

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

FRÉDÉRIC PAULIN

Actions de groupes sur les arbres

Séminaire N. Bourbaki, 1995-1996, exp. n° 808, p. 97-137.

http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__97_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1995-1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

ACTIONS DE GROUPES SUR LES ARBRES

par Frédéric PAULIN

H. Poincaré [74] étudiait la structure des sous-groupes discrets de $SL_2(\mathbb{R})$ ou $SL_2(\mathbb{C})$, par leurs actions isométriques sur les espaces hyperboliques réels \mathbb{H}^2 , \mathbb{H}^3 . Pour étudier la structure des sous-groupes discrets de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, J.-P. Serre [85] a développé la théorie des actions de groupes sur les arbres discrets. En effet, l'immeuble de Bruhat-Tits (de rang un) associé à $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ pour la valuation p -adique [14] est un arbre discret. Partant de l'observation qu'un groupe agissant librement sur un arbre discret est libre, J.-P. Serre en déduit par exemple une preuve simple et élégante du théorème suivant.

Théorème 1 (*Y. Ihara*) *Un sous-groupe discret sans torsion de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ est libre.*

La théorie de Bass-Serre (voir section 1) montre plus généralement qu'un groupe agit sur un arbre discret sans point fixe global si et seulement s'il se *décompose* (i.e. est isomorphe à une somme amalgamée non triviale ou une extension HNN (voir section 1 pour des définitions)) *au dessus* d'un stabilisateur d'arête. Par exemple, un groupe est un produit libre de deux groupes non triviaux si et seulement s'il agit sur un arbre discret avec stabilisateurs d'arête triviaux.

Pour étudier les groupes $SL_2(K)$ pour un corps K muni d'une valuation non discrète, F. Bruhat et J. Tits [14, 91] avaient introduit des généralisations des arbres discrets, encore appelés arbres¹.

L'étude des actions de groupes sur les arbres non discrets, commencée par J. Tits, R. Lyndon, I. Chiswell, et surtout développée par J. Morgan et P. Shalen (voir les articles de référence [86, 87, 63]), vient d'aboutir à des résultats profonds de classification, par les travaux de E. Rips (voir section 2). Un corollaire est le suivant, anciennement connu sous le nom de conjecture de Morgan-Shalen. Rappelons qu'un groupe est *de type fini* s'il est engendré par un nombre fini d'éléments.

¹La terminologie usuelle est maintenant celle d'*arbre réel*, mais par respect des origines, nous préférons dans cet exposé le terme d'arbre (non discret).

Théorème 2 (*E. Rips*) *Un groupe de type fini qui agit librement sur un arbre (non discret) est un produit libre de groupes abéliens libres et de groupes fondamentaux de surfaces.*

Les actions de groupes sur les arbres non discrets permettent d’apporter des informations asymptotiques sur les sous-groupes discrets de groupes de Lie réels comme $SL_2(\mathbb{C})$ (voir par exemple les travaux de M. Culler-P. Shalen [20], J. Morgan-P. Shalen [65], M. Bestvina [7], F. Paulin [69], Z. Sela [83] et la section 3). L’explication conceptuelle, due à M. Gromov, est que, vu de loin, l’espace hyperbolique \mathbb{H}^3 ressemble ... à un arbre. Plus exactement la limite (en un sens que nous préciserons plus loin) de la famille d’espaces métriques obtenue en multipliant la distance de \mathbb{H}^3 par ϵ , tend vers un arbre non discret, quand ϵ tend vers 0. Voici une application :

Théorème 3 (*W. Thurston [90, Theorem 7.1], J. Morgan-P. Shalen [65]*) *Soit Γ un sous-groupe de type fini, non virtuellement abélien, qui n’est pas une somme amalgamée non triviale ou une extension HNN au-dessus d’un groupe virtuellement abélien. Alors l’espace des représentations de Γ dans $SL_2(\mathbb{C})$ modulo conjugaison est compact.*

Évoquons en quelques mots les sujets reliés que nous ne traiterons pas ici, préférant nous concentrer sur le théorème de Rips et en donner une preuve complète.

Les actions de groupes sur les arbres discrets permettent de donner d’autres informations sur les sous-groupes discrets d’un groupe de Lie de rang relatif un sur un corps local localement compact. Voir [85], [4, 57], [58] (pour la construction de réseaux non arithmétiques) et [59, 5, 15] (pour les problèmes de rigidité et de superrigidité des commensurateurs). Nous ne traiterons pas non plus de l’aspect analyse harmonique sur les arbres, voir par exemple [33, 18], ni les rapports avec l’uniformisation p -adique (voir par exemple [75, 39, 38, 6]). Citons encore le joli résultat de H. Bass [2] : un sous-groupe de type fini de $GL_2(\mathbb{C})$, qui ne se décompose pas, est, à conjugaison près, contenu dans le groupe des matrices triangulaires supérieures ou dans $GL_2(\mathcal{O})$ pour \mathcal{O} un anneau d’entiers algébriques.

Sous des hypothèses de finitude sur le groupe, comme être de type fini, il est naturel de se demander s’il existe une borne (effective) sur le nombre de décompositions “successives” obtenues par la théorie de Bass-Serre, et s’il existe une décomposition “maximale” et “unique” (effective) du groupe.

L’archétype de ces résultats est le théorème de Grushko : pour G un groupe de type fini, engendré par p éléments, 1) si G est un produit libre de m facteurs non triviaux,

alors $m \leq p$; 2) G est un produit libre $A_1 * \cdots * A_m * \mathbb{F}_n$, avec \mathbb{F}_n un groupe libre de rang n , A_i non trivial, non infini cyclique, et non produit libre de groupes non triviaux; 3) si $A'_1 * \cdots * A'_{m'} * \mathbb{F}_{n'}$ est une autre telle décomposition, alors $m = m'$ et $n = n'$ et à permutation près, A_i et A'_i sont conjugués dans G .

Les trois problèmes analogues pour d'autres classes d'actions de groupes sur les arbres discrets que celles à stabilisateurs d'arête triviaux, sont connus sous les noms d'*accessibilité* (voir [93]) pour le premier et de *décomposition canonique* pour les deux autres. La source principale d'inspiration vient de la topologie de petite dimension, avec en particulier les décompositions en pantalons de surfaces (voir par exemple [32]), et les décompositions de Kneser (le long de sphères), de Jaco-Shalen et Johannson (le long de tores et anneaux) des variétés de dimension 3 [49, 50].

Nous renvoyons aux résultats d'accessibilité de M. Dunwoody [28, 29] (pour les stabilisateurs d'arête finis, en liaison avec le théorème de Stallings sur les groupes ayant une infinité de bouts, voir [52]), M. Bestvina-M. Feighn [8] (pour les stabilisateurs d'arête vérifiant la propriété (FA) (respectivement (FA)') d'avoir, pour toute action sur un arbre discret, un point fixe (respectivement un point ou bout fixe), Z. Sela [82] (pour les actions ayant une borne uniforme sur les diamètres des ensembles de points fixes), et de décomposition canonique de E. Rips-Z. Sela [78] (pour les stabilisateurs d'arête infinis cycliques), M. Dunwoody-M. Sageev [31] et T. Delzant [24, 26].

L'"unicité" de décompositions "maximales" permet en particulier d'étudier le groupe des automorphismes d'un groupe agissant sur un arbre discret. En effet, $\text{Aut}(G)$ agit sur les actions de G sur les arbres discrets par précomposition. Par exemple, par le théorème de Fuchs-Rabinovich, si $G = A_1 * \cdots * A_{m+1}$ est une décomposition de Grushko, alors $\text{Aut}(G)$ contient un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur le produit direct des $\text{Out}(A_i)$, de noyau engendré par les conjugaisons partielles sur chaque facteur. Comme un groupe libre est un bloc élémentaire dans le théorème de Grushko, ceci n'apporte aucune information sur son groupe d'automorphismes. Les actions de groupes libres sur les arbres sont par contre fort utiles, voir [21, 22, 10, 35, 71, 84].

J.-P. Serre a remarqué qu'un sous-groupe d'un groupe qui agit sur un arbre discret T hérite aussi d'une décomposition par son action sur T . Par exemple, par le théorème de Kurosh, tout sous-groupe de type fini H d'un produit libre $G = A * B$ est un produit libre $H_1 * \cdots * H_m * \mathbb{F}_n$, avec \mathbb{F}_n un groupe libre de rang n , et H_i un sous-groupe de H conjugué à un sous-groupe de A ou de B .

Dans [44] (voir l'exposé 722 au Séminaire Bourbaki de E. Ghys [40]), M. Gromov a défini une classe de groupes, les groupes hyperboliques, qui contient et généralise

largement la classe des groupes fondamentaux de variétés compactes à courbure négative. Comme pour \mathbb{H}^3 , tout graphe de Cayley d'un groupe hyperbolique, vu de loin, ressemble à un arbre.

Il fallait donc s'attendre à retrouver pour ces groupes des propriétés analogues à celles des groupes agissant sur des arbres discrets, en particulier correspondant aux résultats de Grushko, Fuchs-Rabinovich et Kurosh. C'est ce que montrent les travaux de M. Gromov [44] (sur les sous-groupes des groupes hyperboliques), E. Rips-Z. Sela [76], Z. Sela [81, 83] (automorphismes des groupes hyperboliques et décidabilité du problème d'isomorphisme entre groupes hyperboliques) et T. Delzant [23, 25, 26]. Les groupes de surfaces forment des blocs élémentaires dans la décomposition de Rips-Sela au-dessus de groupes infinis cycliques, analogues aux groupes libres dans le théorème de Grushko. Pour étudier leurs sous-groupes et leurs automorphismes, il faut d'autres outils [89, 32, 16, 48].

Les techniques de E. Rips et Z. Sela reposent de manière essentielle sur les travaux de E. Rips sur les actions de groupes sur les arbres non discrets. L'approche unificatrice (hormis l'étude du groupe des automorphismes) de T. Delzant évite ces travaux, et repose sur de jolies techniques topologiques, inspirées par M. Dunwoody [28], à base de feuilletages de 2-complexes. Voir aussi les articles récents de M. Dunwoody-M. Sageev [31].

Je voudrais remercier chaleureusement D. Gaboriau (pour nos lectures communes), T. Delzant (pour ses conversations enthousiastes), G. Levitt (pour ses échanges électroniques) et Z. Sela. Leurs contributions à ce texte sont importantes.

1 La théorie de Bass-Serre des actions de groupes sur les arbres discrets

Un *arbre discret* est un 1-complexe simplicial, connexe et simplement connexe. Les actions sur un arbre discret seront toutes à gauche, par automorphismes simpliciaux, *sans inversion* (i.e. sans élément permutant les deux sommets d'une arête), hypothèse qui est bénigne, quitte à subdiviser. Cette hypothèse implique que le quotient est naturellement un *graphe*, i.e. un CW-complexe connexe de dimension 1.

Pour montrer qu'un groupe G est libre, une méthode topologique consiste à le faire opérer librement sur un arbre T . Le groupe G s'identifie alors, par la théorie des revêtements, au groupe fondamental du graphe quotient $G \backslash T$, qui est libre.

Rappelons que le *graphe de Cayley* d'un groupe Γ muni d'une partie génératrice $\{x_i\}_{i \in I}$ est le graphe d'ensemble de sommets Γ , avec une arête entre deux sommets x, y

s'il existe un générateur x_i tel que $x = yx_i$ ou $x = yx_i^{-1}$.

Montrons par exemple le théorème de Nielsen-Schreier disant qu'un sous-groupe H d'un groupe libre G est libre. Pour cela, faisons agir H sur le graphe de Cayley de G pour une partie génératrice libre. Ce graphe est un arbre puisque G est libre. Le sous-groupe H de G agit librement sur T , donc est libre.

1.1 L'arbre de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Pour démontrer le théorème d'Ihara, J.-P. Serre montre que $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ agit sur l'arbre discret T régulier de valence $q + 1$, avec stabilisateurs de sommet des sous-groupes compacts (isomorphes à $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ et formant deux classes de conjugaison). Cet arbre est l'immeuble de Tits (de type \tilde{A}_1) associé au système de Tits (G, B, N, S) (voir [85] page 124) avec

$$G = SL_2(\mathbb{Q}_p), \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}_p) / c \equiv 0 \pmod{p} \right\},$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -p^{-1} \\ p & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et N le normalisateur dans G du sous-groupe diagonal.

L'ensemble des sommets de T s'identifie avec l'espace des classes d'équivalence des réseaux du \mathbb{Q}_p -espace vectoriel \mathbb{Q}_p^2 , i.e. des sous- \mathbb{Z}_p -modules libres de rang 2 engendrant \mathbb{Q}_p^2 . Deux réseaux sont équivalents s'ils sont homothétiques par un élément de \mathbb{Q}_p^* . Le groupe $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ agit naturellement sur cet ensemble, et T est muni de l'unique distance invariante telle que la distance des images des réseaux $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ et $\mathbb{Z}_p \oplus p\mathbb{Z}_p$ est 1. Deux sommets de T sont alors liés par une arête si leur distance est 1, et T est un arbre (voir [85] section II.1.1). Voir [43] pour la construction analogue en rang supérieur.

Comme les stabilisateurs de sommet sont compacts, un sous-groupe discret rencontre un tel stabilisateur en un groupe fini. Donc un sous-groupe discret sans torsion de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ agit librement sur T , et par conséquent est libre.

Ceci se généralise aux sous-groupes discrets sans torsion de tout groupe algébrique simple de rang relatif 1 sur un corps local (commutatif) localement compact [85].

1.2 Groupe fondamental d'un graphe de groupes

H. Bass et J.-P. Serre donnent un théorème de structure pour les groupes agissant sur les arbres discrets. Nous en donnerons l'approche topologique due à P. Scott-C.T.C Wall [80]. Voir [46] pour une généralisation aux actions de groupes sur des complexes de dimension supérieure.

Un *graphe de groupes* est la donnée (G, \mathcal{G}) d'un graphe connexe \mathcal{G} , d'un groupe G_a pour toute arête a , d'un groupe G_s pour tout sommet s , et de deux morphismes injectifs $G_a \rightarrow G_{a_0}$ et $G_a \rightarrow G_{a_1}$ pour toute arête a de sommets (éventuellement confondus) a_0, a_1 . (Implicitement une orientation arbitraire anodine de chaque arête a été choisie.)

Voir [3] page 16 pour la définition d'un *morphisme de graphes de groupes*.

À un graphe de groupe (G, \mathcal{G}) , et à tout choix \mathcal{T} d'arbre maximal dans \mathcal{G} , est associé un groupe $\pi_1(G, \mathcal{G}; \mathcal{T})$.

Choisissons des CW-complexes pointés, à revêtements universels contractiles, X_s, X_a pour tout sommet s et arête a , de groupes fondamentaux G_s, G_a . Nous noterons $*$ les points bases. Choisissons (voir par exemple [88]) deux morphismes de CW-complexes pointés $f_{a,i} : X_a \rightarrow X_{a_i}$, induisant les morphismes $G_a \rightarrow G_{a_i}$ sur les groupes fondamentaux, pour $i = 0, 1$.

Considérons l'espace E obtenu en prenant la réunion disjointe des X_s pour s sommet et des $X_a \times [0, 1]$ (avec la structure de CW-complexe produit) pour a arête. Prenons le quotient de cette union disjointe par la relation d'équivalence engendrée par $(x, i) \in X_a \times [0, 1] \sim f_{a,i}(x) \in X_{a_i}$ pour $i = 0, 1$.

Notons que le CW-complexe E admet une projection continue naturelle sur le graphe \mathcal{G} . Tout sous-arbre maximal \mathcal{T} de \mathcal{G} se relève naturellement dans E , et nous prendrons pour point base de E n'importe quel point de ce relevé.

Le *groupe fondamental du graphe de groupes* $\pi_1(G, \mathcal{G}; \mathcal{T})$ est par définition $\pi_1(E)$. Il ne dépend de \mathcal{T} qu'à isomorphisme près. Les groupes de sommets s'injectent naturellement dans $\pi_1(G, \mathcal{G}; \mathcal{T})$.

Exemples : (1) Si \mathcal{G} est réduit à une arête a de sommets distincts s, s' , alors $\pi_1(G, \mathcal{G}; a)$ est appelée la *somme amalgamée de G_s et $G_{s'}$ au-dessus de G_a* pour les injections $\rho : G_a \rightarrow G_s$ et $\rho' : G_a \rightarrow G_{s'}$, et notée (par abus) $G_s *_{G_a} G_{s'}$. C'est un élément universel dans la catégorie dont les objets sont les groupes H munis de morphismes $G_s \rightarrow H$ et $G_{s'} \rightarrow H$ rendant commutatif le diagramme carré formé avec ρ, ρ' , et dont les morphismes sont les morphismes de groupe $H \rightarrow H'$ rendant le diagramme évident commutatif. Une somme amalgamée est dite *non triviale* si les injections de G_a dans G_s et $G_{s'}$ sont propres.

(2) Si \mathcal{G} est réduit à une arête a de sommets confondus s, s' , alors $\pi_1(G, \mathcal{G}; \{s\})$ est appelée l'*extension HNN de G_s au-dessus de G_a* pour les injections $\rho, \rho' : G_a \rightarrow G_s$, et notée (par abus) $G_s *_{G_a}$. Les extensions HNN vérifient une propriété universelle analogue.

Soit (G, \mathcal{G}) un graphe de groupes, \mathcal{T} un sous-arbre maximal, s un sommet. Supposons que $G_s = \pi_1(H, \mathcal{H}; \mathcal{U})$ de sorte que l'image de tout morphisme $G_a \rightarrow G_{a_i}$ avec $a_i = s$ soit contenu dans le conjugué $g_{a,i} H_{v_{a,i}} g_{a,i}^{-1}$ d'un groupe de sommet $H_{v_{a,i}}$ de (H, \mathcal{H}) , avec

$g_{a,i} \in G_s$. Le graphe de groupes (G', \mathcal{G}') suivant est appelé un *raffinement* de (G, \mathcal{G}) . Le graphe \mathcal{G}' est obtenu à partir de \mathcal{G} en enlevant s et ajoutant \mathcal{H} , de sorte qu'une arête a de \mathcal{G} d'extrémité s soit maintenant d'extrémité $v_{a,i}$ dans \mathcal{H} . Prenons pour arbre maximal T' de \mathcal{G}' la réunion de T et \mathcal{U} . Les groupes d'arêtes et de sommets de (G', \mathcal{G}') sont ceux évidents. Pour a arête de \mathcal{G} d'extrémité s , le morphisme $G_a \rightarrow H_{v_{a,i}}$ est la composée de $G_a \rightarrow G_s$ avec la conjugaison par $g_{a,i}^{-1}$. Les autres morphismes sont ceux évidents.

Nous avons un isomorphisme naturel $\pi_1(G', \mathcal{G}'; T') \rightarrow \pi_1(G, \mathcal{G}; T)$. Un groupe fondamental de graphe de groupes peut donc être pensé comme une succession de sommes amalgamées et d'extensions HNN.

En terme de présentation, si $g \mapsto g^{a_i}$ est le morphisme injectif $G_a \rightarrow G_{a_i}$ pour $i = 0, 1$, alors une application multiple du théorème de van Kampen montre que $\pi_1(G, \mathcal{G}; T)$ est le groupe engendré par les G_s pour s sommet de \mathcal{G} et les éléments t_a pour a arête de \mathcal{G} , soumis aux relations

$$t_a g^{a_0} t_a^{-1} = g^{a_1} \text{ si } g \in G_a$$

$$t_a = 1 \text{ si } a \subset T.$$

Par exemple, la somme amalgamée $G_s *_{G_a} G_{s'}$ est $\langle G_s, G_{s'} / \rho(g) = \rho'(g) \forall g \in G_a \rangle$, et l'extension HNN $G_s *_{G_a}$ est $\langle G_s, t / t\rho(g)t^{-1} = \rho'(g) \forall g \in G_a \rangle$.

1.3 Action de groupe sur un arbre et graphe de groupes

Soit Γ un groupe qui agit sur un arbre discret T . Notons $\pi : T \rightarrow \mathcal{G} = \Gamma \backslash T$ l'application canonique, T un sous-arbre maximal de \mathcal{G} et \tilde{T} un de ses relevés dans T . Pour x sommet ou arête de T , notons G_x le stabilisateur de l'unique sommet ou arête \tilde{x} de \tilde{T} correspondant. Pour a arête de $\mathcal{G} \setminus T$, d'extrémités a_0, a_1 , notons \tilde{a} l'unique arête de T relevant a d'origine \tilde{a}_0 et notons G_a le stabilisateur de \tilde{a} . Notons $G_a \rightarrow G_{a_0}$ l'inclusion. Si s est le sommet de \tilde{a} différent de \tilde{a}_0 , il existe $\gamma_a \in G$ envoyant \tilde{a}_1 sur s . Notons $G_a \rightarrow G_{a_1}$ le morphisme $g \mapsto \gamma_a^{-1} g \gamma_a$.

Théorème 1.1 (H. Bass-J.-P. Serre [85] page 76) *Le morphisme $\pi_1(G, \mathcal{G}; T) \rightarrow \Gamma$ induit par les inclusions $G_s \hookrightarrow G$ et par $t_a \mapsto \gamma_a$ est un isomorphisme de groupe. \square*

Réciproquement, soient (G, \mathcal{G}) un graphe de groupes, T un arbre maximal dans \mathcal{G} , et \tilde{E} le revêtement universel du CW complexe E (avec les notations ci-dessus). Alors le quotient de \tilde{E} par la relation d'équivalence qui écrase en un point chaque relevé de $X_a \times \{t\}$ et de X_s , pour a, s respectivement arête et sommet de \mathcal{G} , est un arbre discret appelé l'*arbre de Bass-Serre* de $(G, \mathcal{G}; T)$. De plus, $\pi_1(G, \mathcal{G}; T)$ agit sur T , de sorte que le

graphe de groupes associé comme précédemment à cette action soit (G, \mathcal{G}) . Un tel arbre est unique à isomorphisme équivariant près.

2 Le théorème de Rips sur les actions de groupes sur les arbres

Un *arbre* est un espace métrique T tel que d'une part, pour tous points distincts x, y de T , il existe un et un seul arc topologique dans T d'extrémités x, y , et d'autre part, tel que cet unique arc soit isométrique à un intervalle de \mathbb{R} . Cette définition est due à J. Tits [91], voir aussi les articles fondamentaux de J. Morgan-P. Shalen [86, 87, 63].

Exemples: 1) La réalisation géométrique de tout arbre discret, munie de l'unique métrique maximale rendant chaque arête isométrique à $[0, 1]$, est un arbre.

2) Le produit libre $\mathbb{R} * \mathbb{R}$ de deux copies de \mathbb{R} , considéré comme groupe discret, muni de la distance invariante à gauche telle que la distance du mot réduit $x_1 \cdots x_n$ à l'origine soit $|x_1| + \cdots + |x_n|$, est un arbre.

3) Tout immeuble de Tits affine (pas forcément discret, voir [92]), de type \tilde{A}_1 (i.e. de groupe de Coxeter le groupe diédral infini), est un arbre. En fait, tout arbre sans sommet terminal (i.e. sans point n'appartenant pas à l'intérieur d'un arc) est un tel immeuble.

4) Si (X, d) est un espace métrique hyperbolique (au sens de M. Gromov [44, 41]), alors pour tout ultrafiltre ω sur \mathbb{N} , pour toute suite $\epsilon_i > 0$ telle que $\lim_{\omega} \epsilon_i = 0$, pour toute suite de points bases x_i , l'espace métrique $\lim_{\omega}(X, \epsilon_i d, x_i)$ est un arbre. Il est en général non discret (voir section 3.2). La réciproque est vraie (voir [44] page 77).

5) Une source importante d'exemples (voir [65, 66, 42, 55]) vient de la théorie des *feuilletages (transversalement) mesurés de codimension un*.

Soit M une variété topologique, \mathcal{F} un feuilletage de codimension un, dont chaque arc transverse est munie d'une mesure (borélienne, positive, régulière) lisse (i.e. sans atome) de support total, invariante par holonomie le long des feuilles.

Cette mesure transverse permet de définir la longueur d'un chemin transverse par morceaux au feuilletage : sa longueur est la somme des mesures totales de chaque morceau transverse. Alors M est munie d'une pseudo-distance $d_{\mathcal{F}}$: pour x, y dans M , $d_{\mathcal{F}}(x, y)$ est la borne inférieure des longueurs des chemins de x à y . Notons que l'on peut avoir $d(x, y) = 0$ sans que $x = y$, par exemple si x, y sont dans une même feuille.

A cette pseudo-distance est canoniquement associé un espace métrique $T(\mathcal{F})$, appelé *l'espace des feuilles rendu séparé*. C'est l'espace quotient de M par la relation d'équivalence $x \sim y$ si $d_{\mathcal{F}}(x, y) = 0$, muni de la distance induite par $d_{\mathcal{F}}$.

En général, \mathcal{F} n'est pas un arbre, par exemple le feuilletage du tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ par les cercles méridiens $\mathbb{S}^1 \times \{*\}$ a pour espace des feuilles rendu séparé un cercle. Notons que si \mathcal{F} a une feuille dense, alors $T(\mathcal{F})$ est un point. Mais généralisant un résultat de [42], G. Levitt a montré le résultat suivant.

Proposition 2.1 ([55] Corollary III.5) *Soit \mathcal{F} un feuilletage mesuré de codimension un sur M connexe, et $N(C)$ un sous-groupe normal de $\pi_1 M$ (pour un choix de point base anodin) normalement engendré par les classes d'homotopie libre de certains lacets contenus dans les feuilles. Si $\tilde{M} \rightarrow M$ est le revêtement défini par $N(C)$, et $\tilde{\mathcal{F}}$ est le feuilletage mesuré relevé, alors $T(\tilde{\mathcal{F}})$ est un arbre. \square*

Dans le cas des variétés compactes M , l'existence d'un feuilletage mesuré est très restrictif. C'est pour cela qu'il est utile d'admettre des singularités et de remplacer variétés par complexes simpliciaux. Par exemple, pour les surfaces, nous admettrons les singularités isolées de type selle à $n \geq 1$ branches (voir [32]). Plus généralement (voir [56]), nous considérerons des 2-complexes simpliciaux Σ , chaque 1-cellule étant ou bien transverse ou bien contenue dans une feuille, et où le feuilletage sur chaque 2-cellule est topologiquement conjugué au feuilletage soit par perpendiculaires soit par parallèles à un côté. Le résultat 2.1 est encore valable pour ces exemples.

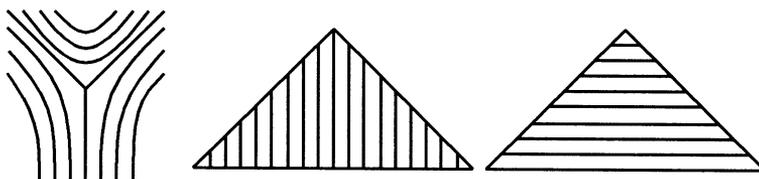


Figure 1 : Modèles locaux de feuilletages mesurés.

6) Comme un feuilletage est essentiellement défini par la donnée de son pseudogroupe transverse (les applications d'holonomie le long des feuilles sur une transversale rencontrant toute feuille), il est naturel que les exemples particuliers de feuilletages mesurés ci-dessus proviennent de systèmes d'isométries partielles entre intervalles de \mathbb{R} .

Un *arbre fini* est un arbre, réunion d'un nombre fini d'arcs. Un *système d'isométries* $S = (D, \{\varphi_i : A_i \rightarrow B_i\}_{i=1 \dots k})$ est la donnée d'une union disjointe finie d'arbres finis D (appelée *domaine*) et d'un ensemble fini d'isométries partielles φ_i (appelées *générateurs*) entre sous-arbres finis de D (appelés *bases*).

A tout système d'isométries S , nous associons par suspension un *2-complexe feuilleté* $\Sigma = \Sigma(S)$ de la manière suivante.

Partons de l'union disjointe de D (feuilleté par points) et de bandes $A_i \times [0, 1]$ (feuilletées par $\{*\} \times [0, 1]$). Nous obtenons Σ en recollant $A_i \times [0, 1]$ à D , en identifiant chaque $(t, 0) \in A_i \times \{0\}$ avec $t \in A_i \subset D$ et chaque $(t, 1) \in A_i \times \{1\}$ avec $\varphi_i(t) \in B_i \subset D$. Nous identifions D avec son image dans Σ .

Le feuilletage \mathcal{F} est la décomposition de Σ en *feuilles*. Une feuille est une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence \sim engendrée par $x \sim y$ s'il existe $i = 1, \dots, k$ avec x, y correspondant à deux points de la même feuille $\{*\} \times [0, 1]$ de $A_i \times [0, 1]$. En subdivisant chaque bande $A_i \times [0, 1]$ en deux triangles, ce feuilletage est bien du type ci-dessus.

Si \mathcal{C} est un ensemble fini de lacets contenus dans les feuilles de Σ , nous noterons $N(\mathcal{C}) \subset \pi_1 \Sigma$ le sous-groupe normal engendré par les lacets de \mathcal{C} .

D'après le résultat 2.1, si $\tilde{\mathcal{F}}$ est le feuilletage relevé de \mathcal{F} dans le revêtement $\tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ défini par $N(\mathcal{C})$, alors l'espace des feuilles rendu séparé $T(\tilde{\mathcal{F}})$ est un arbre, naturellement muni d'une action isométrique de $\pi_1 \Sigma / N(\mathcal{C})$.

Dans leurs articles de référence [86, 87, 63], J. Morgan et P. Shalen ont énoncé une suite de conjectures pour savoir dans quelle mesure les résultats de la section 1 se généralisent aux arbres non discrets, et ont donné des réponses partielles.

Dans ce qui suit, toute action de groupe sur un espace métrique est une action isométrique à gauche. Voici quelques exemples qui montrent que les actions sur les arbres non discrets présentent des particularités.

a) Exemple homogène. Remarquons que le groupe abélien libre \mathbb{Z}^n admet une action isométrique libre sur la droite \mathbb{R} (en prenant n translations rationnellement indépendantes). Réciproquement, les seuls groupes (de type fini) agissant librement sur la droite sont les groupes abéliens libres (de type fini).

Notons qu'un groupe de type fini d'isométries de \mathbb{R} n'est pas un produit libre non trivial. Mais il se décompose au-dessus d'un groupe abélien. S'il ne contient que des translations, il est isomorphe à $A *_C$, avec $A = C = \mathbb{Z}^{n-1}$ et les deux inclusions $A \rightarrow C$ étant l'identité. S'il contient une réflexion, alors il est isomorphe à $A *_C B$, avec A et B le produit semi-direct de \mathbb{Z}^{n-1} par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agissant sur \mathbb{Z}^{n-1} par $x \mapsto -x$, et $C = \mathbb{Z}^{n-1}$ s'injectant de manière évidente dans A, B . Notons que toute isométrie ayant un point fixe est conjuguée à un élément d'un groupe de sommet A ou B .

b) Exemple échange d'intervalles. Si S est une surface connexe compacte sans bord, de caractéristique d'Euler $\chi(S)$ inférieure ou égale à -2 , alors son groupe fondamental $\pi_1 S$ admet une action libre sur un arbre ([66]).

En effet, une telle surface admet un feuilletage \mathcal{F} transversalement mesuré, à sin-

gularités isolées de type selles à $n \geq 3$ branches, qui est *arationnel*, i.e. sans lacet non trivial plongé dans une feuille (éventuellement contenant des singularités). Par exemple, la surface S comme ci-dessus, et de plus orientable avec $\chi(S) = -2$, peut s'obtenir par revêtement branché d'ordre 2 au-dessus de deux points u, v d'un tore. Si ce tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est muni d'un feuilletage quotient du feuilletage de \mathbb{R}^2 par droites parallèles à une droite de pente irrationnelle, et si les points u, v ne sont pas dans une même feuille du tore, alors le feuilletage relevé sur S (dont les deux singularités sont du type selles à 4 branches) est transversalement mesuré et arationnel.

Si $\tilde{\mathcal{F}}$ est le feuilletage relevé à un revêtement universel \tilde{S} , alors l'espace des feuilles rendu séparé $T(\tilde{\mathcal{F}})$ est un arbre par 2.1, naturellement muni d'une action isométrique de $\pi_1 S$. Il est montré dans [32, 66] que deux points de \tilde{S} sont à pseudo-distance nulle si et seulement s'ils sont dans la même feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$. En particulier, l'action est libre par arationnalité de \mathcal{F} .

Notons que $\pi_1 S$ n'est pas un produit libre non trivial, mais se décompose au-dessus d'un groupe cyclique, pour tout choix d'une courbe fermée simple c , séparant son voisinage tubulaire, non homotope à zéro sur S . Le théorème de van Kampen montre que $\pi_1 S$ est isomorphe à une somme amalgamée $\pi_1 S_1 *_Z \pi_1 S_2$ ou à une extension HNN $\pi_1 S_1 *_Z$ respectivement si c sépare S en deux sous-surfaces compactes à bord S_1, S_2 , ou si c ne sépare pas et S_1 est la surface compacte à bord obtenue en découpant S le long de c .

c) Exemple exotique. Considérons le système d'isométries S suivant (voir [54] Remarque V.10). Soit λ l'unique racine dans $]0, 1[$ du polynôme $x^3 + x^2 + x - 1$. Soient $a = \frac{1-\lambda}{2}, b = \frac{1-\lambda^2}{2}, c = \frac{\lambda^2+\lambda}{2}$ de sorte que $a + b + c = 1$. Soit enfin I l'intervalle $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Le domaine de S est $D = [-\frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}]$ et S a trois générateurs $\varphi_a : I \rightarrow a + I, \varphi_b : a + I \rightarrow a + b + I, \varphi_c : a + b + I \rightarrow 1 + I$ qui sont respectivement les translations par a, b, c .

Il n'est pas difficile de montrer que le 2-complexe feuilleté Σ de S n'a aucun lacet non trivial dans les feuilles, et que toute feuille est dense (voir [55]). Si $\tilde{\Sigma}$ est un revêtement universel de Σ , et $\tilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage relevé, alors l'espace des feuilles rendu séparé $T = T(\tilde{\mathcal{F}})$ est un arbre, muni d'une action du groupe du revêtement \mathbb{F}_3 , qui est libre à trois générateurs. Il n'est pas difficile de montrer (voir [35]) que deux points de $\tilde{\Sigma}$ sont à pseudo-distance nulle si et seulement s'ils sont dans une même feuille. Donc l'action de \mathbb{F}_3 est libre, et ses orbites sont denses dans T .

Proposition 2.2 ([55] Theorem 5) *Il existe une famille non dénombrable (de classes d'isométrie équivariante) d'actions libres à orbites denses de \mathbb{F}_3 sur des arbres.* \square

Le résultat suivant de E. Rips a résolu (presque) toutes les questions de J. Morgan et

P. Shalen. La condition de stabilité, élaborant légèrement celle de [42], est définie juste après.

Théorème 2.3 *Soit Γ un groupe de type fini, agissant sans point fixe global sur un arbre T . Si l'action est stable, alors Γ se décompose au-dessus d'une extension d'un groupe abélien par un sous-groupe de Γ fixant un arc (non dégénéré) de T .*

E. Rips n'a pas rédigé la preuve de ce théorème, mais a donné les indications cruciales dans une Conférence à l'Isle of Thorns en 1991. La forme exacte de l'énoncé ci-dessus et sa preuve complète sont dues à M. Bestvina et M. Feighn [9] pour les groupes de présentation finie. L'extension au cas de type fini est due à Z. Sela [82]. Voir [36] pour le cas des actions libres.

Un arbre est *non dégénéré* s'il contient au moins deux points. Soit T un arbre muni d'une action d'un groupe G . Un sous-arbre non dégénéré S de T est *stable* si pour tout sous-arbre non dégénéré S' de S , le sous-groupe de G fixant (point par point) S' fixe aussi S . L'action de G sur T est stable si tout sous-arbre non dégénéré contient un sous-arbre stable.

Exemples i) Une action sur un arbre discret est stable.

ii) Une action libre, ou à stabilisateurs d'arc (sous-entendu non dégénéré) qui sont triviaux, est stable. En fait, la preuve du théorème 2.3 donne assez facilement dans le cas des actions libres le résultat plus fort énoncé en 2, voir [36]. Notons que le théorème 2 est faux sans l'hypothèse de type fini (voir par exemple [30]).

iii) Si Γ est un groupe hyperbolique, qui agit sur un arbre avec stabilisateurs d'arc virtuellement cycliques, alors l'action est stable, et Γ se décompose au-dessus d'un groupe virtuellement cyclique. En effet, Γ est de type fini, toute suite croissante de sous-groupes virtuellement cycliques est stationnaire, et tout sous-groupe qui ne contient pas de groupe libre de rang deux est virtuellement cyclique (voir par exemple [44, 41]).

iv) Si Γ est le groupe fondamental (de type fini) d'une variété riemannienne M complète à courbure négative pincée $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$, qui agit sur un arbre avec stabilisateurs d'arc virtuellement nilpotents, alors l'action est stable et Γ se décompose au-dessus d'un groupe virtuellement nilpotent. En effet, un sous-groupe de Γ qui ne contient pas de groupe libre de rang deux stabilise un point ou une paire de points dans $M \cup \partial M$, avec ∂M le bord visuel de M , et un tel stabilisateur est de type fini et virtuellement nilpotent (voir [12]).

v) Voici un exemple d'action non stable du groupe $\mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}$ sur un arbre non discret. Considérons le tore \mathbb{T}^2 muni d'un feuilletage par droites de pentes irrationnelles comme

précédemment. Soit I un arc transverse. Collons sur I l'anneau $I \times \mathbb{S}^1$, feuilleté par les cercles $\{*\} \times \mathbb{S}^1$. Le revêtement universel du 2-complexe obtenu Σ a son espace des feuilles rendu séparé qui est un arbre, mais l'action de $\pi_1 \Sigma$ n'est pas stable.

Nous allons donner une nouvelle preuve du théorème de Rips 2.3, fruit d'un travail en commun avec D. Gaboriau, qui mélange les preuves de [36] et [9]. Le lecteur non spécialiste peut aller directement en section 3. Cette approche évite la notion de complexité originellement introduite par E. Rips, suite aux travaux de G.S. Makanin et A.A. Razborov. La preuve, de nature topologique, utilise les outils des systèmes dynamiques et des feuilletages. Pour simplifier la lecture, nous supposons que Γ est de présentation finie, le cas général s'obtenant par passage à la limite inductive.

2.1 Des actions sur les arbres aux 2-complexes feuilletés

Donnons tout d'abord quelques définitions supplémentaires sur les systèmes d'isométries $S = (D, \{\varphi_i : A_i \rightarrow B_i\}_{i=1 \dots k})$.

Un générateur de S est un *singleton* si chacune de ses bases est réduite à un point. Un système d'isométries est *non dégénéré* si chaque composante de D et chaque base A_i, B_i est non dégénérée.

Une *composante connexe* de S est le système d'isométries formé des générateurs de S ayant leurs bases dans une composante connexe Σ_0 de Σ , de domaine $\Sigma_0 \cap D$. Un système d'isométries S est *connexe* si Σ l'est.

Chaque mot en les générateurs de S fournit une isométrie partielle de D (définie de la manière maximale évidente, de domaine éventuellement vide), appelée *S -mot*. Deux points de D sont dans la même *S -orbite* s'il existe un S -mot envoyant l'un sur l'autre. Une S -orbite est l'intersection d'une feuille de Σ avec D .

Si ω est un S -mot et x un point de son domaine, nous noterons $[x; \omega]$ le chemin dans la feuille de x , entre x et $\omega(x)$, obtenu en suivant consécutivement les bandes $A_i \times [0, 1]$ correspondant aux lettres du mot ω .

Si \mathcal{C} est un ensemble fini de lacets contenus dans les feuilles de Σ , nous noterons X le complexe obtenu en recollant sur Σ un disque pour chaque lacet dans \mathcal{C} , en appliquant le bord de ce disque sur ce lacet. Alors le groupe fondamental de X est naturellement isomorphe au quotient de $\pi_1 \Sigma$ par $N(\mathcal{C})$.

Fixons-nous une présentation finie de Γ

$$\langle \gamma_1, \dots, \gamma_k \mid r_1 = \dots = r_m = 1 \rangle.$$

L'idée fondamentale de E. Rips est la suivante. Considérons un sous-arbre fini K dans

T . Chaque γ_i fournit une isométrie partielle $\varphi_i: A_i = K \cap \gamma_i^{-1}K \rightarrow B_i = \gamma_i K \cap K$ entre sous-arbres finis de K . Donc $S = (K, \{\varphi_i\})$ est un système d'isométries, non dégénéré si K est assez grand.

Si K est suffisamment grand, alors chacune des relations r_j fournit un S -mot w_j de domaine non vide, qui est l'identité sur son domaine. Pour un point arbitrairement choisi x_j de ce domaine, $\ell_j = [x_j; w_j]$ est un lacet dans la feuille de x_j dans Σ . Nous noterons \mathcal{C} la donnée de ces ℓ_j .

Choisissons un point base dans K . Pour tout i , considérons le lacet dans Σ formé d'un arc dans K issu du point base jusqu'à un point x_i de A_i , puis de $[x_i; \varphi_i]$, puis d'un arc de K retournant au point base. Alors l'application qui associe g_i à ce générateur de $\pi_1 \Sigma$, induit une identification du groupe fondamental $\pi_1 X = \pi_1 \Sigma / N(\mathcal{C})$ avec Γ .

Si $\tilde{\Sigma}$ est le revêtement de Σ associé à $N(\mathcal{C})$, et \tilde{K}_0 est un relevé arbitraire de K , alors il existe une unique application équivariante f de $\tilde{\Sigma}$ dans T , constante sur les feuilles, qui envoie \tilde{K}_0 sur K par l'application de revêtement. Notons que si \tilde{X} est le revêtement universel de X , alors $\tilde{\Sigma}$ est naturellement contenu dans \tilde{X} , et f s'étend naturellement à \tilde{X} , chaque disque de X se relevant en un disque, dont le bord est envoyé par f sur un point.

L'utilisation de groupes fondamentaux nécessite des choix de points bases. Si S est un système d'isométrie connexe de domaine D , nous choisirons un *arbre maximal de S* , i.e. un arbre maximal dans le graphe dont les sommets sont les composantes connexes de D , avec une arête pour chaque générateur φ_i entre les deux composantes connexes de D contenant A_i, B_i . Ceci nous permettra d'identifier les groupes fondamentaux de Σ pour deux choix de points bases dans le domaine D , en utilisant un arc de l'un à l'autre dans la réunion de D et des bandes correspondant à cet arbre maximal.

Nous avons donc construit un triplet (S, \mathcal{C}, f) et que nous appellerons une *résolution* de l'action de Γ sur T , qui vérifie aisément les propriétés suivantes.

1. $S = (K, \{\varphi_i\}_{i=1 \dots k})$ est un système d'isométries connexe, muni d'un arbre maximal de bandes.
2. \mathcal{C} est un ensemble fini de lacets dans les feuilles du 2-complexe feuilleté Σ associé à S .
3. Si $\tilde{\Sigma}$ est le revêtement de Σ associé au sous-groupe normal $N(\mathcal{C})$ de $\pi_1 \Sigma$ engendré par les lacets de \mathcal{C} , alors $f : \tilde{\Sigma} \rightarrow T$ est une application continue Γ -équivariante, qui est injective sur chaque relevé des composantes connexes de K , et qui envoie chaque feuille de $\tilde{\Sigma}$ sur un point.

Le but de ce qui suit est de faire subir un nombre fini de transformations à la résolution (S, \mathcal{C}, f) pour pouvoir montrer que $\Gamma = \pi_1 X$ se décompose comme voulu.

Remarque. Comme vu dans l'exemple (6), l'espace des feuilles rendu séparé de $\tilde{\Sigma}$ est un arbre $T_{S, \mathcal{C}}$. Notons que f factorise à travers une application Γ -équivariante $T_{S, \mathcal{C}} \rightarrow T$.

(La preuve ci-dessous permet de montrer que non seulement le groupe se décompose, mais que l'action sur $T_{S, \mathcal{C}}$ se décompose en orbites canoniques de sous-arbres invariants par des sous-groupes. Sous certaines hypothèses (groupe librement indécomposable et stabilisateurs de tripode triviaux), cette décomposition se simplifie et donne par passage à la limite inductive une décomposition de l'action originale (voir [82]).)

2.2 Décomposition dynamique du 2-complexe feuilleté

Nous utiliserons les opérations élémentaires suivantes de E. Rips, transformant (S, \mathcal{C}, f) en une résolution (S', \mathcal{C}', f') . La vérification que (S', \mathcal{C}', f') est bien une résolution est immédiate.

Découpage de base: Soit x un point intérieur d'une base A_i . Notons $\varphi_{i1} \cdots \varphi_{is}$ les restrictions de φ_i aux adhérences $A_{i1} \cdots A_{is}$ des composantes connexes de $A_i \setminus \{x\}$. Notons $S' = (D, \{\varphi_{ip}, \varphi_{i'p}\}_{i' \neq i, p=1 \dots s})$. L'arbre maximal de S' est obtenu en remplaçant φ_i (si φ_i est une arête de l'arbre maximal de S) par l'une quelconque, disons φ_{i1} , de ses restrictions.

Pour tous $p = 2 \cdots s$, notons ℓ_{ip} le lacet dans le 2-complexe feuilleté Σ' de S' réunion des deux arcs $[x; \varphi_{i1}]$ et $[x; \varphi_{ip}]$. Tout lacet ℓ_j de \mathcal{C} fournit un lacet dans une feuille de Σ' , en remplaçant chaque arc $[u; \varphi_i]$ contenu dans ℓ_j par l'arc $[x; \varphi_{ip}]$ (avec $p = 1$ si $u = x$). Nous noterons encore \mathcal{C} l'ensemble de ces lacets de Σ' . Nous posons $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup \{\ell_{ip}\}_{p=2 \dots s}$. Notons que le groupe $N(\mathcal{C}')$ ne dépend pas des choix effectués. L'opération de découpage de base B_i est analogue.

Nous avons une application continue naturelle $\Sigma' \rightarrow \Sigma$ qui identifie les arcs $[x; \varphi_{ip}]$ à $[x; \varphi_i]$, et induit une équivalence d'homotopie entre X' et X . Cette application se relève, par définition de \mathcal{C}' , en une application $\tilde{\Sigma}' \rightarrow \tilde{\Sigma}$ entre les revêtements définis par les groupes $N(\mathcal{C}')$ et $N(\mathcal{C})$. Nous définissons alors l'application $f' : \tilde{\Sigma}' \rightarrow T$ en composant avec $f : \tilde{\Sigma} \rightarrow T$.

Découpage du domaine: Soit x un point intérieur d'une composante connexe D_0 de D . Découpons toutes les bases A_i, B_i contenant x dans leur intérieur, et notons encore (S, \mathcal{C}, f) la résolution obtenue. Notons D_1, \dots, D_s les sous-arbres de D qui sont les adhérences des composantes connexes de D privé de x , et D' la réunion disjointe de ces D_j . Notons $x_{ip} \in D_{ip}$ pour $1 \leq p \leq r$ les points de D' correspondant à x , avec $r \leq s$.

Chaque base de φ_i est contenue dans l'un des D_j (unique si φ_i n'est pas un singleton dont une base est $\{x\}$), donc φ_i définit (avec un choix arbitraire éventuel) une isométrie partielle $D' \rightarrow D'$ encore notée φ_i . Considérons l'ensemble fini de singletons $\Phi_0 = \{x_{i_1} \mapsto x_{i_2}, \dots, x_{i_1} \mapsto x_{i_r}\}$. Posons $S' = (D', \Phi_0 \cup \{\varphi_i\})$. Nous rajoutons Φ_0 à l'arbre maximal de S pour obtenir celui de S' .

Nous avons une équivalence d'homotopie $g : \Sigma' \rightarrow \Sigma$, en écrasant en un point chaque bande $\{x_{i_1}\} \times [0, 1]$ correspondant à un singleton de Φ_0 . Nous noterons \mathcal{C}' l'ensemble des lacets évidents dans des feuilles de Σ' dont l'image par g est dans \mathcal{C} . (Remarquons que g s'étend en une équivalence d'homotopie $X' \rightarrow X$.) L'application g se relève en une application $\tilde{\Sigma}' \rightarrow \tilde{\Sigma}$. Nous définissons alors l'application $f' : \tilde{\Sigma}' \rightarrow T$ en composant avec $f : \tilde{\Sigma} \rightarrow T$.

Partant alors d'une résolution de domaine D un arbre fini, nous découpons le domaine en tout point de branchement de D . Le nouveau domaine obtenu (isométriquement plongé de manière arbitraire dans \mathbb{R}) est alors un *multi-intervalle*, i.e. une réunion finie d'intervalles compacts de \mathbb{R} .

Soit S un système d'isométries non dégénéré, de domaine un multi-intervalle D . Soit $\overset{\circ}{S}$ le système obtenu en remplaçant chaque générateur de S par sa restriction à l'intérieur de son domaine. On définit les $\overset{\circ}{S}$ -orbites de manière analogue à celles de S . Une $\overset{\circ}{S}$ -orbite est *singulière* si elle consiste en une extrémité de D , ou contient une extrémité d'une base d'un générateur de S .

Notons E la réunion des $\overset{\circ}{S}$ -orbites singulières finies, ainsi que des orbites régulières finies contenant l'unique point fixe d'une *réflexion* (i.e. d'un mot en les générateurs de $\overset{\circ}{S}$ renversant l'orientation et ayant un point fixe).

La version suivante du théorème d'Imanishi [47] (voir aussi [65]) est démontrée dans [36]. Le point important est que chaque orbite (de S ou $\overset{\circ}{S}$) est finie ou localement dense : l'adhérence d'une orbite n'est pas un ensemble de Cantor. Notons que cette propriété n'est déjà plus vraie pour les systèmes finis d'isométries partielles entre domaines polygonaux compacts de \mathbb{R}^2 .

Théorème 2.4 ([36] Theorem 3) *E est fini et $D \setminus E$ est une union disjointe d'ouverts U_1, \dots, U_p invariants par $\overset{\circ}{S}$, qui sont ou bien une famille d'orbites finies: U_j est formé d'intervalles de même longueur rencontrant chaque $\overset{\circ}{S}$ -orbite exactement en un point; ou bien une composante minimale: chaque $\overset{\circ}{S}$ -orbite contenue dans U_i est dense dans U_j . \square*

Un système d'isométries est dit *pur* s'il est non dégénéré, connexe, de domaine un multi-intervalle, et si E est réduit aux extrémités de D . Notons qu'alors les S -orbites sont

ou bien toutes finies, ou bien toutes denses. Nous noterons S^* un système d'isométries S privé de ses singletons, et $\Sigma^* \subset \Sigma$ son 2-complexe feuilleté. Une résolution (S, \mathcal{C}, f) est dite *pure* si chaque composante connexe de S^* est pure et si chaque singleton de S est contenu dans l'arbre maximal de S .

Partons alors d'une résolution (S, \mathcal{C}, f) avec D un multi-intervalle, et dont tout singleton est contenu dans l'arbre maximal de S . Si E est défini comme précédemment pour S^* , nous découpons le domaine D en tout point de E dans son intérieur. Nous obtenons ainsi une résolution pure.

Soit (S, \mathcal{C}, f) une résolution pure. Considérons le graphe de groupes (G, \mathcal{G}) suivant. Les sommets de \mathcal{G} sont les composantes connexes de Σ^* et les composantes connexes de l'adhérence de $X \setminus \Sigma^*$. Les arêtes entre deux sommets sont les composantes connexes de l'intersection des deux sommets. Une telle composante d'intersection est contenue dans une feuille de Σ . Choisissons un point base dans l'intersection avec D de chaque sommet et arête. L'arbre maximal de S permet alors de définir les groupes de sommet et d'arête comme les images dans Γ des groupes fondamentaux des sommets et arêtes. Pour tout sommet d'une arête, choisissons un arc, contenu dans le sommet, entre le point base du sommet et celui de l'arête. Ceci permet de définir les morphismes injectifs des groupes d'arête dans les groupes de sommet.

Le groupe fondamental du graphe de groupes ainsi obtenu est isomorphe à Γ , via le théorème de van Kampen. Nous venons donc de montrer la décomposition suivante (outre le fait que nous ne savons pas si elle est non triviale, les groupes d'arête ne sont a priori pas du bon type). Elle n'utilise pas l'hypothèse de stabilité.

Théorème 2.5 (*Theorem 5.13 de [9]*) *Il existe une résolution pure (S, \mathcal{C}, f) de l'action de Γ sur T , et un isomorphisme entre Γ et un groupe fondamental de graphe de groupes, dont chaque groupe d'arête est contenu dans l'image dans Γ du groupe fondamental d'une feuille de Σ^* (donc fixe un point de T), et dont chaque groupe de sommet est de type fini, qui, ou bien fixe un point de T , ou bien est l'image dans Γ du groupe fondamental d'une composante connexe de Σ^* . \square*

Notons que dans le cas des actions libres, ce théorème exprime Γ comme un produit libre dont chaque facteur est un groupe libre ou un quotient de groupe fondamental de 2-complexe feuilleté pur par le sous-groupe engendré par (tous) les lacets contenus dans les feuilles (voir [36], Proposition 3.5).

Notons que si T est un arbre discret, alors S n'a pas de composante minimale. Réciproquement, si S n'a pas de composante minimale, alors l'arbre $T_{S, \mathcal{C}}$ est discret (quitte

à modifier de manière équivariante les longueurs des arêtes). Par équivariance du morphisme $T_{S\mathcal{C}} \rightarrow T$, tout sous-groupe de Γ fixant un arc de $T_{S\mathcal{C}}$ fixe un arc de T . Donc si S n'a pas de composante minimale, le théorème de Rips découle de la théorie de Bass-Serre.

Nous supposons donc que nous avons une résolution pure (S, \mathcal{C}, f) telle que S possède une composante minimale. Notons S_0 , de domaine D_0 , la composante connexe de S^* qui correspond à cette composante minimale, $\Sigma_0 \subset \Sigma$ son 2-complexe feuilleté, et Γ_0 l'image dans Γ du groupe fondamental de Σ_0 (pour le choix de point base déjà discuté). Pour pouvoir décomposer Γ au-dessus d'un groupe du type voulu, il suffit de décomposer le groupe Γ_0 au-dessus d'un groupe de type voulu, de manière à ce que cette décomposition donne par raffinement (voir section 1) de la décomposition en graphe de groupes 2.5 une décomposition du type voulu de Γ .

Lemme 2.6 ([9], Proposition 5.8) *Soit S un système d'isométries minimal pur, et I un intervalle ouvert (non vide) de D , avec un point base dans I . Alors $\pi_1 \Sigma$ est engendré par les lacets de la forme $c_1 \cdot \gamma \cdot c_2$ avec c_1, c_2 sous-arcs de I respectivement commençant et terminant au point base, et $\gamma = [x; \omega]$ un chemin dans une feuille associé à un \mathring{S} -mot ω . \square*

Rappelons [91] qu'une isométrie sans point fixe d'un arbre T admet une unique droite isométriquement plongée dans T sur laquelle elle agit par translation (non triviale). Cette droite est appelée son *axe de translation*. Un groupe de type fini H , agissant sans point fixe global sur un arbre, possède un unique sous-arbre invariant non vide minimal T_H , qui est la réunion des axes de translations des éléments de H sans point fixe.

Lemme 2.7 *Le groupe Γ_0 n'a pas de point fixe global dans T . Nous noterons T_{Γ_0} l'unique sous-arbre de T non vide invariant par Γ_0 minimal.*

Preuve. Rappelons que tout relevé dans $\mathring{\Sigma}$ d'une composante connexe I de D_0 s'injecte par f dans T . Par minimalité, il existe un élément h de Γ_0 représenté par un lacet $c_1 \cdot \gamma \cdot c_2$ avec c_1, c_2 arcs de l'intérieur de I , et $\gamma = [x; \omega]$ un chemin dans une feuille associé à un \mathring{S} -mot ω sans point fixe qui préserve l'orientation. Alors h est sans point fixe dans T (car il envoie un arc orienté α de T sur un arc orienté disjoint de T , où les orientations sont compatibles avec une orientation d'un arc contenant $\alpha, h(\alpha)$). \square

Lemme 2.8 ([9], Corollary 5.9, 5.10) *Un élément de Γ_0 fixant un arc de T_{Γ_0} est contenu dans le noyau de l'action de Γ_0 sur T_{Γ_0} . En particulier, si la longueur de l'intersection des axes de deux éléments de Γ_0 est strictement plus grande que la somme des distances de translations, alors les axes de translation de ces éléments sont confondus.*

Preuve. Soit $\gamma \in \Gamma_0$ fixant un arc I_0 de T_{Γ_0} , et soit $J \subset I_0$ un arc stable. Soit W le sous-arbre stable maximal de T_{Γ_0} contenant J (ceci existe, car la réunion de deux sous-arbres stables dont l'intersection contient un sous-arbre non dégénéré est encore stable). Une des composantes connexes de la préimage de Σ_0 dans $\tilde{\Sigma}$ se projette dans T par f sur un sous-arbre non vide invariant par Γ_0 , donc contenant T_{Γ_0} . Il existe donc un intervalle ouvert non vide I de D_0 dont un relevé \tilde{I} dans $\tilde{\Sigma}$ se projette (injectivement) sur un arc de W . Utilisons pour générateurs de Γ_0 les images des générateurs de $\pi_1 \Sigma_0$ obtenus dans le lemme 2.6 pour l'intervalle I . Alors un tel générateur g vérifie que $f(\tilde{I}) \cap g(f(\tilde{I}))$ contient un arc. Puisque $W \cap g(W)$ contient un arc, et par maximalité, on a $W = g(W)$. Donc $W = T_{\Gamma_0}$. Ceci implique que γ fixe T_{Γ_0} .

La deuxième assertion vient du fait que par l'hypothèse, le commutateur des deux éléments fixe un arc, donc est dans le noyau, et que dans un arbre, deux isométries sans point fixe qui commutent ont le même axe de translation. \square

2.3 Étude des composantes homogènes

Soit S un système d'isométries pur minimal. Tout générateur $\varphi_i : A_i \rightarrow B_i$ est restriction d'une isométrie globale de \mathbb{R} . Notons Q le sous-groupe de $\text{Isom}(\mathbb{R})$ engendré par ces isométries. Bien sûr, si $x, y \in D$ sont dans la même S -orbite, alors ils sont dans la même Q -orbite. Mais la réciproque n'est pas vraie en général.

Rappelons tout d'abord les faits élémentaires suivants. Soit P un sous-groupe dense dénombrable de $\text{Isom}(\mathbb{R})$. Fixons un intervalle ouvert non vide I de \mathbb{R} , et $\epsilon > 0$. Alors P est engendré par ses translations d'amplitudes au plus ϵ et par ses symétries de centre dans I . Si φ est une isométrie de \mathbb{R} telle que $x, \varphi(x)$ appartiennent à la même P -orbite pour un ensemble non dénombrable de x , alors φ est dans P .

Le système S est *homogène* s'il existe un intervalle ouvert J dans D et un sous-groupe dense P de $\text{Isom}(\mathbb{R})$ tel que $x, y \in J$ sont dans la même \mathring{S} -orbite si et seulement s'ils sont dans la même P -orbite. Il est facile de voir qu'à conjugaison près, le *groupe des périodes* P ne dépend pas de J , et qu'il est contenu dans Q , donc de type fini.

Théorème 2.9 *Si l'action de Γ sur T est stable et si S_0 est homogène, alors T_{Γ_0} est une droite. En particulier, Γ_0 et Γ se décomposent au-dessus d'une extension d'un groupe abélien par un sous-groupe de Γ fixant un arc de T_{Γ_0} . De plus si l'action de Γ sur T est libre, alors Γ_0 est un groupe abélien libre.*

Preuve. La deuxième assertion découle de la première, par l'existence d'une suite exacte

$$1 \rightarrow N \rightarrow \Gamma_0 \rightarrow R \rightarrow 1$$

avec R un sous-groupe d'isométries de \mathbb{R} , de type fini car Γ_0 l'est, et N fixe un arc de T . La décomposition de R au-dessus d'un groupe abélien (de type fini) de l'exemple a) fournit par image réciproque une décomposition de Γ_0 au-dessus d'une extension d'un groupe abélien par N . Tout sous-groupe de Γ_0 ayant un point fixe global dans T (donc dans T_0) est conjugué à un sous-groupe d'un groupe de sommet de cette décomposition. Par raffinement de la décomposition en graphe de groupes du théorème 2.5, Γ se décompose au-dessus d'une extension d'un groupe abélien par un sous-groupe fixant un arc de T .

Soit Δ un intervalle fermé *stable* de D_0 , i.e. dont l'image par f de tout relevé dans \tilde{X} est arc stable de T . Nous pouvons aussi supposer que Δ est dans un intervalle J comme dans la définition des systèmes homogènes, et nous supposons que le point base est dans Δ .

Soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit devant la longueur de Δ . Soient τ, τ' deux translations du groupe des périodes P , d'amplitudes λ, λ' rationnellement indépendantes et inférieures à ϵ en valeur absolue.

Nous allons construire une nouvelle résolution, en rajoutant à S deux nouveaux générateurs ϕ, ϕ' , les restrictions (maximales) de τ, τ' à Δ . Du coup, si $\epsilon > 0$ est assez petit, les domaines de ϕ, ϕ' coïncideront sur une distance d'au moins 3ϵ , et pour tout t dans le sous-groupe dense de \mathbb{R} engendré par λ, λ' , avec $|t| < \epsilon$, il existera un mot en les isométries partielles ϕ, ϕ' , de domaine non vide, restriction de la translation de longueur t .

Pour cela, nous allons procéder en deux étapes. Nous rajoutons d'abord deux isométries partielles vérifiant les bonnes conditions sur les amplitudes, mais avec des domaines a priori très petits. Nous utilisons pour cela une nouvelle opération élémentaire de E. Rips. Puis nous étendrons les domaines de manière maximale dans Δ .

Ajouter un générateur. Soit (S, \mathcal{C}, f) une résolution. Soit $\varphi : A \rightarrow B$ une isométrie partielle de D , avec A non dégénéré, qui coïncide sur A avec un S -mot w . Notons S' le système d'isométries sur $D' = D$ obtenu en rajoutant φ aux générateurs de S . Le 2-complexe feuilleté Σ' contient naturellement Σ . L'arbre maximal de S reste un arbre maximal de S' .

Pour $u_0 \in A$ quelconque, notons ℓ le lacet dans une feuille de Σ' réunion des chemins $[u_0; \varphi]$ et $[u_0; w] \subset \Sigma$. Posons $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup \{\ell\}$. On a une application continue naturelle $\Sigma' \rightarrow \Sigma$ qui pour tout $u \in A$ envoie linéairement l'arc $[u; \varphi]$ sur le chemin $[u; w]$. Cette application (qui induit une équivalence d'homotopie $X' \rightarrow X$) se relève en une application $\tilde{\Sigma}' \rightarrow \tilde{\Sigma}$. Nous définissons alors l'application $f' : \tilde{\Sigma}' \rightarrow T$ en composant avec $f : \tilde{\Sigma} \rightarrow T$.

Clairement, (S', \mathcal{C}', f') est une résolution, pure si (S, \mathcal{C}, f) l'est.

Théorème 2.10 ([37] Theorem 2.3) *Soit S un système d'isométries. Soient p, q des plongements isométriques $[0, \eta] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $q_t = q(t)$ et $p_t = p(t)$ soient dans la même S -orbite sauf peut-être pour un ensemble dénombrable de t . Alors q_t et p_t sont dans la même orbite pour tout t . De plus, il existe des S -mots en nombre fini w_1, \dots, w_n tels que pour tout $t \in [0, \eta]$, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $w_i(p_t) = q_t$. \square*

Par définition d'un système homogène, et par le théorème 2.10 précédent, nous pouvons rajouter ϕ, ϕ' deux générateurs non singleton, de bases dans Δ , restrictions de translations d'amplitudes rationnellement indépendantes, inférieures à ϵ en valeur absolue. L'extension de leur domaine sera possible par le résultat suivant.

Lemme 2.11 (D. Gaboriau) *Soit (S, \mathcal{C}, f) une résolution d'une action stable, et $\psi : A \rightarrow B$ un générateur non singleton de S , tel que les bases de ψ soient contenues dans un intervalle Δ stable, lui-même contenu dans une composante homogène de S . Notons $\hat{\psi}$ l'isométrie partielle de Δ , extension maximale de ψ à Δ . Supposons que $\hat{\psi}(x)$ et x soient dans la même S -orbite pour tout x dans le domaine de $\hat{\psi}$. Alors il existe une résolution (S', \mathcal{C}', f') , pure si (S, \mathcal{C}, f) l'est, telle que S' soit obtenu à partir de S en remplaçant ψ par $\hat{\psi}$.*

Preuve. Soit x une extrémité de A , et supposons x et $\psi(x)$ dans l'intérieur de Δ . Supposons qu'il existe un S -mot $w : A_w \rightarrow B_w$ avec $x \in A_w$, et qui coïncide avec $\hat{\psi}$ sur A_w . Notons S' le système d'isométries obtenu à partir de S en remplaçant ψ par son extension ψ' à $A' = A \cup A_w$. L'arbre maximal de S redonne un arbre maximal de S' . Le 2-complexe feuilleté Σ' contient naturellement Σ , et nous posons $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$. Montrons que l'on peut étendre $f : \tilde{\Sigma} \rightarrow T$ à $\tilde{\Sigma}'$, pour obtenir une résolution (S', \mathcal{C}', f') .

Notons $[\psi]$ l'image dans $\pi_1 X = \Gamma$ du lacet au point base de la forme $c_1 \cdot \gamma \cdot c_2$ avec c_1, c_2 deux arcs dans Δ , et γ l'arc $[x; \psi]$. Définissons de même $[w]$.

Notons que le S -mot $\psi \circ w^{-1}$ est l'identité sur son domaine. Supposons tout d'abord ce domaine non réduit à $w(x)$. L'élément $[\psi] \circ [w]^{-1}$ de Γ fixe donc un arc dans $\Delta \subset T$, donc fixe Δ par stabilité.

Soit $\tilde{\Delta}$ un relevé de Δ dans le revêtement $\tilde{\Sigma}$. Par équivariance de f , le relevé dans $\tilde{\Delta}$ de $u \in A_w$ et celui dans $[\psi]\tilde{\Delta}$ de $w(u)$ ont alors la même image par f .

Chaque relevé de feuille de la bande $A' \times [0, 1]$ correspondant au générateur ψ' de S' ayant ses deux extrémités qui s'envoient par f sur un même point, nous pouvons donc étendre $f : \tilde{\Sigma} \rightarrow T$ à $\tilde{\Sigma}'$, en envoyant ce relevé de feuille sur ce point.

Si le domaine de $\psi \circ w^{-1}$ est réduit à $w(x)$, par pureté, il existe un \mathring{S} -mot w' qui envoie x sur $\psi(x)$. Puisque Δ est contenu dans une composante homogène, il n'est pas difficile de montrer que l'on peut supposer que l'isométrie partielle w' a le même signe que ψ . Nous appliquons alors le raisonnement ci-dessus en remplaçant w par w' . Ceci permet d'étendre ψ en ψ'' . Puis nous appliquons encore une fois le raisonnement ci-dessus en remplaçant ψ par ψ'' .

Il est immédiat que les propriétés des résolutions sont encore vérifiées par (S', \mathcal{C}', f') . Par le théorème 2.10, une induction finie permet alors de conclure. \square

L'extension des domaines de $\psi = \phi, \phi'$ se fait alors par le lemme 2.11, en notant que puisque S_0 est homogène, t et $\hat{\psi}(t)$ sont dans la même S_0 -orbite pour tout t dans le domaine de $\hat{\psi}$.

Terminons la preuve du théorème 2.9, comme dans [9], preuve des assertions (2)-(4) de la proposition 8.9. Notons g, g' les éléments de Γ_0 obtenus en prenant une feuille de la bande correspondant à ϕ, ϕ' , joints par des arcs de Δ au point base. Alors par l'hypothèse sur ϵ et le lemme 2.8, les axes de translations de g, g' coïncident. Notons L cet axe. Notons I un intervalle pointé de Δ dont un relevé dans $\tilde{\Sigma}$ a son image par f contenue dans L . Nous utiliserons l'unique arc de Δ entre le point base de Δ et celui de I pour identifier les groupes fondamentaux de Σ_0 en ces points bases.

Montrons que L est invariant par tout générateur h de Γ_0 représenté par le lacet $c_1 \cdot \gamma \cdot c_2$ donné par le lemme 2.6 pour cet intervalle I . Supposons que l'élément de \mathring{S} correspondant à γ préserve l'orientation. Alors h est hyperbolique (par un argument déjà vu), et son axe de translation intersecte L en un segment de longueur strictement supérieure à la distance de translation de h . Puisqu'il existe des mots w en g, g' d'axes de translation L et de distance de translation arbitrairement petite, le lemme 2.8 entraîne que l'axe de translation de h est L .

Si γ renverse l'orientation, alors pour w comme précédemment, l'élément hyperbolique hwh^{-1} est d'axe de translation égal à L par l'argument ci-dessus. Donc h préserve L .

Nous avons donc montré que T_{Γ_0} est réduit à la droite L . \square

2.4 Étude des composantes échanges d'intervalles

Nous dirons qu'un système d'isométries est à *générateurs indépendants* si aucun \mathring{S} -mot réduit non trivial, de domaine non vide, n'est restriction de l'identité. En particulier, toute feuille non singulière est un arbre.

Théorème 2.12 ([34], Theorem VII.1) Soit $S = (D, \{\varphi_i\})$ un système d'isométries sans composante minimale homogène. Alors on peut obtenir un système d'isométries S' de domaine D , à générateurs indépendants, ayant les mêmes orbites, en remplaçant chaque générateur φ_i par sa restriction à un sous-intervalle (éventuellement vide) de son domaine. \square

Pour un système d'isométries, nous notons

- m la longueur totale de D ;
- ℓ la somme des longueurs des domaines A_i des générateurs.

Proposition 2.13 ([36], Proposition 6.1) Si S est un système d'isométries minimal à générateurs indépendants, alors

$$\ell = m. \quad \square$$

Rappelons qu'un *échange d'intervalles* est un système d'isométries connexe, non dégéré tel que, sauf un ensemble fini, tout x dans D appartient à exactement deux bases.

Il découle donc de la proposition précédente que si S est pur, minimal, à générateurs indépendants, et si tout point de D appartient à au moins deux bases, alors S est un échange d'intervalles (sinon, on aurait $\ell > m$).

Avec les notations suivant le théorème 2.5, nous pouvons supposer que S_0 n'est pas homogène, et est réunion d'un système \overline{S}_0 pur minimal à générateurs indépendants, et d'autres générateurs qui sont des \overline{S}_0 -mots. Il suffit en effet d'appliquer les théorèmes 2.12 et 2.10, et de faire un nombre fini de découpages de bases. Remarquons que le 2-complexe feuilleté $\overline{\Sigma}_0$ de \overline{S}_0 est naturellement contenu dans Σ_0 .

Par les opérations suivantes de *glissement de base*, nous pouvons aussi supposer que tout générateur de $S_0 \setminus \overline{S}_0$ est l'identité sur son domaine.

En effet, choisissons pour tout générateur $\varphi_i : A_i \rightarrow B_i$ dans $S_0 \setminus \overline{S}_0$ un \overline{S}_0 -mot w_i qui coïncide avec φ_i sur A_i . Notons S' le système d'isométries obtenu en remplaçant ces φ_i par l'identité $\varphi'_i : A_i \rightarrow A_i$. Tout lacet ℓ de \mathcal{C} donne un lacet ℓ' dans une feuille de Σ' , en remplaçant dans ℓ chaque occurrence d'un arc $[x; \varphi_i]$ par le chemin formé de l'arc $[x; \varphi'_i]$ suivi de $[x; w_i]$. Posons $\mathcal{C}' = \{\ell'\}$.

Notons que nous avons une application continue $\Sigma' \rightarrow \Sigma$ qui envoie (linéairement) la première moitié de l'arc $[x; \varphi'_i]$ sur $[x; \varphi_i]$ et la seconde sur l'arc (parcouru en sens inverse) $[x; w_i]$. Cette application (qui induit une équivalence d'homotopie $X' \rightarrow X$) se relève en une application $\tilde{\Sigma}' \rightarrow \tilde{\Sigma}$. Nous définissons alors l'application $f' : \tilde{\Sigma}' \rightarrow T$ en composant avec $f : \tilde{\Sigma} \rightarrow T$. Clairement, (S', \mathcal{C}', f') est une résolution pure.

Nous supposons que cela est satisfait dans la suite.

Théorème 2.14 *Si l'action de Γ sur T est stable, et si $\overline{S_0}$ est un échange d'intervalles, alors Γ_0 et Γ se décomposent au-dessus d'une extension d'un groupe cyclique par un sous-groupe fixant un arc de T_{Γ_0} . Si de plus l'action de Γ est libre, alors Γ_0 est un groupe fondamental de surface.*

Preuve. Puisque $\overline{S_0}$ est un échange d'intervalles pur, $\overline{\Sigma_0}$ est homéomorphe à une surface connexe compacte à bord, muni d'un feuilletage mesuré à feuilles denses. En particulier, les feuilles non singulières du feuilletage de $\overline{\Sigma_0}$ sont des droites. Par pureté et minimalité, les seuls lacets contenus dans les feuilles sont les composantes de bord de $\overline{\Sigma_0}$, et toute feuille ne contient qu'au plus une composante de bord.

Considérons N le sous-groupe de Γ_0 normalement engendré par les lacets formés par les feuilles des bandes associées aux générateurs de $S_0 \setminus \overline{S_0}$. Par construction, ces générateurs de N fixent un arc de T_{Γ_0} , donc par le lemme 2.8, fixent tout T_{Γ_0} . Donc N est contenu dans le noyau de l'action de Γ_0 sur T_{Γ_0} , et en particulier fixe un arc de T .

Le quotient $Q = \Gamma_0/N$ agit donc sur T_{Γ_0} . Rappelons que chaque composante de l'intersection d'une composante connexe de $X \setminus \Sigma_0$ avec Σ_0 est contenue dans une feuille de Σ_0 . Puisque toutes les feuilles sauf celles passant par le bord sont contractiles, Q est un quotient du groupe fondamental de $\overline{\Sigma_0}$ par un sous-groupe normal engendré par des puissances de lacets de bord. Donc Q est le groupe fondamental d'un 2-orbifold à singularités coniques. Puisqu'il agit sans point fixe global sur T_{Γ_0} , par la classification des 2-orbifolds compacts, il se décompose au-dessus soit du groupe trivial, soit de \mathbb{Z} , où le générateur de \mathbb{Z} correspond à une courbe fermée simple de $\overline{\Sigma_0}$ non parallèle au bord. En particulier, Γ_0 se décompose sur une extension d'un groupe cyclique par N . Par raffinement de la décomposition de Γ obtenu dans le théorème 2.5, Γ se décompose au-dessus d'une extension d'un groupe cyclique par un sous-groupe fixant un arc de T .
□

2.5 Étude des composantes exotiques

Nous allons définir un processus dû à E. Rips qui transforme une résolution $(S, \mathcal{C}, f) = (S^0, \mathcal{C}^0, f^0)$ en une autre $(S^1, \mathcal{C}^1, f^1)$.

Notons L^0 l'ensemble des points du domaine D_0 de S_0 qui n'appartiennent qu'à une seule base de $\overline{S_0}$. S'il est non vide, nous définissons un nouveau système de isométries sur le multi-intervalle $D^1 = D^0 \setminus L^0$.

Nous remplaçons tout d'abord chaque générateur φ_i de $\overline{S_0}$ par ses restrictions aux composantes connexes (en nombre fini) de $D^1 \setminus \varphi_i^{-1}(L^0)$. Si une composante de L^0 coïncide avec une composante de D_0 , alors le générateur correspondant est tout simplement enlevé. Remarquons que par pureté et minimalité, les adhérences de $\varphi_i^{-1}(L^0)$ et de L^0 ne se rencontrent pas. Toute composante connexe I de L^0 est contenue dans l'intérieur d'une base d'un unique générateur φ_{i_r} de $\overline{S_0}$. Tout lacet de \mathcal{C} , pouvant être supposé sans aller-retour, définit un nouveau lacet dans les feuilles. Nous notons \mathcal{C}_v l'ensemble de ces lacets.

Par des opérations de découpage de base, nous pouvons supposer que l'intérieur d'une base d'un générateur de $S_0 \setminus \overline{S_0}$ ne contient pas d'extrémité de composantes de L^0 . Rappelons que ces opérations rajoutent un nouveau lacet $\ell_{i,u}$ pour tout générateur φ_i de $S_0 \setminus \overline{S_0}$ et tout $u \in \partial L^0$ dans l'intérieur d'une base de φ_i . Plus précisément, $\ell_{i,u} = [u; \varphi_i^{u+}] \cdot [u; \varphi_i^{u-}]^{-1}$ où $\varphi_i^{u+}, \varphi_i^{u-}$ sont les générateurs obtenus par découpage de base de φ_i en u . Nous notons encore $\mathcal{C} = \mathcal{C}_v \cup \{\ell_{i,u}\}$.

Pour chaque composante connexe I de L^0 , si $I \subset A_{i_r}$, nous remplaçons chaque générateur $\varphi_j : A_j \rightarrow A_j$ de $S_0 \setminus \overline{S_0}$, avec $A_j \subset I \cap \partial I$, par un générateur φ'_j qui est l'identité sur $\varphi_{i_r}(A_j) \subset B_{i_r}$. Nous faisons de manière analogue si $I \subset B_{i_r}$.

Nous obtenons ainsi un nouveau système d'isométries S^1 . Il est facile de voir que la composante connexe S_0^1 de S^1 correspondant à S_0 est encore pure, minimale, non homogène, et que les générateurs correspondant à $\overline{S_0}$ sont encore indépendants.

Les deux complexes Σ^0 et Σ^1 ont un quotient commun \mathcal{Q} . L'application $\pi^0 : \Sigma^0 \rightarrow \mathcal{Q}$ est l'écrasement dans Σ^0 , pour toute composante I de L^0 et tout $u \in I \cap \partial I$, des feuilles $[u; \varphi_{i_r}^\epsilon]$, avec $\epsilon = +1$ si $I \subset A_{i_r}$, et $\epsilon = -1$ si $I \subset B_{i_r}$. L'application $\pi^1 : \Sigma^1 \rightarrow \mathcal{Q}$ est l'écrasement dans Σ^1 , pour toute composante I de L^0 et tout $u \in \partial I$, des feuilles $[u; \varphi_{i_r}^\epsilon]$, avec $\epsilon = +1$ si $I \subset A_{i_r}$, et $\epsilon = -1$ si $I \subset B_{i_r}$.

Pour tout ℓ dans \mathcal{C} , $(\pi^1)^{-1}(\pi^0(\ell))$ est un lacet dans une feuille de Σ^1 , et nous notons \mathcal{C}^1 l'ensemble de ces lacets. Notons que les disques de X^1 s'appuyant sur les lacets de la forme $(\pi^1)^{-1}(\pi^0(\ell_{i,u}))$ doivent être pensés comme des anneaux $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, avec $\mathbb{S}^1 \times \{0\}, \mathbb{S}^1 \times \{1\}$ des lacets dans les bords des bandes des générateurs de $S_0^1 \setminus \overline{S_0^1}$, et $\{1\} \times [0, 1]$ recollé le long d'un arc de bord $[u; \varphi_{i_r, \pm}]$ de la bande d'un générateur $\varphi_{i_r, \pm}$ de $\overline{S_0^1}$ correspondant à φ_{i_r} . Un tel anneau est appelé (comme dans [9]) un *anneau de subdivision*.

L'application $f^0 : \widetilde{\Sigma^0} \rightarrow T$ factorise à travers une application $\tilde{Q} \rightarrow T$, où $\tilde{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ est le revêtement correspondant à $\pi_*^0(N(\mathcal{C}^0))$. Nous définissons alors $f^1 : \widetilde{\Sigma^1} \rightarrow T$ en composant $\tilde{Q} \rightarrow T$ par $\widetilde{\Sigma^1} \rightarrow \tilde{Q}$ l'application relevée de l'équivalence d'homotopie π^1 .

Nous construisons ainsi une nouvelle résolution pure $(S^1, \mathcal{C}^1, f^1)$.

S'il y a des points de $D^1 \cap D_0$ qui n'appartiennent qu'à une base, alors nous pouvons répéter cette opération. En itérant, ceci conduit à une suite infinie de résolutions X_n de domaines $D^0 \supset D^1 \supset \dots \supset D^n \supset \dots$, sauf si pour un certain n , tout point de $D^n \cap D_0$ appartient à au moins deux bases. Auquel cas, la composante S_0^n est un échange d'intervalle, et la section précédente conclut. La composante S_0 est dite *exotique* si le processus ci-dessus est infini.

Proposition 2.15 ([36], Proposition 7.1) *Si S_0 est exotique, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D^n \cap D_0$ est nulle part dense dans D_0 .* \square

Théorème 2.16 *Si l'action de G sur T est stable, et si S_0 est exotique, alors Γ_0 et G se décomposent au-dessus d'un sous-groupe fixant un arc de T .*

Preuve. Puisque les générateurs de $\overline{S^0}$ sont indépendants, tout lacet contenu dans une feuille, et ne contenant pas de composante de $\partial A_i \times [0, 1]$, est homotope à zéro. Donc il existe un 1-complexe fini $\kappa \subset \overline{\Sigma_0}$, union finie de feuilles dans des bandes de générateurs, tel que le sous-groupe normal de $\pi_1 \overline{\Sigma_0}$ engendré par les lacets dans les feuilles soit précisément normalement engendré par les lacets dans κ .

Notons que le nombre de lacets dans \mathcal{C}^n qui ne correspondent pas à des anneaux de subdivision dans une étape antérieure reste borné. Appliquons suffisamment de fois le processus de E. Rips pour qu'il existe un générateur $\varphi : A \rightarrow B$ de S^n dont la bande $A \times [0, 1]$ ne contienne aucune arête de κ , et tel que A ou B , disons A , soit contenu dans l'intérieur d'un intervalle stable Δ de D^n . Ceci est possible par la proposition 2.15, et puisque $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D^n \cap D_0$ ne peut pas être fini, car on ne peut rendre fini un graphe infini localement fini en enlevant à chaque étape ses arêtes terminales. Par des opérations élémentaires, nous pouvons alors supposer que toute composante connexe du domaine rencontre au moins deux bases.

Nous allons alors appliquer le théorème de van Kampen en coupant la bande $A \times [0, 1]$ à la hauteur $\frac{1}{2}$, ainsi que tout disque de X^n correspondant dans une étape antérieure à un anneau de subdivision et se recollant sur $\partial A \times [0, 1]$. Notons W le graphe union de $A \times \{\frac{1}{2}\}$ et de $\mathbb{S}^1 \times \{u_{\frac{1}{2}}\}$ pour tout tel disque, le point $(1, u_{\frac{1}{2}})$ étant sur $\partial A \times [0, 1]$. Notons que l'image dans $\pi_1 X^n$ du générateur du groupe fondamental d'un anneau de subdivision fixe un arc de Δ , donc fixe Δ . Donc l'image dans $\pi_1 X^n$ du groupe fondamental de W fixe un arc dans T .

Le théorème de van Kampen permet alors de conclure à une décomposition de Γ_0 au-dessus d'un groupe fixant un arc de T . Pour montrer la non trivialité dans le cas

où la bande $A \times [0, 1]$ sépare $\overline{\Sigma_0^n}$ en deux composantes connexes C_1 et C_2 , il suffit de remarquer que par minimalité et puisque toute composante connexe du domaine rencontre au moins deux bases, qu'il existe dans chaque composante connexe C_1 et C_2 un mot en les générateurs ouverts, préservant l'orientation, et qui n'est pas l'identité sur son domaine. Ces mots fournissent un élément dans le groupe fondamental de chaque composante connexe de X^n correspondante à C_1, C_2 , qui n'est pas dans le groupe au-dessus duquel on décompose.

Rappelons que chaque groupe d'arête de la décomposition du théorème 2.5 est conjugué à un groupe engendré par des lacets dans une feuille. Donc par raffinement, la décomposition ci-dessus de Γ_0 donne une décomposition de Γ sur un groupe fixant un arc de T . \square

3 Applications hyperboliques du théorème de Rips

3.1 Espaces et groupes hyperboliques

Rappelons quelques définitions sur les espaces métriques hyperboliques de M. Gromov (voir [44, 41] et l'exposé 722 du Séminaire Bourbaki [40]).

Un espace métrique est *géodésique* si pour deux points quelconques x, y , il existe un plongement isométrique $\sigma : [0, L] \rightarrow X$ avec $\sigma(0) = x, \sigma(L) = y$. Nous noterons $[x, y]$ l'image de σ , même si, en général, elle n'est pas déterminée par ses extrémités.

Un espace géodésique X est *hyperbolique* s'il existe une constante $\delta \geq 0$ telle que pour tout triplet (x, y, z) de points de X et tous choix de segments $[x, y], [y, z], [z, x]$, la propriété suivante soit vérifiée: tout point de $[x, y]$ est à distance inférieure à δ d'un point de la réunion $[y, z] \cup [z, x]$.

Remarquons que si X est un arbre, alors $[x, y]$ est contenu dans la réunion $[y, z] \cup [z, x]$. Un espace métrique est un arbre si et seulement s'il est géodésique et hyperbolique pour $\delta = 0$ (voir [1] 3.17). Une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle inférieure à $-\kappa^2 < 0$ est un espace métrique hyperbolique (voir par exemple [41] Chap. 3).

Un groupe de type fini est *hyperbolique* si l'un de ses graphes de Cayley est hyperbolique.

3.2 Limites d'actions de groupes sur des espaces métriques

Fixons-nous ω un ultrafiltre sur \mathbb{N} ([11] I, p. 39), plus fin que le filtre de Fréchet des complémentaires des parties finies ([11] I, p. 36). Un tel ultrafiltre existe par ([11] I,

p. 39, th. 1). Pour toute suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bornée de réels, nous noterons $\lim_{\omega} x_i$ la limite de l'ultrafiltre de \mathbb{R} engendré par l'image directe de ω par $i \mapsto x_i$ ([11] I, p. 41).

Soit $(X_i, d_i, *_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques pointés. Soit

$$X_{\infty} = \{x \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i / \lim_{\omega} d_i(x_i, *_i) < +\infty\}.$$

Par passage à la limite dans l'inégalité triangulaire, nous pouvons définir $d_{\infty} : X_{\infty} \times X_{\infty} \rightarrow [0 + \infty[$ par

$$d_{\infty}(x, y) = \lim_{\omega} d_i(x_i, y_i).$$

Il est facile de voir que d_{∞} est une pseudo-distance. Nous noterons $(X_{\omega}, d_{\omega}, *_\omega)$ l'espace métrique pointé quotient de $(X_{\infty}, d_{\infty}, (*_i)_{i \in \mathbb{N}})$ par la relation d'équivalence $x \sim y$ si x, y sont à pseudo-distance nulle. Nous l'appellerons l'*ultralimite* de la suite $(X_i, d_i, *_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (voir [27, 45]).

Soit Γ un groupe agissant par isométries sur X_i , tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\lim_{\omega} d_i(\gamma *_i, *_i) < \infty.$$

Alors l'action produit de Γ sur X_{∞} induit une action isométrique de Γ sur X_{ω} .

Si $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ sont des espaces métriques munis d'une action isométrique d'un groupe Γ , nous dirons que la suite (X_i) converge pour la *topologie de Hausdorff-Gromov équivariante* vers X_{∞} si pour toute partie finie K de X_{∞} , pour toute partie finie P de Γ , pour tout $\epsilon > 0$, il existe un élément Ω du filtre ω tel que pour tout i dans Ω , il existe une partie finie K_i de X_i , et une relation $\mathcal{R}_i \subset K \times K_i$, dont les projections sur K, K_i sont surjectives, telles que pour tous $g, h \in P$, si $x \mathcal{R}_i x_i$ et $y \mathcal{R}_i y_i$,

$$|d_i(gx_i, hy_i) - d_{\infty}(gx, hy)| < \epsilon.$$

Une modification de ceci permet de munir d'une topologie tout ensemble d'actions isométriques de Γ sur des espaces métriques [69].

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 3.1 (1) *Si X_i est géodésique pour tout i , alors X_{ω} l'est.*

(2) *Si X_i est δ_i -hyperbolique avec $\delta = \lim_{\omega} \delta_i$ fini, alors X_{ω} est δ -hyperbolique (donc un arbre si $\delta = 0$).*

(3) *Soit Γ un groupe agissant par isométries sur chaque X_i , tel que $\lim_{\omega} d_i(\gamma *_i, *_i) < \infty$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Alors l'action de Γ sur X_i converge pour la topologie de Hausdorff-Gromov équivariante vers l'action de Γ sur X_{ω} . \square*

Donnons maintenant quelques applications de la conjonction du théorème de E. Rips et du fait qu'une ultralimite d'une suite d'actions sur des espaces hyperboliques est une action sur un arbre.

3.3 Compacité d'espaces de représentations

Soit X une variété riemannienne complète, simplement connexe, à courbure sectionnelle strictement négative, possédant un groupe discret cocompact d'isométries (par exemple un espace symétrique de type non compact de rang un). Rappelons que le groupe des isométries G de X , muni de la topologie compacte ouverte, est un groupe de Lie réel, par le théorème de Myers.

Soit Γ un groupe de type fini, virtuellement sans torsion, non virtuellement nilpotent. L'hypothèse sur la torsion est inutile si X est un espace symétrique, par le théorème de Selberg. Considérons l'ensemble (éventuellement vide) $R_{fd}(\Gamma, G)/G$ des représentations fidèles et discrètes de Γ dans G modulo conjugaison. Il est muni de la topologie quotient de la topologie compacte-ouverte (ici celle de la convergence simple) sur l'ensemble des morphismes du groupe discret Γ dans le groupe de Lie G . L'espace $R_{fd}(\Gamma, G)/G$ est localement compact et métrisable (voir [61]).

Considérons l'ensemble $\text{SLF}(\Gamma)$ des actions de Γ sur les arbres, sans point fixe global, sans sous-arbre invariant propre, à stabilisateurs d'arc virtuellement nilpotents, modulo isométrie équivariante. Munissons-le de la topologie de Hausdorff-Gromov équivariante. Son quotient $\text{PSLF}(\Gamma)$ par les homothéties équivariantes de métrique est métrisable compact par [19, 69].

La topologie de Hausdorff-Gromov équivariante permet de compactifier $R_{fd}(\Gamma, G)/G$ par un fermé de l'espace $\text{PSLF}(\Gamma)$. Voir J. Morgan-P. Shalen [64, 65, 63] par des méthodes de géométrie algébrique, et M. Bestvina [7], F. Paulin [69] par des méthodes purement géométriques, et aussi [17] par l'analyse non standard.

Si X est le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 , si G_0 est le sous-groupe d'indice 2 de G préservant l'orientation, et Γ est le groupe fondamental d'une surface de Riemann Σ connexe, compacte sans bord, de genre g au moins 2, alors $R_{fd}(\Gamma, G_0)/G_0$ s'identifie avec l'espace de Teichmüller de Σ .

R. Skora (voir [67] chap. VIII) a montré que $\text{PSLF}(\Gamma)$ est égal à toute la frontière de $R_{fd}(\Gamma, G_0)/G_0$. La compactification de $R_{fd}(\Gamma, G_0)/G_0$ par $\text{PSLF}(\Gamma)$ coïncide avec la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller (voir [89, 32] et l'exposé 426 au Séminaire Bourbaki de V. Poénaru [73]).

Hormis le cas des surfaces, cette compactification est surtout utile par son corollaire suivant (contenant en particulier le théorème 3 de l'introduction). Notons que si X est un espace symétrique, et si Γ est un sous-groupe discret de covolume fini de G , alors $R_{fd}(\Gamma, G)/G$ est vide ou un point, par le théorème de rigidité de Mostow. Il existe (voir [90]) de nombreuses variétés connexes compactes à bord non vide de dimension 3,

dont le groupe fondamental Γ ne se décompose pas au-dessus d'un groupe virtuellement nilpotent, et avec $R_{fd}(\Gamma, G)/G$ non vide, non réduit à un point, pour G le groupe des isométries de \mathbb{H}^3 .

Théorème 3.2 *Si Γ ne se décompose pas au-dessus d'un groupe virtuellement nilpotent, alors $R_{fd}(\Gamma, G)/G$ est compact.*

Preuve. Soit S une partie génératrice fixée de Γ . Il suffit de montrer, puisque $R_{fd}(\Gamma, G)/G$ est métrisable, que pour toute suite $(\rho_i : \Gamma \rightarrow G)_{i \in \mathbb{N}}$ de représentations fidèles et discrètes et tout ultrafiltre ω comme ci-dessus, ρ_i converge quitte à conjuguer vers une représentation ρ_∞ . Celle-ci sera fidèle et discrète par une application du lemme de Margulis.

Notons $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction

$$f_i(x) = \max_{s \in S} d(\rho_i(s)x, x).$$

Puisque Γ n'est pas virtuellement nilpotent, $\rho_i(\Gamma)$ ne fixe aucun point du bord visuel ∂X de X (voir [12]). Donc f_i est convexe (car X est à courbure négative) et propre. Notons x_i un minimum de f_i et $\lambda_i = f_i(x_i)$. Comme $\rho_i(\Gamma)$ est infini discret, il ne fixe aucun point de X , donc $\lambda_i > 0$.

Supposons $\lim_\omega \lambda_i = +\infty$. Si $\|\gamma\|$ est la longueur minimale d'un mot en les générateurs S représentant $\gamma \in \Gamma$, alors $\frac{1}{\lambda_i} d(\rho_i(\gamma)x_i, x_i) \leq \|\gamma\|$. Notons d_i la distance $\frac{1}{\lambda_i} d$ sur X . Par les propriétés 3.1, l'ultralimite $(X_\omega, d_\omega, x_\omega)$ de la suite (X_i, d_i, x_i) est un arbre, muni d'une action (isométrique) de Γ .

Cette action n'a pas de point fixe global par le choix des points bases x_i . Les stabilisateurs d'arc sont virtuellement nilpotents par le lemme de Margulis et la courbure strictement négative (utiliser la proposition 3.1 (3)). Par le théorème de Rips (exemple iv)), le groupe Γ se décompose au-dessus d'un groupe virtuellement nilpotent, ce qui est une contradiction.

Donc $\lim_\omega \lambda_i < \infty$. Quitte à conjuguer ρ_i , nous pouvons supposer que x_i reste dans un compact de X . Or le sous-espace des isométries de X bougeant un compact de moins d'une constante est compact. Donc $\rho_i(s)$ converge vers une isométrie pour tout générateur s . Ceci entraîne que ρ_i converge vers une représentation ρ_i . \square

Un résultat analogue est vrai pour X un immeuble de Tits (discret, épais, localement compact) modelé sur un groupe de Coxeter discret engendré par des réflexions de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n .

Les techniques et le théorème ci-dessus sont aussi l'une des étapes de la preuve du théorème d'hyperbolisation de Thurston, voir [90, 67].

3.4 Applications aux groupes hyperboliques

Rappelons qu'une conséquence du théorème de rigidité de Mostow pour les variétés V localement symétriques, connexes compactes, à courbure strictement négative, de dimension au moins 3, dit que le groupe des automorphismes extérieurs de leur groupe fondamental est fini. Notons aussi que, puisque $n \geq 3$, $\pi_1 V$ ne se décompose pas au-dessus d'un groupe virtuellement fini.

Théorème 3.3 *Si Γ est un groupe hyperbolique non virtuellement cyclique, alors le groupe des automorphismes extérieurs de Γ est fini, sauf si Γ se décompose au-dessus d'un groupe virtuellement cyclique.*

Preuve. Comme ci-dessus, la preuve consiste à considérer une suite $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'automorphismes de Γ deux à deux distincts modulo les automorphismes intérieurs. Soit S une partie génératrice fixée de Γ . La fonction $f_i : G \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f_i(g) = \max_{s \in S} d(\varphi_i(s)g, g)$ atteint son minimum dans une partie finie de Γ , car Γ n'est pas virtuellement cyclique. Si x_i est un minimum, et $\lambda_i = f_i(x_i)$, alors $\lim_{\omega} \lambda_i = +\infty$ car les φ_i sont deux à deux distincts dans $\text{Out}(\Gamma)$. Comme précédemment, l'ultralimite $(X_{\omega}, d_{\omega}, x_{\omega})$ de la suite $(X_i, \frac{1}{\lambda_i} d_i, x_i)$ est un arbre, muni d'une action (isométrique) de Γ .

Cette action n'a pas de point fixe global par le choix des points bases x_i . Les stabilisateurs d'arc sont virtuellement cycliques par le fait que Γ est discret et hyperbolique (utiliser la proposition 3.1 (3)). Par le théorème de Rips (exemple iv)), le groupe Γ se décompose au-dessus d'un groupe virtuellement cyclique. \square

La même preuve montre le théorème suivant, lorsque H est de type fini, sans torsion et ne se décompose pas au-dessus d'un groupe cyclique. Il est dû dans le cas sans torsion à M. Gromov [44] Theorem 5.3.C' et à [76], voir [23] pour le cas général.

Théorème 3.4 *Soit Γ un groupe hyperbolique, et H un groupe de présentation fini, non virtuellement cyclique, non décomposable au-dessus d'un groupe fini. Alors Γ admet au plus un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes isomorphes à H .* \square

Une étude plus fine des actions limites permet à Z. Sela et E. Rips-Z. Sela d'obtenir les résultats de décomposition canonique (existence-unicité de décomposition maximale) dans la classe des graphes de groupes à groupes d'arête infinis cycliques, en particulier pour les groupes hyperboliques. (Voir [13] et [31] pour une autre approche.) Les applications suivantes disent en particulier que les seuls groupes hyperboliques, dont le groupe

des automorphismes est infini et intéressant, sont les groupes libres et les groupes de surface.

Théorème 3.5 (*Z. Sela [83]*) *Soit Γ un groupe hyperbolique sans torsion, librement indécomposable. Alors $\text{Out}(\Gamma)$ contient un sous-groupe d'indice fini qui est un produit direct d'un groupe abélien libre de type fini et de groupes modulaires de surface de type topologique fini.*

Si Γ n'est pas un groupe de surface compacte sans bord, alors tout automorphisme φ de Γ possède une classe de conjugaison dans Γ périodique. En particulier, le produit semi-direct de Γ par \mathbb{Z} , avec \mathbb{Z} agissant par φ sur Γ , n'est pas un groupe hyperbolique. \square

Une version analogue de ce théorème est vraie pour les sous-groupes discrets des groupes de Lie réels presque simples de rang 1. Nous en citons une forme affaiblie, dont la deuxième assertion est une généralisation du lemme de Mumford suivant: le sous-espace de l'espace modulaire d'une surface de Riemann compacte, formé des structures complexes dont la métrique de Poincaré a une borne inférieure non nulle sur le rayon d'injectivité, est compact.

Théorème 3.6 (*Z. Sela [83]*) *Soit Γ un sous-groupe discret d'un groupe de Lie G réel non compact, presque simple, de rang 1. Supposons Γ non virtuellement nilpotent, sans torsion, librement indécomposable.*

Si Γ est géométriquement fini, $\text{Out}(\Gamma)$ contient un sous-groupe d'indice fini qui est un produit direct d'un groupe abélien libre de type fini et de groupes modulaires de surface de type topologique fini.

De plus $\text{Out}(\Gamma)$ agit discrètement, avec quotient compact, sur le sous-espace de $R_{fd}(\Gamma, G)/G$ des représentations ρ telles que le rayon d'injectivité de $\rho(\Gamma)\backslash X$ est minoré, où X est l'espace symétrique de G . \square

En 1910, M. Dehn a défini trois problèmes de décision sur les groupes, le *problème du mot* (étant donné une présentation finie de groupe, existe-t-il un algorithme qui permette de décider si un mot dans les générateurs est trivial dans le groupe?), voir [79], le *problème de conjugaison* (étant donné une présentation finie de groupe, existe-t-il un algorithme qui permette de décider si deux mots en les générateurs sont conjugués dans le groupe?) et le *problème d'isomorphisme* (étant donné une classe de présentations finies de groupes, existe-t-il un algorithme pour décider si deux présentations donnent des groupes isomorphes?).

Plus précisément, il est facile de coder les présentations finies de groupes par les entiers \mathbb{N} , car une présentation finie est donnée par un nombre fini de générateurs et un

nombre fini de mots de longueur finie en ces générateurs. Le problème d'isomorphisme dans la classe \mathcal{P} de présentations finies de groupes est *décidable* s'il existe une fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ récursive (voir par exemple [53]) telle que les présentations n et m de \mathcal{P} sont isomorphes si et seulement si $f(n, m) = 0$.

M. Gromov [44] a montré que les problèmes des mots et de conjugaison sont décidables dans les groupes hyperboliques. Z. Sela [81] a montré que, pour les groupes hyperboliques sans torsion, le problème d'isomorphisme est décidable, en utilisant des limites de groupes hyperboliques et le théorème de Rips, et les constructions de représentants canoniques de solutions de systèmes d'équations [77]. Il s'agit d'un outil technique qui permet d'affiner le fait que les triangles géodésiques dans un espace hyperbolique sont "fins", en s'inspirant du fait que dans un groupe libre (où la constante d'hyperbolicité δ peut être prise nulle), chaque élément du groupe possède une *forme normale* canonique: son écriture réduite dans un système libre de générateurs. En utilisant aussi ces représentants canoniques, et les feuilletages de 2-complexes comme dans [28], T. Delzant [25, 26] a amélioré ce résultat au cas avec torsion, en donnant des bornes effectives sur le temps de terminaison de l'algorithme en fonction de δ .

Théorème 3.7 *Le problème d'isomorphisme dans la classe des présentations finies de groupes hyperboliques est décidable.* □

4 Questions en rang supérieur

Il nous paraît intéressant d'étudier la géométrie des actions de groupes sur les immeubles de Tits affine (non discrets) de rang supérieur, en commençant par l'analogie de [19] en rang supérieur.

Par exemple, une compactification d'espaces de représentations discrètes dans un groupe de Lie G réel simple de rang supérieur par des actions du groupe sur des immeubles de Tits affines (non discrets) modélés sur le groupe de Weyl de G , à stabilisateurs de germe de plat virtuellement résolubles, est possible, voir [72] (et aussi [51]).

Problème 1: *Trouver un critère purement algébrique pour qu'un groupe de type fini n'admette pas d'actions sans point fixe global (avec certains types de stabilisateur de germe de plat, par exemple virtuellement résoluble) sur un immeuble de Tits affine (non discret).*

Par exemple, pour des immeubles produits d'immeubles de rang un, la propriété T de Kazhdan, qui implique la propriété (FA), peut donner une telle condition.

Comme la situation est plus rigide en rang supérieur, la question suivante (non complètement résolue en rang 1), est naturelle. De plus, puisque les immeubles de Tits affines discrets en rang ≥ 3 ont été classés par J. Tits [92], ceci peut permettre d'obtenir des solutions au problème 1 (voir [46]).

Problème 2 : *Un groupe de type fini, qui agit sans point fixe global (avec un certain type de stabilisateur) sur un immeuble de Tits affine, agit-il sans point fixe global sur un immeuble de Tits affine discret (avec même type de stabilisateur) ?*

Ceci permettrait d'obtenir des informations (au moins asymptotiques) sur les sous-groupes discrets (de covolume infini, pour contourner les théorèmes de (super)-rigidité de Margulis, voir l'exposé 778 au Séminaire Bourbaki de P. Pansu [68]) des groupes de Lie réels de rang supérieur, dont la géométrie est peu connue, et pour cause :

Problème 3 : *Trouver des familles intéressantes de sous-groupes discrets de covolume infini des groupes de Lie réels semi-simples de rang supérieur (par exemple, ayant un espace de déformation non réduit à un point, mais n'agissant pas sans point fixe global (à stabilisateurs de germe de plat virtuellement résolubles) sur un immeuble de Tits affine (non discret)).*

Par exemple, les groupes fondamentaux de variétés de dimension 3 compactes, à bord non vide, Haken, acylindriques et atoroidales sont les premiers exemples à regarder. Il reste à comprendre de manière géométrique les exemples de Margulis-Soifer [60].

RÉFÉRENCES

- [1] R. Alperin, H. Bass. *Length functions of group actions on Λ -trees*, in "Combinatorial group theory and topology", S. Gersten, J. Stallings eds, Princeton Univ. Press (1987), 265-378.
- [2] H. Bass. *Finitely generated subgroup of GL_2* , dans "Smith conjecture", J. Morgan, H. Bass, eds. Academic Press (1984), 127-136.
- [3] H. Bass. *Covering theory for graphs of groups*, J. Pure Appl. Math. **89** (1993) 3-47.
- [4] H. Bass, R. Kulkarni. *Uniform tree lattices*, Jour. Amer. Math. Soc **3** (1990) 843-902.
- [5] H. Bass, A. Lubotzky. *Rigidity of group actions on locally finite trees*, Prépublication, 1994.

- [6] J.-F. Boutot, H. Carayol. *Uniformisation p -adique des courbes de Shimura: les théorèmes de Cerednik et Drinfeld*, Astérisque **196-197** (1991).
- [7] M. Bestvina. *Degenerations of the hyperbolic space*, Duke Math. J., **56** (1988) 143-161.
- [8] M. Bestvina, M. Feighn. *Bounding the complexity of simplicial group actions on trees*, Inv. Math. **103** (1991) 449-469.
- [9] M. Bestvina, M. Feighn. *Stable actions of groups on real trees*, Inv. Math. **121** (1995) 287-321.
- [10] M. Bestvina, M. Feighn. *Outer limits*, prépublication (Oct. 1992).
- [11] N. Bourbaki. *Topologie générale*, chap. 1 à 4, Hermann, Paris, 1971.
- [12] B. Bowditch. *Discrete parabolic groups*, J. Diff. Geom. **38** (1993) 559-583.
- [13] B. Bowditch. *Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups*, Prépublication Univ. Southampton (Août 1995).
- [14] F. Bruhat, J. Tits. *Groupes réductifs sur un corps local (données radicielles valuées)*, Pub. Math. I.H.É.S. **41** (1972) 5-252.
- [15] M. Burger, S. Mozes. *CAT(-1) spaces, divergence groups and their commensurators*, Jour. Amer. Math. Soc **9** (1996) 57-93.
- [16] A. Casson, S. Bleiler. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, Lond. Math. Soc. Stud. Text **9**, Camb. Univ. Press (1992).
- [17] I.M. Chiswell. *Non standard analysis and the Morgan-Shalen compactification*, Quart. J. Math. Oxford **42** (1991) 257-270.
- [18] F.M. Choucroun, *Analyse harmonique des groupes d'automorphismes d'arbres de Bruhat-Tits*, Mémoire **58** Soc. Math. France (1994).
- [19] M. Culler, J. Morgan. *Groups actions on \mathbb{R} -trees*, Proc. Lond. Math. Soc **55** (1987) 571-604.
- [20] M. Culler, P.B. Shalen. *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, Ann. of Math. **117** (1983) 109-146.

- [21] M. Culler, K. Vogtmann. *Moduli of graphs and automorphisms of free groups*, Invent. Math. **84** (1986) 91-119.
- [22] M. Culler, K. Vogtmann. *The boundary of Outer Space in rank 2*, in “Arboreal group theory”, R. Alperin ed., pp 189-230, Pub. M.S.R.I. **19**, Springer Verlag 1991.
- [23] T. Delzant. *L'image d'un groupe dans un groupe hyperbolique*, Comm. Math. Helv. **70** (1995) 267-284.
- [24] T. Delzant. *Décomposition d'un groupe en produit libre ou somme amalgamée*, à paraître dans J. Reine. Ang. Math.
- [25] T. Delzant. *Finitely presented subgroups of hyperbolic groups*, prépublication Univ. Strasbourg 1995.
- [26] T. Delzant. *Groupes de présentation finie opérant dans un espace hyperbolique*, en préparation.
- [27] L. van den Dries, A. Wilkie. *On Gromov's theorem concerning groups of polynomial growth and elementary logic*, J. Alg. **89** (1984) 349-374.
- [28] M.J. Dunwoody. *The accessibility of finitely presented groups*, Inv. Math. **81** (1985) 449-457.
- [29] M.J. Dunwoody. *An inaccessible group*, in “Geometric group theory” Vol. 1, A. Niblo, M. Roller eds, LMS LNS **182**, Cambridge Univ. Press, 1993, 75-78.
- [30] M.J. Dunwoody. *Groups acting on protrees*, prépublication Southampton Univ. (Avr. 1994).
- [31] M.J. Dunwoody, M.E. Sageev. *JSJ-splittings for finitely presented groups over slender groups*, prépublication Southampton Univ. (Août 1996).
- [32] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque **66-67**, Soc. Math. France 1979.
- [33] A. Figa-Talamanka, C. Nebia. *Harmonic analysis and representation theory for groups acting on homogeneous trees*, Lond. Math. Soc. Lect. Notes Ser. **162**, Cambridge Univ. Press 1991.

- [34] D. Gaboriau. *Générateurs indépendants pour les systèmes d'isométries de dimension un*, à paraître aux Ann. Inst. Fourier.
- [35] D. Gaboriau, G. Levitt. *The rank of actions on \mathbb{R} -trees*, Ann. Scien. Ec. Norm. Sup. (4) **28** (1995) 549-570.
- [36] D. Gaboriau, G. Levitt, F. Paulin. *Pseudogroups of isometries of \mathbb{R} and Rips' theorem on free actions on \mathbb{R} -trees*, Israel J. Math. **87** (1994) 403-428.
- [37] D. Gaboriau, G. Levitt, F. Paulin. *Pseudogroups of isometries of \mathbb{R} and reconstruction of free actions on \mathbb{R} -trees*, Erg. Theo. Dyn. Sys. **15** (1995) 633-652.
- [38] E. Gekeler. *Drinfeld modular curves*, Lect. Notes **1231** Springer Verlag (1986).
- [39] L. Gerritzen, M. van der Put. *Schottky groups and Mumford curves*, Lect. Notes **817** Springer Verlag (1980).
- [40] É. Ghys. *Les groupes hyperboliques*, Séminaire Bourbaki **722**, Astérisque **189-190**, Soc. Math. France (1990).
- [41] É. Ghys, P. de la Harpe, eds. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Prog. in Math. **83**, Birkhäuser 1990.
- [42] H. Gillet, P. Shalen. *Dendrology of groups in low \mathbb{Q} -ranks*, J. Diff. Geom. **32** (1990) 605-712.
- [43] O. Goldman, N. Iwahori. *The space of p -adic norms*, Acta Math. **109** (1963) 137-177.
- [44] M. Gromov. *Hyperbolic groups*, in "Essays in group theory", S. Gersten ed., pp. 75-263, MSRI Pub. **8**, Springer Verlag 1987.
- [45] M. Gromov. *Asymptotics invariants of infinite groups*, Vol. 2 de "Geometric group theory", A. Niblo, M. Roller eds, LMS LNS **182**, Cambridge Univ. Press, 1993.
- [46] A. Haefliger. *Complexes of groups and orbihedra*, in "Group theory from a geometrical viewpoint" (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds.), 504-540 World Scientific, 1991.
- [47] H. Imanishi. *On codimension one foliations defined by closed one forms with singularities*, J. Math. Kyoto Univ. **19** (1979) 285-291.

- [48] N.V. Ivanov. *Subgroups of Teichmüller modular groups*, Trans. Math. Mono. **115**, Amer. Math. Soc. (1992).
- [49] W.H. Jaco, P.B. Shalen. *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, Memoirs **220**, Amer. Math. Soc. 1979.
- [50] K. Johannson. *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Lect. Notes in Math. **761**, Springer Verlag, 1979.
- [51] B. Kleiner, B. Leeb. *Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces of higher rank*, Preprint, Jan. 1995.
- [52] J.-L. Koszul. *Travaux de J. Stallings sur la décomposition des groupes en produits libres*, Sémin. Bourbaki 1968/1969 n° 356, Lect. Notes **179**, Springer Verlag, 1971.
- [53] D. Lacombe. *Théorèmes de non-décidabilité*, Sémin. Bourbaki 1963/64 n° **266**, Benjamin, 1966.
- [54] G. Levitt. *La dynamique des pseudogroupes de rotations*, Invent. Math. **113** (1993) 633-670.
- [55] G. Levitt. *Constructing free actions on \mathbb{R} -trees*, Duke Math. J. **69** (1993) 615-633.
- [56] G. Levitt, F. Paulin. *Geometric group actions on trees*, à paraître dans Amer. Jour. Math.
- [57] Y. Liu. *Density of the commensurability group of uniform tree lattices*, J. Alg. **165** (1995) 346-35.
- [58] A. Lubotzky. *Lattices in rank one Lie groups over local fields*, GAFA **1** (1991), 405-431.
- [59] A. Lubotzky, S. Mozes, R. Zimmer. *Superrigidity for the commensurability group of tree lattices*, Comm. Math. Helv. **69** (1994) 523-548.
- [60] G. Margulis, G. Soifer. *Maximal subgroups of infinite index in finitely generated groups*, J. Alg. **69** (1981) 1-23.
- [61] G. Martin, *On discrete isometry groups of negative curvature*, Pac. J. Math. **160** (1993), 109-127.
- [62] J. Morgan. *Λ -trees and their applications*, Bull. A.M.S. **26** (1992) 87-112.

- [63] J. Morgan. *Groups actions on trees and the compactification of the space of conjugacy classes of $SO(n, 1)$ -representations*, *Topology* **25** (1986) 1-33.
- [64] J. Morgan, P. Shalen. *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures I*, *Ann. Math.* **122** (1985) 398-476.
- [65] J. Morgan, P. Shalen. *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures II, III*, *Ann. Math.* **127** (1988) 403-519.
- [66] J. Morgan, P. Shalen. *Free actions of surface groups on \mathbb{R} -trees*, *Topology* **30** (1991) 143-154.
- [67] J.-P. Otal. *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, *Astérisque* **235**, Soc. Math. France (1996).
- [68] P. Pansu, *Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité*, *Sém. Bourbaki 1993/94 n° 778*, *Astérisque* **227**, Soc. Math. France (1995), 69-105.
- [69] F. Paulin. *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*, *Invent. Math.* **94** (1988), 53-80.
- [70] F. Paulin. *Outer automorphisms of hyperbolic groups and small actions on \mathbb{R} -trees*, in "Arboreal group theory", R. Alperin ed., pp 331-343, *Pub. M.S.R.I.* **19**, Springer Verlag 1991.
- [71] F. Paulin. *Sur les automorphismes extérieurs des groupes hyperboliques*, à paraître, *Ann. Scien. Ecol. Norm. Sup.*
- [72] F. Paulin. *De la géométrie et la dynamique des groupes discrets*, *Mémoire d'habilitation*, ENS Lyon (Juin 1995).
- [73] V. Poénaru. *Travaux de Thurston sur les difféomorphismes des surfaces et l'espace de Teichmüller*, *Sém. Bourbaki 1978/79 n° 529*, *Lect. Notes* **770**, Springer Verlag, 1980.
- [74] H. Poincaré, *Oeuvres complètes, tome II*, Gauthier-Villars, 1952.
- [75] M. Raynaud. *Construction analytique de courbes en géométrie non archimédienne [d'après David Mumford]*, *Séminaire Bourbaki* **427**, *Lect. Notes* **383**, Springer Verlag (1994), 171-185.

- [76] E. Rips, Z. Sela. *Structure and rigidity in hyperbolic groups I*, Geom. and Func. Ana. **4** (1994), 337-371.
- [77] E. Rips, Z. Sela. *Canonical representatives and equations in hyperbolic groups*, Inv. Math. **120** (1995), 489-512.
- [78] E. Rips, Z. Sela. *Cyclic splittings of finitely presented groups and the canonical JSJ decomposition*, Prépublication Columbia (Avril 1995).
- [79] G. Sabbagh. *Caractérisation algébrique des groupes de type fini ayant un problème des mots résoluble*, Sémin. Bourbaki 1974/75 n° 356, Lect. Notes **179**, Springer Verlag, 1971.
- [80] G.P. Scott, C.T.C. Wall. *Topological methods in group theory*, in “Homological group theory”, C.T.C. Wall ed., Lond. Math. Soc. Lect. Notes **36**, Cambridge Univ. Press (1979) 137-203.
- [81] Z. Sela. *The isomorphism problem for hyperbolic groups I*, Ann. Math. **141** (1995) 217-283.
- [82] Z. Sela. *Acylindrical accessibility for groups*, Prépublication Columbia Univ. (1994).
- [83] Z. Sela. *Structure and rigidity in (Gromov) hyperbolic groups and discrete groups in rank 1 Lie groups II*, à paraître dans GAFA.
- [84] Z. Sela. *On the Nielsen-Thurston classification and automorphisms of free groups I*, à paraître dans Duke Math. J.
- [85] J.-P. Serre. *Arbres, amalgames, SL_2* , Astérisque **46**, Soc. Math. France (1983).
- [86] P. Shalen. *Dendrology of groups: an introduction*, Essays in group theory (S.M. Gersten ed.), M.S.R.I Pub. **8**, Springer Verlag, 1987.
- [87] P. Shalen. *Dendrology and its applications*, Group theory from a geometrical viewpoint (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds.), World Scientific, 1991.
- [88] E.H. Spanier. *Algebraic topology*, Tata McGraw Hill (1966).
- [89] W. Thurston. *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1988) 417-432.

- [90] W. Thurston. *Hyperbolic structures on 3-manifolds I: Deformation of acylindrical manifolds*, Ann. of Math. **124** (1986) 203-246.
- [91] J. Tits. A “theorem of Lie-Kolchin” for trees, in “Contributions to Algebra: a collection of papers dedicated to Ellis Kolchin”, pp. 377-388, H. Bass et al eds, Academic Press 1977.
- [92] J. Tits. *Immeubles de type affine*, dans “Buildings and the geometry of diagrams”, Proc. CIME Como 1984, L. Rosati ed., Lect. Notes **1181**, Springer Verlag, 1986, 159-190.
- [93] C.T.C. Wall. *Pair of relative cohomological dimension one*, J. Pure App. Alg. **1** (1971) 141-154.

Frédéric PAULIN
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
U.M.R. 128 du C.N.R.S.
École Normale Supérieure de Lyon
46 allée d'Italie
F-69364 LYON CEDEX 07
e-mail : paulin@umpa.ens-lyon.fr

Nouvelle adresse :

Bâtiment 425 (Mathématiques)
Université PARIS-SUD
91405 ORSAY CEDEX, FRANCE
e-mail : paulin@topo.math.u-psud.fr