CHRISTOPHE SOULÉ

Classes caractéristiques secondaires des fibrés plats

Séminaire N. Bourbaki, 1995-1996, exp. n° 819, p. 411-424.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1995-1996__38__411_0>

Séminaire BOURBAKI
48ème année, 1995-96, n° 819

Juin 1996

CLASSES CARACTÉRISTIQUES SECONDAIRES DES FIBRÉS PLATS

par **Christophe SOULÉ**

INTRODUCTION

Un fibré plat sur une variété différentiable M est la donnée d'un fibré vectoriel E et d'une connexion de courbure nulle sur ce fibré. La théorie de Chern-Weil montre que les classes de Chern d'un tel fibré sont de torsion dans la cohomologie paire de M à coefficients entiers. Cheeger et Simons [9] ont défini pour tout fibré plat des classes caractéristiques secondaires $\widehat{c_p}(E)$ dans la cohomologie de degré impair de M à coefficients $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Quand M est une variété projective complexe, Bloch [2] a conjecturé que, si $p \geq 2$, les classes $\widehat{c_p}(E)$ sont aussi de torsion. Ceci a été montré récemment par Reznikov [29], et c'est à ce résultat qu'est consacré cet exposé.

Le premier paragraphe expose les propriétés des classes de Cheeger et Simons. Le second décrit les deux preuves de Reznikov de la conjecture de Bloch. On donne enfin le lien avec les classes caractéristiques en cohomologie de Deligne, et l'on décrit l'exemple des variétés abéliennes et celui des fibrés de Gauss-Manin.

Je remercie S. Bloch, H. Esnault, P.Pansu et A. Reznikov pour leur aide dans la préparation de cet exposé.

1. LES CLASSES DE CHEEGER ET SIMONS

1.1. Formes de Chern

Soient M une variété différentiable et E un fibré vectoriel complexe C^∞ de rang n sur M. Notons $A^\bullet(M)$ le complexe des formes différentielles complexes sur M et $A^\bullet(M;E)$ celui des formes à coefficients dans E. Supposons donnée une connexion ∇ sur E, c'est-à-dire une application linéaire $\nabla : A^0(M;E) \to A^1(M;E)$ telle que

$$\nabla(f \otimes s) = df \otimes s + f \otimes \nabla(s),\ f \in A^0(M),\ s \in A^0(M;E)\,.$$

On peut étendre ∇ à $A^\bullet(M,E)$ par la règle de Leibniz $\nabla(\omega \otimes s) = d(\omega) \otimes s + (-1)^{\deg(\omega)}\omega \otimes \nabla s$. La courbure ∇^2 vérifie alors $\nabla^2(f \otimes s) = f\nabla^2(s)$ et définit une forme $\Omega \in A^2\big(M;\mathrm{End}(E)\big)$. Pour toute matrice complexe $n \times n$, notons $c_p(A)$ le polynôme invariant obtenu comme coefficient de t^{n-p} dans $\det\big(t\,\mathrm{Id}_n - \frac{A}{2\pi i}\big)$. Si on évalue ce polynôme sur la matrice de formes différentielles Ω, on obtient une forme fermée

$$c_p(\nabla) = c_p(\Omega) \in A^{2p}(M)$$

dont la classe de cohomologie dans $H^{2p}(M;\mathbb{C})$ est l'image de la classe de Chern $c_p(E) \in H^{2p}(M;\mathbb{Z})$.

1.2. Caractères différentiels

Désignons par $\big(S_\bullet(M),\partial\big)$ le complexe des chaînes singulières C^∞ à coefficients entiers sur M et par $Z_\bullet(M) = \ker(\partial) \subset S_\bullet(M)$ le sous-groupe des chaînes fermées. Pour tout anneau Λ on note $S^\bullet(M;\Lambda) = \mathrm{Hom}\big(S_\bullet(M),\Lambda\big)$ le complexe des cochaînes singulières C^∞ sur M à coefficients Λ. L'intégration des formes différentielles définit un morphisme de complexes

$$I : A^\bullet(M) \longrightarrow S^\bullet(M;\mathbb{C}).$$

Le groupe $\widehat{H}^k(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z})$ des *caractères différentiels* de degré $k \in \mathbb{N}$ sur M est défini comme l'ensemble des morphismes $\chi \in \mathrm{Hom}\big(Z_k(M),\mathbb{C}/\mathbb{Z}\big)$ tels que $\chi \circ \partial$ soit dans l'image de l'application composée

$$A^{k+1}(M) \xrightarrow{I} S^{k+1}(M;\mathbb{C}) \xrightarrow{r} S^{k+1}(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z}).$$

Remarquons que l'application $r \circ I$ est injective. On peut donc associer à χ une unique forme $\omega = \delta(\chi)$ telle que $\chi \circ \partial = r \circ I(\omega)$. Cette forme ω est dans le sous-groupe $A^{k+1}(M)_0$ des formes fermées dont les périodes sur $Z_{k+1}(M)$ sont des entiers. Par ailleurs, toute cochaîne fermée de degré k à coefficients $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ induit, par restriction à $Z_k(M)$, un caractère différentiel. On a alors ([9], Th. 1.1) :

LEMME 1.— *Il existe une suite exacte naturelle*

$$0 \to H^k(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \to \widehat{H}^k(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} A^{k+1}(M)_0 \to 0.$$

1.3. Classes de Cheeger et Simons

THÉORÈME 1 ([9], Th. 2.2).— *Fixons un entier $p \geq 1$. On peut, de façon unique, associer à tout fibré E sur M muni d'une connexion ∇ un caractère différentiel $\widehat{c_p}(E,\nabla) \in \widehat{H}^{2p-1}(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z})$ tel que :*

i) $\delta(\widehat{c_p}(E,\nabla)) = c_p(\nabla)$;

ii) si $f : N \to M$ est un morphisme de variétés,

$$\widehat{c_p}(f^*E, f^*\nabla) = f^*\widehat{c_p}(E,\nabla)\,.$$

L'unicité de $\widehat{c_p}(E,\nabla)$ résulte du fait suivant. Il existe une variété $\tilde{G}$ telle que $H^{2p-1}(\tilde{G};\mathbb{C}/\mathbb{Z}) = 0$, un fibré avec connexion $(\tilde{E},\tilde{\nabla})$ sur $\tilde{G}$ et un morphisme classifiant $\varphi : M \to \tilde{G}$ tels que $\varphi^*(\tilde{E},\tilde{\nabla}) = (E,\nabla)$. Comme la cohomologie impaire de $\tilde{G}$ est nulle et puisque $c_p(\tilde{\nabla}) \in A^{2p}(\tilde{G})_0$, le Lemme 1 montre qu'il y a un unique caractère différentiel $\widehat{c_p}(\tilde{E},\tilde{\nabla})$ sur $\tilde{G}$ tel que $\delta(\widehat{c_p}(\tilde{E},\tilde{\nabla})) = c_p(\tilde{\nabla})$, d'où l'unicité de $\widehat{c_p}(E,\nabla) = \varphi^*\widehat{c_p}(\tilde{E},\tilde{\nabla})$. La construction de $\tilde{G}$ est due à Narasimhan et Ramanan [26] ; voir aussi [17] Prop. 2.2.9., où $\tilde{G}$ est l'espace total d'un fibré en espaces affines sur une grassmannienne. Pour montrer l'existence de $\widehat{c_p}(E,\nabla)$, on utilise le fait que deux applications classifiantes sont homotopes [9].

1.4. La classe $\widehat{c_p}(E,\nabla)$ varie de la façon suivante avec ∇. Soit ∇_t, $t \in [0,1]$, une famille C^∞ de connexions sur le fibré différentiable E. Notons Ω_t la courbure de ∇_t et $\Theta_t = \frac{d}{dt}(\nabla_t) \in A^1(M;\mathrm{End}(E))$. Soit μ la forme p-linéaire symétrique sur les matrices $n \times n$ telle que $\mu(A,A,\dots,A) = c_p(A)$. Suivant Chern et Simons [10], on pose

$$\eta = p\int_0^1 \mu(\Theta_t,\Omega_t,\dots,\Omega_t)dt \in A^{2p-1}(M)\,. \tag{1}$$

L'intégration de cette forme sur les cycles de $Z_{2p-1}(M)$ définit un caractère différentiel $\hat{\eta} \in \widehat{H}^{2p-1}(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z})$. On a alors la formule ([9], Prop. 2.9)

$$\widehat{c_p}(E,\nabla_1) - \widehat{c_p}(E,\nabla_0) = \hat{\eta}\,. \tag{2}$$

1.5. Un *fibré plat* sur M est la donnée (E,∇) d'un fibré différentiable E et d'une connexion ∇ sur E de courbure nulle. Ceci équivaut à la donnée d'un fibré principal de groupe structural discret et, si M est connexe, à celle d'une représentation (d'holonomie) $\rho : \pi_1(M) \to GL_n(\mathbb{C})$.

Si (E,∇) est un fibré plat, et $p \geq 1$, la forme de Chern $c_p(\nabla)$ est nulle et la classe $c_p(E) \in H^{2p}(M;\mathbb{Z})$ est de torsion. D'après le Lemme 1 et le Théorème 1, on peut associer à (E,∇) une classe

$$\widehat{c_p}(E,\nabla) \in H^{2p-1}(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z}),$$

qu'on notera aussi $\widehat{c_p}(E)$ ou $\widehat{c_p}(\rho)$ ([9], cf. aussi [10], p.57). Elle vérifie les propriétés suivantes :

a) Si $p=1$, l'isomorphisme $H^1(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\pi_1(M),\ \mathbb{C}^*)$ (induit par $z \mapsto \exp(2\pi i z)$ si $z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$) envoie $\widehat{c_1}(E,\nabla)$ sur le déterminant de ρ ;

b) si $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$ est une suite exacte de fibrés plats, on a

$$\widehat{c_p}(E) = \widehat{c_p}(E_1) + \widehat{c_p}(E_2) + \sum_{i=1}^{p-1} \widehat{c_i}(E_1) \cup c_{p-i}(E_2),$$

où $\cup$ désigne le cup-produit $H^\bullet(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \otimes H^\bullet(M;\mathbb{Z}) \to H^\bullet(M;\mathbb{C}/\mathbb{Z})$;

c) si E est un fibré plat de rang n et L un fibré plat de rang un, on a

$$\widehat{c_p}(E \otimes L) = \sum_{i=1}^{p} \binom{n-i}{p-i} \widehat{c_i}(E) \cup c_1(L)^{p-i} + \binom{n}{p} \widehat{c_1}(L) \cup c_1(L)^{p-1} ;$$

d) soit $\rho_t : \pi_1(M) \to GL_n(\mathbb{C})$, $t \in [0,1]$, une famille C^∞ de représentations, i.e. telle que, pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$, l'application $t \mapsto \rho_t(\gamma)$ soit C^∞, alors, si $p \geq 2$, on a

$$\widehat{c_p}(\rho_0) = \widehat{c_p}(\rho_1). \tag{3}$$

En effet, la donnée de (ρ_t) équivaut à celle d'une famille C^∞ de connexions plates ∇_t sur un fibré différentiable fixe E. Si $p \geq 2$, la forme η de la formule (1) est alors nulle et l'égalité (3) résulte donc de (2). Cette propriété de *rigidité* conduit à penser que les classes $\widehat{c_p}(E)$ ne prennent qu'une quantité dénombrable de valeurs ([9], 8.10). Comme on va le voir, c'est vrai si M est une variété de Kähler.

1.6. Soit Δ la catégorie des ensembles finis ordonnés, dont les morphismes sont les applications croissantes injectives. Une variété simpliciale (stricte) est la donnée $M_\bullet$ d'un foncteur contravariant de Δ dans la catégorie des variétés différentiables ; on note M_n l'image de l'ensemble ordonné $[n] = \{0 < 1 < \ldots < n\}$. Si $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est le simplexe standard, on note $A^\bullet(\Delta^n)$ les formes différentielles dans l'intérieur de Δ^n qui s'étendent à $\mathbb{R}^{n+1}$. Une forme différentielle de degré k sur $M_\bullet$ est la donnée d'une suite d'éléments $w_n \in \bigoplus_{s+t=k} A^s(\Delta^n) \otimes A^t(M_n)$, $n \geq 0$, tels que, pour tout morphisme $f : [m] \to [n]$ de Δ, on ait l'égalité $(f^* \otimes \mathrm{id})(w_n) = (\mathrm{id} \otimes f_*)(w_n)$. Si G est un groupe de Lie, un G-fibré principal sur $M_\bullet$ est la donnée d'un morphisme de variétés simpliciales $\pi : P_\bullet \to M_\bullet$ tel que, pour tout $n \geq 0$, l'application $P_n \to M_n$ soit un G-fibré principal sur M_n, et que, pour tout morphisme $f : [m] \to [n]$ de Δ, l'application associée $P_n \to P_m$ soit un morphisme de G-fibrés.

La théorie de Chern-Weil et celle de Cheeger-Simons se généralisent au cadre simplicial [16], [17] . Un exemple de variété simpliciale est l'espace classifiant $\mathrm{BGL}_n(\mathbb{C})$ du groupe de Lie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Si $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^\delta$ désigne le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ muni de la topologie discrète, on peut aussi considérer son espace classifiant $\mathrm{BGL}_n(\mathbb{C})^\delta$ comme une variété simpliciale. Le fibré principal universel sur $\mathrm{BGL}_n(\mathbb{C})^\delta$ est plat, et possède des classes de Cheeger-Simons ([24]§5, [17]§4.5)

$$\widehat{c_p} \in H^{2p-1}(\mathrm{BGL}_n(\mathbb{C})^\delta; \mathbb{C}/\mathbb{Z}) .$$

Etant donné un fibré plat E sur une variété différentiable M, le fibré principal associé est classé par une application continue, unique à homotopie près, $\alpha : M \to \mathrm{BGL}_n(\mathbb{C})^\delta$. On a l'égalité

$$\widehat{c_p}(E) = \alpha^*(\widehat{c_p}) \, , \, p \geq 1 . \tag{4}$$

2. UN THÉORÈME DE REZNIKOV

2.1. Énoncé

THÉORÈME 2 (Reznikov [29]).— *Soient X une variété de Kähler compacte et E un fibré plat sur X. Alors, pour tout entier $p \geq 2$, les classes de Cheeger-Simons $\widehat{c_p}(E)$ sont dans le sous-groupe de torsion $H^{2p-1}(X; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ de $H^{2p-1}(X; \mathbb{C}/\mathbb{Z})$.*

2.2. Pour montrer le Théorème 2, on peut supposer que X est connexe et que la représentation d'holonomie ρ de E prend ses valeurs dans $SL_n(\mathbb{C})$. En effet, il existe un revêtement fini $\pi : Y \to X$ tel que $\pi^*(E) = F \otimes L$ où L est un fibré plat de rang un et $\det(F) = 1$. Si l'on sait montrer le théorème pour F, on l'obtient pour $F \otimes L$ par 1.5.c). L'énoncé pour E résulte alors de la formule $\pi_* \widehat{c_k}(\pi^* E) = \deg(\pi) \widehat{c_k}(E)$.

2.3. Comme $\pi_1(X)$ est de présentation finie, l'ensemble de ses représentations $\mathrm{Hom}(\pi_1(X), SL_n(\mathbb{C}))$ forme les points complexes d'une variété affine V définie sur $\mathbb{Q}$.

La composante irréductible de $V(\mathbb{C})$ contenant ρ possède un point $\overline{\mathbb{Q}}$-rationnel et elle est connexe pour la topologie ordinaire. Il existe donc une famille lisse (ρ_t), $t \in [0,1]$, de représentations de $\pi_1(X)$ telle que $\rho_0 = \rho$ et ρ_1 est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Par la rigidité de $\widehat{c_p}$ (1.5 d)), on sait que $\widehat{c_p}(\rho) = \widehat{c_p}(\rho_1)$ si $p \geq 2$. Pour montrer le Théorème 2, on peut donc remplacer ρ par ρ_1. Comme $\pi_1(X)$ est de type fini, ρ se factorise alors par un sous-groupe $SL_n(O_S)$ de $SL_n(\mathbb{C})$, où O_S est un anneau de S-entiers dans un corps de nombres F. La représentation ρ définit, à homotopie près, une application continue $\beta : X \to BSL_n(O_S)$ et, d'après (4), $\widehat{c_p}(\rho)$ est dans le sous-groupe $\beta^*\left(H^{2p-1}(SL_n(O_S);\mathbb{C}/\mathbb{Z})\right)$ de $H^{2p-1}(X;\mathbb{C}/\mathbb{Z})$. Pour savoir que $\widehat{c_p}(\rho)$ est de torsion, il suffit de vérifier que son cap-produit par tout élément de $H_{2p-1}(X;\mathbb{Z})$ est d'ordre fini. Comme $\widehat{c_p}$ est une classe caractéristique stable, le Théorème 2 résulte de l'énoncé suivant, où $SL(O_S)$ désigne la réunion des groupes $SL_n(O_S)$, $n \geq 1$, pour les inclusions habituelles :

THÉORÈME 3.— *Soient X une variété de Kähler compacte et connexe, $\rho : \pi_1(X) \to SL_n(O_S)$ une représentation de son groupe fondamental, et $\beta_* : H_*(X,\mathbb{Z}) \to H_*\left(SL(O_S),\mathbb{Z}\right)$ le morphisme associé en homologie. En degrés positifs l'image de β_* est de torsion.*

2.4. Comme chaque groupe d'homologie de $SL(O_S)$ est de type fini, le Théorème 3 équivaut à la nullité en degrés positifs de la corestriction $\beta^* : H^*\left(SL(O_S),\mathbb{R}\right) \to H^*(X,\mathbb{R})$. La cohomologie de $SL(O_S)$ est connue depuis les travaux de Borel [4] [5]. Notons $G = R_{F/Q}SL_n$ le groupe algébrique obtenu par restriction des scalaires de F à $\mathbb{Q}$, par $G(\mathbb{R}) = SL_n(F \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{R})$ son groupe des points réels, et par $H^\bullet_{\text{cont}}\left(G(\mathbb{R});\mathbb{R}\right)$ la cohomologie continue de ce groupe de Lie. L'application de corestriction

$$H^m_{\text{cont}}\left(G(\mathbb{R});\mathbb{R}\right) \longrightarrow H^m\left(SL_n(O_S);\mathbb{R}\right)$$

est un isomorphisme si n est grand par rapport à m, [4] Thm. 7.5 et §11, [5] Thm. 6.4.(*)

Quitte à agrandir le corps F, on peut supposer qu'il ne possède pas de plongement réel. Le groupe $G(\mathbb{R})$ est alors le produit de $[F:\mathbb{Q}]/2$ copies de $SL_n(\mathbb{C})$. La cohomologie continue de $SL_n(\mathbb{C})$ est canoniquement isomorphe à la cohomologie singulière de

(*) On sait maintenant que l'application

$$H^m_{\text{cont}}\left(G(\mathbb{R}),\mathbb{R}\right) \longrightarrow H^m\left(SL_n(F),\mathbb{R}\right)$$

est un isomorphisme quels que soient m et n [6].

la variété SU_n([4] 10.2 et 10.6), c'est par conséquent ([3] §21) une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degré impair $e_p \in H^{2p-1}_{\text{cont}}(SL_n(\mathbb{C}), \mathbb{R})$, $2 \leq p \leq n$ (le morphisme de transgression $H^{2p-1}(SU_n, \mathbb{R}) \to H^{2p}(BSU_n, \mathbb{R})$ du fibré principal universel sur BSU_n envoie la classe correspondant à e_p sur la p-ième classe de Chern).

Fixons un plongement complexe $F \subset \mathbb{C}$, notons $\alpha : X \to BSL_n(\mathbb{C})^\delta$ l'application classifiante du fibré plat associé à ρ et $e'_p \in H^{2p-1}(BSL_n(\mathbb{C})^\delta, \mathbb{R})$ la restriction de e_p. Pour montrer le Théorème 3, il suffit de vérifier que

$$\alpha^*(e'_p) = 0 \text{ si } p \geq 2\,. \tag{5}$$

2.5. Première preuve

2.5.1. Reznikov donne deux preuves de (5), qui ont chacune leur intérêt propre. La première utilise la description suivante des classes $\alpha^*(e'_p)$. Soient $G = SL_n(\mathbb{C})$ et $K = SU_n$ son sous-groupe compact maximal. Le G-fibré principal associé à E, divisé par l'action de K, définit une fibration $\mathcal{F} \to X$ de fibre G/K, dont les fonctions de transition sont localement constantes. L'espace tangent à l'origine de G/K est l'espace vectoriel $\wp$ des matrices hermitiennes complexes $n \times n$ de trace nulle. Notons S_N le groupe des permutations de N éléments et $\varepsilon : S_N \to \pm 1$ la signature. La formule

$$\omega_p(A_1, \ldots, A_{2p-1}) = \sum_{\tau \in S_{2p-1}} (-1)^{\varepsilon(\tau)} tr\left(A_{\tau(1)} A_{\tau(2)} \ldots A_{\tau(2p-1)}\right), \tag{6}$$

$A_1, \ldots, A_{2p-1} \in \wp$, définit une forme invariante fermée sur G/K. On lui associe une forme fermée ω'_p sur $\mathcal{F}$, qui est localement sur X l'image inverse de ω_p par la seconde projection $\mathcal{F}_{|U} \simeq U \times G/K \to G/K$. Soit $s : X \to \mathcal{F}$ une section quelconque de la fibration $\mathcal{F} \to X$.

LEMME 2 ([28], 3.3).— *Pour tout entier $p \geq 2$, la classe de cohomologie de $s^*(\omega'_p)$ est égale à (un multiple non nul de) $\alpha^*(e'_p)$.*

2.5.2. Comme G/K est contractile, toutes les sections s sont homotopes et la classe de $s^*(\omega'_p)$ ne dépend pas du choix de s. Supposons que ρ est semi-simple, c'est-à-dire que son image n'est pas contenue dans un sous-groupe parabolique propre de $SL_n(\mathbb{C})$ (en général, on notera que $\alpha^*(e'_p)$ a la même valeur pour ρ et sa semi-simplifiée, d'après 1.5. b) et la Proposition 1 ci-dessous). Un théorème de Corlette [11] et Donaldson [15] permet alors de supposer que s est une section harmonique de $\mathcal{F}$. D'après un résultat de Sampson [30], (cf. aussi [8] 2.2 et [27] 6.1), une telle section a la propriété suivante. Si $\mathcal{F}_x$ est la fibre de $\mathcal{F}$ au point $x \in X$, notons

$$Ds : T_x^{\mathbb{C}} X \longrightarrow T_{s(x)} \mathcal{F}_x \simeq \wp \otimes \mathbb{C}$$

la complexifiée de l'application tangente de s au point x. Alors l'image par Ds de chacun des sous-espaces $T_x^{10} X$ et $T_x^{01} X$ de $T_x^{\mathbb{C}} X$ est une sous-algèbre abélienne de $\wp \otimes \mathbb{C}$. Puisque tout vecteur tangent réel en x est de la forme $v + \overline{v}$ avec $v \in T_x^{10} X$, l'égalité (5) résulte du lemme suivant :

LEMME 3.— *Quelles que soient $A_1, \ldots, A_{2p-1}$ des matrices complexes commutant deux à deux, et $\overline{A}_i$, $1 \leq i \leq 2p-1$, leurs conjuguées, on a*

$$\omega_p(A_1 + \overline{A}_1, A_2 + \overline{A}_2, \ldots, A_{2p-1} + \overline{A}_{2p-1}) = 0\,,$$

où ω_p est définie par la formule (6).

Preuve du lemme.— On développe l'expression considérée en utilisant la linéarité de ω_p. Comme A_i et A_{i+1} commutent on a

$$\begin{aligned} &\omega_p(B_1, \ldots, B_{i-1}, A_i, A_{i+1}, B_{i+2}, \ldots, B_{2p-1}) \\ &= -\omega_p(B_1, \ldots, B_{i-1}, A_{i+1}, A_i, B_{i+2}, \ldots, B_{2p-1}) = 0 \end{aligned}$$

pour tout choix des matrices B_j, $j \notin \{i, i+1\}$, $1 \leq i \leq 2p-2$; de même avec $\overline{A}_i$ et $\overline{A}_{i+1}$. De plus

$$\begin{aligned} &\omega_p(A_1, \overline{A}_2, A_3, \ldots, \overline{A}_{2p-2}, A_{2p-1}) \\ &= \omega_p(A_{2p-1}, A_1, \overline{A}_2, A_3, \ldots, \overline{A}_{2p-2}) = 0 \end{aligned}$$

à cause de la formule $tr(AB) = tr(BA)$ et du fait que A_1 et A_{2p-1} commutent. q.e.d.

2.6. Deuxième preuve

2.6.1. La deuxième preuve du Théorème 3, valable quand X est une variété algébrique complexe connexe, projective et lisse, utilise un théorème (difficile) de Simpson : tout fibré plat sur X admet une déformation C^∞ vers un fibré plat provenant d'une famille de structures de Hodge complexes polarisées [31], Cor. 9.2.1. Une telle famille [21] [13] est la donnée d'un fibré C^∞ complexe H sur X, d'une décomposition $H = \bigoplus_{r+s=w} H^{r,s}$, d'une connexion plate ∇ sur H et d'une forme hermitienne nondégénérée $\langle\,,\rangle$ sur H, parallèle pour ∇. La connexion ∇ doit satisfaire la condition de transversalité de Griffiths (loc.cit.), les H^{rs} sont orthogonaux deux à deux, et la restriction de $\langle\, ,\rangle$ à H^{rs} est définie positive (resp. définie négative) si l'entier r est pair (resp. impair).

En particulier l'image de la représentation d'holonomie de (H, ∇) est contenue dans un groupe unitaire de type $U(p,q), p+q=n$, et dans le groupe $SU(p,q)$ si la représentation initiale est unimodulaire.

2.6.2. Notons Im : $H^\bullet\big(BSL_n(\mathbb{C})^\delta\,;\,\mathbb{C}/\mathbb{Z}\big) \to H^\bullet\big(BSL_n(\mathbb{C})^\delta\,;\,\mathbb{R}\big)$ le morphisme induit par l'application de partie imaginaire $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. L'énoncé suivant relie les classes de Borel et celles de Cheeger-Simons (voir aussi [23]) :

PROPOSITION 1 ([17], §7.4 – 7.6).— *Si $p \geq 2$, la classe $e'_p \in H^{2p-1}\big(BSL_n(\mathbb{C})^\delta\,;\,\mathbb{R}\big)$ est un multiple non nul de* $\mathrm{Im}(\widehat{c}_p)$.

Plus précisément, avec les normalisations de [17], on a $e'_p = 2\,\mathrm{Im}(\widehat{c}_p)$.

2.6.3. Il résulte de (3) et de la Proposition 1 que les classes $\alpha^*(e'_k)$, $k \geq 2$, sont rigides. D'après le théorème de Simpson, pour montrer (5) on peut donc supposer que α classifie le fibré plat sous-jacent à une variation de structures de Hodge. Dans ce cas le morphisme de corestriction $H^\bullet_{\mathrm{cont}}\big(SL_n(\mathbb{C})\,;\,\mathbb{R}\big) \to H^\bullet(X;\mathbb{R})$ se factorise par l'application

$$H^\bullet_{\mathrm{cont}}\big(SL_n(\mathbb{C})\,;\,\mathbb{R}\big) \longrightarrow H^\bullet_{\mathrm{cont}}\big(SU(p,q);\mathbb{R}\big)\,.$$

La nullité de $\alpha^*(e'_k)$ résulte donc du lemme suivant :

LEMME 4.— *La cohomologie continue de $SU(p,q)$ est nulle en degrés impairs.*

Preuve du lemme.— Soit K le sous-groupe compact maximal $SU(p,q) \cap \big(U(p) \times U(q)\big)$ de $SU(p,q)$. La cohomologie continue de $SU(p,q)$ est isomorphe à la cohomologie singulière de l'espace symétrique compact dual de $SU(p,q)/K$ ([4], 10.2), c'est-à-dire à la cohomologie du quotient $SU(p+q)/K$– une variété grassmannienne dont la cohomologie est de degré pair. q.e.d.

3. FIBRÉS PLATS SUR LES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES (cf. aussi [18])

3.1. Classes de Chern en cohomologie de Deligne

Soit X une variété projective complexe lisse. Si $p \in \mathbb{Z}$, posons $\mathbb{Z}(p) = (2\pi i)^p \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$. On note $\mathbb{Z}(p)_D$ le complexe de faisceaux sur X

$$\mathbb{Z}(p) \longrightarrow O_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^{p-1}_X ,$$

avec $\mathbb{Z}(p)$ en degré 0. La cohomologie de Deligne de X est l'hypercohomologie du complexe

$$H^n_D\big(X, \mathbb{Z}(p)\big) = \mathbb{H}^n\big(X, \mathbb{Z}(p)_D\big) .$$

Si $F^p = (\Omega^{p+1}_X \to \Omega^{p+2}_X \to \dots)$ désigne la filtration de Hodge du complexe de de Rham algébrique, $\mathbb{Z}(p)_D$ est quasi-isomorphe au cône de l'application

$$R\Gamma(X, F^p)[-1] \longrightarrow R\Gamma\big(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}(p)\big)[-1] ,$$

d'où une suite exacte longue

$$\begin{aligned} (7) \qquad & \dots \to F^p H^{n-1}(X, \mathbb{C}) \to H^{n-1}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}(p)) \xrightarrow{\partial} H^n_D\big(X, \mathbb{Z}(p)\big) \\ & \to F^p H^n(X, \mathbb{C}) \to \dots . \end{aligned}$$

Le groupe de Chow $CH^p(X)$ des cycles algébriques de codimension p sur X, modulo l'équivalence linéaire, est doté d'une application de classe fondamentale ([19] §7) :

$$\lambda : CH^p(X) \longrightarrow H^{2p}_D\big(X, \mathbb{Z}(p)\big)$$

dont la restriction aux cycles homologiquement triviaux est l'application d'Abel-Jacobi. En général, on connaît peu de choses sur l'image de cette application [14].

Tout fibré algébrique E sur X possède, d'après Grothendieck, des classes de Chern $c_p(E) \in CH^p(X)$ et donc aussi des classes de Chern $c^D_p(E) = \lambda\big(c_p(E)\big)$ dans la cohomologie de Deligne. Supposons que E est un fibré plat algébrique, c'est-à-dire que E est muni d'une connexion algébrique $\nabla : E \to E \otimes \Omega^1_X$ de carré nul. Soit E^∞ le fibré plat différentiable associé à E. Comme l'image de $c_p(E)$ dans $H^{2p}(X; \mathbb{C})$ est nulle, la classe $c^D_p(E)$ est dans l'image de l'application ∂ de (7). Soit $\varepsilon : H^\bullet(X; \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \to H^\bullet\big(X; \mathbb{C}/\mathbb{Z}(p)\big)$ l'application induite par la multiplication par $(2\pi i)^p$ sur les coefficients. Le résultat suivant est dû à plusieurs auteurs [2] [32] [20] [7] (la preuve de [7] est aussi valable dans le cas quasi-projectif) :

PROPOSITION 2.— *On a l'égalité*

$$c_p^D(E) = \partial \circ \varepsilon\big(\widehat{c_p}(E^\infty)\big)\,.$$

Il résulte donc du Théorème 2 que les classes de Chern $c_p^D(E)$ sont de torsion dans la cohomologie de Deligne, ainsi que l'avait conjecturé Bloch [2].

Remarque.— C'est un problème ouvert important que d'avoir une version de la Proposition 2 pour l'espace classifiant $BGL_n(\mathbb{C})^\delta$. Grâce à la Proposition 1, cela fournirait en effet une comparaison précise entre le régulateur de Borel et celui de Beilinson.

3.2. Le cas des variétés abéliennes

Supposons que $X = A$ soit une variété abélienne complexe. Comme le groupe $\pi_1(A)$ est abélien, tout fibré plat sur A est extension de fibrés en droites plats et le Théorème 2 résulte de 1.5.b). Par contre les classes de Chern ne sont pas toujours de torsion dans le groupe de Chow, comme le montre l'étude par Bloch du groupe des 0-cycles

$$CH_0(A) = CH^d(A),\ d = \dim(A)\,.$$

Notons $I = \ker\big(CH_0(A) \to \mathbb{Z}\big)$ le noyau du morphisme de degré et $CH_0(A) \otimes CH_0(A) \xrightarrow{*} CH_0(A)$ le produit de Pontryagin, induit par le morphisme d'addition $\mu : A \times A \to A$. Les puissances I^{*n} de I pour le produit de Pontryagin définissent une filtration décroissante de $CH_0(A)$. Soit $\mathrm{Pic}^0(A) \subset \mathrm{Pic}(A) = CH^1(A)$ le groupe des classes de diviseurs algébriquement triviaux.

THÉORÈME 4 [1].

i) Le groupe I est divisible, I^{*n} est sans torsion si $n \geq 2$, $I^{*(d+1)} = 0$ et I^{*d} est non nul ;

ii) le groupe I^{*n} coïncide avec l'image du produit d'intersection

$$\mathrm{Pic}^0(A)^{\otimes n} \otimes \mathrm{Pic}(A)^{\otimes(d-n)} \longrightarrow CH_0(A)\,.$$

Tout élément de $\mathrm{Pic}^0(A)$ est la classe $c_1(L)$ d'un fibré inversible plat L. On voit donc que, si $d \geq 2$, I^{*d} est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel non nul engendré par les classes $c_d(E)$, E plat de rang d sur X, alors que la classe $c_d^D(E)$ d'un tel fibré est nulle.

Pour toute variété projective complexe lisse X, on s'attend à ce qu'existe une filtration décroissante, multiplicative et fonctorielle $F^\bullet CH^p(X)_\mathbb{Q}$ de ses groupes de Chow rationnels. On aurait $F^1CH^1(X)_\mathbb{Q} = \mathrm{Pic}^0(X)_\mathbb{Q}$ et $F^{p+1}CH^p(X)_\mathbb{Q} = 0$,

$F^2CH^p(X)_{\mathbb{Q}}$ serait le noyau de l'application $\lambda \otimes \mathbb{Q}$ et, pour tout fibré plat E, $c_p(E)$ appartiendrait à $F^pCH^p(X)_{\mathbb{Q}}$, en accord avec le fait que $\lambda(c_p(E))$ est de torsion si $p \geq 2$ [2] [22].

3.3. Les fibrés de Gauss-Manin

Soient $f : X \to S$ un morphisme propre et lisse de variétés algébriques complexes non singulières et $\Omega^\bullet_{X/S}$ le complexe des formes différentielles relatives. Pour tout entier $n \geq 0$, le faisceau $\mathcal{H}^n_{DR}(X/S) = R^n f_*(\Omega_{X/S})$ est localement libre sur S. Il est muni d'une connexion algébrique ∇ de carré nul, la connexion de Gauss-Manin [25]. Le système local $\ker(\nabla)$ est égal à $R^n f_* \mathbb{C} = (R^n f_* \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$, et c'est un exemple de variation de structures de Hodge. L'image de la représentation d'holonomie est donc contenue à la fois dans un groupe arithmétique et dans un groupe unitaire $U(p,q)$. Par l'argument de la seconde preuve du Théorème 2, Corlette et Esnault en déduisent le fait suivant (valable sans supposer que $S(\mathbb{C})$ est compacte)

Théorème 5 [12] : *Quels que soient les entiers $n \geq 0$ et $p \geq 1$, les classes $\widehat{c_p}(R^n f_* \mathbb{C}) \in H^{2p-1}(S(\mathbb{C}), \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ sont de torsion.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. BLOCH – *Some elementary Theorems about Algebraic Cycles on Abelian Varieties*, Inventiones Math. **37** (1976), 215–228.

[2] S. BLOCH – *Applications of the dilogarithm function in algebraic K-theory and algebraic geometry*, Int. Symposium on Alg. Geom., Kyoto (1977), 103–114.

[3] A. BOREL – *Topics in the Homology Theory of Fibre Bundles*, Springer LNM **36** (1967).

[4] A. BOREL – *Stable real cohomology of arithmetic groups*, Ann. Sci. ENS (4) **7** (1974), 235–272.

[5] A. BOREL – *Stable real cohomology of arithmetic groups II*, in "Manifolds and Lie groups", Papers in honour of Y. Matsushima, Birkhäuser, Progress in Math. **14** (1981), 21–55.

[6] A. BOREL, J. YANG – *The rank conjecture for number fields*, Math. Research Letters **1** (1994), 689–699.

[7] J.-L. BRYLINSKI – *Comparison of the Beilinson-Chern classes with the Chern-Cheeger-Simons classes*, (1993), preprint.

[8] J. CARLSON, D. TOLEDO – *Harmonic mappings of Kähler manifolds to locally symmetric spaces*, Publ. Math. IHES **69** (1989), 173–201.

[9] J. CHEEGER, J. SIMONS – *Differential characters and geometric invariants*, in Geometry and Topology, Springer LNM **1167** (1985), 50–80.

[10] S.S. CHERN, J. SIMONS – *Characteristic forms and geometric invariants*, Annals of Math. **99** (1974), 48–69.

[11] K. CORLETTE – *Flat G-bundles with canonical metrics*, J. Differential Geometry **28** (1988), 361–382.

[12] K. CORLETTE, H. ESNAULT – *Classes of local systems of hermitian vector spaces*, appendice à "Eta invariants, differential characters and flat vector bundles" de J.-M. Bismut (1995), preprint.

[13] P. DELIGNE – *Travaux de Griffiths*, Sém. Bourbaki, exp. n° 376, Springer LNM **180** (1971), 213–237.

[14] P. DELIGNE – *A quoi servent les motifs ?*, in "Motives", Proceedings Symposia Pure Math. **55** Part 1 (1994), 143–161.

[15] S.K. DONALDSON – *Twisted harmonic maps and self-duality equations*, Proc. London Math. Soc. **55** (1987), 127–131.

[16] J. DUPONT – *Curvature and characteristic classes*, Springer LNM **640** (1978).

[17] J. DUPONT, R. HAIN, S. ZUCKER – *Regulators and characteristic classes of flat bundles*, (1992), preprint.

[18] H. ESNAULT – *Recent developments on characteristic classes of flat bundles on complex algebraic manifolds*, (1996), preprint.

[19] H. ESNAULT, E. VIEHWEG – *Deligne-Beilinson cohomology*, in "Beilinson's Conjectures on Special Values of L-Functions", Perspectives in Math. **4** (1988), 43–91.

[20] H. GILLET, C. SOULÉ – *Arithmetic Chow groups and differential characters*, in "Algebraic K-theory : connections with geometry and topology", Kluwer Academic Publishers (1989), 30–68.

[21] P. GRIFFITHS – *Periods of integrals on algebraic manifolds, III (some global differential-geometric properties of the period mapping)*, Publ. Math. IHES **38** (1970), 125–180.

[22] U. JANNSEN – *Motivic sheaves and filtrations on Chow groups*, in "Motives", Proceedings Symposia Pure Math. **55** Part 1 (1994), 245–302.

[23] F. KAMBER, Ph. TONDEUR – *Foliated bundles and characteristic classes*, Springer LNM **493** (1975).

[24] M. KAROUBI – *Classes caractéristiques de fibrés feuilletés, holomorphes ou algébriques*, K-Theory **8** (1994), 153–211.

[25] N. KATZ, T. ODA – *On the differentiation of De Rham cohomology classes with respect to parameters*, J. Math. Kyoto Univ. 8–2 (1968), 199–213.

[26] R. NARASIMHAN, S. RAMANAN – *Existence of universal connections I, II*, American J. Math. **83** (1961), 563–572 ; **85** (1963), 223–231.

[27] P. PANSU – *Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité*, Sém. Bourbaki, exp. n° 778, Astérisque **227** (1995), 69–105.

[28] A. REZNIKOV – *Rationality of secondary classes*, J. Differential Geometry, à paraître.

[29] A. REZNIKOV – *All regulators of flat bundles are torsion*, Annals of Math. **141** (1995), 373–386.

[30] J. SAMPSON – *Applications of harmonic maps to Kähler geometry*, in "Complex Differential Geometry and Nonlinear Differential Equations", Contemp. Math. **49** (1986), 125–133.

[31] C.T. SIMPSON – *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety II*, Publ. Math. IHES **80** (1994), 5–79.

[32] C. SOULÉ – *Connexions et classes caractéristiques de Beilinson*, in "Algebraic K-Theory and Algebraic Number Theory", Contemporary Math. **83** (1989), 349–376.

Christophe SOULÉ

C.N.R.S. et I.H.E.S.
35, route de Chartres
91440 BURES-sur-YVETTE