

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE PANSU

## **Volume, courbure et entropie**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1996-1997, exp. n° 823, p. 83-103.

[<http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1996-1997\\_\\_39\\_\\_83\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__83_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1996-1997,  
tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**VOLUME, COURBURE ET ENTROPIE**  
[d'après G. Besson, G. Courtois et S. Gallot]

par **Pierre PANSU**

## 1. INTRODUCTION

**1.1.** Parmi toutes les métriques riemanniennes sur une variété compacte  $X$  dont la courbure sectionnelle varie entre  $-1$  et  $1$ , laquelle a le plus petit volume ? C'est M. Gromov qui, dans les années 1970, a révélé quelles richesses se cachent derrière cette question d'apparence anodine.

On appelle *volume minimal* de  $X$ , noté  $\text{MinVol}(X)$  la borne inférieure des volumes des métriques riemanniennes sur  $X$  dont la courbure varie entre  $-1$  et  $1$ .

Lorsque  $X$  est de dimension 2, son volume minimal est donné par

$$\text{MinVol}(X) = |2\pi\chi(X)|$$

où  $\chi(X)$  désigne la caractéristique d'Euler. Si  $\chi(X) \neq 0$ , le minimum est atteint exactement par les métriques à courbure constante égale à  $1$  ou  $-1$  suivant le signe de la caractéristique d'Euler. Cela résulte immédiatement de la formule de Gauss-Bonnet. Lorsque  $\chi(X) = 0$ , la borne inférieure n'est pas atteinte, mais approchée par exemple par des métriques à courbure nulle.

En dimension paire supérieure à 2, la formule de Gauss-Bonnet a une généralisation, due à Allendoerfer et Weil, qui permet d'estimer le volume en fonction de la caractéristique d'Euler et de la courbure sectionnelle. Toutefois, cette inégalité n'est pas optimale et on ne connaît pas la valeur du volume minimal de la 4-sphère (voir cependant [V]). En fait jusqu'aux travaux récents de G. Besson, G. Courtois et S. Gallot, le volume minimal n'était connu exactement pour aucune variété de dimension au moins 3 (à moins qu'il soit nul).

**THÉORÈME 1** [BCG2].— Soit  $X$  une variété compacte de dimension au moins 3. Supposons que  $X$  admette une métrique riemannienne  $g_0$  à courbure sectionnelle constante égale à  $-1$ . Soit  $g$  une métrique riemannienne sur  $X$  dont la courbure sectionnelle est partout  $\geq -1$ . Alors  $\text{Vol}(X, g) \geq \text{Vol}(X, g_0)$  et l'égalité n'a lieu que si  $g$  est isométrique à  $g_0$ .

Cet énoncé entraîne que  $g_0$  est la seule métrique à courbure sectionnelle  $-1$  sur  $X$  (à isométrie près). C'est le théorème de rigidité de G.D. Mostow, [M1].

La preuve consiste à construire une application homotope à l'identité qui diminue les volumes. On peut l'interpréter comme une version réelle du Lemme de Schwarz qui ne s'appliquerait qu'à des métriques  $g_0$  très particulières (modélées sur les espaces symétriques à courbure strictement négative, voir en 3.1). L'hypothèse sur la courbure sectionnelle de  $g$  n'intervient qu'à travers une majoration asymptotique du volume des boules.

**1.2. Définition.** Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne compacte de revêtement universel  $\tilde{X}$ . Si  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , on note  $B(\tilde{x}, R)$  la boule géodésique de centre  $\tilde{x}$  et de rayon  $R$  dans  $\tilde{X}$ . Alors la limite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \log \text{Vol } B(\tilde{x}, R)$$

existe et ne dépend pas du choix de  $\tilde{x}$ . On l'appelle l'entropie volumique de la métrique  $g$ , et on la note  $h_{\text{vol}}(g)$ .

Le théorème 1 résulte immédiatement de la propriété isopérimétrique suivante, conjecturée par M. Gromov et A. Katok, qui a des conséquences très diverses.

**THÉORÈME 2** [BCG2].— Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés compactes orientées de même dimension  $n \geq 3$ . On suppose que  $X$  admet une métrique riemannienne localement symétrique  $g_0$  de courbure strictement négative. Soit  $g$  une métrique riemannienne sur  $Y$  dont l'entropie volumique est égale à celle de  $g_0$  (on peut toujours se ramener à ce cas en multipliant  $g$  par une constante). Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application de degré  $d$ . Alors

$$(*) \quad \text{Vol}(g) \geq |d| \text{Vol}(g_0).$$

Si l'égalité a lieu, alors  $f$  est homotope à un revêtement isométrique.

D'après A. Katok [K], en dimension 2, sous les mêmes hypothèses, l'inégalité (\*) est vraie, et en cas d'égalité la métrique  $g$  est elle-même à courbure constante.

Ce théorème affine un résultat de M. Gromov qui a obtenu, dès la fin des années 70, l'inégalité (\*) à une constante multiplicative près. Le théorème de M. Gromov

est plus général. Il s'applique à des variétés quelconques. Le volume hyperbolique est remplacé par une sorte de volume topologique, le *volume simplicial*. Le théorème affiné repose sur des idées simples qui auront sans doute d'autres applications en géométrie riemannienne. La caractérisation de certains espaces localement symétriques fournie par le cas d'égalité a d'ores et déjà des conséquences en géométrie et au-delà.

**1.3. Organisation du texte.** Les premiers paragraphes rendent brièvement compte de l'approche de M. Gromov. Ensuite, on décrit quelques aspects de la preuve du théorème 2. Enfin, on en explique les conséquences pour une série de problèmes qui mêlent dynamique et géométrie.

## 2. VOLUME SIMPLICIAL

Le théorème 1 entraîne que, lorsqu'une métrique à courbure  $-1$  existe, son volume est un invariant différentiable. En fait, on sait depuis [G], [T] exprimer ce nombre de façon purement topologique.

**2.1. Définition** (M. Gromov). Soit  $X$  une variété compacte orientée. Sur le complexe des chaînes singulières à coefficients réels, on a une norme  $L^1$  naturelle,

$$\left\| \sum \lambda_j \sigma_j \right\| = \sum |\lambda_j|.$$

On note de la même façon la semi-norme quotient sur l'homologie réelle. On appelle *volume simplicial* de  $X$ , et on note  $\|X\|$  la norme de la classe fondamentale en homologie réelle.

Le volume simplicial fait penser au nombre minimum de simplexes d'une triangulation. Il s'en distingue, car, comme on travaille en homologie réelle, on a le droit par exemple de couvrir la variété deux fois en comptant chaque simplexe avec le coefficient  $\frac{1}{2}$ . Plus généralement,

- s'il existe une application  $f : Y \rightarrow X$  de degré  $d$ , alors  $\|Y\| \geq |d|\|X\|$ .

En particulier, si  $X$  admet des applications dans elle-même de degré  $\neq -1, 0, 1$ , alors  $\|X\| = 0$ . Le volume simplicial est donc nul pour les sphères et les tores. En revanche, il est non nul pour les variétés à courbure sectionnelle négative.

**2.2 THÉORÈME [T].**— Soit  $X$  une variété riemannienne de courbure sectionnelle  $K = -1$ , de dimension  $n$ , i.e., dont le revêtement universel est isométrique à l'espace hyperbolique  $H^n$ . Alors

$$\text{Vol}(X) = R_n \|X\|$$

où  $R_n$  est le volume d'un simplexe idéal régulier de  $H^n$ .

La constante  $R_n$  est la borne supérieure des volumes de tous les simplexes rectilignes de  $H^n$ . Étant donnés  $n + 1$  points  $x_0, \dots, x_n$  de l'espace hyperbolique  $H^n$ , le simplexe rectiligne de sommets  $x_0, \dots, x_n$  est l'application qui envoie le point du simplexe standard de coordonnées barycentriques  $p_0, \dots, p_n$  sur le barycentre de la mesure atomique  $\sum p_i \delta_{x_i}$ , i.e. le point où la fonction  $x \mapsto \sum p_i \text{dist}(x, x_i)$  atteint son minimum.

Il faut penser à  $H^n$  comme à l'intérieur d'une boule, équipé d'une métrique qui explose au bord. Lorsqu'on fait tendre ses sommets vers des points du bord, un simplexe rectiligne de  $H^n$  converge vers un simplexe dit *idéal*. U. Haagerup et M. Munkholm [HM] ont montré que  $R_n$  est le volume du simplexe idéal régulier, i.e. le plus symétrique.

La preuve de l'inégalité  $\text{Vol}(X) \leq R_n \|X\|$ , attribuée à W. Thurston, consiste à rectifier les simplexes de  $X$ . Redresser un simplexe singulier de  $X$ , c'est le relever à  $H^n$ , le remplacer par le simplexe rectiligne de mêmes sommets, qu'on projette dans  $X$ . Cette opération induit l'identité en homologie et montre que  $\text{Vol}(X) \leq R_n \|X\|$ .

La preuve de l'inégalité inverse  $\text{Vol}(X) \geq R_n \|X\|$ , due à M. Gromov, consiste à trianguler  $X$  par des simplexes idéaux réguliers. C'est possible en dimension 2, mais seulement rarement en dimensions supérieures. Cependant, si on admet des simplexes idéaux et des combinaisons de tels simplexes à coefficients mesures dans les calculs d'homologie singulière, alors la classe fondamentale de  $X$  est représentée par la chaîne étalée  $c$  suivante. On fixe un simplexe idéal régulier  $\sigma$ . Normalisons la mesure de Haar sur le groupe des isométries de  $H^n$  de sorte que la mesure de l'ensemble des isométries qui envoient un point fixé dans  $\sigma$  soit 1. Si  $\gamma$  est une isométrie de  $H^n$ , on note  $\text{signe}(\gamma)$  son effet sur l'orientation. On pose  $c = \int \text{signe}(\gamma) \pi(\gamma\sigma) d\gamma$  où on intègre sur l'espace compact  $\text{Isom}(H^n)/\pi_1(X)$ . Alors la norme  $L^1$  de  $c$  est exactement  $(R_n)^{-1} \text{Vol}(X)$ .

**2.3. Rigidité à la Mostow, d'après M. Gromov.** Soient  $X, Y$  des variétés compactes de dimension  $n \geq 3$  revêtues par l'espace hyperbolique  $H^n$ . On va montrer que toute équivalence d'homotopie  $f : Y \rightarrow X$  est homotope à une isométrie. Les groupes  $\pi_1(X)$  et  $\pi_1(Y)$  agissent par isométries sur  $H^n$  et par transformations conformes sur le bord  $\partial H^n$  de la boule. Une orbite de  $\pi_1(X)$  (resp.  $\pi_1(Y)$ ) dans  $H^n$  est un ensemble discret qui s'accumule en tout point du bord. Une équivalence d'homotopie  $f : Y \rightarrow X$  induit une bijection entre ces ensembles discrets.

**2.4 FAIT .—** Toute équivalence d'homotopie  $f : Y \rightarrow X$  se relève à  $H^n$ , et se prolonge par continuité en un homéomorphisme  $\partial f$  du bord de la boule.

Par conséquent,  $f$  agit sur les triangulations idéales. Supposons d'abord que  $X$  admette une triangulation par des simplexes idéaux réguliers  $\sigma_i$ . Alors  $\pm[X]$  est représenté par les chaînes singulières  $\sum \sigma_i$  et  $\sum f(\sigma_i)$ . D'après le paragraphe précédent, le nombre de simplexes est  $\|X\|$ . On a

$$\text{Vol}(X) = \sum \text{Vol}(f(\sigma_i)) \leq R_n \|X\|.$$

L'égalité 2.2 entraîne que  $\text{Vol}(f(\sigma_i)) = R_n$ , i.e. que  $f$  envoie des simplexes idéaux réguliers qui pavent  $H^n$  sur des simplexes idéaux réguliers. En l'absence de véritable triangulation, on remplace le représentant fini  $\sum \sigma_i$  par la chaîne étalée  $c$  et on conclut que  $f$  envoie presque tout simplexe idéal régulier sur un simplexe idéal régulier. On en déduit aisément que, sur le bord  $\partial H^n$ ,  $\partial f$  coïncide avec une isométrie. Celle-ci induit une isométrie de  $Y$  sur  $X$  homotope à  $f$ .

**2.5. Remarques.** Par cette méthode, W. Thurston a pu étendre le théorème de rigidité de Mostow à la situation  $f : Y \rightarrow X$  où  $X$  et  $Y$  sont des variété hyperboliques de volume fini et  $f$  une application de degré non nul. Cette généralisation joue un rôle crucial dans la preuve du fait que les volumes des variétés hyperboliques de dimension 3 sont bien ordonnés, voir [T], [Gb]. À ce propos, la question de savoir quelle est la variété hyperbolique compacte de dimension 3 de plus petit volume est toujours ouverte, voir [ACCS] et les références qu'il contient.

Il est envisageable que la méthode de M. Gromov s'étende aux autres espaces symétriques. En effet, pour les quotients d'un même espace symétrique, le volume simplicial est proportionnel au volume (mais le coefficient de proportionnalité n'est connu que pour l'espace hyperbolique), [G].

En tout cas, D. Toledo a su en tirer un résultat de rigidité pour les actions isométriques de groupes de surfaces dans l'espace hyperbolique complexe  $CH^m$ , [To].

### 3. VOLUME MINIMAL

#### 3.1. Entropie volumique, exemples

Si  $X$  est compacte, simplement connexe, le volume des boules est borné, donc l'entropie volumique est nulle. Plus généralement, l'entropie volumique de  $X$  est non nulle si et seulement si le groupe fondamental  $\pi_1(X)$  est à croissance exponentielle.

En coordonnées polaires, la métrique de  $H^n$  s'écrit  $dr^2 + (\text{sh } r)^2 d\theta^2$  où  $d\theta^2$  désigne la métrique canonique de la sphère  $S^{n-1}$ . Par conséquent, le volume de la boule de

rayon  $R$  est de l'ordre de  $e^{(n-1)r}$  et l'entropie volumique de tout quotient compact de  $H^n$  vaut  $n - 1$ .

Les espaces symétriques à courbure strictement positive sont les sphères et les espaces projectifs  $KP^m$  sur les corps  $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$  et  $\mathbf{Ca}$  ( $m = 2$  seulement pour les octaves de Cayley  $\mathbf{Ca}$ ). De même, il y a un espace symétrique à courbure strictement négative  $KH^m$  pour chaque  $m$ , de sorte que  $H^n = \mathbf{R}H^n$ . Lorsque  $K \neq \mathbf{R}$ , chaque géodésique de  $KH^m$  est contenue dans une  $K$ -droite, sous-variété totalement géodésique de dimension  $k = \dim_{\mathbf{R}} K$  dans laquelle la croissance du volume est deux fois plus rapide. Par conséquent, l'entropie volumique de tout quotient compact de  $KH^m$  est  $k(m - 1) + 2(k - 1) = km + k - 2$ .

Enfin, lorsque la courbure est bornée inférieurement, on dispose d'un théorème de comparaison.

**3.2 THÉORÈME DE COMPARAISON (R. Bishop).**— *Dans une variété riemannienne  $X$  dont la courbure de Ricci est plus grande que celle de l'espace hyperbolique (c'est le cas en particulier si la courbure sectionnelle satisfait  $K \geq -1$ ), le volume des boules est inférieur à celui des boules hyperboliques de même rayon. En particulier,  $h_{vol}(X) \leq \dim X - 1$ .*

### 3.3. Volume simplicial et volume minimal

Volume simplicial et volume minimal sont des invariants de nature assez différente. Dans une certaine mesure, le volume simplicial ne dépend que du groupe fondamental  $\pi$  (précisément, de l'image de la classe fondamentale par l'application classifiante vers l'espace  $K(\pi, 1)$ ). Par exemple, il est nul pour toute variété simplement connexe, ou plus généralement si le groupe fondamental est moyennable. Toutefois, la classe des variétés de volume simplicial nul est difficile à cerner.

En revanche, toute variété qui possède un nombre caractéristique non nul (par exemple une sphère de dimension paire) a un volume minimal non nul. Voici des conditions suffisantes pour que le volume minimal de  $X$  soit nul :

- $X$  admet une action localement libre d'un tore ;
- $X$  possède des actions locales de tores (sur les ouverts d'un recouvrement) qui commutent sur les intersections ;
- un revêtement fini de  $X$  admet une action localement libre d'un tore.

La notion de  $F$ -structure de rang positif, due à J. Cheeger et M. Gromov, généralise ces trois familles d'exemples. C'est une condition nécessaire pour que  $\text{MinVol}(X) = 0$ , qui n'est pas si éloignée d'être suffisante, voir [CG].

### 3.4. L'inégalité de M. Gromov

Le résultat principal de [G] est l'inégalité suivante.

**3.5 THÉORÈME [G].**—*Il existe une constante  $c(n)$  telle que, pour toute variété riemannienne compacte  $X$  de dimension  $n$ .*

$$\|X\| \leq c(n)h_{vol}(X)^n \text{Vol}(X).$$

La constante  $c(n)$  n'est pas la meilleure possible. Avec l'inégalité 3.2, il vient

**3.6 COROLLAIRE .**— *Pour toute variété compacte  $X$  de dimension  $n$ ,*

$$\|X\| \leq (n-1)^n c(n) \text{MinVol}(X).$$

**3.7. Preuve du théorème 3.5.** Considérons l'espace  $\mathcal{M}$  des mesures de probabilité sur le revêtement universel  $\tilde{X}$  de  $X$ . C'est une sorte de simplexe de dimension infinie. Le groupe fondamental  $\pi$  agit librement sur  $\mathcal{M}$ , et on peut penser au quotient  $\mathcal{M}/\pi$  comme à une réalisation du  $K(\pi, 1)$ . Le choix d'une famille de mesures de probabilité sur  $\tilde{X}$ , paramétrée par  $\tilde{X}$  et équivariante, définit une application classifiante  $X \rightarrow \mathcal{M}/\pi$ . Alors le volume simplicial est relié à la borne inférieure des volumes de ces applications classifiantes.

Pour le majorer, il suffit de construire une famille de mesures particulière. Étant donné une métrique riemannienne  $g$  sur  $X$ , un réel  $s > h_{vol}(g)$  et un point  $x \in \tilde{X}$ , l'intégrale

$$I(s, x) = \int_{\tilde{X}} e^{-s \text{dist}(x', x)} d_g x'$$

est finie. On pose

$$\mu_{s,x} = \frac{1}{I(s, x)} e^{-s \text{dist}(x', x)} d_g x'$$

et on obtient une majoration du volume simplicial en  $c(n)s^n \text{Vol}(X)$  avec une mauvaise constante  $c(n)$ .

## 4. PREUVE DU THÉORÈME 2.

On va d'abord se placer dans le cas où les variétés  $X$  et  $Y$  sont toutes les deux à courbure constante et l'application  $f : Y \rightarrow X$  est une équivalence d'homotopie. Comme en 2.2, l'idée est de rectifier des applications en utilisant la notion de barycentre, de majorer optimalement le volume de l'application rectifiée.



**4.1. Barycentre d'une mesure sur le bord de  $H^n$ .** Si  $\nu$  est une mesure finie sur un espace affine euclidien, dont le support est compact, son centre de gravité est le point où la fonction  $x \mapsto \int_{H^n} \text{dist}(x, z)^2 d\nu(z)$  atteint son minimum. Cette construction a été généralisée par E. Cartan aux variétés riemanniennes simplement connexes à courbure négative ou nulle, [C], note III.

On va utiliser une variante de cette notion. Si  $\nu$  est une mesure finie sur  $H^n$ , dont le support est compact mais n'est pas contenu dans une géodésique, la fonction  $x \mapsto \int_{H^n} \text{dist}(x, z) d\nu(z)$  est propre et strictement convexe, donc elle atteint son minimum en un point  $y$  unique appelé le *barycentre* de  $\nu$ .

Lorsque  $z$  tend vers l'infini en convergeant vers un point  $\theta$  de  $\partial H^n$ , la fonction distance à  $z$  convenablement normalisée converge. Fixons une fois pour toutes une origine  $O$ . La limite

$$B_\theta(x) = \lim_{z \rightarrow \theta} d(x, z) - d(O, z)$$

existe, et s'appelle *fonction de Busemann centrée en  $\theta$ , normalisée en  $O$* . Changer d'origine ajoute à chaque fonction de Busemann une fonction constante.

La notion de barycentre d'une mesure à support compact dans  $H^n$  se prolonge aux mesures sur  $\partial H^n$  comme suit.

**4.2 FAIT .-** *Fixons une origine  $O \in H^n$ . Soit  $\nu$  une mesure finie sur  $\partial H^n$  dont le support a plus de 2 points. Alors la fonction strictement convexe*

$$\beta_\nu(x) = \int_{\partial H^n} B_\theta d\nu(\theta)$$

*atteint son minimum en un unique point, indépendant du choix de  $O$  et appelé barycentre de  $\nu$ .*

**4.3. L'extension barycentrique.** Soient  $X, Y$  des variétés riemanniennes compactes de dimension  $n \geq 3$  dont les revêtements universels  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  sont isométriques à l'espace hyperbolique  $H^n$ , et  $f : Y \rightarrow X$  une équivalence d'homotopie. On va déformer  $f$  en une isométrie. On utilise le relèvement de  $f$  au revêtement universel et son prolongement au bord  $\partial f : \partial \tilde{Y} \rightarrow \partial \tilde{X}$ , 2.4.

Déformer  $f$ , c'est construire de façon naturelle sous les isométries de  $H^n$  une autre extension de  $\partial f$ . On est tenté de résoudre un problème de Dirichlet, i.e. chercher un prolongement qui minimise une fonctionnelle. Il existe une extension harmonique, [ES], qui a été utilisée pour prouver la rigidité à la Mostow pour tous les espaces symétriques sauf précisément l'espace hyperbolique, [S], [MSY].

G. Besson, G. Courtois et S. Gallot utilisent une idée plus fruste, qui remonte à H. Furstenberg, [Fu].

**4.4. Définition.** Soit  $\partial f : \partial \tilde{Y} \rightarrow \partial \tilde{X}$  un homéomorphisme. À tout point  $y \in \tilde{Y}$  correspond une mesure de probabilité  $\mu_y$  sur  $\partial \tilde{Y}$ , l'unique mesure invariante par les rotations qui fixent  $y$ . On transporte  $\mu_y$  à l'aide de  $\partial f$ , et on note  $F(y)$  le barycentre de la mesure  $(\partial f)_* \mu_y$ . On l'appelle *extension barycentrique* de  $\partial f$ .

A. Douady et C. Earle ont utilisé l'extension barycentrique en dimension 2. Dans [DE], ils montrent que l'extension barycentrique d'un homéomorphisme quasimétrique du cercle est un difféomorphisme quasiconforme du disque. Ce n'est plus vrai en dimensions supérieures à 2. En revanche, une propriété miraculeuse apparaît.

**PROPOSITION 3.** – Soit  $\partial f : \partial \tilde{Y} \rightarrow \partial \tilde{X}$  un homéomorphisme. Son extension barycentrique  $F : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$  diminue le volume. Si en un point  $y \in \tilde{Y}$ ,  $d_y F$  préserve le volume, alors  $d_y F$  est une isométrie.

**4.5. Preuve de la proposition 3.** On suit [BCG3]. Fixons des origines dans  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$ . On notera  $B_{\partial}^X$  (resp.  $B_{\partial}^Y$ ) les fonctions de Busemann dans  $\tilde{X}$  (resp.  $\tilde{Y}$ ). Pour  $x \in \tilde{X}$  et  $y \in \tilde{Y}$ , on pose

$$\beta(x, y) = \beta_y(x) = \int_{\partial \tilde{Y}} B_{\partial f(\theta)}^X(x) d\mu_y(\theta).$$

Par définition,  $F(y)$  est le point où  $\beta_y$  atteint son minimum. Il est caractérisé par l'équation implicite

$$\frac{\partial \beta}{\partial x}(y, F(y)) = 0.$$

En dérivant cette équation, on trouve

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}(y, F(y)) \circ d_y F = -\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y}(y, F(y)).$$

On calcule  $\frac{\partial \beta}{\partial y}$ . En courbure  $-1$ , on connaît explicitement la mesure  $\mu_y$ , sa densité par rapport à  $\mu_O$  est la fonction

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_O}(\theta) = e^{-(n-1)B_{\theta}(y)}.$$

Il vient

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = -(n-1) \int_{\partial \tilde{Y}} B_{\partial f(\theta)}^X(x) d_y B_{\theta}^Y d\mu_y(\theta)$$

puis

$$-\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} = (n-1) \int_{\partial \tilde{Y}} d_{F(y)} B_{\partial f(\theta)}^X \otimes d_y B_\theta^Y d\mu_y(\theta).$$

C'est le produit scalaire  $L^2$  de deux fonctions sur  $\partial \tilde{Y}$ , à valeurs dans  $T_{F(y)}^* \tilde{X}$  et  $T_y^* \tilde{Y}$  respectivement. On définit donc  $\phi : T_y \tilde{Y} \rightarrow L^2(\partial \tilde{Y}, \mu_y)$  et  $\psi : T_{F(y)} \tilde{X} \rightarrow L^2(\partial \tilde{Y}, \mu_y)$  par

$$\phi(v) = (\theta \mapsto \sqrt{n} d_y B_\theta^Y(v)) \quad \text{et} \quad \psi(u) = (\theta \mapsto \sqrt{n} d_{F(y)} B_{\partial f(\theta)}^X(u)),$$

de sorte que

$$-\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} = \frac{n-1}{n} \langle \phi, \psi \rangle.$$

Le gradient d'une fonction de Busemann est un champ de vecteurs unitaire. Il en résulte que

$$\text{tr}(\psi^* \psi) = n \int_{\partial \tilde{Y}} \|d_{F(y)} B_{\partial f(\theta)}^X\|^2 d\mu_y(\theta) = n.$$

L'application  $\phi$  satisfait même plus :  $\phi^* \phi = 1$  et  $\phi$  est une injection isométrique.

Enfin, on calcule la forme quadratique  $\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}$  sur  $T_{F(y)} \tilde{X}$ . En courbure  $-1$ , la dérivée seconde en  $x$  d'une fonction de Busemann centrée en  $\theta'$  est nulle le long de la géodésique de  $x$  à  $\theta$  et constante (égale à la métrique) dans les directions orthogonales, autrement dit,

$$d^2 B_{\theta'} = \langle \cdot, \cdot \rangle - dB_{\theta'} \odot dB_{\theta'}$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} = \int_{\partial \tilde{Y}} d_{F(y)}^2 B_{\partial f(\theta)}^X d\mu_y(\theta) = \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2} - \frac{1}{n} \langle \psi, \psi \rangle.$$

L'équation qui détermine  $dF$  devient

$$(1 - \frac{1}{n} \psi^* \psi) dF = \frac{n-1}{n} \psi^* \phi.$$

Notons  $H = \frac{1}{n} \psi^* \psi$ . Comme  $\phi$  est isométrique, l'opérateur autoadjoint  $\phi \phi^*$  sur  $L^2(\partial \tilde{Y})$  satisfait  $\phi \phi^* \leq 1$  donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 dF(dF)^* &= (1-H)^{-1} \psi^* \phi \phi^* \psi (1-H)^{-1} \\ &\leq (1-H)^{-1} \psi^* \psi (1-H)^{-1} = n(1-H)^{-1} H (1-H)^{-1}. \end{aligned}$$

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $H$ . On conclut que le jacobien  $J_F$  est au plus égal à  $(\frac{n-1}{\sqrt{n}})^n \prod \sqrt{\lambda_i} / (1 - \lambda_i)$ . Ne pas oublier qu'on a  $\sum \lambda_i = \frac{1}{n} \text{tr} \psi^* \psi = 1$ . Le lemme suivant est élémentaire.

LEMME 4. — Soient  $n$  un entier,  $n \geq 3$ , et  $\alpha$  un réel,  $1 < \alpha \leq n - 1$ . Sur le domaine de  $\mathbf{R}^n$  défini par les inéquations  $0 < \lambda_i < 1$  et  $\sum \lambda_i \leq 1$ , la fonction  $\prod \lambda_i / (1 - \lambda_i)^\alpha$  atteint un maximum absolu strict en  $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ .

Cela prouve que  $J_F \leq 1$  en tout point, et que l'égalité  $J_F(y) = 1$  entraîne que la différentielle  $d_x F$  est une isométrie. Ceci achève la preuve du théorème 2 pour une équivalence d'homotopie entre variétés hyperboliques.

**4.6. Preuve du théorème 2, cas général.** Lorsque l'espace d'arrivée  $\tilde{X}$  est l'un des espaces symétriques  $\mathbf{K}H^m$ , l'expression de la dérivée seconde des fonctions de Busemann change. Par exemple, lorsque  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ , le terme  $1 - H$  est remplacé par  $1 - H - JHJ$  où  $J$  est la structure complexe de l'espace tangent. Toutefois, l'estimation du jacobien, grâce à une propriété de convexité, se ramène à nouveau au lemme 4, voir [BCG2].

Si la source  $\tilde{Y}$  est à courbure négative variable, on peut encore construire une famille équivariante naturelle sous les isométries de mesures de probabilité  $y \mapsto \mu_y$  sur le bord  $\partial\tilde{Y}$  qui satisfont

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_O}(\theta) = e^{-hB_\theta(y)},$$

où  $h = h_{vol}(Y)$ . Il s'agit des mesures dites de Bowen-Margulis ou de Patterson-Sullivan obtenues comme suit. On prend n'importe quelle limite faible des mesures  $\mu_{s,y}$  de 3.7, lorsque  $s$  tend vers  $h$ . Comme les intégrales  $I(s, y)$  tendent vers l'infini, toute limite faible est concentrée sur le bord  $\partial\tilde{Y}$ .

Enfin, pourquoi passer à la limite ? Soit  $F_s(y)$  le barycentre de la mesure  $f_*\mu_{s,y}$ . On peut majorer directement le jacobien de  $F_s$ , et cela permet d'étendre la méthode à des variétés  $Y$  et des applications  $f$  quelconques.

## 5. VOLUME SPHÉRIQUE

On donne un aperçu de la preuve initiale de [BCG2]. Elle met en valeur le lien avec le volume simplicial et permet de comprendre ce qui se passe en dimension 2.

Soit  $X$  une variété compacte orientée. Soit  $S_+$  l'ensemble des mesures de probabilité sur le revêtement universel  $\tilde{X}$  qui ont une densité lisse par rapport à la mesure de Lebesgue. On munit  $S_+$  d'une structure de variété riemannienne de dimension infinie comme suit. On fixe une forme volume  $\omega$  sur  $X$ , on la relève à  $\tilde{X}$  et on écrit toute mesure  $\mu \in S_+$  sous la forme  $\mu = \Phi^2 \omega$  avec  $\Phi > 0$ .  $S_+$  devient un sous-ensemble de l'espace de Hilbert  $L^2(\tilde{X}, \omega)$ , on le munit de la métrique riemannienne induite.

Comme le groupe  $\pi_1(X)$  agit isométriquement sur  $S_+$ , on obtient sur l'espace total du fibré plat  $S_+X \rightarrow X$  une métrique riemannienne dégénérée dans la direction de  $X$ . À isométrie près, elle ne dépend pas du choix de  $\omega$ . La fibration  $S_+X \rightarrow X$  est une équivalence d'homotopie, donc on peut voir la classe fondamentale de  $X$  comme une classe d'homologie  $[X]_s$  de  $S_+X$ .

**5.1. Définition** [BCG1]. Le *volume sphérique* de  $X$ , noté  $\text{Sphere Vol}(X)$ , est la borne inférieure des volumes des cycles de  $S_+X$  qui représentent la classe  $[X]_s$ .

Cette définition est inspirée de la caractérisation du volume simplicial mentionnée en 3.7. On remplace simplement la norme  $L^1$  sur l'espace des mesures par une norme  $L^2$ . Ainsi, le volume sphérique est une variante du volume simplicial adaptée au problème d'améliorer l'inégalité 3.5.

**5.2. Majoration du volume sphérique.** Il suffit d'exhiber des cycles explicites qui représentent  $[X]_s$ , par exemple, des sections  $X \rightarrow S_+X$ .

PROPOSITION 5. – Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne compacte orientée de dimension  $n$ . On a

$$\text{Sphere Vol}(X) \leq (4n)^{-n/2} h_{\text{vol}}(g)^n \text{Vol}(g).$$

En effet, soit  $s > h_{\text{vol}}(g)$  et soit  $x \mapsto \mu_{s,x}$  la famille de mesures introduite en 3.7. L'image réciproque  $g_s$  de la métrique de  $S_+X$  par la section  $\sigma_s : X \rightarrow S_+X$  correspondante satisfait  $\text{tr}_g(g_s) \leq \frac{s^2}{4}$  donc son volume est au plus  $(4n)^{-n/2} s^n$ .

**5.3. Minoration du volume sphérique.** Lorsque la métrique  $g$  est localement symétrique à courbure strictement négative, l'inégalité  $\text{tr}_g(g_s) \leq \frac{s^2}{4}$  de 5.2 est asymptotiquement une égalité lorsque  $s$  tend vers l'entropie volumique. Cependant, ceci est loin de prouver que les sections  $\sigma_s$  minimisent asymptotiquement le volume dans leur classe d'homologie.

THÉORÈME 6 [BCG1]. – Soit  $(X, g_0)$  une variété riemannienne compacte orientée localement symétrique à courbure négative. Alors

$$\text{Sphere Vol}(X) = (4n)^{-n/2} h_{\text{vol}}(g_0)^n \text{Vol}(g_0).$$

#### 5.4. Preuve du théorème 6.

Première étape. Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\tilde{X}$ . La convolution avec le noyau de la chaleur définit un semi-groupe  $\mu \mapsto \mu_t$  de transformations de  $S_+$  qui

diminue le volume en dimension  $n$ . Lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ ,  $\mu_t$  converge vers une mesure  $\mu_\infty$  concentrée sur le bord  $\partial\tilde{X}$  (c'est la convolée avec le noyau de Poisson). Par conséquent, le problème est déplacé dans l'espace  $B_+X$  où  $B_+$  est l'ensemble des mesures de probabilité sur le bord  $\partial\tilde{X}$  qui ont une densité lisse par rapport à la mesure de Lebesgue.

Deuxième étape. L'application qui à une mesure sur  $B_+$  associe son barycentre dans  $\tilde{X}$  définit une seconde projection  $b : B_+X \rightarrow X$ . À une constante de normalisation près,  $b$  diminue le volume. C'est essentiellement ce qu'on a démontré en 4.5. Par conséquent, la section  $\sigma_0 : X \rightarrow B_+X$  définie par la famille de mesures  $\mu_x$  de 4.4 a un volume minimum dans sa classe d'homologie.

On peut formuler cet argument au moyen de calibrations. Si  $\omega_0$  est la forme volume riemannienne de  $X$ , posons  $\omega = (4n)^{-n/2} h_{vol}(g_0)^n b^* \omega_0$ . C'est une  $n$ -forme différentielle sur  $B_+X$  qui a les propriétés suivantes :

- $\omega$  est fermée ;
- sur une base orthonormée de tout espace tangent à la section  $\sigma_0$ , elle vaut 1 ;
- sur toute autre famille orthonormée de  $n$  vecteurs tangents à  $B_+X$ , elle prend une valeur inférieure ou égale à 1.

On dit que  $\omega$  calibre  $\sigma_0$ . Cela suffit pour montrer, au moyen de la formule de Stokes, que  $\sigma_0$  minimise le volume.

En dimension 2, l'application  $b$  ne diminue pas le volume. On doit trouver une autre calibration. L'espace  $B_+$  peut être vu comme une orbite coadjointe du groupe des difféomorphismes du cercle. Il porte une structure complexe (ainsi que  $B_+X$ ) pour laquelle la section  $\sigma_0$  est holomorphe. Sa métrique est kählérienne. La forme de Kähler détermine une 2-forme fermée sur  $B_+X$  dégénérée seulement dans la direction de  $X$ . On vérifie qu'elle calibre  $\sigma_0$ , mais aussi toutes les sections associées à d'autres métriques à courbure  $-1$  sur  $X$ .

## 6. RIGIDITÉ DU FLOT GÉODÉSIQUE

Le théorème 2 caractérise les métriques localement symétriques par une relation entre leur volume et leur entropie volumique. Ces deux quantités ne dépendent que du flot géodésique. Par conséquent, on peut reconnaître à son flot géodésique qu'une métrique est localement symétrique.

**6.1. Le flot géodésique.** Soit  $X$  une variété riemannienne. Une géodésique dans  $X$  est une courbe qui réalise le plus court chemin entre deux de ses points suffisamment proches. Les géodésiques parcourues à vitesse constante sont caractérisées par

une équation différentielle du second ordre. Autrement dit, une position  $x$  et une vitesse initiale (unitaire)  $u$  déterminent une géodésique  $c$  unique, parcourue à vitesse 1. Posons  $\phi_t(x, u) = (c(t), c'(t))$ . On obtient ainsi un groupe à un paramètre  $\phi_t$  de difféomorphismes du fibré  $UX$  des vecteurs tangents unitaires, appelé *flot géodésique*.

On considère que deux flots  $\phi_t$  et  $\psi_t$  sont indistinguables s'ils sont  $C^1$ -conjugués, i.e. s'il existe un difféomorphisme  $F$  tel que  $F \circ \phi_t = \psi_t \circ F$ .

Le problème de rigidité est un problème inverse : dans quelle mesure le flot géodésique détermine-t-il la métrique ?

**6.2 L'entropie topologique.** Lorsque  $X$  est une variété riemannienne compacte, son entropie volumique est intimement liée à un invariant du flot géodésique, son *entropie topologique*. Celle-ci mesure la complexité des orbites au moyen du volume de l'espace des morceaux d'orbites de longueur donnée.

**6.3 Définition.** Soit  $M$  un espace métrique compact,  $\Phi_t$  un groupe à un paramètre d'homéomorphismes de  $M$ . Sur l'espace  $M_T$  des morceaux d'orbites de longueur  $T$  (qui s'identifie à  $M$ ), on a une distance naturelle

$$d_T(m_1, m_2) = \sup\{d(\Phi_t(m_1), \Phi_t(m_2)) ; 0 \leq t \leq T\}.$$

Fixons  $\delta > 0$  et définissons le "volume"  $\text{Vol}_\delta(M_T)$  comme le nombre minimum de boules de rayon  $\delta$  nécessaire pour couvrir  $M_T$ . Ce nombre croît souvent exponentiellement, avec un exposant

$$h_\delta = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{T} \log \text{Vol}_\delta(M_T).$$

L'entropie topologique du flot  $\Phi_t$  est la limite de  $h_\delta$  quand  $\delta$  tend vers 0,

$$h_{\text{top}}(\Phi_t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} h_\delta.$$

Elle ne dépend pas de la distance choisie sur  $M$ . Par conséquent, l'entropie topologique est un invariant de conjugaison  $C^0$  (i.e. par des homéomorphismes).

Lorsque  $M$  est le fibré unitaire tangent d'une variété riemannienne compacte, et  $\phi_t$  le flot géodésique, l'espace  $M_T$  ressemble à une boule de rayon  $T$  du revêtement universel. La comparaison précise est due à E.I. Dinaburg et A. Manning.

**6.4 THÉORÈME [D], [Ma].**— Soit  $X$  une variété riemannienne compacte, de flot géodésique  $\phi_t$ . Alors  $h_{top}(\phi_t) \geq h_{vol}(X)$ . Si de plus la courbure de  $X$  est négative ou nulle,  $h_{top}(\phi_t) = h_{vol}(X)$ .

**6.5. Rigidité des flots géodésiques localement symétriques.** Certains flots géodésiques ne sont pas rigides. Il existe une grande famille de métriques sur la 2-sphère qui ont le même flot géodésique que la métrique canonique, les surfaces de Zoll, voir [B1]. En revanche, il semble que les flots géodésiques en courbure négative ou nulle soient plutôt rigides.

**COROLLAIRE 7.**— Soient  $X$  et  $Y$  des variétés riemanniennes compactes dont les flots géodésiques sont  $C^1$ -conjugués. On suppose que la métrique de  $X$  est localement symétrique à courbure strictement négative. Alors les métriques de  $X$  et  $Y$  sont isométriques.

On montre d'abord, suivant [Fo] et [CK], que  $\text{Vol}(X) = \text{Vol}(Y)$ . En fait, le volume s'interprète comme une classe caractéristique transverse au feuilletage de dimension 1 défini par le flot. Ensuite on montre que  $X$  et  $Y$  ont même type d'homotopie. Enfin, d'après le théorème 2,

$$h_{top}(Y)^n \text{Vol}(Y) \geq h_{vol}(Y)^n \text{Vol}(Y) \geq h_{vol}(X)^n \text{Vol}(X) = h_{top}(X)^n \text{Vol}(X).$$

Comme l'entropie topologique et le volume sont conservés, le cas d'égalité du théorème 2 est réalisé, donc  $X$  et  $Y$  sont isométriques.

**6.6. Feuilletage stable.** Il y a des situations naturelles où l'on rencontre le problème de rigidité du flot géodésique. La question de la différentiabilité du feuilletage stable en est une. On rencontrera une autre situation au paragraphe 8.

Soit  $X$  une variété à courbure sectionnelle strictement négative. Pour tout point  $p = (x, u)$  du fibré unitaire tangent  $UX$ , l'ensemble des points  $p' \in UX$  tels que la distance de  $\phi_t(p')$  à  $\phi_t(p)$  tende vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  est une sous-variété de  $UX$ . Ces variétés stables feuilletent  $UX$  (leurs projections dans  $X$  sont des surfaces de niveau de fonctions de Busemann). Le feuilletage stable est continu. On pense qu'en général il n'est pas de classe  $C^2$ . Un beau théorème de Y. Benoist, F. Labourie et P. Foulon affirme que si une variété riemannienne compacte à courbure strictement négative a un feuilletage stable de classe  $C^\infty$ , alors son flot géodésique est  $C^\infty$ -conjugué à celui d'un espace localement symétrique, [BFL]. Il vient

**COROLLAIRE 8.**— Soit  $X$  une variété riemannienne compacte à courbure strictement négative. Si son feuilletage stable est de classe  $C^\infty$ , alors la métrique de  $X$  est localement symétrique.



Cette propriété persiste en dimension 2. Dans ce cas, elle est due à E. Ghys [Gh], qui demande seulement que le feuilletage soit de classe  $C^2$ .

## 7. MÉTRIQUES D'EINSTEIN

Les équations d'Einstein sont des conditions linéaires sur le tenseur de courbure d'une métrique (pseudo)-riemannienne. Une métrique est d'Einstein si la courbure de Ricci, trace du tenseur de courbure de Riemann dans une direction, est constante. Cela signifie que, au second ordre, la croissance du volume est la même dans toutes les directions. En dimension 2 ou 3, toute métrique riemannienne d'Einstein est à courbure constante, donc localement isométrique à un espace modèle (sphère, espace euclidien ou espace hyperbolique). Ce n'est plus vrai en dimension 4. Dans cette dimension, la question de l'existence d'une métrique riemannienne d'Einstein change de nature. On connaît peu de conditions nécessaires. Toutes reposent sur les formules intégrales pour la caractéristique d'Euler  $\chi(X)$  et la signature  $\tau(X)$ . La plus connue est due à J. Thorpe et N. Hitchin.

**7.1 THÉORÈME** (voir [B2]).— *Si une variété compacte orientée  $X$  de dimension 4 porte une métrique riemannienne d'Einstein, alors  $\chi(X) \geq \frac{3}{2}\tau(X)$ . En cas d'égalité, la métrique est plate ou localement kählérienne et de courbure de Ricci nulle.*

Il y a pourtant des conditions nécessaires qui ne s'expriment pas seulement par des relations numériques. Voici un résultat récent d'A. Sambusetti.

**7.2 THÉORÈME** [Sa].— *Pour toute variété compacte  $X$  de dimension 4, il existe une variété compacte  $Y$  de dimension 4 qui a même caractéristique d'Euler et même signature que  $X$ , et qui ne porte aucune métrique d'Einstein.*

Voici un exemple qui montre comment un tel énoncé peut résulter du théorème 2. Soit  $X$  une variété hyperbolique compacte orientée de dimension 4, soit  $Y = X \# X$  la somme connexe de deux copies de  $X$ . Alors  $\chi(Y) = 2\chi(X) - 2$  et  $\tau(Y) = 0$ .  $Y$  a une application de degré 2 sur  $X$  mais n'est pas un revêtement de  $X$ . La proposition suivante montre que  $Y$  n'admet pas de métrique d'Einstein.

**PROPOSITION 9** .— *Soient  $X, Y$  des variétés compactes orientées de dimension 4. On suppose que  $X$  porte une métrique à courbure constante  $-1$  et  $Y$  une métrique d'Einstein. Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application de degré  $d$ . Alors  $\chi(Y) \geq |d|\chi(X)$ . En cas d'égalité,  $f$  est homotope à un revêtement homothétique.*

Normalisons la métrique de  $Y$  de sorte que sa courbure de Ricci  $Ric^Y$ , supposée constante, soit égale à celle de  $X$ . Comme  $Ric^Y$  est la trace du tenseur de courbure

$R^Y$ , et comme  $R^X$  est un multiple constant de l'identité, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne  $\|R^Y\|^2 \geq \|R^X\|^2$ .

D'autre part, l'inégalité de R. Bishop 3.2 donne  $h_{vol}(Y) \leq h_{vol}(X)$ . Du théorème 2, il résulte que  $\text{Vol}(Y) \geq |d|\text{Vol}(X)$ .

Enfin, si  $V$  est un variété riemannienne compacte de dimension 4, sa caractéristique d'Euler est donnée par la formule (voir [B2] page 206)

$$\chi(V) = \frac{1}{8\pi^2} \int_V \|R\|^2 - 2\|Z\|^2,$$

où  $R$  est le tenseur de courbure, et  $Z$  le tenseur d'Einstein, qui s'annule exactement pour les métriques d'Einstein. Il vient

$$\begin{aligned} \chi(Y) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_Y \|R^Y\|^2 \\ &\geq \frac{1}{8\pi^2} \|R^X\|^2 \text{Vol}(Y) \\ &\geq |d| \frac{1}{8\pi^2} \|R^X\|^2 \text{Vol}(X) = |d|\chi(X) \end{aligned}$$

et l'égalité a lieu dans les mêmes conditions que pour le théorème 2.

**COROLLAIRE 10** [BCG2].— *Si une variété compacte de dimension 4 porte une métrique à courbure constante  $-1$ , elle ne porte aucune autre métrique d'Einstein.*

Les variétés hyperboliques réelles rejoignent donc la petite famille des variétés compactes de dimension 4 pour lesquelles toutes les métriques d'Einstein sont connues : les tores, la surface K3 et leurs quotients (en vertu du théorème 7.1) et les variétés hyperboliques complexes, [Le].

## 8. VARIÉTÉS RIEMANNIENNES HARMONIQUES

Une variété riemannienne est harmonique si les petites sphères géodésiques ont une courbure moyenne constante. Cela signifie que le volume croît exactement de la même façon dans toutes les directions. C'est donc une condition plus forte que celle d'Einstein. Jusqu'en dimension 4, ses conséquences infinitésimales (sur la courbure et ses dérivées) suffisent à conclure que la métrique est localement symétrique. En 1944, A. Lichnérowicz a posé la question de savoir si seuls les espaces localement symétriques peuvent être harmoniques, [L]. La réponse est non. E. Damek et F. Ricci ont trouvé des espaces homogènes non compacts qui sont harmoniques, [DR]. Leur courbure sectionnelle est strictement négative.

La version globale de la question d'A. Lichnérowicz (quelles sont les variétés harmoniques compactes) est encore ouverte. Z. Szabo a montré qu'une variété harmonique compacte et simplement connexe est symétrique, [Sz]. Combiné à un beau résultat de P. Foulon et F. Labourie, le théorème 2 résout le problème en courbure négative.

**COROLLAIRE 11** .– *Une variété riemannienne harmonique compacte à courbure sectionnelle strictement négative est localement symétrique.*

L'idée essentielle (due à P. Foulon, [FL]) est qu'en chaque point du fibré unitaire tangent, la direction de la variété stable est celle sur laquelle le jacobien du flot géodésique atteint son minimum. Par hypothèse, celui-ci est le même en tout point (il vaut  $-h_{vol}$ ). Sur un ouvert dense, cette direction varie donc de manière  $C^\infty$  avec le point. En estimant uniformément les dérivées, on peut oublier l'ouvert dense. On conclut à l'aide du corollaire 8.

## 9. QUESTIONS

Peut-on remplacer l'entropie (reliée à la courbure de Ricci) par une quantité plus souple, reliée à la courbure scalaire ? G. Besson, G. Courtois et S. Gallot ont fait un pas dans cette direction. Dans [BCG1] ils montrent que parmi les métriques de volume fixé voisines d'une métrique  $g_0$  localement symétrique l'intégrale de la courbure scalaire atteint un minimum en  $g_0$ .

Les résultats de D. Burago et S. Ivanov sur le volume asymptotique des tores, [BI], sont une sorte de pendant polynomial au théorème 2. Les estimations de volume en courbure de Ricci positive dans les travaux de T. Colding, [Co], présentent une parenté avec les précédents. Peut-on la préciser ?

Le volume sphérique est-il exactement proportionnel au volume simplicial ?

## BIBLIOGRAPHIE

- [ACCS] J.W. ANDERSON, R. CANARY, M. CULLER, P. SHALEN, *Free Kleinian groups and volumes of hyperbolic 3-manifolds*, à paraître dans le J. Differen. Geom.
- [BFL] Y. BENOIST, P. FOULON ET F. LABOURIE, *Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables*, J. Amer. Math. Soc. **5**, 33-74 (1992).

- [B1] A.L. BESSE, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergeb. der Math. Bd 93, Springer (1978).
- [B2] A.L. BESSE, *Einstein Manifolds*, Ergeb. der Math. Bd 10, Springer (1987).
- [BCG1] G. BESSON, G. COURTOIS ET S. GALLOT, *Volume et entropie minimale des espaces localement symétriques*, Invent. Math. **103**, 417-445 (1991).
- [BCG2] G. BESSON, G. COURTOIS ET S. GALLOT, *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, Geom. and Funct. Anal. **5**, 731-799 (1995).
- [BCG3] G. BESSON, G. COURTOIS ET S. GALLOT, *Minimal entropy and Mostow's rigidity theorems*, Ergod. Th. Dynam. Syst. **16**, 623-649 (1996).
- [BI] D. BURAGO AND S. IVANOV, *On the asymptotic volume of tori*, Geom. and Funct. Anal. **5**, 800-808 (1995).
- [C] E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris (1928).
- [CG] J. CHEEGER AND M. GROMOV, *Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded*, I, J. Differen. Geom. **23**, 309-346 (1986), II, J. Differen. Geom. **32**, 269-298 (1990).
- [Co] T. COLDING, *Large manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math. **124**, 193-214 (1996).
- [CK] C. CROKE AND B. KLEINER, *Conjugacy rigidity for manifolds with a parallel vector field*, J. Differen. Geom. **39**, 659-680 (1994).
- [DR] E. DAMEK AND F. RICCI, *A class of non-symmetric harmonic riemannian spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **27**, 139-142 (1992).
- [D] E.I. DINABURG, *On the relations among various entropy characteristics of dynamical systems*, Izv. Mat. Nauk SSSR **35**, 324-366 (1971), Trad. Math. USSR Izv. **5**, 337-378 (1971).
- [DE] A. DOUADY AND C. EARLE, *Conformally natural extensions of homeomorphisms of the circle*, Acta Math. **157**, 23-48 (1986).
- [ES] J. EELLS AND J. SAMPSON, *Harmonic maps of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109-160.
- [Fo] P. FOULON, *Nouveaux invariants géométriques des systèmes dynamiques du second ordre : application à l'étude du comportement ergodique*, Thèse d'Etat, Ecole Polytechnique (1986).

- [FL] P. FOULON ET F. LABOURIE, *Sur les variétés compactes asymptotiquement harmoniques*, Invent. Math. **109**, 97-111 (1992).
- [Fu] H. FURSTENBERG, *A Poisson formula for semi-simple Lie groups*, Ann. of Math. **77**, 335-386 (1963).
- [Gh] E. GHYS, *Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. de Paris **20**, 251-270 (1987).
- [G] M. GROMOV, *Volume and bounded cohomology*, Publ. Math. I.H.E.S. **56**, 213-307 (1981).
- [Gb] M. GROMOV, *Hyperbolic manifolds according to Jorgensen and Thurston*, Séminaire Bourbaki n° 546, novembre (1979).
- [HM] U. HAAGERUP AND M. MUNKHOLM, *Simplices of maximal volume in hyperbolic  $n$ -space*, Acta Math. **141**, 1-11 (1981).
- [K] A. KATOK, *Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics*, Ergod. Th. Dynam. Syst. **8**, 139-152 (1988).
- [Le] C. LEBRUN, *Einstein metrics and Mostow rigidity*, Math. Res. Lett. **2**, 1-8 (1996).
- [L] A. LICHNÉROWICZ, *Sur les espaces riemanniens complètement harmoniques*, Bull. Soc. Math. de France **72**, 146-169 (1944).
- [Ma] A. MANNING, *Topological entropy for geodesic flows*, Ann. Math. **110**, 567-573 (1979).
- [MSY] N. MOK, Y.T. SIU AND S.K. YEUNG, *Geometric superrigidity*, Invent. Math. **113**, 57-83 (1993).
- [M1] G.D. MOSTOW, *Quasiconformal mappings in  $n$ -space and the rigidity of hyperbolic space forms*, Publ. Math. I.H.E.S. **34**, 53-104 (1967).
- [Sa] A. SAMBUSETTI, *An obstruction to the existence of Einstein metrics on 4-manifolds*, C.R. Acad. Sci. Paris **322**, 1213-1218 (1996).
- [S] Y.T. SIU, *Complex analyticity of harmonic maps, and strong rigidity of compact Kähler manifolds*, Ann. of Math. **112**, 73-111 (1980).
- [Sz] Z. SZABO, *The Lichnérowicz conjecture on harmonic manifolds*, J. Differen. Geom. **31**, 1-28 (1990).
- [T] W. THURSTON, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton University Press, Princeton (1978).

- [To] D. TOLEDO, *Representations of surface groups in  $PSU(n, 1)$  with maximum characteristic number*, J. Differen. Geom. **29**, 125-134 (1989).
- [V] M. VILLE, *Sur le volume des variétés riemanniennes pincées*, Bull. Soc. Math. de France **115**, 127-139 (1987).

Pierre PANSU  
U.R.A. D1169 du C.N.R.S.  
Mathématiques  
Université Paris-Sud  
91405 Orsay Cédex  
Pierre.Pansu@math.u-psud.fr