VIATCHESLAV KHARLAMOV

Variétés de Fano réelles

Séminaire N. Bourbaki, 1999-2000, exp. nº 872, p. 189-206.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1999-2000__42__189_0>

Séminaire BOURBAKI — Mars 2000
52^{e} année, 1999-2000, n^{o} 872, p. 189 à 206

VARIÉTÉS DE FANO RÉELLES
[d'après C. Viterbo]

par **Viatcheslav KHARLAMOV**

1. INTRODUCTION

1.1. Structures algébriques sur une variété différentiable

Toute variété compacte différentiable est difféomorphe à la partie réelle d'une variété algébrique réelle sans singularités. Ce théorème est l'aboutissement des travaux de H. Seifert, J. Nash, R. Thom, A. Wallace, A. Tognoli, H. King et d'autres. Ici, une variété algébrique réelle non singulière est un ensemble défini dans un espace réel, affine ou projectif au choix, par un système d'équations polynomiales réelles sans aucun point singulier réel (voir [20] et [5] pour les détails et les problèmes encore ouverts ; notons aussi que les démonstrations se font par approximation).

Pour nous, une variété (algébrique) réelle est une variété (algébrique) complexe compacte lisse $M(\mathbb{C})$ munie d'une involution antiholomorphe, appelée *structure réelle* ou *conjugaison complexe.* L'ensemble des points fixes de cette involution est une sous-variété analytique réelle, appelée *partie réelle* de $M(\mathbb{C})$ et notée $M(\mathbb{R})$. Nous souhaitons étudier les relations entre les propriétés topologiques et géométriques de $M(\mathbb{C})$ et $M(\mathbb{R})$. Sur ce sujet, de nombreux résultats sont connus grâce à l'étude du 16-ième problème de Hilbert qui pose la question des restrictions sur la topologie de $M(\mathbb{R})$ imposées par le degré des équations le définissant ; citons en particulier les travaux d'Arnol'd, Rokhlin et leurs successeurs, voir les surveys [41], [37] et [14].

Après résolution des singularités, le théorème de Nash-Tognoli-King montre que, pour toute variété différentiable L, il existe une variété algébrique projective non singulière $M(\mathbb{C})$ stable par la conjugaison complexe et dont L est l'ensemble des points réels.

Quelques remarques concernant ce résultat s'imposent. Ici, la variété L considérée peut avoir un nombre fini quelconque de composantes connexes, alors que $M(\mathbb{C})$ peut toujours être choisie connexe (voir par exemple [36]). Notons aussi que si $M(\mathbb{C})$ est une variété projective munie d'une structure réelle, elle peut être dotée d'un plongement projectif $M(\mathbb{C}) \to P_n(\mathbb{C})$ qui conserve la structure réelle : partant d'un plongement quelconque dans $P_n(\mathbb{C})$, on restreint le plongement de Segre $P_n(\mathbb{C}) \times P_n(\overline{\mathbb{C}}) \to P_{n^2+2n}(\mathbb{C})$ au graphe de la structure réelle de M vu comme sous-variété de $M(\mathbb{C}) \times M(\overline{\mathbb{C}})$. (Notez que la structure réelle sur $P_{n^2+2n}(\mathbb{C})$ qui commute avec le plongement de Segre est équivalente à la structure réelle usuelle).

Fixons dans la suite une variété algébrique réelle dont on note M l'ensemble des points complexes, et L *une composante connexe de la partie réelle*. Il est nécessaire d'avoir choisi dans $\mathbb{C}$ une racine carrée de -1, notée i, ce qui équipe M de l'orientation complexe.

Un voisinage tubulaire de L dans M ne dépend que de L, à difféomorphisme près. En effet, la multiplication par i induit un isomorphisme entre le fibré tangent $T(L)$ de L et son fibré normal $N(L)$ dans M. De plus, les nombres d'Euler de ces fibrés satisfont la formule d'adjonction

$$e(N(L)) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} e(T(L)), \tag{1}$$

ce qui provient du choix de l'orientation complexe sur M et de la relation $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge ie_1 \wedge \cdots \wedge ie_n = (-1)^b e_1 \wedge ie_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge ie_n$, où $b = \frac{1}{2}n(n-1)$. Notons que dès que l'on a choisi une métrique sur L, le fibré cotangent $T^*(L)$ s'identifie à $T(L)$ puis au voisinage tubulaire de L. L'orientation complexe de M restreinte à $T^*(L)$ donne l'orientation canonique (symplectique) de $T^*(L)$.

Du point de vue analytique complexe, le germe de M le long de L est déterminé par la structure analytique réelle de L. On peut noter que les voisinages tubulaires de L contiennent des tubes réels de Grauert [18]. Ce sont des variétés de Stein difféomorphes à $T^*(L)$; voir l'article de D. Burns [7] qui traite des structures réelles sur les tubes de Grauert.

1.2. Une curieuse conjecture de Nash

Il est naturel de chercher à réaliser les variétés différentiables comme variétés réelles en imposant des restrictions sur le complexifié. C'est suivant cette logique que J. Nash [29] (1952) demanda, tout en émettant des réserves, s'il est possible de réaliser toute variété différentiable compacte comme un ensemble algébrique réel sans singularités ayant un complexifié rationnel (ici, rationnel signifie birationnellement isomorphe, sur $\mathbb{R}$, à l'espace projectif; notez qu'une variété algébrique réelle peut être rationnelle sur $\mathbb{C}$ sans l'être sur $\mathbb{R}$). En fait cette conjecture avait été réfutée, avant même d'avoir été formulée, par le théorème de Comessatti [9] (1914) de classification des modèles minimaux des surfaces réelles et rationnelles sur $\mathbb{C}$. Il en découle en effet que toute composante orientable de la partie réelle d'une surface réelle rationnelle sur $\mathbb{C}$ est une sphère ou un tore.

On peut en donner une démonstration rapide (c'est la même démarche qui mène aux inégalités d'Arnold [21]). Elle est basée sur (1). Soient M une surface réelle et rationnelle sur $\mathbb{C}$, $f \in H_2(M(\mathbb{C}); \mathbb{R})$ la classe d'homologie réalisée par une composante réelle L orientable et orientée, et h la classe d'homologie de la section hyperplane. La forme d'intersection est négative sur l'orthogonal de h, parce que la surface est rationnelle ($H^2 = H^{1,1}$). De plus $fh = 0$ puisque f et h appartiennent à deux espaces propres différents de l'action induite par la conjugaison complexe, et (1) montre que $f^2 = -\chi(L)$. Donc, $\chi(L) \geq 0$ et $g(L) \leq 1$.

En dimension trois, la conjecture est encore fausse. C'est une conséquence de la classification des modèles minimaux des variétés réelles rationnelles de dimension 3, donnée par J. Kollár [23]. Plus précisément, J. Kollár montre que parmi des composantes connexes des parties réelles de toutes les telles variétés, il n'y a au plus qu'un nombre fini de variétés à courbure sectionnelle strictement négative (voir [23] pour des résultats encore plus précis ; signalons seulement que les composantes orientables sont des sommes connexes $X \# aP_3(\mathbb{R}) \# b(S^1 \times S^2)$ où X est soit une somme connexe des espaces lenticulaires, soit une fibration de Seifert, soit un $S^1 \times S^1$-fibré au-dessus de S^1, soit son $\mathbb{Z}/2$-quotient non ramifié). En dimension supérieure, la conjecture est toujours ouverte.

Notons deux résultats positifs : toute variété compacte de dimension trois est homéomorphe à la partie réelle d'une variété algébrique projective réelle et rationnelle sur $\mathbb{R}$, mais singulière ; et toute telle variété est aussi difféomorphe à la partie réelle d'une variété algébrique sans singularité réelle, rationnelle sur $\mathbb{R}$, mais non projective (le premier est dû à R. Benedetti et A. Marin [4] ; le second à J. Kollár [24]). Signalons aussi la solution d'une version purement topologique de la conjecture de Nash en dimension trois par S. Akbulut et H. King [1], ainsi que par R. Benedetti et A. Marin [4], puis en toutes dimensions par G. Mikhalkin [28].

1.3. Variétés fortement de Fano

Les techniques employées par C. Viterbo sont celles de la géométrie symplectique. Par conséquent, dans ce qui suit, nous préférons le langage de la géométrie symplectique à celui de la géométrie algébrique, qui n'interviendra à nouveau qu'à la fin de la démonstration.

Ainsi, *une variété de Fano* est une variété compacte complexe lisse kählérienne M dont la classe de Kähler ω est égale à celle de Chern : $\omega = c_1(M)$ (variété symplectique monotone ou, en d'autres termes, à fibré anticanonique ample ; pour démontrer l'équivalence on peut faire appel au critère de Nakai-Moishezon). Toute variété de Fano M est *uniréglée*, c'est-à-dire qu'il existe deux variétés compactes complexes F et N avec une application régulière $N \to F$ à fibre générique $P_1(\mathbb{C})$, ainsi qu'une application régulière de degré fini $N \to M$. D'autre part, toute variété de Fano est simplement connexe et satisfait $\mathrm{Pic}(M) = H^2(M)$ (voir le rapport de O. Debarre [11] ; ceux qui préfèrent une démonsration moins algébrique de $\pi_1 = 1$ peuvent utiliser la métrique de Calabi-Yau et le théorème de Myers [27]).

Comme exemples de variétés de Fano, on peut citer les hypersurfaces lisses de degré $\leq n$ dans P_n, et plus généralement les intersections complètes lisses de multidegré

$(d_1, \ldots, d_k)$ dans P_n avec $n \geq d_1 + \cdots + d_k$. Dans ces exemples, $-K = (n+1-\sum d_i)h$ où K est le diviseur canonique et h le diviseur de la section hyperplane. Par conséquent, si la partie réelle n'est pas vide, la structure réelle se relève dans le fibré associé à h, et se prolonge donc en une structure réelle sur P_n ayant des points réels. Or toute structure réelle sur P_n ayant des points réels est conjuguée à la structure usuelle, donc finalement les seules structures réelles sur les variétés ci-dessus sont les structures induites par celle de P_n (rappelons que lorsque n est impair, il y a des structures réelles sur P_n sans points réels : pour $n = 1$, un exemple est fourni par la conique $x^2 + y^2 + 1 = 0$).

Notons aussi que, si un tube de Grauert est une partie affine d'une variété projective lisse, cette variété projective est de Fano.

Le théorème de Viterbo ne s'applique qu'aux variétés de Fano satisfaisant deux hypothèses supplémentaires. Une variété est dite *minimalement uniréglée*, si elle est uniréglée par des courbes rationnelles dont l'aire est minimale parmi celles des courbes holomorphes de M. Une variété est *fortement de Fano*, si elle est minimalement uniréglée et s'il existe un diviseur ample H de M dont l'intersection avec une courbe rationnelle unirégulatrice est égale à 1.

Ces deux hypothèses sont vérifiées pour les intersections complètes dans P_n de multidegré $(d_1, \ldots, d_k)$ si $d_1 + \cdots + d_k < n$ (qui sont uniréglées par des droites), mais elles excluent le cas $d_1 + \cdots + d_k = n$. En dimension trois, le premier cas non couvert est celui des quartiques dans P_4.

Si M est une variété munie d'une structure réelle conj et d'une métrique de Kähler g, quitte à remplacer g par $\frac{1}{2}(g + g^{\mathrm{conj}})$, on peut se ramener au cas où la forme de Kähler Ω est anti-invariante par l'action de conj*. Pour cette structure, $M(\mathbb{R})$ est lagrangienne.

Dans tout ce qui suit, les métriques de Kähler seront ainsi choisies.

1.4. Théorème de Viterbo et conjecture de Kollár

THÉORÈME 1.1. — *Aucune composante connexe du lieu réel d'une variété réelle fortement de Fano n'admet de métrique à courbure sectionnelle strictement négative.*

Ce résultat de C. Viterbo [39] confirme la conjecture, toujours ouverte, de J. Kollár d'après laquelle aucune variété réelle uniréglée *de dimension* ≥ 3 n'a de composantes réelles à courbure sectionnelle strictement négative. (En dimension deux, déjà les éclatés de $P_2(\mathbb{R})$ en au moins deux points portent une métrique hyperbolique.)

D'après J. Kollár [23], la conjecture est vraie en dimension trois sauf pour un nombre fini de classes de variétés à déformation sur $\mathbb{C}$ près. Il pose aussi la question : l'existence d'une métrique hyperbolique implique-t-elle que la variété soit de type général ?

Notons deux résultats intermédiaires, d'intérêt indépendant, obtenus au cours de la démonstration du théorème 1.1 :

PROPOSITION 1.2. — *Si une composante connexe L de la partie réelle d'une variété fortement de Fano réelle admet une métrique sans géodésique contractile, il existe parmi les courbes d'aire minimale et d'intersection 1 avec H (voir 1.3) une courbe réelle (lisse) dont la partie réelle est non vide et contenue dans L.*

PROPOSITION 1.3. — *Soit M une variété fortement de Fano dont les courbes unirégulatrices sont d'aire α. Toute sous-variété lagrangienne L admet une membrane holomorphe à bord dans L et d'aire inférieure à α. Si de plus, L n'a pas de métrique à courbure sectionnelle strictement négative, la membrane peut être choisie d'aire inférieure à $\frac{1}{2}\alpha$.*

La courbe réelle de la proposition 1.2 est une courbe rationnelle régulatrice si H est très ample, comme il l'est, par exemple, dans le cas d'intersections complètes. Par ailleurs, si une telle courbe réelle régulatrice existe, L contient un fermé semi-algébrique d'intérieur non vide couvert par les parties réelles des courbes régulatrices réelles.

Notons aussi que parmi les courbes algébriquement équivalentes à deux fois une courbe régulatrice, il y a toujours, sans aucune hypothèse sur L et pour toute variété de Fano, suffisamment de courbes réelles lisses pour couvrir un ouvert dense de la partie réelle de M (voir [25]).

Si on avait pu étendre 1.1 et 1.2 à toutes les variétés de Fano et toutes les familles régulatrices, ces résultats auraient entraîné les deux corollaires suivants : *Le tube de Grauert (voir 1.1) d'une variété possédant une métrique à courbure sectionnelle strictement négative n'est jamais la partie affine d'une variété projective lisse. Une variété fortement de Fano réelle a au plus une composante connexe réelle admettant une métrique sans géodésique contractile.*

Dans cet exposé nous expliquerons les grandes lignes de la démonstration sans prétendre entrer dans les détails, en particulier lorsqu'il s'agit des arguments de mise en position générale.

1.5. Classification des surfaces de Fano réelles

Le cas des surfaces est extrêmement simple (et très probablement assez différent du cas des variétés de dimensions supérieures). Comme toutes les variétés de Fano de dimension donnée, les surfaces de Fano réelles (plus traditionnellement appelées sufaces de Del Pezzo), forment un nombre fini de classes à déformation (réelle) près. Leur classification à déformation près découle de celle de Comessatti des surfaces rationnelles, à l'aide des modèles anti(-bi)canoniques des surfaces. Pour les détails de la démonstration, voir [13] (et pour des informations supplémentaires, voir [34]).

Suivant la terminologie traditionnelle, nous appelons *degré* d'une surface de Del Pezzo le nombre $d = c_1^2$. Une *simplification de Morse* est une opération topologique qui consiste à enlever soit une composante sphérique, soit une anse d'une composante. Notons V_q la somme connexe de q copies de $P_2(\mathbb{R})$.

Proposition 1.4. — *À une exception près, chaque surface de Del Pezzo réelle* (M, conj) *de degré* $d \geq 1$ *est déterminée à déformation près par la topologie de* $M(\mathbb{R})$. *Dans le cas exceptionnel,* $d = 8$ *et* $M(\mathbb{R})$ *est vide, le nombre de classes de déformation est deux, et dans l'une* M/conj *est* Spin, *alors que dans l'autre non.*

En chaque degré, les types topologiques de $M(\mathbb{R})$ *sont les suivants et ceux obtenus par des suites de simplifications de Morse à partir d'eux :* $M(\mathbb{R}) = V_1$ *en degré* 9 *;* $M(\mathbb{R}) = V_2$ *et* $S^1 \times S^1$ *en degré* 8 *;* $M(\mathbb{R}) = V_3$ *en degré* 7 *;* $M(\mathbb{R}) = V_4$ *et* $S^1 \times S^1$ *en degré* 6 *;* $M(\mathbb{R}) = V_5$ *en degré* 5 *;* $M(\mathbb{R}) = V_6, S^1 \times S^1$ *et* $2S^2$ *en degré* 4 *;* $M(\mathbb{R}) = V_7$ *et* $V_1 \sqcup S^2$ *en degré* 3 *;* $M(\mathbb{R}) = V_8, 2V_1, V_2 \sqcup S^2, S^1 \times S^1$ *et* $4S^2$ *en degré* 2 *;* $M(\mathbb{R}) = V_9, V_2 \sqcup V_1, V_3 \sqcup S^2$ *et* $V_1 \sqcup 4S^2$ *en degré* 1. *(Ici,* $\sqcup$ *est la réunion disjointe et* nS^2 *est la réunion disjointe de* n *sphères de dimension* 2.)

Parmi les surfaces de Del Pezzo, les seules variétés fortement de Fano sont le plan projectif ($d = 9$) et les surfaces géométriquement réglées ($d = 8$). Les deux structures exceptionnelles du théorème précédent sont les deux structures réelles sur $P_1(\mathbb{C}) \times P_1(\mathbb{C})$ sans point réel.

1.6. Remerciements

Je voudrais remercier V. Blanlœil, O. Debarre, T. Delzant, M. Paun et J. Y. Welschinger qui m'ont aidé à décortiquer la démarche de C. Viterbo et m'ont apporté une aide précieuse au cours de la rédaction de ces notes. Je remercie aussi C. Viterbo qui a patiemment répondu à mes multiples questions, et Y. Eliashberg qui m'a fait découvrir une autre approche aux problèmes traités dans ce rapport.

2. SYSTÈMES HAMILTONIENS ASSOCIÉS

Soit M une variété complexe compacte lisse kählérienne (c'est-à-dire, une variété munie d'une forme symplectique Ω et d'une structure complexe J telle que $\Omega(\,\cdot\,, J(\,\cdot\,))$ est une métrique riemannienne). Notons n la dimension complexe de M. Considérons une sous-variété lagrangienne L de M (une sous-variété différentiable réelle de dimension réelle n dont les espaces tangents sont isotropes pour Ω ; l'exemple essentiel pour nous est donné par la partie réelle d'une variété kählérienne munie d'une structure réelle, voir 1.3). D'après le théorème de Darboux-Weinstein, il existe un voisinage U de L dans M symplectomorphe à un voisinage de la section nulle dans $T^*(L)$ (avec sa structure symplectique canonique $dp \wedge dq$, comparer 1.1). À partir de maintenant, nous les identifierons et considérerons U comme situé simultanément dans M et dans $T^*(L)$.

Fixons une métrique g sur L (sans aucun rapport avec la métrique kählérienne de M). Il est bien connu que les géodésiques γ de (L, g) sont les points critiques de l'énergie

$$E(\gamma)=\int_0^\pi |\gamma'(t)|^2dt$$

et que les graphes des géodésiques (trajectoires géodésiques) dans $T^*(L)$ sont les points critiques de l'action hamiltonnienne

$$A(\gamma)=\int(pdq-Hdt),\quad \text{où } H=\frac{1}{2}\sum g^{ij}p_ip_j \text{ et } pdq=\sum p_idq^i.$$

En associant à H le champ X_H défini par $\Omega(\xi,X_H)=dH(\xi)$ (ce qui est équivalent à $X_H=J\nabla H$), on retrouve le flot géodésique sur le bord ∂T^*_r des tubes $T^*_r=\{(q,p)\in T^*(L)|\sum g^{ij}p_ip_j\leq r^2\}$ de rayon r.

L'objectif est d'étendre ce tableau à M en mélangeant le flot géodésique sur le bord d'un voisinage tubulaire de L avec la géométrie de l'opérateur de Cauchy-Riemann loin de ce bord. Plus précisément, on considère l'espace

$$\widetilde{\Lambda}_0=\{(\gamma,u)|u\in C^\infty(D^2,M),\gamma=\partial u\}$$

et on introduit sur cet espace une famille d'actions dépendant d'un paramètre $\lambda\geq 0$, $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$A_\lambda(\gamma,u)=\int_{D^2}u^*\Omega-\lambda\int_{\partial D^2}H_{\epsilon,\rho}\circ\gamma\,dt,\quad \text{où}\quad dt=\frac{dz}{2\pi i}.$$

La fonction $H_{\epsilon,\rho}:M\to\mathbb{R}$ ne dépend que de la distance à L, elle est choisie égale à 1 au-dehors de $U=T^*_r$ et égale à $h_{\epsilon,\rho}(|p|)$, $|p|^2=\sum g^{ij}p_ip_j$, dans U. La fonction $h_{\epsilon,\rho}$ est de classe C^∞, identiquement nulle sur $[0,\epsilon]$, croissante et strictement convexe sur $[\epsilon,\frac{1}{2}(\epsilon+\rho)]$, croissante et strictement concave sur $[\frac{1}{2}(\epsilon+\rho),\rho]$ et égale à 1 sur $[\rho,\infty[$ (bien entendu, $0<\epsilon<\rho<r$). On suppose que $\frac{1}{2}(\epsilon+\rho)$ n'est pas parmi les longueurs des géodésiques fermées de L.

Pour un couple (γ,u) tel que γ soit un lacet réduit à un point y, on a

$$A_\lambda(\gamma,u)=\int_\alpha\Omega-\lambda H_{\epsilon,\rho}(y)$$

où α est la classe d'homologie réalisée par $u:S^2=D^2/S^1\to M$.

Le calcul direct de la première variation de A_λ donne

$$dA_\lambda(\delta\gamma)=-\int_{\partial D^2}\langle\delta\gamma,J\gamma'+\lambda\nabla H_{\epsilon,\rho}\rangle dt$$

où $\delta\gamma$ est un champ de vecteurs tangents à M le long de γ. Comme conséquence, les points critiques de A_0 sont les couples (γ,u) tels que γ soit un lacet constant, et $u:S^2=D^2/S^1\to M$ une sphère holomorphe; et la valeur critique de A_0 correspondante à (γ,u) est $\int_\alpha\Omega$ où α est la classe d'homologie de u. Pour $\lambda>0$, il y a trois types de points critiques suivant les trois types de γ : les lacets constants dans $M\setminus T^*_{<\rho}$, les lacets constants dans T^*_ϵ, et les trajectoires géodésiques périodiques dans $T^*_{<\rho}\setminus T^*_\epsilon$. Les valeurs critiques correspondantes aux deux premiers types de points critiques sont respectivement :

$\int_\alpha \Omega - \lambda$ si $\lambda > 0$ et le lacet est au-dehors de T^*_ρ, et $\int_\alpha \Omega$ si $\lambda > 0$ et le lacet est dans T^*_ϵ.

Toutes les trajectoires critiques γ sont des trajectoires périodiques de période 1 du flot X_H. Ce flot sur ∂T^*_τ, $\epsilon < \tau < \rho$, est le flot (co)géodésique reparamétré. Les projections des trajectoires périodiques de période 1 contenues dans ∂T^*_τ sont les géodésiques de longueur $h'(\tau)$.

3. TRAJECTOIRES DE FLOER ET COURBES HOLOMORPHES

Les trajectoires de Floer sont les analogues des séparatrices (trajectoires du flot du gradient reliant les points critiques) dans la théorie des fonctions de Morse sur les variétés de dimension finie. Étant guidé par cette analogie et le calcul de la première variation de A_λ, on définit une trajectoire de Floer reliant deux points critiques, l'un correspondant à un lacet constant sur L et l'autre à un lacet constant au-dehors de U, comme une solution $u : \mathbb{R} \times S^1 \to M$ de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \nabla H_{\epsilon,\rho}(u) = 0 \tag{2}$$

telle que

$$\lim_{s\to+\infty} u(s,t) = y \in M \setminus U \quad \text{et} \quad \lim_{s\to-\infty} u(s,t) = x \in L.$$

Une écriture équivalente de (2) est $\bar\partial u = -\lambda\nabla H_{\epsilon,\rho}(u)$. En particulier, pour $\lambda = 0$ ces trajectoires de Floer sont les courbes rationnelles holomorphes $S^2 \to M$ qui passent par un point x de L et un point y de $M\setminus U$. De plus, les courbes rationnelles minimales représentent les trajectoires de Floer qui relient deux valeurs critiques consécutives de A_0.

Le groupe $\mathbb{C}^*$ agit de façon usuelle sur les solutions de l'équation (2). Dans le cas des variétés minimalement réglées, cette action est libre sur l'ensemble des solutions avec $[u] = \alpha$, α étant la classe des courbes régulatrices.

L'action est souvent réduite à S^1 en normalisant u comme suit : $\int_{s\leq 0} u^*\Omega = \frac{1}{2}\int_\alpha \Omega$. À partir de maintenant, nous identifions la sphère S^2 et le compactifié de $\mathbb{R}\times S^1$ par deux points $\pm\infty$. Ainsi, sur S^2 il y aura toujours deux points marqués.

3.1. Sélection des courbes holomorphes

Considérons *une variété fortement de Fano M minimalement réglée par des courbes rationnelles $u : S^2 \to M$ de classe $\alpha = [u] \in H_2(M;\mathbb{Z}) = \pi_2(M)$*. Posons

$$\mathrm{Mor}_\alpha = \{u : S^2 \to M | \bar\partial u = 0, [u] = \alpha\}$$

et notons $\mathrm{ev}_{\pm\infty}$ le morphismes d'évaluation $\mathrm{Mor}_\alpha \to M$, $u \mapsto u(\pm\infty)$.

L'affirmation suivante est une conséquence du lemme de cassage de Mori et du théorème de compacité de Bishop.

PROPOSITION 3.1. — $\mathrm{Mor}_\alpha/\mathbb{C}^*$ *est une variété projective, et pour tout couple de points $x \neq y$ de M, il n'existe à reparamétrisation près qu'un nombre fini (éventuellement nul) de courbes rationnelles $u : S^2 \to M$ avec $u(-\infty) = x$ et $u(+\infty) = y$.*

Notons $M(x)$ la sous-variété de M des points qui peuvent être joints à x par $u \in \mathrm{Mor}_\alpha$ (c'est-à-dire, $y \in M(x)$ si et seulement s'il existe $u \in \mathrm{Mor}_\alpha$ tel que $u(-\infty) = x$ et $u(+\infty) = y$). Par des arguments standard de position générale, on déduit de 3.1 le résultat suivant (rappelons que H est le diviseur ample tel que $H \circ \alpha = 1$, voir 1.3).

COROLLAIRE 3.2. — *Il existe un entier $k > 0$ tel que pour tout point générique x de M et toute intersection complète générique A d'hypersurfaces $H_1, \ldots, H_k$ avec $H_i \in |d_i H|$ l'intersection de $\mathrm{ev}_{-\infty}^{-1}(x)$ et $\mathrm{ev}_{+\infty}^{-1}(A)$ est non vide, finie et transverse.*

(On peut compléter 3.1 et 3.2 et démontrer que $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Mor}_\alpha/\mathbb{C}^* = c_1(M) \cap \alpha + n - 1$ et $k = \dim_{\mathbb{C}} M(x) = c_1(M) \cap \alpha - 1 > 0$.)

Notons le nombre de points d'intersection de $\mathrm{ev}_{-\infty}^{-1}(x)$ et $\mathrm{ev}_{+\infty}^{-1}(A)$ par $\nu(x, A)$. En fait, A peut être remplacée par une variété différentiable dans la même classe d'homologie, et le nombre de points d'intersection est alors remplacé par le nombre algébrique.

Si L est une sous-variété lagrangienne de M, le point générique x peut être choisi dans L, et la variété A dans le complémentaire d'un voisinage tubulaire U de L (aucune sous-variété complexe de M ne contient L ; et si d est pair et suffisamment grand, il existe une hypersurface $H' \in |dH|$ qui ne rencontre pas L).

Dans ce qui suit on fixe $x \in L$ et $A \subset (M \setminus U)$ ainsi choisis.

4. CASSAGE DES COURBES HOLOMORPHES

Le théorème suivant produit une géodésique fermée munie d'une membrane partiellement holomorphe et dont on contrôle l'indice i_{CZ} dit de Conley-Zehnder-Duistermaat. C'est ce résultat qui permettra à la fin soit de construire une courbe réelle, soit de réfuter l'existence d'une métrique hyperbolique.

THÉORÈME 4.1. — *Si L admet une métrique sans géodésique contractile, il existe $\lambda > 0$, une trajectoire périodique γ de période λ du flot Hamiltonien $X_{\epsilon,\rho}$, et un disque $u : D^2 \to M$ tels que $\gamma = \partial u$, $u(0) = x$, $0 < A_\lambda(\gamma, u) < \int_\alpha \Omega$ et enfin, si la métrique est de plus à courbure sectionnelle strictement négative, tels que $i_{CZ}(\gamma, u) \geq n$.*

Idée de la démonstration. Supposons que le point $x \in L$ et la variété A sont fixés comme dans 3.1. Considérons l'espace $\mathcal{M}_\lambda(\alpha, x, A)$ des trajectoires de Floer de classe α reliant x à A et introduisons le diagramme de bifurcation :

$$\Delta = \{(\lambda, m) | \lambda \geq 0, m \in \mathcal{M}_\lambda(\alpha, x, A)/\mathbb{C}^*\}.$$

Notons que $\lambda \leq \int_\alpha \Omega$ pour tout $(\lambda, m) \in \Delta$ parce que $\int_\alpha \Omega - \lambda$ est la valeur critique de A_λ au-dessus de 0 sur la trajectoire de Floer m.

LEMME 4.2. — *Si Δ n'est pas compact, il existe une suite finie de trajectoires périodiques γ_i, $1 \leq i \leq k$, et une suite de trajectoires de Floer $(\gamma_{i-1}, u_i, \gamma_i)$, $1 \leq i \leq k+1$, reliant γ_{i-1} et γ_i, telles que γ_0 soit la trajectoire constante $x \in L$, γ_{k+1} soit une trajectoire constante $y \in A$, les autres trajectoires soient dans $T^*_\rho \setminus T^*_\epsilon$, et $[u_1 \# \ldots \# u_{k+1}] = \alpha$.*

Pour la démonstration de 4.2, qui nécessite de fines renormalisations et perturbations, on renvoie à [39].

Dès qu'une telle suite de trajectoires de Floer est obtenue, on prend $u = u_1$. L'inégalité $A_\lambda(\gamma, u) > 0$ est due à la croissance de A_λ le long des trajectoires de Floer, et $A_\lambda < \int_\alpha \Omega$ découle de $k \geq 1$ et $\sum_{i=1}^{k+1} A_\lambda(\gamma_{i-1}, u_i, \gamma_i) = \int_\alpha \Omega - \lambda$ (rappelons que $H_{\epsilon,\rho}(x) = 0$ et $H_{\epsilon,\rho}(M \setminus T^*_r) = 1$).

Si la métrique est à courbure sectionnelle strictement négative, la trajectoire γ est non dégénérée. On peut alors perturber $H_{\epsilon,\rho}$ en $\tilde{H}_{\epsilon,\rho}$ générique et de Morse sur L, et obtenir, de la même façon que dans la démonstration de 4.2, une trajectoire de Floer $(\tilde{\gamma}, \tilde{u})$ avec $i_{CZ}(\tilde{\gamma}, \tilde{u}) = i_{CZ}(\gamma, u)$ et $\tilde{u}$ qui relie $\tilde{\gamma}$ à un point qui réalise le minimum de $\tilde{H}_{\epsilon,\rho}$ sur L. On obtient donc l'inégalité $i_{CZ}(\tilde{\gamma}) \geq n - \operatorname{ind} \operatorname{Hess} \tilde{H}_{\epsilon,\rho}|_L = n$ (voir [39] pour les détails techniques de cette perturbation).

Pour montrer que Δ n'est pas compact, notons que pour x et A suffisamment génériques, la structure complexe de M est régulière en chaque trajectoire de Floer $(0, m) \in \Delta$ (le fibré normal des courbes unirégulatrices génériques est ample). Donc la projection $\Delta \to \mathbb{R}_+$, $(\lambda, m) \mapsto \lambda$ est propre au-dessus d'un voisinage de $\lambda = 0$, et la partie de Δ pour laquelle λ est voisin de 0 est une variété lisse de dimension 1 dont le bord est constitué des $\nu(x, A)$ points satisfaisant $\lambda = 0$. Cette variété est orientée près de ces points et ils sont tous positifs. Si Δ était compact, la perturbation décrite dans [19] aurait donné une variété compacte orientée (l'orientation provenant de [17]) à bord orienté positif. □

Si les géodésiques de L ne sont pas contractiles (cas des métriques à courbure négative), le disque D construit dans la démonstration du théorème 4.1 ainsi que les autres trajectoires de Floer $(\gamma_{i-1}, u_i, \gamma_i)$ (un disque supplémentaire plus, éventuellement, des cylindres) sortent tous de T^*_ρ. Donc, chacun contient une partie $C^i_{\epsilon,\rho}$ non vide à bord sur laquelle $u : C^i_{\epsilon,\rho} \to M$ est une courbe holomorphe propre de $M \setminus T^*_\rho$. Il conviendra d'attribuer l'indice $i = 1$ au disque du théorème 4.1 et de poser $C(u) = C_{\epsilon,\rho} = \bigcup C^i_{\epsilon,\rho}$.

PROPOSITION 4.3. — *L'aire des courbes $C^k_{\epsilon,\rho}$ est uniformément séparée de 0 et ∞ : il existe $\delta > 0$ tel que $\delta < \operatorname{aire} C^k_{\epsilon,\rho} < \operatorname{aire} C(u) < \int_\alpha \Omega$ pour tout ϵ, ρ.*

Démonstration. — On a $A_\lambda(\gamma, u) < \int_\alpha \Omega$ et

$$A_\lambda(\gamma, u) = \frac{1}{2}\sum_i \int_{(\gamma_{i-1}, u, \gamma_i)} |\partial_s y|^2 + |J\partial_t u + X_H(u_s)|^2$$
$$\geq \int_{C(u)} \frac{1}{2}(|\partial_s u|^2 + |J\partial_t u|^2) = \int_{C(u)} \Omega = \operatorname{aire} C(u),$$

d'où la borne supérieure. Comme les géodésiques fermées différentes ne sont jamais homologues, chaque courbe $C^k_{\epsilon,\rho}$ sort de U. En particulier, chacune coupe $\partial T^*_{\frac{2}{3}\rho}$ et on obtient une minoration uniforme en appliquant l'inégalité de Bishop-Lelong-Wirtinger. □

5. COMPARAISON DES INDICES

Il s'agit de l'indice $i_M \in \mathbb{Z}_+$ de Morse des géodésiques, de la classe de Maslov $\mu(L) \in H^2(M, L) = H^2(M, T_\rho)$ des sous-variétés lagrangiennes L, et de l'indice $i_{CZ} \in \mathbb{Z}_+$ de Conley-Zehnder-Duistermaat des orbites périodiques non dégénérées d'un flot Hamiltonien. Pour que ce dernier indice soit bien défini, il suffit que l'orbite périodique γ soit équipée d'une membrane, c'est-à-dire d'une surface orientée $u : S \to M$ (pas forcément un disque) qui a l'orbite pour bord et dont l'orientation du bord coïncide avec la direction du flot. Une telle membrane définit alors, à homotopie près, une unique trivialisation symplectique du fibré u^*T_*M et par définition i_{CZ} vaut « l'indice spectral » du flot hamiltonien linéarisé le long γ, voir [10] et [15]. Finalement, i_{CZ} ne dépend que de la classe de u dans $H_2(M, \gamma)$. À l'aide de la même trivialisation de u^*T_*M, on peut définir la classe de Maslov comme l'obstruction à une extension sur u de la trivialisation symplectique sur $\partial u \subset L$. Rappelons que l'image de $\mu(L)$ dans $H^2(M)$ coïncide avec $2c_1(M)$.

Signalons quelques spécificités de ce choix de normalisation de l'indice de Conley-Zehnder-Duistermaat (la normalisation change d'un auteur à l'autre). Pour le graphe $\gamma \subset T^*(L)$ d'une géodésique fermée non dégénérée contractile et u dans $T^*(L)$, on a $i_{CZ}(\gamma, u) = i_M$; pour γ et u constants et placés en un point critique non dégénéré de H, on a $i_{CZ} = n - \operatorname{ind}(\operatorname{Hess} H)$ si le hessien de H est suffisamment petit.

THÉORÈME 5.1. — *Soit γ une trajectoire périodique du flot de $X_{\epsilon,\rho}$ associée à une géodésique fermée γ de L. Si u est une surface dans M dont le bord est γ,*

$$i_{CZ}(\gamma, u) = i_M(\gamma) + \langle \mu(L), u\rangle \quad \textit{ou} \quad i_{CZ}(\gamma, u) = i_M(\gamma) + \langle \mu(L), u\rangle - 1.$$

Les trajectoires γ traitées dans ce théorème sont contenues dans ∂T^*_x avec $\epsilon < x < \rho$, $x \neq \frac{1}{2}(\epsilon + \rho)$. La première formule, sans -1, a lieu si $x < \frac{1}{2}(\epsilon + \rho)$, et la deuxième pour $x > \frac{1}{2}(\epsilon + \rho)$.

Dans le cas de $M = \mathbb{C}^n$, les formules du théorème 5.1 sont établies dans [38]. La démonstration dans le cas général s'effectue de la même façon.

6. MEMBRANES HOLOMORPHES

Supposons que $M = M(\mathbb{C})$ est une variété fortement de Fano réelle et L est une composante de $M(\mathbb{R})$ qui admet une métrique à courbure sectionnelle strictement négative. (Les résultats de cette section se généralisent aux sous-variétés lagrangiennes L réelles analytiques dans une variété M fortement de Fano, sous la même hypothèse sur la métrique.)

PROPOSITION 6.1. — *Il existe une courbe holomorphe compacte C' dont le bord s'appuie sur L et qui vérifie*

$$\langle \mu(L), C' \rangle \geq n \quad et \quad \text{aire}(C') = \frac{1}{2}\int_\alpha \Omega. \tag{3}$$

La démonstration s'appuie sur le phénomène remarquable de prolongement des courbes holomorphes à travers les variétés analytiques totalement réelles maximales (par exemple les variétés lagrangiennes analytiques réelles, ce qui inclut les parties réelles des variétés algébriques). Ce résultat est spécifique à cette classe de sous-variétés et il est purement local (étrangement, la preuve s'appuie à nouveau sur l'étude, cette fois-ci locale, des familles de courbes rationnelles).

THÉORÈME 6.2. — *Soient W un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et A un sous-ensemble analytique complexe de $W \setminus \mathbb{R}^n$ de dimension 1 en tout point (une courbe holomorphe propre dans $W \setminus \mathbb{R}^n$). Si A est invariant par la conjugaison complexe, son adhérence $\bar{A} \cap W$ est un sous-ensemble analytique complexe de W.*

Pour les courbes d'aire bornée ce résultat est dû à B. Shiffman [33], et sans cette hypothèse, à H. Alexander [2].

Démonstration de 6.1. D'après le théorème 6.2, si L est la partie réelle $L = M(\mathbb{R})$ d'une variété compacte complexe $M = M(\mathbb{C})$ munie d'une structure réelle, il nous suffit de construire dans $M \setminus L$ une courbe complexe analytique C propre vérifiant (3). (Si L n'est qu'une variété lagrangienne analytique réelle, la conjugaison complexe peut être introduite près de L et le théorème s'applique de nouveau.) Une telle courbe C s'obtient à partir des courbes $C^i_{\epsilon,\rho'} \subset M \setminus T^*_\rho$, avec $\rho' \leq \rho$ et $\rho', \rho \to 0$, par le procédé diagonal, en utilisant l'inégalité de Bishop-Lelong-Wirtinger et le théorème de Bishop de compacité appliqués aux courbes $C^i_{\epsilon,\rho'} \cap (M \setminus T^*_\rho)$. Ce procédé peut être appliqué au moins deux fois, à $i = 1$ et à $i = k + 1$ (voir 4.2). Ainsi nous obtenons dans $M \setminus L$ deux courbes holomorphes propres C' et C'' telles que, d'après 4.3,

$$n, \delta < \text{aire}(C'), \quad \delta < \text{aire}(C''), \quad \text{aire}(C') + \text{aire}(C'') \leq \int_\alpha \Omega. \tag{4}$$

(En particulier, C' et C'' sont non vides.) Dans le cas de variétés réelles, on double C' à l'aide de la conjugaison complexe. L'adhérence C_1 de la courbe doublée $C' \cup \operatorname{conj} C'$ est une courbe holomorphe compacte (éventuellement singulière). Évidemment,

$\mathrm{aire}(C_1) = 2\,\mathrm{aire}(C')$. Grâce à (4), on a l'inégalité $\mathrm{aire}(C_1) < 2\int_\alpha \Omega - 2\delta$, et par l'hypothèse de minimalité de α

$$\mathrm{aire}(C_1) = \int_\alpha \Omega.$$

De plus, le même raisonnement s'applique à $C_2 = C'' \cup \mathrm{conj}\, C''$ et $\mathrm{aire}(C_1)+\mathrm{aire}(C_2) \leq 2\int_\alpha \Omega$. Ceci montre que la trajectoire de Floer ne s'est cassée qu'en deux et que $C' \cup C''$ en est la limite au sens des courants (pas de multiplicités dans les limites). Par suite, $[C', \partial C'] = u_*[D, \partial D] \in H_2(M, U)$, et par conséquent $\langle \mu(L), C' \rangle = \langle \mu(L), u \rangle$. D'après 5.1 et 4.1, et comme l'indice de Morse des géodésiques est nul dans le cas des métriques hyperboliques,

$$\langle \mu(L), u \rangle = i_{CZ}(\gamma) - i_M(\gamma) = i_{CZ}(\gamma) \geq n.$$

$\square$

Fin de la démonstration de 1.1. Par la naturalité de la classe de Maslov-Chern, $\mathrm{conj}_* \mu = -\mu$, et on déduit de (3) que

$$c_1(M) \cap C_i \geq n, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Maintenant, il ne reste qu'à combiner quelques résultats connus de la théorie des variétés de Fano.

Supposons que M est de dimension ≥ 3 (en dimension 2 le résultat est trivial modulo la classification des surfaces de Del Pezzo). D'abord, on déduit de (5) l'inégalité $c_1(M) \cap \alpha \geq n$. D'après la minimalité de α, on obtient $c_1(M) \cap C \geq n$ pour toute courbe rationnelle C (de même que pour toute courbe holomomorphe). Le théorème de Wiśnevski [40] nous dit que dans ce cas $\mathrm{Pic}(M) = \mathbb{Z}$. Puisque $H \cap \alpha = 1$, on en déduit que $c_1(M) = mH$ avec $m \geq n$. Finalement, on est dans le cadre du théorème de Kobayashi-Ochiai [22] qui dit que M est soit $P_n(\mathbb{C})$, soit une quadrique dans $P_{n+1}(\mathbb{C})$. Sur ces variétés, les seules structures réelles ayant des points réels sont les structures usuelles (voir 1.3), donc L est ou bien $P_n(\mathbb{R})$, ou bien un produit croisé de deux sphères. Dans tous les cas le revêtement universel de L n'est pas contractile et, d'après le théorème de Cartan-Hadamard, L n'admet pas de métrique à courbure sectionelle négative.

7. REMARQUES

7.1. Théorèmes de finitude

On peut déduire des théorèmes de finitude sur $\mathbb{C}$ (voir le rapport [11]), que les variétés de Fano réelles de dimension donnée ne forment qu'un nombre fini de classes à déformation réelle près.

Si on considère une classe quelconque de variétés à déformation sur $\mathbb{C}$ près, les variétés réelles de cette classe, considérées à déformation réelle près, sont-elles en nombre fini ? Cette question est à notre connaissance ouverte. La réponse est positive pour les courbes, les variétés de type général, les variétés abéliennes et toutes les surfaces sauf peut-être les surfaces rationnelles.

Une question étroitement liée est la question de finitude des structures réelles sur une variété donnée à conjugaison près. Comme ci-dessus, la réponse est positive pour les courbes, les variétés de type général, les variétés abéliennes et toutes les surfaces sauf peut-être les surfaces rationnelles.

Pour les courbes, ces résultats sont très classiques. Pour les variétés abéliennes, ils sont dus à A. Borel et J.-P. Serre [6]. Pour les surfaces, nous les avons démontrés avec I. Itenberg, après des discussions avec C. Viterbo, en nous appuyant sur la classification des surfaces et les connaissances de leurs groupes d'automorphismes.

7.2. Espaces linéaires contenus dans des intersections complètes réelles

Si la proposition 1.2 garantit l'existence de droites réelles sur des intersections complètes sous une hypothèse géométrique, il existe un tout autre critère qui utilise une forte hypothèse d'imparité de degré, mais en revanche qui se généralise aux espaces linéaires de dimensions quelconques.

La variété des r-plans contenus dans une sous-variété V de $P^n(\mathbb{C})$ définie par des équations de multidegré $d = (d_1, \dots, d_k)$ est le lieu des zéros d'une section d'un fibré vectoriel sur la grassmannienne $G(r, P^n)$. La décomposition en classes de Schubert de la classe de Chern de degré maximal de ce fibré est donnée dans [12].

Grâce au théorème de Bézout (et le fait que les cycles de Schubert sont réels), pour montrer l'existence d'espaces linéaires réels contenus dans des intersections complètes réelles, il suffit de montrer qu'un des coefficients dans la décomposition de la classe de Chern est impair. C'est ainsi que O. Debarre et L. Manivel démontrent (sans aucune hypothèse d'hyperbolicité) que si chaque composante de d est impaire, et toute intersection complète de multidegré d contient des r-espaces linéaires complexes (condition qu'on peut exprimer en terme d'une simple inégalité sur n, r et d), alors les intersections réelles contiennent des r-espaces réels.

Comme conséquence, la partie réelle des intersections complètes fortement de Fano de degré impair (sans aucune hypothèse d'hyperbolicité) contient un fermé semi-algébrique d'intérieur non vide couvert par des droites réelles. Le cas le plus simple est celui d'hypersurfaces cubiques dans P^4.

7.3. Classe de Maslov, orientabilité et les formes de Rokhlin-Guillou-Marin et de Viro

La classe de Maslov-Chern apparaissait déjà en géométrie algébrique réelle, partiellement grâce à ses rapports avec l'orientabilité du lieu réel. Rappelons quelques-unes de ces apparitions.

Soient $M = M(\mathbb{C})$ une variété compacte complexe munie d'une structure réelle, et $L = M(\mathbb{R})$ sa partie réelle. Le critère d'orientabilité de L le plus simple, et le plus typique, est le suivant (découvert et redécouvert par différents auteurs, voir en particulier [35], [16], [26]) : L est orientable si $c_1(M)$ est divisible par 2 et $H^1(M;\mathbb{Z}/2)=0$.

Cette observation est étroitement liée à la construction de l'indice de Maslov. En effet, la classe de Maslov est une classe de cohomologie relative $\mu \in H^2(M,L;\mathbb{Z})$, et si $H^1(M;\mathbb{Z}/2)=0$, elle se relève en une unique classe appartenant à $H^1(L;\mathbb{Z}/2)$ laquelle n'est autre que la classe de Stiefel-Whitney. Ainsi, L est orientable si $c_1 = 0 \in H^2(M;\mathbb{Z}/2)$ et $H^1(M;\mathbb{Z}/2)=0$. Même mieux, sous ces hypothèses la classe de Maslov $\mu \in H^2(M,L)$ et sa moitié $\tilde{\mu} \in H^2(M,L)$ (la dernière étant définie à l'aide des lagrangiens orientés) se relèvent (après réduction $\mod 4$) en respectivement $\mu_4 \in H^1(L;\mathbb{Z}/4)$ et $\mu_2 \in H^1(L;\mathbb{Z}/2)$, avec $\mu_4 = 2\mu_2$.

En dimension deux, comme c'était remarqué par N. Netsvetaev [30], μ_2 est la différence entre les formes quadratiques de Rokhlin [32] et de Viro [37]. Supposons pour simplifier que $H^1(M;\mathbb{Z}/2)=0$. Si $[L]=0\in H^2(M;\mathbb{Z}/2)$, *la forme de Viro* $q_V : H_1(L;\mathbb{Z}/2)\to\mathbb{Z}/2$ est définie comme suit : prenons une courbe lisse simple γ de L, multiplions son champ de vecteurs tangents par $\sqrt{-1}$ et déplaçons γ le long de ce champ dans $M\setminus L$, le nombre $q_V[\gamma]$ est alors égal à 1 plus le nombre d'enlacement entre γ déplacé et L. *La forme de Rokhlin* $q_R : H_1(L;\mathbb{Z}/2)\to\mathbb{Z}/2$ est définie si L est orientable et $[L]=w_2(M)$. Si de plus $w_2(M)=0$, elle diffère de q_V par $\chi(F)+\nu(F)$, où F est une surface plongée dans M dont le bord est réduit à γ et qui est normale à L le long de γ. D'où $q_V = q_R + \mu_2$ si $[L]=w_2(M)=0$.

Si $[L]=w_2(M)\neq 0$ (et L n'est pas forcément orientable), la forme de Rokhlin peut être remplacée par celle de Guillou-Marin $q_{RGM} : H_1(L;\mathbb{Z}/2)\to\mathbb{Z}/4$. En présence d'une courbe réelle C avec $[C]=[L]=w_2(M)$, la forme de Viro se généralise en $q_V : H_1(L;\mathbb{Z}/2)\to\mathbb{Z}/4$ et on obtient aisement l'identité $q_V = q_{RGM}+\mu_4$.

Si $H^1(M)=0$ et $c_1(M)=0$, on définit de la même façon la classe de Maslov résiduelle $\mu_0\in H^1(L)$. Dans le cas des variétés de Calabi-Yau, à cause de l'existence de n-formes holomorphes réelles, cette classe résiduelle est nulle.

Dès que le lieu réel est orientable on s'intéresse à des orientations privilégiées. Dans le cas des courbes, lorsque $C(\mathbb{R})$ décompose $C(\mathbb{C})$, deux orientations opposées canoniques, dites orientations complexes, apparaissent sur $C(\mathbb{R})$. Ces orientations, introduites par V. Rokhlin dans les années 70, jouent depuis un rôle extrêmement important dans l'étude des courbes algébriques sur les surfaces, en particulier, dans l'étude des courbes planes. L'outil principal est la formule d'orientations complexes de Rokhlin (voir [14] pour des réferences, un survey bref du cas des courbes sur les surfaces, une formule complémentaire découverte récemment par S. Orevkov [31] et sa généralisation due à J. Y. Welschinger [42]).

7.4. Approche d'Eliashberg

Alors que nous étions en train d'achever la préparation de ce rapport, Y. Eliashberg a proposé une autre approche au théorème de Viterbo, utilisant des techniques récemment développées avec A. Givental et H. Hofer (voir l'exposé de Y. Eliashberg au congrès de Berlin). Il nous est difficile, voire impossible, d'entrer dans les détails de ce projet.

Y. Eliashberg identifie un voisinage tubulaire de L avec un tube T^*_r du cotangent T^*L, puis $T^*L \setminus L$ avec la symplectification $(\mathbb{R} \times V, d(e^\tau \alpha))$ de $V = \partial T^*_r$, où α est la structure de contact de ∂T^*_r. Ensuite il déforme la structure symplectique Ω et la structure presque complexe J. Les variétés déformées (M^t, J^t, Ω^t), où Ω^t n'est définie qu'à un facteur constant près, peuvent être vues soit comme le résultat du recollement de (T^*_r, Ω), $([0,t] \times V, d(e^\tau \alpha))$ et $(M \setminus T^*_{<r}, e^t\Omega)$, soit comme celui de $(T^*_r, e^{-t}\Omega)$, $([-t, 0] \times V, d(e^\tau\alpha))$ et $(M \setminus T^*_{<r}, \Omega)$. La structure presque complexe sur T^*_r et $M \setminus T^*_{<r}$ reste la même et est choisie invariante par translation sur $[0, t] \times V$ (respectivement $[-t, 0] \times V$). Lorsque $t \to +\infty$, à la limite, la variété M se déchire en T^*L et $M \setminus L$, les bouts de ces variétés étant équipés de la forme symplectique homogène $d(e^\tau\alpha)$ ($\tau \to +\infty$ dans T^*L, tandis que dans M, $\tau \to -\infty$). Il s'agit alors de comprendre ce que deviennent les courbes holomorphes dans la variété déchirée, c'est-à-dire d'obtenir une version appropriée du théorème de compacité de Gromov. N'utilisant pas de structure réelle globale, l'avantage de cet argument serait de donner des résultats sur toutes les sous-variétés lagrangiennes. L'inconvénient est que cette méthode ne semble pas permettre de construire des courbes réelles en présence d'une structure réelle.

RÉFÉRENCES

[1] S. Akbulut, H. King – *Rational structures on 3-manifolds.* Pacific J. Math., vol. 151, 1991, p. 201–204.

[2] H. Alexander – *Continuing 1-dimensional analytic sets.* Math. Ann., vol. 191, 1971, p. 143–144.

[3] V. I. Arnol'd – *On the arrangements of the ovals of real plane curves, involutions of 4-dimensional manifolds, and the arithmetic of integral quadratic forms.* Functional Anal. Appl., vol. 5, 1971, p. 169–176.

[4] R. Benedetti, A. Marin – *Déchirures de variétés de dimension* 3. Comm. Math. Helv., vol. 67, 1992, p. 514–545.

[5] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy – *Géométrie algébrique réelle.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 12; Springer - Verlag, 1987.

[6] A. Borel, J.-P. Serre – *Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne.* Comm. Math. Helv., vol. 39, 1964, p. 111–164.

[7] D. Burns – *On the uniqueness and characterization of Grauert tubes.* In *Complex analysis and geometry (Trento, 1993)* Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 173, p. 119–133.

[8] F. Campana – *Remarques sur le revêtement universel des variétés kählériennes compactes.* Bull. Soc. Math. France, vol. 122, 1994, n. 2, p. 255–284.

[9] A. Comessatti – *Sulla connessione delle superfizie razionali reali.* Annali di Math., vol. 23, 1914, p. 215–283.

[10] C. Conley, E. Zehnder – *Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations.* Comm. Pure Appl. Math., vol. 37, 1984, p. 207–253.

[11] O. Debarre – *Variétés de Fano.* Sém. Bourbaki, exp. n° 827, Astérisque 245 (1997), p. 197–221.

[12] O. Debarre, L. Manivel – *Sur la variété des espaces linéaires contenus dans une intersection complète.* Math. Ann., vol. 312, 1998, n. 3, p. 549–574.

[13] A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov – *Real Enriques surfaces.* Submitted to Lecture Notes Math.

[14] A. Degtyarev, V. Kharlamov – *Topological properties of real algebraic varieties : du côté de chez Rokhlin.* À paraître dans Uspekhi Mat. Nauk.

[15] J. J. Duistermaat – *On the Morse index in variational calculus.* Adv. Math., vol. 21, 1976, 173–195.

[16] A. L. Edmonds – *Orientability of fixed point sets.* Proc. Amer. Math. Soc., vol. 82, 1981, n. 1, p. 120–124.

[17] A. Floer, H. Hofer, – *Coherent orientations for periodic orbit problems in symplectic geometry.* Math. Z., vol 212, 1993, n. 1, p. 13–38.

[18] H. Grauert – *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds.* Annals of Math., vol. 68, 1958, n. 3, p. 460–472.

[19] H. Hofer, C. Viterbo – *The Weinstein Conjecture in the Presence of Holomorphic Spheres.* Commun. Pure Appl. Math., vol 45, 1992, p. 582–622.

[20] N. V. Ivanov – *Approximation of smooth manifolds by real algebraic sets.* Uspekhi Mat. Nauk, vol. 37, 1982, n. 1, p. 3–52.

[21] V. M. Kharlamov – *Topological types of nonsingular surfaces of degree* 4 *in* $\mathbb{R}P^3$. Funkcional. Anal. i Priložen., vol. 10, 1976, n. 4, p. 55–68.

[22] S. Kobayashi, T. Ochiai – *On complex manifolds with positive tangent bundles.* J. Math. Soc. Japan, vol. 22, 1970, p. 499–525.

[23] J. Kollár – *Real algebraic threefolds. II. Minimal Model Program.* J. Amer. Math. Soc., vol. 12, 1999, p. 33–83.

[24] J. Kollár – *Non-projective Nash conjecture.* exposé à Paris XI, juin 1999.

[25] J. Kollár – *Rationally connected varieties over local fields.* Ann. of Math., vol. 150, 1999, p. 357–367.

[26] V. A. Krasnov – *Characteristic classes of vector bundles on a real algebraic variety.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., vol. 55, 1991, n. 4, p. 716–746.

[27] S. B. Myers – *Riemannian manifolds with positive mean curvature.* Duke Math. J., vol. 8, 1941, p. 401–404.

[28] G. Mikhalkin – *Blowup equivalence of smooth closed manifolds.* Topology, vol. 36, 1997, p. 287–299.

[29] J. NASH – *Real algebraic manifolds.* Annals of Math., vol. 56, 1952, n. 3, p. 405–421.

[30] N. YU. NETSVETAEV – *An analogue of the Maslov index.* Journal of Math. Sci., vol. 81, 1996, n. 2, p. 2535–2537.

[31] S. YU. OREVKOV – *Link theory and oval arrangements of real algebraic curves.* Topology, vol. 38, 1999, n. 4, p. 779–810.

[32] V. A. ROKHLIN – *Proof of the Gudkov conjecture.* Funkts. Anal. i Prilozhen., vol. 6, 1972, n. 2, p. 62–64.

[33] B. SHIFFMAN – *On the Continuation of Analytic Sets.* Math. Ann., vol. 185, 1970, p. 1–12.

[34] R. SILHOL – *Real algebraic surfaces.* Lect. Notes Math., vol. 1392, 1989.

[35] A. J. SOMMESE – *Real algebraic spaces.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. 4, 1977, n. 4, p. 599–612.

[36] A. TOGNOLI – *Quelques exemples en géométrie algébrique réelle.* in *Séminaire sur la géométrie algébrique réelle*, Publ. Math. Univ. Paris VII, vol. 24, 1986, p. 29–34.

[37] O. YA. VIRO – *Achievements in the topology of real algebraic varieties in the last 6 years.* Uspekhi Mat. Nauk, vol. 41, 1986, n. 3, p. 45–67.

[38] C. VITERBO – *A new obstruction to embedding Lagrangian tori.* Invent. Math., vol. 100, 1990, n. 2, p. 301–320.

[39] C. VITERBO – *Symplectic real algrebraic geometry.* À paraître.

[40] J. A. WIŚNIEWSKI – *On a conjecture of Mukai.* Manuscripta Math., vol. 68, 1990, p. 135–141.

[41] G. WILSON – *Hilbert's sixteenth problem.* Topology, vol. 17, 1978, n. 1, p. 53–73.

[42] J. Y. WELSCHINGER – *J-courbes réelles à nids profonds sur les surfaces réglées.* Prépublication d'IRMA-ULP, à paraître dans les œuvres du colloque de Rokhlin, 1999, St. Petersbourg.

Viatcheslav KHARLAMOV

Université Louis Pasteur et CNRS
I.R.M.A.
7, rue René Descartes
F-67084 STRASBOURG Cedex
E-mail : `kharlam@irma.u-strasbg.fr`