SÉMINAIRE N. BOURBAKI

YVES HELLEGOUARCH

Fonctions zêta en caractéristique positive et modules de Carlitz-Hayes

Séminaire N. Bourbaki, 1997-1998, exp. nº 837, p. 57-79.
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1997-1998__40__57_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 1997
50ème année, 1997-98, n° 837

FONCTIONS ZÊTA EN CARACTÉRISTIQUE POSITIVE ET MODULES DE CARLITZ–HAYES

par **Yves HELLEGOUARCH**

Dans le douzième problème de sa fameuse liste, Hilbert propose de construire une théorie explicite du corps de classes pour tous les corps de nombres. On présente ici la solution donnée par Carlitz et Hayes dans le cas des corps de fonctions des courbes algébriques définies sur un corps fini. Cette solution consiste à briser la symétrie d'un tel corps en introduisant une place non triviale privilégiée dite place "à l'infini", puis à faire agir, par "multiplications complexes" sur le groupe additif, l'anneau A des fonctions (du corps) qui admettent au plus un pôle à l'infini. Les modules de Carlitz-Hayes (les plus simples des modules de Drinfeld) conduisent à une théorie des extensions cyclotomiques dite "géométrique" qui résout ce problème de Hilbert pour les corps globaux de caractéristique positive. Par ailleurs Carlitz et Goss ont introduit pour A un nouveau type de fonctions zêta et de fonctions L que la théorie précédente permet de comparer aux fonctions classiques d'Artin et de Weil.

1. MODULE DE CARLITZ

On note ici par $\mathbb{F}_r$ un corps fini de caractéristique p (de sorte que $r = p^m$) et par $\mathbf{k}$ une extension transcendante pure de degré 1 de $\mathbb{F}_r$. On se donne une place non triviale de degré 1 de $\mathbf{k}$ que l'on appelle la "place à l'infini" et on désigne par $\mathbf{A}$ l'anneau des éléments de $\mathbf{k}$ qui n'admettent de pôles qu'à l'infini.

Si $\boldsymbol{\pi} \in \mathbf{k}$ est une uniformisante pour cette place, on a naturellement $\mathbf{A} = \mathbb{F}_r[\mathbf{T}]$ où $\mathbf{T} = \boldsymbol{\pi}^{-1}$, mais on a aussi $\mathbf{A} = \mathbb{F}_r[\alpha\mathbf{T} + \beta]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{F}_r^*$ et $\beta \in \mathbb{F}_r$, autrement dit le choix de $\mathbf{T}$ n'est pas canonique. Dans ce paragraphe $\mathbf{T}$ sera choisi à une translation près par β.

Soit $\boldsymbol{\Omega}$ un corps quelconque contenant $\mathbf{k}$; nous voulons construire une action $\mathbb{F}_r$-linéaire et polynomiale de $\mathbf{A}$ sur $\mathbb{G}_a(\boldsymbol{\Omega})$ en utilisant des opérateur $\mathbb{F}_r$-linéaires définis de proche en proche pour $x \in \mathbf{\Omega}$ comme suit (cf. [30]) :

$$\begin{cases} D_{\mathbf{T}}^{(0)}(x) & := x \\ D_{\mathbf{T}}^{(1)}(x) & := \dfrac{x^r - x}{T^r - T} \\ D_{\mathbf{T}}^{(n)}(x) & := \dfrac{[D_{\mathbf{T}}^{n-1}(x)]^r - D_{\mathbf{T}}^{n-1}(x)}{T^{r^n} - T}. \end{cases}$$

On montre (par récurrence sur n) que ces opérateurs vérifient la formule de Leibniz :

(1) $$D_{\mathbf{T}}^{(n)}(xy) = D_{\mathbf{T}}^{(n)}(x)D_{\mathbf{T}}^{(0)}(y) + D_{\mathbf{T}}^{(n-1)}(x)[D_{\mathbf{T}}^{(1)}(y)]^{\sigma} + \ldots + D_{\mathbf{T}}^{(0)}(x)[D_{\mathbf{T}}^{(n)}(y)]^{\sigma^n}$$

où σ désigne l'endomorphisme $\mathbb{F}_r$−linéaire $z \longmapsto z^r$ de $\mathbf{\Omega}$.

On déduit de cette formule que :

$$D_{\mathbf{T}}^{(n)}(T^m) = \sum_{\nu_0+\nu_1+\ldots+\nu_n = m-n} T^{\nu_0+\nu_1 r+\ldots+\nu_n r^n},$$

ce qui montre que $D_{\mathbf{T}}^{(n)}$ s'annule sur tous les polynômes de $\mathbf{A}$ de degré $< n$.

Le critère wronskien se démontre facilement pour la σ-dérivation $\sigma - \mathbf{1}_{\Omega}$ et ses puissances et on en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION.— *Soient $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbf{\Omega}$. Pour que $x_1, \ldots, x_n$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{F}_r$ il faut et il suffit que :*

$$W(x_1, \ldots, x_n) := \begin{vmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ D^{(1)}x_1 & \ldots & D^{(1)}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ D^{(n-1)}x_1 & \ldots & D^{(n-1)}x_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Remarque 1.— On a omis l'indice $\mathbf{T}$ pour simplifier, mais ce résultat ne dépend pas non plus du choix de $\mathbf{T}$ (à condition qu'il soit transcendant sur $\mathbb{F}_r$).

Remarque 2.— Cette proposition montre que pour que $x \in \mathbf{A}$ il faut et il suffit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $D_{\mathbf{T}}^{(n)}(x) = 0$.

Désormais tout objet écrit en caractère gras $(\mathbf{A}, \mathbf{k}, \mathbf{\Omega})$ aura un double qui lui est égal écrit en caractères ordinaires, mais au niveau des éléments nous utiliserons souvent les mêmes caractères ("principe des deux T"). Les éléments appartenant à un ensemble "gras" agissent comme des opérateurs sur les ensembles "ordinaires".

Rappelons [13] que l'anneau $\Omega\{\{\sigma\}\}$ des séries formelles de Ore en σ, à coefficients dans Ω, est un anneau de "séries formelles" en une indéterminée notée σ (par abus de notation) pour rappeler la règle :

$$\alpha\sigma^m.\beta\sigma^n = \alpha\sigma^m(\beta)\sigma^{m+n}.$$

Si $\Sigma\, a_n\sigma^n \in \Omega\{\{\sigma\}\}$, on dira que $\Sigma\, a_n\mathbf{x}^{r^n} \in \Omega[[\mathbf{x}]]$ est la série formelle ordinaire associée à $\Sigma\, a_n\sigma^n$.

PROPOSITION ET DÉFINITION.— *L'application :*

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{\Omega} \xrightarrow{\gamma} \Omega\{\{\sigma\}\} \\ \mathbf{x} \longmapsto \gamma_{\mathbf{x}}(\sigma) := \displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n D_T^{(n)}(x)\sigma^n \end{array}\right. \tag{2}$$

est un morphisme de $\mathbb{F}_r$ −algèbres que l'on appelle le module de Carlitz formel.

COROLLAIRE ET DÉFINITION.— *Soit $\Omega\{\sigma\}$ l'anneau des polynômes de Ore en σ et soit $x \in \mathbf{\Omega}$:*

1) *une condition nécessaire et suffisante pour que $\gamma_{\mathbf{x}}(\sigma) \in \Omega\{\sigma\}$ est que $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$;*

2) *l'application $\gamma\,|_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \longrightarrow \Omega\{\sigma\}$ est un morphisme de $\mathbb{F}_r$ −algèbres que l'on appelle le* module de Carlitz.

Remarque 3.— Le module de Carlitz a été défini par Carlitz dans [8]. Mais certains auteurs (Goss, Hayes, etc.) appellent module de Carlitz un morphisme légèrement différent du précédent.

L'opérateur $D_T^{(n)}$, lui-même, peut être considéré comme un élément de $\Omega\{\sigma\}$; en fait on a :

$$D_T^{(n)}(\sigma) = \frac{\Delta_T^{(n)}(\sigma)}{\Delta_T^{(n)}(T^n)} \in \Omega\{\sigma\} \tag{4}$$

avec

$$\Delta_T^{(n)}(\sigma) = \begin{vmatrix} 1 & T & \dots & T^{n-1} & \sigma^0 \\ \sigma(1) & \sigma(T) & \dots & \sigma(T^{n-1}) & \sigma \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma^n(1) & \sigma^n(T) & \dots & \sigma^n(T^{n-1}) & \sigma^n \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Le dénominateur du second membre de (4) est $F_n \dots F_1$, où :

$$F_n := [n]\sigma[n-1]\dots\sigma^{n-1}[1], \qquad \text{avec} \qquad [i] := \sigma^i(T) - T \tag{6}$$

Si nous normalisons les opérateurs $D_T^{(n)}$ de sorte que leur "terme constant" soit σ^0, on doit poser :

$$E_T^{(n)}(\sigma) := (-1)^n L_n D_T^{(n)}(\sigma) = \sigma^0 + \ldots \in \Omega\{\sigma\} \tag{7}$$

avec $L_n = [n] \ldots [1]$.

Puisque l'opérateur $E_T^{(n)}$ s'annule sur tous les polynômes de A de degré $< n$, le polynôme ordinaire qui lui est associé est le *polynôme de Carlitz* :

$$\psi_n(z) := z \prod_{\substack{a \in A \\ a \neq 0, \deg a < n}} (1 - \frac{z}{a}).$$

Nous voulons maintenant chercher la limite de l'opérateur $E_T^{(n)}$ dans $\Omega\{\{\sigma\}\}$ lorsque n tend vers ∞ et pour cela nous supposerons dorénavant que Ω contient le corps de Tate C qui est la complétion d'une clôture algébrique de la complétion $K := \mathbb{F}_r\left(\left(\frac{1}{T}\right)\right)$ de k à l'infini.

Il est clair que lorsque n tend vers l'infini, ψ_n tend vers la fonction entière :

$$e_A(z) := z \prod_{\substack{a \in A \\ a \neq 0}} (1 - \frac{z}{a}) \tag{9}$$

qui est associée à une certaine série de Ore que l'on notera $e_A(\sigma)$; on a donc $e_A(\sigma) \in K\{\{\sigma\}\}$. La série $e_A(\sigma)$ peut être déterminée facilement à l'aide de la formule (1) appliquée à T et z. On a en effet :

$$E_T^{(n)}(Tz) = T(E_T^{(n)} z) - \frac{L_n}{\sigma(L_{n-1})} \sigma(E_T^{(n-1)} z). \tag{10}$$

En remarquant que $\dfrac{L_n}{\sigma(L_{n-1})}$ tend vers une limite $\eta \in C$ (en fait $\eta \in K$) on déduit de (10) en passant à la limite :

$$e_A(Tz) = Te_A(z) - \eta\sigma[e_A(z)].$$

Si on désigne par ξ une racine $r-1^{ième}$ quelconque (mais choisie une fois pour toutes) de η, on a :

$$\xi e_A(Tz) = T(\xi e_A(z)) - \sigma[\xi e_A(z)]. \tag{11}$$

La série de Ore : $e_{\xi A}(\sigma) = \xi\sigma^0.e_A(\sigma).\xi^{-1}\sigma^0$ vérifie donc les relations fondamentales :

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} e_{\xi A}(\sigma).T\sigma^0 = \gamma_{\mathbf{T}}(\sigma).e_{\xi A}(\sigma) \\ e_{\xi A}(\sigma) = \sigma^0 + \ldots \in C\{\{\sigma\}\}. \end{cases}$$

La première relation de (12) permet de calculer les coefficients de $e_{\xi A}(\sigma)$ de proche en proche et on obtient l'expression classique de l'*exponentielle de Carlitz* :

$$\text{(13)} \qquad e(\sigma) := e_{\xi A}(\sigma) = \sigma^0 - \frac{\sigma}{F_1} + \ldots + (-1)^n \frac{\sigma^n}{F_n} + \ldots \in k\{\{\sigma\}\}.$$

Analogies avec l'analyse classique

L'exponentielle de Carlitz présente des analogies étroites avec l'exponentielle classique si l'on considère que $\mathbf{A}, \mathbf{k}, \mathbf{K}, \mathbf{C}$ sont analogues à $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ et si l'on admet que $e_{\xi A}(z)$ est l'analogue de $\exp z - 1$.

De ce point de vue l'ensemble des zéros de $e_{\xi A}(z)$ est à comparer à "$2i\pi\mathbb{Z}$" et ξ doit être comparé à "$\pm 2i\pi$". En fait Carlitz a montré que :

$$\xi = (T^r - T)^{1/r-1}\Pi$$

avec :

$$\Pi = \prod_{n \geq 1} \Big(1 - \frac{[n]}{[n+1]}\Big) \in K.$$

Dans les années quarante, Wade ([46], [47]) a donné deux démonstrations de la transcendance de Π sur k, puis J.-P. Allouche en a obtenu une troisième à l'aide du critère de Christol, Kamae, Mendès-France, Rauzy ([2], [12]) et, finalement, de Mathan en a donné une quatrième à l'aide d'un nouveau critère ([16]), [31], [32]) qui est d'une simplicité surprenante (mais qui ne s'applique ici que pour $r > 2$).

Les relations (9) et (13) entraînent que pour tout $z \in C$ on a :

$$\text{(14)} \qquad z \prod_{\substack{a \in A \\ a \neq 0}} (1 - \frac{z}{a}) = z - \xi^{r-1}\frac{z^r}{F_1} + \xi^{r^2-1}\frac{z^{r^2}}{F_2} \cdots$$

En prenant la dérivée logarithmique des deux membres de (14) on obtient :

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{z-a} = \frac{\xi}{e_A(\xi z)} = \frac{1}{z\Big[1 - \frac{(\xi z)^{r-1}}{F_1} + \frac{(\xi z)^{r^2-1}}{F_2} \cdots\Big]}$$

qui donne des identités à la Euler en développant les deux membres suivant les puissances croissantes de z :

$$\sum_{\substack{a\in A\\ a\neq 0}} \frac{1}{a^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } r-1 \text{ ne divise pas } n \\ c_n\xi^n & \text{si } r-1 \text{ divise } n, \text{ avec } c_n \in k. \end{cases} \tag{15}$$

Arrivé à ce stade, il est naturel de vouloir définir des "nombres de Bernoulli-Carlitz" en introduisant les valeurs entières d'une fonction zêta. Nous nous écarterons très légèrement de la tradition en introduisant une fonction signe (non classique) sur $\mathbf{A}$ comme suit :

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} (-1)^{\deg a}\alpha_n, & \text{où } \alpha_n \text{ est le coefficient du terme de plus haut degré de } a \text{ si } a \neq 0 \\ 0, & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

et en prolongeant cette fonction à $\mathbf{k}$ et $\mathbf{K}$ (on convient que si $x = 1+a_1\pi+a_2\pi^2+\ldots \in \mathbf{K}$, on a $\operatorname{sgn}(x) = 1$). Pour cette fonction signe le module de Carlitz (original) est *normalisé* en ce sens que, si $a \in \mathbf{A}$, le coefficient du terme de plus haut degré de $\gamma_{\mathbf{a}}$ est $\operatorname{sgn}(a)$. Nous dirons que $a \in \mathbf{A}$ est positif si $\operatorname{sgn}(a) = 1$ et nous poserons, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\zeta_{\mathbf{A}}(n) = \sum_{a\in\mathbf{A}_+} \frac{1}{a^n} \in K, \tag{16}$$

où $\mathbf{A}_+$ désigne le monoïde des éléments positifs de $\mathbf{A}$. Cette fonction $\zeta_{\mathbf{A}}$ admet encore un produit eulérien en ce sens que :

$$\zeta_{\mathbf{A}}(n) = \prod_{p\in\mathbf{P}_+} \Big(\frac{1}{1-\frac{1}{p^n}}\Big), \tag{17}$$

où $\mathbf{P}_+$ désigne l'ensemble des polynômes irréductibles positifs de $\mathbf{A}$. Mais elle s'écarte de la fonction zêta d'Artin [1] qui est définie pour $n > 1$ par :

$$\zeta_{\text{Artin}}(n) := \sum_{a\in\mathbf{A}_+} \frac{1}{|a|^n} = \frac{r^{n-1}}{r^{n-1}-1} \in \mathbb{Q}$$

avec $|a| = \#(A/(a))$. Comme tous les polynômes a de même degré ont la même valeur absolue, on voit que la fonction d'Artin restreinte aux entiers ≥ 2 contient moins d'information que la "fonction zêta de Carlitz ζ_A".

Nous calculerons $\zeta_A(h)$ pour $1 \leq h \leq r$ en regroupant le second membre de (16) par paquets de termes de même degré. On sait que le polynôme associé à $D_{\mathbf{T}}^{(n)}(\sigma)$ se décompose comme suit :

$$D_{\mathbf{T}}^{(n)}(X) = \lambda \prod_{\substack{a \in A \\ \deg a < n}} (X - a), \text{ avec } \lambda \in K^*.$$

On a donc :

$$\frac{\frac{\partial}{\partial X} D_{\mathbf{T}}^{(n)}(X + (-T)^n)}{D_{\mathbf{T}}^{(n)}(X + (-T)^n)} = \sum_{\substack{b \in A_+ \\ \deg b = n}} \frac{1}{X + b}.$$

Maintenant $D_{\mathbf{T}}^{(n)}(X + (-T)^n) = D_{\mathbf{T}}^{(n)}(X) + D_{\mathbf{T}}^{(n)}[(-T)^n] = D_{\mathbf{T}}^{(n)}(X) + (-1)^n$, donc $\dfrac{\partial}{\partial X} D_{\mathbf{T}}^{(n)}(X + (-T)^n) = \dfrac{\partial}{\partial X} D_{\mathbf{T}}^{(n)}(X) = \dfrac{(-1)^n}{L_n}$ ce qui donne l'équation :

$$\frac{1}{L_n[1 + (-1)^n D_{\mathbf{T}}^{(n)}(X)]} = \sum_{\substack{b \in A_+ \\ \deg b = n}} \frac{1}{X + b}. \tag{18}$$

que l'on développe suivant les puissances croissantes de X. On obtient finalement :

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n}, \quad \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n^2}, \ldots, \quad \zeta(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n^r} = \zeta(1)^r$$

et des formules plus compliquées pour $h > r$ ([14]).

Dans son second article, Wade démontre que $\zeta(r-1)$ est transcendant sur k ; il en résulte que $\sum_{\substack{a \in A \\ a \neq 0}} \dfrac{1}{a^{r-1}} = -\zeta(r-1)$ est également transcendant, donc que ξ^{r-1} et Π sont transcendants sur k. Notons encore que G. Damamme et J. Yu ont démontré simultanément et par des méthodes différentes ([14], [51]) la transcendance de $\zeta(h)$ pour tout h.

Par ailleurs J. Yu a également obtenu que pour tout h non divisible par $r-1$, $\dfrac{\zeta(h)}{\Pi^h}$ est transcendant sur k. Ce résultat a été retrouvé par V. Berthé en utilisant le critère de Christol, Kamae, Mendès-France et Rauzy ([4], [5]).

Les nombres de Bernoulli-Carlitz sont alors définis par les formules habituelles et Carlitz a démontré qu'ils vérifient un "théorème de Von Staudt" ([9], [10]).

Remarque 4.— Un grand nombre de fonctions de l'analyse classique ont trouvé des analogues dans le cadre ci-dessus et beaucoup de résultats de transcendance ont été démontrés dans ce cadre ([26], [48]).

Cyclotomie

On peut résumer la situation précédente en disant que l'anneau $\mathbf{A}$ agit de deux manières différentes sur Ω, ces actions étant $\mathbf{a} \longmapsto a\sigma^0$ et $\mathbf{a} \longmapsto \gamma_{\mathbf{a}}(\sigma)$. Elles confèrent à Ω deux structures de Ω-module distinctes : la structure naïve et la structure carlitzienne. C'est pour cette dernière que nous allons étudier la torsion, mais nous le ferons dans un cadre élargi qui nous donnera l'analogue de la théorie de la multiplication complexe.

Remarque 5.— On peut toutefois développer une "théorie cyclotomique classique" en calquant l'approche élémentaire ([6], [28]).

Remarque 6.— On peut aussi noter que le module de Carlitz formel étend son action à la boule $B = \{z \in C; |z| < |\xi| = |T|^{\frac{r}{r-1}}\}$. En effet on sait que pour $x \in \mathbf{C}$ on a :

$$\gamma_{\mathbf{x}}(\sigma) = e_{\xi A}(\sigma).x\sigma^0.e_{\xi A}(\sigma)^{-1} \in C\{\{\sigma\}\} \tag{19}$$

et $e(\sigma)^{-1}$ est bien définie sur B ("logarithme de Carlitz").

2. CATÉGORIE DES A-MODULES DE DRINFELD DÉFINIS SUR L

Dorénavant k désignera un corps global de caractéristique $p > 0$ et de corps de constantes $\mathbb{F}_r$ avec $r = p^m$.

Nous briserons la symétrie de l'ensemble des places de k en privilégiant une place non triviale que nous appellerons "place à l'infini", on désignera par $d = d_\infty$ le degré de cette place, de sorte que le corps résiduel à l'infini est $\mathbb{F}_{r^d}$. L'anneau A sera $\{x \in k; v_\wp(x) \geq 0 \text{ pour toute place } \wp \neq \infty\}$ et on désignera par K la complétion de k à l'infini ; si π désigne une uniformisante (choisie dans k) pour la place à l'infini, on sait que K est isomorphe à $\mathbb{F}_{r^d}((\pi))$. Donc tout $x \in K^*$ s'écrit :

$$x = \sum_{\nu \geq n} c_\nu \pi^\nu, \quad c_\nu \in \mathbb{F}_{r^d}, \ c_n \neq 0. \tag{20}$$

Dans (20), l'indice n est $v_\infty(x)$ et on définit le *degré* de x par les relations :

$$\begin{cases} \deg x = -d_\infty v_\infty(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \deg x = -\infty & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On écrit encore :

$$\mathcal{O} := \{x \in K; v_\infty(x) \leq 0\}, \quad \mathfrak{m} := \{x \in \mathcal{O}; v_\infty(x) < 0\}.$$

Désormais on utilisera des caractères gras pour désigner les opérateurs et des caractères ordinaires pour désigner les objets sur lesquels ils opèrent : ainsi $\mathbf{A}$ désignera la copie de A où vivent les opérateurs et $\delta : \mathbf{A} \longrightarrow L$ désignera *soit* l'isomorphisme canonique $\mathbf{A} \longrightarrow A \subset L$, où L est un corps contenant A, *soit* un morphisme de réduction $\mathbf{A} \longrightarrow A/\wp \subset L$ lorsque L contient le corps résiduel de A modulo un idéal maximal $\wp$ de A.

DÉFINITION.— *Un $\mathbf{A}$–module de Drinfeld φ défini sur L est un homomorphisme de $\mathbb{F}_r$–algèbres : $\mathbf{A} \xrightarrow{\varphi} L\{\sigma\}$ tel que si $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ on ait :*

$$\varphi_{\mathbf{a}} = \delta(\mathbf{a})\sigma^0 + \ldots \in L\{\sigma\}.$$

On dit que φ est trivial *si $\varphi_{\mathbf{a}} = \delta(\mathbf{a})\sigma^0$ pour tout $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$.*

Remarque 7.— Nous avons vu dans le premier paragraphe que le module de Carlitz peut être défini de deux manières différentes : soit de manière algébrique (formule (2)) soit de manière analytique (formules (9) et (19)). Pour un module de Drinfeld sur un anneau $\mathbf{A}$ général et lorsque $L = C$ et $\mathrm{Ker}\delta = (0)$, la construction algébrique est plus difficile ([19],[20]) mais la construction analytique se fait aisément ([26],[29]) en calquant la théorie de la fonction sigma de Weierstrass : on obtient ainsi tous les modules de Drinfeld ([17],[26]).

Remarque 8.— Lorsque $\mathrm{Ker}\,\delta = \boldsymbol{\wp} \neq (0)$ on dit que le module de Drinfeld est de *caractéristique* $\boldsymbol{\wp}$. On notera que dans ce cas la caractéristique de $\mathbf{A}$ n'est pas $\boldsymbol{\wp}$ (voir [24] pour ce cas remarquable).

Remarque 9.— Soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_r[t]$ et soient $A = \mathbb{F}_r[t]$ et $\wp = (P)$. On désigne par $\overline{a}$ l'image de $a \in A$ dans le corps $L := A/\wp$. Alors l'application $\mathbf{x} \xrightarrow{\mathrm{red}_\wp \circ \gamma} \overline{\gamma}_{\mathbf{x}} = \sum_{n \geq 0} \overline{(-1)^n D_t^{(n)}(\boldsymbol{x})}\sigma^n$ est un module de Drinfeld de caractéristique $\boldsymbol{\wp}$: la "*réduction en* $\boldsymbol{\wp}$ *du module de Carlitz*".

On montre que si $\varphi : \mathbf{A} \longrightarrow L\{\sigma\}$ est un module de Drinfeld non trivial et si $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, le degré du polynôme $\varphi_{\mathbf{a}}(\sigma)$ est égal à $r_\varphi \deg \mathbf{a}$, où r_φ est un entier ≥ 1 appelé le *rang de* φ. Lorsque $\boldsymbol{\wp} = \mathrm{Ker}\delta \neq 0$ on montre que si $\varphi : \mathbf{A} \longrightarrow L\{\sigma\}$ est un module de Drinfeld non trivial et si $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, le degré du terme non nul de plus bas degré du polynôme $\varphi_{\mathbf{a}}(\sigma)$ est égal à $h_\varphi(\deg \mathfrak{p})v_\wp(\mathbf{a})$, où h_φ est un entier ≥ 1 appelé la *hauteur de* φ.

Il est clair que $h_\varphi \leq r_\varphi$, donc que si φ est de *rang un*, on a $h_\varphi = r_\varphi = 1$.

Soient deux modules de Drinfeld φ et φ' associés au même $\delta : \mathbf{A} \longrightarrow L$, une *isogénie* $\varphi \longrightarrow \varphi'$ est un morphisme du schéma en groupe $G_a|_L$ commutant avec les deux actions de $\mathbf{A}$ sur $G_{a|L}$ définies par φ et φ', ce qui conduit à la définition suivante.

DÉFINITION.— *Soient deux* $\mathbf{A}$*-modules de Drinfeld* φ *et* φ' *associés à un même morphisme* $\delta : \mathbf{A} \longrightarrow L$. *Un morphisme* $\tau : \varphi \longrightarrow \varphi'$ *défini sur* L *est un polynôme* $\tau(\sigma) \in L\{\sigma\}$ *tel que pour tout* $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ *on ait* $\tau(\sigma)\varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) = \varphi'_{\mathbf{a}}(\sigma)\tau(\sigma)$. *Une isogénie est un morphisme non nul.*

DÉFINITION.— *On désignera par* $Drin_{\mathbf{A}}(L)$ *la catégorie dont les objets sont les* $\mathbf{A}$*-modules de Drinfeld définis sur* L *et dont les flèches sont les morphismes.*

Remarque 10.— On voit que s'il existe une isogénie τ de φ sur φ', alors φ et φ' ont le même rang et on montre que $\mathrm{End}_L(\varphi) = \{\tau \in L\{\sigma\}; \tau\varphi = \varphi\tau\}$ est un $A-$module projectif de rang $\leq r_\varphi^2$.

Dans le cas du module de Carlitz on voit que $\mathrm{End}_L(\varphi) = \varphi(\mathbf{A}) = \mathrm{Im}\,\varphi$.

Remarque 11.— Un automorphisme de φ défini sur L est un élément inversible τ de $L\{\sigma\}$ tel que $\tau\varphi = \varphi\tau$. On voit donc que $\mathrm{Aut}_L(\varphi) \cong \mathbb{F}_r^*$ si φ est de rang 1.

Remarque 12.— Puisque C contient des réseaux (voir [26]) de tous les rangs, $\mathrm{Drin}_{\mathbf{A}}(C)$ contient des modules de tous les rangs.

DÉFINITION.— *Soit* $\varphi \in Drin_{\mathbf{A}}(C)$.

Un sous-corps L *de* C *est appelé un* corps de définition *de* φ *si* φ *est isomorphe sur* C *à un module* $\varphi' \in Drin_{\mathbf{A}}(L)$.

Le résultat suivant nous sera utile plus loin (voir [29]).

THÉORÈME ET DÉFINITION.— *Soit* $\varphi \in Drin_{\mathbf{A}}(C)$. *Alors* φ *admet un corps de définition* L_φ *de type fini sur* k *qui est contenu dans tout corps de définition de* φ. *On dit que* L_φ *est le plus petit corps de définition de* φ.

3. ACTION DES IDÉAUX DE A SUR $\mathrm{Drin}_{\mathbf{A}}(L)$

Rappelons tout d'abord que tout idéal à gauche de l'anneau $L\{\sigma\}$ des polynômes de Ore est principal ([13],[34],[35]).

Soit $\varphi \in \mathrm{Drin}_{\mathbf{A}}(L)$ un $\mathbf{A}$−module de Drinfeld non trivial et soit $\mathfrak{a} \subset \mathbf{A}$ un idéal non nul de $\mathbf{A}$. Si l'on désigne par I l'idéal à gauche de $L\{\sigma\}$ engendré par les éléments $\varphi_{\mathbf{a}}(\sigma)$ pour $\mathbf{a} \in \mathfrak{a}$, on voit ainsi qu'il existe un unique polynôme unitaire (non "constant") $\varphi_{\mathfrak{a}}(\sigma)$ tel que $I = L\{\sigma\}\varphi_{\mathfrak{a}}(\sigma)$ et on constate que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ il existe un unique polynôme $\varphi'_{\mathbf{x}}(\sigma) \in L\{\sigma\}$ tel que :

$$\varphi_{\mathfrak{a}}(\sigma).\varphi_{\mathbf{x}}(\sigma) = \varphi'_{\mathbf{x}}(\sigma).\varphi_{\mathfrak{a}}(\sigma) \in L\{\sigma\} \tag{21}$$

du fait que $\varphi_{\mathbf{a}}(\sigma)\varphi_{\mathbf{x}}(\sigma) \in I$ pour tout $\mathbf{a} \in \mathfrak{a}$.

PROPOSITION ET DÉFINITION.— *Soit un morphisme $\delta : \mathbf{A} \longrightarrow L$ et soit $\varphi \in \mathrm{Drin}_{\mathbf{A}}(L)$ non trivial. Alors il existe un unique $\mathbf{A}$-module de Drinfeld $\varphi' \in \mathrm{Drin}_{\mathbf{A}}(L)$ vérifiant la relation (21) et φ' est isogène à φ. Le module φ' est noté $\mathfrak{a} * \varphi$.*

Le monoïde multiplicatif des idéaux (non nuls) de $\mathbf{A}$ définit ainsi une action sur $\mathrm{Drin}_{\mathbf{A}}(L)$ et on a :

$$\begin{cases} \varphi_{\mathfrak{ab}}(\sigma) & = (\mathfrak{b} * \varphi)_{\mathfrak{a}}(\sigma).\varphi_{\mathfrak{b}}(\sigma) \in L\{\sigma\} \\ \mathfrak{a} * (\mathfrak{b} * \varphi) & = (\mathfrak{ab}) * \varphi \in \mathrm{Drin}_{\mathbf{A}}(L). \end{cases} \tag{22}$$

Pour préciser l'action des idéaux principaux sur $\mathrm{Drin}_{\mathbf{A}}(L)$ une nouvelle définition sera utile.

DÉFINITION.— *Soit $\varphi \in \mathrm{Drin}_{\mathbf{A}}(L)$.*

Pour tout $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ on désigne par $\mu_\varphi(\mathbf{a})$ le coefficient du terme de plus haut degré de $\varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) \in L\{\sigma\}$.

On vérifie facilement que si φ est de rang r_φ, l'application $\mu_\varphi : \mathbf{A} \longrightarrow L$ vérifie les relations :

$$\mu_\varphi(\mathbf{xy}) = \mu_\varphi(\mathbf{x})\mu_\varphi(\mathbf{y})^{N(\mathbf{x})^{r_\varphi}} = \mu_\varphi(\mathbf{y})\mu_\varphi(\mathbf{x})^{N(\mathbf{y})^{r_\varphi}} \text{ où } N(\mathbf{x}) := \#[\mathbf{A}/(\mathbf{x})].$$

Considérons maintenant un idéal principal $\mathfrak{a} = (\mathbf{a}) \neq (0)$ dans $\mathbf{A}$, alors on a :

$$\begin{cases} \varphi_{\mathfrak{a}}(\sigma) & = \mu_\varphi^{-1}(\mathbf{a})\sigma^0.\varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) \in L\{\sigma\} \\ \mathfrak{a} * \varphi & = \mu_\varphi^{-1}(\mathbf{a})\sigma^0.\varphi.\mu_\varphi(\mathbf{a})\sigma^0 \in \mathrm{Drin}_{\mathbf{A}}(L) \end{cases} \tag{22'}$$

et on déduit de (22) et (22′) que $\mathrm{Pic}(\mathbf{A})$ opère sur l'ensemble $\mathrm{Isom}_{\mathbf{A}}(L)$ des classes d'isomorphisme de $\mathbf{A}$-modules de Drinfeld définis sur L.

Lorsque L est le corps de Tate C, on peut interpréter cette action via les réseaux de périodes des exponentielles attachées aux modules de Drinfeld de rang 1 définis sur C et l'on obtient le résultat suivant ([29]).

THÉORÈME FONDAMENTAL.— *Soit $\mathcal{D}_1$ l'ensemble des classes d'isomorphismes (sur C) de $\mathbf{A}$-modules de Drinfeld de rang 1 définis sur C. Alors l'action de $\mathrm{Pic}(\mathbf{A})$ définie ci-dessus confère à $\mathcal{D}_1$ une structure d'espace homogène principal. En particulier $\#\mathcal{D}_1 = \#\mathrm{Pic}(\mathbf{A})$.*

Remarque 13.— Il est clair que $\mathrm{Gal}(C/k)$ agit sur $C\{\sigma\}$ (on le fait agir sur les coefficients des polynômes de Ore). Donc $\mathrm{Gal}(C/k)$ agit sur $\mathrm{Drin}_{\mathbf{A}}(C)$ et on constate que cette action commute avec celle de $\mathrm{Pic}(\mathbf{A})$.

4. MODULES DE HAYES

Désormais $\delta : \mathbf{k} \longrightarrow k$ sera l'identité : les objets à gauche seront écrits en caractères gras et les objets à droite en caractères normaux. Soit $\varphi \in \mathrm{Drin}_{\mathbf{A}}(L)$, la condition $\varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) = a\sigma^0 + \ldots$ introduit une normalisation de φ en toutes les *places finies* de $\mathbf{A}$, mais D. Hayes a aussi introduit une normalisation à l'infini qui nous conduit à la définition préliminaire suivante.

DÉFINITION.— *Soit $\mathbf{K}$ le complété de $\mathbf{k}$ à l'infini, soit $\mathbb{F}_\infty = \mathbb{F}_{r^{d_\infty}}$ son corps résiduel et soit* $\mathrm{sgn} : \mathbf{K}^* \longrightarrow \mathbb{F}_\infty^* = \mathbb{F}_{r^{d_\infty}}^*$ *; on dit que* sgn *est une* fonction signe *si :*

1) sgn *est un homomorphisme.*
2) $\mathrm{sgn}(\mathbf{1} + \mathfrak{m}) = 1$
3) sgn *induit l'identité sur* $\mathbf{F}_\infty^*$.

On complète la définition de sgn par $\mathrm{sgn}(0) = 0$ et, désormais, on se donne une fois pour toutes un triplet $(\mathbf{k}, \infty, \mathrm{sgn})$. Le paragraphe 1 donne un exemple d'une telle fonction signe.

DÉFINITION.— *Soit $\varphi \in \mathrm{Drin}_{\mathbf{A}}(C)$.*

1) *On dit que φ est* normalisé *si $\mu_\varphi(\mathbf{x}) \in \mathbb{F}_\infty$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$.*

2) *On dit que φ est* unitaire *si φ est normalisé et s'il existe $\tau \in Gal(\mathbb{F}_\infty/\mathbb{F}_r)$ tel que $\mu_\varphi(\mathbf{x}) = \tau \circ \mathrm{sgn}(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$.*

3) *On dit que φ est un* module de Hayes *si φ est unitaire et de rang 1.*

On montre aisément que tout $\mathbf{A}$–module de Drinfeld de rang 1 est isomorphe sur C à un module *unitaire*. Si l'on considère maintenant une classe d'isomorphisme de $\mathcal{D}_1$, elle contient $\chi := (\mathbb{F}_\infty^* : \mathbb{F}_r^*) = \dfrac{r^{d_\infty} - 1}{r - 1}$ modules de Hayes distincts puisque $\mathrm{Aut}(\varphi) = \mathbb{F}_r^*$ si $r_\varphi = 1$.

Il résulte donc du théorème fondamental du paragraphe précédent que le nombre de module de Hayes définis sur C est égal à $\chi h(\mathrm{A})$, où $h(\mathrm{A}) := \#\mathrm{Pic}(\mathrm{A})$.

Soit φ un module de Hayes, son stabilisateur pour l'action des idéaux de $\mathbf{A}$ est :

$$\mathrm{Stab}(\varphi) := \{\mathfrak{a} \subset \boldsymbol{A};\quad \mathfrak{a} \neq (0),\quad \mathfrak{a} * \varphi = \varphi\} := \{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A};\quad \boldsymbol{a} \neq 0,\quad (\boldsymbol{a}) * \varphi = \varphi\}$$

D'après (22'), $(\mathbf{a}) * \varphi = \mu_\varphi^{-1}(\mathbf{a})\sigma^0.\varphi.\mu_\varphi(\mathbf{a})\sigma^0$, et comme φ est un module de rang 1 on doit avoir $\mu_\varphi(\mathbf{a})\sigma^0 \in \mathrm{Aut}(\varphi) \cong \mathbb{F}_r^*$, donc $\mathrm{Stab}(\varphi) = \{(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbf{A}; \mathrm{sgn}(\mathbf{x}) = 1\}$.

DÉFINITION.— *On appelle* groupe étroit des idéaux principaux *de* $\mathbf{A}$ *le groupe :*

$$\mathcal{P}^+(\mathbf{A}) := \{(\mathbf{a}); \mathbf{a} \in \mathbf{A}, \mathrm{sgn}(\mathbf{a}) = 1\}$$

et groupe de classes étroit *le groupe :*

$$\mathit{Pic}^+(\mathbf{A}) := \mathit{Id\acute{e}aux}(\mathbf{A})/\mathcal{P}^+(\mathbf{A}).$$

THÉORÈME FONDAMENTAL DES MODULES DE HAYES.— *L'ensemble X des modules de Hayes est un espace homogène principal pour* $\mathrm{Pic}^+(\mathbf{A})$.

Exemple.— Dans le cadre du paragraphe 1, $\#X = 1$.

5. CORPS DE HILBERT DE A

Soit $\psi \in X$ un module de Hayes et soit $\mathbf{y} \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{F_r}$ un élément de $\mathbf{A}$ transcendant sur $\mathbf{F_r}$; on désigne par $H_{\mathbf{A}}^+$ le corps engendré sur k par les coefficients de $\psi_{\mathbf{y}}$. La connaissance de $\psi_{\mathbf{y}}$ permet de construire l'exponentielle de ψ comme dans (12) et on voit que les coefficients de celle-ci appartiennent à $H_{\mathbf{A}}^+$. Comme cette exponentielle est unique, $H_{\mathbf{A}}^+$ ne dépend pas du choix de $\mathbf{y}$.

Puisque tous les $\mathfrak{a} * \psi$ sont définis sur $H_{\mathbf{A}}^+$, ce corps ne dépend pas non plus du choix de ψ.

DÉFINITION.— $H_{\mathbf{A}}^+$ *est appelé le* corps normalisant *des modules de Hayes associés au triplet* $(\mathbf{k}, \infty, \mathrm{sgn})$.

Exemple.— Dans le cadre du paragraphe 1 on a $H_{\mathbf{A}}^{+} = k$.

Soit $\tau \in \mathrm{Gal}(C/k)$, puisque $\tau\psi \in X$ on voit que $\tau\psi$ est défini sur $H_{\mathbf{A}}^{+}$ donc que $H_{\mathbf{A}}^{+}/k$ est normale. On montre encore ([30]) qu'elle est séparable.

PROPOSITION.— *$H_{\mathbf{A}}^{+}/k$ est galoisienne et :*

$$\mathrm{Gal}(H_{\mathbf{A}}^{+}/k) \cong \mathrm{Pic}^{+}(\mathbf{A})$$

En effet l'action de $\mathrm{Gal}(H_{\mathbf{A}}^{+}/k)$ commute avec celle de $\mathrm{Pic}^{+}(\mathbf{A})$. Le théorème fondamental donne donc une injection $\mathrm{Gal}(H_{\mathbf{A}}^{+}/k) \hookrightarrow \mathrm{Pic}^{+}(\mathbf{A})$. Il reste à voir que ces groupes sont isomorphes et pour cela on utilise les symboles d'Artin $\mathrm{Artin}(\mathfrak{a})$ des idéaux non ramifiés $\mathfrak{a}$ de $H_{\mathbf{A}}^{+}$ qui sont assez nombreux grâce au résultat suivant.

THÉORÈME.— *$H_{\mathbf{A}}^{+}/k$ est non ramifiée en toute place finie de k.*

Soit en effet $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de A et soit $\tau \in \mathrm{Gal}(H_{\mathbf{A}}^{+}/k)$ un élément du groupe d'inertie en $\mathfrak{p}$. Alors pour toute place $\mathfrak{P}$ de $H_{\mathbf{A}}^{+}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, on a $\tau\psi \equiv \psi \bmod \mathfrak{P}$ par définition.

Mais on montre que l'homomorphisme de réduction sur la fermeture intégrale B^{+} de A dans $H_{\mathbf{A}}^{+}$:

$$B^{+} \xrightarrow{\mathrm{red}_{\mathfrak{P}}} B^{+}/\mathfrak{P}$$

induit une injection de X dans l'ensemble des modules de Drinfeld de rang 1 sur $B^{+}/\mathfrak{P}$, donc $\tau\psi = \psi$. Et comme $H_{\mathbf{A}}^{+}$ est engendré sur k par les coefficients de $\psi_{\mathbf{y}}$ on voit que $\tau = \mathrm{id}$.

Finalement on voit l'action de $\mathrm{Artin}(\mathfrak{a})$, pour tout idéal non nul $\mathfrak{a}$ de A, est donnée par :

$$\mathrm{Artin}(\mathfrak{a})\psi = \boldsymbol{\mathfrak{a}} * \psi. \tag{23}$$

Remarque 14.— On a donc :

$$[H_{\mathbf{A}}^{+} : k] = h^{+}(\mathbf{A}) = \chi h(\mathbf{A}) \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{r^{d_\infty - 1}}{r-1}. \tag{24}$$

Il nous reste maintenant à reconnaître le plus petit corps $H_{\mathbf{A}}$ de définition des modules de Drinfeld de rang 1.

Puisque tout module de rang 1 est isomorphe à un module de Hayes on montre que :

$$k.\mathbb{F}_\infty \subseteq H_{\mathbf{A}} \subseteq H_{\mathbf{A}}^{+}$$

(on utilise Riemann-Roch pour la première inclusion).

Il en résulte que $H_{\mathbf{A}}$ est le sous-corps de $H_{\mathbf{A}}^{+}$ qui est fixé par tous les symboles d'Artin des $x \in k^*$ et que $H_{\mathbf{A}}^{+}/H_{\mathbf{A}}$ est une extension de Kummer de degré χ ([29]).

THÉORÈME.— *Le corps $H_{\mathbf{A}}$ est le corps des classes de Hilbert de A en ce sens que :*

1) *L'extension $H_{\mathbf{A}}/k$ est non ramifiée en toute place finie de A et est totalement décomposée à l'infini.*

2) *C'est une extension galoisienne de k dont le groupe de Galois est isomorphe à* $\mathrm{Pic}(\mathbf{A})$ *via l'homomorphisme d'Artin. De plus l'action de* $\mathrm{Artin}(\mathfrak{a})$ *est donnée par* (23).

Remarque 15.— On voit donc que $H_{\mathbf{A}}^{+}/H_{\mathbf{A}}$ est totalement ramifiée au-dessus des places à l'infini.

Remarque 16.— La propriété d'intégralité de l'invariant modulaire des courbes elliptiques à multiplications complexes a pour analogue un résultat de Takahashi qui établit que tout $\mathbf{A}$-module de Hayes est isomorphe à un module défini sur la fermeture intégrale B de A dans $H_{\mathbf{A}}$ (voir [29]).

Remarque 17.— Le théorème de Takahashi entraîne un théorème de l'idéal principal : si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A et si ψ est défini sur B, alors $\mathfrak{a}B$ est engendré par le coefficient du terme constant de l'isogénie $\psi_{\mathfrak{a}}$ (voir [26] et [29]).

6. CYCLOTOMIE

Soit $\mathfrak{m}$ un idéal non nul contenu strictement dans $\mathbf{A}$; on désigne par $\mathcal{I}_{\mathrm{m}}(\mathbf{A})$ le groupe des idéaux fractionnaires de $\mathbf{k}$ premiers à $\mathfrak{m}$, on pose :

$$\mathcal{P}_{\mathrm{m}}^{+}(\mathbf{A}) := \{\boldsymbol{x}\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{k}^*, \mathrm{sgn}(\boldsymbol{x}) = 1 \text{ et } \boldsymbol{x} \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}\}$$

et on considère le groupe de classes étroit modulo $\mathfrak{m}$:

$$\mathrm{Pic}_{\mathfrak{m}}^{+}(\mathbf{A}) := \mathcal{I}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{A})/\mathcal{P}_{\mathfrak{m}}^{+}(\mathbf{A}).$$

Soit ψ un $\mathbf{A}$-module de Hayes, l'ensemble des éléments de C qui sont annulés par $\psi_{\mathrm{m}}(\sigma)$ est le module des points de $\mathfrak{m}$-division de ψ, on le note :

$$\Lambda_{\psi}(\mathfrak{m}) := \{x \in C; \psi_{\mathfrak{m}}(x) = 0\}$$

et on voit (en considérant le nombre de ses éléments) qu'il est isomorphe à $\mathbf{A}/\mathfrak{m}$

Soit $X_{\mathfrak{m}} = \{(\psi, \lambda); \psi \in X$ et λ générateur de $\Lambda(\mathfrak{m})\}$, on constate facilement que :

$$\#X_{\mathfrak{m}} = \#\mathrm{Pic}^{+}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{A}).$$

On constate aussi que la règle :

$$\mathfrak{a} * (\psi, \lambda) := (\mathfrak{a} * \psi, \psi_{\mathfrak{a}}(\lambda))$$

définit une action de $\mathcal{I}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{A})$ sur $X_{\mathfrak{m}}$ et que le stabilisateur de tout (ψ, λ) est $\mathcal{P}^{+}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{A})$.

THÉORÈME.— *L'ensemble $X_{\mathfrak{m}}$ est un espace principal homogène pour l'action de* $\mathrm{Pic}^{+}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{A})$ *induite par* $*$.

Si l'on pose $K_{\mathfrak{m}} := H^{+}_{\mathbf{A}}(\Lambda_{\varphi}(\mathfrak{m}))$ on dit que $K_{\mathfrak{m}}$ est le *corps de classes de rayon* $\mathfrak{m}.\infty$, en particulier on a :

$$\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{m}}/k) \cong \mathrm{Pic}^{+}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{A})$$

et, si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathbf{A}$ dont le symbole d'Artin est $(\mathfrak{a})$, on a pour tout $\lambda \in \Lambda_{\varphi}(\mathfrak{m})$:

$$\lambda^{(\mathfrak{a})} = \psi_{\mathfrak{a}}(\lambda).$$

En particulier $\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{m}}/k)$ contient un sous-groupe $I_{\infty} \cong \mathbb{F}^{*}_{\infty}$ qui est à la fois le groupe de décomposition et le groupe d'inertie à l'infini, le corps $K^{+}_{\mathfrak{m}}$ qui lui appartient est tel que ∞ s'y décompose totalement : c'est l'analogue du sous-corps réel maximal d'un corps cyclotomique.

THÉORÈME (analogue de Kronecker-Weber).— *Soit K^{+}_{∞} le composé de tous les corps $K^{+}_{\mathfrak{m}}$ lorsque $\mathfrak{m}$ parcourt tous les idéaux de $\mathbf{A}$ tels que $(0) \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{m} \underset{\neq}{\subset} \mathbf{A}$. Alors K^{+}_{∞} est l'extension abélienne maximale de k dans laquelle ∞ se décompose totalement.*

Exemple.— Si $\mathbf{A} = \mathbb{F}_r[\mathbf{T}]$ et $\mathbf{k} = \mathbb{F}_r(\mathbf{T})$, on a $\mathbb{F}_{\infty} = \mathbb{F}_r$ et $H_{\mathbf{A}} = H^{+}_{\mathbf{A}} = \mathbf{k}$. Si $\mathbf{m}$ est un élément de $\mathbb{F}_r[\mathbf{T}]$ tel que $\mathrm{sgn}(\mathbf{m}) = 1$, on définit le polynôme cyclotomique d'ordre $\mathbf{m}$ par :

$$\Phi_{\mathbf{m}}(X) := \prod_{\substack{\mathbf{d} \mid \mathbf{m} \\ \mathrm{sgn}(\mathbf{d})=1}} \gamma_{\mathbf{d}}(X)^{\ddot{\mu}\left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{d}}\right)}$$

où $\ddot{\mu}$ désigne l'analogue de la fonction de Möbius. Alors $\Lambda(\mathbf{m})$ est l'ensemble des racines de $\Phi_{\mathbf{m}}(X)$ dans C et $K_{\mathbf{m}} = k(\lambda)$ où λ est un générateur de $\Lambda(\mathbf{m})$. Mais on remarque que $\Phi_{\mathbf{m}}(X) = \Psi_{\mathbf{m}}(X^{r-1})$ où $\Psi_{\mathbf{m}}(Y) \in k[Y]$ donc $K^{+}_{\mathbf{m}} = k(\lambda^{r-1})$.

Remarque 18.— L'irréductibilité de $\Psi_{\mathbf{m}}$ peut se démontrer de manière élémentaire.

Remarque 19.— K_∞^+ ne contient pas d'extension finie non triviale de $\mathbb{F}_\infty$, on dit que c'est une extension "géométrique" de k.

7. LE "PLAN COMPLEXE" DE DAVID GOSS

Pour prolonger la fonction zêta du paragraphe un, David Goss a introduit un "plan complexe" qui est le groupe topologique $S_\infty = \mathbf{C}^* \times \mathbb{Z}_p$. La définition de ce "plan complexe" ainsi que celle des fonctions zêta et des fonctions L en caractéristique positive est entièrement l'œuvre de D. Goss [25]. Pour une motivation de la construction de S_∞ nous renvoyons à [26]. Notons toutefois que dans le cadre classique et pour $s = \log r + iy$, avec $r > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ nous avons pour tout $n > 0$:

$$n^s = r^{\log n} u, \text{ avec } u = e^{iy \log n} \text{ de module } 1.$$

Dans toute la suite π est une uniformisante à l'infini positive fixée une fois pour toutes.

DÉFINITION.— *On désigne par S_∞ le groupe topologique $\mathbf{C}^* \times \mathbb{Z}_p$ dont on note additivement la loi de groupe. Si $\alpha \in \mathbf{K}^*$ est tel que* $\operatorname{sgn}(\alpha) = 1$ *et si* $s = (x, y) \in S_\infty$ *on pose :*

$$\alpha^s := x^{\deg(\alpha)} < \alpha >^y \quad \in \mathbf{C}^*$$

où $< \alpha > := \alpha.\pi^{-v_\infty(\alpha)} \in 1 + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ *désignant ici l'idéal maximal de* $\mathcal{O}$ *(voir* § 2*).*

Remarque 20.— La série $< \alpha >^y := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{y}{n} (< \alpha > -1)^n$ est bien convergente.

Remarque 21.— Cette exponentiation possède les bonnes propriétés, on a en particulier :

$$(\alpha\beta)^s = \alpha^s \beta^s, \quad \alpha^{s+s'} = \alpha^s.\alpha^{s'}$$

Remarque 22.— Il est indispensable de pouvoir injecter $\mathbb{Z}$ dans S_∞ pour retrouver α^n, on le fait en associant $s_n := (\pi^{-n}, n)$ à n.

Remarque 23.— L'exponentiation précédente s'étend aux $\mathbf{A}$−idéaux fractionnaires de $\mathbf{k}$ (voir [27] p. 238). Si $\mathfrak{a}$ est un idéal non nul de $\mathbf{A}$ et si $\mathfrak{a}^e = (\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbf{k}$, $\operatorname{sgn}(\alpha) = 1$, on pose :

$$\mathfrak{a}^s := x^{\deg(\mathfrak{a})} < \alpha >^{y/e}$$

Cette définition a bien un sens car α est unique lorsque e est fixé et $\langle\alpha\rangle^{y/e}$ est déterminé de manière unique si $\frac{y}{e} \in \mathbb{Q}_p$.

La définition des fonctions entières que nous allons donner maintenant est conçue pour que la série de Dirichlet formelle :

$$s \longmapsto \zeta_{\mathbf{A}}(s) := \sum_{\mathbf{I}\in\mathcal{I}(\mathbf{A})} \frac{1}{\mathbf{I}^s}$$

soit bien entière.

DÉFINITION.— *Soit une fonction $f : S_\infty \longrightarrow \mathbf{C}$. On dit que f est une* fonction entière *sur S_∞ si :*

i) *pour tout $y \in \mathbb{Z}_p$, $f(x,y)$ est une série entière en x^{-1} ;*

ii) *la famille des $\{f(x,y)\}_{y\in\mathbb{Z}_p}$ est continue et les séries entières en x^{-1} paramétrées par les y sont uniformément convergentes sur les parties bornées de $\mathbf{C}^*$.*

Exemple.— Soit $\mathbf{E}$ une extension séparable finie de $\mathbf{k}$ contenue dans $\mathbf{C}$ et soit $\boldsymbol{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{E}}$ l'anneau de ses $\mathbf{A}$-entiers ; on considère la série de Dirichlet formelle :

$$\zeta_{\boldsymbol{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{E}}}(s) = \prod_{\mathfrak{P}} (1 - (n\mathfrak{P})^{-s})^{-1} = \sum_{\mathbf{I}\in\mathcal{I}(\boldsymbol{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{E}})} \frac{1}{(n\mathbf{I})^s}$$

où $n\mathfrak{P} := \mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{P}}}$ avec $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap \mathbf{A}$ et $f_{\mathfrak{P}} :=$ degré résiduel de $\mathfrak{P}$ sur $\mathbf{A}$, et où cette "norme" est étendue à $\mathcal{I}(\boldsymbol{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{E}})$. Alors on démontre ([26], p. 264) que $\zeta_{\boldsymbol{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{E}}}$ est une fonction entière sur $\boldsymbol{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{E}}$.

Soit π_* une racine d'ordre $d := d_\infty$ de π dans $\mathbf{C}$, fixée une fois pour toutes. Remarquons que si $f(s) := a^{-s}$ avec $a \in \mathbf{A}_+$ de degré α, on a $f(x\pi_*^n, -n) = x^{-\alpha}a^n$.

DÉFINITION.— *Soit $f(s) = f(x,y)$ une fonction entière sur S_∞. On dit que f est* essentiellement algébrique *s'il existe une extension finie $\boldsymbol{L}/\boldsymbol{k}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :*

$$z_f(x,-n) := f(x\pi_*^n, -n) \in \mathbf{L}[x^{-1}].$$

Remarque 24.— Cette définition ne dépend pas du choix de π_*.

Remarque 25.— Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x\pi_*^n, -n) \in \mathbf{A}[[x^{-1}]]$ et si f est *entière*, il est clair que f est essentiellement algébrique. On voit ainsi que la *fonction zêta de Goss* de l'exemple précédent est essentiellement algébrique. Si $\mathbf{A} = \mathbb{F}_r[\mathbf{T}]$ on montre ([26] p. 274) que $\sum_{\substack{a \in \mathbf{A}_+ \\ \deg(a)=d}} a^n = 0$ dès que $d > \log_r(n+1)$.

DÉFINITION.— *Les zéros en y d'une fonction entière essentiellement algébrique f sont les x tels que $z_f(x,y) = 0$.*

THÉORÈME (Daqing Wan).— *Soit $\mathbf{A} = \mathbb{F}_p[\mathbf{T}]$ et soit $y \in \mathbb{Z}_p$. Les zéros x de la fonction zêta de $\mathbf{A}$ en y sont dans $\mathbf{K} = \mathbb{F}_p((1/\mathbf{T}))$ et sont simples.*

Remarque 26.— D. Goss considère que ce théorème est l'analogue de l'hypothèse de Riemann ([26] pp. 322-324 et 338).

Remarque 27.— Naturellement les zéros de cette fonction zêta dépendent du choix de la fonction signe et de celui de l'uniformisante π.

Remarque 28.— D. Goss ([27]) émet des doutes sur le sens éventuel d'une hypothétique équation fonctionnelle de type classique.

Remarque 29.— Pour les fonctions L de Goss, voir [25] et [26].

8. RAPPORT AVEC LES FONCTIONS L D'ARTIN ET DE WEIL

On appelle *corps des valeurs associé* à sgn la sous-extension $\boldsymbol{V}/\boldsymbol{k}$ de $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{k}$ engendrée par les $\mathfrak{a}^{s_1}$ pour tous les $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathbf{A})$ et on désigne par $\mathcal{O}_{\boldsymbol{V}}$ l'anneau des $\mathbf{A}$−entiers de $\mathbf{V}$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{k}_{\mathfrak{p}}$ la complétion de $\mathbf{k}$ en $\mathfrak{p}$, $\overline{\boldsymbol{k}_{\mathfrak{p}}}$ la clôture algébrique de $\boldsymbol{k}_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathbf{C}$ et $\theta : \mathbf{V} \longrightarrow \overline{\boldsymbol{k}_{\mathfrak{p}}}$ un plongement au-dessus de $\mathbf{k}$. On désigne par $\mathfrak{P}$ l'idéal de $\mathbf{V}$ qui correspond à ce plongement. Remarquons que si $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{A})$, alors $\mathfrak{a}^{s_1} \in \mathbf{V}$ est premier à $\mathfrak{P}$. On a donc un homomorphisme :

$$\rho \begin{cases} \mathcal{I}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{A}) & \longrightarrow (\mathcal{O}_{\boldsymbol{V}}/\mathfrak{P})^* \\ \mathfrak{a} & \longmapsto \mathfrak{a}^{s_1} + \mathfrak{P}. \end{cases}$$

Comme le noyau de ρ contient $\mathcal{P}^+_{\mathfrak{P}}(\mathbf{A})$ on a un homomorphisme :

$$\widehat{\rho} : \mathrm{Pic}^+_{\mathfrak{p}}(\mathbf{A}) \longrightarrow (\mathcal{O}_{\boldsymbol{V}}/\mathfrak{P})^*$$

Soit $W = W_\theta$ l'anneau de Witt de $\mathcal{O}_{\boldsymbol{V}}/\mathfrak{P}$ que l'on considère comme plongé dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, on dit que

$$\omega_\theta := \mathrm{Teich} \circ \widehat{\rho} \quad : \quad \mathrm{Pic}^+_{\mathfrak{P}}(\mathbf{A}) \longrightarrow W^*$$

est le *caractère de Teichmüller* associé à θ.

Comme ω_θ ne dépend pas du choix de θ mais seulement de $\mathfrak{P}$, on l'écrira $\omega_{\mathfrak{P}}$.

Si ψ est un module de Hayes pour sgn, on a vu dans le paragraphe 6 que : $\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{p}}/k) \cong \mathrm{Pic}^+_{\mathfrak{p}}(\mathbf{A})$ ce qui nous permet de considérer que $\omega_{\mathfrak{P}}$ est un caractère de $\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{p}}/k)$.

Maintenant soit $E \subset \overline{k} \subset C$ une extension finie de k, on désigne par $\mathcal{O}_E$ l'anneau des A−entiers de E. Si $E_{\mathfrak{p}} := E.K_{\mathfrak{p}}$, alors $\omega_{\mathfrak{P}}$ induit un caractère $\omega_{\mathfrak{P},E}$ sur $\mathrm{Gal}(E_{\mathfrak{p}}/E) \subset \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{p}}/k)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $L(\omega^n_{\mathfrak{P},E}, u)$ la série L classique de $\omega^n_{\mathfrak{P},E}$. D'après un résultat d'A. Weil [43], on sait que si $\omega^n_{\mathfrak{P},E}$ n'est pas principal, alors $L(\omega^n_{\mathfrak{P},E}, u) \in W[u]$. En enlevant de $L(\omega^n_{\mathfrak{P},E}, u)$ tous les facteurs eulériens qui se trouvent au-dessus de $\mathfrak{p}$ et de l'infini, on obtient un polynôme $\widehat{L}(\omega^n_{\mathfrak{P},E}, u) \in W[u]$ chaque fois que $\omega^n_{\mathfrak{P},E}$ n'est pas principal.

Dans le paragraphe 7 nous avons posé :

$$z_\zeta(x, -n) := \zeta_{\boldsymbol{\mathcal{O}_E}}(x\pi_*^n, -n)$$

et nous savons que $z_\zeta(x, -n) \in \boldsymbol{\mathcal{O}_V}[x^{-1}]$.

Désignons par $\pi_0(\mathrm{resp.}\,\pi_1)$ la réduction canonique $\boldsymbol{\mathcal{O}_V}[x^{-1}] \longrightarrow (\boldsymbol{\mathcal{O}_V}/\mathfrak{P})[x^{-1}]$ (resp. $W[u] \longrightarrow (\boldsymbol{\mathcal{O}_V}/\mathfrak{P})[u]$) alors on démontre ([26] p. 275) le résultat suivant.

THÉORÈME.— *Si* $n > 0$ *et si* $t_{\mathbb{F}} := [\mathbb{F} : \mathbb{F}_r]$ *où* $\mathbb{F}$ *est le corps des constantes de* E, *on a la* double congruence *:*

$$\pi_0[z_\zeta(u^{-1}, -n)] = \pi_1[\widehat{L}(\omega^{-n}_{\mathfrak{P},E}, u^{t_{\mathbb{F}}})]$$

Remarque 30.— Pour un analogue du théorème de Herbrand-Ribet, voir [25] et [26].

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. ARTIN - *Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen* I, II, Math. Z **19** (1924) 153-246 (œuvres 1-94).

[2] J.-P. ALLOUCHE - *Sur la transcendance de la série formelle* Π, in Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux 1990, 103-117.

[3] J.-P. ALLOUCHE - *Fonction zêta de Carlitz et automates finis*, in Modules de Drinfeld et Approximation Diophantienne (éd. Y. Hellegouarch) Caen, 1990.

[4] V. BERTHÉ - *Automates et valeurs de transcendance du logarithme de Carlitz*, Acta Arith. LXVI **4** (1994), 369-390.

[5] V. BERTHÉ - *Combinaisons linéaires de $\zeta(s)/\Pi^s$ sur $\mathbb{F}_q(x)$, pour $1 \leq s \leq q-2$*, J. Number Theory **53** (1995), 272-299.

[6] N. BOURBAKI - *Algèbre, ch.* 5, Hermann, 1959.

[7] L. CARLITZ - *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Math. J. **1** (1935), 137-168.

[8] L. CARLITZ - *A class of polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. (1938), 167-182.

[9] L. CARLITZ - *An analogue of the von Staudt-Clausen theorem*, Duke Math. J. **3** (1937), 503-517.

[10] L. CARLITZ - *An analogue of the von Staudt-Clausen theorem*, Duke Math. J. **7** (1940), 62-67.

[11] H. CHERIF, B. de MATHAN - *Irrationality measures of Carlitz zeta values in characteristic p*, J. Number Theory **44** (1993), 260-272.

[12] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS-FRANCE, G. RAUZY - *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. Soc. Math. France **108** (1980), 401-419.

[13] P.M. COHN - *Skew Field Constructions*, L.M.S. Lect. Notes, 1977, Cambridge.

[14] G. DAMAMME, Y. HELLEGOUARCH - *Transcendence of the values of the Carlitz zeta function by Wade's method*, J. Number Theory **39** (1991), 257-278.

[15] P. DELIGNE, D. HUSEMÖLLER - *Survey of Drinfeld modules*, Contemp. Math. **67** (1987), 25-91.

[16] L. DENIS - *Un critère de transcendance en caractéristique finie*, Journ. of Algebra **182**, 2, (1996), 522-533.

[17] V.G. DRINFELD - *Elliptic modules*, Math. USSR Sbornik **23** (1976), 561-592.

[18] V.G. DRINFELD - *Elliptic modules* II, Math. USSR Sbornik **31** (1977), 159-170.

[19] D. DUMMIT - *Genus two hyperelliptic Drinfeld modules over $\mathbb{F}_2$*, in The Arithmetic of Function Fields (éds D. Goss et al) (1992), 117-129.

[20] D. DUMMIT, D. HAYES - *Rank-one Drinfeld modules of elliptic curves*, Math. Comp. **62** (1994), 875-883.

[21] J. FRESNEL, M. KOSKAS, B. de MATHAN - *Automata and transcendance in positive characteristics*, Prépub. Univ. Bordeaux (1997).

[22] S. GALOVICH, M. ROSEN - *Units and class groups in cyclotomic function fields*, J. Number Theory **14** (1982), 156-184.

[23] E.V. GEKELER - *On regularity of small primes in functions fields*, J. Number Theory **34** (1990), 114-127.

[24] E.V. GEKELER - *On finite Drinfeld Modules*, J. Algebra **141** (1991), 187-203.

[25] D. GOSS - *$L-$series of $t-$motives and Drinfeld modules*, in The Arithmetic of Function Fields (éds D. Goss et al) de Gruyter (1992), 313-402.

[26] D. GOSS - *Basic Structures of Function Field Arithmetic*, Springer (1996).

[27] D. GOSS - *Separability, Multi-valued operators and zeros of L-functions*, Prépub. (1997).

[28] D. HAYES - *Explicit class field theory for rational function fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **189** (1974), 77-91.

[29] D. HAYES - *A brief introduction to Drinfeld modules*, in The Arithmetic of Function Fields (éds D. Goss et al) de Gruyter (1992), 1-32.

[30] Y. HELLEGOUARCH - *Galois calculus and Carlitz exponentials*, in The Arithmetic of Function Fields (éds D. Goss et al), de Gruyter (1992), 33-50.

[31] Y. HELLEGOUARCH - *Une généralisation d'un critère de de Mathan*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 321, I (1995), 677-680.

[32] B. de MATHAN - *Irrationality measures and transcendance in positive characteristic*, J. Number Theory **54** (1995), 93-112.

[33] V. MAUDUIT - *Explicit reciprocity law for a rank one Drinfeld $\mathbb{F}_q[t]-$module*, in Drinfeld Modules, Modular Schemes and Applications (éds E.-U. Gekeler et al), World Scientific (1997), 282-297.

[34] O. ORE - *On a Special class of polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933), 559-584.

[35] O. ORE - *Theory of non-commutative polynomials*, Annals of Math. **34** (1933), 480-508.

[36] F. RECHER - *Propriétés de transcendance de séries formelles provenant de l'exponentielle de Carlitz*, C.R. Acad. Sc. Paris, Série I, t. 315 (1992), 245-250.

[37] M. ROSEN - *The Hilbert class field in function fields*, Expos. Math. **5** (1987), 365-378.

[38] F.B. SCHULTHEIS - *Carlitz-Kummer function fields*, J. Number Theory **36** (1990), 133-144.

[39] F.B. SCHULTHEIS - *Explicit reciprocity laws in algebraic function fields*, Thesis, UMT Ann Arbor, (1987).

[40] J.-P. SERRE - *Zeta and L-functions*, in Arithmetic Algebraic Geometry, Proc. of a conference held at Purdue Univ. Harper and Row, New York (1965), 82-92.

[41] J.-P. SERRE - *Complex multiplication*, in Algebraic Number Theory, J.W.S. Cassels and A. Fröhlich éds, Ac. Press, London, 1967.

[42] T. TAKAHASHI - *Good reduction of elliptic modules*, J. Math. Soc. of Japan **34** (1982), 475-487.

[43] J. TATE - *Number theoretic background*, in Proceedings Symposia in Pure Mathematics 33, Part 2, Amer. Math. Soc. (1979), 3-26.

[44] D. THAKUR - *On characteristic p zeta functions*, Compositio Math. **99** (1995), 231-247.

[45] A. THIERY - *Indépendance algébrique des périodes et quasi-périodes d'un module de Drinfeld*, in The Arithmetic of Function Fields (éds Goss et al) (1992), 265-284.

[46] L. WADE - *Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$ I*, Duke Math. J. **8** (1941), 707-729.

[47] L. WADE - *Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$ II*, Duke Math. J. **10** (1943), 587-594.

[48] M. WALDSCHMIDT - *Transcendence problems connected with Drinfeld modules*, Istambul Üniv. Fen. Fak. Mat. Du. **49** (1990), 57-75.

[49] D. WAN - *On the Riemann hypothesis for the characteristic p zeta function*, J. Number Theory **58** (1996), 196-212.

[50] A. WEIL - *Basic Number Theory*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **144**, Springer (1967).

[51] J. YU - *Transcendence and special zeta-values in characteristic p*, Ann. of Maths **134** (1991), 1-23.

[52] J. YU - *Transcendence in finite characteristics*, in The Arithmetic of Function Fields (éds. D. Goss et al) de Gruyter (1992), 253-264.

Yves HELLEGOUARCH
Université de Caen
U.F.R. de Sciences
Département de Mathématiques-Mécanique
Esplanade la Paix
14032 CAEN cedex