FABIEN MOREL

# Théorie homotopique des schémas

*Astérisque*, tome 256 (1999)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1999__256__1_0>

ASTÉRISQUE 256

# THÉORIE HOMOTOPIQUE DES SCHÉMAS

Fabien Morel

Société Mathématique de France 1999

*Fabien Morel*
Université Paris 7, UFR de Mathématiques, 2 place Jussieu, 75251 Paris
et
Centre de Mathématiques, École polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex.
*E-mail :* `morel@riemann.math.jussieu.fr`

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — 55U35, 13D15, 19E08, 19D25.
***Mots clefs.*** — Abstract homotopy theory, schemes, K-theory.

# THÉORIE HOMOTOPIQUE DES SCHÉMAS

**Fabien Morel**

***Résumé.*** — Dans ce texte, nous proposons un cadre général pour appliquer les méthodes standard de théorie de l'homotopie à la catégorie des schémas lisses sur un schéma de base raisonnable. Nous montrons qu'un certain nombre de propriétés attendues sont satisfaites, par exemple concernant la $K$-théorie algébrique de ces schémas.

***Abstract* (Homotopy theory of schemes).** — In this text, we propose a general framework in order to apply standard method from homotopy theory to the category of smooth schemes over a reasonable base scheme. We show that some expected properties are satisfied, for example concerning algebraic $K$-theory of those schemes.

# Table des matières


**1. Introduction** .......... 1
1.1. .......... 1
1.2. Notations, conventions et rappels .......... 4

**2. La catégorie homotopique** .......... 7
2.1. $k$-espaces .......... 7
2.2. La catégorie homotopique .......... 16
2.3. Changement de base par un morphisme lisse .......... 30

**3. Excision homotopique, pureté homotopique et éclatements projectifs** .......... 35
3.1. Propriété de Mayer-Vietoris et descente à la Čech .......... 35
3.2. Pureté homotopique .......... 40
3.3. Éclatements projectifs .......... 47

**4. Classification homotopique des fibrés vectoriels** .......... 49
4.1. Propriété d'excision pour le groupe de Picard et la $K$-théorie algébrique .......... 49
4.2. Classification homotopique des fibrés vectoriels et des **GL**-torseurs .......... 57
4.3. $K$-théorie algébrique supérieure et périodicité .......... 71
4.4. Théorie de l'homotopie au dessus d'un schéma régulier .......... 80

**A. Rappels d'algèbre homotopique** .......... 83
A.1. Propriétés de relèvement .......... 83
A.2. Théorie de l'homotopie associée à une catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles .......... 86
A.3. Colimites et limites homotopiques .......... 101

**B. Famille ample de fibrés inversibles sur un schéma** .......... 113
B.1. Ouverts élémentaires d'un schéma .......... 113
B.2. Schémas admettant une famille ample .......... 113
B.3. $k$-schémas lisses et $k$-espaces .......... 114
B.4. Torseurs de Jouanolou-Thomason et $k$-espaces .......... 115

**Bibliographie** .......... 117

# CHAPITRE 1

# INTRODUCTION

**1.1.** Ce mémoire[1] est consacré à l'étude du point de vue homotopique de la catégorie des schémas. Plus précisément, notre objectif est de définir pour tout schéma raisonnable[2] $k$ la catégorie homotopique $h(\mathcal{E}_k)$ des $k$-schémas lisses et de montrer que celle-ci joue pour les $k$-schémas lisses le rôle que joue la catégorie homotopique classique pour les variétés différentiables.

V. Voevodsky a proposé dans **[33, 35]**, indépendamment, une définition concurrente de la nôtre. On peut montrer que, tout au moins lorsque $k$ est de dimension de Krull finie, les deux approches conduisent à des catégories homotopiques équivalentes. De façon consise, on peut dire que notre approche est combinatoire tandis que celle de Voevodsky est topologique, reposant sur la notion de faisceaux pour la topologie de Nisnevich **[26]**. C'est cette approche topologique qui est développée dans **[25]**.

L'étape suivante sera l'étude des « théories cohomologiques sur la catégorie des $k$-schémas lisses » ainsi que celle, intimement liée, de la catégorie homotopique *stable* sur $k$ dont les objets sont les spectres au sens de la théorie de l'homotopie ; cette catégorie est triangulée et possède un « smash-produit » pour lequel la droite projective pointée $\mathbf{P}^1_k$ est inversible. Les exemples classiques de théories cohomologiques (cohomologie étale à coefficients de torsion première aux caractéristiques résiduelles, cohomologie de Betti associée à tout point complexe de $k$, cohomologie motivique (rationnelle) de Beilinson, cohomologie motivique de Suslin-Voevodsky) sont des théories cohomologiques « ordinaires » en ce sens qu'elles se factorisent par la catégorie triangulée des motifs mixtes sur $k$ définie par Voevodsky **[34]** (au moins lorsque $k$ est un corps de caractéristique 0). La $K$-théorie algébrique supérieure de Quillen **[28]** est le premier exemple (tout comme en topologie algébrique standard) de théorie cohomologique généralisée qui n'est pas ordinaire. Un des aboutissement du présent travail est d'une certaine façon la description du spectre de $K$-théorie algébrique qui se lit dans le théorème de périodicité 4.3.6.

---

[1] Ce texte est une version revue et corrigée de la prépublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu intitulée « Théorie de l'homotopie et motifs I : propriétés géométriques fondamentales » (1995).

[2] noethérien, séparé, admettant une famille ample, *cf.* l'appendice B.

Nous montrerons ailleurs, lorsque $k$ est un corps dans lequel $-1$ est un carré, que la catégorie homotopique stable une fois tensorisée par $\mathbf{Q}$ contient de façon naturelle comme sous-catégorie pleine la catégorie des motifs rationnels sur $k$ définie par Grothendieck à l'aide des correspondances de Chow entre $k$-variétés projectives lisses, ce qui confirme le principe, bien connu en topologie algébrique, qu'une fois tensorisées par $\mathbf{Q}$, les théories cohomologiques redeviennent toutes « ordinaires » (comme cela est illustré par le résultat de Grothendieck affirmant que le $K_0$ d'une variété lisse sur un corps, tensorisé par $\mathbf{Q}$ s'identifie à la somme directe de ses groupes de Chow tensorisés par $\mathbf{Q}$).

La catégorie $\mathcal{E}_k$ des $k$-espaces est la catégorie des foncteurs de la catégorie opposée de celle, notée $\mathcal{C}_k$, des $k$-schémas affines lisses vers la catégorie des ensembles. Elle possède, par sa définition, une certaine analogie avec la catégorie $\mathcal{S}$ des ensembles simpliciaux (qui est la catégorie des foncteurs $\Delta^{op} \to \mathcal{E}ns$, $\Delta$ désignant la catégorie des « simplexes standard ») : on remplace les simplexes standard par les $k$-schémas affines lisses. C'est de cette analogie que l'on s'est inspiré pour définir au §2.2 la catégorie homotopique associée à celle des $k$-espaces. En effet, l'obstruction essentielle à faire de la théorie de l'homotopie dans la catégorie des $k$-espaces est qu'il n'existe pas de notion évidente d'équivalences faibles.

Pour parvenir à une telle notion, nous analysons la méthode de Gabriel et Zisman **[16]** et ensuite Quillen **[27]** pour définir la catégorie homotopique des ensembles simpliciaux : on inverse dans $\mathcal{S}$ les *extensions anodines.* L'ensemble des extensions anodines est le plus petit ensemble de $\mathcal{S}$-morphismes vérifiant certaines propriétés bien connues, et contenant les applications $\Lambda^{n,r} \to \Delta^n$, $\Lambda^{n,r}$ désignant la réunion de toutes les faces du $n$-ème simplexe standard $\Delta^n$ sauf la $r$-ième.

En s'inspirant de cette technique, nous décrivons en appendice A.2.3 une méthode permettant d'associer à un quadruplet raisonnable

$$(\mathcal{E}, \Delta^\bullet, S, S_{an})$$

formé d'une catégorie $\mathcal{E}$, d'un objet cosimplicial $\Delta^\bullet$ de $\mathcal{E}$, d'un ensemble $S$ de *cofibrations élémentaires* et d'un ensemble $S_{an}$ *d'extensions anodines élémentaires* une théorie de l'homotopie, et en particulier une catégorie homotopique $h(\mathcal{E}, \Delta^\bullet, S, S_{an})$. L'ensemble des cofibrations élémentaires est en quelque sorte l'ensemble des « générateurs » de la théorie de l'homotopie et l'ensemble des extensions anodines élémentaires, celui des « relations ».

Les cofibrations élémentaires de la catégorie des $k$-espaces correspondent aux familles finies transverses d'immersions fermées vers un $k$-schémas affine lisse. Ce choix nous est apparu raisonnable par recoupement de diverses « bonnes » raisons. On peut déjà remarquer que les faces du $k$-espace affine de dimension $n$ -lorsqu'on l'interprète comme la réalisation géométrique sur $k$ du $n$-ème simplexe standard- sont transverses. De plus toute immersion fermée entre $k$-schémas affines lisses est transverse d'après un résultat classique [**15**, corollaire 17.12.2 d], et une immersion fermée entre variétés algébriques affines lisses sur $\mathbf{C}$ induit un plongement propre de variétés différentiables qui est « triangulable » (contrairement à l'application induite par une immersion ouverte par exemple) et est donc un bon candidat pour être une « cofibration » (penser à la notion de C.W.-complexe relatif). Nous avons également été influencé par le principe suivant énoncé par Jouanolou pour $k$ un corps **[18]** et généralisé par Thomason pour $k$ arbitraire (voir l'appendice B) : « un $k$-schéma» raisonnable a le type d'homotopie faible d'un $k$-schéma affine ; en quelque sorte, nous avons concrétisé ce principe en affirmant que tout type d'homotopie se « fabrique »à partir de $k$-schémas affines lisses. Enfin, la dernière raison, et non la moindre, qui a guidé notre choix des cofibrations élémentaires : le résultat technique mais fondamental du §4.1.10, qui nous a permis d'établir que lorsque $k$ est affine (nœthérien) régulier, l'espace projectif infini, la grassmannienne infinie, le groupe multiplicatif et le groupe linéaire infini sont fibrants (dans la terminologie de Quillen).

La liste des extensions anodines élémentaires que nous dressons (§2.2.8) traduit deux types de propriétés :

**invariance par homotopie :** correspondant aux extensions anodines fondamentales simpliciales (*cf.* 2.2.1) qui traduisent essentiellement que les sections nulles : $X \to X \times \mathbf{A}^1$ sont des équivalences faibles ;

**excision homotopique :** correspondant aux extensions anodines fondamentales géométriques (*cf.* 2.2.8) qui traduisent essentiellement que les carrés fondamentaux de $k$-schémas lisses (2.2.7) sont homotopiquement cocartésiens (voir le théorème 3.1.2).

Le slogan est donc que ces propriétés constituent le lien fondamental qui relie la géométrie à la théorie de l'homotopie. C'est d'ailleurs ce même slogan qui est développé par Voevodsky sous une forme différente. En effet, les carrés fondamentaux sont exactement ceux qui permettent de définir les faisceaux pour la topologie Nisnevich **[25]**.

*Variantes de la catégorie des k-espaces.* — Nous avons cherché à définir la catégorie de $k$-espaces la plus petite. On pourrait aussi utiliser la « catégorie » $\mathcal{E}_k''$ des foncteurs $(\mathcal{S}c_k)^{op} \to \mathcal{E}ns$, $\mathcal{S}c_k$ désignant la catégorie des $k$-schémas. On peut également considérer la catégorie $\mathcal{E}_k'$ des foncteurs $(\mathcal{L}_k)^{op} \to \mathcal{E}ns$, $\mathcal{L}_k$ désignant cette fois la catégorie des $k$-schémas lisses. On peut alors montrer que ces catégories définissent la même catégorie homotopique si l'on applique la même méthode (même ensemble de cofibrations élémentaires, même ensemble d'extension anodines fondamentales).

On peut également considérer une sous catégorie pleine de $\mathcal{E}_k'$ (ou $\mathcal{E}_k''$) formée de faisceaux pour une certaine topologie de Grothendieck (Nisnevich **[26, 25]**, étale, cdh, h-topologie de Voevodsky, *etc.*). On prend cette fois pour ensemble de cofibrations élémentaires un ensemble de générateurs des monomorphismes (autrement dit les cofibrations sont alors exactement les monomorphismes) et pour extensions anodines élémentaires les « mêmes » que ci-dessus. La catégorie homotopique obtenue dépend cette fois de la topologie. Pour la topologie Nisnevich, on trouve essentiellement la catégorie homotopique définie par Voevodsky **[25]** et l'on peut montrer que celle-ci est équivalente à la nôtre (au moins lorsque $k$ est de dimension de Krull finie). Un tel résultat est à comparer avec le fait que la catégorie homotopique des ensembles simpliciaux est équivalente à la catégorie homotopique des espaces topologiques.

En appliquant la même méthode mais en partant cette fois des variétés différentiables, la catégorie homotopique que l'on obtient est alors équivalente à celle des C.W.-complexes et des classes d'homotopie d'applications continues.

Hormis les définitions fondamentales et le théorème d'excision homotopique que l'on peut considérer comme « faisant partie » des axiomes, les deux résultats principaux de ce mémoire sont le théorème de pureté homotopique 3.2.8 et le théorème 4.2.6. Le théorème de pureté homotopique signifie que l'espace de Thom d'une immersion fermée entre deux $k$-schémas lisses ne dépend que du fibré normal de l'immersion. La difficulté essentielle par rapport au cas des variétés différentiables est que l'on ne dispose pas ici de voisinages tubulaires. On remplace cette technique par l'utilisation de la déformation au fibré normal. Le théorème de pureté homotopique est à la base des suites exactes de localisation pour toute théorie cohomologique orientée et également à la base de la dualité de Poincaré sous sa forme la plus concise : le $S$-dual d'un $k$-schéma projectif lisse est à suspension près l'espace de Thom du fibré normal de ce $k$-schéma.

Le théorème 4.2.6 a pour conséquence le résultat suivant (que l'on pourrait considérer comme une nouvelle définition de la $K$-théorie algébrique supérieure, tout au moins pour les schémas réguliers) : lorsque $k$ est régulier, alors pour tout $k$-schéma lisse $X$ et tout entier $n \geq 0$ le groupe $[\Sigma^n(X_+), \mathbf{Z} \times \mathbf{Gr}]_*$ des morphismes dans la catégorie homotopique des $k$-espaces pointés de la $n$-ème suspension du $k$-espace pointé $X_+$ (somme de $X$ et d'un point base) vers le produit de $\mathbf{Z}$ et de la grassmanienne infinie s'identifie naturellement au $n$-ème groupe $K_n(X)$ de $K$-théorie algébrique associé par Quillen au schéma $X$.

## 1.2. Notations, conventions et rappels

Nous utiliserons la terminologie de **[23]**. On notera $\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles et $\mathcal{S}$ la catégorie des ensembles simpliciaux, c'est à dire des foncteurs $\Delta^{op} \to \mathcal{E}ns$, $\Delta$ désignant la catégorie des ensembles ordonnés $\{0, \ldots, n\}$, $n \in \mathbf{N}$, et des applications croissantes entre ces ensembles ordonnés.

Sauf mention expresse du contraire, tout anneau est supposé commutatif unitaire et toute algèbre sur un anneau est supposée commutative.

Dans ce mémoire, le terme *schéma* signifiera -sauf dans les §§ B.1 et B.2- schéma noethérien, séparé et admettant une famille ample (*cf.* **[3**, II.2.2.4**]** et appendice B) et $k$ désignera un schéma (noethérien, séparé et admettant une famille ample !) fixé. Un

$k$-schéma lisse sera toujours supposé de type fini. Pour tout schéma $X$, $\mathcal{O}X$ désigne le faisceau d'anneaux structural de $X$ et $A(X)$ l'anneau des sections globales de $\mathcal{O}X$. Pour toute partie fermée $F$ d'un schéma $X$, on notera souvent, par abus, $F$ le sous-schéma fermé correspondant à $F$ muni de sa structure réduite induite.

Pour tout entier $n \geq 0$, on note $\mathbf{A}^n$ l'espace affine de dimension $n$ (sur Spec($\mathbf{Z}$)) et pour tout schéma $X$ on note $\mathbf{A}^n_X$ le produit sur Spec($\mathbf{Z}$) de $\mathbf{A}^n$ et de $X$. Ce dernier est un Spec($\mathbf{Z}$)-schéma affine lisse. La «droite affine», $\mathbf{A}^1$, est munie d'une structure canonique de schéma en anneaux (puisque pour tout schéma $X$, l'ensemble des morphismes de schémas de $X$ vers $\mathbf{A}^1$ s'identifie à l'anneau $A(X)$).

*Fibrés vectoriels et $\mathcal{O}X$-modules localement libres.* — Soit $X$ un schéma. Un fibré vectoriel $\xi$ sur $X$ est un $X$-schéma $p(\xi) : E(\xi) \to X$ muni d'une structure de $X$-schéma en modules sur le $X$-schéma en anneaux $\mathbf{A}^1_X$ tel qu'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de $X$ qui trivialise $\xi$ (*i.e.* pour chaque $i$, le $U_i$-schéma en modules $\xi|_{U_i}$ sur le $U_i$-schéma en anneaux $\mathbf{A}^1_{U_i}$ est isomorphe à $\mathbf{A}^{n_i}_{U_i}$ pour un certain entier $n_i$). Pour tout $\mathcal{O}X$-module localement libre de rang fini $\mathcal{M}$ on note $V(\mathcal{M})$ le fibré vectoriel sur $X$ associé à $\mathcal{M}$ [**14**, §1.7]. Le foncteur contravariant $\mathcal{M} \mapsto V(\mathcal{M})$ réalise une anti-équivalence de la catégorie des $\mathcal{O}X$-modules localement libres de rang fini avec celle des fibrés vectoriels. Le foncteur qui à tout fibré vectoriel $\xi$ associe le $\mathcal{O}X$-module localement libre de rang fini $\mathcal{M}(\xi)$ des germes de sections de $\xi$ est une équivalence de catégories dont l'inverse associe à tout $\mathcal{O}X$-module localement libre de rang fini $\mathcal{M}$ le fibré vectoriel $E(\mathcal{M}) := V(\mathcal{M}^\vee)$ ($\mathcal{M}^\vee$ désignant le $\mathcal{O}X$-module localement libre de rang fini dual de $\mathcal{M}$). Pour tout fibré vectoriel $\xi$ sur $X$ nous noterons $\xi^\vee$ le fibré vectoriel dual de $\xi$. Pour tout $\mathcal{O}X$-module localement libre de rang fini $\mathcal{M}$ sur $X$, $\mathbf{P}(\mathcal{M})$ désignera le $X$-schéma projectif associé à $\mathcal{M}$ ; pour tout $X$-schéma $Y$ l'ensemble des morphismes de $X$-schémas de $Y$ vers $\mathbf{P}(\mathcal{M})$ s'identifie à l'ensemble des quotients de $\mathcal{M}|_Y$ localement libres de rang un ; voir [**14**, §3.1]. On notera $\mathcal{O}(1)_{\mathbf{P}(\mathcal{M})}$ (et même souvent $\mathcal{O}(1)$) le $\mathcal{O}(\mathbf{P}(\mathcal{M}))$-module localement libre de rang un tautologique (quotient de $\mathcal{M}|_{\mathbf{P}(\mathcal{M})}$). Pour tout fibré vectoriel $\xi$ sur $X$ on notera $\mathbf{P}(\xi)$ le fibré projectif sur $X$ associé à $\xi$, c'est à dire $\mathbf{P}(\mathcal{M}(\xi)^\vee)$. On notera $\lambda_{\mathbf{P}(\xi)}$ (ou même $\lambda_\xi$) le fibré vectoriel de rang un $V(\mathcal{O}(1)_{\mathbf{P}(\xi)})$ et on l'appellera le fibré vectoriel de rang un *canonique* sur $\mathbf{P}(\xi)$.

*Groupes linéaires.* — Pour tout entier $n \geq 0$, on note $\mathbf{GL}_n$ le schéma en groupes linéaire de rang $n$. Pour tout schéma $X$, le groupe des morphismes de schémas de $X$ vers $\mathbf{GL}_n$ s'identifie au groupe $\mathbf{GL}_n(A(X))$ des matrices carrées inversibles d'ordre $n$ à coefficients dans l'anneau $A(X)$. On note $i_n : \mathbf{GL}_n \to \mathbf{GL}_{n+1}$ le morphisme qui à tout schéma $X$ et tout élément $M$ de $\mathbf{GL}_n(A(X))$ associe la matrice $i_n(X)(M) := \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbf{GL}_{n+1}(A(X))$. C'est une immersion fermée.

*Grassmaniennes.* — Soient $n$ et $r$ deux entiers $\geq 0$. Pour tout schéma $X$, l'ensemble $\mathbf{Gr}_{n,r}(X)$ des $\mathcal{O}X$-modules quotients de $(\mathcal{O}X)^{n+r}$ et localement libres de rang $n$

s'identifie naturellement à l'ensemble des morphismes de $X$ vers un schéma noté $\mathbf{Gr}_{n,r}$ (la grassmanienne des $n$-plans dans $\mathbf{A}^{n+r}$). Lorsque $n = 1$, $\mathbf{Gr}_{1,r}$ s'identifie à l'espace projectif de dimension $r$. On note $\tau_{n,r} : \mathbf{Gr}_{n,r} \cong \mathbf{Gr}_{r,n}$ l'isomorphisme de schémas tel que pour tout schéma $X$, $\tau_{n,r}(X)$ associe à l'élément $\pi : (\mathcal{O}X)^{n+r} \to P$ de $\mathbf{Gr}_{n,r}(X)$ l'épimorphisme canonique $(\mathcal{O}X)^{r+n} \cong ((\mathcal{O}X)^{n+r})^\vee \to (\operatorname{Ker}\pi)^\vee$, l'isomorphisme $(\mathcal{O}X)^{r+n} \cong ((\mathcal{O}X)^{n+r})^\vee$ étant celui qui inverse l'ordre des coordonnées. On note $\iota_{n,r} : \mathbf{Gr}_{n,r} \to \mathbf{Gr}_{n,r+1}$ le morphisme qui à tout schéma $X$ et tout élément $\pi : (\mathcal{O}X)^{n+r} \to P$ de $\mathbf{Gr}_{n,r}(X)$ associe l'élément $\iota_{n,r}(X)(\pi)$ composé de la projection $(\mathcal{O}X)^{n+r+1} \to (\mathcal{O}X)^{n+r}$ (qui annule la dernière coordonnée) et de $\pi$. On note $\varphi_{n,r} : \mathbf{Gr}_{n,r} \to \mathbf{Gr}_{n+1,r}$ le morphisme qui à tout schéma $X$ et tout élément $\pi(\mathcal{O}X)^{n+r} \to P$ de $\mathbf{Gr}_{n,r}(X)$ associe l'épimorphisme $\mathrm{Id}_{\mathcal{O}X} \oplus \pi : (\mathcal{O}X)^{n+r+1} \to \mathcal{O}X \oplus P$. On vérifie facilement les égalités $\tau_{n,r+1} \circ \iota_{n,r} = \varphi_{r,n} \circ \tau_{n,r}$ et $\varphi_{n,r+1} \circ \iota_{n,r} = \iota_{n+1,r} \circ \varphi_{n,r}$. Par construction, le morphisme identique de $\mathbf{Gr}_{n,r}$ correspond à un épimorphisme de $\mathcal{O}\mathbf{Gr}_{n,r}$-modules localement libres $\pi : (\mathcal{O}\mathbf{Gr}_{n,r})^{n+r} \to \mathcal{M}_{n,r}$, avec $\mathcal{M}_{n,r}$ de rang $n$. On note $\gamma_{n,r}$ le fibré vectoriel $V(\mathcal{M}_{n,r})$ sur $\mathbf{Gr}_{n,r}$ et on l'appelle le fibré vectoriel de rang $n$ canonique sur $\mathbf{Gr}_{n,r}$. Lorsque $n$ vaut un, on note également $\lambda_r$ le fibré vectoriel de rang un $\gamma_{1,r}$ sur $\mathbf{P}^r$.

Je dédie ce travail à la mémoire de Robert Thomason. Pour l'intérêt qu'il y avait porté, pour ses encouragements et pour un certain nombre de discussions dont une m'a permis d'aboutir rapidement au théorème 4.1.10.

# CHAPITRE 2

# LA CATÉGORIE HOMOTOPIQUE

Rappelons que $k$ désigne un schéma noethérien, séparé et admettant une famille ample.

## 2.1. $k$-espaces

**2.1.1. Définitions, exemples.** — On note $\mathcal{S}c_k$ la catégorie des $k$-schémas, $\mathcal{L}_k$ celle des $k$-schémas lisses, et $\mathcal{C}_k$ celle des $k$-schémas *affines lisses.* Les $k$-schémas lisses étant supposés de type fini les catégories $\mathcal{L}_k$ et $\mathcal{C}_k$ sont essentiellement petites (équivalentes à une petite catégorie).

On note $\mathcal{E}_k$ la catégorie des foncteurs $(\mathcal{C}_k)^{op} \to \mathcal{E}ns$. Les objets (resp. les morphismes) de $\mathcal{E}_k$ s'appelleront aussi $k$-espaces (resp. $k$-applications) ; lorsqu'aucune confusion n'est possible sur le schéma de base $k$, on dira même « application » au lieu de $k$-application. Pour toute paire $(X, Y)$ de $k$-espaces on notera $\mathrm{Hom}_k(X, Y)$ l'ensemble des applications de $X$ vers $Y$. On notera $\varnothing$ l'objet initial de $\mathcal{E}_k$ : c'est le foncteur qui à tout $k$-schéma affine lisse associe l'ensemble vide.

***Exemple 2.1.1.*** — On définit un plongement pleinement fidèle $\mathcal{C}_k \to \mathcal{E}_k$ en associant au $k$-schéma affine lisse $X$ le foncteur $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}c_k}(Y, X)$ que l'on note encore $X$. Par la suite on identifiera fréquemment la catégorie $\mathcal{C}_k$ à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}_k$ via ce plongement. Par exemple, pour tout entier $n \geq 0$, on notera $\mathbf{A}^n_k$ (et même $\mathbf{A}^n$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible) le foncteur qui à tout $k$-schéma affine lisse $Y$ associe l'ensemble $A(Y)^n$, et on l'appellera le $k$-espace affine de dimension $n$. Le $k$-espace affine de dimension zéro $\mathbf{A}^0$ est l'objet final de $\mathcal{E}_k$ que l'on notera aussi $*$.

De même, on note $\mathbf{GL}_n$ le $k$-espace en groupes associé au $k$-schéma en groupes affine lisse $\mathbf{GL}_n \times_{\mathrm{Spec}(Z)} k$. Lorsque $n = 1$ on notera aussi $\mathbf{G}_m$ le $k$-groupe $\mathbf{GL}_1$.

***Exemple 2.1.2.*** — Soit $X$ un $k$-schéma. Alors le foncteur

$$\underline{X} : (\mathcal{C}_k)^{op} \to \mathcal{E}ns, Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}c_k}(Y, X)$$

s'appelle le $k$-espace associé à $X$. On obtient ainsi un foncteur $\mathcal{S}c_k \to \mathcal{E}_k$ qui commute aux limites finies. Ce foncteur n'est pas un plongement pleinement fidèle en général.

En revanche il induit un plongement pleinement fidèle de la sous-catégorie $\mathcal{L}_k$ dans la catégorie des $k$-espaces (voir B.3). Nous identifierons donc souvent un $k$-schéma lisse $X$ au $k$-espace qu'il définit, lequel se notera donc également $X$. Réciproquement, lorsqu'on notera $X$ le $k$-espace associé à un $k$-schéma $X$, on sous-entendra toujours que $X$ est lisse. Par exemple, citons les grassmaniennes $\mathbf{Gr}_{n,r}$ et en particulier les espaces projectifs $\mathbf{P}^n$ (on omettra le plus souvent de signaler la base $k$).

***Exemple 2.1.3***. — On note $\mathbf{GL}$ le $k$-espace en groupes qui associe au $k$-schéma affine lisse $Y$ le groupe $\operatorname{colim}_n \mathbf{GL}_n(A(Y))$ ; $\mathbf{GL}$ est la colimite des $\mathbf{GL}_n$ dans la catégorie des $k$-espaces (*via* les $i_n$) et on l'appellera le $k$-groupe linéaire infini. De même on notera $\mathbf{Gr}$ le $k$-espace colimite des grassmaniennes $\mathbf{Gr}_{n,r}$ (*via* les $\iota_{n,r}$ et les $\varphi_{n,r}$) et on l'appellera la grassmanienne infinie. Le $k$-espace projectif infini $\mathbf{P}^\infty$ est le $k$-espace colimite des $\mathbf{P}^n$.

**2.1.2. Propriétés d'exactitude, changement de base.** — La catégorie $\mathcal{E}_k$ possède les propriétés suivantes, communes à toutes les catégories de foncteurs d'une petite catégorie vers la catégorie des ensembles ([**1**, I.5, I.8]) :

- les limites et les colimites y sont représentables : elles se calculent argument par argument. En particulier les colimites filtrantes sont exactes (i.e. commutent aux limites finies).
- une application est un isomorphisme si et seulement si c'est à la fois un épimorphisme et un monomorphisme. Toute application se décompose (de façon « unique ») en un monomorphisme suivi d'un épimorphisme.
- un foncteur $(\mathcal{E}_k)^{op} \to \mathcal{E}ns$ (resp. $(\mathcal{E}_k) \to \mathcal{E}ns$) est représentable si et seulement si il commute aux limites, autrement dit envoie colimites (resp. limites) dans $\mathcal{E}_k$ sur limites dans $\mathcal{E}ns$.
- Soit $X$ un $k$-espace et notons $\mathcal{C}_X$ la catégorie dont les objets sont les applications $Y \to X$, avec $Y$ un $k$-schéma affine lisse, et les morphismes les diagrammes commutatifs évidents ; cette catégorie est essentiellement petite. On note $F_X : \mathcal{C}_X \to \mathcal{E}_k$ le foncteur qui à $Y \to X$ associe $Y$. Alors l'application canonique $\operatorname{colim} F_X \to X$ est (tautologiquement) un isomorphisme.
- Pour tout $k$-espace $X$, le foncteur $\mathcal{E}_k \to \mathcal{E}_k$, $Y \mapsto Y \times X$ commute aux colimites et admet donc un adjoint à droite que l'on note $\mathbf{Hom}_k(X, -) : \mathcal{E}_k \to \mathcal{E}_k$ (en effet, d'après ce qui précède, pour tout $k$-espace $Z$ le foncteur $(\mathcal{E}_k)^{op} \to \mathcal{E}ns$, $Y \mapsto \operatorname{Hom}_k(Y \times X, Z)$ est représentable).

Pour tous $k$-espaces $X$ et $Z$, le $k$-espace $\mathbf{Hom}_k(X, Z)$ s'appellera le *$k$-espace fonctionnel* de source $X$ et de but $Z$.

Soient $X$ un $k$-espace et $\{f_a : X_a \to X\}_{a \in I}$ une famille finie d'applications de but $X$. Pour tout entier $\ell \geq 0$ et toute famille $\underline{a} := (a_1, \ldots, a_\ell)$ d'éléments de $I$, on notera $X_{a_1,\ldots,a_\ell}$ le $k$-espace produit fibré des $X_{a_i}$ au dessus de $X$, $i$ parcourant $\{1, \ldots, \ell\}$ et

$f_{a_1,\ldots,a_\ell} : X_{a_1,\ldots,a_\ell} \to X$ l'application évidente. On notera $S[f_a, a \in I]$ (ou simplement $S[f_a]$) la colimite du diagramme :

$$\amalg_{b,c} X_{b,c} \rightrightarrows \amalg_a X_a,$$

dont le premier morphisme est induit par les applications $X_{b,c} \to X_b$ et le second par les applications $X_{b,c} \to X_c$, et on notera $[f_a, a \in I]$ (ou encore $[f_a]$) l'application canonique $S[f_a] \to X$. Lorsque la famille $\{f_a\}$ est réduite à un élément $f$, l'application $[f]$ s'identifie à $f$. Lorsque les $f_a$ sont des monomorphismes, il en est de même pour $[f_a]$ qui identifie alors $S[f_a]$ à l'image de l'application $S[f_a] \to X$ (c'est à dire la « réunion » des $X_a$) que l'on notera aussi $S[X_a]$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur les $f_a$.

Le résultat qui suit est un calcul facile sur les colimites qu'il suffit de vérifier dans la catégorie des ensembles (auquel cas on peut supposer que $X$ est réduit à un élément) :

***Lemme 2.1.4.*** — *Soient $X$ un $k$-espace et $\{f_a : X_a \to X\}_{a\in I}$ une famille finie d'applications de but $X$. Soient $i$ un élément de $I$ et $J$ le complémentaire de $\{i\}$ dans $I$. Alors le carré suivant :*

$$\begin{array}{ccc} S[f_{i,a}, a \in J] & \to & S[f_a, a \in J] \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_i & \to & S[f_a, a \in I] \end{array}$$

*est cocartésien.*

Soient $X \to Y$ et $X' \to Y'$ deux applications. On notera $S(f,g)$ la somme amalgammée $(Y \times X') \amalg_{X\times X'} (X \times Y')$ et $(f,g)$ l'application évidente $S(f,g) \to Y \times Y'$.

**2.1.3. Structure quasi-simpliciale.** — On note $\Delta_k^\bullet : \Delta \to \mathcal{E}_k$ (ou simplement $\Delta^\bullet$ s'il n'y a pas de confusion possible) le foncteur qui à l'ensemble $\{0,\ldots,n\}$ associe le sous-$k$-schéma fermé $\Delta_k^n$ du $k$-espace affine de dimension $n+1$, $\mathbf{A}^{n+1}$, défini par l'équation $\Sigma_{i=0,\ldots,n} X_i$, (les $X_i$, $i \in \{0,\ldots,n\}$, désignant les fonctions coordonnées standard de $\mathbf{A}^{n+1}$) et qui à l'application croissante $\phi : \{0,\ldots,n\} \to \{0,\ldots,m\}$ associe l'application $\Delta_k^n \to \Delta_k^m$ induite par l'application $\mathbf{A}_k^{n+1} \to \mathbf{A}_k^{m+1}$ dont la $i$-ème composante, $i \in \{0,\ldots,m\}$ est $\Sigma_{j\in\phi^{-1}(i)} X_j$. Le $k$-espace $\Delta_k^n$ s'appellera le $n$-ème $k$-simplexe standard; il est bien sûr isomorphe au $k$-espace affine de dimension $n$.

Pour toute paire $(X,Y)$ de $k$-espaces, on note $\mathbf{hom}_k(X,Y)$ l'ensemble simplicial $\mathrm{Hom}_k(X\times\Delta_k^\bullet, Y)$, dont l'ensemble des $n$-simplexes est l'ensemble $\mathrm{Hom}_k(X\times\Delta_k^n, Y)$ et les applications de faces et dégénérescences sont les applications évidentes. On obtient ainsi un foncteur $(\mathcal{E}_k)^{op} \times \mathcal{E}_k \to \mathcal{S}$, $(X,Y) \mapsto \mathbf{hom}_k(X,Y)$. On dispose également d'applications naturelles (en $X$, $Y$ et $Z$) $\mathbf{hom}_k(X,Y) \times \mathbf{hom}_k(Y,Z) \to \mathbf{hom}_k(X,Z)$ induites par la composition dans $\mathcal{E}_k$.

Remarquons que pour tout ensemble simplicial $K$ et tout $k$-espace $X$ le foncteur

$$\mathcal{E}_k \to \mathcal{E}ns, \quad Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(K, \mathbf{hom}_k(X,Y))$$

est représentable par un $k$-espace noté $X \otimes K$ ; en effet, il l'est pour $K = \Delta^n$ par $X \times \Delta^n_k$ (par définition) et l'on conclut par la représentabilité des colimites dans $\mathcal{E}_k$. Le foncteur

$$|-|_k : \mathcal{S} \to \mathcal{E}_k, \quad K \mapsto |K|_k := * \otimes K$$

s'appelle la *réalisation géométrique* sur $k$. Il est clair que le foncteur

$$\mathcal{E}_k \times \mathcal{S} \to \mathcal{E}_k, \quad (X, K) \mapsto X \otimes K$$

est isomorphe au foncteur $(X, K) \mapsto X \times |K|_k$. Cependant, on n'obtient pas ainsi une structure de catégorie simpliciale sur $\mathcal{E}_k$ au sens de [**27**, II.1], car le foncteur de réalisation géométrique sur $k$ ne commute pas en général aux produits finis.[(1)] C'est pourquoi pour éviter toute confusion nous parlerons dans le cas présent de structure quasi-simpliciale (voir A.2.1).

**2.1.4. Changement de base.** — Soit $f : k' \to k$ un morphisme de schémas (noethériens, séparés, admettant une famille ample). Le foncteur $\mathcal{S}_k \to \mathcal{S}_{k'}$, $X \mapsto X \times_k k'$, induit un foncteur $\mathcal{C}_k \to \mathcal{C}_{k'}$. Par composition à la source, celui-ci définit le foncteur *image directe* par $f$, $f_* : \mathcal{E}_{k'} \to \mathcal{E}_k$, qui au $k'$-espace $X$ associe le $k$-espace $f_*(X) : Y \mapsto X(Y \times_k k')$. Ce foncteur admet comme adjoint à gauche le foncteur $f^* : \mathcal{E}_k \to \mathcal{E}_{k'}$, que l'on appelle *image réciproque* par $f$, qui au $k$-espace $X$ associe (avec les notations du §2.1.2) le $k'$-espace

$$\operatorname{colim}_{Y \to X \in \mathcal{C}_X} Y \times_k k'.$$

Le foncteur $f_*$ admet également un adjoint à droite $f^! : \mathcal{E}_k \to \mathcal{E}_{k'}$ puisqu'il commute aux colimites.

Lorsque le morphisme $f : k' \to k$ est affine et lisse, le foncteur

$$\mathcal{C}_k \to \mathcal{C}_{k'}, \quad X \mapsto X \times_k k',$$

admet comme adjoint à gauche le foncteur $f : \mathcal{C}_{k'} \to \mathcal{C}_k$ qui au $k'$-schéma affine lisse $X$ associe le $k$-schéma affine lisse $f(X)$ dont le morphisme structural est le composé de $f$ et du morphisme $X \to k'$. Le foncteur $F : \mathcal{E}_k \to \mathcal{E}_{k'}$, défini en composant à la source par le foncteur $f : \mathcal{C}_{k'} \to \mathcal{C}_k$, est isomorphe au foncteur image réciproque $f^*$. En effet, le foncteur $F$ commute aux colimites et prend les mêmes valeurs que $f^*$ sur les $k$-schémas affines lisses. Il résulte de cette identification entre $F$ et $f^*$ que le foncteur $f^*$ commute également aux limites et admet donc un adjoint à gauche $f_! : \mathcal{E}_{k'} \to \mathcal{E}_k$ qui au $k'$-espace $X$ associe le $k$-espace $\operatorname{colim}_{Y \in \mathcal{C}_{k'}/X} f(Y)$. On dispose donc, lorsque $f$ est affine et lisse, d'un quadruplet

$$(f_!, f^*, f_*, f^!)$$

de foncteurs tels que tout foncteur est adjoint à gauche du foncteur qui lui succède à droite.

(1) Ce point m'a été signalé par J.F. Jardine et J.H. Smith

### 2.1.5. Fibrés vectoriels et $\mathrm{GL}_n$-torseurs

2.1.5.1. *Fibrés vectoriels sur un $k$-espace.* — Soient $B$ un $k$-espace et $\mathcal{E}_k/B$ la catégorie des $B$-espaces c'est à dire la catégorie des applications $X \to B$. Les limites (et colimites) sont représentables dans cette catégorie si bien que l'on dispose des notions de $B$-espace en groupes, en anneaux, *etc.* Par exemple le $B$-espace $\mathbf{A}^1 \times B$ est un $B$-espace en anneaux commutatifs noté aussi $\mathbf{A}^1_B$.

Un fibré vectoriel $\xi$ sur $B$ est un $B$-espace $p(\xi) : E(\xi) \to B$ muni d'une structure de $B$-espace en modules sur le $B$-anneau $\mathbf{A}^1_B$ tel que pour toute application $f : X \to B$ avec $X$ un $k$-schéma affine lisse, l'image réciproque $f^*(\xi)$ de $\xi$ par $f$ est le $\mathbf{A}^1_X$-module associé (de façon évidente) à un fibré vectoriel sur le $k$-schéma $X$. On dit que le fibré vectoriel $\xi$ est de rang $n$ si pour toute application $f : X \to B$ avec $X$ un $k$-schéma affine lisse, l'image réciproque $f^*(\xi)$ de $\xi$ est (associé à) un fibré vectoriel de rang $n$. Par exemple, la projection $\mathbf{A}^n \times B \to B$ est naturellement munie d'une structure de fibré vectoriel sur $B$, de rang $n$, que l'on appelle le fibré trivial de rang $n$, et que l'on note $\Theta^n_B$. Pour toute application $f : B' \to B$ on notera $f^*\xi$ le fibré vectoriel sur $B'$ image réciproque, au sens évident, de $\xi$ par $f$, et parfois $\xi|_{B'}$ lorsqu'aucune confusion n'est possible sur $f$.

Pour tout $k$-schéma $X$ et tout fibré vectoriel $\xi$ sur $X$ le $X$-espace $E(\xi)$ est muni de façon évidente d'une structure de fibré vectoriel sur $\underline{X}$. Réciproquement, si X est un k-schéma lisse, il résulte facilement du §B.3 que la correspondance précédente définit une équivalence de la catégorie des fibrés vectoriels sur le schéma $X$ vers celle des fibrés vectoriels sur le $k$-espace $X$.

*Construction de fibrés vectoriels sur un $k$-espace*

***Lemme 2.1.5***

*1) Soient $\mathcal{I}$ une petite catégorie, $\Phi : \mathcal{I} \to \mathcal{E}_k$ un foncteur, $X$ la colimite de $\Phi$ et $Z \to X$ une application. On note $\Phi_Z$ le foncteur $\mathcal{I} \to \mathcal{E}_k$, $i \mapsto \Phi_Z(i) := \Phi(i) \times_X Z$. Alors l'application naturelle :*

$$\operatorname{colim} \Phi_Z \to Z$$

*est un isomorphisme.*

*2) Soient $X$ un $k$-espace, $\Phi : \mathcal{C}_X \to \mathcal{E}_k$ un foncteur, $\theta : \Phi \to F_X$ une transformation naturelle (voir le §2.1.2 pour la définition de $\mathcal{C}_X$ et de $F_X$), $E$ la colimite de $\Phi$ et $E \to X$ l'application induite par $\theta$. On suppose que pour tout $\mathcal{C}_X$-morphisme $Y \to Z \to X$, le carré commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \Phi(Y) & \to & \Phi(Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & Z \end{array}$$

*est cartésien. Alors pour tout objet $Y \to X$ de $\mathcal{C}_X$ le carré commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{colim}\Phi_Y & \to & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & X \end{array}$$

*est également cartésien.*

*Démonstration.* — Pour le point 1) on remarque qu'il suffit d'établir l'affirmation dans la catégorie des ensembles. 2) Il suffit d'établir que pour tout $k$-schéma affine lisse $Z$ et tout carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z & \to & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & X \end{array}$$

il existe une et une seule application $Z \to \operatorname{colim}\Phi_Y$ qui fait « tout commuter ». Par construction de $E$ et des colimites dans $\mathcal{E}_k$, il existe un objet $Z' \to X$ de $\mathcal{C}_X$ et un diagramme commutatif :

$$(D) \qquad \begin{array}{ccccc} Z & \to & \Phi(Z') & \to & E \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ Z & \to & Z' & \to & X \end{array}$$

tel que l'application horizontale composée $Z \to E$ est l'application précédente. Puisque $\Phi(Z)$ est le produit fibré de $Z$ et $\Phi(Z')$ au dessus de $Z'$, on en déduit une section $s : Z \to \Phi(Z)$ de l'application $\theta(Z) : \Phi(Z) \to Z$. L'application $Z \to \Phi(Y)$ composée de $s$ et de l'application $\Phi(Z) \to \Phi(Y)$ fait tout commuter d'oû la première partie de l'affirmation. L'unicité résulte clairement de l'affirmation suivante : la section $s$ ne dépend pas du diagramme $(D)$ ci-dessus (et ne dépend donc que de l'application $Z \to E$ initiale). Pour le voir on remarque que si $Z' \to X$ et $Z'' \to X$ sont deux objets de $\mathcal{C}_X$ et $Z \to Z'$ et $Z \to Z''$ deux applications tels que les composés évidents $Z \to E$ sont égaux, il existe, par construction des colimites dans $\mathcal{E}_k$, une suite finie de $\mathcal{C}_X$-morphismes

$$Z' \to Z'_1 \to X,\ Z'_2 \to Z'_1 \to X, \ldots,\ Z'_{2n} \to Z'_{2n-1} \to X,\ Z'_{2n} \to Z'_{2n+1} \to X, \quad etc.$$

telle que $Z'_{2n} \to X$ est égal à $Z'' \to X$ pour $n$ grand, et des applications $Z \to Z'_{2n}$ telles que pour tout $n$, les composés

$$Z \to \Phi(Z'_{2n}) \to \Phi(Z'_{2n+1}) \quad \text{et} \quad Z \to \Phi(Z'_{2n+2}) \to \Phi(Z'_{2n+1})$$

sont égaux. On se ramène donc à établir le fait suivant : soient $Z' \to Z'' \to X$ un $\mathcal{C}_X$-morphisme et $Z \to \Phi(Z')$ une application, alors les deux sections $Z \to F_Z$ associées comme ci-dessus à $Z \to \Phi(Z')$ et $Z \to \Phi(Z'')$ sont égales ce qui est évident. □

Soient $X$ un $k$-espace, $\Phi \to \mathcal{C}_X \to \mathcal{E}_k$ un foncteur, $\theta : \Phi \to F_X$ une transformation naturelle, $E$ la colimite de $F$ et $E \to X$ l'application induite par $\theta$. Supposons que pour tout $\mathcal{C}_X$-morphisme $Y \to Z \to X$, le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Phi(Y) & \to & \Phi(Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & Z \end{array}$$

est cartésien. Si l'on se donne pour chaque objet $Y \to X$ de $\mathcal{C}_X$ une structure naturelle de fibré vectoriel sur $\theta(Y) : \Phi(Y) \to Y$ de telle sorte que pour tout $\mathcal{C}_X$-morphisme $Y \to Z \to X$ le diagramme ci-dessus est un diagramme de fibrés vectoriels, alors $E$ est canoniquement muni d'une structure de $\mathbf{A}^1_X$-module. Le lemme précédent permet d'affirmer que ce $\mathbf{A}^1_X$-module est un fibré vectoriel. Cette remarque permet d'étendre aux $k$-espaces les opérations usuelles sur les fibrés vectoriels : somme directe, produit tensoriel, *etc.* Construisons par exemple le fibré vectoriel dual $\xi^\vee$ d'un fibré vectoriel $\xi$ sur $X$. On prend pour $\Phi$ le foncteur $\mathcal{C}_X \to \mathcal{E}_k$ qui à chaque objet $Y \to X$ de $\mathcal{C}_X$ associe le fibré vectoriel (sur $Y$) $(\xi|_Y)^\vee$. La colimite de $\Phi$ est donc un fibré vectoriel sur $X$ noté $\xi^\vee$ et appelé dual de $\xi$ ; sa restriction à chaque $k$-schéma affine lisse $Y$ est donc le dual de la restriction de $\xi$ à $Y$.

***Remarque 2.1.6.*** — Plus généralement, chaque fois que l'on dispose d'une construction géométrique fonctorielle en les $k$-schémas affines lisses, le lemme précédent permet d'étendre cette construction aux $k$-espaces.

$\mathbf{GL}_n$*-torseurs.* — Soient $n$ un entier $\geq 0$ et $X$ un schéma. Rappelons qu'un $\mathbf{GL}_n$-torseur sur $X$ est la donnée d'un $X$-schéma $T \to X$ et d'une action à gauche du schéma en groupes $\mathbf{GL}_n$ sur le schéma $T$ telle que tout point de $X$ admet un voisinage ouvert $U$ tel que le $\mathbf{GL}_n - U$-schéma $T \times_X U$ est isomorphe à $\mathbf{GL}_{n,U}$. Soit $B$ un $k$-espace. Un $\mathbf{GL}_n$-torseur $\xi$ sur $B$ est la donnée d'un $B$-espace $\theta(\xi) : T(\xi) \to B$ et d'une action à gauche du $k$-groupe $\mathbf{GL}_n$ sur le $k$-espace $T(\xi)$ tels que pour toute application $f : X \to B$ avec $X$ un $k$-schéma affine lisse, l'image réciproque de $\xi$ par $f$ est associé (au sens évident) à un $\mathbf{GL}_n$-torseur sur le $k$-schéma $X$. Pour tout $k$-schéma $X$, un $\mathbf{GL}_n$-torseur sur $X$ définit de façon évidente un $\mathbf{GL}_n$-torseur sur le $k$-espace $X$. Réciproquement, si $X$ est un $k$-schéma lisse, il résulte facilement du §B.2 que la correspondance précédente induit une équivalence entre la catégorie des $\mathbf{GL}_n$-torseurs sur le schéma $X$ et celle des $\mathbf{GL}_n$-torseurs sur le $k$-espace $X$.

$\mathbf{GL}_n$*-torseurs et fibrés vectoriels de rang n.* — Pour tout schéma $X$ et tout entier $n$, notons $\Phi_{\mathbf{GL}_n}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\mathbf{GL}_n$-torseurs sur $X$ et $\Phi_n(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels de rang $n$ sur $X$. Rappelons qu'il existe une bijection naturelle entre les ensembles $\Phi_{\mathbf{GL}_n}(X)$ et $\Phi_n(X)$ que l'on construit comme suit. Soit $\xi$ un fibré vectoriel de rang $n$ sur $X$. On associe à $\xi$ le $\mathbf{GL}_n$-torseur $\Pi(\xi)$ sur $X$ dont l'espace total est le sous-schéma fermé du produit fibré au dessus de $X$ de $n$ copies de $E(\xi)$, «formé» des familles de $n$-vecteurs linéairement indépendants et muni de la restriction de l'action évidente de $\mathbf{GL}_n$ sur ce produit fibré. On définit ainsi une bijection naturelle $\Phi_n(X) \to \Phi_{\mathbf{GL}_n}(X)$ dont l'application réciproque associe à un $\mathbf{GL}_n$-torseur $\xi$ sur $X$ le fibré vectoriel de rang $n$ dont l'espace total est le schéma $T(\xi) \times_{\mathbf{GL}_n} \mathbf{A}^n$ (on laisse au lecteur le soin de préciser le sens de cette formule).

Pour tout $k$-espace $X$ et tout entier $n$, notons de même $\Phi_{\mathbf{GL}_n}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\mathbf{GL}_n$-torseurs sur $X$ et $\Phi_n(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels de rang $n$ sur $X$.

***Lemme 2.1.7.*** — *Soit $n$ un entier $\geq 0$. Pour tout $k$-espace $X$ il existe une bijection naturelle*

$$\Phi_n(X) \cong \Phi_{\mathbf{GL}_n}(X).$$

*Démonstration.* — On démontre ce lemme en copiant la correspondance entre fibrés vectoriels de rang $n$ et $\mathbf{GL}_n$-torseurs esquissée ci-dessus, en invoquant le lemme 2.1.5. Par exemple, soit $\xi$ un fibré vectoriel de rang $n$ sur $X$. On fabrique le $\mathbf{GL}_n$-torseur $\Pi(\xi)$ associé comme suit : on sait en effet fabriquer ce $\mathbf{GL}_n$-torseur fonctoriellement lorsque $X$ est affine et lisse sur $k$ et l'on passe à la colimite sur $\mathcal{C}_X$. □

***Exemple 2.1.8.*** — Pour chaque paire $(n,r)$ d'entiers $\geq 0$, on note $\mathbf{V}_{n,r}$ la variété de Stiefel, c'est à dire le $k$-espace qui à un $k$-schéma affine lisse $Y$ associe l'ensemble des épimorphismes de $\mathcal{O}Y$-modules $(\mathcal{O}Y)^{n+r} \to (\mathcal{O}Y)^n$. Le $k$-espace $\mathbf{V}_{n,r}$ est muni de façon évidente d'une action à gauche du $k$-groupe linéaire $\mathbf{GL}_n$ et l'application évidente $\mathbf{V}_{n,r} \to \mathbf{Gr}_{n,r}$ est un $\mathbf{GL}_n$-torseur. Le fibré vectoriel associé à ce $\mathbf{GL}_n$-torseur par la correspondance du lemme 2.1.7 est le fibré vectoriel de rang $n$ canonique $\gamma_{n,r}$ sur $\mathbf{Gr}_{n,r}$ et $\mathbf{V}_{n,r}$ est donc le $k$-espace des familles de $n$-vecteurs linéairement indépendants de $\gamma_{n,r}$. Il est clair que la restriction à $\mathbf{Gr}_{n,r}$ du $\mathbf{GL}_n$-torseur $\mathbf{V}_{n,r+1} \to \mathbf{Gr}_{n,r+1}$ par l'immersion fermée $\phi_{n,r} : \mathbf{Gr}_{n,r} \to \mathbf{Gr}_{n,r+1}$ s'identifie au $\mathbf{GL}_n$-torseur $\mathbf{V}_{n,r} \to \mathbf{Gr}_{n,r}$. On note $\mathbf{V}_n$ le $k$-espace colimite des $\mathbf{V}_{n,r}$ via les applications $Gl_n$-équivariantes $\mathbf{V}_{n,r} \to \mathbf{V}_{n,r+1}$ précédentes ; $\mathbf{V}_n$ est muni d'une action à gauche de $\mathbf{GL}_n$ et l'application $\mathbf{V}_n \to \mathbf{Gr}_n$ induite est également un $\mathbf{GL}_n$-torseur, appelé le $\mathbf{GL}_n$-torseur canonique sur $\mathbf{Gr}_n$.

***Exemple 2.1.9.*** — Pour tout fibré vectoriel $\xi$ sur un schéma $X$, on dispose d'un $\mathbf{G}_m$-torseur canonique sur le fibré projectif $\mathbf{P}(\xi)$ dont l'espace total est le $X$-schéma $E(\xi)^*$ ouvert complémentaire dans $E(\xi)$ de la section nulle (*cf.* [**13**, §II.8]). On vérifie que le fibré vectoriel de rang un associé à ce $\mathbf{G}_m$-torseur canonique est le fibré canonique $\lambda_{\mathbf{P}(\xi)}$. Le lecteur pourra d'ailleurs remarquer que le $\mathbf{G}_m$-torseur canonique $\mathbf{V}_{1,r} \to \mathbf{P}^r$ de l'exemple précédent s'identifie au $\mathbf{G}_m$-torseur canonique sur $\mathbf{P}^r = \mathbf{P}(\Theta^{r+1})$ et que son espace total s'identifie bien à l'ouvert complémentaire $\mathbf{A}^{r+1} - \{0\}$ de la section nulle de l'espace affine $\mathbf{A}^{r+1}$. On notera aussi $\mathbf{A}^*$ le $k$-espace $\mathbf{V}_1$ et $\Lambda$ le $\mathbf{G}_m$-torseur canonique $\mathbf{A}^* \to \mathbf{P}^\infty$.

**GL**-*torseurs.* — Soit $X$ un $k$-schéma affine lisse. Un **GL**-torseur sur $X$ est la donnée d'un $X$-espace et d'une action à gauche du $k$-groupe **GL** sur le $k$-espace $T$ telle qu'il existe un entier $n$, un $\mathbf{GL}_n$-torseur $T_n$ sur le schéma $X$ et une application $T_n \to T$ équivariante par rapport au morphisme canonique $\mathbf{GL}_n \to \mathbf{GL}$ tels que si, pour $r \geq n$, $T_r$ désigne le $\mathbf{GL}_r$-torseur $\mathbf{GL}_r \times_{\mathbf{GL}_n} T_n$ sur $X$ induit par $T_n$ et le morphisme $\mathbf{GL}_n \to \mathbf{GL}_r$, l'application canonique $\operatorname{colim}_r T_r \to T$ est un isomorphisme.

Soit $B$ un $k$-espace. Un **GL**-torseur $\xi$ sur $B$ est la donnée d'un $B$-espace $q(\xi) : T(\xi) \to B$ et d'une action à gauche du $k$-groupe **GL** sur le $k$-espace $T(\xi)$ tels que pour toute application $f : X \to B$ avec $X$ un $k$-schéma affine lisse, l'image réciproque de $\xi$ par $f$ est un **GL**-torseur sur le $k$-schéma affine lisse $X$.

***Exemple 2.1.10.*** — En passant à la colimite sur $n$, la famille de $\mathbf{GL}_n$-torseurs $\mathbf{V}_n \to \mathbf{Gr}_n$ définit un **GL**-torseur $\Gamma : \mathbf{V} \to \mathbf{Gr}$ sur la grassmanienne infinie.

*Torseurs sous un fibré vectoriel.* — Soient $X$ un schéma et $\xi$ un fibré vectoriel sur $X$ ($\xi$ définit en particulier un $X$-schéma en groupes abéliens). Un *$\xi$-torseur* (ou torseur sous $\xi$) est la donnée d'un $X$-schéma $T \to X$ muni d'une action du $X$-schéma en groupes $\xi$ tel que tout point de $X$ admet un voisinage ouvert $U$ sur lequel le $\xi|_U$-schéma $T|_U$ est trivial, autrement dit isomorphe à $\xi|_U$ lui-même. Un raisonnement standard établit une correspondance bijective entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\xi$-torseurs sur $X$ et le premier groupe de cohomologie de Čech $H^1(X; \mathcal{M}(\xi)$ de $X$ à coefficients dans le $\mathcal{O}X$-module quasi-cohérent $\mathcal{M}(\xi)$ des germes de sections de $\xi$. Puisque la cohomologie de Čech d'un schéma affine (sur $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$) à coefficients dans un module quasi-cohérent est triviale on obtient :

***Lemme 2.1.11.*** — *Pour tout schéma affine (sur* $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$*) $X$ et tout fibré vectoriel $\xi$ sur $X$, tout $\xi$-torseur est trivial (isomorphe à $\xi$ lui-même).*

Soient $B$ un $k$-espace et $\xi$ un fibré vectoriel sur $B$. Soit $T \to B$ un $B$-espace muni d'une action du $B$-groupe $\xi$. On dit que $T$ est un torseur sous $\xi$ si et seulement si pour toute application $f : X \to B$ avec $X$ un $k$-schéma affine lisse, l'image réciproque de $T$ par $f$ provient d'un torseur sur le schéma $X$ sous le fibré vectoriel $f^*\xi$. Tout torseur sous un fibré vectoriel $\xi$ sur un $k$-schéma $X$ induit de façon évidente un torseur sous le fibré vectoriel $\xi$ sur le $k$-espace $X$. Réciproquement lorsque $X$ est un $k$-schéma lisse et $\xi$ un fibré vectoriel sur $X$, la correspondance précédente définit une équivalence entre la catégorie des $\xi$-torseurs sur le $k$-schéma $X$ et celle des $\xi$-torseurs sur le $k$-espace $X$.

***Exemple 2.1.12.*** — Soient $X$ un schéma, $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}X$-module localement libre de rang fini et $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ le $X$-schéma projectif associé à $\mathcal{E}$. On note $\mathbf{P}_a(\mathcal{E})$ le $X$-schéma tel pour tout $X$-schéma $Y$, l'ensemble des $X$-morphismes de $Y$ vers $\mathbf{P}_a(\mathcal{E})$ s'identifie à l'ensemble des projecteurs du $\mathcal{O}Y$-module localement libre $\mathcal{E}|_Y$ d'image de rang un ; on voit aussitôt que le morphisme canonique $\mathbf{P}_a(\mathcal{E}) \to V(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E})$ est une immersion fermée. En particulier, $\mathbf{P}_a(\mathcal{E})$ est un $X$-schéma affine.

Nous allons voir que le morphisme évident $\mathbf{P}_a(\mathcal{E}) \to \mathbf{P}(\mathcal{E})$ de $X$-schémas, tel que pour tout $X$-schéma $Y$ et tout projecteur $M$ du $\mathcal{O}Y$-module localement libre $\mathcal{E}|_Y$ d'image de rang un associe l'épimorphisme $\pi(M) : \mathcal{E}|_Y \to I(M)$, $I(M)$ désignant l'image de $M$, est muni d'une structure de torseur sous un fibré vectoriel. Notons $\kappa$ le $\mathcal{O}\mathbf{P}(\mathcal{E})$-module localement libre noyau de l'épimorphisme de $\mathcal{O}\mathbf{P}(\mathcal{E})$-modules

$$\mathcal{E}|_{\mathbf{P}(\mathcal{E})} \to \mathcal{O}(1)_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}.$$

On note $\theta$ le $\mathcal{O}\mathbf{P}(\mathcal{E})$-module localement libre $\kappa^\vee \otimes \mathcal{O}(1)_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}$ et $\mathcal{F}$ le fibré vectoriel $E(\theta)$.

Pour munir $\mathbf{P}_a(\mathcal{E})$ d'une action du $\mathbf{P}(\mathcal{E})$-groupe abélien $\mathcal{F}$, il suffit de définir pour tout $X$-schéma $Y$, une application naturelle :

$$\mathcal{F}(Y) \times_{\mathbf{P}(\mathcal{E})(Y)} \mathbf{P}_a(\mathcal{E})(Y) \to \mathbf{P}_a(\mathcal{E})(Y)$$

vérifiant les axiomes évidents. L'ensemble $\mathcal{F}(Y) \times_{\mathbf{P}(\mathcal{E})(Y)} \mathbf{P}_a(\mathcal{E})(Y)$ s'identifie à l'ensemble des triplets $(\pi_f, x, M)$ formés d'un élément $\pi_f : \mathcal{E}|_Y \to \mathcal{L}$, correspondant à un morphisme de $X$-schémas $f : Y \to \mathbf{P}(\mathcal{E})$, d'un morphisme de $\mathcal{O}Y$-modules $x : \mathrm{Ker}(\pi_f) \to \mathcal{L}$ (correspondant à une section du fibré vectoriel $f^*\mathcal{E}$) et d'un élément $M$ de $\mathbf{P}_a(\mathcal{E})(Y)$ tel que $\pi(M) = \pi_f$. On associe à un tel triplet l'endomorphisme $x \cdot M$ de $\mathcal{E}|_Y$ défini comme suit : $M$ définit une décomposition en somme directe $\mathcal{L} \oplus \mathrm{Ker}(\pi(M))$ de $\mathcal{E}|_Y$ et $x \cdot M$ est le projecteur qui vaut l'identité sur $\mathcal{L}$ et $x$ sur $\mathrm{Ker}(\pi(M))$. On se convainc aisément que le morphisme $\mathbf{P}_a(\mathcal{E}) \to \mathbf{P}(\mathcal{E})$ est bien un torseur sous cette action de $\mathcal{E}$.

***Exemple 2.1.13***. — D'après le théorème B.4.1, pour tout $k$-schéma $X$, il existe un fibré vectoriel sur $X$ et un torseur sous ce fibré vectoriel dont l'espace total est un $k$-schéma affine.

## 2.2. La catégorie homotopique

### 2.2.1. Cofibrations et extensions anodines élémentaires

*Familles transverses d'espaces linaires dans l'espace affine.* — Soit $n$ un entier $\geq 0$. On appelle *espace de coordonnées* dans le $k$-espace affine de dimension $n$, $\mathbf{A}^n$, un sous-$k$-schéma fermé $H$ vide ou bien défini par les équations $X_i = 0$, $i$ parcourant une partie $S$ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ (les $X_i$ désignant les fonctions coordonnées naturelles sur $\mathbf{A}^n$) ; lorsque $H$ est non vide on pose $S(H) := S$. On dit qu'une famille finie $\{H_a\}_{\alpha \in I}$ d'espaces de coordonnées du $k$-espace affine $\mathbf{A}^n$ est *transverse* si les parties $S(H_\alpha)$ de $\{1, \ldots, n\}$, $\alpha$ parcourant les éléments de $I$ tels que $H_\alpha$ est non vide, sont deux à deux disjointes.

***Définition 2.2.1***. — Soient $X$ un $k$-schéma et $\{\iota_\alpha : X_\alpha \to X\}_{\alpha \in I}$ une famille finie d'immersions fermées. On dit que cette famille est $k$-transverse si pour tout élément $x$ de $X$ il existe un voisinage ouvert $U$ de $x$, un entier $d_x$, une famille transverse

$\{H_\alpha\}_{\alpha\in I}$ d'espaces de coordonnées de $\mathbf{A}^{d_x}$ et un $k$-morphisme étale $f : U \to \mathbf{A}^{d_x}$ tels que pour tout $\alpha$ dans $I$ l'immersion fermée $\iota_{\alpha,U} : U \cap X_\alpha \to U$ est l'image réciproque par $f$ de l'immersion fermée $H_\alpha \to \mathbf{A}^{d_x}$.

***Remarque 2.2.2***

1) Dire que la famille vide est $k$-transverse signifie précisément que le $k$-schéma $X$ est lisse ([**15**, 17.12.2d]).

2) Pour toute famille $k$-transverse d'immersions fermées $\{\iota_\alpha : X_\alpha \to X\}_{\alpha\in I}$ et toute famille $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ d'éléments de $I$ le sous-schéma fermé $X_{\underline{\alpha}} := X_{\alpha_1} \cap \cdots \cap X_{\alpha_\ell}$ de X (*i.e.* le produit fibré des $X_{\alpha_i}$, $i$ parcourant $I$, au dessus de $X$) est lisse sur $k$ (en particulier $X$ lui-même est lisse sur $k$).

3) Soit $f : k' \to k$ un morphisme de schémas. Si $X$ est un $k$-schéma et

$$\{\iota_\alpha : X_\alpha \to X\}_{\alpha\in I}$$

une famille $k$-transverse d'immersions fermées, alors la famille

$$\{\iota_\alpha \times_k k' : X_\alpha \times_k k' \to X \times_k k'\}_{\alpha\in I}$$

d'immersions fermées de $k'$-schémas est $k'$-transverse.

4) Soit $f : k' \to k$ un morphisme lisse de schémas. Si $X$ est un $k'$-schéma et

$$\{\iota_\alpha : X_\alpha \to X\}_{\alpha\in I}$$

une famille $k'$-transverse d'immersions fermées, alors la famille

$$\{f(\iota_\alpha) : f(X_\alpha) \to f(X)\}_{\alpha\in I}$$

d'immersions fermées de $k$-schémas est $k$-transverse (rappelons 2.1.4 que pour tout $k'$-schéma lisse $Y$, $f(Y)$ désigne le $k$-schéma dont le morphisme structural est le composé de $f$ et de celui de $Y$).

5) Soient $f : k' \to k$ un morphisme lisse de schémas, $X$ un $k'$-schéma,

$$\{\eta_\beta : X_\beta \to X\}_{\beta\in J}$$

une famille $k'$-transverse d'immersions fermées et

$$\{\iota_\alpha : k'_\alpha \to k'\}_{\alpha\in I}$$

une famille $k$-transverse d'immersions fermées. Notons $\{\kappa_\alpha : X_\alpha \to X\}_{\alpha\in I}$ l'image réciproque de la famille $\{\iota_\alpha : k'_\alpha \to k'\}_{\alpha\in I}$ par le morphisme $X \to k'$. Alors la famille d'immersions fermées de but $X$ réunion de la famille $\{\kappa_\alpha : X_\alpha \to X\}_{\alpha\in I}$ et de la famille $\{\eta_\beta : X_\beta \to X\}_{\beta\in J}$ est $k$-transverse.

***Exemple 2.2.3***

1) Soit $\iota : X \to Y$ une immersion fermée entre deux $k$-schémas lisses. Alors la famille $\{\iota\}$ est $k$-transverse puisque d'après [**15**, 17.12.2 d], tout point de $Y$ admet un voisinage ouvert $U$ pour lequel il existe un morphisme étale $f : U \to \mathbf{A}^{n+d}$ tel que le

sous-$k$-schéma fermé $X \cap U$ de $U$ s'identifie à l'image réciproque par $f$ de l'espace de coordonnées défini par annulation des $d$-èmes dernières coordonnées.

2) Soit $\{\iota_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha\}_{\alpha \in \{1,\dots,n\}}$ une famille finie d'immersions fermées entre $k$-schémas lisses. Notons $\Pi$ le $k$-schéma produit des $Y_\alpha$ et $\Pi_\alpha$ le sous-$k$-schéma fermé de $\Pi$ produit fibré de $X_\alpha$ et $\Pi$ au dessus de $Y_\alpha$. Alors la famille d'immersions fermées $\{\Pi_\alpha \to \Pi\}_{\alpha \in \{1,\dots,n\}}$ est k-transverse.

Le cas $n = 1$ vient d'être établi à l'exemple précédent. Pour simplifier, nous traitons le cas $n = 2$ (le cas général, analogue, est laissé au lecteur). Par construction du produit fibré de schémas [**13**, §3], si $\{U_i\}$ (resp. $\{\mathbf{V}_i\}$) est un recouvrement ouvert de $Y_1$ (resp. $Y_2$) alors la famille $\{U_i \times_k \mathbf{V}_j\}_{i,j}$ est un recouvrement ouvert de $\Pi$. La question étant locale et d'après l'exemple 1) ci-dessus, on peut supposer qu'il existe un morphisme étale $f_i : Y_i \to \mathbf{A}^{n_i+d_i}$, $i = 1, 2$, tel que $X_1$ (resp. $X_2$) est l'image réciproque du $k$-espace linéaire de $\mathbf{A}^{n_1+d_1}$ (resp. $\mathbf{A}^{n_2+d_2}$) défini par annulation des $d_1$-èmes (resp. $d_2$-èmes) dernières coordonnées. On en déduit immédiatement un morphisme étale $\Pi \to \mathbf{A}^{n_1+n_2+d_1+d_2}$ et une famille transverse $\{H_1, H_2\}$ d'espaces de coordonnées dans $\mathbf{A}^{n_1+n_2+d_1+d_2}$ tels que $\Pi_1$ (resp. $\Pi_2$) est l'image réciproque de $H_1$ (resp. $H_2$), d'où l'affirmation.

3) Plus généralement que l'exemple 2), soient $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \{1,\dots,n\}}$ une famille de $k$-schémas lisses et pour chaque $\alpha$, une famille $k$-transverse $\{\iota_{\alpha,\beta} : Y_{\alpha,\beta} \to Y_\alpha\}_{\beta \in \{1,\dots,m_\alpha\}}$ d'immersions fermées. Notons $\Pi$ le $k$-schéma produit des $Y_\alpha$ et pour tout « couple » $(\alpha, \beta)$, $\Pi_{\alpha,\beta}$ le sous-$k$-schéma fermé de $\Pi$ produit fibré de $Y_{\alpha,\beta}$ et $\Pi$ au dessus de $Y_\alpha$. Alors la famille d'immersions fermées $\{\Pi_{\alpha,\beta} \to \Pi\}$ est $k$-transverse (la vérification est laissée au lecteur).

***Définition 2.2.4.*** — Pour tout $k$-schéma $X$ affine lisse et toute famille $k$-transverse $\{\iota_\alpha : X_\alpha \to X\}_{\alpha \in I}$ d'immersions fermées, l'application

$$[\iota_\alpha] : S[X_\alpha] \to X$$

(voir 2.1.2) s'appellera *la cofibration élémentaire* associée à la famille $k$-transverse $\{\iota_\alpha : X_\alpha \to X\}_{\alpha \in I}$. Toute application isomorphe à la cofibration élémentaire associée à une telle famille $k$-transverse d'immersions fermées s'appellera aussi une cofibration élémentaire et l'on notera $S$ l'ensemble des cofibrations élémentaires.

***Exemple 2.2.5***

1) Toute immersion fermée entre deux $k$-schémas affines lisses est une cofibration élémentaire d'après l'exemple 2.2.3 1). En particulier, le morphisme $\varnothing \to Y$ est une cofibration élémentaire pour tout $k$-schéma affine lisse $Y$.

2) Soient $n$ un entier et $\dot{\Delta}^n$ le sous-ensemble simplicial du $n$-ème ensemble simplicial standard $\Delta^n$ réunion de toutes les faces de $\Delta^n$. Alors le morphisme évident

$$\dot{\Delta}^n_k := |\dot{\Delta}^n|_k \to |\Delta^n|_k =: \Delta^n_k$$

est une cofibration élémentaire car la famille des faces $d^i : \Delta_k^{n-1} \to \Delta_k^n$ est une famille $k$-transverse d'immersions fermées.

3) Soit $n \geq 0$ un entier. On note $\Lambda_k^n$ le sous-$k$-espace de $\Delta_k^n$ réunion de toutes les faces sauf la face $d^0$ (en d'autres termes, $\Lambda_k^n := \Sigma[d^i]_{i\in\{1,\dots,n\}}$). Comme les faces de $\Delta_k^n$ forment une famille $k$-transverse d'immersions fermées, l'application

$$\Lambda_k^n \to \Delta_k^n$$

est une cofibration élémentaire que l'on appelle une *extension anodine fondamentale simpliciale.*

Le lecteur pourra remarquer que l'application $\Lambda_k^n \to \Delta_k^n$ est aussi isomorphe, pour $i \in \{0,\dots,n\}$, à la réalisation géométrique sur $k$ de l'inclusion $\Lambda^{n,i} \to \Delta^n$ ($\Lambda^{n,i}$ désignant le *cornet* de $\Delta^n$ réunion de toutes les faces sauf la face $d^i$).

4) Soient $X$ (resp. $Y$) un $k$-schéma et $\{\iota_\alpha : X_\alpha \to X\}_{\alpha\in I}$ (resp. $\{\kappa_\beta : Y_\beta \to Y\}_{\beta\in J}$) une famille d'immersions fermées. L'application $([\iota_\alpha],[\kappa_\beta])$ (*cf.* §2.1.2) s'identifie à l'application $[\iota_\alpha \times \mathrm{Id}_Y, \mathrm{Id}_X \times \kappa_\beta]$ associée à la famille d'immersions fermées de but $X \times_k Y$ réunion de la famille $\{\iota_\alpha \times \mathrm{Id}_Y\}_\alpha$ et de la famille $\{\mathrm{Id}_X \times \kappa_\beta\}$. Cette famille est $k$-transverse dès que les familles $\{\iota_\alpha\}$ et $\{\kappa_\beta\}$ le sont (*cf.* exemple 2.2.3 3)). Si de plus $X$ et $Y$ sont affines sur $k$, l'application $S([\iota_\alpha],[\kappa_\beta])$ est donc une cofibration élémentaire.

On obtient donc :

***Lemme 2.2.6.*** — *Pour toutes cofibrations élémentaires $f$ et $g$ l'application $(f,g)$ est une cofibration élémentaire.*

5) On peut généraliser l'exemple 4) comme suit. Soient $Y$ (resp. $Z$) un $X$-schéma et $\{\iota_\alpha : Y_\alpha \to Y\}_{\alpha\in I}$ (resp. $\{\kappa_\beta : Z_\beta \to Z\}_{\beta\in J}$) une famille d'immersions fermées $X$-transverse. Le procédé de l'exemple 2.2.3 3) (en utilisant $X$ à la place de $k$) fournit une famille d'immersions fermées $\{\Pi_{\alpha,\beta} \to \Pi\}_{\alpha,\beta}$ $X$-transverse ; lorsque $X$ est un $k$-schéma affine lisse, cette famille est $k$-transverse et l'on note $([\iota_\alpha],[\kappa_\beta])_X$ la cofibration élémentaire associée.

***Définition 2.2.7.*** — Un *carré fondamental* dans $\mathcal{L}_k$ est un carré cartésien (dans $\mathcal{L}_k$) :

$$\begin{array}{ccc} V & \to & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \to & X \end{array}$$

dans lequel le morphisme $U \to X$ est une immersion ouverte, le morphisme $f : Y \to X$ est un morphisme étale tel que le morphisme évident :

$$f^{-1}(X-U) \to X-U$$

est un isomorphisme de schémas.

Fixons un carré fondamental comme ci-dessus. Choisissons un torseur sous un fibré vectoriel sur $X$ (resp. $Y$, $U$), $T_X \to X$ (resp. $T_Y \to Y$, $T_U \to U$) tel que $T_X$ (resp. $T_Y$, $T_U$) est un $k$-schéma affine (et lisse) ; on peut par exemple choisir $T_X$ (resp. $T_Y$, $T_U$) affine sur Spec($\mathbf{Z}$) d'après B.4.1. D'après B.2 on peut toujours trouver un fibré vectoriel $E_Y$ (resp. $E_U$) sur $T_X$ et une immersion fermée $\iota_Y : T_Y \to E_Y$ (resp. $\iota_U : T_U \to E_U$) qui relève l'application évidente $T_Y \to X$ (resp. $T_U \to X$).

***Définition 2.2.8***

1) Pour *chaque* carré fondamental et *chaque* choix de $\iota_Y$ et $\iota_U$ comme ci-dessus, l'application :

$$(\iota_U, \iota_Y)_{T_X}$$

s'appelle une *extension anodine fondamentale géométrique* associée au carré fondamental choisi (*cf.* l'exemple 2.2.5.5) pour la notation $(\iota_U, \iota_Y)_{T_X}$).

2) On note $S_{an}$ la plus petite partie de $Fl(\mathcal{E}_k)$ telle que :

1. si $i$ est isomorphe à un élément de $S_{an}$ alors $i \in S_{an}$ ;
2. pour toute paire $(i, j)$ formée d'une cofibration élémentaire $i$ et d'un élément $j$ de $S_{an}$ l'application $(i, j)$ appartient à $S_{an}$ ;
3. les extensions anodines fondamentales (géométriques ou simpliciales, *cf.* exemple 2.2.5.3)) appartiennent à $S_{an}$.

Les éléments de $S_{an}$ s'appellent les *extensions anodines* élémentaires.

Le fait que l'ensemble des cofibrations élémentaires est stable par l'opération $(-,-)$ montrent que les éléments de $S_{an}$ sont exactement les applications (isomorphes à une application) de la forme $(f, g)$ avec $f$ une cofibration élémentaire et $g$ une extension anodine fondamentale. En particulier, remarquons que $S$ contient $S_{an}$.

***Exemple 2.2.9.*** — Soient $X$ un $k$-schéma affine lisse, $E$ un fibré vectoriel sur $X$ et $s$ une section de $E$. Alors l'immersion fermée $s_0 : X \to E$ est une extension anodine fondamentale géométrique (associée au carré fondamental avec $U = \varnothing$ et $Y = X$.

**2.2.2. Algèbre homotopique.** — Nous supposons désormais le lecteur familier avec l'algèbre homotopique de Quillen **[27]** et plus précisément avec l'appendice A.

***Proposition 2.2.10.*** — *Munie de l'ensemble $S$ des cofibrations élémentaires et de l'ensemble $S_{an}$ des extensions anodines élémentaires définis en 2.2.4 et 2.2.8, la catégorie quasi-simpliciale $\mathcal{E}_k$ des $k$-espaces est une catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et extensions anodines élémentaires au sens du §A.2.3.*

*Démonstration.* — On procède comme suit : les sources des cofibrations élémentaires sont de présentation finie puisque ce sont des colimites finies de $k$-schémas affines lisses, lesquels sont de présentation finie d'où a). Les propriétés b), c), d) et e) résultent des faits suivants :

– $(S, S) \subset S$ (lemme 2.2.6) et $(S, S_{an}) \subset S_{an}$ (définition 2.2.8) ;

– la réalisation géométrique sur $k$ des applications simpliciales $\dot{\Delta}^n_k \to \Delta^n_k$ appartiennent à $S$ d'après 2.2.5 3) ;
– la réalisation géométrique sur $k$ des applications simpliciales $\Lambda^i[n] \to \Delta^n$ appartiennent à $S_{an}$ (définition 2.2.8).

□

On dispose maintenant des notions liées à la structure de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et extensions anodines élémentaires introduites au §A.2.3 ; en particulier : objets cofibrants, cofibrations, objets fibrants, équivalences faibles, *etc.* ainsi que des notions et résultats liés à la structure de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles qui lui est associée.

Remarquons par exemple qu'un $k$-espace $X$ est cofibrant si et seulement si il existe une suite d'applications :

$$\varnothing = X_0 \to X_1, X_1 \to X_2, \dots, X_n \to X_{n+1}, \dots,$$

chacune image directe d'une somme de cofibrations élémentaires, et telles que $X$ est rétracte de la colimite des $X_n$. Ces $k$-espaces cofibrants vont jouer un rôle fondamental du point de vue homotopique. On remarquera que leur méthode de construction rappelle celle des C.W.-complexes.

***Exemple 2.2.11***

1) Soient $X$ un $k$-schéma affine lisse et $\{\iota_\alpha : X_\alpha \to X\}$ une famille $k$-transverse d'immersions fermées. Alors le $k$-espace $\Sigma[\iota_\alpha]$ est cofibrant. Cela résulte facilement par récurrence sur le cardinal de $I$ du lemme 2.1.4.

2) Le $k$-groupe linéaire infini $\mathbf{GL}$ est cofibrant puisque chacune des applications $i_n : \mathbf{GL}_n \to \mathbf{GL}_{n+1}$ est une cofibration élémentaire d'après l'exemple 2.2.5 1).

3) Le lecteur remarquera en revanche qu'un $k$-schéma lisse qui n'est pas affine n'a aucune raison d'être cofibrant (ou fibrant) en général. Nous verrons en 2.3.3 qu'un tel $k$-schéma est toujours faiblement équivalent à un $k$-schéma affine lisse.

Le lemme qui suit résulte facilement du lemme A.1.4, du fait (déjà signalé ci-dessus) que $(S, S) \subset S$ et $(S, S_{an}) \subset S_{an}$ et du corollaire A.2.25.

***Lemme 2.2.12***

*1) Soient $i$ et $j$ deux cofibrations ; alors $(i, j)$ est une cofibration.*

*2) Soient $i$ une cofibration et $j$ une cofibration triviale ; alors $(i, j)$ est une cofibration triviale.*

***Corollaire 2.2.13***. — *Si $i$ et $j$ sont des cofibrations (resp. des cofibrations triviales) alors le morphisme $i \times j$ est une cofibration (resp. une cofibration triviale).*

*Démonstration.* — Soient $A$ la source de $j$ et $Y$ le but de $i$. L'application $i \times j$ est composée de l'application $i \times \mathrm{Id}_A$ et de l'application $\mathrm{Id}_Y \times j$ lesquelles sont des cofibrations (resp. des cofibrations triviales) comme il résulte du lemme 2.2.12 appliqué aux couples $(\varnothing A, i)$ et $(\varnothing \to Y, j)$ respectivement. □

2.2.2.1. On note $h(\mathcal{E}_k)$ la catégorie obtenue en inversant les extensions anodines (entre objets cofibrants) et les fibrations triviales de la catégorie $\mathcal{E}_k$. Pour chaque paire $(X, Y)$ de $k$-espaces, on note $[X, Y]_k$ (et même $[X, Y]$ lorsqu'il n'y aura aucune confusion possible sur le schéma de base) l'ensemble $\mathrm{Hom}_{h(\mathcal{E}_k)}(X, Y)$ et $\pi(X, Y)_k$ l'ensemble des composantes connexes de l'ensemble simplicial $\mathbf{hom}_k(X, Y)$. L'un des résultats fondamentaux de l'algèbre homotopique de Quillen est le suivant (voir §A.2.9) :

***Proposition 2.2.14.*** — *Pour tout $k$-espace cofibrant $X$ et tout $k$-espace fibrant $Y$, l'application naturelle $\pi(X, Y) \to [X, Y]$ est bijective.*

Lorsque $X$ et $Y$ sont des $k$-espaces quelconques on calcule l'ensemble $[X, Y]$ en choisissant une résolution cofibrante de $X$ c'est à dire une fibration triviale $X_c \to X$ avec $X_c$ cofibrant, puis une résolution cofibrante $Y' \to Y$ de $Y$ et enfin une résolution fibrante de $Y'$ c'est à dire une cofibration triviale $Y' \to Y_f$ avec $Y_f$ fibrant (et cofibrant). L'ensemble $[X, Y]$ s'identifie alors, d'après la proposition, à l'ensemble $\pi(X_c, Y_f)$ via les bijections évidentes. Bien sûr, lorsque l'on suppose déjà Y cofibrant, il suffit de choisir une résolution cofibrante de $X$ et une résolution fibrante de $Y$ pour faire ce calcul (on remarquera qu'en général on ignore si pour tout $k$-espace $Y$ il existe une équivalence faible $Y \to Z$ avec $Z$ fibrant).

***Remarque 2.2.15.*** — On peut montrer que la catégorie $h(\mathcal{E}_k)$ est bien équivalente à la catégorie $\mathcal{H}(k)$ introduite par Voevodsky et étudiée dans **[25]**. Plus précisément, en utilisant les notations de **[25]**, on peut montrer que le foncteur $\mathcal{E}_k \to \Delta^{op}(Sm/k)_{Nis}$ qui commute aux colimites et qui envoie le $k$-schéma affine lisse $Y$ sur le faisceau simplicialement constant associé, transporte nos équivalences faibles sur des $\mathbf{A}^1$-*weak equivalences*, et que le foncteur induit sur les catégories homotopiques est une équivalence de catégories.

2.2.2.2. *Equivalences faibles.* — Rappelons que l'on appelle équivalence faible une application qui devient inversible dans la catégorie $h(\mathcal{E}_k)$.

***Lemme 2.2.16***

1) *Toute équivalence d'homotopie est une équivalence faible.*

2) *Une somme d'équivalences faibles est une équivalence faible.*

3) *Un produit de deux équivalences faibles est une équivalence faible.*

***Remarque 2.2.17***

1) Ce résultat est faux en général dans une catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles arbitraire.

2) D'après le point 3) du lemme, le foncteur produit : $(-) \times (-) : \mathcal{E}_k \times \mathcal{E}_k \to \mathcal{E}_k$ préserve les équivalences faibles et induit donc un foncteur

$$h(\mathcal{E}_k) \times h(\mathcal{E}_k) \to h(\mathcal{E}_k)$$

que l'on notera encore $(-) \times (-)$ (il n'y a pas besoin de dériver le produit !).

*Démonstration*

1) Il suffit d'établir que pour tout $k$-espace $X$ la projection $X \times \mathbf{A}^1 \to X$ est une équivalence faible. Soit $X' \to X$ une fibration triviale avec $X'$ cofibrant. Alors l'application $X' \times \mathbf{A}^1 \to X \times \mathbf{A}^1$ est également une fibration triviale (donc une équivalence faible) et l'on conclut en remarquant que puisque $X'$ est cofibrant, la section nulle $X' \to X' \times \mathbf{A}^1$ est une cofibration triviale (utiliser le fait que l'application $* \to \mathbf{A}^1$ est une cofibration triviale et le point 2) du lemme 2.2.12).

2) Une application $f : X \to Y$ est une équivalence faible si et seulement si il existe une cofibration triviale $f' : X' \to Y'$ et un morphisme de $f'$ vers $f$ dont les composantes sont des fibrations triviales. On voit qu'il suffit donc d'établir que toute somme de fibrations triviales est une fibration triviale. Cette affirmation résulte aisément du fait que pour tout $k$-schéma affine lisse $Y$ et toute paire $(X, Z)$ de $k$-espaces une application $Y \to X \coprod Z$ se factorise ou bien par $X$ ou bien par $Z$ (§2.1.2).

La démonstration du 3) est analogue à celle du 2). □

***Exemple 2.2.18***. — Soient $X$ un $k$-espace et $\xi$ un fibré vectoriel sur $X$ ; alors l'application $\pi(\xi) : E(\xi) \to X$ sous-jacente à $\xi$ est une équivalence d'homotopie. En effet, la section nulle est l'inverse cherché et l'application structurale $\mathbf{A}^1 \times E(\xi) \to E(\xi)$ du fibré vectoriel fournit l'homotopie. D'après le lemme l'application $\pi(\xi) : E(\xi) \to X$ est donc une équivalence faible, et ainsi toute section $s : X \to E(\xi)$ de $\xi$ également.

***Exemple 2.2.19***. — Soient $X$ un $k$-schéma affine lisse et $T \to X$ un torseur sous un fibré vectoriel sur $X$ avec $T$ affine lisse sur $k$ ; alors l'application $\pi(\xi) : E(\xi) \to X$ est une équivalence faible. En effet, d'après B.2 on peut trouver une immersion fermée de $X$-schémas de $T$ dans un fibré vectoriel $E$ sur $X$. Mais une telle immersion fermée est une extension anodine fondamentale géométrique 2.2.8 correspondant au carré fondamental avec $U := \varnothing$ et $Y := X$, ce qui permet de conclure puisque l'application $E \to X$ est également une équivalence faible (*cf.* l'exemple précédent).

Nous montrerons plus bas (Corollaire 2.3.2) que tout torseur sous un fibré vectoriel sur un $k$-espace est une équivalence faible.

***Exemple 2.2.20***. — Appelons *homotopiquement discret* un $k$-espace $X$ tel que pour tout $k$-schéma lisse $Y$, l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_k}(Y, X) \to [Y, X]$ est bijective. On peut montrer assez facilement que la catégorie des $k$-espaces homotopiquement discrets est canoniquement équivalente à celle des faisceaux pour la topologie Nisnevich sur $\mathcal{L}_k$, invariants par homotopie. Ce fait corrobore 2.2.15.

2.2.2.3. *La catégorie homotopique pointée.* — La théorie de l'homotopie précédente possède une variante pointée (*cf.* A.2.5). Notons $\mathcal{E}_{k,*}$ la catégorie des $k$-espaces pointés, c'est à dire la catégorie dont les objets sont les couples $(X, x)$ formés d'un $k$-espace $X$ et d'une application (le *point base*) $x : * \to X$ et les morphismes les diagrammes commutatifs évidents que l'on appellera applications pointées ; pour toute paire $(X, Y)$ de $k$-espaces pointés on notera $\mathrm{Hom}_k(X, Y)_*$ l'ensemble des applications pointées de $X$ vers $Y$. Le foncteur *oubli du point base* $\mathcal{E}_{k,*} \to \mathcal{E}_k$ admet pour adjoint à gauche le foncteur $(-)_+ : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_{k,*}$ qui au $k$-espace $X$ associe la somme disjointe $X_+$ de $X$ et de $*$, que l'on pointe de la façon évidente. La structure de catégorie quasi-simpliciale sur $\mathcal{E}_k$ induit une structure de catégorie quasi-simpliciale sur $\mathcal{E}_{k,*}$ ; si $X$ et $Y$ sont deux $k$-espaces pointés, l'ensemble simplicial fonctionnel de $X$ vers $Y$, que l'on notera $\mathbf{hom}_k(X, Y)_*$, est le sous-ensemble simplicial de $\mathbf{hom}_k(X, Y)$ formé des applications qui respectent le point base. On munit alors $\mathcal{E}_{k,*}$ de la structure de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles induite par la structure de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations élémentaires et extensions anodines élémentaires $(\mathcal{E}_{k,*}, S_+, S_{an+})$, où l'on note $S_+$ (resp. $S_{an+}$) l'image de $S$ (resp. $S_{an+}$) par le foncteur $(-)_+$. On note $h_*(\mathcal{E}_k)$ la catégorie homotopique associée à cette structure de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles et l'on notera $[X, Y]_{k,*}$ (et même $[X, Y]_*$ s'il n'y a pas de confusion possible sur le schéma de base) l'ensemble des $h_*(\mathcal{E}_k)$-morphismes entre les $k$-espaces pointés $X$ et $Y$.

Si $X$ et $Y$ sont deux $k$-espaces pointés, on note $X \vee Y$ la somme dans la catégorie $\mathcal{E}_{k,*}$ des $k$-espaces pointés, et on l'appelle le bouquet de $X$ et $Y$ ; on note $X \wedge Y$ le $k$-espace quotient $(X \times Y)/(X \vee Y)$ et on l'appelle le *smash-produit* de $X$ et $Y$. Les relations $(S, S) \subset S$ et $(S, S_{an}) \to S_{an}$ impliquent immédiatement les relations $(S_+, S_+)_\wedge \subset S_+$ et $(S_+, S_{an+})_\wedge \subset S_{an+}$ (avec les notations du §A.1). Le lemme qui suit résulte alors (comme en 2.2.12) du lemme A.1.4 et du lemme A.2.25 :

***Lemme 2.2.21***

*1) Soient $i$ et $j$ deux cofibrations de $\mathcal{E}_{k,*}$ ; alors $(i, j)_\wedge$ est une cofibration.*

*2) Soient $i$ une cofibration et $j$ une cofibration triviale de ; $\mathcal{E}_{k,*}$ ; alors $(i, j)_\wedge$ est une cofibration triviale.*

*Ainsi, si $i$ et $j$ sont des cofibrations (resp. des cofibrations triviales) alors le morphisme $i \wedge j$ est une cofibration (resp. une cofibration triviale).*

Soient $X$ et $Y$ deux $k$-espaces pointés. On pointe alors le $k$-espace fonctionnel $\mathbf{Hom}_k(X, Y)$ de la façon évidente et l'on note $\mathbf{Hom}_k(X, Y)_*$ le produit fibré de $\mathbf{Hom}_k(X, Y)$ et $*$ au dessus de $\mathbf{Hom}_k(*, Y) \cong Y$ ; il est clair que la bijection naturelle $\mathrm{Hom}_k(X \times Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_k(X, \mathbf{Hom}_k(Y, Z))$ (*cf.* §2.1.2) induit une bijection naturelle :

$$\mathrm{Hom}_k(X \wedge Y, Z)_* \cong \mathrm{Hom}_k(X, \mathbf{Hom}_k(Y, Z)_*)_*.$$

On déduit immédiatement de ce qui précède le :

***Lemme 2.2.22.*** — *Soient $i : X \to Y$ une cofibration et $p : E \to B$ une fibration dans la catégorie $\mathcal{E}_{k,*}$. Alors l'application pointée canonique :*

$$\mathbf{Hom}_k(Y, E)_* \to \mathbf{Hom}_k(Y, B)_* \times_{\mathbf{Hom}_k(X,B)_*} \mathbf{Hom}_k(X, E)_*$$

*est une fibration. Si, de plus, ou bien i ou bien p est une équivalence faible, alors cette application est une fibration triviale. (Rappelons qu'avec les axiomes du §A.2.1, il est sous-entendu que X est cofibrant et K fibrant.)*

D'après le §A.2.4 et le lemme 2.2.21, on sait que l'on peut dériver à gauche le foncteur $\wedge : \mathcal{E}_{k,*} \times \mathcal{E}k, * \to \mathcal{E}_{k,*}$ car sa restriction aux $k$-espaces pointés cofibrants préserve les équivalences faibles. On notera $\wedge^L : h(\mathcal{E}_{k,*}) \times h(\mathcal{E}_{k,*}) \to h(\mathcal{E}_{k,*})$ le dérivé à gauche du foncteur $\wedge$. Les foncteurs

$$\mathbf{Hom}_k(-,-) \text{ et } \mathbf{Hom}_k(-,-)_* : (\mathcal{E}_{k,*})^{op} \times \mathcal{E}_{k,*} \to \mathcal{E}_{k,*}$$

se dérivent facilement à droite car ils préservent les équivalences faibles lorsque les sources sont cofibrantes et les buts fibrants. En effet d'après le lemme 2.2.22, le foncteur $\mathbf{Hom}_k(-,-)_*$ envoie cofibrations triviales en source et fibrations triviales en but sur équivalences faibles ; il donc facile de voir qu'il envoie équivalences d'homotopie en but sur équivalences faibles en remarquant que le $k$-espace pointé $\mathbf{Hom}_k(X, \Delta^1)_*$ est contractile. Pour le foncteur $\mathbf{Hom}_k(-,-)_*$ l'argument est analogue. On notera $R\mathbf{Hom}_k(-,-)$ (resp. $R\mathbf{Hom}_k(-,-)_*$) le foncteur $h(\mathcal{E}_{k,*})^{op} \times h(\mathcal{E}_{k,*}) \to h(\mathcal{E}_{k,*})$ dérivé à droite du foncteur $\mathbf{Hom}_k(-,-)$ (resp. $\mathbf{Hom}_k(-,-)_*$) et l'on résumera la situation en disant que pour calculer (par exemple) $R\mathbf{Hom}_k(X, Y)_*$ on remplace $X$ par un $k$-espace pointé cofibrant $X'$ et $Y$ par un $k$-espace pointé fibrant $Y'$ et que l'on pose

$$R\mathbf{Hom}_k(X, Y)_* := \mathbf{Hom}_k(X', Y')_*.$$

On dispose bien sûr pour tous $k$-espaces pointés $X$, $Y$ et $Z$ d'une bijection naturelle

$$[X \wedge^L Y, Z]_* \cong [X, R\mathbf{Hom}_k(Y, Z)_*].$$

***Exemple 2.2.23.*** — On notera $\Omega$ le foncteur $R\mathbf{Hom}_k(S^1, -)_* : h(\mathcal{E}_{k,*}) \to h(\mathcal{E}_{k,*})$, $S^1$ désignant la réalisation géométrique sur $k$ de l'ensemble simplicial pointé $\mathbf{\Delta}^1$ modulo son bord $\dot{\mathbf{\Delta}}^1$), $\omega$ le foncteur $R\mathbf{Hom}_k(\mathbf{G}_m, -)_*$ et $\mathbf{\Omega}$ le foncteur $R\mathbf{Hom}_k(\mathbf{P}^1, -)_*$. Ces foncteurs sont adjoints à droite respectivement du foncteur $\Sigma := (-) \wedge^L S^1$, du foncteur $(-) \wedge^L \mathbf{G}_m$ et du foncteur $(-) \wedge^L \mathbf{P}^1$.

2.2.2.4. *Changement de base.* — Soit $f : k' \to k$ un morphisme de schémas. On dispose alors du foncteur image directe $f_* : \mathcal{E}_{k'} \to \mathcal{E}_k$ et de son adjoint à gauche (image réciproque) $f^* : \mathcal{E}_k \to \mathcal{E}_{k'}$ (*cf.* §2.1.4) ; on sait que pour $X$ un $k$-schéma affine lisse $f^*(X)$ s'identifie au $k'$-schéma affine lisse $X \times_k k'$. D'après la remarque 3) du §2.2.2, on voit que le foncteur $f^*$ transforme cofibrations élémentaires en cofibrations élémentaires, on vérifie facilement qu'il transforme aussi extensions anodines élémentaires en extensions anodines élémentaires et qu'il définit un morphisme de la catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et extensions anodines élémentaires $\mathcal{E}_k$ vers la catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et extensions anodines élémentaires $\mathcal{E}_{k'}$ au sens de §A.2.4). De plus le foncteur $f_*$ est un adjoint à droite quasi-simplicial de $f^*$. On déduit du §A.2.4, que le foncteur $L_h(f^*)$ dérivé à gauche de $f^*$ est adjoint à gauche du foncteur $R_h(f_*)$ dérivé à droite du foncteur $f_*$. De plus, on sait que si $X$ est un $k$-espace cofibrant $L_h(f^*)(X)$ s'identifie à $f^*(X)$ et que si $Y$ est un $k'$-espace fibrant, $R_h(f_*)(Y)$ s'identifie à $f_*(Y)$.

Supposons maintenant que le morphisme $f : k' \to k$ est affine lisse. On a vu au §2.1.4 que le foncteur $f^*$ est induit par composition à la source avec le foncteur $\mathcal{C}_{k'} \to \mathcal{C}_k$ qui au $k'$-schéma affine lisse $Y$ associe le $k$-schéma affine lisse $f(Y)$. On en a déduit que $f^*$ admettait un adjoint à gauche $f_! : \mathcal{E}_{k'} \to \mathcal{E}_k$, avec $f_!(Y) = f(Y)$ pour tout $k'$-schéma affine lisse $Y$. Il est clair (compte tenu cette fois de la remarque 4) du §2.2.2) que le foncteur $f_!$ envoie cofibrations élémentaires (resp. extensions anodines élémentaires) sur cofibrations élémentaires (resp. extensions anodines élémentaires) puisqu'il commute aux colimites. La paire de foncteurs adjoints $(f_!, f^*)$ définit ainsi une paire de foncteurs quasi-simpliciaux adjoints $f_! : \mathcal{E}^c_{k'} \to \mathcal{E}^c_k$ et $f^* : \mathcal{E}^c_k \to \mathcal{E}^c_{k'}$, chacun de ces foncteurs préservant les équivalences faibles. On en déduit que le foncteur induit $f_! : h(\mathcal{E}^c_{k'}) \to h(\mathcal{E}^c_k)$ est adjoint à gauche du foncteur induit $f^* : h(\mathcal{E}^c_k) \to h(\mathcal{E}^c_{k'})$ et donc que le foncteur $L_h(f_!)$ est adjoint à gauche du foncteur $L_h(f^*)$.

On généralisera ces résultat à tout morphisme lisse $k' \to k$ au §2.3

2.2.2.5. *Réalisations simpliciales et topologiques.* — Le foncteur réalisation géométrique sur $k$,

$$| - |_k : \mathcal{S} \to \mathcal{E}_k$$

envoie cofibrations élémentaires sur cofibrations élémentaire (exemple 3) du 2.2.5) et extension anodines élémentaires sur extensions anodines élémentaires (définition 2.2.8). Comme ce foncteur admet le foncteur $S := \mathbf{hom}_k(*, -) : \mathcal{E}_k \to \mathcal{S}$ comme adjoint à droite, on voit en appliquant le §A.2.4 que le foncteur $| - |_k$ induit un foncteur $| - |_k : h(\mathcal{S}) \to h(\mathcal{E}_k)$ dont l'adjoint à droite est le foncteur dérivé à droite de $S$.

Notons $Top$ la catégorie des espaces topologiques. Si $k$ est le spectre du corps des nombres complexes, le foncteur évident *topologie complexe* $\theta : \mathcal{C}_k Top$ s'étend de façon canonique en un foncteur $\theta^* : \mathcal{E}_k \to Top$ commutant aux colimites (celui-admet d'ailleurs un adjoint à droite). Il est clair que le foncteur $\theta^*$ envoie cofibrations élémentaires (resp. extensions anodines élémentaires) sur cofibrations (resp. cofibrations triviales) : la première affirmation résulte du fait que pour toute famille Spec $\mathbf{C}$-transverse $\{\iota_\alpha\}$ d'immersions fermées de variétés algébriques complexes affines lisses, l'application continue $\theta([\iota_\alpha])$ associée à la cofibration élémentaire $[\iota_\alpha]$ est *triangulable* (en un sens qu'on laisse au lecteur le soin de préciser) et est donc une cofibration (pour la structure de categorie de modeles standard sur $Top$ **[27]**), et la seconde affirmation résulte de propriétés homotopiques faciles à établir.

Remarquons enfin que pour $k$ arbitraire, si $x : \operatorname{Spec} \mathbf{C} \to \mathbf{k}$ est un point complexe du schéma $k$, le composé de $\theta^*$ et $x^* : \mathcal{E}_k \to Top$ induit un foncteur $h(\mathcal{E}_k) \to h(Top)$. Le composé de ce foncteur avec $||_k : h(\mathcal{S}) \to h(\mathcal{E}_k)$ est naturellement isomorphe à la réalisation géométrique (usuelle) $h(\mathcal{S}) \to h(Top)$ qui est une équivalence de catégories. Il résulte de tout ceci que si $k$ admet un point complexe, le foncteur $||_k : h(\mathcal{S}) \to h(\mathcal{E}_k)$ admet une inverse à droite et en particulier que la catégorie homotopique des $k$-espaces « contient » la catégorie homotopique des ensembles simpliciaux.

**2.2.3. Fibrés vectoriels lorsque le schéma $k$ est affine.** — On suppose au paragraphe 2.2.3 que le schéma de base $k$ est affine et l'on note encore $k$, par abus, l'anneau $A(k)$.

*Préliminaires.* — Soient $A$ un anneau (commutatif unitaire) et

$$\{\phi_\alpha : A \to A_\alpha\}_{\alpha \in \{1,\dots,n\}}$$

une famille d'épimorphismes d'anneaux. On pose $A_{\alpha\beta} := A_\alpha \otimes_A A_\beta$ et l'on note $\Pi[\phi_\alpha, \alpha \in \{1,\dots,n\}]$ (ou tout simplement $\Pi[\phi_\alpha]$ l'anneau limite, dans la catégorie des anneaux (commutatifs unitaires), du diagramme évident :

$$\Pi_\alpha A_\alpha \rightrightarrows \Pi_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}.$$

***Lemme 2.2.24.*** — *Soient $A$ un anneau et $\{\phi_\alpha : A \to A_\alpha\}_{\alpha \in \{1,\dots,n\}}$ une famille finie d'épimorphismes d'anneaux. Alors l'homomorphisme évident d'anneaux :*

$$A \to \Pi[\Phi_\alpha]$$

*est un épimorphisme.*

*Démonstration.* — Pour tout $\alpha \geq 2$, notons $\phi_{1\alpha} : A_\alpha \to A_{1\alpha}$ l'épimorphisme évident. Il est immédiat que le diagramme d'anneaux :

$$\begin{array}{ccc} \Pi[\phi_\alpha, \alpha \in \{2,\dots,n\}] & \to & \Pi[\phi_\alpha, \alpha \in \{1,\dots,n\}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_1 & \to & \Pi[\phi_{1\alpha}, \alpha \in \{2,\dots,n\}] \end{array}$$

est cartésien (comparer avec le lemme 2.1.4). En procédant par récurrence sur $n$, on se ramène donc au cas $n = 2$, qui est un exercice élémentaire d'algèbre. □

Soit $X$ un $k$-espace. On note $A(X)$ la $k$-algèbre $\operatorname{Hom}_k(X, \mathbf{A}^1)$. On définit une application naturelle $X \to \underline{\operatorname{Spec} A(X)}$ de la façon suivante. Pour chaque objet $Y \to X$ de $\mathcal{C}_X$, l'homomorphisme de $k$-algèbres $A(X) \to A(Y)$ détermine une application $Y \to \underline{\operatorname{Spec} A(X)}$ ; puisque $X$ s'identifie à la colimite du foncteur $F_X : \mathcal{C}_X \to \mathcal{E}_k$ (voir §2.1.2), on voit que les applications précédentes définissent une transformation naturelle de $F_X$ vers le foncteur constant de valeur $\underline{\operatorname{Spec} A(X)}$ d'où l'application naturelle $X \to \underline{\operatorname{Spec} A(X)}$ cherchée. Pour tout $k$-schéma $Y$, on définit une application naturelle :

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{S}_k}(\operatorname{Spec} A(X), Y) \to \operatorname{Hom}_k(X, Y)$$

en associant au morphisme $f : \operatorname{Spec} A(X) \to Y$ le composé de l'application naturelle $X \to \underline{\operatorname{Spec} A(X)}$ et de $\underline{f}$.

***Proposition 2.2.25.*** — *Soit $\{\iota_\alpha : X_\alpha \to X\}_{\alpha \in I}$ une famille k-transverse d'immersions fermées de but un k-schéma affine lisse X. Alors :*

1. *l'homomorphisme évident de k-algèbres $A(S[\iota_\alpha]) \to \Pi[A(\iota_\alpha)]$ est un isomorphisme ;*
2. *pour tout k-schéma affine Y l'application naturelle*
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{S}_k}(\operatorname{Spec}(A(S[\iota_\alpha])), Y) \to \operatorname{Hom}_k(S[\iota_\alpha], \underline{Y})$$
*est bijective ;*
3. *l'homomorphisme de k-algèbres $A(X) \to A(S[\iota_\alpha])$ est surjectif et son noyau est un $A(X)$-module de type fini.*

***Remarque 2.2.26.*** — Le point 2) de la proposition reste vrai pour tout $k$-schéma $Y$ (admettant une famille ample), comme nous le verrons en B.4.4.

*Démonstration.* — Le point 1) résulte facilement du fait que pour tout couple $(\alpha, \beta)$ d'éléments de $I$ l'homomorphisme évident de $k$-algèbres
$$A(X_\alpha) \otimes_{A(X)} A(X_\beta) \to A(X_{\alpha,\beta})$$
est un isomorphisme. Le diagramme
$$\amalg_{\beta,\gamma} X_{\beta,\gamma} \rightrightarrows \amalg_\alpha X_a \to S[\iota_\alpha]$$
est exact à droite dans la catégorie des $k$-espaces par définition. On en déduit formellement que le diagramme de $k$-algèbres
$$A(S[\iota_\alpha]) \to \Pi_\alpha A(X_\alpha) \rightrightarrows \Pi_{\beta,\gamma} A(X_{\beta,\gamma})$$
est exact à gauche ce qui permet d'en déduire facilement le point 2). La surjectivité de l'homomorphisme de $k$-algèbres $A(X) \to A(S[\iota_\alpha])$ résulte du point 1) et du lemme 2.2.24. Le point 3) résulte du fait que $A(X)$ est un anneau noethérien. □

***Corollaire 2.2.27.*** — *Pour tout k-espace cofibrant X de présentation finie et pour tout k-schéma affine Z, l'application naturelle*
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{S}_k}(\operatorname{Spec} A(X), Z) \to \operatorname{Hom}_k(X, \underline{Z})$$
*est bijective.*

*Démonstration.* — D'après le corollaire A.3.16, il existe une suite *finie* d'applications
$$\varnothing = X_0 \to X_1,\ X_1 \to X_2, \ldots,\ X_n \to X_{n+1}$$
chacune image directe d'une somme *finie* de cofibrations élémentaires telle que $X$ est rétracte de $X_{n+1}$. Il suffit donc d'établir par récurrence sur $n$ l'affirmation pour

chacun des $X_j$, ce qui résulte aisément du fait suivant et du point 2) de la proposition 2.2.25 : pour tout carré cocartésien de $k$-espaces :

$$\begin{array}{ccc} X' & \to & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y \end{array},$$

si l'affirmation du corollaire est vraie pour $X$, $X'$ et $Y'$ elle l'est aussi pour $Y$. □

***Proposition 2.2.28***. — *Pour tout $k$-espace $B$ et tout fibré vectoriel $\xi$ sur $B$, l'application $p(\xi) : E(\xi) \to B$ est une fibration triviale.*

***Remarque 2.2.29***. — Pour $k$ arbitraire (c'est à dire pas nécessairement affine), la proposition n'est plus exacte en général. Observons toutefois que l'on a établi en 2.2.18 qu'un fibré vectoriel est toujours une équivalence d'homotopie et donc une équivalence faible.

*Démonstration*. — Il s'agit d'établir que pour toute cofibration élémentaire $[\iota_\alpha] : S[\iota_\alpha] \to X$, et tout carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S[\iota_\alpha] & \to & E(\xi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & B \end{array}$$

il existe une application $X \to E(\xi)$ qui laisse le diagramme commutatif. Quitte à effectuer un changement de base, on peut supposer $X = B$, si bien que $E(\xi)$ est alors un $k$-schéma affine lisse et l'application $S[\iota_\alpha] \to E(\xi)$ correspond d'après le point 2) de la proposition 2.2.25 à un morphisme de $k$-algèbres $A(E(\xi)) \to A(S[\iota_\alpha])$. On dispose donc d'un diagramme commutatif dans la catégorie des $k$-algèbres :

$$\begin{array}{ccc} A(S[\iota_\alpha]) & \leftarrow & A(E(\xi)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ A(X) & = & A(X) \end{array}$$

Il s'agit de prouver l'existence d'un morphisme de $k$-algèbres $A(E(\xi)) \to A(X)$ qui laisse ce diagramme commutatif. Ceci résulte de la surjectivité du morphisme de $k$-algèbres $A(X) \to A(S[\iota_\alpha])$ (point 3 de la proposition 2.2.25) et du fait que $A(E(\xi))$ est la $A(X)$-algèbre symétrique sur un $A(X)$-module projectif de type fini. □

***Corollaire 2.2.30***. — *Soient $B$ un $k$-espace, $\xi$ un fibré vectoriel sur $B$ et $T \to B$ un $\xi$-torseur. Alors l'application $T \to B$ est une fibration triviale.*

Cela résulte immédiatement du lemme 2.1.11 et de la proposition 2.2.28.

**2.2.4. Conditions de finitude homotopique.** — Rappelons qu'un $k$-espace $X$ est dit de *présentation finie* si pour tout foncteur $F : \mathcal{I} \to \mathcal{E}_k$, avec $\mathcal{I}$ une petite catégorie filtrante à droite, l'application évidente

$$\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{Hom}_k(X, F(i)) \to \mathrm{Hom}_k(X, \mathrm{colim}_{\mathcal{I}} F)$$

est bijective. Toute colimite finie de $k$-espaces de présentation finie est encore de présentation finie (cela résulte de l'exactitude des colimites filtrantes d'ensembles) et tout $k$-schéma affine lisse est tautologiquement de présentation finie.

On dit qu'un $k$-espace $X$ est *homotopiquement de présentation finie* si pour tout foncteur $F : \mathcal{I} \to \mathcal{E}_k$, avec $\mathcal{I}$ une petite catégorie filtrante à droite, l'application $\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}}[X, F(i)] \to [X, \mathrm{hocolim}_{\mathcal{I}} F]$ est bijective. Le résultat suivant est établi au §A.3.3 :

***Proposition 2.2.31***

*1) Un $k$-espace cofibrant est de présentation finie si et seulement s'il est rétracte d'un $k$-espace $X'$ tel qu'il existe une suite* finie *d'applications*

$$\varnothing = X_0 \to X_1,\ X_1 \to X_2, \ldots,\ X_n \to X_{n+1} = X'$$

*chacune image directe d'une somme* finie *de cofibrations élémentaires ;*

*2) Soient $X$ un $k$-espace cofibrant et $C_X$ la catégorie des $k$-espaces cofibrants de présentation finie au dessus de $X$ (cette catégorie est essentiellement petite d'après le point 1). Alors la catégorie $CX$ est filtrante à droite et le foncteur $F_X : C_X \to \mathcal{E}_k$, qui envoie le $k$-espace cofibrant de présentation finie au dessus de $X$, $F \to X$, sur $F$ induit un isomorphisme* $\mathrm{colim}_{C_X} F_X \cong X$ *et une équivalence faible* $\mathrm{hocolim}_{C_X} F_X \to X$ *;*

*3) Un $k$-espace est homotopiquement de présentation finie si et seulement si il est rétracte dans la catégorie homotopique $h(\mathcal{E}_k)$ d'un $k$-espace cofibrant de présentation finie.*

## 2.3. Changement de base par un morphisme lisse

### 2.3.1. Changement de base par un torseur sous un fibré vectoriel

***Lemme 2.3.1.*** — *Soit $X$ un $k$-espace cofibrant et $T \to X$ un torseur sous un fibré vectoriel $\xi$ sur $X$. Alors l'application $T \to X$ est une équivalence faible.*

*Démonstration.* — Si $X$ est rétracte de $X'$ alors $T$ est rétracte du produit fibré $T \times_X X'$ si bien que l'on peut supposer $X$ strictement cofibrant (*cf.* A.3.3). Soient

$$\iota_0 : \varnothing = X_0 \to X_1, \ldots,\ \iota_n : X_n \to X_{n+1}, \ldots$$

une suite d'applications telles que $X$ s'identifie à la colimite des $X_n$ et telles que pour tout $n \geq 0$, $\iota_n$ est l'image directe d'une somme de cofibrations élémentaires. Notons $T_n$ le produit fibré de $X_n$ et $T$ au dessus de $X$. Alors $T$ est la colimite des $T_n$ et il suffit d'établir que l'application $T_{n-1} \to T_n$ est une cofibration et que l'application

$T_n \to X_n$ est une équivalence faible pour tout entier $n \geq 0$ (utiliser A.3.3 et A.3.10). Or si le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \amalg_{e\in E} A_e & \to & \amalg_{e\in E} B_e \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{n-1} & \to & X_n \end{array}$$

dans lequel les applications $A_e \to B_e$ sont des cofibrations élémentaires, est cocartésien, on voit facilement que le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \amalg_{e\in E} A'_e & \to & \amalg_{e\in E} B'_e \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_{n-1} & \to & Z_n \end{array}$$

dans lequel $A'_e$ (resp. $B'_e$) désigne le produit fibré de $A_e$ (resp. $B_e$) et $Z$ au dessus de $X$, l'est tout autant. Pour conclure, il suffit de remarquer que pour chaque $e$ l'application $B'_e \to B_e$ est un torseur sous un fibré vectoriel sur $B_e$ (donc $B'_e$ est un $k$-schéma affine lisse), que l'application $A'_e \to B'_e$ est la cofibration élémentaire image réciproque par le morphisme $B'_e \to B_e$ de la cofibration élémentaire $A_e \to B_e$ (*cf.* 2.2.2 3) et finalement que les applications $A'_e \to A_e$ et $B'_e \to B_e$ sont des équivalences faibles d'après l'exemple 2.2.19 (pour $A'_e \to A_e$ on utilise aussi une récurrence et le lemme 2.1.4). □

Observons que nous avons établi au passage que sous les hypothèses du lemme, $T$ est également cofibrant.

***Corollaire 2.3.2***. — *Soit $X$ un $k$-espace et $T \to X$ un torseur sous un fibré vectoriel $\xi$ sur $X$. Alors l'application $T \to X$ est une équivalence faible.*

*Démonstration*. — Soient $Y \to X$ une fibration triviale avec $Y$ cofibrant, et $Z \to T$ l'image réciproque de cette fibration triviale par l'application $T \to X$. Alors l'application canonique $Z \to Y$ est un torseur sous un fibré vectoriel sur $Y$. Le lemme 2.3.1 montre que $Z \to Y$ est une équivalence faible, il en est donc de même pour l'application $T \to X$. □

***Exemple 2.3.3***. — Il résulte du corollaire et du théorème B.4.1 que pour tout $k$-schéma lisse $X$ il existe une équivalence faible $T \to X$ avec $T$ un $k$-schéma affine lisse (en fait pour tout $k$-schéma $X$ il existe une équivalence faible $\underline{T} \to \underline{X}$ avec $T$ un $k$-schéma affine). On peut même prendre $T$ affine sur Spec($\mathbf{Z}$).

***Proposition 2.3.4***. — *Soit $f : k' \to k$ un torseur sous un fibré vectoriel sur $k$. Alors la transformation naturelle :*

$$L_h(f_!) \circ L_h(f^*) \to \mathrm{Id}_{h(\mathcal{E}_k)}$$

*(induite par l'adjonction 2.2.2) est un isomorphisme. En particulier, le foncteur*

$$L_h(f^*) : h(\mathcal{E}_k) \to h(\mathcal{E}_{k'})$$

*est un plongement pleinement fidèle et admet le foncteur $L_h(f_!)$ comme inverse à gauche.*

*Démonstration.* — Compte tenu du paragraphe *changement de base* du §2.2.2, il suffit d'établir que pour tout $k$-espace cofibrant $X$ l'application naturelle $f_! f^*(X) \to X$ est une équivalence faible. En fait, le $k$-espace $f_! f^*(X)$ s'identifie au produit $X \times_k k'$ (dans la catégorie des $k$-espaces) ce qui montre que ladite application naturelle est un torseur sous un fibré vectoriel, d'où l'affirmation d'après le lemme 2.3.1. □

***Remarque 2.3.5.*** — En général, le foncteur $L_h(f^*) : h(\mathcal{E}_k) \to h(\mathcal{E}_{k'})$ précédent n'est pas une équivalence de catégories (en d'autres termes, la catégorie homotopique des $k$-espaces n'est pas invariante par homotopie !). En effet, pour tout ouvert $U$ de $k'$, on verra ci-dessous 2.3.7 que le foncteur $L_h(i_!) : h(\mathcal{E}_U) \to h(\mathcal{E}_{k'})$ est pleinement fidèle. Si le foncteur $L_h(f^*) : h(\mathcal{E}_k) \to h(\mathcal{E}_{k'})$ était une équivalence de catégories, il en serait de même pour son adjoint à gauche $L_h(f_!)$ et le composé

$$L_h(f_!) \circ L_h(i_!) \cong L_h(f \circ i)_! : h(\mathcal{E}_U) \to h(\mathcal{E}_k)$$

serait un plongement pleinement fidèle ce qui est faux en général. On peut prendre par exemple pour $k'$ la droite affine sur $k$ et pour $U$ le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$. Alors l'ensemble $[\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_m]_{\mathbf{G}_m}$ est réduit à un élément (c'est évident) alors que lorsque $k$ est affine intègre, l'ensemble $[\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_m]_{\mathbf{G}_m}$ s'identifie au produit de $\mathbf{Z}$ par le groupe des unités de $k$ d'après le théorème 4.2.6 ci-après.

### 2.3.2. Changement de base par un morphisme lisse

***Proposition 2.3.6.*** — *. Soit $f : k' \to k$ un morphisme lisse de schémas. Alors le foncteur $f_! : \mathcal{E}_{k'} \to \mathcal{E}_k$ (cf. 2.1.4) est dérivable à gauche et son dérivé à gauche $L_h(f_!)$ est adjoint à gauche du foncteur $L_h(f^*)$. Le foncteur $L_h(f_!)$ se calcule de la façon suivante : soit $T \to k'$ un torseur sous un fibré vectoriel sur $k'$ tel que $T$ est affine sur $k$ (on peut même prendre $T$ affine sur* Spec($\mathbf{Z}$) *d'après B.4.1) ; alors pour tout $k'$-espace cofibrant $X$, le $k'$-espace $X \times_{k'} T$ est cofibrant, l'application $X \times_{k'} T \to X$ est une équivalence faible, le $k$-espace $f_!(X \times_{k'} T)$ est cofibrant et l'on a $L_h(f_!)(X) := f_!(X \times_{k'} T)$.*

*Démonstration.* — Nous avons déjà établi l'affirmation lorsque $f$ est affine et lisse au §2.2.2. En général, on remarque que $p : T \to k'$ et $f \circ p$ sont deux morphismes affines lisses auxquels on peut donc appliquer le §2.2.2. D'après la proposition 2.3.4 le foncteur $L_h(p^*)$ est un plongement pleinement fidèle. Ainsi, pour tout $k'$-espace $X$ et tout $k$-espace $Y$, le foncteur $L_h(p^*)$ induit une bijection naturelle

$$[X, L_h(f^*)(Y)]_{k'} \cong [L_h(p^*)(X), L_h((f \circ p)^*)(Y)]_T.$$

Il en résulte que le composé $L_h((f \circ p)_!) \circ L_h(p^*)$ est adjoint à gauche du foncteur $L_h(f^*)$, ce qui implique très facilement l'affirmation compte tenu du lemme 2.3.1. □

### 2.3.3. Changement de base par une immersion ouverte

***Proposition 2.3.7.*** — *Soient $U$ un ouvert de $k$. Alors la transformation naturelle*

$$\mathrm{Id}_{h(\mathcal{E}_U)} \to L_h(f^*) \circ L_h(f_!)$$

*donnée par l'adjonction de la proposition 2.3.6 est un isomorphisme. En particulier, le foncteur $L_h(f_!) : h(\mathcal{E}_U) \to h(\mathcal{E}_k)$ est un plongement pleinement fidèle et admet le foncteur $L_h(f^*)$ comme rétraction.*

*Démonstration.* — Soit $T \to U$ un torseur sous un fibré vectoriel sur $U$ tel que $T$ est affine sur $k$. Il suffit d'établir que pour tout $U$-espace cofibrant $X$ l'application naturelle $X \times T \to (f^* \circ f_!)(X \times T)$ est une équivalence faible. En fait on voit même que c'est un isomorphisme, puisque les foncteurs $(-) \times T$, $f^*$ et $f_!$ commutent aux colimites et que l'affirmation est vraie pour tout $U$-schéma affine lisse $X$ (utiliser le §2.1.4 et le fait que le produit fibré de $X \times_U T$ et $U$ au dessus de $k$ s'identifie à $X \times_U T$). $\square$

# CHAPITRE 3

# EXCISION HOMOTOPIQUE, PURETÉ HOMOTOPIQUE ET ÉCLATEMENTS PROJECTIFS

On suppose dans cette partie le lecteur familier avec la notion de colimite homotopique de $k$-espaces et en particulier avec la notion de carré homotopiquement cocartésien (*cf.* le §A.3).

## 3.1. Propriété de Mayer-Vietoris et descente à la Čech

### 3.1.1. Propriété de Mayer-Vietoris, excision homotopique

***Théorème 3.1.1* (Propriété de Mayer-Vietoris).** — *Soient $X$ un $k$-schéma lisse, $U$ et $V$ deux ouverts de $X$ dont la réunion est égale à $X$. Alors le carré commutatif de $k$-espaces :*

$$\begin{array}{ccc} U\cap V & \to & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \to & X \end{array}$$

*est homotopiquement cocartésien.*

Ce résultat est en fait un cas particulier du :

***Théorème 3.1.2* (Excision homotopique).** — *Soient $X$ un $k$-schéma lisse et*

$$\begin{array}{ccc} V & \to & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \to & X \end{array}$$

*un carré fondamental (cf. 2.2.7). Alors le carré commutatif de $k$-espaces correspondant est homotopiquement cocartésien.*

Il suffit en effet de prendre pour $Y$ un ouvert de $X$ pour obtenir le théorème 3.1.1.

*Démonstration.* — On reprend les choix et notations qui suivent la définition 2.2.7. Comme les applications $T_Y \to Y$ et $T_U \to U$, $E_Y \to X$ et $E_U \to X$ sont des équivalences faibles d'après le corollaire 2.3.2, on voit que le carré ci-dessus est homotopiquement cocartésien si et seulement si le carré suivant l'est :

$$\begin{array}{ccc} T_U \times_X T_Y & \to & E_U \times_X T_Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_U \times_X E_Y & \to & X \end{array}$$

(Observer que le morphisme évident $T_U \times_X T_Y \to V$ est toujours un torseur sous un fibré vectoriel.) Si l'on note $S$ la source de l'extension anodine fondamentale géométrique $(\iota_U, \iota_Y)_X$ (*cf.* 2.2.8), on voit que le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} T_U \times_X T_Y & \to & E_U \times_X T_Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_U \times_X E_Y & \to & S \end{array}$$

est cocartésien par définition et donc *homotopiquement cocartésien* car les appplications $T_U \times_X T_Y \to E_U \times_{T_X} T_Y$ et $T_U \times_X T_Y \to T_U \times_{T_X} E_Y$ sont des cofibrations (des immersions fermées entre $k$-schémas affines lisses).

Or le morphisme $S \to E_U \times_{T_X} E_Y$ n'est autre que $(\iota_U, \iota_Y)_X$, et est donc, par définition, une équivalence faible. Il en est donc de même pour le morphisme $S \to X$, d'où l'affirmation. □

**3.1.2. Descente à la Čech.** — Dans tout ce paragraphe, $E$ désigne un ensemble ordonné fixé dans lequel toute paire d'éléments $(U, V)$ admet un borne inférieure notée $U \cap V$ et une borne supérieure notée $U \cup V$ et tel que pour tout triplet $(U, V, W)$ d'éléments $(U \cup W) \cap V = (U \cap V) \cup (W \cap V)$. On considère $E$ comme une catégorie dont les objets sont les éléments de $E$ et pour laquelle il existe un unique morphisme $U \to V$ exactement lorsque $U \leq V$.

***Exemple 3.1.3.*** — Soit $X$ un schéma. Alors l'ensemble $\mathrm{Zar}(X)$, des ouverts de $X$, ordonné par l'inclusion vérifie les hypothèses précédentes.

Soient $F : E \to \mathcal{E}_k$ un foncteur et $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ une famille d'éléments de $E$. Pour tout entier $n \geq 0$ et tout élément $\underline{i} := (i_0, \ldots, i_n)$ de l'ensemble $I^n$, on note $U_{\underline{i}} := U_{i_0} \cap \ldots U_{i_n}$. En s'inspirant de **[31]** on définit le $k$-espace simplicial de Čech associé à $F$ et $\mathcal{U}$, que l'on notera $F.(\mathcal{U})$, comme suit :

- pour tout entier $n \geq 0$, le $k$-espace $F_n(\mathcal{U})$ est égal à $\amalg_{\underline{i} \in I^n} F(U_{\underline{i}})$ ;
- la $\ell$-ème face $d_\ell : F_n(\mathcal{U}) \to F_{n-1}(\mathcal{U})$ est induite de façon évidente par l'application
  $$d^\ell : I^{(n+1)} \to I^n$$
  qui envoie $\underline{i} = (i_0, \ldots, i_n)$ sur $d^\ell(\underline{i}) := (i_0, \ldots, i_{\ell-1}, i_{\ell+1}, \ldots, i_n)$ et les morphismes $U_{d^\ell(\underline{i})} \to U_{\underline{i}}$ ;
- la $\ell$-ème dégénérescence $s_\ell : F_n(\mathcal{U}) \to F_{n+1}(\mathcal{U})$ est induite de façon évidente par l'application
  $$s^\ell : I^{(n+1)} \to I^{(n+2)}$$

qui envoie $\underline{i} = (i_0, \ldots, i_n)$ sur $s^\ell(\underline{i}) := (i_0, \ldots, i_{\ell-1}, i_\ell, i_\ell, i_{\ell+1}, \ldots, i_n)$ et les morphismes identiques de $U_{\underline{i}} = U_{s^\ell(i)}$.

On remarquera que lorsque $I$ est fini, on dispose d'une augmentation naturelle $F.(\mathcal{U}) \to F(U)$, $U$ désignant la borne supérieure des $U_i$, $i$ parcourant $I$, du $k$-espace simplicial $F.(\mathcal{U})$ vers le $k$-espace simplicial constant de valeur $F(U)$ induite par les applications $F(U_i) \to F(U)$.

Enfin on pose $\mathbf{H}(\mathcal{U}; F) := \mathrm{hocolim}'_{\Delta^{op}} F.(\mathcal{U})$ (voir la remarque 1 qui suit le corollaire A.3.3). L'application naturelle précédente induit une application naturelle $\mathbf{H}(\mathcal{U}; F) \to F(U)$.

***Définition 3.1.4***. — . Un foncteur $F : E \to \mathcal{E}_k$ possède la *propriété de Mayer-Vietoris* si pour toute paire $(U, V)$ d'éléments de $E$ le carré commutatif de $k$-espaces :

$$\begin{array}{ccc} F(U \cap V) & \to & F(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(U) & \to & F(U \cup V) \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien.

Pour tout foncteur $F : E \to \mathcal{E}_k$ et tout élément $V$ de $E$ on notera $F|_V$ le foncteur $E \to \mathcal{E}_k$, $U \to F(U \cap V)$. On remarquera que si $F$ possède la propriété de Mayer-Vietoris, il en est de même pour $F|_V$ (c'est là que l'on utilise la propriété $(U \cup W) \cap V = (U \cap V) \cup (W \cap V)$).

***Exemple 3.1.5***. — Soient $X$ est un $k$-schéma lisse. Alors le foncteur « identité »

$$\mathrm{Zar}(X) \to \mathcal{E}_k, \ U \to U$$

possède la propriété de Mayer-Vietoris d'après le théorème 3.1.1.

***Théorème 3.1.6***. — *Soient $F : E \to \mathcal{E}_k$ un foncteur possèdant la propriété de Mayer-Vietoris, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ une famille finie d'éléments de $E$ et $U$ la borne supérieure des $U_i$. Alors l'application canonique :*

$$\mathbf{H}(\mathcal{U}; F) \to F(U)$$

*est une équivalence faible.*

La démonstration consiste à utiliser la méthode de démonstration du théorème 6.3 de **[37]** due à Thomason. Etablissons au préalable deux lemmes.

***Lemme 3.1.7***. — *Soient $F$, $G$, $H$ et $K$ des foncteurs $E \to \mathcal{E}_k$ ayant chacun la propriété de Mayer-Vietoris, $f : F \to G$, $h : F \to H$, $g : G \to K$ et $\ell : H \to K$ des transformations naturelles telles que pour tout élément $U$ de $E$ le carré*

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \to & H(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(U) & \to & K(U) \end{array}$$

*est homotopiquement cocartésien. Alors pour toute famille finie $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ d'éléments de $E$ le carré*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}(\mathcal{U};F) & \to & \mathbf{H}(\mathcal{U};H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}(\mathcal{U};G) & \to & \mathbf{H}(\mathcal{U};K) \end{array}$$

*est homotopiquement cocartésien.*

*Démonstration.* — On voit facilement que pour tout entier $n \geq 0$ le carré :

$$\begin{array}{ccc} F_n(\mathcal{U}) & \to & H_n(\mathcal{U}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_n(\mathcal{U}) & \to & K_n(\mathcal{U}) \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien. L'affirmation résulte alors du lemme A.3.8. □

***Corollaire 3.1.8.*** — *Soient $F : E \to \mathcal{E}_k$ un foncteur ayant la propriété de Mayer-Vietoris, $U$ et $V$ deux éléments de $E$. Alors pour toute famille finie $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ d'éléments de $E$, le carré*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}(\mathcal{U};F|_{(U\cap V)}) & \to & \mathbf{H}(\mathcal{U};F|_V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}(\mathcal{U};F|_U) & \to & \mathbf{H}(\mathcal{U};F|_{(U\cup V)}) \end{array}$$

*est homotopiquement cocartésien.*

*Démonstration.* — C'est une application immédiate du lemme précédent puisque pour tout élément $W$ de $E$ le carré

$$\begin{array}{ccc} F(U\cap V\cap W) & \to & F(V\cap W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(U\cap W)) & \to & F((U\cup V)\cap W) \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien. □

***Lemme 3.1.9.*** — *Soient $F : E \to \mathcal{E}_k$ un foncteur, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ une famille finie d'éléments de $E$ et $U$ la borne supérieure des $U_i$. On suppose qu'il existe $i_0$ dans $I$ tel que $U_{i_0}$ est égal à $U$. Alors l'application canonique $\mathbf{H}(\mathcal{U};F) \to F(U)$ est une équivalence faible.*

*Démonstration.* — Soit $X$ un $k$-espace simplicial cofibrant (au sens du §A.3.12) et notons $X.\times\Delta^1$ le $k$-espace simplicial qui à $n \geq 0$ associe le $k$-espace $X_n \times \Delta^1_n$ (somme de copies de $X_n$ indéxée par l'ensemble $\Delta^1_n$, que l'on ne confondra pas avec le $k$-espace simplicial $X.\times\Delta^1_k, n \to X_n \times \Delta^1_k$ !). D'après le lemme A.3.12, les applications

$$\mathrm{hocolim}_{\Delta^{op}} X. \to |X.| \quad \text{et} \quad \mathrm{hocolim}_{\Delta^{op}}(X.\times\Delta^1) \to |X.\times\Delta^1|$$

sont des équivalences faibles. Or on vérifie facilement que l'application évidente

$$|X.\times\Delta^1| \to |X.|\times|\Delta^1|$$

est un isomorphisme ; puisque le $k$-espace $|\Delta^1|$ s'identifie à $\Delta^1_k$, on en déduit finalement que les applications

$$\mathrm{Id}_{X.} \times d^0 \text{ et } \mathrm{Id}_{X.} \times d^1 : X. \to X. \times \Delta^1$$

induisent des équivalences faibles $\mathrm{hocolim}_{\Delta^{op}} X. \to \mathrm{hocolim}_{\Delta^{op}}(X. \times \Delta^1)$.

Notons $\mathcal{U}'$ le singleton $\{U\}$ ; le $k$-espace simplicial $F.(\mathcal{U}')$ s'identifie au $k$-espace simplicial constant de valeur $F(U)$. Les relations $U_i \leq U$ induisent un morphisme de $k$-espaces simpliciaux $\phi : F.(\mathcal{U}) \to F.(\mathcal{U}')$ et l'inclusion $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ un morphisme $\psi : F.(\mathcal{U}') \to F.(\mathcal{U})$, qui est inverse à droite de $\phi$. Nous allons exhiber une application simpliciale $H : F.(\mathcal{U}) \times \Delta^1 \to F.(\mathcal{U})$ telle que

$$H \circ (\mathrm{Id}_{F.(\mathcal{U})} \times d^0) = \psi \circ \phi \quad \text{et} H \circ (\mathrm{Id}_{F.(\mathcal{U})} \times d^1) = \mathrm{Id}_{F.(\mathcal{U})} .$$

Quitte à remplacer $F$ à équivalence faible près on peut supposer que $F$ prend ses valeurs dans la catégorie des $k$-espaces cofibrants et le lecteur vérifiera facilement que dans ce cas le $k$-espace simplicial $F.(\mathcal{U})$ est cofibrant. D'après ce que nous avons vu au début de la démonstration, cela implique que les applications $\mathrm{hocolim}_{\Delta^{op}} \psi$ et $\mathrm{hocolim}_{\Delta^{op}} \phi$ sont des équivalences faibles inverses l'une de l'autre ce qui permet de conclure puisque l'application $\mathbf{H}(\mathcal{U}'; F) \to F(U)$ est une équivalence faible.

Il reste à construire $H$. Il s'agit tout d'abord de définir pour tout entier $n \geq 0$ une application

$$H_n : \amalg_{\sigma \in \Delta^1_n} (\amalg_{\underline{i} \in I^{(n+1)}} F(U_{\underline{i}})) \cong F_n(\mathcal{U}) \times \Delta^1_n \to F_n(\mathcal{U}) \cong \amalg_{\underline{i} \in I^{(n+1)}} F(U_i).$$

Soient $\sigma$ un élément de $\Delta^1_n$ (c'est à dire une application croissante $\{0, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$) et $\underline{i}$ un élément de $I^{(n+1)}$ (que l'on voit ici comme une application $\{0, \ldots, n\} \to I$) ; on note $\underline{i}_\sigma$ l'élément de $I^{(n+1)}$ tel que $\underline{i}_\sigma(j) = \underline{i}(j)$ si $\sigma(j) = 0$ et $\underline{i}_\sigma(j) = i_0$ si $\sigma(j) = 1$. La restriction de $H_n$ au $k$-espace $F(U_i)$ indéxé par $\sigma$ et $\underline{i}$ est alors l'application composée de l'application évidente $F(U_{\underline{i}}) \to F(U_{\underline{i}_\sigma})$ et de l'inclusion de $F(U_{\underline{i}_\sigma})$ dans $\amalg_{\underline{i} \in I^{(n+1)}} F(U_{\underline{i}})$ correspondant à $\underline{i}_\sigma$. On vérifie facilement que les $H_n$ commutent aux faces et aux dégénérescences et définissent un morphisme $H$ satisfaisant les propriétés voulues. □

*Démonstration du théorème 3.1.6.* — On suppose que $U$ est la borne supérieure des $U_i$, $i$ parcourant un sous-ensemble $J$ de $I$ et l'on procède par récurrence sur $\#J$ (ce qui établira le théorème). Si $J = 1$ l'affirmation est vraie d'après le lemme 3.1.9. Supposons $J \geq 2$ et soient $j$ un élément de $J$ et $J'$ le complémentaire de $\{j\}$ dans $J$. Soit $V$ la borne supérieure des $U_i$, $i$ parcourant $J'$. Alors $U$ est la borne supérieure de $U_j$ et $V$. D'après le corollaire 3.1.8 le carré :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}(\mathcal{U}; F|_{(U_j \cap V)}) & \to & \mathbf{H}(\mathcal{U}; F|_V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}(\mathcal{U}; F|_{U_j}) & \to & \mathbf{H}(\mathcal{U}; F|_U) \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien. Or, les applications

$$\mathbf{H}(\mathcal{U}; F|_{U_j}) \to F(U_j) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(\mathcal{U}; F|_{(U_j \cap V)}) \to F(U_j \cap V)$$

sont des équivalences faibles (d'après le lemme 3.1.9) et $\mathbf{H}(\mathcal{U}; F|_V)$ s'identifie à $\mathbf{H}(\mathcal{V}; F)$, $v$ désignant la famille $\{\mathbf{V}_i\}_{i\in I}$, avec $\mathbf{V}_i := U_i \cap V$ (donc $\mathbf{V}_i = U_i$ pour $i \in J'$). On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à cette famille $\mathcal{V}$ car $V$, qui est la borne supérieure des $\mathbf{V}_i$ pour $i \in I$, est aussi la borne supérieure des $V_i$ pour $i \in J'$. L'application $\mathbf{H}(\mathcal{U}; F|_V) \to F(V)$ est donc une équivalence faible. On conclut facilement en utilisant le fait que le carré :

$$\begin{array}{ccc} F(U_j \cap V) & \to & F(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(U_j) & \to & F(U) \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien. □

On en déduit immédiatement :

***Corollaire 3.1.10***. — *Soient $F$ et $G$ deux foncteurs $E \to \mathcal{E}_k$ ayant tous deux la propriété de Mayer-Vietoris, $\theta : F \to G$ une transformation naturelle, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ une famille finie d'éléments de $E$ et $U$ la borne supérieure des $U_i$. Si pour tout entier $n \geq 1$ et tout $\underline{i} \in In$, l'application $\theta(U_{\underline{i}}) : F(U_{\underline{i}})G(U_{\underline{i}})$ est une équivalence faible, alors il en est de même pour l'application $\theta(U) : F(U) \to G(U)$.*

Enfin, les théorèmes 3.1.6 et 3.1.1 impliquent :

***Corollaire 3.1.11***. — *Soient $X$ un $k$-schéma lisse, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ une famille finie d'ouverts et $U$ la réunion des $U_i$. Alors l'application naturelle :*

$$\mathbf{H}(\mathcal{U}; \mathrm{Id}) \to U$$

*est une équivalence faible.*

## 3.2. Pureté homotopique

### 3.2.1. L'espace de Thom d'une immersion fermée

***Définition 3.2.1***

1) Soit $\iota : X \to Y$ une immersion fermé entre $k$-schémas lisses. On appelle *espace de Thom* de $\iota$ et l'on note $T(\iota)$ le $k$-espace $Y/^h(Y - \iota(X))$, cofibre homotopique de l'application $Y - \iota(X) \to Y$ (voir le §A.3.2 pour la notion de cofibre homotopique).

2) Soient $X$ un $k$-schéma lisse et $\xi : E(\xi) \to X$ un fibré vectoriel. On note $T(\xi)$ et on appelle *espace de Thom* de $\xi$ l'espace de Thom de la section nulle $s_0 : X \to E(\xi)$.

En termes «géométriques», l'espace de Thom $T(\xi)$ d'un fibré vectoriel est le quotient (homotopique) de l'espace total $E(\xi)$ par l'espace $E(\xi)^* := E(\xi) - s_0(X)$ des vecteurs non nuls de $\xi$.

3.2.1.1. *Espaces de Thom des fibrés vectoriels et fibrés projectifs associés.* — Soient $X$ un $k$-schéma lisse et $\xi : E(\xi) \to X$ un fibré vectoriel sur $X$. D'après **[14]** §8.3, 8.4 et 8.6, le $X$-schéma projectif $\mathbf{P}(\xi \oplus \Theta^1)$ est canoniquement réunion de deux ouverts, l'un $U$ s'identifiant naturellement à $E(\xi)$ et l'autre $V$ à $E(\lambda_\xi)$, dont l'intersection s'identifie canoniquement à $E(\xi)^*$. De plus, l'immersion fermée canonique « à l'infini » $\mathbf{P}(\xi) \to \mathbf{P}(\xi \oplus \Theta^1)$ est égale au composé de la section nulle de $\lambda_\xi$ et de l'inclusion $E(\lambda_\xi) \subset \mathbf{P}(\xi \oplus \Theta^1)$, le complémentaire de $\mathbf{P}(\xi)$ dans $\mathbf{P}(\xi \oplus \Theta^1)$ s'identifie à $E(\xi)$, le composé de la section nulle de $\xi$, $s_0(\xi) : X \to E$ et de l'inclusion $E(\xi) \subset \mathbf{P}(\xi \oplus \Theta^1)$ est une immersion fermée (en fait une $X$-section du $X$-schéma $\mathbf{P}(\xi \oplus \Theta^1)$) dont l'ouvert complémentaire est $E(\lambda_\xi)$. Il en résulte que l'intersection dans $\mathbf{P}(\xi \oplus \Theta^1)$ de $U$ et $V$ s'identifie d'une part à $E(\xi)^*$ et d'autre part à $E(\lambda_\xi)^*$. On dispose donc d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & E(\lambda_\xi)^* \cong E(\xi)^* & \to & E(\xi) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P}(\xi) & \to & E(\lambda_\xi) & \to & \mathbf{P}(\xi \oplus \Theta^1) \end{array}$$

D'après le théorème 3.1.1, le carré de droite du diagramme ci-dessus est homotopiquement cocartésien ; puisque la section nulle $\mathbf{P}(\xi) \to E(\lambda_\xi)$ est une équivalence faible, on en déduit le résultat suivant :

***Proposition 3.2.2.*** — *Soient $X$ un $k$-schéma lisse et $\xi$ un fibré vectoriel sur $X$. Alors l'espace de Thom $T(\xi)$ de $\xi$ est naturellement isomorphe, dans la catégorie $h_*(\mathcal{E}_k)$, à la cofibre homotopique*

$$\mathbf{P}(\xi \oplus \Theta^1)/^h\mathbf{P}(\xi)$$

*de l'immersion fermée à l'infini.*

3.2.1.2. *Fonctorialité.* — Soit

$$\begin{array}{ccc} X' & \to & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y \end{array}$$

un carré cartésien de $k$-schémas lisses dans lequel les morphismes $\iota' : X' \to Y'$ et $\iota : X \to Y$ sont des immersions fermées. On dispose alors d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y' - X' & \to & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y - X & \to & Y \end{array}$$

qui détermine une application naturelle

$$T(\iota') \to T(\iota).$$

3.2.1.3. *Propriété de Mayer-Vietoris.* — Soit $\iota : X \to Y$ une immersion fermée entre $k$-schémas lisses. Si $U$ est un ouvert de $Y$ on note $\iota_U$ l'immersion fermée

$$X_U := X \cap U \to U.$$

On note $T_\iota(-) : \mathrm{Zar}(Y) \to \mathcal{E}_k$ le foncteur $U \mapsto T(\iota_U)$ (utiliser le paragraphe *fonctorialité* ci-dessus).

***Lemme 3.2.3.*** — *Avec les notations et hypothèses précédentes, le foncteur $T_\iota$ vérifie la propriété de Mayer-Vietoris.*

*Démonstration.* — Soient $U$ et $V$ deux ouverts de $Y$. Le lemme résulte facilement de la commutation des colimites homotopiques entre elles (*cf.* la remarque du §A.3.2) et du fait que les deux carrés suivants sont homotopiquement cocartésiens d'après le théorème 3.1.1 :

$$\begin{array}{ccc} (U \cap V) - X_{U \cap V} & \to & V - X_V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U - X_U & \to & (U \cup V) - X_{U \cup V} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} U \cap V & \to & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \to & U \cup V \end{array}$$

□

3.2.1.4. *Excision étale pour l'espace de Thom*

***Définition 3.2.4.*** — Soit $i : X \to Y$ une immersion entre deux schémas. Un *voisinage Nisnevich* de $i$ (ou bien de $X$ dans $Y$) est un morphisme étale $f : Z \to Y$ tel que le morphisme de schémas $X \times_Y Z \to X$ est un isomorphisme.

***Proposition 3.2.5.*** — *Soient $i : X \to Y$ une immersion fermée entre deux $k$-schémas lisses et $f : Z \to Y$ un voisinage Nisnevich de $X$ dans $Y$. On note $i_Z : X \to Z$ l'immersion fermée image réciproque de $i$ par $f$. Alors le morphisme canonique*

$$T(i_Z) \to T(i)$$

*est un isomorphisme (dans $h_*(\mathcal{E}_k)$).*

*Démonstration.* — La proposition résulte immédiatement du fait que le carré :

$$\begin{array}{ccc} Z - f^{-1}(X) & \to & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y - X & \to & Y \end{array}$$

est un carré fondamental de $\mathcal{L}_k$ (*cf.* 2.2.7) et du théorème 3.1.2. □

**3.2.2. Déformation au fibré normal.** — Soit $i : X \to Y$ une immersion fermée entre $k$-schémas lisses. On note $Y_X$ le $Y$-schéma obtenu en éclatant $X$ dans $Y$. D'après **[15]** corollaire 19.4.7 et proposition 19.4.8, le schéma $Y_X$ est lisse sur $k$. Si $\mathcal{I}_X$ désigne le faisceau d'idéaux (de $\mathcal{O}Y$) définissant $X$, on sait de plus que le $\mathcal{O}X$-module $\nu_i := \mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2$, est localement libre de rang fini et que le $k$-schéma $X' := X \times_Y Y_X$ s'identifie à $\mathbf{P}(\nu_i)$. Le faisceau $\nu_i$ s'appelle le faisceau normal de $X$ dans $Y$.

***Remarque 3.2.6***

1) La lissité du $k$-schéma $Y_X$ peut se voir de façon élémentaire en utilisant le critère jacobien appliqué aux équations explicites qui définissent, localement, $Y_X$ comme sous-schéma fermé d'un espace projectif sur $Y$. En effet, localement auquel cas on peut supposer $Y$ affine (sur $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$), l'immersion fermée $i : X \to Y$ est définie par une suite régulière de fonctions $x_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ sur $Y$ et $\nu_i$ est alors libre de base les images des $x_i$. On sait alors que $Y_X$ s'identifie au sous-schéma fermé de $\mathbf{P}^{n-1} \times_k Y$ défini par les équations $x_i \cdot y_j = x_j \cdot y_i$, les $y_i$ désignant les sections canoniques du $\mathcal{O}(\mathbf{P}^{n-1} \times_k Y)$-module $\mathcal{O}(1)_{\mathbf{P}^{n-1} \times_k Y}$.

2) Soient $i : X \to Y$ une immersion fermée entre deux $k$-schémas lisses et $f : Z \to Y$ un voisinage Nisnevich de $X$ dans $Y$. On note $i_Z : X \to Z$ l'immersion fermée induite par l'isomorphisme précédent. Remarquons tout d'abord que $f$ induit un isomorphisme $\nu_{i_Z} \cong \nu_i$ de faisceaux normaux. Le carré commutatifs de schémas :

$$\begin{array}{ccc} Z_X & \to & Y_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \to & Y \end{array}$$

est alors cartésien. On peut s'en convaincre comme suit. La question possède un caractère local et l'on peut donc supposer que $Y$ est affine (sur $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$) et que l'immersion fermée $i$ est définie par une suite régulière de fonctions $x_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ sur $Y$. Il est clair qu'alors l'immersion fermée $i_Z$ est définie par l'annulation des fonctions $x_i \circ f$ sur $Z$. Puisque $f$ est étale, ces fonctions $x_i \circ f$ forment également une suite régulière de fonctions sur $Z$, et l'on conclut facilement à l'aide des équations explicites définissant $Y_X$ et $Z_X$ données dans la remarque précédente.

On en conclut que le morphisme $Z_X \to Y_X$ est étale et définit un voisinage Nisnevich de $\mathbf{P}(\nu_i)$ dans $Y_X$.

3.2.2.1. *Déformation au cône normal.* — Nous rappelons ici cette construction introduite dans [**5, 11**] et que l'on peut trouver dans [**8**, chapitre 5].

Soit $i : X \to Y$ une immersion fermée entre deux $k$-schémas lisses. On note $i' : X \to Y \times \mathbf{A}^1$ l'immersion fermée composée de $i$ et de la section nulle $Y \to Y \times \mathbf{A}^1$. Soient $Y_X$ le schéma obtenu en éclatant $Y$ le long de $X$ et $(Y \times \mathbf{A}^1)_X$ le schéma obtenu en éclatant $Y \times \mathbf{A}^1$ le long de $X$(via $i'$). Par fonctorialité de l'éclatement projectif, la section nulle $Y \to Y \times \mathbf{A}^1$ induit une immersion fermée $Y_X \to (Y \times \mathbf{A}^1)_X$ et l'immersion fermée $X \times \mathbf{A}^1 \to Y \times \mathbf{A}^1$ induit une immersion fermée $X \times \mathbf{A}^1 \to (Y \times \mathbf{A}^1)_X$ (compte tenu du fait que l'éclatement projectif de $X \times \mathbf{A}^1$ le long de $X$ s'identifie à $X \times \mathbf{A}^1$). Enfin on a rappelé ci-dessus que le sous-schéma fermé de $(Y \times \mathbf{A}^1)_X$ image réciproque de $X$ par le morphisme $(Y \times \mathbf{A}^1)_X \to Y \times \mathbf{A}^1$ s'identifie à $\mathbf{P}(\nu_{i'})$. On voit facilement que l'intersection dans $(Y \times \mathbf{A}^1)_X$ de $Y_X$ et de $\mathbf{P}(\nu_{i'})$ s'identifie à $\mathbf{P}(\nu_i)$.

3.2.2.2. On note $D(i)$ le complémentaire dans $(Y \times \mathbf{A}^1)_X$ de $Y_X$. On dispose d'un morphisme $D(i) \to Y \to \mathbf{A}^1$ et l'on se convainc aisément des points suivants :

– l'image réciproque de la section nulle $Y \to Y \times \mathbf{A}^1$ par le morphisme $D(i) \to Y \times \mathbf{A}^1$ est le complémentaire dans $\mathbf{P}(\nu_{i'})$ du sous-schéma fermé $\mathbf{P}(\nu_i)$, qui s'identifie donc à $V(\nu_i)$ (puisque $\nu_{i'} \cong \nu_i \oplus \mathcal{O}X$ *cf.* 3.2.1) ;
– l'image réciproque de l'ouvert $Y \times \mathbf{G}_m$ de $Y \times \mathbf{A}^1$ par le morphisme $D(i) \to Y \times \mathbf{A}^1$ s'identifie à $Y \times \mathbf{G}_m$.

On dispose donc des diagrammes commutatifs suivants dans lesquels tous les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} X & \to & Y & = & Y \\ s_1 \downarrow & & \downarrow & & s_1 \downarrow \\ X \times \mathbf{A}^1 & \to & D(i) & \to & Y \times \mathbf{A}^1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} X & \to & V(\nu_i) & \to & Y \\ s_0 \downarrow & & \downarrow & & s_0 \downarrow \\ X \times \mathbf{A}^1 & \to & D(i) & \to & Y \times \mathbf{A}^1 \end{array}$$

Dans le diagramme de droite, le morphisme $V(\nu_i)$ est le composé de la projection sur $X$ et de $i$.

***Remarque 3.2.7***

1) Supposons que $Y$ est le spectre de l'anneau $B$ et $X$ le spectre de l'anneau $A$ quotient de $B$ par l'idéal $I$. Pour chaque entier $n \geq 0$, on note $I^n \subset B$ la puissance $n$-ème de l'idéal $I$. On note $S$ la sous-$B$-algèbre $\oplus_{n \geq 0} I^n$ de la $B$-algèbre $B[X]$. Notons $R$ la $B[T]$-algèbre image de l'homomorphisme de $B[T]$-algèbres $S[T] \to B[T, T^{-1}]$ composé de l'inclusion $S[T] \subset B[X, T]$ et de l'homomorphisme

$$B[X, T] \to B[T; T^{-1}], \quad X \mapsto T^{-1},\ T \mapsto T;$$

on vérifie facilement que $R$ s'identifie à la sous-$B[T]$-algèbre

$$\cdots \oplus I^n \cdot T^n \oplus \cdots \oplus I \cdot T^{-1} \oplus B \oplus B \cdot T \oplus \cdots \oplus B \cdot T^n \oplus \ldots$$

de $B[T, T^{-1}]$ et que $D(i)$ s'identifie au spectre de $R$. Ceci montre qu'en général, $D(i)$ est un $(Y \times \mathbf{A}^1)$-schéma affine.

2) Il résulte des rappels du §3.2.6 que $(Y \times \mathbf{A}^1)_X$ et donc $D(i)$ sont lisses sur $k$. Si $Y$ est affine lisse sur $k$, il en est donc de même pour $D(i)$ d'après la remarque précédente.

3) Soient $f : Z \to Y$ un voisinage Nisnevich de $X$ dans $Y$ et $i' : X \to Z$ l'immersion fermée induite. Alors dans le diagramme commutatif de schémas :

$$\begin{array}{ccccc} X \times \mathbf{A}^1 & \to & D(i') & \to & Z \times \mathbf{A}^1 \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ X \times \mathbf{A}^1 & \to & D(i) & \to & Y \times \mathbf{A}^1 \end{array}$$

les carrés sont tous cartésiens. Cela résulte facilement de la remarque 3.2.6 1).

**3.2.3. Le théorème de pureté homotopique.** — Soit $i : X \to Y$ une immersion fermée entre $k$-schémas lisses. Notons $j(i) : X \times \mathbf{A}^1 \to D(i)$ l'immersion fermée canonique. D'après le paragraphe précédent, on dispose des diagrammes commutatifs suivants dans lesquels tous les carrés sont cartésiens et tous les $k$-schémas sont lisses :

$$\begin{array}{ccccc} X & \to & Y & = & Y \\ s_1\downarrow & & \downarrow & & s_1\downarrow \\ X\times\mathbf{A}^1 & \stackrel{j(i)}{\to} & D(i) & \to & Y\times\mathbf{A}^1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} X & \to & V(\nu_i) & \to & Y \\ s_0\downarrow & & \downarrow & & s_0\downarrow \\ X\times\mathbf{A}^1 & \stackrel{j(i)}{\to} & D(i) & \to & Y\times\mathbf{A}^1 \end{array}$$

D'après le §3.2.1, le carré cartésien de gauche du premier de ces diagrammes induit une application naturelle $\eta(i)T(i) \to T(j(i))$ et le carré cartésien de gauche du second une application naturelle $\kappa(i) : T(\nu_i) \to T(j(i))$.

***Théorème 3.2.8* (Pureté homotopique).** — *Soit $i : X \to Y$ une immersion fermée entre deux $k$-schémas lisses. Alors les deux applications naturelles $\eta(i)T(i) \to T(j(i))$ et $\kappa(i) : T(\nu_i) \to T(j(i))$ sont des équivalences faibles. On obtient donc un isomorphisme naturel en $i$ (au sens évident), dans la catégorie homotopique des $k$-espaces pointés, entre le foncteur $i \mapsto T(i)$ et le foncteur $i \mapsto T(\nu_i)$.*

*Démonstration.* — Supposons que l'immersion fermée $i$ a la propriété (P) suivante :

(P) : le $k$-schéma $Y$ est affine et il existe un morphisme étale $Y \to \mathbf{A}_k^{n+d}$ tel que l'image réciproque par ce morphisme du sous-espace affine $\mathbf{A}_k^n$ de $\mathbf{A}_k^{n+d}$, défini par l'annulation des $d$ dernières coordonnées, est égal à $X$.

Alors le théorème dans ce cas particulier résulte facilement des lemmes 3.2.9, 3.2.10 et 3.2.11 ci-dessous.

Pour l'obtenir dans le cas général, procédons comme suit. Pour tout ouvert $U$ de $Y$, on note $i_U$ l'immersion fermée $X \cap U \to U$, $j_U$ l'immersion fermée $j(i_U)$ : $(X\cap U)\times\mathbf{A}^1 \to D(i_U)$ et $T(i_U)$, $T(j_U)$ et $T(\nu_U)$ les $k$-espaces de Thom correspondants respectivement à $i_U$, $j_U$ et au faisceau normal de $i$ ; on obtient ainsi des foncteurs $T_i(-)$, $T_j(-)$ et $T_\nu(-) : \mathrm{Zar}(Y) \to \mathcal{E}_k$ et les applications $\eta(i_U)$ (resp. $\kappa(i_U)$) induisent une transformation naturelle $\eta_i : T_i(-) \to T_j(-)$ (resp. $\kappa_i : T_\nu(-) \to T_j(-)$). Ces trois foncteurs $\mathrm{Zar}(Y) \to \mathcal{E}_k$ vérifie la propriété de Mayer-Vietoris ; cela résulte facilement du lemme 3.2.3 et du fait que les foncteurs $\mathrm{Zar}(Y) \to \mathcal{E}_k$, $U \mapsto V(\nu_i)|_U$ et $U \mapsto D(i_U)$ vérifient la propriété de Mayer-Vietoris (pour le premier de ses foncteurs c'est clair et pour le second, on remarque que pour $U$ et $V$ deux ouverts de $Y$, le $k$-schéma $D(i_{U\cup V})$ est la réunion des ouverts $D(i_U)$ et $D(i_V)$ dont l'intersection s'identifie à $D(i_{U\cap V})$).

Pour établir le théorème il nous suffit donc, d'après le corollaire 3.1.10 et d'après ce qui précède, de montrer qu'il existe un recouvrement ouvert fini $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de $Y$ par des ouverts affines sur $k$, tel que les immersions fermées $i_{U_\alpha}$ ont la propriété (P) ci-dessus (car cette propriété est alors automatiquement vérifiée pour chacune des immersions $i_{U_\alpha}$). Or d'après, [**15**, corollaire 17.12.2 d], $Y$ admet un tel recouvrement. □

**Lemme 3.2.9.** — *Soient $Y$ un $k$-schéma affine lisse, $\phi : Y \to \mathbf{A}_k^{n+d}$ un morphisme étale et $i : X \to Y$ l'immersion fermée image réciproque par $\phi$ de l'immersion fermée $\mathbf{A}_k^n \to \mathbf{A}_k^{n+d}$ définie par l'annulation des $d$ dernières coordonnées. Alors il existe un morphisme étale $f : Z \to Y$, un morphisme étale $g : Z \to X \times \mathbf{A}_k^d$ et une immersion fermée $j : X \to Z$ tels que les carrés suivants soient cartésiens :*

$$\begin{array}{ccc} X & \to & Z \\ \| & & \downarrow \\ X & \to & Y \end{array} \qquad et \qquad \begin{array}{ccc} X & \to & Z \\ \| & & \downarrow \\ X & \to & X \times \mathbf{A}_k^d \end{array}$$

*Démonstration.* — Notons $Z' := Y \times_{\mathbf{A}_k^{n+d}} (X \times_k \mathbf{A}_k^d)$, le morphisme $X \times_k \mathbf{A}_k^d \to \mathbf{A}_k^{n+d}$ utilisé étant le produit du morphisme étale $X \to \mathbf{A}_k^n$ par l'identité de $\mathbf{A}_k^d$. Notons $f' : Z' \to Y$ (resp. $g' : Z' \to X \times_k \mathbf{A}_k^d$) la première (resp. la seconde) projection ; ce sont des morphismes étales. On dispose d'une immersion fermée $X \times_{\mathbf{A}_k^n} X$ induite par $i$ sur la première projection et par la section nulle $X \to X \times \mathbf{A}_k^d$ sur la seconde, et de plus les sous-schémas fermés de $Z'$, ${f'}^{-1}(X)$ et ${g'}^{-1}(X)$ coïncident avec le sous-schéma $X \times_{\mathbf{A}_k^n} X$. Le morphisme diagonal $X \to X \times_{\mathbf{A}_k^n} X$ est une immersion ouverte (*cf.* [**15**, cor. 17.4.2]) et c'est également une immersion fermée puisque $X$ est affine sur $k$ donc sur $\mathbf{A}_k^n$ ; il en résulte que le $k$-schéma $X \times_{\mathbf{A}_k^n} X$ est la somme (dans la catégorie des $k$-schémas) de $X$ et de l'ouvert complémentaire $X'$.

Soit $Z$ l'ouvert de $Z'$ complémentaire du fermé $X'$ de $Z'$ (observer que $X'$ est également fermé dans $X \times_{\mathbf{A}_k^n} X$) ; le morphisme $f : Z \to Y$ (induit par $f'$) est bien étale, le premier carré est cartésien et de même le morphisme $g : Z \to X \times \mathbf{A}_k^d$ (induit par $g'$) est étale et le second carré est cartésien, d'où le lemme. □

**Lemme 3.2.10.** — *Soient $i : X \to Y$ une immersion fermée entre $k$-schémas lisses et $Z \to Y$ un voisinage Nisnevich de $X$ dans $Y$. Notons $i'$ l'immersion fermée induite $X \to Z$. Alors le théorème 3.2.8 est vrai pour $i$ si et seulement il l'est pour $i'$.*

*Démonstration.* — Il est clair que l'application naturelle $T(\nu_{i'}) \to T(\nu_i)$ induite par $f$ est un isomorphisme donc une équivalence faible. D'après le théorème 3.1.2, l'application naturelle $T(i') \to T(i)$ est une équivalence faible. Soient $j : X \times \mathbf{A}_k^1 \to D(i)$ et $j' : X \times \mathbf{A}_k^1 \to D(i')$ les immersions fermées canoniques. Le morphisme $D(f) : D(i') \to D(i)$ est un voisinage Nisnevich de $X \times \mathbf{A}_k^1$ dans $D(i)$ (*cf.* remarque 3.2.7 3). Il résulte donc à nouveau du théorème 3.1.2 que l'application $T(j') \to T(j)$ est une équivalence faible. Compte tenu de la naturalité des applications $\eta(i) : T(i) \to T(j)$, $\kappa(i) : T(\nu_i) \to T(j)$ et de leurs homologues avec des ', le lemme est maintenant évident. □

**Lemme 3.2.11.** — *Soient $X$ un $k$-schéma affine lisse, $n$ un entier $\geq 0$ et $s_0 : X \to X \times \mathbf{A}_k^n$ la section nulle. Alors le théorème 3.2.8 est vrai pour l'immersion fermée $s_0$.*

*Démonstration.* — Soit $A$ une $\mathcal{O}k$-algèbre quasi-cohérente dont $X$ est le spectre. D'après la remarque 1) du §3.2.7, le $k$-schéma $D(s_0)$ est affine et la $\mathcal{O}k$-algèbre quasi-cohérente $R$ qui le définit s'identifie à la sous-$A[X_1,\dots,X_n]$-algèbre :

$$\dots \oplus I^n \cdot T^{-n} \oplus \dots \oplus I \cdot T^{-1} \oplus A[X_1,\dots,X_n] \oplus \dots \oplus A[X_1,\dots,X_n] \cdot T^n \oplus \dots$$

de $A[X_1,\dots,X_n,T,T^{-1}]$, $I$ désignant l'idéal quasi-cohérent qui définit $s_0$, c'est à dire celui engendré par les $X_i$. On voit facilement que l'homomorphisme de $\mathcal{O}k$-algèbres

$$A[X_1',\dots,X_n',T] \to R$$

qui envoie $X_i'$ sur $X_i{\cdot}T^{-1}$ et $T$ sur $T$ est un isomorphisme et qu'ainsi le $(X \times \mathbf{A}^n_k \times \mathbf{A}^1)$-schéma $D(s_0)$ s'identifie naturellement à $(X \times \mathbf{A}^n_k \times \mathbf{A}^1)$ par le morphisme $T \mapsto T$ et $X_i \mapsto X_i{\cdot}T$. Un moment d'attention montre que l'immersion fermée $j(s_0) : X \times \mathbf{A}^1 \to D(s_0)$ s'identifie à l'immersion

$$s_0 \times \mathrm{Id}_{\mathbf{A}^1} : X \times \mathbf{A}^1 \to X \times \mathbf{A}^n_k \times \mathbf{A}^1;$$

ainsi l'ouvert $D(S_0) - (X \times \mathbf{A}^1)$ s'identifie à $X \times (\mathbf{A}^n_k)^* \times \mathbf{A}^1$ ce qui permet facilement de conclure. □

## 3.3. Éclatements projectifs

***Théorème 3.3.1.*** — *Soient $i : X \to Y$ une immersion fermée entre deux $k$-schémas lisses et $Y_X$ le $k$-schéma obtenu en éclatant $X$ dans $Y$ (c'est un $k$-schéma lisse d'après le §3.2.2). Alors le carré commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(\nu_i) & \to & Y_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y \end{array}$$

*induit une équivalence faible sur les cofibres homotopiques :*

$$X/^h\mathbf{P}(\nu_i) \cong Y/^hY_X$$

*Démonstration.* — La méthode de démonstration est analogue à celle employée pour établir le théorème de pureté homotopique. On se ramène ainsi au cas où l'immersion $i$ vérifie la propriété (P) de la démonstration du théorème 3.2.8 (en remarquant que le foncteur $\mathrm{Zar}(Y) \to \mathcal{E}_k, U \mapsto U_{X\cap U}$ vérifie la propriété de Mayer-Vietoris). On conclut facilement à l'aide des lemmes suivants et du lemme 3.2.9 □

***Lemme 3.3.2.*** — *Soient $i : X \to Y$ une immersion fermée entre deux $k$-schémas lisses et $f : Z \to Y$ un voisinage Nisnevich de $X$ dans $Y$. Notons $i'$ l'immersion fermée induite $X \to Z$. Alors le théorème 3.3.1 est vrai pour $i$ si et seulement il l'est pour $i'$.*

*Démonstration.* — On a déjà remarqué que le morphisme de faisceaux $\nu_{i'} \to \nu_i$ induit par $f$ est un isomorphisme (et l'on identifie donc $\mathbf{P}(\nu_{i'})$ et $\mathbf{P}(\nu_i)$. Le lemme résulte immédiatement du fait que dans le diagramme commutatifs suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{P}(\nu_i) & \to & Z_X & \to & Y_X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Z & \to & Y \end{array}$$

le carré de droite est homotopiquement cocartésien : en effet, on a vu au §3.2.2 que ce carré est cartésien et que le morphisme $Z_X \to Y_X$ est un voisinage Nisnevich de $\mathbf{P}(\nu_i)$ dans $Y_X$ ; de plus si l'on note $U$ l'ouvert complémentaire de $X$ dans $Y$ et $V$ l'image réciproque par $f$ de $U$ (c'est aussi le complémentaire de $X$ dans $Z$), alors dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} V & \to & Z_X & \to & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \to & Y_X & \to & Y \end{array}$$

le carré commutatif de gauche ainsi que le carré commutatif extérieur sont des carrés fondamentaux de $k$-schémas lisses (*cf.* 2.2.7) et sont donc tous deux homotopiquement cocartésien d'après le théorème 3.1.2, ce qui implique l'affirmation. □

***Lemme 3.3.3.*** — *Soient $X$ un $k$-schéma lisse, $n \geq 0$ un entier et $s_0 : X \to X \times \mathbf{A}^n_k$ la section nulle. Alors le théorème 3.3.1 est vrai pour l'immersion fermée $s_0$.*

*Démonstration.* — Notons $Y := X \times \mathbf{A}^n$. Nous avons rappelé à la remarque 3.2.6 1), que $Y_X$ est le sous-$k$-schéma fermé de $Y \times \mathbf{P}^{n-1}_k$ défini par des équations $x_i \cdot y_j = x_j \cdot y_i$, $i$ et $j$ parcourant $\{0, \ldots, n-1\}$. On en déduit immédiatement que l'ouvert $(Y_X)_{y_i}$ s'identifie au sous-$k$-schéma fermé de $(Y \times \mathbf{P}^{n-1}_k)_{y_i} \cong Y \times \mathbf{A}^{n-1}$ défini par les équations $x_i \cdot y'_j = x_j$, $j \in \{0, \ldots, n-1\} - \{i\}$, $y'_j$ désignant la fonction $y_j/y_i$ définie sur $(Y \times \mathbf{P}^{n-1}_k)_{y_i}$. Il en résulte facilement que le morphisme de $k$-schémas $(Y_X)_{y_i} \to X \times \mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^{n-1}$ induit par $x_i$ et les $y'_j$, $j \in \{0, \ldots, n-1\} - \{i\}$, est un isomorphisme. Un moment de réflexion montre que, plus généralement, pour chaque ouvert $U$ intersection dans $Y_X$ d'un nombre fini de $(Y_X)_{y_i}$ le morphisme de $k$-schémas $U \to X$ s'identifie à la projection d'un espace affine sur $X$ et est donc une équivalence faible. Comme c'est également le cas pour les ouverts du même type du sous-$k$-schéma fermé $\mathbf{P}(\nu_{s_0}) \cong \mathbf{P}^{n-1}$ de $Y_X$, les corollaires 3.1.10 et 3.1.11 impliquent que l'immersion fermée $\mathbf{P}(\nu_{s_0}) \to Y_X$ est une équivalence faible si bien que le carré du théorème est homotopiquement cocartésien, d'où le lemme. □

***Remarque 3.3.4.*** — L'auteur ignore si le carré du théorème est homotopiquement cocartésien. Remarquons que le théorème 3.3.1 implique qu'après une suspension il l'est, et donc qu'il l'est « stablement ».

# CHAPITRE 4

# CLASSIFICATION HOMOTOPIQUE DES FIBRÉS VECTORIELS

Dans les paragraphes 4.1, 4.2 et 4.3 $k$ désigne un schéma affine, noethérien et régulier, et l'on note encore, par abus, $k$ son anneau affine $A(k)$. Au paragraphe 4.4 on suppose seulement le schéma $k$ noethérien, régulier, et séparé (rappelons que cela implique que $k$ admet une famille ample).

## 4.1. Propriété d'excision pour le groupe de Picard et la $K$-théorie algébrique

**4.1.1. Excision pour le groupe de Picard.** — Soit $X$ un schéma. On note $\mathrm{Pic}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\mathcal{O}X$-modules localement libres de rang un muni de sa structure de groupe abélien induite par le produit tensoriel des $\mathcal{O}X$-modules.

Supposons que $X$ est un schéma régulier. Alors $X$ est la somme (dans la catégorie des schémas) de ses composantes irréductibles $X_\alpha$ qui sont en nombre fini et sont des schémas noethériens, réguliers, intègres (utiliser [**13**, Prop. 6.1.10] et le fait que tout anneau local régulier est intègre [**21**, Th. 20.3]). On note $X^1$ l'ensemble des sous-schémas fermés intègres de $X$ de codimension 1, $Z^1(X)$ le groupe abélien libre sur $X^1$ (c'est le groupe des diviseurs de Weil sur $X$) et $\mathcal{K}(X)$ l'anneau total des fonctions rationnelles sur $X$, *i.e* le produit (fini) des corps $\mathcal{K}(X_\alpha)$ des fonctions rationnelles sur les composantes irréductibles de $X$. Rappelons que l'on note $A(X)$ l'anneau des fonctions régulières sur $X$ et pour tout anneau $A$ que l'on note $A^\times$ le groupe multiplicatif de $A$. La proposition qui suit résulte de [**15**, Prop. 21.3.4, Cor. 21.6.10] :

***Proposition 4.1.1.*** — *Pour tout schéma $X$ régulier on dispose d'une suite exacte naturelle de groupes abéliens :*

$$0 \to A(X)^\times \to \mathcal{K}(X)^\times \to Z^1(X) \to \mathrm{Pic}(X) \to 0.$$

Pour tout ouvert $U$ de $X$ on a bien sûr une suite exacte analogue et l'homomorphisme «restriction» $Z^1(X) \to Z^1(U)$ est surjectif (*cf.* [**15**, §21.6.3]) et son noyau est le groupe abélien libre sur le sous-ensemble de $X^1$ constitué des $x$ tels que $U \cap \overline{x} = \varnothing$ ou encore tels que $x \in X - U$. On dispose donc d'une suite exacte naturelle :

$$0 \to \bigoplus_{\substack{x \in X^1 \\ x \in X - U}} \mathbf{Z} \to Z^1(X) \to Z^1(U) \to 0.$$

Lorsque $U$ est dense dans $X$, le morphisme d'anneaux $\mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(U)$ est un isomorphisme, et l'on obtient facilement par une «chasse au diagramme» une suite exacte naturelle :

$$0 \to A(X)^\times \to A(U)^\times \to \bigoplus_{\substack{x \in X^1 \\ x \in X - U}} \mathbf{Z} \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(U) \to 0.$$

***Corollaire 4.1.2.*** — *Soit :*

$$\begin{array}{ccc} V & \to & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \to & X \end{array}$$

*un carré fondamental de $\mathcal{L}_k$. Alors il existe une suite exacte naturelle :*

$$0 \to A(X)^\times \to A(U)^\times \oplus A(Y)^\times \to A(V)^\times$$
$$\to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(U) \oplus \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(V) \to 0$$

*Démonstration.* — Comme $X$ est somme finie de ses composantes irréductibles, on peut se ramener au cas où $X$ est irréductible. De même on peut supposer que $F = X - U$ n'est pas égal à $X$, si bien que $U$ est dense dans $X$ et donc $V$ est dense dans $Y$ : en effet l'ouvert $U'$ de $X$ image de $Y$ contient $F$ si bien que $U \cap U'$ est dense dans $U'$ et l'on conclut car le morphisme $Y \to X$ est ouvert. La suite exacte cherchée s'obtient facilement à l'aide du diagramme de suites exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \to & A(X)^\times & \to & A(U)^\times & \to & \bigoplus_{x \in X^1 \cap F} \mathbf{Z} & \to & \mathrm{Pic}(X) & \to & \mathrm{Pic}(U) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A(Y)^\times & \to & A(V)^\times & \to & \bigoplus_{y \in Y^1 \cap F} \mathbf{Z} & \to & \mathrm{Pic}(Y) & \to & \mathrm{Pic}(V) & \to & 0 \end{array}$$

en remarquant que l'application $\{x \in X^1 \cap F\} \to \{y \in Y^1 \cap F\}$ est bijective. □

**4.1.2. Excision pour la K-théorie de Quillen.** — Soit $X$ un schéma. Notons $\Phi(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels sur $X$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $\Phi_n(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels de rang $n$ sur $X$ (c'est donc un sous-ensemble de $\Phi(X)$ et lorsque $X$ est connexe, $\Phi(X)$ s'identifie à la somme des $\Phi_n(X)$). Rappelons que le groupe de Grothendieck $K_0(X)$ des fibrés vectoriels sur $X$ est le quotient du groupe abélien libre sur $\Phi(X)$ par les relations habituelles associées à toute suite exacte de fibrés vectoriels. Le produit tensoriel des fibrés vectoriels induit sur $K_0(X)$ une structure d'anneau associatif commutatif unitaire (l'unité que l'on notera 1 étant la classe de $\Theta^1$).

Pour tout fibré vectoriel $\xi$ sur $X$ on notera $[\xi]$ sa classe dans $K_0(X)$ et $\mathrm{rg}(\xi) : X \to \mathbf{Z}$, l'application localement constante qui à tout point de $X$ associe le rang de $\xi$ en ce point. Notons $H^0(X;\mathbf{Z})$ le groupe abélien des applications localement constantes de $X$ vers $Z$. Par définition du groupe $K_0(X)$, l'application $\mathrm{rg}(-) : \Phi(X) \to H^0(X;\mathbf{Z})$ qui à la classe du fibré vectoriel $\xi$ associe $\mathrm{rg}(\xi)$ induit un homomorphisme de groupes $\mathrm{rg}(-) : K_0(X) \to H^0(X;\mathbf{Z})$ (qui est même un homomorphisme d'anneaux) dont on note $\tilde{K}_0(X)$ le noyau.

Lorsque $X$ est la somme (dans la catégorie des schémas) de schémas irréductibles $X_\alpha$, l'homomorphisme de groupes

$$\mathrm{rg}(-) : K_0(X) \to H^0(X;\mathbf{Z})$$

admet comme section l'homomorphisme $H^0(X;\mathbf{Z}) \to K_0(X)$ qui à toute application localement constante $r : X \to Z$ à valeurs $\geq 0$ associe la classe du fibré vectoriel $\Theta^r$ dont la restriction à $X_\alpha$ est le fibré trivial de rang $r(X_\alpha)$. Il en résulte que le groupe $K_0(X)$ s'identifie canoniquement au produit du groupe $H^0(X;\mathbf{Z})$ par le groupe $\tilde{K}_0(X)$.

Notons $\Phi_\infty(X)$ l'ensemble colimite sur $n$ des $\Phi_n(X)$, l'application

$$\Phi_n(X) \to \Phi_{n+1}(X)$$

étant induite par la somme par (la classe de) $\Theta^1$. Les applications canoniques

$$\Phi_n(X) \to \tilde{K}_0(X),$$

qui à $[\xi]$ associe l'élément $[\xi] - \Theta^n$, induisent une application naturelle

$$\Phi_\infty(X) \to \tilde{K}_0(X);$$

cette application est même additive pour la structure de monoïde sur $\Phi_\infty(X)$ induite par la somme des fibrés vectoriels.

Lorsque $X$ est affine, le monoïde $\Phi_\infty(X)$ est un groupe abélien (comme on le vérifie aisément par l'argument habituel) et l'application $\Phi_\infty(X) \to \tilde{K}_0(X)$ un isomorphisme de groupes. En effet, $\tilde{K}_0(X)$ est le sous-groupe de $K_0(X)$ engendré par les éléments de la forme $[\xi] - \mathrm{rg}(x) \cdot 1$, $\xi$ parcourant les fibrés vectoriels sur $X$ ; mais pour tout tel $\xi$ et tout $n$ grand, le fibré vectoriel $\xi \oplus (n - \mathrm{rg}(x)) \cdot \Theta^1$ est de rang constant $n$, ce qui montre que l'homomorphisme en question est surjectif. Pour établir l'injectivité il suffit de remarquer que, pour tout fibré vectoriel $\xi$ de rang $n$, dire que l'élément $[x] - n \cdot 1$ est nul dans $\tilde{K}_0(X)$, c'est dire que $\xi$ est stablement trivial (voir **[24]**) donc nul dans $\Phi_\infty(X)$.

Si $X$ est un $k$-schéma affine lisse, alors l'ensemble $\Phi_\infty(X)$ s'identifie aussi à l'ensemble $\Phi_{\mathbf{GL}}(X)$ des classes d'isomorphismes de $\mathbf{GL}$-torseurs sur $X$ au sens du §2.1.5. En effet l'ensemble $\Phi_n(X)$ s'identifie naturellement (lemme 2.1.7) à l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\mathbf{GL}_n$-torseurs sur $X$ et puisque tout $\mathbf{GL}$-torseur sur $X$ est induit par un $\mathbf{GL}_n$-torseur sur $X$ pour un $n$ grand, les applications $\Phi_n(X) \to \Phi_{n+1}(X)$ induisent avec cette identification une bijection naturelle

$$\Phi_\infty(X) \cong \Phi_{\mathbf{GL}}(X).$$

On obtient donc, avec ce qui précède, une bijection naturelle

$$\Phi_{\mathbf{GL}}(X) \cong \tilde{K}_0(X).$$

Pour tout schéma $X$ on note $\underline{K}(X)$ l'espace des lacets du classifiant

$$B(QP(X))$$

de la catégorie $QP(X)$ associée par Quillen [**28**] à la catégorie exacte des fibrés vectoriels sur $X$ et pour tout entier $n \geq 0$ on note $K_n(X)$ le $n$-ème groupe d'homotopie de $\underline{K}(X)$, c'est à dire le $n$-ème groupe de $K$-théorie algébrique (de Quillen) de $X$. Le groupe $K_0(X)$ s'identifie bien au groupe défini précédemment.

***Lemme 4.1.3* (Excision pour la $K$-théorie algébrique).** — *Soit :*

$$\begin{array}{ccc} V & \to & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \to & X \end{array}$$

*un carré fondamental de $\mathcal{L}_k$. Alors le carré commutatif suivant (d'ensembles simpliciaux) est homotopiquement cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} \underline{K}(X) & \to & \underline{K}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{K}(Y) & \to & \underline{K}(V) \end{array}$$

*et l'homomorphisme $K_0(Y) \to K_0(V)$ est surjectif. En particulier, on dispose d'une longue suite exacte naturelle :*

$$\cdots \to K_n(X) \to K_n(Y) \oplus K_n(U) \to K_n(V) \to K_{n-1}(X) \to \cdots$$
$$\cdots \to K_1(V) \to K_0(X) \to K_0(Y) \oplus K_0(U) \to K0(V) \to 0.$$

*Démonstration.* — Les schémas $X$, $Y$, $U$ et $V$ sont noethériens, séparés réguliers ; d'après [**28**, §7.1], la $K$-théorie de ces schémas s'identifie à la $K'$-théorie. Ceci implique tout d'abord que l'homomorphisme $K_0(Y) \to K_0(V)$ est bien surjectif (puisque l'homomorphisme $K'_0(Y) \to K'_0(V)$ l'est). Ensuite d'après [**28**, §7.3] l'application induite par le carré sur les fibres homotopiques des applications horizontales est une équivalence faible. Cela permet facilement de conclure compte tenu du fait que le diagramme est un « diagramme de $H$-espaces ». □

### 4.1.3. Compléments sur la $K_i$-régularité et la $*-\mathrm{Pic}$-régularité

***Définition 4.1.4.*** — Soit $R$ un anneau commutatif unitaire.

1. On dit que $R$ est $\times-\mathrm{Pic}$-régulier si pour tout entier $n \geq 0$ l'homomorphisme d'anneaux $R \to R[X_1,\dots,X_n]$ induit des isomorphismes
$$\mathrm{Pic}(R[X_1,\dots,X_n]) \cong \mathrm{Pic}(R)$$
et $R[X_1,\dots,X_n]^\times \cong R^\times$ ;
2. on dit que $R$ est $K_i$-régulier, $i \in \{0,1\}$, si pour tout entier $n \geq 0$ l'homomorphisme d'anneaux $R \to R[X_1,\dots,X_n]$ induit un isomorphisme
$$K_i(R[X_1,\dots,X_n]) \to K_i(R).$$

Bien sûr $\mathrm{Pic}(R)$ désigne le groupe $\mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(R))$ et $K_i(R)$ désigne $K_i(\mathrm{Spec}(R))$. Rappelons que le groupe $K_1(R)$ s'identifie à l'abéliannisé du groupe linéaire infini $\mathbf{GL}(R)$ ; on sait aussi **[24]** que le sous-groupe des commutateurs de $\mathbf{GL}(R)$ est égal au sous-groupe $E(R)$ engendré par les matrices élémentaires.

*Quelques rappels*

***Lemme 4.1.5.*** — *Tout anneau noethérien, régulier est $K_i$-régulier, $i \in \{0,1\}$.*

Pour $i = 0$ ce résultat est du à Grothendieck et pour $i = 1$ à Bass-Heller-Swan **[4]**. Pour $i$ quelconque, il est dû à Quillen **[28]**.

***Lemme 4.1.6*** (**[36]**). — *Soient $R$ un anneau et $i \in \{0,1\}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *pour tout idéal premier $\mathcal{P}$ de $R$, l'anneau local $R_{(\mathcal{P})}$ est $K_i$-régulier ;*
2. *$R$ est $K_i$-régulier.*

***Lemme 4.1.7.*** — *Tout anneau $K_1$-régulier est $K_0$-régulier et $\times-\mathrm{Pic}$-régulier.*

*Démonstration.* — Soit $R$ un anneau commutatif unitaire. L'homomorphisme « déterminant » $\mathbf{GL}(R) \to R^\times$ et le monomorphisme $R^\times \to \mathbf{GL}(R)$ déterminent le groupe multiplicatif $R^\times$ comme facteur direct naturel de $K_1(R)$ ce qui montre que la $K_1$-régularité implique la $\times$-régularité. Le fait que la $K_1$-régularité implique la $K_0$-régularité est établi dans **[36]** (c'est une conséquence immédiate du théorème fondamental de Bass 4.3.10 et du lemme 4.1.6). L'application qui à tout $R$-module projectif de type fini $P$ associe sa puissance extérieure « maximale » définit un homomorphisme naturel $K_0(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ dont l'application (ensembliste) naturelle $\mathrm{Pic}(X) \to K_0(X)$ est une section. Ainsi, l'ensemble $\mathrm{Pic}(X)$ est naturellement facteur direct de l'ensemble $K_0(X)$, ce qui montre que la $K_0$-régularité implique la Pic-régularité, d'où le lemme. □

***Lemme 4.1.8*** (**[32]**). — *Soient $R$ un anneau et $S$ une $R$-algèbre étale. Si $R$ est $K_1$-régulier alors l'anneau $S$ est $K_1$-régulier.*

***Lemme 4.1.9*** ([7]). — *Soient $R$ un anneau $K_1$-régulier, $n$ un entier $\geq 0$ et $\{S_i\}_i$ une famille finie de sous-ensembles de $\{1,\ldots,n\}$ deux à deux disjoints. Alors l'anneau $\Pi[\phi_i]$ associé à la famille d'épimorphismes*

$$\phi_i : R[X_1,\ldots,X_n] \to R[X_1,\ldots,X_n]/(X_i; i \in S_i)$$

*(cf. §2.2.3) est $K_1$-régulier.*

Soient $A$ une $k$-algèbre, $n$ un entier $\geq 0$ et $\{f_\alpha : A \to A_\alpha\}_{\alpha\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille finie d'épimorphismes de $k$-algèbres. On dira que cette famille est $k$-transverse si la famille d'immersions fermées correspondantes $\{\mathrm{Spec}(\phi_\alpha) : \mathrm{Spec}(A_\alpha) \to \mathrm{Spec}(A)\}_\alpha$ est $k$-transverse.

***Théorème 4.1.10***. — *Soient $A$ une $k$-algèbre lisse, $n$ un entier $\geq 0$ et $\{\phi_\alpha : A \to A_\alpha\}_\alpha$ une famille finie $k$-transverse d'épimorphismes de $k$-algèbres. Alors l'anneau $\Pi[\phi_\alpha]$ (voir §2.2.3) est $K_1$-régulier (et donc $K_0$-régulier et $\times - \mathrm{Pic}$-régulier d'après le lemme 4.1.7).*

*Démonstration*. — Soient $\{f_1,\ldots,f_m\}$ des éléments de $A$ premiers entre eux dans leurs ensemble. D'après le lemme 4.1.6, il suffit d'établir le théorème pour les familles

$$\{(\phi_\alpha)_{(f_i)} : A_{(f_i)} \to (A_\alpha)_{(f_i)}\}$$

(car l'anneau $\Pi[(\phi_\alpha)_{(f_i)}]$ s'identifie à l'anneau $(\Pi[\phi_\alpha])_{(f_i)})$. Or par définition de la $k$-transversalité, il existe une telle famille $\{f_1,\ldots,f_m\}$ d'éléments de $A$ telle que pour tout $i$, il existe un homomorphisme étale de $k$-algèbres

$$k[X_1,\ldots,X_{d_i}] \to A_{(f_i)}$$

et une famille finie $\{S^i_\alpha\}_\alpha$ de sous-ensembles de $\{1,\ldots,d_i\}$ deux à deux disjoints ($\alpha$ parcourant les éléments de $\{1,\ldots,n\}$ tels que l'anneau $(A_\alpha)_{(f_i)}$ n'est pas nul) telle que l'épimorphisme $A_{(f_i)} \to (A_\alpha)_{(f_i)}$ s'identifie à l'épimorphisme

$$A_{(f_i)} \to A_{(f_i)} \otimes_{k[X_1,\ldots,X_{d_i}]} k[X_1,\ldots,X_{d_i}]/(X_s, s \in S^i_\alpha).$$

Il en résulte facilement (puisque le $k[X_1,\ldots,X_{d_i}]$-module $A_{(f_i)}$ est plat) que la $k$-algèbre $\Pi[(\phi_\alpha)_{(f_i)}]$ s'identifie à la $k$-algèbre

$$A_{(f_i)} \otimes_{k[X_1,\ldots,X_{d_i}]} \Pi[k[X_1,\ldots,X_{d_i}] \to k[X_1,\ldots,X_{d_i}]/(X_s, s \in S^i_\alpha)]$$

et le morphisme

$$\Pi[k[X_1,\ldots,X_{d_i}] \to k[X_1,\ldots,X_{d_i}]/(X_s, s \in S^i_\alpha)] \to \Pi[(\phi_\alpha)_{(f_i)}]$$

est donc étale. On conclut à l'aide des lemmes 4.1.8 et 4.1.9. □

**4.1.4. $K$-théorie de Karoubi-Villamayor et $K$-théorie de Quillen.** — Soit R un anneau commutatif. On note $\underline{\mathbf{GL}}(R)$ le groupe simplicial qui en degré $n$ est égal au groupe linéaire infini de l'anneau $R[X_0, \ldots, X_n]/(X_0 + X_1 + \cdots + X_n = 1)$ et dont les applications de faces et dégénérescences sont définies comme au §2.1.2. On pose $KV_0(R) := K_0(R)$ et pour tout entier $n \geq 1$, $KV_n(R) := \pi_{n-1}\underline{\mathbf{GL}}(R)$ (le $(n-1)$-ème groupe d'homotopie de l'ensemble simplicial $\underline{\mathbf{GL}}(R)$) ; il est clair que les groupes $KV_n(R)$ pour $n \neq 1$ sont abéliens et nous verrons ci-dessous qu'il en est de même pour le groupe $KV_1(R)$. Ces groupes $KV_*(R)$ forment la $K$-théorie de Karoubi-Villamayor de $R$ [**9**]. On remarquera que, pour tous entiers $n \geq 1, m \geq 0$, l'homomorphisme $KV_n(R) \to KV_n(R[X_1, \ldots, X_m])$ est un isomorphisme puisque l'application simpliciale $\underline{\mathbf{GL}}(R) \to \underline{\mathbf{GL}}(R[X_1, \ldots, X_m])$ est une équivalence d'homotopie (noter que $\underline{\mathbf{GL}}(R[X])$ s'identifie naturellement au groupe simplicial $(\underline{\mathbf{GL}}(R))^{\Delta^1}$ avec les notations de [**22**]).

Le groupe $E(R)$ est contenu dans le noyau de l'épimorphisme $\mathbf{GL}(R) \to KV_1(R)$ ; en effet pour tout matrice élémentaire $E_{i,j}(\lambda)$ la matrice élémentaire $E_{i,j}(\lambda \cdot T)$ de $\mathbf{GL}(R[T])$ réalise une homotopie à l'identité de $E_{i,j}(\lambda)$. On en déduit un épimorphisme canonique $K_1(R) \to KV_1(R)$, ce qui prouve au passage que le groupe $KV_1(R)$ est abélien.

***Lemme 4.1.11.*** — *Si l'anneau $R$ est $K_1$-régulier, alors l'épimorphisme canonique $K_1(R) \to KV_1(R)$ est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — Il suffit, par définition de $KV_1(R)$, de montrer que si $H$ est un élément de $\mathbf{GL}(R[T])$ tel que l'élément $H(0)$ de $\mathbf{GL}(R)$ est trivial alors l'élément $H(1)$ de $\mathbf{GL}(R)$ appartient à $E(R) = [\mathbf{GL}(R), \mathbf{GL}(R)]$. Puisque par hypothèse, l'homomorphisme

$$\mathbf{GL}(R)/[\mathbf{GL}(R), \mathbf{GL}(R)] \to \mathbf{GL}(R[T])/[\mathbf{GL}(R[T]), \mathbf{GL}(R[T])]$$

est un isomorphisme les deux homomorphismes d'évaluation, en 0 et 1 :

$$\mathbf{GL}(R[T]) \to \mathbf{GL}(R)/[\mathbf{GL}(R), \mathbf{GL}(R)]$$

sont égaux, et l'affirmation en résulte aisément. □

***Lemme 4.1.12*** ([**9**]). — *Soit :*

$$\begin{array}{ccc} D & \to & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \to & A \end{array}$$

*un carré commutatif cartésien d'anneaux (commutatifs) tel que l'homomorphisme $B \to A$ est surjectif et tel que l'anneau $A$ est $K_1$-régulier. Alors le carré commutatif* *cartésien d'ensembles simpliciaux (qui est en fait un diagramme de groupes simpliciaux) :*

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{GL}}(D) & \to & \underline{\mathbf{GL}}(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\mathbf{GL}}(C) & \to & \underline{\mathbf{GL}}(A) \end{array}$$

*est homotopiquement cartésien. En particulier, on dispose d'une longue suite exacte naturelle :*

$$\cdots \to KV_n(D) \to KV_n(C) \oplus KV_n(B) \to KV_n(A) \to KV_{n-1}(D) \to \cdots$$
$$\cdots \to KV_2(A) \to KV_1(D) \to KV_1(C) \oplus KV_1(B) \to KV_1(A).$$

*Démonstration.* — Il suffit d'établir que le morphisme de groupes simpliciaux

$$\underline{\mathbf{GL}}(B) \to \underline{\mathbf{GL}}(A)$$

est une fibration. Or d'après [**27**, II §3] Prop. 1 (iii), il suffit d'établir que pour tout entier $n \geq 0$, l'homomorphisme

$$\mathbf{GL}(B[X_1, \ldots, X_n]) \to \mathbf{GL}(A[X_1, \ldots, X_n] \times_{KV_1(A)} KV_1(B)$$

est surjectif (rappelons que $KV_1(R)$ est égal, par définition, au groupe $\pi_0(\underline{\mathbf{GL}}(R))$), ce qui résulte facilement du fait que l'homomorphisme

$$E(B[X_1, \ldots, X_n]) \to E(A[X_1, \ldots, X_n])$$

est surjectif (car l'homomorphisme d'anneaux $B \to A$ est surjectif) et du fait que $KV_1(A)$ est le quotient de $\mathbf{GL}(A)$ par $E(A)$ d'après le lemme 4.1.11. □

***Remarque 4.1.13.*** — L'argument utilisé dans la démonstration montre aussi que pour toute cofibration élémentaire $i : X \to Y$, l'homomorphisme de groupes simpliciaux $\underline{\mathbf{GL}}(A(Y)) \to \underline{\mathbf{GL}}(A(X))$ est une fibration.

***Lemme 4.1.14* (Suite exacte de Milnor [24]).** — *Soit :*

$$\begin{array}{ccc} D & \to & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \to & A \end{array}$$

*un carré commutatif cartésien d'anneaux (commutatifs). On suppose que l'homomorphisme $B \to A$ est surjectif. Il existe alors des suites exactes naturelles :*

$$K_1(D) \to K_1(C) \oplus K_1(B) \to K_1(A) \to K_0(D) \to K_0(C) \oplus K_0(B) \to K_0(A)$$

*et*

$$0 \to D^\times \to C^\times \oplus B^\times \to A^\times \to \mathrm{Pic}(D) \to \mathrm{Pic}(C) \oplus \mathrm{Pic}(B) \to \mathrm{Pic}(A).$$

Seule la première affirmation est énoncée dans [**24**] mais les ingrédients fournis permettent facilement de construire la seconde suite exacte.

On déduit facilement des deux lemmes précédents le :

***Corollaire 4.1.15*** **([9])**. — *Soit :*

$$\begin{array}{ccc} D & \to & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \to & A \end{array}$$

*un carré commutatif cartésien d'anneaux (commutatifs). On suppose que l'homomorphisme $B \to A$ est surjectif et que l'anneau $A$ est $K_1$-régulier. Alors il existe une longue suite exacte naturelle :*

$$\begin{aligned} \cdots \to KV_n(D) \to KV_n(C) \oplus KV_n(B) \to KV_n(A) \to KV_{n-1}(D) \to \dots \\ \cdots \to K_1(D) \to K_1(C) \oplus K_1(B) \to K_1(A) \to \\ \to K_0(D) \to K_0(C) \oplus K_0(B) \to K_0(A). \end{aligned}$$

*Rappel.* — Pour tout anneau commutatif $R$, l'homomorphisme évident de groupes simpliciaux $\mathbf{GL}(R) \to \underline{\mathbf{GL}}(R)$ induit une application $B(\mathbf{GL}(R)) \to B(\underline{\mathbf{GL}}(R))$ sur les espaces classifiants. Cette application induit sur le $\pi_1$ l'épimorphisme $\mathbf{GL}(R) \to KV_1(R)$. Par définition même de la construction $+$ de Quillen, l'application simpliciale $B(\mathbf{GL}(R)) \to B(\underline{\mathbf{GL}}(R))$ induit une classe d'homotopie d'applications simpliciales canonique $\Theta(R) : (B(\mathbf{GL}(R)))^+ \to B(\underline{\mathbf{GL}}(R))$. Rappelons que lorsque $R$ est régulier, $\Theta(R)$ est une équivalence faible **[9]**, identifiant ainsi la $K$-théorie algébrique de $R$ à sa $K$-théorie de Karoubi-Villamayor (compte tenu de l'équivalence faible naturelle - pour tout anneau $R$- $\underline{K}(R) \cong (B(\mathbf{GL}(R)))^+$, **[28]**.

## 4.2. Classification homotopique des fibrés vectoriels et des GL-torseurs

Rappelons que dans ce paragraphe $k$ est un anneau commutatif noethérien, régulier.

### 4.2.1. Extensions anodines, $K$-théorie algébrique et groupe de Picard

***Lemme 4.2.1***. — *Soit $i : X \to Y$ une extension anodine élémentaire. Alors l'application simpliciale :*

$$\underline{\mathbf{GL}}(A(Y)) \to \underline{\mathbf{GL}}(A(X))$$

*est une fibration triviale (donc une équivalence faible) et les homomorphismes*

$$K_0(A(Y)) \to K_0(A(X)), \quad A(Y)^\times \to A(X)^\times \quad et \mathrm{Pic}(A(Y)) \to \mathrm{Pic}(A(X))$$

*des isomorphismes.*

Etablissons tout d'abord des cas particuliers.

Soient $X$ un k-schéma affine lisse, $n \geq 0$ un entier et $I \subset \{0, \dots, n\}$ une partie de $\{0, \dots, n\}$. On note $\Lambda_k^{n,I} \subset \Delta_k^n$ la réunion de toute les faces de $\Delta_k^n$ sauf celles appartenant à $I$. Ainsi, $\Lambda_k^n := \Lambda_k^{n,\{0\}}$. Soit $i_0 \in I$. Notons $J \subset \{0, \dots, n-1\}$ l'image réciproque de $I$ par $d^{i_0} : \{0,\ldots,n-1\} \to \{0,\ldots,n\}$. Notons $I_0 \subset \{0,\ldots,n\}$ le complémentaire dans $I$ de $i_0$. Observons alors que le carré :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^{n-1,J} & \stackrel{d^{i_0}}{\to} & \Lambda_k^{n,I_0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^{n-1} & \stackrel{d^{i_0}}{\to} & \Lambda_k^{n,I} \end{array}$$

est cocartésien.

***Lemme 4.2.2***. — *Soient $X$ un $k$-schéma affine lisse, $n \geq 1$ un entier et $I \subset \{0,\ldots,n\}$ une partie distincte de $\{0,\ldots,n\}$.*

1. *la cofibration élémentaire $\Lambda_k^{n,I} \times X \to \Delta_k^n \times X$ induit une fibration triviale*
$$\underline{\mathbf{GL}}(A(\Delta_k^n \times X)) \to \underline{\mathbf{GL}}(A(\Lambda_k^{n,I} \times X));$$
2. *les homomorphismes naturels*
$$A(\Delta_k^n \times X)^\times \to A(\Lambda_k^{n,I} \times X)^\times \textit{ et } \mathrm{Pic}(A(\Delta_k^n \times X))) \to \mathrm{Pic}(A(\Lambda_k^{n,I} \times X)$$
*sont des isomorphismes.*

***Remarque 4.2.3***. — Les remarques précédentes permettent de montrer que, avec les hypothèses du lemme, l'application $\Lambda_k^{n,I} \times X \to \Delta_k^n \times X$ est une équivalence faible.

*Démonstration*

1) D'après la remarque 4.1.13, on sait déjà que le morphisme en question est une fibration. Il nous suffit donc détablir que le morphisme $\underline{\mathbf{GL}}(A(\Lambda_k^{n,I} \times X)) \to \underline{\mathbf{GL}}(A(X))$ est une fibration triviale. On procède alors par double récurrence sur l'entier $n$ d'abord, puis sur le cardinal de $\{0,\ldots,n\} - I$ ensuite. Lorsque $n$ est nul le résultat est trivial. Supposons $n \geq 1$. Le cardinal de $\{0,\ldots,n\} - I$ ne peut être nul. S'il vaut 1, le résultat est également trivial (la cofibration élémentaire s'identifiant à une coface).

On suppose donc que le cardinal de $\{0,\ldots,n\} - I$ est $\geq 2$. Soit $i_0 \in I$. Notons $J \subset \{0,\ldots,n-1\}$ l'image réciproque de $I$ par $d^{i_0} : \{0,\ldots,n-1\} \to \{0,\ldots,n\}$. Notons $I_0 \subset \{0,\ldots,n\}$ le complémentaire dans $I$ de $i_0$. On conclut facilement par récurrence à l'aide du carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^{n-1,J} & \xrightarrow{d^{i_0}} & \Lambda_k^{n,I_0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^{n-1} & \xrightarrow{d^{i_0}} & \Lambda_k^{n,I} \end{array}$$

considéré ci-dessus, qui induit un carré cartésien d'anneaux auquel on applique le cor 4.1.15 (utiliser aussi le théorème 4.1.10).

2) La démonstration du point 2) est tout à fait analogue à celle du point 1). □

***Lemme 4.2.4***. — *Le lemme 4.2.1 est vrai pour toute extension anodine fondamentale géométrique (cf. 2.2.8).*

*Démonstration.* — On reprend les notations et choix qui suivent la définition 2.2.7. La source de l'extension anodine fondamentale est donc la somme amalgammée $\Sigma$ du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} T_U \times_{T_X} T_Y & \to & E_U \times_{T_X} T_Y \\ \downarrow & & \\ T_U \times_{T_X} E_Y & & \end{array}$$

et son but le produit fibré $E := E_U \times_{T_X} E_Y$, l'espace total d'un fibré vectoriel sur $T_X$. Le fait que l'application simpliciale $\underline{\mathbf{GL}}(A(E)) \to \underline{\mathbf{GL}}(A(\Sigma))$ est une une fibration résulte de l'argument de la démonstration du lemme 4.1.12 (et du théorème 4.1.10).

Le fait que ce soit une équivalence faible et que l'homomorphisme $K_0(A(E)) \to K_0(A(\Sigma))$ un isomorphisme résulte maintenant de la comparaison entre la longue suite exacte d'excision déduite du lemme 4.1.3 et la longue suite exacte déduite du corollaire 4.1.15 appliqué au carré cartésien qui définit $A(\Sigma)$ (compte tenu du fait déjà signalé que $A(\Sigma)$ est $K_1$-régulier), de l'identification pour $A(E)$ et $A(T_X)$ entre $K$-théorie de Quillen et $K$-théorie de Karoubi-Villamayor et du fait que le morphisme $\underline{K}(E) \to \underline{K}(X)$ est une équivalence faible [**28**].

La démonstration du second point est en tous points analogue. □

*Démonstration du lemme 4.2.1.* — Soient $i : X \to Y$ une extension anodine fondamentale et $\{\iota_j : Z_j \to Z\}_{j\in\{1,\dots,n\}}$ une famille $k$-transverse d'immersions fermées entre $k$-schémas affines lisses. Toute extension anodine élémentaire est de la forme $([Zj], i >)$ (voir ce qui suit la définition 2.2.8) ; on établit le lemme par récurrence sur $n$. Pour $n = 0$, l'extension anodine $([Z_j], i)$ s'identifie à $\mathrm{Id}_Z \times i$. Si $i$ est une extension anodine fondamentale simpliciale, le lemme résulte dans ce cas du lemme 4.2.2. Si $i$ est une extension anodine fondamentale géométrique, on voit facilement que $\mathrm{Id}_Z \times i$ est également une extension anodine fondamentale et l'on conclut à l'aide du lemme 4.2.4.

On dira dans ce qui suit qu'une application $X \to Y$ a la propriété $K$ si le morphisme de groupes simpliciaux $\underline{\mathbf{GL}}(A(Y)) \to \underline{\mathbf{GL}}(A(X))$ est une fibration triviale et si le morphisme $K_0(A(Y)) \to K_0(A(X))$ est un isomorphisme. On observe que cette propriété est stable par image directe de $i$ si l'anneau $A(X)$ est $K_1$-régulier (utiliser le corollaire 4.1.15).

Supposons $n \geq 1$. Notons $S_{1,j\geq 2}$ la somme amalgammée

$$(S[Z_{1,j}, j \geq 2] \times Y) \amalg_{(S[Z_{1,j},j\geq 2]\times X)} (Z_1 \times X)$$

$S_{j\geq 2}$ la somme amalgammée

$$(S[Z_j, j \geq 2] \times Y) \amalg_{(S[Z_j,j\geq 2]\times X)} (Z \times X)$$

et $S_j$ la somme amalgammée

$$(S[Z_j] \times Y) \amalg_{(S[Z_j]\times X)} (Z \times X)$$

Dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Z_1 \times Y & \to & S_j & \to & Z \times Y \\ \uparrow & & \uparrow & \nearrow & \\ S_{1,j\geq 2} & \to & S_{j\geq 2} & & \end{array}$$

le carré de gauche est cocartésien, et le morphisme vertimathcal de gauche est la cofibration élémentaire associée à la famille $k$-transverse $\{Z_{1,j} \to Z_1\}_{j\in\{2,\dots,n\}}$. D'après le théorème 4.1.10 l'anneau

$$A((S[Z_{1,2},\dots,Z_{1,n}] \times Y) \amalg_{(S[Z_{1,2},\dots,Z_{1,n}]\times X)} (Z_1 \times X))$$

est $K_1$-régulier. L'hypothèse de récurrence (appliquée à la famille $k$-transverse $\{Z_{1,j} \to Z_1\}_{j\in\{2,\dots,n\}}$) et les remarques précédentes impliquent que la cofibration

$$(S[Z_2,\dots,Z_n] \times Y) \amalg_{(S[Z_2,\dots,Z_n]\times X)} (Z \times X) \\ \to (S[Z_1,\dots,Z_n] \times Y) \amalg_{(S[Z_1,\dots,Z_n]\times X)} (Z \times X)$$

a la propriété $K$.

De même, toujours par hypothèse de récurrence (appliquée cette fois à la famille $k$-transverse $\{Z_j \to Z\}_{j\in\{2,\dots,n\}}$) on voit que l'application en diagonale dans le diagramme a la propriété $K$.

On en déduit facilement que $([Z_j], i)$ a la propriété $K$ à l'aide du triangle commutatif de droite du diagramme ci-dessus, de la remarque 4.1.13 (et de ce qui précède).

En utilisant l'argument de la démonstration du lemme 4.1.7 on voit que pour toute application $X \to Y$, le fait que les homomorphismes $A(Y)^\times \to A(X)^\times$ et $\mathrm{Pic}(A(Y)) \to \mathrm{Pic}(A(X))$ sont des isomorphismes est impliqué par le fait que $i$ a la propriété $K$, ce qui achève la démonstration du lemme. □

### 4.2.2. Propriétés homotopiques du $\mathbf{GL}_n$-torseur canonique sur $\mathbf{Gr}_n$

Rappelons 2.1.8 que pour tout entier $n \geq 0$, on pose $V_n := \mathrm{colim}_r V_{n,r}$, que ce $k$-espace est muni d'une action à gauche de $\mathbf{GL}_n$ qui en fait un $\mathbf{GL}_n$-torseur de base la grassmanienne $\mathbf{Gr}_n$.

***Lemme 4.2.5***. — *Pour tout entier $n \geq 0$, l'application $V_n \to *$ est une fibration triviale.*

*Démonstration*. — Il s'agit d'établir que pour toute cofibration élémentaire $[\iota_\alpha] : S[\iota_\alpha] \to X$, $\{\iota_\alpha : X_\alpha \to X\}_\alpha$ désignant une famille finie $k$-transverse d'immersions fermées de but le $k$-schéma affine lisse $X$, et toute application $f : S[\iota_\alpha] \to V_n$ il existe une application $g : X \to V_n$ telle que $g \circ [\iota_\alpha] = f$. Soit $r$ un entier tel que $f$ se factorise *via* l'application $V_{n,r} \to V_n$. L'application $S[\iota_\alpha] \to V_{n,r}$ correspond à un morphisme $\mathrm{Spec}(\Pi[A(\iota_\alpha)]) \to V_{n,r}$ d'après le lemme B.4.4 ; puisque le morphisme de $k$-algèbres $A(X) \to \Pi[A(\iota_\alpha)]$ est surjectif et que son noyau est un $A(X)$-module de type fini (*cf.* 2.2.25), il suffit donc d'établir que pour tout épimorphisme de $k$-algèbres $B \to A$ dont le noyau $I$ est un $B$-module de type fini et tout épimorphisme de $A$-modules $\lambda : A^{n+r} \to A^n$ il existe un entier $\ell \geq 0$ et un épimorphisme de $B$-modules $B^{n+r+\ell} \to B^n$ tel que le composé $B^{n+r+\ell} \to B^n \to A^n$ est égal au composé de la projection $B^{n+r+\ell} \to B^{n+r}$, du morphisme $B^{n+r} \to A^{n+r}$ et de $\lambda$. Or, il existe un homomorphisme $B^{n+r} \to B^n$ qui fait commuter le diagramme évident. Le $B$-module $I^n$ noyau de l'épimorphisme de $B^n \to A^n$ étant de type fini, engendré par, disons, $\ell$ éléments, on peut étendre l'homomorphisme $B^{n+r} \to B^n$ en un épimorphisme $B^{n+r+\ell} \to B^n$ à l'aide de ces $\ell$ éléments, et l'on a gagné. □

***Théorème 4.2.6.*** — *La grassmanienne* Gr *et l'espace projectif infini* $\mathbf{P}^\infty$ *sont des $k$-espaces fibrants, le* $\mathbf{GL}$*-torseur canonique* $\Gamma : V \to \mathrm{Gr}$ *et le* $\mathbf{G}_m$*-torseur canonique* $\Lambda : \mathbf{A}^* \to \mathbf{P}^\infty$ *sont des fibrations (en particulier le groupe linéaire* $\mathbf{GL}$ *et le groupe multiplicatif* $\mathbf{G}_m$ *sont des $k$-espaces fibrants).*

*Démonstration.* — Fixons pour cette démonstration une extension anodine élémentaire $i : X \to Y$ « générique ».

Montrons tout d'abord que le groupe linéaire $\mathbf{GL}$ est un $k$-espace fibrant, autrement dit que toute application $X \to \mathbf{GL}$ s'étend à $Y$. Par définition, pour tout $k$-espace de présentation finie $Z$ le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_k}(Z, \mathbf{GL})$ s'identifie au groupe $\mathbf{GL}(A(Z))$. Il s'agit donc d'établir que l'homomorphisme de groupes $\mathbf{GL}(A(Y)) \to \mathbf{GL}(A(X))$ est surjectif. Cet homomorphisme induit une surjection sur les groupes de commutateurs puisque l'homomorphisme d'anneaux $A(Y) \to A(X)$ est surjectif d'après la proposition 2.2.25 (on a rappelé plus haut que pour tout anneau (commutatif) $R$, le sous-groupe $[\mathbf{GL}(R), \mathbf{GL}(R)]$ de $\mathbf{GL}(R)$ est égal au sous-groupe $E(R)$ engendré par les matrices élémentaires et un épimorphisme d'anneaux $R \to S$ induit donc un épimorphisme de groupes $E(R) \to E(S)$). On obtient l'affirmation en remarquant que, d'après les lemmes 4.1.11 et 4.2.1, puisque $A(X)$ et $A(Y)$ sont des anneaux $K_1$-réguliers, l'homomorphisme de groupes $\mathbf{GL}(A(Y)) \to \mathbf{GL}(A(X))$ induit un isomorphisme après abéliannisation.

De même, puisque pour tout $k$-espace $Z$ le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_k}(Z, \mathbf{G}_m)$ s'identifie naturellement au groupe $A(Z)^\times$, le lemme 4.2.1 implique immédiatement que $\mathbf{G}_m$ est un $k$-espace fibrant.

Montrons maintenant que le $\mathbf{GL}$-torseur $V \to \mathrm{Gr}$ est une fibration. Donnons nous un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \to & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & \mathrm{Gr} \end{array}$$

et montrons l'existence d'une application $Y \to V$ qui fait commuter le diagramme. Il existe des entiers $n$ et $r$ tels que le carré est induit par le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \to & V_{n,r} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & \mathbf{Gr}_{n,r} \end{array}$$

et il suffit d'établir l'existence d'un entier $N$ « grand » et d'une application $Y \to V_{N,r}$ qui fait commuter le diagramme évident.

L'application $Y \to \mathbf{Gr}_{n,r}$ correspond à un épimorphisme de $A(Y)$-modules

$$\gamma : A(Y)^{n+r} \to P,$$

avec $P$ localement libre de rang $n$, l'application $X \to V_{n,r}$ correspond à un épimorphisme de $A(X)$-modules

$$\phi : A(X)^{n+r} \to A(X)^n.$$

La commutativité du carré signifie que les deux épimorphismes $\phi$ et

$$\gamma \otimes_{A(Y)} A(X) : A(X)^{n+r} \to P \otimes_{A(Y)} A(X)$$

définissent les mêmes quotients (d'où un isomorphisme canonique

$$\phi : P \otimes_{A(Y)} A(X) \cong A(X)^n).$$

Puisque l'homomorphisme $K_0(A(Y)) \to K_0(A(X))$ est un isomorphisme d'après le lemme 4.2.1, le fait que le $A(X)$-module projectif de type fini $P \otimes_{A(Y)} A(X)$ est libre implique que le $A(Y)$-module $P$ est stablement libre. Il existe donc $n' \geq 0$ et un isomorphisme de $A(Y)$-modules $\psi : P \oplus A(Y)^{n'} \cong A(Y)^{n+n'}$ ; cet isomorphisme induit un isomorphisme $P \otimes_{A(Y)} A(X) \cong A(X)^{n+n'}$ qui détermine (à l'aide de $\phi$) un automorphisme de $A(X)^{n+n'}$, c'est à dire un élément $\alpha$ de $\mathbf{GL}_{n+n'}(A(X))$. Puisque l'homomorphisme $\mathbf{GL}(A(Y)) \to \mathbf{GL}(A(X))$ est surjectif (car $\mathbf{GL}$ est fibrant), il existe un entier $n''$ et un élément $\beta$ de $\mathbf{GL}_{n+n'+n''}(A(Y))$ qui relève $\alpha$. L'isomorphisme

$$\beta' := \beta^{-1} \circ (\psi \oplus A(Y)^{n''}) : P \oplus A(Y)^{n'+n''} \cong A(Y)^{n+n'+n''}$$

induit l'isomorphisme

$$(\phi \oplus A(X)^{n'+n''}) : (P \otimes_{A(Y)} A(X)) \oplus A(X)^{n'+n''} \cong A(X)^{n+n'+n''}.$$

On en déduit, en posant $N = n + n' + n''$, que le morphisme $Y \to V_{N,r}$ correspondant à l'épimorphisme de $A(Y)$-modules

$$A(Y)^{N+r} \to P \oplus A(Y)^{n'+n''} \cong A(Y)^N,$$

induit par $\beta'$, répond à la question.

Pour établir que le $\mathbf{G}_m$-torseur canonique $\mathbf{A}^* \to \mathbf{P}^\infty$ est une fibration, on procède de façon tout à fait analogue, en utilisant le lemme 4.2.1 et le fait que $\mathbf{G}_m$ est un $k$-espace fibrant.

Montrons maintenant que la grassmanienne Gr est un $k$-espace fibrant. Soit $f$ : $X \to$ Gr une application et montrons que $f$ s'étend à $Y$. Pour $n$ et $r$ grands, $f$ est induite par une application $X \to \mathbf{Gr}_{n,r}$. D'après le lemme B.4.4, une telle application correspond à un morphisme de $k$-schémas $f' : \mathrm{Spec}(A(X)) \to \mathbf{Gr}_{n,r}$ et il suffit d'établir qu'une telle application s'étend toujours à $Y$ quitte à laisser grandir $n$ et $r$. L'application $f'$ est déterminée par la donnée d'un épimorphisme de $A(X)$-modules $A(X)^{n+r} \to P$, avec $P$ localement libre de rang $n$. Puisque $i$ induit un isomorphisme $K_0(A(Y)) \cong K_0(A(X))$ (*cf.* 4.2.1) on voit qu'il existe un entier $n'$ tel que le $A(X)$-module $P \oplus A(X)^{n'}$ est isomorphe à la réduction d'un $A(Y)$-module projectif de type fini $P'$ de rang $n+n'$ par l'épimorphisme $A(Y) \to A(X)$. Puisque l'homomorphisme canonique de $A(Y)$-modules $P' \to P \oplus A(X)^{n'}$ est surjectif on en déduit l'existence d'un diagramme commutatif de $A(Y)$-modules :

$$\begin{array}{ccc} A(Y)^{n+n'+r} & \to & P' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A(X)^{n+n'+r} & \to & P \oplus A(X)^{n'} \end{array}$$

dans lequel l'homomorphisme $h : A(Y)^{n+n'+r} \to P'$ n'est pas forcément surjectif. Soient $y_1, \ldots, y_{r'}$ des générateurs du $A(Y)$-module noyau de l'épimorphisme $P' \to P \oplus A(X)^{n'}$ (ce noyau est de type fini car $A(Y)$ est un anneau noethérien) et $h' : A(Y)^{n+n'+r+r'} \to P'$ l'épimorphisme égal à $h$ sur les $n+n'+r$ premières coordonnées et l'homomorphisme $A(Y)^{r'} \to P'$ induit par les $y_i$ sur les $r'$ dernières. Alors le diagramme suivant de $A(Y)$-modules :

$$\begin{array}{ccc} A(Y)^{n+n'+r+r'} & \to & P' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A(X)^{n+n'+r+r'} & \to & P \oplus A(X)^{n'} \end{array}$$

dans lequel le morphisme $A(X)^{n+n'+r+r'} \to P \oplus A(X)^{n'}$ vaut l'épimorphisme

$$A(X)^{n+n'+r} \to P \oplus A(X)^{n'}$$

sur les $n+n'+r$ premières coordonnées et est nul sur les $r'$ dernières, est commutatif. Il détermine donc une extension de l'application $\mathrm{Spec}(A(X)) \to \mathbf{Gr}_{n+n',r+r'}$ composée de $f'$ et de l'inclusion $\mathbf{Gr}_{n,r} \to \mathbf{Gr}_{n+n',r+r'}$ à $Y$, d'où l'affirmation.

Pour établir que l'espace projectif infini est un $k$-espace fibrant, l'argument est tout à fait analogue (et laissé au lecteur). □

***Remarque 4.2.7***

1) Le lecteur remarquera que la démonstration du lemme 4.2.1 que nous avons donnée utilise de façon cachée la définition de la $K$-théorie supérieure de Quillen et ses propriétés, notamment le lemme 4.1.3.

On peut probablement établir le lemme 4.2.1 de façon plus élémentaire en utilisant le théorème 4.1.10 et en s'inspirant de [**10**].

2) *Fibrés vectoriels de rang n et «problème de Serre généralisé»*

Soit $n$ un entier $\geq 1$. L'auteur ignore si la grassmanienne $\mathbf{Gr}_n$ et le groupe linéaire $\mathbf{GL}_n$ sont des $k$-espaces fibrants, et si le $\mathbf{GL}_n$-torseur canonique sur $\mathbf{Gr}_n$ est une fibration en général. Nous venons de l'établir pour $n = 1$ et $n = \infty$.

La démonstration précédente met en évidence que si tel était le cas, alors pour toute extension anodine élémentaire $X \to Y$ l'application $\Phi_n(\operatorname{Spec} A(Y)) \to \Phi_n(\operatorname{Spec} A(X))$ serait bijective. Observons que cet énoncé contient en particulier l'énoncé suivant :

*pour toute $k$-algèbre lisse $A$ l'application $\Phi_n(A[X]) \to \Phi_n(A)$ est bijective.*

D'après Quillen **[29]**, cette affirmation est vraie lorsque A est un corps (c'est le «problème de Serre») et d'après **[20]** pour $A$ lisse sur un corps $k$. On peut donc s'attendre à ce que dans ce cas, le problème ci-dessus ait une réponse affirmative.

3) Comme dans la théorie de l'homotopique classique où l'espace projectif complexe infini est le classifiant du groupe multiplicatif $\mathbf{C}^\times$ et la grassmanienne complexe le classifiant du groupe (topologique) linéaire infini $\mathbf{GL}(\mathbf{C})$, on peut donc dire ici compte tenu du lemme 4.2.5 et du théorème 4.2.6 que le $k$-espace projectif infini est le classifiant du $k$-groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ et le $\mathbf{G}_m$-torseur canonique sur $\mathbf{P}^\infty$ le $\mathbf{G}_m$-torseur universel, et que la grassmanienne Gr est le classifiant du groupe linéaire $\mathbf{GL}$ et le $\mathbf{GL}$-torseur sur Gr le $\mathbf{GL}$-torseur universel, sans chercher pour l'instant à donner un sens précis à ces affirmations. Contentons nous de dire que nous allons montrer au prochain paragraphe comment utiliser ces objets pour classifier les fibrés vectoriels et les $\mathbf{GL}$-torseurs du point de vue de la théorie de l'homotopie.

### 4.2.3. Classification homotopique des fibrés vectoriels

4.2.3.1. *Composantes connexes.* — Soit $X$ un $k$-schéma lisse. On note $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes de $X$ : puisque $X$ est noethérien c'est un ensemble fini et puisque $X$ est régulier, ce sont aussi ses composantes irréductibles.

A tout ensemble fini $E$ on associe le $k$-schéma, que l'on note $E_k$ (ou encore $E$ s'il n'y a pas de confusions possibles), somme indéxée par l'ensemble $E$ de copies du $k$-schéma $k$ (on dit aussi que c'est le $k$-schéma «discret» associé à $E$). Le $k$-schéma $E_k$ est affine et lisse et le $k$-espace qu'il définit se note également $E_k$ (ou $E$). Si $E$ est un ensemble arbitraire, on note $E_k$ (ou $E$) le $k$-espace colimite filtrante des $F_k$, $F$ parcourant l'ensemble des parties finies de $E$. Pour tout $k$-schéma lisse $X$, l'application naturelle évidente $\operatorname{Hom}_{\mathcal{E}ns}(\pi_0(X), E) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}_k}(X, E_k)$ est bijective (utiliser le §B.4.3).

Pour tout $k$-espace $X$, on note $\pi_0(X)$ l'ensemble $\operatorname{colim}_{Y \to X \in \mathcal{C}_X} \pi_0(Y)$. Il est clair que le foncteur $\pi_0(-) : \mathcal{E}_k \to \mathcal{E}ns$ est l'adjoint à gauche du foncteur $\mathcal{E}ns \to \mathcal{E}_k, E \mapsto E_k$ (cela résulte facilement de ce qui précède). Il est facile d'établir (à l'aide du corollaire 2.2.27) que pour tout $k$-espace cofibrant de présentation finie $X$, l'ensemble $\pi_0(X)$ s'identifie à l'ensemble $\pi_0(\operatorname{Spec} A(X))$ (le lecteur remarquera que le schéma $\operatorname{Spec}(A(X))$ est noethérien et localement intègre, donc ses composantes connexes sont ses composantes irréductibles).

Pour tout groupe abélien $A$ notons

$$H^0(X;A) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_k}(X, A_k) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}ns}(\pi_0(X), A)$$

le groupe abélien des applications de $\pi_0(X)$ vers $A$.

***Lemme 4.2.8.*** — *Pour toute extension anodine $X \to Y$ l'application*

$$\pi_0(X) \to \pi_0(Y)$$

*est bijective. En conséquence, pour tout ensemble $E$ le $k$-espace $E_k$ est fibrant.*

*Démonstration.* — Puisque le foncteur $\pi_0(-)$ commute aux colimites, il suffit d'établir le lemme lorsque $X \to Y$ est une extension anodine élémentaire. D'après le lemme 4.2.1, l'homomorphisme $K_0(A(Y)) \to K_0(A(X))$ est un isomorphisme ; puisque le groupe

$$H^0(X;\mathbf{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}ns}(\pi_0(\mathrm{Spec}(A(X))), \mathbf{Z})$$

est naturellement facteur direct de $K_0(A(X))$ (§4.1.3) on en déduit bien que l'application $\pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ est bijective (bien sûr on peut donner de ce lemme des démonstrations plus élémentaires). □

***Remarque 4.2.9.*** — Le lecteur prendra garde de ne pas confondre $E_k$ avec le $k$-espace somme indéxée sur $E$ de copies de $*$. De façon générale, si $X$ et $Y$ sont deux $k$-schémas lisses, le $k$-espace $X \amalg_{\mathcal{E}_k} Y$ somme de $X$ et $Y$ n'est pas le $k$-espace associé au $k$-schéma $X \amalg_{\mathcal{S}_k} Y$ somme de $X$ et $Y$. L'application $X \amalg_{\mathcal{E}_k} Y \to X \amalg_{\mathcal{S}_k} Y$ est toutefois une équivalence faible (utiliser le théorème 3.1.1).

4.2.3.2. *Classification homotopique des fibrés vectoriels sur les $k$-schémas lisses*

***Lemme 4.2.10.*** — *Soient $X$ un $k$-schéma régulier et $T \to X$ un torseur sous un fibré vectoriel. Alors l'application naturelle $\underline{K}(X) \to \underline{K}(T)$ est une équivalence faible et les homomorphismes $A(X)^\times \to A(T)^\times$ et $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(T)$ des isomorphismes.*

*Démonstration.* — Remarquons que puisque le morphisme $T \to X$ est affine et lisse, $T$ est aussi un schéma régulier.

La première affirmation résulte de [**28**, §7.1, §Prop. 4.1].

La seconde se démontre en utilisant le corollaire 4.1.2 pour se ramener au cas où $X$ (et $T$) est affine, puis l'argument utilisé dans la démonstration du lemme 4.2.10. □

Soient $n$ et $r$ deux entiers $\geq 0$. Rappelons que l'on note $\gamma_{n,r}$ le fibré vectoriel de rang $n$ canonique sur la grassmanienne $\mathbf{Gr}_{n,r}$ dont le $\mathcal{O}\mathbf{Gr}_{n,r}$-module des germes de sections s'identifie au dual du $\mathcal{O}\mathbf{Gr}_{n,r}$-module localement libre de rang $n$ tautologique. L'élément $\tilde{\gamma}_{n,r} := [\gamma_{n,r}] - n\cdot 1$ de $K_0(\mathbf{Gr}_{n,r})$ appartient manifestement au sous-groupe $\tilde{K}_0(\mathbf{Gr}_{n,r})$. Si $n' \geq n$ et $r' \geq r$, la restriction à $\mathbf{Gr}_{n,r}$ du fibré vectoriel $\gamma_{n',r'}$ par l'immersion fermée canonique $\mathbf{Gr}_{n,r} \to \mathbf{Gr}_{n',r'}$ (que l'on obtient en combinant les morphismes du type $\iota_{n,r}$ et $\phi_{n,r}$ *cf.* 1.2) s'identifie à $\gamma_{n,r} \oplus (n'-n)\cdot\Theta^1$, si bien que l'image de $\tilde{\gamma}_{n',r'}$ par l'homomorphisme $\tilde{K}_0(\mathbf{Gr}_{n',r'}) \to \tilde{K}_0(\mathbf{Gr}_{n,r})$ est égale à $\tilde{\gamma}_{n,r}$.

De même si $n' \geq n$, alors la restriction à $\mathbf{P}^n$ du fibré vectoriel de rang un canonique $\lambda_{n'}$ par l'immersion fermée $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^{n'}$ s'identifie à $\lambda_n$.

4.2.3.3. Soit $X$ un $k$-schéma lisse. Les applications naturelles *image réciproque de* $\tilde{\gamma}_{n,r}$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_k}(X, \mathbf{Gr}_{n,r}) \to \underline{K}_0(X)$ sont compatibles entre elles et induisent une application naturelle

$$\mathrm{colim}_{n,r} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_k}(X, \mathbf{Gr}_{n,r}) \to \underline{K}_0(X);$$

l'application naturelle

$$\mathrm{colim}_{n,r} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_k}(X, \mathbf{Gr}_{n,r}) \to \mathrm{Hom}_k(X, \mathrm{Gr})$$

étant bijective (corollaire B.4.3) on en déduit une application naturelle

$$\mathrm{Hom}_k(X, \mathrm{Gr}) \to \underline{K}_0(X).$$

Notons $\mathbf{Z}$ le $k$-espace associé à l'ensemble $Z$ ; bien sûr c'est un $k$-groupe abélien. Puisque le groupe abélien $H^0(X; \mathbf{Z})$ défini au §4.1.3 s'identifie au groupe $\mathrm{Hom}_k(X, \mathbf{Z})$, l'application naturelle précédente induit une application naturelle

$$\mathrm{Hom}_k(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \to K_0(X).$$

Le lecteur notera que le $k$-espace $\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}$ est fibrant puisque c'est le produit du $k$-espace fibrant $\mathbf{Z}$ (utiliser lemme 4.2.8) et du $k$-espace fibrant Gr (*cf.* théorème 4.2.6).

De même, les applications naturelles *image réciproque de* $\lambda_n$,

$$\mathrm{Hom}_k(X, \mathbf{P}^n) \to \mathrm{Pic}(X)$$

induisent une application naturelle

$$\mathrm{Hom}_k(X, \mathbf{P}^\infty) \to \mathrm{Pic}\, X.$$

***Proposition 4.2.11.*** — *Soit $X$ un $k$-schéma lisse.*

*1) L'application naturelle* $\mathrm{Hom}_k(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \to K_0(X)$ *se factorise par la relation d'homotopie et a pour image l'ensemble des éléments $\gamma$ de $K_0(X)$ pour lesquels il existe une fonction localement constante $r : X \to \mathbf{Z}$ telle que $\gamma + r \cdot 1$ est la classe d'un fibré vectoriel de rang constant dont le dual du $\mathcal{O}X$-module des germes de sections est engendré par ses sections. Lorsque $X$ est affine, l'application naturelle* $\pi(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \to K_0(X)$ *induite est une bijection.*

*2) L'application naturelle* $\mathrm{Hom}_k(X, \mathbf{P}^\infty) \to \mathrm{Pic}(X)$ *se factorise par la relation d'homotopie. L'application naturelle* $\pi(X, \mathbf{P}^\infty) \to \mathrm{Pic}(X)$ *induite est une injection dont l'image est l'ensemble des classes de fibrés vectoriels de rang un dont le dual du $\mathcal{O}X$-module (inversible) des germes de sections est engendré par ses sections. Lorsque $X$ est affine, cette application est donc bijective.*

*Démonstration*

1) La première affirmation résulte formellement du fait que $X$ est un schéma régulier (puisque lisse sur l'anneau régulier $k$) et donc que l'homomorphisme $K_0(X) \to K_0(X \times \mathbf{A}^1)$ est un isomorphisme (lemme 4.2.10).

Soit $X \to \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}$ une application produit de l'application localement constante $r : X \to \mathbf{Z}$, et de l'application $f : X \to \mathrm{Gr}$ ; soient $n$ et $r$ deux entiers tels que $f$ est composée de l'application $\mathbf{Gr}_{n,r} \to \mathrm{Gr}$ et d'une application $g : X \to \mathbf{Gr}_{n,r}$ associée au $\mathcal{O}X$-module localement libre de rang $n$, $\mathcal{M}$, engendré par ses sections $x_1, \ldots, x_{n+r}$, et $E$ le fibré vectoriel $g * (\gamma_{n,r})$. Il est clair que l'image dans le groupe $K_0(X)$ de l'application $X \to \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}$ par l'application naturelle $\mathrm{Hom}_k(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \to K_0(X)$ est égal à $[E] + (r - n) \cdot 1$, ce qui permet de décrire comme annoncé l'image de cette application.

Il reste à établir que lorsque $X$ est affine, l'application $\pi(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \to K_0(X)$ est bijective. La surjectivité résulte alors du fait que tout $\mathcal{O}X$-module localement libre de type fini est engendré par ses sections : en effet, pour tout fibré vectoriel $E$ et tout entier $n \geq 0$ qui majore l'application $\mathrm{rg}(E)$ le fibré vectoriel $E \oplus (n - \mathrm{rg}(E)) \cdot 1$ est de rang constant et $[E]$ appartient bien à l'image de l'application $\pi(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \to K_0(X)$ d'après ce qui précède.

Pour établir l'injectivité il suffit d'établir que l'application $\pi(X, \mathrm{Gr}) \to \tilde{K}_0(X)$ est injective (puisque l'application $\pi(X, \mathbf{Z}) \to H^0(X; \mathbf{Z})$ est bijective). Soient $f$ et $g$ deux applications $X \to \mathrm{Gr}$ ayant même image dans $\tilde{K}_0(X)$. Soient $n$, $r$ des entiers suffisament grands pour que $f$ et $g$ se factorisent toutes deux par $\mathbf{Gr}_{n,r}$ ; $f$ (resp. $g$) est donc déterminée par un épimorphisme $A(X)^{n+r} \to \mathcal{E}_f$ (resp. $A(X)^{n+r} \to \mathcal{E}_g$) de $A(X)$-modules avec $\mathcal{E}_f$ (resp. $\mathcal{E}_g$) localement libre de rang $n$. On sait bien (voir par exemple [**24**]) que l'égalité $f^*([\gamma_{n,r}]) - n \cdot 1 = g^*([[\gamma_{n,r}]) - n \cdot 1$ dans $\tilde{K}_0(X)$ signifie qu'il existe un entier $N$ assez grand et un isomorphisme de $A(X)$-modules entre $\mathcal{E}_f \oplus A(X)^N$ et $\mathcal{E}_g \oplus A(X)^N$. Quitte à remplacer $n$ par $n + N$, $\mathcal{E}_f$ (resp. $\mathcal{E}_g$) par $\mathcal{E}_f \oplus A(X)^N$ (resp. $\mathcal{E}_g \oplus A(X)^N$) on peut donc supposer qu'il existe un isomorphisme de $A(X)$-modules entre $\mathcal{E}_f$ et $\mathcal{E}_g$. Il suffit maintenant d'établir l'affirmation suivante : soient $\mathcal{E}$ un $A(X)$-module localement libre de rang $n$ sur $X$, $x_1, \ldots, x_{n+r}$ des éléments de $\mathcal{E}$ tels que $x_2, \ldots, x_{n+r}$ engendrent $\mathcal{E}$. Alors les deux applications $f, g : X \to \mathbf{Gr}_{n,r}$ correspondant aux épimorphismes $A(X)^{n+r} \to \mathcal{E}$ induits respectivement par les $n + r$ éléments $0, x_2, \ldots, x_n$ et les $n + r$ éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont homotopes. Ce résultat implique l'injectivité et plus précisément que toutes les applications $h : X \to \mathbf{Gr}_n = \mathrm{colim}_r\, \mathbf{Gr}_{n,r}$ telles que $h^*(\gamma_n)$ est isomorphe à $\mathcal{E}$ sont homotopes entre elles : en effet se donner un tel $h$ revient à se donner des sections $y_1, y_2, \ldots, y_m$ qui engendrent $\mathcal{E}$, et rajouter à cette liste une section ne change pas la classe d'homotopie de $h$.

Il nous reste à construire l'homotopie souhaitée. Notons $\mathcal{E}[T]$ le $A(X)[T]$-module localement libre de rang $n$ déduit de $\mathcal{E}$ par l'extension des scalaires $A(X) \to A(X)[T]$, $x'_2, \ldots, x'_{n+r}$ les éléments de $\mathcal{E}[T]$ induits respectivement par $x_2, \ldots, x_{n+r}$ et $x'_1 := T \cdot x_1 \in \mathcal{E}[T]$. Il est clair que les éléments $x'_2, \ldots, x'_{n+r}$ engendrent $\mathcal{E}[T]$ et que le morphisme $X \times \mathbf{A}^1 \to \mathbf{Gr}_{n,r}$ déterminé par les $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+r}$ réalise une homotopie de $f$ à $g$.

La démonstration du point 2), tout à fait analogue, est laissée au lecteur. $\square$

***Corollaire 4.2.12***. — *Soit $X$ un $k$-schéma lisse. Alors les applications naturelles*

$$\pi(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \to K_0(X) \quad et \quad \pi(X, \mathbf{P}^\infty) \to \mathrm{Pic}(X)$$

*« induisent » respectivement des bijections naturelles :*

$$[X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}] \cong K_0(X) \quad et \quad [X, \mathbf{P}^\infty] \cong \mathrm{Pic}(X).$$

*Démonstration*. — Lorsque $X$ est affine, l'application naturelle

$$\pi(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \to [X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}]$$

est bijective puisque $X$ est cofibrant et $\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}$ fibrant d'après le théorème 4.2.6 et le lemme 4.2.8 (tout produit de $k$-espaces fibrants est fibrant). La proposition 4.2.11 permet donc, pour $X$ affine, de définir une bijection naturelle $[X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}] \cong K_0(X)$. Pour $X$ arbitraire, il existe une unique bijection naturelle $[X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}] \cong K_0(X)$ qui coïncide avec la précédente pour $X$ affine. En effet, d'après le théorème B.4.1 il existe un torseur sous un fibré vectoriel $T \to X$ avec $T$ un $k$-schéma affine lisse. L'application $[X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}] \to [T, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}]$ est donc bijective puisque l'application $T \to X$ est une équivalence faible et l'affirmation résulte donc du lemme 4.2.10.

Le raisonnement est analogue pour définir la bijection naturelle $[X, \mathbf{P}^\infty] \cong \mathrm{Pic}(X)$. □

***Remarque 4.2.13***. — Le même raisonnement fournit, pour tout $X$ lisse sur $k$ des bijections naturelles $[X, \mathbf{G}_m] \cong A(X)^\times$ et $[X, \mathbf{GL}] \cong K_1(X)$ puisque les $k$-espaces $\mathbf{G}_m$ et $\mathbf{GL}$ sont fibrants d'après le théorème 4.2.6 (noter que pour toute $k$-algèbre lisse $R$, le groupe $K_1(R)$ est naturellement isomorphe au groupe $KV_1(R)$ qui s'identifie par définition au groupe $\pi(\mathrm{Spec}(R), \mathbf{GL})$).

4.2.3.4. *Fibrés vectoriels et $\mathbf{GL}_n$-torseurs sur les $k$-espaces cofibrants*. — Soient $X$ un $k$-espace cofibrant de présentation finie 2.2.31, $n$ un entier $\geq 0$ et $\xi$ un fibré vectoriel de rang $n$ sur $X$. On note $M(\xi)$ le $A(X)$-module des sections de $\xi$, autrement dit le $A(X)$-module $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_k/X}(X, E(\xi))$.

***Lemme 4.2.14***. — *Soient $X$ un $k$-espace cofibrant de présentation finie, $n$ un entier $\geq 0$ et $\xi$ un fibré vectoriel de rang $n$ sur $X$. Alors le $A(X)$-module $M(\xi)$ est localement libre de rang $n$. De plus l'application $\Phi_n(X) \to \Phi_n(\mathrm{Spec}(A(X)))$ qui envoie la classe de $\xi$ sur la classe du fibré vectoriel sur* $\mathrm{Spec}(A(X))$ *dont le $A(X)$-module des sections est $M(\xi)$ est bijective.*

*Démonstration*. — Soit $\{Z_\alpha \to Z\}_{\alpha \in I}$ une famille $k$-transverse d'immersions fermées avec $Z$ affine lisse sur $k$. On établit facilement par récurrence sur le cardinal de $I$, à l'aide de **[24]** et de la proposition 2.2.25, que pour tout fibré vectoriel $\xi$ sur $S[Z_\alpha]$ le $A(S[Z_\alpha])$-module $M(\xi)$ est localement libre de rang $n$. A l'aide du lemme A.3.16, on se ramène par récurrence à l'affirmation suivante :

*soient $X \to Y$ une image directe d'une somme finie de cofibrations élémentaires et $\xi$ un fibré vectoriel de rang $n$ sur $Y$ ; si $M(\xi|_X)$ est un $A(X)$-module localement libre de rang $n$, $M(\xi)$ est un $A(Y)$-module localement libre de rang $n$.*

Cette affirmation résulte immédiatement du point 3) de la proposition 2.2.25, de ce qui a été vu ci-dessus et, à nouveau, des techniques de **[24]**.

L'application $\Phi_n(\mathrm{Spec}(A(X))) \to \Phi_n(X)$ qui associe à la classe du fibré vectoriel $\xi$ sur $\mathrm{Spec}(A(X))$ la classe du fibré vectoriel image réciproque du fibré vectoriel $\xi$ sur $\mathrm{Spec}(A(X))$ par l'application canonique $X \to \mathrm{Spec}(A(X))$ est manifestement inverse de l'application $\Phi_n(X) \to \Phi_n(\mathrm{Spec}(A(X)))$ d'où le lemme. □

On définit une application naturelle $\mathrm{Hom}_k(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \times K_0(A(X))$ comme suit. On a déja remarqué ci-dessus que $\mathrm{Spec}(A(X))$ est noethérien localement intègre et que l'ensemble $\pi_0(X)$ s'identifie à l'ensemble $\pi_0(\mathrm{Spec}(A(X)))$ si bien qu'il suffit (d'après la discussion du §4.1.3) de définir une application naturelle $\mathrm{Hom}_k(X, \mathrm{Gr}) \to \tilde{K}_0(A(X))$ ; celle-ci se définit de façon évidente en utilisant le fait (corollaire B.4.5) que pour tous $n$ et $r$ l'application naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_k}(\mathrm{Spec}(A(X)), \mathbf{Gr}_{n,r}) \to \mathrm{Hom}_k(X, \mathbf{Gr}_{n,r})$ est bijective. On définit de la même manière une application naturelle $\mathrm{Hom}_k(X, \mathbf{P}^\infty) \to \mathrm{Pic}(A(X))$.

***Proposition 4.2.15***. — *Soit $X$ un $k$-espace cofibrant de présentation finie.*

1. *L'anneau $A(X)$ est $K_1$ (et donc $K_0$ et $\times - \mathrm{Pic}$) régulier;*
2. *l'application naturelle $\mathrm{Hom}_k(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \to K_0(A(X))$ se factorise par la relation d'homotopie et induit une bijection naturelle*
$$\pi(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \cong K_0(A(X))$$
3. *l'application naturelle $\mathrm{Hom}_k(X, \mathbf{P}^\infty) \to \mathrm{Pic}(A(X))$ se factorise par la relation d'homotopie et induit une bijection naturelle*
$$\pi(X, \mathbf{P}^\infty) \cong \mathrm{Pic}(A(X))$$

*Démonstration*

1) Si $\{Y_\alpha \to Y\}_{\alpha \in \{1,\ldots,n\}}$ est une famille $k$-transverse d'immersions fermées avec $Y$ affine et lisse sur $k$, on sait, d'après le théorème 4.1.10, que l'anneau $A(S[Y_\alpha])$ est $K_1$-régulier, $K_0$-régulier et $\times - \mathrm{Pic}$-régulier.

D'après A.3.16, il existe une suite finie
$$i_0 : \varnothing = X_0 \to X_1,\ i_1 : X_1 \to X_2, \ldots,\ i_n : X_n \to X_{n+1}$$
d'applications chacune image directe d'une somme finie de cofibrations élémentaires, telles que $X$ est rétracte de $X_{n+1}$. Il suffit donc d'établir par récurrence sur $j$ que chacun des anneaux $A(X_j)$ est $K_0$-régulier et $\times - \mathrm{Pic}$-régulier, ce qui résulte aisément

du fait suivant. Pour tout carré cocartésien de $k$-espaces :

$$\begin{array}{ccc} X' & \to & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X'' & \to & Y'' \end{array}$$

dans lequel l'application $X' \to Y'$ est une cofibration élémentaire et l'anneau $A(X'')$ est $K_0$-régulier et $\times -$ Pic-régulier, alors l'anneau $A(Y'')$ est $\times -$ Pic-régulier.

Pour établir cette affirmation, on compare les suites exactes fournies par le lemme 4.1.14 appliqué aux carrés cartésiens d'anneaux suivants (compte tenu, d'après ce qui précède, du fait que l'anneau $A(X')$ est $K_1$-régulier) :

$$\begin{array}{ccc} A(Y'')[T_1,\dots,T_m] & \to & A(X'')[T_1,\dots,T_m] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A(Y')[T_1,\dots,T_m] & \to & A(X')[T_1,\dots,T_m] \end{array}$$

2) La première affirmation du point 2) résulte du fait que l'anneau $A(X)$ est $K_0$-régulier (*cf.* le point 1). La surjectivité de l'application $\pi(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \to K_0(A(X))$ résulte facilement du fait que tout fibré vectoriel de rang constant sur $\mathrm{Spec}(A(X))$ est induit par un morphisme de $k$-schémas $\mathrm{Spec}(A(X)) \to \mathbf{Gr}_{n,r}$ pour $n$ et $r$ grands. Enfin l'injectivité s'établit comme dans la démonstration du point 1) de la proposition 4.2.11. La démonstration du point 3) est analogue à celle du point 2) et laissée au lecteur. □

***Remarque 4.2.16***

1) L'auteur ignore si pour $X$ un $k$-espace cofibrant de présentation finie, l'anneau $A(X)$ est $K_1$-régulier (bien qu'il le soit dans certains cas d'après le théorème 4.1.10).

2) On en déduit pour tout $k$-espace $X$ cofibrant de présentation finie que l'ensemble $[X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}]$ (qui s'identifie à $\pi(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})$) est naturellement isomorphe au groupe $K_0(A(X))$ et de même que l'ensemble l'ensemble $[X, \mathbf{P}^\infty]$ s'identifie naturellement au groupe $\mathrm{Pic}(A(X))$.

3) Remarquons que l'on a établi au passage que l'ensemble $[X, \mathbf{GL}]$ (resp. $[X, \mathbf{G}_m]$) s'identifie naturellement au groupe $KV_1(A(X))$ (resp. $A(X)^\times$).

4) Rappelons que pour tout $k$-espace $X$ le lemme 2.1.7 fournit une bijection naturelle $\Phi_{\mathbf{GL}_n}(X) \cong \Phi_n(X)$ pour tout $n \geq 0$; celles-ci induisent donc une bijection naturelle $\mathrm{colim}_n\, \Phi_{\mathbf{GL}_n}(X) \cong \mathrm{colim}_n\, \Phi_n(X)$. D'après le lemme 4.2.14 et la discussion du §4.1.3, si $X$ est un $k$-espace cofibrant de présentation finie, on dispose d'une bijection naturelle $\mathrm{colim}_n\, \Phi_n(X) \cong \tilde{K}_0(A(X))$. On obtient ainsi, pour un tel $X$, une bijection naturelle $\mathrm{colim}_n\, \Phi_{\mathbf{GL}_n}(X) \cong \tilde{K}_0(A(X))$. Lorsque $X$ est un $k$-schéma affine lisse $\mathrm{colim}_n\, \Phi_{\mathbf{GL}_n}(X)$ s'identifie (par définition) à $\Phi_{\mathbf{GL}}(X)$. On peut montrer que pour tout $k$-espace cofibrant de présentation finie $X$ l'ensemble $\mathrm{colim}_n\, \Phi_{\mathbf{GL}_n}(X)$ s'identifie à $\Phi_{\mathbf{GL}}(X)$. On dispose donc pour un tel $X$ d'une bijection naturelle

$$\Phi_{\mathbf{GL}}(X) \cong \tilde{K}_0(A(X))$$

5) On peut également montrer que pour tout $k$-espace cofibrant $X$. L'application naturelle $\mathrm{Hom}_k(X, \mathrm{Gr}) \to \Phi_{\mathbf{GL}}(X)$ qui à toute application $f$ associe (la classe d'isomorphisme de) $f*(\Gamma)$ se factorise par la relation d'homotopie et induit une bijection :

$$[X, \mathrm{Gr}] \cong \Phi_{\mathbf{GL}}(X)$$

## 4.3. $K$-théorie algébrique supérieure et périodicité

**4.3.1. Structure de $H$-groupe sur** Gr **et $\mathbf{P}^\infty$.** — Pour tout schéma régulier $X$ et tout entier $n \geq 0$ l'homomorphisme évident

$$\mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbf{Z} \to \mathrm{Pic}(\mathbf{P}^n \times X)$$

(qui envoie l'élément 1 de $\mathbf{Z}$ sur la classe du fibré inversible canonique $E(1)$) est un isomorphisme ; voir par exemple [**17**, Ex. II.7.9]. En appliquant cette propriété à $X := \mathbf{P}^m$, on voit que pour toute paire d'entiers positifs $(n, m)$ l'homomorphisme

$$\mathrm{Pic}(k) \oplus \mathbf{Z}^2 \to \mathrm{Pic}(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m)$$

est un isomorphisme. En particulier, pour $n' \geq n$ et $m' \geq m$ les homomorphismes naturels

$$\mathrm{Pic}(\mathbf{P}^{n'} \times \mathbf{P}^{m'}) \to \mathrm{Pic}(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m)$$

sont des isomorphismes.

Remarquons ensuite que l'application évidente $\mathrm{hocolim}'_n \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^\infty$ est une équivalence faible. En effet, notons $\mathbf{P}^n_a$ le $k$-schéma $\mathbf{P}_a(\mathcal{O}k^{n+1})$ de l'exemple 2.1.12 ; c'est un $k$-schéma affine lisse. Le morphisme évident $\mathbf{P}^n_a \to \mathbf{P}^n$ est un torseur sous un fibré vectoriel donc une fibration triviale (corollaire 2.2.30) ; il en est donc de même pour l'application $\mathrm{colim}_n \mathbf{P}^n_a \to \mathbf{P}^\infty$. Mais puisque les morphismes $\mathbf{P}^n_a \to \mathbf{P}^{n+1}_a$ sont des immersions fermées donc des cofibrations élémentaires, il résulte du §A.3.2 que l'application évidente $\mathrm{hocolim}'_n \mathbf{P}^n_a \to \mathrm{colim}_n \mathbf{P}^n_a$ est une équivalence faible, ce qui permet de conclure.

D'après le corollaire 4.2.12, pour tout $k$-schéma lisse $X$, l'ensemble $[X, \mathbf{P}^\infty]$ s'identifie naturellement à $\mathrm{Pic}(X)$ et porte donc une structure naturelle de groupe abélien. De la suite exacte de Milnor (corollaire A.3.11), du fait que le $k$-espace $\mathbf{P}^\infty$ est faiblement équivalent à la colimite homotopique des $\mathbf{P}^n$ et des calculs précédemment rappelés on déduit de façon standard une structure de groupe abélien sur $\mathbf{P}^\infty$ dans la catégorie $h(\mathcal{E}_k)$ (ou une structure de $H$-groupe). Autrement dit on dispose de $h(\mathcal{E}_k)$-morphismes $\mu : \mathbf{P}^\infty \times \mathbf{P}^\infty \to \mathbf{P}^\infty$ (multiplication), $\eta : * \to \mathbf{P}^\infty$ (élément neutre) et $\chi : \mathbf{P}^\infty \to \mathbf{P}^\infty$ (inverse) vérifiant les axiomes habituels.

On peut faire un numéro analogue avec les grassmaniennes en utilisant cette fois, pour $X$ un $k$-schéma lisse, la structure d'anneau commutatif (sans unité) du noyau $\tilde{K}_0(X) \cong [X, \mathrm{Gr}]$ de l'homomorphisme d'anneaux commutatifs unitaires

$$\mathrm{rg} : K_0(X) \to H^0(X; \mathbf{Z}).$$

On utilise alors le fait que, pour $n' \geq n$, $r' \geq r$, $m' \geq m$ et $s' \geq s$, les homomorphismes

$$\tilde{K}_0(\mathbf{Gr}_{n',r'} \times \mathbf{Gr}_{m',s'}) \to \tilde{K}_0(\mathbf{Gr}_{n,r} \times \mathbf{Gr}_{m,s})$$

sont surjectifs (à l'aide du calcul explicite des groupes $\tilde{K}_0(\mathbf{Gr}_{n,r} \times \mathbf{Gr}_{m,s})$ que l'on trouvera dans [**3**, §VI.4]). On en déduit une structure d'anneau commutatif sur la grassmanienne Gr au sens suivant : on dispose de $h(\mathcal{E}_k)$-morphismes $\sigma : \mathrm{Gr} \times \mathrm{Gr} \to \mathrm{Gr}$ (somme), $0 : * \to \mathrm{Gr}$ (élément neutre), $\chi : \mathrm{Gr} \to \mathrm{Gr}$ (inverse), $\mu : \mathrm{Gr} \times \mathrm{Gr} \to \mathrm{Gr}$ (produit) vérifiant les axiomes habituels.

Bien sûr de façon analogue le $k$-espace $\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}$ possède une structure naturelle d'anneau commutatif unitaire dans $h(\mathcal{E}_k)$.

**4.3.2. $K$-théorie algébrique supérieure.** — Rappelons que l'on note $h_*(\mathcal{E}_k)$ la catégorie homotopique des $k$-espaces pointés, $[X, Y]_*$ l'ensemble pointé des $h_*(\mathcal{E}_k)$-morphismes entre les deux $k$-espaces pointés $X$ et $Y$, et

$$\Sigma : h_*(\mathcal{E}_k) \to h_*(\mathcal{E}_k), X \mapsto X \wedge^L S^1.$$

Pour tout $k$-espace $X$ et tout $k$-espace pointé $Y$ il est clair que l'ensemble $[X, Y]$ s'identifie naturellement à l'ensemble $[X_+, Y]_*$ (c'est évident pour $X$ cofibrant et $Y$ fibrant puis on utilise le lemme 2.2.16).

***Remarque 4.3.1***. — Soient $X$ un $k$-espace pointé cofibrant et $Y$ un $k$-espace pointé fibrant. L'ensemble simplicial pointé $\mathbf{hom}_k(X, Y)_*$ est la fibre de l'application canonique (évaluation au point base) $\mathbf{hom}_k(X, Y) \to \mathbf{hom}_k(*, Y)$ — qui est d'ailleurs une fibration. On en déduit une suite exacte (au sens habituel) d'ensembles pointés et de groupes :

$$\pi_1(\mathbf{hom}_k(X, Y)) \to \pi_1(\mathbf{hom}_k(*, Y)) \to [X, Y]_* \to [X, Y] \to [*, Y]$$

L'application canonique $[X, Y]_* \to [X, Y]$ est donc surjective lorsque l'ensemble $[*, Y]$ est réduit à un élément et injective si $Y$ est un groupe de la catégorie $h_*(\mathcal{E}_k)$. La première affirmation est claire et la seconde résulte du fait que la suite ci-dessus est alors une suite exacte de groupes et que l'homomorphisme

$$\pi_1(\mathbf{hom}_k(X, Y)) \to \pi_1(\mathbf{hom}_k(*, Y))$$

admet une section (induite par l'application $X \to *$). Par exemple le groupe $[\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_m]$ s'identifie au groupe $k^\times \times \mathbf{Z}$ (utiliser le fait que $\mathbf{G}_m$ est cofibrant et fibrant d'après le théorème 4.2.6) et le groupe $[\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_m]_*$ s'identifie au sous-groupe $\mathbf{Z}$.

On prendra garde que l'ensemble $[*, Y]$ ne s'identifie pas en général à l'ensemble $\pi_0(Y)$ ; par exemple, l'ensemble $[*, \mathbf{G}_m]$ s'identifie au groupe des unités de l'anneau $k$ alors que $\pi_0(\mathbf{G}_m)$ est égal à l'ensemble $\pi_0(k)$ (des idéaux premiers minimaux de $k$).

Soit $X$ un $k$-schéma lisse. D'après le corollaire 4.2.12, l'ensemble $[X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}]$ s'identifie naturellement à l'ensemble $K_0(X)$. Pointons la droite projective $\mathbf{P}^1$ par le morphisme $* \to P^1$ correspondant à l'épimorphisme de $\mathcal{O}k$-modules somme $\mathcal{O}k \oplus \mathcal{O}k \to$

$\mathcal{O}k$. Les grassmanniennes deviennent ainsi toutes pointées et donc il en est de même pour la grassmanienne infinie. On pointe donc le $k$-espace fibrant $\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}$ de façon évidente et d'après ce qui précède, l'ensemble $[X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}]$ s'identifie naturellement à l'ensemble $[X_+, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}]_*$ ; on définit ainsi une bijection naturelle $K_0(X) \to [X_+, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}]_*$.

***Définition 4.3.2***. — Pour tout entier $n \geq 0$ et tout $k$-espace pointé $X$ on note $\tilde{K}_n(X)$ le groupe abélien :

$$[\Sigma^n(X), \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}]_*$$

et on l'appelle le $n$-ème groupe de $K$-théorie de $X$. Pour tout $k$-espace $Y$, on note $K_n(Y)$ le groupe abélien $\tilde{K}_n(Y+)$ que l'on appelle alors le $n$-ème groupe de $K$-théorie de $Y$.

***Remarque 4.3.3***. — Si $X$ est un $k$-espace cofibrant, le groupe abélien

$$[\Sigma^n(X+), \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}]_*$$

est le $n$-ème groupe d'homotopie de l'ensemble simplicial pointé

$$\mathbf{hom}_k(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}).$$

A l'aide du théorème 4.2.6, on voit que l'application simpliciale pointée

$$\mathbf{hom}_k(X, V) \to \mathbf{hom}_k(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})$$

est une fibration principale sous le groupe simplicial $\mathbf{hom}_k(X, \mathbf{GL})$ ; de plus

$$\mathbf{hom}_k(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})$$

est fibrant et $\mathbf{hom}_k(X, V)$ contractile (d'après le lemme 4.2.5). Il en résulte que pour $n \geq 1$ le groupe abélien $K_n(X)$ s'identifie naturellement au $(n-1)$-ème groupe d'homotopie du groupe simplicial $\mathbf{hom}_k(X, \mathbf{GL})$.

Lorsque $X$ est de présentation finie, ce groupe simplicial s'identifie au groupe simplicial $\underline{\mathbf{GL}}(A(X))$ du §4.1.4. Ainsi, pour $n \geq 1$ le groupe $K_n(X)$ s'identifie naturellement au groupe $KV_n(A(X))$ (également pour $n = 0$ d'après la proposition 4.2.15).

Lorsque $X$ est un $k$-schéma lisse, il résulte de la discussion précédente, du lemme 4.2.10 et du fait que pour tout anneau noethérien régulier la $K$-théorie de Karoubi-Villamayor coïncide avec celle de Quillen, que pour tout entier $n \geq 0$ le groupe $K_n(X)$ s'identifie naturellement au $n$-ème groupe de $K$-théorie algébrique $K_n(X)$ défini par Quillen.

Soit $X$ un $k$-espace pointé cofibrant. D'après la remarque 4.3.1, on dispose d'une suite exacte courte scindée naturelle

$$0 \to \tilde{K}_0(X) \to K_0(X) \to K_0(k) \to 0,$$

où l'on note $K_0(X)$ le 0-ème groupe de $K$-théorie du $k$-espace sous-jacent à $X$. En particulier, l'ensemble $\tilde{K}_0(X)$ porte une structure naturelle d'anneau commutatif (sans unité) et il en est donc de même pour l'objet $\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}$ de $h_*(\mathcal{E}_k)$. De même, puisque l'ensemble pointé $[X, \mathrm{Gr}]_*$ est le noyau de l'homomorphisme

$$\tilde{K}_0(X) \cong [X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}]_* \to [X, Z]_*,$$

le $k$-espace pointé Gr porte une structure d'anneau commutatif dans la catégorie $h_*(\mathcal{E}_k)$.

On peut remarquer que le $h_*(\mathcal{E}_k)$-morphisme produit $\mathrm{Gr} \times \mathrm{Gr} \to \mathrm{Gr}$ induit un unique $h_*(\mathcal{E}_k)$-morphisme $\mathrm{Gr} \wedge^L \mathrm{Gr} \to \mathrm{Gr}$. En fait cette affirmation est générale : soit $X$ un $k$-espace pointé muni d'une structure d'anneau associatif (sans unité) dans la catégorie $h_*(\mathcal{E}_k)$. Alors le $h_*(\mathcal{E}_k)$-morphisme produit $X \times X \to X$ induit un unique $h_*(\mathcal{E}_k)$-morphisme $X \wedge^L X \to X$. L'existence résulte facilement du fait que, par bilinéarité, la restriction de ce produit au « bouquet dérivé » (le dérivé gauche du foncteur bouquet) $X \vee^L X$ est triviale. Pour établir l'unicité, remarquons tout d'abord que le $h_*(\mathcal{E}_k)$-morphisme produit $X \times X \to X$ induit un unique $h_*(\mathcal{E}_k)$-morphisme $(X \times X)/^h(* \vee X) \to X$ ; l'existence est déjà établie et l'unicité résulte facilement du fait que la projection $X \times X \to * \times X$ est une rétraction du morphisme $* \times X \to X \times X$ et de l'existence de la structure de $H$-groupe sur $X$. Remarquons ensuite que pour tous $k$-espaces $Y$ et $Z$ on dispose d'une fibration

$$R\mathbf{Hom}_k(Y, Z)_* \to R\mathbf{Hom}_k(Y, Z) \to Z$$

(prendre $Z$ fibrant et $Y$ cofibrant) pour laquelle on dispose d'une section

$$Z \to R\mathbf{Hom}_k(Y, Z)$$

(induite par l'application $Y \to *$) ; lorsque $Z$ est un groupe de la catégorie $h_*(\mathcal{E}_k)$ on en déduit facilement que le $h_*(\mathcal{E}_k)$-morphisme

$$R\mathbf{Hom}_k(Y, Z)_* \times Z \to R\mathbf{Hom}_k(Y, Z)$$

produit du morphisme

$$R\mathbf{Hom}_k(Y, Z)^* \to R\mathbf{Hom}_k(Y, Z)$$

et de ladite section est un isomorphisme. Remarquons finalement que le foncteur

$$h_*(\mathcal{E}_k) \to h_*(\mathcal{E}_k), \quad Y \mapsto (Y \times X)/^h(* \times X)$$

(qui est isomorphe au foncteur $Y \mapsto Y \wedge^L (X_+)$) est adjoint à gauche du foncteur $R\mathbf{Hom}_k(X, -)$. On déduit de ces remarques que le morphisme $X \to R\mathbf{Hom}_k(X, X)$, adjoint du $h_*(\mathcal{E}_k)$-morphisme $(X \times X)/^h(* \times X) \to X$ précédemment construit, correspond à un unique morphisme

$$X \to R\mathbf{Hom}_k(X, X)_* \times X$$

dont la composante sur le facteur $X$ est triviale (par bilinéarité). Il est clair que l'adjoint du morphisme $X \to R\mathbf{Hom}_k(X, X)_*$ ainsi obtenu est l'unique morphisme $X \wedge^L X \to X$ ayant les propriétés voulues.

Pour tout entier $n \geq 0$, le groupe $\tilde{K}_n(X) := [\Sigma^n(X), \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}]_*$ s'identifie au groupe $\tilde{K}_0(\Sigma^n(X))$ et porte donc une structure d'anneau commutatif (sans unité). Bien sûr, pour $n \geq 1$, les produits sont nuls pour cette structure. Cela résulte du fait standard que l'application diagonale $\Sigma^n(X) \to \Sigma^n(X) \times \Sigma^n(X)$ se factorise dans la catégorie homotopique via le bouquet $\Sigma^n(X) \vee \Sigma^n(X)$.

Le groupe gradué $\tilde{K}_*(X)$, $* \geq 0$, possède une structure naturelle d'anneau commutatif gradué : en effet, la structure d'anneau commutatif sur l'objet $\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}$ de $h_*(\mathcal{E}_k)$ définit, de façon évidente, une structure d'anneau commutatif dans la catégorie homotopique des ensembles simpliciaux pointés sur l'ensemble simplicial pointé $\mathbf{hom}_k(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})$ et pour un tel ensemble simplicial pointé, les groupes d'homotopie forment un anneau commutatif au sens gradué.

### 4.3.3. Le théorème de périodicité

4.3.3.1. *L'application de périodicité.* — Soient $\sigma : (\mathbf{Z}\times \mathrm{Gr})\times(\mathbf{Z}\times\mathrm{Gr}) \to \mathbf{Z}\times\mathrm{Gr}$ (resp. $\mu : (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \times (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \to (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}))$ le $h_*(\mathcal{E}_k)$-morphisme correspondant à la somme (resp. au produit) de l'anneau $K_0$ (*cf.* §4.2.2). On introduit deux $h_*(\mathcal{E}_k)$-morphismes $\mathbf{P}^1 \times (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \to \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}$. Le premier est tout simplement la projection évidente $pr$. Le second, $p$, est le composé de $\mu$ et de l'application

$$(\{0\} \times \mathbf{P}^1) \times (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \to (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \times (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})$$

induite par l'application (pointée) évidente $\{0\} \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}$ (qui classifie le fibré vectoriel virtuel $[\lambda_1] - 1$).

On note

$$\sigma(p \times pr) : \mathbf{P}^1 \times ((\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \times (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})) \to \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}$$

le composé de l'application

$$\mathbf{P}^1 \times ((\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \times (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})) \to (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) \times ((\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \times (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}))$$

induite par la diagonale de $\mathbf{P}^1$, de l'application

$$(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) \times ((\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \times (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})) \to (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \times (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})$$

produit de $p$ et $pr$, et de $\sigma$.

***Théorème 4.3.4* (Théorème de périodicité, première forme).** — *Le $h_*(\mathcal{E}_k)$-morphisme*

$$(\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \times (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \to R\mathbf{Hom}_k(\mathbf{P}^1, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})$$

*adjoint de $\sigma(p \times pr)$ est un isomorphisme.*

***Corollaire 4.3.5.*** — *Pour tout $k$-espace $X$ l'homomorphisme naturel de $K_0(X)$-algèbres*

$$K_*(X)[u]/u^2 \to K_*(X \times \mathbf{P}^1)$$

*qui envoie $u$ sur l'image réciproque par la projection $X \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ de l'élément $[\lambda_1] - 1$ est un isomorphisme (en particulier, pour tout $k$-schéma lisse $X$ l'homomorphisme de $K_*(X)$-algèbres $K_*(X)[u]/u^2 \to K_*(X \times \mathbf{P}^1)$ est un isomorphisme).*

*Démonstration.* — Pour tout entier $n \geq 0$ le groupe $K_n(X \times \mathbf{P}^1)$ est par définition le groupe $[\Sigma^n((X \times \mathbf{P}^1)_+), \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}]_*$ ; le $k$-espace pointé $(X \times \mathbf{P}^1)_+$ est canoniquement isomorphe dans $h_*(\mathcal{E}_k)$ au $k$-espace pointé $(X_+) \wedge^L ((\mathbf{P}^1)_+)$ si bien que $K_n(X \times \mathbf{P}^1)$ est naturellement isomorphe au groupe

$$[\Sigma^n(X_+) \wedge^L ((\mathbf{P}^1)_+), \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}]_* \cong [\Sigma^n(X+), R\mathbf{Hom}_k((\mathbf{P}^1)_+, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})_*]_*;$$

mais il est clair que le $k$-espace pointé $R\mathbf{Hom}_k((\mathbf{P}^1)_+, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})_*$ s'identifie (dans $h_*(\mathcal{E}_k)$) à

$$R\mathbf{Hom}_k(\mathbf{P}^1, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})$$

ce qui permet facilement de conclure à l'aide du théorème 4.3.4. □

Reformulons, comme d'habitude, le théorème 4.3.4. Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \times (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) & \rightarrow & R\mathbf{Hom}_k(\mathbf{P}^1, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr} & = & \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr} \end{array}$$

de la catégorie $h_*(\mathcal{E}_k)$ est commutatif. La section naturelle

$$\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr} \rightarrow R\mathbf{Hom}_k(\mathbf{P}^1, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})$$

et la structure de groupe abélien dans $h_*(\mathcal{E}_k)$ sur $\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}$, donc sur $R\mathbf{Hom}_k(\mathbf{P}^1, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})$ et $R\mathbf{Hom}_k(\mathbf{P}^1, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})_*$, induisent un isomorphisme de $h_*(\mathcal{E}_k)$-groupes

$$R\mathbf{Hom}_k(\mathbf{P}^1, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})_* \times (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \cong R\mathbf{Hom}_k(\mathbf{P}^1, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})$$

(voir ce qui suit la définition 4.3.2). Pour établir le théorème il suffit donc d'établir que le $h_*(\mathcal{E}_k)$-morphisme $\beta : \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr} \rightarrow R\mathbf{Hom}_k(\mathbf{P}^1, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})_*$ induit sur les fibres homotopiques est une équivalence faible. On se convainc aisément que $\beta$ est l'adjoint du morphisme $\mathbf{P}^1 \wedge^L (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \rightarrow (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})$ composé du produit

$$(\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \wedge^L (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \rightarrow (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})$$

et du morphisme

$$\mathbf{P}^1 \wedge^L (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \rightarrow (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \wedge^L (\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})$$

induit par le morphisme $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}$ qui classifie le fibré vectoriel virtuel $[\lambda_1] - 1$.

Le théorème 4.3.4 est donc équivalent au :

***Théorème 4.3.6*** **(Théorème de périodicité, deuxième forme).** — *Le $h_*(\mathcal{E}_k)$-morphisme*

$$\beta : \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr} \rightarrow R\mathbf{Hom}_k(\mathbf{P}^1, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})_*$$

*est un isomorphisme.*

On peut donner du morphisme $\beta : \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr} \rightarrow R\mathbf{Hom}_k(\mathbf{P}^1, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})_*$ une description très concrète. Tout d'abord le $k$-schéma $\mathbf{P}^1$ est réunion de deux ouverts isomorphes à la droite affine et dont l'intersection s'identifie à $\mathbf{G}_m$. Le point base de $\mathbf{P}^1$ appartient également à $\mathbf{G}_m$ (et s'identifie à la section unité) si bien que le carré suivant de $k$-espace pointés :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_m & \to & \mathbf{A}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{A}^1 & \to & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien d'après le théorème 3.1.1. On en déduit bien sûr :

***Lemme 4.3.7.*** — *Le carré homotopiquement cocartésien précédent définit un $h_*(\mathcal{E}_k)$-isomorphisme canonique*

$$\Sigma(\mathbf{G}_m) \cong \mathbf{P}^1$$

Il en résulte que le foncteur $\mathbf{\Omega} := R\mathbf{Hom}_k(\mathbf{P}^1, -)_*$ est isomorphe aux composés $\Omega \circ \omega$ et $\omega \circ \Omega$ (*cf.* 2.2.23). D'après le théorème 4.2.6 le diagramme de $k$-espaces pointés :

$$\mathbf{GL} \to V \to \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}$$

est une fibration et d'après le lemme 4.2.5 le $k$-espace $V$ est contractile, si bien que l'on obtient ainsi un isomorphisme canonique

$$\mathbf{GL} \cong \Omega(\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}).$$

On voit donc que le $k$-espace pointé

$$R\mathbf{Hom}_k(\mathbf{P}^1, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})_*$$

est canoniquement $h_*(\mathcal{E}_k)$-isomorphe au $k$-espace pointé

$$\omega(\mathbf{GL}) \cong \mathbf{Hom}_k(\mathbf{G}_m, \mathbf{GL})_*$$

(observer que $\mathbf{GL}$ est un $k$-espace pointé fibrant et $\mathbf{G}_m$ un $k$-espace pointé cofibrant). Remarquons que pour tout $k$-schéma affine lisse $Y$ le groupe

$$\mathrm{Hom}_k(Y, \mathbf{Hom}_k(\mathbf{G}_m, \mathbf{GL})_*)$$

s'identifie naturellement au noyau de l'homomorphisme de groupes

$$\mathbf{GL}(A(Y)[T, T^{-1}]) \to \mathbf{GL}(A(Y))$$

d'évaluation en 1.

Cherchons maintenant un modèle cofibrant pour la grassmanienne. Pour chaque paire $(n, r)$ d'entiers $\geq 0$ introduisons la version affine $\mathbf{Gr}a_{n,r}$ de la grassmanienne $\mathbf{Gr}_{n,r}$ : c'est le $k$-espace qui à tout $k$-schéma affine lisse $Y$ associe l'ensemble $\mathbf{Gr}a_{n,r}(Y)$ des matrices $M$ de $M_{n+r}(A(Y))$ telles que $M^2 = M$ et dont l'image $I(M) \subset A(Y)^{n+r}$ est de rang $n$ (et localement libre). On se convainc aisément que $\mathbf{Gr}a_{n,r}$ est un $k$-schéma affine lisse muni d'une action du fibré vectoriel $\xi := \tau_{n,r}^*(\gamma_{r,n}) \otimes \gamma_{n,r}$ sur $\mathbf{Gr}_{n,r}$ qui en fait un $\xi$-torseur sur $\mathbf{Gr}_{n,r}$ (on s'inspirera de l'exemple 2.1.12. On dispose d'immersions fermées (donc de cofibrations) évidentes $\mathbf{Gr}a_{n,r} \to \mathbf{Gr}a_{n+1,r}$ et $\mathbf{Gr}a_{n,r} \to \mathbf{Gr}a_{n,r+1}$ (qu'on laisse au lecteur le soin d'imaginer en termes de matrices carrées). On note $\mathbf{Gr}a$ le $k$-espace $\mathrm{colim}_{n,r} \mathbf{Gr}a_{n,r}$. Ce $k$-espace associe à tout

$k$-schéma affine lisse $Y$ l'ensemble $\mathbf{Gr}a(Y)$ des matrices carrés $M$ d'ordre infini à coefficients dans $A(Y)$, de rang constant et telles que $M^2 = M$ et seuls un nombre fini de coefficients de $M$ sont non nuls.

L'application évidente $\mathbf{Gr}a \to \mathbf{Gr}$ est une fibration triviale (puisque c'est une colimite filtrante de fibration triviales, 2.2.30) et $\mathbf{Gr}a$ est un $k$-espace cofibrant (et fibrant d'après ce que l'on vient de voir).

Il résulte de tout ce qui précède que le morphisme $\beta$ est déterminé par une classe d'homotopie d'applications pointées

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{Gr}a \to \mathbf{Hom}_k(\mathbf{G}_m, \mathbf{GL})_*$$

qui est caractérisée par le fait que son adjointe $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Gr}a) \wedge \mathbf{G}_m \to \mathbf{GL}$ représente l'élément de $\tilde{K}_1((\mathbf{Z} \times \mathbf{Gr}a) \wedge \mathbf{G}_m) \cong \tilde{K}_1((\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \wedge^L \mathbf{G}_m)$ produit (extérieur) de l'élément canonique de $\tilde{K}_1(\mathbf{G}_m)$ (correspondant à l'élément $[\lambda_1] - 1$ de $\tilde{K}_0(\mathbf{P}^1)$) et de l'élément canonique de $\tilde{K}_0(\mathbf{Z} \times \mathrm{Gr})$ (représenté par l'application identique). En analysant la définition du produit $K_0 \otimes K_1 \to K_1$ donnée dans **[24]**, on se convainc facilement que l'application $\beta' : \mathbf{Z} \times \mathbf{Gr}a \to \mathbf{Hom}_k(\mathbf{G}_m, \mathbf{GL})_*$ que nous allons maintenant exhiber est un représentant de $\beta$. Pour tout $k$-schéma affine lisse $Y$ un élément $x$ de $\mathrm{Hom}_k(Y, \mathbf{Z} \times \mathbf{Gr}a)$ est déterminé par une application localement constante $r : \pi_0(Y) \to \mathbf{Z}$ et une matrice $M(x)$ de $\mathrm{Hom}_k(Y, \mathbf{Gr}a)$ (qui correspondent à l'élément $[I(M)] - r \cdot 1$ dans $K_0(Y)$). Puisque $Y$ est la somme de ses composantes irréductibles, on peut se ramener au cas où $r$ est une application constante. La matrice $M(x)' := \mathrm{Id} + (T-1) \cdot M$ à coefficients dans $A(Y)[T, T^{-1}]$ appartient en fait au noyau de $\mathbf{GL}(A(Y)[T, T^{-1}]) \to \mathbf{GL}(A(Y))$ ; notons $\theta$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le premier élément de la diagonale qui vaut 1.On pose alors :

$$\beta'(x) = M(x)' \cdot \theta^{-r(x)}.$$

***Théorème 4.3.8* (Théorème de périodicité, troisième forme).** — *L'application pointée*

$$\beta' : \mathbf{Z} \times \mathbf{Gr}a \to \mathbf{Hom}_k(\mathbf{G}_m, \mathbf{GL})_*$$

*est une équivalence faible.*

***Remarque 4.3.9.*** — L'auteur ignore si cette application est une fibration (donc une fibration triviale). Si tel était le cas, on pourrait s'attendre à ce qu'il existe une démonstration bien plus élémentaire du théorème de périodicité que celle que nous allons donner.

4.3.3.2. *Démonstration du théorème 4.3.8.* — Rappelons le résultat suivant (*cf.* **[2**, §XII.7]) :

***Théorème 4.3.10* (Bass).** — *Pour tout anneau commutatif unitaire $R$ il existe une suite exacte naturelle :*

$$0 \to K_1(R) \to K_1(R[T]) \oplus K_1(R[T^{-1}]) \to K_1(R[T, T^{-1}]) \to K_0(R) \to 0.$$

En analysant la définition des homomorphismes de cette suite exacte, on en déduit facilement le :

***Corollaire 4.3.11***. — *Pour tout anneau commutatif unitaire $K_1$-régulier $R$ il existe un isomorphisme naturel $K_1(R[T,T^{-1}]) \cong K_1(R) \oplus K_0(R)$.*

***Remarque 4.3.12***. — D'après le lemme 4.1.6 de Vorst, si $R$ est $K_1$-régulier il en est de même pour l'anneau $R[T,T^{-1}]$.

***Corollaire 4.3.13***. — *Soit $X$ un $k$-espace pointé isomorphe dans la catégorie homotopique (non pointée) à un $k$-espace cofibrant de présentation finie $X'$ tel que l'anneau $A(X')$ est $K_1$-régulier. Alors l'homomorphisme de groupes :*

$$\tilde{K}_0(X) \cong [X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gra}]_* \to [X, \mathbf{Hom}_k(\mathbf{G}_m, \mathbf{GL})_*]_* \cong \tilde{K}_1(X \wedge^L \mathbf{G}_m)$$

*induit par $\beta'$ est un isomorphisme.*

*Démonstration*. — On peut supposer que le $k$-espace pointé $X$ est cofibrant. La cofibration $X \vee \mathbf{G}_m \to X \times \mathbf{G}_m \to X \wedge \mathbf{G}_m$ induit une suite exacte :

$$\cdots \to \tilde{K}_1(X \wedge \mathbf{G}_m) \to \tilde{K}_1(X \times \mathbf{G}_m) \to \tilde{K}_1(X \vee \mathbf{G}_m) \to \tilde{K}_0(X \wedge \mathbf{G}_m) \to \cdots$$

Mais il est clair que le groupe $\tilde{K}_n(X \vee \mathbf{G}_m)$ est le produit de $\tilde{K}_n(\mathbf{G}_m)$ et de $\tilde{K}_n(X)$ ce qui permet comme d'habitude d'établir que la longue suite exacte précédente se scinde en suites exactes courtes. En particulier la suite

$$0 \to \tilde{K}_1(X \wedge \mathbf{G}_m) \to \tilde{K}_1(X \times \mathbf{G}_m) \to \tilde{K}_1(X \vee \mathbf{G}_m) \to 0$$

est exacte. Puisque le $k$-espace $X$ est pointé, le $k$-espace pointé $\Sigma(X_+)$ s'identifie dans la catégorie $h_*(\mathcal{E}_k)$ au bouquet $X \vee S^1$ ; il en résulte que le groupe

$$K_1(X) = [\Sigma(X_+), \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}]_*$$

s'identifie au produit $\tilde{K}_1(X) \times K_1(k)$ ; de même, le groupe $K_1(\mathbf{G}_m)$ s'identifie au produit $\tilde{K}_1(\mathbf{G}_m) \times K_1(k)$ et le groupe $K_1(X \times \mathbf{G}_m)$ au produit

$$\tilde{K}_1(X \times \mathbf{G}_m) \times K_1(k).$$

On déduit de la suite exacte courte ci-dessus et du calcul de $K_1(X \times \mathbf{G}_m)$ donné par le corollaire 4.3.11 (quitte à remplacer $X$ par $X'$, et en utilisant le lemme 4.1.11) que le groupe $\tilde{K}_1(X \wedge \mathbf{G}_m)$ s'identifie à $\tilde{K}_0(X)$ et l'on conclut en vérifiant que l'isomorphisme $\tilde{K}_1(X \wedge \mathbf{G}_m) \cong \tilde{K}_0(X)$ ainsi obtenu est inverse de l'homomorphisme du corollaire. □

***Lemme 4.3.14***. — *Soit $\{f_\alpha : X_\alpha \to X\}_\alpha$ une famille $k$-transverse d'immersions fermées. Alors pour tout entier $n \geq 0$ le $k$-espace pointé cofibrant $\Sigma^n(S[f_\alpha]_+)$ est isomorphe dans la catégorie homotopique à un $k$-espace cofibrant de présentation finie $X'$ tel que l'anneau $A(X')$ est $K_1$-régulier.*

*Démonstration.* — Pour $n = 0$ cela résulte du théorème 4.1.10. Pour simplifier, traitons le cas $n = 1$ (le cas général se déduit d'ailleurs par récurrence sur $n$ à l'aide de l'argument que nous allons donner). Il est clair que le $k$-espace pointé $\Sigma(S[f_\alpha]_+)$ est isomorphe dans la catégorie homotopique au quotient de $S[f_\alpha] \times \mathbf{A}^1$ par $S[f_\alpha] \times (* \amalg *)$. Choisissons une immersion fermée $X \to \mathbf{A}^n$ et considérons la famille d'immersions fermées de but $\mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^1$ contenant les composés $X_\alpha \times \mathbf{A}^1 \to X \times \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^1$ et les deux immersions fermées $\mathbf{A}^n \times * \to \mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^1$. On vérifie facilement que cette famille est $k$-transverse et que $\Sigma(S[f_\alpha]_+)$ est isomorphe dans la catégorie homotopique au $k$-espace cofibrant associé à cette famille $k$-transverse. On conclut à l'aide du théorème 4.1.10. □

***Corollaire 4.3.15.*** — *Soit $\{f_\alpha : X_\alpha \to X\}_\alpha$ une famille $k$-transverse d'immersions fermées. Alors l'application simpliciale pointée*

$$\mathbf{hom}_k(S[f_\alpha], \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}a)_* \to \mathbf{hom}_k(S[f_\alpha], \mathbf{Hom}_k(\mathbf{G}_m, \mathbf{GL})_*)$$

*induite par $\beta'$ est une équivalence faible.*

*Démonstration.* — Cela résulte immédiatement du lemme 4.3.14, du corollaire 4.3.13 et du fait que cette application est une application de $H$-espaces. □

*Démonstration du théorème 4.3.8.* — Nous allons établir que pour tout $k$-espace pointé cofibrant $X$ l'application simpliciale pointée

$$\mathbf{hom}_k(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}a) \to \mathbf{hom}_k(X, \mathbf{Hom}_k(\mathbf{G}_m, \mathbf{GL})_*)$$

induite par $\beta'$ est une équivalence faible. Il existe une suite

$$* = X_0 \to X_1,\ X_1 \to X_2, \ldots,\ X_n \to X_{n+1}$$

d'applications pointées, chacune image directe d'une somme d'éléments de $S_+$, et telles que $X$ est rétracte de la colimite des $X_n$. Il est clair qu'il suffit, par récurrence sur $j$, d'établir que si l'application simpliciale pointée

$$\mathbf{hom}_k(X_j, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}a) \to \mathbf{hom}_k(X_j, \mathbf{Hom}_k(\mathbf{G}_m, \mathbf{GL})_*)$$

est une équivalence faible il en est de même pour l'application simpliciale pointée

$$\mathbf{hom}_k(X_{j+1}, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}a) \to \mathbf{hom}_k(X_{j+1}, \mathbf{Hom}_k(\mathbf{G}_m, \mathbf{GL})_*)$$

ce qui résulte facilement du corollaire précédent. □

## 4.4. Théorie de l'homotopie au dessus d'un schéma régulier

Ici on suppose seulement que $k$ est un schéma régulier. On se propose d'expliquer pourquoi un certain nombre des résultats précédents (obtenus en supposant $k$ affine) restent valables (bien sûr dans un résultat tel que le théorème 4.2.6 l'hypothèse d'affinité est essentielle).

Soit $f : T \to k$ un torseur sous un fibré vectoriel avec $T$ affine sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. D'après la proposition 2.3.4, le foncteur $L_h(f^*) : h(\mathcal{E}_k) \to h(\mathcal{E}_T)$ est un plongement pleinement fidèle. De plus, il est clair que le $T$-espace $L_h(f^*)(\mathrm{Gr}\,|_k)$ s'identifie dans la catégorie $h(\mathcal{E}_T)$ à la grasmanienne sur $T$, $\mathrm{Gr}\,|_T$. On déduit donc du corollaire 4.2.12 le :

***Corollaire 4.4.1***. — *Soit $X$ un $k$-schéma lisse. Alors les applications naturelles*

$$\pi(X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}) \to K_0(X) \quad \textit{et} \quad \pi(X, \mathbf{P}^\infty) \to \mathrm{Pic}(X)$$

*induisent respectivement des bijections naturelles*

$$[X, \mathbf{Z} \times \mathrm{Gr}] \cong K_0(X) \quad \textit{et} \quad [X, \mathbf{P}^\infty] \cong \mathrm{Pic}(X).$$

Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter le sens du corollaire précédent et d'énoncer les résultats des paragraphes 4.2 et 4.3 qui restent valables sans l'hypothèse d'affinité sur $k$.

# APPENDICE A

# RAPPELS D'ALGÈBRE HOMOTOPIQUE

## A.1. Propriétés de relèvement

***Définition A.1.1***. — Soit $\mathcal{E}$ une catégorie dans laquelle les colimites sont représentables. Soient $p : E \to B$ et $i : X \to Y$ deux $\mathcal{E}$-morphismes. On dit que $p$ a *la propriété de relèvement à droite par rapport à $i$* et que $i$ a *la propriété de relèvement à gauche par rapport à $p$* si pour tout carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \to & E \\ i\downarrow & & \downarrow p \\ Y & \to & B \end{array}$$

il existe un morphisme $Y \to E$ qui laisse le diagramme commutatif.

On notera $D(i)$ (resp. $G(p)$) l'ensemble des morphismes ayant la propriété de relèvement à droite (resp. à gauche) par rapport à $i$ (resp. à $p$) et pour tout ensemble $E$ de $\mathcal{E}$-morphismes on notera $D(E)$ (resp. $G(E)$) l'ensemble des morphismes ayant la propriété de relèvement à droite (resp. à gauche) par rapport à chaque élément de $E$.

On introduit les propriétés suivantes portant sur un ensemble $E$ de $\mathcal{E}$-morphismes :

- **P1 :** pour toute famille $\{f_i\}_{i\in I}$ d'éléments de $E$, le morphisme somme $\amalg_{i\in I} f_i$ est un élément de $E$ (on traduira cette propriété en disant que E est stable par sommes) ;
- **P2 :** soient $f : X \to Y$ et $g : X \to Z$ deux morphismes. Si $g$ appartient à $E$, le morphisme $Y \to Y \amalg_X Z$ (appelé image directe de $g$ par $f$) appartient à $E$ (on dira alors que $E$ est stable par images directes) ;
- **P3 :** pour tout diagramme $X_0 \to X_1 \to \dots \to X_n \to \dots$ dans lequel chacun des morphismes $X_n \to X_{n+1}$ appartient à $E$ le morphisme $X_0 \to \operatorname{colim}_n X_n$ appartient à $E$ (on dira alors que $E$ est stable par compositions dénombrables) ;
- **P4 :** si le morphisme $f$ est facteur direct (dans la catégorie des $\mathcal{E}$-morphismes) de $g$ et si $g \in E$ alors $f \in E$ (on dira alors que $E$ est stable par rétractes).

Il est facile d'établir que l'ensemble $G(E)$ vérifie les propriétés **P1**, **P2**, **P3** et **P4**. On peut bien sûr introduire les propriétés duales (stabilité par produits, par images réciproques, par limites de tours et par rétractes) et constater qu'elles sont satisfaites par les ensembles de la forme $D(E)$.

Les propriétés **P1**, **P2**, **P3** et **P4** sont stables par intersection. On note $C(E)$ la plus petite partie de $Fl(\mathcal{E})$ contenant $E$ et vérifiant **P1**, **P2**, **P3** et **P4** (autrement dit l'intersection de toutes les parties ayant ces propriétés). Observons l'inclusion $C(E) \subset G(D(E))$.

**A.1.1.** On note $C''(E)$ l'ensemble des morphismes $f$ tels qu'il existe un diagramme $X_0 \to X_1 \to \ldots \to X_n \to \ldots$ tel que $f$ est isomorphe au morphisme $X_0 \to \operatorname{colim}_n X_n$ et tel que pour tout $n \geq 0$, le morphisme $X_n \to X_{n+1}$ est l'image directe d'une somme d'éléments de $E$. Nous aurons également besoin pour des raisons techniques de considérer l'ensemble $C''_F(E)$ des morphismes $f$ tels qu'il existe un entier $n \geq 0$, un diagramme $X_0 \to X_1 \to \ldots \to X_n$ tel que $f$ est isomorphe au morphisme $X_0 \to X_n$ et tel que pour tout $0 \leq m \leq n-1$, le morphisme $X_m \to X_{m+1}$ est l'image directe d'une somme *finie* d'éléments de $E$. Enfin on note $C'(E)$ l'ensemble des morphismes rétractes d'un élément de $C''(E)$. On a bien sûr les inclusions

$$C''_F(E) \subset C''(E) \subset C'(E) \subset C(E) \subset G(D(E)).$$

***Lemme A.1.2.*** — *On suppose les colimites représentables dans $\mathcal{E}$. Soit $E$ un ensemble de $\mathcal{E}$-morphismes dont les sources sont des objets de présentation finie (voir §A.3.3). Alors tout $\mathcal{E}$-morphisme $f$ peut s'écrire $p \circ i$ avec $p$ dans $D(E)$ et $i$ dans $C''(E)$. En fait, on peut choisir une telle écriture* fonctoriellement *en $f$.*

La démonstration consiste à adapter de façon classique l'argument du petit objet, *cf.* [**27**, lemme 3 II §3].

***Corollaire A.1.3.*** — *Sous les mêmes hypothèses que celles du lemme A.1.2, on a les égalités $C'(E) = C(E) = G(D(E))$.*

*Démonstration.* — Les inclusions $C'(E) \subset C(E) \subset G(D(E))$ ont étées vues ci-dessus et il suffit donc d'établir l'inclusion $G(D(E)) \subset C'(E)$. Soit $f$ un élément de $G(D(E))$. D'après le lemme A.1.2 on peut écrire $f = p \circ i$, avec $i \in C''(E)$ et $p \in D(E)$. Puisque $f$ a la propriété de relèvement à gauche par rapport à $p$ on en déduit immédiatement que $f$ est facteur direct de $i$ d'où le résultat. □

**A.1.2. Structures multiplicatives.** — Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ trois catégories et $\wedge$ : $\mathcal{E} \times \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$ un foncteur. On suppose que les colimites sont représentables dans $\mathcal{E}''$.

Soient $f : X \to Y$ un $\mathcal{E}$-morphisme et $g : X' \to Y'$ un $\mathcal{E}'$-morphisme. On notera $S(f,g)_\wedge$ la somme amalgammée $(Y \wedge X') \amalg_{(X \wedge X')} (X \wedge Y')$ et

$$(f,g)_\wedge : S(f,g)_\wedge \to Y \wedge Y'$$

le $\mathcal{E}$-morphisme évident.

***Lemme A.1.4.*** — *On suppose que les colimites sont représentables dans $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ et que le foncteur $\wedge$ commute aux colimites. Soit $E$ (resp. $F$, $G$) un ensemble de $\mathcal{E}$-morphismes (resp. de $\mathcal{E}'$-morphismes, de $\mathcal{E}''$-morphismes). On suppose que l'on a* *l'inclusion* $(E,F)_\wedge \subset C(G)$ *(autrement dit pour tout* $i$ *dans* $E$ *et tout* $j$ *dans* $F$ *le morphisme* $(i,j)_\wedge$ *appartient à* $C(G)$*). Alors on a l'inclusion* $(C'(E),C'(F))_\wedge \subset C(G)$*, et donc également l'inclusion :*

$$(C(E),C(F))_\wedge \subset C(G)$$

*Démonstration.* — Le fait que l'inclusion $(C'(E),C'(F))_\wedge \subset C(G)$ implique l'inclusion $(C(E),C(F))_\wedge \subset C(G)$ est clair. Il s'agit donc d'établir que pour tout $i : X \to Y$ dans $C'(E)$ et tout $j : A \to B$ dans $C'(F)$ le morphisme $(i,j)_\wedge$ appartient à $C(G)$. On se ramène facilement (en utilisant la stabilité de $C(G)$ par rétractes) à supposer que $i$ appartient à $C''(E)$ et $j$ appartient à $C''(F)$. Le morphisme $i : X \to Y$ est donc une composition dénombrable de morphismes $X_0 \to X_1 \to \ldots \to X_n \to \ldots$, $Y$ s'identifiant à la colimite des $X_n$, chacun des morphismes $X_n \to X_{n+1}$ étant image directe d'une somme d'éléments de $E$.

Pour chaque entier $n$, y compris $n = \infty$ auquel cas on pose $X_\infty := Y$, notons $\Sigma_n$ la somme amalgammée $(X \wedge B) \amalg_{(X\wedge A)} (X_n \wedge A)$ et $K_n$ la somme amalgammée $(X_n \wedge B) \amalg_{\Sigma_n} \Sigma_\infty$. Puisque $\Sigma_\infty$ est la colimite des $\Sigma_n$ (car le foncteur $\wedge$ commute aux colimites) on voit que la colimite $K_\infty$ des $K_n$ s'identifie à $Y \wedge B$ : ainsi, il suffit d'établir que chacun des morphismes $K_n \to K_{n+1}$ appartient à $C(G)$ car $K_0$ s'identifie à $S(i,j)_\wedge$ et le morphisme évident $K_0 \to K_\infty$ s'identifie bien au morphisme $(i,j)_\wedge$.

Or à l'aide du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & X_n \wedge B & \to & (X_n \wedge B) \amalg_{\Sigma_n} \Sigma_{n+1} & \to & X_{n+1} \wedge B \\
 & & \uparrow & cocart. & \uparrow & & \\
X \wedge B & \to & \Sigma_n & \to & \Sigma_{n+1} & & \\
\uparrow & cocart. & \uparrow & cocart. & \uparrow & & \\
X \wedge A & \to & X_n \wedge A & \to & X_{n+1} \wedge A & &
\end{array}$$

on voit facilement que le diagramme suivant est cocartésien :

$$\begin{array}{ccc}
K_n & \to & K_{n+1} \\
\uparrow & & \uparrow \\
(X_n \wedge B) \amalg_{(X_n \wedge A)} (X_{n+1} \wedge A) & \to & X_{n+1} \wedge B
\end{array}$$

Il suffit donc d'établir que le morphisme horizontal du bas du précédent diagramme appartient à $C(G)$ : autrement dit, on s'est ramené au cas où $i$ est image directe d'une somme d'éléments de $E$. Cette même réduction appliquée de façon symétrique permet également de supposer que $j$ est image directe d'une somme d'éléments de $F$.

A l'aide du point 1) du lemme A.1.5 ci-dessous, on se ramène à supposer que $i$ est somme d'éléments de $E$ et $j$ somme d'éléments de $F$ et finalement le point 2) de ce même lemme permet d'achever la démonstration. □

***Lemme A.1.5***

*1) Soient $i : X \to Y$ un $\mathcal{E}$-morphisme et*

$$\begin{array}{ccc} A' & \to & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \to & B \end{array}$$

*un carré cocartésien de la catégorie $\mathcal{E}'$. Alors le carré :*

$$\begin{array}{ccc} (X \wedge B') \amalg_{(X\wedge A')} (Y \wedge A') & \to & Y \wedge B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X \wedge B) \amalg_{(X\wedge A)} (Y \wedge A) & \to & Y \wedge B \end{array}$$

*est cocartésien.*

*2) Soit $\{i_e : X_e \to Y_e\}_{e\in I}$ (resp. $\{j_f : A_f \to B_f\}_{f\in J}$) une famille de $\mathcal{E}$-morphismes (resp. $\mathcal{E}'$-morphismes). Alors le morphisme $(\amalg_{e\in I} i_e, \amalg_{f\in J} j_f)_\wedge$ s'identifie naturellement au morphisme $\amalg_{e\in I, f\in J}(i_e, j_f)_\wedge$.*

La démonstration de ce lemme repose sur la commutation des colimites entre elles et est laissée au lecteur.

## A.2. Théorie de l'homotopie associée à une catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles

Ce paragraphe a pour but d'adapter les idées de **[27]** à notre cadre. Il est donc évident que tous les résultats qui suivent sont dus à Quillen, même si nous ne le rappelons pas explicitement. Le lecteur prendra garde que notre terminologie ne coïncide pas exactement avec celle de Quillen. L'auteur insiste sur le fait qu'il n'est complètement satisfait de la présentation qui va suivre ; il lui a été impossible de vérifier que les définitions du §2.2.2 conduisaient à une structure de catégorie de modèles fermée et il a donc fallu trouver des axiomes *ad hoc* !

### A.2.1. Catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie. Une structure de catégorie *quasi-simpliciale* sur $\mathcal{E}$ est la donnée d'un foncteur

$$\Delta^\bullet : \Delta \to \mathcal{E}$$

(autrement dit d'un objet cosimplicial de $\mathcal{E}$) tel que $\Delta^0$ est un objet final de $\mathcal{E}$.

On suppose les produits finis représentables dans $\mathcal{E}$. On peut alors définir pour tout couple $(X, Y)$ d'objets de $\mathcal{E}$, l'ensemble simplicial fonctionnel

$$\mathbf{hom}_{\Delta^\bullet}(X, Y)$$

(que l'on notera parfois simplement $\mathbf{hom}(X, Y)$) par la formule $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X \times \Delta^\bullet, Y)$. On vérifie facilement que la composition dans $\mathcal{E}$ induit, pour tout triplet $(X, Y, Z)$

d'objets de $\mathcal{E}$, une application *composition*

$$\mathbf{hom}_{\Delta^\bullet}(X,Y) \times \mathbf{hom}_{\Delta^\bullet}(Y,Z) \to \mathbf{hom}_{\Delta^\bullet}(X,Z).$$

On suppose maintenant les colimites représentables dans $\mathcal{E}$. Pour tout $X \in \mathcal{E}$ et tout $K \in \mathcal{S}$ le foncteur $\mathcal{E} \to \mathcal{E}ns, Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(K, \mathbf{hom}_{\Delta^\bullet}(X,Y))$ est alors représentable par un objet de $\mathcal{E}$ noté $X \otimes_{\Delta^\bullet} K$, ou encore $X \otimes K$.

En fait, si pour tout $K \in \mathcal{S}$ on définit la *réalisation sur* $\mathcal{E}$ de $K$, $|K|_{\Delta^\bullet}$, comme le quotient de : $\amalg_{n\geq 0}(\amalg_{K_n}\Delta^n)$ par les relations standard, on voit facilement que pour tout $X \in \mathcal{E}$ et tout $K \in \mathcal{S}$, l'objet $X \otimes_{\Delta^\bullet} K$ s'identifie à $X \times |K|_{\Delta^\bullet}$. En particulier, $X \otimes_{\Delta^\bullet} \Delta^0 \cong X$.

On observera qu'en général l'application canonique :

$$\mathbf{hom}_{\Delta^\bullet}(X \times |K|_{\Delta^\bullet}, Z) \to \mathbf{hom}_{\Delta^\bullet}(X,Y)^K$$

n'est pas un isomorphisme, ce qui montre que cette notion de catégorie quasi-simpliciale ne coïncide pas avec celle de catégorie *simpliciale* introduite dans [**27**, §II.1]).

A.2.1.1. Soient $f : X \to Y$ un $\mathcal{E}$-morphisme et $g : K \to L$ un $\mathcal{S}$-morphisme. Rappelons A.1 que l'on note $S(f,g)_{\otimes_{\Delta^\bullet}}$ la somme amalgammée,

$$(Y \otimes_{\Delta^\bullet} K) \amalg_{(X\otimes_{\Delta^\bullet} K)} (X \otimes_{\Delta^\bullet} L) \cong (Y \times |K|_{\Delta^\bullet}) \amalg_{(X\times|K|_{\Delta^\bullet})} (X \times |L|_{\Delta^\bullet})$$

et

$$(f,g) \otimes_{\Delta^\bullet} : S(f,g)_{\otimes_{\Delta^\bullet}} \to Y \times |L|_{\Delta^\bullet}$$

le morphisme évident.

A.2.1.2. Soient $\mathcal{E}$ une catégorie possèdant un objet initial noté $\varnothing$ et un objet final noté $*$, *Cof* et $W$ deux classes de $\mathcal{E}$-morphismes, dont les éléments sont appelés respectivement *cofibrations* et *équivalences faibles.*

On appellera *cofibrations triviales* les cofibrations qui sont également des équivalences faibles. Les $\mathcal{E}$-morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations s'appelleront les *fibrations triviales.* On notera $\mathcal{E}_c$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ dont les objets sont les $X \in \mathcal{E}$, que nous appellerons *cofibrants*, pour lesquels le morphisme $\varnothing \to X$ est une cofibration. On appellera *fibration* tout $\mathcal{E}$-morphisme qui a la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales dont la source est *cofibrante.* On notera $\mathcal{E}_f$ la sous catégorie pleine de $\mathcal{E}$ dont les objets sont les $X \in \mathcal{E}$, que nous appellerons *fibrants*, pour lesquels le morphisme $X \to *$ est une fibration.

***Définition A.2.1.*** — Soient $(\mathcal{E}, \Delta^\bullet)$ une catégorie quasi-simpliciale dans laquelle les colimites et les produits finis sont représentables (on note $*$ l'objet final), *Cof* et $W$ deux classes de $\mathcal{E}$-morphismes, dont les éléments sont appelés respectivement *cofibrations* et *équivalences faibles.* On dit que le triplet $(\mathcal{E}, \mathit{Cof}, W)$ est une *catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles* si les axiomes suivants sont vérifiés :

1. si $f$ et $g$ sont des $E$-morphismes composables et si deux des trois morphismes $f$, $g$ et $g \circ f$ sont des équivalences faibles il en est de même du troisième ;
2. toute fibration triviale est une équivalence faible ;
3. l'ensemble $Cof$ vérifie les axiomes **P1** à $P4$ du §A.1.1 ; de plus le morphisme $\varnothing \to *$ est une cofibration ;
4. tout $\mathcal{E}$-morphisme de source un objet cofibrant peut s'écrire $p \circ i$ avec $i$ une cofibration et $p$ une fibration triviale ;
5. tout $\mathcal{E}$-morphisme de source un objet cofibrant et de but un objet fibrant peut s'écrire $p \circ i$ avec $i$ une cofibration triviale et $p$ une fibration ;
6. pour toute $\mathcal{E}$-cofibration $i$ et toute $\mathcal{S}$-cofibration $j$ le morphisme $(i,j)_{\otimes_{\Delta^\bullet}}$ est une cofibration ; si de plus, ou bien $i$ ou bien $j$ est une équivalence faible, le morphisme $(i,j)_{\otimes_{\Delta^\bullet}}$ est une cofibration triviale.

***Exemple A.2.2***. — Soit $\mathcal{E}$ une catégorie munie d'une structure de catégorie simpliciale de modèles fermée sur $\mathcal{E}$ (*cf.* **[27]**), autrement dit trois classes de morphismes appelés respectivement cofibrations, fibrations et équivalences faibles et vérifiant certains axiomes. On suppose que la structure simpliciale est donnée par un objet cosimplicial $\Delta^\bullet$. On note $W$ la classe des équivalences faibles et $Cof$ la classe des cofibrations. Alors on vérifie facilement que le triplet $(\mathcal{E}, Cof, W)$ est une structure de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles sur $\mathcal{E}$. Le lecteur notera que les cofibrations, cofibrations triviales et fibrations triviales pour la structure induite de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles sont les cofibrations, cofibrations triviales et fibrations triviales pour la structure de catégorie simpliciale de modèles fermée, et que les fibrations pour la structure de catégorie simpliciale de modèles fermée sont des fibrations pour la structure induite de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles ; mais en général les notions de fibrations ne coïncident pas.

Pour toute catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles

$$(\mathcal{E}, Cof, W)$$

on note $h(\mathcal{E})$ la catégorie obtenue en inversant les équivalences faibles de la catégorie $\mathcal{E}$, et on l'appelle la *catégorie homotopique* associée (elle ne dépend que de $W$). Soient $X$ et $Y$ deux objets de $\mathcal{E}$ ; l'ensemble $\mathrm{Hom}_{h(\mathcal{E})}(X,Y)$ sera souvent noté simplement $[X,Y]$.

Comme l'ont illustré Gabriel-Zisman **[16]** et plus généralement Quillen **[27]**, faire de la théorie de l'homotopie c'est essentiellement donner une méthode qui permet de décrire la catégorie $h(\mathcal{E})$. Nous allons indiquer ci-après les modifications (minimes) que l'on doit apporter aux résultats de **[27]** pour décrire la catégorie homotopique associée à une catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles dans l'esprit de l'algèbre homotopique de Quillen.

Etablissons tout d'abord quelques lemmes.

***Lemme A.2.3***. — *Dans une catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles une fibration est une fibration triviale si et seulement si c'est une équivalence faible.*

*Démonstration.* — Soit $p : E \to B$ une fibration qui est une équivalence faible. Si $E$ est cofibrant, on peut écrire $p = q \circ i$ avec $i$ une cofibration et $q$ une fibration triviale (d'après l'axiome 4) ; d'après les axiomes 1) et 2) $i$ est donc une cofibration triviale et $p$ (qui a la propriété de relèvement à droite par rapport à $i$) est rétracte de $q$ et est donc bien une fibration triviale. En général, on peut trouver d'après l'axiome 4) une fibration triviale $p' : E' \to E$ avec $E'$ cofibrant. Le composé $E' \to B$ qui est une fibration et une équivalence faible est une fibration triviale d'après ce qui précède. Montrons que cela implique que $p$ est une fibration triviale. Donnons nous un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \to & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & B \end{array}$$

dans lequel le morphisme $i : X \to Y$ est une cofibration et montrons l'existence d'un morphisme $Y \to E$ qui laisse le diagramme commutatif. Puisque $X$ est cofibrant, il existe un morphisme $X \to E'$ dont le composé avec $p'$ est le morphisme $X \to E$. Puisque le composé $E' \to B$ est une fibration triviale, il existe un morphisme $h' : Y \to E'$ qui laisse commutatif le diagramme évident. Il est clair que le morphisme $p' \circ h' : Y \to E$ a les propriétés voulues. □

***Lemme A.2.4***. — *Pour toute cofibration $i : X \to Y$ et toute fibration $p : E \to B$ l'application simpliciale*

$$\mathbf{hom}(Y, E) \to \mathbf{hom}(Y, B) \times_{\mathbf{hom}(X,B)} \mathbf{hom}(X, E)$$

*est une fibration ; si, de plus, $i$ est une équivalence faible alors cette application simpliciale est une fibration triviale. De même, si $p$ est une fibration triviale l'application simpliciale ci-dessus est une fibration triviale.*

C'est une conséquence immédiate de l'axiome 6).

**A.2.2. Algèbre homotopique.** — Pour toute paire d'objets $(X, Y)$ d'une catégorie quasi-simpliciale $\mathcal{E}$, on note $\pi(X, Y)$ l'ensemble des composantes connexes de l'ensemble simplicial $\mathbf{hom}(X, Y)$. On dit que deux morphismes $f, g : X \to Y$ sont *homotopes* s'ils ont même image dans $\pi(X, Y)$ et qu'ils sont *strictement homotopes* s'il existe un 1-simplexe $H$ de $\mathbf{hom}(X, Y)$ tel que $d_0(H) = f$ et $d_1(H) = g$. On note $\pi(\mathcal{E})$ la catégorie ayant mêmes objets que $\mathcal{E}$, telle que $\mathrm{Hom}_{\pi(\mathcal{E})}(X, Y) = \pi(X, Y)$ et dont la loi de composition est induite par celle de $\mathcal{E}$. On dispose donc d'un foncteur $\mathcal{E} \to \pi(\mathcal{E})$. On dit qu'un $E$-morphisme est une *équivalence d'homotopie* s'il est inversible dans la catégorie $\pi(\mathcal{E})$.

Fixons maintenant une structure $(\mathcal{E}, Cof, W)$ de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles.

Lorsque $X$ est cofibrant et $Y$ fibrant, il résulte du lemme A.2.4 que l'ensemble simplicial $\mathbf{hom}(X,Y)$ est fibrant et la relation d'homotopie sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X,Y)$ coïncide donc avec la relation de stricte homotopie. De plus deux morphismes $f, g : X \to Y$ sont strictement homotopes s'il existe un morphisme $H : X \otimes_{\Delta^\bullet} \Delta^1 \to Y$ tel que $H \circ (\mathrm{Id}_X \otimes_{\Delta^\bullet} d^0) = f$ et $H \circ (\mathrm{Id}_X \otimes d^1 = g$.

***Lemme A.2.5***

*1) Une fibration triviale $f : X \to Y$ entre objets cofibrants est une équivalence d'homotopie.*

*2) Soient $i : X \to Y$ un morphisme entre objets cofibrants et $f : Y \to Z$ une fibration triviale telle que $f \circ i$ est une fibration triviale. Alors $i$ est une équivalence d'homotopie.*

*Démonstration*

1) Tout d'abord en appliquant la propriété de relèvement à droite de $f$ par rapport à la cofibration $\varnothing \to Y$ on voit que $f$ admet une section $s$. En appliquant la propriété de relèvement à droite de $f$ par rapport à la cofibration

$$(\varnothing \to X, (d^0 \amalg d^0))_{\otimes} : (X \amalg X) \to X \otimes \Delta^1$$

(*cf.* axiome 6) à $f$ on obtient une homotopie $H$ de $\mathrm{Id}_X$ à $s \circ f$ telle que $f \circ H$ est le composé de $\mathrm{Id}_X \otimes s^0 : X \otimes \Delta^1 \to X$ et de $f$, ce qui montre en particulier que $f$ est une équivalence d'homotopie.

2) Traitons tout d'abord le cas où $i$ est une cofibration. En appliquant la propriété de relèvement à droite de $f \circ i$ par rapport à $i$ on voit qu'il existe un inverse à gauche $r$ de $i$ tel que $f \circ i \circ r = f$ ; en appliquant la propriété de relèvement à droite de $f$ par rapport à la cofibration

$$(\varnothing \to Y, (d^0 \amalg d^0))_{\otimes} : (Y \amalg Y) \to Y \otimes \Delta^1$$

on voit qu'il existe une homotopie $H$ de $\mathrm{Id}_Y$ à $i \circ r$ telle que $f \circ H$ est le composé du morphisme $Y \otimes \Delta^1 \to Y$ et de $f$, ce qui montre que $i$ est une équivalence d'homotopie.

En général, $i$ s'écrit comme composée d'une cofibration $j$ et d'une fibration triviale $q$ (axiome 4) ; $j$ est une équivalence d'homotopie d'après ce qui précède et $q$ est une équivalence d'homotopie d'après le point 1) : $i$ est donc bien une équivalence d'homotopie. □

Notons $h(\mathcal{E}_c)$ la catégorie obtenue en inversant les cofibrations triviales de la catégorie $\mathcal{E}_c$. Remarquons que le foncteur $\mathcal{E}_c \to h(\mathcal{E}_c)$ se factorise par le foncteur $\mathcal{E} \to \pi(\mathcal{E}_c)$. En effet, si $X$ est cofibrant, les morphismes $\mathrm{Id}_X \otimes d^0$ et $\mathrm{Id}_X \otimes d^1 : X \to X \otimes \Delta^1$ sont des cofibrations triviales d'après l'axiome 6) ; on en déduit aussitôt que ces deux morphismes ont même image dans $h(\mathcal{E}_c)$ et qu'il en est donc de même pour deux morphismes homotopes. En particulier, toute équivalence d'homotopie devient inversible dans la catégorie $h(\mathcal{E}_c)$.

Remarquons ensuite que la catégorie $h(\mathcal{E}_c)$ coïncide avec la catégorie obtenu en inversant dans $\mathcal{E}_c$ les morphismes qui sont des équivalences faibles dans $\mathcal{E}$. En effet, si $f$ est un $\mathcal{E}_c$-morphisme qui est une équivalence faible, $f$ s'écrit (compte tenu des axiomes 1, 2 et 4) comme composé d'une cofibration triviale et d'une fibration triviale. Or une fibration triviale dans $\mathcal{E}_c$ est une équivalence d'homotopie d'après le lemme A.2.5 et est inversible dans $h(\mathcal{E}_c)$.

Une première approximation de l'algèbre homotopique consiste à remarquer que les cofibrations triviales de $\mathcal{E}_c$ permettent un calcul de fractions à gauche dans la catégorie $\pi(\mathcal{E}_c)$ si bien que $h(\mathcal{E}_c)$ s'obtient par calcul de fractions à partir de $\pi(\mathcal{E}_c)$ (pour les notions relatives au mathcalcul de fractions dans les catégories, voir [**16**]). Cette remarque établit l'existence de la catégorie $h(\mathcal{E}_c)$.

Il est clair que l'inclusion $\mathcal{E}_c \to \mathcal{E}$ induit un foncteur $i : h(\mathcal{E}_c) \to h(\mathcal{E})$.

***Proposition A.2.6.*** — *Le foncteur $i : h(\mathcal{E}_c) \to h(\mathcal{E})$ est une équivalence de catégories.*

*Démonstration.* — Choisissons pour chaque objet $X$ de $\mathcal{E}$ une fibration triviale $q_X : X_c \to X$ avec $X_c$ cofibrant (l'existence est garantie par l'axiome 4) ; on peut même imposer que si $X$ est cofibrant $q_X$ est l'identité de $X$. On définit un foncteur $\mathcal{E} \to h(\mathcal{E}_c)$ de la façon suivante. A tout objet $X$ on associe $X_c$. Pour tout morphisme $f : X \to Y$, il existe un morphisme $f_c : X_c \to Y_c$ qui fait commuter le carré évident. Ce morphisme $f_c$ est unique à homotopie (stricte) près puisque, d'après le lemme A.2.4, l'application simpliciale $\mathbf{hom}(X_c, Y_c) \to \mathbf{hom}(X_c, Y)$ est une fibration triviale. Ainsi le $h(\mathcal{E}_c)$-morphisme défini par $f_c$ ne dépend que de $f$. On vérifie sans peine que l'on a bien défini ainsi un foncteur $\mathcal{E} \to h(\mathcal{E}_c)$. Ce foncteur envoie équivalences faibles sur isomorphismes comme il résulte des axiomes 1) et 2) ; il induit donc un foncteur $(-)_c : h(\mathcal{E}) \to h(\mathcal{E}_c)$ et les morphismes $q_X$ un isomorphisme naturel $q : i \circ (-)_c \cong \mathrm{Id}_{h(\mathcal{E})}$. Enfin il est clair que le foncteur $(-)_c \circ i$ est *égal* au foncteur identique, d'où l'affirmation. □

***Lemme A.2.7***

*1) Soient $i : X \to Y$ une cofibration triviale et $K$ un objet fibrant. Alors l'application $\pi(Y, K) \to \pi(X, K)$ est bijective.*

*2) Soient $X$ un objet cofibrant et $E \to B$ une fibration triviale. Alors l'application $\pi(X, E) \to \pi(X, B)$ est bijective.*

*Démonstration.* — Ce lemme résulte immédiatement du lemme A.2.4. □

Notons $\mathcal{E}_{cf}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ dont les objets sont à la fois fibrants et cofibrants. Le foncteur composé $\mathcal{E}_{cf} \to \mathcal{E}_c \to h(\mathcal{E}_c) \cong h(\mathcal{E})$ induit un foncteur $\gamma : \pi(\mathcal{E}_{cf} \to h(\mathcal{E}_c)$ (on a vu plus haut que le foncteur $\mathcal{E}_c \to h(\mathcal{E}_c)$ se factorise par le foncteur $\mathcal{E}_c \to \pi(\mathcal{E}_c))$.

***Proposition A.2.8.*** — *Le foncteur $\gamma : \pi(\mathcal{E}_{cf}) \to h(\mathcal{E}_c) \cong h(\mathcal{E})$ est une équivalence de catégories.*

*Démonstration.* — Choisissons pour chaque objet $X$ cofibrant une cofibration triviale $i_X : X \to X_f$ avec $X_f$ fibrant et cofibrant (l'existence est garantie par l'axiome 5) ; on peut même demander que si $X$ est fibrant $i_X$ est l'identité de $X$. On définit un foncteur $\mathcal{E}_c \to \pi(\mathcal{E}_{cf})$ de la façon suivante. A tout objet cofibrant $X$ on associe $X_f$. Pour tout morphisme $g : X \to Y$, il existe un morphisme $g_f : X_f \to Y_f$ qui fait commuter le carré évident et ce morphisme $g_f$ est unique à homotopie (stricte) près : cela résulte du lemme A.2.4 qui montre que l'application simpliciale $\mathbf{hom}(X_f, Y_f) \to \mathbf{hom}(X, Y_f)$ est une fibration triviale. Ainsi le $\pi(\mathcal{E}_{cf})$-morphisme défini par $g_f$ ne dépend que de $g$ et l'on vérifie sans peine que l'on a bien défini ainsi un foncteur $\mathcal{E}_c \to \pi(\mathcal{E}_{cf})$. Ce foncteur envoie cofibrations triviales sur isomorphismes : en effet, d'après le point 1) du lemme A.2.7, pour toute cofibration triviale $g : X \to Y$ (entre objets cofibrants) et tout objet fibrant $K$ l'application $\pi(Y_f, K) \to \pi(X_f, K)$ est bijective. On en déduit donc un foncteur $(-)_f : h(\mathcal{E}_c) \to \pi(\mathcal{E}_{cf})$ et les cofibrations triviales $i_X$ induisent un isomorphisme naturel $\theta : \mathrm{Id}_{h(\mathcal{E}_c)} \cong \gamma \circ (-)_f$. Enfin il est clair que le foncteur $(-) \circ \gamma$ est égal au foncteur identique, d'où l'affirmation. □

***Corollaire A.2.9* (lemme fondamental de l'algèbre homotopique)**

*Pour tout objet cofibrant $X$ et tout objet fibrant $K$, l'application naturelle*

$$\pi(X, K) \to [X, K]$$

*est bijective.*

*Démonstration.* — La cofibration triviale $i_X : X \to X_f$ induit une bijection $[X_f, K] \cong [X, K]$ (par définition) et une bijection $\pi(X_f, K) \cong \pi(X, K)$ (point 1) du lemme A.2.7) ; on peut donc supposer $X$ fibrant et cofibrant. De même le point 2) du lemme A.2.7 permet de remplacer $K$ par l'objet fibrant et cofibrant $K_c$ et le corollaire résulte donc de la proposition A.2.8. □

Soient $X$ et $Y$ deux objets quelconques de $\mathcal{E}$. On calcule l'ensemble $[X, Y]$ des $h(\mathcal{E})$-morphismes de $X$ vers $Y$ en choisissant une résolution cofibrante de $X$ c'est à dire une fibration triviale $P \to X$ avec $P$ cofibrant, puis une résolution cofibrante $Y' \to Y$ de $Y$ et enfin une résolution fibrante de $Y'$ c'est à dire une cofibration triviale $Y' \to I$ avec $I$ fibrant (et cofibrant). L'ensemble $[X, Y]$ s'identifie alors d'après le corollaire, via les bijections évidentes, à l'ensemble $\pi(P, I)$. L'un des inconvénients essentiels des axiomes de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles, est que l'on n'impose pas l'existence pour tout objet $Y$ d'une équivalence faible $Y \to I$ avec $I$ fibrant (cette démarche nous est imposée par le fait que nous ignorons ce résultat pour la catégorie des $k$-espaces).

A.2.2.1. *Equivalences faibles et $h(\mathcal{E})$-isomorphismes*

***Lemme A.2.10***

*1) Si un morphisme entre deux objets cofibrants et fibrants est inversible dans $h(\mathcal{E})$ alors c'est une équivalence d'homotopie.*

*2) Une fibration entre objets fibrants et cofibrants est inversible dans $h(\mathcal{E})$ si et seulement si c'est une fibration triviale.*

*3) Un morphisme $f : X \to Y$ entre objets cofibrants est une équivalence faible si et seulement si pour tout objet fibrant $K$ l'application simpliciale*

$$\mathbf{hom}(f, K) : \mathbf{hom}(Y, K) \to \mathbf{hom}(X, K)$$

*est une équivalence faible.*

*Démonstration.* — Le point 1) est contenu dans la proposition A.2.8.

2) Soit $p : E \to B$ une fibration entre objets fibrants et cofibrants inversible dans $\pi(\mathcal{E}_{cf}) \cong h(\mathcal{E})$. Soient $s' : B \to E$ un morphisme et $B \otimes \Delta^1 \to B$ une homotopie entre $\mathrm{Id}_B$ et $p \circ s'$. En appliquant la propriété de relèvement à droite pour $p$ par rapport à l'extension anodine $\mathrm{Id}_B \otimes d^0 : B \to B \otimes \Delta^1$ on en déduit l'existence d'une section $s : B \to E$ de $p$.

Dans la suite de la démonstration, pour tout ensemble simplicial $K$, on note encore $K$ au lieu de $|K|_{\Delta^\bullet}$ et pour toute application simpliciale $f$, on note encore $f$ au lieu de $|f|_{\Delta^\bullet}$ (observer que cela peut toutefois conduire à des confusion puisque en général les objets $|K \times_S L|_{\Delta^\bullet}$ et $|K|_{\Delta^\bullet} \times |L|_{\Delta^\bullet}$ ne sont pas isomorphes. Les produits qui apparaissent ci-après sont calculés dans $\mathcal{E}$) . Il est clair, par hypothèse, qu'il existe une homotopie (stricte) $H'$ de $s \circ p$ à $\mathrm{Id}_E$. Notons $j$ l'application simpliciale $d^0 \amalg d^1 : \Delta^0 \amalg \Delta^0 \to \Delta^1$ (c'est une cofibration) et $G$ le morphisme $E \times (j, d^0)_\times \to E$ dont la restriction à

$$E \times (|\Delta^0|_{\Delta^\bullet} \amalg |\Delta^0|_{\Delta^\bullet}) \times \Delta^1 \cong (E \times \Delta^1) \amalg (E \times \Delta^1)$$

est la somme de $H'$ et de $s \circ p \circ H'$ et dont la restriction à $E \times \Delta^1 \times \Delta^0$ est le composé du morphisme évident $E \times \Delta^1 \times \Delta^0 \to E$ et de $s \circ p$. On remarque alors que $p \circ G$ est égal au composé de l'extension anodine

$$E \times (|j|_{\Delta^\bullet}, |d^0|_{\Delta^\bullet})_\times \to E \times \Delta^1 \times \Delta^1$$

suivi du morphisme

$$E \times \Delta^1 \times \Delta^1 \to E \times \Delta^1$$

qui oublie le facteur du milieu et de $p \circ H'$. On en déduit à l'aide de la propriété de relèvement à droite pour $p$ par rapport à l'extension anodine

$$E \times (|j|_{\Delta^\bullet}, |d^0|_{\Delta^\bullet})_\times \to E \times \Delta^1 \times \Delta^1$$

une homotopie $H$ de $s \circ p$ à $\mathrm{Id}_E$ telle que $p \circ H$ est le composé de la projection $E \times \Delta^1 \to E$ et de $p$.

Nous pouvons maintenant établir que $p$ est une fibration triviale. Donnons nous une cofibration élémentaire $i : C \to D$, un morphisme $f : C \to E$ et un morphisme $g : D \to B$ tels que $p \circ f = g \circ i$. A l'aide de l'homotopie $H$ précédente, on obtient une homotopie $K : C \times \Delta^1 \to E$ entre $s \circ p \circ f$ et $f$ telle que $p \circ K$ est le composé de la projection $C \times \Delta^1 \to C$ et de $g \circ i$. A l'aide de la propriété de relèvement à droite pour $p$ par rapport à la cofibration triviale $(i, d^0)_\times$ on obtient un morphisme $k$ tel que $k \circ i = f$ et $p \circ k = g$, d'où l'affirmation.

3) La suffisance est claire d'après le corollaire A.2.9. Réciproquement, puisque d'après le lemme A.2.4 les ensembles simpliciaux $\mathbf{hom}(X, K)$ et $\mathbf{hom}(Y, K)$ sont fibrants, il suffit d'établir que pour tout ensemble simplicial $L$ l'application

$$\pi(L, \mathbf{hom}(Y, K)) \to \pi(L, \mathbf{hom}(X, K))$$

induite par $f$ est bijective. Or on dispose des bijections naturelles

$$\pi(L, \mathbf{hom}(Y, K)) \cong \pi(Y \otimes L, K) \quad \text{et} \quad \pi(L, \mathbf{hom}(X, K)) \cong \pi(X \otimes L, K)$$

et il suffit donc d'établir que les morphismes (entre objets cofibrants)

$$f \otimes L : X \otimes L \to Y \otimes L$$

sont des équivalences faibles dès que $f$ en est une. Si $f$ est une cofibration triviale c'est clair (axiome 6) ; ceci nous permet de remplacer $X$ et $Y$ par des objets cofibrants et fibrants ; mais alors d'après le point 1) du lemme A.2.10, si $f$ est une équivalence faible c'est une équivalence d'homotopie ce qui permet de conclure. □

***Corollaire A.2.11***. — *Un $\mathcal{E}$-morphisme est inversible dans $h(\mathcal{E})$ si et seulement si c'est une équivalence faible.*

*Démonstration.* — Soit $g$ un $\mathcal{E}$-morphisme inversible dans $h(\mathcal{E})$. En reprenant les notations de la démonstration des propositions A.2.6 et A.2.8, il est clair qu'il suffit d'établir que $(g_c)_f$ est une équivalence faible. Compte tenu de la proposition A.2.8, on est donc ramené à établir qu'une équivalence d'homotopie entre objets cofibrants et fibrants est une équivalence faible. Quitte à factoriser cette équivalence d'homotopie en une fibration suivie d'une cofibration triviale (qui est une équivalence d'homotopie d'après la proposition A.2.8) on se ramène donc à établir qu'une fibration entre objets cofibrants et fibrants qui est une équivalence d'homotopie est une fibration triviale ce qui est fait au point 2) du lemme A.2.10. □

***Remarque A.2.12***

1) La catégorie $\mathcal{E}_c$ munie des notions d'équivalences faibles, de cofibrations et de fibrations est essentiellement une catégorie de modèles fermée. En effet, lorsqu'on cherche à vérifier les axiomes des catégories de modèles fermées (voir **[30]**) on voit facilement que les axiomes CM2, CM3 et CM4 sont vérifiés et que les axiomes CM1 et CM5 sont vérifiés en partie : par exemple on dispose de l'objet initial $\varnothing$, de l'objet final

$*$ et pour tout morphisme $X \to Z$ et toute cofibration $X \to Y$ la somme amalgammée de $Y$ et $Z$ au dessus de $X$ est représentable.

2) D'après le point 3) du lemme A.2.10, une cofibration $f : X \to Y$ (entre objets cofibrants) est une équivalence faible si et seulement si pour tout objet fibrant $K$ l'application simpliciale

$$\mathbf{hom}(f, K) : \mathbf{hom}(Y, K) \to \mathbf{hom}(X, K)$$

est une fibration triviale. Il en résulte facilement que la classe des cofibrations triviales vérifie les propriétés **P1** à **P4** du §A.1.

**A.2.3. La catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles associée à une catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et extensions anodines élémentaires.** — Soit $\mathcal{E}$ une catégorie quasi-simpliciale dans laquelle les colimites et les produits finis sont représentables. On se donne deux ensembles $S$ et $S_{an}$ de $\mathcal{E}$-morphismes tels que :

a) les sources des éléments de $S$ et $S_{an}$ sont de présentation finie (§A.3.3) ;
b) $S_{an}$ est contenu dans $C(S)$ et pour tout $f \in S$, si l'on note $s(f)$ la source de $f$ alors $\varnothing \to s(f) \in C(S)$ ;
c) pour tout élément $f$ de $S$ et tout entier $n \geq 0$ le $\mathcal{E}$-morphisme $(f, \dot{\Delta}^n \to \Delta^n)_\otimes$ appartient à $C(S)$ ;
d) pour tout élément $f$ de $S$ et tout couple d'entiers $(r, n)$, $n \geq r \geq 0$, le $\mathcal{E}$-morphisme $(f, \Lambda^{n,r} \to \Delta^n)_\otimes$ appartient à $C(S_{an})$, $\Lambda^{n,r}$ désignant le cornet réunion des faces de $\Delta^n$ sauf la $r$-ème ;
e) pour tout élément $f$ de $S_{an}$ et tout entier $n \geq 0$ le $\mathcal{E}$-morphisme $(f, \dot{\Delta}^n \to \Delta^n)_\otimes$ appartient à $C(S_{an})$.
f) $\varnothing \to * \in S$.

Les éléments de $S$ s'appelleront alors les cofibrations élémentaires et ceux de $S_{an}$ les extensions anodines élémentaires et on dira alors que le triplet $(\mathcal{E}, S, S_{an})$ est une *catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et extensions anodines élémentaires.*

***Définition A.2.13***

1) Les éléments de $C(S)$ s'appelleront les *cofibrations.* Un objet $X$ sera dit *cofibrant* si le morphisme $\varnothing \to X$ appartient à $C(S)$. On notera $\mathcal{E}_c$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ formée par les objets cofibrants ;

2) Les éléments de $C(S_{an}$ dont la source est un objet cofibrant s'appelleront les *extensions anodines* ;

3) Un objet $Y$ sera dit *fibrant* si le morphisme $Y \to *$ appartient à $D(S_{an})$.

4) Les éléments de $D(S)$ s'appelleront les *fibrations triviales.*

On note $h(\mathcal{E})$ la catégorie obtenue en inversant les extensions anodines (entre objets cofibrants) et les fibrations triviales de la catégorie $\mathcal{E}$. Soient $X$ et $Y$ deux objets de $\mathcal{E}$ ; on notera $[X, Y]$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{h(\mathcal{E})}(X, Y)$. Un $\mathcal{E}$-morphisme s'appellera une *équivalence faible* s'il devient inversible dans $h(\mathcal{E})$.

On pourrait être tenté d'appeler les extensions anodines les cofibrations triviales, mais comme nous le verrons plus bas (corollaire A.2.25), il semble que cette tentation soit trop naïve en général (bien qu'elle ne le soit pas dans les deux exemples qui vont suivre).

***Exemple A.2.14***

1) On prend pour $\mathcal{E}$ la catégorie $= \mathcal{T}op$ des espaces topologiques munie de sa structure quasi-simpliciale naturelle, pour $S$ l'ensemble des inclusions $S^{n-1} \subset B^n$ de la sphère unité dans la boule unité de $\mathbf{R}^n$ et pour $S_{an}$ la famille des inclusions par zéro $I^{n-1} \subset I^n \cong I \times I^{n-1}$, $I$ désignant l'intervalle $[0, 1]$. Ces données définissent sur la catégorie quasi-simpliciale des espaces topologiques une structure de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et extensions anodines élémentaires. Les fibrations sont alors les fibrés de Serre. La catégorie homotopique correspondante est bien la catégorie homotopique usuelle (en d'autres termes la notion d'équivalences faibles déduites de la structure de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et extensions anodines élémentaires coïncide avec la notion usuelle **[27]**.

2) On prend cette fois pour $\mathcal{E}$ la catégorie (quasi-simpliciale) $\mathcal{S}$ des ensembles simpliciaux, pour $S$ l'ensemble des inclusions $\dot{\Delta}^n \subset \Delta^n$ du bord du $n$-ème simplexe standard dans lui-même et pour $S_{an}$ la famille des inclusions $\Lambda^{n,r} \subset \Delta^n$. Les fibrations correspondantes sont ici les fibrés de Kan entre ensembles simpliciaux de Kan. La catégorie homotopique correspondante est bien la catégorie homotopique usuelle **[27]**.

***Théorème A.2.15***. — *Pour toute catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et extensions anodines élémentaires $(\mathcal{E}, S, S_{an})$, les notions de cofibrations et d'équivalences faibles munissent la catégorie quasi-simpliciale $\mathcal{E}$ d'une structure de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles au sens de A.2.1.*

***Remarque A.2.16***. — L'auteur ignore en général si le quadruplet

$$(\mathcal{E}, C(S), W, D(C(S) \cap W))$$

constitut une structure de catégorie de modèles fermée. La difficulté essentielle est d'établir que tout morphisme peut s'écrire comme composé d'une équivalence faible et d'un morphisme de $D(C(S) \cap W)$.

A partir de maintenant on se fixe une catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et extensions anodines élémentaires $(\mathcal{E}, S, S_{an})$.

***Lemme A.2.17***. — *Tout morphisme $f$ de source un objet cofibrant peut s'écrire $p \circ i$ avec $p$ une fibration triviale et $i$ une cofibration et $q \circ j$ avec $q$ un élément de $D(S_{an})$ et $j$ une extension anodine.*

C'est une application immédiate du lemme A.1.2.

***Lemme A.2.18***. — *Pour toute cofibration $f$ de $\mathcal{E}$ et toute cofibration $g$ de $\mathcal{S}$ le $\mathcal{E}$-morphisme $(f,g)_\otimes$ est une cofibration. Si de plus, ou bien $f$ ou bien $g$ est une extension anodine, alors $(f,g)_\otimes$ est une extension anodine.*

C'est une conséquence immédiate du lemme A.1.4. Il en résulte formellement :

***Corollaire A.2.19***. — *Soient $i : X \to Y$ une cofibration et $p : E \to B$ un élément de $D(S_{an})$. Alors l'application simpliciale canonique*

$$\mathbf{hom}(Y,E) \to \mathbf{hom}(Y,B) \times_{\mathbf{hom}(X,B)} \mathbf{hom}(X,E)$$

*est une fibration. Si, de plus, ou bien $i$ est une extension anodine ou bien $p$ est une fibration triviale, alors cette fibration est une fibration triviale.*

***Lemme A.2.20***

*1) Une fibration triviale $f : X \to Y$ entre objets cofibrants est une équivalence d'homotopie.*

*2) Soient $i : X \to Y$ un morphisme entre objets cofibrants et $f : Y \to Z$ une fibration triviale telle que $f \circ i$ est une fibration triviale. Alors $i$ est une équivalence d'homotopie.*

*3) Une équivalence d'homotopie entre objets cofibrants est une équivalence faible.*

*Démonstration*. — Les points 1) et 2) s'établissent comme pour le lemme A.2.5 en remplaçant l'axiome 6) par le lemme A.2.18 et l'axiome 4) par le lemme A.2.17. Le point 3) résulte formellement du fait que si $X$ est cofibrant, les morphismes $\mathrm{Id}_X \otimes d^0$ et $\mathrm{Id}_X \otimes d^1 : X \to X \otimes \Delta^1$ sont des extensions anodines d'après le lemme A.2.18. □

***Lemme A.2.21***

*1) Soient $i : X \to Y$ une extension anodine (entre objets cofibrants !) et $K$ un objet fibrant. Alors l'application $\pi(Y,K) \to \pi(X,K)$ est bijective.*

*2) Soient $X$ un objet cofibrant et $E \to B$ une fibration triviale. Alors l'application $\pi(X,E) \to \pi(X,B)$ est bijective.*

*Démonstration*. — Comme dans la démonstration du lemme A.2.7, le lemme est une conséquence formelle du corollaire A.2.19. □

Notons $h(\mathcal{E}_c)$ la catégorie obtenue en inversant dans $\mathcal{E}_c$ les extensions anodines. Il est clair que l'inclusion $\mathcal{E}_c \to \mathcal{E}$ induit un foncteur $h(\mathcal{E}_c) \to h(\mathcal{E})$. A l'aide du même raisonnement que dans la démonstration de la proposition A.2.6, en remplaçant l'axiome 4) par le lemme A.2.17 et le lemme A.2.4 par le corollaire A.2.19, on obtient :

***Proposition A.2.22***. — *Le foncteur $h(\mathcal{E}_c) \to h(\mathcal{E})$ est une équivalence de catégories.*

On note $\mathcal{E}_{cf}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ formée des objets qui sont à la fois fibrants et cofibrants. Il est clair que le composé $\mathcal{E}_{cf} \to \mathcal{E}_c \to h(\mathcal{E}_c)$ induit un foncteur $\gamma : \pi(\mathcal{E}_{cf}) \to h(\mathcal{E}_c)$. A l'aide du même raisonnement que dans la démonstration de la proposition A.2.8, en remplaçant l'axiome 5) par le lemme A.2.17, le lemme A.2.4 par le corollaire A.2.19 et le lemme A.2.7 par le lemme A.2.21, on obtient cette fois :

***Proposition A.2.23.*** — *Le foncteur $\gamma : \pi(\mathcal{E}_{cf}) \to h(\mathcal{E}_c)$ est une équivalence de catégories.*

Le lemme suivant se démontre alors comme le lemme A.2.10 :

***Lemme A.2.24***

*1) Un morphisme entre deux objets cofibrants et fibrants est une équivalence faible si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie.*

*2) Un morphisme de $D(S_{an})$ entre objets fibrants et cofibrants est une équivalence faible si et seulement si c'est une fibration triviale.*

*3) Un morphisme $f : X \to Y$ entre objets cofibrants est une équivalence faible si et seulement si pour tout objet fibrant $K$ l'application simpliciale*

$$\mathbf{hom}(f, K) : \mathbf{hom}(Y, K) \to \mathbf{hom}(X, K)$$

*est une équivalence faible.*

***Corollaire A.2.25.*** — *Une cofibration entre objets cofibrants et fibrants est une équivalence faible si et seulement si c'est une extension anodine. Une cofibration $i$ entre objets cofibrants est une équivalence faible si et seulement s'il existe une extension anodine $i'$ telle que $i' \circ i$ est une extension anodine.*

*Démonstration.* — Soit $X \to Y$ une cofibration entre objets cofibrants et fibrants qui est une équivalence faible ; cette cofibration s'écrit comme composé d'une extension anodine suivie d'une fibration (d'après le lemme A.2.17) ; cette fibration entre objets cofibrants et fibrants est une équivalence faible donc, d'après le point 2) du lemme A.2.24, c'est une fibration triviale : on en déduit que la cofibration $X \to Y$ est facteur direct d'une extension anodine et est donc une extension anodine.

Supposons maintenant que $X \to Y$ est une cofibration entre objets cofibrants qui est une équivalence faible. Soient $j : X \to X_f$ une extension anodine avec $X_f$ fibrant (et cofibrant bien sûr), $j' : Y \to Y'$ l'image directe de $j$ par $i$ et $j'' : Y' \to Y_f$ une extension anodine avec $Y_f$ fibrant. Alors la cofibration $X_f \to Y_f$ est une équivalence faible et donc une extension anodine d'après ce qui a été vu au début de la démonstration, ce qui démontre le corollaire. □

On déduit très facilement du corollaire précédent le résultat suivant :

***Corollaire A.2.26.*** — *Un morphisme de but un objet fibrant appartient à $D(C(S) \cap W)$ si et seulement si il appartient à $D(S_{an})$.*

A.2.3.1. *Démonstration du théorème.* — A.2.15 Les axiomes 1), 2), 3), 4) sont faciles à établir. L'axiome 5) résulte du lemme A.2.17 et du corollaire A.2.26 et l'axiome 6) résulte facilement du lemme A.2.18 et du corollaire A.2.25.

**A.2.4. Fonctorialité des catégories homotopiques.** — Soient $(\mathcal{E}, \mathit{Cof}, W)$ et $(\mathcal{E}', \mathit{Cof}', W')$ deux catégories quasi-simpliciales avec cofibrations et équivalences faibles. Un morphisme de $(\mathcal{E}, \mathit{Cof}, W)$ vers $(\mathcal{E}', \mathit{Cof}', W')$ est une paire $(F, \theta)$ formée d'un foncteur $F : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ et d'un isomorphisme naturel

$$\theta : F \circ \Delta^\bullet_{\mathcal{E}} \cong \Delta^\bullet_{\mathcal{E}}$$

tels que

$$F(\mathit{Cof}) \subset \mathit{Cof}', \quad F(\mathit{Cof} \cap W) \cap \mathit{Cof}' \cap W'$$

et tels que pour tout $X \in \mathcal{E}$, le morphisme canonique

$$F(X \times \Delta^n_{\mathcal{E}}) \to F(X) \times F(\Delta^n) \cong F(X) \times \Delta^n_{\mathcal{E}'}$$

est un isomorphisme.

Un tel foncteur $F$ induit donc par restriction un foncteur $F_c : \mathcal{E}_c \to \mathcal{E}'$ lequel induit clairement un foncteur $h(F_c) : h(\mathcal{E}_c) \to h(\mathcal{E}')$. Le foncteur $h(\mathcal{E}) \to h(\mathcal{E}')$ composé de l'inverse de l'équivalence de catégories $h(\mathcal{E}_c) \to h(\mathcal{E})$ et du foncteur $h(F_c)$ se notera $L_h(F)$ : c'est le foncteur dérivé à gauche du foncteur $F$ par rapport au foncteur $\mathcal{E} \to h(\mathcal{E})$ au sens de **[27]**.

A.2.4.1. *Paires de foncteurs adjoints.* — Soient

$$G : (\mathcal{E}, \mathit{Cof}, W) \to (\mathcal{E}', \mathit{Cof}', W')$$

un morphisme de catégories quasi-simpliciales avec cofibrations et équivalences faibles et $D : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ un foncteur adjoint à droite de $G$. Observons que cette adjonction s'étend automatiquement à un isomorphisme naturel, en $X \in \mathcal{E}$ et $Y \in \mathcal{E}'$, d'ensembles simpliciaux $\mathbf{hom}(X, D(Y)) \cong \mathbf{hom}(G(X), Y)$, compte tenu de la bijection naturelle, pour tout $n \geq 0$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}'}(G(X) \times \Delta^n_{\mathcal{E}'}, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}'}(G(X \times \Delta^n_{\mathcal{E}}), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X) \times \Delta^n_{\mathcal{E}}, D(Y)).$$

Il résulte immédiatement que l'image par $D$ d'une fibration (resp. d'une fibration triviale) est une fibration (resp. une fibration triviale) et que pour tout $X$ dans $\mathcal{E}$ et tout $Y$ dans $\mathcal{E}'$ on dispose d'une bijection naturelle $\pi(X, D(Y)) \cong \pi(G(X), Y)$ ; ainsi pour $X$ cofibrant et $Y$ fibrant on obtient une bijection naturelle :

$$[X, D(Y)] \cong [G(X), Y].$$

Notons $R_h(D) : h\mathcal{E}' \to h(\mathcal{E})$ le foncteur composé de l'inverse de l'équivalence de catégories $\pi(\mathcal{E}'_{cf}) \to h(\mathcal{E}')$ (*cf.* proposition A.2.23), du foncteur $\pi(\mathcal{E}'_{cf}) \to h(\mathcal{E})$ induit par $D$ (le foncteur $R_h(D)$ est le foncteur dérivé à droite du foncteur $D$ par rapport au foncteur $\mathcal{E}' \to h(\mathcal{E}')$. Le raisonnement de **[27]** permet de déduire de la bijection naturelle ci-dessus que le foncteur $R_h(D)$ est adjoint à droite du foncteur $L_h(G)$.

A.2.4.2. *Structures multiplicatives.* — Soient

$$(\mathcal{E}, Cof, W), \quad (\mathcal{E}', Cof', W') \quad \text{et} \quad (\mathcal{E}'', Cof'', W'')$$

trois catégories quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles et $\wedge$ un foncteur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$ qui commute aux colimites et tel que :

a) $(Cof, Cof')_\wedge \subset Cof''$ ;
b) $(Cof, Cof' \cap W')_\wedge \subset Cof'' \cap W''$ ;
c) $(Cof \cap W, Cof')_\wedge \subset Cof'' \cap W''$.

***Exemple A.2.27.*** — Soient $(\mathcal{E}, S, San)$, $(\mathcal{E}', S', S'_{an})$ et $(\mathcal{E}'', S'', S''_{an})$ trois catégories quasi-simpliciales avec cofibrations et extensions anodines élémentaires et $\wedge$ un foncteur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$ qui commute aux colimites et tel que :

$\alpha$) $(S, S')_\wedge \subset C(S)$ ;
$\beta$) $(S, S'_{an})_\wedge \subset C(S_{an})$ ;
$\gamma$) $(S_{an}, S')_\wedge \subset C(S''_{an})$.

Pour les structures de catégories quasi-simpliciales avec cofibrations et équivalences faibles associées (*cf.* §A.2.3) les propriétés a), b) et c) précédentes sont satisfaites. Cela résulte en effet du lemme A.1.4 et du corollaire A.2.25.

Ces propriétés impliquent que le foncteur (induit par restriction) $\wedge_c : \mathcal{E}_c \times \mathcal{E}'_c \to \mathcal{E}''$ envoie paires de cofibrations triviales sur cofibrations triviales ; le foncteur $\wedge_c$ induit donc un foncteur $h(\wedge_c) : h(\mathcal{E}_c) \times h(\mathcal{E}'_c) \to h(\mathcal{E}''_c)$, et l'on en déduit comme d'habitude le foncteur $\wedge^L : h(\mathcal{E}) \times h(\mathcal{E}') \to h(\mathcal{E}'')$ (dérivé à gauche du foncteur $\wedge$).

**A.2.5. Variante pointée.** — Soit $\mathcal{E}$ une catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles. La théorie de l'homotopie associée à e possède une variante pointée. Notons $\mathcal{E}_*$ la catégorie des $\mathcal{E}$-objets pointés, c'est à dire la catégorie dont les objets sont les couples $(X, x)$ formés d'un objet $X$ de $\mathcal{E}$ et d'un morphisme (le point base) $x : * \to X$ et les morphismes les $\mathcal{E}$-morphismes « respectant le point base ». Notons $(-)_+ : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_*$ le foncteur qui à l'objet $X$ associe la somme $X_+$ de $X$ et de $*$ (dans $\mathcal{E}$) que l'on pointe de façon évidente.

La structure de catégorie quasi-simpliciale sur $\mathcal{E}$ induit une structure de catégorie quasi-simpliciale sur $\mathcal{E}_*$ : on prends pour objet cosimplicial $(\Delta^\bullet_{\mathcal{E}})_+$. Si $X$ et $Y$ sont deux objets pointés de $\mathcal{E}$, l'ensemble simplicial $\mathbf{hom}(X, Y)_*$ correspondant est le sous-ensemble simplicial de $\mathbf{hom}(X, Y)$ formé des morphismes qui « respectent le point base ».

Notons $Cof_*$ l'ensemble des $\mathcal{E}_*$-morphismes $X \to Y$ dont le $\mathcal{E}$-morphisme sous-jacent $X \to Y$ est une cofibration et tel que le point base de $X$, $* \to X$, est une cofibration. Enfin notons $W_*$ l'ensemble des $\mathcal{E}_*$-morphismes dont le $\mathcal{E}$-morphisme sous-jacent est une équivalence faible. Il est facile de vérifier que le triplet $(\mathcal{E}_*, Cof_*, W_*)$ est une catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles. On notera

$h_*(\mathcal{E})$ la catégorie homotopique correspondante et pour toute paire $(X, Y)$ d'objets pointés, $[X, Y]_*$ l'ensemble des $h_*(\mathcal{E})$-morphismes de $X$ vers $Y$.

Remarquons que la catégorie $\mathcal{E}_{*c}$ s'identifie alors à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}_*$ formés des objets pointés dont le point base est une cofibration (dans $\mathcal{E}$). Le foncteur $\otimes_* : \mathcal{E}_* \times \mathcal{S} \to \mathcal{E}_*$ correspondant à la structure quasi-simpliciale sur $\mathcal{E}_*$ associe au couple $(X, K)$ le quotient (dans $\mathcal{E}$) $(X \otimes K)/(* \otimes K)$ pointé de façon évidente.

Pour tout objet $X$ de $\mathcal{E}_*$ et tout ensemble simplicial pointé $K$ on note $X \vee K$ la somme dans $\mathcal{E}_*$ de $X$ et $* \otimes K = |K|_{\Delta^{bullet}}$ et on note $X \wedge K$ le «smash-produit extérieur» de $X$ par $K$ c'est à dire l'objet de $\mathcal{E}$ quotient de $X \otimes K$ par $X \vee K$ et pointé de façon évidente. Il est facile d'établir que ce foncteur

$$\wedge : \mathcal{E}_* \times \mathcal{S}_* \to \mathcal{E}_*, \quad (X, K) \mapsto X \wedge K$$

vérifie les hypothèses du paragraph précédent. On notera

$$(-) \wedge^L (-) : h(\mathcal{E}_*) \times h(\mathcal{S}_*) \to h(\mathcal{E}_*)$$

le foncteur qu'il induit. En particulier, on note $\Sigma : h(\mathcal{E}_*) \to h(\mathcal{E}_*)$ le foncteur $X \mapsto X \wedge^L S^1$, $S^1$ désignant le 1-simplexe standard modulo son bord.

Il est clair que le foncteur $(-)_+ : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_*$ est un morphisme de catégories quasi-simpliciales avec cofibrations et équivalences faibles. Comme de plus il est adjoint à gauche du foncteur «oubli du point base» $\mathcal{E}_* \to \mathcal{E}$ on peut donc appliquer les résultats du paragraphe ci-dessus. Ainsi, pour tout objet cofibrant $X$ et tout objet pointé $Y$, on dispose d'une bijection naturelle :

$$[X, Y] \cong [X_+, Y]_*.$$

Si la structure de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles sur $\mathcal{E}$ est induite par une structure de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et extensions anodines élémentaires $(\mathcal{E}, S, S_{an})$, il est facile de vérifier que la structure de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles sur $\mathcal{E}_*$ construite ci-dessus est induite par la structure de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et extensions anodines élémentaires $(\mathcal{E}_*, S_+, S_{an+})$.

## A.3. Colimites et limites homotopiques

Dans ce paragraphe, nous supposons le lecteur familier avec [**6**].

**A.3.1.** Soit $(\mathcal{E}, \mathit{Cof}, W)$ une catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et équivalences faibles. Pour toute petite catégorie $I$, on note $I\mathcal{E}$ la catégorie des foncteurs $X : I \to \mathcal{E}$.

A.3.1.1. Soit $X : \Delta^{op} \to \mathcal{E}$ un objet simplicial de $\mathcal{E}$. On note $|X|$ la réalisation géométrique de $X$ c'est à dire la cofin du foncteur

$$X \otimes \Delta^\bullet : \Delta^{op} \times \Delta \to \mathcal{E}, \quad (n, m) \mapsto X_n \otimes \Delta^m$$

(*cf.* [**23**] pour la notion de cofin). Disons simplement que c'est le quotient de $\amalg_{n \geq 0} X_n \otimes \Delta^n$ par les relations standard (voir plus bas). On définit ainsi un foncteur

$$|-| : \Delta^{op}\mathcal{E} \to \mathcal{E}.$$

Soient $I$ une petite catégorie et $X : I \to \mathcal{E}$ un foncteur. On associe à $X$ un objet simplicial de $\mathcal{E}$, le « remplacement simplicial de $X$ », noté $\amalg_I X$ (ou plus simplement $\amalg X$), en associant à l'entier $n$ la somme dans $\mathcal{E}$ de la famille $\{X(i_0)\}_{i_0 \to i_1 \to \ldots \to i_n \in N_n(I)}$, $i_0 \to i_1 \to \ldots \to i_n$ parcourant l'ensemble $N_n(I)$ des suites de $n$ morphismes composables dans $I$ (*cf.* [**6**]).

Pour tout objet $i$ de $I$, notons $I/i$ la catégorie des $I$-objets au dessus de $i$, et $X/i : I/i \to \mathcal{E}$ le foncteur composé de $X$ et de l'oubli $I/i \to I$. On note $\underline{X} : I \to \mathcal{E}$ le foncteur qui envoie $i$ sur la réalisation géométrique $|\amalg_{I/i} X/i|$ (en laissant au lecteur le soin d'expliciter le morphisme $\underline{X}(i) \to \underline{X}(j)$ associé à un $I$-morphisme $i \to j$) et $\theta_X : \underline{X} \to X$ la transformation naturelle évidente induite pour chaque élément $i_0 \to i_1 \to \ldots \to i_n \to i$ de l'ensemble $N_n(I/i)$ par le morphisme évident $X(i0) \otimes \Delta^n \to X(i)$.

Le lecteur observera que la réalisation géométrique $|\amalg_I X|$ du remplacement simplicial de $X$ s'identifie à la colimite du foncteur$\underline{X}$.

***Définition A.3.1***. — Pour tout foncteur $X : I \to \mathcal{E}_c$, on note $\operatorname{hocolim}_I X$ et on appelle *colimite homotopique* de $X$, l'objet $\operatorname{colim}_I \underline{X}$ (qui s'identifie également à la réalisation géométrique $|\amalg X|$ du remplacement simplicial de $X$).

***Lemme A.3.2***

*1) Pour tout foncteur $X : I \to \mathcal{E}_c$ l'objet* $\operatorname{hocolim}_I X$ *est un objet cofibrant.*

*2) Pour tout foncteur $X : I \to \mathcal{E}_c$ et tout objet $K$ de $\mathcal{E}$, on dispose d'un isomorphisme naturel :*

$$\mathbf{hom}(\operatorname{hocolim}_I X, K) \cong \operatorname{holim}_{i \in I} \mathbf{hom}(X(i), K)$$

*3) Soient $X$ et $Y$ deux foncteurs $I \to \mathcal{E}$ et $\theta : X \to Y$ une transformation naturelle telle que pour chaque objet $i$ de $I$ le morphisme $\theta(i) : X(i) \to Y(i)$ est une équivalence faible. Alors le morphisme* $\operatorname{hocolim}_I \theta : \operatorname{hocolim}_I X \to \operatorname{hocolim}_I Y$ *est une équivalence faible.*

*Démonstration*

2) La démonstration de ce point est facile, il suffit d'expliciter chacun des membres de l'isomorphisme naturel (*cf.* [**6**, §XII.4.1]).

1) Pour démontrer qu'un objet $Z$ est cofibrant il suffit de démontrer que le morphisme $Z$ a la propriété de relèvement à gauche par rapport à toute fibration triviale $p : E \to B$ (utiliser le corollaire A.1.3) ou encore que pour toute fibration triviale $p : E \to B$ le morphisme $\mathbf{hom}(Z, E) \to \mathbf{hom}(Z, B)$ est une fibration triviale (les deux affirmations sont équivalentes d'après le lemme A.2.4). Compte tenu de la bijection naturelle du point 2), du fait que pour tout $i$ dans $I$ l'application $\mathbf{hom}(X(i), E) \to \mathbf{hom}(X(i), B)$ est une fibration triviale (lemme A.2.4) le point 1) du lemme résulte du fait que le foncteur $holim_I$ préserve les fibrations triviales (*cf.* [**6**, §XI]).

3) Soit $K$ un objet fibrant. Compte tenu de la bijection du point 1), du lemme A.2.4 et du point 3) du lemme A.2.10, l'affirmation résulte du fait que pour toute transformation naturelle $\psi$ entre foncteurs $I^{op} \to \mathcal{S}_f$ telle que pour tout objet $i$ de $I$ l'application simpliciale $\psi(i)$ est une équivalence faible alors l'application simpliciale $holim_{I^{op}}\psi$ est aussi une équivalence faible (*cf.* [**6**, §XI.5.6]). □

Appelons équivalences faibles de la catégorie $I\mathcal{E}$ les transformations naturelles $\theta$ telles que pour tout objet $i$ de $I$ le morphisme $\theta(i)$ est une équivalence faible (de $\mathcal{E}$). Notons $h(I\mathcal{E}_c)$ (resp. $h(I\mathcal{E})$ la catégorie obtenue en inversant les équivalences faibles de la catégorie $I\mathcal{E}_c$ (resp. $I\mathcal{E}$).

***Corollaire A.3.3.*** — *Le foncteur* $\mathrm{hocolim}_I : I\mathcal{E}_c \to \mathcal{E}$ *préserve les équivalences faibles et le foncteur induit* $\mathrm{hocolim}_I : h(I\mathcal{E}_c) \to h(\mathcal{E})$ *est le foncteur dérivé gauche du foncteur* $\mathrm{colim}_I : I\mathcal{E}_c \to \mathcal{E}$.

*Démonstration.* — La première affirmation est contenue dans le lemme précédent. Pour la seconde remarquons que pour tout foncteur $X : I \to \mathcal{E}_c$ le foncteur $\underline{X} : I \to \mathcal{E}$ est à valeurs dans $\mathcal{E}_c$ comme cela résulte du point 1) du lemme A.3.2. De plus la transformation naturelle $\theta_X : \underline{X} \to X$ est une équivalence faible ; en effet pour tout $i$ de $I$, le morphisme $\underline{X}(i) \to X(i)$ est une équivalence faible (s'en convaincre en remarquant que la catégorie $I/i$ admet un objet initial, en utilisant [**6**, §XI.9] et le point 2) du lemme A.3.2 avec $K$ fibrant). On conclut à l'aide du point 3) du lemme A.3.2 et du fait signalé plus haut que $\mathrm{hocolim}_I X$ s'identifie naturellement à la colimite sur $I$ du foncteur $\underline{X}$. □

***Remarque A.3.4***

1) L'auteur ignore si en général le foncteur $h(I\mathcal{E}_c) \to h(I\mathcal{E})$ est une équivalence de catégories.

C'est le cas cependant pour une catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et extensions anodines élémentaires puisqu'on dispose alors de l'axiome 5) *fonctoriellement* (autrement dit la factorisation du morphisme $f$ dans cet axiome peut être choisie fonctoriellement *cf*A.1.2). On en déduit alors pour *tout* foncteur $X : I \to \mathcal{E}$ une équivalence faible naturelle $X' \to X$ avec $X' \in I\mathcal{E}_c$.

Dans ce cas le foncteur $L(\mathrm{colim}_I) : h(I\mathcal{E}) \to h(\mathcal{E})$ composé de l'inverse de l'équivalence de catégories $h(I\mathcal{E}_c) \to h(I\mathcal{E})$, du foncteur $\mathrm{hocolim}_I : h(I\mathcal{E}_c) \to h(\mathcal{E})$ est bien le foncteur dérivé à gauche du foncteur $\mathrm{colim}_I : I\mathcal{E} \to \mathcal{E}$. Il est également utile, dans ce cas, d'introduire le foncteur $\mathrm{hocolim}'_I : I\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ (qui dépend du choix de l'équivalence faible naturelle $X' \to X$) qui à tout $X \in I\mathcal{E}$ associe $\mathrm{hocolim}_I\, X'$. Ce foncteur préserve les équivalences faibles et induit le foncteur $L(\mathrm{colim}_I)$.

2) Il est probable que, « souvent », le foncteur $\mathrm{hocolim}_I : h(I\mathcal{E}_c) \to h(\mathcal{E}_c)$ est adjoint à gauche du foncteur « diagonale » $h(\mathcal{E}_c) \to h(I\mathcal{E}_c)$.

**A.3.2. Exemples.** — On se fixe ici une catégorie quasi-simpliciale $\mathcal{E}$ avec cofibrations et équivalences faibles vérifiant, pour simplifier l'exposition, l'axiome de factorisations fonctorielles évoqué à la remarque A.3.41) du paragraphe précédent (on fixe donc un foncteur qui associe à tout objet $X$ de $\mathcal{E}$ une fibration triviale $X' \to X$ avec $X'$ cofibrant).

A.3.2.1. *Carrés homotopiquement cocartésiens.* — On dira que le carré commutatif de la catégorie $\mathcal{E}$ :

$$\begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \to & \Sigma \end{array}$$

est *homotopiquement cocartésien* si le morphisme canonique (*cf.* remarque A.3.41) pour les notations) :

$$\mathrm{hocolim}\begin{pmatrix} X' & \to & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z' & \to & \end{pmatrix} \to \Sigma'$$

est une équivalence faible.

On se convainc facilement du lemme suivant :

***Lemme A.3.5.*** — *Si les objets $X$, $Y$, $Z$ et $\Sigma$ sont cofibrants, le carré ci-dessus est homotopiquement cocartésien si et seulement si pour tout objet fibrant $K$ le carré d'ensembles simpliciaux :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{hom}(\Sigma, K) & \to & \mathbf{hom}(Y, K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{hom}(Z, K) & \to & \mathbf{hom}(X, K) \end{array}$$

*est homotopiquement cartésien.*

Ce lemme permet d'affirmer que certains résultats classiques concernant les carrés homotopiquement cartésiens induisent un résultat dual pour la théorie de l'homotopie dans $\mathcal{E}$. En voici quelques exemples :

***Lemme A.3.6.*** — *Pour tout diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} A & \to & B & \to & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y & \to & Z \end{array}$$

*dans lequel le carré de gauche et le carré extérieur sont homotopiquement cocartésiens le carré de droite est homotopiquement cocartésien.*

***Lemme A.3.7.*** — *Tout diagramme cocartésien :*

$$\begin{array}{ccc} A & \to & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y \end{array}$$

*dans lequel $X$, $Y$, $A$ et $B$ sonnt cofibrants et le morphisme $A \to B$ une cofibration est homotopiquement cocartésien.*

***Lemme A.3.8.*** — *Soient $F$, $G$, $H$ et $K$ des foncteurs $I \to \mathcal{E}$, $f : F \to G$, $h : F \to H$, $g : G \to K$ et $k : H \to K$ des transformations naturelles telles que pour tout objet $i$ de $I$ le carré*

$$\begin{array}{ccc} F(i) & \to & G(i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(i) & \to & K(i) \end{array}$$

*est homotopiquement cocartésien. Alors le carré*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{hocolim}'_I F & \to & \mathrm{hocolim}'_I G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{hocolim}'_I H & \to & \mathrm{hocolim}'_I K \end{array}$$

*est homotopiquement cocartésien.*

***Remarque A.3.9.*** — Plus généralement, les colimites homotopiques commutent entre elles (voir [**6**, §§XI.4.3 et XII.3.3]). Plus généralement encore nous laissons au lecteur le soin de comprendre le sens du principe suivant : tout résultat classique concernant les limites homotopiques dans la catégorie des ensembles simpliciaux induit un résultat dual pour la théorie de l'homotopie dans $\mathcal{E}$.

A.3.2.2. *Cofibres homotopiques.* — Soit $f : X \to Y$ un $\mathcal{E}$-morphisme. On appelle *cofibre homotopique* l'objet

$$\mathrm{hocolim}' \begin{pmatrix} X & \to & Y \\ \downarrow & & \\ * & & \end{pmatrix}$$

et on le note $Y/^h X$ (on parlera parfois de quotient homotopique de $Y$ par $X$).

Si $f : X \to Y$ est un morphisme on note $Y/X$ la colimite du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ \downarrow & & \\ * & & \end{array}$$

Lorsque $f$ est une cofibration, le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & & Y/X \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien (d'après le lemme A.3.7) et l'on obtient ainsi une équivalence faible :

$$Y/^h X \to Y/X.$$

A.3.2.3. *Suite exacte de Puppe.* — Supposons maintenant que $f : X \to Y$ est une cofibration de la catégorie $\mathcal{E}_*$ (voir §A.2.5). Pour tout objet fibrant pointé $K$, l'application simpliciale $\mathbf{hom}(Y, K)_* \to \mathbf{hom}(X, K)_*$ est donc une fibration (pointée) et la longue suite exacte de groupes (et d'ensembles pointés) d'homotopie associée s'appelle la suite exacte de Puppe associée à $f$.

A.3.2.4. *Télescopes.* — Le principe énoncé à la remarque A.3.9 fournit automatiquement les deux résultats suivants :

***Proposition A.3.10.*** — *Pour toute suite*

$$f_0 : X_0 \to X_1,\ f_1 : X_1 \to X_2, \ldots,\ f_n : X_n \to X_{n+1}, \ldots,$$

*de cofibrations composables (chacun des $X_n$ est donc cofibrant) le morphisme canonique*

$$\mathrm{hocolim}_n\, X_n \to \mathrm{colim}_n\, X_n$$

*est une équivalence faible.*

***Proposition A.3.11* (Suite exacte de Milnor).** — *Avec les mêmes hypothèses que dans la proposition précédente, pour tout groupe $Y$ de la catégorie $h(\mathcal{E})$ (ou $H$-groupe) il existe une suite exacte naturelle de groupes :*

$$0 \to \lim^1_n[\Sigma((X_n)_+), Y] \to [\mathrm{colim}_n\, X_n, Y] \to \lim_n[X_n, Y] \to 0.$$

A.3.2.5. *Colimites homotopiques d'objets simpliciaux.* — Soit $X.$ un objet simplicial de la catégorie $\mathcal{E}$. La réalisation géométrique $|X.|$ de $X.$ (§A.3.1) s'explicite de la façon suivante : c'est le coégalisateur du diagramme évident :

$$\amalg_{n,m\geq 0} X_n \otimes \Delta^m \overset{\to}{\underset{\to}{}} \amalg_n X_n \otimes \Delta^n.$$

Pour tout entier $s \geq 0$, on note $F_s|X.|$ le coégalisateur du diagramme :

$$\amalg_{n,m} X_n \otimes sk_s(\Delta^m) \overset{\to}{\underset{\to}{}} \amalg_n X_n \otimes sk_s\Delta^n$$

($sk_s(-)$ désignant le $s$-squelette d'un ensemble simplicial [**16**]). On se convainc facilement de l'existence d'un carré cocartésien naturel :

$$\begin{array}{ccc} (X_s^d \otimes \Delta^s) \amalg_{(X_s^d \otimes \dot{\Delta}^s)} (X_s \otimes \dot{\Delta}^s) & \to & X_s \otimes \Delta^s \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_{s-1}|X.| & \to & F_s|X.| \end{array}$$

où l'on note $X_s^d$ la réunion dans $X_s$ des dégénérescences, c'est à dire

$$S[s_i, i \in \{0, \ldots, s-1\}],$$

en adaptant les notations du §2.1.2, et en remarquant que les produits fibrés de $X_{n-1}$ et $X_{n-1}$ au dessus de $X_n$ — *via* des dégénérescences — est toujours représentable par $X_{n-2}$ ou $X_{n-1}$).

On dira que $X.$ est *cofibrant* si pour tout entier $s \geq 0$ le morphisme canonique $X_s^d \to X_s$ est une cofibration (pour $s = 0$ cela signifie que $X_0$ est cofibrant).

***Lemme A.3.12.*** — *Pour tout objet simplicial cofibrant $X.$, le morphisme*

$$\operatorname{hocolim}_I X \to |X|$$

*(induit par la transformation naturelle $\Psi_X : \amalg X. \to X.$) est une équivalence faible.*

*Démonstration.* — Il suffit de remarquer que les hypothèses sur $X.$ impliquent que pour tout objet fibrant $K$ l'ensemble simplicial cosimplicial $\mathbf{hom}(X., Y)$ est fibrant au sens de [**6**, §X.4.6] et que l'application simpliciale

$$\mathbf{hom}(|X|, K) \to \mathbf{hom}(\operatorname{hocolim}_I X, K)$$

induite s'identifie naturellement à l'aide du point 2) du lemme A.3.2 à l'application naturelle :

$$\operatorname{Tot}(\mathbf{hom}(X., K)) \to \mathit{holim}_{i \in \Delta^{op}} \mathbf{hom}(X(i), K)$$

laquelle est une équivalence faible d'après [**6**, §XI.4.4]. On conclut à l'aide du point 3) du lemme A.2.10. □

**A.3.3. Conditions de finitude homotopiques.** — Dans cette section, $\mathcal{E}$ désigne une catégorie dans laquelle les colimites et les produits sont représentables.

***Définition A.3.13.*** — On dit qu'un objet $X \in \mathcal{E}$ est de *présentation finie* si pour tout foncteur $F : \mathcal{I} \to \mathcal{E}$, avec $\mathcal{I}$ une petite catégorie filtrante à droite, l'application $\operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(X, F(i)) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(X, \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F)$ est bijective.

Il est clair que toute colimite finie d'objets de présentation finie est de présentation finie : cela résulte de l'exactitude des colimites filtrantes d'ensembles. On notera $\mathcal{E}^{PF}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ dont les objets sont de présentation finie.

*Objets cofibrants de présentation finie.* — On se fixe dorénavant une structure de catégorie quasi-simpliciale avec cofibrations et extensions anodines élémentaires sur $\mathcal{E}$, $(\mathcal{E}, S, S_{an})$ (*cf.* §A.2.3). On suppose que les *buts* des éléments de $S$ et $S_{an}$ sont de présentation finie (par définition, on sait déjà que les sources de ces morphismes le sont).

On dira qu'un objet $X$ est strictement cofibrant si le morphisme $\varnothing \to X$ appartient à $C''(S)$ (*cf.* §A.1). Tout objet cofibrant est donc facteur direct d'un objet strictement cofibrant et pour tout objet $X$ il existe une fibration triviale $X_c \to X$ avec $X_c$ un objet strictement cofibrant.

***Lemme A.3.14.*** — *Soit $X$ un objet strictement cofibrant. Alors il existe une petite catégorie filtrante $I$, un foncteur $F : I \to \mathcal{E}_c^{PF}$ ($\mathcal{E}_c^{PF}$ désignant la sous catégorie pleine de $\mathcal{E}$ formée des objets cofibrants et de présentation finie) et une transformation naturelle $\theta : F \to X$ tels que :*

a) *le morphisme* $\operatorname{colim}_I F \to X$ *induit par $\theta$ est un isomorphisme ;*

b) *le morphisme* $\operatorname{hocolim}_I F \to X$ *induit par $\theta$ est une équivalence faible.*

*Construction préliminaire.* — Soient $X$ un objet cofibrant, $E$ un ensemble et pour chaque élément $e \in \mathcal{E}$ une cofibration élémentaire $i_e : X_e \to Y_e$ et un morphisme $f_e : X_e \to X$. On note $i : X \to Y$ l'image directe par la somme des $f_e$ de la somme des $i_e$. Supposons donnés une petite catégorie filtrante $I$, telle que $\#\operatorname{Hom}_I(i,j) \leq 1$ pour toute paire d'objets $(i,j) \in I^2$, un foncteur $F : I \to \mathcal{E}_c^{PF}$ et une transformation naturelle $\theta : F \to X$ tels que le morphisme $\operatorname{colim}_I F \to X$ (resp. $\operatorname{hocolim}_I F \to X$) induit par $\theta$ est un isomorphisme (resp. une équivalence faible).

On note $J$ la catégorie dont les objets sont les triplets $(i, E', \{g_e\}_{e\in E'})$ formés d'un objet $i \in I$, d'une partie finie $E' \subset E$ et pour chaque $e \in \mathcal{E}'$ un morphisme $g_e : X_e \to F(i)$ tel que $\theta(i) \circ g_e = f_e$. On impose que $\#\operatorname{Hom}_J(i,j) \leq 1$ et qu'il existe un morphisme de $(i', E', \{g'_e\}_{e\in E'}) \to (i'', E'', \{g''_e\}_{e\in E''})$ si et seulement si il existe un morphisme $i' \to i''$ dans $I$, si $E' \subset E''$ et si pour tout élément $e$ de $E'$, $F(i' \to i'') \circ g'_e = g''_e$. On vérifie facilement que $J$ est filtrante à droite et que le foncteur oubli évident $J \to I$ est cofinal.

On note $G$ le foncteur :

$$J \to \mathcal{E}_c^{PF}, (i, E', \{g_e\}_{e\in E'}) \mapsto F(i) \amalg_{\amalg_{e\in E'} X_e} \amalg_{e\in E'} Y_e$$

Le foncteur $G$ ainsi construit est bien à valeurs dans $\mathcal{E}_c^{PF}$ puisque l'on a supposé que les buts des cofibrations élémentaires sont de présentation finie). On note $\theta' : G \to Y$ la transformation naturelle évidente (induite par $\theta$). Par commutation des colimites entre elles, il est clair que $q'$ induit un isomorphisme $\operatorname{colim}_J G \cong Y$. De même, d'après le lemme A.3.8 et puisque $G(i, E', \{g_e\}_{e\in E'})$ est naturellement faiblement équivalent à la somme amalgammée homotopique de $F(i)$ et de la somme des $Y_e$ au dessus de la somme des $X_e$, $e$ parcourant $E'$ (car une somme de cofibrations est une cofibration), on voit que $\theta'$ induit une équivalence faible $\operatorname{hocolim}_J G \to Y$.

*Démonstration du lemme A.3.14.* — Soit

$$i_0 : \varnothing = X_0 \to X_1,\ i_1 : X_1 \to X_2, \dots,\ i_n : X_n \to X_{n+1}, \dots$$

une suite de morphismes tels que $X$ s'identifie à la colimite des $X_n$ et tels que pour tout $n \geq 0$, $i_n$ est l'image directe d'une somme de cofibrations élémentaires. A l'aide de la construction préliminaire ci-dessus on obtient (par récurrence) pour chaque entier $n \geq 0$ une petite catégorie filtrante $I_n$, telle que $\#\operatorname{Hom}_{I_n}(i,j) \leq 1$ pour toute paire d'objets $(i,j) \in (I_n)^2$, un foncteur $F_n : I_n \to \mathcal{E}_c^{PF}$, une transformation naturelle $\theta_n : F_n \to X_n$, un foncteur cofinal $\rho_{n+1} : I_{n+1} \to I_n$ et une transformation naturelle $\psi_n : F_n \circ \rho_{n+1} \to F_{n+1}$ tels que :

1. le morphisme $\operatorname{colim}_{I_n} F_n \to X_n$ (resp. $\operatorname{hocolim}_{I_n} F_n \to X_n$) induit par $\theta_n$ est un isomorphisme (resp. une équivalence faible) ;
2. le morphisme $\operatorname{colim}_{I_n} F_n \cong \operatorname{colim}_{I_{n+1}}(F_n \circ \rho_{n+1}) \to \operatorname{colim}_{I_{n+1}} F_{n+1}$, induit par $\psi_n$, s'identifie à $i_n$ ;
3. pour chaque objet $i$ de $I_{n+1}$ le morphisme $F_n \circ \rho_{n+1}(i) \to F_{n+1}(i)$ est une cofibration.

On note alors $I(X)$ la catégorie dont les objets sont les couples $(n,i)$ avec $n \geq 0$ et $i \in I_n$, telle que $\#\operatorname{Hom}_{I(X)}(a,b) \leq 1$ pour toute paire $(a,b)$ d'objets de $I(X)$ et telle qu'il existe un morphisme $(n,i) \to (m,j)$ si et seulement si $m \geq n$ et s'il existe un morphisme de $i$ vers l'image (par les $\rho_{n'}$) de $j$ dans $I_n$. On vérifie que $I(X)$ est filtrante à droite. On note $F(X) : I(X) \to \mathcal{E}_c^{PF}$ le foncteur $(n,i) \mapsto F_n(i)$ et $\theta(X) : F(X) \to X$ la transformation naturelle évidente induite par les $\theta_n$. On note $F_n(X) : I(X) \to \mathcal{E}_c^{PF}$ le foncteur $(m,i) \mapsto F_m(i)$ si $m \leq n$ et sur $F_n$(image de $i$ dans $I_n$) si $m \geq n$ ; les $\psi_n$ induisent des transformations naturelles $F_n(X) \to F_{n+1}(X)$ et le foncteur $F(X)$ est la colimite sur $n$ des $F_n(X)$. On peut remarquer que la sous-catégorie pleine $I_n(X)$ de $I(X)$ constituée des objets $(m,i)$ tels que $m \geq n$ est cofinale, et que le foncteur évident $I_n(X) \to I_n$ est cofinal.

On en déduit facilement que la colimite (sur $I(X)$) du foncteur $F_n(X)$ s'identifie naturellement à $X_n$. La première affirmation du lemme est alors immédiate : par permutation des colimites entre elles, la colimite du foncteur $F(X)$, colimite lui-même des $F_n(X)$, s'identifie à la colimite en $n$ des colimites des $F_n(X)$, c'est à dire $X$.

La deuxième partie du lemme s'établit de façon analogue en remarquant que pour tout objet $(m,i)$ de $I(X)$ le morphisme naturel

$$\operatorname{hocolim}_n(F_n(X)(m,i)) \to F(X)(m,i)$$

est une équivalence faible (car les $\psi_n$ sont des cofibrations) : par permutation des colimites homotopiques entre elles, la colimite homotopique du foncteur $F(X)$, colimite homotopique lui-même des $F_n(X)$, s'identifie (à équivalence faible près) à la colimite homotopique en $n$ des colimites homotopiques des $Fn(X)$ ; or, la colimite homotopique de $F_n(X)$ s'identifie à celle de $F_n$ (puisque la sous-catégorie $I_n(X)$ de $I(X)$ est cofinale, et que le foncteur $I_n(X) \to I_n$ est cofinal, *cf.* [**6**, §XI.9]) c'est à dire

$X_n$ par hypothèse. On conclut alors en remarquant que $X$ est faiblement équivalent à la colimite homotopique des $X_n$. □

***Remarque A.3.15.*** — Notons $\mathcal{E}_c''^{PF}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}_c^{PF}$ formée des objets $X$ pour lesquels le morphisme $\varnothing \to X$ appartient à l'ensemble $C_F''(S)$ du §A.1. La démonstration que nous avons donnée du lemme permet de dire que l'on peut choisir le foncteur $F$ à valeurs dans $\mathcal{E}_c''^{PF}$. On en déduit facilement (*cf.* la démonstration de la proposition A.3.19) le :

***Corollaire A.3.16.*** — *Un objet $X$ cofibrant est de présentation finie si et seulement s'il est rétracte d'un objet $X'$ tel qu'il existe une suite finie*

$$i_0 : \varnothing = X_0 \to X_1,\ i_1 : X_1 \to X_2, \ldots,\ i_n : X_n \to X_{n+1} = X'$$

*de morphismes tels que pour tout $j$, $i_j$ est l'image directe d'une somme finie de cofibrations élémentaires.*

Remarquons que cela montre que la catégorie $\mathcal{E}_c^{PF}$ est essentiellement petite.

***Corollaire A.3.17.*** — *Soient $X$ un objet strictement cofibrant et $C_X$ la catégorie des objets cofibrants de présentation finie au dessus de $X$ (cette catégorie est essentiellement petite d'après le corollaire précédent). Alors la catégorie $C_X$ est filtrante à droite et le foncteur $F_X : C_X \to \mathcal{E}_c^{PF}$, qui envoie l'objet cofibrant de présentation finie au dessus de $X$, $W \to X$, sur $W$ induit un isomorphisme* $\operatorname{colim}_{C_X} F_X \cong X$ *et une équivalence faible* $\operatorname{hocolim}_{C_X} F_X \to X$.

*Démonstration.* — D'après le lemme A.3.14, il existe une petite catégorie filtrante à droite $I$, un foncteur $F : I \to \mathcal{E}_c^{PF}$ et une transformation naturelle $\theta : F \to X$ tels que $\theta$ induit un isomorphisme $\operatorname{colim}_I F \cong X$ et une équivalence faible $\operatorname{hocolim}_I F \to X$. Il en résulte que pour tout objet $W \to X$ de $C_X$, il existe un objet $i$ de $I$ tel que le morphisme $W \to X$ se factorise par $F(i)$ ; puisque $I$ est filtrante à droite cela implique clairement que la catégorie $C_X$ est filtrante et que le foncteur $I \to C_X$ défini par $\theta$ est cofinal. Les deux dernières affirmations en résultent de façon standard. □

En fait on peut généraliser le corollaire précédent à tout objet cofibrant :

***Corollaire A.3.18.*** — *Soient $X$ un objet cofibrant et $C_X$ la catégorie des objets cofibrants de présentation finie au dessus de $X$. Alors la catégorie $C_X$ est filtrante à droite et le foncteur $F_X : C_X \to \mathcal{E}_c^{PF}$, qui envoie l'objet cofibrant de présentation finie au dessus de $X$, $W \to X$, sur $W$ induit un isomorphisme* $\operatorname{colim}_{C_X} F_X \cong X$ *et une équivalence faible* $\operatorname{hocolim}_{C_X} FX \to X$.

*Démonstration.* — On sait que $X$ est rétracte d'un objet strictement cofibrant $Y$. Il en résulte très facilement que la catégorie $C_X$ est filtrante à droite. Soient $i : X \to Y$ et $p : Y \to X$ deux morphismes tels que $p \circ i = \mathrm{Id}_X$. On note $\iota : C_X \to C_Y$ (resp. $\pi : C_Y \to C_X$) le foncteur évident induit par $i$ (resp.$p$) et $\theta_\iota : F_X \to F_Y \circ \iota$

(resp. $\theta_\pi : F_Y \to F_X \circ \pi$) la transformation naturelle évidente. A l'aide de $\theta_\iota$ et $\theta_\pi$ on voit que le morphisme $\mathrm{colim}_{C_X} FX \to X$ (resp. $\mathrm{hocolim}_{C_X} F_X \to X$) est rétracte de l'application $\mathrm{colim}_{C_Y} F_Y \to Y$ (resp. $\mathrm{hocolim}_{C_Y} FY \to Y$) et est donc un isomorphisme (resp. une équivalence faible) d'après le corollaire A.3.17. □

*Objets homotopiquement de présentation finie.* — On dit qu'un objet $X$ est *homotopiquement de présentation finie* si pour tout foncteur $F : I \to \mathcal{E}_c$, avec $I$ une petite catégorie filtrante à droite, l'application $\mathrm{colim}_{i\in I}[X, F(i)] \to [X, \mathrm{hocolim}_I F]$ est bijective.

***Proposition A.3.19.*** — *Un objet est homotopiquement de présentation finie si et seulement si il est rétracte dans la catégorie homotopique $h(\mathcal{E})$ d'un objet cofibrant de présentation finie.*

Le lemme qui suit est essentiellement une variante relative du lemme A.3.14 et sa démonstration est laissée au lecteur.

***Lemme A.3.20.*** — *Soit $F : I \to \mathcal{E}_c$ un foncteur, avec $I$ une petite catégorie filtrante à droite. On suppose que* $\mathrm{colim}_I F$ *est un objet cofibrant et que le morphisme* $\mathrm{hocolim}_I F \to X$ *est une équivalence faible. Alors, pour tout élément $f : X \to Y$ de $C''(S_{an})$ il existe une petite catégorie filtrante $I'$, un foncteur cofinal $\rho : I' \to I$, un foncteur $F' : I' \to \mathcal{E}_c$ et des transformations naturelles $\psi : F \circ \rho \to F'$ et $\theta : F' \to Y$ tels que :*

a) *le morphisme* $\mathrm{colim}_{I'} F' \to Y$ *induit par $\theta$ est un isomorphisme ;*
b) *le morphisme* $\mathrm{hocolim}_{I'} F' \to Y$ *induit par $\theta$ est une équivalence faible ;*
c) *pour chaque $i$ dans $I'$, $\psi(i) : F(\rho(i)) \to F'(i)$ est un élément de $C''_F(S_{an})$ (cf. §A.1) ;*
d) *le morphisme composé du morphisme* $X = \mathrm{colim}_I F \to \mathrm{colim}_{I'} F'$ *induit par $\psi$ et de l'isomorphisme* $\mathrm{colim}_{I'} F' \to Y$ *induit par $\theta$ est égal à $f$.*

*Démonstration de la proposition.* — Soient $X$ un objet homotopiquement de présentation finie. On sait que $X$ est isomorphe dans la catégorie homotopique $h(\mathcal{E})$ à un objet strictement cofibrant $X'$. D'après le lemme A.3.14, et puisque $X'$ est supposé homotopiquement de présentation finie, l'identité de $X'$ se factorise à homotopie près par un objet cofibrant de présentation finie $W$, ce qui prouve la nécessité de la condition.

Réciproquement. Soient $F : I \to \mathcal{E}_c$ un foncteur, avec $I$ une petite catégorie filtrante à droite, et $X$ un objet cofibrant de présentation finie. Montrons que l'application $\mathrm{colim}_{i\in I}[X, F(i)] \to [X, \mathrm{hocolim}_I F]$ est bijective. Soit $i : \mathrm{hocolim}_I F \to Y$ un élément de $C''(S_{an})$ avec $Y$ fibrant. Alors l'ensemble $[X, \mathrm{hocolim}_I F]$ s'identifie à l'ensemble $\pi(X, Y)$ des classes d'homotopie de $X$ vers $Y$. On a vu au §A.3.1 que $\mathrm{hocolim}_I F$ est cofibrant et s'identifie à la colimite du foncteur $\underline{F} : I \to \mathcal{E}_c$. Il résulte donc du lemme A.3.20 (et du fait que $X$ est de présentation finie) que pour tout morphisme

$X \to Y$ il existe un $i$ dans $I$, un élément $\underline{F}(i) \to Y(i)$ de $C''_F(S_{an})$ et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \underline{F}(i) & \to & Y(i) \\ & \nearrow & \downarrow \\ X & \to & Y \end{array}$$

Un moment de réflexion montre que cette affirmation permet d'établir que l'application $\mathrm{colim}_{i \in I}[X, F(i)] \to \pi(X, Y)$ est bijective, d'où la proposition. $\square$

# APPENDICE B

# FAMILLE AMPLE DE FIBRÉS INVERSIBLES SUR UN SCHÉMA

## B.1. Ouverts élémentaires d'un schéma

Soit $X$ un schéma. Soient $\lambda$ un fibré vectoriel de rang un sur $X$ et $s$ une section de $L$, c'est à dire un morphisme de $X$-schémas $X \to E(\lambda)$. On note $X_s$ le sous-schéma ouvert de $X$ où $s$ ne s'annule pas : c'est l'image réciproque par $s$ de l'ouvert $E(\lambda)^*$ de $E(\lambda)$ complémentaire de la section nulle. On dira que $X_s$ est *l'ouvert élémentaire* associé à $s$. La section $s$ induit par linéarité un morphisme de fibrés vectoriels $\Theta_X^1 \to \lambda$ dont on notera $s^\vee : \lambda^\vee \to \Theta_X^1$ le dual. La restriction de ce morphisme à l'ouvert $X_s$ est un isomorphisme. On notera $\iota_s : X_s \to E(\lambda^\vee)$ le morphisme de schémas composé de la section constante de valeur un $s_1 : X_s \to X_s \times \mathbf{A}^1$, de l'isomorphisme canonique $X_s \times \mathbf{A}^1 \cong E(\lambda^\vee|_{X_s})$ (inverse de celui induit sur $X_s$ par le morphisme $s^\vee$) et de l'immersion ouverte $E(\lambda^\vee|_{X_s}) \subset E(\lambda^\vee)$.

Le lemme suivant est standard :

***Lemme B.1.1***. — *Soient $X$ un schéma, $\lambda$ un fibré vectoriel de rang un sur $X$ et $s$ une section de $\lambda$. Alors $\iota_s$ est une immersion fermée. En particulier l'immersion ouverte $X_s \to X$, composée de deux morphismes affines est affine.*

***Remarque B.1.2***. — Soient $\lambda$ (resp. $\lambda'$) un fibré vectoriel de rang un et $s$ (resp. $s'$) une section de $\lambda$ (resp. $\lambda'$). Notons $s \otimes s'$ la section du fibré vectoriel de rang un $\lambda \otimes \lambda'$ obtenue par produit tensoriel de $s$ et $s'$. On vérifie (localement) que l'intersection de $X_s$ et $X'_s$ est égale à l'ouvert élémentaire $X_{s\otimes s'}$ ; cet ouvert sera parfois noté simplement $X_{s.s'}$.

## B.2. Schémas admettant une famille ample

***Définition B.2.1*** ([3]). — On dit qu'un schéma $X$ admet une famille ample si les ouverts élémentaires de $X$, affines (sur Spec($\mathbf{Z}$)) forment une base pour la topologie Zariski de $X$.

Rappelons que partout dans ce texte, sauf évidemment cette section, un schéma est toujours noethérien, séparé et admet une famille ample.

***Exemple B.2.2***

1) Tout schéma séparé noethérien régulier admet une famille ample d'après [**3**, corollaire II.2.2.7.1].

2) Soit $X$ un schéma admettant une famille ample. Alors tout ouvert de $X$ admet une famille ample.

3) Soient $X$ un schéma admettant une famille ample et $f : Y \to X$ un morphisme quasi-projectif. Alors $Y$ admet une famille ample.

Une des vertus des schémas $X$ admettant une famille ample est que tout faisceau cohérent de $\mathcal{O}X$-modules est quotient d'une somme finie de $\mathcal{O}X$-modules localement libres de rang un. En particulier, pour tout morphisme affine et de type fini $Y \to X$ il existe un fibré vectoriel $\xi$ sur $X$ et un morphisme de $X$-schémas $Y \to E(\xi)$ qui est une immersion fermée.

## B.3. $k$-schémas lisses et $k$-espaces

***Lemme B.3.1.*** — *Le foncteur* $\underline{(-)} : \mathcal{S}_k \to \mathcal{E}_k, X \mapsto \underline{X}$ *induit un plongement pleinement fidèle de la catégorie des $k$-schémas lisses $\mathcal{L}_k$ dans celle des $k$-espaces.*

*Démonstration.* — Soient $X$ et $Y$ deux $k$-schémas lisses (admettant une famille ample). Soient $\{\lambda_i\}_i$ une famille finie de fibrés inversibles sur $X$ et pour chaque $i$ une section $s_i$ de $\lambda_i$ tels que les ouverts $X_{s_i}$ sont affines et recouvrent $X$. Il est facile de voir que l'application évidente

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_k}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_k(\underline{X},\underline{Y}) \to \Pi_i \mathrm{Hom}_k(X_{s_i},Y) \cong \Pi_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_k}(X_{s_i},Y)$$

est injective (l'isomorphisme de droite résulte du fait que les $X_{s_i}$ sont des $k$-schémas affines lisses). On obtient ainsi l'injectivité de l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_k}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_k(\underline{X},\underline{Y}).$$

De plus l'application

$$\mathrm{Hom}_k(\underline{X},\underline{Y}) \to \Pi_i \mathrm{Hom}_k(X_{s_i},Y)$$

égalise les deux applications évidentes

$$\Pi_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_k}(X_{s_i},Y) \underset{\to}{\overset{\to}{}} \Pi_{(i,j)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_k}(X_{s_i.s_j},Y).$$

On en déduit une application $\mathrm{Hom}_k(\underline{X},\underline{Y}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_k}(X,Y)$ et on laisse au lecteur le soin de vérifier (c'est facile mais pas trivial !) que c'est un inverse à droite de l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_k}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_k(\underline{X},\underline{Y})$, qui est donc surjective. □

Pour tout $k$-schéma X lisse, on notera encore, par abus, $X$ le $k$-espace, $\underline{X}$ et l'on n'hésitera pas à dire que ce $k$-espace est un $k$-schéma (en sous-entendant toujours que le $k$-schéma en question est lisse).

***Remarque B.3.2***. — Pour tout $k$-schéma lisse $X$, il résulte facilement du lemme B.3 que la catégorie des fibrés vectoriels sur le schéma $X$ est équivalente à celle des fibrés vectoriels sur le $k$-espace $X$. De même, la catégorie des $\mathbf{GL}_n$-torseurs sur le schéma $X$ est équivalente à celle des $\mathbf{GL}_n$-torseurs sur le $k$-espace $X$.

## B.4. Torseurs de Jouanolou-Thomason et $k$-espaces

### B.4.1. Torseurs de Jouanolou-Thomason

***Théorème B.4.1* (Jouanolou-Thomason)**. — *Pour tout schéma admettant une famille ample $X$ il existe un fibré vectoriel $\xi$ sur $X$ et un $\xi$-torseur $T$ tels que $T$ est un schéma affine.*

J.-P. Jouanolou a établi dans **[18]** ce résultat pour tout schéma quasi-projectif sur un corps $k$, et R. Thomason a généralisé ce résultat à tout schéma $X$ admettant une famille ample (*cf.* **[37]**).

**B.4.2.** On suppose ici que $k$ est un anneau commutatif.

***Lemme B.4.2***. — *Soient $X$ un $k$-schéma, $T \to X$ un torseur sous un fibré vectoriel sur $X$. Alors le diagramme de $k$-espaces suivant est exact à droite :*

$$\underline{T} \times_{\underline{X}} \underline{T} \rightrightarrows \underline{T} \to \underline{X}$$

*Démonstration*. — Il suffit d'établir, pour tout $k$-schéma affine lisse $Y$, l'exactitude à droite du diagramme d'ensembles correspondant en appliquant $\mathrm{Hom}_k(Y, -)$. Le seul point délicat est donc d'établir la surjectivité de l'application

$$\mathrm{Hom}_k(Y, \underline{T}) \to \mathrm{Hom}_k(Y, \underline{X})$$

ce qui résulte facilement du lemme 2.1.11. □

***Corollaire B.4.3***. — *Tout $k$-schéma $X$ lisse est un $k$-espace de présentation finie.*

*Démonstration*. — En effet, on peut choisir $T$ affine lisse sur $k$ dans le lemme précédent et $X$, qui est le coégalisateur de deux applications entre deux $k$-espaces de présentation finie l'est également. □

Dans le même ordre d'idées :

***Lemme B.4.4***. — *Soit $\{i_\alpha : X_\alpha \to X\}_\alpha$ une famille $k$-transverse d'immersions fermées de but un $k$-schéma affine lisse $X$. Pour tout $k$-schéma $Y$ l'application naturelle :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_k}(\mathrm{Spec}(A(S[i_\alpha])), Y) \to \mathrm{Hom}_k(S[i_\alpha], \underline{Y})$$

*est bijective.*

*Démonstration.* — Soit $T \to Y$ un torseur sous un fibré vectoriel sur $Y$ avec $T$ un $k$-schéma affine. Alors le diagramme évident :

$$\mathrm{Hom}_k(S[i_\alpha], \underline{T} \times_{\underline{Y}} \underline{T}) \underset{\to}{\overset{\to}{}} \mathrm{Hom}_k(S[i_\alpha], \underline{T}) \to \mathrm{Hom}_k(S[i_\alpha], \underline{Y})$$

est exact à droite (dans la catégorie des ensembles). Le seul point délicat à établir est la surjectivité de l'application de droite qui résulte du corollaire 2.2.30 et de l'exemple 2.2.11 1). De même, le diagramme analogue en prenant les $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_k}(\mathrm{Spec}(A(S[i_\alpha])), -)$ est exact à droite (la surjectivité résulte du lemme 2.1.11). On conclut facilement en comparant ces deux diagrammes d'ensembles, en remarquant que le $k$-schéma $T \times_Y T$ est également affine et à l'aide du point 2) de la proposition 2.2.25. □

**Corollaire B.4.5.** — *Pour tout $k$-espace cofibrant de présentation finie $X$ et tout $k$-schéma $Y$ l'application naturelle :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_k}(\mathrm{Spec}(A(X)), Y) \to \mathrm{Hom}_k(X, Y)$$

*est bijective.*

*Démonstration.* — Ce résultat s'obtient à partir du lemme B.4.4 de la même façon que le corollaire 2.2.27 s'obtient à partir du point 2) de la proposition 2.2.25 (et en utilisant également A.3.16). □

# BIBLIOGRAPHIE


[1] M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Math. nos 269, 270, 305, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, (1972-73).

[2] H. Bass, *Algebraic K-theory*, Benjamin, 1968.

[3] P. Berthelot, A. Grothendieck et L. Illusie, *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Lecture Notes in Math. no **225**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, (1971).

[4] H. Bass, A. Heller et R. Swan, The Whitehead group of a polynomial extension, Publ. Math. I.H.E.S. **22** (1969), 61-79.

[5] P. Baum, W. Fulton et R. MacPherson, Riemann-Roch for singular varieties, Publ. Math. I.H.E.S. **45** (1975), 101-145.

[6] A.K. Bousfield and D.M. Kan, *Homotopy limits, completions and localizations,* Lecture Notes in Math. **304**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1972.

[7] B. H. Dayton et C. A. Weibel, A Spectral Sequence for the K-theory of Affine Glued Schemes, Algebraic K-theory : Evanston 1980, Lecture Notes in Math. no 854, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1981.

[8] W. Fulton, *Intersection theory,* Ergebnisse der Math., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York-Tokyo 1984.

[9] S.M. Gersten, Higher $K$-theory of rings, Lecture Notes in Math. no 341, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1973.

[10] S.M. Gersten, A Mayer-Vietoris sequence in the K-theory of localizations, J. Pure App. Alg. **2** (1972), 275-285.

[11] M. Gerstenhaber, On the deformation of rings and algebras II, Annals of Math. **84** (1966), 1-19.

[12] A. Grothendieck, *A la poursuite des champs*, prépublication.

[13] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique*, Publ. Math. I.H.E.S. **4** (1960).

[14] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique*, Publ. Math. I.H.E.S. **8** (1961).

[15] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique*, Publ. Math. I.H.E.S. **20, 24, 28, 32** (1964-67).

[16] P. Gabriel et M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory,* Ergebnisse der Mathematik **35**, Springer-Verlag (1967).

[17] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag (1977).

[18] J.-P. Jouanolou, Une suite exacte de Mayer-Vietoris en K-théorie algébrique, Lecture Notes in Math. no 341, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1973.

[19] S. Lichtenbaum, Motivic complexes, in Motives, U. Jannsen, S. Kleiman, J.-P. Serre Editors, Proc. Symp. Pure Math. no 35 part 1.

[20] H. Lindel, On the Bass-Quillen conjecture concerning projective modules over polynomial rings. Invent. Math. **65** (1981/82), no. 2, 319–323.

[21] H. Matsumara, Commutative ring theory, Cambridge studies in advanced mathematics 8, Cambridge University Press.

[22] J.P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology* Van Nostrand (1968).

[23] S. MacLane, *Categories for the working mathematician,* Graduate text in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, 1971.

[24] J. Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Annals of Math. Studies no **72**, Princeton University Press.

[25] F. Morel, V. Voevodsky, $\mathbf{A}^1$*-homotopy theory of schemes*, prépublication 1998.

[26] Y. Nisnevich, The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K-theory. In *Algebraic K-theory : connections with geometry and topology*, pages 241–342. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.

[27] D. Quillen, *Homotopical Algebra* Lecture notes in Math. **43**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1967.

[28] D. Quillen, Higher Algebraic K-Theory I, Lecture Notes in Math. no **341**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1973.

[29] D. Quillen, Projective Modules over Polynomial Rings, Inventiones Math. **36** (1976), 167-171.

[30] D. Quillen, Rationnal homotopy theory, Annals of Math. **90** (1969), 205-295.

[31] R.W. Thomason, Algebraic K-theory and étale cohomology. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. (4) **18** (1985), 437-552.

[32] Wilberd van der Kallen, Descent for the K-theory of Polynomial Rings, Math. Z. **191** (1986), 405-415.

[33] V. Voevodsky, Algebraic Morava $K$-theories and Bloch-Kato conjecture with $\mathbf{Z}/2$ coefficients, Preprint, June 1995.

[34] V. Voevodsky, Triangulated categories of motives over a field. Preprint, 1995.

[35] V. Voevodsky, The Milnor conjecture, Preprint 1996.

[36] T. Vorst, Localization of the K-theory of polynomial extensions, Math. Ann. **244** (1979), 33-53.

[37] C. Weibel, Homotopy Algebraic K-theory, Contemporary Mathematics, Vol. **83** (1989), 461-488.