)

D'une occulte physique, les recherches de Seiberg et Witten sur la renormalisation des théories de Yang-Mills  $N = 2$ -supersymétriques twistées (cf. § 8), Witten ([Wi4]) a su extraire une équation des monopôles  $\text{spin}^c$  :

Fixons une métrique riemannienne et une structure  $\text{spin}^c$  sur  $X$  ;

l'inconnue est le couple d'une connexion unitaire  $A$  sur  $L$  et d'une section  $\Phi$  de  $E_+$  ;

à la connexion  $A$  est associé un opérateur de Dirac :

$$D_A^+ : \Gamma(E_+) \longrightarrow \Gamma(E_-),$$

au champ de spineurs  $\Phi$  un endomorphisme de  $E_+$  :

$$\sigma(\Phi, \Phi)(\psi) = \langle \Phi, \psi \rangle \Phi - \frac{1}{2} \langle \Phi, \Phi \rangle \psi,$$

hermitien de trace 0, donc une 2-forme auto-duale  $\sigma(\Phi, \Phi) \in i\Omega_+^2 = \Gamma(i\Lambda_+^2)$  ;

l'équation est le couple :

$$(SW) \quad D_A^+ \cdot \Phi = 0 \quad , \quad F_A^+ = \sigma(\Phi, \Phi).$$

Dans la seconde équation,  $F_A$  est la courbure de  $A$ , section de  $i\Lambda^2$  et  $F_A^+$  désigne sa projection auto-duale.

Les deux équations sont quasi-linéaires du premier ordre, toutes deux non-linéaires de degré 2 à l'ordre zéro. À cause de la deuxième, le système n'est pas conformément invariant.

Lorsque  $(A, \Phi)$  est solution, beaucoup d'autres solutions s'en déduisent par transformation de jauge et changement de phase de  $\Phi$  : si  $h$  est une fonction de  $X$  dans le cercle  $S^1 \subset \mathbf{C}$ , on peut remplacer  $(A, \Phi)$  par  $h \cdot (A, \Phi) = (A - 2d \log h, h\Phi)$ .

En un point fixe  $h \cdot (A, \Phi) = (A, \Phi)$ , on a  $h \equiv 1$  ou  $\Phi \equiv 0$ . Lorsque  $\Phi$  est identiquement nulle, on dit que la solution est réductible. S'il existe une solution réductible, le groupe de jauge  $\mathcal{G}$  n'agit pas librement. Mais dans tous les cas, si l'on choisit un point  $x_0 \in X$ , le sous-groupe  $\mathcal{G}_0$  des  $h$  valant 1 en  $x_0$  agit librement.

Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des connexions sur  $L$ ,  $\mathcal{E}_+$  l'ensemble des champs de spineurs positifs,  $\mathcal{S} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{E}_+$  l'ensemble des monopôles de Seiberg-Witten,  $\mathcal{B} = \mathcal{A} \times \mathcal{E}_+/\mathcal{G}$  l'ensemble des classes d'équivalence de jauge,  $\mathcal{B}^*$  l'ensemble des irréductibles,  $\mathcal{M} = \mathcal{S}/\mathcal{G}$  l'espace des modules de monopôles,  $\mathcal{M}^*$  les irréductibles,  $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{A} \times \mathcal{E}_+/\mathcal{G}_0$ ,  $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{S}/\mathcal{G}_0$  les classes restreintes. Pour toutes les bonnes topologies, par exemple Sobolev  $L^2_k$  pour  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{E}_+$ ,  $L^2_{k+1}$  pour  $\mathcal{G}$ ,  $k \geq 2$ , l'action de  $\mathcal{G}$  est lisse,  $\mathcal{B}$  est séparé,  $\mathcal{B}^*$  et  $\tilde{\mathcal{B}}$  sont des variétés,  $\mathcal{M}$  et  $\tilde{\mathcal{M}}$  sont fermés dans  $\mathcal{B}$  et  $\tilde{\mathcal{B}}$ . Le premier fait remarquable, qui va donner un avantage aux monopôles sur les instantons, est le suivant :

*Si  $X$  est compacte sans bord, l'espace des modules  $\mathcal{M}$  est compact.*

Cela résulte de l'estimation géométrique suivante ([Wi4], [K.M.3]) :

*Soit  $s$  la fonction courbure scalaire sur  $X$  ; en tout point  $x$  où  $\|\Phi\|$  atteint un maximum local, on a :*

$$\|\Phi(x)\|^2 \leq \sup(0, -s(x)).$$

L'origine de cette inégalité, et de bien d'autres propriétés de (SW), est la formule de Weitzenböck-Bochner-Lichnerowicz :

$$D_A^- D_A^+ \cdot \Phi = \nabla_A^* \nabla_A \cdot \Phi + \frac{s}{4} \Phi + \frac{1}{2} F_A^+(\Phi).$$

L'opérateur  $D_A^- : \Gamma(E_-) \rightarrow \Gamma(E_+)$  est l'adjoint formel  $D_A^{+*}$  de  $D_A^+$ . Selon les désirs originels de Dirac, l'opérateur du premier ordre  $\begin{pmatrix} 0 & D_A^- \\ D_A^+ & 0 \end{pmatrix}$  est une racine carrée du laplacien  $-\Delta_A = \nabla_A^* \nabla_A$  de  $\Gamma(E_- \oplus E_+)$  modulo un opérateur d'ordre 0 ; mais c'est justement le terme d'ordre zéro qui a des conséquences topologiques. Lichnerowicz l'a remarqué en premier (cf. [Li] et [G.L.1]).

L'action de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{A} \times \mathcal{E}_+$  et l'opérateur SW de  $\mathcal{A} \times \mathcal{E}_+$  dans  $\Gamma(E_-) \times i\Omega_+^2$  qui à  $(A, \Phi)$  associe  $(D_A^+ \Phi, F_A^+ - \sigma(\Phi, \Phi))$  font une sorte de complexe elliptique non-linéaire. Supposons  $X$  compacte sans bord.

*Sur un ouvert dense des métriques riemanniennes de  $X$ , SW est une submersion en tout point de  $\mathcal{M}^*$  ; l'espace  $\mathcal{M}^*$  associé est une variété de dimension finie ([E.F.]).*

On peut faire appel au théorème de l'indice d'Atiyah-Singer pour calculer la dimension virtuelle de  $\mathcal{M}^*$ . Supposons  $X$  connexe :

*L'indice réel de SW est égal au nombre d'Euler  $\chi_+$  du fibré orienté de rang 4 réel sous-jacent au fibré  $E_+$ . Si  $\mathcal{M}^* \neq \emptyset$ ,  $\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{M}^* = \chi_+$ .*

Si  $\chi$  est la caractéristique d'Euler de  $X$  et  $\sigma$  sa signature, on a :

$$\chi_+ = \frac{1}{4} (c_1(L)^2 - 2\chi - 3\sigma).$$

La dimension de  $\widetilde{\mathcal{M}}$  est 1 de plus ;  $\widetilde{\mathcal{M}}^*$  est un fibré en cercle sur  $\mathcal{M}^*$ .

Il peut être utile de perturber les équations de Seiberg-Witten en ajoutant au second membre de la seconde équation une forme autoduale fixe  $i\omega$  (cf. [Wi4], [K.M.3], [T1]). Pour  $\omega$  générique,  $\mathcal{M}_\omega^*$  et  $\widetilde{\mathcal{M}}_\omega^*$  sont des variétés. Leurs dimensions sont encore  $\chi_+$  et  $1 + \chi_+$ .

La définition d'invariants de la structure différentiable orientée de  $X$  à partir des espaces  $\mathcal{M}$  réclame une élimination convenable des monopôles réductibles :

Le type de la forme d'intersection sur  $H^2(X, \mathbf{R})$  est déterminé par les nombres  $b_2^+$  et  $b_2^-$  ( $\sigma = b_2^+ - b_2^-$ ,  $b_2 = b_2^+ + b_2^-$ ).

Si  $b_2^+ \geq 1$ , pour une métrique générique de  $X$ ,  $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$ .

Et si  $b_2^+ > 1$ , deux métriques génériques peuvent être déformées l'une dans l'autre par un chemin qui évite les réductibles. D'où une fonction de  $\Sigma^c(X)$  dans l'anneau de cobordisme non-orienté du point,  $\Omega_*^O$ .

Comme avait fait Donaldson ([D3]) pour orienter les espaces de modules des équations de Yang-Mills, il est possible d'orienter canoniquement  $\mathcal{M}^*$  en choisissant une orientation de l'homologie de  $X$ , c'est-à-dire une demi-droite dans  $\text{Det}(H^1(X, \mathbf{R}))^* \otimes \text{Det}(H_+^2(X, \mathbf{R}))$ . On obtient ainsi une fonction à valeur dans l'anneau de cobordisme orienté  $\Omega_*^{SO}$ , dès que  $b_2^+ > 1$ .

( Question : a-t-on une fonction de  $\Sigma^c(X)$  dans  $\Omega_*^{Spin^c}$  ? )

Si l'on souhaite des invariants numériques, on peut prendre la classe d'Euler du fibré  $\widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$ , et l'élever à la puissance qu'il faut pour intégrer sur  $\mathcal{M}$ . Alors, si  $S \in \Sigma^c(X)$  est une classe de structure  $spin^c$ , dont le nombre  $\chi_+$  est pair, on pose  $sw(S) = \langle c_1(\widetilde{\mathcal{M}})^{\frac{\chi_+}{2}}, [\mathcal{M}] \rangle$  (quantité qui dépend de l'orientation d'homologie), et si  $\chi_+$  est impair, on pose  $sw(S) = 0$ . (Bien que  $\chi_+$  dépende de  $S$  via  $c_1(L)$ , sa parité ne dépend que de  $X$ .)

Cependant, *il n'y a qu'un nombre fini de classes de structures  $spin^c$  sur  $X$  dont les invariants de Seiberg-Witten ne sont pas vides* (cf. §6).

Il semble que les plus pertinentes des structures  $spin^c$  sur  $X$  soient celles dont le  $\chi_+$  vaut 0.

Dans ce cas, une section jamais nulle de  $E_+$  donne un isomorphisme de  $T(X)$  avec  $E_-$  ; la structure presque-complexe sur  $T(X)$  qu'on en déduit est compatible avec la métrique. Inversement, une structure presque-complexe sur  $X$  fournit une structure  $spin^c$  canonique, pour laquelle  $E_+ = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2} = 1 \oplus K^{-1}$ ,  $E_- = \Lambda^{0,1} = T'(X)$ ,  $L = \Lambda^{0,2}$  ( $= \Lambda^2(E_+) = \Lambda^2(E_-)$ ), donc  $c_1(L) = c_1(X)$ . Les autres structures s'obtiennent en tordant celle-là par un fibré complexe de rang 1 quelconque.

D'après [Wu], les classes d'homotopie de structures presque-complexes sur  $X$  sont en bijection avec les classes caractéristiques  $c_1(L)$  telles que  $\chi_+ = 0$  (i.e. les  $c_1 \in H^2(X, \mathbf{Z})$  telles que  $c_1 \equiv W_2$  modulo 2 et  $c_1^2 = 2\chi + 3\sigma$ ).

On choisit des métriques adaptées, presque-Kähler, pour écrire les équations (SW). Si la métrique est de Kähler,  $D_A^+ = \sqrt{2} (\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)$ .

Witten a montré que les surfaces kählériennes complexes telles que  $b_2^+ > 1$  ont des invariants non nuls. On rencontre la théorie classique des systèmes linéaires en géométrie algébrique. Et chaque fois que les invariants sont stablement non-vides, on a  $\chi_+ = 0$  (i.e.  $c_1(L)^2 = c_1(X)^2$ ) (cf. [Wi4]). C'est ce que Taubes étend à présent aux variétés symplectiques.

Les classes  $c_1$  fournissant des invariants de Seiberg-Witten non-vides sont dites basiques (au sens des monopôles).

Une question ouverte sur les monopôles : préciser le rapport entre les invariants de Seiberg-Witten et les invariants de Donaldson ([D4]). Cette question semble aussi importante pour les physiciens que pour les mathématiciens (cf. § 8).

Les classes basiques de Seiberg-Witten semblent coïncider avec les classes basiques (au sens des instantons) de Kronheimer-Mrowka décrivant les polynômes de Donaldson des variétés simples (cf. [K.M.2], [B3]).

Cependant, Taubes [T1,2,3] a établi le lien entre les invariants de Seiberg-Witten et ceux de Gromov (cf. [G], [B1,2]) pour les variétés symplectiques de dimension 4. Le corollaire le plus frappant : il n'y a qu'une classe d'isomorphisme de structure symplectique de volume donné sur le plan projectif complexe.

Lorsque  $\chi_+(S) = 0$ , le nombre  $sw(S)$  compte algébriquement le nombre de points de  $\mathcal{M}$ .

Mais déjà, sans orienter l'homologie, le nombre de points de  $\mathcal{M}$  (générique) compté modulo 2 s'avère très puissant, suffisant pour résoudre un problème de topologie de dimension 4 qui avait mérité le nom de "conjecture de Thom" :

Dans le plan projectif complexe  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ , toute courbe algébrique complexe lisse  $C$  de degré  $d$  est de genre  $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$  ; la conjecture promettait que le genre de toute surface réelle orientée connexe  $\Sigma$  plongée dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  homologue à  $C$  est supérieur à celui de  $C$ . ("Économie analytique".)

Pour  $d = 1$  ou  $2$ , il n'y a rien à prouver. Si  $d = 3$ , le genre algébrique est 1, le problème fut résolu par Kervaire et Milnor ([Ke.Mi.]). Pour  $d = 4$  ou  $5$ , il fallut attendre l'usage de la signature équivariante par Rohlin et Hsiang & Szczarba (cf. [B.We.], [Ro], [Hs.Sz.]) ; le résultat vient d'une inégalité générale  $g(\Sigma) \geq \frac{1}{4}d^2 - 1$  (au lieu du  $\frac{1}{2}d^2 - \frac{3}{2}d + 1$  espéré). Avec  $d = 6$  surviennent les invariants de Donaldson entre

les mains de Kotschick et Matič (cf. [Ko.Ma.]). Au-delà ? Kronheimer et Mrowka font appel aux équations de Seiberg-Witten :

**THÉOREME** ([K.M.3]).—  $g(\Sigma) \geq g(C)$  en tout degré.

Avec les modules d'instantons singuliers, Kronheimer et Mrowka avaient réussi à établir l'inégalité pour les surfaces  $\Sigma$  qui coupent une droite projective  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  en  $d$  points géométriques (cf. [K.M.1], [B3]). C'était un corollaire d'un théorème valable sur toute surface projective complexe avec  $b_2^+ \geq 3$  : à l'exception des sphères  $\Sigma$  d'auto-intersection 0 et  $-1$ , on a  $g(\Sigma) \geq \frac{1}{2} \Sigma \cdot \Sigma + 1$ .

La "conjecture de Thom généralisée" énonce que sur toute surface projective complexe de diviseur canonique  $K$ , toute surface réelle plongée orientée connexe  $\Sigma$  homologue à une courbe algébrique complexe lisse vérifie  $g(\Sigma) \geq 1 + \frac{1}{2} \Sigma \cdot \Sigma + \frac{1}{2} K \cdot \Sigma$ . On ignore encore la réponse, mais d'ores et déjà, la théorie de Seiberg-Witten a permis d'établir un grand nombre de cas de la conjecture généralisée ; ce sont les travaux récents de Kronheimer, Mrowka, Morgan, Szabó, Taubes, Auckley (cf. [Au]).

Pour démontrer le théorème, Kronheimer et Mrowka accèdent au terme  $K \cdot \Sigma$  sous l'hypothèse  $\Sigma \cdot \Sigma = 0$ .

Le mécanisme de la démonstration (qui sera reprise au §7) :

En éclatant  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  sur  $d^2$  points, on arrive à une surface  $X$  simplement connexe telle que  $b_2^+ = 1$ ,  $b_2^- = d^2$ . Sa forme d'intersection a le type  $(1, -1, \dots, -1)$  sur  $\mathbf{Z}$ . Soit  $H$  la classe d'homologie dans  $X$  d'une droite  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  qui évite les  $d^2$  points, et  $E_1, \dots, E_{d^2}$  les diviseurs exceptionnels ; notre attention se porte sur une surface réelle orientée connexe plongée  $\Sigma$  homologue à  $dH - E_1 - \dots - E_{d^2}$ . Alors  $\Sigma \cdot \Sigma = 0$ . La classe canonique  $K$  de  $X$ , opposée de la première classe de Chern  $c_1(X)$ , vaut  $(d-3)H - \Sigma$ . Le théorème à démontrer équivaut à  $g(\Sigma) \geq 1 + \frac{1}{2} K \cdot \Sigma$ .

Comme  $X$  est analytique complexe, elle possède une structure  $\text{spin}^c$  canonique, pour laquelle  $E_+ = \mathbf{1} \oplus K^{-1}$ ,  $E_- = T'(X)$  et  $c_1(L) = c_1(X)$  ; c'est celle-là que nous retenons.

Pour chaque métrique riemannienne  $g$  sur  $X$ , il existe une unique 2-forme harmonique auto-duale  $\omega_g$  dont la classe de cohomologie réelle  $[\omega_g]$  vérifie  $[\omega_g] \cdot [\omega_g] = 1$  et  $[\omega_g] \cdot H > 0$ . Le signe de  $[\omega_g] \cdot c_1(L)$  sera existentiel pour les monopôles. L'ensemble des métriques est découpé en régions par les murs d'équation  $[\omega_g] \cdot c_1 = 0$ . Dans chaque composante connexe par arc du complémentaire des murs (une région de "bonnes métriques"), il est possible de définir à nouveau des invariants de Seiberg-Witten. Celui qui va jouer un rôle maintenant est le nombre de points modulo 2 de  $\mathcal{M}$ . (Nous sommes dans le cas où  $\chi_+ = 0$ .)

## 1) (Une propriété d'annulation)

La première sorte de métrique considérée sur  $X$  est construite en réunissant les métriques standard de Fubini-Study sur  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  et sur les exemplaires de  $\overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$ , qui entourent les diviseurs exceptionnels, par de petits colliers d'âme  $S^3$ . Gromov et Lawson ([G.L.2]) ont montré que la courbure scalaire de ce genre de métriques est partout strictement positive ; il n'y a donc pas de monopôles de Seiberg-Witten pour elles (ni pour aucune métrique proche).

2) Pour ces métriques, si de plus les  $S^3$  ont de tout petits diamètres, la forme canonique auto-duale  $\omega$  possède une intégrale voisine de 1 sur  $H$  et voisine de 0 sur chaque cycle  $E_j$ . Donc  $c_1(L) \cdot \omega > 0$ .

3) Soit  $Y \approx \Sigma \times S^1$  le bord d'un voisinage tubulaire de la surface  $\Sigma$  dans  $X$  ;  $Y$  découpe  $X$  en deux pièces  $X_0, X_1$ . La deuxième sorte de métrique utile sur  $X$  réunit des métriques bornées sur  $X_0$  et  $X_1$  par un très long tube  $Y \times [-R, R]$ , produit d'une métrique bornée de  $Y$  par la métrique usuelle sur l'intervalle  $[-R, R]$  dans  $\mathbf{R}$ . Notons  $\omega(R)$  la forme canonique autoduale d'une telle métrique :

Si  $d > 3$ , pour  $R$  suffisamment grand, on a  $c_1(L) \cdot \omega(R) < 0$  (cf. §7).

## 4) (Le théorème d'existence)

Considérons un chemin  $C^\infty$  générique,  $g_t, t \in [0, 1]$  de métriques sur  $X$  et soit  $\omega_t$  le chemin de 2-formes canoniques associées ; supposons que la fonction  $c_1(L) \cdot \omega_t$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{R}$  change de signe une fois entre 0 et 1 ; alors, les nombres de Seiberg-Witten modulo 2 sur  $(X, g_0)$  et sur  $(X, g_1)$  sont différents.

(Génériquement, il n'y a qu'un monopôle réductible pour une métrique où  $c_1(L) \cdot \omega = 0$  ; elle correspond à une bifurcation centrale de  $\widetilde{\mathcal{M}}$ .)

Conséquence : pour une métrique du type  $X(R) = X_0 \cup (Y \times [-R, R]) \cup X_1$  avec  $R$  assez grand et si  $d > 3$ , il y a stablement des monopôles de Seiberg-Witten.

5) Quand  $R$  tend vers l'infini, d'une famille de solutions des équations de Seiberg-Witten sur les variétés allongées  $X(R)$ , il est possible de déduire une solution invariante par translation sur le produit compact  $Y \times [0, 1]$ . (Ici intervient une intégrale à la Chern-Simons.)

6) Un monopôle invariant par translation sur  $Y \times [0, 1]$  correspond à une solution des équations de Seiberg-Witten en dimension 3 :

Identifions  $Y$  à  $Y \times \{0\} \subset Y \times [0, 1]$  ; pour la métrique produit, le long de  $Y$ ,  $\Lambda_+^2(T^*(Y \times [0, 1]))$  et  $\Lambda_-^2(T^*(Y \times [0, 1]))$  s'identifient canoniquement à  $\Lambda^2(T^*(Y))$

(qui est naturellement isomorphe à  $T(Y)$ ) (avec un facteur conforme  $\sqrt{2}$ ) ;  $E_+$  et  $E_-$  s'identifient tous les deux à un fibré de spineurs hermitien  $E$  au-dessus de  $Y$ . ( $E$  est le produit tensoriel d'un fibré complexe de rang 2, qui relève à  $SU_2$  le groupe structural  $SO_3$  de  $T(Y)$ , avec un fibré en droites complexes dont le carré est la restriction de  $L$  à  $Y$ .)

Les équations de dimension 3 portent sur une connexion unitaire  $\vec{A}$  sur  $L$  et sur une section  $\Phi$  de  $E$  :

$$(SW_3) \quad D_{\vec{A}} \Phi = 0 \quad , \quad F_{\vec{A}} = \sigma(\Phi, \Phi).$$

La première est l'équation de Dirac stationnaire avec potentiel vecteur ; dans la seconde,  $F_{\vec{A}}$  est la courbure de  $\vec{A}$  et  $\sigma(\Phi, \Phi) = \bar{\Phi} \otimes \Phi - \frac{1}{2} |\Phi|^2$ .

Remarque ([E.F.]) : en descendant encore d'une dimension, on tombe sur des équations analogues à celles de Ginzburg-Landau en supraconductivité.

La conclusion utilise la précision des estimations *a priori* :

On peut supposer  $d > 3$  grâce à Kervaire et Milnor. Choisissons sur  $Y \approx \Sigma \times S^1$  la métrique produit d'une métrique de courbure constante  $2\pi \chi(\Sigma)$  sur  $\Sigma$  et de la métrique ordinaire sur le cercle  $S^1 \subset \mathbf{C}$  ; si bien que l'aire totale d'un  $\Sigma \times \{\theta\}$  vaut 1 et que la courbure scalaire en chaque point de  $Y$  égale  $4\pi \chi(\Sigma)$ . Soit  $(\vec{A}, \Phi)$  un monopôle pour cette métrique (et pour  $E$ ) ; on sait qu'il en existe au moins un d'après les étapes précédentes.

L'inégalité clef dit qu'en tout point :

$$\|\Phi\|^2 \leq -4\pi \chi(\Sigma).$$

Mais dans  $\Lambda^2(T^*(Y)) = su(E)$ , on a :

$$\|\sigma(\Phi, \Phi)\| = \frac{1}{2} \|\Phi\|^2,$$

donc la seconde équation de  $(SW_3)$  entraîne la majoration ponctuelle :

$$\|F_{\vec{A}}\| \leq 2\pi |\chi(\Sigma)|.$$

Par ailleurs, le nombre de Chern  $c_1(L) \cdot \Sigma$  est égal à  $\frac{i}{2\pi} \int_{\Sigma} F_{\vec{A}}$ . Donc :

$$|c_1(L) \cdot \Sigma| \leq |\chi(\Sigma)|.$$

C.Q.F.D.

## 2. STRUCTURE $\text{spin}^c$ , LA MÈRE

Pour le moment,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 3. Le groupe fondamental de  $GL_n^+$  (matrices réelles  $n \times n$  de déterminant  $> 0$ ) est  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  ; il agit sur le revêtement universel  $G_n = \widetilde{GL}_n^+$ . Le demi-tour donne une action de  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  sur  $S^1$ . Le groupe  $G_n^c$  est défini comme quotient de  $G_n \times S^1$  par l'action diagonale. C'est un revêtement non-trivial à deux feuillets de  $GL_n^+ \times S^1$ .

La cohomologie singulière de  $GL_n^+$  :  $H^0(GL_n^+; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ ,  $H^1(GL_n^+; \mathbf{Z}) = 0$ , mais  $H^1(GL_n^+; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  ;  $H^2(GL_n^+; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ , mais  $H^2(GL_n^+; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$  (cf. [Bo]).

$G_n^c \xrightarrow{\rho} GL_n^+$  est l'unique fibré en cercle non-trivial sur  $GL_n^+$ .

Les mêmes choses se font pour le compact maximal  $SO_n \subset GL_n^+$ , qui est un rétract par déformation, la construction de  $G_n$  donne  $\text{Spin}_n$  et celle de  $G_n^c$  le groupe  $\text{Spin}_n^c$ .

Soit  $P \xrightarrow{\xi} B$  un fibré principal (à droite) de groupe structural  $GL_n^+$  (ou  $SO_n$ ) ( $n \geq 3$ ) au-dessus d'une variété  $B$ .

**DÉFINITION.**— Une structure  $\text{spin}^c$  sur  $\xi$  est une paire  $(\eta, f)$  formée d'un fibré principal  $Q \xrightarrow{\eta} B$  en groupe  $G_n^c$  (resp.  $\text{Spin}_n^c$ ) et d'une application  $Q \xrightarrow{f} P$  telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 Q \times G_n^c & \longrightarrow & Q \\
 \downarrow f \times \rho & & \downarrow f \\
 P \times GL_n^+ & \longrightarrow & P
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \searrow \\
 \\
 \nearrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 B \\
 \\
 \end{array}
 \quad (\text{resp. } \dots)$$

(Les flèches horizontales sont les translations à droite.)

Une structure  $\text{spin}^c$ ,  $(\eta', f')$  sur  $\xi$  est équivalente à  $(\eta, f)$  s'il existe un  $G_n^c$ -isomorphisme  $g$  de  $Q'$  dans  $Q$  tel que  $f \circ g = f'$ .

Soit  $\xi$  un  $SO_n$ -fibré principal ; un peu d'oubli en fait un  $GL_n^+$ -fibré principal  $\xi'$ , et tout  $GL_n^+$ -fibré principal possède une réduction  $\xi$  à  $SO_n$  ; le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt fournit une bijection naturelle entre les classes d'équivalence de  $\text{spin}^c$ -structures sur  $\xi$  et sur  $\xi'$ , cf. Milnor [Mi1, Mi2]. En mettant  $G_n$  à la place de  $G_n^c$ , on obtient la définition de *structure spin* sur  $\xi$  ; en remplaçant  $GL_n^+$  par  $GL_n$  et  $G_n$  par le sous-groupe  $GL_n^+$  (et  $\rho$  par l'inclusion), on a la définition d'une orientation de  $\xi$ .

Suivant le modèle de Milnor, il y a la définition alternative :

Une classe d'équivalence de structure  $\text{spin}^c$  sur  $\xi$  est une classe de cohomologie dans  $H^2(P; \mathbf{Z})$  dont la restriction à chaque fibre est le générateur du groupe cyclique  $H^2(GL_n^+, \mathbf{Z})$ .

Une telle classe détermine une fibration en cercle  $Q \xrightarrow{f} P$  ; quel que soit  $x \in B$ , la condition de restriction à  $H^2(P_x; \mathbf{Z})$  garantit que  $Q_x \rightarrow P_x$  est isomorphe à  $\rho : G_n^c \rightarrow GL_n^+$ . La structure de  $G_n^c$ -fibré principal est construite par cocycle.

LEMME.— Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une structure  $\text{spin}^c$  sur  $\xi$  est l'annulation de la troisième classe de Stiefel-Whitney  $W_3(P) \in H^3(B; \mathbf{Z})$ . Et si  $W_3(P) = 0$ , l'ensemble des classes de structures  $\text{spin}^c$  sur  $\xi$  est un espace affine du groupe  $H^2(B; \mathbf{Z})$  : l'action est  $(\lambda, S) \mapsto \xi^*(\lambda) + S$ , pour  $\lambda \in H^2(B; \mathbf{Z})$ ,  $S \in H^2(P; \mathbf{Z})$ .

En effet, on peut supposer  $B$  connexe ; la suite spectrale de Leray-Serre de la fibration principale  $\xi$  à coefficients entiers fournit un isomorphisme  $H^1(B; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\xi^*} H^1(P; \mathbf{Z})$  et une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^2(B; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\xi^*} H^2(P; \mathbf{Z}) \xrightarrow{j^*} H^2(GL_n^+, \mathbf{Z}) \xrightarrow{d_3} H^3(B; \mathbf{Z}).$$

La troisième flèche est induite par l'injection de la fibre. Or l'image de  $d_3$  est engendrée par  $W_3(P)$  ([Bo]), d'où le résultat.

La définition analogue pour  $\text{spin}$  est une classe dans  $H^1(P, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$  qui se restreint au générateur de  $H^1(GL_n^+, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ . La même démonstration avec la suite spectrale modulo 2 et le  $d_2$ , cf. [Mi1], dit que l'existence d'une structure  $\text{spin}$  équivaut à  $W_2(P) = 0$  dans  $H^2(B, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ , et si  $W_2(P) = 0$ , l'ambiguïté est  $H^1(B, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ . (Si  $W_3(P) = 0$ , l'annulation de  $W_2(P)$  équivaut à  $H^2(P; \mathbf{Z}) \approx H^2(B; \mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .)

Dans le cas de l'orientation, partant de  $H^0(P, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ , on rencontre  $W_1(P)$  et l'ambiguïté  $H^0(B, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ .

La fonction  $(u, z) \mapsto z^2$  de  $G_n \times S^1$  dans  $S^1$  définit (par passage au quotient) un homomorphisme de  $G_n^c$  dans le cercle. Si bien qu'à toute structure  $\text{spin}^c$  sur un fibré  $P \xrightarrow{\xi} B$  est associé un fibré en cercle  $L \xrightarrow{\lambda} B$ , appelé fibré caractéristique.

LEMME.— La réduction modulo 2 de la première classe de Chern  $c_1(L) \in H^2(B; \mathbf{Z})$  est la classe  $W_2(P) \in H^2(B, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ .

La composée de  $G_n^c \rightarrow GL_n^+ \times S^1$  et de l'inclusion  $GL_n^+ \times S^1 \subset GL_{n+2}^+$  se remonte au revêtement à deux feuilletts  $G_{n+2} \rightarrow GL_{n+2}^+$ . Soit  $\xi : P \rightarrow B$  et  $(\eta : Q \rightarrow B$ ,

$f : Q \rightarrow P$ ) une structure  $\text{spin}^c$  sur  $\xi$ ,  $\lambda : L \rightarrow B$  son fibré caractéristique ; le fibré  $\xi \times \lambda$  s'étend en un  $GL_{n+2}^+$ -fibré principal  $\xi_1 : P_1 \rightarrow B$ . L'extension de  $\eta$  à  $G_{n+2}$  fournit une structure  $\text{spin}$  à  $\xi_1$ . Donc  $W_2(P_1) = 0$  ; mais  $W_2(P_1) = W_2(P) + W_2(L)$ .

La suite exacte des coefficients  $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  donne en cohomologie l'homomorphisme  $\beta : H^2(B, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow H^3(B; \mathbf{Z})$  (le dit Bockstein) et  $W_3 = \beta(W_2) + W_1 \cdot W_2$  (cf. [Mi.St.]). Ici  $W_1(P) = 0$ , donc  $W_3(P) = 0$  si et seulement si  $W_2(P)$  est réduction d'une classe entière.

Les groupes  $G_n$  et  $\text{Spin}_n$  sont (naturellement isomorphes à) des sous-groupes de  $G_n^c$  et  $\text{Spin}_n^c$ , donc toute structure  $\text{spin}$  sur un fibré principal  $\xi$  donne une structure  $\text{spin}^c$  sur  $\xi$  (association compatible avec le Bockstein  $H^1(B, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow H^2(B; \mathbf{Z})$ ). Les structures  $\text{spin}^c$  venant de  $\text{spin}$  sont celles qui ont un fibré caractéristique  $L$  trivial.

Quand  $B$  est simplement connexe,  $H^2(B; \mathbf{Z})$  est libre et les structures  $\text{spin}^c$  sont classées par les relèvements entiers de  $W_2(P)$ , et s'il y a une structure  $\text{spin}$ , elle est unique.

Comme dans [Mi2] pour  $\text{spin}$ , lorsque  $B$  est réunion de deux ouverts  $B_1, B_2$ , si  $\xi|_{B_1}$  et  $\xi|_{B_2}$  possèdent des structures  $\text{spin}^c$  équivalentes au-dessus de  $B_1 \cap B_2$ , il existe (au moins) une structure  $\text{spin}^c$  sur  $\xi$  équivalente aux données au-dessus de  $B_1, B_2$ .

La théorie s'étend joliment à  $n = 1$  et 2.

Si  $n = 1$ ,  $SO_1 = \{1\}$ ,  $\text{Spin}_1 = \{-1, 1\} \subset \text{Spin}_1^c = S^1$  (et  $GL_1^+ = \mathbf{R}^{+\times}$ ,  $G_1 = \mathbf{R}^\times \subset G_1^c = \mathbf{C}^\times$ ,  $\rho(z) = |z|$  de  $G_1^c$  dans  $GL_1^+$ ). On peut recopier la définition initiale de structure  $\text{spin}^c$  et de structure  $\text{spin}$ . Dans ce cas,  $\xi = Id_B$  ; la théorie  $\text{spin}$  est celle des revêtements à deux feuilletts quelconques de  $B$  ; ils sont classés par les éléments de  $H^1(B, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ . Et la théorie  $\text{spin}^c$  est celle des fibrations en cercle orientées (ou des fibrés en plans orientés), classés par les éléments de  $H^2(B, \mathbf{Z})$ .

Pour  $n = 2$ , identifions  $SO_2$  à  $S^1 \subset \mathbf{C}$  ;  $\text{Spin}_2$  est l'unique revêtement double non-trivial  $z \mapsto z^2$  de  $S^1$  dans  $S^1$ .  $\text{Spin}_2^c$  est le produit de deux cercles  $S^1 \times S^1$ , l'application  $\rho : \text{Spin}_2^c \rightarrow SO_2$  est  $(z, w) \mapsto z\bar{w}$ , son sous-groupe  $\text{Spin}_2$  est donné par  $z = \bar{w}$ . L'application caractéristique  $\text{Spin}_2^c \rightarrow S^1$  est donc  $(z, w) \rightarrow zw$ .

Une structure  $\text{spin}^c$  sur un fibré en cercle  $P \xrightarrow{\xi} B$  équivaut à la donnée de deux fibrés en cercle  $\alpha, \beta$  au-dessus de  $B$  dont les classes d'Euler dans  $H^2(B, \mathbf{Z})$  vérifient  $e(\alpha) - e(\beta) = e(\xi)$  (l'action libre et transitive de  $H^2(B, \mathbf{Z})$  étant  $\gamma \mapsto (\alpha \otimes \gamma, \beta \otimes \gamma^*)$ ). Le fibré caractéristique  $L$  correspond à  $e(\alpha) + e(\beta)$  ; on voit que  $e(L) \equiv e(\xi) \pmod{2}$ .

Une structure  $\text{spin}$  sur  $\xi$  sera un revêtement double de  $P$ , non-trivial au-dessus de chaque fibre de  $\xi$ . La structure  $\text{spin}^c$  associée doit vérifier  $\beta = \alpha^*$  ;  $\alpha$  est une racine de  $\xi$ .

Les revêtements doubles de  $SO_2 \times S^1$  forment le groupe  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ,  $Spin_2^c$  correspond à l'élément diagonal (1, 1) (Abel-Jacobi). Une structure  $spin^c$  donne un fibré principal en tores  $T^2$  sur  $B$  : c'est le  $\eta : Q \rightarrow B$ .

D'après la suite de Gysin :  $H^0(B, \mathbf{Z}) \xrightarrow{e(\xi)} H^2(B, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\xi^*} H^2(P, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\tau} H^1(B, \mathbf{Z})$ , les deux fibrés  $\alpha, \beta$  donnent le même élément de  $H^2(P, \mathbf{Z})$  ; c'est le  $f : Q \rightarrow P$  ; il ne suffit plus à déterminer la structure.

*Exercice* : étant données des structures  $spin^c$  (resp.  $spin$ ) sur deux des trois fibrés  $\xi_1, \xi_2, \xi_1 \times \xi_2$  au-dessus de  $B$ , quand est-ce qu'il y a une unique structure  $spin^c$  (resp.  $spin$ ) compatible sur le troisième (cf. [Mi2] pour  $spin$ ) ?

**DÉFINITION.**— *Une variété  $spin^c$  (resp.  $spin$ ) est une variété orientée munie d'une classe de structure  $spin^c$  (resp.  $spin$ ) du fibré des repères tangents directs.*

Pour chaque métrique riemannienne sur une variété  $spin^c$  (ou  $spin$ ), on obtient une structure  $spin^c$  (ou  $spin$ ) sur le fibré des repères orthonormés directs.

Une variété connexe compacte orientée  $\Sigma$  de dimension 2 possède toujours au moins une structure  $spin$ , puisque sa classe d'Euler est paire ( $2 - 2g$  ou 0) ; c'est une racine du fibré tangent orienté. Elle possède aussi une structure  $spin^c$  canonique :  $\alpha$  est le tangent,  $\beta$  le fibré trivial. Les autres structures  $spin^c$  s'en déduisent en tordant par les éléments de  $H^2(\Sigma; \mathbf{Z})$  ( $= \mathbf{Z}$  ou 0).

En dimension 3,  $Spin_3^c = U_2$  et  $Spin_3 = SU_2$ . Une structure  $spin$  identifie chaque espace tangent à l'espace de la représentation adjointe d'un groupe spécial unitaire.

**THÉORÈME** (Stiefel).— *Toute variété de dimension 3 compacte et orientée possède une structure  $spin$ .*

Voir [Mi.St.] ; en fait, toute  $M^3$  orientable est parallélisable.

**THÉORÈME** (Whitney).— *Toute variété de dimension 4 compacte et orientée possède une structure  $spin^c$ .*

Indiquons la raison de  $W_3(X) = 0$  selon [Hi.Ho.] (voir aussi [Wh], [E.F]).

Puisqu'en doublant une variété compacte orientée à bord, on obtient une variété orientée fermée, on va supposer  $X$  fermée. On peut aussi la supposer connexe.

Tout élément  $C$  de  $H_2(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$  se représente par une surface connexe non-orientable, donc par la réunion d'une surface orientable à bord et d'une bande de Möbius. L'âme  $A$  de cette bande est un cycle de degré 1 dans  $X$  dont le double vaut 0 dans  $H_1(X, \mathbf{Z})$ . (En particulier,  $A$  est homologue à  $-A$  et l'orientation de  $A$  importe peu.) C'est ainsi qu'on peut définir l'homomorphisme de Bockstein en

homologie  $\beta : H_2(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow H_1(X, \mathbf{Z})$ . Le noyau de  $\beta$  est l'image de  $H_2(X, \mathbf{Z})$  par la réduction modulo 2 et l'image de  $\beta$  est l'ensemble des éléments d'ordre 2 de  $H_1(X, \mathbf{Z})$  (cf. [Wh]). Si  $C$  ne provient pas de  $H_2(X, \mathbf{Z})$ ,  $A$  n'est pas homologue à 0. La dualité de Poincaré-Whitney dit que la forme d'enlacement sur la torsion de l'homologie est non-dégénérée à valeurs dans  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  (cf. [Wh]) ; il existe donc une surface orientée  $B$  (singulière) dans  $X$ , d'ordre 2 dans  $H_2(X, \mathbf{Z})$ , disjointe de  $A$ , qui enlace  $A$  un nombre impair de fois. L'intersection de  $B$  avec  $C$  vaut 1 modulo 2. Or d'après Wu ([Mi.St.]), la classe duale de  $W_2(X)$  dans  $H_2(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$  est telle que l'intersection modulo 2,  $W_2 \cdot B$  soit égale à  $B \cdot B$  pour toutes les surfaces fermées  $B$ , orientables ou non. Mais, lorsque  $B$  est orientée et d'ordre 2 dans  $H_2(X, \mathbf{Z})$ , son auto-intersection à valeur dans  $\mathbf{Z}$  est nulle, donc  $W_2 \cdot B$  est pair. En faisant  $C = W_2(X)$ , on voit que  $W_2(X)$  provient d'une classe entière. C.Q.F.D.

### 3. L'ALGÈBRE DE CLIFFORD ET LA PUISSANCE EXTÉRIEURE

$V$  est un espace vectoriel réel euclidien de dimension  $n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . L'algèbre de Clifford  $C(V)$  est le quotient de l'algèbre tensorielle  $T(V) = \mathbf{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \dots$  par les relations,  $\forall x \in V, x \otimes x + (x | x)1 = 0$ . En tant qu'espace vectoriel, avec action du groupe orthogonal  $O(V)$ ,  $C(V)$  est canoniquement isomorphe à l'algèbre extérieure  $\Lambda(V) : x \in V$  va sur  $x, x \wedge y$  sur  $\frac{1}{2}(xy - yx), x \wedge y \wedge z$  sur  $\frac{1}{6}(xyz + yzx + zxy - yxz - xzy - zyx)$  et cetera. La parité du degré des tenseurs donne une graduation d'algèbre  $C = C^{(0)} \oplus C^{(1)}$  compatible avec la décomposition  $\Lambda = \Lambda^{(0)} \oplus \Lambda^{(1)}$  en multi-vecteurs pairs et impairs.

Si  $n = 1$ ,  $C$  est isomorphe à  $\mathbf{C}$  ; pour  $n = 2$ , on trouve le corps des quaternions  $\mathbf{H}$ ,  $n = 3$  le produit direct  $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ ,  $n = 4$  l'algèbre des matrices  $2 \times 2$  sur  $\mathbf{H}$ ...

Soit  $C_{(\mathbf{C})}(V)$  l'algèbre complexifiée  $C(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$  ; pour  $n$  pair,  $n = 2m$ ,  $C_{(\mathbf{C})}$  est isomorphe à l'algèbre des matrices  $2^m \times 2^m$  sur  $\mathbf{C}$ ,  $M_{2^m}(\mathbf{C})$ , et la sous-algèbre  $C_{(\mathbf{C})}^{(0)}$  au produit direct  $M_{2^{m-1}}(\mathbf{C}) \times M_{2^{m-1}}(\mathbf{C})$  ; pour  $n$  impair,  $n = 2m + 1$ ,  $C_{(\mathbf{C})}$  est isomorphe au produit  $M_{2^m}(\mathbf{C}) \times M_{2^m}(\mathbf{C})$  et  $C_{(\mathbf{C})}^{(0)}$  à  $M_{2^m}(\mathbf{C})$ . (Voir [Bbk], [A.B.S.], [A], [C].)

L'antipodie de  $V, x \mapsto -x$ , se prolonge en un unique anti-automorphisme anti- $\mathbf{C}$ -linéaire,  $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ , de l'algèbre  $C_{(\mathbf{C})}$ . Par exemple, pour  $x, y, z \in V, \overline{xy} = yx, \overline{ixy} = -iyx, \overline{xyz} = -zyx, \dots$

Le groupe  $\text{spin}^c, \text{Spin}^c(V)$ , est le groupe des éléments inversibles  $\alpha$  de la partie paire  $C_{(\mathbf{C})}^{(0)}(V)$  satisfaisant à  $\alpha\bar{\alpha} = 1$  et  $\forall x \in V, \alpha x \alpha^{-1} \in V$ .

Le sous-groupe  $Spin(V)$  est l'intersection avec la partie réelle  $C^{(0)}(V)$  de  $C_{(\mathbf{C})}^{(0)}(V)$ . Le quotient  $Spin^c(V)/Spin(V)$  s'identifie à  $S^1$ .

Pour tout  $\alpha \in Spin^c(V)$ , l'application  $x \mapsto \alpha x \alpha^{-1}$  appartient à  $SO(V)$  ; on la désigne par  $\rho(\alpha)$ .

Avec  $V = \mathbf{R}^n$ , on retrouve les groupes  $SO_n$ ,  $Spin_n$ ,  $Spin_n^c$ .

Lorsque  $n$  est impair,  $n = 2m + 1$ ,  $C_{(\mathbf{C})}^{(0)}$  n'a qu'un module simple  $E$  ; il est de dimension  $2^m$ .

Lorsque  $n$  est pair,  $n = 2m$ ,  $C_{(\mathbf{C})}^{(0)}$  possède deux représentations irréductibles (de dimension  $2^{m-1}$ ) non isomorphes ; pour les distinguer, il faut choisir une orientation sur  $V$  :

Soit  $e_1, \dots, e_n$  une base orthonormée directe de  $V$ , l'élément  $\gamma_5 = i^m e_1 \cdots e_n$  de  $C_{(\mathbf{C})}$  est dans le centre de  $C_{(\mathbf{C})}^{(0)}$  mais pas dans le centre de  $C_{(\mathbf{C})}$ . Son carré vaut 1. Un changement d'orientation change  $\gamma_5$  en  $-\gamma_5$ .

L'orientation de  $V$ , avec la métrique euclidienne, donne aussi un opérateur  $*$  de Hodge de  $\Lambda(V)$  dans  $\Lambda(V)$  :  $\alpha \wedge * \beta = (\alpha | \beta) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ . L'identification de  $\Lambda(V)$  avec  $C(V)$  est telle que sur les  $p$ -vecteurs  $\alpha$  :

$$\gamma_5 \cdot \alpha = i^{m+p(p-1)} * \alpha.$$

(cf. [A]).

Soit  $E$  l'unique module simple de  $C_{(\mathbf{C})}$  ; la tradition pose  $E_+ = \frac{1+\gamma_5}{2} E$ ,  $E_- = \frac{1-\gamma_5}{2} E$ . Leurs éléments s'appellent *spineurs* positifs (resp. négatifs). (Parfois on dit semi-spineurs.)

Il existe une structure hermitienne définie positive sur  $E$ , unique à un scalaire près (dans  $\mathbf{R}_+^\times$ ), telle que  $\forall \varphi, \psi \in E$ ,  $\alpha \in C_{(\mathbf{C})}$ ,  $\langle \alpha(\varphi), \psi \rangle = \langle \varphi, \bar{\alpha}(\psi) \rangle$ . Elle rend  $E_+$  et  $E_-$  orthogonaux. La représentation de  $Spin_n^c$  dans  $E$  est unitaire.

L'espace  $E$  n'est défini qu'à isomorphisme (presque unique) près, mais l'espace projectif associé  $\mathbf{P}(E)$  et la paire de sous-espaces enlacés  $\mathbf{P}(E_+)$ ,  $\mathbf{P}(E_-)$  sont canoniquement définis par  $V$ .  $\mathbf{P}(E)$  est l'ensemble des idéaux minimaux à droite de  $C_{(\mathbf{C})}(V)$  ; le groupe  $O(V)$  y agit projectivement, le sous-groupe  $SO(V)$  respecte  $\mathbf{P}(E_+)$  et  $\mathbf{P}(E_-)$ . Il faut passer au revêtement  $Spin(V)$  pour avoir une action linéaire.

Quand  $n$  est un nombre pair, une structure complexe sur  $V$  avec une forme hermitienne relevant le produit scalaire de  $\mathbf{R}$  à  $\mathbf{C}$  donne un modèle privilégié de l'espace des spineurs :

$E$  est l'algèbre extérieure de  $V$  en tant qu'espace vectoriel sur  $\mathbf{C}$ , graduée modulo 2 par la parité du degré des multi-vecteurs,  $E = E_+ \oplus E_-$ . La forme sur  $V$  fait de  $E$  un espace de Hilbert et  $E_- = E_+^\perp$ .

Soit  $x \in V$  ; la multiplication extérieure  $e(x)(\varphi) = x \wedge \varphi$  est un endomorphisme de  $E$  qui échange  $E_+$  et  $E_-$  ; il en va de même de l'adjointe  $e(x)^*$ . L'endomorphisme  $\gamma(x) = e(x) - e(x)^*$  vérifie  $\gamma(x) \circ \gamma(x) = -(x|x)1$ . Donc  $\gamma$  s'étend en un unique morphisme d'algèbres  $C(V) \rightarrow \text{End}_{\mathbf{C}}(E)$ . La représentation qu'on déduit de  $C_{(\mathbf{C})}^0$  est la représentation spinorielle ; elle se casse bien suivant  $E_+, E_-$  ; elle est unitaire.

Lorsque  $n$  est impair,  $n = 2m + 1$ ,  $V$  est hyperplan réel d'un espace de Hilbert complexe  $F$  de dimension  $m + 1$  sur  $\mathbf{C}$  ;  $C(V)$  s'injecte dans  $C(F)$ ,  $C^{(0)}(V)$  dans  $C^{(0)}(F)$ . Appliquons la construction précédente à  $F$ . La multiplication de Clifford par la normale unité  $e_0$  à  $V$  dans  $F$  échange  $E_+$  et  $E_-$  ; elle commute avec l'action de  $C_{(\mathbf{C})}^{(0)}(V)$ . Les deux représentations  $E_+, E_-$  de  $C_{(\mathbf{C})}^{(0)}(V)$  sont isomorphes à la représentation spinorielle (cf. [C]).

#### 4. LES FRÈRES $\text{SPIN}^c$ EN DIMENSION 4

La leçon de Penrose : pour notre espace-temps, les spineurs et les twisteurs sont plus fondamentaux que les vecteurs et les tenseurs, cf. [P.R.], [A.H.S.] et [C]. Nous allons adapter la leçon pour construire un monde euclidien de dimension 4 en partant d'une paire d'espaces de spineurs.

A) Commençons avec l'algèbre linéaire, en reprenant au début :

$E_+$  et  $E_-$  sont deux espaces vectoriels sur  $\mathbf{C}$  de dimension 2. Soit  $W$  l'espace  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(E_-, E_+)$  ; pour disposer d'une forme quadratique à valeurs complexes sur  $W$ , donnons-nous un isomorphisme  $\lambda$  de  $\Lambda^2(E_-)$  sur  $\Lambda^2(E_+)$  (i.e. juste un vecteur  $\neq 0$  dans la droite complexe  $\text{Hom}(\Lambda^2(E_-), \Lambda^2(E_+))$ ). Si  $x : E_- \rightarrow E_+$  est linéaire, l'application  $\Lambda^2(x) : \Lambda^2(E_-) \rightarrow \Lambda^2(E_+)$  s'écrit  $Q(x)\lambda$ . La fonction  $Q : W \rightarrow \mathbf{C}$  est une forme quadratique inversible (le  $\lambda$ -déterminant). Grâce à  $\lambda$ , on peut aussi associer à tout élément  $x$  de  $W$  un  $(\lambda)$ -adjoint  $x' \in \text{Hom}(E_+, E_-)$  ; c'est l'unique morphisme tel que, pour tout  $\varphi \in E_+$  et tout  $\psi \in E_-$  :

$$\lambda(x'(\varphi) \wedge \psi) = x(\psi) \wedge \varphi.$$

Si l'on choisit une base  $(\varphi_1, \varphi_2)$  de  $E_+$  et une base  $(\psi_1, \psi_2)$  de  $E_-$  en prenant soin d'avoir  $\lambda(\psi_1 \wedge \psi_2) = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ ,  $x$  est représenté par une matrice  $2 \times 2$  complexe

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ; on a  $Q(x) = ad - bc$  et  $x' = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ , l'opposée de la transposée de la matrice des cofacteurs. Donc  $x'x = -Q(x)1_{E_-}$ ,  $xx' = -Q(x)1_{E_+}$ .

Réunissons les frères dans l'ordre  $E = E_- \times E_+$ , et à tout  $x \in W$ , associons l'élément

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} 0 & x' \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

de  $\text{End}(E)$ . On a  $\forall x, \gamma(x)\gamma(x) = -Q(x)1_E$ .

L'antisymétrisation  $\frac{1}{2}(\gamma(x)\gamma(y) - \gamma(y)\gamma(x))$ ,  $\frac{1}{6}(\gamma(x)\gamma(y)\gamma(z) + \dots)$ ,  $\frac{1}{24}(\gamma(x)\gamma(y)\gamma(z)\gamma(t) + \dots)$ , définit un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $\Lambda(W)$  sur  $\text{End}(E)$ , que nous appellerons aussi  $\gamma$ . On constate que  $\Lambda^1 = W$  va sur l'ensemble des morphismes auto- $(\lambda)$ -adjoints échangeant  $E_+$  et  $E_-$  (par définition), que  $\Lambda^2$  va sur l'ensemble des morphismes préservant séparément  $E_+$  et  $E_-$  à traces nulles sur  $E_+$  et sur  $E_-$  (c'est-à-dire  $\text{sl}(E_-) \times \text{sl}(E_+)$ ),  $\Lambda^3$  sur les morphismes anti-auto- $(\lambda)$ -adjoints échangeant  $E_+, E_-$  (i.e. les éléments  $\begin{pmatrix} 0 & -x' \\ x & 0 \end{pmatrix}$ ),  $\Lambda^4$  sur les multiples de  $(-1_{E_-}, 1_{E_+})$ , et bien sûr  $\Lambda^0$  sur les multiples de  $(1_{E_-}, 1_{E_+})$ .

La version complexe de l'\* de Hodge en résulte : on choisit comme unité de volume dans  $\Lambda^4(W)$  le vecteur  $(1_{E_-}, -1_{E_+})$  (pour que  $\gamma_5 = i^2 e_1 e_2 e_3 e_4$  soit  $(-1_{E_-}, 1_{E_+})$ ). Les sous-espaces  $\Lambda_+^2$  et  $\Lambda_-^2$  de  $\Lambda^2$  associés aux valeurs propres  $+1$  et  $-1$  correspondent bien à  $\text{sl}(E_+)$  et  $\text{sl}(E_-)$ .

*Remarque.*— Supposons qu'on choisisse un isomorphisme  $\tau$  de  $E_-$  avec  $\overline{E}_+$  (le même espace vectoriel réel que  $E_+$ , mais avec la structure complexe  $z \cdot \varphi = \overline{z}\varphi$ ), en exigeant que l'isomorphisme qui s'en déduit via  $\lambda$  entre  $\Lambda^2(E_+)$  et  $\Lambda^2(\overline{E}_+)$  soit de module 1. On peut alors identifier  $E_-$  à  $\overline{E}_+$  et, pour chaque application linéaire  $x$  de  $\overline{E}_+$  dans  $E_+$ , définir une application conjuguée  $\overline{x}$  de  $E_+$  dans  $\overline{E}_+$  (si  $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$  est le nom antilinéaire de l'identité de  $E_+$ , on a  $\overline{x}(\varphi) = \overline{x(\overline{\varphi})}$ ). L'espace vectoriel réel  $M$  des  $x \in W$  satisfaisant à  $\overline{x} = x'$ , muni de la forme quadratique  $Q$ , est lorentzien de signature  $(1, 3)$ . (Et  $iM$  est lorentzien de signature  $(3, 1)$ .)

Que faire pour avoir une structure réelle sur  $W$  et retrouver l'espace euclidien de dimension 4 réel ? LE PÈRE.

Installons sur  $E_+$  et  $E_-$  des structures hilbertiennes telles que  $\lambda : \Lambda^2(E_-) \rightarrow \Lambda^2(E_+)$  soit de norme 1. L'espace somme  $E$  hérite d'une métrique hermitienne. Prenons pour  $V$  l'espace des  $x \in W$  dont l'image  $\gamma(x)$  dans  $\text{End}(E)$  est anti-hermitienne.

Concrètement,  $x \in \text{Hom}(E_-, E_+)$  appartient à  $V$  quand :

$$x^* = -x'.$$

La forme  $Q$  restreinte à  $V$  est réelle définie positive ;  $W$  s'identifie à  $V_{(\mathbf{C})} = V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ ,  $iV$  est l'espace des éléments hermitiens :  $x' = x^*$ .

Le sous-espace vectoriel  $V$  de  $W$  est défini par le système d'équations quadratiques

$$x x^* = Q(x) 1.$$

En choisissant des bases unitaires  $(\varphi_1, \varphi_2)$  de  $E_+$ ,  $(\psi_1, \psi_2)$  de  $E_-$  adaptées à  $\lambda$ , les éléments réels (*i.e.* dans  $V$ ) s'écrivent  $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ . Ce sont les quaternions de Hamilton, plongés dans l'algèbre des matrices  $2 \times 2$  sur  $\mathbf{C}$ .

Le repère orthonormé direct  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  de  $V$  naturellement associé au repère  $\text{spin}^c$   $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$  est offert par les matrices de Pauli multipliées par  $i$  :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Avec les notations des livres de physique,  $u_1 = i\sigma_x$ ,  $u_2 = i\sigma_y$ ,  $u_3 = i\sigma_z$ ,  $u_4 = 1$ . Le hamiltonien d'un spineur à deux composantes de  $\mathbf{R}^3$  dans un champ magnétique constant s'écrit  $H = Eu_4 + i\mu \vec{B} \cdot \vec{u}$ , cf. [F], [Di].)

Le sous-espace réel  $\Lambda_+^2(V)$  de  $\Lambda_+^2(W)$  s'identifie à l'ensemble  $su(E_+)$  des endomorphismes anti-hermitiens de trace nulle de  $E_+$ . La base associée au repère  $\text{spin}^c$   $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$  s'écrit bien avec les matrices  $u$  :

$$\begin{aligned} \omega_1^+ &= e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_4 = -2u_1 \\ \omega_2^+ &= e_3 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_4 = -2u_2 \\ \omega_3^+ &= e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 = -2u_3. \end{aligned}$$

De même,  $\Lambda_-^2(V)$  s'identifie à  $su(E_-)$ , la base associée à  $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$  étant :

$$\begin{aligned} \omega_1^- &= e_3 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_4 = 2u_1 \\ \omega_2^- &= e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4 = 2u_2 \\ \omega_3^- &= e_2 \wedge e_1 + e_3 \wedge e_4 = 2u_3. \end{aligned}$$

Ces identifications dilatent les longueurs de  $\sqrt{2}$  si l'on met sur  $\Lambda^2$  la métrique usuelle et sur  $su_2(\mathbf{C})$  la métrique  $\text{Det}(u) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(u^2)$ . Par exemple, dans  $\Lambda^2$ ,  $\|\omega_3^+\| = \sqrt{2}$ , dans  $su_2$ ,  $\|2u_3\| = 2$ .

L'espace vectoriel  $\bar{E}_+ \otimes E_+$  est canoniquement isomorphe à  $\text{End}(E_+)$  : si  $\tau \in E_+$ ,  $(\psi \otimes \varphi)(\tau) = \langle \psi, \tau \rangle \varphi$ . En prenant la partie sans trace, on définit donc une application bilinéaire sur  $\mathbf{C}$ ,  $\sigma : \bar{E}_+ \times E_+ \rightarrow \Lambda_+^2(W)$  :

$$\gamma(\sigma(\psi, \varphi))(\tau) = \langle \psi, \tau \rangle \varphi - \frac{1}{2} \langle \psi, \varphi \rangle \tau.$$

La forme quadratique réelle associée prend ses valeurs dans  $i\Lambda_+^2(V)$ , identifié aux éléments hermitiens à trace nulle de  $\text{End}(E_+)$ , c'est-à-dire  $isu(E_+)$ .

En revenant à la base  $\text{spin}^c$ , si  $\varphi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$ ,  $\psi = b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2$ , la matrice de  $\sigma(\psi, \varphi)$  est  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} (\bar{b}_1 \bar{b}_2) - \frac{1}{2} (\bar{b}_1 \bar{b}_2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ , ce qui donne :

$$\sigma(\psi, \varphi) = \frac{i}{4} \left[ (a_1 \bar{b}_2 + a_2 \bar{b}_1) \omega_1^+ + i(a_1 \bar{b}_2 - a_2 \bar{b}_1) \omega_2^+ + (a_1 \bar{b}_1 - a_2 \bar{b}_2) \omega_3^+ \right].$$

(On reconnaît les formules de Cartan [C], p. 50, pour le bivecteur associé à deux spineurs conjugués de  $\mathbf{R}^3$ .)

On a  $\forall \varphi \in E_+$ ,  $\sigma(\varphi, \varphi) \cdot \varphi = \frac{1}{2} \|\varphi\|^2 \varphi$ , donc :

$$\forall \varphi \in E_+, \quad \langle \sigma(\varphi, \varphi) \cdot \varphi, \varphi \rangle = \frac{1}{2} \|\varphi\|^4.$$

L'algèbre de Clifford complexifiée  $C_{(\mathbf{C})}(V)$  s'identifie à  $\text{End}_{\mathbf{C}}(E)$ . Le groupe  $\text{Spin}(V)$  s'identifie ainsi à  $SU(E_-) \times SU(E_+)$  ; il relève l'action de  $SO(V)$  sur  $\Lambda_-^2 \times \Lambda_+^2$  ; on a  $\text{Spin}_4 = SU_2 \times SU_2$ . Le groupe  $\text{Spin}^c(V)$  est le sous-groupe de  $U(E_-) \times U(E_+)$  formé par les couples de transformations qui ont le même déterminant. On retrouve  $\text{Spin}_4^c = (SU_2 \times SU_2 \times S^1)/(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ .

Partant de deux plans  $E_+$ ,  $E_-$  liés par  $\lambda : \Lambda^2(E_-) \xrightarrow{\cong} \Lambda^2(E_+)$ , en passant par  $V$ , on aboutit à deux espaces euclidiens réels de dimension 3,  $\Lambda_+^2(V)$ ,  $\Lambda_-^2(V)$  canoniquement isomorphes à  $su(E_+)$ ,  $su(E_-)$  (avec des longueurs contractées par  $\sqrt{2}$ ).

Et si l'on voulait construire notre espace euclidien de dimension 3 à partir de rien ?

On se donnerait un seul plan complexe, disons  $D$ , muni d'un produit hermitien défini positif ; l'espace imaginaire serait  $sl(D)$ , le sous-espace réel serait  $su(D)$ , ( $\alpha = -\alpha^*$ ,  $\text{Tr}(\alpha) = 0$ ) ; la métrique étant le déterminant. C'est ainsi que  $Spin_3$  s'identifie à  $SU_2$  et  $Spin_3^c$  à  $U_2 = SU_2 \times_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} S^1$ .

Soient  $D_+$  et  $D_-$  des espaces de spineurs (à deux dimensions complexes) pour  $\Lambda_+^2(V)$  et  $\Lambda_-^2(V)$  ; Schur affirme l'existence d'isométries  $f_{\pm} : E_{\pm} \rightarrow D_{\pm}$ , chacune définie à une phase près dans  $S^1$ . Si l'on se donne en plus un isomorphisme unitaire  $\kappa : \Lambda^2(D_-) \rightarrow \Lambda^2(D_+)$ , la compatibilité avec  $\lambda$  diminue l'ambiguïté de phase : changer  $f_+$  en  $e^{i\alpha} f_+$  force à changer  $f_-$  en  $e^{-i\alpha} f_-$  ou  $-e^{-i\alpha} f_-$ . Si bien que l'isomorphisme  $\text{Hom}(D_-, D_+) \rightarrow \text{Hom}(E_-, E_+) = V_{(\mathbf{C})}$  est déterminé à  $\{\pm 1\}$  près. Ce  $\{\pm 1\}$  est le centre de  $SO(V)$ .

En termes de groupes,  $\Lambda^2(\mathbf{R}^4)$  est la représentation adjointe de  $SO_4$ , la décomposition par  $*$  en  $\Lambda_+^2 \oplus \Lambda_-^2$  exhibe le revêtement double  $SO_4 \rightarrow SO_3 \times SO_3$ . Un choix  $\{D_-, D_+\}$  correspond au morphisme  $U_2 \times U_2 \rightarrow SO_3 \times SO_3$ , et la donnée de  $\kappa$  restreint à  $Spin_4^c$  ; la reconstruction de  $SO_4$  vient du losange commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 & U_2 \times U_2 & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 Spin_4^c & & SO_3 \times SO_3. \\
 \searrow & & \nearrow \\
 & SO_4 &
 \end{array}$$

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  des éléments de  $\Lambda_+^2(W)$  et  $\Lambda_-^2(W)$  ; la représentation de Clifford  $\gamma$  permet de les considérer comme des endomorphismes (sans trace) de  $E_+$  et  $E_-$ . Soit

$$u(\alpha, \beta) = -{}^t\beta \otimes 1_{E_+} + 1_{\bar{E}_-} \otimes \alpha$$

l'endomorphisme de  $W$  associé. ( $W$  s'identifie à  $E_-^* \otimes E_+$  et  $E_-^*$  à  $\bar{E}_-$ .)

LEMME DU  $\Lambda^2$ .— Pour la métrique  $Q$ ,  $u(\alpha, \beta)$  est antisymétrique et le bivecteur associé dans  $\Lambda^2(W)$  est  $2\alpha + 2\beta$ . En particulier, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont réels,  $u$  l'est aussi.

En tant que représentations du groupe  $SO_4$ ,  $\Lambda_+^2$  et  $\Lambda_-^2$  sont irréductibles et non-isomorphes (leurs caractères sont  $\delta_+ = z_1 z_2 + z_1^{-1} z_2^{-1} + 1$ ,  $\delta_- = z_1 z_2^{-1} + z_1^{-1} z_2 + 1$ ). En tant que représentation de  $SO_4$ , l'espace  $\text{End}(\mathbf{R}^4) = \mathbf{R}^4 \otimes \mathbf{R}^4$  se décompose en  $\mathbf{R} \oplus S_{(0)}^2 \oplus \Lambda_+^2 \oplus \Lambda_-^2$ , trace, symétrique sans trace, antisymétriques. D'après l'équivariance et Schur, il existe donc des constantes universelles  $a, b \in \mathbf{R}$ , telles que pour tout  $(\alpha, \beta)$ ,  $u(\alpha, \beta) = a\alpha + b\beta$ . On teste dans une base  $spin^c$  sur  $\alpha = \omega_1^+$ ,  $\beta = \omega_1^-$  ; on trouve  $a = b = 2$ .

Le facteur 2 ici et le  $\sqrt{2}$  là-bas se compensent heureusement :

Soit  $\text{Pf}(u)$  le pfaffien de  $u$  (cf. [Bbk], [Mi.St.]) ; vus comme endomorphismes,  $\alpha$  et  $\beta$  ont des déterminants (la métrique naturelle sur  $su_2$ ).

**COROLLAIRE.**—  $\text{Pf}(u) = \text{Det}(\alpha) - \text{Det}(\beta)$ .

Dans une base  $\text{spin}^c$ ,  $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ , si  $\alpha = A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3$ ,  $\beta = B_1 u_1 + B_2 u_2 + B_3 u_3$  et que  $u$  est représenté par la matrice  $(u_{ab})_{1 \leq a, b \leq 4}$  dans la base des  $e_a$  :

$$u_{12} u_{34} - u_{13} u_{24} + u_{14} u_{23} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - B_1^2 - B_2^2 - B_3^2.$$

Si l'on ajoute à  $\alpha \in \text{End}(E_+)$  et  $\beta \in \text{End}(E_-)$  des homothéties  $A_4 1_{E_+}$  et  $B_4 1_{E_-}$ ,  $A_4, B_4 \in \mathbf{C}$ , l'homothétie  $(A_4 - B_4) 1_W$  s'ajoute à  $u(\alpha, \beta)$  dans  $\text{End}(W)$ . La condition pour rester dans  $\Lambda^2$  est donc  $A_4 = B_4$ .

La métrique déterminant sur  $u(E_\pm) = i\mathbf{R} \oplus su(E_\pm)$  est lorentzienne de signature  $(3, 1)$ .

Si  $A_4 = B_4$ , on a encore  $\text{Pf}(u) = \text{Det}(\alpha + A_4) - \text{Det}(\beta + B_4)$ .

B) À présent, la géométrie différentielle des  $\text{spin}^c$  :

Soit  $X$  une variété de dimension 4. Donnons-nous deux fibrés vectoriels complexes de rang 2,  $E_+$  et  $E_-$  au-dessus de  $X$  ; supposons-les rattachés par un isomorphisme  $\lambda$  de  $\Lambda^2(E_-)$  dans  $\Lambda^2(E_+)$ , et munissons-les de structures hilbertiennes de telle sorte que  $\lambda$  soit unitaire. Alors, le fibré vectoriel réel orienté de rang 4,  $V$ , des homomorphismes anti- $\lambda$ -hermitiens de  $E_-$  dans  $E_+$  est associé à un unique fibré principal  $P$  de groupe  $SO_4$  au-dessus de  $X$ . L'ensemble des repères  $\text{spin}^c$ , bases unitaires des fibres de  $E_+$  et  $E_-$  reliées par  $\lambda$ , constitue une structure  $\text{spin}^c$  sur  $P$ .

Tout isomorphisme réel  $f$  du fibré tangent  $T(X)$  sur le fibré  $V$  donne une orientation de  $X$ , une métrique riemannienne sur  $X$  et, en prime, une structure  $\text{spin}^c$  de la variété  $X$ .

Le fibré caractéristique  $L$  est canoniquement isomorphe à  $\Lambda^2(E_+)$  et à  $\Lambda^2(E_-)$ .

Réciproquement, quand  $X$  est une variété riemannienne orientée de dimension 4 munie d'une structure  $\text{spin}^c$ , la représentation spinorielle (unitaire) de  $\text{Spin}_4^c$  donne un sextuplet  $(E_+, E_-, \lambda, \langle \rangle_+, \langle \rangle_-, f)$ .

*Remarque.*— Si l'on se donne une orientation et une métrique riemannienne sur  $X$ , et des isomorphismes  $g_\pm : \Lambda_\pm^2(T^*(X)) \rightarrow su(E_\pm)$  conformes de rapport  $\sqrt{2}$ , il existe une isométrie de  $T(X)$  sur  $V$  rendant tout compatible ; elle est déterminée à l'antipodale près  $-\text{id}_V$ .

Soient  $\nabla_+$  et  $\nabla_-$  des connexions unitaires sur  $E_+$  et  $E_-$  ; supposons qu'elles induisent la même connexion  $A$  sur  $L$ , et notons (abusivement)  $\overline{\nabla}_-$  la connexion contragrédiente sur  $\overline{E}_- = E_-^*$ . La formule  $\nabla = \overline{\nabla}_- \otimes 1_+ + 1_- \otimes \nabla_+$  définit une connexion métrique sur  $V$ , donc une connexion affine métrique sur  $T(X)$  ; elle est indépendante de  $A$  (cf. lemme  $\Lambda^2$ ).

(Dans une trivialisatoin locale  $\text{spin}^c$ ,  $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$  de  $E_+, E_-$ ,  $\nabla_+ = d + \alpha + A_4$ ,  $\nabla_- = d + \beta + A_4$ ,  $\alpha \in \Gamma(T^* \otimes \text{su}(E_+))$ ,  $\beta \in \Gamma(T^* \otimes \text{su}(E_-))$ ,  $A_4 \in \Gamma(iT^*)$  ; on a  $A = d + 2A_4$  et  $\nabla = d + 1 \otimes \alpha - {}^t\beta \otimes 1 = d + u(\alpha, \beta)$ ,  $u \in \Gamma(T^* \otimes \text{so}(T))$  ; vue dans  $\Gamma(T^* \otimes \Lambda^2(T))$ ,  $u = 2\alpha + 2\beta$ .)

Voyons la torsion de  $\nabla$  :

$$\tau(x, y, z) = (\nabla_x y - \nabla_y x - [x, y] | z).$$

C'est un 3-tenseur sur  $X$  ; sa définition rend évidente l'antisymétrie en les vecteurs  $x, y$ . Mais le caractère métrique lui associe un tenseur  $\tau^c$  antisymétrique en  $y, z$ . Cela fait deux manières différentes de représenter la torsion par un élément de  $\Lambda^2(T) \otimes T$ , et deux étoiles de Hodge (au moins) brillent sur la torsion,  $*$  et  ${}^*c$ . La seconde offre une notion de torsion  $\text{spin}^c$  :

LEMME.— Soit  $A$  une connexion unitaire sur  $L$  ; il existe une unique connexion unitaire  $\nabla_+^A$  (resp.  $\nabla_-^A$ ) sur  $E_+$  (resp.  $E_-$ ) relevant  $A$ , telle que  $\tau = -{}^*c \tau$  (resp.  $\tau = {}^*c \tau$ ), pour toute connexion unitaire  $\nabla_-$  (resp.  $\nabla_+$ ) sur  $E_-$  (resp.  $E_+$ ) relevant  $A$ .

Même preuve que [Mi.St.], p. 302, en utilisant le lemme du  $\Lambda^2$ .

Plusieurs étoiles sont permises car  $\mathbf{R}^4$  est de multiplicité 2 dans la décomposition de  $\Lambda^2(\mathbf{R}^4) \otimes \mathbf{R}^4$  en représentations irréductibles de  $SO_4$ .

Les connexions  $\nabla_+^A$  et  $\nabla_-^A$  mises ensemble dans  $\overline{\nabla}_-^A \otimes 1_+ + 1_- \otimes \nabla_+^A$  produisent la connexion de Levi-Civita  $\nabla$ , sans torsion, sur  $T(X)$ .

La courbure riemannienne aussi se dit en termes de spineurs. Références : [A.H.S.], [H] et [Gau].

Soient  $R_+^A$  et  $R_-^A$  les courbures de deux connexions unitaires  $\nabla_+, \nabla_-$  relevant  $A$  sur  $L$ ,  $R_\pm^A \in \Gamma(\Lambda^2(T^*) \otimes u(E_\pm)) = i\Omega^2 \oplus (\Omega^2 \otimes \Lambda_\pm^2)$  ; la courbure  $F_A$  de  $A$  est le double de la composante suivant  $i\Omega^2$ . Notons  $R_\pm$  la composante de  $R_\pm^A$  dans  $\Omega^2 \otimes \Lambda_\pm^2$ . La courbure  $R$  de  $\nabla$  est égale à  $-{}^tR_- \otimes 1_+ + 1_- \otimes R_+$  ; dans  $\Omega^2 \otimes \Lambda^2$ , elle vaut  $2R_+ + 2R_-$  ; le terme  $F_A$  disparaît. (Les parties  $\Lambda_\pm^2 \otimes \Lambda_\pm^2$  de  $R$  donnent les courbures de Weyl  $W_\pm$ , la trace est  $\frac{1}{4}$  de la courbure scalaire et la partie mixte  $\Lambda_-^2 \otimes \Lambda_+^2$  est la courbure de Ricci sans trace, cf. [A.H.S.] .)

La théorie de Chern-Weil dit que la 4-forme  $\frac{1}{4\pi^2} \text{Pf}(R)$  sur  $X$  représente la classe d'Euler  $e$  de  $T(X)$  et que les 4-formes  $-\frac{1}{4\pi^2} \text{Det}(R_+^A)$ ,  $-\frac{1}{4\pi^2} \text{Det}(R_-^A)$  représentent les classes de Chern  $c_2^+$ ,  $c_2^-$  de  $E_+$ ,  $E_-$ . Le corollaire du lemme  $\Lambda^2$  implique donc :

$$e = c_2^- - c_2^+.$$

La classe  $c_2$  d'un fibré complexe de rang 2 est aussi la classe d'Euler du fibré réel orienté de rang 4 sous-jacent. Donc  $e = e^- - e^+$ , et sur  $X$  fermée, la caractéristique d'Euler se décompose :  $\chi = \chi_- - \chi_+$ , où  $\chi_-$ ,  $\chi_+$  sont les caractéristiques d'Euler de  $E_-$ ,  $E_+$ .

La première classe de Chern de  $E_+$  et de  $E_-$  est la classe caractéristique  $c_1(L)$ . Si l'on tord  $E_+$  et  $E_-$  par un même fibré en droite complexe  $N$ ,  $L$  est tordu par  $N^2$ ,  $c_1$  se change en  $c_1' = c_1 + 2c_1(N)$  et  $c_2^\pm$  devient  $c_2'^\pm = c_2^\pm + (c_1 + c_1(N))c_1(N)$ .

Soit  $p_1(X)$  la première classe de Pontrjagin dans  $H^4(X, \mathbf{Z})$ ,  $p_1(X) = -c_2(T_{\mathbf{C}}(X))$  ; les caractères de Chern sont :

$$\text{Ch}(E_\pm) = 2 + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2^\pm) \quad , \quad \text{Ch}(\overline{E}_-) = 2 - c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2^-) ;$$

donc

$$\text{Ch}(T(X) \otimes \mathbf{C}) = 4 + c_1^2 - 2(c_2^- + c_2^+) = 4 + p_1(X).$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{2}(c_1^2 - p_1(X)) = c_2^- + c_2^+,$$

ce qui donne :

$$e^+ = \frac{1}{4}(c_1^2 - p_1(X) - 2e(X)) \quad , \quad e^- = \frac{1}{4}(c_1^2 - p_1(X) + 2e(X)).$$

Les classes  $W_2$  de  $\Lambda_+^2$  et  $\Lambda_-^2$  coïncident avec  $W_2(X)$ , et :

$$p_1(\Lambda_+^2) = p_1(X) + 2e(X) \quad , \quad p_1(\Lambda_-^2) = p_1(X) - 2e(X).$$

Si la variété  $X$  est fermée, l'intégrale de  $\frac{1}{3}p_1$  est la signature  $\sigma(X)$ , donc :

$$\chi_+ = \frac{1}{4}(c_1^2 - 3\sigma - 2\chi) \quad \text{et} \quad \chi_- = \frac{1}{4}(c_1^2 - 3\sigma + 2\chi).$$

## 5. LES ÉQUATIONS DE DIRAC

La bonne littérature abonde ; par exemple, [C], [Di], [Li], [A.S.], [A.B.P.], [A], [A.H.S.], [H], [Be], [Bou], [L.M.].

Soit  $X$  une variété riemannienne orientée de dimension  $n$ , munie d'une structure  $\text{spin}^c$ ,  $P$  le fibré des repères orthonormés directs,  $Q$  le fibré des repères  $\text{spin}^c$ ,  $L$  le fibré en droite complexe caractéristique.

Choisissons sur  $L$  une structure hilbertienne et puis une connexion unitaire  $A : \Gamma(L) \rightarrow \Gamma(T^*(X) \otimes L)$  ;  $\langle A\ell, \ell' \rangle + \langle \ell, A\ell' \rangle = d\langle \ell, \ell' \rangle$ .

Soit  $U(L)$  le fibré principal en cercle associé à  $L$  ;  $Q$  est un revêtement à deux feuillettes de  $P \times U(L)$ , donc le produit direct de la connexion de Levi-Civita  $\nabla$  sur  $P$  et de la connexion  $A$  sur  $L$  se relève en une unique connexion principale  $\nabla_A$  sur  $Q$ .

Soit  $E_n$  l'espace de la représentation spinorielle de  $\text{Spin}_n^c$ , irréductible si  $n$  est impair, décomposé en  $E_n^- \oplus E_n^+$  si  $n$  est pair. Notons  $E = Q \times_{\text{Spin}_n^c} E_n$  le fibré vectoriel associé, scindé en  $E_- \oplus E_+$  lorsque  $n$  est un nombre pair. La structure hilbertienne sur  $E$  est parfaitement définie si l'on impose celle de  $L$ .

$\nabla_A$  induit une connexion unitaire sur  $E$ , qui préserve séparément  $E_-$  et  $E_+$  quand  $n$  est pair.

L'opérateur de Dirac  $D_A : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  est le composé de  $\nabla_A : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^* \otimes E)$ , de la métrique riemannienne  $\Gamma(T^* \otimes E) \rightarrow \Gamma(T \otimes E)$  et de la multiplication de Clifford  $\Gamma(T \otimes E) \rightarrow \Gamma(E)$ .

Quand  $n$  est pair,  $D_A = \begin{pmatrix} 0 & D_A^+ \\ D_A^- & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D_A^\pm : \Gamma(E_\pm) \rightarrow \Gamma(E_\mp)$ .

Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est un repère mobile orthonormé direct, localement

$$D_A = \sum_1^n e_a \cdot \nabla_a^A.$$

L'opérateur  $D_A$  est elliptique formellement auto-adjoint,  $D_A^-$  s'identifie à l'adjoint formel de  $D_A^+$ .

Soit  $R \in \Omega^2 \otimes \Lambda^2(T(X))$  la courbure riemannienne :

$$R(x, y, z, t) = (\nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{[x, y]} z) \cdot t.$$

La courbure de Ricci  $r(x, z)$  est la trace en  $y, t$  et la courbure scalaire  $s$  est la trace de Ricci. Par exemple pour  $n = 2$ ,  $s$  est le double de la courbure de Gauss.

En suivant Hitchin ([H]), on a une démonstration dans l'esprit  $\text{spin}^c$  du §4 de la formule de Weitzenböck, Bochner, Lichnerowicz :

$$D_A^2 \varphi = \nabla_A^* \nabla_A \varphi + \frac{s}{4} \varphi + \frac{1}{2} F_A \cdot \varphi,$$

où le dernier terme de droite vient de l'action de Clifford de  $i\Lambda^2(T(X))$  sur  $E$ .

Lorsque  $n = 4$ , on a aussi :

$$D_A^- D_A^+ \varphi = \nabla_A^{+*} \nabla_A^+ \varphi + \frac{s}{4} \varphi + \frac{1}{2} F_A^+ \cdot \varphi.$$

Quand  $n$  est pair,  $n = 2m$ , et que  $X$  est fermée, *i.e.* compacte sans bord, l'indice de l'opérateur elliptique  $D_A^+ : \Gamma(E_+) \rightarrow \Gamma(E_-)$  est donné par la formule d'Atiyah-Singer, *cf.* [A.B.P] :

$$\text{Dim}_{\mathbf{C}} \text{Ker } D_A^+ - \text{Dim}_{\mathbf{C}} \text{Coker } D_A^+ = \langle e^{\frac{1}{2} c_1(L)} \widehat{A}(X), [X] \rangle,$$

où la classe  $\widehat{A}$  d'Atiyah-Hirzebruch est un polynôme universel en les classes de Pontrjagin ; par exemple, pour  $m = 1$ ,  $\widehat{A} = 1$  ; pour  $m = 2$ ,  $\widehat{A} = 1 - \frac{1}{24} p_1$  ; et pour  $m = 3$ ,  $\widehat{A} = 1 - \frac{1}{24} p_1 + \frac{1}{5760} (7p_1^2 - 4p_2) \dots$  Pour  $n = 4$ ,  $m = 2$ , cela fait :

$$\text{Dim}_{\mathbf{R}} \text{Ker } D_A^+ - \text{Dim}_{\mathbf{R}} \text{Coker } D_A^+ = \frac{1}{4} (c_1^2(L) - \sigma(X)).$$

## 6. LES ÉQUATIONS DE SEIBERG-WITTEN

Références : [Wi4], [K.M.3], [E.F.], [T1,2,3].

En dimension 4, à côté de  $D_A^+ \Phi = 0$ , Seiberg et Witten ont posé l'équation  $F_A^+ = \sigma(\Phi, \Phi)$ .

Si  $(A, \Phi)$  est la variable, ce sont les équations d'une théorie de jauge abélienne avec de la matière, comme l'électro-magnétisme. Mais une matière bizarre, entièrement faite de monopôles sans masse, et une lumière étrange portée par des "photons magnétiques".

*Remarque.*— Choisissons un repère local  $\text{spin}^c$   $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$  ; avec les notations du §4,  $\psi_1 \wedge \psi_2$  trivialisent  $L$ ,  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  est une base orthonormée directe de  $T(X)$ . Notons  $(e^1, e^2, e^3, e^4)$  la trivialisatation duale de  $T^*(X)$ ,  $A = d + 2i\alpha$ , où  $\alpha = \alpha_1 e^1 +$

$\alpha_2 e^2 + \alpha_3 e^3 + \alpha_4 e^4$ , et  $\Phi = B_1 \varphi_1 + B_2 \varphi_2$ . Posons  $A_1 = \alpha_1 + i\alpha_2$ ,  $A_2 = \alpha_3 + i\alpha_4$ ,  $P_1 = i\nabla_1 + \nabla_2$ ,  $P_2 = i\nabla_3 + \nabla_4$  (où  $\nabla_a$  raccourcit  $\nabla_{e^a}$ ). L'équation de Dirac s'écrit :

$$\begin{aligned}\bar{P}_2 B_2 - \bar{P}_1 B_1 &= A_1 B_1 - A_2 B_2, \\ P_1 B_2 + P_2 B_1 &= \bar{A}_2 B_1 - \bar{A}_1 B_2.\end{aligned}$$

Et, dans la jauge de Lorentz, où  $\Sigma_a \nabla_a \alpha_a = 0$ , la seconde équation de Seiberg–Witten est :

$$\begin{aligned}\bar{P}_2 A_1 - \bar{P}_1 A_2 &= \frac{1}{2} B_2 \bar{B}_1, \\ P_1 A_1 + P_2 A_2 &= \frac{1}{4} (B_1 \bar{B}_1 - B_2 \bar{B}_2).\end{aligned}$$

Les quatre équations scalaires montrent une symétrie d'origine "super" : la théorie de Seiberg–Witten est une version super-symétrique,  $N = 2$ , de l'électrodynamique quantique (cf. § 8 et [S.Wi.1], équation 5.17 du potentiel).

La clef de l'analyse des monopôles est le contrôle de  $\|\Phi\|^2$  ; l'unitarité de  $\nabla_A$  entraîne :

$$\Delta \|\Phi\|^2 = 2 \langle \nabla_A^* \nabla_A \Phi, \Phi \rangle - 2 \langle \nabla_A \Phi, \nabla_A \Phi \rangle$$

(pour le laplacien  $\Delta = dd^* + d^*d$ ) ; la formule de Lichnerowicz en déduit que, pour une solution de SW, on a :

$$\Delta \|\Phi\|^2 \leq -\frac{s}{2} \|\Phi\|^2 - \frac{1}{2} \|\Phi\|^4.$$

D'où la majoration de  $\|\Phi(x)\|^2$  par  $\sup(0, -s(x))$  en un maximum  $x$  de  $\|\Phi\|$ .

En réutilisant la seconde équation SW, on obtient un contrôle  $L^2$  de  $F_A^+$  et de ses dérivées premières à partir d'une borne  $L_\infty$  de  $\|\Phi\|$ . Ajouté à la théorie de Hodge, de Rham, Kodaira (et la version à bord de Duff et Spencer, [Du.Sp.]), cela donne :

*Soit  $X$  compacte,  $C$  une constante : l'ensemble des classes d'équivalence de jauge des solutions de (SW) satisfaisant à  $\|\Phi\|_\infty \leq C$  est compact dans toute topologie  $L_k^2$ ,  $k \geq 2$ , (cf. [K.M.3], [E.F.]).*

Une transformation de jauge  $h : X \rightarrow S^1$  change  $(A, \Phi)$  en  $(A - 2d \log h, h\Phi)$ .

La dérivée en  $(A, \Phi)$  de l'opérateur SW de  $i\Omega^1 \times \Gamma(E_+)$  dans  $\Gamma(E_-) \times i\Omega_+^2$  est :

$$(a, \varphi) \mapsto (D_A^+ \cdot \varphi + \frac{a}{2} \cdot \Phi, d^+ a - 2 \operatorname{Im}(\sigma(\varphi, \Phi))),$$

celle du changement de jauge de  $C^\infty(X, S^1)$  dans  $i\Omega^1 \times \Gamma(E_+)$  est :

$$\varepsilon \mapsto (-2id\varepsilon, i\varepsilon\Phi).$$

Il en résulte un complexe elliptique à deux flèches ; son complexe symbole est produit direct du symbole de Dirac et du symbole du complexe de la demi-signature d'Atiyah et Hirzebruch (cf. [A.B.P.]) :

$$\Omega^0 \xrightarrow{-d} \Omega^1 \xrightarrow{d^+} \Omega_+^2.$$

Sur  $X$  compacte sans bord, l'indice est la somme  $\frac{1}{2}(\sigma + \chi) + \frac{1}{4}(c_1^2 - \sigma)$ , donc :

$$\text{Ind}_{\mathbf{R}} SW = \frac{1}{4}(c_1^2 - 3\sigma - 2\chi) = \chi_+.$$

Soit  $\mathcal{M}$  l'espace des modules de monopôles SW, et  $\mathcal{M}^*$  la partie des irréductibles, c'est-à-dire  $\Phi \neq 0$ .

La perturbation de  $F_A^+ - \sigma(\Phi, \Phi)$  par une 2-forme autoduale fixe rend SW transverse en tout point de  $\mathcal{M}^*$ .

Eichhorn et Friedrich ([E.F.]) calculent la dépendance en la métrique et en déduisent que, pour les métriques génériques, SW est transverse en tout point de  $\mathcal{M}^*$ . Lorsque  $b_2^+ \neq 0$ , les calculs de Donaldson [D1] montrent que génériquement  $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$ .

**THÉORÈME** (Witten).— *Pour presque toute structure  $spin^c$  sur  $X$  fermée,  $\mathcal{M}$  est de dimension virtuelle strictement négative.*

Puisque  $\int_X \Delta \|\Phi\|^2 = 0$  et  $\|\Phi\|^2 \leq \sup(0, -s)$ , la formule  $\Delta \|\Phi\|^2 = \frac{s}{2} \|\Phi\|^2 - \frac{1}{2} \|\Phi\|^4 - 2 \|\nabla_A \Phi\|^2$  donne une constante  $C$  ne dépendant que de la métrique sur  $X$ , telle que  $\int_X \|\Phi\|^4 \leq 4C$ . Donc  $\int_X \|F_A^+\|^2 = \int_X \|\sigma(\Phi, \Phi)\|^2 \leq C$ .

Par ailleurs, pour toute 2-forme  $\omega$  sur  $X$ ,  $[\omega] \cdot c_1(L) = \frac{i}{2\pi} \int_X F_A \wedge \omega$  ; en particulier  $c_1(L)^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \int_X F_A \wedge F_A = \frac{1}{4\pi^2} \int_X \|F_A^+\|^2 - \|F_A^-\|^2$ . Or, si la dimension virtuelle de  $\mathcal{M}$  est positive,  $c_1^2(L) \geq 2\chi + 3\sigma$ . Par conséquent :

$$\int_X \|F_A^-\|^2 \leq C - 4\pi^2(2\chi + 3\sigma).$$

Ayant borné  $L^2$  la courbure  $F_A$ , on sait que  $c_1(L)$  appartient à une partie compacte de  $H^2(X, \mathbf{Z})$ . C.Q.F.D.

*Tous les invariants de Seiberg-Witten sont vides sur les variétés fermées à courbure scalaire  $> 0$ .*

Un autre théorème d'annulation est facile à démontrer (cf. [E.H.]) :

$\mathcal{M}$  est stablement vide lorsque  $X$  est somme connexe de deux variétés  $X_1, X_2$  ayant un  $b_2^+ \neq 0$ .

Encore d'autres annulations sont connues, par exemple [Wa].

Mais pour les surfaces complexes kählériennes, il existe des invariants SW non-nuls ([Wi4]) :

Si  $J : T(X) \rightarrow T(X)$  est une structure presque-complexe adaptée à la métrique riemannienne, des fibrés  $\text{spin}^c$  se distinguent :  $E_+ = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}$ ,  $E_- = \Lambda^{0,1}$  ; et aussi une 2-forme autoduale de type  $(1, 1) : \omega_0(x, y) = (x | Jy)$ .

Si  $X$  est kählérienne, la forme  $\omega_0$  est fermée, la connexion de Levi-Civita préserve  $J$ , l'opérateur de Dirac  $D_A^+$  coïncide avec  $\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*) : \Omega^{0,0} \oplus \Omega^{0,2} \rightarrow \Omega^{0,1}$  (cf. [H]).

Les autres structures  $\text{spin}^c$  de  $X$  s'obtiennent en tensorisant  $E_+, E_-$  par les fibrés  $N$  en droites complexes. Alors  $E_+ \otimes N = N \oplus (NK^{-1})$ ,  $L = N^2 K^{-1}$ .

Supposons  $X$  analytique complexe kählérienne avec  $b_2^+ > 1$  ;

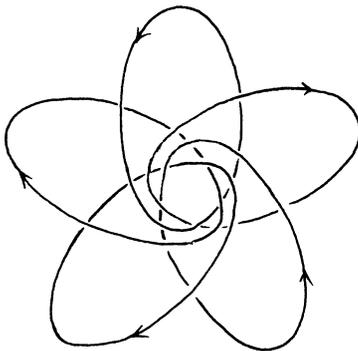
si  $c_1(L) \cdot \omega_0 < 0$ , les monopôles correspondent aux diviseurs de  $N$ , c'est-à-dire aux couples formés d'une structure holomorphe sur  $N$  et d'une section holomorphe de  $N$ . Si  $c_1(L) \cdot \omega_0 > 0$ , on trouve les diviseurs de  $NK^{-1}$ .

## 7. RETOUR À THOM

La conjecture de Thom se disait en termes imagés (cf. [B.We.]).

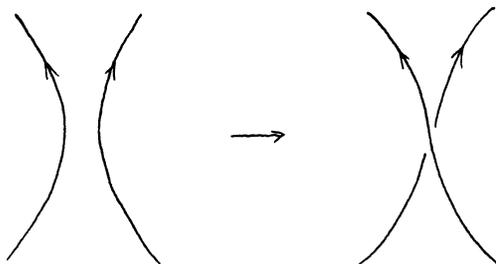
Par exemple, comme une contrainte sur les aventures de courbes fermées orientées dans l'espace euclidien de dimension 3.

Au début, on suppose que les courbes sont toutes des cercles de Villarceau,  $N_+$  dans un sens et  $N_-$  dans l'autre, avec  $N_+ > N_-$  :



Ensuite, elles entrent en mouvement, mais seuls trois sortes d'accidents peuvent survenir :

des crossing-over (cf. [Th2], chapitre 11), en nombre  $c$  :



des naissances, en nombre  $n$  :



ou des morts, en nombre  $m$  :



De plus, on impose que chaque disparition emporte avec elle au moins un segment présent dans l'un des  $N$  cercles de départ (une molécule d'origine). (C'est une hypothèse de connexité de l'aventure.)

Alors, si au bout du compte il ne reste plus rien, la contrainte est :

$$c \geq m + n + (N_+ - N_-)(N_+ - N_- - 3).$$

Aucune approche combinatoire n'a permis d'aborder le problème.

La conjecture s'énonçait aussi en termes de géométrie des points complexes des surfaces réelles dans  $\mathbf{C}^2$  (Eliashberg et Kharlamov, cf. [B2]).

Enfin, elle se dit en termes de géométrie différentielle :

Soit  $\Sigma$  une surface connexe orientée fermée plongée dans une variété  $X$  de dimension 4 ; au voisinage de  $\Sigma$  deux sortes de structures kählériennes sont en compétition,

celles qui s'étendent à  $X$ , et celles qui font de  $\Sigma$  une courbe holomorphe. Les courbures de ces deux sortes de structures peuvent se comparer le long de  $\Sigma$  ; notons  $F_X$ , resp.  $F_\Sigma$ , leurs formes de Ricci (c'est-à-dire les courbures de Ricci des fibrés hermitiens anti-canoniques  $K^{-1}$ , cf. [Ch]) ; chacune est une 2-forme de type  $(1, 1)$  par rapport à une structure analytique complexe.

L'énoncé suivant équivaut à la conjecture de Thom :

Si  $X$  est  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  et que la classe d'homologie de  $\Sigma$  contient une courbe holomorphe  $C$ , la moyenne de  $F_\Sigma$  sur  $\Sigma$  est supérieure à la moyenne de  $F_X$  sur  $\Sigma$  :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} F_{\Sigma} \geq \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} F_X.$$

En effet, à gauche on reconnaît  $-\chi(\Sigma) - \Sigma \cdot \Sigma$  et à droite  $-c_1(X) \cdot \Sigma$ . La formule d'adjonction conclut :  $g(\Sigma) \geq g(C)$ .

Le même énoncé pour  $X$  surface projective complexe quelconque est la "conjecture de Thom généralisée".

Prolongement analytique et forme de l'homologie ; des thèmes qui ont préoccupé René Thom depuis [Th1] jusqu'à [Th3].

C'est finalement par ce chemin que [K.M.3] résoud le problème, en passant par la courbure scalaire  $s$  que flairent les monopôles.

Le paysage découvert par la preuve de Kronheimer et Mrowka, issue de Seiberg et Witten, est grandiose : la structure spinorielle de l'espace-temps, l'équation de Dirac, la courbure scalaire, lagrangien d'Einstein, l'électrodynamique de Maxwell, l'autodualité et en contrebas la théorie de Yang-Mills, la renormalisation et la supersymétrie. En rivière souterraine, la théorie des super-cordes et ses dualités.

Extraits de notes sur les six étapes survolées au § 1 :

La première étape repose sur une construction de métriques à  $s > 0$ , sur les sommes connexes des variétés à  $s > 0$  de [G.L.2] : en dimension  $\geq 3$ , il est possible de modifier la métrique d'une boule épointée sans y toucher le long du bord, en gardant  $s > 0$ , pour coller à un cylindre sur une sphère ronde de rayon arbitrairement petit.

Les deux étapes suivantes appartiennent à la théorie du potentiel (cf. [dR]).

D'abord, on se sert de courts cylindres sur de petites  $S^3$  pour réunir  $\mathbf{P}^2$  à des  $\overline{\mathbf{P}}^2$ . Lorsque les rayons tendent vers 0, la 2-forme harmonique autoduale, de norme  $L^2$  égale à 1, d'intégrale positive sur la droite  $H$ , converge  $C^\infty$  hors des points éclatés vers une forme harmonique. Sur les  $\overline{\mathbf{P}}^2$ , la limite ne peut être que 0 puisque  $b_2^+ = 0$  ; sur  $\mathbf{P}^2$ , la limite est une forme de Kähler.

Ensuite arrive le long cylindre  $Y \times [-R, R]$  sur  $Y = \Sigma \times S^1$ . La partie  $X_0$  collée à  $Y \times \{-R\}$  contient  $\Sigma$  ; de l'autre côté est  $X_1$ . Lorsque  $R \rightarrow \infty$ , la forme canonique  $\omega$  converge  $C^\infty$  vers une forme harmonique de carré intégrable sur la réunion disjointe de deux variétés complètes  $\widehat{X}_0 = X_0 \cup (Y \times [0, \infty[)$  et  $\widehat{X}_1 = (]-\infty, 0] \times Y) \cup X_1$ . Soit  $\mathcal{H}_0$  l'espace des 2-formes harmoniques  $L^2$  sur  $\widehat{X}_0$  ; d'après Andreotti et Vesentini, cf. [dR], les éléments de  $\mathcal{H}_0$  sont fermés et cofermés. Par la proposition 4.9 de [A.P.S.],  $\mathcal{H}_0$  représente l'image de  $H^2(X_0, Y)$  dans  $H^2(X_0)$ . Mais  $H^2(X_0) \rightarrow H^2(Y)$  est un isomorphisme, donc  $\mathcal{H}_0 = 0$ . En particulier,  $\int_\Sigma \omega \rightarrow 0$  si  $R \rightarrow \infty$ . Posons  $[\omega] = aH + \Sigma a_i E_i$  ; comme  $[\omega][\omega] = 1$ ,  $a^2 = 1 + \Sigma a_i^2 \geq 1$ , donc  $[\omega]H \geq 1$ .

Or  $[\omega] \cdot c_1(L) = (3 - d)[\omega] \cdot H + [\omega] \cdot \Sigma$ . Par suite, lorsque  $d > 3$ , pour  $R$  assez grand,  $[\omega] \cdot c_1(L) < 0$ .

À la quatrième étape, on voit la classe canonique  $[\omega_t]$  d'un chemin  $g_t$  de métriques sur  $X$  traverser au temps 0 l'hyperplan orthogonal à  $c_1(L)$ . Pour  $t = 0$ , un des monopôles est réductible :  $\Phi \equiv 0$  et  $F_A$  est l'unique forme anti-autoduale de classe  $c_1(L)$ . D'après Donaldson [D2], § VI, il n'y a plus de monopôle réductible pour  $t \neq 0$ ,  $t$  proche de 0. Dans [K.M.3], Kronheimer et Mrowka utilisent un modèle de Kuranishi, suivant l'exemple de Donaldson [D3] qui permet de conclure : la parité du nombre de monopôles dans  $\mathcal{M}_t$  change. Dans [Wi4], Witten avait déjà indiqué la raison de cette bifurcation des monopôles :

Sous nos hypothèses, pour chaque valeur de  $t$ , l'indice de  $D_A^+$  est 1, et celui de  $d^+ : \Omega^1 \rightarrow \Omega_+^2$  est 0. L'image de  $d^+$  est l'orthogonal de  $\omega_t$  et le noyau de  $d^+$  est  $d(\Omega^0)$  (cf. [D.K.]).

En  $t = 0$ , comme  $\pi_1(X) = 0$ , la solution réductible de SW,  $(A_0, 0)$ , est unique à équivalence de jauge près. Admettons que le noyau de  $D_{A_0}^+$  soit de dimension 1, engendré par le champ  $\varphi_0$ . (D'après Fredholm, l'ensemble des connexions  $A$  telles que  $\text{Det } D_A^+ = 0$  est de codimension 2, cf. [D.K.].) Et cherchons les solutions de SW proches de  $(A_0, 0)$  pour les métriques  $g_\varepsilon$  sous la forme de perturbations  $(A, \Phi) = (A_0 + \varepsilon a, |\varepsilon|^{1/2} \varphi)$ . Comme  $D_A^+ \Phi$  est égal à  $|\varepsilon|^{1/2} (D_{A_0}^+ \varphi + \varepsilon(a + (\delta D_{A_0}^+) \cdot \varphi))$ , on voit qu'au premier ordre en  $\varepsilon$ ,  $\varphi$  doit être colinéaire à  $\varphi_0$ . Posons donc  $\varphi = \lambda \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1$ . La seconde équation de Seiberg–Witten entraîne :

$$d^+ a + \delta F_{A_0}^+ = (\text{signe de } \varepsilon) |\lambda|^2 \sigma(\varphi_0, \varphi_0).$$

Mais sur le chemin  $g_\varepsilon$ ,  $c_1(L) \cdot \omega_\varepsilon$  s'annule transversalement pour  $\varepsilon = 0$ , donc  $\delta F_{A_0}^+ \wedge \omega_0 \neq 0$ . Si bien qu'en prenant le produit scalaire de cette seconde équation avec  $\omega_0$ , on apprend que  $\lambda \neq 0$  force la valeur du signe de  $\varepsilon$ . De là, et du théorème des fonctions implicites, on déduit la bifurcation : si un monopôle voisin de  $(A_0, 0)$  existe

pour  $\varepsilon > 0$  (resp.  $< 0$ ), il n'y en a plus pour  $\varepsilon < 0$  (resp.  $> 0$ ) et, inversement, s'il n'y a pas de monopôle voisin de  $(A_0, 0)$  pour  $\varepsilon > 0$  (resp.  $< 0$ ), il y en a un pour  $\varepsilon < 0$  (resp.  $> 0$ ).

Maintenant, nous en sommes sûrs : dès que  $d > 3$  et que  $R$  est suffisamment grand, un nombre impair de monopôles nous accompagnent dans les métriques sur  $X$  à longs cylindres  $Y \times [-R, R]$ .

Le long du cylindre, les équations de Seiberg-Witten s'interprètent comme un problème d'évolution :

Les fibrés  $E_-, E_+, L$  sont images réciproques de fibrés sur  $Y$  ; le champ de vecteur  $\frac{\partial}{\partial t}$  est un isomorphisme réel et unitaire de  $E_-$  sur  $E_+$ . Ainsi,  $T(Y)$  s'identifie à  $su(E_+)$ , et la restriction de  $E_+$  à une section  $Y$  fait une structure  $\text{spin}^c$  sur  $Y$  de fibré caractéristique  $L|_Y$ . De même,  $\Lambda_{\pm}^2(T(Y \times \mathbf{R}))$  s'identifient à  $T(Y)$ .

Pour toute connexion  $A$  sur  $L$ , il existe une transformation de jauge  $h$  telle que l'opérateur  $h \cdot A = A - 2d \log h$  contracté par  $\frac{\partial}{\partial t}$  coïncide avec la dérivation  $\frac{\partial}{\partial t}$ . On dit que  $h \cdot A$  est en jauge temporelle.

Une connexion temporelle  $A$  sur  $L$  s'identifie à une courbe de connexions  $\vec{A}(t)$  sur  $L|_Y$ .

Le couple  $(A, \Phi)$  est un monopôle sur  $Y \times [-R, R]$  si :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi &= -D_{\vec{A}} \Phi, \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} &= - * F_{\vec{A}} + \sigma(\Phi, \Phi). \end{aligned}$$

Choisissons une connexion de référence  $\vec{A}_0$  sur  $L|_Y$  ; pour la métrique  $L^2$  de l'ensemble des couples  $(\vec{A}, \Phi)$  sur  $Y$ , les équations différentielles sont celles du gradient de  $(-\frac{1}{2})$  fois

$$C(\vec{A}, \Phi) = \int_Y (\vec{A} - \vec{A}_0) \wedge (F_{\vec{A}} + F_{\vec{A}_0}) + 2\langle \Phi, D_{\vec{A}} \Phi \rangle d \text{Vol}_Y.$$

Si  $h : Y \rightarrow S^1$  est une transformation de jauge et que  $[h]$  dénote sa classe dans  $H^1(Y, \mathbf{Z})$ , on a :

$$C(h \cdot (\vec{A}, \Phi)) - C(\vec{A}, \Phi) = -8\pi^2 c_1(L) \cdot [h].$$

En particulier si  $h$  se prolonge du côté de  $X_0$  ou de  $X_1$ ,  $C(h \cdot (\vec{A}, \Phi)) = C(\vec{A}, \Phi)$  en vertu de la formule de Stokes.

Faisons tendre  $R$  vers  $+\infty$  ; et considérons une famille de monopôles pour ces métriques. La géométrie des morceaux  $X_0, X_1$  est fixe, donc le lemme de compacité assure l'existence de transformations de jauge  $h_0$  sur  $X_0, h_1$  sur  $X_1$ , telles que  $h_0 \cdot (A, \Phi)$  converge sur  $X_0$  et  $h_1 \cdot (A, \Phi)$  converge sur  $X_1$ . Par conséquent, il existe une constante  $C_0$  qui majore  $|C(\vec{A}, \Phi)|$  aux extrémités du cylindre. Mais la fonction  $C(\vec{A}(t), \Phi(t))$  de  $t$  décroît entre  $-R$  et  $R$  ; il y a donc un intervalle de longueur 1 sur lequel sa variation est majorée par  $\frac{C_0}{R}$ . D'autre part, le sup et l'inf de la courbure scalaire sur  $X$  sont indépendants de  $R$  ; la norme de  $\Phi$  est contrôlée. La compacité donne un monopôle sur  $Y \times [0, 1]$  tel que la fonction  $C$  soit constante, c'est-à-dire une solution stationnaire, un monopôle de Seiberg-Witten en dimension 3.

C'est ce qu'il fallait pour aborder la sixième étape décrite à la fin du § 1.

## 8. AUX PORTES DE LA PHYSIQUE MODERNE

La ressemblance entre les invariants de Seiberg-Witten et les invariants de Donaldson ([D4]) n'est pas fortuite. C'est en voulant interpréter physiquement les polynômes de Donaldson que Witten a inventé les théories topologiques des champs ([Wi1]). L'explication des propriétés tridimensionnelles du polynôme de Jones est venue ensuite ([Wi2]). Et puis, guidé par les formules de Kronheimer et Mrowka ([K.M.2]), Witten a montré qu'une supersymétrie ajoutée à Yang-Mills en dimension 4 suffisait pour calculer les invariants de Donaldson des surfaces kählériennes, dans ([Wi3]).

Enfin, avec Seiberg, Witten a découvert la théorie "duale" de Yang-Mills,  $N = 2$  supersymétrique twistée, celle qui est "équivalente" dans l'infrarouge à la théorie de jauge  $SU_2$  mais qui, étant abélienne, y est faiblement couplée au lieu d'être fortement couplée, donc "calculable" (cf. [S.Wi.1,2], [Wi4]).

Les théories quantiques des champs sont des objets ambigus. Chaque théorie est censée fournir une collection de fonctions de plusieurs variables calculant les amplitudes du vide au vide des quantités observables, en respectant un certain nombre de symétries. Mais à un lagrangien de champs classiques est associée toute une famille de prédictions quantiques. Les paramètres sont, entre autres, les coefficients d'interactions (les couplages observables) et une valeur de fréquence (l'échelle à choisir). Plus il y a de modules, plus le théoricien moderne est content, car sur ces modules opèrent des symétries (continues ou discrètes) dont on peut extraire des informations physiques.

Dans le meilleur des cas, quand la théorie est juste renormalisable, les règles de renormalisation stipulent, pour chaque régularisation et chaque échelle d'observation, une correspondance entre les variables de couplages "nues",  $g_0 \in U_0$ , et les constantes "habillées" (par des graphes de Feynman)  $g \in U$ . Par exemple, soit  $\lambda \in \mathbf{R}^+$  une valeur du "cut-off" qui régularise les fluctuations quantiques (intégrales de Feynman) en soustrayant les trop grandes impulsions ; alors  $\forall g_0 \in U_0$ , la renormalisation, compensation et contre-terme, donne une courbe  $\mu \mapsto g(\mu)$ . Le "paramètre de renormalisation"  $\mu$  est l'échelle du moment de transfert. D'après Callan, Symanzik, Wilson et al. (1970), les courbes  $g(\mu)$  ne dépendent pas de  $\lambda$  (tout en dépendant du procédé choisi pour renormaliser) : elles constituent le "flot de renormalisation", cf. [I.Z.]. Les points  $g \in U$  qui sont attracteurs lorsque  $\mu \rightarrow \infty$  sont dits stables dans l'ultraviolet, ceux qui sont attracteurs lorsque  $\mu \rightarrow 0$  sont dits stables dans l'infrarouge.

Lorsqu'un point de  $U$  correspondant à une théorie sans interaction est  $UV$ -stable, la théorie est "asymptotiquement libre". C'est le cas de la théorie de Yang-Mills non-abélienne, qui décrit les interactions fortes : aux grands moments de transfert, le couplage entre les quarks et les gluons devient petit. Donc, dans ce régime, des prédictions peuvent être tirées de la théorie perturbative. Le problème est à grande distance : la théorie est "fortement couplée" dans l'infrarouge. Logiquement la théorie des perturbations ne peut plus apporter beaucoup d'informations. Or, à cette échelle, il faut rendre compte du confinement des quarks : lorsque la séparation de deux quarks est assez grande, il semble énergétiquement favorable de produire une nouvelle paire quark-antiquark cf. [Ca.Go.].

La théorie super-symétrique,  $N = 2$ , twistée, que Witten a imaginée pour évaluer les invariants de Donaldson, est également faiblement couplée dans l'ultraviolet et fortement couplée dans l'infrarouge. (Dans une théorie de champs super-symétriques,  $N$  désigne le nombre de couples de spineurs pris en compte par la super-symétrie, cf. [W.B.].) Dans la théorie de Witten, lorsque le groupe de jauge est  $SU_2$ , le module pertinent est un nombre  $u$ . Il représente la valeur moyenne d'un champ qui brise la symétrie  $SU_2$ . (Géométriquement,  $u$  correspond au générateur de l'algèbre de cohomologie de l'espace des classes d'équivalence de jauge sur  $S^4$ .) Pour  $u \neq 0$ , la symétrie de jauge est "spontanément brisée" en un groupe  $U_1$ . Le point  $u = \infty$  est stable dans l'ultraviolet. La théorie de champs classiques utilisée par Donaldson correspond à  $u = 0$ , mais comme on s'intéresse à des observables topologiques, l'analyse pour  $u \rightarrow \infty$  convient aussi bien ; ce qui permet à Witten d'excellentes prédictions pour les formules mathématiques.

't Hooft et Polyakov (1974) avaient construit pour la théorie ordinaire de Yang-

Mills spontanément brisée des solutions classiques qui sont des monopôles magnétiques à charges quantifiées topologiquement (cf. [I.Z]). La théorie super-symétrique possède aussi de telles solutions : des monopôles ou des dyons (chargés électriquement et magnétiquement). Ces particules, en général massives, proviennent des gluons, gluinos, goldstones et goldstinos avec des contraintes à l'infini dans  $\mathbf{R}^4$  ; ce sont des excitations cohérentes des champs fondamentaux. Elles forment un réseau  $\mathbf{Z}^2$  de couples  $(n_m, n_e)$  comptant les charges magnétiques et électriques. Si  $n_e = 0$ , on parle de monopôle magnétique. Après quantification, ces “particules” se maintiennent (même si elles ne sont pas toutes stables). Leur comportement va décider du sort de la théorie.

Seiberg (1988) avait réussi à analyser certaines théories super-symétriques,  $N = 1$  ou  $N = 2$ , en passant au domaine des valeurs complexes de  $u$  (cela s'appelle “la puissance de l'holomorphie”). Pour la théorie de Witten, il y a une monodromie non triviale des dyons quand  $u$  tourne autour de  $\infty$  : une matrice dans  $SL_2(\mathbf{Z})$ . De plus, de bonnes raisons font penser que l'ensemble des monodromies au-dessus du plan complexe des  $u$  ne peut être abélien, cf. [S.Wi.1]. D'où l'Ansatz de Seiberg-Witten : en plus de  $+\infty$ , deux valeurs de  $u$  doivent donner des singularités de la théorie quantique. (On décide de ramener ces points singuliers en  $+1$  et  $-1$ , ou  $\mu^2$  et  $-\mu^2$  ; ils correspondent au niveau quantique à une bifurcation du point singulier classique  $u = 0$ .) En un de ces points, une famille de monopôles ou de dyons acquiert une masse nulle ; cela s'interprète comme un cycle évanescant (cf. [S.Wi.1,2]). (La théorie des catastrophes n'est pas loin.) Alors, à faible énergie dans l'infrarouge, la théorie quantique est convenablement décrite comme perturbation d'une électrodynamique avec des monopôles  $\Phi$  et un “photon dual”  $A$ . Ce phénomène exprime une sorte de dualité entre l'électricité mise au départ et le magnétisme effectif ; d'après Seiberg et Witten, c'est un analogue de la dualité de Mounonen et Olive, dualité électrique-magnétique exacte avec  $N = 4$ . Voilà qui motive la prédiction de Witten : les monopôles peuvent remplacer les instantons dans les calculs topologiques. Dans [Wi4], la prédiction se traduit en particulier par une formule conjecturale pour une fonction génératrice des polynômes de Donaldson en termes d'invariants de Seiberg-Witten.

Du point de vue de la physique, ce modèle précise la conjecture de 't Hooft : le confinement des quarks résulte d'une “condensation des monopôles”, comme le confinement magnétique dans les supraconducteurs résulte de la condensation des paires de Cooper. Le modèle possède d'autres propriétés physiques intéressantes comme l'asymétrie chirale, il se couple à de la matière et se généralise à d'autres groupes de jauge, mais il est super-symétrique,  $N \neq 0$ . Question : comment réaliser tout cela sans la super-symétrie ?

C'est de plus en plus clair : en topologie et géométrie de notre espace-temps, la théorie de la renormalisation n'est pas "une autre histoire".

Remerciements : pour la préparation de cet exposé et sa rédaction, je dois beaucoup aux échanges que j'ai eus avec Michèle Audin, Olivier Biquard, Jean-Pierre Bourguignon, Gilles Châtelet, Paul Gauduchon, Dieter Kotschick, Marcus Slupinsky, Raymond Stora, Thanh Tâm Lê et Jean-Bernard Zuber.

### BIBLIOGRAPHIE

- [A] M.F. ATIYAH - *Classical groups and classical differential operators on manifolds*, CIME, Varenna (1975), 6-48.
- [ABP] M.F. ATIYAH, R. BOTT, V.K. PATODI - *On the heat equation and the index theorem*, Invent. Math. **19** (1973), 279-330 et **28** (1975), 277-280.
- [ABS] M.F. ATIYAH, R. BOTT, A. SHAPIRO - *Clifford modules*, Topology **3**, suppl. 1 (1964), 3-38.
- [AHS] M.F. ATIYAH, N.J. HITCHIN, I.M. SINGER - *Self-duality in four dimensional Riemannian Geometry*, Proc. Royal Soc. London **362** (1978), 425-461.
- [APS] M.F. ATIYAH, V.K. PATODI, I.M. SINGER - *Spectral asymmetry and Riemannian Geometry*, I, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), 43-69.
- [AS] M.F. ATIYAH, I.M. SINGER - *The index of elliptic operators*, III, Ann. of Math. **87** (1968), 546-604.
- [Au] D. AUCKLEY - *Surgery, knots and the Seiberg-Witten equations*, preprint, Berkeley, 1995.
- [B1] D. BENNEQUIN - *Problèmes elliptiques, surfaces de Riemann et structures symplectiques [d'après M. Gromov]*, Sémin. Bourbaki, exp. n° 657, février 1986, Astérisque **145-146** (1987), 111-136.
- [B2] D. BENNEQUIN - *Topologie symplectique, convexité holomorphe et structures de contact [d'après Y. Eliashberg, D. Mc Duff et al.]*, Sémin. Bourbaki, exp. n° 725, juin 1990, Astérisque **189-190** (1990), 285-323.
- [B3] D. BENNEQUIN - *L'instanton gordien*, Sémin. Bourbaki, exp. n° 770, juin 1993, Astérisque **216** (1993), 233-277.
- [BWe] M. BOILEAU, C. WEBER - *Le problème de J. Milnor sur le nombre gordien des nœuds algébriques*, Ens. Math. **30** (1984), 173-222.
- [Bbk] N. BOURBAKI - *Algèbre*, ch. IX, Hermann, Paris, 1959.

- [Be] A. BESSE - *Géométrie riemannienne en dimension 4* (exposés de J.-P. Bourguignon, J. Lafontaine, P. Marry), CEDIC, Nathan, Paris, 1981.
- [Bo] A. BOREL - *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Thèse, Paris, 1952, Ann. of Math. (2) **57** (1953), 115-207.
- [Bou] J.-P. BOURGUIGNON - *The magic of Weitzenböck formulas*, in : Variational methods, progress in nonlinear differential equations and their applications, Boston (1990), 251-273.
- [CaGo] R.N. CAHN et G. GOLDBERGER - *The experimental foundations of particle physics*, Cambridge U.P., 1989.
- [C] É. CARTAN - *The theory of spinors*, Hermann, Paris, 2ème éd., 1966.
- [Ch] S.S. CHERN - *Complex manifolds without potential theory*, Springer, 2ème éd., 1979.
- [dR] C. DE RHAM - *Variétés différentiables*, Herman, Paris, 3ème éd., 1973.
- [Di] P.A.M. DIRAC - *The principles of quantum mechanics*, 4ème édition, Oxford, 1967.
- [D1] S.K. DONALDSON - *Connexions, cohomology and the intersection forms of four-manifolds*, J. of Diff. Geom. **24** (1986), 275-341.
- [D2] S.K. DONALDSON - *Irrationality and the h-cobordism conjecture*, J. of Diff. Geom. **26** (1987), 141-168.
- [D3] S.K. DONALDSON - *The orientation of Yang-Mills moduli spaces and 4-manifold topology*, J. of Diff. Geom. **26** (1987), 397-428.
- [D4] S.K. DONALDSON - *Polynomial invariants for smooth four-manifolds*, Topology **29** (1990), 257-315.
- [DK] S.K. DONALDSON and P.B. KRONHEIMER - *The geometry of four-manifolds*, Oxford University Press (1990).
- [DuSp] C.D. DUFF, D.C. SPENCER - *Harmonic tensors on riemannian manifolds with boundary*, Ann. of Math. **56** (1952), 128-196.
- [EF] J. EICHHORN, T. FRIEDRICH - *Seiberg-Witten theory*, 1995, Preprint, Berlin.
- [F] R.P. FEYNMAN - *Lectures on Physics*, Caltec, 1965.
- [Gau] P. GAUDUCHON - *Variétés riemanniennes autoduales (d'après C.H. Taubes et al.)*, Sémin. Bourbaki, exp. n° 767, mars 1993, Astérisque **216** (1993), 151-186.
- [G] M. GROMOV - *Pseudo-holomorphic curves on almost complex manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307-347.
- [GL1] M. GROMOV, H.B. LAWSON - *The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Ann. of Math. **111** (1980), 423-434.

- [GL2] M. GROMOV, H.B. LAWSON - *Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group*, I, Ann. of Math. **111** (1980), 209-230.
- [H] N. HITCHIN - *Harmonic spinors*, Adv. in Math. **14** (1974), 1-55.
- [HiHo] F. HIRZEBRUCH, H. HOPF - *Felder von Flächenelementen in 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Math. Annalen **136** (1958), 156-172.
- [HsSz] W.C. HSIANG, R.H. SZCZARBA - *On embedding surfaces in four-manifolds*, In : Algebraic Topology, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 22, Americ. Math. Soc., Providence, R.I., 1971, 97-103.
- [IZ] C. ITZYKSON et J.-B. ZUBER - *Quantum field theory*, Mc Graw Hill, 1980.
- [KeMi] M. KERVAIRE, J. MILNOR - *On 2-spheres in 4-manifolds*, Proc. Nat. Acad. Science USA **47** (1961), 1651-1657.
- [KM1] P.B. KRONHEIMER, T.S. MROWKA - *Gauge theory for embedded surfaces*, I, Topology, 1994, II, Topology, 1995.
- [KM2] P.B. KRONHEIMER, T.S. MROWKA - *Embedded surfaces and the structure of Donaldson's polynomial invariants*, J. of Diff. Geom., 1995.
- [KM3] P.B. KRONHEIMER, T.S. MROWKA - *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Letters **1** (1994), 798-808.
- [KoMa] D. KOTSCHICK, G. MATIĆ - *Embedded surfaces in four-manifolds, branched covers and  $SO(3)$ -invariants*, Preprint Bâle (1993).
- [LM] B. LAWSON, M. MICHELSON - *Spin geometry*, Princeton Univ. Press, 1989.
- [Li] A. LICHNEROWICZ - *Spineurs harmoniques*, CRAS **257** (1963).
- [Mi1] J.W. MILNOR - *Spin structures on manifolds*, L'Ens. Math. **9** (1963), 198-203.
- [Mi2] J.W. MILNOR - *Remarks concerning Spin manifolds*, In : Differential and combinatorial topology : A symposium in honor of Marston Morse, Princeton Univ. Press (1965), 55-62.
- [MiSt] J.W. MILNOR, J.D. STASHEFF - *Characteristic classes*, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1974.
- [PR] R. PENROSE, W. RINDLER - *Spinors and space-time*, vol. 1, Cambridge, **86** (1984).
- [Ro] V.A. ROHLIN - *Two-dimensional submanifolds of four-dimensional manifolds*, Funct. Anal. Appl. **5** (1971), 39-48.
- [SWi1] N. SEIBERG, E. WITTEN - *Electric-magnetic duality, monopole condensation and confinement in  $N = 2$  supersymmetric Yang-Mills theory*, Nuclear Physics B **426** (1994), 19-52.
- [SWi2] N. SEIBERG, E. WITTEN - *Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in  $N = 2$  supersymmetric QCD*, Nuclear Physics B **431** (1994), 484-550.

- [T1] C. TAUBES - *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Letters **1** (1994), 809-822.
- [T2] C. TAUBES - *More constraints on symplectic manifolds from the Seiberg-Witten invariants*, Math. Res. Letters **2** (1995), 9-14.
- [T3] C. TAUBES - *The Seiberg-Witten and the Gromov invariants*, Math. Res. Letters **2** (1995), 221-238.
- [Th1] R. THOM - *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv. **28** (1954), 17-86.
- [Th2] R. THOM - *Stabilité structurelle et morphogénèse*, Interéditions, 2ème édition, Paris, 1977.
- [Th3] R. THOM - *Spectre bord d'un centre obscur*, dans : "Passion des formes" (M. Porte, coordonnateur), Fontenay-Saint Cloud (1994), 13-23.
- [Wa] WANG Shuguang - *A vanishing theorem for Seiberg-Witten invariants*, Math. Res. Letters **2** (1995), 305-310.
- [WB] J. WESS et J. BAGGER - *Supersymmetry and supergravity*, 2nd edition, Princeton, 1992.
- [Wh] H. WHITNEY - *On the topology of differentiable manifolds*, Lectures in Topology, Univ. of Michigan Press, 1941, 101-141, In : *Collected papers*, Vol. II, 175-215.
- [Wi1] E. WITTEN - *Topological Quantum Field Theory*, Comm. Math. Phys. (1988), 353-386.
- [Wi2] E. WITTEN - *Quantum field theory and the Jones polynomials*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), 351-399.
- [Wi3] E. WITTEN - *Supersymmetric Yang-Mills theory on a four-manifold*, Preprint IAS, 1994.
- [Wi4] E. WITTEN - *Monopoles and 4-manifolds*, Math. Res. Letters **1** (1994), 769-796.
- [Wu] WU Wen Tsun - *Sur la structure presque complexe d'une variété différentiable réelle de dimension 4*, Note CRAS, 15 nov. 1948, 1076-1078.

Daniel BENNEQUIN  
Université de Paris VII  
UFR de Mathématiques  
Tour 45-55 - 5ème étage  
2, place Jussieu  
F-75251 PARIS CEDEX 05

# *Astérisque*

FRÉDÉRIC PAULIN

## **Actions de groupes sur les arbres**

*Astérisque*, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki, exp. n° 808, p. 97-137

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1995-1996\\_\\_38\\_\\_97\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__97_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ACTIONS DE GROUPES SUR LES ARBRES

par Frédéric PAULIN

H. Poincaré [74] étudiait la structure des sous-groupes discrets de  $SL_2(\mathbb{R})$  ou  $SL_2(\mathbb{C})$ , par leurs actions isométriques sur les espaces hyperboliques réels  $\mathbb{H}^2$ ,  $\mathbb{H}^3$ . Pour étudier la structure des sous-groupes discrets de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ , J.-P. Serre [85] a développé la théorie des actions de groupes sur les arbres discrets. En effet, l'immeuble de Bruhat-Tits (de rang un) associé à  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  pour la valuation  $p$ -adique [14] est un arbre discret. Partant de l'observation qu'un groupe agissant librement sur un arbre discret est libre, J.-P. Serre en déduit par exemple une preuve simple et élégante du théorème suivant.

**Théorème 1** (*Y. Ihara*) *Un sous-groupe discret sans torsion de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  est libre.*

La théorie de Bass-Serre (voir section 1) montre plus généralement qu'un groupe agit sur un arbre discret sans point fixe global si et seulement s'il se *décompose* (i.e. est isomorphe à une somme amalgamée non triviale ou une extension HNN (voir section 1 pour des définitions)) *au dessus* d'un stabilisateur d'arête. Par exemple, un groupe est un produit libre de deux groupes non triviaux si et seulement s'il agit sur un arbre discret avec stabilisateurs d'arête triviaux.

Pour étudier les groupes  $SL_2(K)$  pour un corps  $K$  muni d'une valuation non discrète, F. Bruhat et J. Tits [14, 91] avaient introduit des généralisations des arbres discrets, encore appelés arbres<sup>1</sup>.

L'étude des actions de groupes sur les arbres non discrets, commencée par J. Tits, R. Lyndon, I. Chiswell, et surtout développée par J. Morgan et P. Shalen (voir les articles de référence [86, 87, 63]), vient d'aboutir à des résultats profonds de classification, par les travaux de E. Rips (voir section 2). Un corollaire est le suivant, anciennement connu sous le nom de conjecture de Morgan-Shalen. Rappelons qu'un groupe est *de type fini* s'il est engendré par un nombre fini d'éléments.

---

<sup>1</sup>La terminologie usuelle est maintenant celle d'*arbre réel*, mais par respect des origines, nous préférons dans cet exposé le terme d'arbre (non discret).

**Théorème 2** (*E. Rips*) *Un groupe de type fini qui agit librement sur un arbre (non discret) est un produit libre de groupes abéliens libres et de groupes fondamentaux de surfaces.*

Les actions de groupes sur les arbres non discrets permettent d’apporter des informations asymptotiques sur les sous-groupes discrets de groupes de Lie réels comme  $SL_2(\mathbb{C})$  (voir par exemple les travaux de M. Culler-P. Shalen [20], J. Morgan-P. Shalen [65], M. Bestvina [7], F. Paulin [69], Z. Sela [83] et la section 3). L’explication conceptuelle, due à M. Gromov, est que, vu de loin, l’espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$  ressemble ... à un arbre. Plus exactement la limite (en un sens que nous préciserons plus loin) de la famille d’espaces métriques obtenue en multipliant la distance de  $\mathbb{H}^3$  par  $\epsilon$ , tend vers un arbre non discret, quand  $\epsilon$  tend vers 0. Voici une application :

**Théorème 3** (*W. Thurston [90, Theorem 7.1], J. Morgan-P. Shalen [65]*) *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de type fini, non virtuellement abélien, qui n’est pas une somme amalgamée non triviale ou une extension HNN au-dessus d’un groupe virtuellement abélien. Alors l’espace des représentations de  $\Gamma$  dans  $SL_2(\mathbb{C})$  modulo conjugaison est compact.*

Évoquons en quelques mots les sujets reliés que nous ne traiterons pas ici, préférant nous concentrer sur le théorème de Rips et en donner une preuve complète.

Les actions de groupes sur les arbres discrets permettent de donner d’autres informations sur les sous-groupes discrets d’un groupe de Lie de rang relatif un sur un corps local localement compact. Voir [85], [4, 57], [58] (pour la construction de réseaux non arithmétiques) et [59, 5, 15] (pour les problèmes de rigidité et de superrigidité des commensurateurs). Nous ne traiterons pas non plus de l’aspect analyse harmonique sur les arbres, voir par exemple [33, 18], ni les rapports avec l’uniformisation  $p$ -adique (voir par exemple [75, 39, 38, 6]). Citons encore le joli résultat de H. Bass [2] : un sous-groupe de type fini de  $GL_2(\mathbb{C})$ , qui ne se décompose pas, est, à conjugaison près, contenu dans le groupe des matrices triangulaires supérieures ou dans  $GL_2(\mathcal{O})$  pour  $\mathcal{O}$  un anneau d’entiers algébriques.

Sous des hypothèses de finitude sur le groupe, comme être de type fini, il est naturel de se demander s’il existe une borne (effective) sur le nombre de décompositions “successives” obtenues par la théorie de Bass-Serre, et s’il existe une décomposition “maximale” et “unique” (effective) du groupe.

L’archétype de ces résultats est le théorème de Grushko : pour  $G$  un groupe de type fini, engendré par  $p$  éléments, 1) si  $G$  est un produit libre de  $m$  facteurs non triviaux,

alors  $m \leq p$ ; 2)  $G$  est un produit libre  $A_1 * \cdots * A_m * \mathbb{F}_n$ , avec  $\mathbb{F}_n$  un groupe libre de rang  $n$ ,  $A_i$  non trivial, non infini cyclique, et non produit libre de groupes non triviaux; 3) si  $A'_1 * \cdots * A'_{m'} * \mathbb{F}_{n'}$  est une autre telle décomposition, alors  $m = m'$  et  $n = n'$  et à permutation près,  $A_i$  et  $A'_i$  sont conjugués dans  $G$ .

Les trois problèmes analogues pour d'autres classes d'actions de groupes sur les arbres discrets que celles à stabilisateurs d'arête triviaux, sont connus sous les noms d'*accessibilité* (voir [93]) pour le premier et de *décomposition canonique* pour les deux autres. La source principale d'inspiration vient de la topologie de petite dimension, avec en particulier les décompositions en pantalons de surfaces (voir par exemple [32]), et les décompositions de Kneser (le long de sphères), de Jaco-Shalen et Johannson (le long de tores et anneaux) des variétés de dimension 3 [49, 50].

Nous renvoyons aux résultats d'accessibilité de M. Dunwoody [28, 29] (pour les stabilisateurs d'arête finis, en liaison avec le théorème de Stallings sur les groupes ayant une infinité de bouts, voir [52]), M. Bestvina-M. Feighn [8] (pour les stabilisateurs d'arête vérifiant la propriété (FA) (respectivement (FA)') d'avoir, pour toute action sur un arbre discret, un point fixe (respectivement un point ou bout fixe), Z. Sela [82] (pour les actions ayant une borne uniforme sur les diamètres des ensembles de points fixes), et de décomposition canonique de E. Rips-Z. Sela [78] (pour les stabilisateurs d'arête infinis cycliques), M. Dunwoody-M. Sageev [31] et T. Delzant [24, 26].

L'"unicité" de décompositions "maximales" permet en particulier d'étudier le groupe des automorphismes d'un groupe agissant sur un arbre discret. En effet,  $\text{Aut}(G)$  agit sur les actions de  $G$  sur les arbres discrets par précomposition. Par exemple, par le théorème de Fuchs-Rabinovich, si  $G = A_1 * \cdots * A_{m+1}$  est une décomposition de Grushko, alors  $\text{Aut}(G)$  contient un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur le produit direct des  $\text{Out}(A_i)$ , de noyau engendré par les conjugaisons partielles sur chaque facteur. Comme un groupe libre est un bloc élémentaire dans le théorème de Grushko, ceci n'apporte aucune information sur son groupe d'automorphismes. Les actions de groupes libres sur les arbres sont par contre fort utiles, voir [21, 22, 10, 35, 71, 84].

J.-P. Serre a remarqué qu'un sous-groupe d'un groupe qui agit sur un arbre discret  $T$  hérite aussi d'une décomposition par son action sur  $T$ . Par exemple, par le théorème de Kurosh, tout sous-groupe de type fini  $H$  d'un produit libre  $G = A * B$  est un produit libre  $H_1 * \cdots * H_m * \mathbb{F}_n$ , avec  $\mathbb{F}_n$  un groupe libre de rang  $n$ , et  $H_i$  un sous-groupe de  $H$  conjugué à un sous-groupe de  $A$  ou de  $B$ .

Dans [44] (voir l'exposé 722 au Séminaire Bourbaki de E. Ghys [40]), M. Gromov a défini une classe de groupes, les groupes hyperboliques, qui contient et généralise

largement la classe des groupes fondamentaux de variétés compactes à courbure négative. Comme pour  $\mathbb{H}^3$ , tout graphe de Cayley d'un groupe hyperbolique, vu de loin, ressemble à un arbre.

Il fallait donc s'attendre à retrouver pour ces groupes des propriétés analogues à celles des groupes agissant sur des arbres discrets, en particulier correspondant aux résultats de Grushko, Fuchs-Rabinovich et Kurosh. C'est ce que montrent les travaux de M. Gromov [44] (sur les sous-groupes des groupes hyperboliques), E. Rips-Z. Sela [76], Z. Sela [81, 83] (automorphismes des groupes hyperboliques et décidabilité du problème d'isomorphisme entre groupes hyperboliques) et T. Delzant [23, 25, 26]. Les groupes de surfaces forment des blocs élémentaires dans la décomposition de Rips-Sela au-dessus de groupes infinis cycliques, analogues aux groupes libres dans le théorème de Grushko. Pour étudier leurs sous-groupes et leurs automorphismes, il faut d'autres outils [89, 32, 16, 48].

Les techniques de E. Rips et Z. Sela reposent de manière essentielle sur les travaux de E. Rips sur les actions de groupes sur les arbres non discrets. L'approche unificatrice (hormis l'étude du groupe des automorphismes) de T. Delzant évite ces travaux, et repose sur de jolies techniques topologiques, inspirées par M. Dunwoody [28], à base de feuilletages de 2-complexes. Voir aussi les articles récents de M. Dunwoody-M. Sageev [31].

Je voudrais remercier chaleureusement D. Gaboriau (pour nos lectures communes), T. Delzant (pour ses conversations enthousiastes), G. Levitt (pour ses échanges électroniques) et Z. Sela. Leurs contributions à ce texte sont importantes.

## 1 La théorie de Bass-Serre des actions de groupes sur les arbres discrets

Un *arbre discret* est un 1-complexe simplicial, connexe et simplement connexe. Les actions sur un arbre discret seront toutes à gauche, par automorphismes simpliciaux, *sans inversion* (i.e. sans élément permutant les deux sommets d'une arête), hypothèse qui est bénigne, quitte à subdiviser. Cette hypothèse implique que le quotient est naturellement un *graphe*, i.e. un CW-complexe connexe de dimension 1.

Pour montrer qu'un groupe  $G$  est libre, une méthode topologique consiste à le faire opérer librement sur un arbre  $T$ . Le groupe  $G$  s'identifie alors, par la théorie des revêtements, au groupe fondamental du graphe quotient  $G \backslash T$ , qui est libre.

Rappelons que le *graphe de Cayley* d'un groupe  $\Gamma$  muni d'une partie génératrice  $\{x_i\}_{i \in I}$  est le graphe d'ensemble de sommets  $\Gamma$ , avec une arête entre deux sommets  $x, y$

s'il existe un générateur  $x_i$  tel que  $x = yx_i$  ou  $x = yx_i^{-1}$ .

Montrons par exemple le théorème de Nielsen-Schreier disant qu'un sous-groupe  $H$  d'un groupe libre  $G$  est libre. Pour cela, faisons agir  $H$  sur le graphe de Cayley de  $G$  pour une partie génératrice libre. Ce graphe est un arbre puisque  $G$  est libre. Le sous-groupe  $H$  de  $G$  agit librement sur  $T$ , donc est libre.

### 1.1 L'arbre de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ .

Pour démontrer le théorème d'Ihara, J.-P. Serre montre que  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  agit sur l'arbre discret  $T$  régulier de valence  $q + 1$ , avec stabilisateurs de sommet des sous-groupes compacts (isomorphes à  $SL_2(\mathbb{Z}_p)$  et formant deux classes de conjugaison). Cet arbre est l'immeuble de Tits (de type  $\tilde{A}_1$ ) associé au système de Tits  $(G, B, N, S)$  (voir [85] page 124) avec

$$G = SL_2(\mathbb{Q}_p), \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}_p) / c \equiv 0 \pmod{p} \right\},$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -p^{-1} \\ p & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et  $N$  le normalisateur dans  $G$  du sous-groupe diagonal.

L'ensemble des sommets de  $T$  s'identifie avec l'espace des classes d'équivalence des réseaux du  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel  $\mathbb{Q}_p^2$ , i.e. des sous- $\mathbb{Z}_p$ -modules libres de rang 2 engendrant  $\mathbb{Q}_p^2$ . Deux réseaux sont équivalents s'ils sont homothétiques par un élément de  $\mathbb{Q}_p^*$ . Le groupe  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  agit naturellement sur cet ensemble, et  $T$  est muni de l'unique distance invariante telle que la distance des images des réseaux  $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$  et  $\mathbb{Z}_p \oplus p\mathbb{Z}_p$  est 1. Deux sommets de  $T$  sont alors liés par une arête si leur distance est 1, et  $T$  est un arbre (voir [85] section II.1.1). Voir [43] pour la construction analogue en rang supérieur.

Comme les stabilisateurs de sommet sont compacts, un sous-groupe discret rencontre un tel stabilisateur en un groupe fini. Donc un sous-groupe discret sans torsion de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  agit librement sur  $T$ , et par conséquent est libre.

Ceci se généralise aux sous-groupes discrets sans torsion de tout groupe algébrique simple de rang relatif 1 sur un corps local (commutatif) localement compact [85].

### 1.2 Groupe fondamental d'un graphe de groupes

H. Bass et J.-P. Serre donnent un théorème de structure pour les groupes agissant sur les arbres discrets. Nous en donnerons l'approche topologique due à P. Scott-C.T.C Wall [80]. Voir [46] pour une généralisation aux actions de groupes sur des complexes de dimension supérieure.

Un *graphe de groupes* est la donnée  $(G, \mathcal{G})$  d'un graphe connexe  $\mathcal{G}$ , d'un groupe  $G_a$  pour toute arête  $a$ , d'un groupe  $G_s$  pour tout sommet  $s$ , et de deux morphismes injectifs  $G_a \rightarrow G_{a_0}$  et  $G_a \rightarrow G_{a_1}$  pour toute arête  $a$  de sommets (éventuellement confondus)  $a_0, a_1$ . (Implicitement une orientation arbitraire anodine de chaque arête a été choisie.)

Voir [3] page 16 pour la définition d'un *morphisme de graphes de groupes*.

À un graphe de groupe  $(G, \mathcal{G})$ , et à tout choix  $\mathcal{T}$  d'arbre maximal dans  $\mathcal{G}$ , est associé un groupe  $\pi_1(G, \mathcal{G}; \mathcal{T})$ .

Choisissons des CW-complexes pointés, à revêtements universels contractiles,  $X_s, X_a$  pour tout sommet  $s$  et arête  $a$ , de groupes fondamentaux  $G_s, G_a$ . Nous noterons  $*$  les points bases. Choisissons (voir par exemple [88]) deux morphismes de CW-complexes pointés  $f_{a,i} : X_a \rightarrow X_{a_i}$ , induisant les morphismes  $G_a \rightarrow G_{a_i}$  sur les groupes fondamentaux, pour  $i = 0, 1$ .

Considérons l'espace  $E$  obtenu en prenant la réunion disjointe des  $X_s$  pour  $s$  sommet et des  $X_a \times [0, 1]$  (avec la structure de CW-complexe produit) pour  $a$  arête. Prenons le quotient de cette union disjointe par la relation d'équivalence engendrée par  $(x, i) \in X_a \times [0, 1] \sim f_{a,i}(x) \in X_{a_i}$  pour  $i = 0, 1$ .

Notons que le CW-complexe  $E$  admet une projection continue naturelle sur le graphe  $\mathcal{G}$ . Tout sous-arbre maximal  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{G}$  se relève naturellement dans  $E$ , et nous prendrons pour point base de  $E$  n'importe quel point de ce relevé.

Le *groupe fondamental du graphe de groupes*  $\pi_1(G, \mathcal{G}; \mathcal{T})$  est par définition  $\pi_1(E)$ . Il ne dépend de  $\mathcal{T}$  qu'à isomorphisme près. Les groupes de sommets s'injectent naturellement dans  $\pi_1(G, \mathcal{G}; \mathcal{T})$ .

**Exemples :** (1) Si  $\mathcal{G}$  est réduit à une arête  $a$  de sommets distincts  $s, s'$ , alors  $\pi_1(G, \mathcal{G}; a)$  est appelée la *somme amalgamée de  $G_s$  et  $G_{s'}$  au-dessus de  $G_a$*  pour les injections  $\rho : G_a \rightarrow G_s$  et  $\rho' : G_a \rightarrow G_{s'}$ , et notée (par abus)  $G_s *_{G_a} G_{s'}$ . C'est un élément universel dans la catégorie dont les objets sont les groupes  $H$  munis de morphismes  $G_s \rightarrow H$  et  $G_{s'} \rightarrow H$  rendant commutatif le diagramme carré formé avec  $\rho, \rho'$ , et dont les morphismes sont les morphismes de groupe  $H \rightarrow H'$  rendant le diagramme évident commutatif. Une somme amalgamée est dite *non triviale* si les injections de  $G_a$  dans  $G_s$  et  $G_{s'}$  sont propres.

(2) Si  $\mathcal{G}$  est réduit à une arête  $a$  de sommets confondus  $s, s'$ , alors  $\pi_1(G, \mathcal{G}; \{s\})$  est appelée l'*extension HNN de  $G_s$  au-dessus de  $G_a$*  pour les injections  $\rho, \rho' : G_a \rightarrow G_s$ , et notée (par abus)  $G_s *_{G_a}$ . Les extensions HNN vérifient une propriété universelle analogue.

Soit  $(G, \mathcal{G})$  un graphe de groupes,  $\mathcal{T}$  un sous-arbre maximal,  $s$  un sommet. Supposons que  $G_s = \pi_1(H, \mathcal{H}; \mathcal{U})$  de sorte que l'image de tout morphisme  $G_a \rightarrow G_{a_i}$  avec  $a_i = s$  soit contenu dans le conjugué  $g_{a,i} H_{v_{a,i}} g_{a,i}^{-1}$  d'un groupe de sommet  $H_{v_{a,i}}$  de  $(H, \mathcal{H})$ , avec

$g_{a,i} \in G_s$ . Le graphe de groupes  $(G', \mathcal{G}')$  suivant est appelé un *raffinement* de  $(G, \mathcal{G})$ . Le graphe  $\mathcal{G}'$  est obtenu à partir de  $\mathcal{G}$  en enlevant  $s$  et ajoutant  $\mathcal{H}$ , de sorte qu'une arête  $a$  de  $\mathcal{G}$  d'extrémité  $s$  soit maintenant d'extrémité  $v_{a,i}$  dans  $\mathcal{H}$ . Prenons pour arbre maximal  $T'$  de  $\mathcal{G}'$  la réunion de  $T$  et  $\mathcal{U}$ . Les groupes d'arêtes et de sommets de  $(G', \mathcal{G}')$  sont ceux évidents. Pour  $a$  arête de  $\mathcal{G}$  d'extrémité  $s$ , le morphisme  $G_a \rightarrow H_{v_{a,i}}$  est la composée de  $G_a \rightarrow G_s$  avec la conjugaison par  $g_{a,i}^{-1}$ . Les autres morphismes sont ceux évidents.

Nous avons un isomorphisme naturel  $\pi_1(G', \mathcal{G}'; T') \rightarrow \pi_1(G, \mathcal{G}; T)$ . Un groupe fondamental de graphe de groupes peut donc être pensé comme une succession de sommes amalgamées et d'extensions HNN.

En terme de présentation, si  $g \mapsto g^{a_i}$  est le morphisme injectif  $G_a \rightarrow G_{a_i}$  pour  $i = 0, 1$ , alors une application multiple du théorème de van Kampen montre que  $\pi_1(G, \mathcal{G}; T)$  est le groupe engendré par les  $G_s$  pour  $s$  sommet de  $\mathcal{G}$  et les éléments  $t_a$  pour  $a$  arête de  $\mathcal{G}$ , soumis aux relations

$$t_a g^{a_0} t_a^{-1} = g^{a_1} \text{ si } g \in G_a$$

$$t_a = 1 \text{ si } a \subset T.$$

Par exemple, la somme amalgamée  $G_s *_{G_a} G_{s'}$  est  $\langle G_s, G_{s'} / \rho(g) = \rho'(g) \forall g \in G_a \rangle$ , et l'extension HNN  $G_s *_{G_a}$  est  $\langle G_s, t / t\rho(g)t^{-1} = \rho'(g) \forall g \in G_a \rangle$ .

### 1.3 Action de groupe sur un arbre et graphe de groupes

Soit  $\Gamma$  un groupe qui agit sur un arbre discret  $T$ . Notons  $\pi : T \rightarrow \mathcal{G} = \Gamma \backslash T$  l'application canonique,  $\mathcal{T}$  un sous-arbre maximal de  $\mathcal{G}$  et  $\tilde{\mathcal{T}}$  un de ses relevés dans  $T$ . Pour  $x$  sommet ou arête de  $T$ , notons  $G_x$  le stabilisateur de l'unique sommet ou arête  $\tilde{x}$  de  $\tilde{\mathcal{T}}$  correspondant. Pour  $a$  arête de  $\mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$ , d'extrémités  $a_0, a_1$ , notons  $\tilde{a}$  l'unique arête de  $T$  relevant  $a$  d'origine  $\tilde{a}_0$  et notons  $G_a$  le stabilisateur de  $\tilde{a}$ . Notons  $G_a \rightarrow G_{a_0}$  l'inclusion. Si  $s$  est le sommet de  $\tilde{a}$  différent de  $\tilde{a}_0$ , il existe  $\gamma_a \in G$  envoyant  $\tilde{a}_1$  sur  $s$ . Notons  $G_a \rightarrow G_{a_1}$  le morphisme  $g \mapsto \gamma_a^{-1} g \gamma_a$ .

**Théorème 1.1** (*H. Bass-J.-P. Serre [85] page 76*) *Le morphisme  $\pi_1(G, \mathcal{G}; T) \rightarrow \Gamma$  induit par les inclusions  $G_s \hookrightarrow G$  et par  $t_a \mapsto \gamma_a$  est un isomorphisme de groupe.  $\square$*

Réciproquement, soient  $(G, \mathcal{G})$  un graphe de groupes,  $T$  un arbre maximal dans  $\mathcal{G}$ , et  $\tilde{E}$  le revêtement universel du CW complexe  $E$  (avec les notations ci-dessus). Alors le quotient de  $\tilde{E}$  par la relation d'équivalence qui écrase en un point chaque relevé de  $X_a \times \{t\}$  et de  $X_s$ , pour  $a, s$  respectivement arête et sommet de  $\mathcal{G}$ , est un arbre discret appelé l'*arbre de Bass-Serre* de  $(G, \mathcal{G}; T)$ . De plus,  $\pi_1(G, \mathcal{G}; T)$  agit sur  $T$ , de sorte que le

graphe de groupes associé comme précédemment à cette action soit  $(G, \mathcal{G})$ . Un tel arbre est unique à isomorphisme équivariant près.

## 2 Le théorème de Rips sur les actions de groupes sur les arbres

Un *arbre* est un espace métrique  $T$  tel que d'une part, pour tous points distincts  $x, y$  de  $T$ , il existe un et un seul arc topologique dans  $T$  d'extrémités  $x, y$ , et d'autre part, tel que cet unique arc soit isométrique à un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Cette définition est due à J. Tits [91], voir aussi les articles fondamentaux de J. Morgan-P. Shalen [86, 87, 63].

**Exemples:** 1) La réalisation géométrique de tout arbre discret, munie de l'unique métrique maximale rendant chaque arête isométrique à  $[0, 1]$ , est un arbre.

2) Le produit libre  $\mathbb{R} * \mathbb{R}$  de deux copies de  $\mathbb{R}$ , considéré comme groupe discret, muni de la distance invariante à gauche telle que la distance du mot réduit  $x_1 \cdots x_n$  à l'origine soit  $|x_1| + \cdots + |x_n|$ , est un arbre.

3) Tout immeuble de Tits affine (pas forcément discret, voir [92]), de type  $\tilde{A}_1$  (i.e. de groupe de Coxeter le groupe diédral infini), est un arbre. En fait, tout arbre sans sommet terminal (i.e. sans point n'appartenant pas à l'intérieur d'un arc) est un tel immeuble.

4) Si  $(X, d)$  est un espace métrique hyperbolique (au sens de M. Gromov [44, 41]), alors pour tout ultrafiltre  $\omega$  sur  $\mathbb{N}$ , pour toute suite  $\epsilon_i > 0$  telle que  $\lim_{\omega} \epsilon_i = 0$ , pour toute suite de points bases  $x_i$ , l'espace métrique  $\lim_{\omega} (X, \epsilon_i d, x_i)$  est un arbre. Il est en général non discret (voir section 3.2). La réciproque est vraie (voir [44] page 77).

5) Une source importante d'exemples (voir [65, 66, 42, 55]) vient de la théorie des *feuilletages (transversalement) mesurés de codimension un*.

Soit  $M$  une variété topologique,  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension un, dont chaque arc transverse est munie d'une mesure (borélienne, positive, régulière) lisse (i.e. sans atome) de support total, invariante par holonomie le long des feuilles.

Cette mesure transverse permet de définir la longueur d'un chemin transverse par morceaux au feuilletage : sa longueur est la somme des mesures totales de chaque morceau transverse. Alors  $M$  est munie d'une pseudo-distance  $d_{\mathcal{F}}$  : pour  $x, y$  dans  $M$ ,  $d_{\mathcal{F}}(x, y)$  est la borne inférieure des longueurs des chemins de  $x$  à  $y$ . Notons que l'on peut avoir  $d(x, y) = 0$  sans que  $x = y$ , par exemple si  $x, y$  sont dans une même feuille.

A cette pseudo-distance est canoniquement associé un espace métrique  $T(\mathcal{F})$ , appelé *l'espace des feuilles rendu séparé*. C'est l'espace quotient de  $M$  par la relation d'équivalence  $x \sim y$  si  $d_{\mathcal{F}}(x, y) = 0$ , muni de la distance induite par  $d_{\mathcal{F}}$ .

En général,  $\mathcal{F}$  n'est pas un arbre, par exemple le feuilletage du tore  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  par les cercles méridiens  $\mathbb{S}^1 \times \{*\}$  a pour espace des feuilles rendu séparé un cercle. Notons que si  $\mathcal{F}$  a une feuille dense, alors  $T(\mathcal{F})$  est un point. Mais généralisant un résultat de [42], G. Levitt a montré le résultat suivant.

**Proposition 2.1** ([55] Corollary III.5) *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage mesuré de codimension un sur  $M$  connexe, et  $N(\mathcal{C})$  un sous-groupe normal de  $\pi_1 M$  (pour un choix de point base anodin) normalement engendré par les classes d'homotopie libre de certains lacets contenus dans les feuilles. Si  $\tilde{M} \rightarrow M$  est le revêtement défini par  $N(\mathcal{C})$ , et  $\tilde{\mathcal{F}}$  est le feuilletage mesuré relevé, alors  $T(\tilde{\mathcal{F}})$  est un arbre.  $\square$*

Dans le cas des variétés compactes  $M$ , l'existence d'un feuilletage mesuré est très restrictif. C'est pour cela qu'il est utile d'admettre des singularités et de remplacer variétés par complexes simpliciaux. Par exemple, pour les surfaces, nous admettrons les singularités isolées de type selle à  $n \geq 1$  branches (voir [32]). Plus généralement (voir [56]), nous considérerons des 2-complexes simpliciaux  $\Sigma$ , chaque 1-cellule étant ou bien transverse ou bien contenue dans une feuille, et où le feuilletage sur chaque 2-cellule est topologiquement conjugué au feuilletage soit par perpendiculaires soit par parallèles à un côté. Le résultat 2.1 est encore valable pour ces exemples.

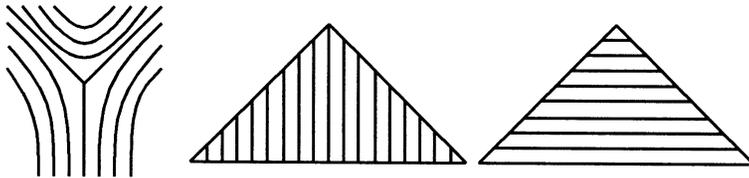


Figure 1 : Modèles locaux de feuilletages mesurés.

6) Comme un feuilletage est essentiellement défini par la donnée de son pseudogroupe transverse (les applications d'holonomie le long des feuilles sur une transversale rencontrant toute feuille), il est naturel que les exemples particuliers de feuilletages mesurés ci-dessus proviennent de systèmes d'isométries partielles entre intervalles de  $\mathbb{R}$ .

Un *arbre fini* est un arbre, réunion d'un nombre fini d'arcs. Un *système d'isométries*  $S = (D, \{\varphi_i : A_i \rightarrow B_i\}_{i=1 \dots k})$  est la donnée d'une union disjointe finie d'arbres finis  $D$  (appelée *domaine*) et d'un ensemble fini d'isométries partielles  $\varphi_i$  (appelées *générateurs*) entre sous-arbres finis de  $D$  (appelés *bases*).

A tout système d'isométries  $S$ , nous associons par suspension un *2-complexe feuilleté*  $\Sigma = \Sigma(S)$  de la manière suivante.

Partons de l'union disjointe de  $D$  (feuilleté par points) et de bandes  $A_i \times [0, 1]$  (feuilletées par  $\{*\} \times [0, 1]$ ). Nous obtenons  $\Sigma$  en recollant  $A_i \times [0, 1]$  à  $D$ , en identifiant chaque  $(t, 0) \in A_i \times \{0\}$  avec  $t \in A_i \subset D$  et chaque  $(t, 1) \in A_i \times \{1\}$  avec  $\varphi_i(t) \in B_i \subset D$ . Nous identifions  $D$  avec son image dans  $\Sigma$ .

Le feuilletage  $\mathcal{F}$  est la décomposition de  $\Sigma$  en *feuilles*. Une feuille est une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence  $\sim$  engendrée par  $x \sim y$  s'il existe  $i = 1, \dots, k$  avec  $x, y$  correspondant à deux points de la même feuille  $\{*\} \times [0, 1]$  de  $A_i \times [0, 1]$ . En subdivisant chaque bande  $A_i \times [0, 1]$  en deux triangles, ce feuilletage est bien du type ci-dessus.

Si  $\mathcal{C}$  est un ensemble fini de lacets contenus dans les feuilles de  $\Sigma$ , nous noterons  $N(\mathcal{C}) \subset \pi_1 \Sigma$  le sous-groupe normal engendré par les lacets de  $\mathcal{C}$ .

D'après le résultat 2.1, si  $\tilde{\mathcal{F}}$  est le feuilletage relevé de  $\mathcal{F}$  dans le revêtement  $\tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  défini par  $N(\mathcal{C})$ , alors l'espace des feuilles rendu séparé  $T(\tilde{\mathcal{F}})$  est un arbre, naturellement muni d'une action isométrique de  $\pi_1 \Sigma / N(\mathcal{C})$ .

Dans leurs articles de référence [86, 87, 63], J. Morgan et P. Shalen ont énoncé une suite de conjectures pour savoir dans quelle mesure les résultats de la section 1 se généralisent aux arbres non discrets, et ont donné des réponses partielles.

Dans ce qui suit, toute action de groupe sur un espace métrique est une action isométrique à gauche. Voici quelques exemples qui montrent que les actions sur les arbres non discrets présentent des particularités.

**a) Exemple homogène.** Remarquons que le groupe abélien libre  $\mathbb{Z}^n$  admet une action isométrique libre sur la droite  $\mathbb{R}$  (en prenant  $n$  translations rationnellement indépendantes). Réciproquement, les seuls groupes (de type fini) agissant librement sur la droite sont les groupes abéliens libres (de type fini).

Notons qu'un groupe de type fini d'isométries de  $\mathbb{R}$  n'est pas un produit libre non trivial. Mais il se décompose au-dessus d'un groupe abélien. S'il ne contient que des translations, il est isomorphe à  $A *_C$ , avec  $A = C = \mathbb{Z}^{n-1}$  et les deux inclusions  $A \rightarrow C$  étant l'identité. S'il contient une réflexion, alors il est isomorphe à  $A *_C B$ , avec  $A$  et  $B$  le produit semi-direct de  $\mathbb{Z}^{n-1}$  par  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  agissant sur  $\mathbb{Z}^{n-1}$  par  $x \mapsto -x$ , et  $C = \mathbb{Z}^{n-1}$  s'injectant de manière évidente dans  $A, B$ . Notons que toute isométrie ayant un point fixe est conjuguée à un élément d'un groupe de sommet  $A$  ou  $B$ .

**b) Exemple échange d'intervalles.** Si  $S$  est une surface connexe compacte sans bord, de caractéristique d'Euler  $\chi(S)$  inférieure ou égale à  $-2$ , alors son groupe fondamental  $\pi_1 S$  admet une action libre sur un arbre ([66]).

En effet, une telle surface admet un feuilletage  $\mathcal{F}$  transversalement mesuré, à sin-

gularités isolées de type selles à  $n \geq 3$  branches, qui est *arationnel*, i.e. sans lacet non trivial plongé dans une feuille (éventuellement contenant des singularités). Par exemple, la surface  $S$  comme ci-dessus, et de plus orientable avec  $\chi(S) = -2$ , peut s'obtenir par revêtement branché d'ordre 2 au-dessus de deux points  $u, v$  d'un tore. Si ce tore  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  est muni d'un feuilletage quotient du feuilletage de  $\mathbb{R}^2$  par droites parallèles à une droite de pente irrationnelle, et si les points  $u, v$  ne sont pas dans une même feuille du tore, alors le feuilletage relevé sur  $S$  (dont les deux singularités sont du type selles à 4 branches) est transversalement mesuré et arationnel.

Si  $\tilde{\mathcal{F}}$  est le feuilletage relevé à un revêtement universel  $\tilde{S}$ , alors l'espace des feuilles rendu séparé  $T(\tilde{\mathcal{F}})$  est un arbre par 2.1, naturellement muni d'une action isométrique de  $\pi_1 S$ . Il est montré dans [32, 66] que deux points de  $\tilde{S}$  sont à pseudo-distance nulle si et seulement s'ils sont dans la même feuille de  $\tilde{\mathcal{F}}$ . En particulier, l'action est libre par arationnalité de  $\mathcal{F}$ .

Notons que  $\pi_1 S$  n'est pas un produit libre non trivial, mais se décompose au-dessus d'un groupe cyclique, pour tout choix d'une courbe fermée simple  $c$ , séparant son voisinage tubulaire, non homotope à zéro sur  $S$ . Le théorème de van Kampen montre que  $\pi_1 S$  est isomorphe à une somme amalgamée  $\pi_1 S_1 *_Z \pi_1 S_2$  ou à une extension HNN  $\pi_1 S_1 *_Z$  respectivement si  $c$  sépare  $S$  en deux sous-surfaces compactes à bord  $S_1, S_2$ , ou si  $c$  ne sépare pas et  $S_1$  est la surface compacte à bord obtenue en découpant  $S$  le long de  $c$ .

**c) Exemple exotique.** Considérons le système d'isométries  $S$  suivant (voir [54] Remarque V.10). Soit  $\lambda$  l'unique racine dans  $]0, 1[$  du polynôme  $x^3 + x^2 + x - 1$ . Soient  $a = \frac{1-\lambda}{2}, b = \frac{1-\lambda^2}{2}, c = \frac{\lambda^2+\lambda}{2}$  de sorte que  $a + b + c = 1$ . Soit enfin  $I$  l'intervalle  $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ . Le domaine de  $S$  est  $D = [-\frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}]$  et  $S$  a trois générateurs  $\varphi_a : I \rightarrow a + I, \varphi_b : a + I \rightarrow a + b + I, \varphi_c : a + b + I \rightarrow 1 + I$  qui sont respectivement les translations par  $a, b, c$ .

Il n'est pas difficile de montrer que le 2-complexe feuilleté  $\Sigma$  de  $S$  n'a aucun lacet non trivial dans les feuilles, et que toute feuille est dense (voir [55]). Si  $\tilde{\Sigma}$  est un revêtement universel de  $\Sigma$ , et  $\tilde{\mathcal{F}}$  le feuilletage relevé, alors l'espace des feuilles rendu séparé  $T = T(\tilde{\mathcal{F}})$  est un arbre, muni d'une action du groupe du revêtement  $\mathbb{F}_3$ , qui est libre à trois générateurs. Il n'est pas difficile de montrer (voir [35]) que deux points de  $\tilde{\Sigma}$  sont à pseudo-distance nulle si et seulement s'ils sont dans une même feuille. Donc l'action de  $\mathbb{F}_3$  est libre, et ses orbites sont denses dans  $T$ .

**Proposition 2.2** ([55] Theorem 5) *Il existe une famille non dénombrable (de classes d'isométrie équivariante) d'actions libres à orbites denses de  $\mathbb{F}_3$  sur des arbres.*  $\square$

Le résultat suivant de E. Rips a résolu (presque) toutes les questions de J. Morgan et

P. Shalen. La condition de stabilité, élaborant légèrement celle de [42], est définie juste après.

**Théorème 2.3** *Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini, agissant sans point fixe global sur un arbre  $T$ . Si l'action est stable, alors  $\Gamma$  se décompose au-dessus d'une extension d'un groupe abélien par un sous-groupe de  $\Gamma$  fixant un arc (non dégénéré) de  $T$ .*

E. Rips n'a pas rédigé la preuve de ce théorème, mais a donné les indications cruciales dans une Conférence à l'Isle of Thorns en 1991. La forme exacte de l'énoncé ci-dessus et sa preuve complète sont dues à M. Bestvina et M. Feighn [9] pour les groupes de présentation finie. L'extension au cas de type fini est due à Z. Sela [82]. Voir [36] pour le cas des actions libres.

Un arbre est *non dégénéré* s'il contient au moins deux points. Soit  $T$  un arbre muni d'une action d'un groupe  $G$ . Un sous-arbre non dégénéré  $S$  de  $T$  est *stable* si pour tout sous-arbre non dégénéré  $S'$  de  $S$ , le sous-groupe de  $G$  fixant (point par point)  $S'$  fixe aussi  $S$ . L'action de  $G$  sur  $T$  est stable si tout sous-arbre non dégénéré contient un sous-arbre stable.

**Exemples** i) Une action sur un arbre discret est stable.

ii) Une action libre, ou à stabilisateurs d'arc (sous-entendu non dégénéré) qui sont triviaux, est stable. En fait, la preuve du théorème 2.3 donne assez facilement dans le cas des actions libres le résultat plus fort énoncé en 2, voir [36]. Notons que le théorème 2 est faux sans l'hypothèse de type fini (voir par exemple [30]).

iii) Si  $\Gamma$  est un groupe hyperbolique, qui agit sur un arbre avec stabilisateurs d'arc virtuellement cycliques, alors l'action est stable, et  $\Gamma$  se décompose au-dessus d'un groupe virtuellement cyclique. En effet,  $\Gamma$  est de type fini, toute suite croissante de sous-groupes virtuellement cycliques est stationnaire, et tout sous-groupe qui ne contient pas de groupe libre de rang deux est virtuellement cyclique (voir par exemple [44, 41]).

iv) Si  $\Gamma$  est le groupe fondamental (de type fini) d'une variété riemannienne  $M$  complète à courbure négative pincée  $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$ , qui agit sur un arbre avec stabilisateurs d'arc virtuellement nilpotents, alors l'action est stable et  $\Gamma$  se décompose au-dessus d'un groupe virtuellement nilpotent. En effet, un sous-groupe de  $\Gamma$  qui ne contient pas de groupe libre de rang deux stabilise un point ou une paire de points dans  $M \cup \partial M$ , avec  $\partial M$  le bord visuel de  $M$ , et un tel stabilisateur est de type fini et virtuellement nilpotent (voir [12]).

v) Voici un exemple d'action non stable du groupe  $\mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}$  sur un arbre non discret. Considérons le tore  $\mathbb{T}^2$  muni d'un feuilletage par droites de pentes irrationnelles comme

précédemment. Soit  $I$  un arc transverse. Collons sur  $I$  l'anneau  $I \times \mathbb{S}^1$ , feuilleté par les cercles  $\{*\} \times \mathbb{S}^1$ . Le revêtement universel du 2-complexe obtenu  $\Sigma$  a son espace des feuilles rendu séparé qui est un arbre, mais l'action de  $\pi_1 \Sigma$  n'est pas stable.

Nous allons donner une nouvelle preuve du théorème de Rips 2.3, fruit d'un travail en commun avec D. Gaboriau, qui mélange les preuves de [36] et [9]. Le lecteur non spécialiste peut aller directement en section 3. Cette approche évite la notion de complexité originellement introduite par E. Rips, suite aux travaux de G.S. Makanin et A.A. Razborov. La preuve, de nature topologique, utilise les outils des systèmes dynamiques et des feuilletages. Pour simplifier la lecture, nous supposons que  $\Gamma$  est de présentation finie, le cas général s'obtenant par passage à la limite inductive.

## 2.1 Des actions sur les arbres aux 2-complexes feuilletés

Donnons tout d'abord quelques définitions supplémentaires sur les systèmes d'isométries  $S = (D, \{\varphi_i : A_i \rightarrow B_i\}_{i=1 \dots k})$ .

Un générateur de  $S$  est un *singleton* si chacune de ses bases est réduite à un point. Un système d'isométries est *non dégénéré* si chaque composante de  $D$  et chaque base  $A_i, B_i$  est non dégénérée.

Une *composante connexe* de  $S$  est le système d'isométries formé des générateurs de  $S$  ayant leurs bases dans une composante connexe  $\Sigma_0$  de  $\Sigma$ , de domaine  $\Sigma_0 \cap D$ . Un système d'isométries  $S$  est *connexe* si  $\Sigma$  l'est.

Chaque mot en les générateurs de  $S$  fournit une isométrie partielle de  $D$  (définie de la manière maximale évidente, de domaine éventuellement vide), appelée  *$S$ -mot*. Deux points de  $D$  sont dans la même  *$S$ -orbite* s'il existe un  $S$ -mot envoyant l'un sur l'autre. Une  $S$ -orbite est l'intersection d'une feuille de  $\Sigma$  avec  $D$ .

Si  $\omega$  est un  $S$ -mot et  $x$  un point de son domaine, nous noterons  $[x; \omega]$  le chemin dans la feuille de  $x$ , entre  $x$  et  $\omega(x)$ , obtenu en suivant consécutivement les bandes  $A_i \times [0, 1]$  correspondant aux lettres du mot  $\omega$ .

Si  $\mathcal{C}$  est un ensemble fini de lacets contenus dans les feuilles de  $\Sigma$ , nous noterons  $X$  le complexe obtenu en recollant sur  $\Sigma$  un disque pour chaque lacet dans  $\mathcal{C}$ , en appliquant le bord de ce disque sur ce lacet. Alors le groupe fondamental de  $X$  est naturellement isomorphe au quotient de  $\pi_1 \Sigma$  par  $N(\mathcal{C})$ .

Fixons-nous une présentation finie de  $\Gamma$

$$\langle \gamma_1, \dots, \gamma_k \mid r_1 = \dots = r_m = 1 \rangle.$$

L'idée fondamentale de E. Rips est la suivante. Considérons un sous-arbre fini  $K$  dans

$T$ . Chaque  $\gamma_i$  fournit une isométrie partielle  $\varphi_i: A_i = K \cap \gamma_i^{-1}K \rightarrow B_i = \gamma_i K \cap K$  entre sous-arbres finis de  $K$ . Donc  $S = (K, \{\varphi_i\})$  est un système d'isométries, non dégénéré si  $K$  est assez grand.

Si  $K$  est suffisamment grand, alors chacune des relations  $r_j$  fournit un  $S$ -mot  $w_j$  de domaine non vide, qui est l'identité sur son domaine. Pour un point arbitrairement choisi  $x_j$  de ce domaine,  $\ell_j = [x_j; w_j]$  est un lacet dans la feuille de  $x_j$  dans  $\Sigma$ . Nous noterons  $\mathcal{C}$  la donnée de ces  $\ell_j$ .

Choisissons un point base dans  $K$ . Pour tout  $i$ , considérons le lacet dans  $\Sigma$  formé d'un arc dans  $K$  issu du point base jusqu'à un point  $x_i$  de  $A_i$ , puis de  $[x_i; \varphi_i]$ , puis d'un arc de  $K$  retournant au point base. Alors l'application qui associe  $g_i$  à ce générateur de  $\pi_1\Sigma$ , induit une identification du groupe fondamental  $\pi_1 X = \pi_1\Sigma/N(\mathcal{C})$  avec  $\Gamma$ .

Si  $\tilde{\Sigma}$  est le revêtement de  $\Sigma$  associé à  $N(\mathcal{C})$ , et  $\tilde{K}_0$  est un relevé arbitraire de  $K$ , alors il existe une unique application équivariante  $f$  de  $\tilde{\Sigma}$  dans  $T$ , constante sur les feuilles, qui envoie  $\tilde{K}_0$  sur  $K$  par l'application de revêtement. Notons que si  $\tilde{X}$  est le revêtement universel de  $X$ , alors  $\tilde{\Sigma}$  est naturellement contenu dans  $\tilde{X}$ , et  $f$  s'étend naturellement à  $\tilde{X}$ , chaque disque de  $X$  se relevant en un disque, dont le bord est envoyé par  $f$  sur un point.

L'utilisation de groupes fondamentaux nécessite des choix de points bases. Si  $S$  est un système d'isométrie connexe de domaine  $D$ , nous choisirons un *arbre maximal* de  $S$ , i.e. un arbre maximal dans le graphe dont les sommets sont les composantes connexes de  $D$ , avec une arête pour chaque générateur  $\varphi_i$  entre les deux composantes connexes de  $D$  contenant  $A_i, B_i$ . Ceci nous permettra d'identifier les groupes fondamentaux de  $\Sigma$  pour deux choix de points bases dans le domaine  $D$ , en utilisant un arc de l'un à l'autre dans la réunion de  $D$  et des bandes correspondant à cet arbre maximal.

Nous avons donc construit un triplet  $(S, \mathcal{C}, f)$  et que nous appellerons une *résolution* de l'action de  $\Gamma$  sur  $T$ , qui vérifie aisément les propriétés suivantes.

1.  $S = (K, \{\varphi_i\}_{i=1\dots k})$  est un système d'isométries connexe, muni d'un arbre maximal de bandes.
2.  $\mathcal{C}$  est un ensemble fini de lacets dans les feuilles du 2-complexe feuilleté  $\Sigma$  associé à  $S$ .
3. Si  $\tilde{\Sigma}$  est le revêtement de  $\Sigma$  associé au sous-groupe normal  $N(\mathcal{C})$  de  $\pi_1\Sigma$  engendré par les lacets de  $\mathcal{C}$ , alors  $f : \tilde{\Sigma} \rightarrow T$  est une application continue  $\Gamma$ -équivariante, qui est injective sur chaque relevé des composantes connexes de  $K$ , et qui envoie chaque feuille de  $\tilde{\Sigma}$  sur un point.

Le but de ce qui suit est de faire subir un nombre fini de transformations à la résolution  $(S, \mathcal{C}, f)$  pour pouvoir montrer que  $\Gamma = \pi_1 X$  se décompose comme voulu.

**Remarque.** Comme vu dans l'exemple (6), l'espace des feuilles rendu séparé de  $\tilde{\Sigma}$  est un arbre  $T_{S, \mathcal{C}}$ . Notons que  $f$  factorise à travers une application  $\Gamma$ -équivariante  $T_{S, \mathcal{C}} \rightarrow T$ .

(La preuve ci-dessous permet de montrer que non seulement le groupe se décompose, mais que l'action sur  $T_{S, \mathcal{C}}$  se décompose en orbites canoniques de sous-arbres invariants par des sous-groupes. Sous certaines hypothèses (groupe librement indécomposable et stabilisateurs de tripode triviaux), cette décomposition se simplifie et donne par passage à la limite inductive une décomposition de l'action originale (voir [82]).)

## 2.2 Décomposition dynamique du 2-complexe feuilleté

Nous utiliserons les opérations élémentaires suivantes de E. Rips, transformant  $(S, \mathcal{C}, f)$  en une résolution  $(S', \mathcal{C}', f')$ . La vérification que  $(S', \mathcal{C}', f')$  est bien une résolution est immédiate.

**Découpage de base:** Soit  $x$  un point intérieur d'une base  $A_i$ . Notons  $\varphi_{i_1} \cdots \varphi_{i_s}$  les restrictions de  $\varphi_i$  aux adhérences  $A_{i_1} \cdots A_{i_s}$  des composantes connexes de  $A_i \setminus \{x\}$ . Notons  $S' = (D, \{\varphi_{i_p}, \varphi_{i'_p}\}_{i' \neq i, p=1 \dots s})$ . L'arbre maximal de  $S'$  est obtenu en remplaçant  $\varphi_i$  (si  $\varphi_i$  est une arête de l'arbre maximal de  $S$ ) par l'une quelconque, disons  $\varphi_{i_1}$ , de ses restrictions.

Pour tous  $p = 2 \cdots s$ , notons  $\ell_{i_p}$  le lacet dans le 2-complexe feuilleté  $\Sigma'$  de  $S'$  réunion des deux arcs  $[x; \varphi_{i_1}]$  et  $[x; \varphi_{i_p}]$ . Tout lacet  $\ell_j$  de  $\mathcal{C}$  fournit un lacet dans une feuille de  $\Sigma'$ , en remplaçant chaque arc  $[u; \varphi_i]$  contenu dans  $\ell_j$  par l'arc  $[x; \varphi_{i_p}]$  (avec  $p = 1$  si  $u = x$ ). Nous noterons encore  $\mathcal{C}$  l'ensemble de ces lacets de  $\Sigma'$ . Nous posons  $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup \{\ell_{i_p}\}_{p=2 \dots s}$ . Notons que le groupe  $N(\mathcal{C}')$  ne dépend pas des choix effectués. L'opération de découpage de base  $B_i$  est analogue.

Nous avons une application continue naturelle  $\Sigma' \rightarrow \Sigma$  qui identifie les arcs  $[x; \varphi_{i_p}]$  à  $[x; \varphi_i]$ , et induit une équivalence d'homotopie entre  $X'$  et  $X$ . Cette application se relève, par définition de  $\mathcal{C}'$ , en une application  $\tilde{\Sigma}' \rightarrow \tilde{\Sigma}$  entre les revêtements définis par les groupes  $N(\mathcal{C}')$  et  $N(\mathcal{C})$ . Nous définissons alors l'application  $f' : \tilde{\Sigma}' \rightarrow T$  en composant avec  $f : \tilde{\Sigma} \rightarrow T$ .

**Découpage du domaine:** Soit  $x$  un point intérieur d'une composante connexe  $D_0$  de  $D$ . Découpons toutes les bases  $A_i, B_i$  contenant  $x$  dans leur intérieur, et notons encore  $(S, \mathcal{C}, f)$  la résolution obtenue. Notons  $D_1, \dots, D_s$  les sous-arbres de  $D$  qui sont les adhérences des composantes connexes de  $D$  privé de  $x$ , et  $D'$  la réunion disjointe de ces  $D_j$ . Notons  $x_{i_p} \in D_{i_p}$  pour  $1 \leq p \leq r$  les points de  $D'$  correspondant à  $x$ , avec  $r \leq s$ .

Chaque base de  $\varphi_i$  est contenue dans l'un des  $D_j$  (unique si  $\varphi_i$  n'est pas un singleton dont une base est  $\{x\}$ ), donc  $\varphi_i$  définit (avec un choix arbitraire éventuel) une isométrie partielle  $D' \rightarrow D'$  encore notée  $\varphi_i$ . Considérons l'ensemble fini de singletons  $\Phi_0 = \{x_{i_1} \mapsto x_{i_2}, \dots, x_{i_1} \mapsto x_{i_r}\}$ . Posons  $S' = (D', \Phi_0 \cup \{\varphi_i\})$ . Nous rajoutons  $\Phi_0$  à l'arbre maximal de  $S$  pour obtenir celui de  $S'$ .

Nous avons une équivalence d'homotopie  $g : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ , en écrasant en un point chaque bande  $\{x_{i_1}\} \times [0, 1]$  correspondant à un singleton de  $\Phi_0$ . Nous noterons  $\mathcal{C}'$  l'ensemble des lacets évidents dans des feuilles de  $\Sigma'$  dont l'image par  $g$  est dans  $\mathcal{C}$ . (Remarquons que  $g$  s'étend en une équivalence d'homotopie  $X' \rightarrow X$ .) L'application  $g$  se relève en une application  $\tilde{\Sigma}' \rightarrow \tilde{\Sigma}$ . Nous définissons alors l'application  $f' : \tilde{\Sigma}' \rightarrow T$  en composant avec  $f : \tilde{\Sigma} \rightarrow T$ .

Partant alors d'une résolution de domaine  $D$  un arbre fini, nous découpons le domaine en tout point de branchement de  $D$ . Le nouveau domaine obtenu (isométriquement plongé de manière arbitraire dans  $\mathbb{R}$ ) est alors un *multi-intervalle*, i.e. une réunion finie d'intervalles compacts de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $S$  un système d'isométries non dégénéré, de domaine un multi-intervalle  $D$ . Soit  $\overset{\circ}{S}$  le système obtenu en remplaçant chaque générateur de  $S$  par sa restriction à l'intérieur de son domaine. On définit les  $\overset{\circ}{S}$ -orbites de manière analogue à celles de  $S$ . Une  $\overset{\circ}{S}$ -orbite est *singulière* si elle consiste en une extrémité de  $D$ , ou contient une extrémité d'une base d'un générateur de  $S$ .

Notons  $E$  la réunion des  $\overset{\circ}{S}$ -orbites singulières finies, ainsi que des orbites régulières finies contenant l'unique point fixe d'une *réflexion* (i.e. d'un mot en les générateurs de  $\overset{\circ}{S}$  renversant l'orientation et ayant un point fixe).

La version suivante du théorème d'Imanishi [47] (voir aussi [65]) est démontrée dans [36]. Le point important est que chaque orbite (de  $S$  ou  $\overset{\circ}{S}$ ) est finie ou localement dense : l'adhérence d'une orbite n'est pas un ensemble de Cantor. Notons que cette propriété n'est déjà plus vraie pour les systèmes finis d'isométries partielles entre domaines polygonaux compacts de  $\mathbb{R}^2$ .

**Théorème 2.4** ([36] Theorem 3)  *$E$  est fini et  $D \setminus E$  est une union disjointe d'ouverts  $U_1, \dots, U_p$  invariants par  $\overset{\circ}{S}$ , qui sont ou bien une famille d'orbites finies:  $U_j$  est formé d'intervalles de même longueur rencontrant chaque  $\overset{\circ}{S}$ -orbite exactement en un point; ou bien une composante minimale: chaque  $\overset{\circ}{S}$ -orbite contenue dans  $U_i$  est dense dans  $U_j$ .  $\square$*

Un système d'isométries est dit *pur* s'il est non dégénéré, connexe, de domaine un multi-intervalle, et si  $E$  est réduit aux extrémités de  $D$ . Notons qu'alors les  $S$ -orbites sont

ou bien toutes finies, ou bien toutes denses. Nous noterons  $S^*$  un système d'isométries  $S$  privé de ses singletons, et  $\Sigma^* \subset \Sigma$  son 2-complexe feuilleté. Une résolution  $(S, \mathcal{C}, f)$  est dite *pure* si chaque composante connexe de  $S^*$  est pure et si chaque singleton de  $S$  est contenu dans l'arbre maximal de  $S$ .

Partons alors d'une résolution  $(S, \mathcal{C}, f)$  avec  $D$  un multi-intervalle, et dont tout singleton est contenu dans l'arbre maximal de  $S$ . Si  $E$  est défini comme précédemment pour  $S^*$ , nous découpons le domaine  $D$  en tout point de  $E$  dans son intérieur. Nous obtenons ainsi une résolution pure.

Soit  $(S, \mathcal{C}, f)$  une résolution pure. Considérons le graphe de groupes  $(G, \mathcal{G})$  suivant. Les sommets de  $\mathcal{G}$  sont les composantes connexes de  $\Sigma^*$  et les composantes connexes de l'adhérence de  $X \setminus \Sigma^*$ . Les arêtes entre deux sommets sont les composantes connexes de l'intersection des deux sommets. Une telle composante d'intersection est contenue dans une feuille de  $\Sigma$ . Choisissons un point base dans l'intersection avec  $D$  de chaque sommet et arête. L'arbre maximal de  $S$  permet alors de définir les groupes de sommet et d'arête comme les images dans  $\Gamma$  des groupes fondamentaux des sommets et arêtes. Pour tout sommet d'une arête, choisissons un arc, contenu dans le sommet, entre le point base du sommet et celui de l'arête. Ceci permet de définir les morphismes injectifs des groupes d'arête dans les groupes de sommet.

Le groupe fondamental du graphe de groupes ainsi obtenu est isomorphe à  $\Gamma$ , via le théorème de van Kampen. Nous venons donc de montrer la décomposition suivante (outre le fait que nous ne savons pas si elle est non triviale, les groupes d'arête ne sont a priori pas du bon type). Elle n'utilise pas l'hypothèse de stabilité.

**Théorème 2.5** (*Theorem 5.13 de [9]*) *Il existe une résolution pure  $(S, \mathcal{C}, f)$  de l'action de  $\Gamma$  sur  $T$ , et un isomorphisme entre  $\Gamma$  et un groupe fondamental de graphe de groupes, dont chaque groupe d'arête est contenu dans l'image dans  $\Gamma$  du groupe fondamental d'une feuille de  $\Sigma^*$  (donc fixe un point de  $T$ ), et dont chaque groupe de sommet est de type fini, qui, ou bien fixe un point de  $T$ , ou bien est l'image dans  $\Gamma$  du groupe fondamental d'une composante connexe de  $\Sigma^*$ .  $\square$*

Notons que dans le cas des actions libres, ce théorème exprime  $\Gamma$  comme un produit libre dont chaque facteur est un groupe libre ou un quotient de groupe fondamental de 2-complexe feuilleté pur par le sous-groupe engendré par (tous) les lacets contenus dans les feuilles (voir [36], Proposition 3.5).

Notons que si  $T$  est un arbre discret, alors  $S$  n'a pas de composante minimale. Réciproquement, si  $S$  n'a pas de composante minimale, alors l'arbre  $T_{S\mathcal{C}}$  est discret (quitte

à modifier de manière équivariante les longueurs des arêtes). Par équivariance du morphisme  $T_{S,C} \rightarrow T$ , tout sous-groupe de  $\Gamma$  fixant un arc de  $T_{S,C}$  fixe un arc de  $T$ . Donc si  $S$  n'a pas de composante minimale, le théorème de Rips découle de la théorie de Bass-Serre.

Nous supposons donc que nous avons une résolution pure  $(S, \mathcal{C}, f)$  telle que  $S$  possède une composante minimale. Notons  $S_0$ , de domaine  $D_0$ , la composante connexe de  $S^*$  qui correspond à cette composante minimale,  $\Sigma_0 \subset \Sigma$  son 2-complexe feuilleté, et  $\Gamma_0$  l'image dans  $\Gamma$  du groupe fondamental de  $\Sigma_0$  (pour le choix de point base déjà discuté). Pour pouvoir décomposer  $\Gamma$  au-dessus d'un groupe du type voulu, il suffit de décomposer le groupe  $\Gamma_0$  au-dessus d'un groupe de type voulu, de manière à ce que cette décomposition donne par raffinement (voir section 1) de la décomposition en graphe de groupes 2.5 une décomposition du type voulu de  $\Gamma$ .

**Lemme 2.6** ([9], Proposition 5.8) *Soit  $S$  un système d'isométries minimal pur, et  $I$  un intervalle ouvert (non vide) de  $D$ , avec un point base dans  $I$ . Alors  $\pi_1 \Sigma$  est engendré par les lacets de la forme  $c_1 \cdot \gamma \cdot c_2$  avec  $c_1, c_2$  sous-arcs de  $I$  respectivement commençant et terminant au point base, et  $\gamma = [x; \omega]$  un chemin dans une feuille associé à un  $\mathring{S}$ -mot  $\omega$ .  $\square$*

Rappelons [91] qu'une isométrie sans point fixe d'un arbre  $T$  admet une unique droite isométriquement plongée dans  $T$  sur laquelle elle agit par translation (non triviale). Cette droite est appelée son *axe de translation*. Un groupe de type fini  $H$ , agissant sans point fixe global sur un arbre, possède un unique sous-arbre invariant non vide minimal  $T_H$ , qui est la réunion des axes de translations des éléments de  $H$  sans point fixe.

**Lemme 2.7** *Le groupe  $\Gamma_0$  n'a pas de point fixe global dans  $T$ . Nous noterons  $T_{\Gamma_0}$  l'unique sous-arbre de  $T$  non vide invariant par  $\Gamma_0$  minimal.*

**Preuve.** Rappelons que tout relevé dans  $\tilde{\Sigma}$  d'une composante connexe  $I$  de  $D_0$  s'injecte par  $f$  dans  $T$ . Par minimalité, il existe un élément  $h$  de  $\Gamma_0$  représenté par un lacet  $c_1 \cdot \gamma \cdot c_2$  avec  $c_1, c_2$  arcs de l'intérieur de  $I$ , et  $\gamma = [x; \omega]$  un chemin dans une feuille associé à un  $\mathring{S}$ -mot  $\omega$  sans point fixe qui préserve l'orientation. Alors  $h$  est sans point fixe dans  $T$  (car il envoie un arc orienté  $\alpha$  de  $T$  sur un arc orienté disjoint de  $T$ , où les orientations sont compatibles avec une orientation d'un arc contenant  $\alpha, h(\alpha)$ ).  $\square$

**Lemme 2.8** ([9], Corollary 5.9, 5.10) *Un élément de  $\Gamma_0$  fixant un arc de  $T_{\Gamma_0}$  est contenu dans le noyau de l'action de  $\Gamma_0$  sur  $T_{\Gamma_0}$ . En particulier, si la longueur de l'intersection des axes de deux éléments de  $\Gamma_0$  est strictement plus grande que la somme des distances de translations, alors les axes de translation de ces éléments sont confondus.*

**Preuve.** Soit  $\gamma \in \Gamma_0$  fixant un arc  $I_0$  de  $T_{\Gamma_0}$ , et soit  $J \subset I_0$  un arc stable. Soit  $W$  le sous-arbre stable maximal de  $T_{\Gamma_0}$  contenant  $J$  (ceci existe, car la réunion de deux sous-arbres stables dont l'intersection contient un sous-arbre non dégénéré est encore stable). Une des composantes connexes de la préimage de  $\Sigma_0$  dans  $\tilde{\Sigma}$  se projette dans  $T$  par  $f$  sur un sous-arbre non vide invariant par  $\Gamma_0$ , donc contenant  $T_{\Gamma_0}$ . Il existe donc un intervalle ouvert non vide  $I$  de  $D_0$  dont un relevé  $\tilde{I}$  dans  $\tilde{\Sigma}$  se projette (injectivement) sur un arc de  $W$ . Utilisons pour générateurs de  $\Gamma_0$  les images des générateurs de  $\pi_1 \Sigma_0$  obtenus dans le lemme 2.6 pour l'intervalle  $I$ . Alors un tel générateur  $g$  vérifie que  $f(\tilde{I}) \cap g(f(\tilde{I}))$  contient un arc. Puisque  $W \cap g(W)$  contient un arc, et par maximalité, on a  $W = g(W)$ . Donc  $W = T_{\Gamma_0}$ . Ceci implique que  $\gamma$  fixe  $T_{\Gamma_0}$ .

La deuxième assertion vient du fait que par l'hypothèse, le commutateur des deux éléments fixe un arc, donc est dans le noyau, et que dans un arbre, deux isométries sans point fixe qui commutent ont le même axe de translation.  $\square$

### 2.3 Étude des composantes homogènes

Soit  $S$  un système d'isométries pur minimal. Tout générateur  $\varphi_i : A_i \rightarrow B_i$  est restriction d'une isométrie globale de  $\mathbb{R}$ . Notons  $Q$  le sous-groupe de  $\text{Isom}(\mathbb{R})$  engendré par ces isométries. Bien sûr, si  $x, y \in D$  sont dans la même  $S$ -orbite, alors ils sont dans la même  $Q$ -orbite. Mais la réciproque n'est pas vraie en général.

Rappelons tout d'abord les faits élémentaires suivants. Soit  $P$  un sous-groupe dense dénombrable de  $\text{Isom}(\mathbb{R})$ . Fixons un intervalle ouvert non vide  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et  $\epsilon > 0$ . Alors  $P$  est engendré par ses translations d'amplitudes au plus  $\epsilon$  et par ses symétries de centre dans  $I$ . Si  $\varphi$  est une isométrie de  $\mathbb{R}$  telle que  $x, \varphi(x)$  appartiennent à la même  $P$ -orbite pour un ensemble non dénombrable de  $x$ , alors  $\varphi$  est dans  $P$ .

Le système  $S$  est *homogène* s'il existe un intervalle ouvert  $J$  dans  $D$  et un sous-groupe dense  $P$  de  $\text{Isom}(\mathbb{R})$  tel que  $x, y \in J$  sont dans la même  $\overset{\circ}{S}$ -orbite si et seulement s'ils sont dans la même  $P$ -orbite. Il est facile de voir qu'à conjugaison près, le *groupe des périodes*  $P$  ne dépend pas de  $J$ , et qu'il est contenu dans  $Q$ , donc de type fini.

**Théorème 2.9** *Si l'action de  $\Gamma$  sur  $T$  est stable et si  $S_0$  est homogène, alors  $T_{\Gamma_0}$  est une droite. En particulier,  $\Gamma_0$  et  $\Gamma$  se décomposent au-dessus d'une extension d'un groupe abélien par un sous-groupe de  $\Gamma$  fixant un arc de  $T_{\Gamma_0}$ . De plus si l'action de  $\Gamma$  sur  $T$  est libre, alors  $\Gamma_0$  est un groupe abélien libre.*

**Preuve.** La deuxième assertion découle de la première, par l'existence d'une suite exacte

$$1 \rightarrow N \rightarrow \Gamma_0 \rightarrow R \rightarrow 1$$

avec  $R$  un sous-groupe d'isométries de  $\mathbb{R}$ , de type fini car  $\Gamma_0$  l'est, et  $N$  fixe un arc de  $T$ . La décomposition de  $R$  au-dessus d'un groupe abélien (de type fini) de l'exemple a) fournit par image réciproque une décomposition de  $\Gamma_0$  au-dessus d'une extension d'un groupe abélien par  $N$ . Tout sous-groupe de  $\Gamma_0$  ayant un point fixe global dans  $T$  (donc dans  $T_0$ ) est conjugué à un sous-groupe d'un groupe de sommet de cette décomposition. Par raffinement de la décomposition en graphe de groupes du théorème 2.5,  $\Gamma$  se décompose au-dessus d'une extension d'un groupe abélien par un sous-groupe fixant un arc de  $T$ .

Soit  $\Delta$  un intervalle fermé *stable* de  $D_0$ , i.e. dont l'image par  $f$  de tout relevé dans  $\tilde{X}$  est arc stable de  $T$ . Nous pouvons aussi supposer que  $\Delta$  est dans un intervalle  $J$  comme dans la définition des systèmes homogènes, et nous supposons que le point base est dans  $\Delta$ .

Soit  $\epsilon > 0$  suffisamment petit devant la longueur de  $\Delta$ . Soient  $\tau, \tau'$  deux translations du groupe des périodes  $P$ , d'amplitudes  $\lambda, \lambda'$  rationnellement indépendantes et inférieures à  $\epsilon$  en valeur absolue.

Nous allons construire une nouvelle résolution, en rajoutant à  $S$  deux nouveaux générateurs  $\phi, \phi'$ , les restrictions (maximales) de  $\tau, \tau'$  à  $\Delta$ . Du coup, si  $\epsilon > 0$  est assez petit, les domaines de  $\phi, \phi'$  coïncideront sur une distance d'au moins  $3\epsilon$ , et pour tout  $t$  dans le sous-groupe dense de  $\mathbb{R}$  engendré par  $\lambda, \lambda'$ , avec  $|t| < \epsilon$ , il existera un mot en les isométries partielles  $\phi, \phi'$ , de domaine non vide, restriction de la translation de longueur  $t$ .

Pour cela, nous allons procéder en deux étapes. Nous rajoutons d'abord deux isométries partielles vérifiant les bonnes conditions sur les amplitudes, mais avec des domaines a priori très petits. Nous utilisons pour cela une nouvelle opération élémentaire de E. Rips. Puis nous étendrons les domaines de manière maximale dans  $\Delta$ .

**Ajouter un générateur.** Soit  $(S, \mathcal{C}, f)$  une résolution. Soit  $\varphi : A \rightarrow B$  une isométrie partielle de  $D$ , avec  $A$  non dégénéré, qui coïncide sur  $A$  avec un  $S$ -mot  $w$ . Notons  $S'$  le système d'isométries sur  $D' = D$  obtenu en rajoutant  $\varphi$  aux générateurs de  $S$ . Le 2-complexe feuilleté  $\Sigma'$  contient naturellement  $\Sigma$ . L'arbre maximal de  $S$  reste un arbre maximal de  $S'$ .

Pour  $u_0 \in A$  quelconque, notons  $\ell$  le lacet dans une feuille de  $\Sigma'$  réunion des chemins  $[u_0; \varphi]$  et  $[u_0; w] \subset \Sigma$ . Posons  $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup \{\ell\}$ . On a une application continue naturelle  $\Sigma' \rightarrow \Sigma$  qui pour tout  $u \in A$  envoie linéairement l'arc  $[u; \varphi]$  sur le chemin  $[u; w]$ . Cette application (qui induit une équivalence d'homotopie  $X' \rightarrow X$ ) se relève en une application  $\tilde{\Sigma}' \rightarrow \tilde{\Sigma}$ . Nous définissons alors l'application  $f' : \tilde{\Sigma}' \rightarrow T$  en composant avec  $f : \tilde{\Sigma} \rightarrow T$ .

Clairement,  $(S', \mathcal{C}', f')$  est une résolution, pure si  $(S, \mathcal{C}, f)$  l'est.

**Théorème 2.10** ([37] Theorem 2.3) *Soit  $S$  un système d'isométries. Soient  $p, q$  des plongements isométriques  $[0, \eta] \rightarrow \mathbb{R}$  tels que  $q_t = q(t)$  et  $p_t = p(t)$  soient dans la même  $S$ -orbite sauf peut-être pour un ensemble dénombrable de  $t$ . Alors  $q_t$  et  $p_t$  sont dans la même orbite pour tout  $t$ . De plus, il existe des  $S$ -mots en nombre fini  $w_1, \dots, w_n$  tels que pour tout  $t \in [0, \eta]$ , il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $w_i(p_t) = q_t$ .  $\square$*

Par définition d'un système homogène, et par le théorème 2.10 précédent, nous pouvons rajouter  $\phi, \phi'$  deux générateurs non singleton, de bases dans  $\Delta$ , restrictions de translations d'amplitudes rationnellement indépendantes, inférieures à  $\epsilon$  en valeur absolue. L'extension de leur domaine sera possible par le résultat suivant.

**Lemme 2.11** (D. Gaboriau) *Soit  $(S, \mathcal{C}, f)$  une résolution d'une action stable, et  $\psi : A \rightarrow B$  un générateur non singleton de  $S$ , tel que les bases de  $\psi$  soient contenues dans un intervalle  $\Delta$  stable, lui-même contenu dans une composante homogène de  $S$ . Notons  $\hat{\psi}$  l'isométrie partielle de  $\Delta$ , extension maximale de  $\psi$  à  $\Delta$ . Supposons que  $\hat{\psi}(x)$  et  $x$  soient dans la même  $S$ -orbite pour tout  $x$  dans le domaine de  $\hat{\psi}$ . Alors il existe une résolution  $(S', \mathcal{C}', f')$ , pure si  $(S, \mathcal{C}, f)$  l'est, telle que  $S'$  soit obtenu à partir de  $S$  en remplaçant  $\psi$  par  $\hat{\psi}$ .*

**Preuve.** Soit  $x$  une extrémité de  $A$ , et supposons  $x$  et  $\psi(x)$  dans l'intérieur de  $\Delta$ . Supposons qu'il existe un  $S$ -mot  $w : A_w \rightarrow B_w$  avec  $x \in A_w$ , et qui coïncide avec  $\hat{\psi}$  sur  $A_w$ . Notons  $S'$  le système d'isométries obtenu à partir de  $S$  en remplaçant  $\psi$  par son extension  $\psi'$  à  $A' = A \cup A_w$ . L'arbre maximal de  $S$  redonne un arbre maximal de  $S'$ . Le 2-complexe feuilleté  $\Sigma'$  contient naturellement  $\Sigma$ , et nous posons  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ . Montrons que l'on peut étendre  $f : \tilde{\Sigma} \rightarrow T$  à  $\tilde{\Sigma}'$ , pour obtenir une résolution  $(S', \mathcal{C}', f')$ .

Notons  $[\psi]$  l'image dans  $\pi_1 X = \Gamma$  du lacet au point base de la forme  $c_1 \cdot \gamma \cdot c_2$  avec  $c_1, c_2$  deux arcs dans  $\Delta$ , et  $\gamma$  l'arc  $[x; \psi]$ . Définissons de même  $[w]$ .

Notons que le  $S$ -mot  $\psi \circ w^{-1}$  est l'identité sur son domaine. Supposons tout d'abord ce domaine non réduit à  $w(x)$ . L'élément  $[\psi] \circ [w]^{-1}$  de  $\Gamma$  fixe donc un arc dans  $\Delta \subset T$ , donc fixe  $\Delta$  par stabilité.

Soit  $\tilde{\Delta}$  un relevé de  $\Delta$  dans le revêtement  $\tilde{\Sigma}$ . Par équivariance de  $f$ , le relevé dans  $\tilde{\Delta}$  de  $u \in A_w$  et celui dans  $[\psi]\tilde{\Delta}$  de  $w(u)$  ont alors la même image par  $f$ .

Chaque relevé de feuille de la bande  $A' \times [0, 1]$  correspondant au générateur  $\psi'$  de  $S'$  ayant ses deux extrémités qui s'envoient par  $f$  sur un même point, nous pouvons donc étendre  $f : \tilde{\Sigma} \rightarrow T$  à  $\tilde{\Sigma}'$ , en envoyant ce relevé de feuille sur ce point.

Si le domaine de  $\psi \circ w^{-1}$  est réduit à  $w(x)$ , par pureté, il existe un  $\mathring{S}$ -mot  $w'$  qui envoie  $x$  sur  $\psi(x)$ . Puisque  $\Delta$  est contenu dans une composante homogène, il n'est pas difficile de montrer que l'on peut supposer que l'isométrie partielle  $w'$  a le même signe que  $\psi$ . Nous appliquons alors le raisonnement ci-dessus en remplaçant  $w$  par  $w'$ . Ceci permet d'étendre  $\psi$  en  $\psi''$ . Puis nous appliquons encore une fois le raisonnement ci-dessus en remplaçant  $\psi$  par  $\psi''$ .

Il est immédiat que les propriétés des résolutions sont encore vérifiées par  $(S', C', f')$ . Par le théorème 2.10, une induction finie permet alors de conclure.  $\square$

L'extension des domaines de  $\psi = \phi, \phi'$  se fait alors par le lemme 2.11, en notant que puisque  $S_0$  est homogène,  $t$  et  $\hat{\psi}(t)$  sont dans la même  $S_0$ -orbite pour tout  $t$  dans le domaine de  $\hat{\psi}$ .

Terminons la preuve du théorème 2.9, comme dans [9], preuve des assertions (2)-(4) de la proposition 8.9. Notons  $g, g'$  les éléments de  $\Gamma_0$  obtenus en prenant une feuille de la bande correspondant à  $\phi, \phi'$ , joints par des arcs de  $\Delta$  au point base. Alors par l'hypothèse sur  $\epsilon$  et le lemme 2.8, les axes de translations de  $g, g'$  coïncident. Notons  $L$  cet axe. Notons  $I$  un intervalle pointé de  $\Delta$  dont un relevé dans  $\tilde{\Sigma}$  a son image par  $f$  contenue dans  $L$ . Nous utiliserons l'unique arc de  $\Delta$  entre le point base de  $\Delta$  et celui de  $I$  pour identifier les groupes fondamentaux de  $\Sigma_0$  en ces points bases.

Montrons que  $L$  est invariant par tout générateur  $h$  de  $\Gamma_0$  représenté par le lacet  $c_1 \cdot \gamma \cdot c_2$  donné par le lemme 2.6 pour cet intervalle  $I$ . Supposons que l'élément de  $\mathring{S}$  correspondant à  $\gamma$  préserve l'orientation. Alors  $h$  est hyperbolique (par un argument déjà vu), et son axe de translation intersecte  $L$  en un segment de longueur strictement supérieure à la distance de translation de  $h$ . Puisqu'il existe des mots  $w$  en  $g, g'$  d'axes de translation  $L$  et de distance de translation arbitrairement petite, le lemme 2.8 entraîne que l'axe de translation de  $h$  est  $L$ .

Si  $\gamma$  renverse l'orientation, alors pour  $w$  comme précédemment, l'élément hyperbolique  $hwh^{-1}$  est d'axe de translation égal à  $L$  par l'argument ci-dessus. Donc  $h$  préserve  $L$ .

Nous avons donc montré que  $T_{\Gamma_0}$  est réduit à la droite  $L$ .  $\square$

## 2.4 Étude des composantes échanges d'intervalles

Nous dirons qu'un système d'isométries est à *générateurs indépendants* si aucun  $\mathring{S}$ -mot réduit non trivial, de domaine non vide, n'est restriction de l'identité. En particulier, toute feuille non singulière est un arbre.

**Théorème 2.12** ([34], Theorem VII.1) Soit  $S = (D, \{\varphi_i\})$  un système d'isométries sans composante minimale homogène. Alors on peut obtenir un système d'isométries  $S'$  de domaine  $D$ , à générateurs indépendants, ayant les mêmes orbites, en remplaçant chaque générateur  $\varphi_i$  par sa restriction à un sous-intervalle (éventuellement vide) de son domaine.  $\square$

Pour un système d'isométries, nous notons

- $m$  la longueur totale de  $D$ ;
- $\ell$  la somme des longueurs des domaines  $A_i$  des générateurs.

**Proposition 2.13** ([36], Proposition 6.1) Si  $S$  est un système d'isométries minimal à générateurs indépendants, alors

$$\ell = m. \quad \square$$

Rappelons qu'un échange d'intervalles est un système d'isométries connexe, non dégénéré tel que, sauf un ensemble fini, tout  $x$  dans  $D$  appartient à exactement deux bases.

Il découle donc de la proposition précédente que si  $S$  est pur, minimal, à générateurs indépendants, et si tout point de  $D$  appartient à au moins deux bases, alors  $S$  est un échange d'intervalles (sinon, on aurait  $\ell > m$ ).

Avec les notations suivant le théorème 2.5, nous pouvons supposer que  $S_0$  n'est pas homogène, et est réunion d'un système  $\overline{S}_0$  pur minimal à générateurs indépendants, et d'autres générateurs qui sont des  $\overline{S}_0$ -mots. Il suffit en effet d'appliquer les théorèmes 2.12 et 2.10, et de faire un nombre fini de découpages de bases. Remarquons que le 2-complexe feuilleté  $\overline{\Sigma}_0$  de  $\overline{S}_0$  est naturellement contenu dans  $\Sigma_0$ .

Par les opérations suivantes de *glissement de base*, nous pouvons aussi supposer que tout générateur de  $S_0 \setminus \overline{S}_0$  est l'identité sur son domaine.

En effet, choisissons pour tout générateur  $\varphi_i : A_i \rightarrow B_i$  dans  $S_0 \setminus \overline{S}_0$  un  $\overline{S}_0$ -mot  $w_i$  qui coïncide avec  $\varphi_i$  sur  $A_i$ . Notons  $S'$  le système d'isométries obtenu en remplaçant ces  $\varphi_i$  par l'identité  $\varphi'_i : A_i \rightarrow A_i$ . Tout lacet  $\ell$  de  $\mathcal{C}$  donne un lacet  $\ell'$  dans une feuille de  $\Sigma'$ , en remplaçant dans  $\ell$  chaque occurrence d'un arc  $[x; \varphi_i]$  par le chemin formé de l'arc  $[x; \varphi'_i]$  suivi de  $[x; w_i]$ . Posons  $\mathcal{C}' = \{\ell'\}$ .

Notons que nous avons une application continue  $\Sigma' \rightarrow \Sigma$  qui envoie (linéairement) la première moitié de l'arc  $[x; \varphi'_i]$  sur  $[x; \varphi_i]$  et la seconde sur l'arc (parcouru en sens inverse)  $[x; w_i]$ . Cette application (qui induit une équivalence d'homotopie  $X' \rightarrow X$ ) se relève en une application  $\tilde{\Sigma}' \rightarrow \tilde{\Sigma}$ . Nous définissons alors l'application  $f' : \tilde{\Sigma}' \rightarrow T$  en composant avec  $f : \tilde{\Sigma} \rightarrow T$ . Clairement,  $(S', \mathcal{C}', f')$  est une résolution pure.

Nous supposons que cela est satisfait dans la suite.

**Théorème 2.14** *Si l'action de  $\Gamma$  sur  $T$  est stable, et si  $\overline{S_0}$  est un échange d'intervalles, alors  $\Gamma_0$  et  $\Gamma$  se décomposent au-dessus d'une extension d'un groupe cyclique par un sous-groupe fixant un arc de  $T_{\Gamma_0}$ . Si de plus l'action de  $\Gamma$  est libre, alors  $\Gamma_0$  est un groupe fondamental de surface.*

**Preuve.** Puisque  $\overline{S_0}$  est un échange d'intervalles pur,  $\overline{\Sigma_0}$  est homéomorphe à une surface connexe compacte à bord, muni d'un feuilletage mesuré à feuilles denses. En particulier, les feuilles non singulières du feuilletage de  $\overline{\Sigma_0}$  sont des droites. Par pureté et minimalité, les seuls lacets contenus dans les feuilles sont les composantes de bord de  $\overline{\Sigma_0}$ , et toute feuille ne contient qu'au plus une composante de bord.

Considérons  $N$  le sous-groupe de  $\Gamma_0$  normalement engendré par les lacets formés par les feuilles des bandes associées aux générateurs de  $S_0 \setminus \overline{S_0}$ . Par construction, ces générateurs de  $N$  fixent un arc de  $T_{\Gamma_0}$ , donc par le lemme 2.8, fixent tout  $T_{\Gamma_0}$ . Donc  $N$  est contenu dans le noyau de l'action de  $\Gamma_0$  sur  $T_{\Gamma_0}$ , et en particulier fixe un arc de  $T$ .

Le quotient  $Q = \Gamma_0/N$  agit donc sur  $T_{\Gamma_0}$ . Rappelons que chaque composante de l'intersection d'une composante connexe de  $X \setminus \Sigma_0$  avec  $\Sigma_0$  est contenue dans une feuille de  $\Sigma_0$ . Puisque toutes les feuilles sauf celles passant par le bord sont contractiles,  $Q$  est un quotient du groupe fondamental de  $\overline{\Sigma_0}$  par un sous-groupe normal engendré par des puissances de lacets de bord. Donc  $Q$  est le groupe fondamental d'un 2-orbifold à singularités coniques. Puisqu'il agit sans point fixe global sur  $T_{\Gamma_0}$ , par la classification des 2-orbifolds compacts, il se décompose au-dessus soit du groupe trivial, soit de  $\mathbb{Z}$ , où le générateur de  $\mathbb{Z}$  correspond à une courbe fermée simple de  $\overline{\Sigma_0}$  non parallèle au bord. En particulier,  $\Gamma_0$  se décompose sur une extension d'un groupe cyclique par  $N$ . Par raffinement de la décomposition de  $\Gamma$  obtenu dans le théorème 2.5,  $\Gamma$  se décompose au-dessus d'une extension d'un groupe cyclique par un sous-groupe fixant un arc de  $T$ .  
□

## 2.5 Étude des composantes exotiques

Nous allons définir un processus dû à E. Rips qui transforme une résolution  $(S, C, f) = (S^0, C^0, f^0)$  en une autre  $(S^1, C^1, f^1)$ .

Notons  $L^0$  l'ensemble des points du domaine  $D_0$  de  $S_0$  qui n'appartiennent qu'à une seule base de  $\overline{S_0}$ . S'il est non vide, nous définissons un nouveau système d'isométries sur le multi-intervalle  $D^1 = D^0 \setminus L^0$ .

Nous remplaçons tout d'abord chaque générateur  $\varphi_i$  de  $\overline{S_0}$  par ses restrictions aux composantes connexes (en nombre fini) de  $D^1 \setminus \varphi_i^{-1}(L^0)$ . Si une composante de  $L^0$  coïncide avec une composante de  $D_0$ , alors le générateur correspondant est tout simplement enlevé. Remarquons que par pureté et minimalité, les adhérences de  $\varphi_i^{-1}(L^0)$  et de  $L^0$  ne se rencontrent pas. Toute composante connexe  $I$  de  $L^0$  est contenue dans l'intérieur d'une base d'un unique générateur  $\varphi_i$  de  $\overline{S_0}$ . Tout lacet de  $\mathcal{C}$ , pouvant être supposé sans aller-retour, définit un nouveau lacet dans les feuilles. Nous notons  $\mathcal{C}_v$  l'ensemble de ces lacets.

Par des opérations de découpage de base, nous pouvons supposer que l'intérieur d'une base d'un générateur de  $S_0 \setminus \overline{S_0}$  ne contient pas d'extrémité de composantes de  $L^0$ . Rappelons que ces opérations rajoutent un nouveau lacet  $\ell_{i,u}$  pour tout générateur  $\varphi_i$  de  $S_0 \setminus \overline{S_0}$  et tout  $u \in \partial L^0$  dans l'intérieur d'une base de  $\varphi_i$ . Plus précisément,  $\ell_{i,u} = [u; \varphi_i^{u+}] \cdot [u; \varphi_i^{u-}]^{-1}$  où  $\varphi_i^{u+}, \varphi_i^{u-}$  sont les générateurs obtenus par découpage de base de  $\varphi_i$  en  $u$ . Nous notons encore  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_v \cup \{\ell_{i,u}\}$ .

Pour chaque composante connexe  $I$  de  $L^0$ , si  $I \subset A_{i_j}$ , nous remplaçons chaque générateur  $\varphi_j : A_j \rightarrow A_j$  de  $S_0 \setminus \overline{S_0}$ , avec  $A_j \subset I \cap \partial I$ , par un générateur  $\varphi'_j$  qui est l'identité sur  $\varphi_{i_j}(A_j) \subset B_{i_j}$ . Nous faisons de manière analogue si  $I \subset B_{i_j}$ .

Nous obtenons ainsi un nouveau système d'isométries  $S^1$ . Il est facile de voir que la composante connexe  $S_0^1$  de  $S^1$  correspondant à  $S_0$  est encore pure, minimale, non homogène, et que les générateurs correspondant à  $\overline{S_0}$  sont encore indépendants.

Les deux complexes  $\Sigma^0$  et  $\Sigma^1$  ont un quotient commun  $\mathcal{Q}$ . L'application  $\pi^0 : \Sigma^0 \rightarrow \mathcal{Q}$  est l'écrasement dans  $\Sigma^0$ , pour toute composante  $I$  de  $L^0$  et tout  $u \in I \cap \partial I$ , des feuilles  $[u; \varphi_{i_j}^\epsilon]$ , avec  $\epsilon = +1$  si  $I \subset A_{i_j}$ , et  $\epsilon = -1$  si  $I \subset B_{i_j}$ . L'application  $\pi^1 : \Sigma^1 \rightarrow \mathcal{Q}$  est l'écrasement dans  $\Sigma^1$ , pour toute composante  $I$  de  $L^0$  et tout  $u \in \partial I$ , des feuilles  $[u; \varphi_{i_j}^\epsilon]$ , avec  $\epsilon = +1$  si  $I \subset A_{i_j}$ , et  $\epsilon = -1$  si  $I \subset B_{i_j}$ .

Pour tout  $\ell$  dans  $\mathcal{C}$ ,  $(\pi^1)^{-1}(\pi^0(\ell))$  est un lacet dans une feuille de  $\Sigma^1$ , et nous notons  $\mathcal{C}^1$  l'ensemble de ces lacets. Notons que les disques de  $X^1$  s'appuyant sur les lacets de la forme  $(\pi^1)^{-1}(\pi^0(\ell_{i,u}))$  doivent être pensés comme des anneaux  $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ , avec  $\mathbb{S}^1 \times \{0\}, \mathbb{S}^1 \times \{1\}$  des lacets dans les bords des bandes des générateurs de  $S_0^1 \setminus \overline{S_0^1}$ , et  $\{1\} \times [0, 1]$  recollé le long d'un arc de bord  $[u; \varphi_{i_j, \pm}]$  de la bande d'un générateur  $\varphi_{i_j, \pm}$  de  $\overline{S_0^1}$  correspondant à  $\varphi_{i_j}$ . Un tel anneau est appelé (comme dans [9]) un *anneau de subdivision*.

L'application  $f^0 : \widetilde{\Sigma}^0 \rightarrow T$  factorise à travers une application  $\tilde{Q} \rightarrow T$ , où  $\tilde{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$  est le revêtement correspondant à  $\pi_*^0(N(\mathcal{C}^0))$ . Nous définissons alors  $f^1 : \widetilde{\Sigma}^1 \rightarrow T$  en composant  $\tilde{Q} \rightarrow T$  par  $\widetilde{\Sigma}^1 \rightarrow \tilde{Q}$  l'application relevée de l'équivalence d'homotopie  $\pi^1$ .

Nous construisons ainsi une nouvelle résolution pure  $(S^1, \mathcal{C}^1, f^1)$ .

S'il y a des points de  $D^1 \cap D_0$  qui n'appartiennent qu'à une base, alors nous pouvons répéter cette opération. En itérant, ceci conduit à une suite infinie de résolutions  $X_n$  de domaines  $D^0 \supset D^1 \supset \dots \supset D^n \supset \dots$ , sauf si pour un certain  $n$ , tout point de  $D^n \cap D_0$  appartient à au moins deux bases. Auquel cas, la composante  $S_0^n$  est un échange d'intervalle, et la section précédente conclut. La composante  $S_0$  est dite *exotique* si le processus ci-dessus est infini.

**Proposition 2.15** ([36], Proposition 7.1) *Si  $S_0$  est exotique, alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D^n \cap D_0$  est nulle part dense dans  $D_0$ .*  $\square$

**Théorème 2.16** *Si l'action de  $G$  sur  $T$  est stable, et si  $S_0$  est exotique, alors  $\Gamma_0$  et  $G$  se décomposent au-dessus d'un sous-groupe fixant un arc de  $T$ .*

**Preuve.** Puisque les générateurs de  $\overline{S^0}$  sont indépendants, tout lacet contenu dans une feuille, et ne contenant pas de composante de  $\partial A_i \times [0, 1]$ , est homotope à zéro. Donc il existe un 1-complexe fini  $\kappa \subset \overline{\Sigma_0}$ , union finie de feuilles dans des bandes de générateurs, tel que le sous-groupe normal de  $\pi_1 \overline{\Sigma_0}$  engendré par les lacets dans les feuilles soit précisément normalement engendré par les lacets dans  $\kappa$ .

Notons que le nombre de lacets dans  $\mathcal{C}^n$  qui ne correspondent pas à des anneaux de subdivision dans une étape antérieure reste borné. Appliquons suffisamment de fois le processus de E. Rips pour qu'il existe un générateur  $\varphi : A \rightarrow B$  de  $S^n$  dont la bande  $A \times [0, 1]$  ne contienne aucune arête de  $\kappa$ , et tel que  $A$  ou  $B$ , disons  $A$ , soit contenu dans l'intérieur d'un intervalle stable  $\Delta$  de  $D^n$ . Ceci est possible par la proposition 2.15, et puisque  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D^n \cap D_0$  ne peut pas être fini, car on ne peut rendre fini un graphe infini localement fini en enlevant à chaque étape ses arêtes terminales. Par des opérations élémentaires, nous pouvons alors supposer que toute composante connexe du domaine rencontre au moins deux bases.

Nous allons alors appliquer le théorème de van Kampen en coupant la bande  $A \times [0, 1]$  à la hauteur  $\frac{1}{2}$ , ainsi que tout disque de  $X^n$  correspondant dans une étape antérieure à un anneau de subdivision et se recollant sur  $\partial A \times [0, 1]$ . Notons  $W$  le graphe union de  $A \times \{\frac{1}{2}\}$  et de  $S^1 \times \{u_{\frac{1}{2}}\}$  pour tout tel disque, le point  $(1, u_{\frac{1}{2}})$  étant sur  $\partial A \times [0, 1]$ . Notons que l'image dans  $\pi_1 X^n$  du générateur du groupe fondamental d'un anneau de subdivision fixe un arc de  $\Delta$ , donc fixe  $\Delta$ . Donc l'image dans  $\pi_1 X^n$  du groupe fondamental de  $W$  fixe un arc dans  $T$ .

Le théorème de van Kampen permet alors de conclure à une décomposition de  $\Gamma_0$  au-dessus d'un groupe fixant un arc de  $T$ . Pour montrer la non trivialité dans le cas

où la bande  $A \times [0, 1]$  sépare  $\overline{\Sigma_0^n}$  en deux composantes connexes  $C_1$  et  $C_2$ , il suffit de remarquer que par minimalité et puisque toute composante connexe du domaine rencontre au moins deux bases, qu'il existe dans chaque composante connexe  $C_1$  et  $C_2$  un mot en les générateurs ouverts, préservant l'orientation, et qui n'est pas l'identité sur son domaine. Ces mots fournissent un élément dans le groupe fondamental de chaque composante connexe de  $X^n$  correspondante à  $C_1, C_2$ , qui n'est pas dans le groupe au-dessus duquel on décompose.

Rappelons que chaque groupe d'arête de la décomposition du théorème 2.5 est conjugué à un groupe engendré par des lacets dans une feuille. Donc par raffinement, la décomposition ci-dessus de  $\Gamma_0$  donne une décomposition de  $\Gamma$  sur un groupe fixant un arc de  $T$ .  $\square$

### 3 Applications hyperboliques du théorème de Rips

#### 3.1 Espaces et groupes hyperboliques

Rappelons quelques définitions sur les espaces métriques hyperboliques de M. Gromov (voir [44, 41] et l'exposé 722 du Séminaire Bourbaki [40]).

Un espace métrique est *géodésique* si pour deux points quelconques  $x, y$ , il existe un plongement isométrique  $\sigma : [0, L] \rightarrow X$  avec  $\sigma(0) = x, \sigma(L) = y$ . Nous noterons  $[x, y]$  l'image de  $\sigma$ , même si, en général, elle n'est pas déterminée par ses extrémités.

Un espace géodésique  $X$  est *hyperbolique* s'il existe une constante  $\delta \geq 0$  telle que pour tout triplet  $(x, y, z)$  de points de  $X$  et tous choix de segments  $[x, y], [y, z], [z, x]$ , la propriété suivante soit vérifiée : tout point de  $[x, y]$  est à distance inférieure à  $\delta$  d'un point de la réunion  $[y, z] \cup [z, x]$ .

Remarquons que si  $X$  est un arbre, alors  $[x, y]$  est contenu dans la réunion  $[y, z] \cup [z, x]$ . Un espace métrique est un arbre si et seulement s'il est géodésique et hyperbolique pour  $\delta = 0$  (voir [1] 3.17). Une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle inférieure à  $-\kappa^2 < 0$  est un espace métrique hyperbolique (voir par exemple [41] Chap. 3).

Un groupe de type fini est *hyperbolique* si l'un de ses graphes de Cayley est hyperbolique.

#### 3.2 Limites d'actions de groupes sur des espaces métriques

Fixons-nous  $\omega$  un ultrafiltre sur  $\mathbb{N}$  ([11] I, p. 39), plus fin que le filtre de Fréchet des complémentaires des parties finies ([11] I, p. 36). Un tel ultrafiltre existe par ([11] I,

p. 39, th. 1). Pour toute suite  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  bornée de réels, nous noterons  $\lim_\omega x_i$  la limite de l'ultrafiltre de  $\mathbb{R}$  engendré par l'image directe de  $\omega$  par  $i \mapsto x_i$  ([11] I, p. 41).

Soit  $(X_i, d_i, *_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite d'espaces métriques pointés. Soit

$$X_\infty = \{x \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i / \lim_\omega d_i(x_i, *_i) < +\infty\}.$$

Par passage à la limite dans l'inégalité triangulaire, nous pouvons définir  $d_\infty : X_\infty \times X_\infty \rightarrow [0 + \infty[$  par

$$d_\infty(x, y) = \lim_\omega d_i(x_i, y_i).$$

Il est facile de voir que  $d_\infty$  est une pseudo-distance. Nous noterons  $(X_\omega, d_\omega, *_\omega)$  l'espace métrique pointé quotient de  $(X_\infty, d_\infty, (*_i)_{i \in \mathbb{N}})$  par la relation d'équivalence  $x \sim y$  si  $x, y$  sont à pseudo-distance nulle. Nous l'appellerons l'*ultralimite* de la suite  $(X_i, d_i, *_i)_{i \in \mathbb{N}}$  (voir [27, 45]).

Soit  $\Gamma$  un groupe agissant par isométries sur  $X_i$ , tel que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$\lim_\omega d_i(\gamma *_i, *_i) < \infty.$$

Alors l'action produit de  $\Gamma$  sur  $X_\infty$  induit une action isométrique de  $\Gamma$  sur  $X_\omega$ .

Si  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$  sont des espaces métriques munis d'une action isométrique d'un groupe  $\Gamma$ , nous dirons que la suite  $(X_i)$  converge pour la *topologie de Hausdorff-Gromov équivariante* vers  $X_\infty$  si pour toute partie finie  $K$  de  $X_\infty$ , pour toute partie finie  $P$  de  $\Gamma$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un élément  $\Omega$  du filtre  $\omega$  tel que pour tout  $i$  dans  $\Omega$ , il existe une partie finie  $K_i$  de  $X_i$ , et une relation  $\mathcal{R}_i \subset K \times K_i$ , dont les projections sur  $K, K_i$  sont surjectives, telles que pour tous  $g, h \in P$ , si  $x \mathcal{R}_i x_i$  et  $y \mathcal{R}_i y_i$ ,

$$|d_i(gx_i, hy_i) - d_\infty(gx, hy)| < \epsilon.$$

Une modification de ceci permet de munir d'une topologie tout ensemble d'actions isométriques de  $\Gamma$  sur des espaces métriques [69].

La proposition suivante est immédiate.

**Proposition 3.1** (1) Si  $X_i$  est géodésique pour tout  $i$ , alors  $X_\omega$  l'est.

(2) Si  $X_i$  est  $\delta_i$ -hyperbolique avec  $\delta = \lim_\omega \delta_i$  fini, alors  $X_\omega$  est  $\delta$ -hyperbolique (donc un arbre si  $\delta = 0$ ).

(3) Soit  $\Gamma$  un groupe agissant par isométries sur chaque  $X_i$ , tel que  $\lim_\omega d_i(\gamma *_i, *_i) < \infty$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . Alors l'action de  $\Gamma$  sur  $X_i$  converge pour la topologie de Hausdorff-Gromov équivariante vers l'action de  $\Gamma$  sur  $X_\omega$ .  $\square$

Donnons maintenant quelques applications de la conjonction du théorème de E. Rips et du fait qu'une ultralimite d'une suite d'actions sur des espaces hyperboliques est une action sur un arbre.

### 3.3 Compacité d'espaces de représentations

Soit  $X$  une variété riemannienne complète, simplement connexe, à courbure sectionnelle strictement négative, possédant un groupe discret cocompact d'isométries (par exemple un espace symétrique de type non compact de rang un). Rappelons que le groupe des isométries  $G$  de  $X$ , muni de la topologie compacte ouverte, est un groupe de Lie réel, par le théorème de Myers.

Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini, virtuellement sans torsion, non virtuellement nilpotent. L'hypothèse sur la torsion est inutile si  $X$  est un espace symétrique, par le théorème de Selberg. Considérons l'ensemble (éventuellement vide)  $R_{fd}(\Gamma, G)/G$  des représentations fidèles et discrètes de  $\Gamma$  dans  $G$  modulo conjugaison. Il est muni de la topologie quotient de la topologie compacte-ouverte (ici celle de la convergence simple) sur l'ensemble des morphismes du groupe discret  $\Gamma$  dans le groupe de Lie  $G$ . L'espace  $R_{fd}(\Gamma, G)/G$  est localement compact et métrisable (voir [61]).

Considérons l'ensemble  $\text{SLF}(\Gamma)$  des actions de  $\Gamma$  sur les arbres, sans point fixe global, sans sous-arbre invariant propre, à stabilisateurs d'arc virtuellement nilpotents, modulo isométrie équivariante. Munissons-le de la topologie de Hausdorff-Gromov équivariante. Son quotient  $\text{PSLF}(\Gamma)$  par les homothéties équivariantes de métrique est métrisable compact par [19, 69].

La topologie de Hausdorff-Gromov équivariante permet de compactifier  $R_{fd}(\Gamma, G)/G$  par un fermé de l'espace  $\text{PSLF}(\Gamma)$ . Voir J. Morgan-P. Shalen [64, 65, 63] par des méthodes de géométrie algébrique, et M. Bestvina [7], F. Paulin [69] par des méthodes purement géométriques, et aussi [17] par l'analyse non standard.

Si  $X$  est le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ , si  $G_0$  est le sous-groupe d'indice 2 de  $G$  préservant l'orientation, et  $\Gamma$  est le groupe fondamental d'une surface de Riemann  $\Sigma$  connexe, compacte sans bord, de genre  $g$  au moins 2, alors  $R_{fd}(\Gamma, G_0)/G_0$  s'identifie avec l'espace de Teichmüller de  $\Sigma$ .

R. Skora (voir [67] chap. VIII) a montré que  $\text{PSLF}(\Gamma)$  est égal à toute la frontière de  $R_{fd}(\Gamma, G_0)/G_0$ . La compactification de  $R_{fd}(\Gamma, G_0)/G_0$  par  $\text{PSLF}(\Gamma)$  coïncide avec la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller (voir [89, 32] et l'exposé 426 au Séminaire Bourbaki de V. Poénaru [73]).

Hormis le cas des surfaces, cette compactification est surtout utile par son corollaire suivant (contenant en particulier le théorème 3 de l'introduction). Notons que si  $X$  est un espace symétrique, et si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de covolume fini de  $G$ , alors  $R_{fd}(\Gamma, G)/G$  est vide ou un point, par le théorème de rigidité de Mostow. Il existe (voir [90]) de nombreuses variétés connexes compactes à bord non vide de dimension 3,

dont le groupe fondamental  $\Gamma$  ne se décompose pas au-dessus d'un groupe virtuellement nilpotent, et avec  $R_{fd}(\Gamma, G)/G$  non vide, non réduit à un point, pour  $G$  le groupe des isométries de  $\mathbb{H}^3$ .

**Théorème 3.2** *Si  $\Gamma$  ne se décompose pas au-dessus d'un groupe virtuellement nilpotent, alors  $R_{fd}(\Gamma, G)/G$  est compact.*

**Preuve.** Soit  $S$  une partie génératrice fixée de  $\Gamma$ . Il suffit de montrer, puisque  $R_{fd}(\Gamma, G)/G$  est métrisable, que pour toute suite  $(\rho_i : \Gamma \rightarrow G)_{i \in \mathbb{N}}$  de représentations fidèles et discrètes et tout ultrafiltre  $\omega$  comme ci-dessus,  $\rho_i$  converge quitte à conjuguer vers une représentation  $\rho_\omega$ . Celle-ci sera fidèle et discrète par une application du lemme de Margulis.

Notons  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction

$$f_i(x) = \max_{s \in S} d(\rho_i(s)x, x).$$

Puisque  $\Gamma$  n'est pas virtuellement nilpotent,  $\rho_i(\Gamma)$  ne fixe aucun point du bord visuel  $\partial X$  de  $X$  (voir [12]). Donc  $f_i$  est convexe (car  $X$  est à courbure négative) et propre. Notons  $x_i$  un minimum de  $f_i$  et  $\lambda_i = f_i(x_i)$ . Comme  $\rho_i(\Gamma)$  est infini discret, il ne fixe aucun point de  $X$ , donc  $\lambda_i > 0$ .

Supposons  $\lim_\omega \lambda_i = +\infty$ . Si  $|\gamma|$  est la longueur minimale d'un mot en les générateurs  $S$  représentant  $\gamma \in \Gamma$ , alors  $\frac{1}{\lambda_i} d(\rho_i(\gamma)x_i, x_i) \leq |\gamma|$ . Notons  $d_i$  la distance  $\frac{1}{\lambda_i} d$  sur  $X$ . Par les propriétés 3.1, l'ultralimite  $(X_\omega, d_\omega, x_\omega)$  de la suite  $(X_i, d_i, x_i)$  est un arbre, muni d'une action (isométrique) de  $\Gamma$ .

Cette action n'a pas de point fixe global par le choix des points bases  $x_i$ . Les stabilisateurs d'arc sont virtuellement nilpotents par le lemme de Margulis et la courbure strictement négative (utiliser la proposition 3.1 (3)). Par le théorème de Rips (exemple iv)), le groupe  $\Gamma$  se décompose au-dessus d'un groupe virtuellement nilpotent, ce qui est une contradiction.

Donc  $\lim_\omega \lambda_i < \infty$ . Quitte à conjuguer  $\rho_i$ , nous pouvons supposer que  $x_i$  reste dans un compact de  $X$ . Or le sous-espace des isométries de  $X$  bougeant un compact de moins d'une constante est compact. Donc  $\rho_i(s)$  converge vers une isométrie pour tout générateur  $s$ . Ceci entraîne que  $\rho_i$  converge vers une représentation  $\rho_i$ .  $\square$

Un résultat analogue est vrai pour  $X$  un immeuble de Tits (discret, épais, localement compact) modelé sur un groupe de Coxeter discret engendré par des réflexions de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ .

Les techniques et le théorème ci-dessus sont aussi l'une des étapes de la preuve du théorème d'hyperbolisation de Thurston, voir [90, 67].

### 3.4 Applications aux groupes hyperboliques

Rappelons qu'une conséquence du théorème de rigidité de Mostow pour les variétés  $V$  localement symétriques, connexes compactes, à courbure strictement négative, de dimension au moins 3, dit que le groupe des automorphismes extérieurs de leur groupe fondamental est fini. Notons aussi que, puisque  $n \geq 3$ ,  $\pi_1 V$  ne se décompose pas au-dessus d'un groupe virtuellement fini.

**Théorème 3.3** *Si  $\Gamma$  est un groupe hyperbolique non virtuellement cyclique, alors le groupe des automorphismes extérieurs de  $\Gamma$  est fini, sauf si  $\Gamma$  se décompose au-dessus d'un groupe virtuellement cyclique.*

**Preuve.** Comme ci-dessus, la preuve consiste à considérer une suite  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'automorphismes de  $\Gamma$  deux à deux distincts modulo les automorphismes intérieurs. Soit  $S$  une partie génératrice fixée de  $\Gamma$ . La fonction  $f_i : G \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $f_i(g) = \max_{s \in S} d(\varphi_i(s)g, g)$  atteint son minimum dans une partie finie de  $\Gamma$ , car  $\Gamma$  n'est pas virtuellement cyclique. Si  $x_i$  est un minimum, et  $\lambda_i = f_i(x_i)$ , alors  $\lim_{\omega} \lambda_i = +\infty$  car les  $\varphi_i$  sont deux à deux distincts dans  $\text{Out}(\Gamma)$ . Comme précédemment, l'ultralimite  $(X_{\omega}, d_{\omega}, x_{\omega})$  de la suite  $(X_i, \frac{1}{\lambda_i} d_i, x_i)$  est un arbre, muni d'une action (isométrique) de  $\Gamma$ .

Cette action n'a pas de point fixe global par le choix des points bases  $x_i$ . Les stabilisateurs d'arc sont virtuellement cycliques par le fait que  $\Gamma$  est discret et hyperbolique (utiliser la proposition 3.1 (3)). Par le théorème de Rips (exemple iv)), le groupe  $\Gamma$  se décompose au-dessus d'un groupe virtuellement cyclique.  $\square$

La même preuve montre le théorème suivant, lorsque  $H$  est de type fini, sans torsion et ne se décompose pas au-dessus d'un groupe cyclique. Il est dû dans le cas sans torsion à M. Gromov [44] Theorem 5.3.C' et à [76], voir [23] pour le cas général.

**Théorème 3.4** *Soit  $\Gamma$  un groupe hyperbolique, et  $H$  un groupe de présentation fini, non virtuellement cyclique, non décomposable au-dessus d'un groupe fini. Alors  $\Gamma$  admet au plus un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes isomorphes à  $H$ .*  $\square$

Une étude plus fine des actions limites permet à Z. Sela et E. Rips-Z. Sela d'obtenir les résultats de décomposition canonique (existence-unicité de décomposition maximale) dans la classe des graphes de groupes à groupes d'arête infinis cycliques, en particulier pour les groupes hyperboliques. (Voir [13] et [31] pour une autre approche.) Les applications suivantes disent en particulier que les seuls groupes hyperboliques, dont le groupe

des automorphismes est infini et intéressant, sont les groupes libres et les groupes de surface.

**Théorème 3.5** (*Z. Sela [83]*) *Soit  $\Gamma$  un groupe hyperbolique sans torsion, librement indécomposable. Alors  $\text{Out}(\Gamma)$  contient un sous-groupe d'indice fini qui est un produit direct d'un groupe abélien libre de type fini et de groupes modulaires de surface de type topologique fini.*

*Si  $\Gamma$  n'est pas un groupe de surface compacte sans bord, alors tout automorphisme  $\varphi$  de  $\Gamma$  possède une classe de conjugaison dans  $\Gamma$  périodique. En particulier, le produit semi-direct de  $\Gamma$  par  $\mathbb{Z}$ , avec  $\mathbb{Z}$  agissant par  $\varphi$  sur  $\Gamma$ , n'est pas un groupe hyperbolique.  $\square$*

Une version analogue de ce théorème est vraie pour les sous-groupes discrets des groupes de Lie réels presque simples de rang 1. Nous en citons une forme affaiblie, dont la deuxième assertion est une généralisation du lemme de Mumford suivant: le sous-espace de l'espace modulaire d'une surface de Riemann compacte, formé des structures complexes dont la métrique de Poincaré a une borne inférieure non nulle sur le rayon d'injectivité, est compact.

**Théorème 3.6** (*Z. Sela [83]*) *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret d'un groupe de Lie  $G$  réel non compact, presque simple, de rang 1. Supposons  $\Gamma$  non virtuellement nilpotent, sans torsion, librement indécomposable.*

*Si  $\Gamma$  est géométriquement fini,  $\text{Out}(\Gamma)$  contient un sous-groupe d'indice fini qui est un produit direct d'un groupe abélien libre de type fini et de groupes modulaires de surface de type topologique fini.*

*De plus  $\text{Out}(\Gamma)$  agit discrètement, avec quotient compact, sur le sous-espace de  $R_{fd}(\Gamma, G)/G$  des représentations  $\rho$  telles que le rayon d'injectivité de  $\rho(\Gamma)\backslash X$  est minoré, où  $X$  est l'espace symétrique de  $G$ .  $\square$*

En 1910, M. Dehn a défini trois problèmes de décision sur les groupes, le *problème du mot* (étant donné une présentation finie de groupe, existe-t-il un algorithme qui permette de décider si un mot dans les générateurs est trivial dans le groupe?), voir [79], le *problème de conjugaison* (étant donné une présentation finie de groupe, existe-t-il un algorithme qui permette de décider si deux mots en les générateurs sont conjugués dans le groupe?) et le *problème d'isomorphisme* (étant donné une classe de présentations finies de groupes, existe-t-il un algorithme pour décider si deux présentations donnent des groupes isomorphes?).

Plus précisément, il est facile de coder les présentations finies de groupes par les entiers  $\mathbb{N}$ , car une présentation finie est donnée par un nombre fini de générateurs et un

nombre fini de mots de longueur finie en ces générateurs. Le problème d'isomorphisme dans la classe  $\mathcal{P}$  de présentations finies de groupes est *décidable* s'il existe une fonction  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  récursive (voir par exemple [53]) telle que les présentations  $n$  et  $m$  de  $\mathcal{P}$  sont isomorphes si et seulement si  $f(n, m) = 0$ .

M. Gromov [44] a montré que les problèmes des mots et de conjugaison sont décidables dans les groupes hyperboliques. Z. Sela [81] a montré que, pour les groupes hyperboliques sans torsion, le problème d'isomorphisme est décidable, en utilisant des limites de groupes hyperboliques et le théorème de Rips, et les constructions de représentants canoniques de solutions de systèmes d'équations [77]. Il s'agit d'un outil technique qui permet d'affiner le fait que les triangles géodésiques dans un espace hyperbolique sont "fins", en s'inspirant du fait que dans un groupe libre (où la constante d'hyperbolicité  $\delta$  peut être prise nulle), chaque élément du groupe possède une *forme normale* canonique: son écriture réduite dans un système libre de générateurs. En utilisant aussi ces représentants canoniques, et les feuilletages de 2-complexes comme dans [28], T. Delzant [25, 26] a amélioré ce résultat au cas avec torsion, en donnant des bornes effectives sur le temps de terminaison de l'algorithme en fonction de  $\delta$ .

**Théorème 3.7** *Le problème d'isomorphisme dans la classe des présentations finies de groupes hyperboliques est décidable.* □

## 4 Questions en rang supérieur

Il nous paraît intéressant d'étudier la géométrie des actions de groupes sur les immeubles de Tits affine (non discrets) de rang supérieur, en commençant par l'analogie de [19] en rang supérieur.

Par exemple, une compactification d'espaces de représentations discrètes dans un groupe de Lie  $G$  réel simple de rang supérieur par des actions du groupe sur des immeubles de Tits affines (non discrets) modelés sur le groupe de Weyl de  $G$ , à stabilisateurs de germe de plat virtuellement résolubles, est possible, voir [72] (et aussi [51]).

**Problème 1:** *Trouver un critère purement algébrique pour qu'un groupe de type fini n'admette pas d'actions sans point fixe global (avec certains types de stabilisateur de germe de plat, par exemple virtuellement résoluble) sur un immeuble de Tits affine (non discret).*

Par exemple, pour des immeubles produits d'immeubles de rang un, la propriété  $T$  de Kazhdan, qui implique la propriété (FA), peut donner une telle condition.

Comme la situation est plus rigide en rang supérieur, la question suivante (non complètement résolue en rang 1), est naturelle. De plus, puisque les immeubles de Tits affines discrets en rang  $\geq 3$  ont été classés par J. Tits [92], ceci peut permettre d'obtenir des solutions au problème 1 (voir [46]).

**Problème 2 :** *Un groupe de type fini, qui agit sans point fixe global (avec un certain type de stabilisateur) sur un immeuble de Tits affine, agit-il sans point fixe global sur un immeuble de Tits affine discret (avec même type de stabilisateur) ?*

Ceci permettrait d'obtenir des informations (au moins asymptotiques) sur les sous-groupes discrets (de covolume infini, pour contourner les théorèmes de (super)-rigidité de Margulis, voir l'exposé 778 au Séminaire Bourbaki de P. Pansu [68]) des groupes de Lie réels de rang supérieur, dont la géométrie est peu connue, et pour cause :

**Problème 3 :** *Trouver des familles intéressantes de sous-groupes discrets de covolume infini des groupes de Lie réels semi-simples de rang supérieur (par exemple, ayant un espace de déformation non réduit à un point, mais n'agissant pas sans point fixe global (à stabilisateurs de germe de plat virtuellement résolubles) sur un immeuble de Tits affine (non discret)).*

Par exemple, les groupes fondamentaux de variétés de dimension 3 compactes, à bord non vide, Haken, acylindriques et atoroidales sont les premiers exemples à regarder. Il reste à comprendre de manière géométrique les exemples de Margulis-Soifer [60].

## RÉFÉRENCES

- [1] R. Alperin, H. Bass. *Length functions of group actions on  $\Lambda$ -trees*, in "Combinatorial group theory and topology", S. Gersten, J. Stallings eds, Princeton Univ. Press (1987), 265-378.
- [2] H. Bass. *Finitely generated subgroup of  $GL_2$* , dans "Smith conjecture", J. Morgan, H. Bass, eds. Academic Press (1984), 127-136.
- [3] H. Bass. *Covering theory for graphs of groups*, J. Pure Appl. Math. **89** (1993) 3-47.
- [4] H. Bass, R. Kulkarni. *Uniform tree lattices*, Jour. Amer. Math. Soc **3** (1990) 843-902.
- [5] H. Bass, A. Lubotzky. *Rigidity of group actions on locally finite trees*, Prépublication, 1994.

- [6] J.-F. Boutot, H. Carayol. *Uniformisation  $p$ -adique des courbes de Shimura: les théorèmes de Cerednik et Drinfeld*, Astérisque **196-197** (1991).
- [7] M. Bestvina. *Degenerations of the hyperbolic space*, Duke Math. J., **56** (1988) 143-161.
- [8] M. Bestvina, M. Feighn. *Bounding the complexity of simplicial group actions on trees*, Inv. Math. **103** (1991) 449-469.
- [9] M. Bestvina, M. Feighn. *Stable actions of groups on real trees*, Inv. Math. **121** (1995) 287-321.
- [10] M. Bestvina, M. Feighn. *Outer limits*, prépublication (Oct. 1992).
- [11] N. Bourbaki. *Topologie générale*, chap. 1 à 4, Hermann, Paris, 1971.
- [12] B. Bowditch. *Discrete parabolic groups*, J. Diff. Geom. **38** (1993) 559-583.
- [13] B. Bowditch. *Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups*, Prépublication Univ. Southampton (Août 1995).
- [14] F. Bruhat, J. Tits. *Groupes réductifs sur un corps local (données radicielles valuées)*, Pub. Math. I.H.É.S. **41** (1972) 5-252.
- [15] M. Burger, S. Mozes. *CAT(-1) spaces, divergence groups and their commensurators*, Jour. Amer. Math. Soc **9** (1996) 57-93.
- [16] A. Casson, S. Bleiler. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, Lond. Math. Soc. Stud. Text **9**, Camb. Univ. Press (1992).
- [17] I.M. Chiswell. *Non standard analysis and the Morgan-Shalen compactification*, Quart. J. Math. Oxford **42** (1991) 257-270.
- [18] F.M. Choucroun, *Analyse harmonique des groupes d'automorphismes d'arbres de Bruhat-Tits*, Mémoire **58** Soc. Math. France (1994).
- [19] M. Culler, J. Morgan. *Groups actions on  $\mathbb{R}$ -trees*, Proc. Lond. Math. Soc **55** (1987) 571-604.
- [20] M. Culler, P.B. Shalen. *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, Ann. of Math. **117** (1983) 109-146.

- [21] M. Culler, K. Vogtmann. *Moduli of graphs and automorphisms of free groups*, Invent. Math. **84** (1986) 91-119.
- [22] M. Culler, K. Vogtmann. *The boundary of Outer Space in rank 2*, in “Arboreal group theory”, R. Alperin ed., pp 189-230, Pub. M.S.R.I. **19**, Springer Verlag 1991.
- [23] T. Delzant. *L'image d'un groupe dans un groupe hyperbolique*, Comm. Math. Helv. **70** (1995) 267-284.
- [24] T. Delzant. *Décomposition d'un groupe en produit libre ou somme amalgamée*, à paraître dans J. Reine. Ang. Math.
- [25] T. Delzant. *Finitely presented subgroups of hyperbolic groups*, prépublication Univ. Strasbourg 1995.
- [26] T. Delzant. *Groupes de présentation finie opérant dans un espace hyperbolique*, en préparation.
- [27] L. van den Dries, A. Wilkie. *On Gromov's theorem concerning groups of polynomial growth and elementary logic*, J. Alg. **89** (1984) 349-374.
- [28] M.J. Dunwoody. *The accessibility of finitely presented groups*, Inv. Math. **81** (1985) 449-457.
- [29] M.J. Dunwoody. *An inaccessible group*, in “Geometric group theory” Vol. 1, A. Niblo, M. Roller eds, LMS LNS **182**, Cambridge Univ. Press, 1993, 75-78.
- [30] M.J. Dunwoody. *Groups acting on protrees*, prépublication Southampton Univ. (Avr. 1994).
- [31] M.J. Dunwoody, M.E. Sageev. *JSJ-splittings for finitely presented groups over slender groups*, prépublication Southampton Univ. (Août 1996).
- [32] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque **66-67**, Soc. Math. France 1979.
- [33] A. Figa-Talamanka, C. Nebia. *Harmonic analysis and representation theory for groups acting on homogeneous trees*, Lond. Math. Soc. Lect. Notes Ser. **162**, Cambridge Univ. Press 1991.

- [34] D. Gaboriau. *Générateurs indépendants pour les systèmes d'isométries de dimension un*, à paraître aux Ann. Inst. Fourier.
- [35] D. Gaboriau, G. Levitt. *The rank of actions on  $\mathbb{R}$ -trees*, Ann. Scien. Ec. Norm. Sup. (4) **28** (1995) 549-570.
- [36] D. Gaboriau, G. Levitt, F. Paulin. *Pseudogroups of isometries of  $\mathbb{R}$  and Rips' theorem on free actions on  $\mathbb{R}$ -trees*, Israel J. Math. **87** (1994) 403-428.
- [37] D. Gaboriau, G. Levitt, F. Paulin. *Pseudogroups of isometries of  $\mathbb{R}$  and reconstruction of free actions on  $\mathbb{R}$ -trees*, Erg. Theo. Dyn. Sys. **15** (1995) 633-652.
- [38] E. Gekeler. *Drinfeld modular curves*, Lect. Notes **1231** Springer Verlag (1986).
- [39] L. Gerritzen, M. van der Put. *Schottky groups and Mumford curves*, Lect. Notes **817** Springer Verlag (1980).
- [40] É. Ghys. *Les groupes hyperboliques*, Séminaire Bourbaki **722**, Astérisque **189-190**, Soc. Math. France (1990).
- [41] É. Ghys, P. de la Harpe, eds. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Prog. in Math. **83**, Birkhäuser 1990.
- [42] H. Gillet, P. Shalen. *Dendrology of groups in low  $\mathbb{Q}$ -ranks*, J. Diff. Geom. **32** (1990) 605-712.
- [43] O. Goldman, N. Iwahori. *The space of  $p$ -adic norms*, Acta Math. **109** (1963) 137-177.
- [44] M. Gromov. *Hyperbolic groups*, in "Essays in group theory", S. Gersten ed., pp. 75-263, MSRI Pub. **8**, Springer Verlag 1987.
- [45] M. Gromov. *Asymptotics invariants of infinite groups*, Vol. 2 de "Geometric group theory", A. Niblo, M. Roller eds, LMS LNS **182**, Cambridge Univ. Press, 1993.
- [46] A. Haefliger. *Complexes of groups and orbihedra*, in "Group theory from a geometrical viewpoint" (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds.), 504-540 World Scientific, 1991.
- [47] H. Imanishi. *On codimension one foliations defined by closed one forms with singularities*, J. Math. Kyoto Univ. **19** (1979) 285-291.

- [48] N.V. Ivanov. *Subgroups of Teichmüller modular groups*, Trans. Math. Mono. **115**, Amer. Math. Soc. (1992).
- [49] W.H. Jaco, P.B. Shalen. *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, Memoirs **220**, Amer. Math. Soc. 1979.
- [50] K. Johannson. *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Lect. Notes in Math. **761**, Springer Verlag, 1979.
- [51] B. Kleiner, B. Leeb. *Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces of higher rank*, Preprint, Jan. 1995.
- [52] J.-L. Koszul. *Travaux de J. Stallings sur la décomposition des groupes en produits libres*, Sémin. Bourbaki 1968/1969 n° 356, Lect. Notes **179**, Springer Verlag, 1971.
- [53] D. Lacombe. *Théorèmes de non-décidabilité*, Sémin. Bourbaki 1963/64 n° **266**, Benjamin, 1966.
- [54] G. Levitt. *La dynamique des pseudogroupes de rotations*, Invent. Math. **113** (1993) 633-670.
- [55] G. Levitt. *Constructing free actions on  $\mathbb{R}$ -trees*, Duke Math. J. **69** (1993) 615-633.
- [56] G. Levitt, F. Paulin. *Geometric group actions on trees*, à paraître dans Amer. Jour. Math.
- [57] Y. Liu. *Density of the commensurability group of uniform tree lattices*, J. Alg. **165** (1995) 346-35.
- [58] A. Lubotzky. *Lattices in rank one Lie groups over local fields*, GAFA **1** (1991), 405-431.
- [59] A. Lubotzky, S. Mozes, R. Zimmer. *Superrigidity for the commensurability group of tree lattices*, Comm. Math. Helv. **69** (1994) 523-548.
- [60] G. Margulis, G. Soifer. *Maximal subgroups of infinite index in finitely generated groups*, J. Alg. **69** (1981) 1-23.
- [61] G. Martin, *On discrete isometry groups of negative curvature*, Pac. J. Math. **160** (1993), 109-127.
- [62] J. Morgan.  *$\Lambda$ -trees and their applications*, Bull. A.M.S. **26** (1992) 87-112.

- [63] J. Morgan. *Groups actions on trees and the compactification of the space of conjugacy classes of  $SO(n, 1)$ -representations*, *Topology* **25** (1986) 1-33.
- [64] J. Morgan, P. Shalen. *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures I*, *Ann. Math.* **122** (1985) 398-476.
- [65] J. Morgan, P. Shalen. *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures II, III*, *Ann. Math.* **127** (1988) 403-519.
- [66] J. Morgan, P. Shalen. *Free actions of surface groups on  $\mathbb{R}$ -trees*, *Topology* **30** (1991) 143-154.
- [67] J.-P. Otal. *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, *Astérisque* **235**, Soc. Math. France (1996).
- [68] P. Pansu, *Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité*, *Sém. Bourbaki 1993/94 n° 778*, *Astérisque* **227**, Soc. Math. France (1995), 69-105.
- [69] F. Paulin. *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*, *Invent. Math.* **94** (1988), 53-80.
- [70] F. Paulin. *Outer automorphisms of hyperbolic groups and small actions on  $\mathbb{R}$ -trees*, in "Arboreal group theory", R. Alperin ed., pp 331-343, *Pub. M.S.R.I.* **19**, Springer Verlag 1991.
- [71] F. Paulin. *Sur les automorphismes extérieurs des groupes hyperboliques*, à paraître, *Ann. Scien. Ecol. Norm. Sup.*
- [72] F. Paulin. *De la géométrie et la dynamique des groupes discrets*, *Mémoire d'habilitation*, ENS Lyon (Juin 1995).
- [73] V. Poénaru. *Travaux de Thurston sur les difféomorphismes des surfaces et l'espace de Teichmüller*, *Sém. Bourbaki 1978/79 n° 529*, *Lect. Notes* **770**, Springer Verlag, 1980.
- [74] H. Poincaré, *Oeuvres complètes, tome II*, Gauthier-Villars, 1952.
- [75] M. Raynaud. *Construction analytique de courbes en géométrie non archimédienne [d'après David Mumford]*, *Séminaire Bourbaki* **427**, *Lect. Notes* **383**, Springer Verlag (1994), 171-185.

- [76] E. Rips, Z. Sela. *Structure and rigidity in hyperbolic groups I*, *Geom. and Func. Ana.* **4** (1994), 337-371.
- [77] E. Rips, Z. Sela. *Canonical representatives and equations in hyperbolic groups*, *Inv. Math.* **120** (1995), 489-512.
- [78] E. Rips, Z. Sela. *Cyclic splittings of finitely presented groups and the canonical JSJ decomposition*, Prépublication Columbia (Avril 1995).
- [79] G. Sabbagh. *Caractérisation algébrique des groupes de type fini ayant un problème des mots résoluble*, *Sém. Bourbaki 1974/75 n° 356*, *Lect. Notes* **179**, Springer Verlag, 1971.
- [80] G.P. Scott, C.T.C. Wall. *Topological methods in group theory*, in “Homological group theory”, C.T.C. Wall ed., *Lond. Math. Soc. Lect. Notes* **36**, Cambridge Univ. Press (1979) 137-203.
- [81] Z. Sela. *The isomorphism problem for hyperbolic groups I*, *Ann. Math.* **141** (1995) 217-283.
- [82] Z. Sela. *Acyindrical accessibility for groups*, Prépublication Columbia Univ. (1994).
- [83] Z. Sela. *Structure and rigidity in (Gromov) hyperbolic groups and discrete groups in rank 1 Lie groups II*, à paraître dans GAFA.
- [84] Z. Sela. *On the Nielsen-Thurston classification and automorphisms of free groups I*, à paraître dans *Duke Math. J.*
- [85] J.-P. Serre. *Arbres, amalgames,  $SL_2$* , *Astérisque* **46**, Soc. Math. France (1983).
- [86] P. Shalen. *Dendrology of groups: an introduction*, *Essays in group theory* (S.M. Gersten ed.), *M.S.R.I Pub.* **8**, Springer Verlag, 1987.
- [87] P. Shalen. *Dendrology and its applications*, *Group theory from a geometrical viewpoint* (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds.), World Scientific, 1991.
- [88] E.H. Spanier. *Algebraic topology*, Tata McGraw Hill (1966).
- [89] W. Thurston. *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **19** (1988) 417-432.

- [90] W. Thurston. *Hyperbolic structures on 3-manifolds I: Deformation of acylindrical manifolds*, Ann. of Math. **124** (1986) 203-246.
- [91] J. Tits. A “*theorem of Lie-Kolchin*” for trees, in “Contributions to Algebra: a collection of papers dedicated to Ellis Kolchin”, pp. 377-388, H. Bass et al eds, Academic Press 1977.
- [92] J. Tits. *Immeubles de type affine*, dans “Buildings and the geometry of diagrams”, Proc. CIME Como 1984, L. Rosati ed., Lect. Notes **1181**, Springer Verlag, 1986, 159-190.
- [93] C.T.C. Wall. *Pair of relative cohomological dimension one*, J. Pure App. Alg. **1** (1971) 141-154.

Frédéric PAULIN

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées

U.M.R. 128 du C.N.R.S.

École Normale Supérieure de Lyon

46 allée d'Italie

F-69364 LYON CEDEX 07

*e-mail* : paulin@umpa.ens-lyon.fr

Nouvelle adresse :

Bâtiment 425 (Mathématiques)

Université PARIS-SUD

91405 ORSAY CEDEX, FRANCE

*e-mail* : paulin@topo.math.u-psud.fr

# *Astérisque*

JEAN-LOUP WALDSPURGER

## **Cohomologie des espaces de formes automorphes**

*Astérisque*, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 809, p. 139-156

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1995-1996\\_\\_38\\_\\_139\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__139_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## COHOMOLOGIE DES ESPACES DE FORMES AUTOMORPHES

[d'après J. Franke]

par Jean-Loup WALDSPURGER

Dans l'article [F], Franke démontre la conjecture de Borel que l'on peut énoncer sous la forme imprécise suivante. Soit  $G$  un groupe algébrique défini sur  $\mathbf{Q}$ , réductif et connexe. Notons  $\mathbf{A}$  l'anneau des adèles de  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{A}_f$  le sous-anneau des adèles finies. Fixons un sous-groupe compact maximal  $K_{\mathbf{R}}$  de  $G(\mathbf{R})$  et un sous-groupe ouvert compact  $H$  de  $G(\mathbf{A}_f)$ . Alors les espaces de cohomologie de certains fibrés sur la variété  $G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}) / K_{\mathbf{R}} H$  sont isomorphes à des espaces de cohomologie convenables de l'espace des formes automorphes sur  $G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})$ . Ces formes automorphes sont des fonctions sur  $G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})$  vérifiant une condition de croissance et solutions de certains systèmes d'équations différentielles.

Ce résultat n'était jusqu'à présent connu que dans peu de cas. Celui où  $G$  est de rang semi-simple (sur  $\mathbf{Q}$ ) égal à 1 avait été traité par Casselman et Speh.

L'espace des formes automorphes contient le sous-espace des formes cuspidales qui, *grosso modo*, est semi-simple pour l'action naturelle de  $G(\mathbf{A})$ . L'un des problèmes qui se posent est de décrire l'espace des formes automorphes tout entier à l'aide d'espaces de formes cuspidales sur les sous-groupes de Lévi des sous-groupes paraboliques de  $G$ . Franke démontre des résultats assez forts dans cette direction. En particulier, toute forme automorphe est combinaison linéaire de dérivées convenables de séries d'Eisenstein issues de formes cuspidales. Un ingrédient essentiel de la démonstration est bien sûr la théorie des séries d'Eisenstein développée en toute généralité par Langlands ([L]).

En assemblant les deux résultats, on obtient une suite spectrale, aboutissant aux espaces de cohomologie d'un fibré sur  $G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}) / K_{\mathbf{R}} H$ , dont les termes  $E_1^{pq}$  s'expriment à l'aide d'espaces de cohomologie de modules semi-simples.

On se propose d'énoncer précisément ces résultats et de donner de très brèves indications sur leurs preuves.

Cet exposé fait suite à un séminaire consacré à l'article de Franke, qui a eu lieu à Paris 7 en 1994-95. J'en remercie les participants : L. Clozel, M. Harris, F. Sauvageot et particulièrement G. Laumon et C. Mœglin qui ont bien voulu relire le présent texte.

**Notations :**  $G$ ,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}_f$  ont déjà été introduits. Si  $V$  est un espace vectoriel réel, on note  $V^*$  son espace dual,  $V_{\mathbf{C}}$  et  $V_{\mathbf{C}}^*$  leurs complexifiés. Si  $v \in V_{\mathbf{C}}$ , on note  $Re(v) \in V$  sa partie réelle. Si  $L$  est un groupe de Lie réel, on note  $L^0$  sa composante neutre.

## 1. FORMES AUTOMORPHES

**1.1.** Fixons un sous-groupe parabolique  $P_0$  de  $G$ , défini sur  $\mathbf{Q}$  et minimal, et un sous-groupe de Lévi  $M_0$  de  $P_0$ , défini sur  $\mathbf{Q}$ . Notons :

- $A_0$  le plus grand tore déployé sur  $\mathbf{Q}$  contenu dans le centre de  $M_0$  ;
- $\mathfrak{a}_0$ , resp.  $\mathfrak{g}$ , les algèbres de Lie des groupes de Lie réels  $A_0(\mathbf{R})$ , resp.  $G(\mathbf{R})$  ;
- $H_0 : A_0(\mathbf{R})^0 \rightarrow \mathfrak{a}_0$  l'inverse de l'exponentielle ;
- $\Sigma_0 \subset \mathfrak{a}_0^*$  l'ensemble des racines de  $\mathfrak{a}_0$  dans  $\mathfrak{g}$  ;
- $\Sigma_0^+ \subset \Sigma_0$  le sous-ensemble de racines positives associé à  $P_0$ .

On fixe une norme  $|\cdot|$  sur  $\mathfrak{a}_0$ .

**1.2.** Fixons un sous-groupe compact maximal  $K$  de  $G(\mathbf{A})$ . Il est nécessairement de la forme  $K = \prod_v K_v$ , où, pour toute place  $v$  de  $\mathbf{Q}$ ,  $K_v$  est un sous-groupe compact maximal de  $G(\mathbf{Q}_v)$ . On impose, ainsi qu'il est loisible, que, pour toute  $v$ ,  $K_v$  soit en "bonne position" par rapport à  $A_0$ , ce qui signifie précisément ceci :

- si  $v$  est la place réelle, auquel cas on note notre groupe  $K_{\mathbf{R}}$ ,  $A_0(\mathbf{R})$  est stable par l'involution de Cartan associée à  $K_{\mathbf{R}}$  ;

- si  $v$  est finie, notons  $G_v$  et  $A_{0,v}$  les groupes sur  $\mathbf{Q}_v$  déduits de  $G$  et  $A_0$  par extension des scalaires ; alors il existe un sous-tore  $A_v$  de  $G_v$ , défini et déployé sur  $\mathbf{Q}_v$ , maximal, contenant  $A_{0,v}$ , et il existe un sommet spécial de l'appartement associé à  $A_v$  de l'immeuble de Bruhat-Tits de  $G_v$  sur  $\mathbf{Q}_v$  de sorte que  $K_v$  soit le fixateur de ce sommet dans  $G(\mathbf{Q}_v)$ .

**1.3.** Fixons un sous-ensemble compact  $\omega \subset P_0(\mathbf{A})$  et un réel  $t_0$ . Notons  $A_0(\mathbf{R}, t_0)$  l'ensemble des  $a \in A_0(\mathbf{R})^0$  tels que  $\langle \alpha, H_0(a) \rangle \geq t_0$  pour tout  $\alpha \in \Sigma_0^+$ . Posons :

$$\mathfrak{G} = \{pak ; p \in \omega, a \in A_0(\mathbf{R}, t_0), k \in K\}.$$

Ce sous-ensemble de  $G(\mathbf{A})$  est appelé un domaine de Siegel. Il fournit une approximation de  $G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})$  en le sens suivant :

- l'ensemble des  $\gamma \in G(\mathbf{Q})$  tels que  $\gamma\mathfrak{O} \cap \mathfrak{O} \neq \emptyset$  est fini ;
- si  $\omega$  est assez grand et  $t_0$  assez petit, on a l'égalité  $G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{Q})\mathfrak{O}$ .

Nous supposons désormais que  $\omega$  est "assez grand" et  $t_0$  "assez petit".

**1.4.** Pour tout espace  $V$  de fonctions sur  $G(\mathbf{A})$  pour lequel de telles définitions ont un sens, on note  $\delta$  l'action de  $G(\mathbf{A})$  dans  $V$  par translations à droite, ou l'action qui s'en déduit de  $\mathfrak{g}$  ou de l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}$  de  $\mathfrak{g}$ .

On appelle ici fonction à croissance uniformément modérée sur  $G(\mathbf{A})$  toute fonction  $f : G(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$  vérifiant les conditions (1) à (4) ci-dessous.

- (1)  $f$  est invariante à gauche par  $G(\mathbf{Q})$
- (2)  $f$  est  $C^\infty$ .

Cela signifie ceci : pour tout  $g_{\mathbf{R}} \in G(\mathbf{R})$ ,  $g_f \in G(\mathbf{A}_f)$ , il existe des voisinages ouverts  $V_{\mathbf{R}}$  de  $g_{\mathbf{R}}$  dans  $G(\mathbf{R})$  et  $V_f$  de  $g_f$  dans  $G(\mathbf{A}_f)$  et une fonction  $f_{\mathbf{R}} : V_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{C}$ , qui est  $C^\infty$ , de sorte que pour tous  $g'_{\mathbf{R}} \in V_{\mathbf{R}}$ ,  $g'_f \in V_f$ , on ait l'égalité  $f(g'_{\mathbf{R}} g'_f) = f_{\mathbf{R}}(g'_{\mathbf{R}})$ .

- (3)  $f$  est  $K$ -finie.

*I.e.* l'ensemble des fonctions  $\{\delta(k)f ; k \in K\}$  engendre un espace de dimension finie.

- (4)  $\exists N \in \mathbf{N}, \forall Y \in \mathcal{U}, \exists c > 0, \forall p \in \omega, \forall a \in A_0(\mathbf{R}, t_0), \forall k \in K,$

$$|\delta(Y) f(pak)| \leq c e^{N|H_0(a)|}.$$

On note  $\mathcal{S}_{\text{umod}}(G)$  l'espace de ces fonctions.

**1.5.** Notons  $\mathcal{Z}$  le centre de  $\mathcal{U}$ . On appelle forme automorphe sur  $G(\mathbf{A})$  tout élément  $f$  de  $\mathcal{S}_{\text{umod}}(G)$  vérifiant la condition :

- il existe un idéal  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{Z}$ , de codimension finie, tel que  $\delta(Z)f = 0$  pour tout  $Z \in \mathcal{I}$ .

On note  $\mathcal{A}(G)$  l'espace de ces formes automorphes.

**1.6.** Notons  $A_G$  le plus grand tore déployé sur  $\mathbf{Q}$  contenu dans le centre de  $G$ . Soit  $\mu$  un caractère de  $A_G(\mathbf{R})^0$ , *i.e.* un homomorphisme continu de  $A_G(\mathbf{R})^0$  dans  $\mathbf{C}^\times$ . On note  $\mathcal{S}_{\text{umod}}(G, \mu)$ , resp.  $\mathcal{A}(G, \mu)$ , l'espace des  $f \in \mathcal{S}_{\text{umod}}(G)$ , resp.  $\mathcal{A}(G)$ , vérifiant la condition :

- (5) pour tous  $a \in A_G(\mathbf{R})^0, g \in G(\mathbf{A}), f(ag) = \mu(a) f(g)$ .

On note simplement  $\mathcal{A}^G = \mathcal{A}(G, 1)$ , où 1 est le caractère trivial de  $A_G(\mathbf{R})^0$ .

## 2. LE RÉSULTAT PRINCIPAL

**2.1.** Notons  $\mathfrak{g}^1$ , resp.  $\mathfrak{k}$ , l'algèbre de Lie  $A_G(\mathbf{R})^0 \backslash G(\mathbf{R})$ , resp.  $K_{\mathbf{R}}$ . Remarquons que  $K_{\mathbf{R}}$  s'identifie à un sous-groupe  $A_G(\mathbf{R})^0 \backslash G(\mathbf{R})$ . Rappelons succinctement que l'on appelle  $\mathfrak{g}^1 \times K_{\mathbf{R}}$ -module un espace vectoriel complexe  $V$  muni d'une action  $\theta$  de  $\mathfrak{g}^1 \times K_{\mathbf{R}}$ , vérifiant les conditions suivantes :

(6)  $\theta|_{\mathfrak{g}^1}$ , resp.  $\theta|_{K_{\mathbf{R}}}$ , est une représentation d'algèbre de Lie, resp. de groupe ;

(7) tout élément de  $V$  est  $K_{\mathbf{R}}$ -fini ;

(8) une condition de compatibilité entre  $\theta|_{\mathfrak{g}^1}$  et  $\theta|_{K_{\mathbf{R}}}$ , cf. [V], définition 0.3.8 pour un énoncé précis.

Pour un tel  $\mathfrak{g}^1 \times K_{\mathbf{R}}$ -module, on note  $H^0(\mathfrak{g}^1, K_{\mathbf{R}}; V)$  le sous-espace des éléments de  $V$  invariants par  $K_{\mathbf{R}}$  et annulés par  $\mathfrak{g}^1$ . En dérivant le foncteur  $V \mapsto H^0(\mathfrak{g}^1, K_{\mathbf{R}}; V)$ , on définit, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , l'espace de cohomologie  $H^n(\mathfrak{g}^1, K_{\mathbf{R}}; V)$  ([V], définition 6.1.13).

**2.2.** Considérons une représentation continue de  $G(\mathbf{R})$  dans un espace vectoriel complexe  $E$  de dimension finie. Supposons que  $A_G(\mathbf{R})^0$  agisse dans  $E$  par un caractère dont on note  $\mu$  l'inverse. Les espaces  $\mathcal{A}(G, \mu) \otimes_{\mathbf{C}} E$  et  $\mathcal{S}_{\text{umod}}(G, \mu) \otimes_{\mathbf{C}} E$  sont des  $\mathfrak{g}^1 \times K_{\mathbf{R}}$ -modules. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , l'injection  $\mathcal{A}(G, \mu) \rightarrow \mathcal{S}_{\text{umod}}(G, \mu)$  induit un homomorphisme

$$(9) \quad H^n(\mathfrak{g}^1, K_{\mathbf{R}}; \mathcal{A}(G, \mu) \otimes_{\mathbf{C}} E) \longrightarrow H^n(\mathfrak{g}^1, K_{\mathbf{R}}; \mathcal{S}_{\text{umod}}(G, \mu) \otimes_{\mathbf{C}} E).$$

**THÉORÈME** (Franke).— *Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , cet homomorphisme est un isomorphisme.*

**2.3.** Le groupe  $G(\mathbf{A}_f)$  agit sur  $\mathcal{A}(G, \mu)$  et  $\mathcal{S}_{\text{umod}}(G, \mu)$ , donc aussi sur les espaces de départ et d'arrivée de l'isomorphisme (9). Celui-ci est équivariant pour ces actions. Soit  $H$  un sous-groupe ouvert compact de  $G(\mathbf{A}_f)$ . Il y a un isomorphisme analogue à (9), où  $\mathcal{A}(G, \mu)$  et  $\mathcal{S}_{\text{umod}}(G, \mu)$  sont remplacés par leurs sous-espaces des invariants par  $H$ , que l'on note  $\mathcal{A}(G, \mu)^H$  et  $\mathcal{S}_{\text{umod}}(G, \mu)^H$ .

Posons  $X_H = A_G(\mathbf{R})^0 \backslash G(\mathbf{A}) / K_{\mathbf{R}} H$ . Le groupe  $G(\mathbf{Q})$  agit sur  $X_H$  par multiplication à gauche et sur  $E$  via le plongement  $G(\mathbf{Q}) \subset G(\mathbf{R})$ , donc aussi sur  $X_H \times E$ . Supposons  $H$  assez petit. L'action de  $G(\mathbf{Q})$  sur  $X_H$  est alors sans point fixe et l'on définit un fibré  $\mathcal{E}$  sur  $G(\mathbf{Q}) \backslash X_H$  par :

$$\mathcal{E} = G(\mathbf{Q}) \backslash (X_H \times E).$$

Il est  $C^\infty$ , à connexion intégrable. On définit ses espaces de cohomologie de de Rham  $H^n(G(\mathbf{Q}) \backslash X_H, \mathcal{E})$ . Rappelons que ces espaces s'identifient à des espaces de cohomologie de certains groupes discrets, plus précisément de groupes de congruence.

Notons  $\mathcal{S}(G, \mu)^H$  l'espace des fonctions  $f : G(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$  vérifiant les conditions (1), (2), (3) et (5) et invariants à droite par  $H$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , il est aisé de définir un isomorphisme

$$H^n(\mathfrak{g}^1, K_{\mathbf{R}}; \mathcal{S}(G, \mu)^H \otimes_{\mathbf{C}} E) \longrightarrow H^n(G(\mathbf{Q}) \backslash X_H, \mathcal{E}).$$

De l'inclusion  $\mathcal{S}_{\text{umod}}(G, \mu)^H \rightarrow \mathcal{S}(G, \mu)^H$  se déduit un homomorphisme :

$$H^n(\mathfrak{g}^1, K_{\mathbf{R}}; \mathcal{S}_{\text{umod}}(G, \mu)^H \otimes_{\mathbf{C}} E) \longrightarrow H^n(\mathfrak{g}^1, K_{\mathbf{R}}; \mathcal{S}(G, \mu)^H \otimes_{\mathbf{C}} E).$$

**THÉORÈME** (Borel).— *Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , cet homomorphisme est un isomorphisme.*

*Cf. [B]. Du théorème de Franke résulte donc un isomorphisme*

$$(10) \quad H^n(\mathfrak{g}^1, K_{\mathbf{R}}; \mathcal{A}(G, \mu)^H \otimes_{\mathbf{C}} E) \longrightarrow H^n(G(\mathbf{Q}) \backslash X_H, \mathcal{E})$$

pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

**2.4.** Fixons une mesure de Haar sur  $G(\mathbf{A}_f)$  et notons  $\mathcal{H}_H$  l'algèbre de convolution des fonctions sur  $G(\mathbf{A}_f)$ , à valeurs complexes, invariants à droite et à gauche par  $H$  et à support compact. Cette algèbre agit naturellement sur les espaces de départ et d'arrivée de l'isomorphisme (10). Celui-ci est équivariant pour ces actions.

### 3. SÉRIES D'EISENTEIN

**3.1.** Notons  $\mathbf{A}^\times$  le groupes des idèles de  $\mathbf{Q}$ ,  $|\cdot|_{\mathbf{A}}$  sa valeur absolue usuelle et  $X^*(G)$  le groupe des caractères algébriques de  $G$  définis sur  $\mathbf{Q}$ . Un tel caractère définit un homomorphisme de  $G(\mathbf{A})$  dans  $\mathbf{A}^\times$ . On note  $G(\mathbf{A})^1$  le sous-groupe des  $g \in G(\mathbf{A})$  tels que  $|\chi(g)|_{\mathbf{A}} = 1$  pour tout  $\chi \in X^*(G)$ .

L'application de restriction  $X^*(G) \rightarrow X^*(A_G)$  est injective, de conoyau fini. On en déduit que l'application produit :

$$A_G(\mathbf{R})^0 \times G(\mathbf{A})^1 \longrightarrow G(\mathbf{A})$$

est un isomorphisme. Le groupe  $G(\mathbf{A})^1$  s'identifie donc à  $A_G(\mathbf{R})^0 \backslash G(\mathbf{A})$ , en particulier  $\mathfrak{g}^1$  (cf. 2.1) s'identifie à l'algèbre de Lie de  $G(\mathbf{A})^1 \cap G(\mathbf{R})$ .

Notons  $\mathfrak{a}_G$  l'algèbre de Lie de  $A_G(\mathbf{R})$ . On a l'égalité  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_G \oplus \mathfrak{g}^1$ . Remarquons que  $A_G \subset A_0$ . De la décomposition précédente se déduit une décomposition  $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_G \oplus (\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{g}^1)$  et une décomposition analogue de  $\mathfrak{a}_0^*$ .

On définit un homomorphisme  $H_G : G(\mathbf{A}) \rightarrow \mathfrak{a}_G$  : il est trivial sur  $G(\mathbf{A})^1$  et égal à l'inverse de l'exponentielle sur  $A_G(\mathbf{R})^0$ .

**3.2.** Notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble fini des sous-groupes paraboliques de  $G$ , définis sur  $\mathbf{Q}$ , contenant  $P_0$ . Soit  $P \in \mathcal{P}$ . Notons  $M$  l'unique sous-groupe de Lévi de  $P$  contenant  $M_0$ ,  $U$  le radical unipotent de  $P$ ,  $\mathfrak{m}$ , resp.  $\mathfrak{u}$ , les algèbres de Lie de  $M(\mathbf{R})$ , resp.  $U(\mathbf{R})$  ; posons  $K^M = M(\mathbf{A}) \cap K$  et  $K_{\mathbf{R}}^M = M(\mathbf{R}) \cap K_{\mathbf{R}}$ . On peut définir relativement au groupe  $M$  tous les objets que nous avons définis ou que nous définirons relativement au groupe  $G$ , par exemple  $\mathfrak{a}_M$ ,  $H_M$ , etc.

On note  $\rho_P$  la demi-somme des racines de  $\mathfrak{a}_M$  dans  $\mathfrak{u}$ , comptées avec multiplicités. C'est un élément de  $\mathfrak{a}_M^*$ .

On munit  $U(\mathbf{A})$  de la mesure de Haar pour laquelle  $\text{mes}(U(\mathbf{Q}) \backslash U(\mathbf{A})) = 1$ .

*Remarque.*— Dans la suite, chaque fois qu'interviendra un élément  $P$  de  $\mathcal{P}$ , on utilisera les notations précédentes, sans rappeler leurs définitions. Quand l'élément de  $\mathcal{P}$  sera noté  $P'$  ou  $P(\nu)$ , on les modifiera de façon évidente :  $M'$ , etc. ou  $M(\nu)$ , etc.

**3.3.** On définit la notion de  $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$ -module en imposant des conditions analogues à (6), (7) et (8) et en demandant que tout élément du module ait pour stabilisateur dans  $G(\mathbf{A}_f)$  un sous-groupe ouvert. Soient  $P \in \mathcal{P}$  et  $V$  un  $\mathfrak{m} \times K_{\mathbf{R}}^M \times M(\mathbf{A}_f)$ -module. Notons  $\theta^M$  l'action de  $\mathfrak{m} \times K_{\mathbf{R}}^M \times M(\mathbf{A}_f)$  dans  $V$ . On définit l'espace  $\text{Ind}_P^G(V)$ . C'est l'espace des fonctions  $\varphi : K \rightarrow V$  vérifiant les conditions (11) à (13) suivantes.

(11)  $\varphi$  est  $K$ -finie pour l'action de  $K$  par translations à droite (ou à gauche, cela revient au même).

(12)  $\varphi$  est  $C^\infty$ .

cf. (2). Remarquons que, d'après (11), l'image de  $\varphi$  est contenue dans un sous-espace de dimension finie de  $V$ . Parler de fonction  $C^\infty$  à valeurs dans un tel sous-espace a un sens.

(13) Pour tous  $m \in K^M$ ,  $u \in U(\mathbf{A}_f) \cap K$ ,  $k \in K$ ,  $\varphi(muk) = \theta^M(m)[\varphi(k)]$  (l'action  $\theta^M$  de  $K^M$  est définie via le plongement  $K^M \subset K_{\mathbf{R}}^M \times M(\mathbf{A}_f)$ ).

On munit  $\text{Ind}_P^G(V)$  d'une action  $\theta^G$  de  $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$  de la façon suivante. Le

groupe  $K_{\mathbf{R}}$  agit par translations à droite. Soient  $\varphi \in \text{Ind}_P^G(V)$ ,  $g \in G(\mathbf{A}_f)$  et  $k \in K$ . Rappelons que  $G(\mathbf{A}_f) = M(\mathbf{A}_f)U(\mathbf{A}_f)(K \cap G(\mathbf{A}_f))$ . Écrivons donc  $kgk^{-1} = muk'_f$ , avec  $m \in M(\mathbf{A}_f)$ ,  $u \in U(\mathbf{A}_f)$ ,  $k'_f \in K \cap G(\mathbf{A}_f)$ . On pose :

$$[\theta^G(g)\varphi](k) = e^{\langle \rho_P, H_M(m) \rangle} \theta^M(m)[\varphi(k'_f k)].$$

L'action de  $\mathfrak{g}$  se définit de façon analogue, en "dérivant" la formule ci-dessus. Pour cette action  $\theta^G$ ,  $\text{Ind}_P^G(V)$  est un  $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$ -module.

*Remarques.*— a) Il est plus naturel de considérer des  $G(\mathbf{A})$ -modules plutôt que des  $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$ -modules. Malheureusement, des espaces comme  $\mathcal{A}(G)$  ne sont pas stables par translations par  $G(\mathbf{A})$ , car la condition de  $K_{\mathbf{R}}$ -finitude n'est pas préservée par ces translations.

b) Si  $V$  est un espace de fonctions sur  $M(\mathbf{A})$  et  $\theta^M$  est déduite de l'action de  $M(\mathbf{A})$  par translations à droite,  $\text{Ind}_P^G(V)$  s'identifie à un espace de fonctions sur  $G(\mathbf{A})$ . À  $\varphi \in \text{Ind}_P^G(V)$ , on associe la fonction  $f_\varphi$  sur  $G(\mathbf{A})$  ainsi définie : soit  $g \in G(\mathbf{A})$  ; écrivons  $g = muk$ , avec  $m \in M(\mathbf{A})$ ,  $u \in U(\mathbf{A})$ ,  $k \in K$  ; on pose

$$f_\varphi(g) = e^{\langle \rho_P, H_M(m) \rangle} \varphi(k)(m).$$

Moyennant cette identification,  $\theta^G$  se déduit de l'action de  $G(\mathbf{A})$  par translations à droite. Dans la suite, pour tous les modules  $V$  vérifiant la condition ci-dessus, on identifiera ainsi  $\text{Ind}_P^G(V)$  à un espace de fonctions sur  $G(\mathbf{A})$ .

**3.4.** Pour tous  $f \in \mathcal{A}(G)$  et  $P \in \mathcal{P}$ , on définit une fonction  $f_P : G(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$  par

$$f_P(g) = \int_{U(\mathbf{Q}) \backslash U(\mathbf{A})} f(ug) du$$

pour tout  $g \in G(\mathbf{A})$ . On vérifie que  $f_P \in \text{Ind}_P^G(\mathcal{A}(M))$ . On dit que  $f$  est cuspidale si  $f_P = 0$  pour tout  $P \in \mathcal{P}$ ,  $P \neq G$ . On note  $\mathcal{A}_{\text{cusp}}(G)$  l'espace des formes automorphes cuspidales et  $\mathcal{A}_{\text{cusp}}^G = \mathcal{A}_{\text{cusp}}(G) \cap \mathcal{A}^G$  (cf. 1.6 pour la notation  $\mathcal{A}^G$ ). Le  $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$ -module  $\mathcal{A}_{\text{cusp}}^G$  est semi-simple.

**3.5.** Soient  $P \in \mathcal{P}$ ,  $f \in \text{Ind}_P^G(\mathcal{A}_{\text{cusp}}^M)$  et  $s \in \mathfrak{a}_{M, \mathbf{C}}^*$ . On définit une fonction  $f_s : G(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$  par

$$f_s(muk) = e^{\langle s, H_M(m) \rangle} f(muk)$$

pour tous  $m \in M(\mathbf{A})$ ,  $u \in U(\mathbf{A})$ ,  $k \in K$ . Pour  $g \in G(\mathbf{A})$ , considérons la série d'Eisenstein

$$\sum_{\gamma \in P(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{Q})} f_s(\gamma g).$$

Notons  $\Sigma_P$  l'ensemble des racines de  $\mathfrak{a}_M$  dans  $\mathfrak{u}$ . À toute racine  $\alpha \in \Sigma_P$  est attachée une coracine  $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{a}_M$ . Il existe  $c$  tel que si  $\langle \tilde{\alpha}, \text{Re}(s) \rangle > c$  pour tout  $\alpha \in \Sigma_P$ ; alors, la série ci-dessus est absolument convergente pour tout  $g \in G(\mathbf{A})$ . On note  $E(f_s)(g)$  sa somme, ce qui définit une fonction  $E(f_s)$  sur  $G(\mathbf{A})$ , qui est automorphe. Cette fonction est holomorphe en  $s$  dans ce domaine (*i.e.* pour tout  $g$ , la fonction  $s \mapsto E(f_s)(g)$  l'est). Elle se prolonge en une fonction méromorphe sur  $\mathfrak{a}_{M, \mathbf{C}}^*$ . Plus précisément, pour tout  $s_0 \in \mathfrak{a}_{M, \mathbf{C}}^*$ , il existe une fonction holomorphe  $p$ , non identiquement nulle, que l'on peut d'ailleurs choisir produit de facteurs  $\langle \tilde{\alpha}, s - s_0 \rangle$ , où  $\alpha \in \Sigma_P$ , telle que, pour tout  $g \in G(\mathbf{A})$ , la fonction  $s \mapsto p(s) E(f_s)(g)$  soit holomorphe en  $s_0$ . Soient donc  $s_0 \in \mathfrak{a}_{M, \mathbf{C}}^*$ ,  $p$  une telle fonction et  $\partial$  une distribution sur  $\mathfrak{a}_{M, \mathbf{C}}^*$  de support  $\{s_0\}$ , *i.e.* la composée d'un opérateur différentiel et de l'évaluation en  $s_0$ . On définit une fonction sur  $G(\mathbf{A})$

$$(14) \quad g \mapsto \partial (s \mapsto p(s) E(f_s)(g)).$$

C'est encore une forme automorphe que l'on peut appeler une dérivée de série d'Eisenstein. On note  $\mathcal{E}(G)$  le sous-espace engendré par ces fonctions, quand on fait varier  $P$ ,  $f$ ,  $s_0$ ,  $p$  et  $\partial$  (on inclut le cas  $P = G$ ).

**THÉORÈME** (Franke).—  $\mathcal{A}(G) = \mathcal{E}(G)$ .

#### 4. FILTRATION DE L'ESPACE DES FORMES AUTOMORPHES

4.1. Pour  $\lambda \in \mathfrak{a}_{G, \mathbf{C}}^*$ , notons  $\mathcal{D}_G(\lambda)$  l'espace des fonctions sur  $G(\mathbf{A})$  de la forme

$$g \mapsto e^{\langle \lambda, H_G(g) \rangle} p(H_G(g)),$$

où  $p$  est un polynôme sur  $\mathfrak{a}_G$ . Notons  $\mu_G(\lambda)$  la droite de  $\mathcal{D}_G(\lambda)$  portée par la fonction  $g \mapsto e^{\langle \lambda, H_G(g) \rangle}$ . Ce sont des  $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$ -modules.

Notons  $\mathcal{D}_G$  la somme directe des  $\mathcal{D}_G(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in \mathfrak{a}_{G, \mathbf{C}}^*$ . L'application produit définit un homomorphisme

$$\mathcal{D}_G \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}^G \longrightarrow \mathcal{A}(G).$$

On vérifie sans peine que c'est un isomorphisme.

**4.2.** Notons  $\mathcal{A}_2^G$  le sous-espace des éléments de  $\mathcal{A}^G$  dont le carré est intégrable sur  $G(\mathbf{Q})A_G(\mathbf{R})^0 \backslash G(\mathbf{A})$ . C'est un  $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$ -module semi-simple qui contient  $\mathcal{A}_{\text{cusp}}^G$ . On dispose pour lui d'une construction plus ou moins explicite due à Langlands ([L]), en termes de modules  $\mathcal{A}_{\text{cusp}}^M$  pour  $P \in \mathcal{P}$  et d'une description conjecturale due à Arthur ([A1]). En particulier, Langlands a prouvé l'inclusion  $\mathcal{A}_2^G \subset \mathcal{E}(G)$ .

On note  $i\mathfrak{a}_G^*$  le sous-ensemble "imaginaire" évident de  $\mathfrak{a}_{G,\mathbf{C}}^*$  et  $\mathcal{D}_{G,im}$  la somme directe des  $\mathcal{D}_G(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in i\mathfrak{a}_G^*$ .

**4.3.** Soient  $P \in \mathcal{P}$  et  $f \in \text{Ind}_P^G(\mathcal{D}_{M,im} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^M)$ . Ainsi qu'il résulte des travaux de Langlands, les constructions et résultats de 3.5 restent valables. La fonction  $s \mapsto E(f_s)$  est holomorphe en tout  $s \in i\mathfrak{a}_M^*$ . On pose  $E_P^G(f) = E(f_0)$ . Cela définit un homomorphisme de  $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$ -modules

$$E_P^G : \text{Ind}_P^G(\mathcal{D}_{M,im} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^M) \longrightarrow \mathcal{A}(G).$$

Soit  $P' \in \mathcal{P}$ . Posons  $\mathcal{W}(M, M') = \{g \in G(\mathbf{Q}) ; gMg^{-1} = M'\}$ . Le groupe  $M(\mathbf{Q})$  agit sur cet ensemble par multiplication à droite. Posons

$$W(M, M') = \mathcal{W}(M, M')/M(\mathbf{Q}).$$

Cet ensemble est fini. On dit que  $P$  et  $P'$  sont associés s'il est non vide. Supposons qu'il en soit ainsi. Remarquons que tout  $w \in W(M, M')$  définit un isomorphisme encore noté  $w$  de  $\mathfrak{a}_{M,\mathbf{C}}^*$  sur  $\mathfrak{a}_{M',\mathbf{C}}^*$ . Pour  $w \in W(M, M')$ , on définit un opérateur d'entrelacement :

$$I(w) : \text{Ind}_P^G(\mathcal{D}_{M,im} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^M) \longrightarrow \text{Ind}_{P'}^G(\mathcal{D}_{M',im} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^{M'})$$

de la façon suivante. Fixons un relèvement  $\tilde{w}$  de  $w$  dans  $\mathcal{W}(M, M')$ . Soient  $f \in \text{Ind}_P^G(\mathcal{D}_{M,im} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^M)$  et  $s \in \mathfrak{a}_{M,\mathbf{C}}^*$ . On définit  $f_s$  comme en 3.5. Pour  $g \in G(\mathbf{A})$ , considérons l'intégrale

$$\int_{[U'(\mathbf{A}) \cap \tilde{w}U(\mathbf{A})\tilde{w}^{-1}] \backslash U'(\mathbf{A})} f_s(\tilde{w}^{-1}u'g)du'.$$

Comme en 3.5, elle est absolument convergente, pour tout  $g$ , si  $s$  appartient à un certain cône.

Il existe alors un élément, noté  $I(w, s)f$ , de  $\text{Ind}_{P'}^G(\mathcal{D}_{M', im} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_2^{M'})$  tel que, pour tout  $g \in G(\mathbf{A})$ , l'intégrale ci-dessus soit égale à  $(I(w, s)f)_{ws}(g)$ . L'homomorphisme  $I(w, s)$  ainsi défini se prolonge sur tout  $\mathfrak{a}_{M, \mathbb{C}}^*$  en un homomorphisme méromorphe en  $s$ , en un sens convenable. Il est holomorphe en tout  $s \in i\mathfrak{a}_M^*$ . On pose  $I(w) = I(w, 0)$ . Cet opérateur est un homomorphisme de  $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$ -modules. C'est en fait un isomorphisme. On a l'égalité

$$E_P^G = E_{P'}^G \circ I(w).$$

Supposons  $P = P'$ . On note alors simplement  $W(M) = W(M, M)$ . Cet ensemble est un groupe et l'application  $w \mapsto I(w)$  est un homomorphisme de groupes.

**4.4.** Notons  $\mathcal{A}_{\log}(G)$  le sous-espace des  $f \in \mathcal{A}(G)$  pour lesquels il existe  $N \in \mathbf{N}$  tel que la condition suivante soit vérifiée :

$$(15) \quad \begin{aligned} &\forall Y \in \mathcal{U}, \exists c > 0, \forall p \in \omega, \forall a \in A_0(\mathbf{R}, t_0), \forall k \in K, \\ &|\delta(Y)f(pak)| \leq ce^{(\rho_0, H_0(a))}(1 + |H_0(a)|)^N, \end{aligned}$$

où  $\rho_0 = \rho_{P_0}$ .

*Remarque.*— La justification de cette condition est que, si  $A_G = \{1\}$  et  $f \in \mathcal{A}(G)$ , alors  $f \in \mathcal{A}_2^G$  si et seulement si (15) est vérifié pour tout  $N \in \mathbf{Z}$ .

Fixons un ensemble de représentants  $\mathcal{P}/\text{ass}$  des classes d'association dans  $\mathcal{P}$ .

**THÉORÈME** (Franke).— i) Pour tout  $P \in \mathcal{P}$ , l'image de  $E_P^G$  est contenue dans  $\mathcal{A}_{\log}(G)$ .

ii) L'application

$$\bigoplus_{p \in \mathcal{P}/\text{ass}} E_P^G : \bigoplus_{p \in \mathcal{P}/\text{ass}} [\text{Ind}_P^G(\mathcal{D}_{M, im} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_2^M)]^{W(M)} \longrightarrow \mathcal{A}_{\log}(G)$$

est un isomorphisme.

L'exposant  $W(M)$  signifie que l'on a pris les invariants par le groupe  $W(M)$  qui agit par opérateurs d'entrelacement.

**4.5.** Fixons une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{m}_0$ . Remarquons que  $\mathfrak{a}_G \subset \mathfrak{h}$  (et même  $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{h}$ ). De cette inclusion se déduit une composition en somme directe

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^* = \mathfrak{a}_{G, \mathbb{C}}^* \bigoplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^1)_{\mathbb{C}}^*.$$

Pour  $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*$ , on note  $\lambda_G$  sa projection sur  $\mathfrak{a}_{G, \mathbf{C}}^*$ . Notons  $W$  le groupe de Weyl de  $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$  relatif à  $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$  et  $\mathbf{C}[\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*]^W$  l'espace des polynômes holomorphes invariants par  $W$  sur l'espace vectoriel complexe  $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*$ . Harish-Chandra a défini un isomorphisme

$$\xi : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbf{C}[\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*]^W,$$

cf. [V], th. 0.2.8. Soit  $\Theta$  un sous-ensemble fini de  $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*$  stable par  $W$ . Notons  $\mathcal{I}_{\Theta}$  l'idéal des  $z \in \mathcal{Z}$  tels que  $\xi(z)$  s'annule sur  $\Theta$ . Pour tout  $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}}$ -module  $V$ , on note  $\mathcal{F}in_{\Theta}(V)$  le sous-espace des éléments de  $V$  annihilés par une puissance de  $\mathcal{I}_{\Theta}$ . C'est un sous- $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}}$ -module. Les propriétés ci-dessous sont immédiates :

- posons  $\Theta^G = \{\lambda \in \Theta; \lambda_G = 0\}$  ; si  $A_G(\mathbf{R})^0$  agit trivialement dans  $V$ ,  $\mathcal{F}in_{\Theta}(V) = \mathcal{F}in_{\Theta^G}(V)$  ;
- soit  $\lambda \in \mathfrak{a}_{G, \mathbf{C}}^*$  ; posons  $\Theta - \lambda = \{\lambda' - \lambda; \lambda' \in \Theta\}$  ; alors

$$\mathcal{F}in_{\Theta}(D_G(\lambda) \otimes_{\mathbf{C}} V) = D_G(\lambda) \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{F}in_{\Theta - \lambda}(V);$$

- soient  $P \in \mathcal{P}$  et  $V^M$  un  $\mathfrak{m} \times K_{\mathbf{R}}^M \times M(\mathbf{A}_f)$ -module ; alors

$$\mathcal{F}in_{\Theta}(\text{Ind}_P^G(V^M)) = \text{Ind}_P^G(\mathcal{F}in_{\Theta}(V^M)),$$

où le  $\mathcal{F}in_{\Theta}$  du membre de droite est l'analogie pour le groupe  $M$  de celui que l'on a défini pour  $G$  ;

- l'espace  $\mathcal{A}(G)$  est somme directe des sous-espaces  $\mathcal{F}in_{\Theta}(\mathcal{A}(G))$  quand  $\Theta$  parcourt les orbites des points de  $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*$ .

**4.6.** Le groupe  $W(M_0)$  agit dans  $\mathfrak{a}_0^*$ . Munissons  $\mathfrak{a}_0^*$  d'un produit euclidien invariant par  $W(M_0)$ . Posons :

$$\begin{aligned} \mathfrak{c} &= \{\nu \in \mathfrak{a}_0^*; (\alpha, \nu) \geq 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Sigma_0^+\}, \\ \tilde{\mathfrak{c}} &= \{\nu \in \mathfrak{a}_0^*; (\nu', \nu) \geq 0 \text{ pour tout } \nu' \in \mathfrak{c}\}. \end{aligned}$$

On munit  $\mathfrak{a}_0^*$  d'un ordre partiel par  $\nu_1 \leq \nu_2 \iff \nu_2 - \nu_1 \in \tilde{\mathfrak{c}}$ .

Tout  $\nu \in \mathfrak{c}$  détermine un élément  $P(\nu) \in \mathcal{P}$  : pour  $\alpha \in \Sigma_0$ , le sous-groupe radiciel associé à  $\alpha$  est inclus dans  $P(\nu)$  si et seulement si  $(\alpha, \nu) \geq 0$ . On a alors  $\nu \in \mathfrak{a}_{M(\nu)}^*$  ( $\subset \mathfrak{a}_0^*$ ).

Pour tout  $\nu \in \mathfrak{a}_0^*$ , il existe un unique point  $\nu_{\mathfrak{c}} \in \mathfrak{c}$  dont la distance à  $\nu$  soit minimale.

**4.7.** Fixons un sous-ensemble fini  $\Theta$  de  $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*$ , stable par  $W$ . Notons  $\Theta_{\mathbf{c}}$  la réunion, sur les  $P \in \mathcal{P}$ , des images de  $\Theta$  par l'application  $\lambda \mapsto \text{Re}(\lambda_M)_{\mathbf{c}}$ . On a donc  $\Theta_{\mathbf{c}} \subset \mathfrak{c}$ . On définit par récurrence des sous-ensembles  $\Theta_{\mathbf{c}}^p$ , de  $\Theta_{\mathbf{c}}$ , pour  $p \in \mathbf{N}$  :  $\Theta_{\mathbf{c}}^p$  est l'ensemble des éléments maximaux de

$$\Theta_{\mathbf{c}} - \bigcup_{q:0 \leq q < p} \Theta_{\mathbf{c}}^q.$$

Évidemment,  $\Theta_{\mathbf{c}}^p = \emptyset$  pour  $p$  assez grand.

**THÉORÈME** (Franke).— *Il existe une filtration décroissante  $(F^p)_{p \in \mathbf{N}}$  de  $\text{Fin}_{\Theta}(\mathcal{A}(G))$ , par des sous- $\mathfrak{g} \times K_{\mathbf{R}} \times G(\mathbf{A}_f)$ -modules, de sorte que :*

- $F^0 = \text{Fin}_{\Theta}(\mathcal{A}(G))$ ,  $F^p = \{0\}$  pour tout  $p$  assez grand ;
- pour tout  $p \in \mathbf{N}$ ,

$$F^p/F^{p+1} \simeq \bigoplus_{\nu \in \Theta_{\mathbf{c}}^p} \text{Ind}_{P(\nu)}^G \left[ \mu_{M(\nu)}(\nu) \otimes_{\mathbf{C}} \text{Fin}_{\Theta - \nu}(\mathcal{A}_{\log}(M(\nu))) \right],$$

cf. 4.1 pour la définition de  $\mu_{M(\nu)}(\nu)$ . Remarquons que les espaces  $\text{Fin}_{\Theta - \nu}(\mathcal{A}_{\log}(M(\nu)))$  s'explicitent aisément à l'aide du théorème 4.4 et des propriétés élémentaires énoncées en 4.5.

**4.8.** Notons  $\Sigma$  l'ensemble des racines de  $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$  dans  $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ . Fixons un sous-ensemble de “racines positives”  $\Sigma^+ \subset \Sigma$  tel que, pour  $\alpha \in \Sigma^+$ , la restriction de  $\alpha$  à  $\mathfrak{a}_0$  appartienne à  $\Sigma_0^+ \cup \{0\}$ . On sait que les représentations de  $G(\mathbf{C})$ , continues, irréductibles et de dimension finie, sont paramétrées par les poids dominants, *i.e.* les  $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*$  tels que  $\langle \check{\alpha}, \lambda \rangle \in \mathbf{N}$  pour tout  $\alpha \in \Sigma^+$  (où  $\check{\alpha}$  est la coracine attachée à  $\alpha$ ). Pour tout poids dominant  $\lambda$ , notons  $E_{\lambda}^G$  la restriction à  $G(\mathbf{R})$  de la représentation de  $G(\mathbf{C})$  paramétrée par  $\lambda$  et  $\mu_{\lambda}$  l'inverse du caractère par lequel  $A_G(\mathbf{R})^0$  agit dans  $E_{\lambda}^G$ . Introduisons les notations suivantes :

- $\rho_{\mathfrak{h}}$  est la demi-somme des éléments de  $\Sigma^+$  ;
- $\ell$  est la fonction longueur sur  $W$  déterminée par  $\Sigma^+$  ;
- si  $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbf{C}}^*$ ,  $W(\lambda)$  est la  $W$ -orbite de  $\lambda$  ; appliquant les constructions de 4.7 à  $\Theta = W(\lambda)$ , on définit les ensembles  $W(\lambda)_{\mathbf{c}}$  et  $W(\lambda)_{\mathbf{c}}^p$  pour  $p \in \mathbf{N}$  ;
- si  $P \in \mathcal{P}$  et si  $V$  est un  $M(\mathbf{A}_f)$ -module (lisse),  $\text{Ind}_{P(\mathbf{A}_f)}^{G(\mathbf{A}_f)}(V)$  est le  $G(\mathbf{A}_f)$ -module induit, défini comme en 3.3 en “oubliant” les termes archimédiens.

Fixons un poids dominant  $\lambda$ . Pour  $p \in \mathbf{N}$ , notons  $\mathcal{B}(\lambda, p)$  l'ensemble des couples  $(w, P) \in W \times \mathcal{P}$  tels que :

- $-\operatorname{Re}([w(\lambda + \rho_{\mathfrak{h}})]_M) \in W(\lambda + \rho_{\mathfrak{h}})_{\mathbb{C}}^p$  ;
- $w^{-1}(\alpha) \in \Sigma^+$  pour tout  $\alpha \in \Sigma^+$  dont le sous-groupe radiciel associé soit inclus dans  $M$ .

Deux tels couples  $(w, P)$  et  $(w', P')$  sont dits associés s'il existe  $w'' \in W$  tel que  $w''Mw''^{-1} = M'$  et  $w' = w''w$ . Fixons un ensemble de représentants  $B(\lambda, p)$  des classes d'association dans  $\mathcal{B}(\lambda, p)$ .

**COROLLAIRE** (Franke).— *Soit  $\lambda$  un poids dominant. Il existe une suite spectrale de  $G(\mathbf{A}_f)$ -modules*

$$E_1^{p,q} \implies H^{p+q}(\mathfrak{g}^1, K_{\mathbf{R}}; \mathcal{A}(G, \mu_{\lambda}) \otimes_{\mathbb{C}} E_{\lambda}^G)$$

telle que

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{\substack{(w,P) \in B(\lambda,p) \\ \ell(w) \leq p+q}} \operatorname{Ind}_{P(\mathbf{A}_f)}^{G(\mathbf{A}_f)} \left[ H^{p+q-\ell(w)}(\mathfrak{m}^1, K_{\mathbf{R}}^M; \mu_M(-[w(\lambda + \rho_{\mathfrak{h}})]_M) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_2^M \otimes_{\mathbb{C}} E_{w(\lambda + \rho_{\mathfrak{h}}) - \rho_{\mathfrak{h}} + \rho_P}^M) \right].$$

Grâce aux théorèmes 4.4 et 4.7, il s'agit simplement de la suite spectrale d'hypercohomologie associée à un complexe filtré.

## 5. COMPLÉMENTS

**5.1.** Sous les hypothèses de 2.4, si  $E$  est de la forme  $E_{\lambda}$ , on peut calculer, pour  $f \in \mathcal{H}_H$ , la somme alternée des traces des actions de  $f$  sur les espaces  $H^n(G(\mathbf{Q}) \backslash X_H, \mathcal{E})$ . Ceci, grâce au corollaire 4.8 et au résultat de Arthur [A2]. On obtient une formule en termes d'intégrales orbitales de  $f$  qui avait déjà été obtenue par Goresky et Mac Pherson ([FMP]) par une toute autre méthode.

**5.2.** Pour  $P \in \mathcal{P}$ , on définit le sous-espace  $\mathcal{A}_P(G)$  de  $\mathcal{A}(G)$  : c'est l'espace engendré par les fonctions (14) quand on fixe  $P$  et que l'on fait varier  $f$ ,  $s_0$ ,  $p$  et  $\partial$ . Si  $P$  et  $P'$  sont associés,  $\mathcal{A}_P(G) = \mathcal{A}_{P'}(G)$ . On a l'égalité

$$\mathcal{A}(G) = \bigoplus_{P \in \mathcal{P}/\text{ass}} \mathcal{A}_P(G).$$

Il en résulte des décompositions analogues des espaces de cohomologie étudiés ci-dessus. Elles sont reliées à l'application "restriction au bord", cf. [FS]. Remarquons que  $\mathcal{A}_G(G)$  n'est autre que  $\mathcal{A}_{\text{cusp}}(G)$ .

## 6. QUELQUES IDÉES SUR LES PREUVES

On suppose pour simplifier que  $A_G = \{1\}$ . On munira différents ensembles de mesures que nous ne définirons pas. Il faudrait les normaliser de façon convenable.

**6.1.** Notons :

- $L_2(G)$  l'espace des fonctions de carré intégrable sur  $G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})$  ;
- $\mathcal{S}_{\log}(G)$  l'espace des  $f \in \mathcal{S}_{\text{umod}}(G)$  vérifiant la condition (15) pour au moins un  $N \in \mathbf{N}$  ;
- $\mathcal{S}_{-\log}(G)$  l'espace des  $f \in \mathcal{S}_{\text{umod}}(G)$  vérifiant la condition (15) pour tout  $N \in \mathbf{Z}$ .

On a les inclusions

$$\mathcal{S}_{-\log}(G) \subset L_2(G), \mathcal{S}_{-\log}(G) \subset \mathcal{S}_{\log}(G).$$

L'espace  $\mathcal{S}_{\log}(G)$  est inclus dans le dual de  $\mathcal{S}_{-\log}(G)$  : si  $f \in \mathcal{S}_{\log}(G)$ , et  $f' \in \mathcal{S}_{-\log}(G)$ , le produit  $ff'$  est absolument intégrable.

**6.2.** Le point de départ est la description de  $L_2(G)$ . Soit  $P \in \mathcal{P}$ . Notons  $C_c^\infty(i\mathfrak{a}_M^*)$  l'espace des fonctions sur  $i\mathfrak{a}_M^*$ , à valeurs complexes, qui sont  $C^\infty$  et à support compact. Le groupe  $M(\mathbf{A})$  agit sur  $C_c^\infty(i\mathfrak{a}_M^*)$  par l'action  $\theta$  définie ainsi :

$$(\theta(m)\varphi)(\lambda) = e^{\langle \lambda, H_M(m) \rangle} \varphi(\lambda)$$

pour tous  $m \in M(\mathbf{A})$ ,  $\varphi \in C_c^\infty(i\mathfrak{a}_M^*)$ ,  $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ . On en déduit une action de  $m \times K_{\mathbf{R}}^M \times G(\mathbf{A}_f)$ . Posons :

$$V_P = \text{Ind}_P^G(C_c^\infty(i\mathfrak{a}_M^*) \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^M).$$

On peut considérer un élément de ce module comme une fonction  $f$  sur  $i\mathfrak{a}_M^*$  telle que  $f(\lambda) \in \text{Ind}_P^G(\mu_M(\lambda) \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^M)$  pour tout  $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ .

Soit  $f \in V_P$ . On définit une fonction  $E_P^G(f)$  sur  $G(\mathbf{A})$  par :

$$E_P^G(f)(g) = \int_{i\mathfrak{a}_M^*} E_P^G(f(\lambda))(g) d\lambda$$

pour tout  $g \in G(\mathbf{A})$ . On montre que  $E_P^G(f) \in \mathcal{S}_{\text{umod}}(G)$ .

Pour  $P' \in \mathcal{P}$  et  $w \in W(M, M')$ , on définit encore un opérateur d'entrelacement  $I(w) : V_P \rightarrow V_{P'}$ . C'est un isomorphisme et on a l'égalité  $E_{P'}^G \circ I(w) = E_P^G$ .

Munissons  $V_P$  du produit hilbertien défini par :

$$(f, f') = \int_{i\mathfrak{a}_M^*} \int_{A_M(\mathbf{R})^0 M(\mathbf{Q})U(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A})} \overline{f(\lambda)(g)} f'(\lambda)(g) dg d\lambda.$$

On sait bien que, si  $U \neq \{1\}$ , il n'existe pas de mesure invariante à droite sur  $A_M(\mathbf{R})^0 M(\mathbf{Q})U(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A})$ . Par contre, on peut définir la notion d'intégrale d'une fonction  $\varphi : G(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$  telle que :

$$\varphi(amug) = e^{2\langle \rho_P, H_M(a) \rangle} \varphi(g)$$

pour tous  $a \in A_M(\mathbf{R})^0$ ,  $m \in M(\mathbf{Q})$ ,  $u \in U(\mathbf{A})$ ,  $g \in G(\mathbf{A})$ . C'est le sens de l'intégrale intérieure ci-dessus.

Notons  $L_P$  le complété de  $V_P$  pour ce produit. Les applications  $E_P^G$  ou  $I(w)$  se prolongent à  $L_P$ .

**THÉORÈME** (Langlands).— i) Pour tout  $P \in \mathcal{P}$ , la restriction de  $E_P^G$  au sous-espace des invariants  $L_P^{W(M)}$  est une similitude de cet espace sur un sous-espace fermé de  $L_2(G)$ .

$$\text{ii) } L_2(G) = \bigoplus_{P \in \mathcal{P}/\text{Ass}} E_P^G(L_P^{W(M)}).$$

**6.3.** L'élément de Casimir  $\Delta \in \mathcal{Z}$  définit un opérateur auto-adjoint de  $L_2(G)$ , donc une décomposition spectrale de  $L_2(G)$  : tout  $f \in L_2(G)$  s'écrit :

$$f = \int_{\mathbf{R}} f_r d\mu(r).$$

On note  $L_{2,b}(G)$  l'espace des  $f \in L_2(G)$  tels que  $f_r = 0$  pour  $|r|$  assez grand. On pose  $\mathcal{S}_{-\log,b}(G) = \mathcal{S}_{-\log}(G) \cap L_{2,b}(G)$ . Par un argument de dualité, on définit aussi le sous-espace  $\mathcal{S}_{\log,b}(G)$  de  $\mathcal{S}_{\log}(G)$ .

Pour  $P \in \mathcal{P}$ , notons  $\mathcal{D}'_c(i\mathfrak{a}_M^*)$  l'espace des distributions sur  $i\mathfrak{a}_M^*$ , à support compact. On montre que l'on peut étendre les définitions de 6.2 en remplaçant  $C_c^\infty(i\mathfrak{a}_M^*)$  par  $\mathcal{D}'_c(i\mathfrak{a}_M^*)$ . Posons :

$$V'_P = \text{Ind}_P^G(\mathcal{D}'_c(i\mathfrak{a}_M^*) \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}_2^M).$$

**THÉORÈME** (Franke).— *On a les égalités :*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\log,b}(G) &= \bigoplus_{P \in \mathcal{P}/\text{ass}} E_P^G(V_P^{W(M)}), \\ \mathcal{S}_{-\log,b}(G) &= \bigoplus_{P \in \mathcal{P}/\text{ass}} E_P^G(V_P^{W(M)}). \end{aligned}$$

On ne se risquera pas dans la démonstration très délicate de ce théorème. Disons simplement que l'on commence par démontrer la seconde égalité, en utilisant le théorème 6.2, et que l'on obtient la première par un argument de dualité.

**6.4.** Soit  $\Theta$  un sous-ensemble fini de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ , stable par  $W$ . Il est clair que  $\mathcal{F}in_{\Theta}(\mathcal{A}_{\log}(G)) = \mathcal{F}in_{\Theta}(\mathcal{S}_{\log,b}(G))$ . Ce dernier se calcule grâce au théorème précédent et aux propriétés énoncées en 4.5. En faisant varier  $\Theta$ , on obtient le théorème 4.4.

Soient  $f \in \mathcal{A}(G)$  et  $P \in \mathcal{P}$ . On a défini en 3.4 le terme constant  $f_P$ . Notons  $\text{Exp}_P(f)$  le plus petit sous-ensemble de  $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$  tel que :

$$f_P \in \bigoplus_{\lambda \in \text{Exp}_P(f)} \text{Ind}_P^G(\mathcal{D}_M(\lambda)) \bigotimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}^M.$$

Si  $f \in \mathcal{F}in_{\Theta}(\mathcal{A}(G))$ , alors  $\text{Re}(\lambda)_{\mathfrak{c}} \in \Theta_{\mathfrak{c}}$  pour tout  $\lambda \in \text{Exp}_P(f)$ . On définit  $F_P$  comme le sous-espace des  $f \in \mathcal{F}in_{\Theta}(\mathcal{A}(G))$  tels que, pour tous  $P \in \mathcal{P}$  et  $\lambda \in \text{Exp}_P(f)$ ,  $\text{Re}(\lambda)_{\mathfrak{c}} \in \cup_{q \geq p} \Theta_{\mathfrak{c}}^q$ . En associant à tout élément de  $F^p$  une combinaison linéaire convenable de composantes de ses termes constants, on définit une application :

$$F^p/F^{p+1} \longrightarrow \bigoplus_{\nu \in \Theta_{\mathfrak{c}}^p} \text{Ind}_{P(\nu)}^G \left[ \mu_{M(\nu)}(\nu) \bigotimes_{\mathbb{C}} \mathcal{F}in_{\Theta-\nu}(\mathcal{A}_{\log}(M(\nu))) \right].$$

On construit une application réciproque à l'aide des dérivées convenables de séries d'Eisenstein. On obtient ainsi le théorème 4.7 ainsi que le théorème 3.5, en se rappelant l'inclusion  $\mathcal{A}_2^G \subset \mathcal{E}(G)$  prouvée par Langlands.

**6.5.** Soient  $E$  comme en 2.2 et  $\Theta$  un sous-ensemble fini de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ , invariant par  $W$ , tel que  $\mathcal{I}_{\Theta}$  (cf. 4.5) annule la contragrédiente  $\tilde{E}$ . Notons  $\mathcal{F}in_{\Theta}^i$  les foncteurs dérivés du foncteur  $\mathcal{F}in_{\Theta}$ , dans la catégorie des  $\mathfrak{g} \times K_{\mathbb{R}}$ -modules. Pour tout  $\mathfrak{g} \times K_{\mathbb{R}}$ -module  $V$ , on a l'égalité :

$$H^0(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{R}}; V \bigotimes_{\mathbb{C}} E) = H^0(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{R}}; \mathcal{F}in_{\Theta}^0(V) \bigotimes_{\mathbb{C}} E).$$

On en déduit une suite spectrale :

$$E_2^{i,j} = H^i(\mathfrak{g}, K_{\mathbf{R}}; \mathcal{F}in_{\Theta}^j(V) \otimes_{\mathbf{C}} E) \implies H^{i+j}(\mathfrak{g}, K_{\mathbf{R}}; V \otimes_{\mathbf{C}} E).$$

Comme  $\mathcal{F}in_{\Theta}^0(\mathcal{S}_{\text{umod}}(G)) = \mathcal{F}in_{\Theta}^0(\mathcal{A}(G))$ , le théorème 2.2 résulte de l'assertion :

$$(16) \quad \mathcal{F}in_{\Theta}^j(\mathcal{S}_{\text{umod}}(G)) = 0 \quad \text{pour tout } j > 0.$$

Grâce au théorème 6.3 et à la semi-simplicité des modules  $\mathcal{A}_2^M$ , on démontre aisément que  $\mathcal{F}in_{\Theta}^j(\mathcal{S}_{\log,b}(G)) = 0$  pour tout  $j > 0$ . Par un raisonnement plus délicat qu'on ne le croirait, on étend ce résultat à l'espace  $\mathcal{S}_{\log}(G)$ .

La preuve de (16) se fait par récurrence sur le rang semi-simple de  $G$ . Soit  $P \in \mathcal{P}$ . Pour  $T \in \mathbf{R}$ , notons  $A_0(\mathbf{R}, t_0, P, T)$  l'ensemble des  $a \in A_0(\mathbf{R}, t_0)$  tels que  $\langle \alpha, H_0(a) \rangle > T$  pour tout  $\alpha \in \Sigma_0^+$  dont la restriction à  $\mathfrak{a}_M$  est non nulle. Considérons l'espace  $\text{Ind}_P^G(\mathcal{S}_{\text{umod}}(M))$ . Pour  $f$  et  $f'$  dans cet espace, disons que  $f$  est équivalent à  $f'$  s'il existe  $T$  tel que  $f(pak) = f'(pak)$  pour tous  $p \in \omega$ ,  $a \in A_0(\mathbf{R}, t_0, P, T)$ ,  $k \in K$ . Notons  $\mathcal{S}_{\text{umod}}[P]$  l'espace des classes d'équivalence. On définit de façon un peu plus compliquée un sous-espace  $\mathcal{S}_{\log}[P] \subset \mathcal{S}_{\text{umod}}[P]$ .

Si  $P' \in \mathcal{P}$  et  $P' \subset P$ , on définit une application "terme constant" :

$$\text{Ind}_P^G(\mathcal{S}_{\text{umod}}(M)) \longrightarrow \text{Ind}_{P'}^G(\mathcal{S}_{\text{umod}}(M'))$$

en généralisant la définition 3.4. Cette application passe aux quotients et définit une application :

$$\mathcal{S}_{\text{umod}}[P]/\mathcal{S}_{\log}[P] \longrightarrow \mathcal{S}_{\text{umod}}[P']/\mathcal{S}_{\log}[P'].$$

On définit alors la limite projective sur l'ensemble des sous-groupes paraboliques propres :

$$\varprojlim_{\mathcal{P}-\{G\}} \mathcal{S}_{\text{umod}}[P]/\mathcal{S}_{\log}[P].$$

Maintenant, l'application qui à  $f \in \mathcal{S}_{\text{umod}}(G)$  associe, pour tout  $P \in \mathcal{P} - \{G\}$ , l'image naturelle de  $f_P$  dans  $\mathcal{S}_{\text{umod}}[P]/\mathcal{S}_{\log}[P]$ , définit une application :

$$\mathcal{S}_{\text{umod}}(G)/\mathcal{S}_{\log}(G) \longrightarrow \varprojlim_{\mathcal{P}-\{G\}} \mathcal{S}_{\text{umod}}[P]/\mathcal{S}_{\log}[P].$$

On montre que c'est un isomorphisme. Grâce à l'hypothèse de récurrence, on prouve que :

$$\mathcal{F}in_{\Theta}^j(\mathcal{S}_{\text{umod}}[P]/\mathcal{S}_{\log}[P]) = 0$$

pour tous  $j > 0$ ,  $P \in \mathcal{P} - \{G\}$ . La dernière étape consiste à faire commuter les foncteurs  $\varprojlim_{\mathcal{P}-\{G\}}$  et  $\mathcal{F}in_{\Theta}^j$ . Cela nécessite d'utiliser sur les espaces  $\mathcal{F}in_{\Theta}^0(\mathcal{S}_{\text{umod}}[P]/\mathcal{S}_{\text{log}}[P])$  une filtration analogue à celle de 6.4. On obtient alors :

$$\mathcal{F}in_{\Theta}^j(\mathcal{S}_{\text{umod}}(G)/\mathcal{S}_{\text{log}}(G)) = 0 \quad \text{pour tout } j > 0.$$

Joint au résultat concernant  $\mathcal{S}_{\text{log}}(G)$ , cela démontre (16) et achève la preuve de la conjecture de Borel.

## BIBLIOGRAPHIE

- [A1] J. ARTHUR - *Unipotent automorphic representations : global motivation*, in Automorphic forms, Shimura varieties and  $L$ -functions, Clozel et Milne éd., Perspectives in Math. vol. 10 Academic Press, 1990.
- [A2] J. ARTHUR - *The  $L^2$ -Lefschetz numbers of Hecke operators*, Invent. Math. **97** (1981), 257-290.
- [B] A. BOREL - *Regularization theorems in Lie algebra cohomology. Applications*, Duke Math. J. **50** (1983), 605-623.
- [F] J. FRANKE - *Harmonic analysis in weighted  $L_2$ -spaces*, prépublication.
- [FS] J. FRANKE, J. SCHWERMER - *A decomposition of spaces of automorphic forms, and some rationality properties of automorphic cohomology classes for  $GL_n$* , prépublication.
- [GMP] M. GORESKY, R. MAC PHERSON - *Local contribution to the Lefschetz fixed point formula*, Invent. Math. **111** (1993), 1-33.
- [L] R.P. LANGLANDS - *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Springer, Lect. Notes in Math. **544**, 1976.
- [V] D. VOGAN - *Representations of real reductive Lie groups*, Progress in Math. **15**, Birkhäuser, 1981.

Jean-Loup WALDSPURGER  
 Université de Paris VII  
 U.F.R. de Mathématiques  
 URA 748 du CNRS  
 Tour 45-55, 5ème étage  
 2, place Jussieu  
 F-75251 PARIS CEDEX 05

# Astérisque

PATRICK DELORME

## **Inversion des intégrales orbitales sur certains espaces symétriques réductifs**

*Astérisque*, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 810, p. 157-177

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1995-1996\\_\\_38\\_\\_157\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__157_0)

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INVERSION DES INTÉGRALES ORBITALES  
SUR CERTAINS ESPACES SYMÉTRIQUES RÉDUCTIFS

[d'après A. Bouaziz et P. Harinck]

par Patrick DELORME

1. INTRODUCTION

Soit  $\underline{G}$  un groupe de Lie réductif,  $\sigma$  une involution de  $\underline{G}$ ,  $G$  le groupe des points fixes de  $\sigma$ ,  $\mathbb{X} = \underline{G}/G$ ,  $\mathbb{D}(\mathbb{X})$  l'algèbre des opérateurs différentiels invariants par  $\underline{G}$  sur  $\mathbb{X}$ . Soit  $\mathbb{X}^{reg}$  l'ensemble des éléments réguliers de  $\mathbb{X}$  (voir définition au paragraphe 2), qui est un ouvert dense de  $\mathbb{X}$ . Si  $x \in \mathbb{X}^{reg}$ , l'orbite  $G \cdot x$  est fermée et porte une mesure  $G$ -invariante, appelée aussi intégrale orbitale,  $\nu_{G \cdot x}$ . On cherche à décrire explicitement une normalisation des  $\nu_{G \cdot x}$ , un ensemble mesuré  $(\Xi, m)$ , et, pour presque tout  $\xi$  élément de  $\Xi$ , une distribution sur  $\mathbb{X}$ , sphérique (*i.e.*  $G$ -invariante et propre sous l'action des éléments de  $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ ),  $\Theta_\xi$ , et une fonction  $F_\xi$  sur  $\mathbb{X}^{reg}$ ,  $C^\infty$  et  $G$ -invariante, tels que la formule suivante ait un sens et soit vraie :

$$(1) \quad \nu_{G \cdot x} = \int_{\Xi} F_\xi(x) \Theta_\xi dm(\xi), \quad x \in \mathbb{X}^{reg}.$$

Remarquons que si  $\underline{G}$  est commutatif, (1) peut être explicité à partir de la formule d'inversion de Fourier de  $\underline{G}/G$ . On s'intéresse également à la formule d'inversion de Fourier de  $\mathbb{X}$ , *i.e.* une formule du type (1) où  $x$  est égal à la classe  $e_{\mathbb{X}}$  de l'élément neutre  $e_{\underline{G}}$  de  $\underline{G}$ , non régulière en général, et  $\nu_{G \cdot x}$  est la mesure de Dirac en  $e_{\mathbb{X}}$ . Les  $F_\xi(x)$  sont alors remplacées par des constantes. Les seules familles d'espaces symétriques réductifs de rangs réels quelconques, pour lesquels l'ensemble de ces problèmes est résolu, sont (voir section 2 pour des hypothèses plus précises) :

- a)  $\mathbb{X} = G$  et  $G$  agit par conjugaison sur lui-même.
- b)  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$  :  $\underline{G}$  est un groupe complexe,  $G$  en est une forme réelle et  $\sigma$  est la conjugaison complexe par rapport à  $G$ .

Notre exposé est consacré uniquement aux deux familles ci-dessus. Donnons un bref aperçu historique.

a)  $\mathbb{X} = G$

D'abord c'est à Harish-Chandra [17], 1976 b, qu'est due la formule d'inversion de Fourier. Dans une série d'articles [18], [19], [20], [21], la formule d'inversion des intégrales orbitales (formule (1)) a été établie par R. Herb ; le dernier est paru en 1983 (le cas du rang 1 ayant été traité au préalable par P. Sally et G. Warner [28]). La construction des  $\Theta_\xi$  est due à Harish-Chandra [17], 1983 (voir aussi [5], [22]). Les fonctions  $F_\xi$  sont données par des formules explicites très compliquées ; elles apparaissent seulement comme résultats de calculs. De son travail, R. Herb déduit la formule d'inversion de Fourier, grâce à une formule limite (due à Harish-Chandra) reliant la mesure de Dirac en  $e_{\mathbb{X}}$  aux  $\nu_{G,x}$ ,  $x \in \mathbb{X}^{reg}$ . En 1982, Harish-Chandra avait lui aussi annoncé une formule d'inversion des intégrales orbitales [17], 1983, moins explicite mais plus facile à énoncer. Malheureusement la démonstration ne fut jamais publiée.

C'est à A. Bouaziz que l'on doit une présentation et une construction-caractérisation plus conceptuelle des  $F_\xi$  [5]. C'est ce point de vue que nous exposerons. Précisons un peu. D'abord A. Bouaziz a caractérisé (aussi bien pour  $\mathbb{X} = G$  que pour  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ ) les fonctions intégrales orbitales, c'est-à-dire les fonctions sur  $\mathbb{X}^{reg}$  de la forme  $x \mapsto \nu_{G,x}(f)$ , pour  $f \in C_c^\infty(\mathbb{X})$  [4]. Les  $F_\xi$  vérifient alors des propriétés similaires à celles des fonctions intégrales orbitales (en relaxant toutefois une condition de support). En outre, elles sont propres sous une action canonique de  $\mathbb{D}(\mathbb{X})$  et ont une formule explicite sur un sous-groupe de Cartan attaché à  $\xi$ . La construction des  $F_\xi$  par A. Bouaziz a été influencée par le travail de M. Duflo et M. Vergne [10] qui donne une démonstration de la formule d'inversion de Fourier entièrement dans la philosophie de la méthode des orbites. A. Bouaziz a montré [5] que les propriétés des  $\Theta_\xi$  et des  $F_\xi$  réduisent, modulo des questions difficiles de convergences et de majorations d'intégrales, la démonstration de la formule d'inversion des intégrales orbitales à la formule d'inversion de Fourier sur les sous-groupes de Cartan de  $G$ , pour lesquels cette formule est élémentaire. En effet tout sous-groupe de Cartan est produit d'un groupe compact et d'un groupe vectoriel.

b)  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$

La construction des  $\Theta_\xi$  est due à P. Harinck [12] et a précédé celle des  $F_\xi$  pour  $\mathbb{X} = G$ , les deux constructions présentant des similarités (dont A. Bouaziz donne une explication dans [6]). Dans le même esprit qu'A. Bouaziz, P. Harinck a construit les  $F_\xi$  (similarité avec les  $\Theta_\xi$  pour  $\mathbb{X} = G$ ) et prouvé la formule d'inversion des intégrales orbitales [15], [16]. Elle en a déduit (également grâce à une formule limite) la formule d'inversion de Fourier (établie antérieurement dans des cas particuliers mais de rang

quelconque [29], [1]).

Les deux types d'espaces symétriques étudiés ici ont pour point commun l'identification de l'espace tangent en  $e_X$ , comme  $G$ -espace, avec l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  munie de la représentation adjointe. Les transformées de Fourier de mesures de Liouville sur les orbites coadjointes de  $G$  sont à la base des constructions des  $\Theta_\xi$  et des  $F_\xi$ .

De nombreux résultats fondamentaux utilisés dans les travaux que nous présentons ici sont dus à Harish-Chandra (on renverra parfois à [32] pour l'exposé d'une partie d'entre eux), en particulier la méthode de descente, que nous décrivons dans la section 3.

## 2. HYPOTHÈSES SUR $X$ . NOTATIONS

Si  $M$  est un groupe de Lie, on note  $\mathfrak{m}$  son algèbre de Lie. Avec les notations de l'introduction, on note  $\mathfrak{q}$  l'espace formé des éléments de  $\mathfrak{g}$  antiinvariants par la différentielle de  $\sigma$ , notée encore de même, sur lequel  $G$  opère par représentation adjointe. Il s'identifie à l'espace tangent à  $X$  en  $e_X$  et ceci comme  $G$ -espace. On note  $p$  la projection canonique de  $\underline{G}$  sur  $X$  et  $\varphi$  l'application de  $X$  dans  $\underline{G}$  définie par  $\varphi(p(g)) = g\sigma(g^{-1})$ ,  $g \in \underline{G}$ . Dans les cas que nous étudierons,  $\varphi$  est un difféomorphisme de  $X$  sur son image, qui est fermée ([26], lemme 1). On note  $Exp$  l'application de  $\mathfrak{q}$  dans  $X$  qui associe à  $X \in \mathfrak{q}$ ,  $p(exp X)$ , où  $exp$  est l'exponentielle ordinaire sur l'algèbre de Lie de  $\underline{G}$ . On note  $J$  le jacobien de cette application.

On suppose dans la suite que  $X$  est de l'un des deux types suivants :

a)  $X = G$  : on suppose  $G$  réductif dans la classe d'Harish-Chandra, classe qui contient en particulier les produits des groupes de Lie semi-simples réels connexes de centres finis par des groupes abéliens connexes. On pose  $\underline{G} = G \times G$  et  $\sigma(x, y) = (y, x)$ . Le groupe des points fixes de  $\sigma$  est la diagonale de  $G \times G$ , qu'on identifie à  $G$ . L'application qui, à  $(x, y)$ , associe  $xy^{-1}$  permet d'identifier, par passage au quotient,  $X$  à  $G$  sur lequel le facteur de gauche (resp. droit) de  $G \times G$  agit par translation à gauche (resp. droite) et  $G$  opère par conjugaison. De plus  $\mathfrak{q}$ , qui est égal à l'antidiagonale de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ , sera identifié à  $\mathfrak{g}$  par l'application  $(X, -X) \mapsto 2X$ . Dans ces identifications,  $Exp$  est égale à l'exponentielle ordinaire.

b)  $X = G_{\mathbb{C}}/G$  : on suppose que  $\underline{G}$  est un groupe réductif complexe connexe, de sous-groupe dérivé simplement connexe et que  $\sigma$  est une involution antiholomorphe de  $\underline{G}$ . Alors  $\mathfrak{q} = i\mathfrak{g}$ .

Dans les deux cas, on peut regarder  $\mathfrak{q}$  comme inclus dans  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ . On définit

une fonction non idendiquement nulle,  $D$ , sur  $\mathbb{X}$  par :  $\det(1 + t - Ad_{\underline{G}}(\varphi(x))) = t^n D(x) \bmod t^{n+1}$ ,  $x \in \mathbb{X}$ . On pose  $D_{\mathbb{X}}(x) = |D(x)|^{1/2}$ . On dit que  $x \in \mathbb{X}$  est semi-simple (resp. elliptique, resp. régulier) si et seulement si  $\varphi(x)$  est semi-simple dans  $\underline{G}$  (resp. elliptique dans  $\underline{G}$ , resp.  $D_{\mathbb{X}}(x) \neq 0$ ). Si  $Y$  est une partie de  $\mathbb{X}$ , on note  $Y^{ss}$  (resp.  $Y^{reg}$ ) l'ensemble de ses éléments semi-simples (resp. réguliers). On a  $\mathbb{X}^{reg}$  inclus dans  $\mathbb{X}^{ss}$ .

On définit la famille  $Car \mathfrak{q}$  (resp.  $Car \mathbb{X}$ ) des sous-espaces (resp. sous-ensembles) de Cartan de  $\mathfrak{q}$  (resp.  $\mathbb{X}$ ) comme suit : un sous-espace vectoriel,  $\mathfrak{a}$ , de  $\mathfrak{q}$  est élément de  $Car \mathfrak{q}$  si et seulement si  $\mathfrak{a}$  est un sous-espace abélien maximal de  $\mathfrak{q}$  formé d'éléments semi-simples, et  $A$  est élément de  $Car \mathbb{X}$  si et seulement si il existe un élément de  $Car \mathfrak{q}$ , nécessairement unique et noté  $\mathfrak{a}$ , tel que  $A$  soit l'ensemble des  $x$  dans  $\mathbb{X}$  tels que  $\varphi(x)$  centralise  $\mathfrak{a}$ .

Avec nos hypothèses et conventions, pour  $\mathfrak{a} \in Car \mathfrak{q}$ ,  $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  et on notera  $\tilde{\mathfrak{a}}$  son intersection avec  $\mathfrak{g}$ , qui est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Pour  $A \in Car \mathbb{X}$ , on a  $A = \bigcup_{j \in J} (exp \mathfrak{a}) \cdot k_j$ , où l'union est disjointe,  $J$  est fini et  $k_j \in \mathbb{X}$ . Ceci permet d'identifier l'espace tangent en chaque point de  $A$  à  $\mathfrak{a}$  et d'identifier l'algèbre symétrique de  $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ ,  $S(\mathfrak{a})$ , à une algèbre d'opérateurs différentiels sur  $A$ . On note  $W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$  le groupe de Weyl de  $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$  qui opère sur  $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ . On dispose de l'isomorphisme d'Harish-Chandra,  $\gamma_{\mathfrak{a}}$ , de  $\mathbb{D}(\mathbb{X})$  sur l'algèbre  $S(\mathfrak{a})^{W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}$  des invariants de l'algèbre symétrique de  $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ ,  $S(\mathfrak{a})$ , sous  $W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ .

### 3. MÉTHODE DE DESCENTE D'HARISH-CHANDRA

Présentons le lemme qui est à la base de la méthode de descente. On suppose momentanément que  $\mathbb{X}$  est une variété  $C^\infty$  munie d'une action  $C^\infty$  de  $G$ . On suppose que  $\mathbb{Y}$  est une sous-variété localement fermée de  $\mathbb{X}$ , que  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{Y}$  tel que l'application  $f$  de  $G \times V$  dans  $\mathbb{X}$ , définie par  $f(g, y) = g \cdot y$ , soit submersive en tout point. Alors  $U := G \cdot V$  est un ouvert  $G$ -invariant de  $\mathbb{X}$ . On note  $i$  l'injection canonique de  $\mathbb{Y}$  dans  $\mathbb{X}$ . On suppose en outre qu'il existe un sous-groupe fermé,  $Z$ , de  $G$ , réductif, laissant  $V$  invariant, et tel que  $g \cdot V \cap V \neq \emptyset$  pour  $g \in G$  implique  $g \in Z$ . Autrement dit,  $f$  définit un fibré principal  $G$ -équivariant de groupe structural  $Z$ . On suppose qu'il existe une mesure de Lebesgue sur  $V$ ,  $dv$ , qui est  $Z$ -invariante. On note  $dg$  (resp.  $dz$ ) une mesure de Haar sur  $G$  (resp.  $Z$ ). Par passage au quotient par  $Z$  de la mesure  $dg \otimes dv$  sur  $G \times V$ , on en déduit une mesure  $G$ -invariante sur  $U$ . Ces choix permettent d'identifier fonctions généralisées et distributions sur  $G$ ,  $Z$ ,  $U$ ,  $V$ .

*Lemme 1.*— (i) Toute distribution ou fonction généralisée,  $\Theta$ ,  $G$ -invariante sur  $U$  admet une image réciproque par  $f$  (resp.  $i$ ), notée  $f^*(\Theta)$  (resp.  $r_V(\Theta)$ ). La distribution  $r_V(\Theta)$  est appelée restriction de  $\Theta$  à  $V$ . De plus  $f^*(\Theta) = 1 \otimes r_V(\Theta)$ .

(ii) L'application de restriction  $r_V$  détermine une bijection entre l'espace  $\mathcal{D}'(U)^G$  des distributions  $G$ -invariantes sur  $U$  et  $\mathcal{D}'(V)^Z$ .

*Indication sur (i)*

La propriété d'invariance de  $\Theta$  se traduit par son annulation sous l'action de champs de vecteurs provenant de l'action de  $G$ . Ceci donne une limitation du front d'onde de  $\Theta$ , qui montre que  $r_V(\Theta)$  est bien défini (pour l'image réciproque et la restriction des distributions, voir [25], chapitre 8). Comme  $f$  est submersive en tout point,  $f^*(\Theta)$  est bien défini. On se ramène, par functorialité de l'image réciproque, au cas trivial où  $U = G \times V$ . Ce point de vue, sur ce lemme dû à Harish-Chandra, est issu de l'appendice de [9].

Si  $D \in \mathbb{D}(\mathbb{X})$ , on appelle composante radiale de  $D$  sur  $V$ , tout opérateur différentiel sur  $V$ ,  $\Delta(D)$  tel que  $r_V(D\Theta) = \Delta(D)r_V(\Theta)$ ,  $\Theta \in \mathcal{D}'(U)^G$ .

On revient aux hypothèses du paragraphe 2. Pour chaque élément  $x$  de  $\mathbb{X}^{ss}$ , on peut construire  $U_x$ , un voisinage ouvert  $G$ -invariant de  $x$  dans  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}_x, V_x, Z_x$ , de sorte que le lemme ci-dessus s'applique. En outre  $\mathbb{Y}_x$  s'identifie à un espace du même type que  $\mathbb{X}_x$ , et de dimension strictement plus petite si  $\varphi(x)$  n'est pas central dans  $\underline{G}$ . De plus les composantes radiales peuvent être explicitées. Pour  $\mathbb{X} = G$ , cela est dû à Harish-Chandra (cf. [32]) et sinon à P. Harinck [11].

### Méthode de descente

Pour démontrer une propriété locale d'analyse harmonique  $G$ -invariante sur  $\mathbb{X}$ , on procède par récurrence sur la dimension de  $\mathbb{X}$ . En utilisant le fait qu'un fermé  $G$ -invariant de  $\mathbb{X}$  qui ne rencontre pas  $\mathbb{X}^{ss}$  est vide, on se ramène à :

(i) l'étude de la propriété au voisinage d'un élément semi-simple  $x$  quelconque.

Puis, grâce à l'hypothèse de récurrence appliquée à  $\mathbb{Y}_x$ , lorsque  $\varphi(x)$  n'est pas central, et aux propriétés de  $r_{V_x}$ , on se ramène à :

(ii) l'étude de la propriété au voisinage de  $x \in \mathbb{X}^{ss}$  tel que  $\varphi(x)$  soit central dans  $\underline{G}$ .

Par un passage, facile en général, du réductif au semi-simple, on se ramène à :

(iii) l'étude de la propriété au voisinage de  $x$  comme ci-dessus et tel que  $\varphi(x) = e_{\underline{G}}$ .

Alors, utilisant l'application *Exp*, on se ramène à :

(iv) l'étude d'une propriété analogue à celle de départ sur l'algèbre de Lie.

Ce problème se réduit, grâce à une version infinitésimale du lemme 1 et des points (i) à (iii), à un problème au voisinage de zéro qui se réduit en général à :

(v) l'étude des propriétés d'objets à support dans le cône des éléments nilpotents de  $\mathfrak{g}$ .

Pour certains problèmes de constructions de fonctions ou distributions, on se sert des éléments elliptiques pour lesquels les  $U_x$  peuvent être pris plus gros. Le point (v) disparaît. Dans tous les cas, c'est le problème sur l'algèbre de Lie le plus délicat, le passage de (iii) à (iv) pouvant lui aussi être difficile.

#### 4. DISTRIBUTIONS SPHÉRIQUES

La démonstration du théorème suivant peut suivre le schéma de la méthode de descente. Pour  $\mathbb{X} = G$ , elle est due à Harish-Chandra (voir [17], 1965 b, ou [32]). Dans le cas  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ , elle est due à S. Sano [30], qui utilise une méthode similaire à celle développée par M. Atiyah dans le cas des groupes (voir aussi [11] pour une preuve reposant sur la méthode de descente).

#### **Théorème de régularité des fonctions généralisées sphériques**

*Toute fonction généralisée sphérique sur  $\mathbb{X}$  est une fonction localement intégrable sur  $\mathbb{X}$ , analytique sur  $\mathbb{X}^{reg}$ .*

Si  $\Theta$  est une fonction généralisée sphérique on note  $\Theta_A$  sa restriction à  $A^{reg}$ , pour  $A \in Car \mathbb{X}$ , qui est analytique d'après le théorème de régularité. L'existence de la restriction est une conséquence du lemme 1 appliqué au voisinage des éléments de  $A^{reg}$ .

On note  $\Delta(\mathfrak{a})$  le système de racines de  $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$  dans  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ,  $\Delta_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a})$  (resp.  $\Delta_I(\mathfrak{a})$ ) l'ensemble des racines réelles (resp. imaginaires) sur la sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ,  $\tilde{\mathfrak{a}}$ , associée à  $\mathfrak{a}$  ( $\tilde{\mathfrak{a}}$  est égale à  $\mathfrak{a}$  si  $\mathbb{X} = G$ , et à  $i\mathfrak{a}$  si  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ ). Une racine imaginaire  $\alpha$  est dite compacte (resp. non compacte) si l'intersection avec  $\mathfrak{g}$  de la sous-algèbre de dimension 3 de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ , engendrée par les sous-espaces radiciels  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$  et  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\alpha}$ , est isomorphe à l'algèbre de Lie de  $SU(2)$  (resp.  $SL(2, \mathbb{R})$ ). Pour  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{a})$ , on note  $H_{\alpha} \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$  sa coracine, qu'on regardera comme un opérateur différentiel à coefficients complexes sur  $A$ . On définit également une fonction  $\zeta_{\alpha}$  sur  $A$  par :  $\zeta_{\alpha}(a) = a^{\alpha}$  si  $a \in A$  ( $A$  est alors un sous-groupe de Cartan de  $G$ ) pour  $\mathbb{X} = G$ , et  $\zeta_{\alpha}(a) = e^{\alpha(H)}$  si  $\varphi(a) = exp(H)$  avec  $H \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$  pour  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ .

Soit  $\Sigma$  un ensemble de racines positives de  $\Delta(\mathfrak{a})$ . On note :  $\rho_\Sigma := (1/2) \sum_{\alpha \in \Sigma} \alpha$ ,  $\pi_\Sigma := \zeta_{-\rho_\Sigma} \prod_{\alpha \in \Sigma} (1 - \zeta_\alpha)$ ,  $\omega_\Sigma := \prod_{\alpha \in \Sigma} H_\alpha$ .

En fait, pour  $\mathbb{X} = G$ , il faut faire des hypothèses supplémentaires pour que  $\zeta_{-\rho_\Sigma}$  soit bien défini :  $G$  doit être supposé acceptable dans la terminologie d'Harish-Chandra (voir [32] part. 2, ch. 4.3), ce que l'on suppose seulement pour le théorème suivant. Pour  $\mathbb{X} = G$ , ce théorème ne sera d'ailleurs pas utilisé dans la suite.

On regarde  $\omega_\Sigma$  comme un opérateur différentiel sur  $A$ . Si  $\Theta$  est une fonction généralisée sphérique sur  $\mathbb{X}$ , on note  $\Theta_{A,\Sigma}$ , le produit de  $\Theta_A$  par  $\pi_\Sigma$ . On pose  $\tilde{\Theta}_A := \omega_\Sigma(\Theta_{A,\Sigma})$ , qui ne dépend pas de  $\Sigma$ . L'ensemble des éléments  $a$  de  $A$  tels que  $\zeta_\alpha(a)$  soit différent de 1 pour tout  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{a})$  est égal à  $A^{reg}$ , et l'on note  $A_{\mathbb{R}}^{reg}$  l'ensemble des éléments  $a$  de  $A$  tels que  $\zeta_\alpha(a)$  soit différent de 1 pour tout  $\alpha \in \Delta_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a})$ .

Soit  $\Theta$  une fonction généralisée sphérique sur  $\mathbb{X}$ . Comme elle est propre sous l'action des éléments de  $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ ,  $\Theta_A (A \in \text{Car } \mathbb{X})$  est propre sous l'action des composantes radiales des éléments de  $\mathbb{D}(\mathbb{X})$  ; ceci se traduit par des équations aux dérivées partielles satisfaites par  $\Theta_A$ , dites équations radiales. La composante radiale de  $D \in \mathbb{D}(\mathbb{X})$  sur  $A^{reg}$  est égale à  $D_{\mathbb{X}}^{-1/2} \gamma_{\mathfrak{a}}(D) D_{\mathbb{X}}^{1/2}$ . Comme conséquence des équations radiales et de la forme des composantes radiales, on a :

- Si  $a \in A$ , la fonction définie sur l'ensemble des  $H \in \mathfrak{a}$  tels que  $\exp H \cdot a \in A^{reg}$*   
 (2) *par  $\Theta_{A,\Sigma}(\exp H \cdot a)$  coïncide, sur chacune des composantes connexes de son domaine de définition, avec un polynôme exponentiel.*

Si  $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$ ,  $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ , on définit un caractère de  $\mathbb{D}(\mathbb{X})$  par :  $\chi_\lambda(D) := (\gamma_{\mathfrak{a}}(D))(\lambda)$ ,  $D \in \mathbb{D}(\mathbb{X})$ . Si  $\Theta$  une fonction généralisée sphérique sur  $\mathbb{X}$  ou  $\mathbb{X}^{reg}$  telle que :  $D\Theta = \chi_\lambda(D)\Theta$ ,  $D \in \mathbb{D}(\mathbb{X})$ , on dira que  $\Theta$  est sphérique pour le caractère propre  $\chi_\lambda$ , et  $\lambda$  sera dit paramètre propre de  $\Theta$ . On dit qu'un caractère  $\chi$  de  $\mathbb{D}(\mathbb{X})$  est régulier si  $\chi = \chi_\lambda$  pour un élément de  $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$  régulier, c'est-à-dire tel que le stabilisateur de  $\lambda$  sous  $W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$  soit trivial.

Si  $\mathbb{X} = G$ , le théorème ci-dessous est dû à Harish-Chandra pour la partie directe (cf. [32]) et à T. Hirai [23], [24] pour la partie réciproque. Si  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ , il est dû à S. Sano [30].

### **Théorème de caractérisation des fonctions généralisées sphériques**

*Pour une fonction localement intégrable,  $\Theta$ , sur  $\mathbb{X}$  et analytique sur  $\mathbb{X}^{reg}$ , on introduit les conditions suivantes :*

- (D1)  *$\Theta$  est sphérique sur  $\mathbb{X}^{reg}$ , de caractère propre  $\chi$ .*  
 (D2) *Pour tout  $A \in \text{Car}(\mathbb{X})$ ,  $\Theta_{A,\Sigma}$  se prolonge analytiquement à  $A_{\mathbb{R}}^{reg}$ .*

(D3) (Conditions de recollement.) Pour tout  $A$  (resp.  $B$ )  $\in \text{Car}(\mathbb{X})$ ,  $\tilde{\Theta}_A$  (resp.  $\tilde{\Theta}_B$ ) se prolonge en une fonction continue sur  $A$  (resp.  $B$ ) notée de même. De plus  $\tilde{\Theta}_A$  et  $\tilde{\Theta}_B$  coïncident sur  $A \cap B$ .

Si  $\Theta$  est une fonction généralisée sphérique de caractère propre  $\chi$ , elle satisfait les conditions ci dessus.

Réciproquement, si une fonction localement intégrable,  $\Theta$ , sur  $\mathbb{X}$  et analytique sur  $\mathbb{X}^{reg}$  vérifie (D1), (D2), (D3) et si  $\chi$  est régulier, elle définit une distribution sphérique sur  $\mathbb{X}$ .

Si  $\mathbb{X} = G$ , le théorème suivant est dû à Harish–Chandra (cf. [32]) et si  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ , à P. Harinck [12].

### **Théorème d’unicité pour les fonctions généralisées sphériques**

On suppose que  $G$  possède un sous-groupe de Cartan compact  $T$ . Si  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ , on note  $A$  le sous-espace de Cartan de  $\mathbb{X}$  correspondant à  $\mathfrak{a} = \mathfrak{it} \in \text{Car } \mathfrak{q}$ .

Soit  $\Theta$  une fonction généralisée sphérique sur  $\mathbb{X}$ , qu’on suppose de plus tempérée (condition de croissance) si  $\mathbb{X} = G$ . On suppose que  $\Theta$  admet un paramètre propre  $\lambda \in \mathfrak{it}^*$  si  $\mathbb{X} = G$  (resp.  $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$  si  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ ), qui est régulier (resp. tel que  $\lambda(H_{\alpha}) \notin 2i\pi\mathbb{Z}$  pour  $\alpha \in \Delta(\mathfrak{a})$ ).

Si la restriction de  $\Theta$  à  $T^{reg}$  (resp.  $A^{reg}$ ) est nulle, alors  $\Theta$  est nulle sur  $\mathbb{X}$ .

### **Indication sur la démonstration du théorème d’unicité**

Il suffit, d’après le théorème de régularité, de démontrer que la restriction de  $\Theta$  à  $B^{reg}$  est nulle pour tout sous-ensemble de Cartan  $B$  de  $\mathbb{X}$ . Dans la formule (2), appliquée à  $B$ , on n’a qu’une combinaison linéaire d’exponentielles (déterminées par  $\lambda$ ) en raison de la régularité de  $\lambda$ . Si  $\mathbb{X} = G$ , la tempérance de  $\Theta$  en exclut certaines (celles qui ne sont pas bornées sur la composante connexe considérée). Les relations de recollement permettent d’établir des relations entre les coefficients des exponentielles restantes pour des sous-ensembles (ici sous-groupes) de Cartan adjacents. L’hypothèse de nullité de  $\Theta$  sur  $T^{reg}$  et une récurrence sur la dimension de la composante vectorielle de  $B$  permet alors de conclure que ces coefficients sont tous nuls. D’où le théorème dans ce cas. Si  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ , la tempérance est inutile : en effet  $A$  est le sous-ensemble de Cartan possédant le plus grand nombre de composantes connexes et ceci permet d’avoir suffisamment de relations de recollement.

## 5. CONSTRUCTION DES $\Theta_\xi$

On choisit une involution de Cartan  $\theta$  de  $\underline{G}$  qui commute à  $\sigma$ . On note  $\mathfrak{k}$  (resp.  $\mathfrak{s}$ ) le sous-espace de  $\underline{\mathfrak{g}}$  formé des éléments invariants (resp. anti-invariants) sous la différentielle de  $\theta$ . Si  $\mathfrak{a} \in \text{Car } \mathfrak{q}$  est  $\theta$ -stable, on note  $\mathfrak{a}_R$  (resp.  $\mathfrak{a}_I$ ) l'intersection de  $\mathfrak{a}$  avec  $\mathfrak{s}$  (resp.  $\mathfrak{k}$ ).

Si  $A \in \text{Car } \mathbb{X}$ , on note  $[A]$  sa classe de conjugaison sous  $G$ . Soient  $A, B \in \text{Car } \mathbb{X}$ , que l'on suppose  $\theta$ -stables. On note  $[A] \leq [B]$  si et seulement si il existe  $g \in G$  tel que  $Ad\ g(\mathfrak{a}_R) \subset \mathfrak{b}_R$  (resp.  $Ad\ g(\mathfrak{a}_I) \subset \mathfrak{b}_I$ ) pour  $\mathbb{X} = G$  (resp. pour  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ ).

Soit  $A \in \text{Car } \mathbb{X}$ . Pour tout sous-groupe  $M$  de  $\underline{G}$ , on note  $W(M, \mathfrak{a})$  le quotient du normalisateur,  $N(M, \mathfrak{a})$ , de  $\mathfrak{a}$  dans  $M$  par son centralisateur  $Z(M, \mathfrak{a})$ . On note  $A_0$  le quotient de  $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$  par  $Z(G, \mathfrak{a})$ . On regarde  $A_0$  comme un sous-ensemble de  $A$ . Par ailleurs,  $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$  opère à gauche sur  $A$ . On choisit un ensemble de représentants dans  $A$ ,  $\mathcal{W}_A$ , du quotient de  $A$  par cette action de  $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$  contenant  $e_{\mathbb{X}}$ . Ce quotient s'identifie à  $W(\underline{G}, \mathfrak{a})/W(G, \mathfrak{a})$ . On choisit les éléments  $y$  de  $\mathcal{W}_A$  tels que  $\varphi(y) \in G$ . On peut choisir, pour  $y \in \mathcal{W}_A$ ,  $v_y \in N(\underline{G}, \mathfrak{a})$  tel que  $p(v_y) = y$ . On note encore  $v_y$  l'élément correspondant de  $W(\underline{G}, \mathfrak{a})$ . On note  $\mathcal{W}_A^{-1}$  le sous-ensemble de  $W(\underline{G}, \mathfrak{a})$  formé des  $v_y^{-1}$ ,  $y \in \mathcal{W}_A$ . C'est un ensemble de représentants de  $W(G, \mathfrak{a}) \backslash W(\underline{G}, \mathfrak{a})$ .

On note  $\hat{A}_0$  l'ensemble des (classes d'équivalences de) représentations unitaires irréductibles  $\omega$  de  $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$  possédant un vecteur unitaire,  $e_\omega$ , invariant par  $Z(G, \mathfrak{a})$ . Celles-ci sont de dimensions finies. À un scalaire multiplicatif de module 1 près,  $e_\omega$  est unique et la fonction  $\varpi$  sur  $A_0 = Z(\underline{G}, \mathfrak{a})/Z(G, \mathfrak{a})$ , définie par  $\varpi(a_0) := (\omega(z)e_\omega, e_\omega)$  pour  $z$  représentant de  $a_0$  dans  $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$ , ne dépend pas du choix de  $e_\omega$ . L'algèbre de Lie,  $\mathfrak{z}(\underline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{a})$ , de  $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$  est la somme directe de son intersection avec  $\mathfrak{g}$  et de  $\mathfrak{a}$ ; cette décomposition permet de regarder  $\mathfrak{a}^*$  comme un sous-espace du dual de cette algèbre de Lie. La composante neutre de  $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$  est centrale dans  $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$ . La restriction de  $\omega \in \hat{A}_0$  à celle-ci est un multiple d'un caractère trivial sur l'intersection de cette composante neutre avec  $G$ . La différentielle de ce caractère est un élément  $\lambda_\omega$  de  $i\mathfrak{a}^*$  tel que  $\lambda_\omega(H) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ , pour tout  $H$  élément du sous-réseau,  $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ , de  $\mathfrak{a}$  formé des éléments  $H$  de  $\mathfrak{a}$  vérifiant  $Exp\ H = e_{\mathbb{X}}$ .

Soit  $\Psi$  un ensemble de racines imaginaires positives de  $\Delta(\mathfrak{a})$ . On pose pour  $a \in A^{reg}$ ,  $b_\Psi(a) := \prod_{\alpha \in \Psi} (1 - \zeta_{-\alpha}(a)) |1 - \zeta_{-\alpha}(a)|^{-1}$ . On note, pour un élément  $w$  de  $W(G, \mathfrak{a})$ ,  $\varepsilon_I(w) := (-1)^{|\Psi \cap -w^{-1}\Psi|}$ , qui ne dépend pas de  $\Psi$ . On note  $\rho_\Psi$  la demi-somme des éléments de  $\Psi$ . Si  $w$  est un élément de  $W(G, \mathfrak{a})$ ,  $w\rho_\Psi - \rho_\Psi$  est une combinaison linéaire de racines à coefficients entiers. La fonction  $\zeta_{w\rho_\Psi - \rho_\Psi}$  est donc bien définie sur  $A$ .

Pour  $w \in N(G, \mathfrak{a})$ ,  $\omega \in \hat{A}_0$ , on définit une fonction  $w \bullet_\Psi \varpi$  sur  $\hat{A}_0$  par :

1) si  $\mathbb{X} = G$ ,  $(w \bullet_{\Psi} \varpi)(a_0) = \zeta_{w\rho_{\Psi} - \rho_{\Psi}}(a_0)\varpi(w^{-1}zw)$  ;

2) si  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ ,  $(w \bullet_{\Psi} \varpi)(a_0) = \varpi(w^{-1}zw)$ ,

où  $a_0 \in A_0$  et  $z$  est un représentant de  $a_0$  dans  $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$ , le membre de droite de l'égalité ci-dessus ne dépendant pas de ce choix. Il est facile de voir que  $w \bullet_{\Psi} \varpi$  ne dépend que de la classe de  $w$  modulo  $Z(G, \mathfrak{a})$ , donc  $w \bullet_{\Psi} \varpi$  est défini pour  $w \in W(G, \mathfrak{a})$ .

On pose  $\hat{A} := \hat{A}_0 \times \mathcal{W}_A$ . Pour  $\mathbb{X} = G$ ,  $\hat{A}_0$  s'identifie, comme la notation le suggère, au dual unitaire de  $A$ . En effet, dans ce cas,  $Z(\underline{G}, \mathfrak{a}) = A \times A$ ,  $Z(G, \mathfrak{a})$  est égal à la diagonale de  $A \times A$  et  $A_0$  s'identifie à  $A$ . Les éléments  $\omega$  de  $\hat{A}_0$  sont alors de la forme  $\omega_1 \otimes \omega_1^*$ , où  $\omega_1$  est une représentation unitaire irréductible de  $A$  et  $\omega_1^*$  est la contragrédiente de  $\omega_1$ . Alors  $\varpi$  est le caractère de  $\omega_1$ . De plus  $\mathcal{W}_A$  est réduit à un élément.

On note  $\tau_{\Psi}$  l'automorphisme d'algèbre unitaire de  $S(\mathfrak{a})$  défini par  $\tau_{\Psi}(H) = H + \rho_{\Psi}(H)$ ,  $H \in \mathfrak{a}$ , si  $\mathbb{X} = G$ , et qui est égal à l'identité si  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ .

Le théorème suivant est dû à Harish-Chandra si  $\mathbb{X} = G$  [17] (voir aussi [5], § 8.1), et à P. Harinck si  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$  [15], théorème 6.1.

### Théorème de construction des $\Theta_{\xi}$

Soit  $A \in \text{Car } \mathbb{X}$  et  $\Psi$  un ensemble de racines imaginaires positives de  $\Delta(\mathfrak{a})$ . Soit  $\xi = (\omega, y)$  un élément de  $\hat{A} = \hat{A}_0 \times \mathcal{W}_A$ . Si  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ , on suppose en outre que  $\lambda_{\omega} \in i\mathfrak{a}^*$  vérifie  $\lambda_{\omega}(iH_{\alpha}) \neq 0$ , pour tout  $\alpha \in \Psi$ .

Il existe une fonction généralisée sphérique de paramètre propre  $\lambda_{\omega}$ ,  $\Theta_{\xi, \Psi}$ , sur  $\mathbb{X}$ , telle que :

(i) Si  $\mathbb{X} = G$ ,  $\Theta_{\xi, \Psi}$  est tempérée.

(ii) Soit  $a \in A^{\text{reg}}$ . Si  $a \notin N(G, \mathfrak{a})Z(\underline{G}, \mathfrak{a}) \cdot y$ ,  $\Theta_{\xi, \Psi}(a)$  est nul, et si  $a = nz \cdot y$  avec  $n \in N(G, \mathfrak{a})$ ,  $z \in Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$ , on a :

$$b_{\Psi}(a)D_{\mathbb{X}}^{1/2}(a)\Theta_{\xi, \Psi}(a) = \sum_{u \in W(G, \mathfrak{a})^y} \varepsilon_I(u)(u \bullet_{\Psi} \varpi)(zz_{y,u}),$$

où  $W(G, \mathfrak{a})^y$  est l'ensemble des  $u \in W(G, \mathfrak{a})$  tel qu'il existe un élément  $z_{y,u}$  de  $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$  vérifiant  $u \cdot y = z_{y,u} \cdot y$ .

(iii) Si  $B \in \text{Car } \mathbb{X}$  et  $[A] \not\leq [B]$ ,  $\Theta_{\xi, \Psi}$  est nulle sur  $B^{\text{reg}}$ .

### Indications sur la preuve

Il s'agit d'une construction. On utilise le procédé d'induction des distributions sphériques. Dans le cas  $\mathbb{X} = G$ , celui-ci donne le caractère des représentations induites. Pour  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ , le procédé d'induction est dû à P. Harinck [13]. On est

alors ramené à démontrer le théorème lorsque  $A$  est le sous-ensemble de Cartan associé à l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Cartan compact  $T$  de  $G$ . Décrivons la construction dans ce cas.

a)  $\mathbb{X} = G$  : il s'agit, pour les valeurs régulières de  $\lambda_\omega$ , de la construction des caractères des séries discrètes et, en général, de celle des caractères des limites des séries discrètes. Donnons quelques indications sur le cas où  $\lambda_\omega$  est régulier. On construit, par récurrence et méthode de descente, au voisinage de chaque élément elliptique de  $\mathbb{X}$ , une fonction généralisée qui vérifie (localement) les propriétés voulues. On recolle les fonctions généralisées ainsi obtenues grâce à une version locale du théorème d'unicité. L'étape (iv) de la méthode de descente (construction de fonctions généralisées sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  possédant des propriétés analogues à celles des  $\Theta_\xi$ ) est franchie à l'aide de la transformée de Fourier de la mesure de Liouville (qui est  $G$ -invariante) sur certaines orbites coadjointes de  $\mathfrak{g}^*$  liées à  $\lambda_\omega$ . La formule liant les caractères des séries discrètes à ces transformées de Fourier est due à W. Rossman [27].

b)  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$  : on suppose  $y = e_X$  pour simplifier. On peut regarder  $\lambda_\omega$  comme un élément de  $i\mathfrak{q}^*$ . La transformée de Fourier de la (ou plutôt d'une) mesure  $G$ -invariante sur l'orbite de  $\lambda_\omega$  sous  $G$  est une fonction généralisée sur  $\mathfrak{q}$ ,  $\theta_{\lambda_\omega}$ . On veut "pousser"  $|J|^{-1/2} \theta_{\lambda_\omega}$  sur  $\mathbb{X}^{reg}$  à l'aide de  $Exp$ . Le facteur  $|J|^{-1/2}$  s'introduit naturellement, car on veut obtenir une distribution sphérique. On note  $\Omega$  la composante connexe de 0 du complémentaire dans  $\mathfrak{q}$  de l'ensemble des zéros de  $J$ . On déclare  $\Theta_{\xi, \Psi}$  nulle en dehors de  $\Omega^{reg}$ . Ensuite, pour définir  $\Theta_{\xi, \Psi}$  sur  $\Omega^{reg}$ , il faut tenir compte de la non injectivité de l'application  $Exp$ . On pose alors, pour  $X \in \Omega^{reg}$  :

$$|J(X)|^{-1/2} \Theta_{\xi, \Psi}(Exp X) = c_\Psi \sum_{Y \in \mathfrak{q}, Exp Y = Exp X, [X, Y] = 0} |J(Y)|^{-1/2} \theta_{\lambda_\omega}(Y),$$

où  $c_\Psi$  est une constante de normalisation. Si  $A_{Exp X}$  est le sous-ensemble de Cartan de  $\mathbb{X}$  contenant  $Exp X$ , la sommation porte sur les  $Y \in X + \Gamma_{\mathfrak{a}_{Exp X}}$ . Les séries sont convergentes et l'on peut vérifier les conditions (D1), (D2), (D3), et donc étendre  $\Theta_{\lambda_\omega, \Psi}$  en une fonction généralisée sphérique sur  $\mathbb{X}$ , d'après le théorème de caractérisation.

## 6. INTÉGRALES ORBITALES

Soient  $x \in \mathbb{X}^{reg}$  et  $A_x$  l'unique sous-ensemble de Cartan de  $\mathbb{X}$  contenant  $x$ . On note  $\mathfrak{g}^x$  l'algèbre de Lie du sous-groupe fermé de  $G$ ,  $G^x$ , formé des éléments de  $G$  qui fixent point par point les éléments de la composante connexe de  $x$  dans  $A$ . L'espace tangent en  $e_G$  à  $G/G^x$  s'identifie à  $[\mathfrak{g}^x, \mathfrak{g}]$ , que l'on munit de la mesure de Lebesgue,

$dY$ , déduite de la forme de Killing sur  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . Soit  $d\hat{g}$  la mesure  $G$ -invariante sur  $G/G^x$  tangente à  $dY$ . On pose, pour  $f \in C_c^\infty(\mathbb{X})$ ,  $I_{\mathbb{X}}(f)(x) := D_{\mathbb{X}}^{1/2}(x) \int_{G/G^x} f(g \cdot x) d\hat{g}$ .

On note  $I_{\mathbb{X}}^x$  la distribution correspondante sur  $\mathbb{X}$ . La fonction sur  $\mathbb{X}^{reg}$  définie par la formule ci-dessus est appelée fonction intégrale orbitale de  $f$ .

On note  $I(\mathbb{X})^\infty$  l'espace des fonctions  $F$  sur  $\mathbb{X}^{reg}$  qui sont  $C^\infty$ ,  $G$ -invariantes et qui vérifient les conditions suivantes :

(I1) Pour tout  $A \in Car \mathbb{X}$ , pour tout compact  $U$  de  $A$  et tout  $u \in S(\mathfrak{a})$ ,  $p_{A,U,u}(F) := \sup_{\mathfrak{a} \in U \cap A^{reg}} |(u(F|_{A^{reg}}))(\mathfrak{a})| < \infty$ .

(I2) Pour tout  $A \in Car \mathbb{X}$  et tout ensemble de racines imaginaires positives de  $\Delta(\mathfrak{a})$ ,  $\Psi$ ,  $b_\Psi F|_{A^{reg}}$  se prolonge de manière  $C^\infty$  à l'ensemble des éléments  $\mathfrak{a}$  de  $A$  tels que  $\zeta_\beta(\mathfrak{a}) \neq 1$ , pour toute racine imaginaire non compacte  $\beta$ .

(I3) (Conditions de saut.) Soit  $A \in Car \mathbb{X}$  et  $\alpha$  une racine imaginaire non compacte de  $\mathfrak{a}$ . La transformation de Cayley associée à  $\alpha$ ,  $c_\alpha$ , qui est un endomorphisme de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ , transforme  $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$  en  $(\mathfrak{a}_\alpha)_{\mathbb{C}}$ , où  $\mathfrak{a}_\alpha \in Car \mathfrak{q}$ . Soit  $\Psi$  un ensemble de racines imaginaires positives de  $\mathfrak{a}$  qui contient toute racine imaginaire de  $\mathfrak{a}$ ,  $\beta$ , telle que  $\beta(H_\alpha) > 0$ . On note  $\Psi_\alpha$  l'ensemble des éléments de  $\Psi$  orthogonaux à  $\alpha$ , qui détermine un ensemble de racines imaginaires positives de  $\mathfrak{a}_\alpha$  noté de même. Soit  $\mathfrak{a} \in A$  tel que  $\zeta_\alpha(\mathfrak{a}) = 1$  et tel que  $\zeta_\beta(\mathfrak{a}) \neq 1$  si  $\beta$  est une racine de  $\mathfrak{a}$  distincte de  $\pm\alpha$ . Alors on a, pour  $u \in S(\mathfrak{a})$  :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \tau_\Psi(u)(b_\Psi F|_{A^{reg}}(\exp * tH_\alpha \cdot \mathfrak{a})) - \lim_{t \rightarrow 0^-} \tau_\Psi(u)(b_\Psi F|_{A^{reg}}(\exp * tH_\alpha \cdot \mathfrak{a})) \\ = **(\tau_{\Psi_\alpha}(c_\alpha(u))(b_{\Psi_\alpha} F|_{A_\alpha^{reg}}))(\mathfrak{a}). \end{aligned}$$

Ici  $*$  vaut  $i$  si  $\mathbb{X} = G$  et vaut  $1$  si  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$  et  $**$  vaut  $\varepsilon(\mathfrak{a})$  (resp.  $2\varepsilon(\mathfrak{a})$ ) si la réflexion relative à  $\alpha$  est (resp. n'est pas) réalisée dans  $G_\alpha$ , stabilisateur de  $\mathfrak{a}$  dans  $G$ , où  $\varepsilon(\mathfrak{a})$  vaut  $1$  si  $\mathbb{X} = G$  et  $\prod_{\beta \in \Psi, \beta \neq \alpha, \beta(H_\alpha) \neq 0} (1 - \zeta_{-\beta}(\mathfrak{a})) |1 - \zeta_{-\beta}(\mathfrak{a})|$  si  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ .

On note  $I(\mathbb{X})$  l'espace formé des éléments  $F$  de  $I^\infty(\mathbb{X})$  tels que, pour tout  $A \in Car \mathbb{X}$ , il existe un compact  $U$  de  $A$  pour lequel  $F|_{A^{reg}}$  soit nulle en dehors de  $U^{reg}$ .

Le théorème suivant est dû à A. Bouaziz [4]. Une version (stable) pour l'espace de Schwartz est due à D. Shelstad [31], théorème 2.8.1. Il y a une version  $p$ -adique de ce théorème [33].

### **Théorème de caractérisation des fonctions intégrales orbitales**

L'application  $I_{\mathbb{X}}$  est une surjection de  $C_c^\infty(\mathbb{X})$  sur  $I(\mathbb{X})$ . Pour une topologie convenable sur  $I(\mathbb{X})$ , qui en fait une limite inductive de Fréchet,  $I_{\mathbb{X}}$  est continue et sa transposée est une bijection entre son dual topologique  $I(\mathbb{X})'$  et l'espace,  $\mathcal{D}'(\mathbb{X})^G$ , des distributions  $G$ -invariantes sur  $\mathbb{X}$ .

**Indication sur la démonstration**

L'inclusion de  $I_{\mathbb{X}}(C_c^\infty(\mathbb{X}))$  dans  $I(\mathbb{X})$  et la continuité se démontrent par la méthode de descente (voir section 3 pour les notations), en exprimant, pour  $x \in \mathbb{X}^{ss}$ ,  $y \in V_x^{reg}$ ,  $r_{V_x}(I_{\mathbb{X}}^y)$  à l'aide de  $I_{\mathbb{X}_x}^y$ . On est ramené à des calculs sur  $SL(2, \mathbb{R})$  (resp.  $SL(2, \mathbb{C})/SL(2, \mathbb{R})$ ). Pour  $\mathbb{X} = G$ , ceci est dû à Harish-Chandra. La surjectivité de  $I_{\mathbb{X}}$ , due à A. Bouaziz, est également démontrée par descente. L'utilisation de partitions de l'unité  $G$ -invariantes permet de localiser le problème. Il y a deux points difficiles : d'une part, la réduction de l'étape (iv) à l'étape (v) de la méthode de descente ; d'autre part, la résolution de l'étape (v). Pour ce point, on se réduit à démontrer que l'espace des formes linéaires continues sur la version infinitésimale,  $I(\mathfrak{g})$ , de  $I(\mathbb{X})$  et à "support" dans le cône des éléments nilpotents de  $\mathfrak{g}$  est naturellement isomorphe à l'espace des distributions sur  $\mathfrak{g}$ ,  $G$ -invariantes et à support dans le cône des éléments nilpotents de  $\mathfrak{g}$ .

On définit une action de  $\mathbb{D}(\mathbb{X})$  sur  $I(\mathbb{X})$  en posant  $(D \cdot F)(x) = (\gamma_{a_x}(D)F|_{A_x})(x)$ ,  $D \in \mathbb{D}(\mathbb{X})$ ,  $x \in \mathbb{X}^{reg}$ , où  $A_x$  est le sous-ensemble de Cartan contenant  $x$ . Cette action est compatible avec l'action de  $\mathbb{D}(\mathbb{X})$  sur  $C_c^\infty(\mathbb{X})$ , c'est-à-dire que, pour  $f \in C_c^\infty(\mathbb{X})$  et  $D$  comme ci-dessus, on a :  $I_{\mathbb{X}}(Df) = D \cdot I_{\mathbb{X}}(f)$ .

Le théorème suivant est dû à A. Bouaziz [4]. On trouvera dans [7] un énoncé du même type, mais pour les fonctions  $K$ -finies. Ces théorèmes semblent totalement indépendants.

**Théorème de Paley-Wiener invariant pour  $\mathbb{X} = G$** 

*On suppose que  $\mathbb{X} = G$  et, pour simplifier l'énoncé, que les sous-groupes de Cartan de  $G$  sont commutatifs. Soit  $[Car G]$  un ensemble de représentants, qu'on choisit  $\theta$ -stables, des classes de conjugaison sous  $G$  des sous-groupes de Cartan de  $G$ . Pour tout  $A \in [Car G]$ , on choisit un ensemble de racines imaginaires positives de  $\mathfrak{a}$ ,  $\Psi$ . Pour  $\xi \in \hat{A}$ , on notera  $\Theta_\xi$  au lieu de  $\Theta_{\xi, \Psi}$ . Pour  $f \in C_c^\infty(G)$ , on définit une fonction  $\hat{f}_A$  sur  $\hat{A}$  par  $\hat{f}_A(\xi) := \Theta_\xi(f)$ ,  $\xi \in \hat{A}$ . Alors :*

(i) *La fonction  $\hat{f}_A$  est un élément de l'espace  $\mathcal{PW}(A)^\Psi$  des transformées de Fourier,  $h$ , de fonctions  $C^\infty$  à support compact sur  $A$  vérifiant :  $h(w \bullet_\Psi \xi) = \varepsilon_I(w)h(\xi)$ , pour tout  $\xi \in \hat{A}$  et  $w \in W(G, \mathfrak{a})$ .*

(ii) *L'application de  $C_c^\infty(G)$  dans  $\oplus_{A \in [Car G]} \mathcal{PW}(A)^\Psi$  qui à  $f \in C_c^\infty(G)$  associe  $(\hat{f}_A)_{A \in [Car G]}$  est surjective.*

(iii) *Cette application linéaire, qui est nulle sur le noyau de  $I_{\mathbb{X}}$ , passe au quotient en une bijection entre  $I(\mathbb{X})$  et  $\oplus_{A \in [Car G]} \mathcal{PW}(A)^\Psi$ .*

(iv) En particulier, si  $f \in C_c^\infty(G)$  est telle que  $\Theta_\xi(f) = 0$  pour tout  $A \in [CarG]$  et tout  $\xi \in \hat{A}$ , alors  $I_{\mathbb{X}}(f)$  est nulle.

## 7. CONSTRUCTION DES $F_\xi$

Le théorème suivant est dû à A. Bouaziz [5] si  $\mathbb{X} = G$  et à P. Harinck si  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$  [15].

### Théorème de construction des $F_\xi$

Soient  $A \in Car(\mathbb{X})$  et  $\Psi$  un ensemble de racines imaginaires positives de  $\mathfrak{a}$  dans  $\mathfrak{g}$ . Pour tout élément  $\xi = (\omega, y)$  de  $\hat{A}$ , il existe un élément  $F_{\xi, \Psi}$  de  $I(\mathbb{X})^\infty$  tel que :

(i) Pour tout  $D \in \mathbb{D}(\mathbb{X})$ ,  $D \cdot F_{\xi, \Psi} = \gamma_{\mathfrak{a}}(D)(\lambda_\omega)F_{\xi, \Psi}$ .

(ii) Soit  $a \in A^{reg}$ . Si  $a \notin N(G, \mathfrak{a})Z(\underline{G}, \mathfrak{a}) \cdot y$ ,  $F_{\xi, \Psi}(a)$  est nul, et si  $a = nz \cdot y$  avec  $n \in N(G, \mathfrak{a})$ ,  $z \in Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$ , on a, avec les notations du théorème de construction des  $\Theta_\xi$  :

$$(b_\Psi F_{\xi, \Psi})(a) = * \sum_{u \in W(G, \mathfrak{a})^\Psi} \varepsilon_I(u) \text{tr}(u \bullet_\Psi \omega)(z_{z_y, u})$$

où, pour  $\mathbb{X} = G$ ,  $*$  =  $|W(G, \mathfrak{a})|^{-1} |A/A^a|$  (ici  $A$  est regardé comme sous-groupe de Cartan de  $G$  et  $A^a$  désigne le centralisateur de  $a$  dans  $A$ ) et, pour  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ ,  $*$  =  $|W(G, \mathfrak{a})|^{-1} |G^a/Z(G, \mathfrak{a})|^{-1}$  ( $G^a$  a été défini au début du paragraphe 6).

(iii) Si  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ ,  $F_{\xi, \Psi}$  est bornée sur  $\mathbb{X}^{reg}$ .

(iv) Si  $B \in Car\mathbb{X}$  et  $[B] \not\subseteq [A]$ ,  $F_{\xi, \Psi}$  est nulle sur  $B^{reg}$ .

### Indication sur la démonstration

Le procédé de construction des  $F_\xi$  pour  $\mathbb{X} = G$  (resp.  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ ) s'apparente à la construction des  $\Theta_\xi$  pour  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$  (resp.  $\mathbb{X} = G$ ).

## 8. FORMULE D'INVERSION DES INTÉGRALES ORBITALES

### Normalisation des mesures

On choisit une forme bilinéaire  $B$  sur  $\mathfrak{g}$  qui coïncide avec la forme de Killing sur  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , qui est  $\sigma$  et  $\theta$  invariante et est telle que  $X \mapsto -B(X, \theta(X))$  définisse un produit scalaire sur  $\mathfrak{g}$ . Ce produit scalaire fixe une normalisation des mesures de Haar sur chaque sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{g}$  : on parlera de la mesure de Haar sur un sous-espace de  $\mathfrak{g}$ . On note, pour  $A \in Car\mathbb{X}$ ,  $da_0$ , la mesure sur  $A_0$  qui est  $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$ -invariante et tangente à la mesure de Haar sur  $\mathfrak{a}$ . On note  $d\omega$  la mesure de Plancherel sur  $\hat{A}_0$  :

c'est la mesure sur  $\hat{A}_0$  telle que la mesure de Dirac en  $e_{\mathbb{X}}$  sur  $A_0$  soit égale à  $\int_{\hat{A}_0} \varpi d\omega$ , où  $\varpi$  est identifié à une distribution sur  $A_0$  grâce à  $da_0$ . On note  $d\xi$  la mesure produit de la mesure de Plancherel sur  $\hat{A}_0$  par la mesure de comptage sur  $\mathcal{W}_A$ . On note  $dx$  la mesure  $G$ -invariante sur  $\mathbb{X}$  tangente à la mesure de Haar sur  $\mathfrak{q}$ . Celle-ci détermine une identification entre fonctions généralisées et distributions sur  $\mathbb{X}$ .

On choisit un ensemble  $[Car \mathbb{X}]$  de représentants des classes de conjugaison sous  $G$  des éléments de  $Car \mathbb{X}$  qu'on choisit stables par  $\theta$  et, pour chaque élément  $A$  de  $[Car \mathbb{X}]$ , un ensemble de racines imaginaires positives de  $\tilde{\mathfrak{a}}$ ,  $\Psi$  noté aussi  $\Psi_A$  si l'on veut préciser. Soient  $A \in [Car \mathbb{X}]$ ,  $u \in \mathcal{W}_A^{-1}$  et  $\xi = (\omega, y) \in \hat{A}$ . On pose  $u \cdot \xi := \xi$  si  $\mathbb{X} = G$  ( $\mathcal{W}_A$  est alors réduit à un élément), et  $u \cdot \xi := (u \cdot \omega, y)$  si  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ . Dans ce dernier cas,  $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$  est connexe et commutatif et égal à  $exp \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$  et  $u \cdot \omega$  est le caractère de  $Z(\underline{G}, \mathfrak{a})$  trivial sur  $Z(G, \mathfrak{a})$  dont la différentielle est égale à  $u \cdot \lambda_{\omega} \in i\mathfrak{a}^*$ . Ce caractère existe car  $u \cdot \lambda_{\omega}$  est trivial sur le réseau  $\Gamma_{\mathfrak{a}}$  : c'est le cas pour  $\lambda_{\omega}$  et l'on a  $u \cdot \Gamma_{\mathfrak{a}} = \Gamma_{\mathfrak{a}}$ . On a  $u \cdot \xi \in \hat{A}$ .

On notera  $\xi^* := (\omega^*, y)$  où  $\omega^*$  est la contragrédiente de  $\omega$ . Comme  $\omega^*$  est un élément de  $\hat{A}_0$ , on a  $\xi^* \in \hat{A}$ .

### Formule d'inversion des intégrales orbitales

(i) Pour tout  $A \in [Car \mathbb{X}]$  et  $x \in \mathbb{X}^{reg}$ , l'intégrale suivante, notée  $I_A^x$  converge faiblement dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{X})$  :

$$\int_{\hat{A}} \sum_{u \in \mathcal{W}_A^{-1}} F_{u, \xi, \Psi}(x) \Theta_{u, \xi^*, \varepsilon \Psi} d\xi$$

où  $\varepsilon$  vaut  $-1$  si  $\mathbb{X} = G$  et  $1$  si  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$ .

(ii) Pour tout  $x \in \mathbb{X}^{reg}$ , on a :

$$I_{\mathbb{X}}^x = \sum_{A \in [Car \mathbb{X}]} I_A^x.$$

### Démonstration du théorème pour $\mathbb{X} = G$ , modulo les convergences d'intégrales et les questions de support

On suppose ici que  $\mathbb{X} = G$  et, pour simplifier l'exposé, que les sous-groupes de Cartan de  $G$  sont commutatifs. Pour  $A \in [Car G]$  et  $\xi \in \hat{A}$ , on notera  $\Theta_{\xi}$  au lieu de  $\Theta_{\xi, -\Psi}$  et  $F_{\xi}$  au lieu de  $F_{\xi, \Psi}$ . Pour  $f \in C_c^{\infty}(G)$ , on définit une fonction  $I_A(f)$  sur  $G^{reg}$  par :

$$(3) \quad I_A(f)(x) = \int_{\hat{A}} F_{\xi}(x) \Theta_{\xi^*}(f) d\xi, \quad x \in G^{reg}.$$

Il s'agit de démontrer que :

$$(4) \quad I_G(f) = \sum_{A \in [\text{Car } G]} I_A(f), \quad f \in C_c^\infty(G).$$

On démontre d'abord que  $I_A(f)$  est un élément de  $I^\infty(G)$  (l'intégrale converge dans  $I^\infty(G)$ ), puis que c'est un élément de  $I(G)$  (question de support). De même, on montre que, si  $h$  est la transformée de Fourier d'une fonction  $C^\infty$  à support compact sur  $A$ , la fonction  $F_h$  sur  $G^{reg}$  est bien définie par la formule:

$$(5) \quad F_h(x) := \int_{\hat{A}} h(\xi) F_\xi(x) d\xi, \quad x \in G^{reg}.$$

De plus, c'est un élément de  $I(G)$ . Avec les notations du théorème de Paley-Wiener invariant, on a :

$$(6) \quad I_A(f) = F_h, \quad \text{où } h(\xi) = \hat{f}_A(\xi^*), \quad \xi \in \hat{A}.$$

Soient  $B \in [\text{Car } G]$  et  $\eta \in \hat{B}$ . Grâce à l'isomorphisme entre  $I(G)'$  et l'espace des distributions  $G$ -invariantes sur  $G$ ,  $\Theta_\eta$  définit une forme linéaire continue,  $\theta_\eta$ , sur  $I(G)$ . Utilisant le théorème de régularité et la formule d'intégration de Weyl sur  $G$ , on voit que :

$$(7) \quad \theta_\eta(F) = \sum_{A \in [\text{Car } G]} |W(G, \mathfrak{a})|^{-1} \int_{A^{reg}} D_G^{1/2}(a) \Theta_\eta(a) F(a) da, \quad F \in I(G).$$

Pour démontrer l'égalité (4) ci-dessus il suffit, d'après le point (iv) du théorème de Paley-Wiener invariant, de voir qu'il y a égalité après application de  $\theta_\eta$  aux deux membres, lorsque  $B$  décrit  $[\text{Car } G]$  et  $\eta$  décrit  $\hat{B}$ .

*Lemme 2.*— Si  $B$  n'est pas conjugué sous  $G$  (où, ce qui revient au même, égal) à  $A$ , on a  $\theta_\eta(F_h) = 0$ , pour toute transformée de Fourier,  $h$ , d'une fonction  $C^\infty$  à support compact sur  $A$ .

**Démonstration.**— D'après la formule (7), si  $\theta_\eta(F_h)$  n'est pas nul, il existe  $C \in \text{Car } G$  tel que la restriction de  $\Theta_\eta$  et celle de  $F_h$  à  $C^{reg}$  soient non nulles. D'après les points (ii) des théorèmes de construction et la définition de  $F_h$ , cela implique l'existence de  $C \in \text{Car } G$  avec  $[B] \leq [C] \leq [A]$ . En particulier on a  $[B] \leq [A]$ , ce que l'on supposera dans la suite de la démonstration du lemme. Il faut montrer que  $A = B$ . Supposons  $A \neq B$  et montrons que  $\theta_\eta(F_h)$  est nul. En utilisant l'induction et un passage du réductif au semi-simple, on peut supposer de plus que  $B$  est compact. Dans ce cas,

on peut définir, pour  $\xi \in \hat{A}$ ,  $\theta_\eta(F_\xi)$  en remplaçant  $F$  par  $F_\xi$  dans la formule (7) : les intégrales convergent et dépendent continûment de  $\xi$ . De plus, par une application du théorème de Fubini, on voit que :

$$(8) \quad \theta_\eta(F_h) = \int_{\hat{A}} \theta_\eta(F_\xi) h(\xi) d\xi.$$

Soit  $D \in \mathbb{D}(G)$  et étudions  $\theta_\eta(D \cdot F_h)$ . D'abord, d'après les propriétés des  $\Theta_\xi$ , on a :

$$\theta_\eta(D \cdot F_h) = (\gamma_b(D^t)(\lambda_\eta)) \theta_\eta(F_h).$$

D'autre part, du point (i) du théorème de construction des  $F_\xi$ , on déduit par dérivation sous le signe somme du second membre de (5) que  $D \cdot F_h$  est égal à  $F_{h_1}$ , où  $h_1$  est définie par :  $h_1(\xi) = (\gamma_a(D)(\lambda_\xi)) h(\xi)$ . Donc, pour toute transformée de Fourier  $h$  d'une fonction  $C_c^\infty$  à support compact sur  $A$  et tout  $D \in \mathbb{D}(G)$ , on a :

$$\int_{\hat{A}} (\gamma_b(D^t)(\lambda_\eta) - \gamma_a(D)(\lambda_\xi)) \theta_\eta(F_\xi) h(\xi) d\xi = 0.$$

Par densité, il en résulte que le terme qui précède  $h$  dans l'intégrale est identiquement nul. Par suite,  $\theta_\eta(F_\xi)$  est nul si  $\xi$  n'est pas élément de l'ensemble des zéros communs des fonctions sur  $\hat{A}$  :  $\xi \mapsto \gamma_b(D^t)(\lambda_\eta) - \gamma_a(D)(\lambda_\xi)$ ,  $D \in \mathbb{D}(G)$ . Mais cet ensemble est fini. Comme  $A$  n'est pas conjugué à  $B$ ,  $A$  est le produit d'un groupe compact et d'un groupe vectoriel de dimension supérieure ou égale à 1. Alors le complémentaire d'un ensemble fini est dense dans  $\hat{A}$ . La continuité de  $\theta_\eta(F_\xi)$  par rapport à  $\xi$  permet de conclure à sa nullité sur  $\hat{A}$ . Le lemme résulte alors des formules (6) et (8).

*Lemme 3.*— Si  $A = B$ ,  $\theta_\eta(I_A(f))$  est égal à  $\theta_\eta(I_X(f))$ .

**Démonstration.**— On prend  $h$  comme dans (6). On remarque, de manière analogue à ci-dessus, que si  $\Theta_\eta$  et  $I_A(f)$  ont une restriction non nulle à  $C^{reg}$  pour  $C \in [Car G]$ , on a nécessairement  $A = B = C$ . Alors, en utilisant (6), (7), (8) et le théorème de Fubini, on voit que :

$$\theta_\eta(I_A(f)) = \int_{A^{reg} \times \hat{A}} D_G^{1/2}(a) \Theta_\eta(a) F_\xi(a) h(\xi) da d\xi.$$

Explicitant  $\Theta_\eta(a)$  et  $F_\xi(a)$  grâce aux théorèmes de construction, et tenant compte du fait que  $b_\Psi b_{-\Psi}$  est identiquement égal à 1, on obtient :

$$\theta_\eta(I_A(f)) = |W(G, \mathfrak{a})|^{-2} \sum_{w, w' \in W(G, \mathfrak{a})} \int_{A^{reg} \times \hat{A}} \varepsilon(w)((w \bullet_{-\Psi} \eta)(a)) \varepsilon(w')((w' \bullet_{\Psi} \xi)(a)) h(\xi) d\xi.$$

La formule d'inversion de Fourier pour  $A$  implique que :

$$\int_{A^{reg} \times \hat{A}} \eta(a)\xi(a)h(\xi)dad\xi = h(\eta^*).$$

Joint à ce qui précède et aux propriétés de transformation de  $\hat{f}_A$  sous  $W(G, \mathfrak{a})$ , cela permet d'achever la preuve du lemme.

Le théorème résulte immédiatement des deux lemmes précédents, en tenant compte de (6) dans l'application du lemme 2.

### 9. FORMULE D'INVERSION DE FOURIER POUR $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$

On suppose  $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$  et on garde les notations du théorème précédent. Soient  $A \in Car \mathbb{X}$  et  $\omega \in \hat{A}_0$  tels que  $\lambda_{\omega}(iH_{\alpha}) \neq 0$  pour toute racine imaginaire  $\alpha$  de  $\mathfrak{a}$ . On note  $\Psi_{\omega}$  (resp.  $\Psi_{\omega,nc}$ ) l'ensemble des racines imaginaires (resp. imaginaires non compactes),  $\alpha$  de  $i\mathfrak{a}$  telles que  $\lambda_{\omega}(iH_{\alpha}) > 0$ . On pose  $C(\omega) = (-1)^{|\Psi_{\omega,nc}|} (i)^{|\Psi_{\omega}|} \Theta_{\xi}$ , où  $\xi = (\omega, e_{\mathbb{X}}) \in \hat{A}$ . Le théorème suivant est dû à P. Harinck [16]. Le lien avec la théorie des représentations est rendu possible grâce à [8], [12] et [13].

#### Formule d'inversion de Fourier pour $\mathbb{X} = G_{\mathbb{C}}/G$

Il existe des constantes positives,  $c_A$ ,  $A \in [Car \mathbb{X}]$  (explicitées dans [16]) telles que, pour tout  $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{X})$ , on ait :

$$f(e_{\mathbb{X}}) = \sum_{A \in [Car \mathbb{X}]} c_A \int_{\hat{A}_0} \sum_{u \in \mathcal{W}_A^{-1}} \langle C(u \cdot \omega), f \rangle \left| \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{a})} \lambda_{\omega}(H_{\alpha}) \right|^{1/2} d\omega.$$

#### Indication sur la démonstration

Soit  $B \in Car \mathbb{X}$  tel que  $i\mathfrak{b}$  soit une sous-algèbre de Cartan fondamentale de  $\mathfrak{g}$ . Soit  $\Sigma$  un ensemble de racines positives tel que, pour toute racine complexe appartenant à  $\Sigma$ , sa complexe conjuguée par rapport à  $i\mathfrak{b}$  soit élément de  $\Sigma$ . On choisit pour  $\Psi_B$  l'ensemble des racines imaginaires appartenant à  $\Sigma$ . Avec les notations du paragraphe 4 on a la formule limite :

$$f(e_{\mathbb{X}}) = c \lim_{x \rightarrow e_{\mathbb{X}}, x \in B^{reg}} (\omega_{\Sigma}(b_{\Psi_B} I_{\mathbb{X}}(f)))(x),$$

où  $c$  est une constante parfaitement déterminée. Cette formule découle de la formule limite d'Harish-Chandra sur les algèbres de Lie. On applique alors la formule d'inversion des intégrales orbitales pour calculer le membre de droite de cette formule.

Par construction (induction), pour  $A \in [\text{Car } \mathbb{X}]$  et  $\xi = (\omega, y) \in \hat{A}$ , avec  $y \neq e$ , les fonctions  $F_{\xi, \psi_A}$  sont nulles au voisinage de  $e_X$  dans  $B^{reg}$ . Pour  $y = e$  et  $X \in \mathfrak{g}^{reg}$ , la fonction de  $\omega$ ,  $F_{\xi, \psi_A}(Exp iX)$ , s'exprime facilement en fonction de la transformée de Fourier de la mesure invariante sur l'orbite de  $X$  sous un sous-groupe  $M$  de  $G$  évaluée au point  $\lambda_\omega$ . Les propriétés de cette transformée de Fourier permettent alors d'achever le calcul par une dérivation sous le signe somme dans la formule d'inversion des intégrales orbitales.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOPP et P. HARINCK - *Formule de Plancherel pour  $GL(n, \mathbb{C})/U(p, q)$* , J. reine angew. Math. **428** (1992), 45-95.
- [2] A. BOUAZIZ - *Sur les caractères des groupes de Lie non connexes*, J. Funct. Anal. **70** (1987), 1-79.
- [3] A. BOUAZIZ - *Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives*, Invent. Math. **115** (1994), 163-207.
- [4] A. BOUAZIZ - *Intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **27** (1994), 573-609.
- [5] A. BOUAZIZ - *Formule d'inversion des intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs*, J. Funct. Anal. **134** (1995), 100-182.
- [6] A. BOUAZIZ - *Une dualité entre  $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$  et  $G_{\mathbb{R}}$* , en préparation.
- [7] L. CLOZEL et P. DELORME - *Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs*, II, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **23** (1990), 193-228.
- [8] P. DELORME - *Coefficients généralisés de séries principales sphériques et distributions sur  $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$* , Invent. Math. **105** (1991), 305-346.
- [9] M. DUFLO, G. HECKMAN et M. VERGNE - *Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner*, dans Mémoire Soc. Math. France **15** (1984), 26-87.
- [10] M. DUFLO et M. VERGNE - *La formule de Plancherel des groupes semi-simples réels*, Adv. Studies in Pure Math. **14**, Academic Press (1988), Orlando.
- [11] P. HARINCK - *Fonctions généralisées sphériques sur  $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$* . Thèse de Doctorat, Université Paris 7 (1988).
- [12] P. HARINCK - *Fonctions généralisées sphériques sur  $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$* , Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **23** (1990), 1-38.

- [13] P. HARINCK - *Fonctions généralisées sphériques induites sur  $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$  et applications*, J. Funct. Anal. **103** (1992) 104-127.
- [14] P. HARINCK - *Correspondance de distributions sphériques entre deux espaces du type  $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$* , J. Funct. Anal. **124** (1994), 427-474 .
- [15] P. HARINCK - *Base de la série la plus continue de fonctions généralisées sphériques sur  $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$* . Preprint.
- [16] P. HARINCK - *Fonctions orbitales sur  $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ . Formule d'inversion des intégrales orbitales et formule de Plancherel*. Preprint.
- [17] HARISH-CHANDRA - *Collected Papers*, vol. 3, 4, Springer-Verlag (1983) New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.
- [18] R. HERB - *Fourier inversion of invariant integrals on semisimple real Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **249** (1979), 281-302.
- [19] R. HERB - *Fourier inversion and the Plancherel theorem for semisimple real Lie groups*, Amer. J. Math. **104** (1982), 9-58.
- [20] R. HERB - *Fourier inversion and the Plancherel theorem*. Proc. Conf. Marseille-Luminy 1980, Lecture Notes in Math. **880**, Springer-Verlag (1982) Berlin, Heidelberg, New York, pp 197-210.
- [21] R. HERB - *Discrete series characters and Fourier inversion on semisimple real Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 241-262.
- [22] R. HERB et P. SALLY - *Singular invariant eigendistributions as characters*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 252-254 .
- [23] T. HIRAÏ - *Explicit form of the characters of discrete series representations of semisimple Lie groups*, Proc. of Symposia in Pure Math. XXVI (1973), 281-287.
- [24] T. HIRAÏ - *Invariant eigendistributions of Laplace operators on real semisimple Lie groups*, II, Japan J. Math. **2** (1976), 27-89.
- [25] L. HÖRMANDER - *The analysis of partial differential equations*, Vol. 1, Grundle Math. **256**, Springer-Verlag (1983) Berlin, Heidelberg, New-York.
- [26] T. OSHIMA, T. MATSUKI - *Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups*, J. Math. Soc. Japan **32** (1980), 399-414.
- [27] W. ROSSMAN - *Kirillov's character formula for reductive Lie groups*, Invent. Math. **48** (1978), 207-220.
- [28] P. SALLY et G. WARNER - *The Fourier transform on semisimple Lie groups of real rank one*, Acta Math. **131** (1973), 1-26.
- [29] S. SANO - *Invariant spherical distributions and the Fourier inversion formula on  $GL(n, \mathbb{C})/GL(n, \mathbb{R})$* , J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 191-218.

- [30] S. SANO - *Distributions sphériques invariantes sur les espaces symétriques semi-simples  $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$* , J. Math. Univ. Kyoto **31** (1991), 377-417.
- [31] D. SHELSTAD - *Orbital integrals, endoscopic groups and  $L$ -indistinguishability for real groups*, Pub. Math. Univ. Paris VII, Journées automorphes, Dijon, 1981.
- [32] V.S. VARADARAJAN - *Harmonic analysis on real reductive groups*. Lecture Notes in Math. **576**, Springer-Verlag (1977) Berlin, Heidelberg, New-York.
- [33] M.-F. VIGNERAS - *Caractérisation des intégrales orbitales sur un groupe réductif  $p$ -adique*, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sec. IA **29** (1981), 945-962.

Patrick DELORME

Faculté des Sciences de Luminy  
Département de Mathématique-Informatique  
163, avenue de Luminy  
Case 901  
F-13288 MARSEILLE CEDEX 9

# *Astérisque*

JOHN B. GOODE

**H. L. M. (Hrushovski-Lang-Mordell)**

*Astérisque*, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 811, p. 179-194

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1995-1996\\_\\_38\\_\\_179\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__179_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

H. L. M.  
(HRUSHOVSKI-LANG-MORDELL)

par John B. GOODE

### INTRODUCTION

S'il était encore parmi nous, Dieudonné en avalerait son bourbaki ! J'ai été très marqué dans ma jeunesse par ses conférences sur les mathématiques vides et les mathématiques significatives, où il plaçait la Logique pas bien au-dessus du niveau de la fosse à purin (mais c'était pas le plus bas), tandis que la Géométrie, je veux dire l'algébrique, planait à des hauteurs éthérées où seuls pouvaient s'élever les esprits les plus subtils. Quoi qu'on en ait dit à l'époque, cette classification ne révélait ni intolérance, ni fermeture d'esprit : je me rappelle l'avoir vu très intéressé par une conférence, dans ce même séminaire, sur le modèle de Solovay, où tous les ensembles de réels sont mesurables ; il en tirait joyeusement la conclusion que la Logique était la science qui permettait de prouver n'importe quoi. Je ne peux m'empêcher de me demander quelle aurait été sa réaction aujourd'hui ; aurait-il admis que la Logique se permît de poser ses pattes sales sur la formelle beauté des courbes et des nombres, et dérivât avec insolence, comme simple corollaire, la solution d'un problème ouvert de type mordellien d'un résultat longtemps attendu en Théorie des modèles ?

Car c'est bien là le caractère le plus surprenant de la preuve que je vais présenter aujourd'hui. Son auteur, Ehud Hrushovski, ne s'est pas mis en tête, un jour, de s'atteler à la tâche de prouver la conjecture de Lang ; non, mais quand il en a entendu causer, il a tout de suite vu que ça entraînait dans le cadre de la notion de "structure de Zariski" qu'il venait de dégager, en compagnie de Boris Zil'ber. Voir l'unité profonde de questions sans rapports apparents, c'est le propre des mathématiciens qui créent, s'il m'est permis d'user d'une terminologie typiquement dieudonnienne.

À mon (humble) avis, c'est la première fois que la Logique sert vraiment à montrer un résultat impliquant des objets mathématiques classiques. Comme la Logique, en tant que spécialité mathématique, est une discipline plutôt neuve, les logiciens aiment

bien pouvoir brandir ce genre d'étendard. Le drapeau précédent, c'était le théorème d'Ax et Kochen, qui résolvait asymptotiquement une conjecture d'Artin ; un beau succès, mais où la Théorie des modèles n'intervenait guère que par un principe de compacité ; et puis, je suis persuadé que le but que s'étaient fixé MM. Ax et Kochen, c'était bien dès le début de résoudre la conjecture d'Artin !

Cela étant dit, précisons ce dont on parle. Considérons l'énoncé suivant :

**A.** Soient  $K$  un corps,  $S$  une variété abélienne définie sur  $K$ ,  $X$  un fermé de Zariski de  $S$ , et  $\Gamma$  un sous-groupe de  $S$  de type fini ; alors  $X \cap \Gamma$ , s'il n'est pas vide, s'exprime comme une réunion finie  $a_1 + \Gamma_1 \cup \dots \cup a_n + \Gamma_n$ , où les  $a_i + \Gamma_i$  sont des cosettes modulo des sous-groupes  $\Gamma_i$  de  $\Gamma$ .

*Explication de texte :* "de type fini" signifie que  $\Gamma$  est finiment engendré à division près, mais qu'on ne divise pas par la caractéristique. Autrement dit, il existe un système fini  $g_1, \dots, g_m$  d'éléments de  $S$  tels que tout  $x$  dans  $\Gamma$  satisfasse une relation  $n \cdot x = n_1 \cdot g_1 + \dots + n_m \cdot g_m$ , à coefficients entiers relatifs, où  $n$  est non-nul, et même non-divisible par  $p$  si on est en caractéristique  $p$ . On remarque que  $\Gamma$  est le seul objet discret, non géométrique, de l'énoncé.

Toute personne siégeant dans cette assemblée éminente a vu le rapport de cet énoncé A avec la conjecture de Mordell, déclarant qu'une courbe de genre au moins deux n'a qu'un nombre fini de points rationnels sur un corps de nombres (ou extension de degré fini du corps des rationnels) ; ce paragraphe n'est destiné qu'au logicien égaré dans la consultation des actes de ce séminaire. Soit  $X$  notre courbe ; elle apparaît comme un fermé de sa jacobienne  $S$ , qui est une variété abélienne ayant pour dimension le genre de  $X$  ; d'après un théorème d'André Weil (voir [WEIL 1948]), les points de  $S$  rationnels sur un corps de nombres forment un groupe  $\Gamma$  de type fini ; pour pouvoir assimiler les variétés à leur ensemble de points  $K$ -rationnels, nous remplaçons  $K$  par sa clôture algébrique ; si nous supposons que  $a_i + \Gamma_i$  est infini et contenu dans  $X$ , irréductible de dimension un, il en est de même de sa clôture de Zariski  $a_i + clz(\Gamma_i)$ , et il faut alors que la courbe elle-même soit cette cosette, qu'elle porte une structure de groupe algébrique, donc qu'elle soit de genre un (ou zéro, mais là il n'y a pas de jacobienne !) ; si donc le genre est supérieur à deux, l'énoncé A implique que  $X \cap \Gamma$  est fini, c'est-à-dire la conjecture de Mordell.

Je rappelle que cette conjecture a été prouvée par Faltings dans [FALTINGS 1983] ; c'est également Faltings qui a prouvé l'énoncé A en caractéristique nulle ; plus exactement, il a apporté la touche finale à une œuvre collective : voir [LANG 1991] ;

on consultera également [LANG 1995] à propos des évé(è)nements pittoresques qui peuvent se produire dans les milieux académiques. C'est donc un énoncé plus puissant que la conjecture de Mordell en caractéristique nulle ; qu'en est-il en caractéristique  $p$  ? Eh bien, il est trop puissant, pour la raison triviale que, si  $K$  est la clôture algébrique du corps premier  $\mathbf{F}_p$ , le groupe  $S$  lui-même est de torsion, qu'il lui arrive de ne pas avoir de  $p$ -éléments, et qu'il y a pourtant des courbes qui ne sont pas des cossettes ! Il faut donc le modérer par une hypothèse supplémentaire :

**B.** *Notons  $k$  la clôture algébrique du corps premier ( $\mathbf{Q}$  ou  $\mathbf{F}_p$ ) ; on suppose en outre que la trace de  $S$  sur  $k$  est nulle, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'homomorphisme (au sens géométrique) non nul entre une sous-variété abélienne de  $S$  et une variété abélienne définie sur  $k$ .*

C'est l'énoncé A avec l'hypothèse B qui est prouvé par Hrushovski : cet  $A+B$  est connu sous les noms de "conjecture géométrique de Mordell–Lang", ou "conjecture de Mordell–Lang pour les corps de fonctions" ; elle apparaît dans [LANG 1965]. La preuve de [HRUSHOVSKI 199?] est uniforme en caractéristique nulle et en caractéristique  $p$ , ne variant que par la structure auxiliaire utilisée ; c'est la première preuve de la conjecture en ce qui concerne la caractéristique  $p$ .

Elle procède ainsi : on munit le corps  $K$  d'une structure supplémentaire (corps différentiellement clos en caractéristique nulle, corps séparablement clos en caractéristique  $p$ ) ; pour qu'il puisse porter cette structure, il faut éventuellement l'élargir, mais ça n'a pas d'importance : c'est au corps  $k$  qu'il ne faut pas toucher ; on remplace  $\Gamma$  par un groupe  $G$  plus grand, mais qui est définissable, c'est-à-dire "géométrique" au sens de cette structure enrichie ; en caractéristique nulle, on utilise pour cela un homomorphisme entre la variété abélienne  $S$  et un groupe vectoriel, introduit par Manin ; en caractéristique  $p$ , on se débrouille avec le noyau  $p$ -divisible de  $S$ . L'important, c'est que cette structure enrichie reste maniable, qu'aux objets qui y sont définissables soit associée une notion de dimension analogue à la dimension en Géométrie algébrique. La situation sera contrôlée par ce que tous les ensembles de dimension un seront des "structures de type Zariski" ; l'hypothèse B permettra d'exploiter le fait que  $k$  sera le seul corps de dimension finie définissable dans  $K$ . Les détails suivent.

Je remercie Françoise DELON, Carlo GASBARRI et Olivier MATHIEU pour les corrections qu'ils ont apportées à la première version de cet exposé.

## 1. STRUCTURES DE TYPE ZARISKI : LE RÉSULTAT SÉRIEUX

Il aura fallu trois lustres, de Morley à Zil'ber, pour que les théoriciens des modèles se rendent compte qu'ils étudient les mêmes objets que les géomètres algébriques, à savoir ceux qui sont définissables dans un corps algébriquement clos. Je ne fais pas ici l'histoire de cette convergence ; ça serait pourtant bien intéressant, car le plus surprenant dans ce résultat, pour un mathématicien normal, c'est de voir d'où il sort !

Les géomètres et les logiciens n'abordent pas ce corps  $K$  de la même façon ; je rappelle qu'un fermé de Zariski est une partie de  $K^n$  définie par un système d'équations polynomiales, tandis qu'un constructible est une combinaison booléenne d'un nombre fini de fermés de Zariski. Disons en première approximation que les géomètres travaillent au niveau des fermés de Zariski, tandis que les logiciens vivent dans les constructibles. Mais aussi les logiciens travaillent à un niveau d'abstraction supérieur à celui des géomètres (c'est pas de la provoc) : ces derniers se donnent dès le départ un corps, des anneaux locaux, des dérivations, etc., bref une grande richesse structurelle, tandis que les logiciens n'ont rien, ou presque : seulement une notion abstraite de dimension ! Il faut donc s'attendre à ce que la Théorie des modèles produise des théorèmes plus généraux, donc plus vagues, moins précis que ceux de la Géométrie ; et pourtant elle arrive à quelque chose !

La notion suivante d'"ensemble fortement minimal", formalisant la notion de structure connexe de dimension un, est apparue dans la foulée des travaux de Michael Morley sur la catégoricité en  $\aleph_1$ .

On se donne un ensemble  $M$  infini, et pour chaque entier  $n$  une famille de parties de  $M^n$ , qu'on appelle les ensembles définissables (avec paramètres) au sens de  $M$  ; ils doivent satisfaire aux conditions suivantes :

(i) les parties définissables de  $M^n$  forment une algèbre de Boole : si  $A$  et  $B$  sont définissables, il en est de même de  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ , et du complément de  $A$  ;

(ii) le produit cartésien d'une partie définissable  $A$  de  $M^m$  et d'une partie définissable  $B$  de  $M^n$  est une partie définissable de  $M^{m+n}$  ; les singletons  $\{x/x = a\}$  et les diagonales  $\{(x, y)/x = y\}$  sont définissables ; une permutation des variables transforme un ensemble définissable en un autre ;

(iii) la projection sur  $M^n$  d'une partie définissable de  $M^{n+1}$  est définissable ;

(iv)  $M$  est uniformément (irréductible et) de dimension un, ce qui signifie qu'à toute partie définissable  $X(x, y)$  de  $M^{1+n}$  est associé un entier  $e$ , tel que, pour tout

$\mathbf{a}$  de  $M^n$ , ou bien  $X(x, \mathbf{a})$  contienne au plus  $e$  éléments, ou bien  $X(x, \mathbf{a})$  contienne tous les éléments de  $M$  sauf au plus  $e$ .

Prenons pour ensemble  $M$  un corps  $K$  algébriquement clos, et considérons les trois exemples suivants, qui satisfont – le lecteur s'en convaincra – à ces quatre conditions :

a) les ensembles définissables sont les combinaisons booléennes de singletons et de diagonales ;

b) les ensembles définissables sont les combinaisons booléennes d'ensembles définis par des équations linéaires  $m_1 \cdot x_1 + \dots + m_n \cdot x_n = a$ , à coefficients entiers relatifs, et à second membre dans  $K$  ;

c) dans le premier exemple, on n'utilise pas de structure du tout (seulement que  $K$  est un ensemble  $M$  infini), et dans le deuxième seulement l'addition, c'est-à-dire la structure d'espace vectoriel sur le corps premier ; dans ce troisième exemple, on utilise somme et produit et on prend pour ensembles définissables les parties constructibles de  $K^n$ .

Ces trois exemples sont typiques, car ils illustrent une trichotomie établie par Boris Zil'ber dans [ZIL'BER 1984] :

$\alpha$ ) *le cas trivial* ; on ne peut alors définir de groupe infini dans  $M$  ;

$\beta$ ) *le cas modulaire* ; l'ensemble  $M$ , s'il n'est pas lui-même porteur d'une structure de groupe (définissable !), est cependant étroitement associé un groupe fortement minimal ; tous les groupes  $G$  qu'on peut alors interpréter (*i.e.* dont l'ensemble sous-jacent est le quotient d'un ensemble définissable par une relation d'équivalence définissable, et dont la loi de groupe est bien sûr définissable) dans  $M$  sont modulaires, ce qui signifie que toute partie définissable de  $G$  (et de  $G^n$  !) est combinaison booléenne de cosettes modulo des sous-groupes définissables ; tous ces groupes sont abéliens par finis, et on ne peut interpréter de corps infinis ( $GL_n(K)$  n'est pas abélien par fini !) ; on voit ce qui a fait tilt dans le crâne de Hrushovski à propos de l'énoncé de la conjecture de Mordell–Lang, dans lequel on peut remplacer  $S$  par  $S^n$  et  $\Gamma$  par  $\Gamma^n$  : il s'agit tout simplement de montrer que la géométrie algébrique n'induit sur  $\Gamma$  qu'une structure modulaire !

$\gamma$ ) *le troisième cas* ; Zil'ber montre qu'on peut alors y définir une structure appelée pseudo-plan, qui ressemble à un plan projectif. Il a conjecturé que, dans ce cas, on devait pouvoir interpréter un corps infini  $K$  (qui ne peut qu'être algébriquement clos d'après [MACINTYRE 1971]). À l'origine, cette conjecture n'impliquait pas d'arrière-pensée, mais quand, en 1986, j'ai sommé Zil'ber de préciser, il a admis que ce corps

$K$  ne devait pas porter de structure plus riche que celle d'un corps (algébriquement clos), c'est-à-dire que les parties de  $K^n$  définissables au sens de  $M$  n'étaient rien d'autres que les constructibles au sens du corps  $K$ . Vu sous cet angle, ça devenait une conjecture extrêmement ambitieuse, postulant que tout objet de dimension un était essentiellement connu, étant fortement corrélé à un objet classique.

Eh bien, Hrushovski a montré qu'elle était brutalement fautive, en construisant dans [HRUSHOVSKI 1993], à partir de rien, un ensemble fortement minimal non-trivial qui n'interpète pas de groupe ; dans la foulée, [BALDWIN 1994] en a construit un qui interprète un plan projectif (non arguésien !) et pas de corps, et [BAUDISCH 1995] un autre qui interprète un groupe 2-nilpotent non abélien par fini et pas de corps. Pour ce qui est de la structure supplémentaire, Hrushovski a réussi plus récemment un mélange fantastique : prenant par exemple deux structures de corps algébriquement clos de degré de transcendance dénombrable, l'un de caractéristique deux, l'autre de caractéristique trois, il réussit à les poser simultanément sur le même ensemble  $M$  tout en gardant la forte minimalité (voir [HRUSHOVSKI 1992]) !

Quand Shiva a détruit, Vishnu reconstruit. Zil'ber et Hrushovski ont sauvé la trichotomie en introduisant une notion abstraite de fermés de Zariski, et en demandant qu'ils satisfassent le Hauptidealsatz (si on ajoute une équation, on ne peut faire choir la dimension que de un).

Ils appellent *structure de Zariski* la donnée d'un ensemble  $M$ , avec une topologie sur chaque  $M^n$ , satisfaisant aux conditions suivantes :

- (i) les conditions usuelles définissant les topologies ;
- (ii) toute application de  $M^m$  dans  $M^n$  dont les coordonnées sont des projections ou des constantes est continue ; singletons et diagonales sont fermés ;
- (iii) la projection d'un fermé de  $M^{n+1}$  est un constructible (= combinaison booléenne de fermés) de  $M^n$  ;
- (iv)  $M$  est uniformément (irréductible et) de dimension un, c'est-à-dire qu'à tout fermé  $X(x, \mathbf{y})$  de  $M^{1+n}$  est associé un entier  $e$ , tel que, pour tout  $\mathbf{a}$  de  $M^n$ , ou bien  $X(x, \mathbf{a})$  contienne au plus  $e$  éléments, ou bien  $X(x, \mathbf{a})$  soit  $M$  tout entier ;
- (v) si  $X$  est un fermé irréductible de dimension  $d$ , chaque composante de son intersection avec une diagonale est de dimension au moins  $d-1$  (ici, la "dimension" est la dimension topologique ; on voit sans peine que les axiomes imposent aux topologies d'être noethérienne, et que  $M^n$  est de dimension  $n$ ).

Ces axiomes forcent les constructibles de  $M$  à former une structure fortement minimale au sens précédent ; nos trois exemples provenaient bien chacun d'une structure de Zariski :

a) prendre pour fermés les combinaisons booléennes positives de diagonales et de singletons ;

b) prendre pour fermés les combinaisons booléennes positives d'ensembles de solutions d'équations linéaires à coefficients entiers ;

c) prendre les fermés de Zariski usuels ; plus généralement, si  $C$  est une courbe lisse, les topologies de Zariski sur les  $C^n$  forment une structure de Zariski ; ce n'est pas toujours le cas d'une courbe non lisse (cubique à point double, où (v) n'est pas vérifié), mais ça peut arriver (cubique à point de rebroussement, topologiquement équivalente à sa normalisée).

Dans une structure de Zariski, on appellera famille de courbes planes la donnée d'un fermé  $X(x, y, \mathbf{z})$  de  $M^{2+n}$  tel que, pour chaque  $\mathbf{a}$  de  $M^n$ ,  $X(x, y, \mathbf{a})$  soit un fermé irréductible de dimension un de  $M^2$  ; on dit que la structure est ample si elle possède une famille de courbes telle que par deux points  $p$  et  $q$  du plan en position générique (*i.e.* pour tous  $p$  et  $q$  d'un ouvert non vide du plan  $M^2$ ), il passe une courbe de la famille.

C'est ainsi que ni a) ni b) ne sont amples : dans le premier cas, on ne peut guère définir, comme familles de courbes, que les parallèles aux axes  $x = a$  ou  $y = b$ , et dans le deuxième les parallèles  $n \cdot x + m \cdot y = a$  à une direction (rationnelle !) donnée ; tandis que c) est ample, puisqu'on peut y définir la famille de toutes les droites  $a \cdot x + b \cdot y = c$  du plan.

Le résultat de [HRUSHOVSKI-ZIL'BER 1993 et 199?] est le suivant : si la structure de Zariski n'est pas ample, l'ensemble minimal associé est trivial ou modulaire ; si elle est ample, on peut y interpréter un corps algébriquement clos  $k$ , unique à isomorphisme définissable près, et qui n'est rien d'autre qu'un corps : ses parties définissables dans  $M$  sont les constructibles au sens des corps. L'article contient en outre une caractérisation des topologies de Zariski des courbes lisses : je n'en parle pas car nous n'en aurons pas besoin ici.

## 2. NOTE DU CRU DE L'AUTEUR

[HRUSHOVSKI-ZIL'BER 1993] ne résoud pas tous les problèmes à propos de la trichotomie de Zil'ber. Par exemple, on ne sait toujours pas si elle est vraie pour un ensemble fortement minimal interprétable dans un corps algébriquement clos (où les parties définissables de  $M$  sont certains constructibles). De plus, c'est une théorie vraiment adaptée à la dimension un ; il serait intéressant de pouvoir caractériser abstraitement la topologie de Zariski d'un groupe algébrique : c'est une de mes obsessions depuis [POIZAT 1984].

Cette obsession mérite quelques explications : étant donnée une variété  $V$ , il n'y a pas de sens à chercher à distinguer les fermés, parmi les constructibles, par une propriété particulière, tout simplement parce que les bijections constructibles ne sont pas continues (elles le sont seulement "génériquement"), et ne conservent pas la notion de fermé. Mais cela fait sens si cette variété algébrique est un groupe algébrique  $G$ , et qu'on insiste sur la préservation de sa loi de groupe, car tout automorphisme abstrait  $\sigma$  de ce groupe  $G$  qui, pour chaque  $n$ , envoie les constructibles de  $G^n$  sur les constructibles de  $G^n$ , envoie aussi ses fermés sur ses fermés. En effet, tout isomorphisme abstrait entre un groupe algébrique  $G_1$  sur un corps algébriquement clos  $K_1$ , et un groupe algébrique  $G_2$  sur un corps algébriquement clos  $K_2$ , qui envoie constructible sur constructible, se décompose en une application induite par un isomorphisme des corps de base et un morphisme géométrique : la démonstration est la même que celle du théorème de Borel–Tits donnée dans [POIZAT 1988].

Un groupe  $G$  constructible, qui finalement doit être constructiblement isomorphe à un groupe algébrique (voir [POIZAT 1987]), a donc parmi ses constructibles des éléments bien particuliers, ceux qui deviennent fermés de Zariski quand on en fait un groupe algébrique, quelle que soit la manière dont on s'y prend. Ça serait bien d'avoir une autre caractérisation de ces fermés, du genre de celle des constructibles génériques, ceux qui sont d'intérieur non vide, qui sont également ceux dont un nombre fini de translatés recouvrent  $G$  : on sait quelles bonnes propriétés ont les génériques, ainsi définis, dans le contexte des groupes stables, un contexte bien plus large que celui des groupes de rang de Morley (= dimension) fini. Le rêve est donc le suivant : trouver une caractérisation des fermés de Zariski faisant sens pour un groupe stable, ou du moins distinguer des groupes stables "avec topologie de Zariski", sans référence à la dimension !

### 3. LA CARACTÉRISTIQUE NULLE

Comme je l'ai dit, la démonstration est la même en toute caractéristique, sauf qu'on n'emploie pas la même structure auxiliaire, ce qui justifie la séparation en deux sections. Nous traitons ici de la caractéristique zéro.

Comme je l'ai dit également, l'énoncé à prouver n'est pas affecté par une extension du corps  $K$  : il importe seulement de ne pas toucher à  $k$ . Nous supposons donc que  $K$  est algébriquement clos et de degré de transcendance infini sur  $k$  ; dans ces conditions, il existe une dérivation de  $K$ , dont  $k$  est le corps de constantes (éléments de dérivé nul), et qui fait de  $K$  un corps différentiellement clos.

Les corps différentiellement clos sont aux corps différentiels (= corps munis d'une dérivation) ce que sont les corps algébriquement clos aux corps ordinaires : ce sont ceux qui satisfont le Théorème des Zéros de Hilbert, à savoir que tout système formé d'un nombre fini d'équations et d'inéquations polynomiales différentielles (*i.e.* des polynômes en les inconnues et leurs dérivées successives), à coefficients dans  $K$ , qui a une solution dans une extension de  $K$ , en a une dans  $K$ .

En caractéristique nulle, la machine fonctionne bien : tout corps différentiel a une "clôture différentielle" uniquement déterminée à l'isomorphie près. Si  $K$  est différentiellement clos, on définit les fermés de Zariski différentiels comme étant les ensembles solutions de systèmes d'équations différentielles polynomiales ; ça donne des topologies noethériennes, et on a bien que la projection d'un fermé est un constructible (les logiciens appellent ce phénomène : élimination des quanteurs). La seule différence, c'est que la dimension topologique de  $K$  n'est plus un, ni même un nombre fini : c'est l'ordinal oméga, le premier ordinal infini. Il n'y a pas là de quoi se mettre martel en tête : cela signifie simplement que  $K$  n'a pas de suite infinie strictement décroissante de fermés (ça, c'est la noethérianité) ; par contre, il a des suites infinies croissantes de fermés irréductibles ; toutefois, un fermé contenant une telle suite ne peut qu'être  $K$  tout entier (sinon sa dimension serait plus que oméga). De même,  $K^n$  a pour dimension l'ordinal  $n \cdot \omega$  ; ça ne l'empêche pas, bien au contraire, d'avoir des sous-ensembles de dimension finie, et de dimension un en particulier !

Pour un excellent exposé de tous ces trucs élémentaires sur les corps différentiellement clos, consulter [POIZAT 1985, ch. 6].

Comme  $K$  est muni de deux structures, celle de corps et celle de corps différentiel, d'où risque de confusion, nous convenons qu'à partir de maintenant les mots fermés de Zariski, constructibles, dimension réfèrent au pur langage des corps ; leurs homologues différentiels seront fermés de Zariski différentiels, ensembles définissables, rang de

Morley.

Une propriété des corps différentiellement clos de caractéristique nulle nouvellement mise en évidence dans [HRUSHOVSKI-SOKOLOVIC 199?], c'est que tout ensemble définissable  $M$  de rang de Morley un est une structure de Zariski, et que par conséquent nous sommes dans un cadre où la trichotomie de Zil'ber est valide. On prend pour fermés de Zariski de  $M$ , et de ses puissances, les traces des fermés de Zariski différentiels. Il faut éventuellement lui enlever un nombre fini de singularités pour que le Hauptidealsatz soit vérifié.

Il reste encore deux choses à faire avaler au lecteur avant de commencer la preuve.

La première est faite dans [SOKOLOVIC 1992] : tout corps (infini) de rang de Morley fini définissable dans  $K$  est définissablement isomorphe à son corps de constantes  $k$ , défini par l'équation  $x' = 0$ .

La deuxième est plus ancienne : elle vient de [MANIN 1958]. La dérivation introduit des corrélations entre des groupes algébriques sans rapports au niveau algébrique pur ; le plus connu est la dérivée logarithmique, qui à  $x$  du groupe multiplicatif  $K^*$  associe  $x'/x$  du groupe additif  $K^+$  ; pour un corps ordinaire, c'est-à-dire un corps de constantes, c'est l'homomorphisme nul, mais si  $K$  est différentiellement clos cet homomorphisme est surjectif : ça ne contredit pas la propriété d'additivité des dimensions, car  $K^*$  et  $K^+$  sont de rang oméga, tandis que le rang de Morley du noyau est fini ( $= 1$ ). De même, si  $S$  est le groupe de la cubique définie par l'équation  $y^2 = x \cdot (x - 1) \cdot (x - q)$ , où  $q$  est une constante (*i.e.*  $q' = 0$ ), on voit sans trop de douleur que  $x'/y$  définit un homomorphisme de groupe de  $S$  dans  $K^+$  ; une façon de faire est de dériver formellement une intégrale elliptique, et de faire taire ses états d'âme sur la signification de ce calcul ; si  $q$  n'est pas une constante, il faut dériver deux fois pour éliminer les intégrales elliptiques qui surgissent dans ce calcul, et on obtient un homomorphisme de  $S$  dans  $K^+$  qui s'exprime en fonction de  $x$ ,  $y$  et de leurs dérivées premières et secondes. Plus généralement, Yuri Manin définit grâce à la dérivation un homomorphisme  $\mu$  d'une variété abélienne quelconque  $S = S(K)$ , de dimension  $d$ , dans  $(K^+)^d$ , qui est surjectif si  $K$  est différentiellement clos. Si  $S$  est définie sur  $k$ , le noyau de  $\mu$  n'est autre que le groupe algébrique  $S(k)$  ; mais si, à l'opposé,  $S$  est de trace nulle sur  $k$ , ce noyau  $\text{Ker}(\mu)$ , qui est de rang de Morley fini par suite d'un simple calcul d'additivité des rangs, est modulaire, comme nous l'allons voir.

Une remarque historique avant de commencer la preuve : ce n'est pas Hrushovski, mais Buium qui a pensé à introduire ce noyau de Manin pour montrer la conjecture de Mordell–Lang ; mais ensuite, Buium fait de l'algèbre, pas de la théorie des modèles (voir [BUIUM 1992]).

Maintenant, on y va. Si  $\Gamma$  est "engendré" par  $g_1, \dots, g_m$ ,  $\mu(\Gamma)$  est contenu dans  $\mathbb{Q} \cdot g_1 + \dots + \mathbb{Q} \cdot g_m$ , donc aussi dans  $k \cdot g_1 + \dots + k \cdot g_m$  ; ce dernier groupe est définissable de rang de Morley  $m$ , donc son image réciproque par  $\mu$  est un sous-groupe définissable  $G$  de  $S$ , de rang de Morley fini et qui contient  $\Gamma$ . Nous prouvons le théorème avec  $G$  à la place de  $\Gamma$ , ce qui est évidemment plus fort.

Nous montrons maintenant que toute partie  $A$  de  $G$ , définissable de rang de Morley un (et "connexe", c'est-à-dire non-décomposable en deux tels sous-ensembles), est modulaire. Pour cela, nous utilisons une variation due à Zil'ber du théorème classique qui déclare qu'un sous-fermé irréductible  $A$  d'un groupe algébrique, et qui contient l'identité, engendre un sous-groupe algébrique connexe (dont chaque élément est produit d'un nombre fixe d'éléments de  $A$ ) ; Zil'ber a remarqué que ça marchait dans un groupe de rang de Morley fini  $G$ , et pour les parties définissables indécomposables, *i.e.* qui ne se répartissaient pas en un nombre fini  $\neq 1$  de cosettes modulo un sous-groupe définissable de  $G$ . Donc, on enlève à  $A$  un nombre fini de points pour le rendre indécomposable, on le translate pour qu'il contienne l'identité, et on est ramené au cas où il engendre un sous groupe définissable  $H$  de  $G$  ; ça empêche déjà  $A$  d'être trivial.

S'il était du troisième type, son corps associé ne pourrait être que  $k$ , et on pourrait décomposer  $H$  en une tour de groupes finis ou bien connexes et  $k$ -internes (voir [POIZAT 1987], p. 66). Quitte à le remplacer par le dernier groupe infini de cette tour, et à quotienter  $S$  par un noyau fini, nous pourrions supposer que  $H$  lui-même est  $k$ -interne, et  $H$  serait définissablement isomorphe à un groupe algébrique  $I(k)$  sur  $k$  (voir [POIZAT 1987, ch. 4]). Autrement dit, on obtiendrait un isomorphisme  $f$ , définissable avec l'aide de la dérivation, de  $H$  vers  $I(k)$  ; l'isomorphisme réciproque  $g$ , par contre, s'exprimerait uniquement avec des opérations rationnelles, puisque  $x'$  peut se remplacer par 0 quand il est question d'éléments de  $k$  !

Exemple d'une telle situation :  $S = K^+$ , qui n'est pas tout à fait une variété abélienne ;  $H$  est défini par la condition  $x'' = 0$  : il est de la forme  $k + k \cdot a$ , où  $a$  est une primitive de 1 ( $a' = 1$ ) ;  $f$  va de  $H$  dans  $(k^+)^2$ ,  $f(x) = (x - a \cdot x', x')$  ;  $g$  va de  $(k^+)^2$  dans  $H$ ,  $g(u, v) = u + a \cdot v$ .

Comme  $S = S(K)$  est aussi un groupe algébrique, défini dans le pur langage des corps,  $g$  s'étend en un homomorphisme (algébrique)  $\gamma$  de  $I(K)$  dans la clôture de

Zariski de  $H$ . Montrons que  $\gamma$  est injectif (ce n'est pas le cas dans notre exemple). Tout d'abord,  $I(K)$  est une variété abélienne : en effet, comme  $S(K)$  est abélienne, le plus grand sous-groupe affine de  $I(K)$  est contenu dans le noyau de  $\gamma$  ; comme  $I(K)$  est défini sur  $k$ , il en est de même de sa partie affine : si elle n'était pas nulle, on trouverait des points dans le noyau de  $g$ . Ensuite, une propriété importante des variétés abéliennes est leur rigidité : une variété abélienne définie sur  $k$  algébriquement clos a tous ses sous-groupes constructibles (qui sont de fait Zariski fermés) définis sur  $k$ , on n'en voit pas apparaître de nouveaux quand on étend le corps de base (par contraste, il y a dans  $(K^+)^2$  de nouvelles droites dont on ne voit trace dans  $(k^+)^2$ ). Par conséquent, si  $\gamma$  avait un noyau, on lui trouverait des points  $k$ -rationnels, c'est-à-dire dans le noyau de  $g$ .

En conséquence,  $\gamma$  est bien un isomorphisme entre le groupe algébrique  $I(K)$  et la clôture de Zariski de  $H$  ; mézalor, comme  $I(K)$  est défini sur  $k$ , notre hypothèse de trace nulle est contredite.

Pour résumer, le groupe  $H$  engendré par  $A$  étant modulaire, ce dernier est, à un nombre fini de points près, de la forme  $a + J$ , où  $J$  est un sous-groupe modulaire de  $G$  de rang de Morley un.

Ça suffit pour montrer le théorème quand  $X$  est une courbe, *i.e.* un fermé de Zariski de dimension (géométrique !) un, que nous prenons irréductible. C'est assez clair quand  $X \cap G$  est fini ; sinon il contient un ensemble de rang de Morley un, de la forme  $(a + J) - \{b_1, \dots, b_m\}$ , si bien que  $X$  contient la clôture de Zariski de ce dernier, qui est  $a + clz(J)$  :  $X$  est lui-même cossette d'un groupe algébrique de dimension un.

Pour le cas général, on induit sur la dimension de  $X$ . On invoque la complétude de  $S$  pour que  $X$  reste fermé après passage au quotient.

On considère alors le sous-groupe  $L$  de  $G$  engendré par tous les sous-groupes définissables de rang de Morley un de  $G$  ;  $L$  est modulaire, mais  $G$  ne l'est pas nécessairement, puisque  $G/L$  peut contenir des copies de  $k^+$ . Pour des raisons tout à fait générales (voir [HRUSHOVSKI-PILLAY 1987]), un groupe modulaire est aussi rigide, et  $L$  ne contient qu'une famille fixe  $J_1, \dots, J_n, \dots$  de sous-groupes de rang de Morley un (la vie serait un peu plus simple s'il n'y en avait qu'un nombre fini !) ; c'est d'ailleurs une information dont le géomètre peut se passer, car ce qui importe, c'est que leurs clôtures de Zariski  $clz(J_1), \dots, clz(J_n) \dots$  forment une famille fixe, ce qui est garanti par la rigidité de  $S$ . Notons  $X_n$  la partie de  $X$  stable sous l'action de  $clz(J_n)$ , c'est-à-dire l'ensemble des  $x$  tels que la cossette  $x + clz(J_n)$  soit contenue dans  $X$ , et montrons que  $X \cap G$  est contenu dans une réunion finie  $X_1 \cup \dots \cup X_n$ . Sinon, quitte à remplacer  $K$  par une extension élémentaire saturée (ça augmente  $k$ , mais ça n'a

plus d'importance), on trouve un type de rang de Morley un dans  $X \cap G$ , et qui n'est dans aucun des  $X_i$  ; ce type est le générique d'une  $a + J_i$ , si bien que cette cossette, privée d'un nombre fini de ses points est contenue dans  $X \cap G$ , et qu'en conséquence sa clôture de Zariski  $a + clz(J_i)$  est contenue dans  $X$  : contradiction. Il suffit donc de démontrer le résultat pour chaque  $X_n$ , en se plaçant dans  $S/clz(J_n)$ , et en utilisant l'induction.

Si ce dernier paragraphe vous semble obscur, c'est que vous n'êtes pas familiers des techniques de base de la Théorie des modèles ; vous avez le choix entre cette familiarisation, ou bien la traduction dans votre propre langage : vous devez y arriver, car il n'y a pratiquement plus de mathématiques là-dedans, que des arguments de bon sens !

#### 4. LA CARACTÉRISTIQUE $p$

C'est la partie que vous attendez tous, puisque c'est la première preuve de ce cas, et ça va être la plus frustrante : je me contente de vous répéter qu'on fait la même chose, mais avec une autre structure auxiliaire.

Pour enrichir la structure, on n'ajoute pas d'opérations (on pourrait sans doute le faire, car il existe une notion de corps différentiellement clos en caractéristique  $p$ , plus difficile à manier qu'en caractéristique nulle). Non, on n'ajoute pas d'opération à la somme et au produit, mais on change la notion de constructible : on prend un corps  $K$  séparablement clos, mais non algébriquement clos, tel que l'extension  $K/K^p$  soit de dimension finie ( $K^p$  désigne ici non pas une puissance cartésienne de  $K$ , mais l'image de  $K$  par l'homomorphisme  $\phi$  de Frobenius qui à  $x$  associe  $x^p$ ) ; si on fixe une base de cette extension, chaque  $x$  de  $K$  se décompose en un certain nombre de coordonnées : dans la notion de partie définissable de la puissance cartésienne, on tient non seulement compte des équations vérifiées par  $x_1, \dots, x_n$ , mais aussi de celles vérifiées par leurs coordonnées, les coordonnées de leurs coordonnées, etc., ce qui permet de garder la condition que la projection d'un définissable est définissable. On fait ça en s'arrangeant pour que le corps algébriquement clos  $k$  soit l'intersection des  $\phi^m(K)$ .

Une autre façon de décrire ces "constructibles" d'un corps séparablement clos, c'est d'introduire des dérivations d'ordre supérieur de Hasse : voir [MESSMER-WOOD 1995].

Le contexte modèle-théorique est un petit peu plus élaboré : la théorie est stable, non superstable, ce qui oblige à considérer des ensembles infiniment définissables, comme le corps  $k$ , et non plus simplement définissables, mais ce n'est pas sérieusement plus complexe. Le seul corps de rang un est le corps  $k$  ([MESSMER 1994]), et les ensembles de rang un sont zariskis ([HRUSHOVSKI 199?] et [DELON 199?]) ; il ne manque plus que l'homomorphisme de Manin. Eh bien, on n'en a pas besoin : ce qu'on montre, c'est que, si  $S$  est de trace nulle sur  $k$ , le groupe  $G$  intersection des  $p^n \cdot S$  est (de "dimension" finie et) modulaire, et qu'il peut jouer le rôle dévolu au noyau de Manin. Plus précisément, on suppose comme d'habitude que  $X$  est irréductible et que  $X \cap \Gamma$  est zariski-dense dans  $X$  ; comme  $\Gamma$  se répartit en un nombre fini de cosettes modulo  $p^n \cdot S$ , l'une de celles-ci a son intersection avec  $X$  dense dans  $X$  ; on en déduit l'existence d'une cosette de  $G$  dont l'intersection avec  $X$  est dense dans  $X$ , et la conclusion. Comme quoi c'est à la fois plus simple et plus compliqué qu'en caractéristique nulle !

#### BIBLIOGRAPHIE

- [BALDWIN 1994] J.T. BALDWIN - *An almost strongly minimal non-Desarguesian projective plane*, Trans. Am. Math. Soc. **342**, 695–711.
- [BAUDISCH 1995] A. BAUDISCH - *Another stable group*, preprint n° A 95-5, Freie Universität Berlin.
- [BUIUM 1992] A. BUIUM - *Intersections in jet spaces and a conjecture of S. Lang*, Annals of Mathematics **136**, 557–567.
- [DELON 199?] F. DELON - *Separably closed fields*, Model Theory and Algebraic Geometry Workshop, Manchester, Sept. 1994 (Ed. E. Bouscaren & D. Lascar).
- [DIEUDONNÉ 1981] J. DIEUDONNÉ - *Mathématiques vides et mathématiques significatives*, Points, série sciences **29**, Seuil, 15–38.
- [HRUSHOVSKI 1992] E. HRUSHOVSKI - *Strongly minimal expansions of algebraically closed fields*, Israel J. of Math. **79**, 129–151.
- [HRUSHOVSKI 1993] E. HRUSHOVSKI - *A new strongly minimal set*, Ann. Pure Appl. Logic **62**, 147–166.
- [HRUSHOVSKI 199?] E. HRUSHOVSKI - *The Mordell-Lang conjecture for function fields*, preprint.
- [HRUSHOVSKI-PILLAY 1987] E. HRUSHOVSKI & A. PILLAY - *Weakly normal*

- groups, Logic Colloquium **85**, North Holland, 233–244.
- [HRUSHOVSKI-SOKOLOVIC 199?] E. HRUSHOVSKI & Z. SOKOLOVIC - *Minimal subsets of differentially closed fields*, preprint.
- [HRUSHOVSKI-ZIL'BER 1993] E. HRUSHOVSKI & B. ZIL'BER - *Zariski's geometries*, Bulletin AMS **28**, 315–324.
- [HRUSHOVSKI-ZIL'BER 199?] E. HRUSHOVSKI & B. ZIL'BER - *Zariski's geometries*, preprint (plus détaillé que le précédent).
- [FALTINGS 1983] G. FALTINGS - *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Inventiones Math. **73**, 349–366.
- [LANG 1965] S. LANG - *Division points on curves*, Ann. Math. Pures et Appl. **4**, 229–234.
- [LANG 1991] S. LANG - *Number theory III : Diophantine Geometry*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Springer Verlag.
- [LANG 1995] S. LANG - *Mordell's Review, Siegel's letter to Mordell, Diophantine Geometry and 20th Century Mathematics*, Gazette des Mathématiciens **63**, 17–36.
- [MACINTYRE 1971] A. MACINTYRE - *On aleph-one categorical theories of fields*, Fundamenta Mathematicae **71**, 1–25.
- [MANIN 1958] Y. MANIN - *Courbes algébriques sur un corps avec dérivation* (en russe), Izvestia Akad. Nauk SSSR **22**, 737–756.
- [MESSMER 1994] M. MESSMER - *Groups and fields interpretable in separably closed fields*, TAMS **344**, 361–377.
- [MESSMER-WOOD 1995] M. MESSMER & C. WOOD - *Separably closed fields with higher derivation I*, The Journal of Symbolic Logic **60**, 898–910.
- [POIZAT 1984] B. POIZAT - *La structure géométrique des groupes stables*, Seminarberichte **60**, Humboldt-Universität zu Berlin, 205–217.
- [POIZAT 1985] B. POIZAT - *Cours de Théorie des Modèles*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah (distribué par OFFILIB).
- [POIZAT 1987] B. POIZAT - *Groupes stables*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah (distribué par OFFILIB).
- [POIZAT 1987a] B. POIZAT - *À propos de groupes stables*, Logic Colloquium **85**, North Holland, 245–265.
- [POIZAT 1988] B. POIZAT - *MM. Borel, Tits, Zil'ber et le Général Nonsense*, The Journal of Symbolic Logic **53**, 124–131.
- [SOKOLOVIC 1992] Z. SOKOLOVIC - *Model Theory of Differential Fields*, PhD thesis, Notre Dame.
- [WEIL 1948] A. WEIL - *Variétés abéliennes et courbes algébriques*, Hermann.

[ZIL'BER 1984] B.I. ZIL'BER - *The structure of models of uncountably categorical theories*, Proceedings of the ICM-Warsaw 1983, North Holland, 359-368.

John B. GOODE

Qazaqstanyn Memlekettik Universiteti  
Qaragandy

et

Institut Girard Desargues  
Centre de Mathématiques  
URA 746 du CNRS  
Bâtiment du Doyen J. Braconnier (101)  
43, bld du 11 novembre 1918  
F-69622 VILLEURBANNE CEDEX  
E-mail : poizat@jonas.univ-lyon1.fr

# *Astérisque*

DIETER KOTSCHEK

## **The Seiberg-Witten invariants of symplectic four-manifolds**

*Astérisque*, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 812, p. 195-220

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1995-1996\\_\\_38\\_\\_195\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__195_0)

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**THE SEIBERG–WITTEN INVARIANTS OF  
SYMPLECTIC FOUR–MANIFOLDS**

[after C. H. Taubes]

by **Dieter KOTSCHICK**

Over the last ten years, the applications of gauge theory to four-dimensional differential topology and the theory of pseudo-holomorphic curves in symplectic geometry have developed in parallel. The techniques used in the two theories were strikingly similar, but the results were unrelated. Nevertheless, there was speculation that Donaldson's invariants constructed using the moduli spaces of anti-self-dual Yang–Mills connections should be non-trivial for symplectic manifolds. Donaldson proved this for Kähler manifolds, but his arguments did not seem to have a viable extension to arbitrary symplectic manifolds.

While it has been known for decades that the class of symplectic four-manifolds is strictly larger than that of Kähler surfaces, it seemed possible until 1992 that there would only be a few symplectic non-Kähler four-manifolds, and perhaps no simply connected ones. This changed drastically when Gompf introduced his symplectic sum construction and used it to show that there are slews of symplectic four-manifolds which cannot be Kähler, including many simply connected ones, and including examples which realize all finitely presentable groups as fundamental groups. Certain properties of Gompf's examples, and the partial calculations of Donaldson invariants that were carried out for a few of them, suggested that symplectic manifolds might be the building blocks for all simply connected smooth four-manifolds.

These speculations set the stage for the work of Taubes that we report on. Immediately after the introduction of the Seiberg–Witten invariants, which are close cousins of the Donaldson invariants, Taubes [18] proved that they are non-trivial for all symplectic four-manifolds. This implies some topological constraints which one expected to prove using Donaldson invariants. For example, if a symplectic four-manifold splits as a smooth connected sum, then one of the summands must have a negative definite intersection form. But there are also geometric consequences which one did not expect from Donaldson theory, for example the conclusion that a symplectic four-manifold admitting a metric of positive scalar curvature must have an almost definite intersection form.

---

The author is grateful to all the people who have contributed to his understanding of this subject – such as it is; particularly Peter Kronheimer, Tom Mrowka and, last but not least, Cliff Taubes.

Easy properties of the Seiberg–Witten invariants, together with this first result of Taubes, imply strong consequences for the classification of symplectic structures. For example, on a four–manifold with  $b_1 = 0$  and  $b_2^+ > 1$  there are at most finitely many homotopy classes of almost complex structures underlying symplectic structures, and in some cases this finiteness result can be sharpened to determine exactly which almost complex structures come from symplectic ones.

More recently, Taubes [21, 22, 23, 24] has shown that the Seiberg–Witten invariants of symplectic four–manifolds, suitably normalized, coincide with certain Gromov invariants defined by counting pseudo–holomorphic curves. This is an extremely surprising and far–reaching result, the consequences of which have not yet been fully worked out. Assuming the conjectured equivalence of the Seiberg–Witten invariants and the Donaldson invariants, Taubes’s result ties up and explains the parallel developments of Yang–Mills theory and the theory of pseudo–holomorphic curves.

We will discuss here only one part of the equivalence of the Seiberg–Witten and the Gromov invariants, namely the fact that every non–trivial Seiberg–Witten invariant of a symplectic four–manifold leads to the existence of a pseudo–holomorphic curve in a specific homology class [21, 22]. This result has two kinds of consequences. On the one hand, the topological constraints on symplectic four–manifolds can be strengthened, and the place of symplectic manifolds in four–dimensional differential topology can be elucidated further than was possible using Taubes’s first theorem only. For example, we will see that many minimal symplectic four–manifolds do not admit any non–trivial connected sum decompositions at all. On the other hand, there are consequences in symplectic geometry, without reference to differential topology. For example, Taubes’s existence theorem for pseudo–holomorphic curves combined with a result of Gromov [10] shows that the symplectic structure of the complex projective plane  $\mathbb{C}P^2$  is essentially unique.

## 1. REVIEW OF THE SEIBERG–WITTEN INVARIANTS

In this section we recall the definition of the Seiberg–Witten invariants and introduce our notation.

Consider a smooth closed oriented 4–manifold  $X$  equipped with a Riemannian metric  $g$ . The metric and orientation define a Hodge star operator

$$*: \Omega^k(X) \longrightarrow \Omega^{4-k}(X)$$

by setting

$$\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \text{dvol}_g ,$$

where on the right–hand–side we use the natural inner product induced by  $g$ . The  $*$  operator is an involution on  $\Omega^2$ , and we denote by  $\Omega_{\pm}^2$  the  $\pm 1$  eigenspaces. Accordingly we split each 2–form into its self–dual and anti–self–dual parts:  $\alpha = \alpha_+ + \alpha_-$ .

Applying this splitting to the harmonic 2-forms, we obtain a direct sum decomposition of  $H^2(X, \mathbb{R})$  into maximal subspaces on which the cup product is positive respectively negative definite. The dimensions of these subspaces are denoted by  $b_2^+$  and  $b_2^-$ .

The group  $SO(4) \times U(1)$  admits a unique non-trivial double cover

$$\rho^c: Spin^c(4) \rightarrow SO(4) \times U(1)$$

for which the preimage of each factor is connected. In fact,

$$(1) \quad Spin^c(4) = (SU(2) \times SU(2) \times U(1))/\mathbb{Z}_2.$$

Let  $P$  be the orthonormal frame bundle of  $(X, g)$  and suppose  $Q$  is a principal  $U(1)$  bundle over  $X$  with  $c_1(Q) \equiv w_2(X) \pmod{2}$ . A  $Spin^c$  structure on  $X$  with auxiliary bundle  $Q$  is a double covering of  $P \times Q$  by a principal  $Spin^c(4)$ -bundle  $\tilde{P}$ , such that the covering map is  $\rho^c$ -equivariant for the principal bundle actions<sup>1</sup>.

If one varies the metric  $g$  continuously, the frame bundle changes continuously. As the space of Riemannian metrics is path-connected and contractible, one can canonically identify the  $Spin^c$  structures defined with respect to different metrics. The equivalence classes of  $Spin^c$  structures on  $X$  form a principal homogeneous space  $Spin^c(X)$  for the group  $H^2(X, \mathbb{Z})$ .

Associated with every metric  $g$  and  $Spin^c$  structure  $\tilde{P}$  there are bundles  $V_{\pm}$  of spinors of positive and negative chirality. These are the  $U(2)$ -bundles associated with the projections  $Spin^c(4) \rightarrow U(2)$  corresponding to the two  $SU(2)$  factors in (1). We think of the spinor bundles as complex rank 2 vector bundles equipped with Hermitian metrics. The determinant bundle  $det_{\mathbb{C}}(V_{\pm}) = L$  is the Hermitian line bundle associated with  $Q$ .

Every connection  $A$  on  $Q$ , together with the Levi-Civita connection of  $P$ , induces a unique connection on  $\tilde{P}$ . The corresponding covariant derivatives on  $V_{\pm}$  are denoted by  $\nabla_A$ . As the bundles  $V_{\pm}$  are bundles of spinors, we can follow the covariant derivative by Clifford multiplication to obtain the two Dirac operators

$$D_A: V_+ \longrightarrow V_- \quad , \quad D_A^*: V_- \longrightarrow V_+.$$

They are formal  $L^2$  adjoints of each other.

The Seiberg-Witten equations are a family of pairs of coupled equations in which the variables are a connection  $A$  on  $Q$  and a section  $\phi$  of  $V_+$ , and the parameter in the equations is a self-dual 2-form  $\eta$  on  $X$  with purely imaginary values. We denote by

$$\rho: \Omega_+^2(X, \mathbb{C}) \longrightarrow End_{\mathbb{C}}(V_+)$$

the bundle map induced by the action of the self-dual 2-forms by Clifford multiplication on  $V_+$ . Further, we denote by

$$\sigma: V_+ \otimes V_+ \longrightarrow End_{\mathbb{C}}(V_+)$$

---

<sup>1</sup> $Spin^c$  structures always exist on 4-manifolds, because the second Stiefel-Whitney class  $w_2(X)$  always lifts to an integral class.

the bundle map induced by the  $U(2)$ -equivariant map

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) \\ (\phi, \psi) &\longmapsto \phi \otimes \psi^* - \frac{1}{2}(\text{Tr}(\phi \otimes \psi^*))\text{Id} . \end{aligned}$$

The Seiberg–Witten equations are:

$$\begin{aligned} (2) \quad & D_A \phi = 0 , \\ (3) \quad & \rho(F_A^+) = \sigma(\phi, \phi) + \rho(\eta) . \end{aligned}$$

We shall refer to these equations as the Dirac and curvature equations respectively.

To see that the curvature equation makes sense, observe that the Lie algebra of  $U(1)$  is  $i\mathbb{R}$ , so the curvature  $F_A$  of  $A$  is a purely imaginary 2-form. Its self-dual part is mapped to the trace-less endomorphisms of  $V_+$  by  $\rho$ . Moreover, the natural real structure on  $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$  is that of  $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ , so  $\rho^{-1}\sigma(\phi, \phi)$  is also a purely imaginary self-dual 2-form.

A configuration  $(A, \phi)$  is called reducible if  $\phi \equiv 0$ , and is called irreducible otherwise.

The gauge group  $\mathcal{G} = \text{Map}(X, U(1)) = \text{Aut}(Q)$  acts on pairs  $(A, \phi)$  by

$$u(A, \phi) = ((u^2)^* A, u^{-1} \phi) ,$$

and on  $(\eta, \psi) \in \Omega_+^2(i\mathbb{R}) \times \Gamma(V_-)$  by

$$u(\omega, \psi) = (\omega, u^{-1} \psi) .$$

FACT 1.1. — *The Seiberg–Witten equations are equivariant with respect to this action. The moduli space of solutions modulo gauge equivalence is denoted by  $\mathcal{M}$ . It is a subvariety of  $\mathcal{B}$ , the space of configurations  $(A, \phi)$  modulo the action of  $\mathcal{G}$ .*

FACT 1.2 ([14]). — *For every fixed  $g$  and  $\eta$ , the moduli space  $\mathcal{M}$  is compact.*

*Proof.* The Weitzenböck formula<sup>2</sup> for the Dirac operator is

$$(4) \quad D_A^* D_A \phi = \nabla_A^* \nabla_A \phi + \frac{1}{4}s\phi + \frac{1}{2}\rho(F_A^+)\phi ,$$

where  $s$  is the scalar curvature function of  $g$ . Using this and the equations, the maximum principle gives a  $C^0$  bound on  $\phi$  in terms of  $s$  and  $\eta$ , for every solution of the Seiberg–Witten equations for  $(g, \eta)$ . Compactness follows from this a priori estimate using standard arguments (Sobolev embedding and multiplication theorems, bootstrap using the equations).  $\square$

FACT 1.3. — *When considered on  $\mathcal{B}$ , the Seiberg–Witten equations are elliptic.*

One can thus apply the usual techniques of non-linear analysis to study  $\mathcal{M}$ . For example, the Sard–Smale theorem implies:

<sup>2</sup>The sign of the curvature term  $\rho(F_A^+)$  is wrong in [14], and in [5]. Therefore, to get compactness, those papers change the sign of  $\sigma(\phi, \phi)$  in the curvature equation (3).

FACT 1.4. — *If  $b_2^+(X) > 0$ , then for a generic metric  $g$  and a generic  $g$ -self-dual form  $\eta$ , the moduli space  $\mathcal{M}$  is either empty, or is a smooth submanifold of  $\mathcal{B}^*$ , the space of gauge equivalence classes of irreducible configurations.*

Smoothness means that  $\mathcal{M}$  is cut out transversely by the equations. When  $\mathcal{M}$  is non-empty and smooth, its dimension is given by the Fredholm index of the linearized equations. This index can be calculated from the Atiyah–Singer index theorem:

FACT 1.5. — *If  $\mathcal{M}$  is non-empty and smooth, then it has dimension*

$$d(Q) = \frac{1}{4}(\langle c_1^2(Q), [X] \rangle - (2\chi(X) + 3\sigma(X))) ,$$

where  $\chi$  and  $\sigma$  denote the Euler characteristic and signature.

FACT 1.6. — *If  $b_2^+(X) > 0$ , then for a generic metric  $g$  and a generic  $g$ -self-dual form  $\eta$ , there are only finitely many  $Spin^c$  structures for which the moduli space  $\mathcal{M}$  is non-empty.*

*Proof.* Suppose that for a given  $Spin^c$  structure there is a solution of the Seiberg–Witten equation. Using the a priori estimate obtained in the proof of the compactness of the moduli space, the Chern–Weil formula for  $\langle c_1^2(L), [X] \rangle$  and the assumption  $d(Q) \geq 0$ , one sees that there are only finitely many choices for  $c_1(L) = c_1(Q)$ . For each fixed  $Q$ , there are only finitely many  $\tilde{P}$ .  $\square$

FACT 1.7. — *The moduli space  $\mathcal{M}$  is orientable, and an orientation is specified by choosing a homology orientation of  $X$ , i.e., an orientation  $\alpha_X$  of the line*

$$H^0(X, \mathbb{R}) \otimes (\Lambda^{b_1(X)} H^1(X, \mathbb{R}))^* \otimes \Lambda^{b_2^+(X)} H_+^2(X, \mathbb{R}) ,$$

where  $H_+^2(X, \mathbb{R})$  denotes a maximal positive definite subspace of  $H^2(X, \mathbb{R})$  for the cup product.

Varying the choice of a maximal positive definite subspace does not affect the definition of  $\alpha_X$ , as the space of maximal positive definite subspaces is connected and contractible.

Putting all these properties together we have a definition of the Seiberg–Witten invariants  $SW_{X, \alpha_X}$ , by sending a  $Spin^c$  structure to the fundamental homology class of  $\mathcal{M}$ :

THEOREM 1.8. — *Let  $X$  be a smooth closed oriented 4-manifold with  $b_2^+(X) > 1$ ; and let  $\alpha_X$  be a homology orientation. Then*

$$\begin{aligned} SW_{X, \alpha_X} : Spin^c(X) &\longrightarrow H_*(\mathcal{B}_X^*, \mathbb{Z}) \\ \tilde{P} &\longmapsto [\mathcal{M}] \end{aligned}$$

is a diffeomorphism invariant of  $X$ .

More precisely, if  $f : X \rightarrow Y$  is an orientation-preserving diffeomorphism, then

$$SW_{X, f^* \alpha_Y} \circ f^* = f^* \circ SW_{Y, \alpha_Y} .$$

*Proof.* By Fact 1.4, for a generic choice of  $(g, \eta)$  the moduli space  $\mathcal{M}$  is a smooth submanifold of  $\mathcal{B}^*$  (possibly empty). As it is also compact and oriented, it has a fundamental class. The assumption that  $b_2 hX > 1$  ensures that the space of generic pairs  $(g, \eta)$  is path-connected. The parametrised moduli space of solutions for a generic path connecting two generic choices provides a homology between the fundamental classes of the moduli spaces corresponding to those two choices. Thus  $[\mathcal{M}]$  is independent of choices and depends only on  $(X, \alpha_X)$  and on the  $Spin^c$  structure under consideration.

To understand the diffeomorphism invariance, notice that  $\mathcal{B}_X^*$  has the weak homotopy type of a classifying space for the gauge group, which is a homotopy invariant of  $X$ . (And is independent of the  $Spin^c$  structure.) Thus  $f$ , like every homotopy equivalence, induces an isomorphism between  $H_*(\mathcal{B}_X^*, \mathbb{Z})$  and  $H_*(\mathcal{B}_Y^*, \mathbb{Z})$ . The map  $SW$  commutes with  $f^*$  as stated because one can pull back to  $X$  a generic pair  $(g, \eta)$  used to calculate an invariant of  $Y$ . This then gives the same calculation on  $X$ .  $\square$

FACT 1.9. — *The description of  $\mathcal{B}_X^*$  as a classifying space for the gauge group shows that it is weakly homotopy equivalent to  $\mathbb{C}P^\infty \times J(X)$ , where  $J(X) = H^1(X, \mathbb{R})/H^1(X, \mathbb{Z})$  is the Jacobean torus of  $X$ .*

Fact 1.6 implies:

LEMMA 1.10. — *For every smooth closed oriented 4-manifold there are at most finitely many  $Spin^c$  structures with a non-trivial Seiberg–Witten invariant.*

Here is a general vanishing theorem for the Seiberg–Witten invariants.

THEOREM 1.11 (Witten [28]). — *Let  $X$  be a smooth closed oriented 4-manifold with  $b_2^+ > 1$ . If  $X$  admits a metric of positive scalar curvature, or if it admits a smooth connected sum decomposition  $X = X_1 \# X_2$  with  $b_2^+(X_i) > 0$  for both  $i = 1, 2$ , then  $SW_{X, \alpha_X}$  is the zero map.*

*Proof.* If  $X$  admits a metric  $g$  of positive scalar curvature, then the Weitzenböck formula (4) shows that all solutions to the Seiberg–Witten equations with  $\eta = 0$  must be reducible. But  $s > 0$  is an open condition in the space of metrics, so we may assume that  $g$  is generic and there are no reducible solutions, cf. Fact 1.4.

The proof of the vanishing theorem for connected sums is completely analogous to, but simpler than, the corresponding result for Donaldson invariants. See [5].  $\square$

## 2. THE SEIBERG–WITTEN EQUATIONS ON AN ALMOST COMPLEX MANIFOLD

### 2.1. Arbitrary almost complex manifolds

Let  $X$  be a smooth oriented 4-manifold equipped with an almost complex structure  $J$ . We consider a  $J$ -invariant Riemannian metric  $g$ , called an almost Hermitian metric.

Define the fundamental 2-form  $\omega$  corresponding to  $J$  and  $g$  by

$$(5) \quad \omega(X, Y) = g(JX, Y) .$$

This is a  $J$ -invariant  $g$ -self-dual form of length  $\sqrt{2}$ . Any two elements of the triple  $(J, g, \omega)$  determine the third one. For example, one can recover  $J$  from  $g$  and  $\omega$  because for every 1-form  $a$  we have

$$J(a) = *(\omega \wedge a) .$$

We extend  $J$  complex linearly to  $TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  and  $T^*X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  and split these bundles into the  $\pm i$  eigenbundles. For example, we write

$$\Lambda^1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}$$

and decompose every 1-form accordingly as  $a = a^{1,0} + a^{0,1}$ . This splitting induces a decomposition of all the complex differential forms into types, just like in the case of complex manifolds. In particular, we obtain:

$$(6) \quad \Lambda_{\pm}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}\omega \oplus \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2} ,$$

which corresponds to the real decomposition  $\Lambda_{\pm}^2 = \mathbb{R} \oplus K^{\pm 1}$ , where  $K = \Lambda^{2,0}$  is the canonical bundle of the almost complex structure.

Like in the case of complex manifolds, one defines operators  $\partial, \bar{\partial}$  by setting  $\partial\alpha = (d\alpha)^{p+1,q}$  and  $\bar{\partial}\alpha = (d\alpha)^{p,q+1}$  for a form  $\alpha \in \Lambda^{p,q}$ . In general,  $d \neq \partial \oplus \bar{\partial}$ , as  $d\alpha$  can also have components of type  $(p-1, q+2)$  and  $(p+2, q-1)$ , denoted  $\bar{N}\alpha$  and  $N\alpha$  respectively. The operator  $N$  is of order zero and can be identified with the Nijenhuis tensor of  $J$ ; it vanishes if and only if  $J$  is integrable. Observe that  $d^2 = 0$  does not imply  $\bar{\partial}^2 = 0$ , unless  $J$  is integrable. For example, on functions we have

$$(7) \quad \bar{\partial}^2 f = -N(\partial f) .$$

An almost complex structure defines a homotopy class of reductions of the structure group of  $TX$  to  $U(2)$ . The map  $i \times \det: U(2) \rightarrow SO(4) \times U(1)$  lifts to  $Spin^c(4)$ , which implies:

**FACT 2.1.** — *An almost complex manifold has a canonical  $Spin^c$  structure with  $L = \det_{\mathbb{C}}(V_{\pm}) = \det_{\mathbb{C}}(TX, J) = K^{-1} = \Lambda^{0,2}$ .*

This is given concretely by setting  $V_+^{\text{can}} = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}$  and  $V_-^{\text{can}} = \Lambda^{0,1}$  and by defining Clifford multiplication by a 1-form  $a$  on  $(\alpha, \beta) \in \Gamma(\Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2})$  by

$$\gamma(a)(\alpha, \beta) = \sqrt{2}(a^{0,1} \wedge \alpha - *(a^{1,0} \wedge *\beta)) ,$$

and on  $\psi \in \Gamma(\Lambda^{0,1})$  by

$$\gamma(a)(\psi) = \sqrt{2}(-*(a^{1,0} \wedge *\psi) , a^{0,1} \wedge \psi) .$$

Using this  $Spin^c$  structure defined by the almost complex structure as a reference, we identify  $Spin^c(X) = H^2(X, \mathbb{Z})$ . The spinor bundles for the  $Spin^c$  structure corresponding

to  $E$  are given by  $V_+^{\text{can}} \otimes E = E \oplus (E \otimes K^{-1})$  and by  $V_-^{\text{can}} \otimes E = \Lambda^{0,1} \otimes E$ . Thus we write the Seiberg–Witten invariant as a map

$$SW_{X,\alpha_X} : H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(\mathcal{B}_X^*, \mathbb{Z}) .$$

This map is no longer diffeomorphism invariant, because an orientation–preserving self–diffeomorphism of  $X$  will not usually fix the given almost complex structure, or its associated  $Spin^c$  structure. Compare Theorem 1.8.

If  $\phi$  is a spinor with components  $(\alpha, \beta)$  with respect to the splitting  $V_+ = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}$ , then  $\sigma(\phi, \phi)$  is given by

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(|\alpha|^2 - |\beta|^2) & \alpha\bar{\beta} \\ \bar{\alpha}\beta & -\frac{1}{2}(|\alpha|^2 - |\beta|^2) \end{pmatrix}$$

Applying  $\rho^{-1}$  and comparing this formula with the decomposition of  $\Lambda_+^2$  given in (6), we find that the curvature equation for a connection  $A$  on  $K^{-1}$  and a pair  $(\alpha, \beta) \in \Gamma(V_+^{\text{can}})$  is equivalent to the following two equations:

$$(8) \quad F_A^\omega = \frac{i}{4}(|\alpha|^2 - |\beta|^2)\omega + \eta^\omega$$

$$(9) \quad F_A^{0,2} = \frac{1}{2}\bar{\alpha}\beta + \eta^{0,2} ,$$

where in the first equation  $F_A^\omega$  denotes the part of  $F_A$  parallel to  $\omega$ , which is the same as the  $(1, 1)$  component of  $F_A^+$ .

Fix a connection  $A_0$  on  $\Lambda^{0,2}$  and consider the connection induced on  $V_\pm^{\text{can}}$  by lifting from  $SO(4) \times U(1)$  to  $Spin^c(4)$ , as explained in Section 1.

We obtain a connection on  $V_+(E) = V_+^{\text{can}} \otimes E$  as the product of the connection induced by  $A_0$  with some connection  $B$  on  $E$ . We often think of  $B$  as one of the variables in the Seiberg–Witten equations, instead of thinking of the corresponding connection  $A = A_0 \otimes B^2$  on the determinant  $L = K^{-1} \otimes E^2$ . Notice that if we take  $E = 0$ , then the device of twisting by  $B$  is just the same as varying the connection for the canonical  $Spin^c$  structure.

In the twisted case, we again decompose  $\phi = (\alpha, \beta)$ , but now the forms  $\alpha$  and  $\beta$  take values in  $E$ . However, the formula for  $\sigma(\phi, \phi)$  is still true for the bundle–valued forms.

**FACT 2.2.** — *For  $A = A_0 \otimes B^2$  and  $\phi = (\alpha, \beta)$ , the curvature equation (3) is equivalent to the following two equations:*

$$(10) \quad F_B^\omega = \frac{i}{8}(|\alpha|^2 - |\beta|^2)\omega - \frac{1}{2}F_{A_0}^\omega + \frac{1}{2}\eta^\omega$$

$$(11) \quad F_B^{0,2} = \frac{1}{4}\bar{\alpha}\beta - \frac{1}{2}F_{A_0}^{0,2} + \frac{1}{2}\eta^{0,2} .$$

We will not write out the Dirac equation on an arbitrary almost complex manifold. Notice however that, by definition, the symbol of the Dirac operator is the same as the

symbol of the Dolbeault operator  $\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)$ , which means that the two differ only by a term of order zero. This zero order term can be written down explicitly, see [7].

## 2.2. Symplectic manifolds

The fundamental two-form  $\omega$  of an almost Hermitian metric is always non-degenerate. Thus, if it is also closed, then it is a symplectic form. Conversely, given a symplectic structure on a manifold  $X$ , it determines a homotopy class of almost complex structures  $J$ . In this homotopy class we can select a  $J$  which makes  $X$  almost Hermitian with the metric defined by (5). We say that such an almost complex structure calibrates the symplectic structure.

DEFINITION 2.3. — *An almost Hermitian structure is called almost Kähler if  $d\omega = 0$ .*

All the symplectic manifolds we consider are assumed to be equipped with almost Kähler metrics.

It is important in the proof of Taubes's theorems that on an almost Kähler manifold a number of identities involving the natural differential operators derived from the metric hold, just like in the case of Kähler manifolds. For example, in Weil's book [27], the "Kähler identities" are proved for almost Kähler manifolds, although in the more recent literature this is not usually done. An exception is Donaldson's article [4], which contains the rudiments of harmonic theory on almost Kähler manifolds.

Here is a useful Weitzenböck formula familiar in the Kähler case:

LEMMA 2.4. — *Let  $s$  be a smooth section of a Hermitian line bundle  $E$  over an almost Kähler manifold  $X$ . Let  $B$  be a Hermitian connection on  $E$ , and let  $\bar{\partial}_B$  be the  $\bar{\partial}$  operator of the almost Kähler structure coupled to  $B$ . Then*

$$(12) \quad \bar{\partial}_B^* \bar{\partial}_B s = \frac{1}{2} (d_B^* d_B s - i \Lambda F_B s),$$

where  $\Lambda$  denotes the contraction with the fundamental 2-form  $\omega$ .

*Proof.* By the definition of  $\bar{\partial}$ , we have

$$\bar{\partial}_B s = (d_B s)^{0,1} = \frac{1}{2} (d_B s + i J d_B s) = \frac{1}{2} (d_B s + i * (\omega \wedge d_B s)),$$

and thus

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_B^* \bar{\partial}_B s &= \frac{1}{2} d_B^* (d_B s + i * (\omega \wedge d_B s)) = \frac{1}{2} (d_B^* d_B s - i * d_B (\omega \wedge d_B s)) \\ &= \frac{1}{2} (d_B^* d_B s - i * (\omega \wedge d_B^2 s)) = \frac{1}{2} (d_B^* d_B s - i * (\omega \wedge F_B s)) \\ &= \frac{1}{2} (d_B^* d_B s - i \Lambda F_B s). \end{aligned}$$

□

Formula (12) will be applied to  $\alpha$  in the decomposition  $\phi = (\alpha, \beta)$  discussed in the previous subsection. We shall also need a Weitzenböck formula for  $\beta$ .

On the line bundle  $\Lambda^{0,2}$  there is a Hermitian connection  $A_1$ , unique up to gauge equivalence, such that  $\nabla_{A_1}^{1,0} = \partial$ . Twisting by a Hermitian line bundle  $E$  with connection  $B$ , we have  $\nabla_{A_1 \otimes B}^{1,0} = \partial_B$ . On  $(0, 2)$  forms the Kähler identities give

$$\partial^* \partial = i[\Lambda, \bar{\partial}] \partial = -i \bar{\partial} \Lambda \partial = \bar{\partial}(-i[\Lambda, \partial]) = \bar{\partial} \bar{\partial}^* .$$

On the other hand, we can calculate  $\partial^* \partial \beta$  like in the proof of the previous Lemma. We obtain:

LEMMA 2.5. — Let  $\beta$  be a  $(0, 2)$  form with values in a Hermitian line bundle  $E$  with connection  $B$ . Then:

$$(13) \quad \bar{\partial}_B \bar{\partial}_B^* \beta = \frac{1}{2} (\nabla_{A_1 \otimes B}^* \nabla_{A_1 \otimes B} \beta + i\Lambda(F_{A_1} + F_B)\beta) .$$

We remarked in the previous subsection that the Dirac operator for the canonical  $Spin^c$  structure of an almost Hermitian manifold differs from its Dolbeault operator only by a term of order zero. In the almost Kähler case, this zero order term vanishes for some choice of connection  $A_0$  on  $\Lambda^{0,2}$ . Again, this is familiar in the Kähler case, where  $A_0$  is the holomorphic connection induced by the Levi-Civita connection. One can always choose local holomorphic coordinates in which the Kähler metric is standard up to second order, and thus the equality of the two operators must be true because it is true on flat space.

In general, the zero order operator which is the difference between the Dirac and Dolbeault operators is a bundle homomorphism  $V_+ \rightarrow V_-$ , i.e., a section of

$$(\Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{2,0}) \otimes \Lambda^{0,1} = \Lambda^{0,1} \oplus \Lambda^{2,1} .$$

The deviation of the almost Kähler metric from being Kähler is measured by the torsion  $\nabla\omega$ , where  $\nabla$  is the connection induced on  $\Lambda_+^2$  by the Levi-Civita connection. As  $\omega$  has constant length,  $\nabla\omega$  is orthogonal to  $\omega$ , thus  $\nabla\omega \in \Lambda^1 \otimes (\Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2})$ . Decomposing the tensor product we find

$$(\Lambda^1 \otimes \mathbb{C}) \otimes (\Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2}) = \Lambda^{2,1} \oplus \Lambda^{1,2} \oplus \Lambda^{3,0} \oplus \Lambda^{0,3} \oplus A \oplus \bar{A} ,$$

where  $A$  is a  $U(2)$ -module not containing any  $\Lambda^{p,q}$ . (Notice that because  $X$  is 4-dimensional,  $\Lambda^{3,0} = \Lambda^{0,3} = 0$ .) Now  $d\omega = 0$  is equivalent to  $\nabla\omega$  having no component which can act as a homomorphism from  $(\Lambda^1 \otimes \mathbb{C}) \otimes \Lambda^{0,\text{even}}$  to  $\Lambda^{0,\text{odd}}$ . Thus, the Dolbeault and Dirac operators for the canonical  $Spin^c$  structure are equal for a connection  $A_0$  for which the difference is a linear function of the torsion  $\nabla\omega$ . This will still be true after twisting by a line bundle  $E$  with connection  $B$ , because the space of homomorphisms  $Hom(V_+, V_-)$  is canonically the same for all  $Spin^c$  structures.

To find the connection  $A_0$  we can proceed as follows. The identification  $V_+^{\text{can}} = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}$  can be made explicit by fixing a section  $u_0 \in \Gamma(V_+^{\text{can}})$  of constant length, and then letting the 0- and  $(0, 2)$ -forms act on  $u_0$  by Clifford multiplication. We fix  $A_0$  (up to gauge

equivalence) by requiring that  $\nabla_{A_0} u_0 \in \Lambda^1 \otimes \Lambda^{0,2}$ . Then applying the Dirac operator  $D_{A_0}$  to the equation  $\rho(\omega)u_0 = -2iu_0$  implies, because  $\omega$  is self-dual harmonic, that  $D_{A_0}u_0 = 0$ , which in turn implies, via the Leibnitz rule, that  $D_{A_0}(\alpha u_0) = \sqrt{2}\bar{\partial}\alpha$ . Similarly,  $D_{A_0}\beta = \sqrt{2}\bar{\partial}^*\beta$ .

We have shown that the first Seiberg–Witten equation, the Dirac equation (3), can be written as

$$(14) \quad \bar{\partial}_B\alpha + \bar{\partial}_B^*\beta = 0 .$$

### 3. TAUBES’S THEOREMS

#### 3.1. Symplectic manifolds with $b_2^+ > 1$

Following Taubes, we shall calculate Seiberg–Witten invariants of symplectic 4–manifolds using almost Kähler metrics. But first, we make a remark following Witten [28]:

FACT 3.1. — *In the notation of the previous section,  $SW_{X,\alpha_X}(E) = \pm SW_{X,\alpha_X}(K - E)$ .*

*Proof.* The Seiberg–Witten equations with  $\eta = 0$  are invariant under the involution  $E \mapsto K \otimes E^{-1}$  using  $(B, \alpha, \beta) \mapsto (A_0^{-1} \otimes B^{-1}, -\bar{\beta}, \bar{\alpha})$ .

In the Kähler case this is a manifestation of Serre duality.  $\square$

The following theorem is a combination of theorems which first appeared in [18] and [19], with a more complicated proof. The argument below (in different notation) was sketched by Taubes in [20], and it is also implicit in his later paper [21]. However, our presentation is closer to [5].

THEOREM 3.2 (Taubes). — *Let  $X$  be a closed symplectic 4–manifold with  $b_2^+(X) > 1$ , and let  $K$  be its canonical class. Then  $SW_{X,\alpha_X}(0)$  and  $SW_{X,\alpha_X}(K)$  are both equal to  $\pm 1 \in H_0(\mathcal{B}_X^*, \mathbb{Z})$ .*

*Moreover, if  $E$  is any class with  $SW_{X,\alpha_X}(E) \neq 0$ , then*

$$0 \leq E \cdot [\omega] \leq K \cdot [\omega] ,$$

*with equality if and only if  $E = 0$  or  $E = K$ .*

*Proof.* Using the symmetry property above, it suffices to prove  $SW_{X,\alpha_X}(0) = \pm 1$ , and  $0 \leq E \cdot [\omega]$  for all  $E$  with a non-trivial invariant, together with the characterisation of equality in this case.

We consider the Seiberg–Witten equations for the canonical  $Spin^c$  structure twisted by  $E$ , and we choose  $\eta$  such that the equations become

$$(15) \quad \bar{\partial}_B\alpha = -\bar{\partial}_B^*\beta ,$$

$$(16) \quad F_B^\omega = \frac{i}{8}(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - r)\omega$$

$$(17) \quad F_B^{0,2} = \frac{1}{4}\bar{\alpha}\beta ,$$

with  $r \in \mathbb{R}$  a constant.

Notice that if  $E = 0$  and  $r \geq 0$ , then these equations always admit a solution with  $B$  the trivial connection,  $\beta = 0$  and  $\alpha$  a constant section of squared length  $r$ . The main point of the proof of the theorem is to show that this is the only solution if  $c_1(E) \cdot [\omega] = 0$ .

If  $E$  has a non-trivial Seiberg–Witten invariant, then for all metrics and all choices of  $\eta$  (here: all choices of  $r$ ) there must exist a solution to the equations. Let  $(B, \alpha, \beta)$  be a solution. Using the Weitzenböck formula (12) applied to  $\alpha$  and taking the  $L^2$  inner product with  $\alpha$ , we find:

$$(18) \quad \int_X |d_B \alpha|^2 dvol_g = \int_X (\langle 2\bar{\partial}_B^* \bar{\partial}_B \alpha, \alpha \rangle + i\Lambda F_B |\alpha|^2) dvol_g .$$

We calculate the two terms on the right-hand-side separately using the equations. Using (15), (7) and (17), the first term is:

$$\begin{aligned} \int_X \langle 2\bar{\partial}_B^* \bar{\partial}_B \alpha, \alpha \rangle dvol_g &= \int_X -2\langle \bar{\partial}_B^* \bar{\partial}_B \beta, \alpha \rangle dvol_g = \int_X -2\langle \beta, \bar{\partial}_B^2 \alpha \rangle dvol_g \\ &= \int_X (-2\langle \beta, F_B^{0,2} \alpha \rangle + 2\langle \beta, N(\partial_B \alpha) \rangle) dvol_g \\ &= \int_X (-\frac{1}{2}|\alpha|^2 |\beta|^2 + 2\langle \beta, N(\partial_B \alpha) \rangle) dvol_g . \end{aligned}$$

Using (16), the second term is:

$$\int_X i\Lambda F_B |\alpha|^2 dvol_g = \int_X -\frac{1}{4}(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - r)|\alpha|^2 dvol_g .$$

Substituting back in equation (18) and rearranging, we have

$$(19) \quad \int_X (|d_B \alpha|^2 + \frac{1}{4}|\alpha|^2 |\beta|^2 + \frac{1}{4}(|\alpha|^2 - r)^2 + \frac{1}{4}r(|\alpha|^2 - r)) dvol_g = \int_X 2\langle \beta, N(\partial_B \alpha) \rangle dvol_g .$$

Now we express the last term on the left-hand-side in a different way using the Chern–Weil formula:

$$(20) \quad c_1(E) \cdot [\omega] = \int_X \frac{i}{2\pi} F_B \wedge \omega = -\frac{1}{8\pi} \int_X (|\alpha|^2 - |\beta|^2 - r) dvol_g .$$

We can also estimate the right-hand-side of equation (19) using the Peter Paul inequality:

$$(21) \quad \int_X 2\langle \beta, N(\partial_B \alpha) \rangle dvol_g \leq \int_X (\frac{1}{2}|d_B \alpha|^2 + C|\beta|^2) dvol_g ,$$

where  $C > 0$  is a constant which depends on the geometry of the almost Kähler metric, but does not depend on  $(B, \alpha, \beta)$ , or on  $r$ . Substituting back in equation (19), we obtain

$$(22) \quad \int_X (\frac{1}{2}|d_B \alpha|^2 + \frac{1}{4}|\alpha|^2 |\beta|^2 + \frac{1}{4}(|\alpha|^2 - r)^2 + \frac{1}{4}r|\beta|^2) dvol_g - 2\pi r c_1(E) \cdot [\omega] \leq C \int_X |\beta|^2 dvol_g .$$

Choosing  $r > 4C$ , we conclude that  $c_1(E) \cdot [\omega] \geq 0$ . Moreover, if  $c_1(E) \cdot [\omega] = 0$  then the last inequality shows that  $\beta = 0$ ,  $|\alpha|^2 = r$  and  $d_B \alpha = 0$ . This shows that  $B$  is the trivial connection, and  $E = 0$ . All the solutions of this form are clearly gauge equivalent to one

another. For a generic  $r$  which is large enough, this solution is cut out transversely by the Seiberg–Witten equations. Thus  $SW_{X,\alpha_X}(0) = \pm 1$ .

This completes the proof of the theorem, because of the symmetry 3.1.  $\square$

Thus,  $SW_{X,\alpha_X}(E) \neq 0$  implies  $E \cdot [\omega] \geq 0$ , with equality only if  $E = 0$ . Analysing the above argument for  $E \neq 0$  leads, after a lot of work, to the following:

**THEOREM 3.3** (Taubes [21, 22]). — *Let  $X$  be a closed symplectic 4–manifold with  $b_2^+(X) > 1$ , and let  $E \in H^2(X, \mathbb{Z})$  be a class with  $E \neq 0$  and  $SW_{X,\alpha_X}(E) \neq 0$ . Then, for the almost complex structure associated with an almost Kähler metric on  $X$ , there is a pseudo-holomorphic curve Poincaré dual to  $E$ .*

*Sketch of proof.* Due to lack of space and time, we cannot hope to do justice to the proof. We will only make a few general remarks on the structure of the argument, and indicate how to rewrite Taubes’s proof [22] in the notation of Section 2 above.

One considers the same perturbation of the equations as in the proof of Theorem 3.2, and makes the parameter  $r \in \mathbb{R}$  large. But now  $c_1(E) \cdot [\omega] > 0$ , so the inequality (22) does not imply  $\beta = 0$ , no matter how large  $r$  is. All we get, is that

$$\int_X |d_B \alpha|^2 dvol_g, \int_X |\alpha|^2 |\beta|^2 dvol_g, \int_X (|\alpha|^2 - r)^2 dvol_g, \int_X (r - C) |\beta|^2 dvol_g$$

are bounded above by uniform multiples of  $rc_1(E) \cdot [\omega]$ . The bound on the third term implies that, as  $r \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{\sqrt{r}}\alpha$  approaches a section of  $E$  of constant length = 1. (In the proof of Theorem 3.2, this happened for finite large  $r$ .) However, the estimate above is only in  $L^2$ , and we know that because  $E$  is non-trivial the section  $\alpha$  must vanish somewhere.

Consider now the Weitzenböck formula (13). Taking the  $L^2$  inner product with  $\beta$  and using the equations as in the proof of Theorem 3.2, we obtain:

$$(23) \quad \int_X (|\nabla_{A_1 \otimes B} \beta|^2 + \frac{1}{4}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + r)|\beta|^2 + f|\beta|^2) dvol_g = \int_X 2\langle N(\partial_B \alpha), \beta \rangle dvol_g,$$

where the term with the unknown function  $f$  corresponds to the curvature of  $A_1$  in the Weitzenböck formula. This function is independent of  $(B, \alpha, \beta)$  and independent of  $r$ . Estimating the right-hand-side using the Peter Paul inequality we find:

$$(24) \quad \int_X (|\nabla_{A_1 \otimes B} \beta|^2 + \frac{1}{4}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)|\beta|^2 + (\frac{1}{8}r + f)|\beta|^2) dvol_g \leq \frac{C'}{r} \int_X |\partial_B \alpha|^2 dvol_g,$$

where  $C'$  is a constant depending on the geometry of the base manifold which is independent of  $(B, \alpha, \beta)$  and independent of  $r$ .

Going back to the Weitzenböck formula (13), we have

$$2 \int_X |\bar{\partial}_B^* \beta|^2 dvol_g = \int_X (|\nabla_{A_1 \otimes B} \beta|^2 - \frac{1}{4}(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - r)|\beta|^2 + f|\beta|^2) dvol_g \leq \frac{2C'}{r} \int_X |\partial_B \alpha|^2 dvol_g,$$

where the last inequality follows from (24). Using the Dirac equation, we have

$$\int_X |\bar{\partial}_B \alpha|^2 dvol_g = \int_X |\bar{\partial}_B^* \beta|^2 dvol_g \leq \frac{C'}{r} \int_X |\partial_B \alpha|^2 dvol_g .$$

This shows that as  $r$  becomes large,  $\alpha$  tends to become holomorphic. (Again, this happened for finite  $r$  in the proof of Theorem 3.2.) Note that in the case when  $(X, \omega)$  is Kähler, the right-hand-side of (23) vanishes, so that for  $r$  large one does find that  $\beta$  vanishes identically and  $\alpha$  is a holomorphic section of  $E$ , whose zero-set is the desired holomorphic curve.

In the almost Kähler situation, it seems impossible to find a finite  $r$  for which the  $\alpha$  component of the spinor in a solution to the Seiberg–Witten equations is necessarily holomorphic. Therefore, Taubes [22] considers the limiting behaviour of the zero-locus of  $\alpha$  as  $r \rightarrow \infty$  and shows that the zero-locus converges, as a current, to a pseudo-holomorphic curve. This involves delicate pointwise estimates on the solutions. The first of these estimates can be obtained from the Weitzenböck formulae (12) and (13) without integrating over the manifold. Then a term like  $\langle d_B^* d_B \alpha, \alpha \rangle$  becomes  $\frac{1}{2} \Delta |\alpha|^2 + |d_B \alpha|^2$ , and similarly for the equation involving  $\beta$ .

Defining  $u = 1 - \frac{1}{r} |\alpha|^2 - \frac{1}{C_1} |\beta|^2 + \frac{C_2}{r}$ , the two Weitzenböck formulae together show that the positive constants  $C_1$  and  $C_2$  can be chosen in such a way that  $2\Delta u + |\alpha|^2 u \geq 0$  (using Peter Paul judiciously). Therefore, the “minimum principle” implies  $u \geq 0$  everywhere on  $X$ . This gives the first of a whole series of delicate pointwise estimates that go into controlling the limit of the zero-set of  $\alpha$  as  $r \rightarrow \infty$ .  $\square$

*Remark 3.4.* — In the statements of Theorems 3.2 and 3.3 in Taubes’s papers [18, 19, 21, 22], more restrictive Seiberg–Witten invariants are considered than we have used here. Taubes only considers the  $\mathbb{C}P^\infty$  factor in the homology of  $\mathcal{B}^*$ , and ignores the Jacobean torus, compare Fact 1.9. The proofs are valid in the generality stated here because they only use the existence of solutions for all metrics and all perturbations, without reference to the homology class of the moduli space. However, we will see in Theorem 4.11 that, as a consequence of Theorem 3.3, the only non-trivial Seiberg–Witten invariants of symplectic manifolds arise from zero-dimensional moduli spaces, so that our statements are, a posteriori, no more general than Taubes’s.

### 3.2. The case of $\mathbb{C}P^2$

There are versions of Theorems 3.2 and 3.3 when the base manifold has  $b_2^+ = 1$ . We discuss only the case when  $X$  has the rational homology the complex projective plane  $\mathbb{C}P^2$ .

For  $X$  with  $b_2^+(X) = 1$  and  $b_2^-(X) = 0$ , the Seiberg–Witten equations (2) and (3) with  $\eta = 0$  define a metric-independent invariant

$$(25) \quad SW_{X, \alpha_X} : Spin^c(X) \longrightarrow H_*(\mathcal{B}_X^*, \mathbb{Z}) .$$

To see this, examine the proof of Theorem 1.8. There the assumption  $b_2^+(X) > 1$  only enters to avoid reducible solutions to the equations appearing for a generic 1-parameter family  $(g, \eta)$ . For a reducible solution  $(A, 0)$  to the equations with  $\eta = 0$ ,  $F_A$  is an anti-self-dual harmonic 2-form representing  $c_1(Q)$ . But if  $b_2^-(X) = 0$ , then for any metric the only anti-self-dual harmonic form is  $= 0$ . On the other hand,  $c_1(Q)$  is an odd multiple of the generator in  $H^2(X, \mathbb{Z})$ , in particular it is non-zero. Thus, there are no reducible solutions to the Seiberg–Witten equations with  $\eta = 0$ . This is still true if  $\eta$  is non-zero but small enough.

As the Fubini–Study metric has positive scalar curvature, the proof of Theorem 1.11 implies:

LEMMA 3.5. — The Seiberg–Witten invariant (25) of  $X = \mathbb{C}P^2$  for the  $\eta = 0$  equations is identically zero.

On the other hand, the argument in the proof of Theorem 3.2 goes through as before. Namely, given a symplectic form  $\omega$  on  $\mathbb{C}P^2$ , for the canonical  $Spin^c$  structure and an almost Kähler metric the Seiberg–Witten invariant calculated from the equations (15), (16), (17) with  $r$  large, gives  $\pm 1$ . (Notice that the curvature of  $A_0$  is some multiple of  $\omega$ , so we can absorb the term  $\frac{1}{2}F_{A_0}$  in Fact 2.2 in the perturbation by  $-\frac{i}{4}r\omega$  by changing  $r$ .)

Thus, we conclude that for some  $r_0 > 0$  the equations (16) have a reducible solution, to account for the jump in the invariant. For the reducible solution  $(A, 0)$  we have  $F_A^+ = -\frac{i}{4}r_0\omega$ . Thus, the Chern–Weil formula implies:

$$c_1(-K) \cdot [\omega] = \int_X \frac{i}{2\pi} F_A \wedge \omega = \frac{1}{4\pi} r_0 \text{vol} > 0.$$

Therefore, the analog of Theorem 3.2 for  $\mathbb{C}P^2$  is:

PROPOSITION 3.6 (Taubes [19]). — For every symplectic form  $\omega$  on  $\mathbb{C}P^2$  with canonical bundle  $K$ , one has  $c_1(K) \cdot [\omega] < 0$ .

In the same way, we find the analog of Theorem 3.3 for  $\mathbb{C}P^2$ . Given a symplectic form  $\omega$  on  $\mathbb{C}P^2$ , we choose a generator  $H \in H^2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{Z})$ , such that  $[\omega]$  is a positive multiple of  $H$ . Then, by Proposition 3.6,  $c_1(K)$  is a negative multiple of  $H$ , which implies that it is  $= -3H$ .

THEOREM 3.7 (Taubes [21, 22]). — For every symplectic form  $\omega$  on  $\mathbb{C}P^2$  and any compatible almost Kähler metric, the generator  $H \in H^2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{Z})$  is Poincaré dual to a pseudo-holomorphic curve.

*Proof.* We consider the Seiberg–Witten invariants of  $\mathbb{C}P^2$  for the canonical  $Spin^c$  structure twisted by  $H$ . Assume that for the equations in the proof of Theorem 3.3 there exists a solution for all  $r$  sufficiently large. Then letting  $r$  go to infinity, the analysis in [22] applies just as in the proof of Theorem 3.3, and one finds that  $H$  is Poincaré dual to a pseudo-holomorphic curve.

Thus, it suffices to show that for all  $r$  sufficiently large there are solutions to the Seiberg–Witten equations (16). To see this, observe that the homology class in  $H_*(\mathcal{B}^*, \mathbb{Z})$  calculated from the moduli space is a differentiable invariant of  $\mathbb{C}P^2$ , which does not depend on the metric or on the symplectic structure  $\omega$ , although here it does depend on the parameter  $\eta$  in (3). Thus, we can calculate the invariant using the standard Kähler form on  $\mathbb{C}P^2$ , and then use the result to get a statement that is valid for all symplectic forms  $\omega$ .

Thus, consider first the standard Kähler form. As before, if  $\eta$  is small there are no solutions to the equations because of the Weitzenböck formula (4) and the invariant vanishes when  $\eta$  is small, i.e. when  $r$  in (16) is near 0. See Lemma 3.5.

Now increase  $r$ . For a fixed  $r_1$  there is a unique reducible solution, and for all  $r > r_1$  there is a smooth moduli space of solutions. Recall from the proof of Theorem 3.3 that, because the metric we consider is Kähler, not just almost Kähler, for large  $r$  the  $\beta$  component of the spinor of any solution vanishes identically, and the  $\alpha$  component is then a holomorphic section. Using this, the moduli space of solutions for  $r > r_1$  can be identified with the projective space of non-trivial holomorphic sections of the hyperplane bundle on  $\mathbb{C}P^2$ , cf. [28], [5]. This projective space is itself a copy of  $\mathbb{C}P^2$ , which is a slice in the  $CP^\infty \simeq \mathcal{B}^*$ . Thus, for  $r$  large, the invariant is  $\pm 1 \in H_4(CP^\infty, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ .

Considering now an arbitrary symplectic form  $\omega$  on  $\mathbb{C}P^2$ , we know from Proposition 3.6 that it has the same sign as the standard Kähler form. Thus letting  $r \rightarrow \infty$  in equation (16) leads into the same regime, no matter which  $\omega$  we use. As the invariant for  $r$  large is non-trivial for the Kähler form, it is non-trivial for every symplectic form  $\omega$ . Thus, for every  $\omega$  and every  $r$  large enough, there are solutions to the equations (15), (16), (17).  $\square$

*Remark 3.8.* — The discussion above concerning the change in the Seiberg–Witten invariant of  $\mathbb{C}P^2$  as one varies  $\eta$  is really the same as the discussion in [14], [1] concerning the change in the invariant as one varies the metric on a manifold with  $b_2^+ = 1$  and  $b_2^- \neq 0$ . Both are special cases of the general wall-crossing formula which applies whenever one encounters a reducible solution in a family of Seiberg–Witten equations parametrised by  $(g_t, \eta_t)$ .

#### 4. APPLICATIONS OF TAUBES'S THEOREMS

Taubes's theorems discussed in the previous section have a lot of consequences for the topology of symplectic manifolds, and for the classification of symplectic structures. At the time of writing, such applications are emerging rapidly, so we will not try to be exhaustive, but rather restrict ourselves to a few selected corollaries, most of which were pointed out by Taubes himself.

#### 4.1. Direct applications of Theorem 3.2

As was remarked in the introduction, Theorem 3.2 implies some immediate but important constraints on the topology and geometry of symplectic 4-manifolds. Combining it with Theorem 1.11, one concludes:

**COROLLARY 4.1.** — *Let  $X$  be a symplectic 4-manifold with  $b_2^+(X) > 1$ . Then*

- (1)  *$X$  does not admit any Riemannian metric of positive scalar curvature, and*
- (2)  *$X$  does not admit a smooth connected sum decomposition  $X \cong X_1 \# X_2$  with both  $b_2^+(X_i) > 0$ ,  $i = 1, 2$ .*

*Example 4.2.* — Let  $X_{p,q} = p\mathbb{C}P^2 \# q\overline{\mathbb{C}P^2}$ . For all  $p$  and  $q$ ,  $X_{p,q}$  admits a metric of positive scalar curvature. It admits an almost complex structure if and only if  $p \equiv 1 \pmod{2}$ , and a symplectic structure if and only if  $p = 1$ .

Theorem 3.2 also strongly constrains the possible canonical classes of symplectic structures:

**COROLLARY 4.3.** — *Let  $X$  be a smooth 4-manifold with  $b_2^+(X) > 1$ .*

- (1) *If  $b_1(X) = 0$ , then  $X$  admits at most finitely many homotopy classes of almost complex structures compatible with symplectic forms.*
- (2)  *$X$  does not admit any symplectic structure whose canonical class  $K \in H^2(X, \mathbb{Z})$  is a non-zero torsion class. If  $X$  is symplectic, then the canonical classes of two symplectic structures cannot differ by a non-zero torsion class.*
- (3) *If  $X$  admits a symplectic structure with  $K = 0$ , then all other symplectic structures on  $X$  also satisfy  $K = 0$ .*

*Proof.* (2) and (3) are clear from the second part of Theorem 3.2. Under the assumption  $b_1(X) = 0$ , the canonical class determines the homotopy class of an almost complex structure up to finite ambiguity, so that (1) follows from Lemma 1.10.  $\square$

*Remark 4.4.* — The assumption on  $b_2^+(X)$  cannot be weakened in (2). The Enriques surface, a quotient of a K3 surface by a free holomorphic involution, is Kähler. It has  $b_2^+ = 1$  and its canonical class is a non-trivial 2-torsion class. The proof of Theorem 3.2 breaks down because the Seiberg–Witten invariants of the Enriques surface depend on  $\eta$ , cf. the discussion of the  $\mathbb{C}P^2$  case.

*Example 4.5.* — Part (3) of Corollary 4.3 applies to the K3 surfaces, to the 4-torus  $T^4$ , and to the Kodaira–Thurston manifolds [11, 26]. The latter are certain  $T^2$ -bundles over  $T^2$  with  $b_2^+ = 2$  and  $b_1 = 3$ . They are both complex and symplectic with trivial canonical class. These were the first known examples of symplectic non-Kähler 4-manifolds. Theorem 3.2 gives a complete calculation of the Seiberg–Witten invariants for all these examples. Recently, Biquard [2] has calculated the invariants for the Kodaira–Thurston manifolds in a different way, not using the symplectic structure.

## 4.2. Applications using pseudo-holomorphic curves

The existence theorems 3.3 and 3.7 for pseudo-holomorphic curves by themselves are not immediately useful, unless one has a genericity statement to ensure that the curves are not too singular or degenerate. On a fixed symplectic 4-manifold  $(X, \omega)$  one has a choice when picking a calibrating almost complex structure, or, equivalently, a compatible almost Kähler metric. There is then a genericity statement for the moduli spaces of pseudo-holomorphic curves which follows from the Sard–Smale theorem and is the analog of Fact 1.4 for the Seiberg–Witten moduli spaces. Informally, we can paraphrase this statement, Proposition 7.1 in [22], as follows, compare [15].

**FACT 4.6.** — *For a generic almost Kähler metric on  $(X, \omega)$  compatible with  $\omega$ , pseudo-holomorphic curves in a given homology class are transverse zeroes of the Cauchy–Riemann equations. In particular, they consist of disjoint smooth components, the only rational curves of negative self-intersection are smooth  $(-1)$ -curves, and the only non-reduced components (if any) are tori of self-intersection zero and rational  $(-1)$ -curves.*

In Theorems 3.3 and 3.7, we can always use an almost Kähler metric which is generic in this sense to make the pseudo-holomorphic curve Poincaré dual to  $E$  (respectively  $H$ ) smooth. Each component  $\Sigma$  of such a curve is then itself a smooth pseudo-holomorphic, in particular symplectic, submanifold, whose genus is given by the adjunction formula

$$(26) \quad g(\Sigma) = 1 + \frac{1}{2}(\Sigma^2 + K \cdot \Sigma) .$$

With this understood, Theorem 3.7 implies that for a generic almost Kähler metric compatible with an arbitrary symplectic form on  $\mathbb{C}P^2$ , the positive generator  $H \in H^2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{Z})$  is represented by a smooth pseudo-holomorphic curve of genus

$$g(H) = 1 + \frac{1}{2}(H^2 + K \cdot H) = 1 + \frac{1}{2}(1 - 3) = 0 ,$$

where we have used Proposition 3.6 to conclude  $K = -3H$ . Then a result of Gromov [10] implies that the symplectic structure is the standard one (up to symplectomorphism):

**THEOREM 4.7** ([21, 22]). — *The symplectic structure on  $\mathbb{C}P^2$  is unique.*

*Example 4.8.* — It is instructive to try to apply the above argument to other manifolds with the rational homology of  $\mathbb{C}P^2$ . If one forms the connected sum of  $\mathbb{C}P^2$  with a non-trivial rational homology sphere, the resulting manifold usually has no symplectic structure [13]. If it does admit a symplectic structure, then the generator of the homology cannot be represented by a pseudo-holomorphic rational curve [10].

Mumford [16] found a Kähler surface  $X$  uniformised by the complex ball which has the Betti numbers of  $\mathbb{C}P^2$ . For this  $X$  Theorem 3.7 applies, showing that the positive generator of the homology is represented by a pseudo-holomorphic curve. However, Proposition 3.6 fails for  $X$ . Indeed, the Seiberg–Witten invariants defined by equations (2) and (3) with  $\eta = 0$  and with  $\eta = -\frac{1}{4}r\omega$  with  $r$  large coincide, as one sees easily using the

natural Kähler–Einstein metric on  $X$ . Thus, there is no reducible solution with  $r > 0$ , the wall in the parameter space appears for some  $r_0 < 0$ . For the Mumford surface one has  $K \cdot [\omega] > 0$ , which forces  $K = 3H$ . Thus, the pseudo-holomorphic curve Poincaré dual to  $H$  has genus 3 by the adjunction formula (26).

Combining the first part of Theorem 3.2 with Theorem 3.3, one concludes that if  $X$  is a symplectic 4-manifold with  $b_2^+(X) > 1$  and  $K \neq 0$ , then  $K$  is Poincaré dual to a pseudo-holomorphic curve. From this one deduces:

**COROLLARY 4.9** (Taubes [21, 22]). — *If  $X$  is a minimal symplectic 4-manifold with  $b_2^+(X) > 1$ , then  $K^2 \geq 0$ , equivalently  $2\chi(X) + 3\sigma(X) \geq 0$ .*

Recall that a symplectic 4-manifold is called *minimal* if it contains no symplectically embedded 2-sphere of self-intersection  $-1$ .

*Proof.* If  $K = 0$  there is nothing to prove. If  $K \neq 0$ , consider the pseudo-holomorphic curve Poincaré dual to  $K$ . Because of genericity and minimality, this curve has no genus zero component of negative self-intersection. For the components  $\Sigma$  of positive genus, the adjunction formula (26) implies  $1 \leq g(\Sigma) = 1 + \frac{1}{2}(\Sigma^2 + K \cdot \Sigma) = 1 + \Sigma^2$ . Thus  $K^2$ , which is the sum of the  $\Sigma^2$  over all components, is non-negative.  $\square$

Minimality of symplectic 4-manifolds admits a purely differentiable characterisation. This follows from the next result.

**THEOREM 4.10** (Taubes [21, 22]). — *Let  $X$  be a symplectic 4-manifold with  $b_2^+(X) > 1$ . A class  $E \in H^2(X, \mathbb{Z})$  with  $E^2 = -1$  is Poincaré dual to a smoothly embedded 2-sphere if and only if  $E$  or  $-E$  is Poincaré dual to a symplectically embedded 2-sphere. In this case  $K \cdot E = \pm 1$ .*

*Proof.* As  $K$  is a characteristic element for the intersection form of  $X$ , we can write  $K = K^\perp + aE$ , with  $K^\perp \cdot E = 0$  and  $a$  an odd integer. If  $E$  is Poincaré dual to a smoothly embedded 2-sphere, then the reflection in the hyperplane orthogonal to  $E$  is realised by a self-diffeomorphism  $f$  of  $X$ , supported in a tubular neighbourhood of the 2-sphere. This diffeomorphism pulls back the canonical  $Spin^c$  structure to the one twisted by  $aE$ . By Theorem 3.3,  $aE$  is then Poincaré dual to a pseudo-holomorphic curve  $C$ .

Suppose  $C$  has several components, then by Fact 4.6 the components are disjoint. As  $C$  has negative selfintersection number, at least one of its components,  $C_1$  say, has a negative selfintersection number. It is not hard to see that  $C_1$  is a  $(-1)$ -sphere. But  $C_1$  is not orthogonal to  $E$ , so that the reflections in  $E$  and in  $C_1$  generate a group of diffeomorphisms of  $X$  for which the orbit of the canonical  $Spin^c$  structure is infinite. This contradicts Lemma 1.10.

It follows that  $C$  is connected. By the adjunction formula (26) it must have genus zero, and we must have  $a = \pm 1$ .  $\square$

Corollary 4.9, Theorem 4.10, and the other consequences of Taubes's theorems constitute substantial steps towards a classification of symplectic 4-manifolds in the spirit of the Kodaira classification of compact complex surfaces. Elaborating on the work of Gromov [10], initial steps in this direction had already been taken, notably by McDuff. However, no results approaching the strength of the above were in sight before the work of Taubes.

Here is a consequence of Theorem 3.3 constraining further the  $Spin^c$  structures with non-trivial Seiberg–Witten invariants on symplectic 4-manifolds with  $b_2^+ > 1$ :

**THEOREM 4.11** (Taubes [21, 22]). — *If  $X$  is a symplectic 4-manifold with  $b_2^+(X) > 1$ , then the only non-trivial Seiberg–Witten invariants of  $X$  arise from zero-dimensional moduli spaces, i.e., from  $Spin^c$  structures with auxiliary line bundles  $L$  with  $L^2 = 2\chi(X) + 3\sigma(X)$ .*

*Proof.* A non-minimal symplectic 4-manifold smoothly splits as  $Y \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ , and it is known that the claimed property holds for  $X$  if and only if it holds for  $Y$ . This follows from the blowup-formula for the Seiberg–Witten invariants, see [6] or Proposition 2 of [13].

Thus it suffices to consider the case when  $X$  is minimal. By Theorem 3.3, if  $E \neq 0$  is a class for which the canonical  $Spin^c$  structure twisted by  $E$  has a non-trivial Seiberg–Witten invariant, then there is a pseudo-holomorphic curve Poincaré dual to  $E$ . Consider a component  $\Sigma$  of this curve. It can not be of genus zero and negative self-intersection because  $X$  is assumed minimal. If  $g(\Sigma) > 0$ , then  $\Sigma^2 + K \cdot \Sigma \geq 0$ . If the self-intersection of  $\Sigma$  is negative, this implies  $E \cdot \Sigma = \Sigma^2 < -\Sigma^2 \leq K \cdot \Sigma$ .

If  $\Sigma$  has non-negative self-intersection, the following adjunction inequality holds [14, 5, 1]:

$$g(\Sigma) \geq 1 + \frac{1}{2}(\Sigma^2 + L \cdot \Sigma),$$

for all  $L$  which are determinant bundles of  $Spin^c$  structures with non-trivial Seiberg–Witten invariants. Applying this with  $L = 2E - K$  and calculating  $g(\Sigma)$  from the adjunction formula (26), we conclude  $E \cdot \Sigma \leq K \cdot \Sigma$ .

We have proved  $E \cdot \Sigma \leq K \cdot \Sigma$  for all components  $\Sigma$ , regardless of their self-intersection numbers. Summing over all  $\Sigma$ , we have  $E^2 \leq K \cdot E$ , which is equivalent to  $L^2 = (2E - K)^2 \leq K^2 = 2\chi(X) + 3\sigma(X)$ . On the other hand, the dimension of the Seiberg–Witten moduli space for  $L$  has to be non-negative, so  $L^2 \geq 2\chi(X) + 3\sigma(X)$  by Fact 1.5 and we conclude  $L^2 = 2\chi(X) + 3\sigma(X)$ .  $\square$

*Remark 4.12.* — The conclusion of Theorem 4.11 can be interpreted as saying that symplectic 4-manifolds have (Seiberg–Witten) *simple type*.

## 5. TOWARDS THE DIFFEOMORPHISM CLASSIFICATION OF FOUR-MANIFOLDS

### 5.1. The symplectic uniformisation conjecture

A closed smooth manifold is said to be *irreducible* if it admits no smooth connected sum decomposition in which neither summand is a homotopy sphere. A natural approach to the classification of manifolds is the search for and classification of their irreducible summands. After Taubes's theorems, for a while the following attractive conjecture seemed plausible:

CONJECTURE 5.1. — (1) *Every simply connected smooth 4-manifold is a connected sum of symplectic manifolds, with both the symplectic and the opposite orientations allowed<sup>3</sup>.*

(2) *Minimal symplectic 4-manifolds are irreducible.*

(3) *The symplectic structure of a minimal symplectic 4-manifold is unique up to deformation equivalence and symplectomorphism.*

The first part of the conjecture was motivated by an older conjecture<sup>4</sup> to the effect that all simply connected 4-manifolds should be connected sums of complex surfaces, equivalently, of complex projective algebraic surfaces. This was disproved by Gompf–Mrowka [9]. Their counterexamples, and many later ones, have turned out to be symplectic [8], thus suggesting the modified conjecture (1). Six months after the lecture in the Séminaire Bourbaki, as I was revising the text for *Astérisque*, Z. Szabo announced counterexamples to (1). The manifolds he constructs are irreducible with non-trivial Seiberg–Witten invariants which are incompatible with Theorem 3.2. Immediately after Szabo, Fintushel and Stern announced the existence of large families of related examples.

Part (2) was conjectured by Gompf in [8]. We shall prove in Corollary 5.5 below that as a consequence of Taubes's results it is true (for simply connected manifolds) under the additional assumption  $b_2^+ > 1$ . Of course, non-minimal symplectic manifolds are reducible because they smoothly split off  $\overline{\mathbb{C}P^2}$ , and the other summand cannot be a homotopy sphere for cohomological reasons.

Part (3) is true for  $\mathbb{C}P^2$  by Theorem 4.7. The other consequences of Taubes's work discussed in the previous section provide evidence that (3) may hold more generally. In higher dimensions, counterexamples to (3) are known [17], and are detected by Gromov invariants. Taubes has shown that the Gromov invariants in dimension 4 are equivalent to the Seiberg–Witten invariants, which are diffeomorphism invariants. One can take this as further evidence for (3).

*Remark 5.2.* — Making connected sums of symplectic manifolds with non-simply connected manifolds with negative definite intersection forms, one can build manifolds with non-trivial Seiberg–Witten invariants which do not admit any symplectic structures [13].

<sup>3</sup>The 4-sphere is the empty connected sum.

<sup>4</sup>Sometimes attributed to Thom, although he has disassociated himself from it.

This is because the property of being symplectic is preserved under passage to finite coverings, whereas having non-trivial Seiberg–Witten invariants is not.

Some of the examples in [13] have the same Seiberg–Witten invariants as the symplectic manifolds they were built from, whereas for others the Seiberg–Witten invariants are not compatible with the constraints on the invariants of symplectic manifolds proved in subsection 4.1. Recently Biquard [2] has shown that the Seiberg–Witten invariants of properly elliptic surfaces with  $b_1 \equiv 1 \pmod{2}$  are (non-zero and) incompatible with the constraints.

*Remark 5.3.* — It is clear that part (1) of Conjecture 5.1 fails in the non-simply connected case, for example because of the existence of non-trivial homology spheres. If one tries to modify the conjecture by allowing arbitrary summands with definite intersection forms it is still false. Counterexamples include irreducible 4-manifolds with fundamental group  $\mathbb{Z}_2$  and indefinite intersection forms not admitting any almost complex structure [12], and various  $K(\pi, 1)$ s, e. g. certain hyperbolic 4-manifolds and the non-Kähler minimal properly elliptic surfaces considered in [2].

## 5.2. Irreducibility of minimal symplectic 4-manifolds

**THEOREM 5.4** ([12]). — *Let  $X$  be a minimal symplectic 4-manifold with  $b_2^+(X) > 1$ . If  $X \cong X_1 \# X_2$  is a smooth connected sum decomposition, then one of the  $X_i$  is an integral homology sphere whose fundamental group has no non-trivial finite quotient.*

**COROLLARY 5.5** ([12]). — *Minimal symplectic 4-manifolds with  $b_2^+ > 1$  and with residually finite fundamental groups are irreducible<sup>5</sup>.*

*Proof of Theorem 5.4.* Let  $X$  be a closed symplectic 4-manifold with  $b_2^+(X) > 1$ . If  $X$  splits as a connected sum  $X \cong M \# N$ , then by Proposition 1 of [13] we may assume that  $N$  has a negative definite intersection form and that its fundamental group has no non-trivial finite quotient. In particular  $H_1(N, \mathbb{Z}) = 0$ . This implies that the homology and cohomology of  $N$  are torsion-free.

Donaldson’s theorem about (non-simply connected) definite manifolds [3] implies that the intersection form of  $N$  is diagonalizable over  $\mathbb{Z}$ . If  $N$  is not an integral homology sphere, let  $e_1, \dots, e_n \in H^2(N, \mathbb{Z})$  be a basis with respect to which the cup product form is the standard diagonal form. This basis is unique up to permutations and sign changes.

By Theorem 3.2 the Seiberg–Witten invariants of  $X$  are non-trivial for the natural  $Spin^c$  structures with auxiliary line bundles  $\pm K_X$ . Note that we can write

$$K_X = K_M + \sum_{i=1}^n a_i e_i ,$$

<sup>5</sup>An assumption about the fundamental group should have been added on page 65 of [5], where this is mentioned for Kähler manifolds.

where  $K_M \in H^2(M, \mathbb{Z})$  and the  $a_i$  are odd integers because  $e_i^2 = -1$  and  $K_X$  is characteristic. Considering  $-K_X$  and using a family of Riemannian metrics which pinches the neck connecting  $M$  and  $N$  down to a point, we conclude that  $M$  has a non-trivial Seiberg–Witten invariant for a  $Spin^c$  structure with auxiliary line bundle  $-K_M$ .

Now we can reverse the process and glue together solutions to the Seiberg–Witten equation for  $-K_M$  on  $M$  and reducible solutions on  $N$  for the unique  $Spin^c$  structure with auxiliary line bundle  $e_1 - \sum_{i \neq 1} e_i$ , as in the proof of Proposition 2 in [13], cf. also [5], section 5. This gives a Seiberg–Witten invariant of  $X$  which is equal (up to sign) to the Seiberg–Witten invariant of  $M$  for  $-K_M$ , which is non-zero.

This implies that  $L = -K_M + e_1 - \sum_{i \neq 1} e_i$  has self-intersection number  $= K_X^2$  because for  $X$  all the non-trivial Seiberg–Witten invariants come from zero-dimensional moduli spaces by Theorem 4.11. Thus,  $a_i = \pm 1$  for all  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Without loss of generality we may assume  $a_i = 1$  for all  $i$ .

The line bundle  $L$  is obtained from  $-K_X$  by twisting with  $e_1$ . Thus, by Theorem 3.3 the non-triviality of the Seiberg–Witten invariant of  $X$  with respect to  $L$  implies that  $e_1$  can be represented by a symplectically embedded 2-sphere in  $X$ . Thus  $X$  is not minimal.

We conclude that if  $X$  is minimal, then  $N$  must be an integral homology sphere. This completes the proof of Theorem 5.4.  $\square$

*Remark 5.6.* — Gompf [8] has shown that all finitely presentable groups occur as fundamental groups of minimal symplectic 4-manifolds, and conjecturally all these manifolds are irreducible. As was the case in [13], our arguments do not give an optimal result because we cannot deal with fundamental groups without non-trivial finite quotients. With regard to Theorem 5.4, note that there are such groups which occur as fundamental groups of integral homology 4-spheres. Let  $G$  be the Higman 4-group, an infinite group without non-trivial finite quotients, which has a presentation with 4 generators and 4 relations. Doing surgery on  $4(S^1 \times S^3)$  according to the relations produces an integral homology sphere with fundamental group  $G$ .

*Remark 5.7.* — In another direction, the assumption  $b_2^+(X) > 1$  can probably be removed from Theorem 5.4 and Corollary 5.5. To do this one needs to understand how the neck-pinching in the proof of Theorem 5.4 and the perturbations in the proofs of Theorems 3.2 and 3.3 interact with the chamber structure of the Seiberg–Witten invariants for manifolds with  $b_2^+ = 1$ .

However, some results about the case when  $b_2^+ = 1$  can be deduced from the proof of Theorem 5.4. For example, all manifolds with non-trivial finite fundamental groups are dealt with by the following:

**COROLLARY 5.8** ([12]). — *Let  $X$  be a minimal symplectic 4-manifold with  $b_2^+(X) = 1$  and  $b_1(X) = 0$ . If  $\pi_1(X)$  is a non-trivial residually finite group, then  $X$  is irreducible.*

*Proof.* Suppose  $X \cong M \# N$ . We may assume that  $N$  has negative definite intersection form and its fundamental group has no non-trivial finite quotient. Residual finiteness then implies that  $N$  is simply connected, and  $\pi_1(M) \cong \pi_1(X)$ . By assumption,  $X$  has a finite cover  $\bar{X}$  of degree  $d > 1$  which is diffeomorphic to  $\bar{M} \# dN$ , where  $\bar{M}$  is a  $d$ -fold cover of  $M$ . The multiplicativity of the Euler characteristic and of the signature imply  $b_2^+(\bar{X}) \geq 3$ .

Suppose that  $N$  is not a homotopy sphere. Then, as in the proof of Theorem 5.4, Theorem 3.3 shows that in  $\bar{X}$  the generators of the second cohomology of the  $d$  copies of  $N$  are represented by pseudo-holomorphic embedded spheres. Two such spheres have algebraic intersection number zero with each other, and must therefore be disjoint, because intersections of pseudo-holomorphic curves always count positively. The spheres in the different copies are permuted by the covering group, and project to pseudo-holomorphic embedded  $(-1)$ -spheres in  $X$ . This contradicts the minimality of  $X$ . Thus  $N$  must be a homotopy sphere, and  $X$  is irreducible.  $\square$

## 6. FINAL COMMENTS

As mentioned in the introduction, Theorem 3.3 has a converse [24] which constructs solutions to the Seiberg–Witten equations (2) and (3) (for a suitable  $\eta$ ) starting from sufficiently generic pseudo-holomorphic curves. One takes standard solutions to the vortex equation on the curve (the 2-dimensional reduction of the Seiberg–Witten equations), and glues these into trivial solutions in the complement of a tubular neighbourhood of the curve. This produces approximate solutions to the Seiberg–Witten equations which are then perturbed to actual solutions using the implicit function theorem.

If one counts the pseudo-holomorphic curves appropriately [23], and keeps track of the associated signs [25], one finds that the Gromov invariant they define coincides with the value of the Seiberg–Witten invariant on the  $Spin^c$  structure obtained from the canonical one by twisting with the complex line bundle Poincaré dual to the fundamental homology class of the curves. Taubes has explained in [23] how one has to count the curves for this statement to be true; this counting is as announced in [21] except in the case of tori of self-intersection zero, when additional complications arise from an obstruction to the gluing procedure mentioned above. One has to use multi-vortices in order to overcome the obstructions.

Finally, let us remark that a lot of the analysis in [22] is valid for smooth 4-manifolds equipped with a non-trivial self-dual harmonic form  $\omega$  (with respect to a generic metric) which does not have to be non-degenerate. Work of Taubes which is now in progress suggests that in this case one obtains pseudo-holomorphic curves in the complement of the vanishing locus of  $\omega$  which have sufficient regularity near this vanishing locus to be useful in topological arguments. If one is very optimistic, one may hope that this will lead to an “intrinsic” characterisation of symplectic manifolds.

## REFERENCES

- [1] D. Bennequin – *Monopoles de Seiberg–Witten et conjecture de Thom [d’après Kronheimer, Mrowka, Witten, ...]*. Séminaire Bourbaki, 48ème année 1995–96, n° 807.
- [2] O. Biquard – *Les équations de Seiberg–Witten sur une surface complexe non kählérienne*. Preprint 1995.
- [3] S. K. Donaldson – *The orientation of Yang–Mills moduli spaces and 4–manifold topology*. J. Differential Geometry **26** (1987), 397–428.
- [4] S. K. Donaldson – *Yang–Mills invariants of four–manifolds*. In *Geometry of Low–Dimensional Manifolds: 1*, ed. S. K. Donaldson and C. B. Thomas, Cambridge Univ. Press 1990.
- [5] S. K. Donaldson – *The Seiberg–Witten equations and 4–manifold topology*, Bull. Amer. Math. Soc. **33** (1996), 45–70.
- [6] R. Fintushel and R. J. Stern – *Immersed spheres in 4–manifolds and the immersed Thom conjecture*. Proc. of Gökova Geometry–Topology Conference 1994, Turkish J. of Math. **19** (2) (1995), 27–39.
- [7] P. Gauduchon – *Hermitian connections and Dirac operators*. Boll. Un. Mat. Ital. (to appear).
- [8] R. E. Gompf – *A new construction of symplectic manifolds*. Annals of Math. **142** (1995), 527–595.
- [9] R. E. Gompf and T. S. Mrowka – *Irreducible 4–manifolds need not be complex*. Annals of Math. **138** (1993), 61–111.
- [10] M. Gromov – *Pseudo–holomorphic curves in symplectic manifolds*. Invent. Math. **82** (1985), 307–347.
- [11] K. Kodaira – *On the structure of compact complex analytic surfaces, I*. Amer. J. Math. **86** (1964), 751–798.
- [12] D. Kotschick – *On irreducible four–manifolds*. Preprint alg-geom/9504012 (unpublished).
- [13] D. Kotschick, J. W. Morgan and C. H. Taubes – *Four–manifolds without symplectic structures but with non–trivial Seiberg–Witten invariants*. Math. Research Letters **2** (1995), 119–124.
- [14] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka – *The genus of embedded surfaces in the projective plane*. Math. Research Letters **1** (1994), 797–808.
- [15] D. McDuff and D. Salamon – *J–holomorphic curves and quantum cohomology*. Amer. Math. Soc., Providence 1994.
- [16] D. Mumford – *An algebraic surface with  $K$  ample,  $(K^2) = 9$ ,  $p_g = q = 0$* . Amer. J. Math. **101** (1979), 233–244.
- [17] Y. Ruan – *Symplectic topology on algebraic 3–folds*. J. Differential Geometry **39** (1994), 215–227.

- [18] C. H. Taubes – *The Seiberg–Witten invariants and symplectic forms*. Math. Research Letters **1** (1994), 809–822.
- [19] C. H. Taubes – *More constraints on symplectic manifolds from Seiberg–Witten invariants*. Math. Research Letters **2** (1995), 9–14.
- [20] C. H. Taubes – *Seiberg–Witten equations and symplectic geometry*. Lecture at the conference on Seiberg–Witten invariants, Princeton, January 16th, 1995.
- [21] C. H. Taubes – *The Seiberg–Witten and the Gromov invariants*. Math. Research Letters **2** (1995), 221–238.
- [22] C. H. Taubes –  *$SW \Rightarrow Gr$ , From the Seiberg–Witten equations to pseudo-holomorphic curves*. Jour. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 845–918.
- [23] C. H. Taubes – *Counting pseudo-holomorphic submanifolds in dimension 4*. J. Differential Geometry (to appear).
- [24] C. H. Taubes –  *$Gr \Rightarrow SW$ , From pseudo-holomorphic curves to Seiberg–Witten solutions*. Preprint 1996.
- [25] C. H. Taubes – (in preparation).
- [26] W. P. Thurston – *Some simple examples of symplectic manifolds*. Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1976), 467–468.
- [27] A. Weil – *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*, Hermann, Paris 1958.
- [28] E. Witten – *Monopoles and four-manifolds*. Math. Research Letters **1** (1994), 769–796.

Dieter KOTSCHICK

Mathematisches Institut

Rheinsprung 21

CH-4051 Bâle

Suisse

*E-mail:* dieter@math.unibas.ch

# *Astérisque*

JEAN-MICHEL MOREL

## **The Mumford-Shah conjecture in image processing**

*Astérisque*, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 813, p. 221-242

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1995-1996\\_\\_38\\_\\_221\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__221_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## THE MUMFORD–SHAH CONJECTURE IN IMAGE PROCESSING

by Jean–Michel MOREL

### 0. INTRODUCTION

#### Natural, digital and perceptual images

When one looks directly at scenes from the natural or the human world, or at any image (painting, photograph, drawing,...) representing such scenes, it is impossible to avoid seeing in them structures, which in many cases can be identified with real objects. These objects can be somehow concrete, as in photographs where we see trees, roads, windows, people, etc., or abstract perceptual structures, as the ones which appear in abstract paintings and can only be described in geometrical terms. However, we know that the “visual information” arriving at our retina, far from being structured, is a purely local information, for which a good model is given by digital images.

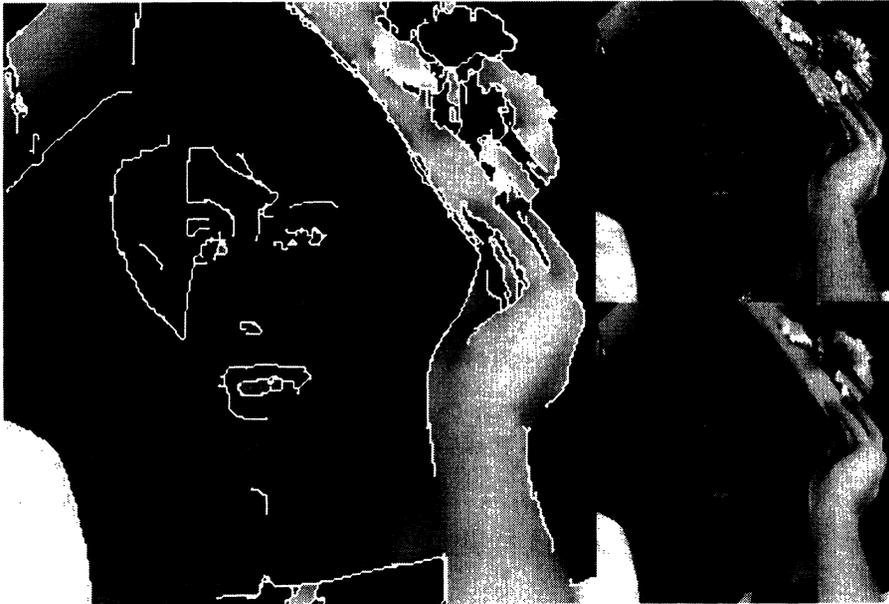
From the mathematical (and engineering) viewpoint, digital images simply are functions  $g(x)$ , where  $x$  is a point of the image domain  $\Omega$  (the plane, a rectangle, ...) and  $g(x)$  is a real number representing the “brightness” or “grey level” of the image at point  $x$ . This is the unstructured datum with which engineers have to deal in image analysis, robotics, etc. And it also is somehow the basic datum which arrives at our retina. The question is: How do we pass from the unstructured digital image to the structured perceptual one? One of the attempts to formalize this question is the so called segmentation problem. Segmenting a digital image means finding (by a numerical algorithm) its *homogeneous regions* and its *edges*, or *boundaries*. Of course, the homogeneous regions are supposed to correspond to meaningful parts of objects in the real world, and the edges to their apparent contours. More than a thousand algorithms have been proposed for segmenting images or detecting “edges”. It is of

course impossible (and unnecessary) to review them all. We refer to the first part of the book [MoS3] for a classification of these algorithms and their translation from a discrete into a continuous framework (more adapted to the mathematical analysis): It is shown therein that most segmentation algorithms try to minimize, by several very different procedures, one and the same *segmentation energy*. This energy measures how smooth the regions are, how faithful the “analyzed image” to the original image and the obtained “edges” to the image discontinuities are.

If we keep the three more meaningful terms of the functional, we obtain the Mumford-Shah energy. Thus the Mumford-Shah variational model, although initially proposed as one model among other ones, happens to somehow be **the general model** of image segmentation, and all the other ones are variants, or algorithms tending to minimize these variants. The Mumford-Shah model defines the segmentation problem as a joint smoothing/edge detection problem: given an image  $g(x)$ , one seeks simultaneously a “piecewise smoothed image”  $u(x)$  with a set  $K$  of abrupt discontinuities, the “edges” of  $g$ . Then the “best” segmentation of a given image is obtained by minimizing the functional

$$E(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} (|\nabla u(x)|^2 + (u - g)^2) dx + \text{length}(K).$$

The first term imposes that  $u$  is smooth outside the edges, the second that the piecewise smooth image  $u(x)$  indeed approximates  $g(x)$  and the third that the discontinuity set  $K$  has minimal length (and therefore in particular is as smooth as possible). The model is minimal in the sense that removing one of the above three terms would lead to a trivial solution. Needless to tell it: such a simple functional cannot give a good account of the geometric intricacy of most natural images, nor of our perception of them. What is expected from algorithms minimizing such a functional is a sketchy, cartoon-like version of the image, and these algorithms will give perceptually good results when the processed images somehow match this *a priori model*: contrasted images with objects presenting piecewise smooth surfaces. The success of algorithms minimizing the Mumford-Shah functional can be, however, impressive (see the enclosed figure, due to an algorithm by A. Chambolle [Cham].)



Top right, the original image (GRECO). Bottom right, the reconstructed datum  $u$ . Left, a superposition of the reconstructed datum  $u$  and the edge set  $K$  (in white).

This figure shows a low-energy Mumford and Shah segmentation. Various methods exist to reach such low-energy states. The method used here by Antonin Chambolle [Cham1,2] is a hybrid method: first the two-dimensional part of the energy is minimised (this results in the minimisation of a convex functional). Then the main edges are detected by a standard method (extrema of gradient). This set of edges  $K_1$  being fixed, the two-dimensional energy is once again minimised on  $\Omega \setminus K_1$ , leading to the detection of a set of finer edges,  $K_2$ , etc. On this image, there are 50 such iterations.

### The Mumford-Shah conjecture

In this conference, we deal with the mathematical consistency of the Mumford-Shah model. Let us mention that the Mumford-Shah functional derives from a discrete energy proposed by Geman and Geman [GG]. In this discrete framework, coming from a Markov random field model, no questions about the geometry of minimizers can be raised: Existence of minimizers is an obvious compactness theorem in finite dimension. The decision had to be taken to translate it into a continuous framework where the image is a function instead of being a matrix. This is a noticeable progress. In particular, we can then ask whether segmentations exist which minimize the Mumford-Shah energy, and are the boundaries thus obtained smooth ? Mumford and Shah [MumS1] conjectured the existence of minimal segmentations made of a finite set of  $C^{1,1}$  embedded curves. In addition, they predict the following local behaviour for the possible endpoints and crossing of the curves.

1) Curves can only meet in a propeller-like configuration, that is, three curves meet at their endpoints and make a  $120^\circ$  angle with each other.

2) "Crack tips", or free endpoints, where  $K$  locally looks like a half line and (taking this half line to be the real positive one)  $u$  is written in polar coordinates as  $u(r, \theta) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$ .

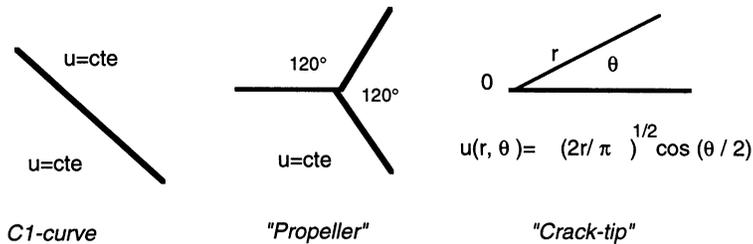


Figure 1 : Three kinds of local behaviour for  $K$

This last possibility is well-known in the theory of fracturation of elastic media ([Kn], [BM]), but remains quite puzzling : so far, we do not know whether the two preceding configurations really are minimizers of the Mumford-Shah energy. (By the way, in the following we shall spell "MS energy" or "MS conjecture" in order to gain some space.) We shall give an account of how Bonnet [Bo] proves that a crack tip is a global minimizer of the Mumford-Shah functional if we restrict ourselves to perturbations preserving the connectedness of  $K$ .

Analogues of the MS conjecture have been stated in higher dimension by E. De Giorgi [DeGi0], who aimed at modelling mixed energies arising in the physics of liquid crystals. Unfortunately, there is, to our knowledge and in contrast with dimension 2, no exact statement of how the singularities of the set  $K$  should look like. Now, the functional has some interest, particularly in dimension  $N = 3$ , for (e.g.) medical images, and we shall therefore set in dimension  $N$ ,

$$E(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} (|\nabla u(x)|^2 + (u - g)^2) dx + \mathcal{H}^{N-1}(K),$$

where  $\mathcal{H}^{N-1}$  denotes the  $(N - 1)$ -dimensional Hausdorff measure.

So far, the MS conjecture has not been proved and only partial but meaningful enough results are at hand. The problem has proved a difficult problem for the present mathematical technique because of the subtle interaction of the two-dimensional term (in  $u$ ) and the one-dimensional term  $\mathcal{H}^1(K)$ . The same difficulty arises when one wishes to define a computer program minimizing the energy and the mathematical analysis somehow clarifies the numerical debate.

### Edge sets and rectifiable sets

The first mathematical task is to correctly define the functional  $E(u, K)$ . Indeed, we cannot *a priori* impose that an edge set  $K$  minimizing  $E$  is made of a finite set of curves: This precisely is what has to be proved. That situation is classical in mathematical analysis and is dealt with by enlarging the “search space”, that is, in our case, by looking for a solution in a wider class of sets with finite length than just finite sets of curves. This is done by defining the “length” of  $K$  as its one-dimensional Hausdorff measure,  $\mathcal{H}^1(K)$ , which is the most natural way of extending the concept of length to non-smooth sets.

We call  $(N - 1)$ -*rectifiable* any set with finite  $(N - 1)$ -Hausdorff measure which is contained in a countable family of  $(N - 1)$ -dimensional  $C^1$  surfaces except for a  $\mathcal{H}^{N-1}$ -negligible set. Clearly, if the MS conjecture is true, the “edge sets” sought for in image processing must be 1-rectifiable, so that an extended and weakened version of the MS conjecture states that the minimizers of  $E$  are rectifiable. From the computational viewpoint, quantified estimates are highly desirable, because if (e.g.)  $C^1$  minimizers are available but are too much ragged in many components, this will in fact contradict the spirit of the conjecture, if not its letter. We shall list what is known about the regularity of minimal segmentations.

## 1. WHAT HAS BEEN PROVED ABOUT THE MUMFORD–SHAH CONJECTURE

In the statements which follow, the considered constants only depend (unless otherwise stated) on  $\Omega$  and  $\|g\|_\infty$ . All of the stated results will be given for a minimizing set  $K$  defined up to a  $\mathcal{H}^{N-1}$ -negligible set. It is easily proved that the value of  $E$  is not altered when we add or remove such a set from  $K$ .

- *Rectifiability in arbitrary dimension  $N$*  (Ambrosio [Amb1, 2, 3,4]) :  $u$  is a BV function and  $K$  is the (rectifiable) discontinuity set of  $u$ .
- *Uniform Lower density bound,  $N = 2$* , (“Elimination property”, Dal Maso, M., Solimini [DalMMS1, 2], generalized in arbitrary dimension in [CaLe, CaLe1]) : There exists a constant  $c$  such that for any disk  $D(x, r)$  centered on  $K$ ,

$$cr \leq \mathcal{H}^1(K \cap D(x, r)) \leq c^{-1}r.$$

- *Closedness.*  $K$  is a closed set (true in arbitrary dimension  $N$ ). De Giorgi, Carriero, Leaci [DeGiCL]. This property can be viewed as a consequence of the lower density bound.
- *Concentration property,  $N = 2$*  (Dal Maso, M., Solimini [DalMMS1, 2]). There exists for any  $\varepsilon > 0$  a constant  $\alpha(\varepsilon)$  such that every disk  $D(x, R)$  centered on  $K$  contains a subdisk  $D(y, r)$  with

$$r \geq \alpha R \quad \text{and} \quad \mathcal{H}^1(K \cap D(x, R)) \geq 2(1 - \varepsilon)r.$$

- *Uniform projection property,  $N = 2$*  (Dibos, Koepfler [DibK, Dib, Lég]). There exists a constant  $c_1$  such that for every square  $S = S(x, r)$  centered on  $K$ , denoting by  $p_1$  and  $p_2$  the orthogonal projections onto the sides of  $S$ ,

$$\mathcal{H}^1(p_1(K \cap S)) + \mathcal{H}^1(p_2(K \cap S)) \geq c_1 r.$$

- *Uniform Rectifiability Property,  $N = 2$*  (David-Semmes [DaSe1]). For every  $\varepsilon > 0$  there exists  $\alpha > 0$  such that inside each disk  $D(x, R)$  centered on  $K$  there is a curve  $\gamma$  satisfying

$$\mathcal{H}^1(\gamma) \geq \alpha R \quad \text{and} \quad \mathcal{H}^1(\gamma \setminus K) \leq \varepsilon \mathcal{H}^1(\gamma).$$

This property is extended to arbitrary dimensions in [DaSe2].

- *Quantified  $C^{1,\alpha}$  arcs,  $N = 2$* , (David [Da]) There exists a constant  $c$  such that any disk  $D(x, r)$  centered on  $K$  contains a subdisk  $D(x, \rho)$  with  $\rho \geq cr$  and  $D(x, \rho) \cap K$  is a  $C^{1,\alpha}$  curve.
- *Proof of the MS conjecture when the number of connected components of  $K$  is constrained* (Bonnet, [Bo]) : All isolated connected components of  $K$  satisfy the MS conjecture. In addition,  $K$  is  $C^{1,1}$  except at an exceptional set with zero Hausdorff length.
- *Regularity almost everywhere in arbitrary dimension* (Ambrosio-Pallara [AP], Ambrosio-Fusco-Pallara [AFP]) : Minimizers are  $C^{1,\alpha}$ , except at an exceptional set with zero  $\mathcal{H}^{N-1}$  measure.

Notice that each one of the mentioned properties (except the two last ones) implies the preceding ones, so that (e.g.) the uniform rectifiability property implies the uniform projection, the uniform concentration and the uniform density bounds. The uniform projection property implies the rectifiability by a founding result of Besicovitch (see [MoS3]).

Two words about our strategy of exposition. Of course, we won't be able to do justice in 15 pages to some 400 pages of thick and concise proofs with very little overlap. So we selected a series of fast arguments able to convey the conviction that the above statements are true. We shall start with the Ambrosio-De Giorgi approach, which takes advantage of the well-known rectifiability of the discontinuity set of  $BV$  functions to manage a short-cut to the rectifiability of  $K$ . Then we shall concentrate on the two-dimensional case and give the most salient arguments for all of the announced results in dimension 2. For the uniform properties, we have used the line of presentation of [MoS3]. We shall directly give the main arguments leading to the David-Semmes uniform rectifiability property, since it implies all the preceding ones. We extract arguments towards the  $C^{1,1}$  regularity from Bonnet [Bo] rather than David [Da]. Indeed, the Bonnet techniques yield a little less but are easier to explain in a few sentences. Regarding the last mentioned regularity results by Ambrosio, Fusco and Pallara in arbitrary dimension, we dedicate them much less space than they really deserve, since they bring into the discussion valuable new arguments (as e.g. the remarkable "Tilt Lemma" in [AP], adapted from Brakke [Br]). Now, as a consolation for the reader, many of the techniques therein are a combination of quantified estimates in the same line as what we shall prove in dimension 2 and blow-up techniques similar to what we extract from Bonnet [Bo]. So the next few pages will provide anyway some training for readers of [AP-AFP].

### Some reduction of the problem

Since we start with the mathematical arguments, it will be convenient to give a slightly simplified framework for working with the MS functional. First, it is always assumed that the image is bounded, say  $\|g\|_\infty \leq 1$ . By an obvious truncature argument, this also implies that if  $u$  is a minimizer of the MS functional, then  $\|u\|_\infty \leq 1$ . When we talk about  $u$  (resp  $K$ ) as a minimizer of the MS functional  $E(u, K)$ , this of course means that  $u$  is obtained as the first item of a pair  $(u, K)$  minimizing the functional (resp.  $K$  is the second item of a minimizing pair).

Next, we shall forget about  $\Omega$ , or, to be at ease, assume most of the time that  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . This will avoid us the tedious work of adapting interior estimates to the boundary but raises some incertitude about the functional  $E(u, K)$ , which may well be infinite when we integrate over the full space ! This is fixed by defining *global minimizers* of  $E$ . We say that  $(u, K)$  globally minimizes  $E$  if no change which alters  $(u, K)$  inside a ball  $B$  and leaves it unchanged outside can decrease the MS energy restricted to  $B$ .

As a last and more surprising simplification, we shall assume that  $g = 0$ . Indeed, we have already fixed that  $u$  and  $g$  are uniformly bounded. Since our only concern is the regularity of  $K$ , we are dealing with very local phenomena. If we look at fine scales, that is, consider the energy  $E$  (e.g. in dimension 2) inside a disk  $D = D(x, r)$  with  $r \rightarrow 0$ , we easily see that the term  $\int_D (u - g)^2 \leq 4\pi r^2$  is the “parent pauvre” of the functional. Indeed, whenever  $x$  is centered at a point of interest, that is, on  $K$ , the term  $\mathcal{H}^1(D(x, r) \cap K)$  scales (generically) as  $2r$ . As for the first term,  $\int_D |Du|^2$ , we can invoke classical estimates near the boundary to say that it can scale like  $r^2$  only when  $K$  is quite flat in a neighborhood of  $x$ . In fact, it is actually proved in [AF] that if it scales faster than  $r$ , then  $K$  is smooth at  $x$ . Thus, what we state is *a posteriori* true. So the reader is invited to believe that in all of the work on the MS conjecture, including the estimates to come, the  $\int (u - g)^2$  term has never the leading part.

## 2. BV SPACES AND THE MUMFORD–SHAH FUNCTIONAL

We call space of functions with bounded variation,  $BV(\Omega)$ , the set of integrable functions whose distributional gradient  $Du$  is a bounded measure, i.e.  $|Du|(\Omega) < \infty$ . Let us recall some elements about the structure of  $BV$  functions. If  $u$  is  $BV$ , we consider the set  $K(u)$  of points at which  $u$  is essentially discontinuous. Then  $K(u)$

is rectifiable, that is, contained in a countable family of  $C^1$   $(N - 1)$ -dimensional manifolds, except for a set with zero  $\mathcal{H}^{N-1}$  measure. As a consequence, a normal  $\nu$  exists almost everywhere. In addition, at most points of  $K(u)$ , the function  $u$  has essential limits on both sides of  $K$  which we denote by  $u^+$  and  $u^-$ . Then the gradient of  $u$  can be split into three parts

$$Du = \nabla u + (u^+ - u^-)\nu d\mathcal{H}^{N-1} + C(u),$$

where :  $Du$  is the distributional gradient,  $\nabla u$  is the part of  $Du$  which is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure (and therefore is integrable).  $C(u)$  is the so called Cantorian part of  $Du$ . In order to let this structure be of use for the Mumford-Shah conjecture, it is enough to get rid of the Cantorian part : Indeed, it is obvious that if  $K$  is rectifiable and has finite  $\mathcal{H}^{N-1}$  Hausdorff measure, and if  $u \in H^1(\Omega \setminus K)$ , then  $u$  is in  $BV$ . Conversely, De Giorgi [DeGiAm, DeGi0] has defined what he calls "Special functions with Bounded Variation" ( $SBV$ -functions), functions of  $BV$  for which  $C(u) = 0$ .  $SBV$  is proposed as the right "search space" for finding minimizers of the MS functional. This proposition is justified by the following theorem.

**THEOREM 1** ([Amb1, Thm 2.1]).— *Let  $u_n \in SBV(\Omega)$  be a sequence of functions such that  $-C \leq u_n \leq C$  and*

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + \mathcal{H}^{n-1}(K(u_n)) \leq C < \infty.$$

*Then, there exists a subsequence (still denoted by  $u_n$ ) converging almost everywhere to a function  $u \in SBV(\Omega)$ . In addition,  $\nabla u_n$  converges weakly in  $L^2(\Omega)$  to  $\nabla u$  and  $E(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n)$ .*

**Sketch of Proof.**— Let us start with the case of dimension  $N = 1$ . In that case,  $K(u_n)$  simply is a set of points and  $\mathcal{H}^0(K(u_n))$  its cardinality. Since the assumption asserts that this cardinality is uniformly bounded, we can extract a subsequence such that  $K(u_n)$  converges in the Hausdorff distance to a finite set of points  $K$ . It is then easily checked by compactness in  $H^1$  that  $u_n$  converges strongly in  $L^2(\mathbb{R} \setminus K)$  to some fonction  $u$  and  $\nabla u_n$  converges weakly in  $L^2(\mathbb{R} \setminus K)$  to  $\nabla u$ . Thus the discontinuity set of  $u$  is contained in  $K$  and by Fatou's lemma we get the last assertion of the theorem.

A "slicing theorem" for  $SBV$  functions ([Amb2, Prop. 3]) permits to reduce the  $N$ -dimensional case to the one-dimensional. Let us denote by  $e_1, \dots, e_i, \dots, e_N$  the

canonical euclidian basis of  $\mathbb{R}^N$  and by  $\pi_i$  the hyperplane orthogonal to  $e_i$ . For every  $x \in \pi_i$ , we consider the restriction  $u_x(t) = u(x + te_i)$  to the line parallel to  $e_i$  and passing by  $x$ . Let us assume for simplicity that  $\Omega_N = [0, 1]^N$ . Then it is not difficult to prove that a function  $u \in BV(\Omega_N)$  satisfies  $u \in SBV(\Omega_N)$  if and only if its restriction  $u_x \in SBV([0, 1])$  for almost every  $x \in \Omega_{N-1}$ . In addition, the  $N - 1$ -dimensional area of a rectifiable set  $K$  is easily recovered from the cardinalities of its slices by using the reconstruction formula

$$\int_K \langle \nu, e_i \rangle d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\pi_i} \mathcal{H}^0(\{t, x + te_i \in K\}) d\mathcal{L}_{N-1},$$

where  $\mathcal{L}_{N-1}$  is the  $N - 1$ -dimensional Lebesgue measure and  $\nu$  the normal to  $K$ . From this and Fatou's lemma, one deduces that  $\mathcal{H}^{N-1}(K(u)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{N-1}(K(u_n))$  and the same for the Sobolev norm of  $u_n$ , so that  $E(u)$  appears to be lower discontinuous.

### 3. PROOF OF THE UNIFORM RECTIFIABILITY

We shall now give sketches of the main arguments which can be used for giving shape to the conjecture. We restrict ourselves to the case of dimension 2. Let us begin with a formula which relates the optimality of a minimizing segmentation  $(u, K)$  to the shape of  $K$ . In what follows, we denote the first term of the MS functional by  $I_{\Omega \setminus K}(u) = \int_{\Omega \setminus K} |Du|^2$ .

**ENERGY JUMP LEMMA [Kn].**— *Let  $K$  be a rectifiable subset of  $\Omega$ . Let  $u$  minimize  $I_{\Omega \setminus K}$  and  $v$  be the minimum of the MS energy associated with an empty segmentation,  $I_{\Omega}(v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2$ . Denote by  $\frac{\partial v}{\partial n}$  the derivative of  $v$  in the direction normal to  $K$ . Then*

$$I_{\Omega}(u) - I_{\Omega}(v) = \int_K (u^+ - u^-) \frac{\partial v}{\partial n} + \mathcal{H}^1(K).$$

*As a consequence, if  $(u, K)$  is an optimal segmentation, then*

$$\mathcal{H}^1(K) \leq \left| \int_K (u^+ - u^-) \frac{\partial v}{\partial n} \right|.$$

**Sketch of proof.**— This theorem is an obvious consequence of the Green formula, together with the consideration that  $\frac{\partial u}{\partial n}$  is zero on  $K$  and  $\partial\Omega$  and  $v$  is continuous so

that  $v^+ - v^- = 0$  on  $K$ . The use of Green formula when the boundary of a domain is rectifiable is justified in [DalMMS2]. The last announced inequality is obtained because  $v$  is no successful competitor to  $u$ .

All regularity results for the MS conjecture start with more or less sophisticated excision arguments. Let us begin with the most basic one.

EXCISION LEMMA.— *If  $(u, K(u))$  minimizes  $E$ , then for every disk  $D = D(x, r)$ ,*

$$\int_D |Du|^2 + \mathcal{H}^1(K) \leq 2\pi R.$$

**Proof.** If this inequality is false, we can build a competitor  $(v, (K \setminus D) \cup \partial D)$ , with  $v = u$  outside  $D$ ,  $v = 0$  inside  $D$ . In other terms, we add to  $K$  a circle, which permits to put to zero the MS energy inside the disk, and we obtain a lower energy, contradicting the minimality of  $(u, K)$ .

We shall now see how to obtain information on the geometric behaviour of  $K$  with the simple use of both preceding lemmas. The next lemma states roughly that each part of  $K$  must be large enough (or close enough to another part) in order to survive. When  $\Omega = \mathbb{R}^2$ , this also implies that  $K$  is unbounded.

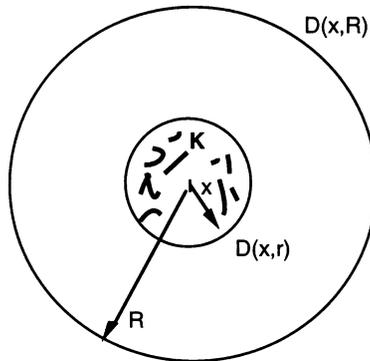


Figure 2 : Elimination Lemma

ELIMINATION LEMMA [DalMMS1,2].— *There is a constant  $M > 0$  such that for any disk  $D(x, R)$  contained in  $\Omega$ , if  $R \geq Mr$  and  $(D(x, R) \setminus D(x, r)) \cap K = \emptyset$ , then  $K \cap D(x, r) = \emptyset$ .*

In this lemma and in the remainder of this conference, we denote by  $C$  any constant which only depends on the image domain  $\Omega$ . The Elimination Lemma reads in the theory of fracturation of homogeneous elastic media as “a fracture cannot be too small”. If the model is correct, then the fracturation process must be sudden, at least at its beginning ([Kn]).

**Sketch of proof.**— Let  $r \leq \rho \leq R$  be a radius to be adequately fixed. By the Energy Jump Lemma, we know that  $\mathcal{H}^1(K) \leq |\int_K (u^+ - u^-) \frac{\partial v}{\partial n}|$ , where  $v$  is a continuous function such that  $v = u$  outside  $D(x, \rho)$  and  $v$  minimizes  $I(v)$  inside  $D(x, \rho)$ . Let us estimate both  $(u^+ - u^-)$  and  $|\frac{\partial v}{\partial n}|$  on  $K$ . By Maximum Principle, we have

$$|u^+ - u^-| \leq \max_{\partial D(x, r')} u - \min_{\partial D(x, r')} u$$

for every disk  $\partial D(x, r')$  containing  $K$ . Now, using the EXCISION LEMMA, we have  $\int_{D(x, 2r)} |Du|^2 \leq 4\pi r$  and we can therefore select some  $r \leq r' \leq 2r$  such that  $\int_{\partial D(x, r')} |Du|^2 \leq C$ . By integrating along this circle and using Hölder inequality, we obtain that for  $y \in K$ ,

$$|u^+(y) - u^-(y)| \leq \max_{\partial D(x, r')} u - \min_{\partial D(x, r')} u \leq Cr^{\frac{1}{2}}.$$

Let us now proceed to estimate the other term of the ENERGY JUMP LEMMA, that is,  $|\frac{\partial v}{\partial n}(y)|$  for  $y \in K$ . By the same argument which yields  $r'$ , we can find  $\rho$  such that  $\frac{R}{2} \leq \rho \leq R$  and  $\int_{\partial D(x, \rho)} |Du|^2 \leq C$ . Since  $v = u$  on  $\partial D(x, \rho)$ , the same estimate is valid for the tangential derivative of  $v$  on  $\partial D(x, \rho)$ . By standard estimates on the Poisson kernel, we then have  $|Dv(y)| \leq C(\rho - |x|)^{-\frac{1}{2}}$  for any point  $y$  inside  $D(x, \rho)$ . Thus, for  $y \in K \cap D(x, r)$ , using  $R \geq Mr$ , we get

$$|Dv(y)| \leq C(Mr)^{-\frac{1}{2}}.$$

Summarizing the obtained inequalities, we see that for  $y \in K$ ,

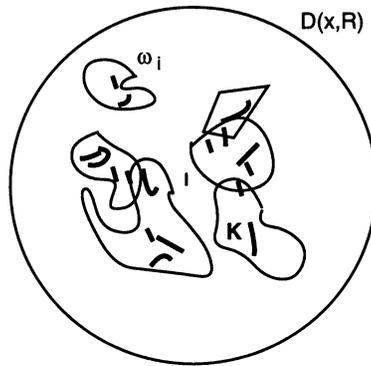
$$|(u^+ - u^-) \frac{\partial v}{\partial n}| \leq CM^{-\frac{1}{2}}.$$

Integrating this inequality over  $K \cap D(x, r)$  and using the ENERGY JUMP LEMMA, we finally obtain

$$\mathcal{H}^1(K \cap D(x, r)) \leq CM^{-\frac{1}{2}} \mathcal{H}^1(K \cap D(x, r)),$$

which implies  $\mathcal{H}^1(D(x, r)) = 0$  if  $M$  is large enough.

It is worth noticing that the preceding argument can be sharpened so as to yield more and more uniform density estimates on the geometry of  $K$ . The uniform projection property, the concentration property and the uniform rectifiability property can be obtained in the same line (see [MoS3] for a unified presentation). Let us give a sketch of proof for the uniform rectifiability property, which anyway implies all of the other ones. We begin with a lemma which we obtain by sharpening the arguments of the previous proof.



**Figure 3** : Small oscillation covering

**SMALL OSCILLATION COVERING LEMMA** .— *There is a function  $C(\nu) > 0$  such that whenever we can find a covering of  $K \cap D(x, R)$  by simply connected open sets  $\omega_i$ ,  $i \in I$  such that  $\partial\omega_i$  does not meet  $K$ , the  $\omega_i$  are not redundant in the sense that*

$$\sum_i \mathcal{H}^1(K \cap \omega_i) \leq C\mathcal{H}^1(K \cap D(x, R))$$

*and the oscillation of  $u$  on  $\partial\omega_i$  is uniformly controlled,*

$$\int_{\partial\omega_i} |Du| \leq \nu,$$

*then  $\max_i (\mathcal{H}^1(\partial\omega_i)) \leq C(\nu)R$  implies  $\mathcal{H}^1(K \cap D(x, \frac{R}{2})) = \emptyset$ .*

**Sketch of proof.**— Of course, we must think of  $\nu$  as rather large and  $C(\nu)$ , which measures how “thin” the covering is, as a small enough constant. We shall take a simplifying assumption, which is inessential but without which the proof which follows

would be significantly longer : We assume that all of the  $\omega_i$ 's are at a distance to  $\partial D(R)$  larger than  $cR$  for some small fixed constant  $c$ . In reality, "most" of the points in a disk are far from its boundary so that this simplifying assumption can be removed, or rather replaced, by a mean value argument on  $R$ . Under this slightly stronger assumption, we shall actually prove more, that is  $\mathcal{H}^1(K \cap D(x, R)) = 0$  when  $C(\nu)$  is small enough. The ENERGY JUMP LEMMA and a straightforward adaptation of the bounds on  $u^+ - u^-$  and  $\frac{\partial v}{\partial n}$  computed in the proof of the ELIMINATION LEMMA yield

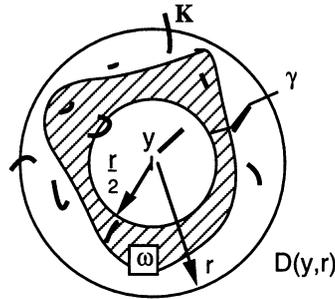
$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(K \cap D(R)) &\leq C \Sigma_i \left( \frac{\nu \mathcal{H}^1(\partial \omega_i)^{\frac{1}{2}}}{R^{\frac{1}{2}}} \mathcal{H}^1(K \cap \omega_i) \right) \\ &\leq C \nu^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\max_i \mathcal{H}^1(\partial \omega_i)}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{H}^1(K \cap D(x, R)) \leq C \nu^{\frac{1}{2}} C(\nu)^{\frac{1}{2}} \mathcal{H}^1(K \cap D(x, R)). \end{aligned}$$

Thus, if  $C(\nu)$  is small enough, we see that  $\mathcal{H}^1(K \cap D(x, R)) = \emptyset$ .

Of course, the statement of the SMALL OSCILLATION COVERING LEMMA must be reversed, and it tells us that if  $K \cap D(x, \frac{R}{2}) \neq \emptyset$ , then no small oscillation covering can be built. This essentially means that, in a quantifiable way,  $K$  is not too much spread out. Let us take an example.

**DEFINITION (QUANTIFIED NONCONNECTEDNESS).**— *We say that  $K$  satisfies the quantified nonconnectedness property in a disk  $D(x, R)$  in correspondence of two constants  $\alpha > 0$  and  $\varepsilon > 0$  if for every disk  $D(y, r) \subset D(x, R)$  with  $r \geq \alpha R$  and for every rectifiable curve  $\gamma$  connecting the circles  $\partial D(y, \frac{r}{2})$  and  $\partial D(y, r)$ , one has  $\mathcal{H}^1(\gamma \setminus K) \geq \varepsilon r$ .*

We wish now to explain why the quantified nonconnectedness implies the existence of a small oscillation covering. This is the main argument in [DaSe1], based on an elegant use of the coarea formula.



**Figure 4** : Quantified nonconnectedness property

LEMMA [DaSe1].— Assume that  $K$  satisfies the quantified nonconnectedness property in a disk  $D(x, R)$ . Then for every  $y \in K$  and  $r \geq \alpha R$ , there exists a simply connected open set  $\omega$  such that  $D(y, \frac{r}{2}) \subset \omega \subset D(y, r)$ , whose boundary  $\partial\omega$  does not meet  $K$  and satisfies

$$\mathcal{H}^1(\partial\omega) \leq \frac{C}{\varepsilon} r, \quad \int_{\partial\omega} |Du| \leq \frac{C}{\varepsilon} r^{\frac{1}{2}}.$$

**Sketch of proof.**— We define a geodesic distance  $\delta(x)$  in the closed disk  $D = D(y, r)$  as the infimum of the values of  $\mathcal{H}^1(\gamma \setminus K)$  extended to all the rectifiable curves contained in  $D$  and connecting  $\partial D$  to  $x$ . Obviously,  $\delta$  is a Lipschitz function, is zero on  $\partial D$  and satisfies by assumption  $\delta(x) \geq \varepsilon r$  if  $x \in D(y, \frac{r}{2})$ . By the coarea formula, considering the slicing of the disk made by the isolevel sets  $\delta^{-1}(t)$ , we can assert that for every integrable function  $f \geq 0$  on the disk,

$$\int_0^{\varepsilon r} \int_{\delta^{-1}(t)} f d\mathcal{H}^1 dt \leq \int_D f.$$

Applying this to  $f = |Du|$  and noting that by Hölder inequality and the EXCISION LEMMA,  $\int_{D(y, r)} |Du| \leq Cr^{\frac{3}{2}}$ , we get

$$\int_0^{\varepsilon r} \int_{\delta^{-1}(t)} |Du| d\mathcal{H}^1 dt \leq Cr^{\frac{3}{2}}.$$

So by a mean value argument, we see that for most of the  $t \in [0, \varepsilon r]$  we have, for a large enough constant  $C$ ,

$$\int_{\delta^{-1}(t)} |Du| d\mathcal{H}^1 dt \leq Cr^{\frac{3}{2}}.$$

In the same way, since  $\mathcal{H}^1(K \cap D) \leq Cr$ , we can select, by the coarea formula again,  $t$  among the preceding ones such that

$$\mathcal{H}^1(\delta^{-1}(t)) \leq \frac{C}{\varepsilon}r.$$

**Proof of the quantified rectifiability property.**— We have now all ingredients to prove the David-Semmes result. We first notice that if  $K$  does not satisfy the quantified rectifiability property, then we can find  $\varepsilon > 0$  such that for every  $\alpha > 0$ , there is a disk  $D(x, R)$  centered on  $K$  which satisfies the Quantified Nonconnectedness Property. Then the previous David-Semmes Lemma asserts that we can surround every  $x$  in  $K \cap D(R)$  by a set  $\omega(x)$  whose perimeter is proportional to  $\frac{r}{\varepsilon}$  and therefore to  $\frac{\alpha R}{\varepsilon}$ . In addition, on the boundary of  $\omega(x)$  the oscillation of  $u$  is controlled by a constant  $\nu = \frac{C}{\varepsilon}$ . Using a Besicovich covering lemma, it is easy to extract from the covering  $\{\omega(x), x \in K \cap D(R)\}$  a nonredundant covering  $(\omega_i), i \in I$  in the sense of the Small Oscillation Covering Lemma. Since  $\alpha$  can be arbitrarily small for fixed  $\varepsilon$ , we see that the perimeters of the  $\omega_i$ , of order  $\frac{\alpha R}{\varepsilon}$ , can be chosen to be arbitrarily small with respect to  $R$ . So we conclude by the SMALL OSCILLATION COVERING LEMMA that  $D(x, \frac{R}{2}) \cap K$  is empty, which contradicts the assumption that it is centered on  $K$ .

#### 4. CLASSIFICATION OF CONNECTED GLOBAL MINIMIZERS

We now give the elements of the Bonnet proof that all isolated connected components of  $K$  indeed answer the Mumford-Shah conjecture. From now on, we call *global minimizers* of the MS functional pairs  $(u, K)$  whose energy cannot be decreased by any modification inside a disk *which preserves the connected components of  $\mathbb{R}^2 \setminus K$  outside the disk*. This is a less restrictive notion of global minimizer than the one introduced at the beginning of this conference. The central new estimate in [Bo] is the following monotonicity formula, inspired from [ACF].

MONOTONICITY FORMULA ([Bo]).— *Let  $(u, K)$  be a global minimizer of  $E$  and set  $\varphi(r) = \int_{D(x,r) \setminus K} |Du|^2$ . If  $K$  is connected, then  $r \rightarrow \frac{\varphi(r)}{r}$  is a nondecreasing function of  $r$ . If  $\frac{\varphi(r)}{r}$  is constant, then in some polar coordinates  $(r, \theta)$  we have*

$$u(r, \theta) = C\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{for } \theta \in [0, 2\pi]$$

and  $K$  is the half axis  $\{\theta = 0\}$ . In addition, we have either  $C = 0$  or  $|C| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ , which corresponds to  $\frac{\varphi(r)}{r} \equiv 0$  or  $\frac{\varphi(r)}{r} \equiv 1$ .

The proof, which we omit, combines the ENERGY JUMP LEMMA and a tricky combination of elementary inequalities. The value of the constant  $C$  is given in [Kn] and is computed by doing a first variation in  $E$  when we propagate the “crack tip” in a straight line.

**CLASSIFICATION THEOREM ([Bo]).**— *If  $(u, K)$  is a global minimizer (for perturbations preserving connectedness) such that  $K$  is connected, then  $\frac{\varphi(r)}{r}$  is either identically equal to 0 or to 1 and  $(u, K)$  is one of the following:*

- (i)  $K$  is empty and  $u$  is constant.
- (ii)  $K$  is a straight line defining two half-planes and  $u$  is constant on each half-plane.
- (iii)  $K$  is the union of three half lines with angle  $\frac{2\pi}{3}$  and  $u$  is constant on each sector.
- (iv) (Crack tip.) In a polar set of coordinates,  $u(r, \theta) = Cr^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$  and  $K$  is the half axis  $\theta = 0$ . In addition,  $|C| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ .

**Sketch of proof.**— Let us first define a blow-up technique. We set

$$u_\varepsilon(x) = \frac{u(\varepsilon x) - c_\varepsilon(x)}{\sqrt{\varepsilon}},$$

$$K_\varepsilon = \{x, \varepsilon x \in K\}.$$

The real function  $c_\varepsilon(x)$  is piecewise constant on the complementary of  $K$ . It is chosen in order to keep  $u_\varepsilon$  bounded as  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Then it is easily proved that a subsequence of  $(u_\varepsilon, K_\varepsilon)$  converges to a global minimizer  $u_0, K_0$  of  $E$ . More precisely,  $K_\varepsilon \rightarrow K_0$  in the Hausdorff metric,  $u_\varepsilon \rightarrow u_0$  strongly in  $H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \setminus K_0)$ . This is easily obtained as a consequence of the Concentration Property stated in the introduction, which implies that the Hausdorff length is lower semicontinuous when restricted to minimizers of  $E$ . The main argument is to show that  $\frac{\varphi(r)}{r}$  is constant for a properly chosen origin, which is obtained by studying the limits  $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{or } 0 \frac{\varphi(r)}{r}$ . We define a “blow-down” by

$$u_l(x) = \frac{u(lx)}{\sqrt{l}}, \quad K_l = \{x, lx \in K\},$$

where  $l \rightarrow +\infty$ . We know that a blow-up subsequence converges to a global minimizer  $(u_0, K_0)$  and, by the same argument, a blow-in sequence converges to a global

minimizer  $(u_\infty, K_\infty)$ . It is immediately deduced that, setting  $\varphi_0(r) = \int_{D(r)} |Du_0|^2$  and  $\varphi_\infty(r) = \int_{D(r)} |Du_\infty|^2$ ,

$$\frac{\varphi_0(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi(r)}{r}, \quad \frac{\varphi_\infty(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi(r)}{r}.$$

By the MONOTONICITY FORMULA LEMMA, we know then that  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi(r)}{r}$  and  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi(r)}{r}$  take either the value 0 or the value 1. We only have two cases to consider

**Case 1 :** We have  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi(r)}{r} = 0$ . By the monotonicity formula we then have  $\varphi(r) \equiv 0$ . Thus  $u$  is a constant in any connected component of  $\mathbb{R}^2 \setminus K$  and  $K$  appears to be a simple minimizer of  $\mathcal{H}^1(K)$  under the connectedness constraint. It is well-known, and anyway easy to show, (see [MumS2] for all details) that then  $K$  satisfies one of the situations (i), (ii) or (iii) of the theorem.

**Case 2 :** We have  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi(r)}{r} = 1$ . Then if also  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi(r)}{r} = 1$ , we conclude, again by the MONOTONICITY FORMULA LEMMA, that we are in the case (iv) of the theorem. Then it only remains to rule out the case where  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi(r)}{r} = 1$  and  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi(r)}{r} = 0$ . This is done by proving by contradiction that there exists a point  $x_0$  such that if we perform a blow-down with  $x_0$  as origin, then  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi(r)}{r} = 1$ . We shall not detail this argument, which uses “cut and paste” arguments on  $K$  and of course the connectedness.

In order to complete this review, we would have liked to explain how further regularity on the edge set is obtained. Let us just point out that the process leading to regularity proofs is heuristically contained in the formula given in [MumS2],

$$\text{curv}(K) = |Du^+|^2 - |Du^-|^2,$$

where it is assumed that  $K$  locally is a  $C^2$  embedded curve,  $\text{curv}(K)$  denotes the curvature of  $K$ ,  $u^+$  and  $u^-$  the limits of  $u$  on both sides of  $K$ . The formula is easily obtained by taking the first variation of  $E$  when we perturb  $K$  sideways. From this formula, it is easily deduced that if  $u$  is smooth enough on the complementary of  $K$ , then so is  $K$  and conversely. The problem is : how to start the bootstrap argument ? Weak versions of the formula must be found to this effect. A first possibility, developed in David [Da] is to first find a quantified “close-the-holes” argument which shows that at almost points,  $K$  is an embedded curve. Once this is obtained, the bootstrap starts by proving that  $K$  must in fact be a chord arc curve. Then estimates on  $Du$  are obtained by conformal mapping on both sides of  $K$ . In

the works of Ambrosio-Pallara, Ambrosio-Fusco-Pallara and Bonnet, the “close the holes” argument is obtained by a blow-up argument.

## CONCLUSION

Although much evidence in favour of the MS conjecture has been gathered, it is not clear how far we are from a conclusive argument. Let us give a small list of still puzzling problems. The first one, raised in [MumS2], also of interest for fracturation theory, is the question of whether a crack tip is a global minimizer (without connectedness constraint). In some extent, the Bonnet arguments seem to indicate that this problem is of the same level of difficulty as the conjecture itself.

Mumford and Shah [MumS2] conjecture that some crack tips might be  $C^1$ , but not  $C^{1,1}$  at their endpoint. They give an example apparently supporting this view. If this happens to be true, we shall deduce that the analogy between the segmentation problem and fracturation theory only is very superficial : because this will imply that the MS energy is not adequate for the modelling of quasi static crack propagation ([Kn]).

Let us finally note that the higher dimension functional is wanting precise conjectures about the shape of  $K$ , in particular for the shape of possible “cracks”.

Me must apologize not to have reviewed works on variants of the MS functional. Of much interest for applications in image processing is the case where we enforce  $u$  to be piecewise constant on each connected components : see [MumS2], [MoS2,3] for a proof of the MS conjecture in this particular case and [MaTa] for existence and regularity results in higher dimensions. [BZ] proposes variants of the MS functional which improve its performance in image analysis and an interesting work on its mathematical properties is [CaLT].

*ACKNOWLEDGEMENT : We thank Alexis Bonnet, Guy David, Françoise Dibos and Sergio Solimini for valuable conversations and suggestions and Antonin Chambolle for the numerical experiment enclosed in this paper. We also thank Ennio De Giorgi for some memorable conversations. Work supported by the H.M.C. program of the E.C.*

REFERENCES

- [ACF] H.W. Alt, L. A. Caffarelli and A. Friedman – *Variational problems with two phases and their free boundary*, Trans. A.M.S. **282**, 431–461, 1984.
- [Amb1] L. Ambrosio – *A compactness theorem for a special class of functions of bounded variation*, Boll. Un. Mat. It., 3-B , 857–881, 1989.
- [Amb2] L. Ambrosio – *Existence theory for a new class of variational problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **111**, 291–322, 1990.
- [Amb3] L. Ambrosio – *Variational problems in SBV*, Acta Applicandae Mathem. **17**, 1–40, 1989.
- [Amb4] L. Ambrosio – *A new proof of SBV compactness theorem*, Calc. Var. **3**, 127–137, 1995.
- [AP] L. Ambrosio and D. Pallara – *Partial regularity of free discontinuity sets I*, preprint, Universita di Pisa, October 1994.
- [AFP] L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara – *Partial regularity of free discontinuity sets II*, Preprint 21, 1995, Universita degli Studi di Napoli “Federico II”.
- [AmbTo] L. Ambrosio and V.M. Tortorelli – *Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via  $\Gamma$ -convergence*, Comm. Pure Appl. Math. **43**, 999–1036, 1991.
- [BlatM2] J. Blat, and J.-M. Morel – *Elliptic problems in image segmentation and their relation to fracture theory*, Proceedings of the Int. Conf. on nonlinear elliptic and parabolic problems, Nancy 88, Longman 1989.
- [BZ] A. Blake and A. Zisserman – *Visual reconstruction*, MIT Press, 1987.
- [Bo] A. Bonnet – *On the regularity of edges in the Mumford-Shah model for image segmentation*, preprint, 1995.
- [Br] K.A. Brakke – *The motion of a surface by its mean curvature*, Princeton U.P., 1978.
- [CaLe1] M. Carriero and A. Leaci –  *$S^k$ -valued maps minimizing the  $L^p$  norm of the gradient with free discontinuities*, Ann. Sc. Norm. Pisa, s.IV 18 , 321–352, 1991.
- [CaLe2] M. Carriero, A. Leaci, D. Pallara and E. Pascali – *Euler conditions for a minimum problem with free discontinuity surfaces*, Preprint Dipartimento di Matematica, Lecce, 1988.
- [CaLe] M. Carriero and A. Leaci – *Existence theorem for a Dirichlet problem with free discontinuity set*, Nonlinear Analysis TMA **15**, 661–677, 1990.
- [CaLT] M. Carriero, A. Leaci and F. Tomarelli – *Plastic free discontinuity and Special Bounded Hessian*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 314, s.I, 595–600, 1992.

- [CarDeGL] M. Carriero, E. De Giorgi and A. Leaci – *Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set*, Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 108, 1989.
- [Cham] A. Chambolle – *Un théorème de  $\Gamma$ -convergence pour la segmentation des signaux*, C.R.Acad.Sci. Paris **314**, S I, 191–196, 1992.
- [DalMMS1] G. Dal Maso, J.–M. Morel and S. Solimini – *Une approche variationnelle en traitement d’images: résultats d’existence et d’approximation*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, p. 549–554, 1989.
- [DalMMS2] G. Dal Maso, J.–M. Morel and S. Solimini – *A variational method in image segmentation: existence and approximation results*, Acta Mathematica, Vol. 168, 89–151, 1992.
- [Da] G. David –  $C^1$  arcs for minimizers of the Mumford-Shah functional. To appear in SIAM J. Appl. Math., 1996.
- [DaSe1] G. David and S. Semmes – *On the singular set of minimizers of Mumford-Shah functional*. To appear in Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (1993)
- [DaSe2] G. David and S. Semmes – *Uniform rectifiability and singular sets*. To appear, Annales de l’IHES.
- [DeGi0] E. De Giorgi – *Free Discontinuity Problems in Calculus of Variations*, in: Frontiers in pure and applied Mathematics, a collection of papers dedicated to J.–L. Lions on the occasion of his 60<sup>th</sup> birthday, R. Dautray ed., 55–61, North Holland, 1991.
- [DeGiAm] E. De Giorgi and L. Ambrosio – *Un nuovo tipo di funzionale del Calcolo delle Variazioni*, Atti Accad. Naz. Lincei, s.8 82 , 199–210, 1988.
- [DeGiCL] E. De Giorgi, M. Carriero and A. Leaci – *Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set*, Arch. Rational Mech. Anal. **108**, 195–218, 1989.
- [Dib] F. Dibos – *Uniform rectifiability of image segmentations obtained by variational method*. To appear in Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1993.
- [DibK] F. Dibos and G. Koepfler – *Propriété de régularité des contours d’une image segmentée*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 313, Série I, p. 573–578, 1991.
- [DiSé] F. Dibos and E. Séré – *Approximating Mumford-Shah minimizers*. Preprint, CEREMADE, 1994.
- [GG] D. Geman and S. Geman – *Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images*, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. **6**, 721–741, 1984.
- [Gi] E. Giusti – *Minimal surfaces and functions with bounded variations*, Birkhäuser, Boston, 1984.

- [Jo] P. Jones – *Rectifiable sets and the traveling salesman problem*, Invent. Mathematicae **102**, 1–16, 1990.
- [Kn] J. K. Knowles – *A note on the energy release rate in quasi-static elastic crack propagation*, SIAM J. Appl. Math. **41**, 401–412, 1981.
- [Lea] A. Leaci – *Free discontinuity problems with unbounded data: the two dimensional case*, Manuscripta Math. **75**, 429–441, 1992.
- [Lég] J.-C. Léger – *Une remarque sur la régularité d'une image segmentée*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1993.
- [Li] F.H. Lin – *Variational problems with free interfaces*, Calc. Var. **1**, 149–168, 1993.
- [MaTa] U. Massari and I. Tamanini – *Regularity properties of optimal segmentations*, J. Reine Angew. Math. **420**, 61–84, 1991.
- [MoS1] J.-M. Morel and S. Solimini – *Segmentation of images by variational methods: a constructive approach*, Rev. Matematica de la Universidad Complutense de Madrid, Vol.1, n<sup>o</sup> 1,2,3, 169–182, 1988.
- [MoS2] J.-M. Morel and S. Solimini – *Segmentation d'images par méthode variationnelle: une preuve constructive d'existence*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I, 1988.
- [MoS3] J.-M. Morel and S. Solimini – *Variational methods in image segmentation*, Birkhäuser, Boston, 1994.
- [MumS1] D. Mumford and J. Shah – *Boundary detection by minimizing functionals*, IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, San Francisco, 1985.
- [MumS2] D. Mumford and J. Shah – *Optimal Approximations by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems*, Communications on Pure and Applied Mathematics. vol. XLII No.4, 1989.
- [MumS3] D. Mumford and J. Shah – *Boundary detection by minimizing functionals*, Image Understanding, 1988, Ed. S. Ullman and W. Richards.
- [So] S. Solimini – *Functionals with surface terms on a free singular set*, Nonlinear partial differential equations and applications, College de France Seminar, Pitman, 1993.
- [Zi] W.P. Ziemer – *Weakly differentiable functions*, Springer Verlag, Berlin, 1989.

Jean-Michel MOREL

CEREMADE

Université Paris-Dauphine

Place de Lattre de Tassigny

F-75775 PARIS CEDEX 16 (France)

morel@paris9.dauphine.fr

# *Astérisque*

GILLES PISIER

## **Espaces d'opérateurs : une nouvelle dualité**

*Astérisque*, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 814, p. 243-272

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1995-1996\\_\\_38\\_\\_243\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__243_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ESPACES D'OPÉRATEURS : UNE NOUVELLE DUALITÉ

par Gilles PISIER

### 0. INTRODUCTION

La théorie des “espaces d’opérateurs” est une création très récente. Leur point de départ est la thèse de Z.J. Ruan [Ru1] qui en contient une caractérisation “abstraite”. Immédiatement après, Blecher-Paulsen [BP1] et Effros-Ruan [ER1] ont indépendamment découvert que cette caractérisation permet d’introduire une dualité dans la catégorie des espaces d’opérateurs et ils en ont développé la théorie à partir de là (*cf.* [ER1-6, B1-3, Pa2]).

La notion d’espace d’opérateurs est intermédiaire entre celle d’espace de Banach et celle de  $C^*$ -algèbre. On pourrait aussi les appeler “espaces de Banach non-commutatifs” (mais le cas commutatif doit être inclus !) ou encore “espaces de Banach quantiques” (mais ce dernier terme a déjà beaucoup servi...).

Un espace d’opérateurs (parfois abrégé e.o.) est simplement un sous-espace fermé  $E \subset B(H)$  de l’espace  $B(H)$  des opérateurs bornés sur un Hilbert.

Cette définition est un peu déconcertante : tout espace de Banach  $E$  admet (pour  $H$  convenable) une copie isométrique  $\tilde{E} \subset B(H)$ , donc tous les Banach apparaissent comme espaces d’opérateurs. Mais la nouveauté est dans les *morphismes* (et les isomorphismes) qui ne sont plus ceux de la catégorie des Banach usuels. Au lieu des applications bornées, on va utiliser comme morphismes les applications *complètement bornées* (en abrégé c.b.) qui sont apparues avec force au début des années 80 (voir [Pa1]) et qui étaient implicites dans les travaux de Stinespring (1955) et Arveson (1969) (sur les applications complètement positives).

L’idée sous-jacente est la suivante : étant donnés deux espaces d’opérateurs :

$$E_1 \subset B(H_1) \quad , \quad E_2 \subset B(H_2),$$

on veut des morphismes qui *respectent* les réalisations des espaces de Banach  $E_1$  et  $E_2$  comme espaces d’opérateurs. Par exemple, s’il existe une représentation

$\pi : B(H_1) \rightarrow B(H_2)$  (i.e. on a  $\pi(xy^*) = \pi(x)\pi(y)^*$ ,  $\pi(1) = 1$  et par conséquent  $\|\pi\| = 1$ ) telle que  $\pi(E_1) \subset E_2$ , alors la "restriction"  $\pi|_{E_1} : E_1 \rightarrow E_2$  doit évidemment être admise comme morphisme, d'où un premier type. Bien sûr, l'inconvénient est que cette classe ne forme pas un espace vectoriel, mais il y a aussi un second type de morphismes naturels : supposons donnés deux opérateurs bornés  $a : H_1 \rightarrow H_2$  et  $b : H_1 \rightarrow H_2$  et considérons l'application  $M_{ab} : B(H_1) \rightarrow B(H_2)$  donnée par  $M_{ab}x = axb^*$ . Alors là encore, si  $M_{ab}(E_1) \subset E_2$ , il est naturel d'accepter la restriction de  $M_{ab}$  à  $E_1$  comme morphisme.

Les applications complètement bornées peuvent être vues comme les compositions d'un morphisme du premier type suivi d'un du second type. Plus précisément, bien que ce ne soit pas "orthodoxe", on peut les définir comme suit :

**DÉFINITION 0.1.**— Soit  $E \subset B(H)$ ,  $E_2 \subset B(H_2)$  deux espaces d'opérateurs et soit  $u : E \rightarrow E_2$  une application linéaire. On dit que  $u$  est complètement bornée s'il existe un espace de Hilbert  $H_1$ , une représentation  $\pi : B(H) \rightarrow B(H_1)$  et deux opérateurs  $a, b : H_1 \rightarrow H_2$  tels que :

$$\forall x \in E \quad u(x) = a\pi(x)b^*.$$

On pose :

$$(0.1) \quad \|u\|_{cb} = \inf \{ \|a\| \|b\| \},$$

où l'infimum porte sur toutes les décompositions de cette forme.

On notera  $cb(E, E_2)$  l'espace des applications c.b. de  $E$  dans  $E_2$ .

En d'autres termes, si  $E_1 = \overline{\pi(E)}$ , on a  $u = u_2u_1$  avec  $u_1 = \pi|_E$  et  $u_2 = M_{ab}|_{E_1}$ .

On peut montrer (petit exercice !) que (0.1) définit une norme qui fait de  $cb(E, E_2)$  un espace de Banach, mais cela résulte aussi du théorème 0.2 ci-dessous.

Le principal intérêt de la notion précédente est qu'il en existe une description équivalente (analogue à celle des applications linéaires bornées) comme une inégalité (ou une suite d'inégalités) vérifiées par  $u$ . L'énoncé suivant est donc fondamental. Il est apparu indépendamment dans les travaux de Wittstock [Wi], Haagerup [H] et Paulsen [Pa3].

**Notation.**— Soit  $E \subset B(H)$  un espace d'opérateurs ; on note  $M_n(E)$  l'espace des matrices  $n \times n$  à coefficients dans  $E$ , muni de la norme :

$$(0.2) \quad \forall a = (a_{ij}) \in M_n(E) \quad \|a\|_{M_n(E)} = \sup \left\{ \left( \sum_i \left\| \sum_j a_{ij} h_j \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mid h_j \in H \sum \|h_j\|^2 \leq 1 \right\}.$$

Autrement dit, on fait agir la matrice  $a$  naturellement sur  $H \oplus \cdots \oplus H$  et on calcule sa norme usuelle.

**THÉORÈME 0.2.**— Soit  $E \subset B(H)$ ,  $F \subset B(K)$  ( $H, K$  Hilbert), soit  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire et soit  $C \geq 0$  une constante. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) L'application  $u$  est c.b. et vérifie  $\|u\|_{cb} \leq C$ .

(ii) Les applications  $u_n : M_n(E) \rightarrow M_n(F)$  définies par  $u_n((a_{ij})) = u((a_{ij}))$  sont uniformément bornées au sens usuel pour la norme définie en (0.2) et vérifient :

$$\sup_{n \geq 1} \|u_n\| \leq C.$$

De plus, la borne inférieure est atteinte dans (0.1) (i.e. il existe une décomposition réalisant la borne inférieure).

La propriété d'extension suivante est cruciale : c'est l'analogie du théorème de Hahn-Banach pour les espaces d'opérateurs.

**COROLLAIRE 0.3.**— Soient  $H, K$  deux hilbertiens. Soit  $F \subset B(H)$  un espace d'opérateurs et soit  $E \subset F$  un sous-espace.

Alors toute application c.b.  $u : E \rightarrow B(K)$  admet une extension c.b.  $\tilde{u} : F \rightarrow B(K)$  telle que  $\|\tilde{u}\|_{cb} = \|u\|_{cb}$ . Le diagramme est le suivant :

$$\begin{array}{ccc} F & & \\ \cup & \searrow \tilde{u} & \\ E & \xrightarrow{u} & B(H) \end{array}$$

Dans une autre direction, le théorème 0.2 implique la *décomposabilité* des applications c.b. en applications complètement positives.

On dit que  $u : E \rightarrow F$  est complètement positive (c.p. en abrégé) si, avec les notations précédentes, toutes les applications  $u_n : M_n(E) \rightarrow M_n(F)$  sont positives pour les structures d'ordre induites par le cône positif des  $C^*$ -algèbres  $M_n(B(H))$ .

**COROLLAIRE 0.4.**— Toute application c.b.  $u : E \rightarrow B(K)$  admet une décomposition  $u = u_1 - u_2 + i(u_3 - u_4)$  avec  $u_j$  c.p. telle que :

$$\max_{j \leq 4} \|u_j\|_{cb} \leq \max \left\{ \|u_1 + u_2\|_{cb}, \|u_3 + u_4\|_{cb} \right\} \leq \|u\|_{cb}.$$

**Démonstration** (esquisse).— On note que si  $a = b$  dans le théorème 0.1, alors  $u$  est complètement positive. Ce corollaire résulte donc simplement de l'identité de polarisation des formes sesquilinéaires. On notera que si  $u$  est c.p. sur une  $C^*$ -algèbre (ou sur un système d'opérateurs), on a  $\|u\| = \|u\|_{cb}$  et (dans le cas unital)  $\|u\| = \|u(1)\|$ .

Nous renvoyons le lecteur à [Pa1] ou bien à [P6] pour de plus amples informations sur tous ces résultats.

Ayant introduit les morphismes, la notion d'isomorphisme est claire : on dit que deux espaces d'opérateurs  $E, F$  sont complètement isomorphes (resp. complètement isométriques) s'il existe un isomorphisme  $u : E \rightarrow F$  qui est complètement borné et d'inverse complètement borné (resp. avec de plus  $\|u\|_{cb} = \|u^{-1}\|_{cb} = 1$ ).

On dit qu'une isométrie (non nécessairement surjective)  $u : E \rightarrow F$  est une isométrie complète si  $\|u\|_{cb} = \|u|_{u(E)}^{-1}\|_{cb} = 1$ .

On dit qu'une application  $u : E \rightarrow F$  est une contraction complète si  $\|u\|_{cb} \leq 1$ . Le lecteur complètera (!) aisément cette terminologie.

L'un des grands avantages des espaces d'opérateurs sur les  $C^*$ -algèbres est qu'ils permettent l'introduction de méthodes fini-dimensionnelles dans la théorie des algèbres d'opérateurs. Plus précisément, si  $E$  et  $F$  sont deux espaces d'opérateurs complètement isomorphes, on peut mesurer leur "degré d'isomorphisme" par la distance suivante :

$$(0.3) \quad d_{cb}(E, F) = \inf \left\{ \|u\|_{cb} \|u^{-1}\|_{cb} \mid u : E \rightarrow F \right\},$$

où l'inf porte sur tous les isomorphismes complets  $u$  de  $E$  sur  $F$ .

Cette définition est bien sûr calquée sur la "distance de Banach-Mazur" de deux Banach définie classiquement par :

$$(0.4) \quad d(E, F) = \inf \left\{ \|u\| \|u^{-1}\| \mid u : E \rightarrow F \text{ isomorphisme} \right\}.$$

Par convention, on pose  $d_{cb}(E, F) = \infty$  ou  $d(E, F) = \infty$  si  $E$  et  $F$  ne sont pas isomorphes.

Considérons maintenant un espace de Banach  $X$ . Il existe évidemment une multitude de "structures d'espace d'opérateurs" (en abrégé s. d'e.o.) possibles sur  $X$ . Par définition, une telle structure sur  $X$  est la donnée d'un plongement isométrique  $j : X \rightarrow B(H)$ . Nous dirons que deux telles structures :

$$j_1 : X \longrightarrow B(H_1) \quad \text{et} \quad j_2 : X \longrightarrow B(H_2)$$

sont *équivalentes* si, pour tout espace d'opérateurs  $F \subset B(K)$  et pour tout  $u : X \rightarrow F$ , les normes c.b. de  $u$  sont les mêmes selon que l'on utilise l'un des plongements  $j_1$  ou l'autre. Bien évidemment, cela revient à dire que  $j_2 \circ j_{1|j_1(X)}^{-1}$  et  $j_1 \circ j_{2|j_2(X)}^{-1}$  sont des isométries complètes, ou encore que les normes induites respectivement par  $j_1$  et  $j_2$  sur  $M_n(X)$  sont les mêmes pour chaque  $n \geq 1$ .

En réalité, il n'y a pas lieu, dans la théorie, de distinguer deux espaces d'opérateurs équivalents. En pratique, on les identifie. Quand c'est vraiment nécessaire, on peut distinguer l'espace d'opérateurs "concret"  $E \subset B(H)$  et la s. d'e.o. "abstraite" associée, c'est-à-dire la classe d'équivalence associée (au lieu d'un représentant "concret" de cette classe).

Si  $X$  est une  $C^*$ -algèbre, il y a évidemment une façon naturelle de plonger  $X$  dans  $B(H)$  comme sous- $C^*$ -algèbre, par la théorie de Gelfand. Dans ce cas, si  $j_1$  et  $j_2$  sont deux plongements de  $C^*$ -algèbres, la relation d'équivalence précédente est automatique. En effet, une représentation injective de  $C^*$ -algèbre  $j : X \rightarrow B(H)$  est automatiquement isométrique et comme  $(j)_n : M_n(X) \rightarrow M_n(B(H))$  est aussi une représentation injective, elle est aussi isométrique, ce qui revient à dire que  $j$  est complètement isométrique. Par conséquent si, dans ce qui précède,  $j_1$  et  $j_2$  sont des représentations injectives, alors  $j_1 j_{2|j_2(X)}^{-1}$  et  $j_2 j_{1|j_1(X)}^{-1}$  sont automatiquement des isométries complètes. En conséquence, nous pouvons parler sans ambiguïté de la structure *naturelle* d'une  $C^*$ -algèbre comme espace d'opérateurs. Ce dernier point permet un changement de point de vue : on peut définir de façon équivalente un espace d'opérateurs comme un sous-espace d'une  $C^*$ -algèbre, étant entendu que l'on connaît (par la théorie de Gelfand) une structure naturelle d'espace d'opérateurs sur la  $C^*$ -algèbre. Rappelons que toute  $C^*$ -algèbre unitale commutative est isomorphe à l'espace  $C(T)$  des fonctions continues sur un compact  $T$ , muni de la norme uniforme.

Soit  $B$  un espace de Banach arbitraire. On peut lui associer un compact  $T_B$  qui est la boule unité du dual  $B^*$  muni de la topologie  $\sigma(B^*, B)$ . On a alors un plongement isométrique  $j : B \rightarrow C(T_B)$  qui permet de munir  $B$  d'une structure d'espace d'opérateurs (induite par la  $C^*$ -algèbre  $C(T_B)$ ). On note (suivant [BP1])  $\min(B)$  l'espace d'opérateurs ainsi défini. On a ainsi de nombreux exemples. Bien entendu, ces exemples ne sont pas très intéressants car ils sont trop "commutatifs", mais ils ont le mérite de montrer comment la catégorie des espaces de Banach peut être vue comme plongée dans celle des espaces d'opérateurs. En effet, si  $B_1, B_2$  sont deux Banach, tout opérateur borné  $u : B_1 \rightarrow B_2$  définit un opérateur complètement borné  $u : \min(B_1) \rightarrow \min(B_2)$  avec  $\|u\|_{cb} = \|u\|$ .

Plus généralement, pour tout espace d'opérateurs  $E$ , toute application linéaire

$u : E \rightarrow B$  définit une application c.b.  $u : E \rightarrow \min(B)$  telle que  $\|u\| = \|u\|_{cb}$ . En particulier, pour  $u = I_B$ , si  $E = B$  muni d'une *quelconque* structure d'espace d'opérateurs (respectant la norme de  $B$ ), on a une contraction complète  $E \rightarrow \min(B)$ . Cela exprime la "minimalité" de  $\min(B)$ .

Suivant [BP1], on peut aussi introduire une structure "maximale" sur  $B$ . Pour cela, il est commode de définir d'abord une notion de somme directe dans la catégorie des espaces d'opérateurs. Soit  $E_i \subset B(H_i)$  ( $i \in I$ ) une famille d'espaces d'opérateurs. On note  $\oplus_{i \in I} E_i$  l'espace des familles  $x = (x_i)_{i \in I}$  avec  $x_i \in E_i, \forall i \in I$ , telles que  $\sup_{i \in I} \|x_i\| < \infty$  et on le munit de la norme  $\|x\| = \sup_{i \in I} \|x_i\|$ . L'espace  $\oplus_{i \in I} B(H_i)$  est naturellement une  $C^*$ -algèbre (que l'on peut voir comme plongée dans  $B(\oplus_{i \in I} H_i)$ ,  $\oplus_{i \in I} H_i$  voulant dire bien sûr ici la somme directe hilbertienne). Par conséquent, le plongement isométrique  $\oplus_{i \in I} E_i \rightarrow \oplus_{i \in I} B(H_i)$  induit une structure d'espace d'opérateurs sur  $\oplus_{i \in I} E_i$ . On a ainsi une notion de somme directe.

Soit  $B$  un Banach arbitraire. Soit  $I$  la classe de toutes les applications  $u : B \rightarrow B(H_u)$  avec  $\|u\| \leq 1$ . On peut définir un plongement  $J : B \rightarrow \oplus_{u \in I} B(H_u)$  en posant

$$J(x) = \oplus_{u \in I} u(x).$$

Ce plongement permet de définir une structure d'espace d'opérateurs sur  $B$ . On note  $\max(B)$  l'espace d'opérateurs associé. Par construction, on a alors la propriété de "maximalité" suivante : pour tout espace d'opérateurs  $E$  et pour tout  $u : \max(B) \rightarrow E$ ,  $u$  borné  $\implies u$  c.b. et  $\|u\| = \|u\|_{cb}$ .

En particulier, si  $E = B$  muni d'une s. d'e.o. quelconque (respectant la norme de  $B$ ), on a une contraction complète  $\max(B) \rightarrow E$  induite par l'identité de  $B$ .

En conclusion, soit  $E = (B, j)$  une s. d'e.o. quelconque sur  $B$  associée à un plongement isométrique  $j : B \rightarrow B(H)$  ; on a alors des inclusions (= l'identité) complètement contractantes :

$$\max(B) \longrightarrow (B, j) \longrightarrow \min(B).$$

Cela conduit à un autre groupe d'exemples d'e.o. déjà un peu plus intéressants que les précédents.

Voici deux autres exemples fondamentaux : on note  $R = \overline{\text{span}}[e_{1j} \mid j \geq 1] \subset B(\ell_2)$  et  $C = \overline{\text{span}}[e_{i1} \mid i \geq 1] \subset B(\ell_2)$ . On dit souvent que  $C$  est formé des "vecteurs colonnes" et  $R$  des vecteurs lignes dans  $B(\ell_2)$ . Noter que l'on a :

$$\forall x = (x_i) \in \ell_2 \quad \left\| \sum x_j e_{1j} \right\| = \left( \sum |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \sum x_i e_{i1} \right\|$$

de sorte que  $R$  et  $C$  sont indistinguables comme Banach, puisqu'isométriques à  $\ell_2$ . En revanche, ils ne sont pas *complètement* isomorphes et définissent donc deux nouvelles s. d'e.o. sur l'espace de Hilbert  $\ell_2$ . Ce qui nous en fait donc pour l'instant quatre (dont on sait qu'elles sont distinctes) :  $\min(\ell_2)$ ,  $\max(\ell_2)$ ,  $R$  et  $C$ . Nous verrons bientôt qu'il y en a en fait tout un continuum !

Pour l'instant, la situation typique d'application de la théorie des espaces d'opérateurs est la suivante : on a une  $C^*$ -algèbre  $A$  admettant un système remarquable de *générateurs* et on considère l'espace d'opérateurs  $E$  qui est la fermeture du sous-espace *linéairement* engendré par ces générateurs (cet espace  $E$  est souvent isomorphe à un Hilbert). Alors, dans bien des cas, on peut "lire" sur la structure d'espace d'opérateurs de  $E$  des propriétés importantes de la  $C^*$ -algèbre engendrée. Voir [P2] pour de nombreux exemples illustrant ce principe.

Bien que nous prenions la thèse de Ruan (1988) comme sa date de naissance, il y a de nombreuses contributions "prénatales" qui ont fortement influencé cette théorie. Parmi elles, la factorisation des applications *multilinéaires* complètement bornées, due à Christensen-Sinclair [CS] (et généralisée par Paulsen-Smith [PS]) est fondamentale (voir § 6). Un peu plus tôt encore, on trouve un article important de Effros et Haagerup [EH] (inspiré par un travail antérieur d'Archbold et Batty) qui ont découvert que les espaces d'opérateurs n'ont en général pas la propriété de "réflexivité locale" (alors que tous les Banach vérifient l'analogue Banachique). Leurs idées sont proches des travaux spectaculaires d'E. Kirchberg (voir [Ki2, Wa2, A]) sur les  $C^*$ -algèbres exactes, dont nous ne parlerons pas ici. On doit signaler aussi que les espaces d'opérateurs sont l'aboutissement d'un processus d'"abandon de structure" sur les  $C^*$ -algèbres qui a commencé par les travaux d'Arveson (1969) et Choi-Effros [CE] sur les "systèmes d'opérateurs". (Un système d'opérateurs est un sous-espace de  $B(H)$  contenant l'identité et stable par adjonction.)

**Avertissement.**— Nous avons choisi d'écrire ici un texte introductif à la notion même d'espace d'opérateurs et à leur dualité, avec un aperçu de quelques applications, mais en insistant surtout sur les motivations des définitions. Nous renvoyons le lecteur à d'autres textes [P5, P6, P2] et au livre qu'Effros et Ruan ont commencé à écrire pour une introduction plus approfondie, que la lecture du présent exposé, nous l'espérons, facilitera.

## 1. PRODUIT TENSORIEL MINIMAL

Soient  $H_1, H_2$  deux Hilbert. On note  $H_1 \otimes_2 H_2$  leur produit tensoriel hilbertien.

Soient  $E_1 \subset B(H_1), E_2 \subset B(H_2)$  deux espaces d'opérateurs. On peut définir un plongement du produit tensoriel algébrique  $E_1 \otimes E_2$  dans  $B(H_1 \otimes_2 H_2)$ , soit  $j : E_1 \otimes E_2 \rightarrow B(H_1 \otimes_2 H_2)$  de la manière suivante : Pour  $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ , on définit :

$$\forall h_1 \in H_1, \forall h_2 \in H_2, \quad j(x_1 \otimes x_2)(h_1 \otimes h_2) = x_1(h_1) \otimes x_2(h_2),$$

puis on étend par linéarité. On trouve alors une injection linéaire  $j$  de  $E_1 \otimes E_2$  dans  $B(H_1 \otimes_2 H_2)$  qui permet de définir une s. d'e.o. sur la complétion de  $E_1 \otimes E_2$  pour la norme induite par ce plongement. On note  $E_1 \otimes_{\min} E_2$  l'espace d'opérateurs ainsi obtenu. On a donc par définition une isométrie complète :

$$E_1 \otimes_{\min} E_2 \subset B(H_1 \otimes_2 H_2).$$

On note  $\| \cdot \|_{\min}$  la norme induite par  $B(H_1 \otimes_2 H_2)$  sur l'espace  $E_1 \otimes_{\min} E_2$ . On montre alors que, à équivalence près, l'espace d'opérateurs obtenu ne dépend pas des réalisations particulières de  $E_1$  et  $E_2$  dans  $B(H_1)$  et  $B(H_2)$ , mais seulement de leur s. d'e.o. Cela résulte en fait de l'observation bien connue suivante, très simple mais essentielle pour la théorie.

**PROPOSITION 1.1.**— *Soient  $E_1, E_2$  comme ci-dessus et soient  $F_1 \subset B(K_1)$  et  $F_2 \subset B(K_2)$  deux autres espaces d'opérateurs. Soient  $u_1 \in cb(E_1, F_1)$  et  $u_2 \in cb(E_2, F_2)$ . Alors,  $u_1 \otimes u_2 : E_1 \otimes E_2 \rightarrow F_1 \otimes F_2$  s'étend en une application c.b. (notée encore abusivement  $u_1 \otimes u_2$ ) telle que :*

$$\|u_1 \otimes u_2\|_{cb(E_1 \otimes_{\min} E_2, F_1 \otimes_{\min} F_2)} \leq \|u_1\|_{cb} \|u_2\|_{cb}.$$

*De plus, le produit minimal est "injectif", c'est-à-dire que si  $u_1$  et  $u_2$  sont des isométries complètes, alors il en est de même de  $u_1 \otimes u_2 : E_1 \otimes_{\min} E_2 \rightarrow F_1 \otimes_{\min} F_2$ .*

**Remarque 1.2.**— Si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux  $C^*$ -algèbres, alors  $E_1 \otimes_{\min} E_2$  apparaît comme une sous- $C^*$ -algèbre de  $B(H_1 \otimes_2 H_2)$ . On a donc un produit tensoriel minimal dans la catégorie des  $C^*$ -algèbres, que la notion précédente étend aux espaces d'opérateurs. D'après un théorème classique de Takesaki (voir §9 ci-dessous), la norme  $\| \cdot \|_{\min}$  est la plus petite  $C^*$ -norme sur le produit tensoriel de deux  $C^*$ -algèbres. Dans la catégorie des Banach, Grothendieck [G] a montré que le produit tensoriel injectif

$B_1 \check{\otimes} B_2$  de deux espaces de Banach correspond à la plus petite norme tensorielle raisonnable sur  $B_1 \otimes B_2$ . On peut démontrer (cf. [BP1]) un énoncé analogue pour le produit  $E_1 \otimes_{\min} E_2$  de deux espaces d'opérateurs. Signalons en passant que l'on a pour tout espace d'opérateurs  $E$  et tout Banach  $B$  un isomorphisme isométrique  $E \otimes_{\min} \min(B) = E \check{\otimes} B$ . D'autre part, on a :

$$M_n(E) \approx M_n \otimes_{\min} E \quad \text{isométriquement.}$$

Dans la suite, on identifiera souvent les espaces vectoriels  $M_n(E)$  et  $M_n \otimes E$ .

Le produit tensoriel minimal est commutatif (i.e.  $E_1 \otimes_{\min} E_2 \approx E_2 \otimes_{\min} E_1$ ) et associatif (i.e. par exemple  $(E_1 \otimes_{\min} E_2) \otimes_{\min} E_3 \approx E_1 \otimes_{\min} (E_2 \otimes_{\min} E_3)$ ). On peut donc définir sans ambiguïté (directement ou par itération) le produit minimal  $E_1 \otimes_{\min} \cdots \otimes_{\min} E_N$  d'un nombre quelconque  $N$  d'espaces d'opérateurs, et l'on note encore  $\| \cdot \|_{\min}$  la norme correspondante. On vérifie aisément que :

$$(1.1) \quad \forall x_i \in E_i \quad \|x_1 \otimes \cdots \otimes x_N\|_{\min} = \|x_1\| \cdots \|x_N\|.$$

## 2. LE THÉORÈME DE RUAN

Il est bien évident que se donner un espace de Banach revient à se donner (avant complétion) un espace vectoriel  $V$  muni d'une norme. Le théorème fondamental de Ruan ci-dessous permet d'avoir un point de vue analogue pour les espaces d'opérateurs, mais au lieu d'une norme sur  $V$ , c'est une suite de norme  $\| \cdot \|_n$  sur  $M_n(V)$  (ou bien une seule norme, mais sur  $\cup_n M_n(E)$ ) qu'il faut considérer. Soit  $E$  un espace de Banach, ou même seulement un espace vectoriel sur  $\mathbf{C}$ . Donnons-nous sur  $E$  une structure d'espace d'opérateurs. Alors, à équivalence près, il est clair que cela revient à se donner, pour chaque  $n \geq 1$ , une norme  $\| \cdot \|_n$  sur l'espace  $M_n(E)$  (des matrices  $n \times n$  à coefficients dans  $E$ ). Le problème que résout le théorème de Ruan est l'inverse : quelles suites de normes proviennent d'une s. d'e.o. sur  $E$  ?

Cherchons d'abord des conditions nécessaires. Supposons donc que  $V$  est plongé dans  $B(H)$  et que  $\| \cdot \|_n$  est la norme induite par  $M_n(B(H))$  sur  $M_n(V)$ . On vérifie alors aisément les deux propriétés suivantes :

$$(R_1) \quad \forall n \geq 1 \quad \forall a, b \in M_n \quad \forall x \in M_n(V) \quad \|a \cdot x \cdot b\|_n \leq \|a\|_{M_n} \|x\|_{M_n(V)} \|b\|_{M_n}.$$

où l'on a noté  $a \cdot x \cdot b$  le produit matriciel de la matrice  $x \in M_n(V)$  par les matrices scalaires  $a$  et  $b$ .

$$(R_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall n, m \geq 1 \quad \forall x \in M_n(V) \quad \forall y \in M_m(V), \text{ on a} \\ \left\| \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right\|_{n+m} = \max\{\|x\|_n, \|y\|_m\}. \end{array} \right.$$

On peut maintenant énoncer le théorème de Ruan :

**THÉOREME 2.1** ([Ru1]).— *Soit  $V$  un espace vectoriel complexe. On se donne pour chaque  $n \geq 1$  une norme  $\|\cdot\|_n$  sur  $M_n(V)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un Hilbert  $H$  et une injection linéaire  $j : V \rightarrow B(H)$  tels que pour tout  $n$  :*

$$I_{M_n} \otimes j : (M_n(V), \|\cdot\|_n) \longrightarrow M_n(B(H))$$

*soit une isométrie. Ce qui revient à dire que la suite  $(\|\cdot\|_n)$  provient de la structure d'espace d'opérateurs sur  $V$  associée à  $j$ .*

(ii) *La suite  $\|\cdot\|_n$  vérifie les axiomes  $(R_1)$  et  $(R_2)$  précédents.*

Soit :

$$\mathcal{K} = K(\ell_2)$$

l'ensemble des opérateurs compacts sur  $\ell_2$ . On peut voir  $\mathcal{K}$  comme un espace de matrices bi-infinies, ce qui nous permet de considérer  $M_n$  comme "inclus" dans  $\mathcal{K}$ . On pose alors :

$$\mathcal{K}_0 = \bigcup_{n \geq 1} M_n.$$

Il est commode dans le théorème précédent de remplacer la suite des normes  $(\|\cdot\|_n)$  par une seule norme sur  $\mathcal{K}_0 \otimes E$  ou bien (après fermeture) sur  $\mathcal{K} \otimes E$ . En effet, l'axiome  $(R_2)$  assure que le plongement  $(M_n(E), \|\cdot\|_n) \subset (M_{n+1}(E), \|\cdot\|_{n+1})$  est isométrique, ce qui permet de définir une norme  $\alpha$  sur  $\mathcal{K}_0 \otimes E$  comme suit : pour  $x \in \mathcal{K}_0 \otimes E$ , soit  $n$  tel que  $x \in M_n \otimes E$ , on pose alors :

$$(2.1) \quad \alpha(x) = \|x\|_n.$$

Le théorème de Ruan établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des structures d'espaces d'opérateurs sur  $V$  (à équivalence près) et les normes  $\alpha$  sur  $\mathcal{K}_0 \otimes E$  (ou bien  $\mathcal{K} \otimes E$ ) vérifiant  $(R_1)$  et  $(R_2)$ .

*Remarque.*— Si  $V$  est donné comme espace normé ou comme Banach, on s'intéresse en général surtout aux s. d'e.o. sur  $V$  qui respectent la norme de  $V$ , c'est-à-dire telles que  $\|(x)\|_1 = \|x\|$  pour tout  $x \in V$ . On vérifie que  $(R_1)$  et  $(R_2)$  entraînent alors (c'est évident d'après (1.1) et le théorème précédent) que  $\|a \otimes x\|_n = \|a\|_{M_n} \|x\|$  pour  $a$  dans  $M_n$  et  $x$  dans  $V$ .

Soit  $\alpha$  la norme associée à une telle structure sur l'espace normé  $V$  comme en (2.1), et soient  $\alpha_{\min}$ ,  $\alpha_{\max}$  les normes associées aux structures minimales et maximales,

comme ci-dessus. On a alors :

$$\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}.$$

### Remarque importante

Il faut souligner que les s. d'e.o. données par le théorème de Ruan ne sont pas explicites et, dans la plupart des cas décrits plus bas (dual, quotient, interpolé), on n'en a aucune version "concrète". Leur existence résulte du théorème de Hahn-Banach, cf. la preuve simplifiée du théorème 2.1 dans [ER2].

### 3. DUALITÉ

**Préliminaire.** Soient  $E, F$  deux espaces vectoriels. Soit  $u \in F \otimes E^*$ . On peut lui associer une application linéaire  $\tilde{u} : E \rightarrow F$  de la manière évidente. Si  $E$  et  $F$  sont des Banach, on sait que  $\|u\|_{\vee} = \|\tilde{u}\|$  et  $u \rightarrow \tilde{u}$  est un plongement isométrique du produit tensoriel injectif  $F \check{\otimes} E^*$  dans l'espace  $B(E, F)$  des applications bornées de  $E$  dans  $F$ .

La dualité des espaces d'opérateurs est calquée sur ce modèle, mais le produit minimal prend la place du produit injectif et "c.b." remplace "borné".

Soit  $E \subset B(H)$  un espace d'opérateurs et soit  $E^*$  son dual comme espace de Banach. Il est possible de munir  $E^*$  d'une s. d'e.o. spécifique caractérisée par la propriété suivante :

(3.1) Pour tout espace d'opérateurs  $F$ , l'application naturelle  $u \rightarrow \tilde{u}$  de  $F \otimes E^*$  dans  $cb(E, F)$  est une isométrie. On a donc un plongement isométrique :

$$(E^* \otimes_{\min} F \approx) F \otimes_{\min} E^* \longrightarrow cb(E, F).$$

Quand  $\dim(F) < \infty$ , ce plongement est surjectif, d'où des identifications isométriques :

$$(E^* \otimes_{\min} F \approx) F \otimes_{\min} E^* \approx cb(E, F).$$

Dans le cas  $F = M_n$ , on a en particulier une identification isométrique :

$$(3.2) \quad M_n \otimes_{\min} E^* \approx cb(E, M_n).$$

L'idée de [BP1] et [ER1] (indépendamment) pour définir cette s. d'e.o. spécifique est de prendre le côté droit de (3.2) pour définir une suite de normes sur  $M_n(E^*)$  et de vérifier les axiomes  $(R_1)$  et  $(R_2)$  du théorème de Ruan. Le théorème de Ruan

garantit alors qu'il *existe* une structure sur  $E^*$  vérifiant (3.2). On remonte ensuite aisément de (3.2) à (3.1). L'unicité de la s. d'e.o. correspondante (à équivalence près) est claire puisque (3.2) détermine au plus une s. d'e.o. sur  $E^*$ .

Notons que pour tout  $u : E \rightarrow F$  la transposée  ${}^t u : F^* \rightarrow E^*$  vérifie  $\|u\|_{cb} = \|{}^t u\|_{cb}$ .

Plus généralement, si  $F$  est un autre espace d'opérateurs, on peut définir une s. d'e.o. sur  $cb(E, F)$  pour laquelle, pour chaque  $n$ , on a isométriquement :

$$(3.3) \quad M_n(cb(E, F)) \approx cb(E, M_n(F)).$$

En effet, là encore les normes apparaissant au côté droit de (3.3) vérifient les axiomes  $(R_1)$  et  $(R_2)$ . Nous pouvons donc désormais considérer  $cb(E, F)$  comme un espace d'opérateurs (et (3.1), (3.2) deviennent alors *complètement* isométriques).

*Exemples.*— On peut montrer les identités complètement isométriques suivantes (cf. [BP1, ER3]) :

$$R^* \approx C \quad , \quad C^* \approx R$$

et, pour tout espace de Banach  $B$  (cf. [BP1, B2]) :

$$\min(B)^* \approx \max(B^*).$$

Soit  $M$  une algèbre de von Neumann de préduel  $M_*$ . Par dualité, la structure naturelle de  $M$  nous donne une s. d'e.o. sur  $M^*$  donc *a fortiori* sur  $M_* \subset M^*$ . Cela pose un problème de "cohérence", mais fort heureusement Blecher [B2] a montré que tout se passe bien : si l'on munit  $M_*$  de la structure d'e.o. précédente, son dual est complètement isométrique (en fait équivalent) à  $M$ . Il y a donc existence et unicité du préduel de  $M$  dans la catégorie des espaces d'opérateurs. En revanche, cela n'est plus vrai pour les espaces d'opérateurs généraux: C. Le Merdy [LeM1] a montré qu'il existe une s. d'e.o. sur  $B(H)^*$  qui n'est la duale d'aucune s. d'e.o. sur  $B(H)$ .

#### 4. PASSAGE AU QUOTIENT ET INTERPOLATION

Nous allons définir d'autres d'opérations ou foncteurs sur les espaces d'opérateurs. Signalons d'emblée que ces opérations *étendent* les opérations correspondantes pour les espaces de Banach. Le modèle est le même que pour la dualité : on commence par faire l'opération (*e.g.* passage au quotient ou interpolation) pour les Banach sous-jacents, puis on munit le résultat d'une s. d'e.o. respectant la norme et vérifiant une propriété spécifique à chaque opération.

Le principe utilisé pour définir la dualité s'applique dans bien d'autres situations. Par exemple, Ruan [Ru1] a défini le quotient  $E_1/E_2$  de deux espaces d'opérateurs  $E_1, E_2$  avec  $E_2 \subset E_1$  comme suit.

On considère la norme  $\| \cdot \|_n$  sur  $M_n(E_1/E_2)$  naturellement associée au quotient d'espaces normés  $M_n(E_1)/M_n(E_2)$ , puis on vérifie  $(R_1)$  et  $(R_2)$ . Le théorème 2.1 assure donc qu'il existe une s. d'e.o. sur  $E_1/E_2$  pour laquelle on a, pour tout  $n \geq 1$ , une identification isométrique :

$$M_n \otimes_{\min} (E_1/E_2) = M_n(E_1)/M_n(E_2).$$

Plus généralement, on a une identification isométrique :

$$\mathcal{K} \otimes_{\min} (E_1/E_2) = (\mathcal{K} \otimes_{\min} E_1)/(\mathcal{K} \otimes_{\min} E_2).$$

On définit ainsi une notion de quotient dans la catégorie des espaces d'opérateurs. Cette notion vérifie les règles usuelles de dualité : on a des identifications *complètement* isométriques :  $(E_1/E_2)^* \approx E_2^\perp$  et  $E_2^* = E_1^*/E_2^\perp$ .

Soient  $E_0, E_1$  un couple d'espaces de Banach, compatible pour l'interpolation, ce qui veut dire qu'on se donne implicitement deux injections continues :

$$E_0 \longrightarrow \mathcal{X} \quad \text{et} \quad E_1 \longrightarrow \mathcal{X}$$

de  $E_0$  et  $E_1$  dans un espace vectoriel topologique "ambiant"  $\mathcal{X}$ . L'exemple typique est  $E_0 = L^\infty$ ,  $E_1 = L^1$  et  $\mathcal{X} = L^0$ .

La méthode d'interpolation complexe (due à A. Calderón et J.-L. Lions indépendamment) associe au couple  $(E_0, E_1)$  un espace noté  $(E_0, E_1)_\theta$  pour chaque  $0 < \theta < 1$ . On pose  $E_\theta = (E_0, E_1)_\theta$ . On a donc une famille continue  $(E_\theta)_{0 < \theta < 1}$  de sous-espaces de  $\mathcal{X}$  qui sont des espaces de Banach et vérifient la propriété d'interpolation, (*i.e.* toute application définie et bornée simultanément de  $E_0$  dans  $E_0$  et de  $E_1$  dans  $E_1$  est définie et bornée sur  $E_\theta$  pour  $0 < \theta < 1$ .) Calderón a aussi défini une méthode "duale" ; on notera  $E^\theta$  le résultat de cette méthode (*cf.* [BL]). Supposons maintenant  $E_0$  et  $E_1$  munis chacun d'une s. d'e.o. respectant leur norme. L'espace  $E_\theta$  peut être muni d'une s. d'e.o. de la manière suivante : on munit  $M_n(E_\theta)$  de la norme de l'espace interpolé  $(M_n(E_0), M_n(E_1))_\theta$  (les inclusions  $M_n(E_i) \subset M_n(\mathcal{X})$ ,  $i = 0, 1$ , nous donnent la compatibilité pour l'interpolation). Là encore, on constate que ces normes vérifient les axiomes  $(R_1)$  et  $(R_2)$ , ce qui permet d'affirmer l'existence d'une s. d'e.o. sur  $E_\theta$  pour laquelle on a isométriquement :

$$M_n(E_\theta) = (M_n(E_0), M_n(E_1))_\theta,$$

et plus généralement :

$$\mathcal{K} \otimes_{\min} E_{\theta} = (\mathcal{K} \otimes_{\min} E_0, \mathcal{K} \otimes_{\min} E_1)_{\theta}.$$

Par la même méthode, on peut définir une s. d'e.o. naturelle sur  $E^{\theta}$ . Si  $E_0 \cap E_1$  est dense à la fois dans  $E_0$  et dans  $E_1$ , le couple  $(E_0^*, E_1^*)$  peut être vu naturellement comme compatible et l'on peut donc définir  $(E_0^*, E_1^*)_{\theta}$  et  $(E_0^*, E_1^*)^{\theta}$ .

Parmi les résultats classiques de Calderón, on a l'identité isométrique :

$$(4.1) \quad (E_0, E_1)_{\theta}^* = (E_0^*, E_1^*)^{\theta}$$

que l'on peut décrire comme la commutation des foncteurs d'interpolation et de dualité. Là encore, on peut "compléter" ce résultat et quand  $E_0, E_1$  sont des espaces d'opérateurs, on démontre dans [P1] que l'identité (4.1) est une isométrie complète.

Signalons que Quanhua Xu [X] a développé la théorie de l'interpolation réelle (à la Lions–Peetre) pour les espaces d'opérateurs.

*Exemples.*— Soit  $(\Omega, \mu)$  un espace normé. Nous avons déjà défini une s. d'e.o. naturelle sur  $L^{\infty}(\Omega, \mu)$  et sur son préduel  $L^1(\Omega, \mu)$ . Par interpolation, on obtient donc une s. d'e.o. sur  $L^p(\Omega, \mu)$  que nous appellerons "naturelle". Plus généralement, soit  $M$  une algèbre de von Neumann munie d'une trace normale semi-finie et fidèle  $\tau$ . Les espaces  $L^p$  "non-commutatifs" peuvent être définis par interpolation ; on pose :

$$L^p(M, \tau) = (M, M_{\star})_{\theta}$$

avec  $\theta = \frac{1}{p}$ . Là encore, les s. d'e.o. naturelles sur  $M$  et  $M_{\star}$  permettent de munir  $L^p(M, \tau)$  d'une s. d'e.o. que nous appellerons "naturelle". On peut en fait aller plus loin et développer (cf. [P4]) une théorie des espaces  $L^p$  "non-commutatifs" à valeurs vectorielles.

## 5. PRODUIT TENSORIEL PROJECTIF

Comme le produit tensoriel minimal est l'analogue du produit tensoriel injectif (des Banach), il est tentant de chercher un analogue pour les espaces d'opérateurs du produit tensoriel projectif des Banach. Cette question est traitée indépendamment dans [BP1] et [ER1]. Effros et Ruan ont poursuivi dans cette voie : ils introduisent un analogue de la propriété d'approximation et des opérateurs nucléaires ou intégraux qui remontent (pour les Banach) à la thèse de Grothendieck [G]. Ils démontrent aussi

un analogue du lemme de Dvoretzky–Rogers (sous la forme : si l'identité est absolument sommante, la dimension est finie). Ce programme rencontre plusieurs obstacles intéressants (principalement dûs à l'absence de réflexivité locale) mais, en gros, la théorie marche bien. Nous renvoyons le lecteur à [ER4, ER5, ER6], ainsi qu'à l'article plus récent [EW] consacré plus généralement à une "convexité non-commutative" suggérée par le produit tensoriel projectif des espaces d'opérateurs.

Nous nous bornerons ici à une brève description du produit projectif de deux espaces d'opérateurs  $E, F$  que nous noterons  $E \widehat{\otimes} F$ . Cet espace est défini dans [BP1] comme un préduel. La définition équivalente de [ER1] est plus explicite, comme suit :

Soit  $u$  un élément du produit tensoriel algébrique  $E \otimes F$ . Il existe clairement, pour  $n \geq 1$  assez grand, des écritures de  $u$  sous la forme suivante :

$$(5.1) \quad u = \sum_{ijhl \leq n} \alpha_{ih} x_{ij} \otimes y_{hl} \beta_{jl},$$

où  $x \in M_n(E)$ ,  $y \in M_n(F)$  et  $\alpha, \beta \in M_n$ . Alors la norme de  $E \widehat{\otimes} F$  peut être définie comme :

$$(5.2) \quad \|u\|_{E \widehat{\otimes} F} = \inf \{ \|\alpha\|_2 \|x\|_{M_n(E)} \|y\|_{M_n(F)} \|\beta\|_2 \},$$

où  $\|\cdot\|_2$  est la norme de Hilbert-Schmidt et où l'infimum porte sur toutes les représentations possibles de  $u$  comme en (5.1). On note  $E \widehat{\otimes} F$  la complétion de  $E \otimes F$  pour cette norme. Plus généralement, on peut munir cet espace d'une s. d'e.o. correspondant à la norme  $\|\cdot\|_n$  sur  $M_n(E \widehat{\otimes} F)$  définie comme suit :

Soit  $u = (u_{ij}) \in M_n(E \otimes F)$  et supposons :

$$u = \alpha \cdot (x \otimes y) \cdot \beta,$$

où le point désigne le produit matriciel et où  $x \in M_\ell(E)$ ,  $y \in M_m(F)$  et  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) est une matrice de taille  $n \times (\ell m)$  (resp.  $(\ell m) \times n$ ). Notons que  $x \otimes y$  est vu ici comme un élément de  $M_{\ell m}(E \otimes F)$ , de la manière naturelle (associée à l'isomorphisme  $M_\ell \otimes M_m \approx M_{\ell m}$ ). Alors, suivant [ER1], on peut poser :

$$(5.3) \quad \|u\|_n = \inf \{ \|\alpha\|_{M_{n, \ell m}} \|x\|_{M_\ell(E)} \|y\|_{M_m(F)} \|\beta\|_{M_{\ell m, n}} \}.$$

On notera que, si  $n = 1$ , (5.3) se réduit à (5.2). Une fois de plus, (5.3) vérifie les axiomes (R<sub>1</sub>) et (R<sub>2</sub>), ce qui nous donne une s. d'e.o. sur  $E \widehat{\otimes} F$  pour laquelle on a donc  $\|u\|_n = \|u\|_{M_n(E \widehat{\otimes} F)}$  pour tout  $u \in M_n(E \otimes F)$ . La propriété clé est alors :

THÉORÈME 5.1.— *On a une identification complètement isométrique :*

$$(E \widehat{\otimes} F)^* = cb(E, F^*) = cb(F, E^*).$$

*De plus, le morphisme naturel :*

$$E \widehat{\otimes} F \longrightarrow E \otimes_{\min} F$$

*est une contraction complète.*

Le produit tensoriel projectif est commutatif et associatif, mais n'est en général pas injectif. En revanche, bien entendu, il est "projectif", c'est-à-dire que si  $u_1 : E_1 \rightarrow F_1$  et  $u_2 : E_2 \rightarrow F_2$  sont des "surjections métriques complètes" (cela revient à dire que les adjoints sont des isométries complètes), alors il en est de même de  $u_1 \otimes u_2 : E_1 \widehat{\otimes} E_2 \rightarrow F_1 \widehat{\otimes} F_2$ .

Donnons seulement une autre propriété importante ([ER6]) : soient  $M, N$  deux algèbres de von Neumann de prédual  $M_*, N_*$ . Soit  $M \widehat{\otimes} N$  leur produit tensoriel comme algèbres de von Neumann. Alors on a une identité complètement isométrique :

$$(M \widehat{\otimes} N)_* = M_* \widehat{\otimes} N_*.$$

Ainsi le produit  $\widehat{\otimes}$  se comporte, vis-à-vis des espaces  $L^1$  non nécessairement commutatifs exactement comme le produit projectif  $\widehat{\otimes}$  de Grothendieck pour les espaces  $L^1(\mu)$  usuels (pour lesquels on a isométriquement  $L^1(\mu) \widehat{\otimes} L^1(\nu) \simeq L^1(\mu \times \nu)$ ).

## 6. PRODUIT TENSORIEL DE HAAGERUP ET ALGÈBRES D'OPÉRATEURS

Curieusement, la catégorie des espaces d'opérateurs admet un produit tensoriel spécial, qui n'a – à mon avis – aucune vraie contrepartie pour les espaces de Banach. Il s'agit du produit tensoriel de Haagerup introduit dans [EK], en s'inspirant de [H]. Mais alors que ces auteurs ne considèrent à l'origine que les espaces de Banach sous-jacents, c'est pour les espaces d'opérateurs que ce produit s'est révélé le plus fécond, avec les travaux fondamentaux de Christensen et Sinclair (*cf.* [CS]) et leur extension par Paulsen et Smith [PS].

Soient  $E_1, E_2$  deux espaces d'opérateurs. Soient  $x_1 \in \mathcal{K} \otimes E_1$ ,  $x_2 \in \mathcal{K} \otimes E_2$ . On notera  $(x_1, x_2) \rightarrow x_1 \odot x_2$  la forme bilinéaire de  $(\mathcal{K} \otimes E_1) \times (\mathcal{K} \otimes E_2)$  à valeurs  $\mathcal{K} \otimes (E_1 \otimes E_2)$  définie sur les tenseurs élémentaires par :

$$(k_1 \otimes e_1) \odot (k_2 \otimes e_2) = (k_1 k_2) \otimes (e_1 \otimes e_2).$$

On pose :

$$\alpha_i(x_i) = \|x_i\|_{\mathcal{K} \otimes_{\min} E_i} \quad (i = 1, 2).$$

Alors, pour tout  $x \in \mathcal{K} \otimes E_1 \otimes E_2$ , on définit :

$$(6.1) \quad \alpha_h(x) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_1(x_1^j) \alpha_2(x_2^j) \right\},$$

où l'infimum porte sur toutes les décompositions possibles de  $x$  en somme finie :

$$x = \sum_{j=1}^n x_1^j \odot x_2^j,$$

avec  $x_1^j \in \mathcal{K} \otimes E_1$ ,  $x_2^j \in \mathcal{K} \otimes E_2$ .

Une première bonne surprise est qu'on peut se restreindre à  $n = 1$  dans la définition (6.1), *i.e.*  $\alpha_h(x) = \inf \{ \alpha_1(x_1) \alpha_2(x_2) \mid x = x_1 \odot x_2 \}$ . Cela résulte en gros de ce que  $M_n(\mathcal{K}) \approx \mathcal{K}$ .

Il est facile de voir que (6.1) vérifie les axiomes (R<sub>1</sub>) et (R<sub>2</sub>) de Ruan ; donc, après complétion, on obtient un espace d'opérateurs que l'on note :

$$E_1 \otimes_h E_2.$$

Dans les premiers travaux sur  $E_1 \otimes_h E_2$ , on ne savait pas décrire un espace  $B(\mathcal{H})$  (ou une  $C^*$ -algèbre) admettant un plongement naturel de  $E_1 \otimes_h E_2$ . Mais, peu après, Christensen, Effros et Sinclair [CES] ont montré que si l'on a  $E_i \subset A_i$ , avec  $A_i$   $C^*$ -algèbre, alors  $E_1 \otimes_h E_2$  est plongé naturellement (complètement isométriquement) dans le *produit libre*  $A_1 * A_2$  des deux  $C^*$ -algèbres  $A_1$  et  $A_2$ . Le plongement est simplement l'application :

$$y_1 \otimes y_2 \longrightarrow y_1 y_2$$

qui envoie  $y_1 \otimes y_2$  sur le produit (dans le produit libre)  $y_1 y_2$ .

On peut formuler le résultat de [CES] comme suit.

**THÉORÈME 6.1.**— Soient  $E_1, E_2$  deux espaces d'opérateurs. Soit  $\Phi$  la famille de toutes les paires  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  où  $\sigma_i : E_i \rightarrow B(H_\sigma)$  est une application telle que  $\|\sigma_i\|_{cb} \leq 1$  ( $i = 1, 2$ ) (et où, disons, on se restreint à  $\dim H_\sigma \leq \max \{ \text{card}(E_1) \text{card}(E_2) \}$ ). Alors l'application :

$$j : E_1 \otimes_h E_2 \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Phi} B(H_\sigma)$$

définie par :

$$j\left(\sum x_j^1 \otimes x_j^2\right) = \bigoplus_{\sigma \in \Phi} \sum_{j=1}^n \sigma_1(x_1^j) \sigma_2(x_2^j)$$

est une isométrie complète.

Voir [P5] pour une démonstration très directe.

*Remarque 6.2.*— On généralise sans problème la définition de  $E_1 \otimes_h E_2$  au produit  $E_1 \otimes_h \cdots \otimes_h E_N$  d'un nombre quelconque d'espaces d'opérateurs.

On constate alors que le produit de Haagerup est associatif. De plus, il est à la fois injectif et projectif, ce qui est très frappant (car très rare !). La projectivité résulte de la définition et l'injectivité du théorème 6.1 joint au corollaire 0.3.

**COROLLAIRE 6.3.**— Soient  $E_1, \dots, E_N$  des espaces d'opérateurs ; il existe des isométries complètes  $\varphi_i : E_i \rightarrow B(H)$  dans un même espace  $B(H)$  telles que l'application linéaire  $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_N$  définie par  $\varphi_1 \cdots \varphi_N(x_1 \otimes \cdots \otimes x_N) = \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \cdots \varphi_N(x_N)$  soit une isométrie complète.

On peut en déduire le théorème de factorisation pour les applications multilinéaires “complètement bornées” de Christensen-Sinclair (voir [CS] et les références qui s'y trouvent), dans la version de [PS].

**COROLLAIRE 6.4.**— Soient  $A_1, \dots, A_N$  des  $C^*$ -algèbres. Soient  $E_1, \dots, E_N$  des sous-espaces d'opérateurs, avec  $E_i \subset A_i$  pour tout  $i$ . Soit  $u : E_1 \otimes \cdots \otimes E_N \rightarrow B(H)$  une application linéaire (= multilinéaire de  $E_1 \times \cdots \times E_N$  dans  $B(H)$ ). Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) L'application  $u$  s'étend en une contraction complète de  $E_1 \otimes_h \cdots \otimes_h E_N$  dans  $B(H)$ .

(ii) Il existe des Hilbert  $\widehat{H}_i$ , des représentations  $\pi_i : A_i \rightarrow B(\widehat{H}_i)$  et des applications  $T_i : \widehat{H}_{i+1} \rightarrow \widehat{H}_i$  de norme  $\leq 1$  tels que  $\widehat{H}_{N+1} = H$ ,  $\widehat{H}_0 = H$  et :

$$\forall x_i \in E_i \quad u(x_1 \otimes \cdots \otimes x_N) = T_0 \pi_1(x_1) T_1 \pi_2(x_2) \cdots \pi_N(x_N) T_N.$$

*Remarque.*— Nous n'explicitons pas la notion d'application multilinéaire complètement bornée  $u : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_N \rightarrow B(H)$  car elle équivaut (dans le cas complètement contractant) à la propriété (i) ci-dessus.

Une autre propriété très frappante du produit de Haagerup est sa *self-dualité* (qui explique, d'ailleurs, qu'il soit à la fois injectif et projectif) pour laquelle nous référons à [ER3] (d'après [ER3] la première affirmation est due à Blecher).

COROLLAIRE 6.5.— Soient  $E_1, E_2$  deux espaces d'opérateurs. Alors, si  $E_1, E_2$  sont de dimensions finies, on a :

$$(E_1 \otimes_h E_2)^* \approx E_1^* \otimes_h E_2^* \quad \text{complètement isométriquement.}$$

De plus, dans le cas général, on a un plongement naturel complètement isométrique :

$$E_1^* \otimes_h E_2^* \subset (E_1 \otimes_h E_2)^*.$$

Remarque 6.6.— Illustrons par quelques exemples. Tout d'abord, on a des identités qui soulignent le rôle central du produit de Haagerup, à la racine même de la théorie. On a complètement isométriquement :

$$C_n \otimes_h R_n \simeq M_n \quad \text{et} \quad C \otimes_h R \simeq \mathcal{K},$$

la correspondance étant bien sûr  $e_{i1} \otimes e_{1j} \rightarrow e_{ij}$ . Plus généralement, pour tout espace d'opérateurs  $E$ , on a complètement isométriquement :

$$C_n \otimes_h E \otimes_h R_n \simeq M_n(E).$$

Soit  $H$  un espace de Hilbert arbitraire. Notons  $H_c$  (resp.  $H_r$ ) l'espace obtenu en munissant  $H$  de la s. d'e.o. associée à  $H \simeq B(\mathbb{C}, H)$  (resp.  $B(\overline{H}, \mathbb{C})$ ).

Soit  $K$  un autre Hilbert ; on a alors complètement isométriquement (cf. [ER3]) :

$$H_c \otimes_h K_c \simeq (H \otimes_2 K)_c \quad \text{et} \quad H_r \otimes_h K_r = (H \otimes_2 K)_r.$$

Dans la littérature sur les algèbres de Banach, une algèbre d'opérateurs est simplement une sous-algèbre fermée (non nécessairement auto-adjointe) de  $B(H)$ . Une algèbre uniforme est une sous-algèbre unital  $A$  de l'espace  $C(T)$  des fonctions continues sur  $T$ . Le plus souvent, on suppose que  $A$  sépare les points de  $T$ . On peut décrire aussi les algèbres d'opérateurs comme les sous-algèbres (fermées) des  $C^*$ -algèbres et les algèbres uniformes comme celles des  $C^*$ -algèbres *commutatives*.

Soit  $A \subset B(H)$  une algèbre d'opérateurs et soit  $I \subset A$  un idéal (bilatère, fermé). Alors le quotient  $A/I$  est évidemment une algèbre de Banach, mais est-ce une algèbre d'opérateurs ? Curieusement, la réponse est oui. Cela est dû à B. Cole pour  $A$  algèbre uniforme, puis peu après à G. Lumer et A. Bernard pour le cas général : il existe (pour  $\mathcal{H}$  convenable) un homomorphisme isométrique  $j : A/I \rightarrow B(\mathcal{H})$ . D'une certaine manière, ce résultat préfigure la structure d'espaces d'opérateurs sur les quotients (voir § 4 ci-dessus), apparue bien plus tard.

Dans les années 70, on s'est intéressé de près à la classe des algèbres d'opérateurs et on a cherché à les caractériser parmi les algèbres de Banach. Citons principalement les travaux de Craw, Davie, Varopoulos (ainsi que ses élèves A. Tonge et P. Charpentier). Les travaux de Varopoulos laissaient espérer l'existence d'une norme tensorielle  $\gamma$  pour laquelle on aurait un énoncé du type : soit  $A$  une algèbre de Banach ; son produit  $p : A \otimes A \rightarrow A$  définit une application continue de  $A \otimes_{\gamma} A$  dans  $A$  si et seulement si  $A$  est (isomorphe à) une algèbre d'opérateurs. Varopoulos avait en effet montré que si  $\gamma = \gamma_2$  (= norme de factorisation par un Hilbert, notée  $\|\cdot\|_H$  dans [G]), la continuité de  $p$  est suffisante (mais pas nécessaire). Finalement K. Carne [Ca] a montré qu'il n'existe aucune norme raisonnable  $\gamma$  vérifiant cela.

La théorie des espaces d'opérateurs a relancé cette question. En effet, il est naturel de s'intéresser aux algèbres de Banach  $A$  munies par ailleurs d'une structure d'espaces d'opérateurs  $j : A \rightarrow B(H)$  et de se demander quand on peut réaliser  $A$  comme une algèbre d'opérateurs *en respectant* la s. d'e.o. donnée sur  $A$ .

Voici les réponses :

**THÉORÈME 6.7 ([BRS]).**— *Soit  $A$  une algèbre de Banach avec une unité notée  $1_A$ , donnée avec une structure d'espaces d'opérateurs. On suppose  $\|1_A\| = 1$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'application produit*

$$p : A \otimes_h A \longrightarrow A$$

*est complètement contractante (i.e.  $\|p\|_{cb} \leq 1$ ).*

(ii) *Il existe, pour  $H$  convenable, un homomorphisme unital et complètement isométrique*

$$j : A \longrightarrow B(H).$$

Curieusement, la version "isomorphique" de ce résultat a résisté un moment, jusqu'à ce que Blecher [B3] l'obtienne récemment :

**THÉORÈME 6.8 ([B3]).**— *Soit  $A$  une algèbre de Banach donnée avec une s. d'e.o. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i)  *$p : A \otimes_h A \longrightarrow A$  est complètement borné.*

(ii) *Il existe un homomorphisme  $j : A \rightarrow B(H)$  qui est aussi un isomorphisme complet de  $A$  sur  $j(A)$ .*

Les démonstrations n'utilisent pas les résultats précédents de Cole, Lumer et Bernard et permettent de les retrouver. Mais, en fait, tout récemment (cf. [P5]),

nous avons trouvé un chemin en sens inverse et nous démontrons les théorèmes 6.7 et 6.8 comme conséquence (pas tout à fait directe toutefois) du résultat de Lumer-Bernard sur les quotients d'algèbres d'opérateurs.

Nous renvoyons le lecteur à [LeM2] pour une extension du théorème de Cole-Lumer-Bernard aux quotients de sous-algèbres de  $B(X)$  avec  $X$  Banach, ainsi qu' à [BLM] pour une étude approfondie des structures d'algèbres d'opérateurs sur  $\ell_p$ , ou bien d'autres espaces classiques.

**Remarque.**— Certaines algèbres d'opérateurs à unité  $A$  ont la propriété suivante : Tout homomorphisme unital borné  $\pi : A \rightarrow B(H)$  est automatiquement c.b. C'est le cas pour les  $C^*$ -algèbres commutatives ou pour les nucléaires (au sens du §9 ci-dessous). On ignore si cette propriété est vraie en fait pour toute  $C^*$ -algèbre (voir [P6]). En revanche, l'auteur a pu montrer tout récemment (janvier 96) que l'algèbre du disque  $A(D)$  (formée des fonctions analytiques sur  $D$  et continues sur  $\bar{D}$ ) ne possède pas cette propriété. Il en résulte qu'il existe une structure d'algèbre d'opérateurs "exotique" sur  $A(D)$  (ou bien sur  $H^\infty$ ). Cela revient aussi à dire qu'il existe un opérateur polynomialement borné qui n'est pas semblable à une contraction. Cette solution du "problème de Halmos" devra certainement être portée au crédit de la théorie des espaces d'opérateurs.

## 7. L'ESPACE $OH$

Convenons de dire qu'un espace d'opérateurs est hilbertien si l'espace de Banach sous-jacent est (isométriquement) hilbertien. La littérature de physique théorique fourmille d'exemples de ce genre (générateurs de l'algèbre fermionique ou de Clifford, générateurs de la  $C^*$ -algèbre réduite du groupe libre, famille semi-circulaire à la Voiculescu (voir [Sk])... On en sait assez sur les exemples de la liste précédente pour savoir qu'aucun d'eux n'est self-dual comme espace d'opérateurs, ce qui fait croire que la catégorie des espaces d'opérateurs n'admet pas de notion d'espace de Hilbert. L'énoncé suivant, qui dit le contraire, est donc apparu comme une surprise.

**THÉORÈME 7.1** ([P1]).— *Soit  $H$  un espace de Hilbert arbitraire. Il existe pour  $\mathcal{H}$  convenable, un espace d'opérateurs  $E_H \subset B(\mathcal{H})$  tel que l'identification canonique (dérivée du produit scalaire)  $E_H^* \rightarrow \overline{E}_H$  soit une isométrie complète. De plus, cet espace  $\overline{E}_H$  est unique à une isométrie complète près. (Note : si  $E$  est un espace d'opérateurs, disons  $E \subset B(H)$ , alors  $\overline{E}$  est le complexe conjugué de  $E$  muni de la s. d'e.o. induite par  $\overline{E} \subset \overline{B(H)} \approx B(\overline{H})$ .)*

Si  $H = \ell_2$ , on note cet espace  $E_H$  par  $OH$  et on l'appelle l'espace d'opérateurs de Hilbert. On note de même  $OH_n$  si  $H = \ell_2^n$  et  $OH(I)$  si  $H = \ell_2(I)$ .

Ce théorème suggère évidemment un vaste programme consistant à réexaminer, pour les espaces d'opérateurs, toutes les situations de théorie des Banach où l'espace de Hilbert joue un rôle central (elles sont nombreuses...). Ce programme est poursuivi dans [P1]. L'espace  $OH$  a des propriétés particulièrement remarquables vis-à-vis de l'interpolation complexe (voir [P1]). Par exemple, on a complètement isométriquement :

$$(\min(\ell_2), \max(\ell_2))_{\frac{1}{2}} = OH$$

et

$$(R, C)_{\frac{1}{2}} = OH.$$

Dans le second cas, il faut préciser que le couple  $(R, C)$  est vu comme compatible par l'intermédiaire de l'injection  $x \rightarrow {}^t x$  de  $R$  dans  $C$ , qui permet de considérer  $R$  et  $C$  comme des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{X} = C$ .

L'unicité de  $OH$  et (4.1) impliquent que toutes les s. d'e.o. définies ci-dessus (§ 4) sur les espaces  $L^2(\mu)$  et  $S_2$  sont complètement isométriques, sous la seule restriction que la dimension hilbertienne soit la même.

Enfin, signalons une jolie propriété vis-à-vis du produit tensoriel de Haagerup : pour tous ensembles  $I$  et  $J$ , on a complètement isométriquement :

$$OH(I) \otimes_h OH(J) \approx OH(I \times J).$$

## 8. SUR LA TAILLE DE L'ENSEMBLE DES ESPACES D'OPÉRATEURS DE DIMENSIONS FINIES

Soient  $E, F$  deux espaces normés (resp. deux espaces d'opérateurs) ; rappelons que l'on a défini les "distances"  $d(E, F)$  et  $d_{cb}(E, F)$  en (0.3) et (0.4). On pose :

$$\delta(E, F) = \text{Log } d(E, F), \quad \delta_{cb}(E, F) = \text{Log } d_{cb}(E, F).$$

Soit  $n \geq 1$ . Soit  $EO_n$  (resp.  $B_n$ ) l'ensemble des espaces d'opérateurs (resp. des espaces de Banach) de dimension  $n$  dans lequel on convient d'identifier deux espaces lorsqu'ils sont complètement isométriques (resp. isométriques).

Si l'on munit  $EO_n$  (resp.  $B_n$ ) de la métrique  $\delta_{cb}$  (resp.  $\delta$ ), il devient un espace métrique complet.

Pour les espaces de Banach (= normés), l'espace  $(B_n, \delta)$  est compact ; c'est le "compact de Banach-Mazur".

Il est naturel de s'intéresser aux propriétés métriques de l'espace  $EO_n$  en analogie avec ce que l'on sait pour  $B_n$ . Par exemple, quel est le diamètre de  $EO_n$  ?  $EO_n$  est-il compact ? Et, si non, est-il séparable ? Voici quelques réponses (on préfère en fait supprimer les logarithmes, on travaille donc partout avec  $d_{cb}$  au lieu de  $\delta_{cb}$ ).

THÉORÈME 8.1 (voir [P1]).— *Pour tout  $E \in EO_n$ , on a :*

$$(8.1) \quad d_{cb}(E, OH_n) \leq \sqrt{n},$$

d'où, pour tout  $F \in EO_n$  :

$$d_{cb}(E, F) \leq n.$$

Cette dernière estimation est optimale car  $d_{cb}(R_n, C_n) = n$ .

Soit  $E \in B_n$ . Par la compacité de la boule de  $E^*$ , il est bien connu que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N = N(\varepsilon, n)$  et  $\tilde{E} \subset \ell_\infty^N$  tel que  $d(E, \tilde{E}) < 1 + \varepsilon$ .

L'énoncé analogue, avec  $M_N$  au lieu de  $\ell_\infty^N$ , est faux pour les espaces d'opérateurs, ce qui suggère d'introduire pour tout  $E \in EO_n$  :

$$d_{SK}(E) = \inf \{d_{cb}(E, \tilde{E}) \mid \tilde{E} \subset M_N, N \geq 1\}.$$

THÉORÈME 8.2 ([P1, P3]).— *Pour tout  $E$  dans  $EO_n$ , on a :*

$$(8.2) \quad d_{SK}(E) \leq \sqrt{n}.$$

De plus, pour tout  $n > 2$ , l'espace  $\ell_n^1 = (\ell_n^\infty)^*$  muni de la s.d'e.o. duale de la structure naturelle de  $\ell_n^\infty$  vérifie:

$$\frac{\sqrt{n}}{2} \sim \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \leq d_{SK}(\ell_n^1).$$

Il est facile de voir (c'était connu de Kirchberg) que  $(EO_n, \delta_{cb})$  n'est pas compact si  $n > 2$ . (Le cas  $n = 2$  reste ouvert.) L'article de Kirchberg [Kil] a mis en avant la question de savoir si  $(EO_n, \delta_{cb})$  est séparable, mais la réponse est encore négative:

THÉORÈME 8.3 ([JP]).— *L'espace  $(EO_n, \delta_{cb})$  n'est pas séparable si  $n > 2$ . Plus précisément, même le sous-ensemble formé des espaces d'opérateurs isométriques à  $\ell_2^n$  n'est pas séparable.*

La meilleure estimation asymptotique de la “non-séparabilité” de  $(EO_n, \delta_{cb})$  est la suivante : Soit  $\delta(n)$  la borne inférieure des normes  $\delta > 0$  tels que  $(EO_n, \delta_{cb})$  admette un  $\delta$ -réseau dénombrable au sens suivant (on utilise  $d_{cb}$  plutôt que  $\delta_{cb}$ ) ; il existe une partie dénombrable  $D \subset EO_n$  telle que  $\forall E \in EO_n \exists \tilde{E} \in D$  vérifiant  $d_{cb}(E, \tilde{E}) < \delta$ . Avec cette notation, on a, pour  $n = p + 1$ , avec  $p$  premier  $\geq 3$  (voir [JP]) :

$$\frac{\sqrt{n}}{2} \sim \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \leq \delta(n).$$

Par ailleurs, il résulte évidemment de (8.1) (ou bien de (8.2)) que  $\delta_n \leq \sqrt{n}$ .

### 9. APPLICATIONS AUX PRODUITS TENSORIELS DE $C^*$ -ALGÈBRES

Soient  $A_1, A_2$  deux  $C^*$ -algèbres. Leur produit tensoriel algébrique, noté  $A_1 \otimes A_2$ , peut être muni d’une structure d’algèbre involutive de la manière évidente.

On appelle  $C^*$ -norme toute norme sur  $A_1 \otimes A_2$  telle que :

$$\|x\| = \|x^*\|, \|xy\| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{et} \quad \|xx^*\| = \|x\|^2$$

pour tous  $x, y$  dans  $A_1 \otimes A_2$ .

On sait depuis Takesaki (1958) et Guichardet (1965) qu’il existe une  $C^*$ -norme minimale  $\|\cdot\|_{\min}$  et une  $C^*$ -norme maximale  $\|\cdot\|_{\max}$  de sorte que toute  $C^*$ -norme  $\|\cdot\|$  doit vérifier  $\forall x \in A_1 \otimes A_2 \ \|x\|_{\min} \leq \|x\| \leq \|x\|_{\max}$ . On note  $A_1 \otimes_{\min} A_2$  (resp.  $A_1 \otimes_{\max} A_2$ ) la complétion de  $A_1 \otimes A_2$  pour la norme  $\|\cdot\|_{\min}$  (resp.  $\|\cdot\|_{\max}$ ).

Une  $C^*$ -algèbre  $A_1$  est dite nucléaire si, pour toute  $C^*$ -algèbre  $A_2$ , on a  $\|\cdot\|_{\min} = \|\cdot\|_{\max}$  sur  $A_1 \otimes A_2$ , autrement dit, s’il existe une unique  $C^*$ -norme sur  $A_1 \otimes A_2$ . Par exemple, toutes les  $C^*$ -algèbres commutatives sont nucléaires, de même que  $K(H)$  mais, d’après un résultat de S. Wassermann [Wa1],  $B(H)$  n’est pas nucléaire si  $\dim H = \infty$ . D’après les travaux de Choi-Effros et Connes, une  $C^*$ -algèbre  $A$  est nucléaire ssi son bidual  $A^{**}$  est une algèbre de von Neumann injective. De plus (Choi-Effros, Kirchberg), cela revient à dire que l’identité de  $A$  est approximable pour la convergence simple par des applications de rang fini complètement positives. Les travaux récents de Kirchberg ([Ki2]) ont réactivé l’étude des paires de  $C^*$ -algèbres  $A, B$  telles qu’il existe une seule  $C^*$ -norme sur  $A \otimes B$ , c’est-à-dire telles que :

$$(9.1) \quad A \otimes_{\min} B = A \otimes_{\max} B \quad \text{isométriquement.}$$

Kirchberg a donné le premier exemple d’une  $C^*$ -algèbre  $A$  telle que (9.1) soit vrai quand  $B = A^{op}$  (la  $C^*$ -algèbre opposée, *i.e.*  $A$  avec le produit renversé  $xy = yx$ ),

mais qui n'est pas nucléaire. De plus, Kirchberg ([Ki2]) a montré que (9.1) a lieu pour  $B = B(H)$  et  $A = C^*(F_\infty)$  la  $C^*$ -algèbre du groupe libre à (disons) une infinité de générateurs (noté  $F_\infty$ ), i.e. la  $C^*$ -algèbre engendrée par la représentation universelle du groupe discret  $F_\infty$ . La théorie des espaces d'opérateurs a permis récemment à l'auteur (à paraître au J. Operator Th.) d'en donner une démonstration très simple. Cette même théorie a aussi guidé les auteurs de [JP] vers la solution d'un problème assez ancien mentionné par Kirchberg dans [Ki2] :

THÉORÈME 9.1 ([JP]).— *Si  $\dim H = \infty$ , on a :*

$$B(H) \otimes_{\min} B(H) \neq B(H) \otimes_{\max} B(H).$$

L'article [JP] décrit trois preuves différentes de ce résultat. La troisième est basée (d'après une communication de A. Valette [Va]) sur les travaux de Lubotzky–Phillips–Sarnak [LPS]. Elle donne la meilleure estimation asymptotique. Plus précisément, on a :

THÉORÈME 9.2 (voir [JP] et [Va]).— *Posons :*

$$\lambda(n) = \sup \left\{ \frac{\|u\|_{\max}}{\|u\|_{\min}} \mid u \in B(H) \otimes B(H) \text{ } r(u) \leq n \right\},$$

où  $r(u)$  désigne le rang de  $u$ . On a,  $\forall n \geq 4$  de la forme  $n = p + 1$  avec  $p$  premier :

$$\frac{\sqrt{n}}{2} \sim \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \leq \lambda(n) \leq \sqrt{n}.$$

La majoration  $\lambda(n) \leq \sqrt{n}$  est établie pour tout  $n$  et résulte par exemple de (8.2). Mais le point délicat est la preuve que  $\lambda(n) \geq n(2\sqrt{n-1})^{-1}$ . Nous nous bornerons ici à indiquer d'où sortent les tenseurs particuliers  $u \in B(H) \otimes B(H)$  qui sont "responsables" de cette estimation. Pour cela, on utilise les travaux de Lubotzky–Phillips–Sarnak (exposés à Bourbaki par Colin de Verdière [CV]) : soit  $n = p + 1$ , avec  $p$  premier  $\geq 3$ . Soit  $S \subset \mathbf{R}^3$  la sphère euclidienne munie de sa mesure de surface normalisée. On note  $L_0^2 \subset L^2(S, \mu)$  l'orthogonal des constantes et  $\rho : SO(3) \rightarrow B(L_0^2)$  la représentation naturelle définie par  $\rho(t) f(w) = f(t^{-1}(w))$ . Soit  $\rho = \bigoplus_{m \geq 0} \pi_m$ , avec  $\pi_m : SO(3) \rightarrow B(H_m)$ , la décomposition de  $\rho$  en composantes irréductibles (de dimensions finies puisque  $SO(3)$  est compact). On pose, pour toute partie  $\Omega \subset \mathbf{N}$  :

$$\rho_\Omega = \bigoplus_{m \in \Omega} \pi_m \quad \text{et} \quad H_\Omega = \bigoplus_{m \in \Omega} H_m.$$

D'après [LPS], pour  $n = p + 1$ , il existe  $t_1, \dots, t_n \in SO(3)$  tels que :

$$\left\| \sum_{i=1}^n \rho(t_i) \right\| \leq 2\sqrt{n-1},$$

d'où il résulte (c'est l'idée de [Va] un peu modifiée) que :

$$(9.2) \quad \sup_{m \neq m'} \left\| \sum_{i=1}^n \pi_m(t_i) \otimes \overline{\pi_{m'}(t_i)} \right\| \leq 2\sqrt{n-1}.$$

La construction de [JP] montre que les  $n$ -uplets  $\rho_\Omega(t_1), \dots, \rho_\Omega(t_n)$  sont souvent linéairement indépendants. Soit  $E_\Omega$  le sous-espace engendré. Dans ce cas, on note  $\xi_\Omega^1, \dots, \xi_\Omega^n$  un système biorthogonal dans  $E_\Omega^*$ . Par la dualité des espaces d'opérateurs (voir § 2 ci-dessus), on sait qu'il existe un Hilbert  $\mathcal{H}_\Omega$  et un plongement (isométrique) spécifique :

$$E_\Omega^* \subset B(\mathcal{H}_\Omega).$$

De plus, comme  $\sum_{i=1}^n \rho_\Omega(t_i) \otimes \xi_\Omega^i$  représente l'identité sur le sous-espace  $E_\Omega \subset B(H_\Omega)$ , on a nécessairement d'après (3.1) et d'après l'injectivité du produit minimal :

$$(9.3) \quad \left\| \sum_{i=1}^n \rho_\Omega(t_i) \otimes \xi_\Omega^i \right\|_{\min} = \|I_{E_\Omega}\|_{cb(E_\Omega, E_\Omega)} = 1.$$

En présence d'une estimation de type (9.2), la méthode de [JP] (voir aussi [Vo]) conduit à l'énoncé suivant :  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe une partie infinie  $\Omega \subset \mathbf{N}$  telle que  $\rho_\Omega(t_1), \dots, \rho_\Omega(t_n)$  soient linéairement indépendants et vérifient :

$$(9.4) \quad \frac{n}{2\sqrt{n-1}} - \varepsilon \leq \left\| \sum_{i=1}^n \rho_\Omega(t_i) \otimes \xi_\Omega^i \right\|_{B(H_\Omega) \otimes_{\max} B(\mathcal{H}_\Omega)}.$$

En combinant (9.3) et (9.4), on obtient le théorème 9.2.

**Remarques finales:** Les espaces d'opérateurs sont aussi utilisés actuellement de façon prometteuse dans d'autres directions que nous ne pouvons pas développer, faute de place et de compétence. Il s'agit d'une part, des travaux d'Effros et Ruan sur les groupes quantiques ("Operator convolution algebras : an approach to quantum groups" et "Discrete quantum groups, I. The Haar measure") et d'un article de Ruan (à paraître dans Amer. J. Math.) sur la moyennabilité des algèbres de Kac. D'autre

part, de plusieurs travaux de Blecher, Muhly et Paulsen (et de Blecher seul) sur les modules d'opérateurs, les  $C^*$ -modules et la théorie de Morita. Dans un mémoire de l'A.M.S. (à paraître), Blecher, Muhly et Paulsen développent les fondations d'une théorie de Morita pour les algèbres d'opérateurs (non nécessairement auto-adjointes).

## BIBLIOGRAPHIE

- [A] C. ANANTHARAMAN–DELAROCHE - *Classification des  $C^*$ -algèbres purement infinies nucléaires (d'après E. Kirchberg)*, Sémin. Bourbaki, novembre 1995, 48ème année, 1995-96, n° 805.
- [BL] J. BERGH and J. LÖFSTRÖM - *Interpolation spaces. An introduction*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [B1] D. BLECHER - *Tensor products of operator spaces II*, Canadian J. Math. **44** (1992), 75–90.
- [B2] D. BLECHER - *The standard dual of an operator space*, Pacific J. Math. **153** (1992), 15–30.
- [B3] D. BLECHER - *A completely bounded characterization of operator algebras*, Math. Ann. **303** (1995), 227–240.
- [BLM] D. BLECHER and C. LE MERDY - *On quotients of function algebras and operator algebra structures on  $\ell_p$* , à paraître.
- [BP1] D. BLECHER and V. PAULSEN - *Tensor products of operator spaces*, J. Funct. Anal. **99** (1991), 262–292.
- [BP2] D. BLECHER and V. PAULSEN - *Explicit constructions of universal operator algebras and applications to polynomial factorization*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 839–850.
- [BRS] D. BLECHER, Z.J. RUAN and A. SINCLAIR - *A characterization of operator algebras*, J. Funct. Anal. **89** (1990), 188–201.
- [Ca] T. K. CARNE - *Not all  $H'$ -algebras are operator algebras*, Proc. Camb. Phil. Soc. **86** (1979), 243–249.
- [CE] M.D. CHOI and E. EFFROS - *Injectivity and operator spaces*, J. Funct. Anal. **24** (1977), 156–209.
- [CES] E. CHRISTENSEN, E. EFFROS and A. SINCLAIR - *Completely bounded multilinear maps and  $C^*$ -algebraic cohomology*, Invent. Math. **90** (1987), 279–296.
- [CS] E. CHRISTENSEN and A. SINCLAIR - *A survey of completely bounded operators*, Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 417–448.

- [CV] Y. COLIN de VERDIÈRE - *Distribution de points sur une sphère (d'après Lubotzky, Phillips et Sarnak)*, Sém. Bourbaki, exposé n° 703, nov. 1989, Astérisque, **177–178** (1989), 83–93.
- [EH] E. EFFROS and U. HAAGERUP - *Lifting problems and local reflexivity for  $C^*$ -algebras*, Duke Math. J. **52** (1985), 103–128.
- [EK] E. EFFROS and A. KISHIMOTO - *Module maps and Hochschild–Johnson cohomology*, Ind. Univ. Mah. J. **36** (1987), 257–276.
- [ER1] E. EFFROS and Z.J. RUAN - *A new approach to operator spaces*, Canadian Math. Bull. **34** (1991), 329–337.
- [ER2] E. EFFROS and Z.J. RUAN - *On the abstract characterization of operator spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 579–584.
- [ER3] E. EFFROS and Z.J. RUAN - *Self-duality for the Haagerup tensor product and Hilbert space factorization*, J. Funct. Anal. **100** (1991), 257–284.
- [ER4] E. EFFROS and Z.J. RUAN - *Mapping spaces and liftings for operator spaces*, Proc. London Math. Soc. **69** (1994), 171–197.
- [ER5] E. EFFROS and Z.J. RUAN - *The Grothendieck–Pietsch and Dvoretzky–Rogers theorems for operator spaces*, J. Funct. Anal. **122** (1994) 428–450.
- [ER6] E. EFFROS and Z.J. RUAN - *On approximation properties for operator spaces*, International J. Math. **1**, (1990), 163–187.
- [EW] E. EFFROS and S. WINKLER - *Matrix convexity : operator analogues of the bipolar and Hahn–Banach theorems*. Preprint, 1995.
- [G] A. GROTHENDIECK - *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Boll. Soc. Mat. São-Paulo **8** (1956), 1–79.
- [H] U. HAAGERUP - *Decomposition of completely bounded maps on operator algebras*, manuscrit non publié, Sept. 1980.
- [JP] M. JUNGE and G. PISIER - *Bilinear forms on exact operator spaces and  $B(H) \otimes B(H)$* , Geometric and Functional Analysis (GAFA Journal) **5** (1995), 329–363.
- [Ki1] E. KIRCHBERG - *On non-semisplit extensions, tensor products and exactness of group  $C^*$ -algebras*, Invent. Math. **112** (1993), 449–489.
- [Ki2] E. KIRCHBERG - *Commutants of unitaries in UHF algebras and functorial properties of exactness*, J. reine angew. Math. **452** (1994), 39–77.
- [LeM1] C. LE MERDY - *On the duality of operator spaces*, Canad. Math. Bull. **38** (1995), 334–346.
- [LeM2] C. LE MERDY - *Representations of a quotient of a subalgebra of  $B(X)$* . Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **119** (1996), 83–90.

- [LPS] A. LUBOTZKY, R. PHILLIPS and P. SARNAK - *Hecke operators and distributing points on  $S^2$* , I, Comm. Pure and Applied Math. **39** (1986), 149–186.
- [Pa1] V. PAULSEN - *Completely bounded maps and dilations*, Pitman Research Notes **146**, Pitman Longman (Wiley) 1986.
- [Pa2] V. PAULSEN - *Representation of function algebras, abstract operator spaces and Banach space geometry*, J. Funct. Anal. **109** (1992), 113–129.
- [Pa3] V. PAULSEN - *Completely bounded maps on  $C^*$ -algebras and invariant operator ranges*, Proc. Amer. Math. Soc. **86** (1982), 91–96.
- [PS] V. PAULSEN and R. SMITH - *Multilinear maps and tensor norms on operator systems*, J. Funct. Anal. **73** (1987), 258–276.
- [P1] G. PISIER - *The operator Hilbert space  $OH$ , complex interpolation and tensor norms*, Memoirs Amer. Math. Soc. (1996), à paraître.
- [P2] G. PISIER - *Espaces de Banach quantiques : Une introduction à la théorie des espaces d'opérateurs* (59 p.), Journée de la S. M. F., 1994, Soc. Math. France.
- [P3] G. PISIER - *Exact operator spaces*, Colloque sur les algèbres d'opérateurs. (Orléans 1992), Astérisque **232**, Soc. Math. France (1995), 159–187.
- [P4] G. PISIER - *Non-commutative vector valued  $L_p$ -spaces and completely  $p$ -summing maps*, à paraître probablement dans Astérisque.
- [P5] G. PISIER - *An introduction to the theory of operator spaces*. En préparation.
- [P6] G. PISIER - *Similarity problems and completely bounded maps*, Springer Lecture notes **1618** (1995), Springer verlag, Heidelberg.
- [Ru1] Z.J. RUAN - *Subspaces of  $C^*$ -algebras*, J. Funct. Anal. **76** (1988), 217–230.
- [Sk] G. SKANDALIS - *Algèbres de von Neumann de groupes libres and probabilités non commutatives*, Sémin. Bourbaki, exposé n° 764, nov. 1992, Astérisque **216** (1993), 87–102.
- [Va] A. VALETTE - *An application of Ramanujan graphs to  $C^*$ -algebra tensor products*, à paraître.
- [V1] N VAROPOULOS - *A theorem on operator algebras*, Math. Scand. **37** (1975), 173–182.
- [Vo] D. VOICULESCU - *Property T and approximation of operators*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 25–30.
- [Wa1] S. WASSERMANN - *On tensor products of certain group  $C^*$ -algebras*, J. Funct. Anal. **23** (1976), 239–254.
- [Wa2] S. WASSERMANN - *Exact  $C^*$ -algebras and related topics*, Lecture Notes Series, Seoul Nat. Univ. (1994).

- [Wi] G. WITTSTOCK - *Ein operatorwertigen Hahn-Banach Satz*, J. Funct. Anal. **40** (1981), 127–150.
- [X] Q. XU - *The real interpolation in the category of operator spaces*, J. Funct. Anal., à paraître.

Gilles PISIER

Texas A & M University  
College Station, TX 77843, U. S. A.

et

Université Paris 6  
Equipe d'Analyse,  
URA 754 du CNRS  
Case 186  
F-75252 PARIS CEDEX 05

# *Astérisque*

PIERRE BERTHELOT

## **Altérations de variétés algébriques**

*Astérisque*, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 815, p. 273-311

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1995-1996\\_\\_38\\_\\_273\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__273_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ALTÉRATIONS DE VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES

[d'après A. J. DE JONG]

par Pierre BERTHELOT

### 1. INTRODUCTION

Deux problèmes de désingularisation jouent un rôle fondamental en Géométrie Algébrique : le problème de la *résolution des singularités* d'une variété singulière, et celui de la *réduction semi-stable* pour une variété propre et lisse sur un corps muni d'une valuation discrète. Les résultats obtenus sur ces questions, souvent limités à la caractéristique nulle, sont des outils extrêmement puissants, notamment dans l'étude de la cohomologie des variétés algébriques. Par contre, leur démonstration passe généralement pour très délicate. Des travaux récents de A. J. de Jong [31] montrent qu'une version un peu affaiblie de ces problèmes amène à une solution remarquablement simple et élégante, sans limitation de caractéristique, et qui fournit néanmoins des résultats suffisants pour beaucoup d'applications.

#### 1.1. Résolution des singularités

Sous la forme générale que lui donne Grothendieck dans [EGA IV, 7.9], le problème de la résolution des singularités s'énonce de la manière suivante :

**Problème 1.1.1.** — *Si  $X$  est un schéma localement noethérien et réduit, existe-t-il un schéma régulier  $X'$ , et un morphisme propre et birationnel  $f : X' \rightarrow X$  ?*

Un tel morphisme est appelé *désingularisation* de  $X$ . Cette question est dominée par le théorème fondamental d'Hironaka [28] :

**Théorème 1.1.2.** — *Soient  $k$  un corps de caractéristique 0,  $X$  une variété algébrique sur  $k$ . Il existe une désingularisation  $f : X' \rightarrow X$  où  $f$  est un morphisme projectif, induisant un isomorphisme au-dessus de l'ouvert  $U$  des points réguliers de  $X$ , et tel que  $f^{-1}(X \setminus U)$  soit un diviseur à croisements normaux de  $X'$ .*

On notera que le résultat d'Hironaka est plus précis que 1.1.1 : la désingularisation qu'il construit ne modifie pas le lieu régulier de  $X$ , et le lieu singulier est transformé en un diviseur à croisements normaux. Toujours en caractéristique nulle, des travaux ultérieurs ont amélioré ces résultats, en fournissant notamment une méthode constructive de résolution (voir en particulier Villamayor [59], et Bierstone-Milman [7]). D'autre part, les travaux récents de Spivakovsky [58] laissent maintenant espérer qu'on puisse obtenir pour tout schéma excellent une résolution canonique des singularités (c'est à dire satisfaisant une forme faible de fonctorialité, cf. [58, déf. 1.6]), sans hypothèse de caractéristique.

## 1.2. Altérations et modifications

**1.2.1.** L'idée de de Jong consiste à affaiblir la notion de désingularisation, en autorisant le corps des fonctions rationnelles sur  $X'$  à être une extension finie du corps des fonctions rationnelles sur  $X$ , alors qu'il est invariant par désingularisation. Plus précisément, soit  $X$  un schéma noëthérien intègre. Une *altération* de  $X$  est un schéma intègre  $X'$  muni d'un morphisme  $\varphi : X' \rightarrow X$  propre et surjectif, tel qu'il existe un ouvert non vide  $U \subset X$  au-dessus duquel le morphisme  $\varphi^{-1}(U) \rightarrow U$  est fini. Une altération est dite *génériquement étale* (resp. une *modification*) si l'on peut choisir  $U$  tel que le morphisme  $\varphi^{-1}(U) \rightarrow U$  soit étale (resp. un isomorphisme).

Soit  $k$  un corps quelconque. Une *variété algébrique* sur  $k$  sera un  $k$ -schéma de type fini, séparé et intègre. De Jong montre le théorème suivant [31, th. 3.1] :

**Théorème 1.2.2.** — *Soient  $X$  une variété algébrique sur  $k$ , et  $Z \subset X$  un fermé de  $X$ , distinct de  $X$ . Il existe alors une altération  $\varphi : X' \rightarrow X$  et une immersion ouverte  $j : X' \hookrightarrow \bar{X}'$  telles que :*

- (i)  $\bar{X}'$  est une variété projective régulière (donc lisse sur  $k$  si  $k$  est parfait) ;
- (ii) Le fermé  $\varphi^{-1}(Z) \cup (\bar{X}' \setminus X') \subset \bar{X}'$  est le support d'un diviseur à croisements normaux stricts de  $\bar{X}'$  (cf. 2.2.1).

*Si  $k$  est parfait, on peut de plus choisir  $\varphi$  génériquement étale.*

On notera que, contrairement à ce que donne la méthode d'Hironaka, l'ouvert de  $X$  au-dessus duquel  $\varphi$  est fini est en général plus petit que l'ouvert  $\text{Reg}(X)$  des points réguliers : on peut être amené au cours de la construction à faire des éclatements centrés en des sous-variétés rencontrant  $\text{Reg}(X)$ . La construction n'est pas canonique, mais, si l'on se donne une action d'un groupe fini sur  $X$ , de Jong en donne aussi une version équivariante [31, th. 7.3]. Grâce à celle-ci, il est possible de construire (après extension radicielle du corps de base) une modification d'une variété donnée  $X$ , qui n'ait que des singularités quotients [31, cor. 7.4]. Signalons aussi qu'en caractéristique 0, Abramovich et de Jong [1]

ont pu pousser ces résultats plus loin, et obtenir une version faible du théorème d'Hironaka (là encore, des éclatements rencontrant le lieu lisse peuvent intervenir). Ce dernier résultat a été obtenu indépendamment par Bogomolov et Pantev [8], par des techniques d'esprit assez proche.

La méthode de de Jong est complètement différente de celles qui sont utilisées dans les travaux mentionnés en 1.1. Dans ceux-ci, le principe général mis en œuvre consiste à associer certains invariants aux singularités de  $X$ , en fonction desquels on pourra choisir un sous-schéma de  $X$  que l'on va éclater, et dont le comportement contrôle la suite d'éclatements nécessaires pour désingulariser  $X$ . Ici, la nature des singularités de  $X$  ne joue aucun rôle. En un sens, la méthode suivie rappelle la technique des *bons voisinages* utilisée par M. Artin dans la démonstration du théorème de comparaison en cohomologie étale [SGA 4, exp. XI, § 3] : il s'agit de décrire une variété  $X$  par une suite de fibrations en courbes sur des variétés de dimension inférieure. Mais, à la différence de la méthode d'Artin, dans laquelle on localise au voisinage d'un point de manière à pouvoir trouver une fibration de ce voisinage en courbes lisses, avec une compactification relative lisse par un lieu à l'infini étale sur la base, la construction de de Jong est de nature globale, et autorise donc certaines singularités. Elle procède par récurrence sur la dimension de  $X$ . Dans une première étape, on altère  $X$  par des techniques de géométrie projective de manière à pouvoir construire un morphisme projectif  $X \rightarrow Y$ , ayant pour fibres des courbes géométriquement connexes, et dont l'ouvert de lissité est dense dans chaque fibre. On fait ensuite appel à la théorie des espaces de modules pour les courbes stables pour montrer qu'on peut altérer ce morphisme de manière à ce que  $X$  devienne une courbe nodale de base une variété lisse  $Y$ , qui soit lisse en dehors d'un diviseur à croisements normaux strict de  $Y$ . Les singularités de  $X$  peuvent alors être décrites de manière simple à partir de la théorie des déformations des singularités quadratiques ordinaires [SGA 7, VI 6], et on peut les résoudre explicitement.

### 1.3. Réduction semi-stable

Soient  $S$  un schéma noethérien connexe, régulier de dimension 1,  $K$  son corps de fonctions rationnelles. Une  $S$ -variété est un  $S$ -schéma intègre, séparé, plat et de type fini sur  $S$ . Un  $S$ -schéma  $X$  est dit *semi-stable* si  $X$  est lisse sur  $S$ , sauf au-dessus d'un nombre fini de points  $s \in S$ , au voisinage desquels  $X$  est localement pour la topologie étale isomorphe à un schéma de la forme  $\text{Spec}(\mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]/(t_1 \dots t_r - \pi))$ , où  $\pi$  est une uniformisante en  $s$  (voir aussi 5.2).

Si  $K'$  est une extension finie de  $K$ , nous noterons  $S'$  la normalisation de  $S$  dans  $K'$ , et  $X_{K'} = K' \otimes_K X$ . Le problème de la réduction semi-stable sur  $K$  est le suivant :

**Problème 1.3.1.** — *Si  $X$  est une variété algébrique propre et lisse sur  $K$ , existe-t-il une extension finie  $K'$  de  $K$ , et une  $S'$ -variété  $X'$  de fibre générique  $X_{K'}$ , qui soit propre et semi-stable sur  $S'$  ?*

Pour les courbes, ce problème est résolu sans hypothèse de caractéristique par le théorème de réduction semi-stable, dû à Deligne-Mumford [13], et à Artin-Winters [3] (voir aussi Bosch-Lütkebohmert [9] pour une démonstration par voie rigide analytique). En caractéristique 0, le théorème de réduction semi-stable a été prouvé en toutes dimensions par Knudsen, Mumford, et Waterman sous la forme suivante [36, II] :

**Théorème 1.3.2.** — *Soient  $S$  une courbe lisse sur un corps  $k$  de caractéristique nulle,  $s \in S$  un point fermé,  $f : X \rightarrow S$  un morphisme de variétés algébriques sur  $k$ , lisse hors de  $s$ . Il existe une courbe lisse  $S'$  sur  $k$ , un morphisme fini  $\pi : S' \rightarrow S$  tel que  $\pi^{-1}(s) = \{s'\}$ , un  $S'$ -schéma semi-stable  $X'$ , et un  $S'$ -morphisme projectif  $p : X' \rightarrow X \times_S S'$ , tel que  $p$  soit un isomorphisme au-dessus de  $S' \setminus \{s'\}$ .*

On notera que la démonstration, basée sur la théorie des plongements toroïdaux, utilise le théorème de désingularisation d'Hironaka — de même, du reste, que la démonstration du théorème de réduction semi-stable pour les courbes utilise la résolution des singularités des surfaces arithmétiques —, mais que l'hypothèse d'égale caractéristique 0 sert également pour obtenir un morphisme  $X' \rightarrow S'$  dont la fibre en  $s$  soit sans composantes multiples (cf. [36], p. 99). En inégale caractéristique comme en égale caractéristique  $p > 0$ , l'analogie de ce théorème reste une conjecture en dimension relative  $> 1$ .

#### 1.4. Altérations semi-stables

Les méthodes de de Jong s'appliquent aussi dans le cas semi-stable, fournissant un substitut au théorème 1.3.2 sans hypothèse de caractéristique [31, th. 4.5] :

**Théorème 1.4.1.** — *Soient  $A$  un anneau de valuation discrète complet,  $S = \text{Spec} A$ ,  $X$  une  $S$ -variété,  $Z \subset X$  un fermé distinct de  $X$ , et contenant la fibre spéciale de  $X$ . Il existe un anneau de valuation discrète  $A'$  fini sur  $A$ , de spectre  $S'$ , une  $S'$ -variété  $X'$ , une altération de  $S$ -variétés  $\varphi : X' \rightarrow X$ , et une immersion ouverte de  $S'$ -variétés  $j : X' \hookrightarrow \bar{X}'$ , vérifiant les propriétés suivantes :*

- (i)  $\bar{X}'$  est une  $S'$ -variété projective à fibre générique géométrique irréductible ;
- (ii) Le couple  $(\bar{X}', \varphi^{-1}(Z) \cup (\bar{X}' \setminus X'))$  est un couple strictement semi-stable (cf. 5.2.2).

Ce théorème possède aussi une extension au spectre d'un anneau de Dedekind ayant pour corps des fractions un corps global [31, th. 8.2].

Dans la suite de cet exposé, nous traiterons d'abord le problème auquel on se réduira dans les démonstrations ultérieures, celui de la résolution des singularités pour les courbes nodales lisses hors d'un diviseur à croisements normaux. Nous expliquerons ensuite l'essentiel de la démonstration du théorème 1.2.2, qui fournit un exemple typique des méthodes de de Jong, puis les compléments à lui apporter pour obtenir le théorème 1.4.1; mentionnons en particulier le théorème 5.1.1, qui permet d'altérer une famille de courbes en une famille nodale. Nous illustrerons enfin la portée de ces résultats en donnant quelques exemples d'applications : positivité des caractéristiques d'Euler-Poincaré (conjecture de Serre), finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer, uniformité par rapport à  $\ell$  de l'exposant de quasi-unipotence de la monodromie en cohomologie  $\ell$ -adique, conjecture  $C_{\text{pst}}$  sur les représentations galoisiennes  $p$ -adiques.

## 2. DÉSINGULARISATION DE CERTAINES COURBES NODALES

Soit  $f : X \rightarrow S$  une fibration en courbes nodales. On traite ici le problème de la désingularisation de  $X$ , lorsque  $S$  est régulier, et  $X$  lisse sur  $S$  hors d'un diviseur à croisements normaux stricts de  $S$ .

### 2.1. Courbes nodales

**2.1.1.** On suppose que  $S$  est localement noethérien. Une *fibration en courbes nodales de base  $S$*  (ou simplement une *courbe nodale*<sup>1</sup> sur  $S$ ) est un morphisme de schémas  $f : X \rightarrow S$  propre, plat, dont toutes les fibres géométriques sont des courbes connexes ayant au plus des points doubles ordinaires comme singularités. Si  $S$  est le spectre d'un corps  $k$ , nous dirons qu'une courbe nodale  $X$  sur  $k$  est *scindée* si toutes ses composantes irréductibles sont lisses et géométriquement irréductibles, et si les points doubles de  $X$  sont tous rationnels sur  $k$ . Dans le cas général, nous dirons que  $X \rightarrow S$  est une courbe nodale scindée si la fibre  $X_s$  est scindée sur  $\kappa(s)$  pour tout  $s \in S$ .

**2.1.2.** Supposons que  $f : X \rightarrow S$  soit une courbe nodale. Si  $x \in X$  est un point de non-lissité de  $f$ , d'image  $s \in S$ , l'anneau local complété  $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$  possède une description simple en tant qu'algèbre sur l'anneau local complété  $\hat{\mathcal{O}}_{S,s}$ . Le corps résiduel  $\kappa(x)$  est une extension finie séparable de  $\kappa(s)$ , de sorte qu'il existe un unique anneau local complet  $\hat{\mathcal{O}}'_x$ , fini et étale sur  $\hat{\mathcal{O}}_{S,s}$ , ayant  $\kappa(x)$  pour corps résiduel.

---

<sup>1</sup> Nous nous écartons ici de l'emploi courant du mot « semi-stable », utilisé notamment dans [31], afin d'éviter la confusion possible avec la notion de variété semi-stable utilisée en 1.3 lorsque  $S$  est régulier de dimension 1.

L'anneau quotient  $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}/\mathfrak{m}_s \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$  est de la forme  $\kappa(x)[[\bar{u}, \bar{v}]]/(\bar{q}(\bar{u}, \bar{v}))$ , où  $\bar{q}$  est une forme quadratique non dégénérée à coefficients dans  $\kappa(x)$ . Si on se donne un relèvement  $q$  de  $\bar{q}$  à coefficients dans  $\hat{\mathcal{O}}'_x$ , on peut alors trouver par approximations successives des relèvements  $u, v$  de  $\bar{u}, \bar{v}$  dans  $\mathfrak{m}_x \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$  tels qu'il existe  $h \in \mathfrak{m}_s \hat{\mathcal{O}}'_x$  et un isomorphisme  $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq \hat{\mathcal{O}}'_x[[u, v]]/(q(u, v) - h)$  (voir aussi la théorie des déformations des singularités quadratiques dans [SGA 7, VI 6]). Lorsque la courbe est scindée, ou le corps  $\kappa(s)$  algébriquement clos, on a  $\hat{\mathcal{O}}'_x = \hat{\mathcal{O}}_{S,s}$ , et on peut prendre  $q(u, v) = uv$ .

On définit le lieu singulier de  $f$  comme le sous-schéma fermé  $\text{Sing}(f) \subset X$  défini par le premier idéal de Fitting de  $\Omega_{X/S}^1$  [SGA 7, VI 5]. Il est fini et non ramifié sur  $S$ , et, avec la présentation qui précède, sa restriction à  $\text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$  est le sous-schéma fermé défini par l'idéal  $(u, v)$ , dont l'anneau est  $\hat{\mathcal{O}}'_x/(h)$ .

## 2.2. Courbes nodales lisses hors d'un diviseur à croisements normaux

**2.2.1.** Si  $X$  est un schéma localement noethérien, un *diviseur à croisements normaux stricts* de  $X$  est un diviseur  $D = \bigcup_{i=1}^r D_i$  de  $X$ , tel qu'en chaque point  $x \in D$  l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  soit régulier, que  $D$  soit réduit et chacun des  $D_i$  irréductible, et que, pour tout  $J \subset \{1, \dots, r\}$ ,  $J \neq \emptyset$ , le sous-schéma fermé  $\bigcap_{j \in J} D_j$  soit un sous-schéma régulier de  $X$ , de codimension égale au cardinal de  $J$ .

Nous renvoyons à [EGA IV, 7.8] ou à [40] pour la notion de schéma *excellent*. Par exemple, si  $A$  est un anneau local noethérien complet, ou un anneau de Dedekind tel que  $\text{Frac}(A)$  soit de caractéristique 0,  $\text{Spec } A$  est excellent. Tout schéma localement de type fini sur un schéma excellent est excellent, et le normalisé d'un schéma excellent réduit est fini sur celui-ci. De plus, la normalisation commute à la complétion. Rappelons enfin que l'ensemble des points réguliers d'un schéma excellent réduit est ouvert.

La situation type où nous aurons à résoudre explicitement les singularités est la suivante. On se donne un schéma  $S$  excellent et régulier, un diviseur à croisements normaux stricts  $D \subset S$ , et une courbe nodale  $f : X \rightarrow S$ , qu'on suppose lisse en dehors de  $D$ . Le sous-schéma  $\Sigma = \text{Sing}(f)$  est donc de codimension  $\geq 2$  dans  $X$ , et  $X$  est alors régulier, sauf éventuellement aux points de  $\Sigma$ .

**2.2.2.** Sous les hypothèses de 2.2.1, on peut préciser la structure des composantes irréductibles de  $\Sigma$ . Soient  $x \in \Sigma$ ,  $s = f(x)$ , et, pour  $1 \leq i \leq r$ , soit  $t_i \in \mathcal{O}_{S,s}$  une équation locale de la composante  $D_i$  de  $D$ . La structure locale de  $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$  donnée en 2.1.2 permet d'écrire  $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$  sous la forme

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq \hat{\mathcal{O}}'_x[[u, v]]/(q(u, v) - t_1^{n_1} \dots t_r^{n_r}).$$

Avec les notations de 2.1.2, on a alors  $\hat{\mathcal{O}}_{\Sigma,x} \simeq \hat{\mathcal{O}}'_x/(t_1^{n_1} \dots t_r^{n_r})$ , de sorte que, au

voisinage de  $x$ ,  $\mathcal{O}_\Sigma$  est annulé par  $t_1^{n_1} \dots t_r^{n_r}$ , et  $\Sigma$  est fini et étale sur le diviseur  $n_1 D_1 + \dots + n_r D_r \subset S$ . Il en résulte que, si  $T$  est une composante irréductible de  $\Sigma$  telle que  $f(T) \subset D_i$ , l'entier  $n_i$  ne dépend pas du point considéré sur  $T$ , et que  $f(T) = D_i$ .

On voit donc que  $\text{Sing}(f)$  est purement de codimension 2 dans  $X$ . Sur une composante irréductible  $T$  de  $\text{Sing}(f)$ , telle que  $f(T) = D_i$ , il y a alors deux possibilités :

- a) L'entier  $n_i$  est égal à 1. Alors  $X$  est régulier en tout point  $x \in T$  tel que  $f(x) \notin \bigcup_{j \neq i} D_j$ ;
- b) L'entier  $n_i$  est  $\geq 2$ . Alors  $X$  est singulier en tout point de  $T$ , et  $T$  est une composante irréductible de  $\text{Sing}(X)$ .

### 2.3. Désingularisation en codimension 2

Gardant les mêmes hypothèses, on observe d'abord qu'on peut se ramener au cas où le lieu singulier  $\text{Sing}(X)$  est de codimension  $\geq 3$  dans  $X$ , en effectuant une suite d'éclatements centrés dans  $\text{Sing}(X)$ .

**2.3.1.** Soit  $T \subset \text{Sing}(X)$  une composante irréductible de codimension 2. Soit  $D_i = f(T)$ , et notons  $n_T$  la valeur de l'exposant  $n_i$  sur  $T$ . Si on suppose que  $i = 1$  pour fixer les idées, et si  $x \in T$ , l'anneau  $\hat{\mathcal{O}}_{T,x}$  s'identifie à  $\hat{\mathcal{O}}'_x/(t_1) \simeq \hat{\mathcal{O}}_{X,x}/(u, v, t_1)$ . Soit  $X'$  l'éclaté de  $X$  le long de  $T$ . Alors  $X'$  est encore une courbe nodale sur  $S$ , lisse hors de  $D$ , les invariants  $n_{T'}$  associés aux composantes  $T' \neq T$  ne changent pas, et  $\text{Sing}(X')$  possède au plus une composante irréductible  $T''$  dominant  $T$ , pour laquelle on a  $n_{T''} = n_T - 2$ . On vérifie ces assertions au voisinage de la fibre de  $X'$  au-dessus de chaque point  $x \in T$ . Une localisation étale au voisinage de  $s$  permet de supposer que  $q(u, v) = uv$ . Par extension des scalaires à  $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ , on se ramène à étudier l'éclaté  $Y'$  de  $Y = \text{Spec}(\hat{\mathcal{O}}'_x[u, v]/(uv - t_1^{n_1} \dots t_r^{n_r}))$  le long de  $T = V(u, v, t_1)$ . On dispose de coordonnées projectives  $u', v'$  et  $t'_1$ , correspondant aux équations  $u, v$  et  $t_1$ , et définissant trois cartes locales :

- (i) Pour  $u' \neq 0$ , on obtient les relations

$$v = uv', \quad t_1 = ut'_1, \quad v' - u^{n_1-2} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots t_r^{n_r} = 0.$$

L'anneau correspondant est  $\hat{\mathcal{O}}'_x[u', t'_1]/(ut'_1 - t_1)$ , qui est régulier. Par symétrie, la situation est la même pour  $v' \neq 0$ .

- (ii) Pour  $t'_1 \neq 0$ , les relations sont

$$u = t_1 u', \quad v = t_1 v', \quad u' v' - t_1^{n_1-2} t_2^{n_2} \dots t_r^{n_r} = 0.$$

L'anneau obtenu est  $\hat{\mathcal{O}}'_x[u', v']/(u' v' - t_1^{n_1-2} t_2^{n_2} \dots t_r^{n_r})$ . Si  $n_1 = 2$  ou  $n_1 = 3$ , il est régulier hors de  $V(t_2 \dots t_r)$ , et il n'y a pas de composante irréductible de  $\text{Sing}(X')$

dominant  $T$ . Sinon, la composante  $T''$  obtenue a pour équation  $u' = v' = t_1 = 0$ , avec  $n_{T''} = n_T - 2$ .

En itérant de tels éclatements, on obtient donc une modification de  $X$  en une courbe nodale du même type, pour laquelle il n'existe plus de composante irréductible de  $\text{Sing}(f)$  sur laquelle l'un des  $n_i$  soit  $\geq 2$ . Par conséquent, l'anneau  $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$  en un point singulier  $x$  de  $X$  est de la forme  $\hat{\mathcal{O}}_x[[u, v]]/(q(u, v) - t_1 \dots t_\mu)$ , avec  $2 \leq \mu \leq r$ , et  $t_i \in \mathfrak{m}_x$  pour  $i \leq \mu$ . Un tel point est donc dans l'intersection d'au moins deux composantes irréductibles  $T_\alpha$  et  $T_\beta$  de  $\text{Sing}(f)$ , de projections  $D_i \neq D_j$  sur  $S$ . Inversement, tout point de  $T_\alpha \cap T_\beta$  est effectivement un point singulier de  $X$ , de sorte que  $\text{Sing}(X)$  est purement de codimension 3 dans  $X$ . On voit de plus que toute composante irréductible  $E_\lambda$  de  $\text{Sing}(X)$  est finie et étale au-dessus d'une composante irréductible de l'un des  $D_i \cap D_j$ . En particulier, les  $E_\lambda$  sont des schémas réguliers.

#### 2.4. Cas d'une base lisse sur un corps algébriquement clos

Supposons maintenant que  $S$  soit une variété lisse de dimension  $d - 1$  sur un corps algébriquement clos  $k$ . Dans la situation obtenue en 2.3.1, on peut achever la désingularisation de  $X$  en éclatant les composantes irréductibles de  $\text{Sing}(X)$ .

**2.4.1.** On oublie la structure de courbe nodale de  $X$ , et on observe simplement que  $X$  possède la propriété suivante : si  $x$  est un point fermé de  $X$ , soit  $\mathcal{O}_{X,x}$  est régulier, soit son complété  $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$  est isomorphe à un anneau de la forme

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq k[[u, v, t_1, \dots, t_{d-1}]]/(uv - t_1 \dots t_\mu),$$

avec  $2 \leq \mu \leq d - 1$ ; de plus, toute composante irréductible  $E$  de  $\text{Sing}(X)$  est un schéma régulier. Sous ces conditions, vérifions alors que l'éclaté  $X'$  de  $X$  le long de  $E$  possède les mêmes propriétés, et que  $\text{Sing}(X')$  a une composante irréductible de moins que  $\text{Sing}(X)$ .

Soit  $x \in E$  un point fermé. Comme  $E$  est régulier, il induit un sous-schéma irréductible de  $\text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ . Il s'ensuit que l'idéal de  $E$  dans  $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$  est engendré par  $u, v$ , et deux éléments  $t_i \neq t_j$ , avec  $1 \leq i, j \leq \mu$ , par exemple  $t_1, t_2$ . On se ramène à étudier l'éclaté  $Y'$  de  $Y = \text{Spec } k[[u, v, t_1, \dots, t_{d-1}]]/(uv - t_1 \dots t_\mu)$  le long de  $F = V(u, v, t_1, t_2)$ . On utilise les quatre cartes correspondant aux coordonnées projectives  $u', v', t'_1, t'_2$  associées à  $u, v, t_1, t_2$  :

(i) Pour  $u' \neq 0$ , on obtient les équations

$$v = uv', \quad t_1 = ut'_1, \quad t_2 = ut'_2, \quad v' - t'_1 t'_2 t'_3 \dots t'_\mu = 0.$$

Sur cet ouvert,  $Y'$  est lisse avec pour coordonnées locales  $u, t'_1, t'_2, \dots, t'_{d-1}$ . La situation est identique pour  $v' \neq 0$ .

(ii) Pour  $t'_1 \neq 0$ , on obtient les équations

$$u = t_1 u', \quad v = t_1 v', \quad t_2 = t_1 t'_2, \quad u'v' - t'_2 t'_3 \dots t'_\mu = 0.$$

Si  $\mu > 2$ ,  $Y'$  est singulier aux points  $y$  tels que  $u' = v' = 0$ , et que deux au moins des variables  $t'_2, t'_3, \dots, t'_\mu$  s'annulent; on a alors

$$\hat{\mathcal{O}}_{Y',y} \simeq k[[u', v', t_1, t'_2, \dots, t_{d-1}]] / (u'v' - t'_2 \dots t'_\mu).$$

Pour  $i > 2$  (resp.  $j > i > 2$ ), la composante irréductible définie par  $u' = v' = t'_2 = t_i = 0$  (resp.  $u' = v' = t_i = t_j = 0$ ) a pour image la composante de  $Y$  définie par  $u = v = t_2 = t_i = 0$  (resp.  $u = v = t_i = t_j = 0$ ). On a une description identique pour  $t'_2 \neq 0$ .

Par suite,  $X'$  a bien les propriétés voulues. En itérant ce processus, on aboutit à une variété non singulière.

**2.4.2.** En vue des applications ultérieures, on remarquera que, dans le processus décrit en 2.3.1 et 2.4.1, l'image inverse réduite du diviseur  $D$  de  $S$  est le support d'un diviseur à croisements normaux de la variété désingularisée  $X'$ . Sur les cartes décrites en 2.4.1 (i), qui sont lisses, l'image inverse réduite de  $D$  est définie par  $u t'_1 t'_2 \dots t'_r = 0$ , qui est un diviseur à croisements normaux. Sur celles qui sont décrites en 2.4.1 (ii), elle est définie par  $t_1 t'_2 \dots t'_r = 0$ , qui devient un diviseur à croisements normaux lorsqu'on aboutit à  $\mu = 1$ .

## 2.5. Cas des courbes nodales scindées

Revenons à la situation générale décrite en 2.2, et supposons maintenant que  $X$  soit une courbe nodale scindée sur  $S$ . On peut encore résoudre les singularités de  $X$  par éclatements de manière à avoir un isomorphisme hors de  $\text{Sing}(X)$ .

**2.5.1.** En appliquant 2.3.1, on se ramène comme plus haut au cas où  $\text{Sing}(X)$  est de codimension 3 dans  $X$ . Cette suite d'éclatements transforme  $X$  en une nouvelle courbe nodale scindée. On remarque alors que  $X$  est régulier si et seulement si toutes les composantes irréductibles de  $f^{-1}(D)$  sont des diviseurs de  $X$ . En effet,  $X$  étant scindé, l'anneau local complété  $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$  en un point singulier de  $X$  est de la forme

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq \hat{\mathcal{O}}_{S,s}[[u, v]] / (uv - t_1 \dots t_\mu),$$

avec  $2 \leq \mu \leq r$ . Comme on l'a vu en 2.2.2, il existe une composante irréductible  $T_i$  de  $\Sigma = \text{Sing}(f)$  passant par  $x$  et se projetant sur  $D_i$ , pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq \mu$ . Comme  $X$  est scindé, il existe au-dessus du point générique  $\eta_i$  de  $D_i$  deux composantes irréductibles de  $f^{-1}(\eta_i)$  passant par  $T_i \cap f^{-1}(\eta_i)$ , dont les adhérences fournissent deux composantes irréductibles de  $f^{-1}(D_i)$  contenant  $T_i$ .

Il est clair qu'elles sont respectivement définies dans  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$  par  $u = 0$ ,  $t_i = 0$  et  $v = 0$ ,  $t_i = 0$ , et que ce ne sont pas des diviseurs au voisinage de  $x$  si  $\mu \geq 2$ . Par contre, si  $x$  est un point régulier de  $X$ , les composantes irréductibles de  $f^{-1}(D_i)$  sont nécessairement des diviseurs en  $x$ .

**2.5.2.** On peut alors achever la désingularisation de  $X$  en éclatant les composantes irréductibles de  $f^{-1}(D)$  qui ne sont pas des diviseurs. En effet, si  $f' : X' \rightarrow S$  est obtenu en éclatant  $X$  le long d'une telle composante, le morphisme  $\varphi : X' \rightarrow X$  est un isomorphisme hors de  $\text{Sing}(X)$ , donc induit un isomorphisme entre le complémentaire d'un fermé de codimension  $\geq 2$  dans  $X'$  et le complémentaire d'un fermé de codimension  $\geq 3$  dans  $X$ . Par suite, les composantes irréductibles de  $f^{-1}(D)$  et de  $f'^{-1}(D)$  sont en correspondance bijective par  $\varphi^{-1}$ , et le nombre de composantes irréductibles de  $f'^{-1}(D)$  qui ne sont pas des diviseurs est strictement plus petit que son analogue pour  $f^{-1}(D)$ . Un calcul local du même type que ceux de 2.3.1 et 2.4.1 permet de vérifier que  $X'$  est encore une courbe nodale scindée. Après un nombre fini de tels éclatements, on obtient donc une courbe nodale scindée telle que toutes les composantes irréductibles de  $f^{-1}(D)$  soient des diviseurs, et le schéma obtenu est alors régulier.

### 3. ALTÉRATIONS STABLES DE COURBES POINTÉES

Au cœur des méthodes de de Jong se trouve un résultat (théorème 3.2.2) qui permet de transformer par altérations génériquement étales certaines familles de courbes pointées, lisses au dessus d'un ouvert non vide, en courbes stables au sens de Deligne et Mumford.

#### 3.1. Modules des courbes stables pointées

Rappelons d'abord quelques résultats classiques sur les modules des courbes stables pointées.

**3.1.1.** Soient  $g, n$  deux entiers positifs tels que  $n > 2 - 2g$ . Rappelons (cf. Deligne-Mumford [13] et Knudsen [38]) qu'une *courbe stable de genre  $g$ ,  $n$ -pointée*, au-dessus d'un schéma de base  $S$ , est un morphisme de présentation finie  $\pi : C \rightarrow S$ , propre, plat, muni de  $n$  sections distinctes  $\sigma_i : S \rightarrow C$ , tel que :

(i) Les fibres géométriques de  $\pi$  sont des courbes connexes et réduites  $C_s$ ,  $s \in S$ , avec  $\dim H^1(C_s, \mathcal{O}_{C_s}) = g$ , et n'ayant pour singularités que des points doubles ordinaires ;

(ii) Les sections  $\sigma_i$  sont à valeurs dans le lieu lisse de  $f$ , et distinctes en tout point  $s$  ;

(iii) Si  $E$  est une composante rationnelle non singulière de  $C_s$ , la somme du nombre de points où  $E$  rencontre les autres composantes de  $C_s$  et du nombre de sections  $\sigma_i$  telles que  $\sigma_i(s) \in E$  est au moins 3.

**3.1.2.** Pour  $S$  variable, la catégorie des courbes stables  $n$ -pointées de genre  $g$  forme un champ  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , qui est algébrique, propre et lisse sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  (cf. [13, th. 5.2] pour  $n = 0$ , [38, th. 2.7] dans le cas général), et muni d'un morphisme représentable  $\overline{\mathcal{F}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  qui est une « courbe stable  $n$ -pointée universelle ». Nous noterons  $\mathcal{M}_{g,n}$  l'ouvert de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  paramétrant les courbes stables lisses.

Soit  $\ell$  un entier  $\geq 3$ , et plaçons nous au-dessus de  $\mathbb{Z}[1/\ell]$ . On note  ${}_{\ell}\mathcal{M}_{g,n}$  le champ des courbes stables lisses de genre  $g$ ,  $n$ -pointées, et munies d'une trivialisations du sous-groupe des points de la jacobienne annulés par  $\ell$ . A priori, c'est un champ algébrique, muni d'un morphisme fini et étale  ${}_{\ell}\mathcal{M}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}[1/\ell]$ , et même un espace algébrique au sens d'Artin [2] et Knutson [39], car, sur un corps, les courbes stables munies d'une telle trivialisations n'ont pas d'automorphismes non triviaux. Pour  $g \geq 2$ ,  $n = 0$ , c'est en fait un schéma quasi-projectif sur  $\mathbb{Z}[1/\ell]$  : d'après [39, cor. 6.16], cela résulte de ce qu'il est séparé et quasi-fini sur le schéma de modules grossier des courbes lisses de genre  $g$ , quasi-projectif sur  $\mathbb{Z}[1/\ell]$  (Mumford [45, cor. 7.14]; voir aussi [49], [50]). C'est encore le cas si  $g = 0$ ,  $n = 3$  ou si  $g = 1$ ,  $n = 1$ , par un argument spécifique. Pour  $n$  quelconque, la quasi-projectivité de  ${}_{\ell}\mathcal{M}_{g,n}$  peut s'en déduire en utilisant les isomorphismes de contraction  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{F}}_{g,n}$  [38], qui montrent que  ${}_{\ell}\mathcal{M}_{g,n+1}$  s'identifie à un ouvert de la courbe stable universelle sur  ${}_{\ell}\mathcal{M}_{g,n}$ .

On note  ${}_{\ell}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  le normalisé de  ${}_{\ell}\mathcal{M}_{g,n}$  dans  ${}_{\ell}\mathcal{M}_{g,n}$  [13, (4.20)], qui est encore un champ algébrique fini sur  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . La démonstration de Deligne [12, prop. 3.5] est valable pour  $n$  quelconque, et montre que  ${}_{\ell}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}[1/\ell]$  est un espace algébrique au-dessus de  $\mathbb{Z}[1/\ell]$ . Si  $\ell = \ell_1 \ell_2$ , où  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont premiers entre eux et  $\geq 3$ ,  ${}_{\ell}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  est un espace algébrique au-dessus de  $\mathbb{Z}$ , car il est égal au normalisé de  ${}_{\ell_1}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  au-dessus de  $\mathbb{Z}[1/\ell_1]$  et à celui de  ${}_{\ell_2}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  au-dessus de  $\mathbb{Z}[1/\ell_2]$  (cf. [12, cor. 3.7]).

Sur un corps de caractéristique première à  $\ell$ , on peut déduire de la projectivité du schéma de modules grossier des courbes stables de genre  $g$  (Mumford [46], sur un corps quelconque — voir aussi Knudsen [38, III] pour  $n$  quelconque, mais sur  $\mathbb{C}$ ) que  ${}_{\ell}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  est un schéma projectif, mais nous n'aurons pas besoin d'utiliser ce résultat.

### 3.2. Altération en une famille de courbes stables

Donnons d'abord une définition générale.

**3.2.1.** Si  $f : X \rightarrow S$  est un morphisme de type fini entre deux schémas noethériens intègres, plat au-dessus d'un ouvert non vide  $V$  de  $S$ , et  $\varphi : S' \rightarrow S$  une altération

de  $S$ , l'*altéré strict* de  $f$  relativement à  $\varphi$  (ou à  $S'$ ) est le morphisme  $f' : X' \rightarrow S'$ , où  $X'$  est l'adhérence schématique de  $\varphi^{-1}(V) \times_V f^{-1}(V)$  dans  $S' \times_S X$ .

Supposons de plus que la fibre générique de  $f$  soit non vide, lisse et géométriquement connexe. Alors  $X'$  est une altération de  $X$ , qu'on appellera *altéré strict* de  $X$  relativement à  $S'$ . Si  $S'$  est génériquement étale (resp. projectif) sur  $S$ , alors  $X'$  est génériquement étale (resp. projectif) sur  $X$ .

Le résultat-clé est alors le théorème suivant [31, 3.17-3.21] :

**Théorème 3.2.2.** — Soient  $f : X \rightarrow S$  un morphisme propre entre deux schémas intègres excellents,  $\sigma_1, \dots, \sigma_n : S \rightarrow X$  des sections distinctes de  $f$ . On suppose vérifiées les conditions qui suivent :

- (a) Les fibres de  $f$  sont non vides, géométriquement connexes, équidimensionnelles de dimension 1 ;
- (b) Le lieu lisse de  $f$  est dense dans chaque fibre ;
- (c) La fibre générique de  $f$  est lisse ;
- (d) Pour tout point géométrique  $\bar{s}$  de  $S$ , et toute composante irréductible  $E$  de  $X_{\bar{s}}$ , il existe au moins trois points distincts  $\sigma_i(\bar{s}) \in E$  situés dans l'ouvert de lissité de  $f$ .

Il existe alors un ouvert non vide  $U \subset S$ , une altération projective  $\psi : S' \rightarrow S$  étale au-dessus de  $U$ , une courbe stable  $n$ -pointée ( $g : C \rightarrow S'$ ,  $\tau_i : S' \rightarrow C$ ), et un  $S'$ -morphisme  $\varphi : C \rightarrow X'$ , où  $X'$  est l'*altéré strict* de  $X$  relativement à  $S'$ , tel que  $\sigma_i \circ \psi = \varphi \circ \tau_i$  pour tout  $i$ , et tel que  $\varphi$  soit un isomorphisme au-dessus de  $U' = \psi^{-1}(U)$ .

Comme les courbes stables sont projectives, le morphisme  $C \rightarrow X$  est alors une altération projective génériquement étale de  $X$ .

**3.2.3.** Pour prouver le théorème 3.2.2, on commence par construire une altération projective génériquement étale  $S' \rightarrow S$ , munie d'une courbe stable  $n$ -pointée  $C \rightarrow S'$  telle qu'il existe un isomorphisme  $u : C_{U'} \xrightarrow{\sim} U' \times_S X$  au-dessus d'un ouvert non vide  $U' \subset S'$ .

Si  $\eta$  est le point générique de  $S$ , on choisit deux entiers  $\ell_1, \ell_2 \geq 3$ , premiers entre eux et premiers à la caractéristique de  $\kappa(\eta)$  ; on pose  $\ell = \ell_1 \ell_2$ . Soit  $U \subset S$  l'ouvert (non vide) au-dessus duquel  $\ell$  est inversible,  $f$  est lisse, et les sections  $\sigma_i$  sont telles que, pour tout  $s \in U$ , on ait  $\sigma_i(s) \neq \sigma_j(s)$  si  $i \neq j$ . Notons  $g$  le genre des fibres de  $f$  au-dessus de  $U$ . Comme  $n \geq 3$ , la restriction  $f_U : X_U \rightarrow U$  de  $f$  à  $U$  est une courbe stable lisse de genre  $g$ ,  $n$ -pointée, et définit un 1-morphisme  $U \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}[1/\ell]$  tel que  $X_U$  soit l'image inverse de la courbe stable pointée universelle  $\mathcal{X}_{g,n}$ . D'après 3.1.2, l'espace algébrique  ${}_{\rho} \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , fini sur  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , est donc propre sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ . Le lemme de Chow s'applique aux espaces algébriques (d'après

Raynaud-Gruson [52, cor. (5.7.14)], précisant Knutson [39, IV, th. 3.1]), et fournit un morphisme projectif d'espaces algébriques  $\bar{\mathcal{M}}' \rightarrow \rho\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$ , qui soit un isomorphisme au-dessus de l'ouvert quasi-projectif  $\rho\mathcal{M}_{g,n} \subset \rho\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$ , et tel que  $\bar{\mathcal{M}}'$  soit projectif sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ . Il en résulte que  $\bar{\mathcal{M}}'$  est un schéma projectif, que nous noterons  $\bar{M}'$ .

Le produit fibré  $U \times_{\mathcal{M}_{g,n}} \rho\mathcal{M}_{g,n}$  est un  $U$ -schéma fini et étale, et chacune de ses composantes irréductibles est une altération finie génériquement étale de  $U$ . L'adhérence  $S'$  d'une telle composante dans  $S \times \bar{M}'$  est alors une altération projective génériquement étale de  $S$ , et l'altéré strict  $X'$  de  $X$  relativement à  $S'$  est une altération génériquement étale de  $X$ , contenant les images inverses des sections  $\sigma_i$ . D'autre part, le morphisme composé  $S' \rightarrow \bar{M}' \rightarrow \bar{\mathcal{M}}_{g,n}$  fournit par image inverse une courbe stable  $n$ -pointée  $g : C \rightarrow S'$ , dont la restriction au-dessus de l'image inverse  $U'$  de  $U$  s'identifie par construction à  $X'_{U'}$ . On est donc ramené au cas où l'on a la propriété supplémentaire :

(e) *Il existe une courbe stable  $n$ -pointée  $g : (C, \tau_1, \dots, \tau_n) \rightarrow S$ , un ouvert non vide  $U \subset S$ , et un isomorphisme  $u : C_U \xrightarrow{\sim} X_U$  envoyant  $\tau_i$  sur  $\sigma_i$ .*

Soit  $T$  l'adhérence schématique du graphe de  $u$  dans  $C \times_S X$ . En utilisant la platification par éclatements de Raynaud-Gruson [52], on se ramène au cas où l'on a de plus :

(f) *Le schéma  $T$  est plat sur  $S$ .*

Enfin, on peut remplacer  $S$  par son normalisé  $S'$ , qui est fini et birationnel sur  $S$  puisque  $S$  est excellent, et  $X$  par son altéré strict. Cela permet de supposer :

(g) *Le schéma  $S$  est normal.*

**3.2.4.** Supposons donc que  $f : X \rightarrow S$  vérifie les conditions (a) - (g). On veut alors prouver que l'isomorphisme  $u$  se prolonge en un morphisme de courbes pointées  $C \rightarrow X$  au-dessus de  $S$ .

Fixant un point  $s \in S$ , on introduit les décompositions en composantes irréductibles des fibres en  $s$  :

$$X_s = X_1 \cup \dots \cup X_r, \quad C_s = C_1 \cup \dots \cup C_{r'}, \quad T_s = T_1 \cup \dots \cup T_{r''}.$$

Soient  $p_1 : T \rightarrow C$ ,  $p_2 : T \rightarrow X$  les deux projections. Vérifions d'abord que, pour tout  $i \leq r$  (resp. tout  $j \leq r'$ ), il existe un unique indice  $k_i$  (resp.  $k'_j$ ) tel que  $p_2(T_{k_i}) = X_i$  (resp.  $p_1(T_{k'_j}) = C_j$ ), et un ouvert  $V \subset X$  tel que  $V \cap X_i$  soit non vide, et  $p_2^{-1}(V) \rightarrow V$  un isomorphisme (resp.  $V' \subset C \dots$ ). Comme  $X_s$  et  $T_s$  sont de dimension 1 ( $T$  étant plat sur  $S$ ),  $p_2$  est fini en dehors d'un ensemble fini  $W \subset X_s$ . Si  $x$  est un point de  $X_s \setminus W$ , il possède un voisinage ouvert  $V \subset X$  au-dessus duquel  $p_2$  est fini. Quitte à exclure un nombre fini de points  $x \in X_s$ , on peut supposer que  $f$  est lisse sur  $V$ , ce qui entraîne que  $V$  est normal. Comme  $p_2$  est d'autre part birationnel,  $p_2^{-1}(V) \rightarrow V$  est un isomorphisme, d'où l'assertion. On procède de même sur  $C$ .

Montrons maintenant que, pour tout  $i \leq r$ , et pour  $k = k_i$ , le morphisme  $p_1 : T_k \rightarrow C_s$  est non constant. Sinon, soit  $c = p_1(T_k)$  son image. On peut trouver 3 indices  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que  $x_\alpha = \sigma_\alpha(s)$ ,  $x_\beta = \sigma_\beta(s)$  et  $x_\gamma = \sigma_\gamma(s)$  soient des points distincts de  $X_i$ , situés dans le lieu de lissité de  $f$ . Au voisinage de ces points,  $X$  est normal, et la factorisation de Stein de  $p_2$  montre que les schémas  $T_\lambda = p_2^{-1}(x_\lambda)$  sont connexes pour  $\lambda = \alpha, \beta, \gamma$ . Ils contiennent respectivement les points  $t_\lambda = (\tau_\lambda(s), x_\lambda)$ , et  $T_\lambda \cap T_k \neq \emptyset$ , car  $T_k$  domine  $X_i$ . D'autre part, les points  $c_\lambda = p_1(t_\lambda) = \tau_\lambda(s)$  sont distincts, parce que  $C$  est une courbe stable pointée. Deux cas pourraient se produire :

1) Le point  $c$  n'est pas l'un des 3 points  $c_\lambda$ . Alors les  $p_1(T_\lambda)$  sont de dimension 1, puisqu'ils sont connexes et contiennent les points  $c$  et  $c_\lambda$ . Or ils sont deux à deux distincts, car les  $T_\lambda$  sont distincts, et il n'existe qu'une seule composante irréductible de  $T_s$  au-dessus d'une composante irréductible donnée de  $C_s$ . On trouve donc 3 composantes de  $C_s$  passant par un même point, ce qui contredit la stabilité de  $C$ .

2) Le point  $c$  est l'un des 3 points  $c_\lambda$ , par exemple  $c_\alpha$ . Comme précédemment,  $p_1(T_\beta)$  et  $p_2(T_\gamma)$  sont de dimension 1. Ils se coupent en  $c = c_\alpha$ , donc en l'un des points définissant la structure de courbe stable pointée de  $C_s$ , ce qui est encore impossible.

De ces propriétés résulte que le morphisme  $p_1 : T \rightarrow C$  n'a que des fibres finies. Or il est birationnel, et, comme  $S$  est normal, on déduit facilement du critère de Serre [EGA, IV, 5.8] que  $C$  est normal. Par suite, c'est un isomorphisme, ce qui fournit le morphisme  $C \rightarrow X$  prolongeant  $u$ , et achève la démonstration du théorème 3.2.2.

## 4. ALTÉRATIONS DE VARIÉTÉS SUR UN CORPS

Nous expliquons maintenant la démonstration du théorème 1.2.2, dont nous reprenons les notations. La méthode consiste à effectuer une suite d'altérations sur  $X$ , en remplaçant à chaque étape  $X$  par son altéré  $X'$ , et  $Z$  par son image inverse  $Z'$  dans  $X'$  (éventuellement agrandie comme en 4.1.3 plus bas), afin de se réduire finalement à la situation étudiée au paragraphe précédent. On procède par récurrence sur  $d = \dim X$ .

### 4.1. Réductions préliminaires

**4.1.1.** On peut supposer  $k$  algébriquement clos. Si  $\bar{k}$  est une clôture algébrique de  $k$ , il suffit en effet d'appliquer le théorème 1.2.2 à une composante irréductible de  $X \times \text{Spec } \bar{k}$  et à l'image inverse de  $Z$ , de redescendre la situation à une

extension finie  $k'$  de  $k$  sur laquelle tout est défini, et d'observer que, pour toute composante irréductible  $X'$  de  $X \times \text{Spec } k'$ , le morphisme  $X' \rightarrow X$  est une altération de  $k$ -variétés algébriques, génériquement étale si  $k$  est parfait.

**4.1.2.** On peut supposer que  $X$  est une variété projective : on applique le lemme de Chow pour obtenir une modification quasi-projective, puis on remplace  $X$  par son adhérence schématique  $\bar{X}$  dans un plongement  $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ , et  $Z$  par  $Z \cup (\bar{X} \setminus X)$ .

**4.1.3.** En éclatant  $Z$ , on peut supposer que  $Z$  est le support d'un diviseur. On peut ensuite remplacer si nécessaire  $Z$  par le support d'un diviseur plus grand, car tout fermé de  $\bar{X}'$  contenu dans un diviseur à croisements normaux stricts, et de codimension 1 dans  $\bar{X}'$ , est encore le support d'un diviseur à croisements normaux stricts.

**4.1.4.** Comme le morphisme de normalisation  $X' \rightarrow X$  est une modification, on peut remplacer  $X$  par  $X'$  et  $Z$  par son image inverse dans  $X'$ , ce qui permet de supposer  $X$  normal.

## 4.2. Construction d'une fibration en courbes

Soit  $d = \dim X$ . On veut modifier  $X$  de manière à se ramener au cas où  $X$  est une famille de courbes sur une base de dimension  $d - 1$ . On utilisera le lemme suivant, qui résulte de techniques classiques de géométrie projective :

**Lemme 4.2.1.** — Soit  $X \subset \mathbb{P}^n$  un sous-schéma fermé réduit, purement de dimension  $d < n$ . Si  $z \in \mathbb{P}^n \setminus X$ , on note  $\mathbb{P}^{n-1}$  l'espace projectif paramétrant les droites de  $\mathbb{P}^n$  passant par  $z$ , et  $\text{pr}_z : X \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  le morphisme fini associant à  $x \in X$  la droite joignant  $z$  et  $x$ . Si  $d < n - 1$  (resp.  $d = n - 1$ ), il existe un ouvert non vide  $U \subset \mathbb{P}^n$  tel que, pour  $z \in U$ , le morphisme  $\text{pr}_z : X \rightarrow \text{pr}_z(X)$  soit birationnel (resp. génériquement étale).

**Proposition 4.2.2.** — Soient  $X$  une variété projective de dimension  $d$  sur  $k$ ,  $Z \subset X$  le support d'un diviseur. On peut trouver un sous-ensemble fini  $S$  de points fermés réguliers de  $X \setminus Z$ , tel que, si  $\phi : X' \rightarrow X$  est l'éclatement de  $S$ , il existe un morphisme  $f : X' \rightarrow \mathbb{P}^{d-1}$  possédant les propriétés suivantes :

- (a) Les fibres de  $f$  sont non vides, équidimensionnelles de dimension 1 ;
- (b) L'ouvert de lissité de  $f$  est dense dans chaque fibre ;
- (c) Si  $Z' = \phi^{-1}(Z)_{\text{red}}$ , la restriction de  $f$  à  $Z'$  est finie, et étale au-dessus d'un ouvert non vide de  $\mathbb{P}^{d-1}$ .

Si l'on suppose que  $X$  est normal, on peut choisir  $S$  et  $f$  de sorte qu'on ait de plus :

- (d) L'une des fibres de  $f$  est lisse.

(e) *Les fibres de  $f$  sont géométriquement connexes.*

On part d'un plongement de  $X$  dans un espace projectif  $\mathbb{P}^N$ , et on applique  $N - d$  fois le lemme 4.2.1 à la fois à  $X$  et à  $Z$  pour obtenir un morphisme fini génériquement étale  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^d$  dont la restriction à  $Z$  soit birationnelle sur  $\pi(Z)$ . Le lemme 4.2.1 permet encore de choisir un point  $z \in \mathbb{P}^d \setminus \pi(Z)$  dans l'ouvert où  $\pi$  est étale, tel que le morphisme  $\text{pr}_z : \pi(Z) \rightarrow \mathbb{P}^{d-1}$  soit fini et génériquement étale. Soit  $\tilde{\mathbb{P}}^d = \{(x, \ell) \mid x \in \ell\} \subset \mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^{d-1}$  la variété d'incidence, qui n'est autre que l'éclaté de  $\mathbb{P}^d$  en  $z$ . On définit  $X'$  comme le produit  $X \times_{\mathbb{P}^d} \tilde{\mathbb{P}}^d$ , qui s'identifie à l'éclaté de  $X$  le long de l'ensemble fini  $S = \pi^{-1}(z)$ , et on note  $\varphi : X' \rightarrow X$  et  $f : X' \rightarrow \mathbb{P}^{d-1}$  les morphismes définis par les projections.

La condition (a) résulte de ce que la fibre de  $f$  au-dessus d'un point  $y \in \mathbb{P}^{d-1}$  correspondant à une droite  $\ell \subset \mathbb{P}^d$  passant par  $z$  est l'adhérence de  $\pi^{-1}(\ell \setminus \{z\})$  dans  $X'$ , et de ce que  $\pi$  est fini. Chacune des composantes de  $\pi^{-1}(\ell)$  s'envoie surjectivement sur  $\ell$ , de sorte que chaque composante de  $f^{-1}(y)$  rencontre les fibres exceptionnelles de  $\varphi$ ; comme  $\pi$  est étale au-dessus de  $z$ , et  $\tilde{\mathbb{P}}^d \rightarrow \mathbb{P}^{d-1}$  lisse le long de la fibre exceptionnelle,  $f$  est lisse le long de  $\varphi^{-1}(S)$ , ce qui entraîne (b). La condition (c) est claire. Par construction,  $\pi$  s'identifie à une projection linéaire centrée en une sous-variété linéaire  $L \subset \mathbb{P}^N$  de dimension  $N - d - 1$ ,  $z$  correspond à une sous-variété linéaire  $L'$  de dimension  $N - d$  contenant  $L$  et transverse à  $X$ ,  $f$  est l'extension à l'éclaté de  $X$  le long de  $X \cap L'$  de la projection linéaire centrée en  $L'$ , un point  $y \in \mathbb{P}^{d-1}$  correspond à une sous-variété linéaire  $H$  de dimension  $N - d + 1$  contenant  $L$ , et la fibre  $f^{-1}(y)$  est isomorphe à  $X \cap H$  : la condition (d) résulte ainsi du théorème de Bertini [33, th. 6.10]. Enfin, l'étude de la factorisation de Stein montre que les propriétés de  $f$  entraînent que ses fibres sont géométriquement connexes.

**4.2.3.** On applique alors la proposition précédente dans la situation obtenue en 4.1.4. Remplaçant  $X$  par  $X'$ , et  $Z$  par  $Z' = \varphi^{-1}(Z)$ , on peut donc supposer qu'il existe une variété  $Y$  de dimension  $d - 1$ , et un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  vérifiant les conditions (a) - (e) de 4.2.2. La variété obtenue est encore normale, et  $f$  est lisse au-dessus d'un ouvert non vide de  $Y$ .

### 4.3. Transformation du diviseur en une famille de sections

La stratégie de de Jong consiste à se ramener à la situation du théorème 3.2.2. Pour cela, on va d'abord agrandir le diviseur donné  $Z \subset X$  de manière à ce qu'il rencontre chaque composante irréductible de chaque fibre géométrique de  $f$  en au moins trois points où  $f$  est lisse, puis on altèrera  $Y$  pour transformer  $Z$  en réunion de sections de  $f$ .

**Proposition 4.3.1.** — Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de variétés projectives sur  $k$  vérifiant les conditions (a) et (b) de 4.2.2. Il existe un diviseur  $H \subset X$  tel que :

- (i) La restriction de  $f$  à  $H$  est finie et génériquement étale;
- (ii) Pour tout point géométrique  $\bar{y}$  de  $Y$  et toute composante irréductible  $C$  de la fibre géométrique  $X_{\bar{y}}$  de  $f$  en  $\bar{y}$ ,  $C \cap H$  contient au moins trois points distincts de l'ouvert de lissité de  $f$ .

On choisit un faisceau très ample  $\mathcal{L}$  sur  $X$ , et, pour un entier  $n \geq 1$  fixé, soit  $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}$  le plongement dans un espace projectif défini par  $\mathcal{L}^{\otimes n}$ . Soient  $\mathbb{P}^\vee$  l'espace des hyperplans  $L$  de  $\mathbb{P}$ , et  $T \subset \mathbb{P}^\vee \times Y$  l'ensemble des couples  $(L, y)$  tels que  $L$  contienne une composante irréductible de  $f^{-1}(y)$ ;  $T$  est fermé, car, si  $T' \subset \mathbb{P}^\vee \times X$  est la restriction au-dessus de  $X$  de la sous-variété d'incidence de  $\mathbb{P}^\vee \times \mathbb{P}$ ,  $T$  est l'ensemble des points au-dessus desquels la fibre du morphisme propre  $\text{Id} \times f : T' \rightarrow \mathbb{P}^\vee \times Y$  est de dimension  $\geq 1$ . Une estimation sur la dimension des fibres de la seconde projection  $T \rightarrow Y$  fournit l'inégalité

$$\dim T \leq \dim Y + \dim \mathbb{P}^\vee - n.$$

Pour  $n$  assez grand, il existe donc un ouvert non vide  $V \subset \mathbb{P}^\vee$  dont les points correspondent à des hyperplans  $L$  dont l'intersection avec chaque fibre de  $f$  est finie.

Fixons un point fermé  $y \in Y$ , et soit  $U \subset V$  l'ouvert des hyperplans  $L \in V$  tels que  $L \cap f^{-1}(y)$  soit contenu dans le lieu lisse de  $f$ , et tels que  $L$  coupe transversalement  $f^{-1}(y)$ . L'ouvert  $U$  est non vide, et, si  $L \in U$ , et si  $H = X \cap L$ , le morphisme  $f|_H$  est fini. Si  $x \in f^{-1}(y) \cap H$ , la lissité de  $f$  en  $x$  et la transversalité de  $L$  et  $f^{-1}(y)$  entraînent que  $f$  est étale en  $x$ . Comme  $\dim H = \dim Y$ , toute composante irréductible de  $H$  s'envoie surjectivement sur  $Y$ , et la condition (i) est remplie.

Reste à assurer la condition (ii). On commence par l'assurer au voisinage de  $y$ . Comme  $H$  est étale sur  $Y$  aux points de  $f^{-1}(y)$ , on peut trouver un ouvert  $W$  contenant  $y$  tel que  $H \cap f^{-1}(W)$  soit étale sur  $W$  et soit contenu dans le lieu lisse de  $f$ . Pour toute composante irréductible  $C$  d'une fibre  $f^{-1}(y')$  au-dessus d'un point  $y' \in W$ , l'intersection  $C \cap H$  a alors pour cardinal le degré de  $C$ , et la condition est remplie dès que  $n \geq 3$ . On procède ensuite par récurrence noethérienne. Si on a construit  $H'$  vérifiant (i), ainsi que (ii) au-dessus d'un ouvert  $W'$  de  $Y$ , on choisit un point  $y'' \notin W'$ , et on lui applique le raisonnement précédent pour trouver un diviseur  $H''$  vérifiant (i), et (ii) au-dessus d'un voisinage ouvert  $W''$  de  $y''$ . Le diviseur  $H' \cup H''$  a alors les propriétés voulues au-dessus de  $W' \cup W''$ , d'où la récurrence.

**4.3.2.** On applique la proposition 4.3.1 dans la situation obtenue en 4.2.3. D'après 4.1.3, on peut remplacer  $Z$  par  $Z \cup H$ , ce qui permet de supposer désormais que  $Z$  vérifie :

(f) *Pour toute composante irréductible  $C$  d'une fibre géométrique de  $f$ ,  $C \cap Z$  contient au moins 3 points situés dans l'ouvert de lissité de  $f$ .*

**4.3.3.** Remarquons maintenant que, si  $Y' \rightarrow Y$  est une altération projective génériquement étale, et  $f' : X' \rightarrow X$  l'altéré strict de  $f$  relativement à  $Y'$ ,  $X'$  est une altération projective génériquement étale de  $X$  (voir 3.2.1). On pose  $Z' = (Y' \times_Y Z)_{\text{red}}$ ;  $Z'$  est encore le support d'un diviseur de  $X'$ , et on vérifie sans difficulté que  $f'$  vérifie les mêmes propriétés que  $f$ .

On utilise cette remarque pour se ramener au cas où  $Z$  est réunion de sections de  $f$ . Soit en effet  $Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$  la décomposition de  $Z$  en composantes irréductibles. On choisit une extension finie galoisienne  $L$  de  $k(Y)$  telle que chacune des extensions  $k(Z_i)$  de  $k(Y)$  puisse être plongée dans  $L$ , et on introduit la normalisation  $Y'$  de  $Y$  dans  $L$  : le morphisme  $Y' \rightarrow Y$  est alors une altération finie et génériquement étale. En définissant  $X'$  et  $Z'$  comme plus haut, on voit que  $Z' = Z'_1 \cup \dots \cup Z'_n$ , où chacun des  $Z'_i$  est fini et birationnel sur  $Y'$ . Mais  $Y'$  est normal, de sorte que les morphismes  $Z'_i \rightarrow Y'$  sont des isomorphismes, et définissent des sections  $\sigma_i : Y' \rightarrow X'$  telles que  $Z' = \bigcup \sigma_i(Y')$ . On remplace alors  $Y$  par  $Y'$  et  $(X, Z)$  par  $(X', Z')$ , de sorte qu'on peut désormais supposer qu'on a de plus :

(g) *Il existe des sections  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  de  $f$  telles que  $Z = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i(Y)$ .*

On remarquera que l'existence de telles sections est préservée par les altérations construites comme plus haut à partir d'altérations de la base.

#### 4.4. Fin de la démonstration

Le morphisme  $f : X \rightarrow Y$  vérifie maintenant les conditions (a) - (d) du théorème 3.2.2. Quitte à remplacer  $Y$  par une altération projective génériquement étale  $Y'$ , et  $X$  par son altéré strict  $X'$  relativement à  $Y'$ , on peut supposer qu'il existe une courbe stable  $C$  sur  $Y$ , et un morphisme  $u : C \rightarrow X$ , commutant aux sections données, et qui soit un isomorphisme au-dessus d'un ouvert  $U$  de  $Y$ .

On considère le fermé  $u^{-1}(Z) \subset C$ , qui est purement de codimension 1. Si l'une de ses composantes n'est pas une des sections  $\tau_i(Y)$ , la condition (g) entraîne que celle-ci se projette en un fermé de codimension 1 dans  $Y$ , ne rencontrant pas  $U$ . Il existe donc un fermé  $D \subset Y \setminus U$ , purement de codimension 1, tel que  $u^{-1}(Z) \subset Z' = \tau_1(Y) \cup \dots \cup \tau_n(Y) \cup g^{-1}(D)$ . On remplace alors  $X$  par  $C$ , et  $Z$  par  $Z' = \tau_1(Y) \cup \dots \cup \tau_n(Y) \cup g^{-1}(D)$  (grâce à 4.1.3). On est ainsi ramené au cas où  $X$  est une courbe stable pointée de base  $Y$ , munie de sections  $\tau_i$ , et  $Z$  est de la forme précédente,  $D$  étant un fermé de  $Y$  en dehors duquel  $f$  est lisse.

L'hypothèse de récurrence permet maintenant de trouver une altération génériquement étale  $\psi : Y' \rightarrow Y$  telle que  $Y'$  soit lisse, et  $D' = \psi^{-1}(D)$  soit le support

d'un diviseur à croisements normaux strict de  $Y'$ . L'altéré strict de  $X$  relativement à  $Y'$  est alors  $Y' \times_Y X$ ; c'est donc une courbe stable pointée  $f' : X' \rightarrow Y'$ , lisse hors de  $D'$ . De même, si on note  $\tau'_i$  les sections images inverses des  $\tau_i$ ,  $Z$  est transformé en  $Z' = \bigcup_i \tau'_i(Y') \cup f'^{-1}(D')$ . On peut alors appliquer à  $X'$  la méthode de désingularisation exposée en 2.3 et 2.4. Comme on l'a remarqué en 2.4.2,  $Z$  est alors transformé en un diviseur à croisements normaux. Il est bien connu d'autre part qu'un diviseur à croisements normaux peut être rendu strict par une suite d'éclatements de centre régulier (on éclate les intersections de branches du diviseur), ce qui achève la démonstration.

## 5. ALTÉRATIONS DANS LE CAS RELATIF

Nous donnons maintenant quelques indications sur la démonstration du théorème 1.4.1. Elle est du même type que celle du théorème 1.2.2, et procède par récurrence sur la dimension relative de  $X$  sur  $A$ . Pour cela, nous aurons besoin d'une extension du théorème 3.2.2, permettant de transformer par altérations certaines familles de courbes  $X \rightarrow S$  en courbes nodales scindées, à fibre générique lisse.

### 5.1. Altérations d'une courbe relative

On considère ici un morphisme propre  $f : X \rightarrow S$  entre deux schémas entiers noethériens excellents. Le résultat qu'utilise de Jong dans la démonstration du théorème 1.4.1 est le suivant [31, th. 6.8] (voir aussi [32, th. 2.4] pour un résultat plus précis et plus général) :

**Théorème 5.1.1.** — *Sous les hypothèses précédentes, supposons que les fibres de  $f$  soient non vides, équidimensionnelles de dimension 1, et que le lieu lisse de  $f$  soit dense dans chaque fibre. Alors :*

(i) *Il existe des altérations  $\psi : S' \rightarrow S$ ,  $\varphi : X' \rightarrow X$ , et un morphisme  $f' : X' \rightarrow S'$ , avec  $f \circ \varphi = \psi \circ f'$ , tels que  $f'$  soit une courbe nodale scindée, à fibre générique lisse.*

(ii) *Si  $Z \subset X$  est un fermé distinct de  $X$ , on peut imposer de plus qu'il existe des sections disjointes  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  de  $f'$ , à valeurs dans le lieu lisse de  $f'$ , et un diviseur  $D' \subset S'$  tels que  $\varphi^{-1}(Z)_{\text{red}} \subset f'^{-1}(D')_{\text{red}} \cup \sigma_1(S') \cup \dots \cup \sigma_n(S')$ .*

Nous indiquerons simplement les étapes essentielles de la démonstration. La stratégie consiste encore à altérer  $S$  et  $X$  de manière à ce que, au-dessus d'un ouvert de  $S$ ,  $X$  devienne une courbe stable pointée.

**5.1.2.** Un point clé de la démonstration est de pouvoir construire après altération suffisamment de sections de  $f$ . Montrons d'abord que, pour tout  $s \in S$ , on peut trouver un voisinage étale  $U$  de  $s$ , un morphisme fini surjectif  $U' \rightarrow U$  et des sections  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  de  $X_{U'} = U' \times_S X$  vérifiant la propriété suivante : pour tout point géométrique  $\bar{s}'$  de  $U'$  et toute composante irréductible  $C$  de  $X_{\bar{s}'}$ , il existe  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $\sigma_i(\bar{s}')$ ,  $\sigma_j(\bar{s}')$  et  $\sigma_k(\bar{s}')$  soient trois points distincts de  $C$  situés dans le lieu lisse de  $f$ .

On peut trouver un voisinage étale affine  $U$  de  $s$  au-dessus duquel  $X$  est projectif. On choisit un faisceau  $\mathcal{L}$  sur  $X_U$  très ample relativement à  $U$ , et un entier  $n \geq 3$  assez grand pour que toute section de  $\mathcal{O}_{X_s} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$  s'étende en une section de  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  sur  $X_U$ . Par Bertini, il existe une extension finie séparable  $k'$  de  $\kappa(s)$  et une section  $t \in \Gamma(X_{k'}, \mathcal{O}_{X_{k'}} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$  telles que le sous-schéma fermé de  $X_{k'}$  défini par  $t$  soit fini, étale sur  $k'$ , et contenu dans le lieu lisse de  $X_{k'}$ . On choisit alors un morphisme  $\psi : U' \rightarrow U$ , étale et fini au voisinage de  $s$ , tel que  $\psi^{-1}(s)$  soit réduit à un point  $s'$  où l'on ait  $\kappa(s') = k'$ . Quitte à réduire  $U$ , on peut supposer que  $t$  se relève en une section de  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  sur  $X_{U'}$ , et définit un sous-schéma fermé  $H$  du lieu lisse de  $f$ , fini et étale sur  $U'$ . Comme  $\mathcal{L}$  est très ample et  $n \geq 3$ ,  $H$  induit un diviseur contenant au moins 3 points distincts sur toute composante irréductible d'une fibre géométrique  $X_{\bar{s}'}$ , avec  $\bar{s}' \in U'$ . On achève en contruisant un morphisme fini surjectif  $U'' \rightarrow U'$  telle que  $H_{U''}$  soit réunion de sections de  $X_{U''}$  (normaliser  $U'$  dans une extension normale finie commune des corps des fonctions rationnelles des composantes de  $H$ ).

On peut ensuite globaliser de telles constructions faites sur un recouvrement étale de  $S$  de manière à obtenir une altération  $S' \rightarrow S$  et des sections  $\sigma_i : S' \rightarrow X_{S'}$  possédant la propriété voulue : on choisit un recouvrement étale  $(U_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq r}$  de  $S$  tel que les  $U_\alpha$  soient affines et d'image affine dans  $S$ , et que, sur chacun des  $U_\alpha$ , on dispose d'un morphisme fini surjectif  $U'_\alpha \rightarrow U_\alpha$  et de sections  $\sigma_{\alpha,i}$  comme plus haut. Dans chaque  $U'_\alpha$ , on peut choisir une composante irréductible dont l'image soit dense dans  $S$ , et on remplace  $U'_\alpha$  par cette composante. Chacun des  $U'_\alpha$  est quasi-projectif sur  $S$ , de sorte qu'on peut choisir une immersion  $u_\alpha : U'_\alpha \hookrightarrow \mathbb{P}_S^N$ , et plonger  $U'_\alpha$  dans  $\mathbb{P}_S^N \times_S X \times_S \dots \times_S X$  par

$$(u_\alpha, \sigma_{\alpha,i}) : U'_\alpha \hookrightarrow \mathbb{P}_S^N \times_S X \times_S \dots \times_S X.$$

Soit alors  $S'_\alpha$  l'adhérence de  $U'_\alpha$  dans  $\mathbb{P}_S^N \times_S X \times_S \dots \times_S X$ . Les morphismes  $S'_\alpha \rightarrow S$  sont des altérations prolongeant les morphismes  $U'_\alpha \rightarrow S$ , telles que les  $\sigma_i$  se prolongent en des sections au-dessus de  $S'_\alpha$ . On coiffe alors les  $S'_\alpha$  par une composante irréductible de  $S'_1 \times_S \dots \times_S S'_r$ , et on prend pour famille  $(\sigma_i)$  la réunion des images inverses de toutes les familles  $(\sigma_{\alpha,i})$ .

**5.1.3.** On observe ensuite que, si l'on dispose d'une altération  $S' \rightarrow S$ , on en déduit une altération  $\varphi : X' \rightarrow X$  en prenant pour  $X'$  une composante irréductible de  $X_{S'}$ , dominant  $X$ ; les hypothèses faites sur  $f$  sont encore vérifiées pour  $f' : X' \rightarrow S'$ , et si l'on pose  $Z' = \varphi^{-1}(Z)$ , il suffit alors de prouver le théorème 5.1.1 pour  $(X', Z')$  au-dessus de  $S'$ .

Si  $\eta$  est le point générique de  $S$ , on commence en choisissant une extension finie  $L$  de  $\kappa(\eta)$  telle que la normalisation de  $(L \otimes X_\eta)_{\text{red}}$  soit réunion de courbes lisses géométriquement irréductibles. On prend pour  $S'$  la normalisation de  $S$  dans  $L$ , et on définit  $X', Z'$  comme on vient de le voir. On remplace ensuite  $X'$  par sa normalisation, qui est une altération de  $X$ , et  $Z'$  par son image inverse. On est ainsi ramené au cas où la fibre générique de  $f$  est lisse et géométriquement irréductible.

Soit  $U$  un ouvert de  $S$  au-dessus duquel  $Z$  est fini et plat. Procédant comme en 5.1.2, on peut trouver une altération  $U'$  de  $U$  et des sections  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  de  $X_{U'}$  telles que  $Z_{U'} = \sigma_1(U') \cup \dots \cup \sigma_n(U')$ , puis l'étendre en une altération  $S' \rightarrow S$  telle que les  $\sigma_i$  se prolongent en des sections de  $X_{S'}$ . On définit alors  $X'$  et  $Z'$  comme plus haut. Le fermé  $Z'$  obtenu est contenu dans  $f'^{-1}(S' \setminus U') \cup \sigma_1(S') \cup \dots \cup \sigma_n(S')$ . En éclatant  $S' \setminus U'$ , on se ramène au cas où il existe des sections  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  de  $X$  et un diviseur  $D \subset S$  tels que  $Z \subset f^{-1}(D) \cup \sigma_1(S) \cup \dots \cup \sigma_n(S)$ .

On applique alors 5.1.2 pour obtenir une altération  $S' \rightarrow S$  sur laquelle il existe des sections  $\sigma'_j$  telles que, pour toute composante irréductible  $C$  d'une fibre en un point géométrique  $\bar{s}$ ,  $C$  contienne au moins 3 points  $\sigma'_j(\bar{s})$  distincts situés dans le lieu lisse de  $f$ . Remplaçant  $S$  par  $S'$ , et  $X$  par  $X'$  comme plus haut, et ajoutant les  $\sigma'_j$  aux  $\sigma_i$ , on se trouve alors sous les hypothèses du théorème 3.2.2. On se ramène ainsi au cas où  $X$  est une courbe nodale sur  $S$ , génériquement lisse, munie de sections  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , et où  $Z$  est contenu dans  $f^{-1}(D) \cup \sigma_1(S) \cup \dots \cup \sigma_n(S)$ ,  $D$  étant un diviseur de  $S$ .

Il reste à voir que l'on peut altérer  $S$  de manière à ce que la courbe nodale  $X$  soit de plus scindée. On montre pour cela qu'on peut trouver une altération  $S' \rightarrow S$  au-dessus de laquelle il existe des sections  $\sigma''_1, \dots, \sigma''_m$  de  $X_{S'}$  telles que, pour tout point géométrique  $\bar{s} \in S'$ , et tout point singulier  $\bar{x} \in X_{\bar{s}}$ , il existe  $k$  tel que  $\bar{x} = \sigma''_k(\bar{s})$ . La démonstration est analogue à celle de 5.1.2. Soit  $\Sigma = \text{Sing}(f)$ , et fixons un point  $s \in S$ . Pour  $n$  assez grand, on peut trouver  $t \in \Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$  définissant un sous-schéma fermé fini sur  $\kappa(s)$  et contenant  $\Sigma_s$ . Quitte à augmenter  $n$ , on peut supposer que  $f_*(\mathcal{L}^{\otimes n}) \rightarrow f_*(\mathcal{O}_\Sigma \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$  est surjectif, et relever  $t$  en une section du noyau de  $f_*(\mathcal{L}^{\otimes n}) \rightarrow f_*(\mathcal{O}_\Sigma \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ . Le sous-schéma réduit défini par cette section est fini et plat sur un voisinage étale  $U$  de  $s$ , et peut comme précédemment être transformé en réunion de sections par une altération de  $U$ . On achève alors comme en 5.1.2 pour trouver une altération globale  $S' \rightarrow S$  ayant les propriétés voulues.

On ajoute les sections  $\sigma_k''$  aux sections  $\sigma_i$ , et on remarque que, génériquement, on obtient une nouvelle courbe stable lisse,  $(n+m)$ -pointée. On utilise à nouveau les schémas de modules pour construire un  $S$ -morphisme  $v : C \rightarrow X$  entre une courbe stable  $(n+m)$ -pointée  $(C, \tau_1, \dots, \tau_{n+m})$  et  $(X, \sigma_1, \dots, \sigma_{n+m})$ , qui soit un isomorphisme au-dessus d'un ouvert non vide  $U \subset S$ . Comme  $C$  et  $X$  ont même genre, l'image inverse par  $u$  d'un point singulier  $\bar{x}$  d'une fibre  $X_{\bar{s}}$  est un point ou une chaîne de droites projectives. Mais l'une des sections  $\sigma_i$  passe par  $\bar{x}$ , et  $\tau_i(\bar{s})$  est donc un point lisse de  $C_{\bar{s}}$  d'image  $\bar{x}$ . Par suite,  $u^{-1}(\bar{x})$  ne peut être réduit à un point, et est une chaîne de droites projectives. Il en résulte que les composantes irréductibles de  $C_{\bar{s}}$  sont lisses. En altérant à nouveau  $S$  pour construire comme précédemment des sections passant par tous les points d'intersection des composantes, et par les ouverts de lissité de toutes les composantes, on obtient une courbe nodale scindée.

## 5.2. Schémas strictement semi-stables

On appellera *trait* le spectre d'un anneau de valuation discrète complet. Précisons d'abord la notion de paire semi-stable utilisée dans l'énoncé du théorème 1.4.1 :

**5.2.1.** Soient  $S = \text{Spec} A$  un trait,  $\pi$  une uniformisante de  $A$ ,  $K = \text{Frac} A$ ,  $X$  une  $S$ -variété. On note  $\eta$  le point générique de  $S$ ,  $s$  son point fermé,  $X_\eta$  la fibre générique de  $X$ ,  $X_s$  sa fibre spéciale, et  $X_i$ ,  $i \in I$ , les composantes irréductibles de  $X_s$ . Pour tout sous-ensemble non vide  $J \subset I$ , on note  $X_J = \bigcap_{j \in J} X_j$ . On dira que  $X$  est *strictement semi-stable* sur  $S$  si :

- (i)  $X_\eta$  est lisse sur  $\kappa(\eta)$ ;
- (ii)  $X_s$  est un schéma réduit, réunion schématique des  $X_i$ ;
- (iii) Pour tout  $i \in I$ ,  $X_i$  est un diviseur dans  $X$ ;
- (iv) Pour tout  $J \subset I$ ,  $J \neq \emptyset$ ,  $X_J$  est lisse sur  $\kappa(s)$ , avec  $\text{codim}_X(X_J) = \#J$ .

Explicitons sous ces hypothèses la structure locale de  $X$  le long de  $X_s$ . Soient  $x \in X_s$ ,  $X_1, \dots, X_r$  les composantes irréductibles de  $X_s$  auxquelles appartient  $x$ ,  $t_i \in \mathcal{O}_{X,x}$  une équation locale de  $X_i$  dans  $X$ . Grâce à (ii) et (iii), on peut supposer que  $t_1 \dots t_r = \pi$ . D'après (iv), l'algèbre  $\bar{B} = \hat{\mathcal{O}}_{X,x}/(t_1, \dots, t_r)$  est formellement lisse sur  $\kappa(s)$ , et se relève donc en une  $A$ -algèbre locale complète formellement lisse  $B$ . L'homomorphisme canonique  $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}/\pi \hat{\mathcal{O}}_{X,x} \rightarrow \bar{B}$  possède une section, qu'on peut relever en  $B \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ . On en déduit un isomorphisme

$$B[[t_1, \dots, t_r]]/(t_1 \dots t_r - \pi) \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}_{X,x}.$$

On observe en particulier que  $X$  est un schéma régulier, et qu'il est lisse au voisinage de  $x$  au-dessus de  $\text{Spec} A[[t_1, \dots, t_r]]/(t_1 \dots t_r - \pi)$ .

**5.2.2.** Avec les notations précédentes, soit  $Z \subset X$  un fermé contenant la fibre spéciale  $X_s$ . On a alors  $Z = Z_h \cup X_s$ , où  $Z_h$  est l'adhérence schématique de la fibre générique de  $Z$ . Nous dirons que  $(X, Z)$  est une *paire strictement semi-stable* si :

- (i)  $X$  est strictement semi-stable sur  $S$ ;
- (ii)  $Z$  est un diviseur à croisements normaux stricts dans  $X$ ;
- (iii) Si  $Z_h = \bigcup_{i \in I} Z_i$  est la décomposition de  $Z_h$  en composantes irréductibles, alors, pour tout  $J \subset I$ ,  $Z_J = \bigcap_{i \in J} Z_i$  est réunion de  $S$ -variétés strictement semi-stables sur  $S$ .

Comme plus haut, on peut expliciter la structure locale de  $(X, Z)$  au voisinage d'un point  $x \in X_s$ . On reprend les notations précédentes, et on note de plus  $Z_1, \dots, Z_m$  les composantes irréductibles de  $Z_h$  auxquelles appartient  $x$ . Soit  $s_j$  une équation locale de  $Z_j$  au voisinage de  $x$ . Il résulte de (ii) que, si  $J = \{1, \dots, m\}$ , les composantes irréductibles de  $Z_{J,s}$  passant par  $x$  sont les  $X_i \cap Z_J$ , avec  $1 \leq i \leq r$ . Les images  $\bar{s}_j$  des  $s_j$  font partie d'un système régulier de paramètres de l'algèbre locale complète  $\bar{B}$ , et la semi-stabilité de  $Z_J$  entraîne que la  $\kappa(s)$ -algèbre  $\bar{C} = \bar{B}/(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_m)$  est formellement lisse. On la relève en une  $A$ -algèbre formellement lisse  $C$ , et on obtient alors un isomorphisme de la forme

$$C[[t_1, \dots, t_r, s_1, \dots, s_m]]/(t_1 \dots t_r - \pi) \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}_{X,x}.$$

Inversement, si pour tout  $x \in X_s$  il existe une telle présentation, où  $t_1, \dots, t_r$  (resp.  $s_1, \dots, s_m$ ) sont des éléments de  $\mathcal{O}_{X,x}$  définissant les seules composantes de  $X_s$  (resp.  $Z_h$ ) passant par  $x$ , alors  $(X, Z)$  est une paire strictement semi-stable.

### 5.3. Démonstration du théorème 1.4.1

**5.3.1.** On opère les premières réductions comme en 4.1. Une remarque additionnelle est que, si  $S' \rightarrow S$  est un morphisme fini de traits, il suffit de montrer le théorème après avoir remplacé  $S$  par  $S'$ , et  $X$  par une composante irréductible de  $S' \times_S X$ . On peut ainsi supposer remplies les conditions suivantes :

- (i)  $X$  est projectif sur  $S$ ;
- (ii)  $Z$  est le support d'un diviseur  $D$  de  $X$ ;
- (iii) La fibre générique  $X_\eta$  de  $X$  est géométriquement intègre.

On peut de plus normaliser  $X$ . On se ramène alors au cas où on a en outre :

- (iv) L'ouvert de lissité de  $X$  sur  $S$  est dense dans la fibre spéciale  $X_s$  de  $X$ .

Cette dernière réduction n'est pas évidente, et résulte du lemme suivant [31, lemme 2.13], dont nous omettrons ici la démonstration (due à Faltings) :

**Lemme 5.3.2.** — *Soient  $A$  un anneau de valuation discrète excellent,  $S = \text{Spec} A$ ,  $X$  un  $S$ -schéma normal, intègre, plat et de type fini,  $\xi$  un point générique de la fibre spéciale  $X_s$  de  $X$ . Il existe une extension d'anneaux de valuation*

discrète  $A \subset A'$ , telle que  $\text{Frac}(A')$  soit fini sur  $\text{Frac}(A)$ , et telle que l'algèbre  $\mathcal{O}' = (\mathcal{O}_{X,\xi} \otimes_A A')^{\text{norm}}$ , normalisation de la réduction de  $\mathcal{O}_{X,\xi} \otimes_A A'$ , soit formellement lisse sur  $A'$  (i.e. les localisés  $\mathcal{O}'_i$  de  $\mathcal{O}'$  aux idéaux maximaux sont des anneaux de valuation discrète non ramifiés sur  $A'$ , à extension résiduelle séparable). De plus, cette propriété reste valable après toute extension  $A' \subset A''$  telle que  $\text{Frac}(A'')$  soit fini sur  $\text{Frac}(A')$ .

**5.3.3.** Soit  $d$  la dimension relative de  $X$  sur  $S$ . En appliquant 4.2.1 sur la fibre spéciale de  $X$ , et en relevant, on peut effectuer les contractions de 4.2 de manière relative (éventuellement après extension finie étale  $S' \rightarrow S$ ). On altère ainsi  $X$  de manière à obtenir un morphisme de  $S$ -variétés projectives  $f : X \rightarrow Y$  dont les fibres soient non vides, équidimensionnelles de dimension 1, et le lieu lisse dense dans chaque fibre.

On applique alors le théorème 5.1.1 à  $f$ , ce qui ramène au cas où  $f$  est une courbe nodale scindée génériquement lisse, et où il existe des sections  $\sigma_i$  à valeurs dans le lieu lisse de  $f$ , et un diviseur  $D \subset Y$ , tels que  $Z \subset f^{-1}(D) \cup \sigma_1(Y) \cup \dots \cup \sigma_n(Y)$ . Quitte à agrandir  $D$ , on peut supposer que  $f$  est lisse au-dessus de  $Y \setminus D$ . On utilise maintenant l'hypothèse de récurrence pour altérer  $(Y, D)$  en une paire strictement semi-stable. Remplaçant  $X$  par son altéré strict, les hypothèses précédentes sur  $f$  sont préservées.

La situation à laquelle on s'est ainsi ramené est alors celle qu'on a étudié en 2.5.2. On peut donc trouver une modification  $X' \rightarrow X$  telle que  $X'$  soit régulier, et qui soit un isomorphisme au-dessus du complémentaire de  $\text{Sing}(f)$ . Les  $\sigma_i$  se relèvent en des sections de  $X'$ ; si l'on remplace  $X$  par  $X'$  et  $Z$  par l'image inverse  $Z'$  de  $Z$  dans  $X'$ , les conditions précédentes restent satisfaites. Pour achever la démonstration, il suffit alors de vérifier que  $(X, Z)$  est maintenant automatiquement une paire strictement semi-stable. Pour cela, on utilise la caractérisation locale des paires strictement semi-stables donnée en 5.2.2 : pour tout  $x \in X$  d'image  $y \in Y$ , on explicite sans difficulté la structure de  $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$  à partir de celle de  $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$  (donnée par 5.2.2) et de 2.1.2, et l'assertion en résulte.

## 6. QUELQUES APPLICATIONS DES THÉORÈMES DE DE JONG

Les résultats de de Jong ont rapidement eu de nombreuses applications. Loin d'essayer d'en faire une liste complète, nous nous limiterons ici à donner quelques exemples illustrant l'emploi des théorèmes 1.2.2 et 1.4.1; on en trouvera d'autres dans l'introduction de [31]. Une situation type, que l'on rencontrera en 6.1 et 6.2, est celle où l'on procède par récurrence sur la dimension d'un schéma, et où il est possible de remplacer ce schéma par un revêtement fini.

### 6.1. Positivité des caractéristiques d'Euler-Poincaré

Soient  $A$  un anneau local régulier de dimension  $n$ , d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  et de corps résiduel  $k$ ,  $M, N$  deux  $A$ -modules de type fini tels que  $M \otimes_A N$  soit de longueur finie. Dans son Cours au Collège de France (1957-58, [55]), Serre a défini la multiplicité d'intersection de  $M$  et  $N$  par

$$\chi_A(M, N) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{lg}_A \operatorname{Tor}_i^A(M, N).$$

Il a montré la formule des dimensions  $\dim_A M + \dim_A N \leq \dim A$ , et fait les conjectures suivantes :

- (a)  $\chi_A(M, N) \geq 0$  (positivité);
- (b) Si  $\dim_A M + \dim_A N < \dim A$ ,  $\chi_A(M, N) = 0$  (annulation).

De plus, Serre a prouvé ces conjectures (ainsi que la réciproque de (b)) lorsque  $A$  est, soit d'égale caractéristique, soit d'inégale caractéristique et non ramifié (c'est à dire, si la caractéristique résiduelle  $p$  n'appartient pas à  $\mathfrak{m}^2$ ). Dans le cas général, la conjecture (b) a été prouvée par Gillet et Soulé ([24], [25]), et par P. Roberts [53]. Malgré de nombreux efforts, la conjecture (a) était restée l'une des conjectures centrales en Algèbre Commutative (voir par exemple l'exposé de Roberts à Kyoto [54]). Elle vient d'être prouvée par Gabber [23], que je remercie pour toutes les explications qu'il m'a données sur sa démonstration, et pour m'avoir autorisé à l'exposer ici (elle fait partie d'un travail en préparation, dans lequel il donnera des résultats plus généraux) :

**Théorème 6.1.1** (Gabber). — *Supposons que  $A$  soit d'inégale caractéristique, et que  $p \in \mathfrak{m}^2$ . Alors les conjectures (a) et (b) sont vraies.*

Grosso modo, l'idée générale qui sous-tend la démonstration de Gabber (inspirée par les techniques d'intersection de cycles de [37, 3]), consiste à remplacer la méthode classique de réduction à la diagonale par une réduction à un énoncé du même type pour des sous-schémas de l'espace projectif sur  $A$ . Grâce aux théorèmes de de Jong<sup>2</sup>, l'un d'entre eux peut être supposé régulier, ce qui permet de se ramener à une intersection dans la réduction de son fibré normal sur  $\operatorname{Spec} k$ . On montre alors que ce fibré est engendré par ses sections globales, et l'énoncé est réduit à un résultat de positivité analogue à ceux de Fulton [22, ch. 12]. Cette méthode permet de démontrer simultanément les conjectures (a) et (b), en prouvant (b) par récurrence sur l'entier  $d = \dim M + \dim N$ , puis en prouvant (a) (le cas  $d = 0$  résulte du calcul des  $\operatorname{Tor}_i^A(k, k)$  par le complexe de Koszul). Par contre, la réciproque de (b), et la positivité des caractéristiques

---

<sup>2</sup> L'idée d'utiliser ceux-ci au lieu de la résolution des singularités suit ici une suggestion de Soulé.

d'Euler-Poincaré partielles [55, remarque de V, B.6], restent des problèmes ouverts dans le cas général.

**6.1.2.** Pour démontrer le théorème 6.1.1, on peut supposer  $A$  complet, car les  $\text{Tor}_i^A(M, N)$ , étant de longueur finie, ne changent pas par passage aux complétés. Soient  $n = \dim A$ ,  $W$  un anneau de Cohen de  $k$ , et  $B$  l'anneau de séries formelles  $W[[T_1, \dots, T_n]]$ . Alors  $A$  possède une présentation de la forme  $A \simeq B/(f)$  (où l'on peut choisir  $f$  tel que  $f \equiv p \pmod{\mathfrak{m}^2}$ ). Par extension des scalaires de  $A$  à  $W(\bar{k})[[T_1, \dots, T_n]]/(f)$ , où  $\bar{k}$  est la clôture parfaite de  $k$ , on peut aussi supposer que  $k$  est parfait.

On va maintenant se ramener au cas où  $A$  est essentiellement de type fini sur  $W$ , par une variante de la méthode d'approximation pour les modules de dimension projective finie de Peskine et Szpiro [48, I.6]. Pour cela, on considère  $B$  comme le complété  $\mathfrak{m}$ -adique de  $B_0 = W[T_1, \dots, T_n]_{\mathfrak{m}}$ , où  $\mathfrak{m} = (p, T_1, \dots, T_n)$ , et on cherche à redescendre la situation sur l'hensélisé  $\tilde{B}$  de  $B_0$ . On choisit des présentations  $K^*$  et  $L^*$  de  $M$  et  $N$  par des complexes bornés de  $A$ -modules libres de type fini. Les différentielles de ces complexes sont définies par des matrices  $R_i, S_i$  à coefficients dans  $A$ , qu'on relève en des matrices  $R'_i, S'_i$  à coefficients dans  $B$ . Dire que  $K^*$  et  $L^*$  sont des complexes signifie que ces matrices vérifient des relations de la forme  $R'_{i+1}R'_i = fU_i, S'_{i+1}S'_i = fV_i$  pour certaines matrices  $U_i, V_i$  à coefficients dans  $B$ . L'ensemble formé de  $f$  et des coefficients de toutes ces matrices est une solution d'un système d'équations algébriques, à valeurs dans le complété de  $B_0$ . Si on fixe un entier  $h$ , le théorème d'approximation d'Artin permet d'en trouver une solution  $(\tilde{f}, \tilde{R}'_i, \tilde{U}'_i, \tilde{S}'_i, \tilde{V}'_i)$  à valeurs dans  $\tilde{B}$  qui soit congrue mod  $\mathfrak{m}^h$  à la solution initiale. Soient  $\tilde{A} = \tilde{B}/(\tilde{f}), \tilde{K}^*$  et  $\tilde{L}^*$  les complexes de  $\tilde{A}$ -modules libres définis par les réductions sur  $\tilde{A}$  des matrices  $\tilde{R}'_i, \tilde{S}'_i$ . On notera que  $\tilde{A}$  est régulier dès que  $\tilde{f} \equiv f \pmod{\mathfrak{m}^2}$ .

Il faut s'assurer que les complexes  $\tilde{K}^*$  et  $\tilde{L}^*$  sont acycliques en degrés  $\neq 0$ , définissant donc des  $\tilde{A}$ -modules de type fini  $\tilde{M}$  et  $\tilde{N}$ , que  $\tilde{M} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{N}$  est de longueur finie, et que  $\chi_A(M, N) = \chi_{\tilde{A}}(\tilde{M}, \tilde{N})$ . On munit pour cela les complexes  $K^*, L^*$  et  $K^* \otimes L^*$  de la filtration  $\mathfrak{m}$ -adique, et on considère les suites spectrales associées à ces complexes filtrés. On vérifie que, si l'on fixe arbitrairement un entier  $r_0$ , on peut trouver  $h$  tel que, pour  $r \leq r_0$ , les termes  $E_r^{p,q}$  ne changent pas par approximation modulo  $\mathfrak{m}^h$ . Cela permet de faire passer les propriétés de dégénérescence et de finitude des suites spectrales relatives à  $K^*, L^*$  et  $K^* \otimes L^*$  aux suites spectrales relatives à  $\tilde{K}^*, \tilde{L}^*$ , et  $\tilde{K}^* \otimes \tilde{L}^*$ , et fournit les conclusions voulues.

**6.1.3.** En redescendant de l'hensélisé à un voisinage étale, on est donc ramené à la situation suivante :  $W$  est l'anneau des vecteurs de Witt d'un corps parfait de caractéristique  $p$ , et  $A$  est l'anneau local en un point régulier d'un schéma plat de

type fini sur  $W$ . On note  $S = \text{Spec } W$ ,  $X = \text{Spec } A$ ,  $s$  le point fermé de  $X$ . Les suites de composition usuelles ramènent à prouver la conjecture lorsque  $M$  et  $N$  sont des quotients de  $A$  par des idéaux premiers. On note  $Y$  et  $Z$  les sous-schéma fermés intègres de  $X$  correspondants;  $Y \cap Z$  est concentré en  $s$ , et la formule des dimensions montre que  $\dim Y + \dim Z \leq n$ .

D'après de Jong, il existe une altération projective  $\varphi : Z' \rightarrow Z$ , tel que  $Z'$  soit régulier : si  $Z$  est concentré en caractéristique  $p$ , c'est le spectre de l'anneau local en un point d'une variété algébrique sur  $k$ , et on applique le théorème 1.2.2; si  $p$  est non diviseur de zéro sur  $Z$ ,  $Z$  est le spectre de l'anneau local en un point d'une  $W$ -variété, et le théorème 1.4.1 fournit une altération  $Z'$  de  $Z$  semi-stable sur une extension finie de  $W$  :  $Z'$  est alors un schéma régulier. On choisit une immersion fermée de  $Z'$  dans un espace projectif  $P = \mathbb{P}_X^N$  au-dessus de  $X$ , et on note  $\pi : P \rightarrow X$  la projection,  $Y'$  l'image inverse de  $Y$  dans  $P$ . On remarquera que  $Y' \cap Z'$  est concentré dans la fibre spéciale  $\pi^{-1}(s)$ .

Soient  $T$  un schéma de type fini sur  $X$ ,  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  des complexes bornés de  $\mathcal{O}_T$ -modules, à cohomologie cohérente. Si  $\mathcal{E}$  est parfait, et si  $\text{Supp}(\mathcal{E}) \cap \text{Supp}(\mathcal{F})$  est propre sur  $X$  et concentré au-dessus de  $s$ , on peut généraliser la définition de la caractéristique d'Euler-Poincaré en posant

$$\chi_T(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \text{lg}_A H^i(T, \mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_T} \mathcal{F}).$$

Si  $U \subset Z$  est un ouvert non vide au-dessus duquel  $\varphi$  est fini, plat et surjectif, le complexe  $\mathbb{R}\varphi_*(\mathcal{O}_{Z'})|_U$  est isomorphe à un module libre de type fini  $\mathcal{O}_U^m$ . Grâce à l'hypothèse de récurrence, il suffit de prouver que  $\chi_X(\mathcal{O}_Y, \mathbb{R}\varphi_*(\mathcal{O}_{Z'})) \geq 0$  (resp. = 0 si  $\dim Y + \dim Z < n$ ). La formule de projection entraîne d'autre part que  $\chi_X(\mathcal{O}_Y, \mathbb{R}\varphi_*(\mathcal{O}_{Z'})) = \chi_P(\mathcal{O}_{Y'}, \mathcal{O}_{Z'})$ .

**6.1.4.** On veut ensuite se ramener à un calcul sur le fibré normal à  $Z'$  dans  $P$ .

On note  $\mathcal{I}$  l'idéal de  $Z'$  dans  $P$ , qui est un idéal régulier. Localement, une suite régulière de générateurs de  $\mathcal{I}$  définit une résolution de Koszul de  $\mathcal{O}_{Z'}$  sur  $\mathcal{O}_P$ . Suivant la méthode de Serre, on la munit de la filtration  $\mathcal{I}$ -adique, et on considère la suite spectrale associée au complexe filtré ainsi obtenu [55, IV A.3]. A isomorphisme canonique près, cette suite spectrale ne dépend pas de la suite régulière choisie, et on obtient par recollement une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = \mathcal{T}or_{-p-q}^{\text{gr}_{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_P)}(\text{gr}_{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_{Y'}), \mathcal{O}_{Z'})^p \Rightarrow E^n = \mathcal{T}or_{-n}^{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_{Y'}, \mathcal{O}_{Z'})$$

(où l'exposant  $p$  désigne la composante de degré  $p$ ).

Soit  $E = \text{Spec}(\text{gr}_{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_P))$  le fibré normal à  $Z'$  dans  $P$ . La suite spectrale précédente implique que  $\chi_P(\mathcal{O}_{Y'}, \mathcal{O}_{Z'}) = \chi_E(\text{gr}_{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_{Y'}), \mathcal{O}_{Z'})$ . Comme  $\mathcal{O}_{Y'} \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_{Z'}$  est à support dans la fibre spéciale  $\pi^{-1}(s)$ , le faisceau  $\text{gr}_{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_{Y'})$  est annulé par une puissance de  $m$ . Soient  $Z'_s, E_s$  les fibres spéciales de  $Z'$  et  $E$ . Si on note  $\mathcal{G}_i$  les

composantes homogènes du gradué associé à  $\text{gr}_{\mathcal{F}}(\mathcal{O}_{Y'})$  pour la filtration  $\mathfrak{m}$ -adique, la formule des dimensions entraîne que

$$\sup_i \dim \mathcal{G}_i = \dim Y' \leq r = \text{codim}_P Z' = \dim(E_s/Z_s).$$

Il suffit donc de montrer que pour tout faisceau cohérent  $\mathcal{G}$  sur  $E_s$  dont le support est de dimension  $\leq r$  (resp.  $< r$ ), on a  $\chi_{E_s}(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{Z'_s}) \geq 0$  (resp.  $\chi_{E_s}(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{Z'_s}) = 0$ ).

**6.1.5.** Un point essentiel est alors que le faisceau normal  $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}/\mathcal{F}^2, \mathcal{O}_{Z'_s}) = \mathcal{N}_{Z'_s/E_s}$  est engendré par ses sections globales sur  $Z'_s$ .

Soient  $S_1 = \text{Spec } k$ ,  $X_1 = \text{Spec } A/\mathfrak{m}^2$ . Puisque  $p \in \mathfrak{m}^2$  et que  $k$  est parfait,  $X_1$  est de manière naturelle un  $k$ -schéma, isomorphe à  $\text{Spec}(k[T_1, \dots, T_n]/I^2)$ , avec  $I = (T_1, \dots, T_n)$ . Considérons la réduction  $P_1$  de  $P$  sur  $X_1$  comme un  $S_1$ -schéma. Comme  $P_1$  s'identifie au produit  $X_1 \times_{S_1} \mathbb{P}_k^N$ , le faisceau des formes différentielles  $\Omega_{P_1}^1$  se décompose en

$$\Omega_{P_1}^1 = \Omega_{P_1/S_1}^1 \simeq \Omega_{P_1/X_1}^1 \oplus \pi^* \Omega_{X_1/S_1}^1.$$

Le facteur  $\mathcal{H}om(\Omega_{P_1/X_1}^1, \mathcal{O}_{P_s})$  est le faisceau tangent de l'espace projectif  $P_s$ , fibre spéciale de  $P$ , et est donc engendré par ses sections globales, de sorte qu'il en est de même pour  $\mathcal{H}om(\Omega_{P_1}^1, \mathcal{O}_{P_s})$ . Comme  $\Omega_{P_1}^1 \otimes_{A/\mathfrak{m}^2} k$  est localement libre sur  $\mathcal{O}_{P_s}$ , il suffit alors de s'assurer que le morphisme  $\mathcal{H}om(\Omega_{P_1}^1, \mathcal{O}_{Z'_s}) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}/\mathcal{F}^2, \mathcal{O}_{Z'_s})$ , dual de  $\mathcal{F}/\mathcal{F}^2 \xrightarrow{d} \Omega_{P_1}^1 \otimes \mathcal{O}_{Z'_s}$ , est surjectif.

Vérifions-le en un point fermé  $\xi \in Z'_s$ . Comme  $Z'$  est un sous-schéma régulier du schéma régulier  $P$ , l'homomorphisme  $(\mathcal{F}/\mathcal{F}^2) \otimes \kappa(\xi) \rightarrow \mathfrak{m}_{P,\xi}/\mathfrak{m}_{P,\xi}^2$  est injectif. D'autre part, l'homomorphisme  $d : \mathfrak{m}_{P,\xi}/\mathfrak{m}_{P,\xi}^2 \rightarrow \Omega_{P_1,\xi}^1 \otimes \kappa(\xi)$  est un isomorphisme : si  $u_1, \dots, u_N$  sont des coordonnées locales de  $P_1$  relativement à  $X_1$ , s'annulant en  $\xi$ , et si  $t_1, \dots, t_n$  sont les images des  $T_i$  dans  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ , il est clair que  $u_1, \dots, u_N, t_1, \dots, t_n$  fournissent une base de  $\mathfrak{m}_{P,\xi}/\mathfrak{m}_{P,\xi}^2$ , et que leurs différentielles forment une base de  $\Omega_{P_1,\xi}^1 \otimes \kappa(\xi)$ . L'assertion en résulte.

On achève alors en prouvant l'énoncé suivant (comparer avec Fulton, [22, th. 12.1]) :

**Proposition 6.1.6.** — Soient  $Z$  un schéma propre sur un corps  $k$ ,  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_Z$ -module localement libre de rang  $r$ , dont le dual  $\mathcal{E}^\vee$  est engendré par ses sections globales,  $E = \text{Spec } \mathbf{S}(\mathcal{E})$  le fibré vectoriel sur  $Z$  défini par  $\mathcal{E}$ ,  $\sigma_0 : Z \rightarrow E$  la section nulle. Pour tout  $\mathcal{O}_E$ -module cohérent  $\mathcal{G}$  dont le support est de dimension  $\leq r$  (resp.  $< r$ ), on a

$$\chi_Z(\mathbb{L}\sigma_0^* \mathcal{G}) \geq 0 \quad (\text{resp. } \chi_Z(\mathbb{L}\sigma_0^* \mathcal{G}) = 0).$$

En écrivant  $\mathcal{E}^\vee$  comme quotient d'un  $\mathcal{O}_Z$ -module libre, on se ramène au cas où  $E$  est l'espace affine  $\mathbb{A}_Z^r$  de base  $Z$ . Soient  $T = \text{Spec } k[t_1, \dots, t_r]$ ,  $Z_T = T \times_{\text{Spec } k} Z$ ,

$E_T = T \times_{\text{Spec } k} E$ , et soit  $\mathcal{G}_T$  l'image inverse de  $\mathcal{G}$  sur  $E_T$ . Soient d'autre part  $\sigma_i, i = 1, \dots, r$ , les sections de base de  $E$ , et  $\sigma = \sum_i t_i \sigma_i : Z_T \rightarrow E_T$ . La section  $\sigma$  ainsi construite est une déformation paramétrée par  $T$  de la section  $\sigma_0$ , dont on notera  $\sigma_t$  la fibre au-dessus de  $t \in T$ .

Le faisceau  $\mathcal{G}_T$  est plat sur  $T$ . Comme  $\sigma$  est une immersion régulière,  $\mathbb{L}\sigma^*(\mathcal{G}_T)$  est de Tor-dimension finie relativement à  $T$ . Puisque  $Z$  est propre, il en résulte que, si l'on note  $f : Z_T \rightarrow T$  la projection, le complexe  $\mathbb{R}f_*(\mathbb{L}\sigma^*(\mathcal{G}_T))$  est un complexe parfait sur  $T$ , dont la fibre en un point  $t \in T$  est le complexe  $\mathbb{R}\Gamma(Z_t, \mathbb{L}\sigma_t^*(\mathcal{G}_t))$ . En particulier, il est de rang constant sur  $T$ , égal à  $\chi_Z(\mathbb{L}\sigma_0^*\mathcal{G})$ . Pour prouver la proposition, on peut donc remplacer la section  $\sigma_0$  par une section  $\sigma_t$  quelconque.

Soient  $W = \text{Supp } \mathcal{G}, g : E \rightarrow \mathbb{A}_k^r$  la projection. Si  $\dim W < r$  (resp.  $\dim W = r$ ), il existe un ouvert non vide  $U \subset \mathbb{A}_k^r$  tel que  $W \cap g^{-1}(U) = \emptyset$  (resp. tel que le morphisme  $W \cap g^{-1}(U) \rightarrow U$  soit quasi-fini). Quitte à faire une extension finie de  $k$ , on peut choisir un point rationnel  $t \in U$ . Lorsque  $\dim W < r$ , on obtient une section  $\sigma_t$  telle que  $\sigma_t(Z) \cap W = \emptyset$ . On a donc  $\chi_Z(\mathbb{L}\sigma_t^*\mathcal{G}) = 0$ . Lorsque  $\dim W = r$ , on obtient une section telle que  $\sigma_t^{-1}(W)$  soit fini. On a alors

$$\chi_Z(\mathbb{L}\sigma_t^*\mathcal{G}) = \sum_{z \in \sigma_t^{-1}(W)} \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k \text{Tor}_i^{\mathcal{O}_{E, \sigma_t(z)}}(\mathcal{O}_{Z, z}, \mathcal{O}_{W, \sigma_t(z)}) \geq 0,$$

chacune des caractéristiques d'Euler-Poincaré aux points  $z \in \sigma_t^{-1}(W)$  étant positive d'après Serre [55, V B.4.a], parce que  $\mathcal{O}_{Z, z}$  est quotient de  $\mathcal{O}_{E, \sigma_t(z)}$  par une suite régulière.

## 6.2. Finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer

Soient  $k$  un corps de caractéristique  $p > 0$ ,  $W$  un anneau de Cohen de  $k$ ,  $K$  son corps des fractions. Prolongeant certaines des méthodes de Dwork, Monsky et Washnitzer ont défini une théorie cohomologique associant à tout schéma  $X$  affine et lisse sur  $k$  des  $K$ -espaces vectoriels de cohomologie  $H_{\text{MW}}^*(X/K)$  [42]. Bien que légèrement antérieure à l'introduction de la cohomologie cristalline par Grothendieck [26], la théorie de Monsky et Washnitzer est restée beaucoup moins bien comprise. Beaucoup de propriétés de base de cette cohomologie (finitude, formule de Künneth, dualité de Poincaré, etc) n'étaient pas démontrées dans le cas général. En utilisant le théorème 1.2.2 de de Jong, et l'existence d'une théorie cohomologique définie plus généralement pour tout  $k$ -schéma de type fini, la *cohomologie rigide*, qui coïncide avec la cohomologie de Monsky-Washnitzer dans le cas affine et lisse, et avec la cohomologie cristalline dans le cas propre et lisse, il est maintenant possible de déduire ces propriétés de celles de la cohomologie cristalline [6].

Mentionnons qu'en ce qui concerne la finitude, il existe à côté de cette approche géométrique une approche plus analytique, s'appuyant sur le théorème de l'indice pour l'action des opérateurs différentiels sur certaines algèbres de fonctions analytiques  $p$ -adiques. Suggérée par Monsky par analogie avec sa démonstration de la finitude de la cohomologie de de Rham en caractéristique 0 [44] (elle-même inspirée par les travaux de Dwork sur la fonction zêta des hypersurfaces [14]), elle a été développée par Mebkhout au moyen de la théorie des  $\mathcal{D}$ -modules [41]. Lorsque le corps  $k$  est fini, le théorème de l'indice a été démontré récemment par Christol et Mebkhout [10], ce qui fournit donc dans ce cas une autre démonstration de la finitude.

**6.2.1.** Indiquons brièvement la méthode de construction de la cohomologie rigide (voir [4], [5], [6]). Soit  $X$  un schéma séparé de type fini sur  $k$ . On choisit une compactification  $\bar{X}$  de  $X$  sur  $k$ , et on suppose ici pour simplifier qu'il existe une immersion fermée  $\bar{X} \hookrightarrow P$  de  $\bar{X}$  dans un schéma formel  $P$  sur  $W$ , lisse au voisinage de  $X$ . Suivant Raynaud, on associe à  $P$  un espace analytique rigide  $P_K$  sur  $K$ , sa *fibres générique*, muni d'un *morphisme de spécialisation*  $\text{sp} : P_K \rightarrow P$ , qui est un morphisme d'espaces annelés (intuitivement, on associe à un point  $x \in P_K$  de coordonnées entières sur  $K$  le point fermé  $\text{sp}(x) \in |P|$  ayant pour coordonnées les réductions modulo  $p$  des coordonnées de  $x$ ). Pour toute partie localement fermée  $Y$  de la fibre spéciale  $P_k$  de  $P$ , on définit le *tube de  $Y$  dans  $P$*  comme l'ouvert (pour la topologie d'espace analytique)  $]Y[_P = \text{sp}^{-1}(Y) \subset P_K$ . Le tube d'un sous-schéma fermé de  $P$  joue ici le même rôle que les voisinages infinitésimaux dans la construction de la cohomologie de de Rham algébrique donnée par Hartshorne en caractéristique 0 [27].

Soit  $T = \bar{X} \setminus X$ . La réunion disjointe  $]\bar{X}[_P = ]X[_P \amalg ]T[_P$  n'est pas un recouvrement admissible en général. On appelle *voisinage strict de  $]X[_P$  dans  $]\bar{X}[_P$*  tout ouvert  $V \subset ]\bar{X}[_P$  tel que  $(V, ]T[_P)$  forme un recouvrement admissible de  $]\bar{X}[_P$ . L'exemple de base est le suivant :  $X$  est la droite affine  $\mathbb{A}_k^1$ ,  $\bar{X}$  est la droite projective  $\mathbb{P}_k^1$ ,  $T$  se réduit au point à l'infini sur  $\mathbb{P}_k^1$ ,  $P$  est l'espace projectif formel sur  $W$ ,  $P_K$  est la droite projective analytique rigide sur  $K$ ,  $]\bar{X}[_P = P_K$ ,  $]X[_P$  est le disque unité fermé  $D(0, 1^+) \subset P_K$ ,  $]T[_P$  est le disque unité ouvert centré à l'infini dans  $P_K$ , et un ouvert  $V \subset P_K$  est un voisinage strict de  $]X[_P$  si et seulement s'il existe  $\lambda > 1$  tel que le disque  $D(0, \lambda^+)$  soit contenu dans  $V$ .

On définit alors la cohomologie rigide de  $X$  en posant

$$H_{\text{rig}}^*(X/K) = H^*(]\bar{X}[_P, \varinjlim_V j_{V*} j_V^{-1} \Omega_{]X[_P}^*),$$

où  $j_V$  désigne l'inclusion de  $V$  dans  $]\bar{X}[_P$ . Il y a lieu de s'assurer que les groupes de cohomologie ainsi définis ne dépendent ni de la compactification  $\bar{X}$ , ni du schéma formel  $P$ , et sont fonctoriels en  $X$ . La démonstration, pour laquelle nous

renvoyons à [6], s'effectue par la méthode du plongement diagonal, grâce à des théorèmes de fibration pour les tubes (cf. [5, 1.3]).

On dispose alors des théorèmes de comparaison suivants :

- (i) Si  $X$  est propre et lisse sur  $k$ , il existe un isomorphisme canonique [6, 1.9]

$$H_{\text{rig}}^*(X/K) \xrightarrow{\sim} H_{\text{cris}}^*(X/W) \otimes_W K.$$

- (ii) Si  $X$  est affine et lisse sur  $k$ , il existe un isomorphisme canonique [6, 1.10]

$$H_{\text{rig}}^*(X/K) \xrightarrow{\sim} H_{\text{MW}}^*(X/K).$$

Soit  $Z \subset X$  un sous-schéma fermé. Une variante de la construction précédente permet de définir des espaces de cohomologie rigide à support dans  $Z$ , notés  $H_{Z, \text{rig}}^*(X/K)$ . Ceux-ci donnent naissance aux suites exactes de cohomologie habituelles, et il est facile de vérifier qu'ils possèdent les propriétés d'excision usuelles. La construction d'un isomorphisme de Gysin

$$H_{Z, \text{rig}}^*(Y/K) \xrightarrow{\sim} H_{Z, \text{rig}}^{*+2r}(X/K),$$

lorsque  $Y \hookrightarrow X$  est une immersion fermée de codimension  $r$  entre deux schémas lisses sur  $k$ , est nettement plus délicate, et n'est d'ailleurs faite pour l'instant que dans le cas releuable (cf. [6, th. 3.8], généralisant le résultat obtenu par Monsky lorsque  $X$  est affine, et  $Z = Y$  une hypersurface principale [43]). Cela suffit toutefois pour démontrer le théorème qui suit [6, th. 3.1], ce qui entraîne donc la finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer.

**Théorème 6.2.2.** — Soient  $X$  un  $k$ -schéma lisse et séparé,  $Z \subset X$  un sous-schéma fermé. Alors les espaces de cohomologie  $H_{Z, \text{rig}}^*(X/K)$  sont de dimension finie sur  $K$ .

La démonstration est du même type que celle de Hartshorne en caractéristique 0 [27, II, th. 6.1], le théorème de de Jong remplaçant ici la résolution des singularités. On prouve par récurrence sur  $n$  les deux assertions suivantes :

(a) <sub>$n$</sub>  Pour tout  $k$  et tout schéma  $X$  lisse et séparé sur  $k$  de dimension  $\leq n$ ,  $H_{\text{rig}}^*(X/K)$  est de dimension finie ;

(b) <sub>$n$</sub>  Pour tout  $k$ , tout schéma  $X$  lisse et séparé sur  $k$ , et tout sous-schéma fermé  $Z \subset X$  de dimension  $\leq n$ ,  $H_{Z, \text{rig}}^*(X/K)$  est de dimension finie.

L'assertion (a)<sub>0</sub> est immédiate, et l'assertion (b)<sub>0</sub> résulte de l'isomorphisme de Gysin. Pour prouver (a) <sub>$n$</sub> , on fait une extension finie de  $k$  pour se ramener au cas où  $X$  est géométriquement connexe, et trouver, grâce au théorème 1.2.2, une altération génériquement étale  $\varphi : X' \rightarrow X$ , et une immersion ouverte  $X' \hookrightarrow \bar{X}'$ , où  $\bar{X}'$  est projectif et lisse sur  $k$ . Par comparaison avec la cohomologie cristalline, les espaces  $H_{\text{rig}}^*(\bar{X}'/K)$  sont de dimension finie sur  $k$ , et, grâce à (b) <sub>$n-1$</sub>  et à la suite

exacte de cohomologie à support dans un fermé, il en est de même des espaces  $H_{\text{rig}}^*(U'/K)$  pour tout ouvert  $U' \subset \bar{X}'$ . Pour la même raison, il suffit de prouver la finitude de  $H_{\text{rig}}^*(U/K)$  pour un ouvert non vide quelconque de  $X$ . On se ramène ainsi au cas où  $X$  est affine, de sorte que  $H_{\text{rig}}^*(X/K) \simeq H_{\text{MW}}^*(X/K)$ , et où  $X$  possède un revêtement étale  $X'$  tel que  $H_{\text{MW}}^*(X'/K) \simeq H_{\text{rig}}^*(X'/K)$  soit de dimension finie. Utilisant le morphisme trace construit par Monsky et Washnitzer [42, th. 3.8], on voit alors que l'homomorphisme  $H_{\text{MW}}^*(X/K) \rightarrow H_{\text{MW}}^*(X'/K)$  est injectif, d'où l'assertion (a)<sub>n</sub>.

Pour prouver (b)<sub>n</sub>, une extension finie de  $k$  permet de supposer que les composantes irréductibles de  $Z$  sont géométriquement intègres. Par excision, et grâce à (b)<sub>n-1</sub>, on se ramène au cas où  $X$  est affine, et  $Z$  lisse et connexe sur  $k$ ; on peut même remplacer  $X$  par un ouvert  $U$  quelconque tel que  $U \cap Z \neq \emptyset$ . On peut alors utiliser le théorème de relèvement d'Elkik [15, th. 6] pour relever  $X$  en un schéma affine et lisse  $\tilde{X}$  sur  $W$ . Procédant à nouveau par excision, on peut supposer que  $Z$  est défini dans  $X$  par une suite de coordonnées locales, et que le sous-schéma  $\tilde{Z}$  de  $\tilde{X}$  obtenu en choisissant des relèvements de celles-ci est lisse sur  $W$ . On est alors dans une situation où l'on dispose d'un isomorphisme de Gysin, et l'assertion (b)<sub>n</sub> résulte alors de (a)<sub>n</sub>.

**Remarques 6.2.3.** — (i) De Jong a donné une variante de l'argument précédent, remplaçant l'utilisation de l'isomorphisme de Gysin par un dévissage géométrique du même type que ceux du paragraphe 4 : voir l'appendice de [6].

(ii) Un argument du même type permet par exemple de montrer l'isomorphisme de Künneth en cohomologie de Monsky-Washnitzer : si  $X, Y$  sont deux schémas lisses et séparés sur  $k$ , et si  $Z \subset X, T \subset Y$  sont deux sous-schéma fermés, on a plus généralement un isomorphisme

$$H_{Z, \text{rig}}^*(X/K) \otimes_K H_{T, \text{rig}}^*(Y/K) \xrightarrow{\sim} H_{Z \times T, \text{rig}}^*(X \times Y/K).$$

### 6.3. Monodromie en cohomologie étale

Nous nous limiterons ici à donner deux exemples montrant comment le théorème 1.4.1 peut servir de substitut au théorème de réduction semi-stable pour donner des informations sur l'action du groupe d'inertie sur la cohomologie  $\ell$ -adique d'un schéma de type fini sur un corps local.

Soient  $A$  un anneau de valuation discrète hensélien,  $K$  son corps des fractions,  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K, I \subset G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$  le groupe d'inertie,  $\ell$  un nombre premier distinct de la caractéristique de  $K$ . Si  $X$  est un  $K$ -schéma de type fini, et  $X_{\bar{K}} = \bar{K} \otimes_K X$ , les espaces de cohomologie étale  $H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ , et de cohomologie étale à supports propres  $H_{\text{ét}, c}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ , sont munis d'une action naturelle de  $G$ , et fournissent en particulier des représentations  $\ell$ -adiques de  $I$ . On

sait que, si  $p$  est la caractéristique du corps résiduel  $k$  de  $A$ , les propriétés de cette représentation sont très différentes selon que  $\ell \neq p$  ou  $\ell = p$ .

**6.3.1.** Supposons d'abord que  $\ell \neq p$ , et soit  $i$  fixé. D'après le théorème de monodromie de Grothendieck [SGA 7, th. 1.2], la représentation  $\ell$ -adique de  $I$  fournie par  $H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_{\ell})$  est quasi-unipotente : il existe un sous-groupe ouvert  $I_1 \subset I$  tel que, pour tout  $g \in I_1$ ,  $(g - \text{Id})$  soit nilpotent. Une question naturelle, qui s'inscrit dans le cadre général des problèmes d'indépendance par rapport à  $\ell$  en cohomologie  $\ell$ -adique, est de savoir si  $I_1$  peut être choisi de manière indépendante de  $\ell$ . Comme l'a observé Deligne, les théorèmes de de Jong permettent d'apporter une réponse positive à cette question.

**Proposition 6.3.2.** — *Avec les hypothèses précédentes, soit  $H$  l'un des espaces de cohomologie  $H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_{\ell})$  ou  $H_{\text{ét},c}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_{\ell})$ . Il existe un sous-groupe ouvert  $I_1 \subset I$ , indépendant de  $\ell$ , tel que l'action de  $I_1$  sur  $H$  soit unipotente.*

Soit  $\bar{k}$  le corps résiduel de l'anneau des entiers de  $\bar{K}$ . Considérons d'abord le cas où  $X$  est la fibre générique d'un schéma  $Y$  strictement semi-stable sur  $A$ . L'action de  $I$  peut alors être déterminée à partir de l'étude des faisceaux de cycles évanescents  $R^q\Psi(\mathbb{Q}_{\ell})$  sur  $Y_{\bar{k}} = \bar{k} \otimes_A Y$ . Leur calcul, fait par Grothendieck [SGA 7, I 3.3] et Rapoport-Zink [51, th. 2.21], entraîne que  $I$  agit trivialement sur les  $R^q\Psi(\mathbb{Q}_{\ell})$  (voir aussi Illusie [30, th. 3.2] ; ce calcul a d'autre part été généralisé par C. Nakayama dans le cadre de la géométrie logarithmique [47]). Lorsque  $X$  est propre, la suite spectrale des cycles évanescents

$$E_2^{p,q} = H_{\text{ét}}^p(Y_{\bar{k}}, R^q\Psi(\mathbb{Q}_{\ell})) \Rightarrow H_{\text{ét}}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_{\ell}),$$

qui est  $G$ -équivariante, montre alors que, pour tout  $g \in I$ ,  $(g - \text{Id})^{i+1}$  agit trivialement sur  $H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_{\ell})$ .

Supposons que  $X$  soit un  $K$ -schéma propre et lisse quelconque. Quitte à faire une extension finie de  $K$ , ce qui remplace  $I$  par un sous-groupe ouvert, on peut supposer que  $X$  est géométriquement connexe. Le théorème 1.4.1 permet de trouver une extension finie  $K'$  de  $K$  telle qu'il existe un schéma strictement semi-stable  $Y'$  sur l'anneau des entiers de  $K'$ , de fibre générique  $X'$ , et une  $K$ -altération  $\varphi : X' \rightarrow X$ . Le morphisme  $\varphi' : X' \rightarrow X_{K'}$ , qui s'en déduit est encore une altération, donc est génériquement fini et plat, de degré  $d$ . Comme c'est un morphisme propre entre schémas lisses de même dimension, on dispose sur  $X_{K'}$  du morphisme trace  $\text{Tr}_{\varphi'} : \mathbb{R}\varphi'_* \mathbb{Q}_{\ell} \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell}$ , dont le composé avec le morphisme canonique  $\mathbb{Q}_{\ell} \rightarrow \mathbb{R}\varphi'_* \mathbb{Q}_{\ell}$  est la multiplication par  $d$ . Si  $I'$  est le groupe d'inertie de  $K'$ , il en résulte que  $H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_{\ell})$  s'identifie à un facteur direct de  $H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_{\ell})$  en tant que  $I'$ -module, de sorte que l'action de  $I'$  sur  $H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_{\ell})$  est unipotente d'après ce qui précède.

Soit maintenant  $X$  un  $K$ -schéma séparé de type fini. Par récurrence sur  $\dim X$ , on en déduit alors que l'énoncé est vrai pour les  $H_{\text{ét},c}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ . On peut en effet supposer  $X$  géométriquement intègre, et on applique le théorème 1.2.2 pour trouver une altération  $\varphi : X' \rightarrow X$ , où  $X'$  est ouvert dans une  $K$ -variété propre et lisse  $\bar{X}'$ . L'énoncé étant prouvé pour  $H_{\text{ét}}^i(\bar{X}'_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ , la suite exacte longue de cohomologie à supports propres et l'hypothèse de récurrence impliquent qu'il est vrai pour les  $H_{\text{ét},c}^i(U'_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$  pour tout ouvert  $U' \subset \bar{X}'$ . Si  $U \subset X$  est un ouvert lisse, on dispose comme plus haut du morphisme  $\text{Tr}_{\varphi'} : \mathbb{R}\varphi'_* \mathbb{Q}_\ell \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$ , et on peut conclure comme avant pour les  $H_{\text{ét},c}^i(U_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ . L'hypothèse de récurrence fournit alors le résultat pour les  $H_{\text{ét},c}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ .

Si  $X$  est lisse et séparé sur  $K$ , la dualité de Poincaré entraîne alors l'énoncé pour les  $H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ . Pour le prouver dans le cas général, on se ramène au cas affine par la suite spectrale d'un recouvrement, puis on se réduit au cas où  $X$  est intègre. On utilise alors le théorème 1.2.2 pour construire à la manière de Deligne [11, 6.2.5] un hyperrecouvrement propre de  $X$  :

$$\left[ \dots \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} X'_n \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \dots \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} X'_1 \xrightarrow{\quad} X'_0 \right] \xrightarrow{\varphi} X,$$

où les  $X'_i$  sont lisses, et les flèches  $X'_{n+1} \rightarrow \text{cosq}({}_n X')_{n+1}$  sont des sommes d'altérations projectives de chaque composante irréductible de  $\text{cosq}({}_n X')_{n+1}$  (en notant  ${}_n X'$  le squelette d'indice  $n$  de  $X'$ ). Par descente cohomologique, le morphisme naturel  $\mathbb{Q}_{\ell,X} \rightarrow \mathbb{R}\varphi_* \mathbb{Q}_{\ell,X'}$  est un isomorphisme, de sorte que, grâce à la suite spectrale qui en résulte, l'énoncé pour les  $H_{\text{ét}}^i(X'_{n,\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$  entraîne l'énoncé pour les  $H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ .

**6.3.3.** Considérons maintenant le cas où  $\ell = p$ . On suppose ici que  $K$  est un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, dont le corps résiduel  $k$  est parfait de caractéristique  $p > 0$ . Si  $X$  est un  $K$ -schéma de type fini, les espaces  $H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$  fournissent encore des  $\mathbb{Q}_p$ -représentations de  $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ . Pour les classer, Fontaine a construit certains anneaux, munis d'une action du groupe  $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$  (et de structures supplémentaires), au moyen desquels il a défini diverses sous-catégories de la catégorie des représentations  $p$ -adiques de  $G$  : on en trouvera une définition précise dans ses exposés au Séminaire de Bures ([19], [20]) — voir aussi l'exposé d'Illusie au Séminaire Bourbaki [29].

A partir des anneaux  $B_{\text{st}}$  et  $B_{\text{dR}}$ , Fontaine a introduit les notions de *représentation semi-stable* et de *de Rham*. De plus, une représentation  $V$  est dite *potentiellement semi-stable* s'il existe une extension finie  $K'$  de  $K$  telle que  $V$  soit semi-stable en tant que représentation de  $\text{Gal}(\bar{K}/K')$ .

Soit  $X$  un schéma propre et lisse sur  $K$ . Les *conjectures de Fontaine*  $C_{\text{cris}}$ ,  $C_{\text{st}}$ ,  $C_{\text{pst}}$ ,  $C_{\text{dR}}$ , relient les représentations galoisiennes  $p$ -adiques  $H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$  aux espaces de cohomologie de de Rham  $H_{\text{dR}}^i(X/K)$ , en passant dans le cas de bonne

réduction (resp. de réduction semi-stable) par la cohomologie cristalline (resp. log-cristalline) de la fibre spéciale d'un modèle entier lisse (resp. semi-stable)  $Y$  de  $X$  sur  $A$  (cf. [29]). Nous en retiendrons seulement ici les conséquences suivantes :

(C<sub>st</sub>) Si  $X$  est la fibre générique d'un schéma  $Y$  propre et semi-stable sur l'anneau  $A$  des entiers de  $K$  (au sens de 1.3), la cohomologie étale  $p$ -adique  $H_{\text{ét}}^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$  est une représentation semi-stable de  $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ .

(C<sub>pst</sub>) Si  $X$  est une variété propre et lisse sur  $K$ ,  $H_{\text{ét}}^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$  est une représentation potentiellement semi-stable.

(C<sub>dR</sub>) Si  $X$  est une variété propre et lisse sur  $K$ ,  $H_{\text{ét}}^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$  est une représentation de de Rham.

La conjecture C<sub>pst</sub> constitue dans le présent contexte l'analogue du théorème de monodromie de Grothendieck [20, 6.2.1]. Elle implique la conjecture C<sub>dR</sub> [20, 5.6.7].

Lorsque  $\dim X_K < (p-1)/2$ , la conjecture C<sub>st</sub> a été prouvée par Kato [34] par une méthode reprenant les techniques de cohomologie syntomique introduites par Fontaine et Messing [21], et déjà utilisées par Kato et Messing pour prouver C<sub>cris</sub> sous les mêmes hypothèses [35]. Dans le cas des courbes, Faltings [17] a également donné une démonstration de C<sub>st</sub>, par une extension des méthodes de [16]. Enfin, les méthodes de Faltings et de Kato ont été prolongées par Tsuji, qui a donné une démonstration de C<sub>st</sub> en toute généralité ([56], [57]).

D'autre part, d'après Faltings [16], la conjecture C<sub>dR</sub> s'obtient de manière analogue à la conjecture C<sub>cris</sub> à partir de ses résultats sur la théorie de Hodge  $p$ -adique (voir aussi les précisions apportées dans [18]).

Grâce au théorème 1.4.1, les résultats de Tsuji entraînent maintenant la conjecture C<sub>pst</sub>. Pour le voir, on procède comme en 6.3.2. On se ramène d'abord au cas où  $X$  est géométriquement connexe, puis on choisit une extension finie  $K'$  de  $K$  telle qu'il existe un schéma strictement semi-stable  $Y$  sur l'anneau des entiers de  $K'$ , de fibre générique  $X'$ , et une altération  $\varphi : X' \rightarrow X$ . Utilisant encore le morphisme trace relatif à  $X' \rightarrow X_{K'}$ , on voit que  $H_{\text{ét}}^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$  s'identifie à un facteur direct de  $H_{\text{ét}}^*(X'_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$  en tant que représentation de  $\text{Gal}(\bar{K}/K')$ . Comme toute sous-représentation d'une représentation semi-stable est semi-stable, le théorème de Tsuji appliqué à  $H_{\text{ét}}^*(X'_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$  entraîne que  $H_{\text{ét}}^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$  est semi-stable en tant que représentation de  $\text{Gal}(\bar{K}/K')$ , d'où C<sub>pst</sub>. Comme corollaire, on voit donc que le théorème de Tsuji entraîne C<sub>dR</sub> pour les schémas propres et lisses sur  $K$ , redonnant ainsi une démonstration du résultat de Faltings.

Par contre, une extension de représentations de de Rham (resp. semi-stables) n'est pas nécessairement de de Rham (resp. semi-stable), de sorte que, bien que l'on s'attende à ce que les conjectures C<sub>pst</sub> et C<sub>dR</sub> soient en fait valables pour tout  $K$ -schéma de type fini, on ne peut pas reprendre les méthodes de 6.3.2 pour passer du cas où  $X$  est propre et lisse au cas général. Il paraît néanmoins

plausible qu'elles puissent résulter, à l'aide des théorèmes de de Jong, d'une généralisation convenable des résultats de Kato et Tsuji.

**Remerciements.** Je remercie B. Edixhoven, O. Gabber, L. Illusie, A. J. de Jong et L. Moret-Bailly pour leurs remarques sur divers états préliminaires de ce texte.

## BIBLIOGRAPHIE

- [EGA] A. Grothendieck, *Éléments de Géométrie Algébrique*, Publ. Math. IHES **24** (1965).
- [SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, t. 3, Lecture Notes in Math. **305**, Springer-Verlag (1973).
- [SGA 7] A. Grothendieck, M. Raynaud, D. S. Rim, *Groupes de monodromie en Géométrie Algébrique*, t. 1, Lecture Notes in Math. **288**, Springer-Verlag (1972).
- [1] D. Abramovich, A. J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and toroidal geometry*, preprint (1996).
- [2] M. Artin, *The implicit function theorem in algebraic geometry*, in *Algebraic Geometry*, Proc. Bombay Coll., Tata Institute, Oxford University Press (1969), 13-34.
- [3] M. Artin, G. Winters, *Degenerate fibers and reduction of curves*, Topology **10** (1971), 373-383.
- [4] P. Berthelot, *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique  $p$* , Journées d'analyse  $p$ -adique (1982), in D. Barsky, Ph. Robba (ed.), *Introduction aux cohomologies  $p$ -adiques*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **23**, p. 7-32 (1986).
- [5] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, Première partie (version provisoire 1991), Prépublication IRMAR 96-03, Université de Rennes (1996).
- [6] P. Berthelot, *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide*, avec un appendice par A. J. de Jong, Prépublication IRMAR, 95-35, Université de Rennes (1995).
- [7] E. Bierstone, P. Milman, *A simple constructive proof of canonical resolution of singularities*, in T. Mora, C. Traverso (ed.), *Effective methods in Algebraic Geometry*, Progress in Math. **94**, Birkhäuser (1991), 11-30.
- [8] F. Bogomolov, T. Pantev, *Weak Hironaka theorem*, preprint (1996).
- [9] S. Bosch, W. Lütkebohmert, *Stable reduction and uniformization of abelian varieties I*, Math. Annalen **270** (1985), 349-379.

- [10] G. Christol, Z. Mebkhout, *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles  $p$ -adiques III*, preprint (1995).
- [11] P. Deligne, *Théorie de Hodge III*, Publ. Math. I.H.E.S. **44** (1975), 5-77.
- [12] P. Deligne, *Le lemme de Gabber*, in L. Szpiro (ed.), *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell*, Astérisque **127** (1985), 131-150.
- [13] P. Deligne, D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. I.H.E.S. **36** (1969), 75-109.
- [14] B. Dwork, *On the zeta function of a hypersurface: III*, Annals of Math. **83** (1966), 457-519.
- [15] R. Elkik, *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Ann. Scient. École Norm. Sup. **6** (1973), 553-604.
- [16] G. Faltings, *Crystalline cohomology and  $p$ -adic Galois representations*, in J. I. Igusa (ed.), *Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory*, John Hopkins Univ. Press (1989), 25-80.
- [17] G. Faltings, *Crystalline cohomology of semi-stable curves and  $p$ -adic Galois representations*, Journal of Alg. Geom. **1** (1992), 61-82.
- [18] G. Faltings, *The de Rham conjecture*, preprint (1993).
- [19] J.-M. Fontaine, *Le corps des périodes  $p$ -adiques*, in *Périodes  $p$ -adiques*, Séminaire de Bures 1988, Exp. II, Astérisque **223** (1994), 59-111.
- [20] J.-M. Fontaine, *Représentations  $p$ -adiques semi-stables*, in *Périodes  $p$ -adiques*, Séminaire de Bures 1988, Exp. III, Astérisque **223** (1994), 113-184.
- [21] J.-M. Fontaine, W. Messing,  *$p$ -adic periods and  $p$ -adic étale cohomology*, Contemporary Mathematics **67** (1987), 179-207.
- [22] W. Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Math. **2**, 3. Folge, Springer-Verlag (1984).
- [23] O. Gabber, *Non negativity of Serre's intersection multiplicities*, exposé à l'IHES, décembre 1995.
- [24] H. Gillet, C. Soulé,  *$K$ -théorie et nullité des multiplicités d'intersection*, C. R. Acad. Sc. Paris **300** (1985), 71-74.
- [25] H. Gillet, C. Soulé, *Intersection theory using Adams operations*, Inventiones Math. **90** (1987), 243-277.
- [26] A. Grothendieck, *Crystals and the de Rham cohomology of schemes* (IHES, Décembre 1966), notes by J. Coates and O. Jussila, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland (1968).
- [27] R. Hartshorne, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. IHES **45** (1976), 5-99.
- [28] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero : I, II*, Annals of Math. **79** (1964), 109-326.

- [29] L. Illusie, *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale  $p$ -adique*, Séminaire Bourbaki 1989-90, Exp. 726, Astérisque **189-190** (1990), 325-374.
- [30] L. Illusie, *Autour du théorème de monodromie locale*, in *Périodes  $p$ -adiques*, Séminaire de Bures 1988, Exp. I, Astérisque **223** (1994), 9-57.
- [31] A. J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Preprint **916**, University Utrecht (1995), à paraître aux Publ. Math. IHES.
- [32] A. J. de Jong, *Families of curves and alterations*, preprint (1996).
- [33] J.-P. Jouanolou, *Théorèmes de Bertini et applications*, Progress in Math. **42**, Birkhäuser (1983).
- [34] K. Kato, *Semi-stable reduction and  $p$ -adic étale cohomology*, in *Périodes  $p$ -adiques*, Séminaire de Bures 1988, Exp. VI, Astérisque **223** (1994), 269-293.
- [35] K. Kato, W. Messing, *Syntomic cohomology and  $p$ -adic étale cohomology*, Tôhoku Math. Journal **44** (1992), 1-9.
- [36] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal Embeddings I*, Lecture Notes in Math. **339**, Springer-Verlag (1973).
- [37] S. Kleiman, with the collab. of A. Thorup, *Intersection theory and enumerative geometry : a decade in review*, Proc. of Symp. in Pure Math. **46** (1987), p. 321-370.
- [38] F. Knudsen, *The projectivity of the moduli space of stable curves, II, III*, Math. Scand. **52** (1983), 161-212.
- [39] D. Knutson, *Algebraic spaces*, Lecture Notes in Math. **203**, Springer-Verlag (1971).
- [40] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, Benjamin (1970).
- [41] Z. Mebkhout, *A propos du théorème de finitude pour la cohomologie  $p$ -adique*, exposé au Séminaire de Géométrie Algébrique, Rennes, mai 1994.
- [42] P. Monsky, G. Washnitzer, *Formal cohomology: I*, Annals of Math. **88** (1968), 181-217.
- [43] P. Monsky, *Formal cohomology: II. The cohomology sequence of a pair*, Annals of Math. **88** (1968), 218-238.
- [44] P. Monsky, *Finiteness of de Rham cohomology*, Amer. Journal of Math. **94** (1972), 237-245.
- [45] D. Mumford, J. Fogarty, *Geometric Invariant Theory*, Ergebnisse der Math. **34**, Springer-Verlag (1982).
- [46] D. Mumford, *Stability of projective varieties*, L'Ens. Math. **24** (1977), 39-110.
- [47] C. Nakayama, *Nearby cycles for log smooth families*, preprint 94-70, Univ. Tokyo (1994).
- [48] C. Peskine, L. Szpiro, *Dimension cohomologique finie et cohomologie locale*, Publ. Math. IHES **42** (1973), 47-119.

- [49] M. Pikaart, A. J. de Jong, *Moduli of curves with non-abelian level structure*, in R. Dijkgraaf, C. Faber, G. van der Geer (ed.), *The moduli spaces of curves*, Progress in Math. **129**, Birkhäuser (1995), 483-509.
- [50] H. Popp, *Moduli theory and classification theory of algebraic varieties*, Lecture Notes in Math. **620**, Springer-Verlag (1977).
- [51] M. Rapoport, T. Zink, *Über die lokale Zetafunktion von Shimura-varietäten, Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik*, Inventiones Math. **68** (1982), 21-201.
- [52] M. Raynaud, L. Gruson, *Critères de platitude et de projectivité*, Inventiones Math. **13** (1971), 1-89.
- [53] P. Roberts, *The vanishing of intersection multiplicities of perfect complexes*, Bull. Amer. Math. Soc. **13** (1985), 127-130.
- [54] P. Roberts, *Intersection theory and the homological conjectures*, Proc. Int. Cong. Math., Kyoto 1990, Springer-Verlag (1991), 361-368.
- [55] J.-P. Serre, *Algèbre locale, Multiplicités*, Lecture Notes in Math. **11**, Troisième édition, Springer-Verlag (1975).
- [56] T. Tsuji, *Syntomic complexes and p-adic vanishing cycles*, J. reine angew. Math. **472** (1996), 69-138.
- [57] T. Tsuji, *On syntomic cohomology of higher degree of a semi-stable family*, preprint 606-01, RIMS, Kyoto (1995).
- [58] M. Spivakovsky, *Resolution of singularities*, preprint (1994).
- [59] O. Villamayor, *Constructiveness of Hironaka's resolution*, Ann. Scient. École Norm. Sup. **22** (1989), 1-32.

Pierre BERTHELOT  
IRMAR  
U.R.A. 305 du C.N.R.S.  
Université de Rennes 1  
Campus de Beaulieu  
F-35042 Rennes cedex

# Astérisque

ALAIN CONNES

## **Brisure de symétrie spontanée et géométrie du point de vue spectral**

*Astérisque*, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 816, p. 313-349

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1995-1996\\_\\_38\\_\\_313\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__313_0)

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## BRISURE DE SYMÉTRIE SPONTANÉE ET GÉOMÉTRIE DU POINT DE VUE SPECTRAL

par Alain CONNES

### 1. GÉNÉRALITÉS

La géométrie de Riemann admet pour données préalables une *variété*  $M$  dont les points  $x \in M$  sont localement paramétrés par un nombre fini de coordonnées réelles  $x^\mu$ , et la *métrique* donnée par l'élément de longueur infinitésimal

$$(1) \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu .$$

La distance entre deux points  $x, y \in M$  est donnée par

$$(2) \quad d(x, y) = \text{Inf Longueur } \gamma ,$$

où  $\gamma$  varie parmi les arcs joignant  $x$  à  $y$ , et

$$(3) \quad \text{Longueur } \gamma = \int_x^y ds .$$

La théorie de Riemann est à la fois assez souple pour fournir (au prix d'un changement de signe) un bon modèle de l'espace temps de la relativité générale et assez restrictive pour mériter le nom de géométrie. Le point essentiel est que le calcul différentiel et intégral permet de passer du local au global et que les notions simples de la géométrie euclidienne telle celle de droite continuent à garder un sens. L'équation des géodésiques :

$$(4) \quad \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\rho}{dt}$$

(où  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\rho} + g_{\alpha\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\alpha})$ ) pour la métrique  $dx^2 + dy^2 + dz^2 - (1 - 2V(x, y, z))dt^2$  donne l'équation de Newton dans le potentiel  $V$  (cf. [W] pour un

énoncé plus précis). Les données expérimentales récentes sur les pulsars binaires confirment [DT] la relativité générale et l'adéquation de la géométrie de Riemann comme modèle de l'espace temps à des échelles suffisamment grandes. La question ([R]) de l'adéquation de cette géométrie comme modèle de l'espace temps à très courte échelle est controversée mais la longueur de Planck

$$(5) \quad \ell_p = (G\hbar/c^3)^{1/2} \sim 10^{-33} \text{ cm}$$

est considérée comme la limite naturelle sur la détermination précise des coordonnées d'espace temps d'un évènement. (Voir par exemple [F] ou [DFR] pour l'argument physique, utilisant la mécanique quantique, qui établit cette limite.)

Dans cet exposé nous présentons une nouvelle notion d'espace géométrique qui en abandonnant le rôle central joué par les *points* de l'espace permet une plus grande liberté dans la description de l'espace temps à courte échelle. Le cadre proposé est suffisamment général pour traiter les espaces discrets, les espaces riemanniens, les espaces de configurations de la théorie quantique des champs et les duaux des groupes discrets non nécessairement commutatifs. Le problème principal est d'adapter à ce cadre général les notions essentielles de la géométrie et en particulier le calcul infinitésimal. Le formalisme opératoire de la mécanique quantique joint à l'analyse des divergences logarithmiques de la trace des opérateurs donnent la généralisation cherchée du calcul différentiel et intégral (Section II). Nous donnons quelques applications directes de ce calcul (Théorèmes 1, 2, 4).

La donnée d'un espace géométrique est celle d'un *triplet spectral* :

$$(6) \quad (\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$$

où  $\mathcal{A}$  est une algèbre involutive d'opérateurs dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et  $D$  un opérateur autoadjoint non borné dans  $\mathcal{H}$ . L'algèbre involutive  $\mathcal{A}$  correspond à la donnée de l'espace  $M$  selon la dualité Espace  $\leftrightarrow$  Algèbre, classique en géométrie algébrique. L'opérateur  $D^{-1} = ds$  correspond à l'élément de longueur infinitésimal de la géométrie de Riemann.

Il y a deux différences évidentes entre cette *géométrie spectrale* et la géométrie riemannienne. La première est que nous ne supposons pas en général la commutativité de l'algèbre  $\mathcal{A}$ . La deuxième est que  $ds$ , étant un opérateur, ne commute pas avec les éléments de  $\mathcal{A}$ , même quand  $\mathcal{A}$  est commutative.

Comme nous le verrons, des relations de commutation très simples entre  $ds$  et l'algèbre  $\mathcal{A}$ , jointes à la dualité de Poincaré caractérisent les triplets spectraux (6) qui proviennent de variétés riemanniennes (Théorème 6). Quand l'algèbre  $\mathcal{A}$  est commutative

sa fermeture normique dans  $\mathcal{H}$  est l'algèbre des fonctions continues sur un espace compact  $M$ . Un point de  $M$  est un caractère de  $\bar{\mathcal{A}}$ , i.e. un homomorphisme de  $\bar{\mathcal{A}}$  dans  $\mathbb{C}$

$$(7) \quad \chi : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \chi(a+b) = \chi(a) + \chi(b), \quad \chi(\lambda a) = \lambda \chi(a), \quad \chi(ab) = \chi(a) \chi(b), \\ \forall a, b \in \bar{\mathcal{A}}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Soit par exemple  $\mathcal{A}$  l'algèbre  $\mathbb{C}\Gamma$  d'un groupe discret  $\Gamma$  agissant dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma)$  de la représentation régulière (gauche) de  $\Gamma$ . Quand le groupe  $\Gamma$  et donc l'algèbre  $\mathcal{A}$  sont commutatifs les caractères de  $\bar{\mathcal{A}}$  sont les éléments du dual de Pontrjagin de  $\Gamma$

$$(8) \quad \hat{\Gamma} = \{ \chi : \Gamma \rightarrow U(1) ; \chi(g_1 g_2) = \chi(g_1) \chi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in \Gamma \}.$$

Les notions élémentaires de la géométrie différentielle pour l'espace  $\hat{\Gamma}$  continuent à garder un sens dans le cas général où  $\Gamma$  n'est plus commutatif grâce au dictionnaire suivant dont la colonne de droite n'utilise pas la commutativité de l'algèbre  $\mathcal{A}$  :

Espace $X$	Algèbre $\mathcal{A}$
Fibré vectoriel	Module projectif de type fini
Forme différentielle de degré $k$	Cycle de Hochschild de dimension $k$
Courant de de Rham de dimension $k$	Cocycle de Hochschild de dimension $k$
Homologie de de Rham	Cohomologie cyclique de $\mathcal{A}$

L'intérêt de la généralisation ci-dessus au cas non commutatif est illustré par exemple par la preuve de la conjecture de Novikov pour les groupes  $\Gamma$  qui sont hyperboliques [CM1].

Dans le cas général la notion de point, donnée par (7), est de peu d'intérêt ; par contre celle de mesure de probabilité garde tout son sens. Une telle mesure  $\varphi$  est une forme linéaire positive sur  $\mathcal{A}$  telle que  $\varphi(1) = 1$

$$(9) \quad \varphi : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(a^* a) \geq 0, \quad \forall a \in \bar{\mathcal{A}}, \quad \varphi(1) = 1.$$

Au lieu de mesurer les distances entre les points de l'espace par la formule (2) nous mesurons les distances entre états  $\varphi, \psi$  sur  $\bar{\mathcal{A}}$  par une formule duale qui implique un *sup* au lieu d'un *inf* et n'utilise pas les arcs tracés dans l'espace

$$(10) \quad d(\varphi, \psi) = \text{Sup} \{ |\varphi(a) - \psi(a)| ; a \in \mathcal{A}, \|[D, a]\| \leq 1 \}.$$

Vérifions que cette formule redonne la distance géodésique dans le cas riemannien. Soit  $M$  une variété riemannienne compacte munie d'une  $K$ -orientation, i.e. d'une structure spinorielle. Le triplet spectral  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  associé est donné par la représentation

$$(11) \quad (f\xi)(x) = f(x)\xi(x) \quad \forall x \in M, f \in \mathcal{A}, \xi \in \mathcal{H}$$

de l'algèbre des fonctions sur  $M$  dans l'espace de Hilbert

$$(12) \quad \mathcal{H} = L^2(M, S)$$

des sections de carré intégrable du fibré des spineurs.

L'opérateur  $D$  est l'opérateur de Dirac (cf. [L-M]). On vérifie immédiatement que le commutateur  $[D, f]$ ,  $f \in \mathcal{A}$  est l'opérateur de multiplication de Clifford par le gradient  $\nabla f$  de  $f$  et que sa norme hilbertienne est :

$$(13) \quad \|[D, f]\| = \text{Sup}_{x \in M} \|\nabla f\| = \text{Norme lipschitzienne de } f.$$

Soient  $x, y \in M$  et  $\varphi, \psi$  les caractères correspondants :  $\varphi(f) = f(x)$ ,  $\psi(f) = f(y)$ .  $\forall f \in \mathcal{A}$ , la formule (10) donne le même résultat que la formule (2), i.e. donne la distance géodésique entre  $x$  et  $y$ .

Contrairement à (2) la formule duale (10) garde un sens en général et en particulier pour les espaces discrets ou totalement discontinus.

La notion usuelle de *dimension* d'un espace est remplacée par un *spectre de dimension* qui est un sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  dont la partie réelle est bornée supérieurement par  $\alpha > 0$  si

$$(14) \quad \lambda_n^{-1} = O(n^{-\alpha})$$

où  $\lambda_n$  est la  $n$ -ième valeur propre de  $|D|$ .

La relation entre le local et le global est donnée par la formule locale de l'indice (Théorème 4) ([CM2]).

La propriété caractéristique des *variétés différentiables* qui est transposée au cas non commutatif est la *dualité de Poincaré*. La dualité de Poincaré en homologie ordinaire est insuffisante pour caractériser le type d'homotopie des variétés ([Mi-S]) mais les résultats de D. Sullivan ([S2]) montrent (dans le cas PL, simplement connexe, de dimension  $\geq 5$  et en ignorant le nombre premier 2) qu'il suffit de remplacer l'homologie ordinaire par la  $KO$ -homologie.

De plus la  $K$ -homologie admet grâce aux résultats de Brown Douglas Fillmore, Atiyah et Kasparov une traduction algébrique très simple, donnée par

Espace $X$	Algèbre $\mathcal{A}$
$K_1(X)$	Classe d'homotopie stable de triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$
$K_0(X)$	Classe d'homotopie stable de triplet spectral $\mathbb{Z}/2$ gradué

(i.e. pour  $K_0$  on suppose que  $\mathcal{H}$  est  $\mathbb{Z}/2$  gradué par  $\gamma$ ,  $\gamma = \gamma^*$ ,  $\gamma^2 = 1$  et que  $\gamma a = a\gamma \quad \forall a \in \mathcal{A}$ ,  $\gamma D = -D\gamma$ ).

Cette description suffit pour la  $K$ -homologie complexe qui est périodique de période 2. Dans le cas non commutatif la *classe fondamentale* d'un espace est une classe  $\mu$  de  $KR$ -homologie pour l'algèbre  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0$  munie de l'involution

$$(15) \quad \tau(x \otimes y^0) = y^* \otimes (x^*)^0 \quad \forall x, y \in \mathcal{A}$$

où  $\mathcal{A}^0$  désigne l'algèbre opposée de  $\mathcal{A}$ . Le produit intersection de Kasparov [K] permet de formuler la dualité de Poincaré par l'invertibilité de  $\mu$ . La  $KR$ -homologie est périodique de période 8 et la dimension modulo 8 est spécifiée par les règles de commutation suivantes, où  $J$  est une isométrie antilinéaire dans  $\mathcal{H}$  qui implémente l'involution  $\tau$

$$(16) \quad JxJ^{-1} = \tau(x) \quad \forall x \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0.$$

On a  $J^2 = \varepsilon$ ,  $JD = \varepsilon'DJ$ ,  $J\gamma = \varepsilon''\gamma J$  où  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \in \{-1, 1\}$  et si  $n$  désigne la dimension modulo 8

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\varepsilon$	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
$\varepsilon'$	1	-1	1	1	1	-1	1	1
$\varepsilon''$	1		-1		1		-1	

L'isométrie antilinéaire  $J$  est donnée dans le cas riemannien par l'opérateur de conjugaison de charge et dans le cas non commutatif par l'opérateur de Tomita [Ta] qui,

dans le cas où une algèbre d'opérateurs  $\mathcal{A}$  admet un vecteur cyclique qui est cyclique pour le commutant  $\mathcal{A}'$ , établit un antiisomorphisme

$$(17) \quad a \in \mathcal{A}'' \rightarrow Ja^*J^{-1} \in \mathcal{A}'.$$

La donnée de  $\mu$  ne spécifie que la classe d'homotopie stable du triplet spectral  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  muni de l'isométrie  $J$  (et de la  $\mathbb{Z}/2$  graduation  $\gamma$  si  $n$  est pair). La non trivialité de cette classe d'homotopie est visible dans la forme d'intersection

$$(18) \quad K(\mathcal{A}) \times K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

donnée par l'indice de Fredholm de  $D$  à coefficient dans  $K(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0)$ .

Pour comparer les triplets spectraux dans la classe  $\mu$ , nous utiliserons la fonctionnelle spectrale suivante

$$(19) \quad \text{Trace}(\varpi(D))$$

où  $\varpi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction positive convenable.

L'algèbre  $\mathcal{A}$  une fois fixée, une géométrie spectrale est déterminée par la classe d'équivalence unitaire du triplet spectral  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  avec l'isométrie  $J$ . Si l'on note  $\pi$  la représentation de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{H}$ , l'équivalence unitaire entre  $(\pi_1, \mathcal{H}_1, D_1, J_1)$  et  $(\pi_2, \mathcal{H}_2, D_2, J_2)$  signifie qu'il existe un unitaire  $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  tel que

$$(20) \quad U\pi_1(a)U^* = \pi_2(a) \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad UD_1U^* = D_2, \quad UJ_1U^* = J_2$$

(et  $U\gamma_1U^* = \gamma_2$  dans le cas où  $n$  est pair).

Le groupe  $\text{Aut}(\mathcal{A})$  des automorphismes de l'algèbre involutive  $\mathcal{A}$  agit sur l'ensemble des géométries spectrales par composition

$$(21) \quad \pi'(a) = \pi(\alpha^{-1}(a)) \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad \alpha \in \text{Aut}(\mathcal{A}).$$

Le sous-groupe  $\text{Aut}^+(\mathcal{A})$  des automorphismes qui préservent la classe  $\mu$  agit sur la classe d'homotopie stable déterminée par  $\mu$  et préserve par construction la fonctionnelle d'action (19). En général ce groupe est non compact, et il coïncide par exemple dans le cas riemannien avec le groupe  $\text{Diff}^+(M)$  des difféomorphismes qui préservent la  $K$ -orientation, i.e. la structure spinorielle de  $M$ . A l'inverse le groupe d'isotropie d'une géométrie donnée, est automatiquement *compact* (pour  $\mathcal{A}$  unifère). Ceci montre que la fonctionnelle d'action (19) donne automatiquement naissance au phénomène de brisure de symétrie spontanée (Figure 1).

Nous montrerons que pour un choix convenable de l'algèbre  $\mathcal{A}$  la fonctionnelle d'action (19) ajoutée au terme  $\langle \xi, D\xi \rangle$ ,  $\xi \in \mathcal{H}$  donne le modèle standard de Glashow-Weinberg-Salam couplé à la gravitation. L'algèbre  $\mathcal{A}$  est le produit tensoriel de l'algèbre des fonctions sur un espace riemannien  $M$  par une algèbre non commutative de dimension finie dont les données phénoménologiques spécifient la géométrie spectrale.

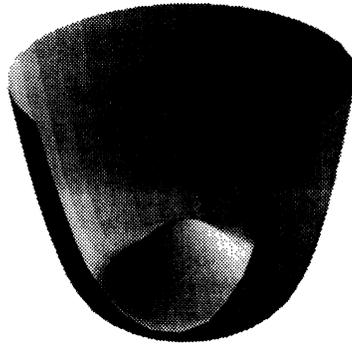


Figure 1

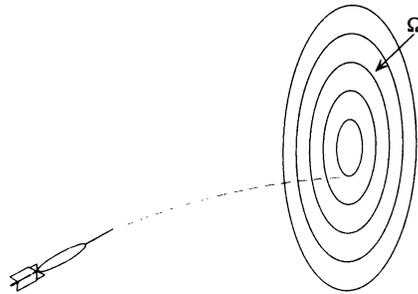


Figure 2

## 2. UN CALCUL INFINITÉSIMAL

Nous montrons comment le formalisme opératoire de la mécanique quantique permet de donner un sens précis à la notion de variable infinitésimale. La notion d'infinitésimal est sensée avoir un sens intuitif évident. Elle résiste cependant fort bien aux essais de formalisation donnés par exemple par l'analyse non standard. Ainsi, pour prendre un exemple précis ([B-W]), soit  $dp(x)$  la probabilité pour qu'une fléchette lancée au hasard sur la cible  $\Omega$  termine sa course au point  $x \in \Omega$  (Figure 2). Il est clair que  $dp(x) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$  et que néanmoins la réponse  $dp(x) = 0$  n'est pas satisfaisante. Le formalisme usuel de la théorie de la mesure ou des formes différentielles contourne le problème en donnant un sens à l'expression

$$(1) \quad \int f(x) dp(x) \quad f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

mais est insuffisant pour donner un sens par exemple à  $e^{-\frac{1}{dp(x)}}$ . La réponse, à savoir un réel non standard, fournie par l'analyse non standard, est également décevante : tout réel non standard détermine canoniquement un sous-ensemble non Lebesgue mesurable de l'intervalle  $[0, 1]$  de sorte qu'il est impossible ([Ste]) d'en exhiber un seul. Le formalisme que nous proposons donnera une réponse substantielle et calculable à cette question.

Le cadre est fixé par un espace de Hilbert séparable  $\mathcal{H}$  décomposé comme somme directe de deux sous-espaces de dimension infinie. Donner cette décomposition revient à donner l'opérateur linéaire  $F$  dans  $\mathcal{H}$  qui est l'identité,  $F\xi = \xi$ , sur le premier sous-espace et moins l'identité,  $F\xi = -\xi$  sur le second ; on a

$$(2) \quad F = F^* , F^2 = 1 .$$

Le cadre ainsi déterminé est unique à isomorphisme près. Le début du dictionnaire qui traduit les notions classiques en langage opératoire est le suivant :

Classique	Quantique
Variable complexe	Opérateur dans $\mathcal{H}$
Variable réelle	Opérateur autoadjoint
Infinitésimal	Opérateur compact
Infinitésimal d'ordre $\alpha$	Opérateur compact dont les valeurs caractéristiques $\mu_n$ vérifient $\mu_n = O(n^{-\alpha})$ , $n \rightarrow \infty$
Différentielle d'une variable réelle ou complexe	$\bar{d}f = [F, f] = Ff - fF$
Intégrale d'un infinitésimal d'ordre 1	$\int T =$ Coefficient de la divergence logarithmique dans la trace de $T$ .

Les deux premières lignes du dictionnaire sont familières en mécanique quantique. L'ensemble des valeurs d'une variable complexe correspond au *spectre* d'un opérateur. Le calcul fonctionnel holomorphe donne un sens à  $f(T)$  pour toute fonction holomorphe  $f$  sur le spectre de  $T$ . Les fonctions holomorphes sont les seules à opérer dans cette généralité ce qui reflète la différence entre l'analyse complexe et l'analyse réelle où les fonctions boréliennes arbitraires opèrent. Quand  $T = T^*$  est autoadjoint  $f(T)$  a un sens pour toute fonction borélienne  $f$ . Notons que toute variable aléatoire usuelle  $X$  sur un espace de probabilité,  $(\Omega, P)$  peut être trivialement considérée comme un opérateur autoadjoint. On prend  $\mathcal{H} = L^2(\Omega, P)$  et

$$(3) \quad (T\xi)(p) = X(p)\xi(p) \quad \forall p \in \Omega, \xi \in \mathcal{H}.$$

La mesure spectrale de  $T$  redonne la probabilité  $P$ .

Passons à la troisième ligne du dictionnaire. Nous cherchons des "variables infinitésimales", i.e. des opérateurs  $T$  dans  $\mathcal{H}$  tels que

$$(4) \quad \|T\| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

où  $\|T\| = \text{Sup} \{ \|T\xi\| ; \|\xi\| = 1 \}$  est la norme d'opérateur. Bien entendu si l'on prend (4) au pied de la lettre on obtient  $\|T\| = 0$  et  $T = 0$  est la seule solution. Mais on peut affaiblir (4) de la manière suivante

$$(5) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \text{ sous-espace de dimension finie } E \subset \mathcal{H} \text{ tel que } \|T/E^\perp\| < \varepsilon$$

où  $E^\perp$  désigne l'orthogonal de  $E$  dans  $\mathcal{H}$

$$(6) \quad E^\perp = \{\xi \in \mathcal{H} ; \langle \xi, \eta \rangle = 0 \quad \forall \eta \in E\}$$

qui est un sous-espace de codimension finie de  $\mathcal{H}$ . Le symbole  $T/E^\perp$  désigne la restriction de  $T$  à ce sous-espace

$$(7) \quad T/E^\perp : E^\perp \rightarrow \mathcal{H}.$$

Les opérateurs qui satisfont la condition (5) sont les *opérateurs compacts*, i.e. sont caractérisés par la compacité normique de l'image de la boule unité de  $\mathcal{H}$ . L'opérateur  $T$  est compact ssi  $|T| = \sqrt{T^*T}$  est compact, et ceci a lieu ssi le spectre de  $|T|$  est une suite de valeurs propres  $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \dots$ ,  $\mu_n \downarrow 0$ .

Ces valeurs propres sont les valeurs caractéristiques de  $T$  et on a

$$(8) \quad \mu_n(T) = \text{Inf} \{ \|T - R\| ; R \text{ opérateur de rang } \leq n \}$$

$$(9) \quad \mu_n(T) = \text{Inf} \{ \|T/E^\perp\| ; \dim E \leq n \}.$$

Les opérateurs compacts forment un idéal bilatère  $\mathcal{K}$  dans l'algèbre  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  des opérateurs bornés dans  $\mathcal{H}$  de sorte que les règles algébriques élémentaires du calcul infinitésimal sont vérifiées.

La taille d'un infinitésimal  $T \in \mathcal{K}$  est gouvernée par l'ordre de décroissance de la suite  $\mu_n = \mu_n(T)$ , quand  $n \rightarrow \infty$ . En particulier pour tout réel positif  $\alpha$  la condition

$$(10) \quad \mu_n(T) = O(n^{-\alpha}) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

(i.e. il existe  $C > 0$  tel que  $\mu_n(T) \leq Cn^{-\alpha} \quad \forall n \geq 1$ ) définit les infinitésimaux d'ordre  $\alpha$ . Ils forment de même un idéal bilatère, comme on le voit en utilisant (8), (cf. [Co]) et de plus

$$(11) \quad T_j \text{ d'ordre } \alpha_j \Rightarrow T_1 T_2 \text{ d'ordre } \alpha_1 + \alpha_2.$$

(Pour  $\alpha < 1$  l'idéal correspondant est un idéal normé obtenu par interpolation réelle entre l'idéal  $\mathcal{L}^1$  des opérateurs traçables et l'idéal  $\mathcal{K}$  ([Co]).) Ainsi, hormis la commutativité, les propriétés intuitives du calcul infinitésimal sont vérifiées.

Comme la taille d'un infinitésimal est mesurée par une suite  $\mu_n \rightarrow 0$  il pourrait sembler inutile d'utiliser le formalisme opératoire. Il suffirait de remplacer l'idéal  $\mathcal{K}$

de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  par l'idéal  $c_0(\mathbb{N})$  des suites convergeant vers 0 dans l'algèbre  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  des suites bornées. Cette version commutative ne convient pas car tout élément de  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  a un spectre ponctuel et une mesure spectrale discrète. Ce n'est que la *non commutativité* de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  qui permet la coexistence de variables ayant un spectre de Lebesgue avec des variables infinitésimales.

En fait la ligne suivante du dictionnaire utilise de manière cruciale la non commutativité de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ . La différentielle  $df$  d'une variable réelle ou complexe

$$(12) \quad df = \Sigma \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

est remplacée par le commutateur

$$(13) \quad \dot{d}f = [F, f].$$

Le passage de (11) à (12) est semblable à la transition du crochet de Poisson  $\{f, g\}$  de deux observables  $f, g$  de la mécanique classique, au commutateur  $[f, g] = fg - gf$  d'observables quantiques.

Etant donnée une algèbre  $\mathcal{A}$  d'opérateurs dans  $\mathcal{H}$ , la *dimension* de l'espace correspondant (au sens du dictionnaire 1) est gouvernée par la taille des différentielles  $\dot{d}f$ ,  $f \in \mathcal{A}$ . En dimension  $p$  on a

$$(14) \quad \dot{d}f \text{ d'ordre } \frac{1}{p}, \forall f \in \mathcal{A}.$$

Nous verrons très vite des exemples concrets où  $p$  est la dimension de Hausdorff d'un ensemble de Julia. Des manipulations algébriques très simples sur la fonctionnelle

$$(15) \quad \tau(f^0, \dots, f^n) = \text{Trace}(f^0 \dot{d}f^1 \dots \dot{d}f^n) \quad n \text{ impair}, n > p$$

montrent que  $\tau$  est un cocycle cyclique et permettent de transposer les idées de la topologie différentielle en exploitant *l'intégralité* du cocycle  $\tau$ , i.e.  $\langle \tau, K_1(\mathcal{A}) \rangle \subset \mathbb{Z}$ .

Si le dictionnaire s'arrêtait là, il nous manquerait un outil vital du calcul infinitésimal, la *localité*, i.e. la possibilité de négliger les infinitésimaux d'ordre  $> 1$  dans un calcul. Dans notre cadre les infinitésimaux d'ordre  $> 1$  sont contenus dans l'idéal bilatère suivant

$$(17) \quad \left\{ T \in \mathcal{K} ; \mu_n(T) = o\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

où le petit  $o$  à la signification usuelle.

Ainsi, si nous utilisons la trace comme dans (16) pour intégrer, nous rencontrons deux problèmes :

- a) les infinitésimaux d'ordre 1 ne sont pas dans le domaine de la trace,
- b) la trace des infinitésimaux d'ordre  $> 1$  n'est pas nulle.

Le domaine naturel de la trace est l'idéal bilatère  $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$  des opérateurs traçables

$$(18) \quad \mathcal{L}^1 = \left\{ T \in \mathcal{K} ; \sum_o^\infty \mu_n(T) < \infty \right\}.$$

La trace d'un opérateur  $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$  est donnée par la somme

$$(19) \quad \text{Trace}(T) = \sum \langle T\xi_i, \xi_i \rangle$$

indépendamment du choix de la base orthonormale  $(\xi_i)$  de  $\mathcal{H}$ . On a

$$(20) \quad \text{Trace}(T) = \sum_o^\infty \mu_n(T) \quad \forall T \geq 0.$$

Soit  $T \geq 0$  un infinitésimal d'ordre 1, le seul contrôle sur  $\mu_n(T)$  est

$$(21) \quad \mu_n(T) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ce qui ne suffit pas pour assurer la finitude de (20). Ceci précise la nature du problème a) et de même pour b) puisque la trace ne s'annule pas pour le plus petit idéal de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , l'idéal  $\mathcal{R}$  des opérateurs de rang fini.

Ces deux problèmes sont résolus par la trace de Dixmier [Dx], i.e. par l'analyse suivante de la divergence logarithmique des traces partielles

$$(22) \quad \text{Trace}_N(T) = \sum_o^{N-1} \mu_n(T), \quad T \geq 0.$$

Il est utile de définir  $\text{Trace}_\Lambda(T)$  pour tout  $\Lambda > 0$  par la formule d'interpolation

$$(23) \quad \text{Trace}_\Lambda(T) = \text{Inf} \{ \|A\|_1 + \Lambda \|B\| ; A + B = T \}$$

où  $\|A\|_1$  est la norme  $\mathcal{L}^1$  de  $A$ ,  $\|A\|_1 = \text{Trace}|A|$ . Cette formule coïncide avec (22) pour  $\Lambda$  entier et donne l'interpolation affine par morceaux. On a de plus ([Co])

$$(24) \quad \text{Trace}_\Lambda(T_1 + T_2) \leq \text{Trace}_\Lambda(T_1) + \text{Trace}_\Lambda(T_2) \quad \forall \Lambda$$

$$(25) \quad \text{Trace}_{\Lambda_1 + \Lambda_2}(T_1 + T_2) \geq \text{Trace}_{\Lambda_1}(T_1) + \text{Trace}_{\Lambda_2}(T_2) \quad \forall \Lambda_1, \Lambda_2$$

où  $T_1, T_2$  sont *positifs* pour (25).

Soit  $T > 0$  infinitésimal d'ordre 1 ; on a alors

$$(26) \quad \text{Trace}_{\Lambda}(T) \leq C \log \Lambda$$

et la propriété remarquable *d'additivité asymptotique* du coefficient de la divergence logarithmique (26) est la suivante: ( $T_j \geq 0$ ),

$$(27) \quad |\tau_{\Lambda}(T_1 + T_2) - \tau_{\Lambda}(T_1) - \tau_{\Lambda}(T_2)| \leq 3C \frac{\log(\log \Lambda)}{\log \Lambda}$$

où, pour tout  $T \geq 0$ , on pose

$$(28) \quad \tau_{\Lambda}(T) = \frac{1}{\log \Lambda} \int_e^{\Lambda} \frac{\text{Trace}_{\mu}(T)}{\log \mu} \frac{d\mu}{\mu}$$

qui est la moyenne de Cesaro sur le groupe  $\mathbb{R}_+^*$  des échelles, de la fonction  $\frac{\text{Trace}_{\mu}(T)}{\log \mu}$ .

Il résulte facilement de (27) que toute limite simple  $\tau$  des fonctionnelles non linéaires  $\tau_{\Lambda}$  définit une trace positive et linéaire sur l'idéal bilatère des infinitésimaux d'ordre 1

$$(29) \quad \begin{aligned} \tau(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2) &= \lambda_1 \tau(T_1) + \lambda_2 \tau(T_2) \quad \forall \lambda_j \in \mathbb{C} \\ \tau(T) &\geq 0 \quad \forall T \geq 0 \\ \tau(ST) &= \tau(TS) \quad \forall S \text{ borné} \\ \tau(T) &= 0 \text{ si } \mu_n(T) = o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

En pratique le choix du point limite  $\tau$  est sans importance car dans tous les exemples importants (et en particulier comme corollaire des axiomes dans le cadre général, cf. Section IV) la condition suivante de *mesurabilité* est satisfaite :

$$(30) \quad \tau_{\Lambda}(T) \text{ est convergent quand } \Lambda \rightarrow \infty.$$

Pour les opérateurs mesurables la valeur de  $\tau(T)$  est indépendante de  $\tau$  et est notée

$$(31) \quad \int T.$$

Le premier exemple intéressant est celui des opérateurs pseudodifférentiels  $T$  sur une variété différentiable  $M$ . Quand  $T$  est d'ordre 1 (au sens de (21)) il est mesurable et

$fT$  est le résidu non commutatif de  $T$  ([Wo], [Ka]). Ce résidu a une expression locale très simple en terme du noyau distribution  $k(x, y)$ ,  $x, y \in M$ . Quand  $T$  est d'ordre 1 (au sens de (21)) le noyau  $k(x, y)$  admet une divergence logarithmique au voisinage de la diagonale

$$(32) \quad k(x, y) = a(x) \log |x - y| + 0(1)$$

où  $|x - y|$  est la distance riemannienne dont le choix n'affecte pas la 1-densité  $a(x)$ . On a alors (à normalisation près)

$$(33) \quad \int T = \int_M a(x)$$

et le terme de droite de cette formule se prolonge de manière quasi évidente à tous les opérateurs pseudodifférentiels (cf. [Wo]) si l'on note que le noyau d'un tel opérateur admet un développement asymptotique de la forme

$$(34) \quad k(x, y) = \sum a_k(x, x - y) + a(x) \log |x - y| + 0(1)$$

où  $a_k(x, \xi)$  est homogène de degré  $-k$  en la variable  $\xi$ , et où la 1-densité  $a(x)$  est définie de manière intrinsèque.

En fait le même principe de prolongement de  $f$  à des infinitésimaux d'ordre  $< 1$  s'applique aux opérateurs hypoelliptiques et plus généralement (cf. Théorème 4) aux triplets spectraux dont le spectre de dimension est simple.

Après cette description, passons à des exemples. La variable infinitésimale  $dp(x)$  qui donne la probabilité dans le jeu de fléchettes (Figure 2) est donnée par l'opérateur

$$(35) \quad dp = \Delta^{-1}$$

où  $\Delta$  est le Laplacien de Dirichlet pour le domaine  $\Omega$ . Il agit dans l'espace de Hilbert  $L^2(\Omega)$  ainsi que l'algèbre des fonctions  $f(x_1, x_2)$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , qui agissent par opérateurs de multiplication (cf. (3)). Le théorème de H. Weyl montre immédiatement que  $dp$  est d'ordre 1, que  $f dp$  est mesurable et que

$$(36) \quad \int f dp = \int_{\Omega} f(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2$$

donne la probabilité usuelle.

Montrons maintenant comment utiliser notre calcul infinitésimal pour donner un sens à des expressions telles que l'aire d'une variété de dimension 4, qui sont dépourvues de sens dans le calcul usuel.

Il y a, à équivalence unitaire et multiplicité près, une seule quantification du calcul infinitésimal sur  $\mathbb{R}$  qui soit invariante par translations et dilatations. Elle est donnée par la représentation de l'algèbre des fonctions  $f$  sur  $\mathbb{R}$  comme opérateurs de multiplication dans  $L^2(\mathbb{R})$  (cf. (3)), alors que l'opérateur  $F$  dans  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  est la transformation de Hilbert ([St])

$$(37) \quad (f\xi)(s) = f(s)\xi(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \xi \in L^2(\mathbb{R}), (F\xi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{\xi(s)}{s-t} ds.$$

On a une description unitairement équivalente pour  $S^1 = P_1(\mathbb{R})$  avec  $\mathcal{H} = L^2(S^1)$  et

$$(38) \quad F e_n = \text{Sign}(n) e_n, e_n(\tau) = \exp(in\tau) \quad \forall \tau \in S^1, (\text{Sign}(0) = 1).$$

L'opérateur  $\hat{d}f = [F, f]$ , pour  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ , est représenté par le noyau  $\frac{1}{\pi i} k(s, t)$ , avec

$$(39) \quad k(s, t) = \frac{f(s) - f(t)}{s - t}.$$

Comme  $f$  et  $F$  sont des opérateurs bornés, il en est de même de  $\hat{d}f = [F, f]$  pour toute  $f$  mesurable bornée sur  $S^1$ , ce qui donne un sens à  $|\hat{d}f|^p$  pour tout  $p > 0$ . Soient par exemple  $c \in \mathbb{C}$  et  $J$  l'ensemble de Julia associé à l'itération de la transformation

$$(40) \quad \varphi(z) = z^2 + c, J = \partial B, B = \{z \in \mathbb{C}; \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi^n(z)| < \infty\}.$$

Pour  $c$  petit  $J$  est une courbe de Jordan et  $B$  la composante bornée de son complément. Soit  $Z : S^1 \rightarrow J$  la restriction à  $S^1 = \partial D, D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$  d'une équivalence conforme  $D \sim B$ . Comme (par un résultat de D. Sullivan) la dimension de Hausdorff  $p$  de  $J$  est  $> 1$  (pour  $c \neq 0$ ) la fonction  $Z$  n'est nulle part à variation bornée et la valeur absolue  $|Z'|$  de la dérivée de  $Z$  au sens des distributions n'a pas de sens. Cependant  $|\hat{d}Z|$  est bien défini et on a :

**THÉORÈME 1.**— a)  $|\hat{d}Z|$  est un infinitésimal d'ordre  $\frac{1}{p}$ .

b) Pour toute fonction continue  $h$  sur  $J$ , l'opérateur  $h(Z)|\hat{d}Z|^p$  est mesurable.

c)  $\exists \lambda > 0 :$

$$\int h(Z)|\hat{d}Z|^p = \lambda \int h d\Lambda_p \quad \forall h \in C(J),$$

où  $d\Lambda_p$  désigne la mesure de Hausdorff sur  $J$ .

L'énoncé a) utilise un résultat de V.V. Peller qui caractérise les fonctions  $f$  pour lesquelles  $\text{Trace}(|\hat{d}f|^\alpha) < \infty$ . La constante  $\lambda$  gouverne le développement asymptotique de la distance dans  $L^\infty(S^1)$  entre  $Z$  et les fonctions rationnelles ayant au plus

$n$ -pôles hors du disque unité. Cette constante est de l'ordre de  $\sqrt{p-1}$  et s'annule pour  $p = 1$ . Cela tient à une propriété spécifique de la dimension 1, à savoir que pour  $f \in C^\infty(S^1)$   $\oint f$  n'est pas seulement d'ordre  $(\dim S^1)^{-1} = 1$  mais est traçable, avec

$$(41) \quad \text{Trace}(f^0 \oint f^1) = \frac{1}{\pi i} \int_{S^1} f^0 df^1 \quad \forall f^0, f^1 \in C^\infty(S^1).$$

En fait par un résultat classique de Kronecker  $\oint f$  est de rang fini ssi  $f$  est une fraction rationnelle (cf. [P]).

Le calcul différentiel quantique s'applique de la même manière à l'espace projectif  $P_1(K)$  sur un corps local arbitraire  $K$  (i.e. un corps localement compact non discret) et est invariant par le groupe des transformations projectives. Les cas spéciaux  $K = \mathbb{C}$  et  $K = \mathbb{H}$  (corps des quaternions) sont des cas particuliers du calcul sur les variétés compactes conformes orientées de dimension paire,  $M = M_{2n}$ , qui se définit ainsi :

$$(42) \quad \mathcal{H} = L^2(M, \Lambda^n T^*), \quad (f\xi)(p) = f(p)\xi(p) \quad \forall f \in L^\infty(M), \quad F = 2P - 1$$

où le produit scalaire sur l'espace de Hilbert des formes différentielles de degré  $n = \frac{1}{2} \dim M$  est donné par  $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int \omega_1 \wedge * \omega_2$  et ne dépend que de la structure conforme de  $M$ . L'opérateur  $P$  est le projecteur orthogonal sur le sous-espace des formes exactes.

Prenons d'abord  $n = 1$ . Un calcul immédiat donne

$$(43) \quad \oint \oint f \oint dg = -\frac{1}{\pi} \int df \wedge * dg \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Soit alors  $X$  une application ( $C^\infty$ ) de  $M$  dans l'espace  $\mathbb{R}^N$  muni de la métrique riemannienne  $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  ; on a

$$(44) \quad \oint g_{\mu\nu} \oint X^\mu \oint X^\nu = -\frac{1}{\pi} \int_M g_{\mu\nu} dX^\mu \wedge * dX^\nu$$

où le terme de droite est l'action de Polyakov de la théorie des cordes. Pour  $n = 4$  l'égalité (44) n'a pas lieu, l'action définie par le terme de droite n'est pas intéressante car elle n'est pas invariante conforme. Le terme de gauche est parfaitement défini par le calcul quantique et est invariant conforme : on a

**THÉORÈME 2.**— Soit  $X$  une application  $C^\infty$  de  $M_4$  dans  $(\mathbb{R}^N, g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)$ ,

$$\oint g_{\mu\nu}(X) \oint X^\mu \oint X^\nu = (16\pi^2)^{-1} \int_M g_{\mu\nu}(X) \left\{ \frac{1}{3} r \langle dX^\mu, dX^\nu \rangle - \Delta \langle dX^\mu, dX^\nu \rangle + \langle \nabla dX^\mu, \nabla dX^\nu \rangle - \frac{1}{2} (\Delta X^\mu) (\Delta X^\nu) \right\} dv$$

où, pour écrire le terme de droite, on utilise sur  $M$  une structure riemannienne  $\eta$  quelconque compatible avec la structure conforme. Ainsi la courbure scalaire  $r$ , le Laplacien  $\Delta$  et la connection de Levi Civita  $\nabla$  se réfèrent à  $\eta$ , mais le résultat n'en dépend pas.

Le théorème 2 est à rapprocher de la formule suivante qui exprime l'action de Hilbert Einstein comme l'aire d'une variété de dimension 4 (cf. [Kas] [K-W])

$$(45) \quad \int ds^2 = \frac{-1}{96\pi^2} \int_{M_4} r \sqrt{g} d^4x$$

( $dv = \sqrt{g} d^4x$  est la forme volume et  $ds = D^{-1}$  est l'élément de longueur, i.e. l'inverse de l'opérateur de Dirac).

Quand la métrique  $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  sur  $\mathbb{R}^N$  est invariante par translations, la fonctionnelle d'action du théorème 2 est donnée par l'opérateur de Paneitz sur  $M$ . C'est un opérateur d'ordre 4 qui joue le rôle du Laplacien en géométrie conforme ([B-O]). Son anomalie conforme a été calculée par T. Branson [B].

Reprenons le cas  $n = 2$  et modifions la structure conforme de  $M$  par une différentielle de Beltrami  $\mu(z, \bar{z}) d\bar{z}/dz$ ,  $|\mu(z, \bar{z})| < 1$  en utilisant pour définir les angles en  $z \in M$

$$(46) \quad X \in T_z(M) \rightarrow \langle X, dz + \mu(z, \bar{z}) d\bar{z} \rangle \in \mathbb{C}$$

au lieu de  $\langle X, dz \rangle$ . Le calcul quantique sur  $M$  associé à la nouvelle structure conforme s'obtient simplement en remplaçant l'opérateur  $F$  par l'opérateur  $F'$ ,

$$(47) \quad F' = (\alpha F + \beta)(\beta F + \alpha)^{-1}, \quad \alpha = (1 - m^2)^{-1/2}, \quad \beta = m(1 - m^2)^{-1/2}$$

où  $m$  est l'opérateur dans  $\mathcal{H} = L^2(M, \Lambda^1 T^*)$  donné par l'endomorphisme du fibré vectoriel  $\Lambda^1 T^* = \Lambda^{(1,0)} \oplus \Lambda^{(0,1)}$  de matrice,

$$(48) \quad m(z, \bar{z}) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\mu}(z, \bar{z}) d\bar{z}/dz \\ \mu(z, \bar{z}) dz/d\bar{z} & 0 \end{bmatrix}.$$

Les propriétés cruciales de l'opérateur  $m \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  sont

$$(49) \quad \|m\| < 1, \quad m = m^*, \quad m f = f m \quad \forall f \in \mathcal{A} = C^\infty(M)$$

et la déformation (47) de  $F$  est un cas particulier de la :

**PROPOSITION 3.**— Soient  $\mathcal{A}$  une algèbre involutive d'opérateurs dans  $\mathcal{H}$  et  $N = \mathcal{A}' = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}); Ta = aT \quad \forall a \in \mathcal{A}\}$  l'algèbre de von Neumann commutant de  $\mathcal{A}$ .

a) L'égalité suivante définit une action du groupe  $G = GL_1(N)$  des éléments inversibles de  $N$  sur les opérateurs  $F$ ,  $F = F^*$ ,  $F^2 = 1$

$$g(F) = (\alpha F + \beta) (\beta F + \alpha)^{-1} \quad \forall g \in G$$

où  $\alpha = \frac{1}{2}(g - (g^{-1})^*)$ ,  $\beta = \frac{1}{2}(g + (g^{-1})^*)$ .

b) On a  $[g(F), a] = Y[F, a]Y^* \quad \forall a \in \mathcal{A}$ , où  $Y = (\beta F + \alpha)^{*-1}$ .

L'égalité b) montre que pour tout idéal bilatère  $J \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$  la condition

$$(50) \quad [F, a] \in J$$

est préservée par la déformation  $F \rightarrow g(F)$ . Comme seule la *mesurabilité* de la différentielle de Beltrami  $\mu$  est requise pour que  $m$  vérifie (49), seule la mesurabilité de la structure conforme sur  $M$  est requise pour que le calcul quantique associé soit défini. De plus b) montre que la condition de régularité sur  $a \in L^\infty(M)$  définie par (50) ne dépend que de la structure quasiconforme de la variété  $M$  ([CST]). Un homéomorphisme local  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^n$  est *quasiconforme* ssi il existe  $K < \infty$  tel que

$$(51) \quad H_\varphi(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\max |\varphi(x) - \varphi(y)|; |x - y| = r}{\min |\varphi(x) - \varphi(y)|; |x - y| = r} \leq K, \quad \forall x \in \text{Domaine } \varphi.$$

Une structure quasiconforme sur une variété topologique  $M_n$  est donnée par un atlas quasiconforme. La discussion ci-dessus s'applique au cas général ( $n$  pair) ([CST]) et montre que le calcul quantique est bien défini pour toute variété quasiconforme. Le résultat de D. Sullivan [S] basé sur [Ki] montre que toute variété topologique  $M_n$ ,  $n \neq 4$  admet une structure quasiconforme. En utilisant le calcul quantique et la cohomologie cyclique à la place du calcul différentiel et de la théorie de Chern–Weil, on obtient ([CST]) une formule locale pour les classes de Pontrjagin topologiques de  $M_n$ .

### 3. LA FORMULE DE L'INDICE LOCALE ET LA CLASSE FONDAMENTALE TRANSVERSE

Nous montrons dans cette section que le calcul infinitésimal ci-dessus permet le passage du local au global dans le cadre général des triplets spectraux  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ . Nous appliquons ensuite le résultat général au produit croisé d'une variété par le groupe des difféomorphismes.

Nous ferons l'hypothèse de régularité suivante sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$

$$(1) \quad a \text{ et } [D, a] \in \cap \text{Dom } \delta^k, \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

où  $\delta$  est la dérivation  $\delta(T) = [|D|, T]$ .

Nous désignerons par  $\mathcal{B}$  l'algèbre engendrée par les  $\delta^k(a)$ ,  $\delta^k([D, a])$ . La dimension d'un triplet spectral est bornée supérieurement par  $p > 0$  ssi  $a(D + i)^{-1}$  est un infinitésimal d'ordre  $\frac{1}{p}$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$ . Quand  $\mathcal{A}$  est unifère cela ne dépend que du spectre de  $D$ .

La notion précise de dimension est définie comme le sous-ensemble  $\Sigma \subset \mathbb{C}$  des singularités des fonctions analytiques

$$(2) \quad \zeta_b(z) = \text{Trace}(b|D|^{-z}) \quad \text{Re } z > p, \quad b \in \mathcal{B}.$$

Nous supposons que  $\Sigma$  est discret et simple, i.e. que les  $\zeta_b$  se prolongent à  $\mathbb{C}/\Sigma$  avec des pôles simples en  $\Sigma$ .

Nous renvoyons à [CM2] pour le cas de spectre multiple.

L'indice de Fredholm de l'opérateur  $D$  détermine une application additive,  $K_1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}$  donnée par l'égalité

$$(3) \quad \varphi([u]) = \text{Indice}(PuP), \quad u \in GL_1(\mathcal{A})$$

où  $P$  est le projecteur  $P = \frac{1+F}{2}$ ,  $F = \text{Signe}(D)$ .

Cette application est calculée par l'accouplement entre  $K_1(\mathcal{A})$  et la classe de cohomologie du cocycle cyclique suivant

$$(4) \quad \tau(a^0, \dots, a^n) = \text{Trace}(a^0[F, a^1] \dots [F, a^n]) \quad \forall a^j \in \mathcal{A}$$

où  $F = \text{Signe } D$  et où  $n$  est un entier impair  $n \geq p$ .

Le problème est que  $\tau$  est difficile à déterminer en général car la formule (4) implique la trace ordinaire au lieu de la trace locale  $f$ .

Ce problème est résolu par la formule suivante :

**THÉORÈME 4** ([CM2]).— Soit  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  un triplet spectral vérifiant les hypothèses (1) et (2).

a) L'égalité  $fP = \text{Res}_{z=0} \text{Trace}(P|D|^{-z})$  définit une trace sur l'algèbre engendrée par  $\mathcal{A}$ ,  $[D, \mathcal{A}]$  et  $|D|^z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

b) La formule suivante n'a qu'un nombre fini de termes non nuls et définit les composantes  $(\varphi_n)_{n=1,3,\dots}$  d'un cocycle dans le bicomplexe  $(b, B)$  de  $\mathcal{A}$

$$\varphi_n(a^0, \dots, a^n) = \sum_k c_{n,k} f a^0 [D, a^1]^{(k_1)} \dots [D, a^n]^{(k_n)} |D|^{-n-2|k|} \quad \forall a^j \in \mathcal{A}$$

où l'on note  $T^{(k)} = \nabla^k(T)$  et  $\nabla(T) = D^2T - TD^2$ , et où  $k$  est un multiindice,  $c_{n,k} = (-1)^{|k|} \sqrt{2i} (k_1! \dots k_n!)^{-1} ((k_1 + 1) \dots (k_1 + k_2 + \dots + k_n + n))^{-1} \Gamma(|k| + \frac{n}{2})$ ,  $|k| = k_1 + \dots + k_n$ .

c) L'accouplement de la classe de cohomologie cyclique  $(\varphi_n) \in HC^*(\mathcal{A})$  avec  $K_1(\mathcal{A})$  donne l'indice de Fredholm de  $D$  à coefficient dans  $K_1(\mathcal{A})$ .

Rappelons que le bicomplexe  $(b, B)$  est donné par les opérateurs suivants agissant sur les formes multilinéaires sur l'algèbre  $\mathcal{A}$

$$(5) \quad \begin{aligned} & (b\varphi)(a^0, \dots, a^{n+1}) = \\ & \sum_0^n (-1)^j \varphi(a^0, \dots, a^j a^{j+1}, \dots, a^{n+1}) + (-1)^{n+1} \varphi(a^{n+1} a^0, a^1, \dots, a^n) \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} B &= AB_0, \quad B_0 \varphi(a^0, \dots, a^{n-1}) = \varphi(1, a^0, \dots, a^{n-1}) - (-1)^n \varphi(a^0, \dots, a^{n-1}, 1) \\ (A\psi)(a^0, \dots, a^{n-1}) &= \sum_0^{n-1} (-1)^{(n-1)j} \psi(a^j, a^{j+1}, \dots, a^{j-1}). \end{aligned}$$

Nous renvoyons à [Co] pour la normalisation de l'accouplement entre  $HC^*$  et  $K(\mathcal{A})$ .

*Remarques.* — a) L'énoncé du théorème 4 reste valable si l'on remplace dans toutes les formules l'opérateur  $D$  par  $D|D|^\alpha$ ,  $\alpha \geq 0$ .

b) Dans le cas pair, c'est-à-dire si l'on suppose que  $\mathcal{H}$  est  $\mathbb{Z}/2$  gradué par  $\gamma$ ,  $\gamma = \gamma^*$ ,  $\gamma^2 = 1$ ,  $\gamma a = a\gamma \quad \forall a \in \mathcal{A}$ ,  $\gamma D = -D\gamma$ , on a une formule analogue pour un cocycle  $(\varphi_n)$ ,  $n$  pair qui donne l'indice de Fredholm de  $D$  à coefficient dans  $K_0$ . Cependant la composante  $\varphi_0$  ne s'exprime pas en terme du résidu  $f$  car elle est non locale pour  $\mathcal{H}$  de dimension finie (cf. [CM2]).

c) Quand le spectre de dimension  $\Sigma$  a de la multiplicité on a une formule analogue mais qui implique un nombre fini de termes correctifs, dont le nombre est borné indépendamment de la multiplicité (cf. [CM2]).

Le spectre de dimensions d'une variété  $V$  est  $\{0, 1, \dots, n\}$ ,  $n = \dim V$ , et est simple. La multiplicité apparaît pour les variétés singulières et les ensembles de Cantor donnent

des exemples de points complexes,  $z \notin \mathbb{R}$  dans ce spectre. Nous discutons maintenant une construction géométrique générale pour laquelle les hypothèses (1) et (2) sont vérifiées. Il s'agit de construire la classe fondamentale en  $K$ -homologie d'une variété  $K$ -orientée  $M$  sans briser la symétrie du groupe  $\text{Diff}^+(M)$  des difféomorphismes de  $M$  qui préservent la  $K$ -orientation. De manière plus précise nous cherchons un triplet spectral,  $(C^\infty(M), \mathcal{H}, D)$  de la même classe de  $K$ -homologie que l'opérateur de Dirac associé à une métrique riemannienne (cf. I (11) et (12)) mais qui soit équivariant par rapport au groupe  $\text{Diff}^+(M)$  au sens de [K]. Cela signifie que l'on a une représentation unitaire  $\varphi \rightarrow U(\varphi)$  de  $\text{Diff}^+(M)$  dans  $\mathcal{H}$  telle que

$$(7) \quad U(\varphi) f U(\varphi)^{-1} = f \circ \varphi^{-1} \quad \forall f \in C^\infty(M), \varphi \in \text{Diff}^+(M)$$

et que

$$(8) \quad U(\varphi) D U(\varphi)^{-1} - D \text{ est borné pour tout } \varphi \in \text{Diff}^+(M).$$

Lorsque  $D$  est l'opérateur de Dirac associé à une structure riemannienne le symbole principal de  $D$  détermine cette métrique et les seuls difféomorphismes qui vérifient (8) sont les isométries.

La solution de ce problème est essentielle pour définir la géométrie transverse des feuilletages et elle est effectuée en 2 étapes. La première est l'utilisation ([Co1]) de la métrique de courbure négative de l'espace  $GL(n)/O(n)$  et de l'opérateur "dual Dirac" de Miscenko et Kasparov pour se ramener à l'action de  $\text{Diff}^+(M)$  sur l'espace total  $P$  du fibré des métriques de  $M$ . La deuxième, dont l'idée est due à Hilsum et Skandalis ([HS]), est l'utilisation des opérateurs hypoelliptiques pour construire l'opérateur  $D$  sur  $P$ .

On notera qu'alors que la géométrie équivariante obtenue pour  $P$  est de dimension finie et vérifie les hypothèses (1) (2) la géométrie obtenue sur  $M$  en utilisant le produit intersection avec le "dual Dirac" est de dimension infinie et  $\theta$ -sommable

$$(9) \quad \text{Trace}(e^{-\beta D^2}) < \infty \quad \forall \beta > 0.$$

Par construction, le fibré  $P \xrightarrow{\pi} M$  est le quotient  $F/O(n)$  du  $GL(n)$  fibré principal  $F$  des repères sur  $M$  par l'action du groupe orthogonal  $O(n) \subset GL(n)$ . L'espace  $P$  admet la structure canonique suivante : le feuilletage vertical  $V \subset TP$ ,  $V = \text{Ker } \pi_*$  et les structures euclidiennes suivantes sur les fibrés  $V$  et  $N = (TP)/V$ . Le choix d'une métrique riemannienne  $GL(n)$ -invariante sur  $GL(n)/O(n)$  détermine la métrique sur

$V$  et celle de  $N$  est la métrique tautologique:  $p \in P$  détermine une métrique sur  $T_{\pi(p)}(M)$  qui grâce à  $\pi_*$  est isomorphe à  $N_p$ .

Cette construction est fonctorielle pour les difféomorphismes de  $M$ .

Le calcul hypoelliptique adapté à cette structure est un cas particulier du calcul pseudodifférentiel sur les variétés de Heisenberg ([BG]). Il modifie simplement l'homogénéité des symboles  $\sigma(p, \xi)$  en utilisant les homothéties :

$$(10) \quad \lambda \cdot \xi = (\lambda \xi_v, \lambda^2 \xi_n), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

où  $\xi_v, \xi_n$  sont les composantes verticales et normales du covecteur  $\xi$ . La formule (10) dépend de coordonnées locales  $(x_v, x_n)$  adaptées au feuilletage vertical mais le calcul pseudodifférentiel correspondant n'en dépend pas. Le symbole principal d'un opérateur hypoelliptique d'ordre  $k$  est une fonction, homogène de degré  $k$  pour (10), sur le fibré  $V^* \oplus N^*$ . Le noyau distribution  $k(x, y)$  d'un opérateur pseudodifférentiel  $T$  dans le calcul hypoelliptique admet un développement au voisinage de la diagonale de la forme

$$(11) \quad k(x, y) \sim \sum a_j(x, x - y) + a(x) \log |x - y|' + 0(1)$$

où  $a_j$  est homogène de degré  $-j$  en  $x - y$  pour (10) et où la métrique  $|x - y|'$  est localement de la forme

$$(12) \quad |x - y|' = ((x_v - y_v)^4 + (x_n - y_n)^2)^{1/4}.$$

Comme dans le calcul pseudodifférentiel ordinaire, le résidu se prolonge aux opérateurs de tout degré et est donné par l'égalité

$$(13) \quad \int T = \frac{1}{v + 2m} \int a(x)$$

où la 1-densité  $a(x)$  ne dépend pas du choix de la métrique  $| \cdot |'$  et où  $v = \dim V$ ,  $m = \dim N$  de sorte que  $v + 2m$  est la dimension de Hausdorff de l'espace métrique  $(P, | \cdot |')$ .

L'opérateur  $D$  est défini par l'équation  $D|D| = Q$  où  $Q$  est l'opérateur différentiel hypoelliptique de degré 2 obtenu en combinant (quand  $v$  est pair) l'opérateur  $d_V d_V^* - d_V^* d_V$  de signature où  $d_V$  est la différentiation verticale, avec l'opérateur de Dirac transverse. (On utilise le revêtement métaplectique  $M\ell(n)$  de  $GL(n)$  pour définir la structure spinorielle sur  $M$ .) La formule explicite de  $Q$  utilise une connection affine sur  $M$  mais le choix de cette connection n'affecte pas le *symbole principal hypoelliptique* de

$Q$  et donc de  $D$  ce qui assure l'invariance (8) de  $D$  par rapport aux difféomorphismes de  $M$ .

Donnons la formule explicite de  $Q$  dans le cas  $n = 1$ , i.e. pour  $M = S^1$ . On remplace  $P$  par la suspension  $SP = \mathbb{R} \times P$  pour se ramener au cas où la dimension verticale  $v$  est paire. Un point de  $SP = \mathbb{R} \times P$  est paramétré par 3 coordonnées  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $p = (s, \tau)$  où  $\tau \in S^1$  et où  $s \in \mathbb{R}$  définit la métrique  $e^{2s}(d\tau)^2$  en  $\tau \in S^1$ .

On munit  $SP$  de la mesure  $\nu = d\alpha ds d\tau$  et l'on représente l'algèbre  $C_c^\infty(SP)$  par opérateurs de multiplication dans  $\mathcal{H} = L^2(SP, \nu) \otimes \mathbb{C}^2$ . La functorialité de la construction ci-dessus donne la représentation unitaire suivante du groupe  $\text{Diff}^+(S^1)$

$$(14) \quad (U(\varphi)^{-1}\xi)(\alpha, s, \tau) = \varphi'(\tau)^{1/2} \xi(\alpha, s - \log \varphi'(\tau), \varphi(\tau)).$$

Enfin l'opérateur  $Q$  est donné par la formule

$$(15) \quad Q = -2\partial_\alpha \partial_s \sigma_1 + \frac{1}{i} e^{-s} \partial_\tau \sigma_2 + \left( \partial_s^2 - \partial_\alpha^2 - \frac{1}{4} \right) \sigma_3$$

où  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in M_2(\mathbb{C})$  sont les 3 matrices de Pauli.

L'opérateur  $\partial_\tau$  est de degré 2 dans le calcul hypoelliptique et l'on vérifie que  $Q$  est hypoelliptique.

Un long calcul donne le résultat suivant ([CM3]) :

**THÉORÈME 5.**— Soit  $\mathcal{A}$  l'algèbre produit croisé de  $C_c^\infty(SP)$  par  $\text{Diff}^+(S^1)$ .

a) Le triplet spectral  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  (où  $\mathcal{A}$  agit dans  $\mathcal{H}$  par (14) et  $D|D| = Q$ ) satisfait les hypothèses (1) et (2) et son spectre de dimension est  $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

b) La seule composante non nulle du cocycle associé (Théorème 4) est  $\varphi_3$  et elle est cohomologue à  $2\psi$  où  $\psi$  est le 3-cocycle cyclique classe fondamentale transverse du produit croisé.

L'intégralité de  $2\psi$ , i.e. de l'accouplement  $\langle 2\psi, K_1(\mathcal{A}) \rangle$  résulte alors du théorème 4. Le 3-cocycle  $\psi$  est donné par (cf. [Co])

$$(16) \quad \begin{aligned} \psi(f^0 U(\varphi_0), f^1 U(\varphi_1), f^2 U(\varphi_2), f^3 U(\varphi_3)) &= \int h^0 dh^1 \wedge dh^2 \wedge dh^3 \text{ si } \varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = 1 \\ &\text{et } = 0 \text{ si } \varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \neq 1 \\ &\text{avec } h^0 = f^0, h^1 = (f^1)^{\varphi_0}, h^2 = (f^2)^{\varphi_0 \varphi_1}, h^3 = (f^3)^{\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2}. \end{aligned}$$

L'homologie entre  $\varphi_3$  et  $2\psi$  met en évidence l'action sur l'algèbre  $\mathcal{A}$  de l'algèbre de Hopf engendrée par les transformations linéaires suivantes (pour la relation de  $\delta_3$  avec

l'invariant de Godbillon Vey, voir [Co]) de  $\mathcal{A}$

$$(17) \quad \begin{aligned} \delta_1(fU(\varphi)) &= (\partial_\alpha f) U(\varphi) , \quad \delta_2(fU(\varphi)) = (\partial_s f) U(\varphi) , \\ \delta_3(fU(\varphi)) &= f e^{-s} \partial_\tau \log(\varphi^{-1})' U(\varphi) , \quad X(fU(\varphi)) = e^{-s} (\partial_\tau f) U(\varphi) \end{aligned}$$

dont la compatibilité avec la multiplication de  $\mathcal{A}$  est régie par le coproduit

$$(18) \quad \Delta \delta_j = \delta_j \otimes 1 + 1 \otimes \delta_j \quad j = 1, 2, 3$$

(i.e. les  $\delta_j$  sont des dérivations de  $\mathcal{A}$ )

$$(19) \quad \Delta X = X \otimes 1 + 1 \otimes X - \delta_3 \otimes \delta_2$$

où (19) montre que  $X$  est de degré 2.

#### 4. LA NOTION DE VARIÉTÉ ET LES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE

Commençons par spécifier la place de la géométrie riemannienne dans notre cadre en caractérisant (Théorème 6) les triplets spectraux correspondants. Soit  $n \in \mathbb{N}$  la dimension, le triplet  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  est supposé  $\mathbb{Z}/2$  gradué par  $\gamma$ ,  $\gamma = \gamma^*$ ,  $\gamma^2 = 1$  quand  $n$  est pair.

Les axiomes *commutatifs* sont les suivants :

- 1) (Dimension)  $ds = D^{-1}$  est infinitésimal d'ordre  $\frac{1}{n}$ .
- 2) (Ordre un)  $[[D, f], g] = 0 \quad \forall f, g \in \mathcal{A}$ .
- 3) (Régularité) Pour tout  $f \in \mathcal{A}$ ,  $f$  et  $[D, f]$  appartiennent à  $\bigcap_k \text{Domaine } \delta^k$ , où  $\delta$  est la dérivation  $\delta(T) = [[D], T]$ .
- 4) (Orientabilité) Il existe un cycle de Hochschild  $c \in Z_n(\mathcal{A}, \mathcal{A})$  tel que  $\pi(c) = 1$  ( $n$  impair) ou  $\pi(c) = \gamma$  ( $n$  pair), où  $\pi : \mathcal{A}^{\otimes(n+1)} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est l'unique application linéaire telle que  $\pi(a^0 \otimes a^1 \otimes \dots \otimes a^n) = a^0 [D, a^1] \dots [D, a^n] \quad \forall a^j \in \mathcal{A}$ .
- 5) (Finitude) Le  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{E} = \bigcap_k \text{Domaine } D^k$  est projectif de type fini et l'égalité suivante définit une structure hermitienne sur  $\mathcal{E}$

$$\langle a\xi, \eta \rangle = \int a(\xi, \eta) ds^n \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{E} , a \in \mathcal{A}.$$

- 6) (Dualité de Poincaré) La forme d'intersection  $K_*(\mathcal{A}) \times K_*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{Z}$  donnée par la composition de l'indice de Fredholm de  $D$  avec la diagonale,  $m_* : K_*(\mathcal{A}) \times K_*(\mathcal{A}) \rightarrow K_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \rightarrow K_*(\mathcal{A})$ , est *inversible*.

7) (Réalité) Il existe une isométrie antilinéaire  $J$  sur  $\mathcal{H}$  telle que  $Ja^*J^{-1} = a \quad \forall a \in \mathcal{A}$  et  $J^2 = \varepsilon$ ,  $JD = \varepsilon'DJ$ ,  $J\gamma = \varepsilon''\gamma J$  où la table des valeurs de  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \in \{-1, 1\}$  en fonction de  $n$  modulo 8 est donnée en (I.16).

Les axiomes 2) et 4) donnent la présentation de l'algèbre abstraite notée  $(\mathcal{A}, ds)$  engendrée par  $\mathcal{A}$  et  $ds = D^{-1}$ .

**THÉORÈME 6.**— Soit  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$  où  $M$  est une variété compacte de classe  $C^\infty$ .

a) Soit  $\pi$  une représentation unitaire de  $(\mathcal{A}, ds)$  satisfaisant les conditions 1) à 7). Il existe alors une unique structure riemannienne  $g$  sur  $M$  telle que la distance géodésique soit donnée par :

$$d(x, y) = \text{Sup} \{ |a(x) - a(y)| ; a \in \mathcal{A}, \|[D, a]\| \leq 1 \}.$$

b) La métrique  $g = g(\pi)$  ne dépend que de la classe d'équivalence unitaire de  $\pi$  et les fibres de l'application {classe d'équivalence unitaire}  $\rightarrow g(\pi)$  forment un nombre fini d'espaces affines  $\mathcal{A}_\sigma$  paramétrés par les structures spinorielles  $\sigma$  de  $M$ .

c) La fonctionnelle  $\int ds^{n-2}$  est quadratique et positive sur chaque  $\mathcal{A}_\sigma$  où elle admet un unique minimum  $\pi_\sigma$ .

d)  $\pi_\sigma$  est la représentation de  $(\mathcal{A}, ds)$  dans  $L^2(M, S_\sigma)$  donnée par les opérateurs de multiplication et l'opérateur de Dirac associé à la connection de Levi Civita de la métrique  $g$ .

e) La valeur de  $\int ds^{n-2}$  en  $\pi_\sigma$  est l'action de Hilbert Einstein de la métrique  $g$  :

$$\int ds^{n-2} = -c_n \int r \sqrt{g} d^n x, \quad c_n = \frac{n-2}{12} (4\pi)^{-n/2} 2^{[n/2]} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)^{-1}.$$

L'exemple le plus simple pour comprendre la signification du théorème est de vérifier que la géométrie du cercle  $S^1$  de longueur  $2\pi$  est entièrement spécifiée par la présentation :

$$(1) \quad U^{-1}[D, U] = 1, \quad \text{où } UU^* = U^*U = 1.$$

L'algèbre  $\mathcal{A}$  étant celle des fonctions  $C^\infty$  de l'opérateur unitaire  $U$ , on a  $S^1 = \text{Spectre}(\mathcal{A})$  et l'égalité (1) est le cas le plus simple de l'axiome 4.

*Remarques.*— a) L'hypothèse  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$  devrait résulter des axiomes 1) – 7) (et de la commutativité de  $\mathcal{A}$ ). Il résulte de 3) et 5) que si  $\mathcal{A}''$  est l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\mathcal{A}$  on a :

$$(2) \quad \mathcal{A} = \left\{ T \in \mathcal{A}'' ; T \in \bigcap_{k>0} \text{Dom } \delta^k \right\},$$

ce qui montre que  $\mathcal{A}$  est uniquement spécifiée dans  $\mathcal{A}''$  par la donnée de  $D$ . Cela montre que  $\mathcal{A}$  est stable par calcul fonctionnel  $C^\infty$  dans sa fermeture normique  $A = \bar{\mathcal{A}}$  et en particulier que

$$(3) \quad \text{Spectre } \mathcal{A} = \text{Spectre } A.$$

Soit  $X$  cet espace compact ; on devrait déduire des axiomes que l'application de  $X$  dans  $\mathbb{R}^N$  donnée par les  $a_i^j \in \mathcal{A}$  qui interviennent dans le cycle de Hochschild  $c$  de (4) est un plongement de  $X$  comme sous-variété  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^N$  (cf. Proposition 15, p. 312 de [Co]).

b) Rappelons qu'un cycle de Hochschild  $c \in Z_n(\mathcal{A}, \mathcal{A})$  est un élément de  $\mathcal{A}^{\otimes(n+1)}$ ,  $c = \sum a_i^0 \otimes a_i^1 \dots \otimes a_i^n$  tel que  $bc = 0$ , où  $b$  est l'application linéaire  $b : \mathcal{A}^{\otimes(n+1)} \rightarrow \mathcal{A}^{\otimes n}$  telle que :

$$b(a^0 \otimes \dots \otimes a^n) = \sum_0^{n-1} (-1)^j a^0 \otimes \dots \otimes a^j a^{j+1} \otimes \dots \otimes a^n + (-1)^n a^n a^0 \otimes a^1 \otimes \dots \otimes a^{n+1}.$$

La classe de Hochschild du cycle  $c$  détermine la *forme volume*.

c) Nous utilisons la convention selon laquelle la courbure scalaire  $r$  est positive pour la sphère  $S^n$ , en particulier le signe de l'action  $\int ds^{n-2}$  est le bon pour la formulation euclidienne de la gravitation. Par exemple, pour  $n = 4$ , l'action de Hilbert Einstein  $-\frac{1}{16\pi G} \int r \sqrt{g} d^4x$  coïncide avec l'aire  $\frac{1}{\ell_p^2} \int f ds^2$  en unité de Planck.

d) Quand  $M$  est une variété spinorielle l'application  $\pi \rightarrow g(\pi)$  du théorème est surjective et si l'on fixe le cycle  $c \in Z_n(\mathcal{A}, \mathcal{A})$  son image est l'ensemble des métriques dont la forme volume est fixée – (b)).

e) Si l'on supprime l'axiome 7 on a un résultat analogue au théorème en remplaçant les structures spinorielles par les structures  $\text{spin}^c$  ([LM]), mais l'on n'a plus unicité dans c) à cause de la liberté dans le choix de la connection spinorielle.

f) Il résulte de l'axiome 4 et de ([Co], théorème 8, p. 309) que les opérateurs  $a ds^n$ ,  $a \in \mathcal{A}$  sont automatiquement mesurables de sorte que le symbole  $f$  qui apparaît dans 5 est bien défini.

Passons au cas général non commutatif. Étant donnée une algèbre involutive  $\mathcal{A}$  d'opérateurs dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , la théorie de Tomita [Ta] associe à tout vecteur  $\xi \in \mathcal{H}$  cyclique pour  $\mathcal{A}$  et pour son commutant  $\mathcal{A}'$

$$(4) \quad \overline{\mathcal{A}}\xi = \mathcal{H}, \quad \overline{\mathcal{A}'\xi} = \mathcal{H}$$

une involution antilinéaire isométrique  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  obtenue à partir de la décomposition polaire de l'opérateur

$$(5) \quad S a \xi = a^* \xi \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

et qui vérifie la propriété de commutativité suivante :

$$(6) \quad J \mathcal{A}'' J^{-1} = \mathcal{A}'.$$

On a donc en particulier  $[a, b^0] = 0 \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$  où

$$(7) \quad b^0 = J b^* J^{-1} \quad \forall b \in \mathcal{A}$$

de sorte que  $\mathcal{H}$  devient un  $\mathcal{A}$ -bimodule en utilisant la représentation de l'algèbre opposée  $\mathcal{A}^0$  donnée par (7). Dans le cas commutatif on a  $a^0 = a \quad \forall a \in \mathcal{A}$  de sorte que l'on ne perçoit pas la nuance entre module et bimodule.

Le théorème de Tomita est l'outil nécessaire pour assurer la substance des axiomes dans le cas général. Les axiomes 1) 3) et 5) sont inchangés, dans l'axiome de réalité 7) on remplace l'égalité  $J a^* J^{-1} = a \quad \forall a \in \mathcal{A}$  par

$$(7') \quad [a, b^0] = 0 \quad \forall a, b \in \mathcal{A} \text{ où } b^0 = J b^* J^{-1}$$

et l'axiome 2) (ordre un) se formule ainsi

$$(2') \quad [[D, a], b^0] = 0 \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

(On notera que comme  $a$  et  $b^0$  commutent  $2'$  équivaut à  $[[D, a^0], b] = 0 \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$ )

L'axiome (7') fait de  $\mathcal{H}$  un  $\mathcal{A}$ -bimodule et donne une classe  $\mu$  de  $KR^n$ -homologie pour l'algèbre  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0$  munie de l'automorphisme antilinéaire  $\tau$

$$\tau(x \otimes y^0) = y^* \otimes x^{*0}.$$

Le produit intersection de Kasparov [K] permet alors de formuler la dualité de Poincaré, comme l'invertibilité de  $\mu$

$$(6') \quad \exists \beta \in KR_n(\mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{A}), \beta \otimes_{\mathcal{A}} \mu = \text{id}_{\mathcal{A}^0}, \mu \otimes_{\mathcal{A}^0} \beta = \text{id}_{\mathcal{A}}.$$

Ceci implique l'isomorphisme  $K_*(\mathcal{A}) \xrightarrow{\cap \mu} K^*(\mathcal{A})$ . La forme d'intersection

$$K_*(\mathcal{A}) \times K_*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

est obtenue à partir de l'indice de Fredholm de  $D$  à coefficient dans  $K_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0)$  et n'utilise plus l'application diagonale  $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  qui n'est un homomorphisme que dans le cas commutatif. Cette forme d'intersection est quadratique ou symplectique selon la valeur de  $n$  modulo 8.

L'homologie de Hochschild à coefficient dans un bimodule garde tout son sens dans le cas général et l'axiome 4) prend la forme suivante

(4') Il existe un cycle de Hochschild  $c \in Z_n(\mathcal{A}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0)$  tel que  $\pi(c) = 1$  ( $n$  impair) ou  $\pi(c) = \gamma$  ( $n$  pair).

(Où  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0$  est le  $\mathcal{A}$  bimodule obtenu par restriction à la sous-algèbre  $\mathcal{A} \otimes 1 \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0$  de la structure de  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0$  bimodule de  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0$ , i.e.

$$a(b \otimes c^0)d = abd \otimes c^0 \quad \forall a, b, c, d \in \mathcal{A}.)$$

Les axiomes (1), (3) et (5) sont inchangés dans le cas noncommutatif et la démonstration de la mesurabilité des opérateurs  $a(ds)^n$ ,  $a \in \mathcal{A}$  reste valable en général. Nous adopterons les axiomes (1), (2'), (3), (4'), (5), (6') et (7') dans le cas général comme définition d'une *variété spectrale* de dimension  $n$ . L'algèbre  $\mathcal{A}$  étant fixée nous parlerons de géométrie spectrale sur  $\mathcal{A}$  comme dans I.20 et I.21. On démontre que l'algèbre de von Neumann  $\mathcal{A}''$  engendrée par  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{H}$  est automatiquement finie et hyperfinie et on a la liste complète de ces algèbres à isomorphisme près [Co]. L'algèbre  $\mathcal{A}$  est stable par calcul fonctionnel  $C^\infty$  dans sa fermeture normique  $A = \bar{\mathcal{A}}$  de sorte que  $K_j(\mathcal{A}) \simeq K_j(A)$ , i.e.  $K_j(\mathcal{A})$  ne dépend que de la topologie sous-jacente (définie par la  $C^*$  algèbre  $A$ ). L'entier  $\chi = \langle \mu, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$  donne la caractéristique d'Euler sous la forme

$$\chi = \text{Rang } K_0(\mathcal{A}) - \text{Rang } K_1(\mathcal{A})$$

et le théorème 4 en donne une formule locale.

Le groupe  $\text{Aut}(\mathcal{A})$  des automorphismes de l'algèbre involutive  $\mathcal{A}$  joue en général le rôle du groupe  $\text{Diff}(M)$  des difféomorphismes d'une variété  $M$ . (On a un isomorphisme canonique  $\text{Diff}(M) \xrightarrow{\simeq} \text{Aut}(C^\infty(M))$  donné par

$$\alpha_\varphi(f) = f \circ \varphi^{-1} \quad \forall f \in C^\infty(M), \varphi \in \text{Diff}(M).)$$

Dans le cas général non commutatif, parallèlement au sous-groupe normal  $\text{Int } \mathcal{A} \subset \text{Aut } \mathcal{A}$  des automorphismes intérieurs de  $\mathcal{A}$

$$(8) \quad \alpha(f) = ufu^* \quad \forall f \in \mathcal{A}$$

où  $u$  est un élément unitaire de  $\mathcal{A}$  (i.e.  $uu^* = u^*u = 1$ ), il existe un feuilletage naturel de l'espace des géométries spectrales sur  $\mathcal{A}$  en classes d'équivalences formées des *déformations intérieures* d'une géométrie donnée. Une telle déformation est obtenue sans modifier ni la représentation de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{H}$  ni l'isométrie antilinéaire  $J$  par la formule

$$(9) \quad D \rightarrow D + A + JAJ^{-1}$$

où  $A = A^*$  est un opérateur autoadjoint arbitraire de la forme

$$(10) \quad A = \Sigma a_i [D, b_i], \quad a_i, b_i \in \mathcal{A}.$$

Le nouveau triplet spectral obtenu continue à vérifier les axiomes (1) – (7').

L'action du groupe  $\text{Int}(\mathcal{A})$  sur les géométries spectrales (cf. I.21) se réduit à une transformation de jauge sur  $A$ , donnée par la formule

$$(11) \quad \gamma_u(A) = u[D, u^*] + uAu^*.$$

L'équivalence unitaire est implémentée par la représentation suivante du groupe unitaire de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{H}$ ,

$$(12) \quad u \rightarrow uJuJ^{-1} = u(u^*)^0.$$

La transformation (9) se réduit à l'identité dans le cas riemannien usuel. Pour obtenir un exemple non trivial, il suffit d'en faire le produit par l'unique géométrie spectrale sur l'algèbre de dimension finie  $\mathcal{A}_F = M_N(\mathbb{C})$  des matrices  $N \times N$  sur  $\mathbb{C}$ ,  $N \geq 2$ . On a alors  $\mathcal{A} = C^\infty(M) \otimes \mathcal{A}_F$ ,  $\text{Int}(\mathcal{A}) = C^\infty(M, PSU(N))$  et les déformations intérieures de la géométrie sont paramétrées par les potentiels de jauge pour une théorie de jauge de groupe  $SU(N)$ . L'espace  $P(\mathcal{A})$  des états purs de l'algèbre  $\mathcal{A}$  est le produit  $P = M \times P_{N-1}(\mathbb{C})$  et la métrique sur  $P(\mathcal{A})$  déterminée par la formule I.10 dépend du potentiel de jauge  $A$ . Elle coïncide avec la métrique de Carnot [G] sur  $P$  définie par la distribution horizontale de la connection associée à  $A$  (cf. [Co3]). Le groupe  $\text{Aut}(\mathcal{A})$  des automorphismes de  $\mathcal{A}$  est le produit semi direct

$$(13) \quad \text{Aut}(\mathcal{A}) = \mathcal{U} \rtimes \text{Diff}(M)$$

du groupe  $\text{Int}(\mathcal{A})$  des transformations de jauge locales par le groupe des difféomorphismes. En dimension  $n = 4$ , les fonctionnelles d'action de Hilbert Einstein pour la métrique riemannienne et de Yang-Mills pour le potentiel vecteur  $A$  apparaissent

simplement, et avec les bons signes, dans le développement asymptotique en  $\frac{1}{\Lambda}$  du nombre  $N(\Lambda)$  de valeurs propres de  $D$  qui sont  $\leq \Lambda$ . On régularise cette expression en la remplaçant par

$$(14) \quad \text{Trace } \varpi \left( \frac{D}{\Lambda} \right)$$

où  $\varpi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  est une fonction paire qui vaut 1 sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , (cf. [CC]). Les seuls autres termes non nuls du développement asymptotique sont un terme cosmologique, un terme de gravité de Weyl et un terme topologique.

Un exemple plus élaboré de variété spectrale est le tore non commutatif  $\mathbb{T}_\theta^2$ . Le paramètre  $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  définit la déformation suivante de l'algèbre des fonctions  $C^\infty$  sur le tore  $\mathbb{T}^2$ , de générateurs  $U, V$ . Les relations

$$(15) \quad VU = \exp 2\pi i \theta UV \quad \text{et} \quad UU^* = U^*U = 1, \quad VV^* = V^*V = 1$$

définissent la structure d'algèbre involutive de  $\mathcal{A}_\theta = \{ \sum a_{n,m} U^n V^m ; a = (a_{n,m}) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2) \}$  où  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$  est l'espace de Schwartz des suites à décroissance rapide. Comme pour les courbes elliptiques on utilise comme paramètre pour définir la géométrie de  $\mathbb{T}_\theta^2$  un nombre complexe  $\tau$  de partie imaginaire positive et, à isométrie près, cette géométrie ne dépend que de l'orbite de  $\tau$  pour  $PSL(2, \mathbb{Z})$  [Co]. Le phénomène nouveau qui apparaît est l'équivalence de Morita qui relie entre elles les algèbres  $\mathcal{A}_{\theta_1}, \mathcal{A}_{\theta_2}$  lorsque  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont dans la même orbite de l'action de  $PSL(2, \mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{R}$  [Ri].

Étant données une variété spectrale  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  et une équivalence de Morita entre  $\mathcal{A}$  et une algèbre  $\mathcal{B}$  donnée par

$$(16) \quad \mathcal{B} = \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$$

où  $\mathcal{E}$  est une  $\mathcal{A}$ -module à droite, projectif de type fini et hermitien, on obtient une géométrie spectrale sur  $\mathcal{B}$  par le choix d'une *connection hermitienne* sur  $\mathcal{E}$ . Une telle connection  $\nabla$  est une application linéaire  $\nabla : \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^1$  vérifiant les règles ([Co])

$$(17) \quad \nabla(\xi a) = (\nabla \xi) a + \xi \otimes da \quad \forall \xi \in \mathcal{E}, a \in \mathcal{A}$$

$$(18) \quad (\xi, \nabla \eta) - (\nabla \xi, \eta) = d(\xi, \eta) \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{E}$$

où  $da = [D, a]$  et où  $\Omega_D^1 \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est le  $\mathcal{A}$ -bimodule formé par les opérateurs de la forme (10).

Toute algèbre  $\mathcal{A}$  est Morita équivalente à elle-même (avec  $\mathcal{E} = \mathcal{A}$ ) et quand on applique la construction ci-dessus on obtient les déformations intérieures de la géométrie spectrale.

## 5. LA GÉOMÉTRIE SPECTRALE DE L'ESPACE TEMPS

L'information expérimentale et théorique dont on dispose sur la structure de l'espace temps est résumée par la fonctionnelle d'action suivante  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{G\varphi} + \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_{\varphi f} + \mathcal{L}_f$ , où  $\mathcal{L}_E = -\frac{1}{16\pi G} \int r \sqrt{g} d^4x$  est l'action de Hilbert-Einstein et les 5 autres termes constituent le modèle standard de la physique des particules, couplé de manière minimale à la gravitation. Outre la métrique  $g_{\mu\nu}$  ce Lagrangien implique plusieurs champs de bosons et de fermions. Les bosons de spin 1 sont le photon  $\gamma$ , les bosons médiateurs  $W^\pm$  et  $Z$  et les huit gluons. Les bosons de spin 0 sont les champs de Higgs  $\varphi$  qui sont introduits pour briser la parité et pour que le mécanisme de brisure de symétrie spontanée confère une masse aux diverses particules sans contredire la renormalisabilité des champs de jauge non abéliens. Tous les fermions sont de spin  $\frac{1}{2}$  et forment 3 familles de quarks et leptons.

Les champs impliqués dans le modèle standard ont a priori un statut très différent de celui de la métrique  $g_{\mu\nu}$ . Le groupe de symétrie de ces champs, à savoir le groupe des transformations de jauge locales :

$$(1) \quad \mathcal{U} = C^\infty(M, U(1) \times SU(2) \times SU(3))$$

est a priori très différent du groupe  $\text{Diff}(M)$  de symétries de  $\mathcal{L}_E$ . Le groupe de symétrie naturel de  $\mathcal{L}$  est le produit semidirect  $\mathcal{U} \rtimes \text{Diff}(M) = G$ . La première question à résoudre si l'on veut donner une signification purement géométrique à  $\mathcal{L}$  est de trouver un espace géométrique  $X$  tel que  $G = \text{Diff}(X)$ . Ceci détermine, en tenant compte du relèvement des difféomorphismes aux spineurs, l'algèbre  $\mathcal{A}$  :

$$(2) \quad \mathcal{A} = C^\infty(M) \otimes \mathcal{A}_F, \quad \mathcal{A}_F = \mathbb{C} \oplus \mathbb{H} \oplus M_3(\mathbb{C}),$$

où l'algèbre involutive  $\mathcal{A}_F$  est la somme directe des algèbres  $\mathbb{C}, \mathbb{H}$  des quaternions et  $M_3(\mathbb{C})$  des matrices  $3 \times 3$  complexes.

L'algèbre  $\mathcal{A}_F$  correspond à un espace *fini* dont les fermions du modèle standard et les paramètres de Yukawa (masses des fermions et matrice de mélange de Kobayashi Maskawa) déterminent la géométrie spectrale de la manière suivante. L'espace de

Hilbert  $\mathcal{H}_F$  est de dimension finie et admet pour base la liste des fermions élémentaires. Par exemple pour la 1ère génération de leptons cette liste est

$$(3) \quad e_L, e_R, \nu_L, \bar{e}_L, \bar{e}_R, \bar{\nu}_L.$$

L'algèbre  $\mathcal{A}_F$  admet une représentation naturelle dans  $\mathcal{H}_F$  (cf. [Co3]) et en désignant par  $J_F$  l'unique involution antilinéaire qui échange  $f$  et  $\bar{f}$  pour tout vecteur de la base, on a la commutation

$$(4) \quad [a, Jb^*J^{-1}] = 0 \quad \forall a, b \in \mathcal{A}_F.$$

L'opérateur  $D_F$  est simplement donné par la matrice  $\begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & \bar{Y} \end{bmatrix}$  où  $Y$  est la matrice de couplage de Yukawa. De plus les propriétés particulières de  $Y$  assurent la commutation

$$(5) \quad [[D_F, a], b^0] = 0 \quad \forall a, b \in \mathcal{A}_F.$$

La  $\mathbb{Z}/2$  graduation naturelle de  $\mathcal{H}_F$  vaut 1 pour les fermions gauches ( $e_L, \nu_L \dots$ ) et  $-1$  pour les fermions droits ; on a

$$(6) \quad \gamma_F = \varepsilon \varepsilon^0 \text{ où } \varepsilon = (1, -1, 1) \in \mathcal{A}_F.$$

Nous renvoyons à [Co3] pour les vérifications des axiomes (1) – (7'). Le seul défaut est que le nombre de générations introduit une multiplicité dans la forme d'intersection,  $K_0(\mathcal{A}) \times K_0(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{Z}$ , donnée par un multiple entier de la matrice  $3 \times 3$

$$(7) \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous reviendrons à la fin de cet exposé sur la signification de la géométrie spectrale  $(\mathcal{A}_F, \mathcal{H}_F, D_F) = F$ .

Le pas suivant consiste à calculer les déformations intérieures (formule III.9) de la géométrie produit  $M \times F$  où  $M$  est une variété riemannienne spinorielle de dimension 4. Le calcul donne les bosons de jauge du modèle standard,  $\gamma, W^\pm, Z$ , les huit gluons et les champs de Higgs  $\varphi$  avec les bons nombres quantiques et montre que

$$(8) \quad \mathcal{L}_{\varphi f} + \mathcal{L}_f = \langle \psi, D\psi \rangle$$

où  $D = D_0 + A + JAJ^{-1}$  est la déformation intérieure de la géométrie produit (donnée par l'opérateur  $D_0 = \not{\partial} \otimes 1 + \gamma_5 \otimes D_F$ ).

La structure de produit de  $M \times F$  donne une bigraduation de  $\Omega_D^1$  et une décomposition  $A = A^{(1,0)} + A^{(0,1)}$  de  $A$  qui correspond à la décomposition (8). Le terme  $A^{(1,0)}$  rassemble tous les bosons de spin 1 et le terme  $A^{(0,1)}$  les bosons de Higgs qui apparaissent comme des termes de différence finie sur l'espace  $F$ . Cette bigraduation existe sur l'analogue  $\Omega_D^2$  des 2-formes ([Co]) et décompose la courbure  $\theta = dA + A^2$  en trois termes  $\theta = \theta^{(2,0)} + \theta^{(1,1)} + \theta^{(0,2)}$  2 à 2 orthogonaux pour le produit scalaire

$$(9) \quad \langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int \omega_1 \omega_2^* ds^4.$$

Ainsi l'action de Yang-Mills,  $\langle \theta, \theta \rangle = \int \theta^2 ds^4$  se décompose comme somme de 3 termes et on démontre que ces termes sont respectivement  $\mathcal{L}_G$ ,  $\mathcal{L}_{G\varphi}$  et  $\mathcal{L}_\varphi$  pour (2, 0), (1, 1) et (0, 2) respectivement [Co].

L'action de Yang-Mills  $\int \theta^2 ds^4$  utilise la décomposition  $D = D_0 + A + JAJ^{-1}$  et n'est donc pas, a priori, une fonction ne dépendant que de la géométrie définie par  $D$ . Nous avons vu en III.14 que, dans un cas plus simple, la combinaison  $\mathcal{L}_E + \mathcal{L}_G$  apparaît directement dans le développement asymptotique du nombre de valeurs propres de  $D$  inférieures à  $\Lambda$ . Le même principe (cf. [CC]) s'applique au modèle standard et conduit à la fonctionnelle suivante

$$(10) \quad \text{Trace} \left( \varpi \left( \frac{D}{\Lambda} \right) \right) + \langle \psi, D\psi \rangle$$

dont le développement asymptotique ([CC]) donne  $\mathcal{L}$  + un terme de gravité de Weyl et un terme en  $r\varphi^2$  qui est le seul terme que l'on peut rajouter à  $\mathcal{L}$  sans altérer le modèle standard. Nous renvoyons à [CC] pour l'interprétation physique de ces résultats.

La géométrie finie  $F$  ci-dessus était dictée par les résultats expérimentaux et il reste à en comprendre la signification conceptuelle à partir de l'analogie des groupes de Lie en géométrie non commutative, i.e. la théorie des groupes quantiques. Le fait simple (cf. [M]) est que le revêtement spinoriel Spin(4) de  $SO(4)$  n'est pas un revêtement maximal parmi les groupes quantiques. On a  $\text{Spin}(4) = SU(2) \times SU(2)$  et même le groupe  $SU(2)$  admet grâce aux résultats de Lusztig des revêtements finis de la forme (Frobenius à l'infini) :

$$(11) \quad 1 \rightarrow H \rightarrow SU(2)_q \rightarrow SU(2) \rightarrow 1,$$

où  $q$  est une racine de l'unité,  $q^m = 1$ ,  $m$  impair. Le cas le plus simple est  $m = 3$ ,  $q = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$ . Le groupe quantique fini  $H$  a une algèbre de Hopf de dimension

finie très voisine de  $\mathcal{A}_F$ , et la représentation spinorielle de  $H$  définit un bimodule sur cette algèbre de Hopf de structure très voisine du bimodule  $\mathcal{H}_F$  sur  $\mathcal{A}_F$ . Cela suggère d'étendre la géométrie spinorielle ([LM]) aux revêtements quantiques du groupe spinoriel, ce qui nécessite même pour parler de  $G$ -fibré principal, d'introduire un minimum de non commutativité (du style  $C^\infty(M) \otimes \mathcal{A}_F$ ) dans l'algèbre des fonctions.

Mentionnons enfin que nous avons négligé dans cet exposé la nuance importante entre les signatures riemanniennes et lorentziennes.

## RÉFÉRENCES

- [At] M.F. Atiyah - *K-theory and reality*, Quart. J. Math. Oxford (2), **17** (1966), 367–386.
- [B-G] R. Beals and P. Greiner - *Calculus on Heisenberg manifolds*, Annals of Math. Studies **119**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1988.
- [B] T.P. Branson - *An anomaly associated with 4-dimensional quantum gravity*, to appear in C.M.P.
- [B-O] T.P. Branson and B. Ørsted - *Explicit functional determinants in four dimensions*, Proc. Amer. Math. Soc. **113** (1991), 669–682.
- [B-W] A.R. Bernstein and F. Wattenberg - *Non standard measure theory*, in Applications of model theory to algebra analysis and probability, Edited by W.A.J. Luxemburg Halt, Rinehart and Winstin (1969).
- [C-J-G] A.H. Chamseddine, J. Fröhlich and O. Grandjean - *The gravitational sector in the Connes-Lott formulation of the Standard model*, J. Math. Phys. **36**, n° 11 (1995).
- [C-C] A. Chamseddine and A. Connes - *The spectral action principle*, to appear.
- [Co] A. Connes - *Noncommutative geometry*, Academic Press (1994).
- [Co1] A. Connes - *Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation*, Geometric methods in operator algebras, (Kyoto, 1983), pp. 52–144, Pitman Res. Notes in Math. **123**, Longman, Harlow (1986).
- [Co2] A. Connes - *Noncommutative geometry and reality*, Journal of Math. Physics **36**, n° 11 (1995).
- [Co3] A. Connes - *Gravity coupled with matter and the foundation of noncommutative geometry*, to appear in C.M.P.

- [Co-L] A. Connes and J. Lott - *Particle models and noncommutative geometry*, Nuclear Phys. B. **18B** (1990), suppl. 29–47 (1991).
- [C-M1] A. Connes and H. Moscovici - *Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups*, Topology **29** (1990), 345–388.
- [C-M2] A. Connes and H. Moscovici - *The local index formula in noncommutative geometry*, GAFA **5** (1995), 174–243.
- [C-M3] A. Connes and H. Moscovici - *Hypoelliptic Dirac operator, diffeomorphisms and the transverse fundamental class*.
- [Co-S] A. Connes and G. Skandalis - *The longitudinal index theorem for foliations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto **20** (1984), 1139–1183.
- [C-S-T] A. Connes, D. Sullivan and N. Teleman - *Quasiconformal mappings, operators on Hilbert space, and local formulae for characteristic classes*, Topology, Vol. 33, n° 4 (1994), 663–681.
- [D-T] T. Damour and J.H. Taylor - *Strong field tests of relativistic gravity and binary pulsars*, Physical Review D, Vol. 45, n° 6 (1992), 1840–1868.
- [Dx] J. Dixmier - *Existence de traces non normales*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B **262** (1966).
- [D-F-R] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J.E. Roberts - *Quantum structure of space time at the Planck scale and Quantum fields*, to appear in CMP.
- [F] J. Fröhlich - *The noncommutative geometry of two dimensional supersymmetric conformal field theory*, Preprint ETH (1994).
- [G-F] K. Gawedzki and J. Fröhlich - *Conformal Field theory and Geometry of Strings*, CRM Proceedings and Lecture Notes, Vol. 7 (1994), 57–97.
- [Gh] E. Ghys - *L'invariant de Godbillon–Vey*, Sémin. Bourbaki 1988/89, exposé 706, Astérisque **177–178**, S.M.F. (1989), 155–181.
- [Gi] P. Gilkey - *Invariance theory, the heat equation and the Atiyah–Singer index theorem*, Math. Lecture Ser. **11**, Publish or Perish, Wilmington, Del., 1984.
- [G] M. Gromov - *Carnot–Caratheodory spaces seen from within*, Preprint IHES/M/94/6.
- [G-K-P] H. Grosse, C. Klimcik and P. Presnajder - *On finite 4–dimensional quantum field theory in noncommutative geometry*, CERN Preprint TH/96 – 51 Net Hep-th/9602115.
- [H-S] M. Hilsaum, G. Skandalis - *Morphismes  $K$ -orientés d'espaces de feuilles et functorialité en théorie de Kasparov*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **20** (1987), 325–390.
- [I-K-S] B. Iochum, D. Kastler and T. Schücker - *Fuzzy mass relations for the Higgs*, J.

- Math. Phys. **36**, n° 11 (1995).
- [K-W] W. Kalau and M. Walze - *Gravity, noncommutative geometry and the Wodzicki residue*, J. of Geom. and Phys. **16** (1995), 327–344.
- [K] G. Kasparov - *The operator  $K$ -functor and extensions of  $C^*$ -algebras*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **44** (1980), 571–636.
- [Ka] C. Kassel - *Le résidu non commutatif*, Sémin. Bourbaki 1988/89, exposé 708, Astérisque **177-178**, S.M.F. (1989), 199–229.
- [Kas] D. Kastler - *The Dirac operator and gravitation*, Commun. Math. Phys. **166** (1995), 633–643.
- [Ki] R.C. Kirby - *Stable homeomorphisms and the annulus conjecture*, Ann. Math. **89** (1969), 575–582.
- [L-M] B. Lawson and M.L. Michelson - *Spin Geometry*, Princeton 1989.
- [M] Y. Manin - *Quantum groups and noncommutative geometry*, Centre Recherche Math. Univ. Montréal (1988).
- [Mi-S] J. Milnor and D. Stasheff - *Characteristic classes*, Ann. of Math. Stud. **76** Princeton University Press, Princeton, N.J. (1974).
- [P] S. Power - *Hankel operators on Hilbert space*, Res. Notes in Math. **64**, Pitman, Boston, Mass. (1982).
- [Ri1] M.A. Rieffel - *Morita equivalence for  $C^*$ -algebras and  $W^*$ -algebras*, J. Pure Appl. Algebra **5** (1974), 51–96.
- [Ri2] M.A. Rieffel -  *$C^*$ -algebras associated with irrational rotations*, Pacific J. Math. **93** (1981), 415–429 ; MR 83b:46087.
- [R] B. Riemann - *Mathematical Werke*, Dover, New York (1953).
- [St] E. Stein - *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1970).
- [Ste] J. Stern - *Le problème de la mesure*, Sémin. Bourbaki 1983/84, exposé 632, Astérisque **121-122** (1985), 325–346.
- [S1] D. Sullivan - *Hyperbolic geometry and homeomorphisms* in Geometric Topology, Proceed. Georgia Topology Conf. Athens, Georgia (1977), 543–555.
- [S2] D. Sullivan - *Geometric periodicity and the invariants of manifolds*, Lecture Notes in Math. **197**, Springer (1971).
- [Ta] M. Takesaki - *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*, Lecture Notes in Math. **128**, Springer (1970).
- [W] Weinberg - *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons, New York London (1972).

- [Wo] M. Wodzicki - *Noncommutative residue, Part I. Fundamentals K-theory, arithmetic and geometry*, Lecture Notes in Math., 1289, Springer-Berlin (1987).

Alain CONNES

Collège de France

3, rue d'Ulm

75005 PARIS

et

I.H.E.S.

35, route de Chartres

91440 BURES-sur-YVETTE

# *Astérisque*

IVAN KUPKA

## **Géométrie sous-riemannienne**

*Astérisque*, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 817, p. 351-380

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1995-1996\\_\\_38\\_\\_351\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__351_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## GÉOMÉTRIE SOUS-RIEMANNIENNE

par **Ivan KUPKA**

### INTRODUCTION

Les structures sous-riemanniennes (ou de Carnot–Caratheodory), notées SR dans la suite, ont été étudiées ou utilisées dans des domaines variés des mathématiques, en particulier en géométrie riemannienne, dans la théorie des opérateurs différentiels du second ordre, dans l'étude des équations différentielles stochastiques et de la diffusion, en mécanique des contraintes non-holonomes. Mais leur étude est aussi intéressante en elle-même.

La géométrie SR a déjà fait l'objet de divers travaux, mais la contribution la plus importante, de loin, à ce sujet est le long mémoire [Gr1] de Gromov, très riche en résultats et aperçus très intéressants et stimulants. Cependant, il est juste de dire que l'étude des structures SR est loin d'être achevée.

Bien que la géométrie riemannienne serve souvent de guide dans cette étude, ses résultats restent rarement vrais en géométrie SR et ses concepts ne sont pas toujours bien appropriés. Il y a deux différences radicales entre les deux géométries : ce sont le caractère anisotrope de la géométrie SR et sa nature non commutative, cette deuxième étant en partie conséquence de la première.

Pour conclure, je voudrais remercier ici A. Bellaïche et J.-J. Risler pour plusieurs discussions sur la géométrie SR, et plus particulièrement M. Gromov pour un entretien très intéressant et très illuminant.

### 0. PRÉLIMINAIRES

Dans cet exposé, on se placera dans la catégorie infiniment différentiable (ou  $C^\infty$ ) par souci de simplicité. En fait, la plupart des définitions ont un sens et la plupart des résultats sont valables dans les catégories analytiques réelles ou même analytiques

complexes, car on peut définir des structures “sous-hermitiques”. Nous laisserons au lecteur intéressé le soin de faire les modifications nécessaires, en général assez simples. Ceci ne nous empêchera pas, dans la suite de l'exposé, de faire des remarques relatives à la catégorie analytique réelle si elles présentent de l'intérêt.

Dans la suite, il sera commode d'utiliser les notations suivantes :

$M$  : variété  $C^\infty$  connexe, sauf mention du contraire.

$C_M$  : faisceau des fonctions  $C^\infty$  sur  $M$ ,  $C_{M,m}$  : fibre de  $C_M$  en  $m \in M$ .

$TM$  : son espace tangent,  $T_mM$  : sa fibre en  $m$ .

$T^*M$  : espace cotangent de  $M$ ,  $T_m^*M$  : sa fibre en  $m \in M$ .

$\pi_{TM} : TM \rightarrow M$ ,  $\pi_{T^*M} : T^*M \rightarrow M$  les projections canoniques.

Si  $E$  désigne un fibré  $C^\infty$  sur  $M$ ,  $\underline{E}$  désignera le faisceau des germes de sections  $C^\infty$  de  $E$ .

Si  $\mathcal{F}$  désigne  $\underline{E}$  ou un sous-faisceau de  $\underline{E}$ ,  $\mathcal{F}_m$  sera la fibre de  $\mathcal{F}$  en  $m \in M$  et  $\mathcal{F}[m] = \{e \in E \mid \text{il existe } \sigma \in \mathcal{F}_m \text{ telle que } \sigma(m) = e\}$ .

**Distributions** : un sous-fibré  $C^\infty$   $\mathcal{D}$  de  $TM$  sera appelé distribution et un sous-fibré  $C^\infty$   $\Delta$  de  $T^*M$ , codistribution. Si  $\mathcal{D}$  est une distribution sur  $M$ , désignons par  $\text{Lie}(\mathcal{D})$  le sous-faisceau d'algèbres de Lie de  $\underline{TM}$ , engendré par  $\underline{\mathcal{D}}$ .

Dans une algèbre de Lie, un élément sera appelé commutateur de degré  $n$  d'éléments d'un sous-ensemble de l'algèbre si c'est un monôme de Lie de degré  $n$  d'éléments de ce sous-ensemble et si  $n$  est minimal pour cette propriété.

On imposera à toutes les distributions considérées ici, sauf mention du contraire, la :

**Condition du rang** :  $\mathcal{D}$  satisfait la condition du rang si, pour tout  $m \in M$ ,  $\text{Lie}(\mathcal{D})[m] = T_mM$ .

Ces distributions sont l'extrême opposé des distributions intégrables.

*Remarque 0.*— Plus généralement, si  $\mathcal{F}$  est un sous-faisceau de  $C_M$ -modules de  $\underline{TM}$ , on dira que  $\mathcal{F}$  satisfait à la condition du rang si, en désignant par  $\text{Lie}(\mathcal{F})$  le sous-faisceau d'algèbres de Lie de  $\underline{TM}$  engendré par  $\mathcal{F}$ , on a en tout  $m \in M$  :

$$\text{Lie}(\mathcal{F})[m] = T_mM.$$

**Métrique riemannienne  $g$  sur une distribution  $\mathcal{D}$**  :  $g$  est une fonction  $C^\infty : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dont la restriction à toute fibre  $\mathcal{D}[m]$  est une forme quadratique positive définie.

## 1. LES STRUCTURES SR

**DÉFINITION 0.**— Une structure SR sur une variété  $M$  est un couple  $(\mathcal{D}, g)$  d'une distribution  $\mathcal{D}$  satisfaisant la condition du rang et d'une métrique riemannienne  $g$  sur  $\mathcal{D}$ .

*Remarque 1.*— Les données  $(\mathcal{D}, g)$  permettent de définir une cométrique  $g^*$  sur  $T^*M$ , c'est-à-dire une fonction  $C^\infty$   $g^* : TM \rightarrow \mathbb{R}$  dont la restriction à chaque fibre  $T_m^*M$  est une forme quadratique positive semi-définie : pour  $z \in T_m^*M$ ,  $g^*(z) = \max \left\{ \frac{\langle v, z \rangle^2}{g(v)} \mid v \in \mathcal{D}[m] - \{0\} \right\}$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est l'accouplement canonique  $TM \times_M T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ . La donnée de  $g^*$  permet de déterminer à la fois  $\mathcal{D}$  et  $g$  :  $\mathcal{D}$  est l'annulateur du noyau de  $g^*$  et, pour  $v \in \mathcal{D}[m]$ ,  $g(v) = \min \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \langle v, z \rangle^2 \leq \lambda g^*(z) \text{ pour tout } z \in T_m^*M \}$ .

*Remarque 2.*— La remarque précédente permet de généraliser la notion de structure SR : on se donne  $g^* : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  qui, sur chaque fibre de  $T^*M$ , est une forme quadratique positive semi-définie. En lui imposant la condition suivante : si  $\underline{\mathcal{D}}$  est le faisceau engendré par les champs de vecteurs  $V$  tels que, pour tout  $m$  du domaine de  $V$ , tout  $z \in T_m^*M$  tel que  $g^*(z) = 0$ , on a  $\langle V[m], z \rangle = 0$ , alors  $\underline{\mathcal{D}}$  satisfait la condition du rang.

$g^*$  définit une structure  $(\mathcal{D}, g)$  sur  $M$ .  $\mathcal{D}$  est un sous-ensemble de  $TM$ , mais n'est plus un sous-fibré, en général. Il est défini comme suit :  $\mathcal{D} = \cup_{m \in M} \mathcal{D}[m]$ ,  $\mathcal{D}[m] \subset T_mM$ ,  $\mathcal{D}[m] = \{v \mid \langle v, z \rangle = 0 \text{ pour tout } z \in T_m^*M, \text{ tel que } g^*(z) = 0\}$  et  $g$  est la fonction  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(v) = \min \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \langle v, z \rangle^2 \leq \lambda g^*(z) \text{ pour tout } z \in T_m^*M \}$ , si  $v \in \mathcal{D}[m]$ . Certains des résultats exposés dans la suite sont valables pour ces structures, en particulier le Lemme de Chow et le théorème 0.

La donnée de la métrique  $g$  ne nous permet pas, contrairement au cas riemannien, de définir la longueur d'une courbe quelconque (même  $C^\infty$ ). Pour cela, on introduit les :

**Courbes horizontales** : une courbe horizontale est une courbe absolument continue  $\varphi : I \rightarrow M$ ,  $I$  intervalle (non réduit à un point !) telle que, pour presque tout  $t \in I$ , le vecteur tangent  $\frac{T\varphi}{dt}(t)$  appartient à  $\mathcal{D}[\varphi(t)]$ .

**Longueur d'une courbe horizontale**  $\varphi : I \rightarrow M$  :  $\mathcal{L}(\varphi)$  désignera la valeur finie ou  $+\infty$  de l'intégrale :

$$\int_I \sqrt{g\left(\frac{T\varphi}{dt}(t)\right)} dt$$

(si  $I$  est compact, clairement  $\mathcal{L}(\varphi) < +\infty$ ).

**Énergie d'une courbe horizontale :**  $\mathcal{E}(\varphi)$  désigne la valeur finie ou  $+\infty$  de l'intégrale :

$$\frac{1}{2} \int_I g \left( \frac{T\varphi}{dt}(t) \right) dt.$$

Pour ces notions, introduites dans ce contexte par Gaveau, voir [Gal].

Le lemme suivant, dit Lemme de Chow, est d'une importance capitale pour la suite.

**LEMME DE CHOW.**— *Si  $(\mathcal{D}, g)$  est une structure SR, pour tout couple ordonné  $(x, y)$  de points de  $M$ , il existe une courbe horizontale  $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$  telle que  $\varphi(0) = x$ ,  $\varphi(1) = y$ .*

La preuve est facile (voir [Hö], [Mi], [N-S-W]).

*Remarque 3.*— Ce lemme, qui ne dépend pas de la métrique  $g$ , reste vrai pour les structures SR généralisées au sens de la remarque 2. Une courbe horizontale est une application absolument continue  $\varphi : I \rightarrow M$ ,  $I$  intervalle, telle que, pour presque tout  $t \in I$ ,  $\frac{T\varphi(t)}{dt} \in \mathcal{D}[\varphi(t)]$ .

## 2. EXEMPLES DE STRUCTURES SR

A) *Le modèle Heisenberg :*  $\mathbb{R}^{2n+1}$  possède une structure de groupe naturelle  $H_n$  : si  $(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, z)$  désignent les coordonnées canoniques sur  $\mathbb{R}^{2n+1}$  :

$$\begin{aligned} (x'_1 \cdots x_n, y'_1 \cdots y_n, z) \bullet (x'_1, \cdots, x'_n, y'_1, \cdots, y'_n, z') = \\ (x_1 + x'_1, \cdots, y_n + y'_n, z + z' + \sum_{i=1}^n (x_i y'_i - x'_i y_i)). \end{aligned}$$

$\mathcal{D}$  sera la distribution invariante à gauche sur  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , noyau de  $dz$  en 0 et  $g$  la métrique invariante à gauche sur  $\mathcal{D}$  dont la valeur en 0 est  $\sum_{i=1}^n (dx_i^2 + dy_i^2)$ .

B) *Structures invariantes :*  $M$  est un groupe de Lie,  $\mathcal{D}$  une distribution invariante à gauche dont la valeur  $\mathcal{D}_1$  à l'origine engendre l'algèbre de Lie de  $G$ ,  $g$  une métrique invariante à gauche sur  $\mathcal{D}$ . On pourrait aussi considérer les actions à droite.

Un cas particulier très important est le suivant :  $M$  est le groupe nilpotent simplement connexe d'une algèbre de Lie graduée  $n = \bigoplus_{k=-1}^{\ell} n_k$ ,  $\ell$  entier négatif,

engendrée par  $n_{-1}$ ,  $\mathcal{D}$  la distribution invariante à gauche dont la valeur en l'unité de  $G$  est  $n_{-1}$ .

C) *Fibrés principaux* : soit  $V$  une variété munie d'une métrique riemannienne  $g_V$ . Le fibré des repères orthonormaux de  $(V, g_V)$  supporte une distribution naturelle : la distribution horizontale définie par la connexion de Levi-Civita de  $(V, g_V)$ . Cette distribution vient munie d'une métrique riemannienne naturelle  $g$ , celle qu'on obtient en relevant  $g_V$ . Il n'est pas toujours vrai que  $\mathcal{D}$  satisfait la condition du rang (considérer le cas d'une métrique  $g_V$  plate) ; mais génériquement il en sera ainsi. Cet exemple justifie l'emploi du qualificatif "horizontal" en géométrie SR.

D) *Structures de contact* : ce sont les structures SR telle que  $\mathcal{D}$  est une distribution de contact.

### 3. LA STRUCTURE MÉTRIQUE DES ESPACES SR

Étant donnée une structure SR  $(M, \mathcal{D}, g)$ , le Lemme de Chow nous permet de définir une fonction distance  $d$  sur  $M$ . Si  $(x, y) \in M \times M$  :

$$d(x, y) = \min \{ \mathcal{L}(\varphi) \mid \varphi : [a, b] \rightarrow M \text{ horizontale, } \varphi(a) = x, \varphi(b) = y \}.$$

Ceci est bien un nombre d'après le Lemme de Chow. Il est clair que  $d$  satisfait tous les axiomes d'une distance sauf peut-être le fait que  $d(x, y) > 0$  si  $x \neq y$ . Ceci est bien vrai et on peut prouver le résultat plus fort suivant :

tout point  $m \in M$  possède un voisinage ouvert  $V$  relativement compact et une métrique riemannienne  $G$  sur  $V$  telle que, pour tous  $(x, y) \in V \times V$ ,  $d(x, y) \geq d_G(x, y)$  ( $d_G =$  métrique définie par  $G$ ). On obtient alors le théorème fondamental :

**THÉORÈME 0.**— *Une structure SR sur une variété  $M$  définit une métrique sur  $M$  qui induit la topologie originale de  $M$ . En particulier,  $M$  est paracompacte.*

*Remarque 4.*— i) Le théorème 0 est valable pour les structures SR généralisées de la remarque 2 ;

ii) dans [C-K-S], les auteurs démontrent, du moins dans le cas où  $M$  est un espace euclidien  $\mathbb{R}^d$  et  $g^*$  est bornée, que pour  $x, y \in M$  :

$$d(x, y) = \sup \{ |\varphi(x) - \varphi(y)| \mid \varphi \in C^\infty(M), g^*(d\varphi) \leq 1, \varphi \text{ à support compact} \}.$$

La métrique  $d$ , en apparence analogue à celle définie par une métrique riemannienne, a un comportement très différent. Par exemple, dans le cas riemannien, il

existe un voisinage ouvert de la diagonale  $\Delta_M$  de  $M \times M$  sur lequel la fonction distance est  $C^\infty$ . Ceci est faux en général dans le cas sous-riemannien.

Puisque  $M$  est paracompacte, elle possède des métriques riemanniennes. Les fonctions distances définies par celles-ci sont toujours équivalentes (sur tout compact de  $M$ !), mais elles ne sont pas équivalentes à la distance sous-riemannienne  $d$ . Plutôt, on peut montrer assez facilement (voir [Gr1]) le résultat suivant :

**PROPOSITION 0.**— *Soit  $K$  un compact de  $M$ . Désignons par  $r$  le minimum des entiers  $n$  tels que les valeurs en  $m$  des commutateurs de degré  $\leq n$  des germes de  $\underline{\mathcal{D}}_m$  engendrent  $T_m M$  pour tout  $m \in K$ . Alors pour toute métrique riemannienne  $G$  sur  $M$ , il existe une constante  $C(K, G) > 0$ , telle que :*

$$d(x, y) \leq C(K, G)(d_G(x, y))^{\frac{1}{r}} \quad \text{pour tous } (x, y) \in K \times K.$$

Il est clair que cette estimée n'est intéressante que pour les petites valeurs de  $d_G(x, y)$ .

**Hopf–Rinow** : notons que le théorème classique de Hopf–Rinow est vrai pour les structures SR.

**Problème ouvert** : un problème intéressant ouvert (voir [Gr1], [Ha]) est de décider si la connaissance de l'espace métrique  $(M, d)$  permet de retrouver la structure tangente de  $M$ , la distribution  $\mathcal{D}$  et la métrique  $g$ .

#### 4. STRUCTURE DIFFÉRENTIELLE D'UNE STRUCTURE SR

Le rôle d'une structure tangente est de servir d'approximation (infinitésimale) à la structure de variété. Il est clair que la structure tangente classique ne remplit pas ce rôle vis-à-vis de la structure SR, car elle ne fait même pas intervenir celle-ci. Il faut donc redéfinir la notion de plan tangent. C'est ce que nous ferons dans ce paragraphe et, par là même, nous construirons les bases d'un calcul différentiel adapté aux structures SR. Le concept de plan tangent est lié à la notion de multiplicité d'une fonction en un point. Commençons par redéfinir celle-ci :

**DÉFINITION 1.**— *Si  $m \in M$  et  $f$  est un germe de fonction en  $\mathcal{M}$ , la multiplicité  $\mu(f)$  est le nombre entier ou nul suivant :*

$$\mu(f) = \min \{ n \mid \text{il existe } V_1, \dots, V_n \in \underline{\mathcal{D}}_m \text{ (répétitions permises)} \\ \text{tel que } (\theta(V_1) \cdots \theta(V_n)f)(m) \neq 0 \}.$$

$\theta(V)$  désigne la dérivation de Lie associée à  $V$ .

Si  $f(m) \neq 0$ ,  $\mu(f) = 0$ .  $\mu(0) = +\infty$ .

La différence avec la définition classique est que, dans celle-ci, on prend les  $V_1, \dots, V_n$  dans  $\underline{TM}_m$  tout entier. Donc la multiplicité SR est au moins égale à la multiplicité classique.  $\mu$  a les propriétés bien connues d'une valuation sur  $C_{M,m}$  :

(i)  $\mu(f + g) \geq \min(\mu(f), \mu(g))$  ; (ii)  $\mu(\lambda f) = \mu(f)$  si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  ; (iii)  $\mu(fg) = \mu(f) + \mu(g)$  (ceci n'est pas tout à fait trivial).

À partir de là, on peut définir la multiplicité d'un germe  $V$  de champ de vecteurs en  $m$  : le nombre  $\mu(V)$  est un entier de  $\mathbb{Z}$  :

$$\mu(V) = \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid \text{pour toute } f \in C_{M,m}, \mu(\theta(V)f) \geq \mu(f) + n \}$$

$$\mu(0) = +\infty.$$

On peut étendre cette définition aux opérateurs différentiels.  $\mu$  possède les propriétés classiques :

(i)  $\mu(V + W) \geq \min(\mu(V), \mu(W))$  ;

(ii)  $\mu(fV) = \mu(f) + \mu(V)$  si  $f \in C_{M,m}$  ;

(iii)  $\mu([V, W]) \geq \mu(V) + \mu(W)$  (en général, on n'a pas égalité : il suffit de prendre deux champs  $V, W$  qui commutent).

*Exemple.*— Heisenberg  $H_1$  :  $\mu(x) = \mu(y) = 1$ ,  $\mu(z) = 2$ ,  $\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -1$ ,  $\mu\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = -2$ .

$\mu$  définit une filtration sur l'algèbre de Lie,  $\text{Lie}(\underline{\mathcal{D}}_m)$ . Le gradué associé  $Gr(\underline{\mathcal{D}}_m)$  est une algèbre de Lie graduée : si  $v \in gr_p \mathcal{D}_m$  et  $w \in gr_q(\underline{\mathcal{D}}_m)$ , prenons  $V \in v$ ,  $W \in w$ . D'après les propriétés de  $\mu$ ,  $\mu([V, W]) \geq \mu(V) + \mu(W)$ . Si  $\mu([V, W]) > \mu(V) + \mu(W)$ , alors  $[v, w] = 0$ . Si  $\mu([V, W]) = \mu(V) + \mu(W)$ ,  $[v, w]$  est égale à la classe de  $[V, W]$  dans  $gr_{p+q}(\underline{\mathcal{D}}_m)$ .  $gr(\underline{\mathcal{D}}_m)$  est la somme directe  $\hat{\eta}_- \oplus \hat{\eta}_0 \oplus \hat{\eta}_+$  où  $\hat{\eta}_-$  (resp.  $\hat{\eta}_0, \hat{\eta}_+$ ) est la somme des facteurs de degré  $\leq -1$  (resp.  $0, \geq 1$ ). Chaque  $\hat{\eta}_-, \hat{\eta}_0, \hat{\eta}_+$  est une sous-algèbre de Lie de  $gr(\underline{\mathcal{D}}_m)$ .  $\hat{\eta}_-$  est une algèbre graduée nilpotente de dimension finie.  $\hat{\eta}_- = \oplus_{k \geq 1} \hat{\eta}_{-k}$ .

Il existe une application linéaire canonique  $\delta_m : \mathcal{D}[m] \rightarrow \hat{\eta}_{-1}$  définie comme suit : si  $v \in \mathcal{D}[m]$ , soit  $V \in \mathcal{D}_m$  tel que  $V(m) = v$ . Alors  $\delta_m(v)$  est la classe de  $V$  dans  $\hat{\eta}_{-1}$ . On peut montrer facilement que cette classe est indépendante du choix de  $V$ .  $\delta_m$  est injective, mais n'est pas surjective en général. Désignons par  $\eta_{-1} \subset \hat{\eta}_{-1}$  l'image de  $\delta_m$  dans  $\hat{\eta}_{-1}$  et par  $\eta_{(m)}$  la sous-algèbre de Lie de  $\hat{\eta}$ , engendrée par  $\eta_{-1}$ .  $\eta_{(m)}$  est une algèbre de Lie graduée, nilpotente de dimension finie :  $\eta_{(m)} = \oplus_{k \geq 1} \eta_{-k}$ .  $\eta_{(m)}$  est appelée algèbre de Lie tangente à la structure  $(\mathcal{D}, g)$  en  $m$ .

Désignons par  $N_{(m)}$  le groupe nilpotent simplement connexe engendré par  $\eta_{(m)}$ . On met dessus la structure SR  $(\Delta_{(m)}, \gamma_{(m)})$  invariante à gauche définie comme suit :  $\Delta_{(m)}$  en l'élément neutre de  $N_{(m)}$  coïncide avec l'espace  $\eta_{-1}$  et  $\gamma_{(m)}$  est la métrique induite de  $g$  par  $\delta_m$ .  $(N_{(m)}, \Delta_{(m)}, \gamma_{(m)})$  est la structure tangente en  $m$  à  $(M, \mathcal{D}, g)$ , du moins en les points réguliers. Pour montrer cela, on va réaliser l'algèbre  $\eta_{(m)}$  comme algèbre de champs de vecteurs dans un voisinage de  $m$  dans  $M$ . Mais d'abord, il nous faut définir les points réguliers.

**Cas d'un espace riemannien :** dans ce cas,  $\mathcal{D} = TM$ . On voit facilement qu'alors  $\widehat{\eta}_- = \widehat{\eta}_{-1} = \eta_{-1} = \eta_{(m)} = T_m M$  avec sa structure d'algèbre de Lie commutative.  $N_{(m)}$  est le groupe abélien  $T_m M$ ,  $\Delta_{(m)} = T_m M$  et  $\gamma_m$  est la restriction de  $g$  à  $T_m M$ .

**Drapeau d'une structure SR  $(\mathcal{D}, g)$  en un point  $m \in M$  :** On définit par induction sur l'entier  $n$  une suite de sous-faisceaux de  $C_M$ -modules de  $\text{Lie}(\underline{\mathcal{D}})$  :  $\underline{\mathcal{D}}^1 = \underline{\mathcal{D}}$  et, pour  $n \geq 2$ ,  $\underline{\mathcal{D}}^n$  est le sous-faisceau engendré par  $\underline{\mathcal{D}}^{(n-1)}$  et  $[\underline{\mathcal{D}}, \underline{\mathcal{D}}^{(n-1)}]$ , où  $[\underline{\mathcal{D}}, \underline{\mathcal{D}}^{(n-1)}]_m = \{[V, W] \mid V \in \underline{\mathcal{D}}_m, W \in \underline{\mathcal{D}}_m^{(n-1)}\}$ . Le drapeau de  $(\mathcal{D}, g)$  en  $m$  est la suite non-décroissante de sous-espaces de  $T_m M$  :  $\underline{\mathcal{D}}^1[m] = \underline{\mathcal{D}}[m] \subset \underline{\mathcal{D}}^2[m] \subset \dots \subset \underline{\mathcal{D}}^n[m] \subset \dots$ . La condition du rang implique qu'il existe un entier  $r$  tel que  $\underline{\mathcal{D}}^r[m] = T_m M$ .

**DÉFINITION 2.**— Points réguliers, points singuliers. *Un point  $\bar{m} \in M$  est dit régulier si toutes les fonctions  $m \in M \rightarrow \dim \mathcal{D}^k[m]$  sont constantes au voisinage de  $\bar{m}$ . Un point non régulier est dit singulier. Une structure SR sur  $M$  est dite régulière si tous les points de  $M$  sont réguliers.*

*Remarque 5.*— i) Toutes les fonctions  $m \in M \rightarrow \dim \mathcal{D}^n[m]$  sont semi-continues inférieurement. Il résulte de là que l'ensemble des points réguliers d'une structure SR est un ouvert partout dense de  $M$ .

ii) Si la structure est régulière, les  $\mathcal{D}^n[m]$ ,  $m \in M$  sont les fibres d'un sous-fibré vectoriel  $\mathcal{D}^n$  de  $TM$ .

### Réalisation de $\eta_{(m)}$ comme algèbre de champs de vecteurs locaux sur $M$

Pour faire cette réalisation, nous avons besoin de coordonnées spéciales, dites privilégiées.

**DÉFINITION 3.**— Fonction privilégiée : *un germe de fonction  $f \in C_{M,m}$  sera dit privilégié si  $\mu(f) = \min \{k \mid df_m(\mathcal{D}^k[m]) \neq 0\}$ .*

Un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^d) : U \rightarrow \mathbb{R}$  de  $M$  défini dans un voisinage ouvert  $U$  de  $m$  est dit privilégié en  $m$  si toutes les  $x^i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , sont privilégiées en  $m$ .

Un système de coordonnées privilégiées  $(x^1, \dots, x^d)$ , sur un voisinage  $U$  de  $m$ , permet de réaliser la filtration  $\mu$  de  $\text{Lie}(\underline{\mathcal{D}})_m$  par une graduation : dans celle-ci, le poids de  $x^i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , est  $\mu(x^i)$ . Chaque  $V \in \text{Lie}(\underline{\mathcal{D}})_m$  possède un développement formel  $V \sim \sum \{V_n \mid n \geq \mu(V)\}$ , où chaque  $V_n$  est un champ homogène de degré  $n$  :  $V_n = \sum_{i=1}^d P^i(x^1, \dots, x^d) \frac{\partial}{\partial x^i}$ .  $P^i(x^1, \dots, x^d)$  est un polynôme en les  $x^1, \dots, x^d$ , homogène de degré  $n + \mu(x^i)$ .

Le champ de vecteur  $V_{\mu(V)}$ , partie initiale de  $V$ , sera désigné par  $\text{in}(V)$ . Il est indépendant du choix des coordonnées privilégiées en  $m$ . L'application  $T\rho : \eta_{(m)} \rightarrow \text{Lie}(\underline{\mathcal{D}})(U)$ ,  $T\rho(v) = \text{in}(V)$  pour un représentant  $V$  de  $v$ , est bien définie et est un homomorphisme de l'algèbre  $\eta_{(m)}$  dans  $\text{Lie}(\underline{\mathcal{D}})(U)$ . L'application linéaire  $v \in \eta_{-1} \rightarrow T\rho(v)(m)$  envoie  $\eta_{-1}$  sur  $\mathcal{D}[m]$  et coïncide avec  $\delta_m^{-1}$ .

Comme  $N_{(m)}$  est simplement connexe,  $T\rho$  s'intègre et définit un germe d'action  $\rho$  de  $N_{(m)}$  sur  $M$  en  $m$ . Cette action permet de comparer les structures SR  $(M, \mathcal{D}, g)$  et  $(N_{(m)}, \Delta_{(m)}, \gamma_{(m)})$  aux points respectifs  $m$  et  $1$ .

À partir de ces considérations, on peut démontrer le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.**— *Si  $m$  est régulier, la limite de Gromov, quand  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ , des espaces métriques pointés  $(M, \lambda d, m)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $d$  la métrique associée à la structure  $(\mathcal{D}, g)$ , est l'espace métrique pointé  $(N_{(m)}, \hat{d}, 1)$ , où  $\hat{d}$  est la métrique associée à la structure  $(\Delta_{(m)}, \gamma_{(m)})$ .*

Pour la preuve, voir [Gr1], [Bell], [Me], [Mi]. Les deux premiers articles cités contiennent des résultats très précis sur la comparaison des métriques  $d, \hat{d}$ .

Ce théorème justifie les assertions que, dans le cas régulier, le "plan tangent" en  $m$  à la structure SR,  $(\mathcal{D}, g)$ , est la structure SR  $(N_{(m)}, \Delta_{(m)}, \gamma_{(m)})$ . Contrairement à ce qui se passe dans le cas riemannien où le groupe tangent  $T_m M$  est abélien, ici l'espace tangent  $N_{(m)}$  ne l'est plus. Ceci justifie déjà nos remarques sur le caractère non abélien de la géométrie SR.

Le cas d'un point singulier est plus compliqué. Il a été discuté par Bellaïche dans [Bell]. Dans ce cas, contrairement à ce qui se passe dans le cas régulier,  $T\rho$  n'est plus injective et l'espace tangent est le quotient de  $N_{(m)}$  par le sous-groupe engendré par le noyau de  $T\rho$ .

Dans la suite, on utilisera les notations suivantes :

**Nombre  $h(m)$**  : l'entier  $h(m) = \sum_{k \geq 1} k \dim \{\mathcal{D}^k[m]/[\mathcal{D}^{k-1}[m]]\}$  ( $\mathcal{D}^0[m] = 0$ ) est un invariant important. Au voisinage d'un point régulier, il est constant.

*Exemple* : dans le cas de Heisenberg  $H_1$ ,  $h(m) = 4$  pour tout  $m \in \mathbb{R}^3$ .

**Champ de générateurs adaptés.** Une suite  $(e_1, \dots, e_p)$  de champs de vecteurs sur  $M$  est appelé champ de générateurs adaptés à la structure SR  $(\mathcal{D}, g)$  si :

- 1) pour tout  $m$ ,  $(e_1(m), \dots, e_p(m))$  engendrent  $T_m M$  et  $(e_1(m), \dots, e_q(m))$  engendrent  $\mathcal{D}[m]$  ;
- 2) chaque  $e_j$ ,  $q + 1 \leq j \leq p$  est un commutateur de degré  $\delta_j$  de  $(e_1, \dots, e_q)$  ;
- 3) pour tous  $i, j$ ,  $1 \leq i < j \leq p$ , il existe des fonctions  $a_{ij}^k$ ,  $1 \leq k \leq p$  telles que  $[e_i, e_j] = \sum_{1 \leq k \leq p} a_{ij}^k e_k$  et  $a_{ij}^k = 0$  si  $\delta_k > \delta_i + \delta_j$ .

**Boîtes de côté  $\lambda$**  : soit  $(e_1, \dots, e_p)$  un champ de générateurs adaptés sur  $M$ . Une boîte de centre  $m$  et de côté  $\lambda$  associée à un champ de générateurs adaptés  $(e_1, \dots, e_p)$  est l'ensemble :

$$\text{Box}_m[\lambda] = \left\{ \exp\left(\sum_{i=1}^p t^i e_i\right) \mid t^1, \dots, t^p \in \mathbb{R}, |t^j| \leq \lambda^{\delta_j}, 1 \leq j \leq p \right\}.$$

Pour  $\lambda$  assez petit, cet ensemble est bien défini.

## 5. DIMENSION DE HAUSDORFF. BOULES SOUS-RIEMANNIENNES

Un invariant fondamental d'un espace topologique est sa dimension au sens de Hurewicz–Wallman. Pour une structure métrique, plus riche, on peut raisonnablement défendre la thèse que l'invariant analogue adapté à cette structure est la dimension de Hausdorff (voir [Ma] pour cette notion). En effet, c'est ce nombre qui permet d'identifier les différentes mesures : longueur, aire, volume, etc. Dans la géométrie riemannienne classique, pour des ensembles pas trop tératologiques, les notions de dimension topologique et dimension de Hausdorff coïncident. Il n'en est plus de même en géométrie SR.

Pour étudier la dimension de Hausdorff, on a besoin de bonnes estimées des boules SR. Celles-ci sont données par le théorème suivant de Nagel, Stein et Wainger, très utile dans un grand nombre de questions :

**THÉORÈME DE LA BOULE-BOÎTE 2.**— Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  un champ de générateurs adaptés pour la structure SR  $(\mathcal{D}, g)$  sur  $M$ . Il existe deux fonctions positives, conti-

nues,  $C, r : M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  telles que, pour tout  $m \in M$  :

$$\text{Box}_m[C(m)^{-1}\rho] \subset B(m, \rho) \subset \text{Box}_m[C(m)\rho],$$

si  $\rho \leq r(m)$ , où  $B(m, \rho)$  est la boule SR de centre  $m$  et de rayon  $\rho$  et  $\text{Box}_m[\lambda]$  est la boîte en  $m$  de côté  $\lambda$  construite sur le champ  $(e_1, \dots, e_p)$ .

Pour la preuve, voir [Gr1], [H-Le], [Mi], [N-S-W].

Une jolie conséquence de ce théorème est le corollaire suivant, très utile dans les applications :

**COROLLAIRE.**— *Choisissons un élément de volume sur  $M$ . Pour tout compact  $K$  de  $M$ , il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $m \in K$ , tout nombre réel positif  $\rho$  tel que  $B(m, 2\rho) \subset K$  :*

$$\text{vol } B(m, 2\rho) \leq C \text{ vol } B(m, \rho).$$

Ce lemme permet d'estimer commodément les dimensions de Hausdorff : on remplace les boules SR par des boîtes. Par exemple, soit  $m \in M$  un point régulier. On peut alors choisir un champ de repères  $(e_1, \dots, e_d)$  adapté sur un voisinage  $V$  de  $m$ , c'est-à-dire un champ de générateurs adapté ayant un nombre de champs égal à la dimension de  $M$ . Les boîtes associées au champ  $(e_1, \dots, e_d)$  donnent le résultat suivant :

$$\dim_{\text{Hau}, m} M = h(m).$$

Si la structure SR sur  $M$  est régulière,  $M$  a la même dimension en tous ses points et  $\dim_{\text{Hau}} M$  est la valeur constante de  $h(m)$ . En général, pour une structure non nécessairement régulière :

$$\dim_{\text{Hau}} M \leq \sup \{h(m) \mid m \in M\}.$$

On obtient des estimées analogues pour les sous-variétés lisses de  $M$  (voir [Gr1]).

Le cas d'un sous-ensemble compact  $K \subset M$ , de dimension topologique  $\geq \dim M - 1$ , est plus intéressant et plus difficile. Gromov, dans [Gr1], montre que :  $\dim_{\text{Hau}} K \geq \dim_{\text{Hau}} M - 1$  en supposant  $(\mathcal{D}, g)$  régulière.

Il choisit un ouvert  $U$  de  $M$  muni d'une projection  $\pi$  de  $U$  sur une variété  $U'$  de dimension  $\dim M - 1$  telle que  $\pi(K \cap U) = U'$  et que les fibres de  $\pi$  sont des courbes horizontales. En utilisant, pour calculer les dimensions de Hausdorff, des

boîtes construites sur un champ de repères dont un des vecteurs est tangent aux fibres de  $\pi$ , on obtient facilement le résultat.

Ce dernier résultat peut être généralisé dans le cas des structures de contact aux sous-ensembles compacts  $K$  de  $M$  de dimension topologique  $k \geq \frac{\dim M + 1}{2}$ . Gromov utilise la même méthode que dans le cas de la codimension 1, mais impose aux fibres de  $\pi$  d'être de dimension  $\dim M - k$  et horizontales : une sous-variété  $V$  de  $M$  est dite horizontale si  $T_m V \subset \mathcal{D}[m]$  pour tout  $m \in V$ . Pour être sûr qu'il existe assez de sous-variétés horizontales de dimension  $\dim M - k$ , on impose à la structure d'être de contact.

On obtient le résultat :

**PROPOSITION 1.**— *Si la structure SR est de contact et si  $K$  est un sous-ensemble compact de  $M$  de dimension topologique au moins égale à  $\frac{\dim M + 1}{2}$ , alors  $\dim_{\text{Haus}} K \geq \frac{\dim M + 3}{2}$ .*

### Inégalités isopérimétriques et de Sobolev

Une fois connue la dimension de Hausdorff, on peut espérer retrouver les inégalités isopérimétriques et de Sobolev de la théorie classique. C'est bien le cas.

Notons d'abord qu'il résulte du théorème de la boule-boîte que, pour une structure SR régulière sur  $M$  de dimension de Hausdorff  $N$ , la mesure de Hausdorff de dimension  $N$  notée  $\text{mes}_N$  est équivalente à la mesure de Lebesgue sur  $M$  définie pour n'importe quelle forme volume lisse sur  $M$ .

**Inégalité isopérimétrique :** soit  $M$  une variété compacte connexe munie d'une structure SR  $(D, g)$  régulière. Pour tout domaine  $D$  de  $M$  dont la frontière est une hypersurface  $H$  et tel que  $\text{mes}_N D \leq \frac{1}{2} \text{mes}_N M$  :

$$\text{mes}_{N-1} H \geq C(\text{mes}_N D)^{\frac{N-1}{N}},$$

où  $\text{mes}_{N-1}$  dénote la mesure de Hausdorff de dimension  $N - 1$  (mesure déterminée par les boules SR évidemment).  $C$  est une constante indépendante de  $D$ . Pour plus de détails, voir [Gr1], [Va1].

Gromov démontre cette inégalité au moyen d'un résultat du type Lemme de Vitali. Plus précisément, en utilisant le corollaire du théorème de la boule-boîte, il recouvre (Lemme de Vitali)  $D$  par des boules  $B_i$  de rayon  $R_i$ ,  $1 \leq i \leq v$  disjointes, telles que les boules concentriques  $B'_i$  de rayon  $\lambda R_i$  sont aussi disjointes et :

1)  $\sum_{i=1}^v \text{mes}(B_i \cap D) \geq \delta \text{mes} D$  ; 2)  $\text{mes}(B_i \cap D) \geq \delta \text{mes} B_i$  ; 3)  $\text{mes}(D \cap B'_i) \leq \frac{1}{2} \text{mes} B_i$ ,  $1 \leq i \leq v$  ; 4)  $\text{mes}(D \cap B_i) \leq R_i \Gamma \text{mes}_{N-1}(H \cap B'_i)$ ,  $1 \leq i \leq v$ .  $\lambda$  est un nombre  $> 1$  et  $\Gamma$  un nombre  $> 0$  appropriés. Le résultat se déduit facilement de là.

Il est bien connu (voir [B-Z]) que, des inégalités isopérimétriques, on peut déduire les inégalités de Sobolev. Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction supposée de classe  $C^1$  pour simplifier. Appelons  $d_{\mathcal{D}}f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  la restriction de la différentielle  $df : TM \rightarrow \mathbb{R}$  à  $\mathcal{D}$ . En tout point  $m$  de  $M$ ,  $d_{\mathcal{D}}f(m)$  appartient au dual  $\mathcal{D}^*[m]$  de  $\mathcal{D}[m]$  qui est isomorphe à  $T_m^*M/\mathcal{D}^0[m]$ , où  $\mathcal{D}^0[m]$  est l'annulateur de  $\mathcal{D}[m]$ . On peut donc mesurer  $d_{\mathcal{D}}f$  en utilisant la cométrie  $g^*$ . Soit  $\langle d_{\mathcal{D}}f \rangle_{g^*}$  la fonction norme de  $d_{\mathcal{D}}f$  pour  $g^*$ .

Pour une application  $C^1 f : M \rightarrow V$ , variété riemannienne, on dénote par  $\langle d_{\mathcal{D}}f(m) \rangle$  la norme de l'application  $df(m) : \mathcal{D}[m] \rightarrow T_{f(m)}V$  pour les métriques données sur  $\mathcal{D}[m]$  et  $T_mV$ .

**Inégalité de Sobolev :** choisissons une forme volume sur  $M$ . Pour une fonction  $C^1 f :$

$$\|f\|_{L^{p^*}} \leq C_p \|\langle d_{\mathcal{D}}f \rangle_g\|_{L^p}, \quad \text{où } 1 \leq p < N \text{ et } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

$C_p$  est une constante dépendant de la structure SR, de la forme volume et de  $p$ .

Pour tout ceci, voir [Gr1], [Ste].

On a aussi le théorème de compacité de Rellich : *si la structure est régulière,  $M$  est compacte et  $V$  est une variété riemannienne compacte, pour tout  $\varepsilon > 0$ , toute constante  $C > 0$ , l'espace des applications  $C^1 f : M \rightarrow V$  telles que  $\|\langle d_{\mathcal{D}}f \rangle\|_{L^{N+\varepsilon}} < C$  est contenu dans l'espace  $C^\eta(M, V)$  des applications  $f : M \rightarrow V$  Hölder continues d'exposant  $\eta = \varepsilon/N + \varepsilon$  et est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme.*

## 6. COMPARAISON DES STRUCTURES SR

Tout d'abord, notons le fait évident qu'étant données deux structures SR, il existe rarement des morphismes (au sens des catégories) de l'une dans l'autre. Mais même des applications vérifiant des conditions beaucoup plus faibles n'existent pas toujours. Gromov prouve, dans le cas d'une structure SR de contact sur  $M$ , la :

**PROPOSITION 2.**— *Si un plongement  $h : \mathbb{R}^k \rightarrow M$  est continu au sens de Hölder, d'exposant  $\alpha$ , et si  $k > \frac{\dim M + 1}{2}$ , alors  $\alpha \leq \frac{\dim M + 1}{\dim M + 3}$ .*

Ceci est une conséquence facile de la Proposition 1 du §5 et du résultat élémentaire sur le comportement des dimensions de Hausdorff sous l'action des homéomorphismes Hölder-continus (voir [Ma]).

Pour comparer des structures métriques, la notion la plus adaptée est celle d'application lipschitzienne. Or le fait remarquable ici est qu'une application différentiable  $f : V \rightarrow M$  où  $V, M$  sont munies de structures SR, n'est pas lipschitzienne en général. Pour simplifier, supposons que  $V$  est riemannienne et que  $M$  a une structure SR de contact  $(\mathcal{D}, g)$ .  $f$  ne sera lipschitzienne que si elle est horizontale, c'est-à-dire que, pour tout  $v \in V$ ,  $T_v f(T_v V) \subset \mathcal{D}_{f(v)}$ . Une notion moins restrictive et techniquement utile est la suivante : on dira qu'une application  $C^0 f : V \rightarrow M$  est horizontale par morceaux s'il existe une triangulation  $C^1$  de  $V$  telle que la restriction de  $f$  à chaque simplexe fermé de la triangulation est  $C^1$  et horizontale.

Gromov montre que les applications lipschitziennes dans la situation considérée sont abondantes si  $\dim V \leq \frac{\dim M - 1}{2}$ . Tout d'abord, on a deux théorèmes d'approximation, l'un disant que toute fonction continue peut être approchée par des fonctions horizontales par morceaux (nécessairement lipschitziennes) et l'autre, que toute fonction lipschitzienne peut être approchée par des fonctions lipschitziennes  $C^\infty$  avec préservation de la constante de Lipschitz à un facteur près qui ne dépend que de  $V, M$  et des structures.

D'autre part, on a aussi un théorème d'extension. Plus précisément :

**PROPOSITION 3.**— *Avec les hypothèses ci-dessus, supposons  $V$  compacte de dimension  $k \leq \frac{\dim M - 1}{2}$  et  $M$   $(k - 1)$ -connexe. Toute application lipschitzienne  $f_0 : W \rightarrow M$ ,  $W$  une sous-variété fermée de  $V$  avec ou sans bord, peut être étendue en une application Lipschitz  $f : V \rightarrow M$ , où :*

$$\mathcal{L}ip(f) \leq C \mathcal{L}ip(f_0).$$

$\mathcal{L}ip(g)$  désigne la constante de Lipschitz de  $g$ ,  $C$  est une constante ne dépendant pas de  $f_0$ .

Cette proposition a un pendant très joli.

**Extension du disque :** *supposons  $M$  compacte, simplement connexe de dimension  $\geq 5$ . Toute courbe fermée horizontale borde un disque dont l'aire sous-riemannienne est bornée par le carré de la longueur de la courbe à un facteur près ne dépendant que de  $M$  et de sa structure SR de contact.*

Ce résultat n'a pas, à l'heure actuelle, d'analogue en dimensions supérieures (si la courbe est remplacée par une variété horizontale).

La démonstration de la proposition se fait en triangulant  $C^1$  la variété  $V$  de manière que  $W$  soit un sous-complexe et en "grimpant sur les squelettes". En utilisant un lemme d'extension d'applications horizontales par morceaux, cette extension est possible à cause de l'abondance des variétés horizontales ( $H$  est horizontale si l'injection  $H \hookrightarrow M$  est horizontale). Ces variétés se paramètrent très commodément par les fonctions génératrices. Elles se déforment donc facilement. Dans le langage de Gromov, cela se traduit par le fait que les faisceaux d'applications horizontales sont flexibles (voir [Gr2]). Le fait que l'application  $f_0$  ne soit pas  $C^1$  par morceaux n'a pas de conséquence, car on peut l'étendre à un voisinage  $U$  de  $W$ , de manière à ce que l'extension soit  $C^1$  sur  $U - W$ .

## 7. EXTENSION DES RÉSULTATS DES PARAGRAPHES PRÉCÉDENTS À DES STRUCTURES GÉNÉRALISANT LES STRUCTURES DE CONTACT

Les résultats précédents sont pour la plupart limités au cas où la structure SR sur  $M$  est de contact. Mais Gromov étend ces théorèmes à des structures plus générales.

**Application  $\beta$**  : on peut définir une application bilinéaire du produit fibré  $\mathcal{D} \times_M \mathcal{D}$  dans le fibré quotient  $\frac{TM}{\mathcal{D}}$  comme suit : si  $(u, v) \in \mathcal{D}[m] \times \mathcal{D}[m]$ , il existe  $X, Y \in \underline{\mathcal{D}}_m$  tels que  $X(m) = u$ ,  $Y(m) = v$ . La classe dans  $\frac{T_m M}{\mathcal{D}[m]}$  de la valeur du crochet  $[X, Y]$ ,  $[X, Y](m)$  ne dépend que de  $u$  et  $v$ . On désignera par  $\beta(u, v)$  cette classe.

On considère alors les structures SR sur  $M$  qui satisfont à la propriété suivante :  $\mathcal{D}$  contient un sous-fibré  $\Delta$  tel que : i)  $\beta(\Delta \times_M \Delta) = 0$  ; ii) si  $\text{Hom}(\Delta, TM/\mathcal{D})$  désigne le fibré vectoriel associé aux fibrés  $\Delta$  et  $TM/\mathcal{D}$  et de fibre en  $m \in M$ , l'espace  $\text{Hom}(\mathcal{D}[m], T_m M/\mathcal{D}[m])$  des applications linéaires  $\mathcal{D}[m] \rightarrow T_m M/\mathcal{D}[m]$ , alors l'application  $\beta_1 : \mathcal{D} \rightarrow \text{Hom}(\Delta, TM/\mathcal{D})$  induite par  $\beta$  est surjective : si  $u \in \mathcal{D}[m]$ ,  $\beta_1(u)(v) = \beta(u, v)$  pour tout  $v \in \Delta[m]$ .

*Remarque 6.*— Toute structure SR de contact vérifie ces conditions. Il suffit pour cela de prendre pour  $\Delta$  un sous-fibré lagrangien de  $\mathcal{D}$  pour la structure symplectique le long des fibres  $\mathcal{D}[m]$  de  $\mathcal{D}$  induite par la structure de contact. De tels fibrés existent toujours.

La proposition 1 se généralise ainsi :

**PROPOSITION 4.**– *Supposons que la structure SR de  $M$  soit régulière et vérifie les i) et ii) ci-dessus. Si  $F \subset M$  est un sous-ensemble fermé de dimension topologique  $d - k$  ( $d = \dim \text{top } M$ ) et si le rang de  $\Delta$  est  $k$ , on a :*

$$\dim_{H^{\text{au}}} F \geq \dim_{H^{\text{au}}} M - k.$$

*Plus généralement, si  $\delta$  est le rang de  $\Delta$ , on a l'estimée :*

$$\dim_{H^{\text{au}}} F \geq \dim_{H^{\text{au}}} M - \delta - r(k - \delta),$$

*où  $r$  est le plus petit entier  $t$  tel que  $\mathcal{D}^t = TM$ .*

De même, la proposition 3 admet la généralisation suivante :

**PROPOSITION 5.**– *Supposons que la structure SR de  $M$  soit régulière et qu'elle admette un fibré  $\Delta$  vérifiant les conditions i) et ii). Soit  $S$  un complexe simplicial de dimension  $\leq \text{rang } \Delta$ . Alors toute application lipschitzienne  $f_0 : S_0 \rightarrow M$  définie sur un sous-complexe  $S_0$  de  $S$  a une extension lipschitzienne si elle a une extension continue.*

## 8. THÉORIE DE DE RHAM POUR LES STRUCTURES SR

Un analogue SR du complexe de de Rham a été introduit par Rumin pour une structure de contact définie par une forme de contact  $\omega$  pour fixer les idées. Désignons par  $\Lambda_M, \Lambda \mathcal{D}^*$  les fibrés des algèbres extérieures sur  $T^*M$  et  $\mathcal{D}^*$  respectivement ;  $\underline{\Lambda}_M, \underline{\Lambda} \mathcal{D}^*$  les faisceaux de germes de sections  $C^\infty$  associés,  $I_\omega$  le faisceau d'idéaux différentiels de  $\underline{\Lambda}_M$  engendré par  $\omega$ ,  $A_\omega$  le faisceau d'idéaux annulateurs de  $I_\omega$  :  $A_\omega = \{\alpha \in \underline{\Lambda}_M \mid \alpha \wedge I_\omega = 0\}$ . On suppose dans ce paragraphe que  $M$  est compacte.

Le faisceau quotient  $\underline{\Lambda}_M/I_\omega$  et le faisceau d'idéaux  $A_\omega$  sont des complexes différentiels gradués, les différentielles dans les deux cas étant induites par la différentielle extérieure. D'après le lemme de Lefschetz, l'homomorphisme de fibrés vectoriels  $\Lambda^k \mathcal{D}^* \rightarrow \Lambda^{k+2} \mathcal{D}^*$  induit par la multiplication par  $d\omega$  est injectif pour  $k \leq \mu - 1$  et surjectif pour  $k \geq \mu - 1$ , où  $\mu = \frac{1}{2}(\dim M - 1)$ . Ceci entraîne que :  $\underline{\Lambda}_M^k/I_\omega^k = 0$  si  $k > \mu$  et  $A_\omega^k = 0$  si  $k \leq \mu$ . (Noter que  $\underline{\Lambda}_M^k/I_\omega^k \simeq \underline{\Lambda}^k \mathcal{D}^*/(d\omega \wedge \underline{\Lambda}^{k-2} \mathcal{D}^*)$  et  $A_\omega^k \subseteq \text{Ker}(d\omega_\Lambda : \underline{\Lambda}^k \mathcal{D}^* \rightarrow \underline{\Lambda}^{k+2} \mathcal{D}^*)$ , où les identifications sont induites par la projection  $T^*M \rightarrow \mathcal{D}^*$ .)

On obtient ainsi deux moitiés de complexes, l'une en dimensions inférieures et l'autre en dimensions supérieures. Rumin les met bout à bout pour en faire un

complexe :

$$(R) \quad 0 \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{d} \underline{\Delta}_M^0 / I_\omega^0 \xrightarrow{d} \underline{\Delta}_M^1 / I_\omega^1 \rightarrow \dots \rightarrow \underline{\Delta}_M^\mu / I_\omega^\mu \xrightarrow{D} A_\omega^{\mu+1} \xrightarrow{d} \dots \rightarrow A_\omega^{2\mu+1} \rightarrow 0$$

en introduisant un nouvel opérateur  $D : \underline{\Delta}_M^\mu / I_\omega^\mu \rightarrow A_\omega^{\mu+1}$  de la manière suivante : si  $[\alpha]$  est une classe de  $\underline{\Delta}_M^\mu / I_\omega^\mu$ , où  $\alpha \in \underline{\Delta}_M^\mu$ ,  $[\alpha] = \{\alpha + \omega \wedge \beta + d\omega \wedge \gamma \mid \beta \in \underline{\Delta}_M^{\mu-1}, \gamma \in \underline{\Delta}_M^{\mu-2}\}$ , on va montrer qu'il existe une  $\alpha' \in [\alpha]$  telle que  $d\alpha' \in A_\omega^{\mu+1}$ . On posera alors  $D[\alpha] = d\alpha'$ . Que  $d\alpha'$  ne dépende pas du choix de  $\alpha'$  résulte du lemme de Lefschetz : si  $\alpha'' \in [\alpha]$  et  $d\alpha'' \in A_\omega^{\mu+1}$ ,  $\alpha'' = \alpha' + \omega \wedge \beta + d\omega \wedge \gamma$  et  $\omega \wedge d\omega \wedge (\beta + d\gamma) = 0$ . De là, il résulte que  $\beta + d\gamma = \omega \wedge \eta$  et  $d\alpha'' - d\alpha' = 0$ . Notons ici le fait remarquable que  $D$  est un opérateur d'ordre 2 et non 1.

Pour construire  $\alpha'$ , notons d'abord que si on trouve  $\alpha' \in [\alpha]$  telle que  $\omega \wedge d\alpha' = 0$ , alors  $d\alpha' \in A_\omega^{\mu+1}$ . En effet,  $0 = d(\omega \wedge d\alpha') = d\omega \wedge d\alpha'$ .  $d\alpha'$  appartient à  $\underline{\Delta}_M^{\mu+1}$  et, d'après le théorème de Lefschetz cité ci-dessus, on peut trouver  $\beta \in \underline{\Delta}_M^{\mu-1}$ ,  $\rho \in \underline{\Delta}_M^\mu$ , telles que  $d\alpha + d\omega \wedge \beta = \omega \wedge \rho$ . Posons  $\alpha' = \alpha + \omega \wedge \beta$ .  $\alpha' \in \underline{\Delta}_M^\mu$  et  $d\alpha' = d\alpha + d\omega \wedge \beta - \omega \wedge d\beta = \omega \wedge (\rho - d\beta)$ . Donc  $\omega \wedge d\alpha' = 0$ .

On peut démontrer sans trop de peine que le complexe (R) est exact. Étant fin, la cohomologie de l'espace de ses sections est la cohomologie réelle de  $M$ . Rumin étend la théorie de de Rham–Hodge au complexe (R) dans le cas où la métrique  $g$  est adaptée à  $\omega$ . Cela veut dire que  $g(X, Y) = d\omega(X, JY)$  où  $J$  est une structure presque complexe sur  $\mathcal{D}$  telle que  $d\omega(JX, Y) + d\omega(X, JY) = 0$  pour tous les couples  $(X, Y) \in \mathcal{D} \times_M \mathcal{D}$ . On peut alors prolonger la métrique  $g$  en une métrique riemannienne  $\tilde{g}$  sur  $M$  :  $\tilde{g}(X, Y) = \omega(X)\omega(Y) + d\omega(X, \tilde{J}Y)$ , où  $\tilde{J} : TM \rightarrow TM$  est l'opérateur défini ainsi ; il existe un unique champ de vecteurs  $Z$  sur  $M$  tel que  $\omega(Z) = 1$  et  $i(Z)d\omega = 0$ , et l'on a  $TM = \mathcal{D} \oplus_M \mathbb{R}Z$ . On pose  $\tilde{J}|_{\mathcal{D}} = J$ ,  $\tilde{J}(Z) = Z$ .

La métrique  $\tilde{g}$  permet de définir un opérateur de Hodge  $*$  :  $\underline{\Delta}_M \rightarrow \underline{\Delta}_M$ . On montre que  $A_\omega^{\mu+k}$  est l'orthogonal de  $I_\omega^{\mu-k}$  pour  $*$ ,  $0 \leq k \leq \mu$ . Ceci permet de définir  $*$  sur le complexe (R) et les opérateurs adjoints :

$$\begin{aligned} d^* &= (-1)^k * d * & \text{si } k \neq \mu + 1 \\ D^* &= (-1)^{\mu+1} * D * & \text{si } k = \mu + 1. \end{aligned}$$

Comme dans la théorie classique, on introduit un laplacien  $\Delta$  :

$$\Delta = \begin{cases} (\mu - k) dd^* + (\mu - k + 1) d^* d & \text{sur } \underline{\Delta}_M^k / I_\omega^k, 0 \leq k \leq \mu - 1 \\ (\mu - k + 1) dd^* + (\mu - k) d^* d & \text{sur } A_\omega^k, (\mu + 2) \leq k \leq 2\mu + 1 \\ (dd^*)^2 + D^* D & \text{sur } \underline{\Delta}_M^\mu / I_\omega^\mu \\ DD^* + (d^* d)^2 & \text{sur } A_\omega^{\mu+1} \end{cases}$$

*Remarques 7.*— i) La présence du carré  $(d^*d)^2$  est due au fait que  $D$  est un opérateur d'ordre 2.

ii) Il y a une certaine latitude dans le choix des coefficients  $\mu - k, \mu - k + 1$ . Avec le choix ci-dessus, la partie principale de  $\Delta$  préserve la bigraduation donnée par la théorie de Hodge mentionnée ci-dessous.

L'opérateur  $\Delta$  défini ci-dessus n'est pas elliptique mais seulement hypoelliptique. Ceci est suffisant pour étendre la théorie de de Rham au complexe (R). En particulier, toute classe de cohomologie réelle de  $M$  est représentable par une forme  $\Delta$ -harmonique et l'espace vectoriel de ces formes est isomorphe à la cohomologie réelle de  $M$ .

Mais Rumin va plus loin et définit une structure de Hodge sur le complexe (R). L'opérateur  $J$  défini ci-dessus munit  $M$  d'une structure CR et d'une métrique presque hermitique  $h : TM \times_M TM \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h(X, Y) = \tilde{g}(X, Y) + id\omega(X, Y)$ . On peut alors définir des opérateurs  $\partial$  et  $\bar{\partial}$  et les laplaciens correspondants et construire une théorie de Hodge.

## 9. CONCLUSION DE LA PARTIE GÉOMÉTRIQUE

Le travail [Gr1] contient de très nombreux résultats très intéressants et importants. Ici nous n'avons pu donner qu'une petite idée de ceux-ci et nous avons choisi de parler de ceux qui nous paraissaient les plus simples et les plus faciles à exposer.

D'autres résultats de [Gr1], non discutés ici, portent sur l'estimation métrique des invariants d'homologie et d'homotopie, sur l'homologie horizontale et le théorème de Thom (voir [Th]), et enfin sur la théorie de la gauge en géométrie SR.

Parmi d'autres travaux sur la géométrie SR sur des sujets différents des précédents, mentionnons :

- i) le travail de Pansu [P], où il utilise les structures SR, et en particulier les "applications tangentes", pour étudier les quasi-isométries et les homéomorphismes conformes des espaces symétriques de rang 1 ;
- ii) la définition et la classification des espaces sous-riemanniens symétriques de Falbel, Gorodski et Rumin dans [Fa-G], [Fa-G-R] ;
- iii) l'étude des limites des variétés riemanniennes dans [G-L-P].

## 10. COURBES MINIMISANTES. GÉODÉSQUES

**DÉFINITION 4.**— Une courbe minimisante est une courbe horizontale  $\varphi : [a, b] \rightarrow M$  telle que  $\mathcal{L}(\varphi) \leq \mathcal{L}(\psi)$  pour toute courbe horizontale  $\psi : [c, d] \rightarrow M$  telle que  $\psi(c) = \varphi(a)$ ,  $\psi(d) = \varphi(b)$ .

*Remarque 8.*— Si  $\varphi$  est minimisante, la restriction de  $\varphi$  à tout sous-intervalle fermé l'est aussi.

Dans le cadre riemannien, toute courbe minimisante est la projection d'une extrémale. Ces courbes peuvent être définies de deux façons, équivalentes bien sûr, dépendant du cadre lagrangien ou hamiltonien où on se place. Ici, on utilisera ce dernier, qui est plus adapté au cas sous-riemannien. Le formalisme lagrangien, dans le cas sous-riemannien, exige l'introduction de multiplicateurs de Lagrange, ce qui le rend plus lourd. Si  $H = \frac{1}{2}g^*$ , où  $g^*$  est la cométrieque de  $g$ , les extrémales sont les trajectoires du champ hamiltonien  $\vec{H}$  de  $H$  (pour la structure symplectique canonique sur  $T^*M$ ).

Pour une structure SR  $(\mathcal{D}, g)$  sur  $M$ , la situation est très différente. Le calcul des variations montre qu'il existe deux classes de courbes minimisantes. La première, la plus commune, généralise le cas riemannien : ce sont les courbes qui sont projections de trajectoires du champ hamiltonien  $\vec{H}$  de  $H = \frac{1}{2}g^*$ , où  $g^*$  est la cométrieque de  $g$ , sur lesquelles  $H$  est non nul. La deuxième classe plus subtile n'a été découverte que récemment par Montgomery ([Mon]).

Désignons par  $\mathcal{D}^0$  le sous-fibré vectoriel de  $T^*M$ , annihilateur de  $\mathcal{D}$  et considérons-le comme sous-variété de  $T^*M$ . En général, la restriction de la forme symplectique canonique  $\omega$  de  $T^*M$  à  $\mathcal{D}^0$  (plus précisément à  $T\mathcal{D}^0 \times_{\mathcal{D}^0} T\mathcal{D}^0$ ), n'est plus symplectique. Désignons cette restriction par  $\omega_{\mathcal{D}^0}$ .

**DÉFINITION 5.**— Une courbe caractéristique de  $\mathcal{D}^0$  est une courbe absolument continue  $\varphi : I \rightarrow \mathcal{D}^0$ ,  $I$  intervalle non réduit à un point, telle que, pour presque tout  $t \in I$ ,  $\frac{T\varphi}{dt}(t)$  appartient au noyau de  $\omega_{\mathcal{D}^0}|_{\varphi(t)}$ .

*Remarque 9.*— Ce n'est là qu'un cas particulier d'une définition de Cartan appliquée au système différentiel  $\omega_{\mathcal{D}^0}$  sur  $\mathcal{D}^0$ .

La deuxième classe de courbes minimisantes est formée des courbes horizontales qui sont projections de courbes caractéristiques contenues dans  $\mathcal{D}^0 - O_M$ . Notons d'ailleurs que l'intersection des deux classes de courbes minimisantes n'est pas vide : une courbe minimisante peut avoir deux relèvements différents dans  $T^*M$ , l'un, tra-

jectoire de  $\vec{H}$ , l'autre, courbe caractéristique de  $\mathcal{D}^0$ .

*Exemple.*—  $M = \mathbb{R}^3$  avec coordonnées canoniques  $(x, y, z)$ ,  $\mathcal{D} = \text{Ker}(dz - \frac{y^2}{2} dx)$ ,  $g = dx^2 + dy^2 | \mathcal{D}$ .  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M$ ,  $\varphi(t) = (t, 0, 0)$ . Si  $p, q, r : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  sont les coordonnées duales de  $dx, dy, dz$ , une trajectoire de  $\vec{H}$ , contenue dans  $TM - O_M$ , relèvement de  $\varphi$ , est  $\Phi(t) : x = t, y = z = 0, p = 1, q = r = 0$  (ce n'est pas le seul relèvement trajectoire de  $\vec{H}$ ). Une courbe caractéristique dans  $\mathcal{D}^0 - O_M$ , relèvement de  $\varphi$ ,  $\Psi(t) : x = t, y = z = 0, p = q = 0, r = 1$ .

**Structures de contact :** si la structure SR est de contact,  $\mathcal{D}^0$  est un fibré en droites réelles et  $\mathcal{D}^0 - O_M$  est une sous-variété symplectique de  $T^*M$ . Donc il n'existe pas de géodésiques exceptionnelles dans ce cas.

Dans la suite, on appellera géodésique ordinaire, ou simplement géodésique, la projection d'une trajectoire de  $\vec{H}$  contenue dans  $TM - O_M$  et géodésique exceptionnelle une courbe horizontale, projection d'une caractéristique de  $\mathcal{D}^0$  contenue dans  $\mathcal{D}^0 - O_M$ .

### Quelle est la signification des géodésiques exceptionnelles ?

La notion de courbe caractéristique n'est pas très géométrique. Celle de géodésique exceptionnelle l'est beaucoup plus. Pour le voir, considérons le cas "local" où  $M$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathcal{D}$  est le noyau d'une forme vectorielle  $\omega : TM \rightarrow \mathbb{R}^c$ . Étendons la métrique SR  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  en une métrique riemannienne sur  $M$  telle que  $\omega$  soit isométrique sur les vecteurs orthogonaux à  $\mathcal{D}$ . Soient  $H^1(M; a, b)$ ,  $a, b \in M$  l'espace des courbes  $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$  d'énergie finie telles que  $\varphi(0) = a$  et  $\varphi(1) = b$ , et  $\text{Hor}(\mathcal{D}, a, b)$  le sous-ensemble des courbes horizontales dans  $H^1(M; a, b) : \text{Hor}(\mathcal{D}, a, b) = \tilde{\omega}^{-1}(0)$ , où  $\tilde{\omega}(\varphi) = \omega(\frac{T\varphi}{dt})$ .  $H^1(M; a, b)$  et  $L^2([0, 1]; \mathbb{R}^c)$  sont des variétés hilbertiennes et  $\tilde{\omega}$  est une application  $C^\infty$ . Alors les géodésiques exceptionnelles sont les singularités de l'application  $\tilde{\omega}$  situées sur la variété de niveau  $\tilde{\omega} = 0$ .

## 11. GÉODÉSQUES ORDINAIRES

Une différence fondamentale entre les géodésiques (ordinaires) dans les cas sous-riemannien et riemannien est que, dans le cas sous-riemannien, une géodésique n'est pas déterminée par son vecteur tangent initial, mais par son covecteur initial : c'est le point initial d'une trajectoire de  $\vec{H}$ , relèvement de la géodésique. Plus précisément, si

$z$  est ce covecteur initial, le vecteur tangent initial  $v$  est déterminé par la condition :

$$\langle w, v \rangle_g = \langle w, z \rangle \quad \text{pour tout } w \in \mathcal{D}[\pi_{T^*M}(z)].$$

Dans le cas riemannien, cette condition détermine aussi  $z$  si  $v$  est connu et la correspondance  $v \rightarrow z$  n'est autre que la transformation de Legendre associée à la métrique  $g$ . En sous-riemannien, ce n'est plus vrai et les paramètres de  $z$  non déterminés par  $v$  sont des invariants différentiels d'ordre  $\geq 2$  de la géodésique. On peut quelquefois les interpréter comme des courbures.

**Minimalité des petits arcs de géodésiques ordinaires** : comme en géométrie riemannienne, on a :

**PROPOSITION 6.**— *Soit  $\varphi : [a, b] \rightarrow M$  une géodésique ordinaire de la structure SR  $(\mathcal{D}, g)$  paramétrée par la longueur d'arc. Pour tout  $t \in [a, b]$ , il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que la restriction de  $\varphi$  à  $[a, b] \cap [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$  est minimisante.*

La preuve est facile, analogue au cas riemannien (voir [Ha]).

**Application exponentielle** : on peut définir, pour tout  $m \in M$ , une application  $\exp_m : O \rightarrow M$  où  $O$  est un ouvert de  $T_m^*M$  tel que  $O \cap \{H = 0\} = 0_m$  (le zéro de  $T_mM$ ). Notons que l'ensemble  $\{H = 0\}$  dans  $T_m^*M$  n'est autre que l'annulateur  $\mathcal{D}^0[m]$  de  $\mathcal{D}[m]$ . Si  $z \in O$ ,  $z \neq 0_m$ ,  $\exp_m(z) = \pi_{T_m^*M}(\varphi(\sqrt{2H(z)}, \bar{z}))$  si  $\varphi(\sqrt{2H(z)}, \bar{z})$  est défini, où  $t \rightarrow \varphi(t, \bar{z})$  est la trajectoire de  $\vec{H}$  telle que  $\frac{T\varphi}{\partial t}(0, \bar{z}) = \bar{z} = z/\sqrt{2H(z)}$  et  $\exp_m(0_m) = m$ .

Cette application n'a malheureusement pas les bonnes propriétés de l'application exponentielle classique. En effet, en général :

1) l'image de  $\exp_m$  ne contient pas un voisinage de  $O$  et, en particulier  $\exp_m$  n'est pas un difféomorphisme local en  $0_m \subset T_m^*M$ .

2) Si  $z \in \{H = \frac{1}{2}\} \cap T_m^*M$ , appelons premier point conjugué de  $z$  et dénotons par  $pc(z)$ , le point  $\exp_m(t_c z)$ , s'il existe, tel que  $\exp_m$  soit un difféomorphisme local en  $tz$  pour tout  $t$ ,  $0 < t < t_c$ , et que ce ne soit pas le cas pour  $t = t_c$ . Alors il existe un compact  $K \subset T_m^*M$  tel que : i) pour  $z \notin K \cap \{H = \frac{1}{2}\}$ ,  $pc(z)$  est défini et tend vers  $m$  quand  $z$  tend vers l'infini dans  $\{H = \frac{1}{2}\} \cap T_m^*M$ . Ceci entraîne que l'étude du lieu conjugué est en partie un problème local, contrairement à ce qui se passe en géométrie riemannienne. Malgré cela, peu de travaux ont été consacrés à cette étude (voir [Ag], [E-G-K]).

## 12. GÉODÉSQUES EXCEPTIONNELLES

Elles sont beaucoup plus rares que les ordinaires et ne définissent pas d'application exponentielle. Plus précisément, appelons "caractéristique horizontale" toute caractéristique qui se projette sur une courbe horizontale, par souci de commodité et distinguons deux cas suivant la parité du rang de  $\mathcal{D}$ . Dans le cas impair, pour une distribution  $\mathcal{D}$  générique, il existe un ouvert  $O$  de  $\mathcal{D}^0$  dont le complémentaire est de codimension 1 dans  $\mathcal{D}^0$  et un champ de droites  $\delta$  sur  $O$  tangent à  $\mathcal{D}^0$ , tels que toute caractéristique horizontale contenue dans  $O$  est une courbe intégrale de  $\delta$ . Dans le cas pair, génériquement il existe un ensemble stratifié  $\Sigma$  de  $\mathcal{D}^0$ , de codimension 1 dans  $\mathcal{D}^0$ , et sur la réunion  $O$  des strates de codimension 1 de  $\Sigma$ , un champ de droites  $\delta$  tangent à  $\Sigma$  : toute caractéristique horizontale est contenue dans  $\Sigma$  et si elle est contenue dans  $O$ , c'est une courbe intégrale de  $\delta$ . Dans la suite, on appellera les caractéristiques horizontales contenues dans  $O$ , génériques et leurs projections, géodésiques exceptionnelles génériques.

La notion de géodésique exceptionnelle est apparentée à une autre notion : celle de courbe horizontale rigide.

**DÉFINITION 6.**— *Une courbe horizontale  $C^1$   $\varphi : [a, b] \rightarrow M$  est dite rigide s'il existe un voisinage  $U$  de  $\varphi$  dans l'espace  $C^1([a, b]; M)$  muni de la topologie  $C^1$  tel que si  $\psi$  est une courbe horizontale  $C^1$  appartenant à  $U$ , telle que  $\psi(a) = \varphi(a)$ ,  $\psi(b) = \varphi(b)$ , alors il existe un difféomorphisme  $C^1$   $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  tel que  $\psi = \varphi \circ f$ .*

### Minimalité et rigidité des petits arcs de géodésiques exceptionnelles pour les distributions de rang 2 :

**PROPOSITION 7.**— *Supposons que la distribution de la structure SR sur  $M$  soit de rang deux. Soit  $\varphi : [a, b] \rightarrow M$  une géodésique exceptionnelle générique paramétrée par la longueur d'arc. Il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que la restriction de  $\varphi$  à tout sous-intervalle fermé de  $[a, b]$  de longueur  $\leq \varepsilon$  est minimisante et rigide.*

Pour la preuve de la rigidité, voir [B-L], pour celle de la minimalité, voir [L-S]. Une autre preuve des deux assertions se trouve dans [A-S1] et [A-S2]. Enfin, pour un "survey" sur les géodésiques exceptionnelles, voir [Mon].

Dans [A-S1] et [A-S2], les auteurs construisent une théorie de Morse pour les géodésiques exceptionnelles pour les structures SR dont la distribution est de rang 2. La théorie classique sur l'optimalité locale en topologie  $C^0$  d'un arc simple de géodésique sans point conjugué s'étend alors aux géodésiques exceptionnelles dans le

cas considéré ci-dessus, si on fait la remarque qu'en géométrie SR un arc de courbe simple localement minimisant pour la topologie  $H^1$  est localement minimisant pour la topologie  $C^0$  (voir [Ag1]).

## APPLICATIONS DES STRUCTURES SR

### 13. OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS DÉFINISSANT DES STRUCTURES SR

Un opérateur différentiel  $L$  du deuxième ordre sur une variété  $M$  est appelé semi-elliptique si son symbole principal est positif semi-défini. Ce symbole est une fonction  $C^\infty g_L^* : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  qui, sur chaque fibre de  $T^*M$  est une forme quadratique positive semi-définie et donc une cométrie. Si  $g_L^*$  satisfait à la condition du rang au sens de la Remarque 2, il définit une structure SR généralisée. Si, de plus, le noyau de  $g_L^*$  est de rang constant, c'est-à-dire si c'est un sous-fibré vectoriel de  $T^*M$ , la structure dont on vient de parler sera une structure SR au sens de la définition 0.

C'est un théorème classique de Hörmander (voir [Hö1], [O-R]) que si  $g_L^*$  satisfait à la condition du rang, l'opérateur  $L$  est hypoelliptique, la réciproque étant aussi vraie et démontrée par Jerison-Sanchez-Calle (voir [J-S1]). La preuve de Hörmander montre déjà la relation entre l'hypoellipticité de  $L$  et la condition du rang. Son travail a inspiré un très grand nombre de travaux par la suite. Nous allons essayer ici de donner un petit aperçu de la relation étroite entre leurs résultats et la géométrie SR. Donnons-nous une forme volume sur  $M$ . Un opérateur différentiel  $L$  du second ordre sur  $M$  est dit hypoelliptique si, pour tout compact  $K$ , il existe deux nombres  $s > 0$ ,  $C > 0$  tels que, pour toute  $f \in C^\infty(M)$  à support dans  $K$  :

$$(SE) \quad \|f\|_{(s)} \leq C[\|Lf\| + \|f\|].$$

$\| \cdot \|$  désigne la norme  $L^2$  bâtie sur la forme de volume donnée et  $\| \cdot \|_{(s)}$  la norme de Sobolev correspondante.

Le théorème suivant, cas particulier d'un résultat de Fefferman-Phong (voir [F-P]), illustre bien la relation entre hypoellipticité et structure SR.

**PROPOSITION 8.**— *On suppose que  $M$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , la forme volume la forme canonique sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $K$  un voisinage compact dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $L$  auto-adjoint par rapport à la forme volume canonique de  $\mathbb{R}^d$ . Alors, la condition (SE) est équivalente à la condition [Hö] :*

*il existe une constante  $\Gamma > 0$  telle que  $d_L(x, y) \leq \Gamma [d_{eu}(x, y)]^{s/2}$  pour tous  $x, y \in K$ ,*

où  $d_L$  est la distance SR de la structure SR associée à  $L$  et  $d_{eu}$  est la distance euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^d$ .

L'exposant  $s$  est aussi lié à la croissance du volume des boules sous-riemanniennes de la structure SR associée d'après le résultat suivant de Varopoulos ([Va2]) apparenté au précédent :

**PROPOSITION 9.**— *Mêmes hypothèses que dans la proposition précédente. Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes pour tout  $\mu > 2$  et tout compact  $K$  de  $M$ .*

i) *il existe une constante  $\Gamma > 0$  telle que, pour tout  $m \in K$ , tout nombre  $\rho$ ,  $0 < \rho < 1$  :*

$$\text{vol}(B(m, \rho)) \geq \Gamma \rho^\mu ;$$

ii) *existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute  $f \in C^\infty(M)$ , à support dans  $K$  :*

$$\left( \|f\|_{\frac{2\mu}{\mu-2}} \right)^2 \leq C \left[ \langle Lf, f \rangle_{L^2} + \|f\|_L^2 \right],$$

où  $\langle , \rangle_{L^2}$  est le produit scalaire  $L^2$  relatif au volume donné et  $\| \cdot \|_{\frac{2\mu}{\mu-2}}$  la norme  $L^{\frac{2\mu}{\mu-2}}$  relative au même volume.

Notons que  $\|f\|_{(s)} = \|(I + \Delta)^{s/2} f\|$ , où  $\Delta$  est le laplacien,  $-\sum (\frac{\partial}{\partial x_i})^2$ , et la métrique  $d_{eu}$  est la métrique  $d_\Delta$  associée à  $\Delta$ . Donc la condition (SE) peut être exprimée comme suit :

$$\|(I + \Delta)^{s/2} f\| \leq C (\|Lf\| + \|f\|)$$

et la condition [Hö] ainsi :

$$d_L(x, y) \leq \Gamma |d_\Delta(x, y)|^{s/2}.$$

Sous cette forme, la proposition peut être généralisée comme suit : soient  $L_1, L_2$  deux opérateurs, comme dans la Proposition 8. Alors, pour tout couple de nombres positifs  $\alpha_1, \alpha_2$  et tout compact  $K$  de  $M$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

i) il existe une constante  $C$  telle que, pour toute  $f \in C^\infty(M)$  à support dans  $K$  :

$$\left\| L_1^{\frac{\alpha_1}{2}} f \right\| \leq C \left[ \left\| L_2^{\frac{\alpha_2}{2}} f \right\| + \|f\| \right];$$

ii) il existe une constante  $\Gamma$  telle que, pour tout couple  $x, y \in K$  :

$$[d_{L_2}(x, y)]^{\alpha_2} \leq \Gamma [d_{L_1}(x, y)]^{\alpha_1}.$$

Comme les opérateurs  $L_i$ ,  $i = 1, 2$ , sont auto-adjoints et semi-positifs, les puissances  $L_i^{\frac{\alpha-1}{2}}$  sont des opérateurs auto-adjoints (non bornés) à domaine et image dans  $L^2(M; \nu)$ . Pour ceci et bien d'autres équivalences, voir [F-P], [F-S], [Hö1], [Hö2], [J-S1], [J-S2], [Mu], [M-V], [S].

### Diffusions et géométrie SR

Les structures SR sont apparues très naturellement dans l'étude de la diffusion, par exemple dans le calcul stochastique de Malliavin ([Bi], [M]). Nous n'en discuterons pas ici car ce calcul est maintenant bien connu et mériterait un exposé à lui tout seul. Expliquons rapidement le rapport entre la géométrie SR et la diffusion. Celle-ci est représentée classiquement par une équation différentielle stochastique :

$$dX = F_0(X) + \sum_{j=1}^{\ell} F_j(X) \circ dw^j$$

sur une variété  $M$ . Les  $F_i$ ,  $0 \leq i \leq \ell$  sont des champs de vecteurs,  $(w^1, \dots, w^\ell)$  un processus de Wiener standard sur  $\mathbb{R}^\ell$  et le  $\circ$  dénote l'intégrale de Stratonovich.

La solution  $X(t, x)$  d'une telle équation, de position initiale  $x$ , est une variable aléatoire à valeurs dans  $M$ . Il est bien connu que si les champs  $(F_1, \dots, F_\ell)$  satisfont à la condition du rang en tout point de  $M$ , la probabilité de transition :  $E \subset M \rightarrow P(X(\cdot, x) \in E) =$  probabilité pour que  $X(\cdot, x)$  soit dans  $E$ , admet une densité  $C^\infty p_t(x, y)$  si on munit  $M$  d'un élément de volume  $\text{vol}_M$  quelconque ([Hö2]). Cette densité  $p_t$ , appelée noyau de la chaleur, vérifie l'équation :

$$(C) \quad \frac{\partial p_t}{\partial t}(x, y) + L_x p_t(x, y) = 0 \quad \text{pour } t > 0,$$

où  $L$  est l'opérateur  $-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell} \theta(F_j)^2 - \theta(F_0)$ . Il dépend de la forme volume  $p_t$  est déterminé par cette équation et par la condition que la mesure  $p_t(x, y) \text{vol}_M(dy)$  tend vers la mesure de Dirac  $\delta_x(y)$  quand  $t$  tend vers 0. Dans la littérature, on considère souvent le cas plus général où  $L$  est un opérateur semi-elliptique du type considéré dans le paragraphe précédent et  $p_t$  est le noyau de la chaleur associé.

Ce noyau a fait l'objet de nombreuses études. Ici nous nous contenterons de discuter un problème classique, celui du comportement asymptotique de  $p_t(x, y)$  quand  $t$  tend vers 0. Dans le cas classique où  $L$  est elliptique, on sait que  $p_t$  a un développement asymptotique de la forme :

$$p_t(x, y) = \frac{1}{t^{d/2}} e^{-\frac{d(x,y)^2}{2t}} [a_0(x, y) + t a_1(x, y) + t^2 a_2(x, y) + \dots],$$

où  $d$  est la distance associée à la métrique riemannienne définie par le symbole principal de  $L$ .

Ce résultat a été partiellement étendu au cas semi-elliptique. Par exemple si  $L$  est auto-adjoint par rapport à  $\text{vol}_M$  pour tout compact  $K$ , tous  $\varepsilon \in ]0, 1]$ ,  $T > 0$ , il existe une constante  $C = C(K, \varepsilon, T)$  telle que, pour tous  $x, y \in K$ , tout  $t$ ,  $0 < t < T$  :

$$\frac{1}{C} \frac{1}{\text{vol}(B_L(x, \sqrt{t}))} \exp\left[\frac{-d_L(x, y)^2}{(4 - \varepsilon)t}\right] \leq p_t(x, y) \leq \frac{C}{\text{vol}(B_L(x, \sqrt{t}))} \exp\left[\frac{-d_L(x, y)^2}{(4 + \varepsilon)t}\right],$$

où  $d_L$  est la distance SR associée à  $L$ ,  $B_L(x, \sqrt{t})$  est la boule SR de centre  $x$  et de rayon  $\sqrt{t}$ .

La preuve dans [Va1] de ce résultat est assez complexe. Le lien avec la géométrie provient d'une généralisation d'un résultat de Ventzel–Freidlin en théorie des grandes déviations. On estime, pour les petits  $\varepsilon$ , la probabilité pour que la trajectoire échantillon du processus  $X(\varepsilon t, x)$  sur un intervalle de temps fixé, disons  $[0, 1]$ , soit dans un ensemble  $S$  de courbes continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , en fonction du minimum de l'énergie sous-riemannienne des courbes de  $S$ . (L'énergie d'une courbe non absolument continue est  $+\infty$ .)

Pour de nombreux résultats sur le développement de la densité  $p_t$  pour les petits temps, on consultera [Ben], [B-L], [Fl-L], [Ga2], [Le1], [Le2], [Le3], [Mo].

### Remarque sur les relations entre la géométrie SR et les opérateurs sous-elliptiques associés

Malgré les résultats mentionnés plus haut, la relation entre la géométrie SR et les opérateurs semi-elliptiques du second ordre est bien moins claire que, dans le cas classique, la relation entre géométrie riemannienne et opérateurs elliptiques du second ordre. En effet, dès qu'on aborde les points plus fins de la théorie comme la structure des solutions élémentaires de ces opérateurs, les résultats de Beals, Gaveau et Greiner (voir [B-G-G*i*],  $i = 1, 2, 3, 4$ ) montrent que ce ne sont plus les invariants classiques de la géométrie comme la distance, la courbure, etc. qui jouent un rôle, mais d'autres, nouveaux, dont l'interprétation géométrique, s'il y en a une, est encore inconnue. On trouvera des informations précises dans les travaux de Beals, Gaveau et Greiner mentionnés plus haut.

**Conclusion** : nous avons essayé de donner une idée succincte de l'importance de la géométrie SR dans l'étude des opérateurs hypoelliptiques du second ordre et dans

celle de la diffusion. Si le lecteur a été convaincu, cet exposé aura atteint un de ses buts.

## BIBLIOGRAPHIE

La bibliographie qui suit est certainement très incomplète et je m'en excuse auprès des auteurs que je n'ai pas cités. Elle ne contient que les ouvrages et articles que j'ai consultés au cours de la préparation de cet exposé.

- [Ag] A.A. AGRACHEV - *Methods of control theory in non-holonomic geometry*, Proceedings ICM-94, Zürich, Birkhäuser.
- [Ag1] A.A. AGRACHEV - *Any smooth simple  $H^1$ -local length minimizer in the Carnot-Caratheodory space is a  $C^0$ -local length minimizer*, preprint, Dijon, juin 1996.
- [A-S1] A.A. AGRACHEV et A.V. SARYCHEV - *Strong minimality of abnormal geodesics for 2-distributions*, Journal of Dynamical Systems and Control Systems **1**, n° 2 (1995), 139-176.
- [A-S2] A.A. AGRACHEV et A.V. SARYCHEV - *Abnormal sub-riemannian geodesics : Morse index and rigidity*, à paraître dans les Annales I.H.P.
- [B-G-G1] R. BEALS, B. GAVEAU et P. GREINER - *The Green function for a model two-step hypoelliptic operator and the analysis of certain tangential Cauchy-Riemann complexes*, preprint (1995).
- [B-G-G2] R. BEALS, B. GAVEAU et P. GREINER - *Subelliptic geometry*, preprint (1995).
- [B-G-G3] R. BEALS, B. GAVEAU et P. GREINER - *On a geometric formula for the fundamental solution of subelliptic laplacians*, preprint (1995).
- [B-G-G4] R. BEALS, B. GAVEAU et P. GREINER - *Complex Hamiltonian mechanisms and parametrices for subelliptic laplacians*, preprint (1995).
- [Bell] A. BELLAÏCHE - *The tangent space in sub-riemannian geometry*, dans "Journées non holonomes", A. Bellaïche-J.-J. Risler eds, Birkhäuser, Progress in Math., vol. 144 (1996), 1-78.
- [Ben] G. BEN AROUS - *Développement du noyau de la chaleur sur la diagonale*, Annales Inst. Four. **39** (1) (1989), 73-99.
- [B-L] G. BEN AROUS et R. LÉANDRE - *Décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonale*, Prob. Theory Relat. Fields. Part. I : **90** (1991), 175-202 ; Part. II : **90** (1991), 377-402.

- [Bi] J.-M. BISMUT - *Large deviations and the Malliavin calculus*, Birkhäuser, Progress in Math., vol. 45 (1984).
- [B-H] R. BRYANT et L. HSU - *Rigidity of integral curves of rank 2 distributions*, Invent. Math. **114** (1993), 435–461.
- [B-Z] Yu.D. BURAGO et V.A. ZAGALLER - *Geometric inequalities*, Springer GdMW Bd **285** (1988).
- [C-K-S] E.A. CARLEN, S. KUSUOKA et D.W. STROOCK - *Upper bounds for symmetric Markov transition functions*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Probabilité et Statistique, supp. au n° 2 (1987), 245–287.
- [E-G-K] EL-HOUICINE, J.-P. GAUTHIER et I. KUPKA - *Small sub-riemannian balls in  $\mathbb{R}^3$* , Journal of Dynamical and Control Systems, vol. 2, n° 3, July 1996, 359–421.
- [Fa-G] E. FALBEL et C. GORODSKI - *On contact symmetric sub-riemannian spaces*, Annales Scient. E.N.S. **28** (1995), 571–589.
- [Fa-G-R] E. FALBEL, C. GORODSKI et M. RUMIN - *On the holonomy of sub-riemannian spaces*, preprint (1995).
- [F-P] C.L. FEFFERMANN et D.H. PHONG - *Subelliptic eigenvalue problems*, dans Proceedings Conference on Harmonic analysis in honor of Antony Zygmund, Math. Ser., Wadsworth, Belmont CA, 590–606.
- [F-S] C.L. FEFFERMANN et A. SANCHEZ-CALLE - *Fundamental solutions of second order subelliptic operators*, Ann. of Math. **124** (1986), 247–272.
- [Fl-L] P. FLORCHINGER et R. LÉANDRE - *Décroissance non-exponentielle du noyau de la chaleur*, Prob. Theory Relat. Fields **95** (1993), 237–262.
- [Ga1] B. GAVEAU - *Principe de moindre action ; propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents*, Acta Math. **139** (1977), 95–153.
- [Ga2] B. GAVEAU - *Systèmes dynamiques associés à certains opérateurs hypoelliptiques*, Bulletin Sci. Math., 2ème série, **102** (1978), 203–229.
- [Go1] R. GOODMAN - *Nilpotent Lie groups : structure and applications to analysis*, Springer LNM **562** (1976).
- [Go2] R. GOODMAN - *Lifting vector fields to nilpotent Lie groups*, Journ. Math. Pures et Appl. **57** (1978), 77–86.
- [Gr1] M. GROMOV - *Carnot-Caratheodory spaces seen from within*, dans le même volume que [Bell], 79–323.
- [Gr2] M. GROMOV - *Partial differential relations*, Springer Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **3**, Folge, Band 9 (1986).
- [G-L-P] M. GROMOV, J. LAFONTAINE et P. PANSU - *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cedic-Fernand Nathan (1981).

- [Ha] U. HAMENSTÄDT - *Some regularity theorems for Carnot–Caratheodory metrics*, J. Diff. Geom. **32** (1991), 192–201.
- [H-Le] A. HILBERT et R. LÉANDRE - *Nagel, Stein, Wainger estimates for balls associated with the Bismut condition*, preprint.
- [Hö1] L. HÖRMANDER - *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147–171.
- [Hö2] L. HÖRMANDER - *Analysis of linear partial differential operators*, III, Springer GdMW **274** (1985).
- [J-S1] D. JERISON et A. SANCHEZ–CALLE - *Subelliptic second order differential operators*, in Complex analysis III, Springer LNM **1277** (1987).
- [J-S2] D. JERISON et A. SANCHEZ–CALLE - *Estimates for the heat kernel for the sum of squares of vector fields*, Indiana Univ. Math. Journ. **35** (1986), 835–854.
- [Le1] R. LÉANDRE - *Volumes des boules sous-riemanniennes et explosion du noyau de la chaleur au sens de Stein*, Séminaire de Probabilité XXIII, J. Azéma, J. Yor eds, Springer LNM **1372** (1990), 426–448.
- [Le2] R. LÉANDRE - *Développement asymptotique de la densité d'une diffusion dégénérée*, Forum Math. **4** (1992), 45–75.
- [Le3] R. LÉANDRE - *Applications quantitatives et géométriques du calcul de Malliavin*, Stochastic Analysis, G. Métivier, S. Watanabe eds, Springer LNM **1322** (1988), 109–133.
- [L-S] W.S. LIU et H.J. SUSSMANN - *Shortest paths for sub-riemannian metrics on rank 2 distributions*, Mem. A.M.S., n° 564, Vol. 118, november 1995.
- [M] P. MALLIAVIN - *Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators*, Proc. Intern. Symp. S.D.E. Kyoto, 1976, K. Itô ed., 195–263, Kinokuniya, Tokyo, 1978.
- [Ma] P. MATTILA - *Geometry of sets and measures in euclidean spaces : fractals and rectifiability*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 44, Cambridge University Press (1995).
- [Me] G. MÉTIVIER - *Fonction spectrale et valeurs propres d'une classe d'opérateurs non-elliptiques*, Comm. Partial Differential Equations **1** (1976), 467–519.
- [Mi] J. MITCHELL - *On Carnot–Caratheodory metrics*, Jour. Diff. Geom. **21** (1985), 35–45.
- [Mo] S.A. MOLCHANOV - *Diffusion processes and riemannian geometry*, Russian Math. Surveys **30** (1975), 1–63.
- [Mon] R. MONTGOMERY - *A survey of singular curves in sub-riemannian geometry*, Journal of Dynamical and Control Systems, vol. 1, n° 1 (1995), 49–90.

- [Mu] S. MUSTAPHA - *Distances sous-elliptiques et puissances d'opérateurs différentiels*, Ark. för Math. **34** (1996), 159–177.
- [M-V] S. MUSTAPHA et N. VAROPOULOS - *Comparaison höldérienne des distances sous-elliptiques et calcul  $S(m, g)$* , Potential Analysis **4** (1995), 415–428.
- [N-S-W] A. NAGEL, E.M. STEIN et S. WAINGER - *Balls and metrics defined by vector fields I : basic properties*, Acta Math. **155** (1985), 103–147.
- [O-R] O.A. OLEINIK et E.V. RADKEVIC - *Second order equations with non-negative characteristic form*, A.M.S. (1973).
- [P] P. PANSU - *Métriques de Carnot–Caratheodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un*, Ann. of Math. **129:1** (1989), 1–61.
- [R] M. RUMIN - *Un complexe de formes différentielles sur les variétés de contact*, C.R.A.S. t. 310 (1990), 401–404.
- [S] A. SANCHEZ–CALLE - *Fundamental solutions and geometry of the sums of squares of vector fields*, Invent. Math. **78** (1984), 143–160.
- [Ste] E.M. STEIN - *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press (1970).
- [Str] R.S. STRICHARTZ - *Sub-riemannian geometry*, Jour. Diff. Geometry **24** (1986), 221–263.
- [Th] R. THOM - *Remarques sur les problèmes comportant des inégalités différentielles globales*, Bull. Soc. Math. France **87** (1959), 455–461.
- [Va1] N.Th. VAROPOULOS - *Small time Gaussian estimates of heat diffusion kernels, II : the theory of large derivations*, Jour. Funct. Analysis **93** (1990), 1–33.
- [Va2] N.Th. VAROPOULOS - *Opérateurs sous-elliptiques du second ordre*, C.R.A.S., t. 308, Série I (1989), 437–440.
- [V-S-C] N.Th. VAROPOULOS, L. SALOFF–COSTE et Th. COULHON - *Analysis and geometry on groups*, Cambridge Univ. Press (1993).
- [V-G] A.M. VERSHIK et V. Ya. GERSHKOVICH - *Non-holonomic problems and the theory of distributions*, Acta Appl. Math. **12** (1988), 181–209.

Ivan KUPKA  
 Université Paris VI  
 Institut de Mathématiques  
 UMR 9992 du CNRS  
 Case 247  
 4, place Jussieu  
 F-75252 PARIS CEDEX 05

# Astérisque

CLAUDE SABBAH

**Classes caractéristiques et théorèmes d'indice  
: point de vue microlocal**

*Astérisque*, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 818, p. 381-409

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1995-1996\\_\\_38\\_\\_381\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__381_0)

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CLASSES CARACTÉRISTIQUES ET THÉORÈMES D'INDICE :  
POINT DE VUE MICROLOCAL

par Claude SABBAH

## Introduction

Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch (GRR) pour les fibrés sur une variété algébrique a de nombreuses généralisations. Il est naturel de l'étendre aux faisceaux cohérents de modules sur l'anneau  $\mathcal{D}_X$  des opérateurs différentiels linéaires sur une variété algébrique ou analytique complexe  $X$ , ceci pour plusieurs raisons :

- Le théorème GRR dans le cadre analytique complexe pour un fibré holomorphe est conséquence du théorème de l'indice relatif d'Atiyah-Singer pour les complexes elliptiques : on applique celui-ci au complexe de Dolbeault associé au fibré. La relation n'est cependant pas à sens unique. Si l'on étend GRR aux  $\mathcal{D}$ -modules — plus précisément aux *paires elliptiques* — on peut en déduire le théorème de l'indice des complexes elliptiques, au moins lorsque les données sont analytiques réelles (lorsque ces données sont  $C^\infty$  on se ramène au cas analytique réel par une petite perturbation qui ne modifie pas l'indice). Pour ce faire, on commence par complexifier la variété et le complexe elliptique. Ce qu'on obtient est le complexe de de Rham d'un  $\mathcal{D}$ -module et on applique GRR à ce  $\mathcal{D}$ -module. Voilà résumée l'approche de Boutet de Monvel et Malgrange [B-M90]. Elle jette une lumière nouvelle sur les relations entre théorèmes d'indice d'Atiyah-Singer et GRR.

- Le théorème GRR pour les  $\mathcal{D}$ -modules *holonomes* rend compte de la théorie des classes de Chern des variétés singulières de Schwartz-MacPherson.

- Dans le même ordre d'idées, la version de GRR où les classes caractéristiques sont analytiques, c'est-à-dire prises dans la cohomologie de Hodge  $\oplus_p H^p(X, \Omega_X^p)$  ([O-T-T81c, O-T-T85]), fait intervenir de manière essentielle la théorie de la dualité pour les faisceaux cohérents. Celle-ci s'étend de façon satisfaisante aux  $\mathcal{D}$ -modules, établissant notamment un lien avec la dualité topologique de Poincaré-Verdier. Aussi est-il naturel de transporter GRR aux  $\mathcal{D}$ -modules. Cet aspect est développé par Schapira et Schneiders [Sch-Sch94] dans leur construction d'une classe d'Euler microlocale et dans la démonstration de son bon comportement par image directe.

Dans cet exposé, je me placerai dans le cadre analytique complexe et j'insisterai sur les méthodes d'inspiration microlocale. Un certain nombre de résultats se transposent sans mal au cadre algébrique complexe, où les démonstrations sont parfois plus simples.

La première question à aborder, pour que GRR ait un sens, est la cohérence des images directes. Il est souvent nécessaire de considérer des situations plus générales que celle d'un morphisme propre entre espaces analytiques complexes.

Un cadre assez large dans lequel on dispose d'un théorème de cohérence des images directes (généralisant le théorème de Grauert) est celui des *paires elliptiques* formées d'un  $\mathcal{D}$ -module et d'un faisceau  $\mathbf{R}$ -constructible vérifiant une condition de transversalité relativement à une application holomorphe  $f : X \rightarrow Y$  ([Sch-Sch94]). La cohérence des systèmes de Gauss-Manin locaux ou semi-locaux en est un cas particulier. Ce cadre contient aussi une théorie de la dualité. Il permet notamment de considérer la restriction d'un  $\mathcal{D}$ -module à un ensemble sous-analytique réel transverse à sa variété caractéristique, une sous-variété analytique réelle à bord par exemple.

Dans [B-F-M79] le théorème GRR est exprimé comme la compatibilité à l'image directe d'un morphisme  $\alpha : K_0^{\text{alg}}(X) \rightarrow K_0^{\text{top}}(X)$ , où le premier groupe de Grothendieck est celui des faisceaux cohérents et le second s'exprime à l'aide d'un plongement de la variété  $X$  dans  $\mathbf{C}^N$  : c'est le groupe des classes d'homotopie stable de morphismes de fibrés vectoriels complexes de rang fini sur  $\mathbf{C}^N$ , qui sont des isomorphismes hors de  $X$ . Dans [Le87] Levy a étendu au cadre analytique complexe la construction d'un tel morphisme et le théorème GRR correspondant.

Une conséquence en est un théorème GRR pour la classe  $\mu\tau_\Lambda$  d'un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent  $\mathcal{M}$ , analogue de la classe  $\tau$  d'un faisceau cohérent [B-F-M79] : si  $\Lambda \subset T^*X$  désigne la variété caractéristique de  $\mathcal{M}$ ,  $\text{Td}(X)$  la classe de Todd du fibré tangent de  $X$  remonté à  $T^*X$  et  $\text{ch}_\Lambda$  un caractère de Chern, pris dans la cohomologie à support  $H_\Lambda^*(T^*X)$ , qui est soit la cohomologie à coefficients dans  $\mathbf{Q}$ , soit la cohomologie de Hodge, on a

$$\mu\tau_\Lambda(\mathcal{M}) = \text{ch}_\Lambda(\mathcal{M}) \smile \text{Td}(X) \in H_\Lambda^*(T^*X).$$

Ceci est déjà remarqué par Laumon [Lau83] lorsque  $\Lambda = T^*X$ , *i.e.* lorsqu'on oublie les supports.

Le *théorème d'indice* de Boutet de Monvel et Malgrange [B-M90] reprend la formulation de [B-F-M79] pour les  $\mathcal{D}$ -modules : on explicite un morphisme  $\gamma : K_\Lambda(\mathcal{D}_X) \rightarrow K_\Lambda^{\text{top}}(T^*X)$  et on montre qu'il commute à l'image directe propre. Mieux, lorsque  $U$  est un ouvert relativement compact de  $X$ , de bord  $\bar{U} - U$  analytique réel et *non caractéristique relativement à  $\Lambda$* , on peut aussi définir  $\gamma : K_\Lambda(\mathcal{D}_{X|\bar{U}}) \rightarrow K_\Lambda^{\text{top}}(T^*X|\bar{U})$ , et celui-ci commute à l'image directe par une application analytique  $f$ , sur la partie  $f$ -elliptique de  $K_\Lambda(\mathcal{D}_{X|\bar{U}})$ .

On peut voir  $\mu\tau_{\Lambda}^i(\mathcal{M}) \in H_{\Lambda}^{2i}(T^*X, \mathbf{Q})$  comme une classe d'homologie (de Borel-Moore) de  $\Lambda$ , de dimension  $2(2 \dim X - i)$ . Schapira et Schneiders [Sch-Sch94] conjecturent que, de même que l'on a  $\dim \Lambda \geq \dim X$  à cause de l'involutivité de  $\Lambda$  ([S-K-K73], voir aussi l'exposé n° 522 [Ma78]), la classe  $\mu\tau_{\Lambda}(\mathcal{M})$  vérifie l'*inégalité de Bernstein*

$$\mu\tau_{\Lambda}^i(\mathcal{M}) \neq 0 \implies 2 \dim X - i \geq \dim X.$$

Ils conjecturent aussi que la classe de dimension supposée minimale  $\mu\tau_{\Lambda}^{\dim X}(\mathcal{M})$  coïncide avec la *classe d'Euler microlocale*  $\mu\text{eu}(\mathcal{M})$  qu'ils associent à la paire elliptique formée du  $\mathcal{D}_X$ -module  $\mathcal{M}$  et du faisceau constant  $\mathbf{C}_X$  en "microlocalisant" la construction analogue pour les faisceaux  $\mathcal{O}$ -cohérents ([O-T-T81, O-T-T81b] par exemple). La formule de type GRR qu'ils démontrent pour la classe  $\mu\text{eu}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  associée à une paire  $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$   $f$ -elliptique généraliserait ainsi celle déduite du théorème d'indice de [B-M90].

Dans le cas des  $\mathcal{D}$ -modules holonomes, le théorème d'indice est essentiellement équivalent au théorème de MacPherson sur les classes de Chern des variétés singulières [MP74], d'après [B-D-K81]. Un tel module peut être considéré comme un fibré avec connexion plate singulière. Malgrange propose de lui associer des classes caractéristiques *secondaires* microlocales

$$c'_k(\mathcal{M}) \in H_{\Lambda}^{2 \dim X + 2k - 1}(T^*X, \mathbf{C}/\mathbf{Z}).$$

Il réussit à construire la classe  $c'_1$ , à coefficients dans  $\mathbf{C}/(\frac{1}{2}\mathbf{Z})$  cependant. Quant au comportement par image directe, analogue au théorème de Bismut-Lott [B-L95], la question est ouverte.

Je remercie L. Boutet de Monvel, B. Malgrange, P. Schapira et J.-P. Schneiders pour les échanges que nous avons eus à propos de ce texte.

## 1. Image directe de $\mathcal{D}$ -modules

### 1.1. $\mathcal{D}$ -modules, variété caractéristique, image directe

Dans la suite,  $X$  désignera une variété analytique complexe de dimension  $d$ ,  $\mathcal{O}_X$  le faisceau des fonctions holomorphes sur  $X$  et  $\mathcal{D}_X$  celui des opérateurs différentiels à coefficients dans  $\mathcal{O}_X$  (voir par exemple [Ka70, Bj79, Ph79, Scha85, Me87, G-M90, Schn94b]). Par  $\mathcal{D}_X$ -module nous entendrons un  $\mathcal{D}_X$ -module à droite. Si le contexte est clair, celui-ci est aussi supposé cohérent.

#### 1.1.1. Exemples.

1. Le faisceau  $\Omega_X^d$  localement  $\mathcal{O}$ -libre de rang 1 des formes holomorphes de degré maximum sur  $X$ , sur lequel les champs de vecteurs opèrent à droite par dérivée de Lie :  $\omega \cdot \xi \stackrel{\text{déf}}{=} -\mathcal{L}_{\xi}(\omega)$ , et cette action s'étend en une action à droite de  $\mathcal{D}$  par

composition. Ce  $\mathcal{D}$ -module est noté  $\Omega_X$ . Il donne l'équivalence entre les catégories de  $\mathcal{D}$ -modules à gauche et  $\mathcal{D}$ -modules à droite (voir *loc. cit.*) :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \text{ (à droite)} &\longleftrightarrow \mathcal{N} \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{M}) \text{ (à gauche)} \\ \mathcal{N} \text{ (à gauche)} &\longleftrightarrow \mathcal{M} \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \text{ (à droite)}. \end{aligned}$$

2. Plus généralement, si  $\mathcal{L}$  est un faisceau  $\mathcal{O}$ -localement libre de rang fini sur  $X$ , la donnée d'une connexion *plate*  $\nabla : \mathcal{L} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}$  le munit d'une structure de  $\mathcal{D}_X$ -module à gauche, et  $\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{L}$  est un  $\mathcal{D}$ -module à droite.
3. Pour tout faisceau  $\mathcal{O}_X$ -cohérent  $\mathcal{F}$ , le  $\mathcal{D}$ -module induit associé  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$  hérite de la structure de  $\mathcal{D}$ -module à droite sur  $\mathcal{D}$ .
4. Soit  $\mathcal{F}$  un sous-faisceau  $\mathcal{O}_X$ -cohérent du faisceau  $\Theta_X$  des champs de vecteurs holomorphes sur  $X$ . Il engendre un idéal à gauche  $\mathcal{D}_X \mathcal{F}$  de  $\mathcal{D}_X$ . Lorsque  $\mathcal{F}$  est *intégrable*, c'est-à-dire stable par le crochet des champs de vecteurs, le faisceau  $\mathcal{F}$  définit un *feuilletage singulier* de faisceau normal  $\Theta_{\mathcal{F}} \stackrel{\text{déf}}{=} \Theta_X / \mathcal{F}$  et un  $\mathcal{D}_X$ -module à gauche  $\mathcal{D}_{\mathcal{F}} = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X \mathcal{F}$ . De ce point de vue, on s'intéresse au système linéaire d'équations aux dérivées partielles défini par les champs de vecteurs de  $\mathcal{F}$ .
5. Une matrice  $A$  d'opérateurs différentiels définit, par multiplication à gauche, une application  $\mathcal{D}_X$ -linéaire à droite  $\mathcal{D}_X^q \rightarrow \mathcal{D}_X^p$ , dont le noyau et le conoyau sont des  $\mathcal{D}_X$ -modules à droite cohérents.

1.1.2. *Variété caractéristique.* — Localement sur  $X$ , le  $\mathcal{D}$ -module  $\mathcal{M}$  peut être engendré sur  $\mathcal{D}$  par un  $\mathcal{O}$ -module cohérent  $\mathcal{F}$ . Les  $\mathcal{O}$ -sous-modules  $\mathcal{F} \cdot \mathcal{D}(k)$ , où  $\mathcal{D}(k)$  est le faisceau des opérateurs d'ordre  $\leq k$ , forment une *bonne filtration* de  $\mathcal{M}$ . Le gradué de cette filtration est un module gradué (sur l'ouvert considéré) sur l'anneau gradué  $\text{gr } \mathcal{D}$  identifié à l'anneau des fonctions sur l'espace cotangent  $T^*X$  qui sont polynomiales dans les fibres de la projection  $\pi : T^*X \rightarrow X$ . Nous notons  $\mathcal{O}_X[TX]$  cet anneau lorsque nous en oublions la graduation.

Le support de ce module ne dépend pas de la bonne filtration choisie et les supports locaux se recollent en un sous-ensemble analytique  $\text{Car } \mathcal{M}$  de  $T^*X$ , algébrique relativement à  $\pi$ , homogène relativement à l'action de  $\mathbf{C}^*$  dans les fibres de  $\pi$  : c'est la *variété caractéristique* de  $\mathcal{M}$ . Cette variété est involutive pour la structure symplectique usuelle de  $T^*X$  ([S-K-K73], voir aussi [Ma78, Ga81, G-M90]). Lorsqu'elle est lagrangienne,  $\mathcal{M}$  est dit *holonome*.

La variété caractéristique d'un complexe borné de  $\mathcal{D}_X$ -modules à cohomologie  $\mathcal{D}_X$ -cohérente est par définition la réunion de celles de ses modules de cohomologie.

La variété caractéristique d'un fibré plat est réduite à la section nulle  $T_X^*X$  et celle d'un  $\mathcal{D}$ -module induit est la restriction au support du  $\mathcal{O}$ -module de l'espace cotangent  $T^*X$ . Pour un feuilletage non singulier  $\mathcal{F}$ , la variété  $\text{Car } \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$  est le fibré conormal aux

feuilles. Si au voisinage d'un point singulier  $x$  de  $\Theta_{\mathcal{F}}$  il existe un système de générateurs de  $\mathcal{F}_x$  dont les symboles dans  $\mathrm{gr}_1 \mathcal{D}_{X,x}$  forment une suite régulière dans l'anneau  $\mathrm{gr} \mathcal{D}_{X,x}$ , on peut montrer [Su90] qu'au voisinage de ce point  $\mathrm{Car} \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$  est la sous-variété de  $T^*X$  définie par les symboles des sections locales de  $\mathcal{F}$  (donc est une intersection complète définie par des équations linéaires dans la variable cotangente).

1.1.3. *Complexe de de Rham et image directe.* — Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de variétés analytiques. Le module de transfert  $\mathcal{D}_{X \rightarrow Y} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y$  est naturellement muni d'une structure de  $\mathcal{D}_X$ -module à gauche et de  $f^{-1}\mathcal{D}_Y$ -module à droite. Il fait passer d'un  $\mathcal{D}_X$ -module à un  $f^{-1}\mathcal{D}_Y$ -module par  $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}$ . Plus généralement il permet de définir un foncteur  $D^b(\mathcal{D}_X) \rightarrow D^b(f^{-1}\mathcal{D}_Y)$  (catégories dérivées des complexes bornés de  $\mathcal{D}_X$  et  $\mathcal{D}_Y$ -modules) par  $\mathcal{M}^\bullet \mapsto \mathcal{M}^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}$ .

Lorsque la variété  $Y$  est réduite à un point, on a  $\mathcal{D}_{X \rightarrow \mathrm{pt}} = \mathcal{O}_X$  et  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_X$  est le complexe de de Rham  $\mathrm{DR}(\mathcal{M})$ . Dans ce cas, la cohomologie de  $f_+ \mathcal{M}$  (resp.  $f_{\dagger} \mathcal{M}$ ) est l'hypercohomologie (resp. à support compact) de ce complexe de de Rham.

*Exemples.* — On a  $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X$  et, plus généralement, le complexe de de Rham d'un  $\mathcal{D}_X$ -module induit  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$  est égal au faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  qui lui donne naissance. Par ailleurs,  $\mathrm{DR}(\Omega_X)$  est le faisceau constant sur  $X$  placé en degré  $-\dim X$  et noté  $\mathbf{C}_X[\dim X]$ , et pour tout fibré plat  $(\mathcal{L}, \nabla)$ , on a  $\mathrm{DR}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}[\dim X]$ , où  $\mathcal{L}$  est le faisceau localement constant des sections horizontales de  $\mathcal{L}$ . Enfin, lorsque  $\mathcal{M}$  est holonome, un théorème de Kashiwara affirme que  $\mathrm{DR}(\mathcal{M})$  est à cohomologie  $\mathbf{C}$ -constructible (cf. § 1.2).

Les images directes  $f_+$  et  $f_{\dagger}$  sont les foncteurs de  $D^b(\mathcal{D}_X)$  dans  $D^b(\mathcal{D}_Y)$  obtenus en composant le foncteur de transfert précédent avec l'image directe  $\mathbf{R}f_*$ , resp.  $\mathbf{R}f_{\dagger}$  (support  $f$ -propre), au sens de la catégorie des faisceaux.

Pour un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent  $\mathcal{M}$ , l'image directe  $f_+ \mathcal{M}$  est à cohomologie  $\mathcal{D}_Y$ -cohérente lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1)  $f$  est propre sur le support de  $\mathcal{M}$  (donc  $f_+ \mathcal{M} = f_{\dagger} \mathcal{M}$ ),
- (2) au voisinage de toute fibre  $f^{-1}(y)$  il existe un faisceau  $\mathcal{O}$ -cohérent dans  $\mathcal{M}$  qui engendre  $\mathcal{M}$  comme  $\mathcal{D}_X$ -module.

La démonstration ([Ka76], voir aussi [Ma90]) utilise le théorème de cohérence de Grauert. La deuxième propriété est satisfaite de manière évidente pour les  $\mathcal{D}$ -modules induits, mais de manière beaucoup moins évidente pour les modules holonomes : le cas des fibrés méromorphes à connexion régulière est obtenu par l'extension de Deligne [Del70] et le cas irrégulier dans [Ma95]; le cas des modules holonomes est ramené au cas des fibrés méromorphes par microlocalisation ([K-K81] pour le cas régulier et [Ma94] en général).

Le même résultat vaut pour un objet  $\mathcal{M}^\bullet$  de  $D^b(\mathcal{D}_X)$  dont les modules de cohomologie satisfont les propriétés ci-dessus. Enfin, l'image directe propre commute à la dualité, ce qui généralise la dualité de Serre (voir [Schn86, Me87, Sa89]).

*Comportement de la variété caractéristique.* — Il est connu sous le nom d'estimation de Kashiwara et utilise le "diagramme japonais"

$$T^*X \xleftarrow{t'f} X \times_Y T^*Y \xrightarrow{f_\pi} T^*Y$$

où  $t'f$  est l'application cotangente à  $f$  et  $f_\pi$  l'application induite par  $f$ . Il sera commode de noter, pour  $\Lambda \subset T^*X$ ,  $f_+(\Lambda) = f_\pi(t'f'^{-1}\Lambda)$ .

(1.1.4) THÉORÈME ([Ka76]). — *Pour un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent satisfaisant les propriétés (1) et (2) ci-dessus, on a  $\text{Car}(f_+\mathcal{M}) \subset f_\pi(t'f'^{-1}\text{Car } \mathcal{M}) = f_+(\text{Car } \mathcal{M})$ . □*

On peut aussi remplacer  $\mathcal{M}$  par un complexe borné  $\mathcal{M}^\bullet$  et faire l'hypothèse sur ses modules de cohomologie.

Il se peut qu'il n'y ait pas égalité; pire, l'ensemble  $f_\pi(t'f'^{-1}\text{Car } \mathcal{M})$  peut contenir des composantes irréductibles qui ne sont pas involutives. Lorsque  $\mathcal{M}$  est holonome, les composantes non lagrangiennes de cet ensemble sont isotropes et on peut les oublier dans l'estimation ci-dessus.

## 1.2. Paires elliptiques

La cohérence des images directes persiste lorsqu'on restreint  $f$  à un ensemble sous-analytique réel de  $X$ , moyennant une condition d'ellipticité de  $\mathcal{M}$  par rapport à ce sous-ensemble, condition qui s'exprime en termes de la variété caractéristique de  $\mathcal{M}$  et du *microsupport* du sous-ensemble (plus exactement du faisceau constant sur ce sous-ensemble). Le comportement de la variété caractéristique se décrit aussi en ces termes.

*Microsupport d'un faisceau.* — Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau  $\mathbf{C}$ -constructible sur  $X$  (i.e. localement constant de rang fini sur les strates d'une stratification de Whitney analytique complexe de  $X$ ) on sait ([Ka84, Me84]) qu'il existe un complexe borné  $\mathcal{M}^\bullet$  de  $\mathcal{D}_X$ -modules à cohomologie holonome tel que le complexe de de Rham  $\text{DR}(\mathcal{M}^\bullet)$  ait pour seul faisceau de cohomologie un faisceau isomorphe à  $\mathcal{F}$ . Il est alors naturel d'appeler variété caractéristique de  $\mathcal{F}$ , ou *microsupport*, l'ensemble  $\text{Car } \mathcal{M}^\bullet$ . C'est un ensemble lagrangien  $\mathbf{C}^*$ -homogène dans  $T^*X$ . Grâce à [B-D-K81], il peut être défini à l'aide de la fonction  $x \mapsto \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{F}_x$  et de l'obstruction d'Euler locale de MacPherson [MP74].

On peut en fait définir pour tout faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$  (ou tout complexe borné de faisceaux) un *microsupport*  $\mu\text{Supp } \mathcal{F}$  dans  $T^*X$  par une procédure homologique à la Morse :

(1.2.1) DÉFINITION ([K-S82, K-S90]). — Un point  $(x^\circ, \xi^\circ) \in T^*X$  n'est pas dans le microsupport  $\mu\text{Supp}(\mathcal{F})$  si pour toute fonction  $\psi$  de classe  $C^1$  définie au voisinage de  $x^\circ$  telle que  $d\psi(x^\circ)$  soit proche de  $(x^\circ, \xi^\circ)$  et tout  $x$  assez voisin de  $x^\circ$ , les groupes de cohomologie à support  $\mathcal{H}_{\{\psi \geq \psi(x)\}}^i(\mathcal{F})_x$  sont tous nuls.

Autrement dit, au niveau des germes, la cohomologie à coefficients dans  $\mathcal{F}$  d'un voisinage de  $x$  est la même que celle de l'ensemble  $\{\psi < \psi(x)\}$  dans ce voisinage.

Le lien, indiqué ci-dessus dans le cas holonome, avec les variétés caractéristiques de  $\mathcal{D}$ -modules est général :

(1.2.2) THÉORÈME ([K-S82], [K-S90, 11.3.3]). — Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent (ou un complexe borné à cohomologie  $\mathcal{D}_X$ -cohérente), on a  $\text{Car } \mathcal{M} = \mu\text{Supp}(\text{DR}(\mathcal{M}))$ .  $\square$

Remarque. — Il peut être plus suggestif de considérer le complexe des solutions holomorphes  $\text{Sol}(\mathcal{M}^\bullet) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^\bullet, \Omega_X)$  de  $\mathcal{M}$  à valeurs dans  $\Omega_X$ , dont les faisceaux de cohomologie sont les  $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}}^i(\mathcal{M}, \Omega_X)$ . On a aussi l'égalité  $\text{Car } \mathcal{M} = \mu\text{Supp } \text{Sol}(\mathcal{M})$ .

La notion de microsupport ne dépend que de la structure de variété réelle sous-jacente à  $X$ . Un des beaux résultats de la théorie microlocale des faisceaux est la caractérisation des faisceaux ou complexes  $\mathbf{R}$ -constructibles (i.e. la cohomologie est localement constante et de rang fini sur les strates d'une stratification de Whitney sous-analytique réelle de  $X$ ) et  $\mathbf{C}$ -constructibles :

(1.2.3) THÉORÈME ([K-S90, 8.4.2 et 8.5.5]).

1. Un complexe borné  $\mathcal{F}^\bullet$  dont les faisceaux de cohomologie sont ponctuellement de dimension finie sur  $\mathbf{C}$  est  $\mathbf{R}$ -constructible si et seulement si son microsupport est (contenu dans) un ensemble sous-analytique lagrangien  $\mathbf{R}_+^*$ -homogène de  $T^*X$ .

2. Un complexe borné  $\mathbf{R}$ -constructible est  $\mathbf{C}$ -constructible si et seulement si son microsupport est  $\mathbf{C}^*$ -homogène.  $\square$

Paires elliptiques et relativement elliptiques [Sch-Sch90]. — La donnée d'un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent (ou d'un complexe borné à cohomologie  $\mathcal{D}_X$ -cohérente) et d'un complexe  $\mathbf{R}$ -constructible  $\mathcal{F}^\bullet$  forme une paire elliptique si les sous-ensembles  $\text{Car } \mathcal{M}$  et  $\mu\text{Supp } \mathcal{F}^\bullet$  de  $T^*X$  ne se coupent pas hors de la section nulle  $T_X^*X$ .

Plus généralement, si  $f : X \rightarrow Y$  est une application  $\mathbf{C}$ -analytique, on associe à  $\mathcal{M}$  une variété caractéristique relative  $\text{Car}_f \mathcal{M} \subset T^*X$ , et la paire formée de  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{F}^\bullet$  est dite  $f$ -elliptique si  $\text{Car}_f \mathcal{M}$  et  $\mu\text{Supp } \mathcal{F}^\bullet$  ne se coupent pas hors de la section nulle. L'ellipticité correspond au cas où  $Y$  est réduite à un point.

La variété  $\text{Car}_f \mathcal{M}$  contient la variété  $\text{Car } \mathcal{M}$  et vérifie de plus

$$\text{Car}_f \mathcal{M} = \text{Car } \mathcal{M} + {}^t f'(X \times_Y T^*Y).$$

Lorsque  $f$  est une submersion par exemple, on dispose du faisceau  $\mathcal{D}_{X/Y}$  des opérateurs différentiels dans les fibres de  $f$ ; on choisit localement un sous- $\mathcal{D}_{X/Y}$ -module cohérent  $\mathcal{M}_0$  de  $\mathcal{M}$  vérifiant  $\mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{D}_X = \mathcal{M}$ ; la variété caractéristique du  $\mathcal{D}_X$ -module  $\mathcal{M}_0 \otimes_{\mathcal{D}_{X/Y}} \mathcal{D}_X$  ne dépend pas du choix d'un tel  $\mathcal{M}_0$ , donc est bien définie globalement : c'est  $\text{Car}_f \mathcal{M}$ . Le  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -module  $\mathcal{M}_0$  a une variété caractéristique  $\text{Car}_{X/Y} \mathcal{M}_0$  dans le fibré cotangent relatif  $T^*(X/Y)$  (définie à l'aide d'une bonne filtration). La variété  $\text{Car}_f \mathcal{M}$  est aussi l'image inverse de  $\text{Car}_{X/Y} \mathcal{M}_0$  par l'application  $T^*X \rightarrow T^*(X/Y)$ .

*Remarque.* — La variété  $\text{Car}_f \mathcal{M}$  n'est pas déterminée par la seule donnée de  $\text{Car} \mathcal{M}$  en général. C'est cependant le cas lorsque  $\mathcal{M}$  est holonome régulier : si  $\overline{T_{X_\alpha}^* X}$  sont les composantes irréductibles de  $\text{Car} \mathcal{M}$ , où les  $X_\alpha$  sont des sous-variétés analytiques localement fermées de  $X$ , la variété  $\text{Car}_{X/Y} \mathcal{M}_0$  (en supposant  $f$  submersive) est réunion des adhérences des fibrés conormaux aux fibres de  $f$  restreinte à certaines des  $X_\alpha$ . Ceci permet d'obtenir par exemple, à l'aide du théorème 1.2.4 ci-dessous la cohérence de systèmes de Gauss-Manin locaux. Lorsque  $\mathcal{M}$  est holonome mais pas régulier, la variété caractéristique relative peut contenir d'autres composantes que celles décrites ci-dessus et les systèmes de Gauss-Manin locaux peuvent n'être plus cohérents, même lorsque  $\dim Y = 1$ .

*Quelques exemples.*

(a) La paire formée d'un complexe borné  $\mathcal{M}^\bullet$  à cohomologie  $\mathcal{D}_X$ -cohérente et du faisceau constant  $\mathbf{C}_X$  est  $f$ -elliptique.

(b) La paire formée de  $\mathcal{O}_X$  et d'un complexe  $\mathbf{R}$ -constructible  $\mathcal{F}^\bullet$  est  $f$ -elliptique.

(c) Soit  $M$  une variété analytique réelle et  $\mathcal{E}_M^\bullet$  un complexe borné dont les termes sont des fibrés analytiques réels et les opérateurs de bord  $D_i : \mathcal{E}_M^i \rightarrow \mathcal{E}_M^{i+1}$  sont des opérateurs différentiels. On prend pour  $X$  la variété complexifiée de  $M$  et on considère le complexifié  $\mathcal{E}_X^\bullet$  du complexe  $\mathcal{E}_M^\bullet$ , dont les termes sont des fibrés holomorphes sur  $X$  et les bords des opérateurs différentiels holomorphes. On peut alors construire un complexe  $\mathcal{M}^\bullet$  de  $\mathcal{D}_X$ -modules à droite, avec  $\mathcal{M}^i = \mathcal{E}_X^i \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$  de sorte que  $\mathcal{E}_X^\bullet$  s'identifie au complexe  $\text{DR}(\mathcal{M}^\bullet) = \mathcal{M}^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{O}_X$  et que le symbole du complexe  $\mathcal{E}_X^\bullet$  soit le complexe gradué (pour une bonne filtration convenable) du complexe  $\mathcal{M}^\bullet$ . Ainsi son support contient  $\text{Car} \mathcal{M}^\bullet$ .

Dans ces conditions, si le complexe  $\mathcal{E}_M^\bullet$  est elliptique (au sens de [A-S68, § 7]), la paire formée de  $\mathcal{M}^\bullet$  et du faisceau  $\mathbf{C}_M$ , constant sur  $M$  et nul hors de  $M$ , est elliptique. Ici, le microsupport  $\mu\text{Supp} \mathbf{C}_M$  est le fibré conormal  $T_M^* X$ .

(d) Soit  $U$  un ouvert de  $X$  dont la frontière  $\partial U = \overline{U} - U$  est une hypersurface de classe  $C^1$ . Alors  $\mu\text{Supp} \mathbf{C}_{\overline{U}}$  est la réunion de la section nulle  $\overline{U}$  et de  $\{\lambda d\varphi(x) \mid \lambda > 0, \varphi(x) = 0\}$ , partie "rentrante" du fibré conormal  $T_{\partial U}^* X$ , si  $\overline{U}$  est défini par  $\varphi \geq 0$  au voisinage de  $\partial U$ . La notion de paire elliptique, telle qu'elle est définie, ne rend pas compte des complexes elliptiques sur les variétés à bord tels qu'ils sont définis dans [A-B64, At65]. Néanmoins il devrait être possible d'adapter la définition et le théorème

ci-dessous à cette situation. Noter que si  $\partial U \neq \emptyset$ , la paire  $(\mathcal{M}, C_U)$  n'est pas elliptique lorsque  $\mathcal{M}$  provient d'un faisceau  $\mathcal{O}$ -cohérent dont le support contient  $\bar{U}$ .

*Image directe et comportement de la variété caractéristique.* — Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application analytique et  $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  une paire  $f$ -elliptique. On suppose toujours la propriété (2) du § 1.1.3 satisfaite. On peut définir l'image directe de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{M}$  par

$$f_+(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M}) = \mathbf{R}f_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M} \stackrel{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \rightarrow Y})$$

et de même pour  $f_+$  en remplaçant  $\mathbf{R}f_*$  par  $\mathbf{R}f_!$ . Les faisceaux de cohomologie de  $f_+(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M})$  sont des  $\mathcal{D}_Y$ -modules.

(1.2.4) THÉORÈME ([Sch-Sch90]). — *Si  $f$  est propre sur  $\text{Supp } \mathcal{F} \cap \text{Supp } \mathcal{M}$ , l'image directe  $f_+(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M})$  est à cohomologie  $\mathcal{D}_Y$ -cohérente et l'on a*

$$\text{Car } f_+(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M}) \subset f_{+|\text{Supp } \mathcal{F}}(\text{Car } \mathcal{M}).$$

Dans l'exemple (c) on a  $\text{Supp } C_M \cap \text{Supp } M^* \subset M$ . Si  $M$  est compacte et  $f$  est l'application constante,  $f_+(C_M \otimes M^*)$  a pour cohomologie celle de  $\Gamma(M, \mathcal{E}_M^*)$  et la caractéristique d'Euler est égale à celle du complexe elliptique  $\mathcal{E}_M^*$ .

Ce théorème de cohérence généralise celui de [H-S84]. La démonstration élégante qu'en donnent Schapira et Schneiders utilise deux résultats : d'une part une résolution, introduite par Kashiwara [Ka84], du faisceau constructible  $\mathcal{F}$  (par exemple le faisceau constant) par des faisceaux sommes directes localement finies de faisceaux constants  $C_W$ , où  $W$  est un ensemble ouvert sous-analytique relativement compact dans  $X$  dont le comportement au bord  $\bar{W} - W$  est assez régulier ; on impose de plus que les différentielles du complexe soient induites par des combinaisons linéaires d'applications  $C_W \rightarrow C_{W'}$ , pour  $W \subset W'$  ; d'autre part une version des théorèmes de finitude pour la cohomologie de complexes de modules de Fréchet sur une algèbre de Fréchet [Schn94].  $\square$

## 2. Riemann-Roch pour les faisceaux $\mathcal{O}$ -cohérents, application aux $\mathcal{D}$ -modules

Le théorème GRR pour les  $\mathcal{D}$ -modules est conséquence de celui pour les faisceaux  $\mathcal{O}$ -cohérents, ainsi que l'a remarqué Laumon [Lau83]. Lorsque  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme propre de variétés analytiques complexes et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module bien filtré, on compare l'effet de l'image directe  $f_+$  sur  $\mathcal{M}$  et sur son gradué, qui est un  $\mathcal{O}_X[TX]$ -module cohérent. Malgrange a montré [Ma85], en précisant [Lau83] en ce qui concerne les supports, que  $f_+\mathcal{M}$  et  $f_+ \text{gr } \mathcal{M} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{R}f_{\pi_*} L^t f^* \text{gr } \mathcal{M}$  ont même classe dans la  $K$ -théorie analytique à support dans  $f_+(\text{Car } \mathcal{M})$ . Le théorème GRR pour  $\text{gr } \mathcal{M}$  (au niveau  $K$ -théorique ou cohomologique) impliquera donc GRR pour  $\mathcal{M}$ .

Nous rappelons dans cette section les formes du théorème GRR en géométrie analytique complexe pour les faisceaux  $\mathcal{O}$ -cohérents et détaillons l'application aux  $\mathcal{D}$ -modules.

La version algébrique de GRR  $K$ -théorique est celle donnée dans [B-F-M79]. La version analytique [Le87] est beaucoup plus technique et n'est parue que plusieurs années après. Dans le cas où l'espace analytique est plongé dans une variété analytique complexe, celle-ci est aussi un cas particulier du théorème 3.1.1.

La version en cohomologie de Hodge a été montrée dans [O-T-T81, O-T-T81b] sous la forme HRR (H pour Hirzebruch,  $Y = \text{pt}$ ); la construction des traces et des classes d'Atiyah faite par Illusie [Il71] y est reprise au niveau de complexes de Čech. Le point important est l'identification de la classe d'Euler d'un faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  avec la classe de degré  $\dim X$  de  $\tau(\mathcal{F})$ . Puis la version GRR avec des techniques analogues est annoncée dans [O-T-T81c] et publiée dans [O-T-T85].

### 2.1. Riemann-Roch $K$ -théorique

Lorsque  $Z$  est un compact dans un espace métrique  $X$ , ou bien un ensemble fermé homotope à un compact, le groupe  $K_Z^{\text{top}}(X)$  des classes d'homotopie stable de morphismes de fibrés vectoriels complexes de rang fini sur  $X$  qui sont des isomorphismes hors de  $Z$  possède les propriétés usuelles de functorialité de la  $K$ -homologie : image inverse  $f^*$  par une application continue  $f$ , isomorphisme de Bott  $K_Z^{\text{top}}(X) \xrightarrow{\sim} K_Z^{\text{top}}(N)$  si  $N$  est un fibré vectoriel (complexe ou avec structure  $\text{spin}^c$ ) sur  $X$ , et image directe  $f_*$  par une application  $f : X \rightarrow Y$  de classe  $C^1$  entre variétés, propre sur  $Z$  (voir [B-M90] pour cette présentation, voir aussi [B-D82]).

Lorsque  $Z$  est un sous-espace analytique compact d'une variété analytique  $X$ , on désigne par  $K_Z(\mathcal{O}_X)$  le groupe de Grothendieck des faisceaux cohérents de  $\mathcal{O}_X$ -modules à support dans  $Z$ ; on définit un morphisme  $\alpha : K_Z(\mathcal{O}_X) \rightarrow K_Z^{\text{top}}(X)$  : la démarche d'Atiyah et Hirzebruch [A-H62], utilise le fait que le compact, vu comme espace réel, est de Stein; la méthode de Levy [Le87] consiste à associer à tout faisceau cohérent sur un voisinage de  $Z$  un complexe de Fredholm obtenu à l'aide d'un recouvrement de  $Z$  par des ouverts de Stein.

(2.1.1) THÉORÈME ([Le87], [B-M90]). — *Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application analytique entre variétés analytiques complexes, et si  $Z$  est un sous-ensemble analytique compact, le morphisme  $\alpha$  commute à  $f_*$ .  $\square$*

*Remarques.*

(1) Soit  $\Lambda$  un sous-ensemble analytique fermé conique de  $T^*X$  de base  $Z = \Lambda \cap T_X^*X$  compacte et notons  $\mathcal{O}_X[TX]$  le faisceau des fonctions holomorphes sur  $X$  à coefficients polynomiaux dans les fibres de  $T^*X \rightarrow X$ . On peut, par le même procédé, définir des morphismes  $\alpha : K_\Lambda(\mathcal{O}_X[TX]) \rightarrow K_\Lambda^{\text{top}}(T^*X)$  et  $\alpha : K_{i_{f^{-1}(\Lambda)}}(\mathcal{O}_X[TY]) \rightarrow K_{i_{f^{-1}(\Lambda)}}^{\text{top}}(X \times_Y T^*Y)$ . La méthode de Levy permet de montrer la commutation de  $\alpha$  avec  $f_{\pi*}$ , puisqu'on peut recouvrir  $Z$  par un nombre fini de cartes sur lesquelles le fibré  $X \times_Y T^*Y$  est trivial.

(2) Il faut aussi noter que Levy ne suppose pas l'existence d'un plongement  $Z \subset X$  et construit un plongement presque complexe qui lui suffit.

Iversen [Iv76] a construit un *caractère de Chern local*  $\text{ch}_Z : K_Z^{\text{top}}(X) \rightarrow H_Z^*(X, \mathbf{Q})$ . Par des arguments classiques (voir [A-H62, thm 4.1]) on déduit GRR en géométrie analytique complexe. En posant  $\tau_Z(\mathcal{F}) = \text{ch}_Z(\alpha(\mathcal{F})) \smile \text{Td}(X)$  pour un faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $X$  à support dans  $Z$  on obtient (voir aussi [T-T86] pour une autre approche) :

(2.1.2) COROLLAIRE. — *Dans les conditions du théorème 2.1.1, la classe  $\tau$  commute à l'image directe  $f_*$ . □*

## 2.2. Riemann-Roch en cohomologie de Hodge à support

Dans [O-T-T85] est démontré le théorème GRR lorsque les classes considérées sont à valeurs dans la cohomologie de Hodge.

Les classes caractéristiques d'un fibré holomorphe sur une variété analytique  $X$  existent dans la *cohomologie de Hodge*  $\oplus_p H^p(X, \Omega_X^p)$  (en utilisant la théorie de Chern-Weil par exemple). On dispose donc d'une classe de Todd  $\text{Td}(X)$ . De plus, pour un faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  à support dans un sous-ensemble analytique fermé  $Z$ , la *classe d'Atiyah*  $\lambda_{\mathcal{F}}^1 \in \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \Omega_X^1)$  est l'opposée de la classe de l'*extension des parties principales*. La classe  $\lambda_{\mathcal{F}}^j \in \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^j(\mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \Omega_X^j)$  est obtenue en composant  $j$  fois la classe  $\lambda_{\mathcal{F}}^1$  avec elle-même. En utilisant la *trace*

$$\text{tr}_Z : \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^j(\mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \Omega_X^j) \longrightarrow H_Z^j(X, \Omega_X^j)$$

on définit le *caractère de Chern local*

$$\text{ch}_Z(\mathcal{F}) = \bigoplus_j \text{ch}_Z^j(\mathcal{F}) = \bigoplus_j \text{tr}_Z \left( \frac{\lambda_{\mathcal{F}}^j}{j!} \right) \in \bigoplus_j H_Z^j(X, \Omega_X^j)$$

et une classe  $\tau_Z(\mathcal{F}) = \text{ch}_Z(\mathcal{F}) \smile \text{Td}(X)$ . Lorsque  $\mathcal{F}$  est  $\mathcal{O}_X$ -localement libre, on retrouve le caractère de Chern donné par Chern-Weil.

En cohomologie de Hodge à support on dispose, pour  $f : X \rightarrow Y$  analytique, de

$$\begin{aligned} f^* : H_Z^p(Y, \Omega_Y^p) &\longrightarrow H_{f^{-1}(Z)}^p(X, \Omega_X^p) \\ f_* : H_Z^p(X, \Omega_X^p) &\longrightarrow H_{f(Z)}^{p-d_f}(Y, \Omega_Y^{p-d_f}) \end{aligned}$$

avec  $d_f = \dim X - \dim Y$ , si dans ce dernier cas  $f$  est propre sur  $Z$ . L'homomorphisme  $f^*$  est obtenu en composant  $H_Z^p(Y, \Omega_Y^p) \rightarrow H_{f^{-1}(Z)}^p(X, f^{-1}\Omega_Y^p)$  avec celui déduit de  $f^{-1}\Omega_Y^p \rightarrow \Omega_X^p$  qui provient lui-même de l'application cotangente à  $f$ . L'homomorphisme  $f_*$  s'obtient en réalisant une classe de  $H_Z^p(X, \Omega_X^p)$  par un courant  $\bar{\partial}$ -fermé à support dans  $Z$  et en utilisant l'image directe des courants.

(2.2.1) THÉORÈME ([O-T-T81c, O-T-T85]). — Pour un faisceau  $\mathcal{F}$  cohérent sur  $X$  à support dans  $Z$  et  $f : X \rightarrow Y$  une application analytique propre sur  $Z$ , on a l'égalité dans  $\oplus_p H_{f(Z)}^p(Y, \Omega_Y^p)$

$$f_*(\tau_Z(\mathcal{F})) = \tau_{f(Z)}(\mathbf{R}f_*\mathcal{F}).$$

La démonstration se fait en deux temps : on montre d'abord que le cup produit de  $\text{ch}_Z(\mathcal{F})$  avec une certaine classe se comporte bien par image directe, puis on identifie cette classe à la classe de Todd, en utilisant notamment le principe de scindage. Dans [O-T-T85], tout est fait en utilisant des complexes très explicites pour calculer les traces et l'image directe. Les calculs sur les classes d'Atiyah dans [A-LJ89] permettent aussi de traiter la première partie de la preuve (dans des notes manuscrites non publiées, Kashiwara propose une version locale et fonctorielle pour cette première étape).  $\square$

### 2.3. Classe d'Euler

Pour  $\mathcal{F}$  comme ci-dessus et  $d = \dim X$ , on dispose d'un morphisme naturel

$$(2.3.1) \quad \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \longrightarrow H_Z^d(X, \Omega_X^d)$$

dont nous allons rappeler la construction, puisque nous aurons à en considérer une version microlocale pour les  $\mathcal{D}$ -modules au § 3.2. La classe d'Euler  $\text{eu}(\mathcal{F})$  est alors l'image de l'identité par ce morphisme. On peut montrer que la classe d'Euler commute à l'image directe (c'est ce point qui est étendu dans [Sch-Sch91] pour la classe d'Euler microlocale). En utilisant des complexes explicites, on identifie la classe d'Euler :

(2.3.2) THÉORÈME ([O-T-T81b]). — La classe d'Euler  $\text{eu}(\mathcal{F})$  est égale à la compositante en degré  $(d, d)$  de la classe  $\tau_Z(\mathcal{F})$ .  $\square$

Cette identification, obtenue antérieurement à 2.2.1, donne donc déjà une démonstration du théorème HRR lorsque  $Z$  est compact, ou aussi la partie de degré maximum dans 2.2.1.

2.3.3. Construction de la classe d'Euler. — A tout morphisme  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  on associe  $\oplus (-1)^i H^i(\varphi) \in \oplus \text{End}_{\mathbb{C}}(H_Z^i(X, \mathcal{F}))$ , ce qui définit, par le théorème de dualité globale (lorsque  $Z$  est compact), un élément de  $\oplus (\text{Ext}^{d-i}(X; \mathcal{F}, \Omega_X^d) \otimes H_Z^i(X, \mathcal{F}))$ , et la trace envoie cet élément dans  $H_Z^d(X, \Omega_X^d)$ .

2.3.4. Autre construction à l'aide de la classe fondamentale. — La construction d'une classe d'Euler pour les faisceaux  $\mathcal{O}$ -cohérents, les  $\mathcal{D}$ -modules ou les paires elliptiques repose sur la construction d'une trace dans chacune de ces catégories et de l'existence de la classe fondamentale de la diagonale dans  $X \times X$ . Rappelons la construction de celle-ci.

Soit  $\delta : X \hookrightarrow X \times X$  l'inclusion diagonale et  $\Omega_{X \times X}^{(0,d)}$  la partie de type  $(0, d)$  (relativement aux deux facteurs  $X$ ) de  $\Omega_{X \times X}^d$ . La classe fondamentale  $[\delta(X)]$  est une section sur  $X$  du faisceau de cohomologie à support  $\mathcal{H}_{\delta(X)}^d(\Omega_{X \times X}^{(0,d)})$  et sa composante de type  $(0, d)$  définit une application  $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{H}_{\delta(X)}^d(\Omega_{X \times X}^{(0,d)})$  qui s'étend à  $\mathcal{D}_X$  via l'action à gauche naturelle de  $\mathcal{D}_X$  sur  $\Omega_{X \times X}^{(0,d)}$  (dérivations par rapport au premier facteur  $X$ ). En coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_d)$ , et par rapport au recouvrement par les ouverts  $x_i \neq x'_i$  de  $X \times X - \delta(X)$ , on a

$$[\delta(X)]^{(0,d)} = \frac{1}{(2i\pi)^d} \bigwedge_{i=1}^d \frac{dx'_i}{x'_i - x_i}$$

et  $\mathcal{D}_X$  opère par des opérateurs  $P(x, \partial_x)$  (M. Sato [S-K-K73] identifie  $\mathcal{H}_{\delta(X)}^d(\Omega_{X \times X}^{(0,d)})$  au faisceau des *opérateurs différentiels d'ordre infini* sur  $X$ ).

Comme  $\mathcal{H}_{\delta(X)}^j(\Omega_{X \times X}^{(0,d)}) = 0$  pour  $j \neq d$ , on obtient donc un morphisme

$$(2.3.5) \quad \mathcal{D}_X \longrightarrow \delta^! \Omega_{X \times X}^{(0,d)}[d]$$

puis

$$(2.3.6) \quad \delta_! \mathcal{D}_X \longrightarrow \Omega_{X \times X}^{(0,d)}[d]$$

où  $\delta^!$  est le foncteur adjoint de l'image directe  $\delta_!$  dans la catégorie dérivée des faisceaux de  $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels.

On peut maintenant, suivant [Sch-Sch94], construire *fonctoriellement et localement* le morphisme (2.3.1) sous la forme d'un morphisme  $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \rightarrow \Omega_X[d]$ . L'hypercohomologie à support dans  $Z$  du terme de gauche n'est autre que son hypercohomologie, puisqu'il est à support dans  $Z$ . On obtient donc (2.3.1) en prenant l'hypercohomologie à support dans  $Z$  de degré 0 du morphisme précédent.

On construit d'abord un morphisme

$$(2.3.7) \quad \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \longrightarrow D\mathcal{F} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$$

correspondant à la première étape de la construction du §2.3.3, où  $D\mathcal{F}$  est le complexe dual  $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \Omega_X[d])$ , puis on applique la trace locale  $D\mathcal{F} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \rightarrow \Omega_X[d]$ .

Pour obtenir le morphisme (2.3.7), on utilise la restriction à  $\mathcal{O}_X$  de (2.3.6) qui permet de définir

$$\delta_! \mathcal{F} = q_1^{-1} \mathcal{F} \otimes \delta_! \mathcal{O}_X \longrightarrow q_1^{-1} \mathcal{F} \otimes \Omega_{X \times X}^{(0,d)}[d]$$

où  $q_1$  et  $q_2$  désignent les projections de  $X \times X$  sur  $X$ . Grâce à l'identification (voir par exemple [K-S90, prop. 3.1.14])

$$\delta_! \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{q_2^{-1} \mathcal{O}_X}(q_2^{-1} \mathcal{F}, \delta_! \mathcal{F})$$

puis en appliquant  $\delta^!$ , on obtient un morphisme

$$\mathbf{R}Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \longrightarrow \delta^!(D\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{F})$$

en posant  $\mathcal{F} \boxtimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G} = \mathcal{O}_{X \times X} \otimes_{\mathcal{O} \boxtimes_{\mathcal{O}}} (\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})$ . On a par ailleurs l'identification  $D\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \mathcal{F} = \mathcal{O}_{\delta(X)} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times X}}^L \delta^{-1}(D\mathcal{F} \boxtimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F})$ , d'où le morphisme cherché, en utilisant le morphisme naturel  $\delta^! \rightarrow \delta^{-1}$ .  $\square$

#### 2.4. Image directe de $\mathcal{D}$ -modules en $K$ -théorie analytique

Dans l'approche  $K$ -théorique pour les  $\mathcal{D}$ -modules, on se restreint au voisinage d'un compact pour deux raisons : la première est qu'on utilise des bonnes filtrations d'un  $\mathcal{D}$ -module, et deux bonnes filtrations ne sont équivalentes qu'au voisinage d'un compact en général (par exemple, si  $x_n$  est une suite de nombres complexes tendant vers  $\infty$  et  $\mathcal{M}$  est le faisceau des fonctions méromorphes d'une variable complexe qui ont des pôles aux points  $x_n$  au plus, les bonnes filtrations  $F_k \mathcal{M}$  (pôle d'ordre  $\leq k$  en tout  $x_n$ ) et  $F'_k \mathcal{M}$  (pôle d'ordre  $\leq k+n$  en  $x_n$ ) ne sont pas équivalentes puisqu'il n'existe pas d'entier  $k_0$  tel que l'on ait pour tout  $k$  l'inclusion  $F'_k \mathcal{M} \subset F_{k+k_0} \mathcal{M}$ ); la deuxième est qu'on utilise une dégénérescence de suite spectrale par un argument noethérien, valable sur un compact.

Soit donc  $\Lambda$  une sous-variété  $\mathbf{C}^*$ -homogène de  $T^*X$  de base  $\Lambda \cap T_X^*X$  compacte et  $K_\Lambda(\mathcal{D}_X)$  le groupe de Grothendieck des  $\mathcal{D}_X$ -modules cohérents de variété caractéristique contenue dans  $\Lambda$  et admettant une bonne filtration (cf. § 1.1). Pour un tel module  $\mathcal{M}$ , on note  $[\mathcal{M}]_\Lambda$  sa classe dans  $K_\Lambda(\mathcal{D}_X)$  et lorsque  $\mathcal{M}^\bullet$  est un complexe borné de  $\mathcal{D}_X$ -modules à cohomologie de ce type, on pose comme il se doit  $[\mathcal{M}^\bullet]_\Lambda = \sum_i (-1)^i [\mathcal{H}^i(\mathcal{M}^\bullet)]_\Lambda$ . Si  $\mathcal{O}_X[TX]$  désigne le faisceau des fonctions qui sont polynomiales dans les fibres de  $T^*X \rightarrow X$ , le gradué d'une bonne filtration définit un élément de  $K_\Lambda(\mathcal{O}_X[TX])$  indépendant du choix de la bonne filtration (voir par exemple [Lau83, Lemme 6.1.2]). D'où un morphisme  $\beta : K_\Lambda(\mathcal{D}_X) \rightarrow K_\Lambda(\mathcal{O}_X[TX])$ .

Pour une application analytique  $f : X \rightarrow Y$ , on note  $f_+$  la composition

$$K_\Lambda(\mathcal{O}_X[TX]) \xrightarrow{f'^*} K_{f'^{-1}(\Lambda)}(\mathcal{O}_X[TY]) \xrightarrow{f_{\pi*}} K_{f_+(\Lambda)}(\mathcal{O}_Y[TY]).$$

(2.4.1) THÉORÈME ([Ma85]). — *Dans ces conditions on a l'égalité*

$$\beta([f_+ \mathcal{M}]_{f_+(\text{Car } \mathcal{M})}) = f_+ \beta([\mathcal{M}]_{\text{Car } \mathcal{M}})$$

dans  $K_{f_+(\text{Car } \mathcal{M})}(\mathcal{O}_Y[TY])$ .

Les arguments de la démonstration seront donnés lors de celle du théorème 3.1.1. Il faut y remplacer la résolution finie par des  $\mathcal{D}$ -modules localement libres par une résolution finie de  $\mathcal{M}$  par des modules induits  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$ , obtenue à l'aide d'un complexe de Spencer. Une version équivariante de ce théorème est donnée dans [Jo92].

## 2.5. Riemann-Roch pour les $\mathcal{D}$ -modules

Il sera commode dans ce paragraphe de noter  $H_{\Lambda}^k(T^*X)$  l'un des deux espaces  $H_{\Lambda}^{2k}(T^*X, \mathbf{Q})$  ou  $H_{\Lambda}^k(T^*X, \Omega_{T^*X}^k)$ , et  $H_{\Lambda}^*(T^*X) = \bigoplus_k H_{\Lambda}^k(T^*X)$ .

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module à droite cohérent de variété caractéristique  $\text{Car } \mathcal{M}$  et soit  $\Lambda$  un ensemble homogène de  $T^*X$  contenant  $\text{Car } \mathcal{M}$ . La classe  $\tau$  microlocale à support dans  $\Lambda$  est définie par

$$\mu\tau_{\Lambda}(\mathcal{M}) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{ch}_{\Lambda}([\mathcal{M}]_{\Lambda}) \smile \pi_X^*(\text{Td}(X)) \in H_{\Lambda}^*(T^*X).$$

Pour  $f : X \rightarrow Y$  propre sur  $\Lambda \cap T_X^*X$ , on dispose d'une image directe

$$f_+ : H_{\Lambda}^{d_X+*}(T^*X) \longrightarrow H_{f_+(\Lambda)}^{d_Y+*}(T^*Y)$$

composée de  $f'^* : H_{\Lambda}^{d_X+*}(T^*X) \rightarrow H_{f'^{-1}(\Lambda)}^{d_X+*}(X \times_Y T^*Y)$  et de  $f_{\pi_*}$ .

On déduit des propriétés de naturalité du caractère de Chern local  $\text{ch}_{\Lambda}$ , du théorème de Riemann-Roch 2.1.2 ou 2.2.1 pour  $f_{\pi}$  et du théorème d'image directe 2.4.1 un théorème de Riemann-Roch homologique (voir [Lau83] pour l'analogie cohomologique, *i.e.* sans support) :

(2.5.1) COROLLAIRE ([Sch-Sch91, §8]). — *Sous les conditions du § 2.4, on a l'égalité*

$$\mu\tau_{f_+(\text{Car } \mathcal{M})}(f_+\mathcal{M}) = f_+(\mu\tau_{\text{Car } \mathcal{M}}(\mathcal{M}))$$

dans  $H_{f_+(\text{Car } \mathcal{M})}^*(T^*Y)$ .  $\square$

*Remarque.* — La classe  $\mu\tau$  a aussi un bon comportement vis-à-vis du produit externe et de l'image inverse  $g^+$  par  $g : Z \rightarrow X$  (voir le § 3.1.4-(b)), si  $g$  est une application *non caractéristique* relativement à  $\text{Car } \mathcal{M}$ , *i.e.* si  $g'$  est propre sur  $g'^{-1}(\text{Car } \mathcal{M})$ .

## 3. Riemann-Roch pour les paires elliptiques

Il s'agit ici de raffiner les résultats du § 2.5 en introduisant des conditions d'ellipticité (sous-)analytiques réelles. Le plus simple est de considérer une sous-variété analytique réelle (éventuellement à bord analytique réel) d'une variété analytique complexe : c'est la situation du théorème d'indice  $K$ -théorique 3.1.1. Les méthodes cohomologiques plus souples du § 3.2 permettent d'aborder le contexte général des paires elliptiques.

### 3.1. Indice relatif $K$ -théorique

Soit  $\Sigma_X$  un ensemble sous-analytique réel fermé dans  $X$ ,  $\Sigma_Y$  un compact de  $Y$  et posons  $\Sigma = \Sigma_X \cap f^{-1}(\Sigma_Y)$ . Soit  $\Lambda$  un ensemble analytique fermé conique dans  $T^*X$ . On suppose dans ce numéro que  $\Sigma \cap \Lambda$  est *compact* (on identifie ici  $X$  à la section nulle de

$T^*X$ ). Les germes le long de  $\Sigma$  de  $\mathcal{D}_X$ -modules cohérents bien filtrables ou de  $\mathcal{O}_X[TX]$ -modules cohérents donnent lieu aux groupes  $K_\Lambda(\mathcal{D}_X|_\Sigma)$  et  $K_\Lambda(\mathcal{O}_X[TX]|_\Sigma)$ . On dispose de morphismes

$$K_\Lambda(\mathcal{D}_X|_\Sigma) \xrightarrow{\beta} K_\Lambda(\mathcal{O}_X[TX]|_\Sigma) \xrightarrow{\alpha} K_\Lambda^{\text{top}}(T^*X|_\Sigma).$$

Le morphisme  $\beta$  est défini comme plus haut par passage au gradué d'une bonne filtration et pour  $\alpha$  on utilise le fait que  $\Sigma \cap \Lambda$  est de Stein dans la variété réelle sous-jacente à  $X$ .

Pour une application analytique  $f : X \rightarrow Y$  propre sur  $\Sigma_X \cap \Lambda$ , l'image directe  $f_+$  est définie au niveau topologique; elle est aussi définie sur la partie  $f$ -elliptique de  $K_\Lambda(\mathcal{D}_X|_\Sigma)$  (partie engendrée par les  $\mathcal{D}_X$ -modules  $\mathcal{M}$  tels que  $(\mathcal{M}, \mathbf{C}_{\Sigma_X})$  soit une paire  $f$ -elliptique) d'après le théorème d'image directe 1.2.4, mais elle n'est pas définie au niveau intermédiaire, car on ne dispose pas de théorème analogue pour les  $\mathcal{O}_X[TX]$ -modules cohérents : la condition de  $f$ -ellipticité pour un  $\mathcal{D}$ -module ne dépend pas que de son gradué.

On suppose maintenant que  $\Sigma_X$  une sous-variété analytique réelle fermée à bord dans  $X$ , définie par une inéquation analytique réelle  $u \leq 0$  dans une sous-variété  $\tilde{\Sigma}_X$  et  $f : X \rightarrow Y$  une application analytique propre sur  $\Sigma_X \cap \Lambda$ .

(3.1.1) THÉORÈME ([B-M90]). — *Dans ces conditions, le morphisme  $\gamma = \alpha \circ \beta$  commute à l'image directe  $f_+$  sur la partie  $f$ -elliptique de  $K_\Lambda(\mathcal{D}_X|_\Sigma)$ .*

*Remarques.*

(1) On en déduit comme au § 2.5 un théorème GRR pour la classe  $\mu\tau_\Lambda$  dans l'espace  $H_{\Lambda|\Sigma}^{2\bullet}(T^*X|_\Sigma, \mathbf{Q})$ .

(2) Lorsque  $\Sigma = X$ , on peut appliquer le théorème aux  $\mathcal{D}_X$ -modules induits  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$  : on retrouve de cette manière le théorème 2.1.1, par restriction à la section nulle de  $T^*X$ .

(3) Lorsque  $\Sigma_X = \tilde{\Sigma}_X$  est sans bord et  $Y$  est un point, on retrouve le théorème d'indice d'Atiyah-Singer dans le cadre analytique réel.

3.1.2. *Un cas particulier important.* — On suppose que  $f : X = \mathbf{C}^n \times Y \rightarrow Y$  est la projection, que  $\Sigma_X = Q_\varepsilon \times Y$ , où  $Q_\varepsilon$  est l'ellipsoïde d'équation  $\|\text{Ré } z\|^2 + \varepsilon^{-2} \|\text{Im } z\|^2 \leq 1 + \varepsilon$ , et que  $\Sigma_Y$  est un compact de Stein dans  $Y$ . Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module bien filtrable tel que la paire  $(\mathcal{M}, \mathbf{C}_{\overline{Y}})$  soit  $f$ -elliptique.

(a) On peut choisir sur  $\Sigma$  une résolution  $\mathcal{L}^\bullet$  de  $\mathcal{M}$  par des  $\mathcal{D}_X$ -modules localement libres de rang fini, puisque  $\Sigma$  est de Stein. Le complexe  $f_+(\mathbf{C}_\Sigma \otimes \mathcal{M})$  n'est autre que l'image par  $f_*$  du complexe  $\mathbf{C}_\Sigma \otimes \mathcal{L}^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}$ , dont les termes sont localement de la forme  $(\mathbf{C}_\Sigma \otimes \mathcal{O}_X(\partial_y))^p$ . Il s'agit de trouver une bonne filtration de ce complexe de  $\mathcal{D}_Y$ -modules, pour en calculer le gradué. Il est alors utile de considérer sur  $\mathcal{D}_X$  la filtration

$G_\bullet \mathcal{D}_X$  par le degré des opérateurs par rapport aux dérivations  $\partial_y$ , uniquement (l'usage de cette filtration est introduit dans [H-S84]).

(b) La bonne filtration de  $\mathcal{M}$  engendre une filtration  $G_\bullet \mathcal{M}$  avec  $G_k \mathcal{M} = \sum_{i+j \leq k} \mathcal{M}_i \cdot G_j \mathcal{D}_X$ . On peut ensuite choisir une résolution  $\mathcal{L}^\bullet$  comme ci-dessus de sorte que

- chaque terme  $\mathcal{L}^\ell$  est muni d'une filtration  $G_\bullet \mathcal{L}^\ell$  et localement le module filtré  $\mathcal{L}^\ell$  est somme directe de modules libres  $\mathcal{D}_X$ , chacun muni de la filtration  $G_\bullet \mathcal{D}_X$  éventuellement décalée,

- les différentielles du complexe respectent les filtrations,

- le complexe gradué  $L^\bullet \stackrel{\text{déf}}{=} \text{gr}^G \mathcal{L}^\bullet$  est une résolution localement  $\text{gr}^G \mathcal{D}_X$ -libre de  $M \stackrel{\text{déf}}{=} \text{gr}^G \mathcal{M}$ .

L'anneau  $\text{gr}^G \mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X[TY](\partial_{z_1}, \dots, \partial_{z_n})$  s'identifie à l'anneau des opérateurs différentiels relatifs à la projection  $F : \mathbb{C}^n \times T^*Y \rightarrow T^*Y$  et la paire  $(M, \mathbb{C}_{\overline{Y}})$  est relativement elliptique, c'est-à-dire que la variété caractéristique relative de  $M$  dans  $T^*\mathbb{C}^n \times T^*Y$  ne coupe pas  $\mu \text{Supp } \mathbb{C}_{Q_e} \times T^*Y$ . Ici,  $T^*Y$  joue le rôle d'un espace de paramètres. Un analogue relatif du théorème 1.2.4 (voir [Sch-Sch90, thm 4.2]) montre que

$$F_+(\mathbb{C}_{\overline{Y}} \otimes M) \stackrel{\text{déf}}{=} F_*(\mathbb{C}_{\overline{Y}} \otimes L^\bullet \underset{\text{gr}^G \mathcal{D}_X}{\otimes} \text{gr}^G \mathcal{D}_{X \rightarrow Y})$$

est à cohomologie  $\mathcal{O}_Y[TY]$ -cohérente. Alors la filtration  $G_\bullet \mathcal{M}$  permet de munir la cohomologie de  $f_+(\mathbb{C}_{\overline{Y}} \otimes M)$  d'une bonne filtration (relativement à la filtration usuelle de  $\mathcal{D}_Y$ ) et, par cohérence au voisinage de  $\Sigma_Y$ , la suite spectrale issue de la cohomologie de  $F_+(\mathbb{C}_{\overline{Y}} \otimes \text{gr}^G \mathcal{M})$  dégénère en un rang fini sur le gradué de celle de  $f_+(\mathbb{C}_{\overline{Y}} \otimes M)$ . On en déduit l'égalité

$$\beta[f_+(\mathbb{C}_\Sigma \otimes M)] = [F_+(\mathbb{C}_\Sigma \otimes M)]$$

dans  $K_{f_+(\text{Car } \mathcal{M})}(\mathcal{O}_Y[TY]_{|\Sigma_Y})$ .

(c) Supposons montrée l'égalité

$$(3.1.3) \quad \alpha[F_+(\mathbb{C}_\Sigma \otimes M)] = f_+(\alpha[\mathbb{C}_\Sigma \otimes \text{gr } M])$$

dans  $K_{f_+(\text{Car } \mathcal{M})}^{\text{top}}(T^*Y_{|\Sigma_Y})$ , où  $\text{gr } M$  est le gradué de  $M$  relativement à une bonne filtration (par le degré en les  $\partial_{z_i}$ ). Pour conclure, il suffit de montrer l'égalité des classes bigraduées  $[\mathbb{C}_\Sigma \otimes \text{gr } \text{gr}^G \mathcal{M}]$  et  $[\mathbb{C}_\Sigma \otimes \text{gr}^G \text{gr } \mathcal{M}]$  dans  $K_\Lambda(\mathcal{O}_X[TC^n, TY]_{|\Sigma})$ , où  $\Lambda \subset T^*\mathbb{C}^n \times T^*Y$  est bihomogène et de projection sur  $T^*Y$  contenue dans  $f_+(\text{Car } \mathcal{M})$ , puis de montrer l'égalité  $[\mathbb{C}_\Sigma \otimes \text{gr}^G \text{gr } \mathcal{M}] = [\mathbb{C}_\Sigma \otimes \text{gr } \mathcal{M}]$  dans  $K_{\Lambda'}(\mathcal{O}_X[TX]_{|\Sigma})$ , où  $\Lambda'$  se projette aussi dans  $f_+(\text{Car } \mathcal{M})$ .

Le second point se fait par déformation au fibré normal (méthode glorifiée dans [Fu84]) et le premier est un résultat général [Ma85] sur les objets bi-filtrés avec conditions de cohérence.

(d) Explicitons les termes de (3.1.3). Pour cela, il est utile de choisir une résolution  $L^\bullet$  de  $M$  comme ci-dessus, qui est de plus filtrée relativement à l'ordre en  $\partial_z$  et qui induit encore une résolution  $\text{gr } L^\bullet = \ell^\bullet$  de  $\text{gr } M$  par passage au gradué.

• En notant  $i : \mathbf{C}^n \times T^*Y \hookrightarrow T^*\mathbf{C}^n \times T^*Y$  l'inclusion, le complexe  $i^*\ell^\bullet$  est un complexe de  $\mathcal{O}_X[TY]$ -modules localement libres (dont les différentielles sont  $\mathcal{O}_X[TY]$ -linéaires). Le terme de droite de (3.1.3) est alors  $f_{\pi*}[\mathbf{C}_\Sigma \otimes i^*\ell^\bullet]^{\text{top}}$ .

• Le complexe  $\mathcal{E}^\bullet \stackrel{\text{d\'ef}}{=} L^\bullet \otimes_{\text{gr}^G \mathcal{D}_X} \text{gr}^G \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}$  est le complexe de de Rham relatif de  $M$ . C'est un complexe dont les termes sont des  $\mathcal{O}_X[TY]$ -modules localement libres et dont les différentielles sont des opérateurs différentiels en  $\partial_z$ . Le terme de gauche de (3.1.3) est  $\alpha[F_*(\mathbf{C}_\Sigma \otimes \mathcal{E}^\bullet)]$ , où, rappelons-le,  $F$  désigne la projection  $\mathbf{C}^n \times T^*Y \rightarrow T^*Y$ .

(e) Soit  $r(z, \bar{z}) = \|\text{Ré} z\|^2 + \varepsilon^{-2} \|\text{Im} z\|^2$  et  $\sigma : \mathbf{C}^n \times T^*Y \rightarrow T^*\mathbf{C}^n \times T^*Y$  la section égale à  $(1/i)\partial r$ , qui ne s'annule qu'à l'origine de  $\mathbf{C}^n$ . Alors on a  $[\mathbf{C}_\Sigma \otimes i^*\ell^\bullet] = [\mathbf{C}_\Sigma \otimes \sigma^*\ell^\bullet]$  dans  $K_{\Lambda'}^{\text{top}}(Q_\varepsilon \times T^*Y|_{\Sigma_Y})$ , où  $\Lambda' = Q_\varepsilon \times f_+(\text{Car } \mathcal{M})$  : en effet,  $\ell^\bullet$  est exact sur  $T^*\mathbf{C}^n \times (T^*Y - f_+(\text{Car } \mathcal{M}))$  puisque  $M$ , et donc  $\text{gr } M$ , y est nul. La condition d'ellipticité signifie que  $\sigma^*\ell^\bullet$  est exact sur  $\partial Q_\varepsilon \times T^*Y|_{\Sigma_Y}$ . Ceci permet de voir que  $[\mathbf{C}_\Sigma \otimes \sigma^*\ell^\bullet]$  provient d'une classe dans  $K_{\{0\} \times f_+(\text{Car } \mathcal{M})}^{\text{top}}(Q_\varepsilon \times T^*Y|_{\Sigma_Y})$ . L'action de  $f_{\pi*}$  sur cette classe est par définition celle de l'inverse de l'isomorphisme de Bott.

(f) Chaque opérateur de bord  $D_i : \mathcal{E}^i \rightarrow \mathcal{E}^{i+1}$  définit, pour tout  $s$ , une famille continue d'opérateurs de Toeplitz  $\mathcal{O}^s(Q_\varepsilon, \mathcal{E}_\eta^i) \rightarrow \mathcal{O}^{s-m_i}(Q_\varepsilon, \mathcal{E}_\eta^{i+1})$ , pour  $\eta \in T^*Y_{\Sigma_Y}$  : on compose l'action de  $D_i$  sur l'espace de Sobolev  $H^s(Q_\varepsilon, \mathcal{E}_\eta^i)$  avec la projection (opérateur de Bergman) de celui-ci sur l'espace de Hardy  $\mathcal{O}^s$ , noyau de  $\bar{\partial}$  sur cet espace.

De cette manière, on associe au complexe  $\mathcal{E}^\bullet$  une famille de complexes d'opérateurs de Toeplitz sur  $Q_\varepsilon$ , exacts hors de  $f_+(\text{Car } \mathcal{M})$ , famille paramétrée par  $T^*Y$ , et dont on montre que la cohomologie est égale à celle de  $F_*(\mathbf{C}_\Sigma \otimes \mathcal{E}^\bullet)$ . De plus, le symbole de cette famille est la restriction à  $\partial Q_\varepsilon \times T^*Y|_{\Sigma_Y}$  de  $\sigma^*\ell^\bullet$ . Un théorème d'indice pour de tels complexes [B-M90] montre enfin que l'indice de cette famille, qui est égal ici à  $\alpha[F_*(\mathbf{C}_\Sigma \otimes \mathcal{E}^\bullet)]$ , a pour image par l'isomorphisme de Bott la classe associée à son symbole dans  $K_{\{0\} \times f_+(\text{Car } \mathcal{M})}^{\text{top}}(Q_\varepsilon \times T^*Y|_{\Sigma_Y})$ , qui est ici  $[\mathbf{C}_\Sigma \otimes \sigma^*\ell^\bullet]$ , ce qui donne (3.1.3).

3.1.4. *Le cas général.* — On se ramène au cas précédent en plusieurs étapes.

(a) Le cas où  $f$  est une immersion fermée  $X \hookrightarrow Y$  s'obtient à l'aide de l'isomorphisme de Bott, comme dans [A-H62].

(b) L'autre cas particulier utile est celui où  $f : X \rightarrow Y$  est une submersion avec une section  $\sigma : Y_{\mathbf{R}} \hookrightarrow X_{\mathbf{R}}$  analytique réelle (on l'appliquera à la projection  $X \times \bar{X} \rightarrow X$  et à la diagonale  $X_{\mathbf{R}} \hookrightarrow X \times \bar{X}$ , si  $\bar{X}$  est la variété conjuguée de  $X$ ). On se donne un compact  $\Sigma_Y$  et on prend  $\Sigma_X = \sigma(Y)$ , donc  $\Sigma = \sigma(\Sigma_Y)$ .

Introduisons l'opération  $f^+$ . Elle transforme un sous-ensemble  $\Lambda$  de  $T^*Y$  par  ${}^t f' \circ f_\pi^{-1}$  en un sous-ensemble de  $T^*X$  (lorsque  $f$  est une immersion, elle est plus connue sous le nom de *réduction symplectique*). On a  $f_+ f^+(\Lambda) = \Lambda$ . Son effet sur  $K_\Lambda^{\text{top}}(T^*Y)$  se décrit de la même manière. Pour les  $\mathcal{D}$ -modules, elle est définie par

$$f^+ \mathcal{M} = \mathbf{R}^i f'_* (f^{-1} \mathcal{M} \otimes_{f^{-1} \mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \leftarrow X}).$$

et lorsque  $f$  est une submersion on a  $f^+ \mathcal{M} = \Omega_{X/Y} \otimes_{f^{-1} \mathcal{O}_Y} f^{-1} \mathcal{M}$ , de sorte que  $f^+ \Omega_Y = \Omega_X$ . Pour  $f$  submersive on a  $\text{Car } f^+ \mathcal{M} = f^+ \text{Car } \mathcal{M}$ .

On montre alors que  $f_+ : K_{f_+(\Lambda)}(\mathcal{D}_{X|\Sigma}) \rightarrow K_\Lambda(\mathcal{D}_{Y|\Sigma_Y})$  est un isomorphisme, d'inverse donné par  $\mathbf{C}_\Sigma \otimes f^+$ . L'isomorphisme de Bott pour l'immersion  ${}^t f'$  donne un résultat analogue pour  $f_+ : K_{f_+(\Lambda)}^{\text{top}}(T^*X|_\Sigma) \rightarrow K_\Lambda^{\text{top}}(T^*Y|_{\Sigma_Y})$ . Puisque  $\gamma$  commute à  $f^+$ , on en déduit que dans ce cas  $\gamma$  commute aussi à  $f_+$ .

(c) On utilise un procédé de gonflage : on commence par remplacer  $\Sigma$  par un voisinage  $\Sigma' \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{U}_\varepsilon \cap f^{-1}(\Sigma_Y)$ , où  $\overline{U}_\varepsilon$  est un voisinage de  $\Sigma_X$  dans  $X$ , à bord analytique réel, de sorte que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu \text{Supp } \mathbf{C}_{\overline{U}_\varepsilon} \subset \mu \text{Supp } \mathbf{C}_{\Sigma_X}$ . C'est possible du fait de la lissité de  $\Sigma_X$ .

Le théorème 3.1.1 pour la paire  $(\mathcal{M}, \mathbf{C}_\Sigma)$  équivaut alors à celui pour  $(\mathcal{M}, \mathbf{C}_{\Sigma'})$ , par des arguments de [H-S84].

On considère ensuite  $(i_+ \mathcal{M}, \mathbf{C}_{\Sigma' \times Y})$  sur  $X \times Y$ , où  $i$  est l'inclusion du graphe de  $f$ , pour se ramener au cas d'une projection; puis  $(p^+ i_+ \mathcal{M}, \mathbf{C}_{\Sigma' \times Y})$  sur  $\overline{X} \times X \times Y$ , où  $p$  est la projection sur  $X \times Y$ .

On plonge enfin  $X_{\mathbf{R}} \hookrightarrow \mathbf{R}^N$  de sorte que  $\Sigma' = B^N \cap X_{\mathbf{R}}$ , où  $B^N$  est la boule unité; soit  $j$  l'inclusion complexifiée d'un voisinage de  $X_{\mathbf{R}}$  (dans  $\overline{X} \times X \times Y$ ) dans  $\mathbf{C}^N \times Y$ ; on applique le § 3.1.2 à la paire elliptique  $(j_+ p^+ i_+ \mathcal{M}, \mathbf{C}_{Q_{\varepsilon, X \times Y}})$  pour  $\varepsilon$  assez petit.  $\square$

### 3.2. Classe d'Euler microlocale des paires elliptiques

La nature fonctorielle et locale de la construction de la classe d'Euler indiquée au § 2.3.4 fait que celle-ci peut se transposer dans diverses situations où l'on dispose encore d'un "formalisme des six opérations". De plus, elle s'étend naturellement pour donner lieu à des formules de points fixes lorsqu'on dispose d'un automorphisme de la variété et d'un relèvement de celui-ci aux faisceaux que l'on considère.

Par exemple, au chapitre IX de [K-S90], Kashiwara et Schapira considèrent la catégorie des faisceaux  $\mathbf{R}$ -constructibles sur une variété analytique réelle  $M$ , disons orientée, ainsi que la catégorie dérivée correspondante. La classe d'Euler microlocale  $\mu eu(\mathcal{F})$  d'un objet  $\mathcal{F}$  de cette catégorie est une classe dans  $H_\Lambda^m(T^*M, \mathbf{Q})$ , où  $m$  est la dimension réelle de  $M$  et  $\Lambda$  est le microsupport du faisceau  $\mathcal{F}$ , donc un ensemble lagrangien  $\mathbf{R}_+^*$ -homogène dans  $T^*M$  (cf. théorème 1.2.3). Puisque l'on a  $\dim \Lambda = m$ , cette classe s'exprime comme somme des classes fondamentales des composantes irréductibles de  $\Lambda$  affectées d'une multiplicité : c'est un cycle lagrangien. Kashiwara a obtenu des formules de points fixes dans ce cadre (voir *loc. cit.* ainsi que [G-M93]).

Indiquons aussi que Guillermou [Gui95] a introduit, sur le modèle des classes d'Euler microlocales ci-dessous, une classe de Lefschetz microlocale pour une paire elliptique munie d'un automorphisme relevant un automorphisme de la variété  $X$ . La formule de point fixe qu'il obtient englobe la formule d'Atiyah et Bott. Ces techniques lui permettent, dans le cas d'un  $\mathcal{D}$ -module équivariant et transversalement elliptique sous une action d'un groupe de Lie  $G_{\mathbf{R}}$ , de construire l'indice comme une hyperfonction sur ce groupe [Gui96].

*Propriétés des classes d'Euler microlocales.* — A tout  $\mathcal{D}_X$ -module (à droite, cohérent)  $\mathcal{M}$ , Schapira et Schneiders [Sch-Sch91] associent un morphisme  $\mathbf{C}$ -linéaire

$$(3.2.1) \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \longrightarrow H_{\mathrm{Car}, \mathcal{M}}^{2d}(T^*X, \mathbf{C}).$$

L'image de l'identité est par définition la classe d'Euler microlocale  $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M})$ .

- Lorsque  $\mathcal{M} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$  est un module induit, on a  $\Lambda = \pi^{-1}(\mathrm{Supp} \mathcal{F})$  et la restriction à la section nulle de  $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M})$  est l'élément de  $H_{\mathrm{Supp} \mathcal{F}}^{2d}(X, \mathbf{C})$  image de la classe d'Euler  $\mathrm{eu}(\mathcal{F}) \in H_{\mathrm{Supp} \mathcal{F}}^d(X, \Omega_X^d)$  par l'application naturelle  $H_{\mathrm{Supp} \mathcal{F}}^d(X, \Omega_X^d) \rightarrow H_{\mathrm{Supp} \mathcal{F}}^{2d}(X, \mathbf{C})$ .

- Lorsque  $\mathcal{M}$  est holonome, de cycle caractéristique  $\mathrm{CC}(\mathcal{M})$ , la classe  $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M})$  est (la classe de) ce cycle dans  $H_{\mathrm{Car}, \mathcal{M}}^{2d}(T^*X, \mathbf{C})$  et on a donc  $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M}) = \mu\mathrm{eu}(\mathrm{DR} \mathcal{M})$  où le deuxième terme est la classe microlocale associée au complexe  $\mathbf{C}$ -constructible  $\mathrm{DR} \mathcal{M}$ .

3.2.2. *Produit de convolution.* — Lorsque  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont deux sous-variétés lagrangiennes  $\mathbf{R}_+^*$ -homogènes de  $T^*X$  telles que  $(-\Lambda_1) \cap \Lambda_2 \subset T_X^*X$ , l'application  $\Lambda_1 \times_X \Lambda_2 \rightarrow T^*X$  définie par  $(x, \xi_1, \xi_2) \rightarrow (x, \xi_1 + \xi_2)$  est propre et l'intégration dans les fibres de cette application permet de définir un produit de convolution

$$H_{\Lambda_1}^{2d}(T^*X, \mathbf{C}) \times H_{\Lambda_2}^{2d}(T^*X, \mathbf{C}) \xrightarrow{\star} H_{\Lambda_1 + \Lambda_2}^{2d}(T^*X, \mathbf{C}).$$

Pour une paire elliptique  $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ , la variété  $\mathrm{Car} \mathcal{M}$  est  $\mathbf{C}^*$ -homogène, donc on a aussi  $(-\mathrm{Car} \mathcal{M}) \cap \mu\mathrm{Supp} \mathcal{F} \subset T_X^*X$  et on peut définir la classe d'Euler microlocale  $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \in H_{\mathrm{Car} \mathcal{M} + \mu\mathrm{Supp} \mathcal{F}}^{2d}(T^*X, \mathbf{C})$  comme le produit de convolution  $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M}) \star \mu\mathrm{eu}(\mathcal{F})$ .

Néanmoins, cette classe peut aussi être obtenue comme image de l'identité par un morphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{M}) \longrightarrow H_{\mathrm{Car} \mathcal{M} + \mu\mathrm{Supp} \mathcal{F}}^{2d}(T^*X, \mathbf{C})$$

construit de manière analogue à celle indiquée ci-dessous pour (3.2.1).

Le résultat principal de [Sch-Sch91] est alors un "théorème de Riemann-Roch" pour cette classe microlocale.

(3.2.3) THÉORÈME. — Soit  $f : X \rightarrow Y$  analytique complexe et  $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  une paire  $f$ -elliptique. On pose  $\Lambda = \text{Car } \mathcal{M} + \mu \text{Supp } \mathcal{F}$  et on suppose  $f$  propre sur  $\text{Supp } \mathcal{M} \cap \text{Supp } \mathcal{F}$ . On a alors l'égalité  $\mu \text{eu}(f_+(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M})) = f_+(\mu \text{eu}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{M}))$  dans  $H_{f_+(\Lambda)}^{2d_Y}(T^*Y, \mathbb{C})$ .  $\square$

Lorsque  $Y$  est un point, on trouve une formule d'indice pour une paire elliptique  $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  : la caractéristique d'Euler du complexe  $\mathcal{F} \otimes \text{DR}(\mathcal{M})$  s'obtient comme intersection dans  $T^*X$  de la classe  $\mu \text{eu}(\mathcal{M})$  avec le cycle caractéristique de  $\mathcal{F}$ .

Nous indiquons ci-dessous la construction de la classe d'Euler microlocale lorsque  $\mathcal{F} = \mathbb{C}_X$ .

3.2.4. *L'opération  $\mu_\Delta$  de microlocalisation le long de la diagonale.* — Rappelons que si  $M$  est une variété et  $N$  une sous-variété ( $C^\infty$  ou analytique), on associe à tout faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $M$  un complexe  $\mu_N(\mathcal{F})$  sur le fibré conormal  $T_N^*M$ , appelé *microlocalisé de  $\mathcal{F}$  le long de  $N$*  (voir [S-K-K73], [K-S90]). Mieux,  $\mu_N$  est un foncteur. En particulier, si  $p \in T_N^*M$ , la fibre en  $p$  du faisceau de cohomologie  $\mathcal{H}^j(\mu_N(\mathcal{F}))_p$  est la limite inductive des  $\mathcal{H}_Z^j(\mathcal{F})_{\pi(p)}$ , où  $Z$  parcourt la famille des fermés de  $X$  dont le cône tangent en  $\pi(p)$  est contenu dans le demi-espace de  $T_{\pi(p)}M$  sur lequel  $p$  est  $> 0$ .

Le microlocalisé  $\mu_N(\mathcal{F})$  est stable sous l'action de  $\mathbf{R}_+^*$  et sa restriction à la section nulle  $N$  de  $T_N^*M$ , qui s'identifie donc à l'image directe  $\mathbf{R}\pi_*\mu_N(\mathcal{F})$ , est le complexe  $\mathbf{R}\Gamma_N(\mathcal{F})$  dont la cohomologie est la cohomologie de  $\mathcal{F}$  à support dans  $N$ .

Dans la suite nous appliquerons ceci au cas où  $N = \Delta$  est la diagonale dans la variété analytique complexe  $M = X \times X$ . Nous identifierons alors  $T_\Delta^*(X \times X)$  à  $T^*X$ .

3.2.5. *La classe d'Euler microlocale.* — Nous disposons maintenant de tous les outils nécessaires pour adapter la construction du § 2.3.4 à un  $\mathcal{D}_X$ -module  $\mathcal{M}$ . On construit d'abord un morphisme

$$\mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \longrightarrow \delta^1 \text{DR}(D\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M})$$

en utilisant le morphisme de Sato (2.3.5). Ici,  $D\mathcal{M}$  est le complexe dual de  $\mathcal{M}$  au sens des  $\mathcal{D}$ -modules : la cohomologie  $\mathcal{H}^j(D\mathcal{M})$  est le  $\mathcal{D}$ -module à droite associé (cf. le § 1.1.1) à  $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}}^{j+d}(\mathcal{M}, \mathcal{D})$  muni de sa structure de  $\mathcal{D}$ -module à gauche induite par celle de  $\mathcal{D}$ . Le produit tensoriel externe fait passer de deux  $\mathcal{D}_X$ -modules  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  à un  $\mathcal{D}_{X \times X}$ -module : si par exemple  $\mathcal{M}$  est le  $\mathcal{D}$ -module défini par des opérateurs  $P_i(x, \partial_x)$  et  $\mathcal{N}$  par  $Q_j(x, \partial_x)$ , le module  $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$  est défini par les opérateurs  $P_i(x, \partial_x)$  et  $Q_j(x', \partial_{x'})$  dans des coordonnées  $x, x'$  de  $X \times X$ .

On dispose aussi d'un analogue de la trace, qui est un morphisme

$$\text{DR}(D\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M}) \longrightarrow \delta_! \mathbb{C}_X[2d].$$

Alors, d'une part  $\delta^1 \text{DR}(D\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M})$  s'identifie à l'image directe par  $\pi$  du microlocalisé  $\mu_\Delta \text{DR}(D\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M})$  et d'autre part ce microlocalisé est à support dans  $\text{Car } \mathcal{M}$ , donc on

ne change rien en en prenant la cohomologie à support dans  $\text{Car } \mathcal{M}$ . Par ailleurs le microlocalisé  $\mu_\Delta \mathcal{F}$  d'un faisceau  $\mathcal{F}$  à support dans  $\Delta$  est l'image inverse de ce faisceau dans  $T^*X$ . En particulier,  $\mu_\Delta \delta! \mathbf{C}_X[2d] = \mathbf{C}_{T^*X}[2d]$ .

En résumé et en prenant l'hypercohomologie, nous déduisons des deux morphismes ci-dessus un morphisme

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{D}_X}^j(X; \mathcal{M}, \mathcal{M}) &= \mathbf{H}^j(X; \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M})) \\ &= \mathbf{H}^j(T^*X; \mu_\Delta \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M})) \\ &= \mathbf{H}_{\text{Car } \mathcal{M}}^j(T^*X; \mu_\Delta \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M})) \\ &\rightarrow \mathbf{H}_{\text{Car } \mathcal{M}}^j(T^*X; \mu_\Delta \delta! \mathbf{C}_X[2d]) \\ &= H_{\text{Car } \mathcal{M}}^{j+2d}(T^*X, \mathbf{C}) \end{aligned}$$

et pour  $j = 0$  on obtient le morphisme (3.2.1).  $\square$

**3.2.6. Classes caractéristiques microlocales et cohomologie de Hochschild.** — Pour un  $\mathcal{D}_X$ -module holonome ou un  $\mathcal{D}_X$ -module induit, on a l'égalité  $\mu\text{eu}(\mathcal{M}) = \mu\tau_{\text{Car } \mathcal{M}}^{\dim X}(\mathcal{M})$ , ce qui résulte du théorème 2.3.2 dans le second cas. Une telle égalité n'est pas connue pour  $\mathcal{M}$  quelconque. Néanmoins, Schapira et Schneiders montrent, dans un travail en cours, que les classes  $\mu\text{eu}(\mathcal{M})$  et  $\mu\tau_{\text{Car } \mathcal{M}}(\mathcal{M})$  vues en cohomologie de Hodge, sont reliées : elles se déduisent de la spécialisation d'une même classe dépendant d'un paramètre  $\hbar$  en cohomologie de Hochschild, en faisant  $\hbar = 1$ , *resp.*  $\hbar = 0$ . Nous indiquons ci-dessous les étapes essentielles de leur construction.

Le faisceau  $\mathcal{D}_X$ , muni de sa filtration  $F_\bullet \mathcal{D}_X$  par l'ordre des opérateurs différentiels, permet de définir l'anneau de Rees

$$\mathcal{R}\mathcal{D}_X = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} F_k \mathcal{D}_X \cdot \hbar^k \subset \mathcal{D}_X \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[\hbar, \hbar^{-1}]$$

où  $\hbar$  est une nouvelle variable. En "faisant  $\hbar = 1$ " on retrouve  $\mathcal{D}_X$  et en "faisant  $\hbar = 0$ " on trouve  $\text{gr } \mathcal{D}_X$ . L'anneau gradué  $\mathcal{R}\mathcal{D}_X$  est un module à gauche et à droite sur lui-même; c'est donc un module à gauche sur  $\mathcal{R}\mathcal{D}_X \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{R}\mathcal{D}_X^\circ$ , où  $\mathcal{D}_X^\circ$  désigne l'anneau opposé; c'est aussi un module à droite sur cet anneau.

Un  $\mathcal{D}_X$ -module muni d'une bonne filtration  $F_\bullet \mathcal{M}$  donne lieu à un *module de Rees*  $\mathcal{R}\mathcal{M} = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} F_k \mathcal{M} \cdot \hbar^k$  qui est  $\mathcal{R}\mathcal{D}_X$ -cohérent.

On construit d'abord un morphisme

$$(3.2.7) \quad \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{R}\mathcal{D}_X}(\mathcal{R}\mathcal{M}, \mathcal{R}\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{R}\mathcal{D}_X \underset{\mathcal{R}\mathcal{D}_X \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{R}\mathcal{D}_X^\circ}{\overset{\mathbf{L}}{\otimes}} \mathcal{R}\mathcal{D}_X$$

(Brylinski [Bry86, §2] montre que, pour  $\hbar = 1$ , ce dernier objet s'identifie à  $\Omega_X^*[2d]$ ). Soit  $\mathcal{E}_X$  le faisceau sur  $T^*X$  des opérateurs microdifférentiels (voir par exemple [Bj79, Scha85]),  $\mathcal{M}^\mu \stackrel{\text{déf}}{=} \pi^{-1} \mathcal{M} \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{D}_X} \mathcal{E}_X$  le microlocalisé de  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{R}\mathcal{M}^\mu$  le module de Rees

associé à la bonne filtration de  $\mathcal{M}^\mu$  déduite de celle de  $\mathcal{M}$ ; la construction précédente peut être microlocalisée. En prenant la partie homogène de degré 0 puis les sections globales à support dans  $\text{Car } \mathcal{M} = \text{Supp } \mathcal{M}^\mu$ , on obtient à partir de l'analogie microlocal de (3.2.7) un morphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{R}\mathcal{E}_X}(\mathcal{R}\mathcal{M}^\mu, \mathcal{R}\mathcal{M}^\mu) \longrightarrow H_{\text{Car } \mathcal{M}}^0\left(T^*X, \left\{ \mathcal{R}\mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{R}\mathcal{E}_X \otimes \mathcal{R}\mathcal{E}_X} \mathcal{R}\mathcal{E}_X \right\}_0\right).$$

L'image de Id est une nouvelle classe caractéristique.

En faisant  $\hbar = 1$  (oubli des filtrations) on trouve un morphisme

$$H_{\text{Car } \mathcal{M}}^0\left(T^*X, \mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{E}_X \otimes \mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X\right) \longrightarrow H_{\text{Car } \mathcal{M}}^{2d}(T^*X, \mathbb{C})$$

et l'image de cette classe est  $\mu\text{eu}(\mathcal{M})$ .

En faisant  $\hbar = 0$  (passage au gradué) on construit une flèche dans la cohomologie de Hodge  $\oplus_p H_{\text{Car } \mathcal{M}}^p(T^*X, \Omega_{T^*X}^p)$  identifiée à  $H_{\text{Car } \mathcal{M}}^0\left(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\delta^{-1}\mathcal{O}_{T^*(X \times X)}} \mathcal{O}_{T^*X}\right)$ ; l'image de la classe est alors  $\mu\tau_{\text{Car } \mathcal{M}}(\mathcal{M})$ .  $\square$

#### 4. Vers des classes caractéristiques secondaires pour les $\mathcal{D}$ -modules holonomes

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module holonome. Sa variété caractéristique  $\Lambda = \text{Car } \mathcal{M} \subset T^*X$  admet pour composantes irréductibles des ensembles de la forme  $\overline{T_{Z^\circ}^*X}$ , où  $Z$  est un sous-ensemble analytique fermé irréductible de  $X$ ,  $Z^\circ$  en est un ouvert dense et lisse,  $T_{Z^\circ}^*X$  est le fibré conormal de celui-ci et l'adhérence est prise dans  $T^*X$ . Nous supposons que les ensembles  $Z^\circ$  sont deux à deux disjoints.

*Remarque.* — La partie lisse  $\Lambda^{\text{reg}}$  de  $\Lambda$  contient  $\Lambda^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \cup T_{Z^\circ}^*X$  et cette inclusion peut être stricte (prendre  $X = \mathbb{C}^2$  et  $Z = \{x^3 = y^2\}$ ).

Sur  $\Lambda^\circ$  existe un faisceau  $\mathcal{L}^\mu$  associé à  $\mathcal{M}$ , à savoir le microlocalisé  $\mu_{\cup Z^\circ} \text{Sol}(\mathcal{M})$  (cf. §3.2.4). On peut montrer que c'est un système local (fibré plat) qui est aussi égal aux solutions dans le faisceau  $\mathcal{C}_{\cup Z^\circ | X}^{\mathbf{R}}$  du microlocalisé  $\mathcal{M}^\mu$ . Une question encore mal comprise, malgré de nombreux travaux ([K-S90, chap. 7], [M-V86, Mai87, M-V88, Na88]) est la description microlocale des  $\mathcal{D}$ -modules holonomes et des faisceaux pervers : notamment, par quoi est-il possible d'étendre à  $\Lambda$  le système local  $\mathcal{L}^\mu$ .

Malgrange montre que la monodromie locale de  $\mathcal{L}^\mu$  autour des composantes de  $\Lambda^{\text{reg}}$  —  $\Lambda^\circ$  est  $\pm \text{Id}$ . Ainsi, sur chaque composante connexe  $\Lambda_i^{\text{reg}}$  de  $\Lambda^{\text{reg}}$ , on obtient une classe dans  $H^1(\Lambda_i^{\text{reg}}, \text{GL}(r_i, \mathbb{C})/(\pm \text{Id}))$ , si  $r_i$  est le rang de  $\mathcal{L}^\mu$  sur cette composante.

D'autre part, le système local  $\mathcal{L}^\mu$  possède des classes caractéristiques secondaires

$$c'_k(\mathcal{L}^\mu) \in H^{2k-1}(\Lambda^\circ, \mathbf{C}/\mathbf{Z}) \stackrel{\text{Alexander}}{\simeq} H_{\Lambda^\circ}^{2d+2k-1}(T^*X, \mathbf{C}/\mathbf{Z}).$$

On cherche à étendre ces classes de manière naturelle dans  $H_{\Lambda}^{2d+2k-1}(T^*X, \mathbf{C}/\mathbf{Z})$ . La classe  $c'_1 \in H^1(\Lambda^\circ, \mathbf{C}/\mathbf{Z})$  est celle qui définit le *déterminant* de  $\mathcal{L}^\mu$ , qui est un système local de rang 1 sur  $\Lambda^\circ$ .

THÉORÈME (Malgrange). — *La classe  $c'_1(\mathcal{L}^\mu)$  se prolonge dans  $H_{\Lambda}^{2d+1}(T^*X, \mathbf{C}/(\frac{1}{2}\mathbf{Z}))$ , ceci de manière unique.  $\square$*

L'unicité ne coûte pas cher et montre que le problème est local sur  $X$ . On voit de même qu'il suffit de prolonger  $c'_1$  à  $H_{\Lambda'}^{2d+1}$  avec  $\text{codim}_{\Lambda} \Lambda \setminus \Lambda' \geq 2$ .

*Exemples.*

1. On prend  $X = \mathbf{C}$ ,  $\Lambda = T_X^*X \cup T_0^*X = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ . On a

$$c'_1 = c'_{1,1} \oplus c'_{1,2} \in H^1(\Lambda_1 - \{0\}, \mathbf{C}/\mathbf{Z}) \oplus H^1(\Lambda_2 - \{0\}, \mathbf{C}/\mathbf{Z}) = \mathbf{C}/\mathbf{Z} \oplus \mathbf{C}/\mathbf{Z}$$

et il s'agit de montrer que l'image de  $c'_1(\mathcal{L}^\mu)$  par l'application "somme" est nulle, autrement dit que les déterminants des systèmes locaux  $\mathcal{L}_1^\mu$  et  $\mathcal{L}_2^\mu$  *tournent en sens inverse* l'un de l'autre. Ceci provient du fait que dans la construction de  $\mathcal{L}^\mu$ , le système local  $\mathcal{L}_2^\mu$  est obtenu par transformation de Fourier-Sato à partir de  $\mathcal{L}_1^\mu$ . Si par exemple  $\mathcal{M}$  est le  $\mathcal{D}$ -module à droite  $\mathcal{D}_X/(t\partial_t - \alpha) \cdot \mathcal{D}_X$ , le système local  $\mathcal{L}_1^\mu$  est le système de rang 1 et de monodromie  $\exp(2i\pi\alpha)$ , donc  $c'_{1,1} = 2i\pi\alpha \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ . Le système local  $\mathcal{L}_2^\mu$  est le complexe des solutions du  $\mathcal{D}$ -module défini par l'équation transformée de Fourier ( $t = \partial_\tau$ ,  $\partial_t = -\tau$ ), à savoir  $-\partial_\tau\tau - \alpha$ , de monodromie  $\exp(-2i\pi(\alpha + 1))$ . Dans cet exemple, il n'est pas nécessaire de remplacer  $\mathbf{Z}$  par  $\frac{1}{2}\mathbf{Z}$ .  $\square$

2. Soit  $X$  un voisinage de 0 dans  $\mathbf{C}^2$  et  $C$  un germe de courbe à l'origine, irréductible par exemple. Le  $\mathcal{D}$ -module  $\mathcal{M}$  est le faisceau des parties polaires de fonctions méromorphes à pôles le long de  $C$ , dont le complexe de de Rham est le faisceau constant  $\mathbf{C}_C$  sur  $C$ , à un décalage convenable près. On a alors  $\Lambda = \overline{T_C^*X} \cup T_0^*X = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ , où  $C^\circ$  est la partie régulière de  $C$  (ici  $C^\circ = C - \{0\}$ ). Le système local  $\mathcal{L}_1^\mu$  est alors le faisceau constant et il s'agit de voir que le déterminant du système local  $\mathcal{L}_2^\mu$  a pour monodromie  $\pm \text{Id}$ .

Prenons pour simplifier le cas où  $C = \{x^3 = y^2\}$ . La fibre de  $\mathcal{L}_2^\mu$  en un point  $(\xi, \eta)$  avec  $\xi \neq 0$  de  $T_0^*X$  est l'espace des cycles évanescents de la fonction linéaire  $\ell(x, y) = \xi x + \eta y$  pour le faisceau  $\mathbf{C}_C$ . La monodromie cherchée est celle obtenue sur cet espace quand  $\eta = 1$  et  $\xi$  fait le tour de l'origine.

L'espace des cycles évanescents pour  $\xi x + y$  est l'espace de dimension 1 engendré par la différence des deux racines proches de 0 de l'équation  $\xi x + y = \delta$  sur  $C$  avec  $0 < \delta \ll |\xi|$ . Lorsque  $\xi$  fait le tour de 0, ces deux racines sont permutées, d'où une monodromie égale à  $-\text{Id}$ .

On conclut que, dans cet exemple, la classe  $c'_1$  se prolonge avec coefficients dans  $\mathbf{C}/(\frac{1}{2}\mathbf{Z})$ .  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [A-LJ89] B. ANGÉNIOL, M. LEJEUNE-JALABERT, *Calcul différentiel et classes caractéristiques en géométrie algébrique*, Travaux en cours vol. 38, Hermann, Paris, 1989.
- [At] M. F. ATIYAH, *Collected Works*, Oxford University Press, 1988.
- [At65] M. F. ATIYAH, *The index theorem for manifolds with boundary*, in *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem (appendix I)*, Annals of Math. Study, Princeton University Press **57** (1965), 337–351, ou 41–55 dans [At, vol. 3].
- [A-B64] M. F. ATIYAH, R. BOTT, *The index problem for manifolds with boundary*, in *Differential analysis (Bombay Colloquium 1964)*, Oxford University Press (1964), 175–186, ou 27–38 dans [At, vol. 3].
- [A-H62] M. F. ATIYAH, F. HIRZEBRUCH, *The Riemann-Roch theorem for analytic embeddings*, Topology **1** (1962), 151–166, ou 273–290 dans [At, vol. 2].
- [A-S68] M. F. ATIYAH, I. M. SINGER, *The index of elliptic operators, I*, Ann. of Math. **87** (1968), 484–530, ou 173–219 dans [At, vol. 3].
- [B-D82] P. BAUM, R. G. DOUGLAS, *K-homology and index theory*, Proc. of Symposia in Pure Math. **38** (1982), Part 1, 117–173.
- [B-F-M79] P. BAUM, W. FULTON, R.D. MACPHERSON, *Riemann-Roch and topological K-theory for singular varieties*, Acta Math. **143** (1979), 155–192.
- [B-L95] J.-M. BISMUT, J. LOTT, *Flat vector bundles, direct images and higher real analytic torsion*, Journal of the AMS, à paraître.
- [Bj79] J.-E. BJÖRK, *Rings of Differential Operators*, North Holland, Amsterdam, 1979.
- [B-M90] L. BOUTET DE MONVEL, B. MALGRANGE, *Le théorème de l'indice relatif*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **23** (1990), 151–192 (voir aussi [Z-A93], 1–30).
- [Bry86] J. L. BRYLINSKI, *Some examples of Hochschild and cyclic homology*, in *Algebraic groups, Utrecht 1986*, A. Cohen et al. eds., Springer Lect. Notes in Math. **1271** (1987), 33–72.
- [B-D-K81] J. L. BRYLINSKI, A. DUBSON, M. KASHIWARA, *Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale*, C.R. Acad. Sci. Paris **293** (1981), 573–576.
- [Del70] P. DELIGNE, *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Lect. Notes in Math. vol. 163, Springer Verlag, 1970.

- [Fu84] W. FULTON, *Intersection Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, Folge 3 Band 2, Springer Verlag, 1984.
- [Ga81] O. GABBER, *The integrability of the characteristic variety*, Amer. J. of Math. **103** (1981), 445–468.
- [G-M93] M. GORESKY, R. D. MACPHERSON, *Local contribution to the Lefschetz fixed point formula*, Invent. Math. **111** (1993), 1–33.
- [G-M90] M. GRANGER, PH. MAISONOBE, *A basic course on differential modules*, in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels vol. 1*, les cours du CIMPA, Travaux en cours vol. 45, Hermann, Paris (1993), 103–168.
- [Gui95] S. GUILLERMOU, *Classe de Lefschetz des paires elliptiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **319** (1994), 355–360, et thèse Univ. Paris 6, Duke Math. Journal, à paraître.
- [Gui96] S. GUILLERMOU, *Indice d'un  $\mathcal{D}$ -module transversalement elliptique*, C. R. Acad. Sci. Paris (1996), à paraître.
- [H-S84] C. HOUZEL, P. SCHAPIRA, *Images directes des modules différentiels*, C. R. Acad. Sci. Paris **298** (1984), 461–464.
- [Il71] L. ILLUSIE, *Complexe cotangent et déformations I*, Lecture Notes in Math. vol. 239, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1971.
- [Iv76] B. IVERSEN, *Local Chern classes*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **9** (1976), 155–169.
- [Jo92] R. JOSHUA, *Riemann-Roch for equivariant  $\mathcal{D}$ -modules-I*, Math. Z. **206** (1991), 131–144.
- [Ka70] M. KASHIWARA, *Algebraic study of systems of partial differential equations*, Master thesis, Tokyo, 1970, trad. anglaise Mém. Soc. Math. France vol. 63, 1995.
- [Ka76] M. KASHIWARA, *B-functions and holonomic systems*, Invent. Math. **38** (1976), 33–53.
- [Ka84] M. KASHIWARA, *The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems*, Publication R.I.M.S. Kyoto Univ. **20** (1984), 319–365.
- [K-K81] M. KASHIWARA, T. KAWAI, *On the holonomic systems of differential equations (systems with regular singularities) III*, Publication R.I.M.S. Kyoto Univ. **17** (1981), 813–979.

- [K-S82] M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA, *Microlocal study of sheaves*, Astérisque vol. 128, Société Mathématique de France, Paris, 1985, voir aussi C. R. Acad. Sci. **295** (1982) 487–490.
- [K-S90] M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 292, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990.
- [Lau83] G. LAUMON, *Sur la catégorie dérivée des  $\mathcal{D}$ -modules filtrés*, Springer Lect. Notes in Math. **1016** (1983), 151–237.
- [Le87] R. N. LEVY, *Riemann-Roch theorem for complex spaces*, Acta Math. **158** (1987), 149–188.
- [MP74] R. D. MACPHERSON, *Chern classes for singular varieties*, Annals of Math. **100** (1974), 423–432.
- [M-V86] R. D. MACPHERSON, K. VILONEN, *Elementary construction of perverse sheaves*, Invent. Math. **84** (1986), 403–435.
- [M-V88] R. D. MACPHERSON, K. VILONEN, *Perverse sheaves with singularities along the curve  $y^n = x^m$* , Comment. Math. Helv. **63** (1988), 89–102.
- [Mai87] PH. MAISONOBE, *Faisceaux pervers dont le support singulier est une courbe plane*, Compositio Math. **62** (1987), 215–261.
- [Ma78] B. MALGRANGE, *L'involativité des caractéristiques des systèmes différentiels et microdifférentiels*, in Séminaire Bourbaki, Springer Lect. Notes in Math. **710** (1978), exposé n° 522.
- [Ma85] B. MALGRANGE, *Sur les images directes de  $\mathcal{D}$ -modules*, Manuscripta Math. **50** (1985), 49–71.
- [Ma90] B. MALGRANGE, *De Rham Complex and Direct Images of  $\mathcal{D}$ -Modules*, in *Eléments de la théorie des systèmes différentiels* vol. 2, les cours du CIMPA, Travaux en cours vol. 46, Hermann, Paris (1993), 1–13.
- [Ma94] B. MALGRANGE, *Filtration des modules holonomes*, in *Analyse algébrique des perturbations singulières II*, L. Boutet de Monvel ed., Travaux en cours, Hermann, Paris (1994), 35–41.
- [Ma95] B. MALGRANGE, *Connexions méromorphes, II : le réseau canonique*, Invent. Math. **124** (1996), 367–387.
- [Me84] Z. MEBKHOUT, *Une équivalence de catégories, et Une autre équivalence de catégories*, Compositio Math. **51** (1984), 55–62 et 63–68.

- [Me87] Z. MEBKHOUT, *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les  $\mathcal{D}$ -modules cohérents*, Travaux en cours vol. 35, Hermann, Paris, 1989.
- [Na88] L. NARVÁEZ MACARRO, *Cycles évanescents et faisceaux pervers : cas des courbes planes irréductibles*, Compositio Math. **65** (1988), 321–347.
- [O-T-T81] N. R. O'BRIAN, D. TOLEDO, Y. L. TONG, *The trace map and characteristic classes for coherent sheaves*, Amer. J. Math. **103** (1981), 225–252.
- [O-T-T81b] N. R. O'BRIAN, D. TOLEDO, Y. L. TONG, *Hirzebruch-Riemann-Roch for coherent sheaves*, Amer. J. Math. **103** (1981), 253–271.
- [O-T-T81c] N. R. O'BRIAN, D. TOLEDO, Y. L. TONG, *Grothendieck-Riemann-Roch for complex manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **5** (1981), 182–184.
- [O-T-T85] N. R. O'BRIAN, D. TOLEDO, Y. L. TONG, *A Grothendieck-Riemann-Roch formula for maps of complex manifolds*, Math. Ann. **271** (1985), 493–526.
- [Ph79] F. PHAM, *Singularités des systèmes de Gauss-Manin*, Progress in Math. vol. 2, Birkhäuser, Boston, 1980.
- [Sa89] M. SAITO, *Induced  $\mathcal{D}$ -modules and differential complexes*, Bull. Soc. Math. France **117** (1989), 261–283.
- [S-K-K73] M. SATO, T. KAWAI, M. KASHIWARA, *Microfunctions and pseudo-differential equations*, Springer Lect. Notes in Math. **287** (1973), 265–529.
- [Scha85] P. SCHAPIRA, *Microdifferential systems in the complex domain*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 269, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [Sch-Sch90] P. SCHAPIRA, J.-P. SCHNEIDERS, *Paires elliptiques I. Finitude et dualité*, C. R. Acad. Sci. Paris **311** (1990), 83–86 et 5–60 dans [Sch-Sch94].
- [Sch-Sch91] P. SCHAPIRA, J.-P. SCHNEIDERS, *Paires elliptiques II. Classe d'Euler et indice*, C. R. Acad. Sci. Paris **312** (1991), 81–84 et 61–98 dans [Sch-Sch94].
- [Sch-Sch94] P. SCHAPIRA, J.-P. SCHNEIDERS, *Index theorem for elliptic pairs*, Astérisque vol. 224, Société Mathématique de France, Paris, 1994 (voir aussi [Z-A93], 141–156).
- [Schn86] J.-P. SCHNEIDERS, *Dualité pour les modules différentiels*, Thèse, Université de Liège, 1986.
- [Schn94] J.-P. SCHNEIDERS, *A coherence criterion for Fréchet Modules*, dans [Sch-Sch94], 99–113.

- [Schn94b] J.-P. SCHNEIDERS, *An introduction to  $\mathcal{D}$ -modules*, Bull. Soc. Royale Sci. Liège **63** (1994), 223–295.
- [Su90] T. SUWA, *Complex analytic singular foliations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. **37** (1990), 297–320.
- [T-T86] D. TOLEDO, Y. L. TONG, *Green's theory of Chern classes and the Riemann-Roch formula*, in *Lefschetz centennial conference, part I*, Contemporary Math. **58** (1986), 261–275.
- [Z-A93] G. ZAMPIERI, A. D'AGNOLO EDS.,  *$\mathcal{D}$ -modules, representation theory and quantum groups*, Lecture Notes in Math. vol. 1565, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

Claude SABBABH  
URA 169 du C.N.R.S.  
Centre de Mathématiques  
Ecole Polytechnique  
F-91128 Palaiseau cedex  
France

sabbah@math.polytechnique.fr

# *Astérisque*

CHRISTOPHE SOULÉ

## **Classes caractéristiques secondaires des fibrés plats**

*Astérisque*, tome 241 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 819, p. 411-424

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1995-1996\\_\\_38\\_\\_411\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__411_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## CLASSES CARACTÉRISTIQUES SECONDAIRES DES FIBRÉS PLATS

par Christophe SOULÉ

### INTRODUCTION

Un fibré plat sur une variété différentiable  $M$  est la donnée d'un fibré vectoriel  $E$  et d'une connexion de courbure nulle sur ce fibré. La théorie de Chern-Weil montre que les classes de Chern d'un tel fibré sont de torsion dans la cohomologie paire de  $M$  à coefficients entiers. Cheeger et Simons [9] ont défini pour tout fibré plat des classes caractéristiques secondaires  $\widehat{c}_p(E)$  dans la cohomologie de degré impair de  $M$  à coefficients  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ . Quand  $M$  est une variété projective complexe, Bloch [2] a conjecturé que, si  $p \geq 2$ , les classes  $\widehat{c}_p(E)$  sont aussi de torsion. Ceci a été montré récemment par Reznikov [29], et c'est à ce résultat qu'est consacré cet exposé.

Le premier paragraphe expose les propriétés des classes de Cheeger et Simons. Le second décrit les deux preuves de Reznikov de la conjecture de Bloch. On donne enfin le lien avec les classes caractéristiques en cohomologie de Deligne, et l'on décrit l'exemple des variétés abéliennes et celui des fibrés de Gauss-Manin.

Je remercie S. Bloch, H. Esnault, P. Pansu et A. Reznikov pour leur aide dans la préparation de cet exposé.

### 1. LES CLASSES DE CHEEGER ET SIMONS

#### 1.1. Formes de Chern

Soient  $M$  une variété différentiable et  $E$  un fibré vectoriel complexe  $C^\infty$  de rang  $n$  sur  $M$ . Notons  $A^*(M)$  le complexe des formes différentielles complexes sur  $M$  et  $A^*(M; E)$  celui des formes à coefficients dans  $E$ . Supposons donnée une connexion  $\nabla$  sur  $E$ , c'est-à-dire une application linéaire  $\nabla : A^0(M; E) \rightarrow A^1(M; E)$  telle que

$$\nabla(f \otimes s) = df \otimes s + f \otimes \nabla(s), \quad f \in A^0(M), \quad s \in A^0(M; E).$$

On peut étendre  $\nabla$  à  $A^\bullet(M, E)$  par la règle de Leibniz  $\nabla(\omega \otimes s) = d(\omega) \otimes s + (-1)^{\deg(\omega)} \omega \otimes \nabla s$ . La courbure  $\nabla^2$  vérifie alors  $\nabla^2(f \otimes s) = f \nabla^2(s)$  et définit une forme  $\Omega \in A^2(M; \text{End}(E))$ . Pour toute matrice complexe  $n \times n$ , notons  $c_p(A)$  le polynôme invariant obtenu comme coefficient de  $t^{n-p}$  dans  $\det(t \text{Id}_n - \frac{A}{2\pi i})$ . Si on évalue ce polynôme sur la matrice de formes différentielles  $\Omega$ , on obtient une forme fermée

$$c_p(\nabla) = c_p(\Omega) \in A^{2p}(M)$$

dont la classe de cohomologie dans  $H^{2p}(M; \mathbb{C})$  est l'image de la classe de Chern  $c_p(E) \in H^{2p}(M; \mathbb{Z})$ .

### 1.2. Caractères différentiels

Désignons par  $(S_\bullet(M), \partial)$  le complexe des chaînes singulières  $C^\infty$  à coefficients entiers sur  $M$  et par  $Z_\bullet(M) = \ker(\partial) \subset S_\bullet(M)$  le sous-groupe des chaînes fermées. Pour tout anneau  $\Lambda$  on note  $S^\bullet(M; \Lambda) = \text{Hom}(S_\bullet(M), \Lambda)$  le complexe des cochaînes singulières  $C^\infty$  sur  $M$  à coefficients  $\Lambda$ . L'intégration des formes différentielles définit un morphisme de complexes

$$I : A^\bullet(M) \longrightarrow S^\bullet(M; \mathbb{C}).$$

Le groupe  $\widehat{H}^k(M; \mathbb{C}/\mathbb{Z})$  des *caractères différentiels* de degré  $k \in \mathbb{N}$  sur  $M$  est défini comme l'ensemble des morphismes  $\chi \in \text{Hom}(Z_k(M), \mathbb{C}/\mathbb{Z})$  tels que  $\chi \circ \partial$  soit dans l'image de l'application composée

$$A^{k+1}(M) \xrightarrow{I} S^{k+1}(M; \mathbb{C}) \xrightarrow{r} S^{k+1}(M; \mathbb{C}/\mathbb{Z}).$$

Remarquons que l'application  $r \circ I$  est injective. On peut donc associer à  $\chi$  une unique forme  $\omega = \delta(\chi)$  telle que  $\chi \circ \partial = r \circ I(\omega)$ . Cette forme  $\omega$  est dans le sous-groupe  $A^{k+1}(M)_0$  des formes fermées dont les périodes sur  $Z_{k+1}(M)$  sont des entiers. Par ailleurs, toute cochaîne fermée de degré  $k$  à coefficients  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  induit, par restriction à  $Z_k(M)$ , un caractère différentiel. On a alors ([9], Th. 1.1) :

LEMME 1.— *Il existe une suite exacte naturelle*

$$0 \rightarrow H^k(M; \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \rightarrow \widehat{H}^k(M; \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} A^{k+1}(M)_0 \rightarrow 0.$$

### 1.3. Classes de Cheeger et Simons

THÉORÈME 1 ([9], Th. 2.2).— Fixons un entier  $p \geq 1$ . On peut, de façon unique, associer à tout fibré  $E$  sur  $M$  muni d'une connexion  $\nabla$  un caractère différentiel  $\widehat{c}_p(E, \nabla) \in \widehat{H}^{2p-1}(M; \mathbb{C}/\mathbb{Z})$  tel que :

- i)  $\delta(\widehat{c}_p(E, \nabla)) = c_p(\nabla)$  ;
- ii) si  $f : N \rightarrow M$  est un morphisme de variétés,

$$\widehat{c}_p(f^*E, f^*\nabla) = f^*\widehat{c}_p(E, \nabla).$$

L'unicité de  $\widehat{c}_p(E, \nabla)$  résulte du fait suivant. Il existe une variété  $\tilde{G}$  telle que  $H^{2p-1}(\tilde{G}; \mathbb{C}/\mathbb{Z}) = 0$ , un fibré avec connexion  $(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$  sur  $\tilde{G}$  et un morphisme classifiant  $\varphi : M \rightarrow \tilde{G}$  tels que  $\varphi^*(\tilde{E}, \tilde{\nabla}) = (E, \nabla)$ . Comme la cohomologie impaire de  $\tilde{G}$  est nulle et puisque  $c_p(\tilde{\nabla}) \in A^{2p}(\tilde{G})_0$ , le Lemme 1 montre qu'il y a un unique caractère différentiel  $\widehat{c}_p(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$  sur  $\tilde{G}$  tel que  $\delta(\widehat{c}_p(\tilde{E}, \tilde{\nabla})) = c_p(\tilde{\nabla})$ , d'où l'unicité de  $\widehat{c}_p(E, \nabla) = \varphi^*\widehat{c}_p(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$ . La construction de  $\tilde{G}$  est due à Narasimhan et Ramanan [26] ; voir aussi [17] Prop. 2.2.9., où  $\tilde{G}$  est l'espace total d'un fibré en espaces affines sur une grassmannienne. Pour montrer l'existence de  $\widehat{c}_p(E, \nabla)$ , on utilise le fait que deux applications classifiantes sont homotopes [9].

1.4. La classe  $\widehat{c}_p(E, \nabla)$  varie de la façon suivante avec  $\nabla$ . Soit  $\nabla_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , une famille  $C^\infty$  de connexions sur le fibré différentiable  $E$ . Notons  $\Omega_t$  la courbure de  $\nabla_t$  et  $\Theta_t = \frac{d}{dt}(\nabla_t) \in A^1(M; \text{End}(E))$ . Soit  $\mu$  la forme  $p$ -linéaire symétrique sur les matrices  $n \times n$  telle que  $\mu(A, A, \dots, A) = c_p(A)$ . Suivant Chern et Simons [10], on pose

$$(1) \quad \eta = p \int_0^1 \mu(\Theta_t, \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt \in A^{2p-1}(M).$$

L'intégration de cette forme sur les cycles de  $Z_{2p-1}(M)$  définit un caractère différentiel  $\hat{\eta} \in \widehat{H}^{2p-1}(M; \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ . On a alors la formule ([9], Prop. 2.9)

$$(2) \quad \widehat{c}_p(E, \nabla_1) - \widehat{c}_p(E, \nabla_0) = \hat{\eta}.$$

1.5. Un fibré plat sur  $M$  est la donnée  $(E, \nabla)$  d'un fibré différentiable  $E$  et d'une connexion  $\nabla$  sur  $E$  de courbure nulle. Ceci équivaut à la donnée d'un fibré principal de groupe structural discret et, si  $M$  est connexe, à celle d'une représentation (d'holonomie)  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ .

Si  $(E, \nabla)$  est un fibré plat, et  $p \geq 1$ , la forme de Chern  $c_p(\nabla)$  est nulle et la classe  $c_p(E) \in H^{2p}(M; \mathbb{Z})$  est de torsion. D'après le Lemme 1 et le Théorème 1, on peut associer à  $(E, \nabla)$  une classe

$$\widehat{c}_p(E, \nabla) \in H^{2p-1}(M; \mathbb{C}/\mathbb{Z}),$$

qu'on notera aussi  $\widehat{c}_p(E)$  ou  $\widehat{c}_p(\rho)$  ([9], cf. aussi [10], p.57). Elle vérifie les propriétés suivantes :

- a) Si  $p = 1$ , l'isomorphisme  $H^1(M; \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{C}^*)$  (induit par  $z \mapsto \exp(2\pi iz)$  si  $z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ) envoie  $\widehat{c}_1(E, \nabla)$  sur le déterminant de  $\rho$  ;
- b) si  $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$  est une suite exacte de fibrés plats, on a

$$\widehat{c}_p(E) = \widehat{c}_p(E_1) + \widehat{c}_p(E_2) + \sum_{i=1}^{p-1} \widehat{c}_i(E_1) \cup c_{p-i}(E_2),$$

où  $\cup$  désigne le cup-produit  $H^\bullet(M; \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \otimes H^\bullet(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^\bullet(M; \mathbb{C}/\mathbb{Z})$  ;

- c) si  $E$  est un fibré plat de rang  $n$  et  $L$  un fibré plat de rang un, on a

$$\widehat{c}_p(E \otimes L) = \sum_{i=1}^p \binom{n-i}{p-i} \widehat{c}_i(E) \cup c_1(L)^{p-i} + \binom{n}{p} \widehat{c}_1(L) \cup c_1(L)^{p-1} ;$$

d) soit  $\rho_t : \pi_1(M) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ ,  $t \in [0, 1]$ , une famille  $C^\infty$  de représentations, i.e. telle que, pour tout  $\gamma \in \pi_1(M)$ , l'application  $t \mapsto \rho_t(\gamma)$  soit  $C^\infty$ , alors, si  $p \geq 2$ , on a

$$(3) \quad \widehat{c}_p(\rho_0) = \widehat{c}_p(\rho_1).$$

En effet, la donnée de  $(\rho_t)$  équivaut à celle d'une famille  $C^\infty$  de connexions plates  $\nabla_t$  sur un fibré différentiable fixe  $E$ . Si  $p \geq 2$ , la forme  $\eta$  de la formule (1) est alors nulle et l'égalité (3) résulte donc de (2). Cette propriété de *rigidité* conduit à penser que les classes  $\widehat{c}_p(E)$  ne prennent qu'une quantité dénombrable de valeurs ([9], 8.10). Comme on va le voir, c'est vrai si  $M$  est une variété de Kähler.

**1.6.** Soit  $\Delta$  la catégorie des ensembles finis ordonnés, dont les morphismes sont les applications croissantes injectives. Une variété simpliciale (stricte) est la donnée  $M_\bullet$  d'un foncteur contravariant de  $\Delta$  dans la catégorie des variétés différentiables ; on note  $M_n$  l'image de l'ensemble ordonné  $[n] = \{0 < 1 < \dots < n\}$ . Si  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  est le simplexe standard, on note  $A^\bullet(\Delta^n)$  les formes différentielles dans l'intérieur de  $\Delta^n$  qui s'étendent à  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Une forme différentielle de degré  $k$  sur  $M_\bullet$  est la donnée

d'une suite d'éléments  $w_n \in \bigoplus_{s+t=k} A^s(\Delta^n) \otimes A^t(M_n)$ ,  $n \geq 0$ , tels que, pour tout morphisme  $f : [m] \rightarrow [n]$  de  $\Delta$ , on ait l'égalité  $(f^* \otimes \text{id})(w_n) = (\text{id} \otimes f_*)(w_n)$ . Si  $G$  est un groupe de Lie, un  $G$ -fibré principal sur  $M_\bullet$  est la donnée d'un morphisme de variétés simpliciales  $\pi : P_\bullet \rightarrow M_\bullet$  tel que, pour tout  $n \geq 0$ , l'application  $P_n \rightarrow M_n$  soit un  $G$ -fibré principal sur  $M_n$ , et que, pour tout morphisme  $f : [m] \rightarrow [n]$  de  $\Delta$ , l'application associée  $P_n \rightarrow P_m$  soit un morphisme de  $G$ -fibrés.

La théorie de Chern-Weil et celle de Cheeger-Simons se généralisent au cadre simplicial [16], [17]. Un exemple de variété simpliciale est l'espace classifiant  $\text{BGL}_n(\mathbb{C})$  du groupe de Lie  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ . Si  $\text{GL}_n(\mathbb{C})^\delta$  désigne le groupe  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  muni de la topologie discrète, on peut aussi considérer son espace classifiant  $\text{BGL}_n(\mathbb{C})^\delta$  comme une variété simpliciale. Le fibré principal universel sur  $\text{BGL}_n(\mathbb{C})^\delta$  est plat, et possède des classes de Cheeger-Simons ([24]§5, [17]§4.5)

$$\hat{c}_p \in H^{2p-1}(\text{BGL}_n(\mathbb{C})^\delta; \mathbb{C}/\mathbb{Z}).$$

Etant donné un fibré plat  $E$  sur une variété différentiable  $M$ , le fibré principal associé est classé par une application continue, unique à homotopie près,  $\alpha : M \rightarrow \text{BGL}_n(\mathbb{C})^\delta$ . On a l'égalité

$$(4) \quad \hat{c}_p(E) = \alpha^*(\hat{c}_p), \quad p \geq 1.$$

## 2. UN THÉORÈME DE REZNIKOV

### 2.1. Énoncé

THÉORÈME 2 (Reznikov [29]).— Soient  $X$  une variété de Kähler compacte et  $E$  un fibré plat sur  $X$ . Alors, pour tout entier  $p \geq 2$ , les classes de Cheeger-Simons  $\hat{c}_p(E)$  sont dans le sous-groupe de torsion  $H^{2p-1}(X; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  de  $H^{2p-1}(X; \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ .

2.2. Pour montrer le Théorème 2, on peut supposer que  $X$  est connexe et que la représentation d'holonomie  $\rho$  de  $E$  prend ses valeurs dans  $SL_n(\mathbb{C})$ . En effet, il existe un revêtement fini  $\pi : Y \rightarrow X$  tel que  $\pi^*(E) = F \otimes L$  où  $L$  est un fibré plat de rang un et  $\det(F) = 1$ . Si l'on sait montrer le théorème pour  $F$ , on l'obtient pour  $F \otimes L$  par 1.5.c). L'énoncé pour  $E$  résulte alors de la formule  $\pi_* \hat{c}_k(\pi^* E) = \deg(\pi) \hat{c}_k(E)$ .

2.3. Comme  $\pi_1(X)$  est de présentation finie, l'ensemble de ses représentations  $\text{Hom}(\pi_1(X), SL_n(\mathbb{C}))$  forme les points complexes d'une variété affine  $V$  définie sur  $\mathbb{Q}$ .

La composante irréductible de  $V(\mathbb{C})$  contenant  $\rho$  possède un point  $\overline{\mathbb{Q}}$ -rationnel et elle est connexe pour la topologie ordinaire. Il existe donc une famille lisse  $(\rho_t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , de représentations de  $\pi_1(X)$  telle que  $\rho_0 = \rho$  et  $\rho_1$  est définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Par la rigidité de  $\widehat{c}_p$  (1.5 d)), on sait que  $\widehat{c}_p(\rho) = \widehat{c}_p(\rho_1)$  si  $p \geq 2$ . Pour montrer le Théorème 2, on peut donc remplacer  $\rho$  par  $\rho_1$ . Comme  $\pi_1(X)$  est de type fini,  $\rho$  se factorise alors par un sous-groupe  $SL_n(O_S)$  de  $SL_n(\mathbb{C})$ , où  $O_S$  est un anneau de  $S$ -entiers dans un corps de nombres  $F$ . La représentation  $\rho$  définit, à homotopie près, une application continue  $\beta : X \rightarrow BSL_n(O_S)$  et, d'après (4),  $\widehat{c}_p(\rho)$  est dans le sous-groupe  $\beta^*(H^{2p-1}(SL_n(O_S); \mathbb{C}/\mathbb{Z}))$  de  $H^{2p-1}(X; \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ . Pour savoir que  $\widehat{c}_p(\rho)$  est de torsion, il suffit de vérifier que son cap-produit par tout élément de  $H_{2p-1}(X; \mathbb{Z})$  est d'ordre fini. Comme  $\widehat{c}_p$  est une classe caractéristique stable, le Théorème 2 résulte de l'énoncé suivant, où  $SL(O_S)$  désigne la réunion des groupes  $SL_n(O_S)$ ,  $n \geq 1$ , pour les inclusions habituelles :

**THÉORÈME 3.**— *Soient  $X$  une variété de Kähler compacte et connexe,  $\rho : \pi_1(X) \rightarrow SL_n(O_S)$  une représentation de son groupe fondamental, et  $\beta_* : H_*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(SL(O_S), \mathbb{Z})$  le morphisme associé en homologie. En degrés positifs l'image de  $\beta_*$  est de torsion.*

**2.4.** Comme chaque groupe d'homologie de  $SL(O_S)$  est de type fini, le Théorème 3 équivaut à la nullité en degrés positifs de la corestriction  $\beta^* : H^*(SL(O_S), \mathbb{R}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{R})$ . La cohomologie de  $SL(O_S)$  est connue depuis les travaux de Borel [4] [5]. Notons  $G = R_{F/\mathbb{Q}}SL_n$  le groupe algébrique obtenu par restriction des scalaires de  $F$  à  $\mathbb{Q}$ , par  $G(\mathbb{R}) = SL_n(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$  son groupe des points réels, et par  $H_{\text{cont}}^\bullet(G(\mathbb{R}); \mathbb{R})$  la cohomologie continue de ce groupe de Lie. L'application de corestriction

$$H_{\text{cont}}^m(G(\mathbb{R}); \mathbb{R}) \longrightarrow H^m(SL_n(O_S); \mathbb{R})$$

est un isomorphisme si  $n$  est grand par rapport à  $m$ , [4] Thm. 7.5 et §11, [5] Thm. 6.4. (\*)

Quitte à agrandir le corps  $F$ , on peut supposer qu'il ne possède pas de plongement réel. Le groupe  $G(\mathbb{R})$  est alors le produit de  $[F : \mathbb{Q}]/2$  copies de  $SL_n(\mathbb{C})$ . La cohomologie continue de  $SL_n(\mathbb{C})$  est canoniquement isomorphe à la cohomologie singulière de

---

(\*) On sait maintenant que l'application

$$H_{\text{cont}}^m(G(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \longrightarrow H^m(SL_n(F), \mathbb{R})$$

est un isomorphisme quels que soient  $m$  et  $n$  [6].

la variété  $SU_n$  ([4] 10.2 et 10.6), c'est par conséquent ([3] §21) une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degré impair  $e_p \in H_{\text{cont}}^{2p-1}(SL_n(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ ,  $2 \leq p \leq n$  (le morphisme de transgression  $H^{2p-1}(SU_n, \mathbb{R}) \rightarrow H^{2p}(BSU_n, \mathbb{R})$  du fibré principal universel sur  $BSU_n$  envoie la classe correspondant à  $e_p$  sur la  $p$ -ième classe de Chern).

Fixons un plongement complexe  $F \subset \mathbb{C}$ , notons  $\alpha : X \rightarrow BSL_n(\mathbb{C})^\delta$  l'application classifiante du fibré plat associé à  $\rho$  et  $e'_p \in H^{2p-1}(BSL_n(\mathbb{C})^\delta, \mathbb{R})$  la restriction de  $e_p$ . Pour montrer le Théorème 3, il suffit de vérifier que

$$(5) \quad \alpha^*(e'_p) = 0 \text{ si } p \geq 2.$$

## 2.5. Première preuve

**2.5.1.** Reznikov donne deux preuves de (5), qui ont chacune leur intérêt propre. La première utilise la description suivante des classes  $\alpha^*(e'_p)$ . Soient  $G = SL_n(\mathbb{C})$  et  $K = SU_n$  son sous-groupe compact maximal. Le  $G$ -fibré principal associé à  $E$ , divisé par l'action de  $K$ , définit une fibration  $\mathcal{F} \rightarrow X$  de fibre  $G/K$ , dont les fonctions de transition sont localement constantes. L'espace tangent à l'origine de  $G/K$  est l'espace vectoriel  $\wp$  des matrices hermitiennes complexes  $n \times n$  de trace nulle. Notons  $S_N$  le groupe des permutations de  $N$  éléments et  $\varepsilon : S_N \rightarrow \pm 1$  la signature. La formule

$$(6) \quad \omega_p(A_1, \dots, A_{2p-1}) = \sum_{\tau \in S_{2p-1}} (-1)^{\varepsilon(\tau)} \text{tr} (A_{\tau(1)} A_{\tau(2)} \dots A_{\tau(2p-1)}),$$

$A_1, \dots, A_{2p-1} \in \wp$ , définit une forme invariante fermée sur  $G/K$ . On lui associe une forme fermée  $\omega'_p$  sur  $\mathcal{F}$ , qui est localement sur  $X$  l'image inverse de  $\omega_p$  par la seconde projection  $\mathcal{F}|_U \simeq U \times G/K \rightarrow G/K$ . Soit  $s : X \rightarrow \mathcal{F}$  une section quelconque de la fibration  $\mathcal{F} \rightarrow X$ .

LEMME 2 ([28], 3.3).— *Pour tout entier  $p \geq 2$ , la classe de cohomologie de  $s^*(\omega'_p)$  est égale à (un multiple non nul de)  $\alpha^*(e'_p)$ .*

**2.5.2.** Comme  $G/K$  est contractile, toutes les sections  $s$  sont homotopes et la classe de  $s^*(\omega'_p)$  ne dépend pas du choix de  $s$ . Supposons que  $\rho$  est semi-simple, c'est-à-dire que son image n'est pas contenue dans un sous-groupe parabolique propre de  $SL_n(\mathbb{C})$  (en général, on notera que  $\alpha^*(e'_p)$  a la même valeur pour  $\rho$  et sa semi-simplifiée, d'après 1.5. b) et la Proposition 1 ci-dessous). Un théorème de Corlette [11] et Donaldson [15] permet alors de supposer que  $s$  est une section harmonique de  $\mathcal{F}$ . D'après un

résultat de Sampson [30], (cf. aussi [8] 2.2 et [27] 6.1), une telle section a la propriété suivante. Si  $\mathcal{F}_x$  est la fibre de  $\mathcal{F}$  au point  $x \in X$ , notons

$$Ds : T_x^{\mathbb{C}} X \longrightarrow T_{s(x)} \mathcal{F}_x \simeq \wp \otimes \mathbb{C}$$

la complexifiée de l'application tangente de  $s$  au point  $x$ . Alors l'image par  $Ds$  de chacun des sous-espaces  $T_x^{10} X$  et  $T_x^{01} X$  de  $T_x^{\mathbb{C}} X$  est une sous-algèbre abélienne de  $\wp \otimes \mathbb{C}$ . Puisque tout vecteur tangent réel en  $x$  est de la forme  $v + \bar{v}$  avec  $v \in T_x^{10} X$ , l'égalité (5) résulte du lemme suivant :

LEMME 3.— *Quelles que soient  $A_1, \dots, A_{2p-1}$  des matrices complexes commutant deux à deux, et  $\bar{A}_i$ ,  $1 \leq i \leq 2p-1$ , leurs conjuguées, on a*

$$\omega_p(A_1 + \bar{A}_1, A_2 + \bar{A}_2, \dots, A_{2p-1} + \bar{A}_{2p-1}) = 0,$$

où  $\omega_p$  est définie par la formule (6).

*Preuve du lemme.*— On développe l'expression considérée en utilisant la linéarité de  $\omega_p$ . Comme  $A_i$  et  $A_{i+1}$  commutent on a

$$\begin{aligned} & \omega_p(B_1, \dots, B_{i-1}, A_i, A_{i+1}, B_{i+2}, \dots, B_{2p-1}) \\ &= -\omega_p(B_1, \dots, B_{i-1}, A_{i+1}, A_i, B_{i+2}, \dots, B_{2p-1}) = 0 \end{aligned}$$

pour tout choix des matrices  $B_j$ ,  $j \notin \{i, i+1\}$ ,  $1 \leq i \leq 2p-2$  ; de même avec  $\bar{A}_i$  et  $\bar{A}_{i+1}$ . De plus

$$\begin{aligned} & \omega_p(A_1, \bar{A}_2, A_3, \dots, \bar{A}_{2p-2}, A_{2p-1}) \\ &= \omega_p(A_{2p-1}, A_1, \bar{A}_2, A_3, \dots, \bar{A}_{2p-2}) = 0 \end{aligned}$$

à cause de la formule  $tr(AB) = tr(BA)$  et du fait que  $A_1$  et  $A_{2p-1}$  commutent. q.e.d.

## 2.6. Deuxième preuve

**2.6.1.** La deuxième preuve du Théorème 3, valable quand  $X$  est une variété algébrique complexe connexe, projective et lisse, utilise un théorème (difficile) de Simpson : tout fibré plat sur  $X$  admet une déformation  $C^\infty$  vers un fibré plat provenant d'une famille de structures de Hodge complexes polarisées [31], Cor. 9.2.1. Une telle famille [21] [13] est la donnée d'un fibré  $C^\infty$  complexe  $H$  sur  $X$ , d'une décomposition  $H = \bigoplus_{r+s=w} H^{r,s}$ , d'une connexion plate  $\nabla$  sur  $H$  et d'une forme hermitienne nondégénérée  $\langle, \rangle$  sur  $H$ ,

parallèle pour  $\nabla$ . La connexion  $\nabla$  doit satisfaire la condition de transversalité de Griffiths (loc.cit.), les  $H^{r,s}$  sont orthogonaux deux à deux, et la restriction de  $\langle, \rangle$  à  $H^{r,s}$  est définie positive (resp. définie négative) si l'entier  $r$  est pair (resp. impair).

En particulier l'image de la représentation d'holonomie de  $(H, \nabla)$  est contenue dans un groupe unitaire de type  $U(p, q)$ ,  $p + q = n$ , et dans le groupe  $SU(p, q)$  si la représentation initiale est unimodulaire.

**2.6.2.** Notons  $\text{Im} : H^\bullet(BSL_n(\mathbb{C})^\delta; \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^\bullet(BSL_n(\mathbb{C})^\delta; \mathbb{R})$  le morphisme induit par l'application de partie imaginaire  $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ . L'énoncé suivant relie les classes de Borel et celles de Cheeger-Simons (voir aussi [23]) :

**PROPOSITION 1** ([17], §7.4 – 7.6).— *Si  $p \geq 2$ , la classe  $e'_p \in H^{2p-1}(BSL_n(\mathbb{C})^\delta; \mathbb{R})$  est un multiple non nul de  $\text{Im}(\widehat{c}_p)$ .*

Plus précisément, avec les normalisations de [17], on a  $e'_p = 2 \text{Im}(\widehat{c}_p)$ .

**2.6.3.** Il résulte de (3) et de la Proposition 1 que les classes  $\alpha^*(e'_k)$ ,  $k \geq 2$ , sont rigides. D'après le théorème de Simpson, pour montrer (5) on peut donc supposer que  $\alpha$  classe le fibré plat sous-jacent à une variation de structures de Hodge. Dans ce cas le morphisme de corestriction  $H_{\text{cont}}^\bullet(SL_n(\mathbb{C}); \mathbb{R}) \rightarrow H^\bullet(X; \mathbb{R})$  se factorise par l'application

$$H_{\text{cont}}^\bullet(SL_n(\mathbb{C}); \mathbb{R}) \longrightarrow H_{\text{cont}}^\bullet(SU(p, q); \mathbb{R}).$$

La nullité de  $\alpha^*(e'_k)$  résulte donc du lemme suivant :

**LEMME 4.**— *La cohomologie continue de  $SU(p, q)$  est nulle en degrés impairs.*

*Preuve du lemme.*— Soit  $K$  le sous-groupe compact maximal  $SU(p, q) \cap (U(p) \times U(q))$  de  $SU(p, q)$ . La cohomologie continue de  $SU(p, q)$  est isomorphe à la cohomologie singulière de l'espace symétrique compact dual de  $SU(p, q)/K$  ([4], 10.2), c'est-à-dire à la cohomologie du quotient  $SU(p + q)/K$  — une variété grassmannienne dont la cohomologie est de degré pair. q.e.d.

### 3. FIBRÉS PLATS SUR LES VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES (cf. aussi [18])

#### 3.1. Classes de Chern en cohomologie de Deligne

Soit  $X$  une variété projective complexe lisse. Si  $p \in \mathbb{Z}$ , posons  $\mathbb{Z}(p) = (2\pi i)^p \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ . On note  $\mathbb{Z}(p)_D$  le complexe de faisceaux sur  $X$

$$\mathbb{Z}(p) \longrightarrow O_X \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega_X^{p-1},$$

avec  $\mathbb{Z}(p)$  en degré 0. La cohomologie de Deligne de  $X$  est l'hypercohomologie du complexe

$$H_D^n(X, \mathbb{Z}(p)) = \mathbb{H}^n(X, \mathbb{Z}(p)_D).$$

Si  $F^p = (\Omega_X^{p+1} \rightarrow \Omega_X^{p+2} \rightarrow \dots)$  désigne la filtration de Hodge du complexe de de Rham algébrique,  $\mathbb{Z}(p)_D$  est quasi-isomorphe au cône de l'application

$$R\Gamma(X, F^p)[-1] \longrightarrow R\Gamma(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}(p))[-1],$$

d'où une suite exacte longue

$$(7) \quad \dots \rightarrow F^p H^{n-1}(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^{n-1}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}(p)) \xrightarrow{\partial} H_D^n(X, \mathbb{Z}(p)) \\ \rightarrow F^p H^n(X, \mathbb{C}) \rightarrow \dots$$

Le groupe de Chow  $CH^p(X)$  des cycles algébriques de codimension  $p$  sur  $X$ , modulo l'équivalence linéaire, est doté d'une application de classe fondamentale ([19] §7) :

$$\lambda : CH^p(X) \longrightarrow H_D^{2p}(X, \mathbb{Z}(p))$$

dont la restriction aux cycles homologiquement triviaux est l'application d'Abel-Jacobi. En général, on connaît peu de choses sur l'image de cette application [14].

Tout fibré algébrique  $E$  sur  $X$  possède, d'après Grothendieck, des classes de Chern  $c_p(E) \in CH^p(X)$  et donc aussi des classes de Chern  $c_p^D(E) = \lambda(c_p(E))$  dans la cohomologie de Deligne. Supposons que  $E$  est un fibré plat algébrique, c'est-à-dire que  $E$  est muni d'une connexion algébrique  $\nabla : E \rightarrow E \otimes \Omega_X^1$  de carré nul. Soit  $E^\infty$  le fibré plat différentiable associé à  $E$ . Comme l'image de  $c_p(E)$  dans  $H^{2p}(X; \mathbb{C})$  est nulle, la classe  $c_p^D(E)$  est dans l'image de l'application  $\partial$  de (7). Soit  $\varepsilon : H^\bullet(X; \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^\bullet(X; \mathbb{C}/\mathbb{Z}(p))$  l'application induite par la multiplication par  $(2\pi i)^p$  sur les coefficients. Le résultat suivant est dû à plusieurs auteurs [2] [32] [20] [7] (la preuve de [7] est aussi valable dans le cas quasi-projectif) :

PROPOSITION 2.— On a l'égalité

$$c_p^D(E) = \partial \circ \varepsilon(\widehat{c}_p(E^\infty)).$$

Il résulte donc du Théorème 2 que les classes de Chern  $c_p^D(E)$  sont de torsion dans la cohomologie de Deligne, ainsi que l'avait conjecturé Bloch [2].

*Remarque.*— C'est un problème ouvert important que d'avoir une version de la Proposition 2 pour l'espace classifiant  $BGL_n(\mathbb{C})^\delta$ . Grâce à la Proposition 1, cela fournirait en effet une comparaison précise entre le régulateur de Borel et celui de Beilinson.

### 3.2. Le cas des variétés abéliennes

Supposons que  $X = A$  soit une variété abélienne complexe. Comme le groupe  $\pi_1(A)$  est abélien, tout fibré plat sur  $A$  est extension de fibrés en droites plats et le Théorème 2 résulte de 1.5.b). Par contre les classes de Chern ne sont pas toujours de torsion dans le groupe de Chow, comme le montre l'étude par Bloch du groupe des 0-cycles

$$CH_0(A) = CH^d(A), \quad d = \dim(A).$$

Notons  $I = \ker(CH_0(A) \rightarrow \mathbb{Z})$  le noyau du morphisme de degré et  $CH_0(A) \otimes CH_0(A) \xrightarrow{*} CH_0(A)$  le produit de Pontryagin, induit par le morphisme d'addition  $\mu : A \times A \rightarrow A$ . Les puissances  $I^{*n}$  de  $I$  pour le produit de Pontryagin définissent une filtration décroissante de  $CH_0(A)$ . Soit  $\text{Pic}^0(A) \subset \text{Pic}(A) = CH^1(A)$  le groupe des classes de diviseurs algébriquement triviaux.

THÉORÈME 4 [1].

- i) Le groupe  $I$  est divisible,  $I^{*n}$  est sans torsion si  $n \geq 2$ ,  $I^{*(d+1)} = 0$  et  $I^{*d}$  est non nul ;
- ii) le groupe  $I^{*n}$  coïncide avec l'image du produit d'intersection

$$\text{Pic}^0(A)^{\otimes n} \otimes \text{Pic}(A)^{\otimes (d-n)} \longrightarrow CH_0(A).$$

Tout élément de  $\text{Pic}^0(A)$  est la classe  $c_1(L)$  d'un fibré inversible plat  $L$ . On voit donc que, si  $d \geq 2$ ,  $I^{*d}$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel non nul engendré par les classes  $c_d(E)$ ,  $E$  plat de rang  $d$  sur  $X$ , alors que la classe  $c_d^D(E)$  d'un tel fibré est nulle.

Pour toute variété projective complexe lisse  $X$ , on s'attend à ce qu'existe une filtration décroissante, multiplicative et fonctorielle  $F^*CH^p(X)_{\mathbb{Q}}$  de ses groupes de Chow rationnels. On aurait  $F^1CH^1(X)_{\mathbb{Q}} = \text{Pic}^0(X)_{\mathbb{Q}}$  et  $F^{p+1}CH^p(X)_{\mathbb{Q}} = 0$ ,

$F^2CH^p(X)_{\mathbb{Q}}$  serait le noyau de l'application  $\lambda \otimes \mathbb{Q}$  et, pour tout fibré plat  $E$ ,  $c_p(E)$  appartiendrait à  $F^pCH^p(X)_{\mathbb{Q}}$ , en accord avec le fait que  $\lambda(c_p(E))$  est de torsion si  $p \geq 2$  [2] [22].

### 3.3. Les fibrés de Gauss-Manin

Soient  $f : X \rightarrow S$  un morphisme propre et lisse de variétés algébriques complexes non singulières et  $\Omega_{X/S}^{\bullet}$  le complexe des formes différentielles relatives. Pour tout entier  $n \geq 0$ , le faisceau  $\mathcal{H}_{DR}^n(X/S) = R^n f_*(\Omega_{X/S})$  est localement libre sur  $S$ . Il est muni d'une connexion algébrique  $\nabla$  de carré nul, la connexion de Gauss-Manin [25]. Le système local  $\ker(\nabla)$  est égal à  $R^n f_*\mathbb{C} = (R^n f_*\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ , et c'est un exemple de variation de structures de Hodge. L'image de la représentation d'holonomie est donc contenue à la fois dans un groupe arithmétique et dans un groupe unitaire  $U(p, q)$ . Par l'argument de la seconde preuve du Théorème 2, Corlette et Esnault en déduisent le fait suivant (valable sans supposer que  $S(\mathbb{C})$  est compacte)

**Théorème 5** [12] : *Quels que soient les entiers  $n \geq 0$  et  $p \geq 1$ , les classes  $\hat{c}_p(R^n f_*\mathbb{C}) \in H^{2p-1}(S(\mathbb{C}), \mathbb{C}/\mathbb{Z})$  sont de torsion.*

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. BLOCH – *Some elementary Theorems about Algebraic Cycles on Abelian Varieties*, *Inventiones Math.* **37** (1976), 215–228.
- [2] S. BLOCH – *Applications of the dilogarithm function in algebraic K-theory and algebraic geometry*, *Int. Symposium on Alg. Geom.*, Kyoto (1977), 103–114.
- [3] A. BOREL – *Topics in the Homology Theory of Fibre Bundles*, Springer LNM **36** (1967).
- [4] A. BOREL – *Stable real cohomology of arithmetic groups*, *Ann. Sci. ENS* (4) **7** (1974), 235–272.
- [5] A. BOREL – *Stable real cohomology of arithmetic groups II*, in “Manifolds and Lie groups”, *Papers in honour of Y. Matsushima*, Birkhäuser, *Progress in Math.* **14** (1981), 21–55.
- [6] A. BOREL, J. YANG – *The rank conjecture for number fields*, *Math. Research Letters* **1** (1994), 689–699.
- [7] J.-L. BRYLINSKI – *Comparison of the Beilinson-Chern classes with the Chern-Cheeger-Simons classes*, (1993), preprint.

- [8] J. CARLSON, D. TOLEDO – *Harmonic mappings of Kähler manifolds to locally symmetric spaces*, Publ. Math. IHES **69** (1989), 173–201.
- [9] J. CHEEGER, J. SIMONS – *Differential characters and geometric invariants*, in *Geometry and Topology*, Springer LNM **1167** (1985), 50–80.
- [10] S.S. CHERN, J. SIMONS – *Characteristic forms and geometric invariants*, *Annals of Math.* **99** (1974), 48–69.
- [11] K. CORLETTE – *Flat  $G$ -bundles with canonical metrics*, *J. Differential Geometry* **28** (1988), 361–382.
- [12] K. CORLETTE, H. ESNAULT – *Classes of local systems of hermitian vector spaces*, appendice à “Eta invariants, differential characters and flat vector bundles” de J.-M. Bismut (1995), preprint.
- [13] P. DELIGNE – *Travaux de Griffiths*, Sémin. Bourbaki, exp. n° 376, Springer LNM **180** (1971), 213–237.
- [14] P. DELIGNE – *A quoi servent les motifs ?*, in “Motives”, *Proceedings Symposia Pure Math.* **55** Part 1 (1994), 143–161.
- [15] S.K. DONALDSON – *Twisted harmonic maps and self-duality equations*, *Proc. London Math. Soc.* **55** (1987), 127–131.
- [16] J. DUPONT – *Curvature and characteristic classes*, Springer LNM **640** (1978).
- [17] J. DUPONT, R. HAIN, S. ZUCKER – *Regulators and characteristic classes of flat bundles*, (1992), preprint.
- [18] H. ESNAULT – *Recent developments on characteristic classes of flat bundles on complex algebraic manifolds*, (1996), preprint.
- [19] H. ESNAULT, E. VIEHWEG – *Deligne-Beilinson cohomology*, in “Beilinson’s Conjectures on Special Values of  $L$ -Functions”, *Perspectives in Math.* **4** (1988), 43–91.
- [20] H. GILLET, C. SOULÉ – *Arithmetic Chow groups and differential characters*, in “Algebraic  $K$ -theory : connections with geometry and topology”, Kluwer Academic Publishers (1989), 30–68.
- [21] P. GRIFFITHS – *Periods of integrals on algebraic manifolds, III (some global differential-geometric properties of the period mapping)*, Publ. Math. IHES **38** (1970), 125–180.
- [22] U. JANNSEN – *Motivic sheaves and filtrations on Chow groups*, in “Motives”, *Proceedings Symposia Pure Math.* **55** Part 1 (1994), 245–302.

- [23] F. KAMBER, Ph. TONDEUR – *Foliated bundles and characteristic classes*, Springer LNM **493** (1975).
- [24] M. KAROUBI – *Classes caractéristiques de fibrés feuilletés, holomorphes ou algébriques*, K-Theory **8** (1994), 153–211.
- [25] N. KATZ, T. ODA – *On the differentiation of De Rham cohomology classes with respect to parameters*, J. Math. Kyoto Univ. 8-2 (1968), 199–213.
- [26] R. NARASIMHAN, S. RAMANAN – *Existence of universal connections I, II*, American J. Math. **83** (1961), 563–572 ; **85** (1963), 223–231.
- [27] P. PANSU – *Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité*, Sémin. Bourbaki, exp. n° 778, Astérisque **227** (1995), 69–105.
- [28] A. REZNIKOV – *Rationality of secondary classes*, J. Differential Geometry, à paraître.
- [29] A. REZNIKOV – *All regulators of flat bundles are torsion*, Annals of Math. **141** (1995), 373–386.
- [30] J. SAMPSON – *Applications of harmonic maps to Kähler geometry*, in “Complex Differential Geometry and Nonlinear Differential Equations”, Contemp. Math. **49** (1986), 125–133.
- [31] C.T. SIMPSON – *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety II*, Publ. Math. IHES **80** (1994), 5–79.
- [32] C. SOULÉ – *Connexions et classes caractéristiques de Beilinson*, in “Algebraic K-Theory and Algebraic Number Theory”, Contemporary Math. **83** (1989), 349–376.

Christophe SOULÉ

C.N.R.S. et I.H.E.S.

35, route de Chartres

91440 BURES-sur-YVETTE