Séminaire N. Bourbaki

Alain Valette

Graphes de Ramanujan et applications

Séminaire N. Bourbaki, 1996-1997, exp. nº 829, p. 247-276.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__247_0>

Séminaire BOURBAKI
49ème année, 1996-97, n° 829

Mars 1997

GRAPHES DE RAMANUJAN ET APPLICATIONS

par **Alain VALETTE**

INTRODUCTION

Le thème principal de cet exposé est la construction de familles infinies de graphes de Ramanujan, c'est-à-dire des graphes finis, connexes, réguliers de valence fixée, et dont les valeurs propres non triviales sont petites, en un sens optimal qui sera rendu précis dans la section 1. De tels graphes ont une grande constante isopérimétrique (ou constante d'expansion), ce qui les rend intéressants pour les applications en théorie des circuits.

Dans la section 2, nous passons en revue les constructions connues de familles de graphes de Ramanujan, toutes de nature arithmétique (ce que la terminologie est censée rappeler) ; il importe cependant de souligner qu'au delà de l'arithmétique, les constructions dépendent de résultats de géométrie algébrique, et spécialement de la preuve par Weil [75] de l'hypothèse de Riemann pour les courbes algébriques sur un corps fini.

Les graphes de Ramanujan possèdent une série de propriétés extrémales qui les rend particulièrement intéressants du point de vue de la théorie des graphes. Nous en présentons quelques-unes à la section 3. En particulier, les graphes décrits indépendamment par Lubotzky-Phillips-Sarnak [44] et Margulis [47] fournissent des exemples où le tour de taille est grand par rapport au (logarithme du) nombre de sommets ; et ce sont les meilleures réponses connues à cette question.

Enfin, à la section 4, nous présentons une série d'applications récentes des graphes de Ramanujan dans d'autres domaines des mathématiques.

1 VALEURS PROPRES DE GRAPHES

1.1 Graphes

Nous adoptons l'approche de Serre ([65], §2.1 ; [66], §8).

Définition 1 *Un graphe X est formé de deux ensembles, l'ensemble X^0 des sommets et l'ensemble X^1 des arêtes, de l'application "origine" $o : X^1 \to X^0 : y \mapsto o(y)$, et de l'application "inverse" $X^1 \to X^1 : y \mapsto \overline{y}$, qui est une involution sans point fixe. On définit l'extrémité de l'arête y par $t(y) = o(\overline{y})$. Deux sommets x, x' sont adjacents s'il* *existe une arête y avec $o(y) = x$ et $t(y) = x'$. On dit que X est régulier de valence k si tout sommet est l'origine d'exactement k arêtes. On dit que X est biparti si on peut trouver une partition de X^0 en deux parties non vides A, B telles que toute arête $y \in X^1$ ait son origine dans A et son extrémité dans B, ou l'inverse.*

Il est commode de noter $|X|$ le nombre de sommets du graphe X.

Définition 2 *Soit r un entier, $r \geq 1$; un chemin de longueur r dans le graphe X est une suite $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_r)$ d'arêtes $y_i \in X^1$ telles que $t(y_i) = o(y_{i+1})$ pour $1 \leq i < r$. L'origine de $\mathbf{y}$ est $o(\mathbf{y}) = o(y_1)$, son extrémité est $t(\mathbf{y}) = t(y_r)$. Le chemin $\mathbf{y}$ est sans aller-retour si $y_{i+1} \neq \overline{y_i}$ pour $1 \leq i < r$. Le graphe est connexe si deux sommets quelconques sont les extrémités d'au moins un chemin. Si x, x' sont deux sommets distincts d'un graphe connexe, la distance $d(x, x')$ de x à x' est le minimum des longueurs des chemins d'origine x et d'extrémité x'. Un circuit de longueur r dans un graphe est un chemin $(y_1, \cdots, y_r)$ de longueur r et sans aller-retour, tel que les $t(y_i)$ $(1 \leq i \leq r)$ soient distincts, et $t(y_r) = o(y_1)$. Une boucle est un circuit de longueur 1. Un arbre est un graphe connexe sans circuit.*

Notre principale source de graphes réguliers sera les *graphes de Cayley.*

Définition 3 *Soit Γ un groupe de type fini, et soit S une partie génératrice finie de Γ, symétrique $(S = S^{-1})$, et ne contenant pas l'élément neutre de Γ. Le graphe de Cayley $X(\Gamma, S)$ est le graphe X avec pour ensemble de sommets $X^0 = \Gamma$, pour ensemble d'arêtes $X^1 = \Gamma \times S$ et, pour $\gamma \in \Gamma$, $s \in S$,*

$$o(\gamma, s) = \gamma \text{ et } \overline{(\gamma, s)} = (\gamma s, s^{-1}).$$

La condition $1 \notin S$ assure que $y \neq \overline{y}$ pour tout $y \in X^1$; l'hypothèse que S engendre Γ assure que $X(\Gamma, S)$ est connexe. Si $k = |S|$, le graphe $X(\Gamma, S)$ est régulier de valence k.

Une définition importante pour les applications est celle de *constante isopérimétrique* d'un graphe X. Si A est une partie de X^0, on note ∂A le *bord* de A, c'est-à-dire l'ensemble des arêtes $y \in X^1$ telles que $o(y) \in A$ et $t(y) \notin A$.

Définition 4 *Soit X un graphe connexe fini. La constante isopérimétrique (ou constante d'expansion) de X est*

$$h(X) = \min \left\{ \frac{|\partial A|}{|A|} : A \subset X, \, 0 < |A| \leq \frac{|X|}{2} \right\}.$$

Quand le graphe X est vu comme circuit de transmission, la grandeur de la constante isopérimétrique mesure la qualité de X à transmettre l'information.

Problème de base : construire *explicitement*, pour un entier $k \geq 1$ fixé, des familles infinies $(X_m)_{m \geq 1}$ de graphes finis, connexes, réguliers de valence k, avec $h(X_m)$ borné inférieurement par une constante strictement positive.

Par "famille infinie", on entend $\lim_{m \to \infty} |X_m| = \infty$. Intuitivement, on cherche des graphes à nombre de sommets arbitrairement grand, mais où l'information continue à bien circuler. Bien entendu, la condition cruciale sur les graphes est d'être *réguliers de* *valence fixée* : cela impose que le nombre d'arêtes croît *linéairement* avec le nombre de sommets, ce qui correspond à une exigence de coût minimal des lignes de transmission. Sans cette condition, le problème serait trivial : prendre la suite des graphes complets ! On insiste aussi sur des constructions *explicites* : par des arguments de comptage non constructifs, on montre que le problème de base admet des solutions (voir [41], §1.2 ; [62], §3.1.2).

1.2 Matrice d'adjacence

Soit X un graphe. On note C_X l'espace des *0-chaînes* de X, c-à-d. l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des fonctions à support fini $X^0 \to \mathbf{C}$. Pour $x \in X^0$, notons δ_x la fonction caractéristique de $\{x\}$; les δ_x forment une base de C_X. On considère l'endomorphisme A de C_X défini par

$$A(\delta_x) = \sum_{y:o(y)=x} \delta_{t(y)}.$$

Définition 5 *La matrice de A dans la base des δ_x est la matrice d'adjacence du graphe X.*

Soit X un graphe fini, régulier de valence k. Il est bien connu (voir par exemple [7], Proposition 3.1) que les valeurs propres de la matrice d'adjacence sont contenues dans l'intervalle $[-k, k]$, et que k est une valeur propre de multiplicité égale au nombre de composantes connexes de X. Supposons de plus X connexe, à n sommets. Rangeons par ordre décroissant les valeurs propres de A

$$\mu_0 = k > \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{n-1}.$$

On a $\mu_{n-1} = -k$ si et seulement si X est biparti, et dans ce cas le spectre de A est symétrique par rapport à 0 (voir [7], Proposition 8.2). La première valeur propre non triviale μ_1 permet d'estimer la constante isopérimétrique.

Proposition 1 *Pour un graphe X fini, connexe, régulier de valence k :*

$$\frac{k - \mu_1}{2} \leq h(X) \leq \sqrt{2k(k - \mu_1)}.$$

Pour une preuve, ainsi que pour le lien avec l'inégalité de Cheeger-Buser en géométrie riemannienne, voir [41], Propositions 4.2.4 et 4.2.5. On voit donc que pour avoir une grande constante isopérimétrique, il faut que le *trou spectral* $k - \mu_1$ soit grand, donc que μ_1 soit petit. Il se fait qu'il y a un seuil asymptotique pour la taille de μ_1. En effet :

Proposition 2 *Soient $k \geq 2$ un entier, et $(X_m)_{m\geq 1}$ une famille infinie de graphes finis, connexes, réguliers de valence k. Alors*

$$\liminf_{m\to\infty} \mu_1(X_m) \geq 2\sqrt{k-1}.$$

Ce résultat est dû à Alon et Boppana ([1], page 95 ; pour des preuves, voir [44], Proposition 4.2 ; [62], Proposition 3.2.7). Des résultats plus précis ont été obtenus par

Burger ([10], Théorème 2), Nilli ([55], Théorème 1), Serre ([63], Théorème 1) ; nous en verrons un plus bas (Théorème 1). Notons $\mathcal{T}_k$ l'arbre régulier de valence k : c'est le revêtement universel de n'importe quel graphe connexe et régulier de valence k. Le nombre $2\sqrt{k-1}$ qui apparaît dans la Proposition 2 n'est autre que le rayon spectral de l'opérateur d'adjacence de $\mathcal{T}_k$, agissant sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathcal{T}_k^0)$. Notons qu'un phénomène semblable à celui de la Proposition 2 se produit pour le bas du spectre ; pour l'énoncer, nous aurons besoin de la notion de tour de taille d'un graphe (on dit aussi "calibre", ou "girth").

Définition 6 *Le tour de taille $g(X)$ d'un graphe X est la longueur du plus petit circuit de X, avec la convention $g(X) = \infty$ si X est un arbre.*

Le résultat suivant est dû à P. Solé et W. Li ([39], Cor. 4) :

Proposition 3 *Soient $k \geq 2$ un entier, et $(X_m)_{m\geq 1}$ une famille de graphes finis, connexes, réguliers de valence k, avec $\lim_{m\to\infty} g(X_m) = \infty$. Alors la limite supérieure de la plus petite valeur propre non triviale de X_m vaut au moins $-2\sqrt{k-1}$.*

Les Propositions 2 et 3 isolent une propriété extrémale des spectres de graphes, qui motive la définition suivante.

Définition 7 *Soit X un graphe fini, connexe, régulier de valence k ; on dit que X est un graphe de Ramanujan si, pour toute valeur propre μ de la matrice d'adjacence de X à l'exception de $\mu = \pm k$, on a*

$$|\mu| \leq 2\sqrt{k-1}.$$

Les propositions 1 et 2 montrent que si l'on arrive à construire une famille infinie de graphes de Ramanujan de valence k fixée, on aura une solution au *problème de base* avec $h \geq \frac{k-2\sqrt{k-1}}{2}$ et optimale du point de vue spectral. La terminologie "graphe de Ramanujan" a été introduite par Lubotzky-Phillips-Sarnak [44], et a fait fortune depuis. Historiquement, il semble que les premiers exemples de graphes de Ramanujan soient apparus implicitement chez Ihara [30], qui considère des matrices à valeurs entières positives associées à certains sous-groupes arithmétiques Γ de $G = PGL(2, \mathbf{Q}_p)$, et fait explicitement le lien entre les valeurs propres non triviales de ces matrices et la conjecture de Ramanujan-Petersson, réinterprétée en disant que les représentations irréductibles de dimension infinie de G qui apparaissent dans $L^2(G/\Gamma)$ ne sont pas dans la série complémentaire de G, c'est-à-dire sont tempérées ([31], p. 230 ; voir aussi la "condition (R)" dans [30]). Quand on connaît l'action de G sur l'arbre $\mathcal{T}_{p+1}$ (voir [65], Chapitre II), on constate que les matrices d'Ihara ne sont rien d'autre que les matrices d'adjacence du graphe quotient $\Gamma\backslash\mathcal{T}_{p+1}$.

Actuellement, les seules constructions connues de familles infinies de graphes de Ramanujan sont de nature arithmétique (voir la section 2), et font toujours appel à la résolution de la conjecture de Ramanujan-Petersson sur les coefficients des formes modulaires paraboliques. Un défaut des constructions arithmétiques est que les seules valences pour lesquelles on dispose actuellement de familles infinies de graphes de Ramanujan sont de la forme $k = q + 1$, où q est une puissance de premier.

Problème ouvert : Construire, pour tout entier $k \geq 2$, une famille infinie de graphes de Ramanujan de valence k. (La première valeur ouverte est $k = 7$).

1.3 Opérateurs de Hecke sur un graphe

Si X est un graphe régulier de valence k, on définit pour tout entier $r \geq 1$, un endomorphisme A_r de C_X par

$$A_r(\delta_x) = \sum_{\mathbf{y}} \delta_{t(\mathbf{y})},$$

la somme portant sur les chemins $\mathbf{y}$ sans aller-retour, d'origine x et de longueur r. On a $A_1 = A$, et on pose encore $A_0 = 1$. On vérifie aisément que $A_1^2 = A_2 + k$ et, pour $r > 1$

$$A.A_r = A_r.A = A_{r+1} + (k-1)A_{r-1}.$$

On en tire la fonction génératrice

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r t^r = \frac{1-t^2}{1-At+(k-1)t^2}.$$

Si l'on définit les *opérateurs de Hecke* T_m sur C_X comme

$$T_m = \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} A_{m-2r},$$

on vérifie facilement que les T_m admettent la fonction génératrice

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_m t^m = \frac{1}{1-At+(k-1)t^2}.$$

Ceci suggère de faire appel aux polynômes de Chebychev de seconde espèce, définis par

$$U_m(\cos\theta) = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta},$$

et qui satisfont à la relation de récurrence

$$U_{m+1}(x) = 2x.U_m(x) - U_{m-1}(x),$$

avec $U_0(x) = 1$ et $U_1(x) = 2x$. En effet la fonction génératrice de ces polynômes est

$$\sum_{m=0}^{\infty} U_m(x) t^m = \frac{1}{1-2xt+t^2}.$$

On en tire immédiatement que les T_m sont essentiellement les polynômes de Chebychev en A ; précisément

$$T_m = (k-1)^{\frac{m}{2}} U_m\left(\frac{A}{2\sqrt{k-1}}\right). \tag{1}$$

Supposons de plus X fini à n sommets, et notons $\mu_0 = k > \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{n-1}$ les valeurs propres de la matrice d'adjacence de X. Toute l'idée est maintenant d'établir une “mini-formule des traces” en calculant de deux manières la trace de T_m. En prenant la trace des deux membres dans (1), on commence par obtenir

$$Tr\, T_m = (k-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} U_m\left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{k-1}}\right), \tag{2}$$

A ce stade, digressons brièvement pour discuter un résultat dû à Serre ([63], Théorème 1 ; voir aussi le Théorème 13 du Chapitre 9 de [37]), à propos de la répartition asymptotique des valeurs propres de la matrice d'adjacence, pour une famille infinie de graphes finis, connexes, réguliers de valence k. Ce Théorème implique trivialement la Proposition 2.

Théorème 1 *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante strictement positive $C = C(\epsilon, k)$ telle que, pour tout graphe X fini, connexe, régulier de valence k, à n sommets, le nombre de valeurs propres de la matrice d'adjacence de X dans l'intervalle $[(2-\epsilon)\sqrt{k-1}, k]$ est au moins $C.n$.*

Serre obtient ce Théorème comme conséquence d'un résultat sur les mesures prenant des valeurs positives sur les U_n, et pour la preuve duquel nous renvoyons à [63] ou aux pp. 212-213 de [37].

Proposition 4 *Soient $L \geq 2$ et $\epsilon > 0$. Il existe une constante strictement positive $C = C(\epsilon, L)$ avec la propriété que, si ν est une mesure de probabilité sur $[-L, L]$ avec*

$$\int_{-L}^{L} U_m\left(\frac{x}{2}\right) d\nu(x) \geq 0$$

pour tout $m \geq 0$, alors ν donne à l'intervalle $[2-\epsilon, L]$ une mesure au moins égale à C.

Voici comment on déduit le Théorème 1 de la Proposition : on prend $L = \frac{k}{\sqrt{k-1}}$ et, pour f une fonction continue sur $[-L, L]$, on pose

$$\nu(f) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{\mu_j}{\sqrt{k-1}}\right).$$

Comme T_m est donné par une matrice à coefficients positifs, on a $Tr\, T_m \geq 0$, et l'égalité (2) montre que $\nu(U_m) \geq 0$. Appliquée à la mesure ν, la Proposition fournit le Théorème 1.

Moyennant des hypothèses supplémentaires sur la croissance du nombre de circuits de longueur r dans une famille infinie de graphes finis, connexes, réguliers de valence k, Serre obtient au §8 de [66] des résultats plus précis que le Théorème 1 sur la répartition asymptotique des valeurs propres de la matrice d'adjacence.

Le Théorème 1 a été généralisé par Greenberg [28] à des graphes pas nécessairement réguliers : si $\tilde{X}$ désigne un graphe connexe localement fini, notons $\rho(\tilde{X})$ le rayon spectral de l'opérateur d'adjacence de $\tilde{X}$ sur $\ell^2(\tilde{X}^0)$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $C = C(\epsilon, \tilde{X}) > 0$ telle que, pour tout graphe fini connexe X revêtu par $\tilde{X}$, le nombre de valeurs propres supérieures à $(1-\epsilon)\rho(\tilde{X})$ de la matrice d'adjacence de X est au moins $C.|X|$.

Reprenons le calcul de la trace de T_m. Si X est un graphe fini, connexe, régulier de valence k, la trace $Tr\, A_r$ est clairement égale au nombre f_r de chemins fermés sans aller-retour de longueur r dans X. Notons Γ le groupe fondamental de X : il agit librement sur $\mathcal{T}_k$. Si on choisit un système R de représentants pour les orbites de Γ sur $\mathcal{T}_k^0$, on a

$$f_r = \sum_{x \in R} |\{\gamma \in \Gamma : d(\gamma x, x) = r\}|;$$

d'où, en tenant compte de (2)

$$\sum_{0\leq r\leq \frac{m}{2}} \sum_{x\in R} |\{\gamma \in \Gamma : d(\gamma x, x) = m-2r\}| = (k-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} U_m\left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{k-1}}\right). \tag{3}$$

2 CONSTRUCTIONS DE GRAPHES DE RAMANUJAN

2.1 Les graphes de Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis

Les constructions qui suivent sont dues indépendamment à Lubotzky-Phillips-Sarnak [44] et Margulis [47].

Soit $\mathbb{H}$ l'algèbre des quaternions de Hamilton, et $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ l'anneau des quaternions entiers :

$$\mathbb{H}(\mathbb{Z}) = \{\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}\}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{H}$, la norme de α est $N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Par un célèbre résultat de Jacobi, le nombre $r_4(n)$ de représentations d'un entier positif n par la forme quadratique N est donné par $r_4(n) = 8\sum_{d|n,\, 4\nmid d} d$. Si p est un premier impair, on a donc $r_4(p) = 8(p+1)$. On suppose dorénavant $p \equiv 1\,(mod\,4)$; si $\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ est tel que $N(\alpha) = p$, il est clair qu'exactement un des a_i est impair. L'ensemble

$$B_p = \{\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{Z}) : N(\alpha) = p,\ a_0 > 0,\ a_0 \equiv 1\,(mod\,2)\}$$

a donc $p+1$ éléments $\alpha_1, \overline{\alpha_1}, \cdots, \alpha_s, \overline{\alpha_s}$, où $s = \frac{p+1}{2}$. On a alors le résultat suivant, essentiellement dû à Dickson et Hurwitz (pour des preuves, voir [27], Proposition 9.6 ; [44], lemme 3.1 ; [41], lemme 2.1.9 ; [62], lemme 2.5.3) :

Proposition 5 *Soit $p \equiv 1\,(mod\,4)$. Soit $\beta \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ tel que $N(\beta) = p^m$. Il existe une unique écriture de β sous la forme $\beta = \epsilon p^r w_\ell(\alpha_1, \overline{\alpha_1}, \cdots, \alpha_s, \overline{\alpha_s})$, où $\epsilon \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ est une unité, $m = 2r+\ell$, et w_ℓ est un mot réduit de longueur ℓ sur l'alphabet B_p. (Par mot réduit, on entend un mot où les expressions $\alpha_i\overline{\alpha_i}$ ou $\overline{\alpha_i}\alpha_i$ n'apparaissent pas). En particulier, si $\beta \equiv 1\,(mod\,2)$, on a $\beta = \pm p^r w_\ell(\alpha_1, \overline{\alpha_1}, \cdots, \alpha_s, \overline{\alpha_s})$ et cette écriture est unique.*

Notons $G = \mathbb{H}^\times / Z(\mathbb{H}^\times)$ le quotient du groupe multiplicatif de $\mathbb{H}$ par son centre ; G est vu comme groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$. Si N est un entier positif non divisible par p, notons $\Gamma(N)$ le *N-ème sous-groupe de congruence* de $G(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$, c-à-d. le noyau de la réduction modulo N

$$\Gamma(N) = Ker[G(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) \to G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})].$$

Si α est un quaternion entier dont la norme est une puissance de p, on note $[\alpha_i]$ l'image de α dans $G(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$; c'est une conséquence facile de la proposition 5 que $\Gamma(2)$ est un groupe libre sur les générateurs $[\alpha_1], \cdots, [\alpha_s]$. D'autre part, on peut identifier $G(\mathbb{Q}_p)$ à $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$, qui possède une action bien connue sur l'arbre régulier $\mathcal{T}_{p+1}$ (voir le Chapitre II de [65]) ; via cette identification, $\Gamma(2)$ agit simplement transitivement sur les sommets de $\mathcal{T}_{p+1}$, qu'on peut donc identifier au graphe de Cayley de $\Gamma(2)$ par rapport aux $[\alpha_i]$

et à leurs inverses (voir le lemme 7.4.1 de [41] pour les détails). Si $N = 2M$, on a $\Gamma(2M) \subset \Gamma(2)$, et on peut donc former le graphe

$$X^{p,M} = \Gamma(2M)\backslash\mathcal{T}_{p+1};$$

c'est un graphe fini, connexe, régulier de valence $p+1$; pour M assez grand, on peut aussi le voir comme le graphe de Cayley du groupe fini $\Gamma(2)/\Gamma(2M)$ par rapport à l'image des $[\alpha_i]$ et de leurs inverses par l'application-quotient $\Gamma(2) \to \Gamma(2)/\Gamma(2M)$. Pour avoir une construction tout-à-fait explicite de $X^{p,M}$, il reste à identifier le groupe fini $\Gamma(2)/\Gamma(2M)$. Supposons M impair : alors $G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = G(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times G(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$ et, comme l'image de $\Gamma(2)$ dans le premier facteur est triviale, on identifie $\Gamma(2)/\Gamma(2M)$ à un sous-groupe de $G(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$. S'il existe un entier δ tel que $\delta^2 \equiv -1\,(mod\, M)$, on peut expliciter un isomorphisme entre $\mathbb{H}(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$ et l'anneau des matrices 2×2 sur $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$

$$a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_1\delta & a_2 + a_3\delta \\ -a_2 + a_3\delta & a_0 - a_1\delta \end{pmatrix}.$$

On arrive ainsi à

Proposition 6 *Soit $p \equiv 1\,(mod\,4)$; soit M un entier positif impair, non divisible par p, tel qu'il existe $\delta \in \mathbb{Z}$ tel.que $\delta^2 = -1\,(mod\,M)$. A chaque $\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in B_p$, on associe l'image dans $PGL(2, \mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$ de la matrice*

$$\begin{pmatrix} a_0 + a_1\delta & a_2 + a_3\delta \\ -a_2 + a_3\delta & a_0 - a_1\delta \end{pmatrix}.$$

On note $S_{p,M}$ l'ensemble de ces éléments de $PGL(2, \mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$, et H le sous-groupe de $PGL(2, \mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$ engendré par $S_{p,M}$. Pour M assez grand, $X^{p,M}$ est isomorphe au graphe de Cayley $X(H, S_{p,M})$; de plus

(a) si p est un carré modulo M, alors $H = PSL(2, \mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$ et $X^{p,M}$ est un graphe non biparti.

(b) si p n'est pas un carré modulo M, alors H contient $PSL(2, \mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$ comme sous-groupe d'indice 2, et $X^{p,M}$ est un graphe biparti.

Pour la preuve, voir le Théorème 7.4.3 de [41] (ou le Théorème 3.3.1 de [62] si M est un premier q; notons que, dans ce cas, on a $H = PGL(2,q)$ si $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$ dans la proposition précédente). Le résultat principal de Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis est le suivant.

Théorème 2 *Soient $p \equiv 1\,(mod\,4)$ et M un entier positif impair non divisible par p. Le graphe $X^{p,M}$ est un graphe de Ramanujan.*

Preuve : Notons n le nombre de sommets de $X^{p,M}$ et $\mu_0 = p+1 > \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{n-1}$ les valeurs propres de sa matrice d'adjacence. Supposons $X^{p,M}$ non biparti (le cas biparti se traite de manière analogue : il faut seulement faire attention à la valeur propre $-p-1$). Nous devons montrer $|\mu_i| \leq 2\sqrt{p}$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Comme $X^{p,M} = \Gamma(2M)\backslash\mathcal{T}_{p+1}$, nous faisons appel à la la formule (3) ; pour un entier $m \geq 1$, on a

$$(4) \qquad \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} \sum_{x \in R} |\{\gamma \in \Gamma(2M) : d(\gamma x, x) = m - 2r\}| = p^{\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} U_m\left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{p}}\right),$$

où R est un ensemble de représentants pour les orbites de $\Gamma(2M)$ sur $\mathcal{T}^0_{p+1}$. Identifions $\mathcal{T}^0_{p+1}$ à $\Gamma(2)$, de sorte que R devient un ensemble de représentants pour les classes latérales de $\Gamma(2M)$ dans $\Gamma(2)$; en notant e le neutre de $\Gamma(2)$, le membre de gauche de (4) devient

$$\sum_{0\leq r\leq \frac{m}{2}} \sum_{x\in R} |\{\gamma \in \Gamma(2M) : d(x^{-1}\gamma x, e) = m-2r\}|$$

$$= n \sum_{0\leq r\leq \frac{m}{2}} |\{\gamma \in \Gamma(2M) : d(\gamma, e) = m-2r\}|$$

puisque $\Gamma(2M)$ est normal dans $\Gamma(2)$. Cela donne

$$\sum_{0\leq r\leq \frac{m}{2}} |\{\gamma \in \Gamma(2M) : d(\gamma, e) = m-2r\}| \;=\; \frac{p^{\frac{m}{2}}}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U_m\left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{p}}\right), \tag{5}$$

où d désigne maintenant la métrique des mots dans le groupe libre $\Gamma(2)$.

On va alors ré-interpréter le membre de gauche de (5) en termes de formes quadratiques. Considérons la forme quadratique

$$Q(x_0, x_1, x_2, x_3) \;=\; x_0^2 + 4M^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

et notons $r_Q(p^m)$ le nombre de représentations entières de p^m par Q ; c'est aussi le cardinal de l'ensemble

$$\{\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}(\mathbb{Z}) : N(\alpha) = p^m,\ \alpha - a_0 \equiv 0\,(mod\, 2M)\}.$$

Par la seconde assertion de la Proposition 5, un α dans cet ensemble s'écrit de manière unique sous la forme

$$\alpha \;=\; \pm p^r w_\ell(\alpha_1, \overline{\alpha_1}, \cdots, \alpha_s, \overline{\alpha_s}), \tag{6}$$

avec $2r + \ell = m$; de plus $[\alpha]$ est dans le sous-groupe de congruence $\Gamma(2M)$ et à distance $\ell = m - 2r$ de e dans le groupe libre $\Gamma(2)$. Réciproquement, un élément $\gamma \in \Gamma(2M)$ à distance $m - 2r$ de e dans $\Gamma(2)$ fournit, par la formule (6), deux représentations de p^m par Q ; donc

$$r_Q(p^m) \;=\; 2\sum_{0\leq r\leq \frac{m}{2}} |\{\gamma \in \Gamma(2M) : d(\gamma, e) = m-2r\}|$$

et, du fait de (5),

$$r_Q(p^m) \;=\; \frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} U_m\left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{p}}\right). \tag{7}$$

L'idée est maintenant d'estimer, en fonction de p^m, les ordres de grandeur des différents termes de (7). Pour estimer le membre de droite, on effectue la substitution $\frac{\mu_j}{2\sqrt{p}} = \cos\phi_j$, de sorte que le problème est de montrer que ϕ_j est réel pour $1 \leq j \leq n-1$.

La valeur propre $\mu_0 = p + 1$ correspond à $\phi_0 = i \log \sqrt{p}$ et

$$(8) \qquad U_m(\frac{p+1}{2\sqrt{p}}) \;=\; p^{-\frac{m}{2}}.\frac{p^{m+1}-1}{p-1} = p^{-\frac{m}{2}}.\sum_{d|p^m} d;$$

d'autre part on voit facilement que, pour $m \to \infty$

$$(9) \qquad \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin(m+1)\phi_j}{\sin\,\phi_j} \;=\; o(p^{\frac{m}{2}}).$$

Pour estimer $r_Q(p^m)$, on fait appel aux résultats venus de la théorie des formes modulaires. La fonction θ de Q est une forme modulaire de poids 2 et de niveau $16M^2$, ce qui veut dire que la fonction

$$\theta(z) \;=\; \sum_{x \in \mathbb{Z}^4} e^{2\pi i Q(x) z}$$

est holomorphe sur le demi-plan supérieur, et vérifie

$$\theta(\gamma \cdot z) \;=\; (cz+d)^2 \theta(z)$$

pour tout z du demi-plan et tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans le sous-groupe de congruence $\Gamma_0(16M^2)$ de $SL_2(\mathbb{Z})$:

$$\Gamma_0(16M^2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 (mod.\, 16M^2) \right\}$$

(voir [50], 4.9.5; [62], 1.3). On peut alors écrire θ comme une somme $\theta = E_2 + f$, où $E_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) e^{2\pi i n z}$ est une série d'Eisenstein, et $f = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n z}$ est une forme modulaire parabolique ([62],1.4). A ce stade, la formule (7) devient, en tenant compte de (8)

$$(10) \qquad \delta(p^m) + a(p^m) \;=\; \frac{2}{n} \sum_{d|p^m} d \;+\; \frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin(m+1)\phi_j}{\sin\,\phi_j}.$$

Nous voulons montrer pour commencer que $\delta(p^m) = \frac{2}{n} \sum_{d|p^m} d$. Pour cela, nous faisons appel à la *conjecture de Ramanujan-Petersson* pour les formes modulaires : en poids 2 (c'est le cas ici), elle a été démontrée par Eichler [21], comme conséquence de l'hypothèse de Riemann sur les courbes algébriques sur un corps fini, démontrée par Weil [75] (en poids supérieur à 2, elle a été démontrée par Deligne [18]); elle nous donne, pour tout $\epsilon > 0$,

$$(11) \qquad a(p^m) \;=\; O(p^{\frac{m}{2}(1+\epsilon)}).$$

Tenant compte de (9), la formule (10) devient, pour $m \to \infty$,

$$(12) \qquad \delta(p^m) \;=\; \frac{2}{n} \sum_{d|p^m} d \;+\; o(p^m)$$

D'autre part, les coefficients $\delta(n)$ de E_2 sont de la forme

$$(13) \qquad \delta(n) = \sum_{d|n} d.F(d),$$

où $F : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est une fonction périodique de période $16M^2$ (voir [56], Proposition 17 du Chapitre IV ; [62], 1.4). On utilise alors le lemme élémentaire suivant ([44], lemme 4.4 ; [62], lemme 3.5.1) :

Lemme 1 *Soit $G : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique telle que, pour $m \to \infty$*

$$\sum_{d|p^m} d.G(d) = o(p^m).$$

Alors $G(p^m) = 0$ pour tout m.

Ce lemme implique immédiatement $\delta(p^m) = \frac{2}{n} \sum_{d|p^m} d$. En comparant (10) et (11), on obtient, pour tout $\epsilon > 0$:

$$\frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin(m+1)\phi_j}{\sin \phi_j} = O(p^{\frac{m}{2}(1+\epsilon)});$$

il est alors clair que les ϕ_j $(1 \leq j \leq n-1)$ doivent être réels, ce qui termine la preuve.

Dans son livre ([41], Chapitre 6), Lubotzky donne également une approche adélique très élégante au Théorème 2. L'idée se trouve presqu'entièrement dans la solution de Drinfeld [19] au problème de Ruziewicz sur la sphère S^2 (une mesure finiment additive, définie sur la σ-algèbre des parties de S^2 mesurables au sens de Lebesgue, et invariante par rotations, est nécessairement proportionnelle à la mesure de Lebesgue) ; la lecture de la preuve de Drinfeld est recommandée, pour sa redoutable efficacité (une page !). Le schéma de la preuve adélique du Théorème 2 est le suivant :

- Puisque $G(\mathbb{Q}_p) \simeq PGL(2, \mathbb{Q}_p)$, on peut identifier $\Gamma(N)$ à un réseau co-compact de $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$. En utilisant la classification des fonctions et représentations sphériques de $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$, on montre que $X^{p,M}$ est un graphe de Ramanujan si et seulement si aucune représentation de la série complémentaire de $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$ n'apparaît dans $L^2(PGL(2, \mathbb{Q}_p)/\Gamma(N))$, à l'exception de la représentation triviale et éventuellement (dans le cas biparti) de la représentation "signe" $\gamma \mapsto (-1)^{v_p(\det \gamma)}$. Ce résultat remonte à Ihara ([30], remarque (R) ; [41], Corollaire 5.5.3). Soit donc ρ une composante irréductible de dimension $\neq 1$ de $L^2(PGL(2, \mathbb{Q}_p)/\Gamma(N))$; notons ρ_∞ la représentation triviale de $G(\mathbb{R}) \simeq SO(3)$; alors $\rho \otimes \rho_\infty$ apparaît dans $L^2((PGL(2, \mathbb{Q}_p) \times SO(3))/\Gamma(N))$.
- Notons $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$. Grâce au *théorème d'approximation forte*, on plonge $L^2((PGL(2, \mathbb{Q}_p) \times SO(3))/\Gamma(N)$ comme $G(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{R})$-module dans $L^2(G(\mathbf{A})/G(\mathbb{Q}))$ ([41], Proposition 6.3.3). On trouve donc une représentation automorphe $\bigotimes_{q \in P \cup \{\infty\}} \rho_q$ de $G(\mathbf{A})$ avec $\rho_p = \rho$ et ρ_∞ triviale.
- On fait appel à la *correspondance de Jacquet-Langlands* : il existe une représentation automorphe $\bigotimes_{q \in P \cup \{\infty\}} \pi_q$ de $PGL(2, \mathbf{A})$ telle que $\rho_q = \pi_q$ pour $q \neq 2, \infty$. De plus π_∞ est dans la série discrète de $PGL(2, \mathbb{R})$.

- On termine en utilisant la formulation en théorie des représentations du résultat de Deligne sur la conjecture de Ramanujan-Petersson (voir l'appendice 2 de [41], par Rogawski) : si $\bigotimes_{q\in P\cup\{\infty\}}\pi_q$ est une représentation automorphe de $PGL(2,\mathbb{A})$ avec π_∞ dans la série discrète de $PGL(2,\mathbb{R})$, alors, pour tout $q\in P$, la représentation π_q n'est pas dans la série complémentaire de $PGL(2,\mathbb{Q}_q)$; en particulier $\pi_p=\rho_p=\rho$ n'est pas dans la série complémentaire de $G(\mathbb{Q}_p)$.

Le Théorème 2 fournit des familles de graphes de Ramanujan dont le degré minimal vaut 5. En utilisant une algèbre de quaternions définie positive sur $\mathbb{Q}$ mais scindée en 2 (au contraire de l'algèbre des quaternions de Hamilton), P. Chiu [13] a construit la première famille de graphes de Ramanujan de degré 3.

2.2 Les graphes de Mestre et Oesterlé

Dans [49], Mestre donne une construction très élégante, due à Oesterlé et lui, de graphes de Ramanujan associés à des familles de courbes elliptiques. Fixons un nombre premier ℓ ; une courbe elliptique E définie sur $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ est *supersingulière* si E n'a pas de point d'ordre ℓ (c'est une des nombreuses définitions possibles : voir [67], Théorème 3.1 du Chapitre V). Considérons l'ensemble S_ℓ des classes d'isomorphisme de courbes elliptiques supersingulières sur $\overline{\mathbb{F}_\ell}$.

Pour chaque premier p différent de ℓ, on va définir un *graphe de Brandt* $B(p,\ell)$ dont l'ensemble des sommets est S_ℓ. L'ensemble des arêtes de $B(p,\ell)$ sera l'ensemble des isogénies de degré p entre deux courbes de S_ℓ. Si $y : E_1 \to E_2$ est une telle isogénie, on définit $\overline{y} : E_2 \to E_1$ comme l'isogénie duale de y, telle que $\overline{y}\circ y$ est la multiplication par p sur E_1 (voir [67], Théorème 6.1 du Chapitre III). Il faut prendre garde ici qu'il peut arriver que $y=\overline{y}$, donc ces graphes ne satisfont pas réellement aux conditions de la Définition 1. Passons outre à cette difficulté, qu'on pourrait lever en définissant des sommets avec multiplicité dans un graphe. Remarquons alors que $B(p,\ell)$ est régulier de valence $p+1$, en d'autres termes que, pour $E\in S_\ell$, il y a $p+1$ isogénies y de degré $p+1$ et d'origine E. En effet, y est déterminé par son noyau, qui est un sous-groupe d'ordre p de E ; d'autre part, le groupe $E[p]$ des points de p-torsion de E est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ([67], Corollaire 6.4 du Chapitre III), et contient donc $p+1$ sous-groupes d'ordre p. Notons T_p la matrice d'adjacence de $B(p,\ell)$, donc définie par

$$T_p(E)=\sum_C E/C$$

où C parcourt les sous-groupes d'ordre p de E. Notons $C^0_{S_\ell}$ l'espace des 0-chaînes de somme nulle sur S_ℓ.

Notons encore $\mathcal{S}_2(\ell)$ l'espace des formes modulaires paraboliques de poids 2 et de niveau ℓ, sur lequel agissent les opérateurs de Hecke classiques. Le point crucial est qu'il existe un isomorphisme, compatible avec l'action des opérateurs de Hecke, de C^0_S sur $\mathcal{S}_2(\ell)$ ([49], Théorème 1). Grâce à Eichler [21], on obtient donc directement que les valeurs propres de T_p sur $C^0_{S_\ell}$ sont inférieures ou égales à $2\sqrt{p}$. Ceci implique d'abord que le graphe $B(p,\ell)$ est connexe (puisque la valeur propre $p+1$ est de multiplicité 1), ensuite que $B(p,\ell)$ est un graphe de Ramanujan non biparti.

Pour construire une famille infinie de graphes de Ramanujan réguliers de valence $p+1$, il suffit donc de faire varier le nombre premier ℓ. Le nombre de sommets de $B(p,\ell)$, c'est-à-dire le nombre de courbes elliptiques supersingulières sur $\overline{\mathbb{F}_\ell}$, peut s'estimer par la "formule de masse" d'Eichler et Deuring ([29], Théorème 4.1 du Chapitre 13) :

$$\sum_{E \in S_\ell} \frac{1}{|Aut\, E|} = \frac{\ell - 1}{24}.$$

En se rappelant que l'ordre de $Aut\, E$ divise 24 (*cf.* [67], Théorème 10.1 du Chapitre III), on voit que $|S_\ell| = O(\ell)$; mais on dispose en fait de formules exactes, qu'on trouve par exemple dans [29], §4 du Chapitre 13. Ainsi, si $\ell \equiv 1 \,(mod\, 12)$, on a $|Aut\, E| = 2$ pour tout E, d'où $|S_\ell| = \frac{\ell-1}{12}$.

Mestre a exploité les graphes $B(2,\ell)$ pour dresser des listes (pour ℓ pas trop grand) de toutes les courbes elliptiques supersingulières sur $\overline{\mathbb{F}_\ell}$. On commence par déterminer *une* courbe elliptique supersingulière E_0 ; on est aidé pour cela par le fait que l'invariant j de E_0 est dans $\mathbb{F}_{\ell^2}$. Mieux : si $\ell \equiv 2 \,(mod\, 3)$, la courbe E_0 d'équation $y^2 = x^3 + 1$ (avec $j(E_0) = 0$) fait l'affaire ; et si $\ell \equiv 3 \,(mod\, 4)$, la courbe E_0 d'équation $y^2 = x^3 + x$ (avec $j(E_0) = 1728$) convient ; pour tout ceci, voir [67], §4 du Chapitre V. On utilise alors les isogénies de degré 2 d'origine E_0. Si E est lié à E_0 par une telle isogénie, leurs invariants j sont liés par une équation polynomiale $\Phi_2(j(E_0), j(E)) = 0$, de degré 3 en $j(E)$. Une fois E connu, on cherche les 3 courbes supersingulières qui lui sont reliées, mais on en connaît déjà une, à savoir E_O ; il faut donc résoudre une équation du second degré en les invariants j. En travaillant de proche en proche, on va trouver toutes les courbes supersingulières, puisque $B(2,\ell)$ est connexe. Au §2.4 de [49], Mestre montre que cette exploration se fait en $O(\ell \log \ell)$ pas.

On dispose d'un dictionnaire entre courbes elliptiques supersingulières et ordres dans les algèbres de quaternions (voir [73] pour le matériel nécessaire). En effet, notons D_ℓ l'unique algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$ ramifiée exactement en ℓ et en ∞ ; pour $\ell = 2$, c'est l'algèbre $\mathbb{H}$ des quaternions de Hamilton. Si E est une courbe elliptique supersingulière sur $\overline{\mathbb{F}_\ell}$, l'anneau $End\, E$ de ses endomorphismes est un ordre maximal de D_ℓ (voir [67], Théorème 3.1 du Chapitre V et ex. 3.18). Fixons une telle courbe E_0, et notons $\mathcal{O} = End\, E_0$ l'ordre maximal associé. L'application

$$E \to Hom(E_0, E)$$

définit une bijection de S_ℓ sur l'ensemble des classes d'idéaux à droite sur $\mathcal{O}$, ce qui fournit déjà une nouvelle interprétation du nombre de sommets des graphes $B(p,\ell)$. Selon ce point de vue, les opérateurs T_p deviennent exactement les *matrices de Brandt* : si $I_1, \cdots, I_h$ sont des représentants des classes d'idéaux à gauche de $\mathcal{O}$, notons $\mathcal{O}_i$ le normalisateur à droite de I_i : c'est encore un ordre maximal de D_ℓ, et on note e_i l'ordre de son groupe d'unités. Le coefficient (i,j) de la matrice de Brandt $b^{(p)}$ est donné par

$$b_{i,j}^{(p)} e_j = \left| \{\alpha \in I_j^{-1} I_i : N(\alpha) = \frac{pN(I_i)}{N(I_j)}\} \right|,$$

où N désigne la norme (réduite) dans D_ℓ. Si E_i, E_j sont les courbes elliptiques supersingulières qui correspondent à I_i, I_j respectivement, $b_{i,j}^{(p)}$ est le nombre d'isogénies de degré p de E_i vers E_j, à un automorphisme de E_j près ([49], §2.3). Notons G_ℓ le quotient du groupe multiplicatif de D_ℓ par son centre; G_ℓ est vu comme groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$. Comme $G_\ell(\mathbb{Q}_p) \simeq PGL(2, \mathbb{Q}_p)$, on peut faire agir $G_\ell(\mathbb{Q}_p)$ sur l'arbre $\mathcal{T}_{p+1}$, et $B(p, \ell)$ apparaît alors comme le "graphe-quotient" de $\mathcal{T}_{p+1}$ par $G_\ell(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ ([73], §3 du Chapitre 5; voir aussi [37], Proposition 5 du Chapitre 9).

Les matrices de Brandt décrites ci-dessus correspondent à des ordres maximaux de D_ℓ, c'est-à-dire à des ordres de niveau ℓ au sens d'Eichler. Mestre et Oesterlé [49] ont aussi regardé la situation plus générale des ordres de niveau ℓN, où N est un entier non divisible par ℓ; les matrices de Brandt correspondent alors aux classes d'isomorphismes de couples (E, C), où E est une courbe elliptique supersingulière sur $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ et C est un groupe cyclique d'ordre N de E. En définissant convenablement l'opérateur T_p sur les couples (E, C), on obtient encore des familles de graphes de Ramanujan non bipartis, de valence $p+1$. En considérant les ordres de niveau $\ell^2 N$ dans D_ℓ et les matrices de Brandt correspondantes, Pizer [61] donne des familles de graphes de Ramanujan de valence $p+1$, qui sont bipartis si p n'est pas un carré modulo ℓ (voir aussi [72]).

2.3 Les graphes de Morgenstern

Soit q une puissance de premier; notons $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments. En considérant des algèbres de quaternions D sur le corps global $K = \mathbb{F}_q(t)$, Morgenstern a construit des familles infinies de graphes de Ramanujan de valence $q+1$. L'idée consiste à adéliser la situation, exactement comme dans la version adélique de la construction des graphes de Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis. Si G' est le quotient du groupe multiplicatif de D par son centre, on se ramène à un problème sur les représentations cuspidales du groupe adélique $G'(\mathbf{A}_K)$. Après usage de la correspondance de Jacquet-Langlands, le coup de grâce est donné par la solution de Drinfeld à la conjecture de Petersson pour $GL(2, K)$: si $\bigotimes_v \pi_v$ est une représentation cuspidale de $GL(2, \mathbf{A}_K)$, alors pour toute place finie v de K, la composante locale π_v n'est pas dans la série complémentaire de $GL(2, K_v)$ (voir [20], Corollaire au Théorème 1.1).

Ici encore, on peut expliciter les constructions en identifiant les graphes construits comme quotients de l'arbre régulier $\mathcal{T}_{q+1}$ à des graphes de Cayley de certains groupes finis. Plus précisément, si q est impair, on choisit un élément δ qui n'est pas un carré dans $\mathbb{F}_q$, ainsi qu'un polynôme $g \in \mathbb{F}_q[t]$, irréductible de degré d pair. Notons (a_k, b_k) $(1 \leq k \leq q+1)$ les $q+1$ solutions dans $\mathbb{F}_q$ de l'équation $b^2\delta - a^2 = 0$. Identifions le corps $\mathbb{F}_{q^d}$ au quotient de l'anneau de polynômes $\mathbb{F}_q[t]$ par l'idéal engendré par g. Soit $\sqrt{\delta}$ une racine carrée de δ dans $\mathbb{F}_{q^d}$; considérons l'ensemble S_{q+1} des images dans $PGL(2, q^d)$ des $q+1$ matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & a_k - b_k\sqrt{\delta} \\ (a_k + b_k\sqrt{\delta})(t-1) & 1 \end{pmatrix} \qquad (1 \leq k \leq q+1). \tag{14}$$

Morgenstern établit ([52], Théorème 4.13)

Théorème 3 *Soit q impair.*

1. *Si* $\left(\frac{t}{g(t)}\right) = 1$, *l'ensemble S_{q+1} défini en (14) est une partie génératrice symétrique de $PSL(2,q^d)$, et le graphe de Cayley correspondant est un graphe de Ramanujan de valence $q+1$ et non biparti.*
2. *Si* $\left(\frac{t}{g(t)}\right) = -1$, *l'ensemble S_{q+1} défini en (14) est une partie génératrice symétrique de $PGL(2,q^d)$, et le graphe de Cayley correspondant est un graphe de Ramanujan de valence $q+1$ et biparti.*

Si q est une puissance de 2, il faut modifier la construction comme suit. On commence par choisir $\delta \in \mathbb{F}_q$ tel que le polynôme $f(t) = t^2 + t + \delta$ est irréductible sur $\mathbb{F}_q$, ainsi qu'un polynôme $g \in \mathbb{F}_q[t]$, irréductible de degré d pair. On note (a_k, b_k) $(1 \leq k \leq q+1)$ les $q+1$ solutions dans $\mathbb{F}_q$ de l'équation $b^2\delta + ab + a^2 = 0$. On identifie le corps $\mathbb{F}_{q^d}$ au quotient de l'anneau de polynômes $\mathbb{F}_q[t]$ par l'idéal engendré par g. Soit ϵ une racine de f dans $\mathbb{F}_{q^d}$; considérons l'ensemble S_{q+1} des images dans $PGL(2,q^d)$ des $q+1$ matrices

$$(15) \qquad \begin{pmatrix} 1 & a_k + b_k\epsilon \\ (a_k + b_k\epsilon + b_k)t & 1 \end{pmatrix} \qquad (1 \leq k \leq q+1).$$

Morgenstern établit ([52], Théorème 5.13)

Théorème 4 *Soit q pair. L'ensemble S_{q+1} défini en (15) est une partie génératrice symétrique de $PSL(2,q^d)$, et le graphe de Cayley correspondant est un graphe de Ramanujan de valence $q+1$ et non biparti.*

Notons $\mathbb{F}_q((\frac{1}{t}))$ le corps des séries de Laurent formelles en $\frac{1}{t}$ sur le corps fini $\mathbb{F}_q$. Pour traiter des quotients de l'arbre de $PGL(2,\mathbb{F}_q((\frac{1}{t})))$ par des réseaux Γ non uniformes (typiquement $\Gamma = PGL(2,\mathbb{F}_q[t])$, voir [65], §2 du Chapitre II), Morgenstern a introduit les *diagrammes de Ramanujan* : ce sont des graphes pondérés par des poids définis sur les sommets et les arêtes (avec certaines relations de compatibilité) ; comme la somme des poids des sommets est finie, on peut d'une certaine manière considérér un diagramme comme un objet fini, même si le graphe sous-jacent est infini. Dans [51] (voir aussi [41], 8.4), Morgenstern définit la constante isopérimétrique et l'opérateur d'adjacence A d'un tel objet, isole la condition extrémale "de Ramanujan" sur le spectre de A, et montre que les quotients de l'arbre de $PGL(2,\mathbb{F}_q((\frac{1}{t})))$ par les sous-groupes de congruence de $\Gamma = PGL(2,\mathbb{F}_q[t])$ sont des diagrammes de Ramanujan. Morgenstern parvient à appliquer ces diagrammes à la construction de superconcentrateurs (voir §4.1 ci-dessous).

Une autre généralisation des graphes de Ramanujan a été définie et étudiée dans [40] sous le nom de *systèmes locaux de Ramanujan* : la construction d'exemples non triviaux dépend des résultats de [18].

2.4 Constructions à valences non bornées

Plusieurs personnes ont observé que certains graphes intéressants sont effectivement des graphes de Ramanujan, et qu'il est ainsi possible de construire des familles infinies de graphes de Ramanujan *à valences non bornées.* Cependant, il convient de rappeler que ces familles ne sont pas des solutions au *problème de base* de la section 1, et que la vraie difficulté est de construire des familles de graphes de Ramanujan à valence fixée.

Nous donnons une liste des principales constructions de familles infinies de graphes de Ramanujan, par ordre croissant de difficulté à établir les bornes de Ramanujan :

1) Les graphes complets : le graphe complet sur n sommets est régulier de valence $n-1$, et c'est un graphe de Ramanujan puisque les valeurs propres de sa matrice d'adjacence sont -1 et $n-1$.

2) Les graphes de Paley : un graphe X à n sommets et régulier de valence k, est *fortement régulier* de paramètres r_1, r_2 si deux sommets quelconques x, x' de X ont exactement r_1 sommets voisins en commun si x, x' sont extrémités d'une même arête, et r_2 sommets voisins en commun sinon. Le spectre de la matrice d'adjacence d'un graphe fortement régulier se calcule en résolvant une équation du second degré ([7], §3.c), et on obtient qu'un graphe fortement régulier de paramètres r_1, r_2 est de Ramanujan si et seulement si $3k + r_2 \geq 4 + 2 \cdot |r_1 - r_2| \cdot \sqrt{k-1}$. Comme l'a remarqué de la Harpe, cela s'applique aux graphes de Paley X_q, avec q une puissance de premier et q congru à 1 modulo 4 : le graphe de Paley X_q est le graphe de Cayley du groupe additif du corps fini $\mathbb{F}_q$ par rapport à l'ensemble des carrés non nuls de $\mathbb{F}_q$; la valence de X_q est $\frac{q-1}{2}$, et c'est un graphe de Ramanujan ([41], Proposition 8.3.3).

3) Soit H un groupe fini, et S une partie génératrice symétrique et invariante par automorphismes intérieurs, donc réunion de classes de conjugaison $C_1, \cdots, C_k$. C'est une conséquence immédiate du lemme de Schur que les valeurs propres du graphe de Cayley $X(H,S)$ sont les $\frac{1}{\chi(e)} \sum_{i=1}^{k} |C_i| \chi(C_i)$, où χ parcourt l'ensemble des caractères irréductibles de H. La situation se simplifie encore si S est réduite à une classe de conjugaison ; dans ce cas, par simple contemplation d'une table de caractères de H, on peut vérifier si $X(H,S)$ est un graphe de Ramanujan. Au paragraphe 8.2 de [41], Lubotzky donne une série d'exemples avec $H = SL(2,q)$, où q est une puissance de premier. Par exemple, si S est la classe de conjugaison de $\begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu^{-1} \end{pmatrix}$, avec ν un générateur du groupe multiplicatif du corps fini $\mathbb{F}_q$, le graphe $X(H,S)$ est de Ramanujan.

4) Chung [14], Li ([36] ; [37], §4 du Chapitre 9 ; [38]), Terras et ses collaborateurs ([69], [48]) ont étudié des graphes de Ramanujan obtenus à partir de groupes abéliens finis. Si Γ est un tel groupe, noté additivement, et S une partie génératrice symétrique de Γ, le graphe de Cayley de Γ par rapport à S s'appelle un *graphe de différence*, puisque deux éléments $x, y \in \Gamma$ sont adjacents si et seulement si $x - y \in S$. Il est clair que les valeurs propres de la matrice d'adjacence de ce graphe de Cayley sont données par les sommes $\sum_{s\in S} \chi(s)$, où χ parcourt l'ensemble des caractères de Γ. Donc, si l'on arrive à assurer

$$|\sum_{s\in S} \chi(s)| \leq 2\sqrt{|S|-1}$$

pour tout caractère non trivial de Γ, le graphe de Cayley correspondant sera un graphe de Ramanujan. Le problème devient immédiatement un problème de majoration de sommes d'exponentielles de type Kloosterman. Chung, Li et Terras donnent plusieurs exemples non triviaux de cette situation, où les estimations nécessaires proviennent des bornes de

Weil [74] sur certaines sommes exponentielles, qui dépendent elles-mêmes de la preuve de l'hypothèse de Riemann [75] pour les courbes projectives sur $\mathbb{F}_q$.

5) Terras et ses élèves de San Diego ont introduit des graphes appelés (assez abusivement) "demi-plans supérieurs finis" (voir [3], [69]). Soit q une puissance de premier impair, et soit δ un générateur du groupe multiplicatif du corps $\mathbb{F}_q$; on identifie $\mathbb{F}_{q^2}$ à $\mathbb{F}_q(\sqrt{\delta})$. L'ensemble des sommets du "demi-plan supérieur fini" est

$$H_q = \{x + y\sqrt{\delta} : x, y \in \mathbb{F}_q, y \neq 0\},$$

que l'on identifie au groupe "$ax + b$" de $\mathbb{F}_q$

$$Aff(1,q) = \left\{ \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{F}_q, y \neq 0 \right\}.$$

Pour $a \in \mathbb{F}_q$, on considère la conique dans H_q

$$S_q(\delta, a) = \{x + y\sqrt{\delta} \in \mathbb{F}_q(\sqrt{\delta}) : x^2 = ay + \delta \cdot (y-1)^2\};$$

on montre (voir [3]) que, pour $0 \neq a \neq 4\delta$, la conique $S_q(\delta, a)$ est une partie génératrice symétrique à $q+1$ éléments de $Aff(1,q)$, et le "demi-plan supérieur fini" $P_q(\delta, a)$ est le graphe de Cayley de $Aff(1,q)$ par rapport à $S_q(\delta, a)$. La matrice d'adjacence de $P_q(\delta, a)$ s'analyse en faisant agir $G = GL(2,q)$ par homographies sur H_q et en identifiant H_q à G/K, où

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\delta \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F}_q, a^2 - b^2\delta \neq 0 \right\}.$$

Pour montrer que les $P_q(\delta, a)$ sont des graphes de Ramanujan, on commence par utiliser les représentations sphériques de G et les fonctions sphériques associées pour ramener le problème à un problème de majoration de sommes de Kloosterman [4] ; deux preuves différentes des majorations désirées ont été données, par Katz [33] et Li ([37], Théorème 10 du Chapitre 9). Récemment, Li a montré que les $P_q(\delta, a)$ sont des quotients des graphes de Morgenstern basés sur les algèbres de quaternions sur $\mathbb{F}_q(t)$, ce qui fournit une troisième preuve du fait que les $P_q(\delta, a)$ sont des graphes de Ramanujan ([35], Théorème 8).

3 PROPRIÉTÉS DES GRAPHES DE RAMANUJAN

Cette section doit beaucoup aux sections 7.3 de [41] et 3.2 de [62].

Plusieurs invariants combinatoires d'un graphe fini sont liés au spectre de la matrice d'adjacence. Donnons-en quelques exemples.

Définition 8 *Soit X un graphe fini, connexe, sans boucle.*

1. *Le diamètre $D(X)$ du graphe X est le maximum des distances entre deux sommets de X.*
2. *Le nombre d'indépendance $i(X)$ de X est la taille d'une co-clique maximale de X (où une co-clique est un ensemble de sommets qui sont deux à deux non adjacents).*

3. *Le nombre chromatique $\chi(X)$ de X est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les sommets de X de manière à ce que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes.*

Notons que, si n est le nombre de sommets de X, les quantités $i(X)$ et $\chi(X)$ sont liés par l'inégalité simple

$$\chi(X) \geq \frac{n}{i(X)},$$

qui provient du fait que, si $A_1, \cdots, A_{\chi(X)}$ sont les ensembles de sommets de la même couleur dans une coloration de X, chaque partie A_i est une co-clique de X ; dès lors

$$n = \sum_{i=1}^{\chi(X)} |A_i| \leq \chi(X) i(X).$$

Les quantités de la définition précédente peuvent s'estimer spectralement comme suit.

Proposition 7 *Soit X un graphe fini, connexe, sans boucle, à n sommets, et régulier de valence k. Notons $\mu_o = k > \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{n-1}$ les valeurs propres de la matrice d'adjacence de X, et*

$$\mu(X) = max\{|\mu_i| : \mu_i \neq \pm k\}.$$

Alors

(a) $D(X) \leq \frac{\log(n-1)}{\log \frac{k}{\mu(X)}}$;

(b) si X est non biparti :

$$i(X) \leq \frac{\mu(X)}{k} \cdot n;$$

(c) si X est biparti, on a $\chi(X) = 2$; si X est non biparti, on a $\chi(X) \geq \frac{k}{\mu(X)}$.

Le point (a) est dû à Chung ([14], Théorème 1); voir aussi la Proposition 3.2.6 de [62]. Si on pense à un graphe comme à un réseau de communication, le diamètre mesure le délai de transmission; d'où un autre intérêt de construire des graphes avec $\mu(X)$ petit. Le point (b) est dû à Alon; pour la preuve, voir la Proposition 5.2 de [44] ou la Proposition 3.2.3 de [62] (attention, l'hypothèse "non biparti" y manque !). La première assertion du point (c) est triviale; la seconde résulte de (b) et de la remarque précédant la proposition (pour un résultat plus précis, voir le Théorème 8.8 de [7]). Si X est un graphe de Ramanujan, on en déduit par simple substitution

Corollaire 1 *Soit X un graphe de Ramanujan sans boucle, à n sommets, de valence k. Alors*

$$D(X) \leq 2 \log_{k-1}(n).$$

Si de plus X est non biparti,

(1) $i(X) \leq \frac{2\sqrt{k-1}}{k} \cdot n$;

(2) $\chi(X) \geq \frac{k}{2\sqrt{k-1}}$.

Pour d'autres invariants de graphes qui peuvent se lire spectralement, voir les livres de Biggs [7] et Chung [15].

Considérons les graphes connexes, finis, réguliers de valence k fixée. Si X est un tel graphe, disons à n sommets et de tour de taille $g(X)$, alors pour tout sommet x et tout réel positif $R < \frac{g(X)}{2}$, la boule dans X centrée en x et de rayon R est la même que la boule de rayon R de l'arbre régulier $\mathcal{T}_k$; un argument de comptage élémentaire mène à l'inégalité

$$g(X) \leq (2 + o(1)) \log_{k-1}(n)$$

pour $n \to \infty$. Par des arguments de comptage non constructifs, Erdös et Sachs [22] ont montré qu'il existe des familles infinies de graphes réguliers de valence k avec $g(X) \geq log_{k-1}|X|$. Mentionnons au passage un très joli argument de Margulis [46], complètement élémentaire, qui produit des familles explicites de graphes avec $g(X) \geq (\frac{2}{3} + o(1))log_{k-1}|X|$ pour $|X| \to \infty$.

Les graphes de Ramanujan $X^{p,N}$ de Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis sont obtenus comme quotients de l'arbre régulier $\mathcal{T}_{p+1}$ par l'action d'un groupe $\Gamma(2N)$ opérant librement ; il est facile de voir que

$$g(X^{p,N}) = \min_{g \in \Gamma(2N)-\{1\}} p(g),$$

où $p(g)$ est le déplacement minimum d'un sommet de $\mathcal{T}_{p+1}$ sous l'action de g. D'autre part $\Gamma(2N)$ est un sous-groupe de $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$. Supposons pour simplifier que $N = q$, un nombre premier impair distinct de p ; en utilisant les formules pour l'action de $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$ sur $\mathcal{T}_{p+1}$ (voir [41], §7.3 ; [47], lemme 2), on obtient :

Théorème 5 *Pour les graphes $X^{p,q}$:*

(a) Si $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, c-à-d. si $X^{p,q}$ est non biparti, on a

$$g(X^{p,q}) \geq 2\log_p(q);$$

(b) si $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, c-à-d. si $X^{p,q}$ est biparti, on a

$$4\log_p(q) - \log_p(4) \leq g(X^{p,q}) < 4\log_p(q) + \log_p(4) + 2.$$

Les bornes inférieures sont dues à Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis ([44], Théorème 3.4, [47], 3.1 ; voir aussi [41], Théorème 7.3.12 et [62], Théorème 3.3.1) ; la borne supérieure dans (b) est due à Biggs et Boshier [8]. Rappelons que, dans le cas non biparti, on a $|X^{p,q}| = \frac{q(q^2-1)}{2}$ (c'est l'ordre de $PSL(2,q)$) et, dans le cas biparti, on a $|X^{p,q}| = q(q^2 - 1)$ (c'est l'ordre de $PGL(2,q)$). Donc, dans ce dernier cas, on a, pour $q \to \infty$:

$$g(X^{p,q}) = \frac{4}{3}\log_p(|X^{p,q}|) + O(1).$$

On se trouve ici dans un des rares cas en théorie des graphes où l'on dispose d'une construction explicite qui donne un résultat meilleur que les arguments de comptage non constructifs. Il est à noter que la construction de familles de graphes finis ayant un grand tour de taille et un grand nombre chromatique était un vieux problème : la difficulté réside dans le fait qu'un graphe ayant un grand tour de taille ressemble "localement" à un arbre, lequel peut être colorié au moyen de deux couleurs.

Pour q une puissance de premier, Lazebnik, Ustimenko et Woldar [34] ont récemment construit, par des moyens élémentaires, des familles de graphes finis réguliers X de valence q tels que

$$g(X) \geq \frac{4}{3}\log_q(q-1)\log_{q-1}(|X|).$$

Donc, du point de vue du tour de taille, ces graphes sont presqu'aussi bons que les $X^{p,q}$ bipartis de Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis.

Problème ouvert : Pour un entier positif k et un réel $\gamma \in]\frac{4}{3}, 2]$ fixés, construire des familles infinies de graphes X finis, réguliers de degré k, avec $G(X) \geq \gamma \log_{k-1}(|X|)$.

Un graphe de Ramanujan n'a pas nécessairement un grand tour de taille : ainsi, les "demi-plans supérieurs finis" ont des tours de taille égaux à 3 ou 4 (voir [3], page 11).

4 APPLICATIONS

Nous donnons ici, par ordre d'entrée en scène, les applications des graphes de Ramanujan dont nous avons eu connaissance.

Avant de commencer, rappelons que les groupes de quaternions qui servent à Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis pour fabriquer leurs exemples de graphes de Ramanujan avaient été utilisés dès 1984 par Drinfeld [19] pour résoudre le problème de Ruziewicz sur la sphère S^2. En fait, Lubotzky, Phillips et Sarnak ont utilisé ces groupes pour construire, simultanément, des graphes de Ramanujan et pour obtenir les "meilleures" distributions de points sur S^2 (voir [42] ; ces résultats ont été exposés à Bourbaki par Colin de Verdière [17]). Pour une exposition unifiée des trois questions (problème de Ruziewicz, répartition de points sur les sphères, graphes de Ramanujan), on consultera les excellents livres de Lubotzky [41] et Sarnak [62].

4.1 Graphes expanseurs et superconcentrateurs

Il s'agit de l'application qui a précédé la théorie ! En effet, on sait depuis les années 1970 que les familles infinies de graphes expanseurs à valences bornées, c-à-d. les solutions au *problème de base* de la section 1, trouvent des applications dans divers domaines de l'informatique théorique : pour de bonnes présentations de ces applications, voir [1], §1 ;[6] §5; [14] §3; [41] §1.1. Une des applications principales est la construction de superconcentrateurs, des graphes qui servent par exemple en théorie de la complexité [11].

Définition 9 *Soient n, k deux entiers positifs. Un (n, k)-superconcentrateur est un graphe orienté acyclique avec n émetteurs, n récepteurs et au plus kn arêtes, tel que, pour tout entier r avec $1 \leq r \leq n$, tout ensemble de r émetteurs est connecté à tout ensemble de r récepteurs par r chemins disjoints.*

Il est à noter que le nombre des sommets d'un (n,k)-superconcentrateur est en général plus grand que $2n$. L'entier k de la définition est la *densité* du superconcentrateur, dont la qualité se mesure à la petitesse de k. Gabber et Galil ([25], Théorème 3) ont montré comment construire une famille infinie de superconcentrateurs à densités bornées à partir d'une famille infinie de graphes expanseurs à valences bornées ; les graphes de Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis mènent ainsi à des familles de superconcentrateurs de densité inférieure à 58 ; néanmoins, ceci n'est pas aussi bon que la densité de 36 qu'on peut atteindre par des arguments de comptage non constructifs (voir [43] pour les détails). Les graphes de Morgenstern [51] construits à partir de diagrammes de Ramanujan fournissent des familles de superconcentrateurs de densité 66, et Morgenstern conjecture qu'une de ses constructions mène à une famille de superconcentrateurs de densité 28.

4.2 Dimension de certains espaces de formes modulaires

Fixons un nombre premier p et un entier positif N non divisible par p. Notons $C'(\Gamma_0(N),2)$ l'espace engendré par les formes modulaires paraboliques de poids 2 et de niveau N qui sont fonctions propres de l'opérateur de Hecke classique T_p, et associées à des valeurs propres *entières*. En étudiant la distribution asymptotique des valeurs propres de certains revêtements des graphes de Mestre et Oesterlé, Serre [64] pour l'énoncé (a) et Feng-Li [23] pour l'énoncé (b) ont montré

Théorème 6 *(a) Soit $\{l_i : i \geq 1\}$ une famille infinie de nombres premiers. Alors $\dim C'(\Gamma_0(l_i),2) = o(l_i)$.*

(b) Soit $M_i : i \geq 1$ une famille d'entiers de la forme $M_i = l_iN_i$, où l_i est un nombre premier ne divisant pas N_i, et $l_i \to \infty$ pour $i \to \infty$. Si le nombre des facteurs premiers des M_i est borné, alors

$$\dim C'(\Gamma_0(M_i),2) = o(M_i);$$

sinon

$$\dim C'(\Gamma_0(M_i),2) = o(M_i \log\log M_i).$$

Voir aussi le Théorème 15 du Chapitre 9 de [37] pour une preuve.

4.3 Systèmes dynamiques

Soient p, q deux premiers distincts, congrus à 1 modulo 4. Notons B_p, B_q les ensembles de quaternions entiers définis au §2.1 ci-dessus. Notons Ω le sous-ensemble de $(B_p \times B_p \times B_q \times B_q)^{\mathbb{Z}^2}$ formé des $(a_{m,n}, a'_{m,n}, b_{m,n}, b'_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ tels que, pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned} a_{m,n}b_{m,n} &= \pm b'_{m,n}a'_{m,n} \\ a'_{m,n} &= a_{m+1,n} \\ b_{m,n} &= b'_{m,n+1} \\ b'_{m+1,n} &\neq \overline{b'_{m,n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{m+1,n} &\neq \overline{b_{m,n}} \\ a_{m,n+1} &\neq \overline{a_{m,n}} \\ a'_{m,n+1} &\neq \overline{a_{m,n}} \end{aligned}$$

Le groupe $\mathbb{Z}^2$ agit sur l'espace compact Ω, avec une mesure de probabilité invariante μ. Mozes a étudié ce système, en commençant par montrer que son entropie topologique bi-dimensionnelle est nulle. Si on considère l'ensemble des restrictions des éléments de Ω au carré $\{0, \cdots, N-1\} \times \{0, \cdots, N-1\}$ et qu'on note $a(N)$ le nombre d'éléments de cet ensemble, l'entropie topologique du système se définit comme $\lim_{N\to\infty} \frac{\log a(N)}{N^2}$. Ici, on montre que

$$a(N) = (p+1)p^{N-1}(q+1)q^{N-1}$$

(Corollaire 1 de [53]), ce qui implique le résultat.

Soit Γ le sous-groupe de $G(\mathbb{Q})$ engendré par l'image de $B_p \cup B_q$. Le groupe Γ est un réseau co-compact dans $H = G(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_q) \simeq PGL(2, \mathbb{Q}_p) \times PGL(2, \mathbb{Q}_q)$, et le système $(\Omega, \mathbb{Z}^2, \mu)$ est un quotient de $(H/\Gamma, \mathbb{Z}^2, \nu)$, où ν est la mesure de probabilité H-invariante sur H/Γ et $\mathbb{Z}^2$ agit via un homomorphisme dans le sous-groupe de Cartan de H. En reliant Ω aux graphes de Ramanujan de Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis, Mozes démontre (Théorème 1 et Corollaire 4 de [53]) que le système dynamique $(\Omega, \mathbb{Z}^2, \mu)$ est *mélangeant à tous les ordres*, ce qui doit se comprendre comme suit. Pour un entier $k \geq 1$, notons $\Delta : \Omega \to \Omega^k$ l'inclusion de la diagonale, et faisons agir $(\mathbb{Z}^2)^k$ sur Ω^k par l'action-produit. Le système est *mélangeant d'ordre k* si, chaque fois qu'on se donne une suite $(\gamma_{1,n}, \cdots \gamma_{k,n})_{n\geq 1}$ dans $(\mathbb{Z}^2)^k$ telle que $\lim_{n\to\infty} \gamma_{i,n} - \gamma_{j,n} = \infty$ pour $i \neq j$, la suite de mesures $((\gamma_{1,n}, \cdots \gamma_{k,n})_* \Delta_*(\mu))_{n\geq 1}$ converge vers la mesure-produit $\mu^{\otimes k}$. Bien sûr, le système est mélangeant à tous les ordres s'il est mélangeant d'ordre k pour tout $k \geq 1$. Grâce aux bornes de Ramanujan, Mozes est capable de donner des estimations quantitatives sur la vitesse de mélange.

4.4 Produits tensoriels de C*-algèbres

Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie et séparable; notons $B(H)$ la C*-algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H, et $B(H) \otimes B(H)$ le produit tensoriel algébrique de deux copies de $B(H)$. On s'intéresse aux différentes manières de compléter ce produit tensoriel en une C*-algèbre (voir l'exposé Bourbaki de Pisier [60] pour l'historique du problème). La théorie générale des produits tensoriels de C*-algèbres [68] montre que toute C*-norme sur un produit tensoriel algébrique de C*-algèbres est comprise entre une C*-norme minimale $\|\cdot\|_{min}$ et une C*-norme maximale $\|\cdot\|_{max}$. Dans une série de cas importants (par exemple les C*-algèbres nucléaires) on sait que ces deux C*-normes coïncident, mais le problème pour $B(H) \otimes B(H)$ est resté ouvert jusqu'en 1995, quand Junge et Pisier ont démontré [32]

Théorème 7 *Pour un entier n positif, on pose*

$$\lambda(n) = sup\{\frac{\|u\|_{max}}{\|u\|_{min}} : u\, tenseur\, de\, rang\, au\, plus\, n\, dans\; B(H) \otimes B(H)\}.$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C \cdot n^{1/8} \leq \lambda(n) \leq \sqrt{n}.$$

En particulier on voit, en prenant n assez grand, que $\|\cdot\|_{min} \neq \|\cdot\|_{max}$ sur $B(H) \otimes B(H)$. Junge et Pisier posent la question du comportement asymptotique de $\lambda(n)$, et introduisent eux-mêmes une autre quantité C_n qui est excellente pour minorer $\lambda(n)$; ce nombre C_n dépend des représentations unitaires de dimension finie du groupe libre $\mathbb{L}_n$ sur n générateurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Définition 10 *On note C_n l'infimum de l'ensemble des nombres $C > 0$ pour lesquels il existe une suite $(\pi_k)_{k\geq 1}$ de représentations unitaires de dimension finie de $\mathbb{L}_n$ telles que :*

$$\|\sum_{i=1}^{n}(\pi_k \otimes \overline{\pi_m})(a_i)\| \leq C \text{ pour tous } k,\, m \text{ distincts}$$

(où $\overline{\pi_m}$ désigne la représentation contragrédiente de π_m).

Junge et Pisier [32] ont montré que λ_n et C_n sont liés par l'inégalité

$$\frac{n}{C_n} \leq \lambda(n). \tag{16}$$

En utilisant les graphes non bipartis de Morgenstern, qui sont des graphes de Cayley de quotients finis de $\mathbb{L}_{q+1}$ pour q une puissance de premier, on peut montrer [71]

Proposition 8 *Pour $n = q + 1$, avec q une puissance de premier, on a*

$$C_n \leq 2\sqrt{n-1}.$$

Grâce à l'inégalité (16), cela donne, pour n comme dans la proposition

$$\lambda(n) \geq \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \sim \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

D'autre part, Pisier [59] a établi, pour tout $n \geq 2$, l'inégalité

$$C_n \geq 2\sqrt{n-1}. \tag{17}$$

Si n est comme dans la proposition, on a donc $C_n = 2\sqrt{n-1}$, et on conjecture bien sûr que cette égalité a lieu pour tout n. (La construction de familles infinies de graphes de Ramanujan de valence n qui seraient des graphes de Cayley non bipartis, permettrait de démontrer cette conjecture.) A partir de la proposition et de l'inégalité (17), il n'est pas très difficile de démontrer que cette conjecture est vraie asymptotiquement [70].

Corollaire 2 $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{2\sqrt{n}} = 1$.

Le théorème de Junge-Pisier et l'inégalité (16) fournissent un encadrement assez satisfaisant pour le quotient $\frac{\lambda(n)}{\sqrt{n}}$

$$\frac{1}{2} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda(n)}{\sqrt{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda(n)}{\sqrt{n}} \leq 1.$$

4.5 Théorie combinatoire des groupes et propriété (T)

Il ne s'agit pas à proprement parler d'une application des graphes de Ramanujan, mais plutôt d'une application des graphes de Cayley dont les valeurs propres non triviales sont petites, sans être optimales.

Soit Γ un groupe. Une représentation unitaire π de Γ sur un espace de Hilbert H_π est *sans vecteur invariant* s'il n'existe pas de vecteur non nul fixe par $\pi(\Gamma)$ dans H_π.

Théorème 8 *Pour un groupe Γ de type fini, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une partie génératrice finie $S \subset \Gamma$ et un nombre $\epsilon > 0$ tels que, pour toute représentation unitaire π de Γ, sans vecteur invariant, et tout vecteur $\xi \in H_\pi$, il existe $s \in S$ avec $\|\pi(s)\xi - \xi\| \geq \epsilon\|\xi\|$.*
2. *Pour toute partie génératrice finie $S \subset \Gamma$, il existe un nombre $\epsilon > 0$ tel que, pour toute représentation unitaire π de Γ, sans vecteur invariant, et tout vecteur $\xi \in H_\pi$, il existe $s \in S$ avec $\|\pi(s)\xi - \xi\| \geq \epsilon\|\xi\|$.*
3. *Pour toute représentation unitaire π de Γ, le premier espace de cohomologie $H^1(\Gamma, H_\pi)$ est nul.*

Ce résultat est essentiellement dû à Delorme et Guichardet (voir le Théorème 7 du Chapitre 4 de [16]).

Définition 11 *Soit Γ un groupe de type fini. On dit que Γ possède la propriété (T) de Kazhdan si Γ satisfait aux conditions du théorème 8. Si Γ a la propriété (T) et si S est une partie génératrice finie de Γ, la constante de Kazhdan $\kappa(\Gamma, S)$ est le plus grand ϵ qui fait l'affaire au deuxième point du théorème 8.*

Grâce à Margulis [45], la propriété (T) a une idylle avec les graphes expanseurs. En effet, si N est un sous-groupe normal d'indice fini d'un groupe Γ ayant la propriété (T), si S est une partie génératrice finie symétrique à k éléments de Γ, et si S s'injecte dans Γ/N via l'application-quotient $\Gamma \to \Gamma/N$, la première valeur propre non triviale μ_1 de la matrice d'adjacence du graphe de Cayley $X(\Gamma/N, S/N)$ satisfait

$$\mu_1 \leq k - \frac{\kappa(\Gamma, S)^2}{2}.$$

(c'est l'idée de Margulis revue par Alon et Milman [2] ; voir le Théorème 13 du Chapitre 8 de [16] pour une preuve). On en tire que, si de plus Γ est résiduellement fini, la famille des graphes de Cayley $X(\Gamma/N, S/N)$, où N parcourt les sous-groupes normaux d'indice fini dans Γ, répond au *problème de base* de la section 1, et donc forme une famille infinie de graphes expanseurs. Pour un exemple concret, prendre $\Gamma = SL(3, \mathbb{Z})$.

Le problème est que les constantes de Kazhdan sont très difficiles à calculer : jusqu'en 1993, on ne disposait d'aucune valeur exacte pour des groupes infinis ayant la propriété (T) (voir à ce propos l'appendice de [16], par Burger). De même, tous les exemples connus de tels groupes étaient obtenus via la théorie des réseaux dans les groupes de Lie semi-simples réels ou p-adiques. La situation a commencé à bouger en 1993 quand Cartwright, Mlotkowski et Steger [12] ont étudié une classe de groupes agissant simplement transitivement sur les sommets d'un immeuble euclidien de type $\tilde{A}_2$, et ont donné une preuve directe du fait que ces groupes ont la propriété (T). Comme il existe des immeubles de type $\tilde{A}_2$ non classiques, c-à-d. qui ne proviennent pas d'un groupe algébrique sur un corps p-adique, cela fournissait les premiers exemples de groupes avec la propriété (T) mais pas directement liés à des réseaux. La démonstration de Cartwright-Mlotkowski-Steger était un peu pénible, mais avait le mérite de donner la valeur exacte de la constante de Kazhdan associée au système naturel de générateurs. Notons que Nevo et Shalom [54] ont récemment fait des progrès remarquables dans le calcul des constantes de Kazhdan pour les réseaux dans les groupes de Lie semi-simples.

Dans son Séminaire Bourbaki [58], Pansu suggère de démontrer géométriquement qu'un groupe a la propriété (T), en exploitant la troisième assertion du Théorème 8. En effet, supposons que Γ soit le groupe fondamental d'un complexe simplicial fini K, de revêtement universel $\tilde{K}$; si π est une représentation unitaire de Γ sur un espace de Hilbert H_π, formons le fibré plat $E_\pi = \tilde{K} \times_\Gamma H_\pi$. On a alors

$$H^1(\Gamma, H_\pi) = H^1(K, E_\pi),$$

et l'idée de Pansu est de démontrer géométriquement l'annulation du membre de droite, par exemple en utilisant des techniques de courbure combinatoire à la Garland [26] (voir aussi [9]). Cette idée a été concrétisée dans le cas où $\tilde{K}$ est un complexe simplicial fini de dimension 2, ce que nous supposons dorénavant.

L'avantage d'avoir $\tilde{K}$ de dimension 2 est que, pour tout sommet v de $\tilde{K}$, le *link* de v est un graphe $Lk(v)$, que nous supposerons connexe et régulier de valence k_v (cette dernière hypothèse est en fait trop forte : nous l'adoptons pour la simplicité des énoncés). Nous notons comme d'habitude $\mu_{0,v} = k_v > \mu_{1,v} \geq \cdots$ les valeurs propres de la matrice d'adjacence du graphe $Lk(v)$.

Théorème 9 *Soient $\tilde{K}$ un complexe simplicial simplement connexe de dimension 2, et Γ un groupe d'automorphismes de $\tilde{K}$ agissant proprement avec quotient fini. On suppose que, pour tout sommet $v \in K$, le link $Lk(v)$ est connexe, régulier de valence k_v, et satisfait $\mu_{1,v} < \frac{k_v}{2}$. Alors Γ possède la propriété (T).*

Ce résultat est dû indépendamment à Zuk ([76], Théorème 1), Ballmann et Swiatkowski ([5], Corollaire 1), et à Pansu ([57], Théorème 1) dans le cas où $\tilde{K}$ est un immeuble euclidien de type $\tilde{A}_2$; en particulier, on obtient une preuve géométrique du fait que les groupes de Cartwright-Mlotkowski-Steger ont la propriété (T).

Ballmann et Swiatkowski ont étudié les actions propres sur des complexes simpliciaux contractiles de dimension 2. Ils ont montré ([5], Théorème 2)

Théorème 10 *Soit $\langle S|R\rangle$ une présentation finie d'un groupe fini H ; soit X le graphe de Cayley de H par rapport à $S \cup S^{-1}$. On suppose que $g(X) \geq 6$. Alors le groupe Γ donné par la présentation*

$$\Gamma = \langle S \cup \{\tau\} | R \cup \{\tau^2\} \cup \{(s\tau)^3 : s \in S\}\rangle \tag{18}$$

agit proprement avec quotient fini sur un complexe simplicial contractile de dimension 2, dont les links sont isomorphes à X. De plus l'action de Γ sur $\tilde{K}$ est transitive sur les *sommets, et les fixateurs des sommets dans Γ sont exactement les conjugués de H dans Γ. Enfin, si $g(X) \geq 7$, le groupe Γ est hyperbolique au sens de Gromov.*

Les groupes apparaissant dans cet énoncé sont de dimension cohomologique virtuelle 2. En combinant les deux derniers théorèmes, on obtient un résultat tout-à-fait remarquable : notons $k = |S \cup S^{-1}|$ la valence de X et μ_1 la première valeur propre non triviale de sa matrice d'adjacence.

Corollaire 3 *On garde les hypothèses du théorème 10. Si de plus $\mu_1 < \frac{k}{2}$, alors le groupe défini par la présentation (18) a la propriété (T) de Kazhdan.*

Ce résultat permet d'écrire explicitement des présentations de groupes infinis ayant la propriété (T). Bien entendu, la condition $\mu_1 < \frac{k}{2}$ est considérablement moins restrictive que la condition de Ramanujan $\mu_1 \leq 2\sqrt{k-1}$. Comme exemples vérifiant les hypothèses du Corollaire, Ballmann et Swiatkowski donnent précisément les graphes de Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis, puisqu'ils ont un grand tour de taille : c'est évidemment cher payé ! Pour des exemples de graphes de Cayley à petites valeurs propres, voir [24].

5 Remerciements

Merci à A. Terras, W. Li et J-P. Serre de m'avoir communiqué une série de références bien utiles. Je remercie M. Burger, P. de la Harpe, W. Li, S. Mozes, P. Sarnak et tout spécialement A. Lubotzky et J-P. Serre pour une série d'échanges éclairants.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Alon, *Eigenvalues and expanders*, Combinatorica, 6 (1986), pp. 83–96.

[2] N. Alon and V. Milman, *λ_1, isoperimetric inequalities for graphs, and superconcentrators*, J. Combin. Theory, ser. B, 38 (1985), pp. 73–88.

[3] J. Angel, N. Celniker, S. Poulos, A. Terras, C. Trimble, and E. Velasquez, *Special functions on finite upper half planes*, Contemporary Maths., 138 (1992), pp. 1–26.

[4] J. Angel, S. Poulos, A. Terras, C. Trimble, and E. Velasquez, *Spherical functions and transforms on finite upper half planes : eigenvalues of the combinatorial Laplacian, uncertainty, traces*, Contemporary Math., 173 (1994), pp. 15–70.

[5] W. Ballmann and J. Swiatkowski, *On L^2-cohomology and property (T) for automorphism groups of polyhedral cell complexes.* Preprint, 1996.

[6] F. Bien, *Constructions of telephone networks by group representations*, Notices Amer. Math. Soc., 36 (1989), pp. 5–22.

[7] N. Biggs, *Algebraic graph theory (2nd ed.)*, Cambridge University Press, 1993.

[8] N. Biggs and A. Boshier, *Note on the girth of Ramanujan graphs*, J. Combinatorial Theory, ser. B, 49 (1990), pp. 190–194.

[9] A. Borel, *Cohomologie de certains groupes discrets et Laplacien p-adique*, in Séminaire Bourbaki, exposé 437, Springer, pp. 12-34, 1975.

[10] M. BURGER, *Cheng's inequality for graphs.* Preprint, 1987.

[11] P. BÜRGISSER, M. CLAUSEN, AND M. SHOKROLLAHI, *Algebraic complexity theory*, Springer-Verlag, 1997.

[12] D. CARTWRIGHT, W. MLOTKOWSKI, AND T. STEGER, *Property (T) and $\tilde{a}_2$ groups*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 44 (1993), pp. 213–248.

[13] P. CHIU, *Cubic Ramanujan graphs*, Combinatorica, 12 (1992), pp. 275–285.

[14] F. CHUNG, *Diameters and eigenvalues*, Journal Amer. Math. Soc., 2 (1989), pp. 187–196.

[15] ——, *Spectral graph theory*, CBMS reg. conf. ser. in Math. 92, Amer. Math. Soc., 1997.

[16] P. DE LA HARPE AND A. VALETTE, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Astérisque 175, Soc. Math. France, 1989.

[17] Y. C. DE VERDIÈRE, *Distribution de points sur une sphère [d'après Lubotzky, Phillips et Sarnak]*, in Séminaire Bourbaki, exposé 703, Astérisque 177-178, p. 83-93, 1989.

[18] P. DELIGNE, *La conjecture de Weil I*, Publ. Math. IHES, 43 (1974), pp. 273–308.

[19] V. DRINFELD, *Finitely additive measures on S^2 and S^3, invariant with respect to rotations*, Funct. Anal. and its Appl., 18 (1984), pp. 245–246.

[20] ——, *The proof of Petersson's conjecture for $GL(2)$ over a global field of characteristic p*, Funct. Anal. Appl., 22 (1988), pp. 28–43.

[21] M. EICHLER, *Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion*, Arch. Math., 5 (1954), pp. 355–366.

[22] P. ERDÖS AND H. SACHS, *Reguläre Graphen gegebener Taillenweite mit minimaler Knollenzahl*, Wiss. Z. Univ. Halle-Willenberg Math. Nat. R., 12 (1963), pp. 251–258.

[23] K. FENG AND W. LI, *Spectra of hypergraphs and applications*, Journal of number theory, 60 (1996), pp. 1–22.

[24] J. FRIEDMAN, *Some graphs with small second eigenvalues*, Combinatorica, 15 (1995), pp. 31–42.

[25] O. GABBER AND Z. GALIL, *Explicit constructions of linear-sized superconcentrators*, J. Comp. and Syst. Sci., 22 (1981), pp. 407–420.

[26] H. GARLAND, *p-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups*, Ann. of Math., 97 (1973), pp. 375–423.

[27] L. GERRITZEN AND M. VAN DER PUT, *Schottky groups and Mumford curves*, Springer Lect. Notes in Math. 817, 1980.

[28] Y. GREENBERG, *Thèse*, PhD thesis, Hebrew Univ., Jerusalem, 1995.

[29] D. HUSEMOLLER, *Elliptic curves*, Springer, 1987.

[30] Y. IHARA, *Discrete subgroups of $PL(2, k_p)$*, in Algebraic groups and discontinuous subgroups, Proc. Symp. pure Math. IX, Amer. Math. Soc., pp. 272-278, 1966.

[31] ——, *On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields*, J. Math. Soc. Japan, 18 (1966), pp. 219-235.

[32] M. JUNGE AND G. PISIER, *Bilinear forms on exact operator spaces and $B(H) \otimes B(H)$*, Geometric and Functional Analysis, 5 (1995), pp. 329-363.

[33] N. KATZ, *Estimates for Soto-Andrade sums*, J. reine angew. Math., 438 (1993), pp. 143–161.

[34] F. LAZEBNIK, V. USTIMENKO, AND A. WOLDAR, *A new series of dense graphs of high girth*, Bull. Amer. Math. Soc., 32 (1995), pp. 73–79.

[35] W. LI, *Eigenvalues of Ramanujan graphs.* Preprint, 1996.

[36] ——, *Character sums and abelian Ramanujan graphs*, J. Number Theory, 41 (1992), pp. 199–214.

[37] ——, *Number theory with applications*, World Scientific, 1996.

[38] ——, *A survey of Ramanujan graphs*, in Arithmetic, geometry and coding theory (R. Pellikaan, M. Perret, S.G. Vladut eds), W. de Gruyter, pp. 127-143, 1996.

[39] W. LI AND P. SOLÉ, *Spectra of regular graphs and hypergraphs, and orthogonal polynomials*, European J. Combinatorics, 17 (1996), pp. 461–477.

[40] B. J. . R. LIVNE, *Ramanujan local systems on finite graphs.* Preprint, 1997.

[41] A. LUBOTZKY, *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, Birkhäuser, 1994.

[42] A. LUBOTZKY, R. PHILLIPS, AND P. SARNAK, *Hecke operators and distributing points on S^2, I*, Comm. pure and applied Math., 39 (1986), pp. 149–186.

[43] ——, *Ramanujan conjectures and explicit constructions of expanders*, Proc. Symp. on Theo. of Comp. Sci. (STOC), 86 (1986), pp. 240–246.

[44] ——, *Ramanujan graphs*, Combinatorica, 8 (1988), pp. 261–277.

[45] G. MARGULIS, *Explicit construction of concentrators*, Problems Inform. Transmission, 9 (1973), pp. 325–332.

[46] ——, *Explicit constructions of graphs without short cycles and low density codes*, Combinatorica, 2 (1982), pp. 71–78.

[47] ——, *Explicit group-theoretical constructions of combinatorial schemes and their application to the design of expanders and concentrators*, J. Problems of Information Transmission, 24 (1988), pp. 39–46.

[48] A. MEDRANO, P. MYERS, H. STARK, AND A. TERRAS, *Finite analogues of Euclidean space*, J. comput. applied maths., 68 (1996), pp. 221–238.

[49] J.-F. MESTRE, *La méthode des graphes. exemples et applications*, in Proc. int. Conf. on class numbers and fund. units of alg. number fields, Katata, Japan, 217-242, 1986.

[50] T. MIYAKE, *Modular forms*, Springer, 1989.

[51] M. MORGENSTERN, *Ramanujan graphs and diagrams : function field approach*, in Expanding graphs, Amer. Math. Soc, DIMACS ser. 10, pp. 111-117, 1993.

[52] ——, *Existence and explicit construction of $q+1$ regular Ramanujan graphs for every prime power q*, J. Combinatorial Theory, ser. B, 62 (1994), pp. 44–62.

[53] S. MOZES, *A zero entropy, mixing of all orders tiling system*, Contemporary Math., 135 (1992), pp. 319–325.

[54] A. NEVO AND Y. SHALOM, *Explicit Kazhdan constants for representations of semisimple groups and their lattices.* Preprint, 1996.

[55] A. NILLI, *On the second eigenvalue of a graph*, Discrete Math., 91 (1991), pp. 207–210.

[56] A. OGG, *Modular forms and Dirichlet series*, Benjamin, 1969.

[57] P. PANSU, *Formules de Matsushima, de Garland, et propriété (T) pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles.* Preprint, 1995.

[58] ——, *Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité*, in Séminaire Bourbaki, exposé 778, Astérisque 227, pp. 69-105, 1995.

[59] G. PISIER, *Quadratic forms in unitary operators.* A paraître dans Linear Algebra and Appl.

[60] ——, *Espaces d'opérateurs : une nouvelle dualité*, in Séminaire Bourbaki, exposé 814, Février, 1996.

[61] A. PIZER, *Ramanujan graphs and Hecke operators*, Bull. (New Ser.) Amer. Math. Soc., 23 (1990), pp. 127–137.

[62] P. SARNAK, *Some applications of modular forms*, Cambridge University Press, 1990.

[63] J.-P. SERRE, *Lettre à Winnie Li.* 8 octobre 1990.

[64] ——, *Lettre à Winnie Li.* 5 Novembre 1990.

[65] ——, *Arbres, amalgames, SL_2*, Astérisque 46, Soc. Math. France, 1977.

[66] ——, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p*, J. Amer. Math. Soc., 10 (1997), pp. 75–102.

[67] J. SILVERMAN, *The arithmetic of elliptic curves*, Springer, 1986.

[68] M. TAKESAKI, *Theory of operator algebras I*, Springer-Verlag, 1979.

[69] A. TERRAS, *Survey of spectra of Laplacians on finite symmetric spaces*, Experimental Maths., 5 (1996), pp. 15–32.

[70] A. VALETTE, *An application of Ramanujan graphs to C^*-algebra tensor products,II*, in Sém. théorie spectrale et géométrie, pp. 105-107, Institut Fourier, Grenoble, 1996.

[71] ——, *An application of Ramanujan graphs to C^*-algebra tensor products*, Discrete Math., 167 (1997), pp. 597–603.

[72] A. VENKOV AND A. NITIKIN, *The Selberg trace formula, Ramanujan graphs, and some problems of mathematical physics*, St. Petersburg Math. J., 5 (1994), pp. 419–484.

[73] M.-F. VIGNÉRAS, *Arithmétique des algèbres de quaternions*, Springer LNM 800, 1980.

[74] A. WEIL, *On some exponential sums*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 34 (1948), pp. 204–207.

[75] ——, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Hermann, 1948.

[76] A. ZUK, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres*, C.R. Acad. Sci. Paris, sér. I, 323 (1996), pp. 453–458.

Alain VALETTE

Institut de Mathématiques
Université de Neuchâtel
Rue Emile-Argand 13
CH-2000 NEUCHATEL
SUISSE

E-mail : alain.valette@maths.unine.ch