ASTÉRISQUE 279

COHOMOLOGIES p-ADIQUES ET APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES (II)

édité par

Pierre Berthelot

Jean-Marc Fontaine

Luc Illusie

Kazuya Kato

Michael Rapoport

Société Mathématique de France 2002

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

P. Berthelot
IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.
E-mail : Pierre.Berthelot@univ-rennes1.fr
Url : http://www.maths.univ-rennes1.fr/~berthelo/

J.-M. Fontaine
Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.
E-mail : fontaine@math.u-psud.fr

L. Illusie
Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.
E-mail : illusie@math.u-psud.fr

K. Kato
Department of mathematics, faculty of science, Kyoto university, Kyoto, 606-8502, Japon.
E-mail : kazuya@kusm.kyoto-u.ac.jp

M. Rapoport
Universität zu Köln, Mathematisches Institut, Weyertal 86-90, 50931 Köln, Allemagne.
E-mail : rapoport@math.uni-koeln.de
Url : http://www.mi.uni-koeln.de

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 11G10, 11G25, 11S20, 12H25, 13N10, 14A99, 14D05, 14D06, 14D10, 14E05, 14E20, 14E22, 14F10, 14F20, 14F30, 14F35, 14F40, 14G20, 14G22, 16S32, 32C38.

***Mots clefs.* —** Puissances divisées, opérateur différentiel, $\mathcal{D}$-module, isocristal, surconvergence, complexe parfait, opération cohomologique, cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline, cohomologie rigide, Frobenius, variété caractéristique, module holonome, cohomologie étale, réduction semi-stable, site syntomique, coefficients p-adiques, cohomologie étale p-adique, géométrie logarithmique, monoïde, log structure, log schéma, Kummer, log étale, log lisse, diviseur à croisements normaux, revêtement, groupe fondamental, cohomologie de Betti, cohomologie ℓ-adique, modéré, log éclatement, variété torique, acyclicité, cycles proches, cycles évanescents, monodromie, poids, régulier, pureté, changement de base, représentation p-adique.

COHOMOLOGIES p-ADIQUES ET APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES (II)

édité par Pierre Berthelot, Jean-Marc Fontaine, Luc Illusie, Kazuya Kato, Michael Rapoport

***Résumé.* —** Ce volume est le second d'une série de trois consacrés aux méthodes p-adiques en géométrie arithmétique. Il est centré autour des problèmes de construction des cohomologies p-adiques et des théorèmes de comparaison entre ces cohomologies : géométrie logarithmique, cohomologie cristalline, D-modules arithmétiques, équations différentielles p-adiques, et théorèmes de comparaison de Faltings et Tsuji.

***Abstract* (p-adic cohomologies and arithmetic applications (II))**

This volume is the second of three dealing with p-adic methods in arithmetic geometry. It is centered around the construction of p-adic cohomology theories and comparaison theorems between these cohomologies : logarithmic geometry, crystalline cohomology, arithmetic D-modules, p-adic differential equations, and comparison theorems of Faltings and Tsuji.

© Astérisque 279, SMF 2002

TABLE DES MATIÈRES

Résumés des articles ix

Abstracts xi

Introduction xiii

P. Berthelot — *Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules* 1
Introduction 1
1. Calcul différentiel modulo p^n 7
2. Opérations cohomologiques modulo p^n 18
3. Passage aux schémas formels 33
4. Passage à la limite sur le niveau 44
5. Variété caractéristique et holonomie 64
Références 77

C. Breuil & W. Messing — *Torsion étale and crystalline cohomologies* 81
1. Introduction 81
2. The ℓ-torsion case 83
3. The p-torsion case: good reduction and Fontaine-Laffaille-Messing theory 87
4. Semi-stable reduction: why $W_n\langle u\rangle$ -modules? 91
5. A generalization of the Fontaine-Laffaille theory 95
6. Log-syntomic morphisms and topology: a review 101
7. A generalization of the Deligne-Illusie-Fontaine-Messing isomorphism 109
8. The log-syntomic cohomology 113
9. Applications and open problems 116
References 121

G. Christol & Z. Mebkhout — *Équations différentielles p-adiques et coefficients p-adiques sur les courbes* 125
1. Introduction 126
Chapitre I. Fondements de la théorie des équations différentielles p-adiques .. 132
2. Notations générales 132
3. Modules différentiels 132
4. Rayon de convergence 135
5. La théorie de Dwork et Robba 137
6. Rayon de convergence et majoration de la dérivation 139
7. Frobenius 143
Chapitre II. Le théorème de décomposition 147
8. $\mathcal{R}$-modules différentiels solubles 147
9. Pentes d'un module différentiel 152
Chapitre III. Modules différentiels de pente nulle 159
10. L'ensemble des exposants 160
11. Exposant d'un module différentiel de Robba 161
12. Structure des modules différentiels de pente nulle 165
Chapitre IV. Théorèmes d'indice 167
13. Opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux 167
14. Indice des $\mathcal{R}$-modules différentiels 169
Chapitre V. Démonstration du théorème d'algébricité 173
15. Réduction au cas irréductible 174
16. Réduction au cas complètement irréductible 175
17. Le cas complètement irréductible 177
Index des notations 180
Index terminologique 181
Références 182

G. Faltings — *Almost Étale Extensions* 185
0. Introduction 185
1. Almost-Mathematics 186
2. Almost étale coverings 188
3. Global Cohomology 212
4. Chern-classes and Gysin-maps 228
5. Crystalline Cohomology 243
5*. Appendix: Cohomology of Frobenius-isocrystals 260
6. Complements: Relative case, Fontaine-Lafaille theory 265
6*. Appendix: Some more almost mathematics 267
References 269

L. Illusie — *An Overview of the Work of K. Fujiwara, K. Kato, and C. Nakayama on Logarithmic Étale Cohomology* 271
1. Log schemes 272
2. Kummer étale topology 275

3. Finite Kummer étale covers 279
4. Log geometric points and fundamental groups 283
5. Comparison theorems 289
6. Acyclicity of log blow-ups 293
7. Purity 302
8. Nearby cycles 306
9. Full log étale topology and cohomology 315
References 320

T. Tsuji — *Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen: a survey* 323
1. Introduction 323
2. The rings B_{crys}, B_{st}, B_{dR} and p-adic representations 327
3. Logarithmic structures 334
4. Log crystalline cohomology 337
5. Syntomic complex 343
6. Syntomic complexes and p-adic nearby cycles 352
7. Proof of C_{st} 357
Appendix. C_{st} implies C_{dR} 361
References 369

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules
Pierre Berthelot 1

Dans ce texte, qui est un résumé du cours fait au Centre Émile Borel au printemps 1997, nous expliquons comment étendre un certain nombre de résultats classiques de la théorie algébrique des modules sur les anneaux d'opérateurs différentiels, lorsque le schéma de base n'est pas nécessairement de caractéristique 0. Nous montrons en particulier comment se généralisent les résultats basés sur la cohérence, aussi bien dans le cas algébrique que pour les différents complétés que l'on est amené à introduire sur un schéma formel p-adique. Nous donnons enfin quelques résultats et conjectures sur la notion d'holonomie, pour les $\mathcal{D}$-modules munis d'une action de Frobenius.

Torsion étale and crystalline cohomologies
Christophe Breuil & William Messing 81

Ce texte suit le contenu de nos deux cours au Centre Émile Borel de l'I.H.P. durant le semestre p-adique de 1997. Il présente un survol des théories de Fontaine-Laffaille et Fontaine-Messing et (de manière plus détaillée) de leur généralisation par l'un d'entre nous au cas de réduction semi-stable. Il décrit aussi très brièvement un analogue ℓ-adique dû à Nakayama. Nous en profitons pour inclure quelques preuves qui ne se trouvent pas dans la littérature et pour soulever plusieurs questions ouvertes.

Équations différentielles p-adiques et coefficients p-adiques sur les courbes
Gilles Christol & Zoghman Mebkhout 125

Soit $\mathcal{R}$ l'anneau des fonctions analytiques au bord du disque $D(0,1)$ d'un corps p-adique et soit $\mathcal{A}$ le sous-anneau des fonctions analytiques dans le disque tout entier. Le but de ce cours est de montrer que, sous certaines conditions de nature arithmétique portant sur la monodromie p-adique, un $\mathcal{R}$-module libre de type fini à connexion contient un $\mathcal{A}$-réseau sur lequel la connexion a pour seule singularité une singularité méromorphe en 0. Ce résultat est motivé par les propriétés de finitude locales et globales dans la théorie des coefficients p-adiques. Sa démonstration utilise tous les résultats connus de la théorie des équations différentielles p-adiques et fournit donc l'occasion de présenter cette dernière.

Almost Étale Extensions
GERD FALTINGS 185

La théorie des revêtements presque étales permet la comparaison entre les cohomologies cristalline et étale p-adique des schémas au-dessus d'un anneau de valuation discrète p-adique. Nous donnons une démonstration nouvelle du principal ingrédient technique (théorème de pureté) et étendons ce résultat à toutes les singularités toroïdales. Nous en déduisons une démonstration du théorème de comparaison de Tsuji pour des schémas possédant ce genre de singularités incluant le cas de systèmes locaux appropriés. En chemin, nous sommes amené à établir des résultats de finitude pour la cohomologie cristalline à coefficients dans de tels systèmes locaux.

An Overview of the Work of K. Fujiwara, K. Kato, and C. Nakayama on Logarithmic Étale Cohomology
LUC ILLUSIE 271

Ce texte présente les travaux de K. Fujiwara, K. Kato et C. Nakayama sur la cohomologie log étale des log schémas. Après quelques rappels sur le langage des log schémas, nous définissons et étudions une classe de morphismes log étales de log schémas appelés morphismes de Kummer étales (généralisation des morphismes modérément ramifiés de la géométrie algébrique classique), puis la topologie et la cohomologie associées. Les principaux résultats sont des théorèmes de comparaison avec la cohomologie étale classique et la cohomologie de log Betti, un théorème d'invariance de la cohomologie Kummer étale par log éclatements (dont nous donnons une démonstration détaillée), et un théorème de locale acyclicité pour les log schémas log lisses sur un trait, impliquant un théorème de modération pour les cycles proches classiques correspondants. Dans la dernière partie, nous énonçons des résultats de K. Kato sur la cohomologie log étale, où la localisation par les morphismes de Kummer étales est remplacée par la localisation par tous les morphismes log étales.

Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen : a survey
TAKESHI TSUJI 323

Nous donnons les grandes lignes de la démonstration de la conjecture semi-stable de J. -M. Fontaine et U. Jannsen par O. Hyodo, K. Kato et l'auteur. Cette conjecture compare les deux cohomologies p-adiques : la cohomologie étale p-adique et la cohomologie de de Rham associées à une variété propre et lisse sur un corps p-adique ayant réduction semi-stable ; elle affirme surtout que ces deux cohomologies avec leurs structures additionnelles peuvent être reconstruites l'une de l'autre. Notre démonstration utilise la cohomologie syntomique, qui a été introduite par J.-M. Fontaine et W. Messing, comme un pont entre les deux cohomologies. Dans l'appendice, nous montrons aussi que la conjecture semi-stable implique la conjecture de de Rham à l'aide de l'altération de de Jong.

ABSTRACTS

Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules
Pierre Berthelot 1

This text is a survey of the course given at the Centre Émile Borel during the spring of 1997. We explain how to extend some classical results of the algebraic theory of modules over rings of differential operators, when the base scheme is not necessarily of characteristic 0. In particular, we show how to generalize the results based on coherence, both in the algebraic case and for various completions which are needed on a p-adic formal scheme. Finally, we give some results and conjectures on the notion of holonomicity, for $\mathcal{D}$-modules endowed with a Frobenius action.

Torsion étale and crystalline cohomologies
Christophe Breuil & William Messing 81

Following our two courses at the Centre Émile Borel of the I.H.P. during the Semestre p-adique of 1997, we present a survey of the Fontaine-Laffaille and Fontaine-Messing theories and (with more details) of their extension by one of us to the semi-stable setting. We also very quickly discuss some ℓ-adic analogues of Nakayama. We take advantage to include a few proofs which are not in the literature and raise several remaining open questions.

Équations différentielles p-adiques et coefficients p-adiques sur les courbes
Gilles Christol & Zoghman Mebkhout 125

Let $\mathcal{R}$ be the ring of functions that are analytic at the edge of the disk $D(0,1)$ in some p-adic field and let $\mathcal{A}$ be the subring of those functions that are analytic in the entire disk. The aim of this paper is to prove, under some mild conditions over the p-adic monodromy, that an $\mathcal{R}$-module free of finite rank with connection contains an $\mathcal{A}$-lattice over which the connection has for unic singularity a meromorphic one in 0. This result is basic for local and global finitness properties in the theory of p-adic coefficients. Its proof uses all known results about p-adic differential equations giving the opportunity to present their theory.

Almost Étale Extensions
GERD FALTINGS 185

The theory of almost étale coverings allows to compare crystalline and p-adic étale cohomology, for schemes over a p-adic discrete valuation ring. Using Frobenius the main technical result (a purity theorem) is reproved and extended to all toroidal singularities. As a consequence one obtains Tsuji's comparison theorem for schemes with such type of singularities, even for cohomology with coefficients in suitable local systems. On the way we have to establish some basic results on finiteness of crystalline cohomology with such coefficients.

An Overview of the Work of K. Fujiwara, K. Kato, and C. Nakayama on Logarithmic Étale Cohomology
LUC ILLUSIE 271

This paper is a report on the work of K. Fujiwara, K. Kato and C. Nakayama on log étale cohomology of log schemes. After recalling basic terminology and facts on log schemes we define and study a class of log étale morphisms of log schemes, called Kummer étale morphisms, which generalize the tamely ramified morphisms of classical algebraic geometry. We discuss the associated topology and cohomology. The main results are comparison theorems with classical étale cohomology and log Betti cohomology, a theorem of invariance of Kummer étale cohomology under log blow-ups (for which we provide a complete proof) and a local acyclicity theorem for log smooth log schemes over the spectrum of a henselian discrete valuation ring, which implies tameness for the corresponding classical nearby cycles. In the last section we state results of K. Kato on log étale cohomology, where localization by Kummer étale morphisms is replaced by localization by all log étale morphisms.

Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen : a survey
TAKESHI TSUJI 323

We give an outline of the proof of the semi-stable conjecture of J.-M. Fontaine and U. Jannsen by O. Hyodo, K. Kato and the author. This conjecture compares the two p-adic cohomologies : p-adic étale cohomology and de Rham cohomology associated to a proper smooth variety over a p-adic field with semi-stable reduction ; it especially asserts that these two cohomologies with their additional structures can be reconstructed from each other. Our proof uses syntomic cohomology, which was introduced by J.-M. Fontaine and W. Messing, as a bridge between the two cohomologies. In the appendix, we also show that the semi-stable conjecture implies the de Rham conjecture thanks to the alteration of de Jong.

INTRODUCTION

Un semestre spécial, consacré aux cohomologies p-adiques et à leurs applications arithmétiques, a eu lieu, du 17 février au 11 juillet 1997, dans le cadre du centre Émile Borel, situé à Paris dans les locaux de l'institut Henri Poincaré.

Les principaux thèmes abordés ont été :
- les théorèmes de comparaison entre différentes cohomologies p-adiques des variétés algébriques sur les corps locaux, les représentations p-adiques du groupe de Galois absolu d'un tel corps,
- les groupes p-divisibles et la théorie de Dieudonné cristalline, la cohomologie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, les équations différentielles p-adiques,
- l'uniformisation p-adique, l'étude des espaces symétriques p-adiques, des courbes hyperboliques p-adiques, de la cohomologie des variétés de Shimura,
- la géométrie et la cohomologie logarithmiques,
- les fonctions L p-adiques, leurs relations avec les systèmes d'Euler, en particulier dans le cas des formes modulaires.

Les activités structurées ont consisté en

a) Douze cours :
- P. Berthelot (Rennes) : *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques*,
- C. Breuil (CNRS, Orsay) : *Cohomologie log cristalline et cohomologie étale de torsion* (Cours Peccot du Collège de France),
- G. Christol (Paris VI) : *Equations différentielles p-adiques*,
- G. Faltings (MPI, Bonn) : *Almost étale extensions*,
- J.-M. Fontaine (Orsay) : *Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques*,
- L. Illusie (Orsay) et A. Ogus (Berkeley) : *Géométrie logarithmique*,
- K. Kato (Tokyo) : *Euler systems and p-adic L-functions*,
- W. Messing (Minneapolis) : *Topologie et cohomologie syntomiques et log syntomiques*,

– S. Mochizuki (RIMS, Kyoto) : *The Ordinary and Generalized Ordinary Moduli of Hyperbolic Curves*,
– M. Rapoport (Cologne) : *Aspects p-adiques des variétés de Shimura*,
– P. Schneider (Münster) : *Analysis on p-adic symmetric spaces*,
– T. Zink (Bielefeld) : *Cartier theory and its connection to crystalline Dieudonné theory.*

b) Un séminaire avec un ou deux exposés chaque semaine.

c) Deux colloques :
– *Problèmes de coefficients en cohomologie cristalline et en cohomologie rigide*, du 28 au 30 avril,
– *Arithmétique des fonctions L et méthodes p-adiques*, du 30 juin au 4 juillet.

d) Un groupe de travail sur *le théorème de comparaison de Tsuji*, du 20 au 29 mai.

Les organisateurs ont demandé à tous ceux qui avaient fait un cours de le rédiger ou de nous faire parvenir un texte sur un sujet voisin. Nous avons également invité Takeshi Tsuji à écrire un résumé de sa démonstration, maintenant publiée[(1)], de la *conjecture* C_{st}.

Nous tenons à remercier les auteurs non seulement pour leur contribution mais aussi pour leur patience ; nous espérons qu'ils voudront bien nous excuser du retard avec lequel ces volumes paraissent.

Les articles ont été examinés par des rapporteurs que nous remercions pour leur aide aussi désintéressée qu'utile.

Enfin, nous pensons que tous ceux qui ont participé à ce semestre seront d'accord avec nous pour saluer l'atmosphère agréable dans laquelle il s'est déroulé. Nous remercions chaleureusement Joseph Oesterlé, alors directeur du Centre Émile Borel, son équipe et tout le personnel de l'Institut Henri Poincaré pour leur gentillesse, leur compétence, leur efficacité et leur dévouement. Ils se joindront sûrement à nous pour accorder une mention spéciale à Madame Nocton, notre bibliothécaire — tous les mathématiciens qui ont travaillé à Paris la connaissent et savent combien son rôle a été précieux ; et une autre à notre secrétaire — Florence Damay — qui a quitté le Centre Émile Borel juste à la fin de notre semestre ; elle en fut la cheville ouvrière mais aussi le sourire, avec une formidable aptitude à comprendre et résoudre les problèmes extra-mathématiques rencontrés par les très nombreux participants.

Les éditeurs

(1) *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. math. **137** (1999), 233–411

Astérisque
279, 2002, p. 1–80

INTRODUCTION À LA THÉORIE ARITHMÉTIQUE DES $\mathscr{D}$-MODULES

par

Pierre Berthelot

***Résumé.* —** Dans ce texte, qui est un résumé du cours fait au Centre Émile Borel au printemps 1997, nous expliquons comment étendre un certain nombre de résultats classiques de la théorie algébrique des modules sur les anneaux d'opérateurs différentiels, lorsque le schéma de base n'est pas nécessairement de caractéristique 0. Nous montrons en particulier comment se généralisent les résultats basés sur la cohérence, aussi bien dans le cas algébrique que pour les différents complétés que l'on est amené à introduire sur un schéma formel p-adique. Nous donnons enfin quelques résultats et conjectures sur la notion d'holonomie, pour les $\mathscr{D}$-modules munis d'une action de Frobenius.

Introduction

Ce texte est un résumé du cours fait au Centre Émile Borel durant le semestre « Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques », au printemps 1997. Son but est d'expliquer comment s'étendent les résultats de base de la théorie des $\mathscr{D}_X$-modules, *i.e.* des modules sur les anneaux d'opérateurs différentiels, lorsqu'on se place sur un schéma X lisse sur un schéma de base S qui n'est pas nécessairement de caractéristique 0. Nous nous limiterons ici aux grandes lignes de la théorie, en donnant les principaux énoncés, mais peu d'indications sur les démonstrations. Pour celles-ci, le lecteur se reportera notamment à la série d'articles [**5**], [**8**], [**10**], [**11**], auxquels ce résumé vise aussi à servir d'introduction générale.

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 13N10, 14F10, 14F30, 14F40, 14G22, 16S32, 32C38.
***Mots clefs.* —** Puissances divisées, opérateur différentiel, $\mathscr{D}$-module, isocristal, surconvergence, complexe parfait, opération cohomologique, cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline, cohomologie rigide, Frobenius, variété caractéristique, module holonome.

Pendant la préparation de cet article, l'auteur a bénéficié du soutien du programme TMR de la Communauté Européenne, dans le cadre du réseau *Arithmetic Algebraic Geometry* (Contrat n° ERBFMRXCT 960006).

© Astérisque 279, SMF 2002

L'objectif de cette théorie « arithmétique » des $\mathscr{D}$-modules est de développer les outils nécessaires pour étudier au-delà de la caractéristique 0 la cohomologie de de Rham, et les cohomologies qui en dérivent : cohomologies cristalline, syntomique, rigide... et notamment pour traiter les « problèmes de coefficients » concernant ces cohomologies. Dans cette perspective, le cas où le schéma de base est un corps de caractéristique p, ou un quotient d'anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique, présente évidemment un intérêt particulier. Il s'agit alors de cohomologies dites « p-adiques », par opposition à la cohomologie étale ℓ-adique pour $\ell \neq p$, et, comme le soulignait Grothendieck dès le début [**26**], l'aspect le plus important de ces cohomologies est de rendre compte des phénomènes de p-torsion. Cette importance est aujourd'hui renforcée par le développement des théorèmes de comparaison avec la cohomologie étale p-adique, pour les schémas sur les corps locaux, dans la mesure où cette dernière est elle-même par construction une limite de cohomologies de p-torsion. C'est pourquoi nous nous intéresserons d'abord aux résultats valables lorsque S est un $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-schéma, puis ensuite à ceux qu'on peut en déduire concernant les modules sur certains faisceaux d'opérateurs différentiels sur un schéma formel p-adique lisse $\mathscr{X}$. Précisons néanmoins que nous nous limiterons dans le présent résumé à la théorie des $\mathscr{D}$-modules proprement dite, les applications cohomologiques elles-mêmes devant faire l'objet d'un article ultérieur.

La première étape, à laquelle est consacrée le chapitre 1, est donc de construire les faisceaux d'opérateurs différentiels qui apparaissent dans l'étude de la cohomologie de de Rham et de la cohomologie cristalline lorsque la base S n'est pas de caractéristique 0, faisceaux qui diffèrent alors du faisceau $\mathscr{D}_X \subset \mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_X)$ des opérateurs différentiels (relativement à S) au sens classique. En effet, bien que, sans aucune hypothèse sur S, le faisceau $\mathscr{D}_X$ soit défini pour tout morphisme lisse $f : X \to S$ (*cf.* [**EGA**, IV, 16.8]), la donnée d'une connexion intégrable sur un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{E}$ est en général plus faible que celle d'une structure de $\mathscr{D}_X$-module à gauche, lorsque S n'est pas de caractéristique 0. De plus, un exemple classique dû à Grothendieck [**26**] montre que la connexion de Gauss-Manin sur la cohomologie de de Rham relative n'est pas induite en général par une structure de $\mathscr{D}_X$-module à gauche.

La théorie des enveloppes à puissances divisées permet par contre de modifier la construction de [**EGA**, IV, 16.8] et fournit, sur une base S quelconque, un autre faisceau d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}_X^{(0)}$ sur X, engendré librement par les dérivations, et tel que la donnée d'une connexion intégrable sur un $\mathscr{O}_X$-module soit équivalente à celle d'une structure de $\mathscr{D}_X^{(0)}$-module à gauche. Pour les $\mathscr{D}_X^{(0)}$-modules, on peut définir en toute généralité les opérations de base de la théorie des $\mathscr{D}$-modules : image inverse exceptionnelle $f^!$, produit tensoriel externe $\boxtimes$, image directe f_+, dual $\mathbb{D}$ (précisons que nos notations sont celles de Bernstein et Borel [**17**]). De plus, en remplaçant la notion de complexe borné à cohomologie cohérente par celle de complexe parfait [**SGA6**], qui en est la généralisation naturelle lorsque S n'est pas régulier, nous montrons que

ceux des théorèmes de stabilité de la théorie complexe qui ne font appel qu'à la notion de cohérence restent valables en toute généralité pour les $\mathscr{D}_X^{(0)}$-modules : la perfection est stable par $f^!$ pour f lisse, $\boxtimes$, f_+ pour f propre, $\mathbb{D}$.

Par contre, hors de la caractéristique 0, il n'existe pas au niveau des $\mathscr{D}_X^{(0)}$-modules de notion analogue à l'holonomie dans le cas complexe, qui permette d'assurer la stabilité par $f^!$ pour f quelconque. Cette situation est liée au fait que, hors de la caractéristique 0, la cohomologie de de Rham et la cohomologie cristalline diffèrent de la cohomologie étale ou de la cohomologie transcendante sur un point fondamental : ce ne sont pas des théories de nature topologique. En particulier, si S est de caractéristique p, et si $F : X \to X'$ est le morphisme de Frobenius relatif, l'homomorphisme F^* n'est pas un isomorphisme en cohomologie de de Rham ou cristalline – ce qui est du reste à l'origine de nombre d'applications parmi les plus importantes de ces cohomologies ! De même, l'image inverse par F d'un $\mathscr{D}_{X'}^{(0)}$-module cohérent $\mathscr{E}'$ n'est pas un $\mathscr{D}_X^{(0)}$-module cohérent, sauf si $\mathscr{E}'$ est cohérent sur $\mathscr{O}_{X'}$, ce qui est par ailleurs trop restrictif pour assurer la stabilité par image directe.

Par contre, on s'aperçoit qu'il existe un nouveau faisceau d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}_X^{(1)}$ agissant naturellement sur $F^*\mathscr{E}$, et on montre de plus que F^* est alors une équivalence de catégories entre $\mathscr{D}_{X'}^{(0)}$-modules et $\mathscr{D}_X^{(1)}$-modules [**8**] : ce théorème de descente apparaît comme une généralisation du théorème classique de Cartier établissant une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{O}_{X'}$-modules et celle des $\mathscr{O}_X$-modules munis d'une connexion intégrable à p-courbure nulle [**34**]. Ce procédé s'itère, et amène à introduire, pour tout schéma lisse sur une base où les entiers premiers à p sont inversibles, un système inductif de faisceaux d'opérateurs différentiels $(\mathscr{D}_X^{(m)})_{m\geqslant 0}$ indexé par $\mathbb{N}$, dont la limite est le faisceau usuel $\mathscr{D}_X$, et à étudier plus généralement les $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules [**5**].

Après quelques rappels sur les enveloppes à puissances divisées, généralisées par l'introduction de la notion de structure partielle d'idéal à puissances divisées de niveau m, pour un entier $m \geqslant 0$ quelconque, le chapitre 1 présente la construction et les premières propriétés de base de ces faisceaux d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}_X^{(m)}$. Le faisceau $\mathscr{D}_X^{(m)}$ est obtenu en dualisant les enveloppes à puissances divisées partielles nilpotentes de l'idéal diagonal de X dans $X \times_S X$, à la manière de [**EGA**, IV], et est appelé faisceau des opérateurs différentiels de niveau m. Ce chapitre s'achève avec l'interprétation de la structure de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche (resp. à droite) en termes de stratifications (resp. co-stratifications) au sens de Grothendieck. Celle-ci est essentielle pour la théorie des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules, non seulement pour mettre en évidence la nature cristalline des constructions (ce que nous ne discuterons pas ici, *cf.* [**8**] et [**10**]), mais aussi dans bien des cas pour munir un module donné d'une structure de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module. En effet, les faisceaux $\mathscr{D}_X^{(m)}$ pour $m \geqslant 1$ ne sont pas engendrés par les seules dérivations, mais par les opérateurs d'ordre $\leqslant p^m$, et on ne dispose pas toujours de formules explicites donnant l'action de ces opérateurs.

Le chapitre 2, consacré aux opérations cohomologiques dans le cadre algébrique (et tout particulièrement modulo p^n), commence avec le théorème de descente par Frobenius mentionné plus haut. Ce théorème s'énonce en fait sur n'importe quel schéma S annulé par une puissance de p, muni d'un idéal quasi-cohérent $\mathfrak{a}$ contenant p et possédant une structure d'idéal à puissances divisées partielles de niveau m. Il est alors valable pour tout morphisme de S-schémas lisses $F : X \to X'$ dont la réduction modulo $\mathfrak{a}$ est une puissance $F^s_{X_0/S_0}$ du morphisme de Frobenius relatif de la réduction de X, et il fournit une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-modules et celle des $\mathscr{D}^{(m+s)}_{X}$-modules [**8**]. Le reste du chapitre est consacré aux propriétés de base des quatre opérations fondamentales, et notamment au théorème de finitude pour les morphismes propres [**10**], et au théorème de dualité relative de Virrion ([**49**], [**51**]). Parmi ces résultats, il convient de souligner tout particulièrement la complète compatibilité du foncteur F^* à toutes les opérations (ce qui, dans les cas de f_+ et $\mathbb{D}$, repose sur le théorème de descente). Nous en verrons plus loin les conséquences.

Certaines propriétés sont par contre en défaut tant que l'on reste sur une base annulée par une puissance p^n fixée. On constate deux types de problèmes :

a) Certains énoncés ne sont vrais qu'à isogénie près. Par exemple, pour $m \geqslant 1$, le complexe de de Rham $\Omega^{\bullet}_X \otimes \mathscr{D}^{(m)}_X$ n'est pas une résolution de ω_X, mais les faisceaux de cohomologie du cône sont annulés par une puissance fixe de p, indépendante de n.

b) Certains énoncés nécessitent en plus de changer de niveau dans le système inductif des faisceaux $\mathscr{D}^{(m)}_X$. C'est le cas par exemple de l'isomorphisme $\mathrm{Id} \xrightarrow{\sim} u^! u_+$ lorsque u est une immersion fermée.

On est ainsi conduit à étudier les théories obtenues par passage à la limite à partir de la théorie algébrique du chapitre 2. Soient $\mathscr{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégale caractéristique, de corps résiduel k. Le chapitre 3 est consacré au passage à la limite projective sur un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse $\mathscr{X}$, de fibre spéciale X. On obtient ainsi pour tout m un faisceau d'opérateurs différentiels d'ordre infini $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$, p-adiquement complet, qui reste un faisceau d'anneaux cohérent à sections noethériennes. Lorsqu'on veut étendre les opérations cohomologiques aux complexes de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules, il apparaît alors des difficultés techniques liées aux complétions. Pour obtenir les formules voulues lorsqu'on compose plusieurs foncteurs qui ne préservent pas nécessairement la cohérence (notamment la transitivité des images inverses et directes), on est amené à intégrer la complétion à la définition de ces foncteurs, et donc aussi à imposer une condition de complétion aux complexes avec lesquels on travaille. Nous appelons *quasi-cohérents* les complexes $\mathscr{E}$ de $D^-(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ tels que le complexe $\mathscr{O}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathscr{E}$ soit à cohomologie quasi-cohérente, et que $\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\varprojlim_n (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathscr{E})$. Ces conditions sont vérifiées par les complexes bornés à cohomologie cohérente. On peut alors étendre à ces complexes les opérations cohomologiques étudiées précédemment, et en déduire

par passage à la limite les propriétés voulues, en s'appuyant sur les méthodes de l'Appendice B de [**12**] sur la finitude de $\mathbb{R}\varprojlim$. On notera que, pour traiter les propriétés qui nécessitent de tensoriser par $\mathbb{Q}$, nous ne travaillons pas directement dans la catégorie dérivée des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules, où la condition de quasi-cohérence précédente n'aurait plus de sens, mais dans la catégorie triangulée des complexes quasi-cohérents de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules à isogénie près. Celle-ci contient une sous-catégorie pleine équivalente à la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ [**9**].

Le second passage à la limite, qui fait l'objet du chapitre 4, consiste à passer à la limite inductive sur le niveau m. On obtient ainsi un faisceau $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$, qui est un sous-faisceau du complété p-adique $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}$ du faisceau $\mathscr{D}_{\mathscr{X}}$ des opérateurs différentiels usuels, formé des opérateurs dont les coefficients vérifient une condition de décroissance de style Monsky-Washnitzer [**44**]. Ce faisceau n'a pas d'aussi bonnes propriétés de finitude que les faisceaux $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$, mais le faisceau $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, bien que n'étant pas noethérien, est cohérent, grâce à un théorème de platitude des homomorphismes $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ pour $m' \geqslant m$ [**5**]. Il est également de dimension homologique finie [**8**]. Comme précédemment, il y a lieu de tenir compte de la topologie naturelle de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ dans la définition des opérations cohomologiques sur les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules. Pour cela, nous partons de la catégorie dérivée des systèmes inductifs de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules. Par une localisation appropriée, nous construisons à partir de celle-ci une catégorie $\underrightarrow{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, dans laquelle on peut définir une sous-catégorie pleine formée de complexes « quasi-cohérents ». Sur cette sous-catégorie, qui contient une sous-catégorie pleine équivalente à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ [**9**], on peut alors étendre les opérations cohomologiques précédentes et montrer que leurs propriétés sont préservées. On obtient ainsi entre autres la préservation de la cohérence par f_+ lorsque f est propre [**10**], et le théorème de dualité relative [**49**].

C'est au niveau de la théorie des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules que s'effectue le lien avec la cohomologie rigide [**3**]. Si Z est un diviseur de X, et $j : \mathscr{U} \hookrightarrow \mathscr{X}$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire de Z, on introduit le faisceau $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$ des fonctions à singularités surconvergentes le long de Z : c'est le sous-faisceau de $j_*\mathscr{O}_{\mathscr{U},\mathbb{Q}}$ dont les sections sur un ouvert affine où Z est défini par la réduction d'une section t de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ s'écrivent sous la forme $\sum_{i\geqslant 0} a_i/t^i$, où les a_i sont des sections de $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ vérifiant la condition de décroissance de Monsky-Washnitzer. Ce faisceau possède une structure naturelle de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module. Lorsque $\mathscr{X}$ est propre, la cohomologie rigide de $\mathscr{U}$ est par construction la cohomologie de de Rham de $\mathscr{X}$ à coefficients dans $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$. On voit donc que, grâce au théorème de finitude pour f_+ dans le cas propre, la cohérence de $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$ en tant que $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module entraîne la finitude de cette cohomologie. Ce théorème de cohérence, prouvé dans [**6**], était l'un des objectifs principaux de la théorie des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules. Nous indiquons ici les principales idées de sa démonstration, basée sur les théorèmes précédents sur les opérations cohomologiques, et sur le théorème de de Jong [**33**].

Enfin, nous achevons ce chapitre consacré à la cohérence sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ par une rapide présentation des travaux de Huyghe sur la transformation de Fourier ([**28**], [**29**], [**30**]), qui fournissent une interprétation de la transformation de Fourier naïve sur la « complétée faible » de l'algèbre de Weyl au moyen des opérations cohomologiques définies ici. Cette interprétation est entièrement parallèle à celles que donnent Malgrange pour les $\mathscr{D}_X$-modules en caractéristique 0 [**41**] et Katz-Laumon pour les faisceaux ℓ-adiques. C'est aussi une illustration de la façon dont, sur un schéma formel propre, on peut utiliser les algèbres de la forme $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$, et les faisceaux d'opérateurs à singularités surconvergentes $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$ qui leur sont associés, pour traiter les opérations cohomologiques sur les variétés ouvertes.

Pour obtenir un théorème de finitude pour $f^!$ lorsque f est une immersion fermée (ce qui entraînerait le cas général), il faut néanmoins disposer d'une condition de finitude plus forte que la cohérence. En caractéristique 0, c'est la condition d'holonomie [**37**]. Au chapitre 5, nous dégageons une condition analogue pour les F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, c'est-à-dire les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathscr{E}$ munis d'un isomorphisme $\Phi : \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E}$. Les résultats des chapitres précédents entraînent que la structure de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module est stable par toutes les opérations cohomologiques, de sorte que tout $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module d'origine géométrique peut être muni d'une structure de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module. Une propriété essentielle des F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, qui résulte de la descente par Frobenius, est l'existence pour un tel module $\mathscr{E}$ d'un $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathscr{E}^{(0)}$ canonique tel que $\mathscr{E} \simeq \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(0)}$, dépendant fonctoriellement de $\mathscr{E}$ [**8**]. Nous expliquons comment, en passant par un modèle entier de celui-ci et en réduisant modulo p, on peut construire une variété caractéristique $\mathrm{Car}(\mathscr{E})$ dans le fibré cotangent T^*X de la fibre spéciale X, et même un cycle caractéristique $\mathrm{ZCar}(\mathscr{E})$. Grâce à un analogue du théorème de Kashiwara pour les F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents à support dans un sous-schéma fermé lisse, on montre que cette variété caractéristique vérifie l'inégalité de Bernstein $\dim\big(\mathrm{Car}(\mathscr{E})\big) \geqslant \dim(X)$ [**11**]. Cela justifie que l'on définisse comme en caractéristique 0 la notion de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module holonome par la condition $\dim\big(\mathrm{Car}(\mathscr{E})\big) = \dim(X)$. Beaucoup de questions sont encore ouvertes concernant cette notion d'holonomie, et nous en discutons quelques unes en 5.3.6. Néanmoins, un théorème de Virrion [**52**] montre que cette condition géométrique équivaut à la caractérisation homologique habituelle par la nullité des $\mathscr{H}^i\big(\mathbb{D}(\mathscr{E})\big)$ pour $i \neq 0$, et que l'on dispose ainsi d'une bonne notion de module dual pour les F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes. De plus, nous montrons pour finir que le cycle caractéristique que nous construisons donne naissance dans le cas projectif à une formule pour la caractéristique d'Euler-Poincaré analogue à celle de Dubson-Kashiwara ([**19**], [**39**]).

Remerciements. — C'est un plaisir de remercier pour leur participation les auditeurs du cours fait au Centre Émile Borel, et plus particulièrement O. Gabber, dont les nombreuses remarques et suggestions m'ont permis d'améliorer certains des résultats

présentés ici. Je remercie aussi le personnel du Centre Émile Borel, et notamment son directeur J. Œsterlé, pour les excellentes conditions de travail qui ont permis le succès de ce semestre.

Notations et conventions générales

1) Ce texte étant de nature introductive, nous ferons ici de manière systématique quelques hypothèses mineures qui permettront de simplifier l'exposé, en renvoyant le lecteur intéressé par certains énoncés dans une situation plus générale aux articles [**5**], [**8**], [**9**], [**10**], [**11**] :

(i) Nous supposerons que tous les schémas et schémas formels considérés sont quasi-compacts et quasi-séparés (de sorte qu'il en sera de même des morphismes entre schémas, d'après [**EGA**, IV 1.2]). Grâce à [**SGA4**, VI 5], cela assure que la cohomologie et les images directes commutent aux limites inductives filtrantes.

(ii) Lorsque nous considèrerons un morphisme lisse entre deux schémas ou schémas formels, nous supposerons qu'il est de dimension relative constante. Cela permet d'appliquer dans les catégories dérivées l'opérateur de translation par la dimension relative.

2) Soit $\mathscr{D}$ un faisceau d'anneaux. Sauf mention explicite du contraire, les $\mathscr{D}$-modules considérés seront des $\mathscr{D}$-modules à gauche.

3) Soit $\mathscr{D}$ un faisceau d'anneaux sur un schéma ou un schéma formel. Nous n'utiliserons ici les catégories $D^{-}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D})$ et $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D})$ que lorsque $\mathscr{D}$ est un faisceau d'anneaux cohérent. Dans ce cas, il s'agit des sous-catégories pleines de $D^{-}(\mathscr{D})$ et $D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D})$ dont les objets sont les complexes à cohomologie $\mathscr{D}$-cohérente.

Nous aurons aussi à utiliser les sous-catégories $D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D})$ et $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D})$. Rappelons que $D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D})$ est la sous-catégorie pleine de $D(\mathscr{D})$ dont les objets sont les complexes de Tor-dimension finie (voir [**27**, II 4] ou [**SGA6**, I 5.2]), c'est-à-dire quasi-isomorphes à un complexe à termes plats, nuls hors d'un intervalle borné ; en particulier, $D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D})$ est une sous-catégorie pleine de $D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D})$. Quant à la catégorie $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D})$, c'est la sous-catégorie pleine de $D(\mathscr{D})$ dont les objets sont les complexes parfaits [**SGA6**, I 4.7], c'est-à-dire localement isomorphes à un complexe à termes localement projectifs de type fini, nuls hors d'un intervalle borné. Lorsque $\mathscr{D}$ est cohérent, il revient au même, d'après [**SGA6**, I, 3.5 et 5.8.1], de demander qu'un tel complexe soit localement de Tor-dimension finie et à cohomologie cohérente. Compte tenu de l'hypothèse de quasi-compacité faite plus haut, nous aurons donc ici $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}) = D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}) \cap D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D})$.

4) Pour tout faisceau abélien E, nous noterons $E_{\mathbb{Q}} := E \otimes \mathbb{Q}$.

1. Calcul différentiel modulo p^n

Nous rappellerons d'abord quelques notions plus ou moins classiques qui servent de point de départ au calcul différentiel sur un schéma de base quelconque : puissances divisées, algèbres d'opérateurs différentiels, stratifications. Lorsque le schéma de base est annulé par une puissance d'un nombre premier p, ces notions admettent

des variantes dites « de niveau supérieur », qui sont à la base de la théorie présentée ici : comme nous le verrons plus loin, celles-ci sont directement liées à l'action de l'endomorphisme de Frobenius de la réduction modulo p.

1.1. Enveloppes à puissances divisées. — Hors de la caractéristique nulle, le calcul différentiel repose de manière essentielle sur la notion d'idéal à puissances divisées, qui permet de donner un sens à la formule de Taylor pour une connexion intégrable.

1.1.1. Soient A un anneau commutatif, $I \subset A$ un idéal. Rappelons (*cf.* [**2**] ou [**12**]) qu'une *structure d'idéal à puissances divisées* (ou *PD-structure*) *sur* I est une famille $\gamma = (\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ d'applications de I dans A qui vérifient les conditions suivantes :

(i) $\forall\, x \in I,\ \gamma_0(x) = 1,\ \gamma_1(x) = x,\ \gamma_n(x) \in I$ pour $n \geqslant 1$;
(ii) $\forall\, x, y \in I,\ \forall\, n \geqslant 0,\ \gamma_n(x+y) = \sum_{i+j=n} \gamma_i(x)\gamma_j(y)$;
(iii) $\forall\, x \in I,\ \forall\, a \in A,\ \forall\, n \geqslant 0,\ \gamma_n(ax) = a^n\gamma_n(x)$;
(iv) $\forall\, x \in I,\ \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ \gamma_m(x)\gamma_n(x) = \binom{m+n}{n}\gamma_{m+n}(x)$;
(v) $\forall\, x \in I,\ \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ \gamma_n\big(\gamma_m(x)\big) = \frac{nm!}{(m!)^n n!}\gamma_{nm}(x)$.

On dit que (I, γ) est un *PD-idéal* de A. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur γ, on adopte en général la notation $x^{[n]}$ pour $\gamma_n(x)$. La condition (iv) entraîne que $n!\gamma_n(x) = x^n$. S'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que A soit une $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-algèbre, I est donc un nilidéal.

Si (A, I, γ) et (A', I', γ') sont des anneaux munis de PD-idéaux, un *PD-morphisme* $\phi : (A, I, \gamma) \to (A', I', \gamma')$ est un homomorphisme d'anneaux $\phi : A \to A'$ tel que $\phi(I) \subset I'$, et que, pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi\big(\gamma_n(x)\big) = \gamma'_n\big(\phi(x)\big)$. Si $(R, \mathfrak{a}, \alpha)$ est un anneau muni d'un PD-idéal, et $\phi : R \to A$ un homomorphisme d'anneaux, on dit que la PD-structure α *s'étend à* A s'il existe sur $\mathfrak{a}A$ une PD-structure $\overline{\alpha}$ (nécessairement unique) telle que $(R, \mathfrak{a}, \alpha) \to (A, \mathfrak{a}A, \overline{\alpha})$ soit un PD-morphisme. Si $(R, \mathfrak{a}, \alpha)$ et (A, I, γ) sont des anneaux munis de PD-idéaux, et $\phi : R \to A$ un homomorphisme d'anneaux, on dit que la PD-structure γ est *compatible à* α si α s'étend à A, et s'il existe sur $\mathfrak{a}A + I$ une PD-structure prolongeant $\overline{\alpha}$ et γ.

Soient p un nombre premier, v_p la valuation p-adique sur $\mathbb{Q}$ (normalisée par $v_p(p) = 1$), $\mathbb{Z}_{(p)}$ le localisé de $\mathbb{Z}$ par rapport à l'idéal premier (p). Pour tout $n \geqslant 1$, $v_p(p^n/n!) \geqslant 1$, de sorte qu'il existe sur l'idéal $p\mathbb{Z}_{(p)}$ une PD-structure naturelle. Cette structure s'étend à toute $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre. Par contre, une PD-structure sur un idéal d'une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre n'est pas automatiquement compatible à celle de (p).

Soient $(R, \mathfrak{a}, \alpha)$ un anneau muni d'un PD-idéal, A une R-algèbre, $I \subset A$ un idéal. Il existe une R-algèbre $P_\alpha(I)$, munie d'un PD-idéal $\overline{I}$ dont la PD-structure (généralement notée $x \mapsto x^{[n]}$) est compatible à α, et un R-homomorphisme $\phi : A \to P_\alpha(I)$ tel que $\phi(I) \subset \overline{I}$, qui soient universels pour les R-homomorphismes $(A, I) \to (B, J, \delta)$ envoyant I dans un PD-idéal (J, δ) dont la PD-structure est compatible à α (*cf.* [**2**, I 2.4.2] ou [**12**, 3.19]). La A-algèbre $P_\alpha(I)$, munie de son PD-idéal canonique, est

appelée *enveloppe à puissances divisées* (*compatibles à* α), ou *PD-enveloppe*, *de* I; lorsqu'aucune confusion n'en résulte, nous la noterons simplement $P(I)$.

1.1.2. Si l'on fixe un nombre premier p, l'étude de l'action de Frobenius amène à généraliser la notion d'idéal à puissances divisées. Nous supposons ici que les anneaux considérés sont des $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbres, et que toutes les PD-structures sont compatibles à la PD-structure canonique de (p). Pour tout entier $m \geqslant 0$, et tout idéal I d'un anneau A, nous noterons $I^{(p^m)}$ l'idéal engendré par les puissances x^{p^m} pour $x \in I$.

Soient alors $m \in \mathbb{N}$ un entier positif fixé, A une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre, $I \subset A$ un idéal. Une *PD-structure partielle de niveau* m (ou *m-PD-structure*) sur I est la donnée d'un PD-idéal $(J, \gamma) \subset I$ tel que

$$I^{(p^m)} + pI \subset J.$$

Nous dirons que (I, J, γ) est un *m-PD-idéal*. La donnée d'une m-PD-structure permet de définir sur I des opérations de *puissances divisées partielles* vérifiant des propriétés analogues aux relations (i) à (v) de 1.1.1 (*cf.* [**5**, 1.3.6]) : si $n \in \mathbb{N}$, on écrit $n = p^m q + r$, avec $0 \leqslant r < p^m$, et on pose

$$x^{\{n\}_{(m)}} = x^r \gamma_q(x^{p^m}).$$

En particulier, ces opérations vérifient les relations $q! x^{\{n\}_{(m)}} = x^n$. Si aucune confusion n'en résulte, nous noterons simplement $x^{\{n\}}$ pour $x^{\{n\}_{(m)}}$.

Si (A, I, γ) et (A', I', γ') sont deux anneaux munis de m-PD-idéaux, un m-PD-morphisme $\phi : (A, I, J, \gamma) \to (A', I', J', \gamma')$ est un PD-morphisme $\phi : (A, J, \gamma) \to (A', J', \gamma')$ tel que $\phi(I) \subset I'$. Si I est un idéal quelconque d'une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre A, il existe une A-algèbre $P_{(m)}(I)$, et un m-PD-idéal $(\overline{I}, \widetilde{I}, {}^{[-]}) \subset P_{(m)}(I)$ tel que $IP_{(m)}(I) \subset \overline{I}$, qui soient universels pour les homomorphismes de A dans un anneau A' envoyant I dans un m-PD-idéal (I', J', γ') de A'. L'algèbre $P_{(m)}(I)$, munie de son m-PD-idéal canonique $(\overline{I}, \widetilde{I}, {}^{[-]})$, est appelée *enveloppe à puissances divisées partielles de niveau* m (ou *m-PD-enveloppe*) de (A, I). Pour la construire, on procède de la manière suivante (voir [**5**, 1.4.1], où la construction est faite avec une condition de compatibilité plus générale) : on définit d'abord $P_{(m)}(I)$ comme étant l'enveloppe à puissances divisées usuelle $P(I^{(p^m)})$ (compatible aux puissances divisées canoniques de (p)) ; on prend alors pour $\widetilde{I}$ le PD-idéal de $P(I^{(p^m)})$ engendré par $I^{(p^m)} + pI$, et pour $\overline{I}$ l'idéal $IP(I^{(p^m)}) + \widetilde{I}$.

Pour $m = 0$, les définitions et constructions faites ici redonnent celles de 1.1.1. D'autre part, il résulte immédiatement de la définition qu'une m-PD-structure sur un idéal I peut aussi être vue comme une m'-PD-structure pour tout $m' \geqslant m$. La propriété universelle des enveloppes à puissances divisées entraîne donc que, pour m variable, celles-ci forment un système projectif

$$\cdots \longrightarrow P_{(m+1)}(I) \longrightarrow P_{(m)}(I) \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{(0)}(I) = P(I).$$

1.1.3. Soit I un idéal d'un anneau A muni d'une m-PD-structure (J,γ). Cette structure permet de définir sur A une filtration d'anneau décroissante $(I^{\{n\}})_{n\geqslant 0}$, moins fine que la filtration I-adique et appelée *filtration m-PD-adique* : elle peut être caractérisée comme étant la filtration d'anneau la plus fine vérifiant les conditions suivantes :

(i) $I^{\{0\}}=A, I^{\{1\}}=I$;
(ii) Quels que soient $n\geqslant 1$, $x\in I^{\{n\}}$ et $k\geqslant 0$, $x^{\{k\}}\in I^{\{kn\}}$;
(iii) Quel que soit $n\geqslant 0$, $(J+pA)\cap I^{\{n\}}$ est un sous-PD-idéal de $J+pA$.

Nous renvoyons à l'appendice de [**8**] pour les détails de sa construction dans le cas général ; lorsque $m=0$, on note habituellement $I^{[n]}$ au lieu de $I^{\{n\}}$, et $I^{[n]}$ est alors l'idéal de A engendré par les produits $\gamma_{n_1}(x_1)\cdots\gamma_{n_k}(x_k)$, où les x_i sont dans I, et $\sum_i n_i\geqslant n$.

La condition (iii) entraîne que $J\cap I^{\{n\}}$ est un sous-PD-idéal de J, de sorte qu'il munit $I^{\{n\}}$ d'une m-PD-structure. De même, la PD-structure de $J+pA$ passe au quotient modulo $I^{\{n\}}$; le PD-idéal $J/(J\cap I^{\{n\}})$ munit alors l'idéal $I/I^{\{n\}}\subset A/I^{\{n\}}$ d'une m-PD-structure, telle que l'homomorphisme $A\to A/I^{\{n\}}$ soit un m-PD-morphisme.

On dit que I est *m-PD-nilpotent* s'il existe un entier n tel que $I^{\{n\}}=0$. Si $I\subset A$ est un idéal quelconque, et $P_{(m)}(I)$ son enveloppe à puissances divisées de niveau m, on pose, pour tout entier $n\geqslant 0$,

$$P^n_{(m)}(I)=P_{(m)}(I)/\overline{I}^{\{n+1\}}.$$

L'image de $\overline{I}$ dans $P^n_{(m)}(I)$ est alors munie d'une m-PD-structure canonique, définie par l'image de $\widetilde{I}$, et la filtration m-PD-adique correspondante est l'image de celle de $P^n_{(m)}(I)$. En particulier, $\overline{I}$ est m-PD-nilpotent dans $P^n_{(m)}(I)$. Munies de leurs m-PD-idéaux canoniques, ces enveloppes à puissances divisées nilpotentes possèdent une propriété universelle évidente.

Par fonctorialité, la construction des enveloppes à puissances divisées s'entend aux idéaux d'un faisceau d'anneaux sur un espace topologique ; nous noterons $\mathscr{P}(\mathscr{I})$, $\mathscr{P}_{(m)}(\mathscr{I})$, $\mathscr{P}^n_{(m)}(\mathscr{I})$ les enveloppes à puissances divisées d'un idéal $\mathscr{I}$. Si $X=\mathrm{Spec}(A)$ est un schéma affine, et $\mathscr{I}\subset\mathscr{O}_X$ l'idéal quasi-cohérent défini par un idéal $I\subset A$, alors ces faisceaux sont les faisceaux quasi-cohérents définis respectivement par $P(I), P_{(m)}(I), P^n_{(m)}(I)$.

1.1.4. En général, on ne sait pas donner de description simple de la structure algébrique des enveloppes à puissances divisées. On peut néanmoins expliciter cette structure si l'on fait des hypothèses de régularité convenables sur les anneaux A et A/I [**5**, 1.5.3].

Supposons d'abord que A soit un anneau de polynômes $R[t_1,\dots,t_d]$, et I l'idéal d'augmentation $(t_1,\dots,t_d)$. Nous noterons alors $R\langle t_1,\dots,t_d\rangle_{(m)}$ l'enveloppe $P_{(m)}(I)$, et nous l'appellerons *algèbre de polynômes à puissances divisées de niveau m*. C'est

un R-module libre de base les monômes à puissances divisées

$$\underline{t}^{\{\underline{k}\}} = t_1^{\{k_1\}} \cdots t_d^{\{k_d\}},$$

pour $\underline{k} = \{k_1, \ldots, k_d\} \in \mathbb{N}^d$. Le m-PD-idéal canonique $\overline{I}$ est l'idéal engendré par les $\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ pour $|\underline{k}| := \sum_i k_i \geqslant 1$, et le sous-PD-idéal $\widetilde{I} \subset \overline{I}$ est l'idéal engendré par les éléments $\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ tels que l'un des k_i soit $\geqslant p^m$, et par les éléments $p\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ pour $|\underline{k}| \geqslant 1$. Les idéaux $\overline{I}^{\{n\}}$ définissant la filtration m-PD-adique sont les idéaux engendrés par les $\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ pour $|\underline{k}| \geqslant n$. Par suite, les $P^n_{(m)}(I)$ sont des R-modules libres de type fini, ayant pour base les $\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ pour $|\underline{k}| \leqslant n$.

Ces résultats peuvent notamment s'étendre lorsqu'on suppose plus généralement que A est une R-algèbre lisse, et $t_1, \ldots, t_d$ une suite d'éléments de A engendrant un idéal I tel que A/I soit lisse sur R :

(i) pour tout n, le choix d'une section $A/I \to A/I^n$ fait de $P^n_{(m)}(I)$ une (A/I)-algèbre libre de type fini, ayant pour base les $\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ pour $|\underline{k}| \leqslant n$, dont la m-PD-structure canonique est décrite comme plus haut ;

(ii) s'il existe un entier N tel que $p^N = 0$ dans R, alors l'image de I dans $P_{(m)}(I)$ est un idéal nilpotent, et le choix d'une section $A/I \to A/I^n$ pour n assez grand fournit un m-PD-isomorphisme entre l'algèbre de polynômes à puissances divisées $(A/I)\langle t_1, \ldots, t_d\rangle_{(m)}$ et $P_{(m)}(I)$.

1.2. Faisceaux d'opérateurs différentiels. — Soient S un schéma, X un S-schéma lisse de dimension relative d. Comme nous l'avons vu dans l'introduction, le faisceau des opérateurs différentiels $\mathscr{D}_{X/S} \subset \mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_X)$ n'opère pas en général sur la cohomologie de de Rham relative d'un morphisme lisse de S-schémas lisses. Pour appliquer les méthodes de la théorie des $\mathscr{D}$-modules à la cohomologie de de Rham et à la cohomologie cristalline, on est donc amené à introduire un autre faisceau d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}^{(0)}_{X/S}$ sur X, tel que la donnée d'une connexion intégrable sur un $\mathscr{O}_X$-module soit équivalente à celle d'une structure de $\mathscr{D}^{(0)}_{X/S}$-module à gauche.

Plus généralement, si S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma, la théorie des enveloppes à puissances divisées partielles va nous permettre de construire un système inductif de faisceaux d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}^{(m)}_{X/S}$ indexé par $\mathbb{N}$, de limite $\mathscr{D}_{X/S}$, dont le rôle apparaîtra plus loin en liaison d'une part avec l'étude de l'action de Frobenius, d'autre part avec l'introduction sur un schéma formel lisse $\mathscr{X}$ du faisceau d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ correspondant aux conditions de convergence pour les isocristaux.

Nous explicitons ici la construction de ces faisceaux d'opérateurs différentiels, et certaines de leurs propriétés algébriques de base.

1.2.1. Rappelons d'abord la construction du faisceau des opérateurs différentiels usuels $\mathscr{D}_{X/S}$ donnée par Grothendieck dans [**EGA**, IV, 16.8]. Si $\mathscr{I}$ est l'idéal de l'immersion diagonale $X \hookrightarrow X \times_S X$, le *faisceau des parties principales d'ordre n* sur X relativement à S est le faisceau quotient $\mathscr{P}^n_{X/S} = \mathscr{O}_{X\times X}/\mathscr{I}^{n+1}$. Il est muni de

deux structures de $\mathscr{O}_X$-algèbre, définies par les homomorphismes $d_0, d_1 : \mathscr{O}_X \to \mathscr{P}^n_{X/S}$ tels que $d_0(f) = f \otimes 1, d_1(f) = 1 \otimes f$, correspondant aux deux projections p_0 et p_1 de $X \times_S X$ sur X. Ces structures sont appelées respectivement *structure gauche* et *structure droite*.

Considérant $\mathscr{P}^n_{X/S}$ comme $\mathscr{O}_X$-module par la structure gauche, on définit le *faisceau des opérateurs différentiels* par dualité en posant

$$\mathscr{D}_{X/S,n} := \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{P}^n_{X/S}, \mathscr{O}_X), \qquad \mathscr{D}_{X/S} := \bigcup_{n\geqslant 0} \mathscr{D}_{X/S,n}.$$

Pour $n, n' \geqslant 0$, on dispose d'autre part d'un homomorphisme d'anneaux

$$\delta^{n,n'} : \mathscr{P}^{n+n'}_{X/S} \longrightarrow \mathscr{P}^n_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{P}^{n'}_{X/S},$$

tel que $\delta^{n,n'}(a \otimes b) = (a \otimes 1) \otimes (1 \otimes b)$. Le composé de deux opérateurs différentiels $P : \mathscr{P}^n_{X/S} \to \mathscr{O}_X$ et $Q : \mathscr{P}^{n'}_{X/S} \to \mathscr{O}_X$ est alors défini comme l'homomorphisme

$$PQ : \mathscr{P}^{n+n'}_{X/S} \xrightarrow{\delta^{n,n'}} \mathscr{P}^n_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{P}^{n'}_{X/S} \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes Q} \mathscr{P}^n_{X/S} \xrightarrow{P} \mathscr{O}_X.$$

On fait opérer $P : \mathscr{P}^n_{X/S} \to \mathscr{O}_X$ sur $\mathscr{O}_X$ en le composant avec le morphisme $d_1 : \mathscr{O}_X \to \mathscr{P}^n_{X/S}$, ce qui fournit un homomorphisme d'anneaux injectif $\mathscr{D}_{X/S} \hookrightarrow \mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_X)$.

Sur un ouvert $U \subset X$ possédant un système de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$ (*i.e.* un S-morphisme étale $U \to \mathbb{A}^d_S$ sur l'espace affine relatif au-dessus de S), la structure de $\mathscr{D}_{X/S}$ s'explicite comme suit. Si l'on note $\tau_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1 \in \mathscr{O}_{X\times X}$, les τ_i forment une suite régulière de générateurs de $\mathscr{I}$. Pour tout n, et chacune des deux structures de $\mathscr{O}_X$-algèbre, $\mathscr{P}^n_{X/S}$ est alors un $\mathscr{O}_X$-module libre de base les $\underline{\tau}^{\underline{k}} = \tau_1^{k_1} \cdots \tau_d^{k_d}$ pour $|k| \leqslant n$. On note $(\underline{\partial}^{[\underline{k}]})_{|k|\leqslant n}$ la base duale de $\mathscr{D}_{X/S,n}$, de sorte que, sur U, $\mathscr{D}_{X/S}$ est un $\mathscr{O}_U$-module libre de base les opérateurs $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$. La structure d'anneau de $\mathscr{D}_{X/S}$ est déterminée par les relations

$$\underline{\partial}^{[\underline{k}']}\underline{\partial}^{[\underline{k}'']} = \binom{\underline{k}' + \underline{k}''}{\underline{k}'} \underline{\partial}^{[\underline{k}'+\underline{k}'']}, \tag{1.2.1.1}$$

$$\underline{\partial}^{[\underline{k}]}(f) = \sum_{\underline{k}'+\underline{k}''=\underline{k}} \underline{\partial}^{[\underline{k}']}(f)\underline{\partial}^{[\underline{k}'']}, \tag{1.2.1.2}$$

pour tous $\underline{k}, \underline{k}', \underline{k}'' \in \mathbb{N}^d$ et tout $f \in \Gamma(U, \mathscr{O}_U)$. En particulier, en notant $(\partial_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ la base de dérivations duale de la base (dt_i) de $\Omega^1_{X/S}$, on obtient la relation $\underline{k}!\underline{\partial}^{[\underline{k}]} = \underline{\partial}^{\underline{k}} := \partial_1^{k_1} \cdots \partial_d^{k_d}$, de sorte que les $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$ jouent le rôle de puissances divisées des dérivations.

1.2.2. Fixons maintenant un entier $m \in \mathbb{N}$. Si $m \geqslant 1$, nous supposerons que S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma. On modifie les constructions précédentes en introduisant les enveloppes à puissances divisées nilpotentes $\mathscr{P}^n_{X/S,(m)} := \mathscr{P}^n_{(m)}(\mathscr{I})$, que nous appellerons *faisceaux de parties principales de niveau m et d'ordre n*. Comme précédemment, ces faisceaux sont munis de deux structures de $\mathscr{O}_X$-algèbre. En utilisant la structure gauche, nous définirons le *faisceau des opérateurs différentiels de niveau m et d'ordre n* en

posant

$$\mathscr{D}^{(m)}_{X/S,n} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{P}^n_{X/S,(m)}, \mathscr{O}_X);$$

le *faisceau des opérateurs différentiels de niveau m* est alors le faisceau $\mathscr{D}^{(m)}_{X/S} = \cup_{n\geqslant 0}\mathscr{D}^{(m)}_{X/S,n}$. En appliquant la fonctorialité des enveloppes à puissances divisées aux morphismes $\delta^{n,n'}$ construits en 1.2.1, on obtient des homomorphismes d'anneaux

$$\delta^{n,n'}_{(m)} : \mathscr{P}^{n+n'}_{X/S,(m)} \longrightarrow \mathscr{P}^n_{X/S,(m)} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{P}^{n'}_{X/S,(m)}$$

grâce auxquels on définit comme plus haut la structure d'anneau (filtré) de $\mathscr{D}^{(m)}_{X/S}$. On définit de même l'opération de $\mathscr{D}^{(m)}_{X/S}$ sur $\mathscr{O}_X$; on prendra garde que cette opération n'est pas fidèle en général (*cf.* 1.2.5 plus bas).

Par la suite, le schéma de base S sera le plus souvent fixé, et nous omettrons alors l'indice S dans les notations : nous noterons donc $\mathscr{P}^n_{X,(m)}, \mathscr{D}^{(m)}_X, \dots$ au lieu de $\mathscr{P}^n_{X/S,(m)}, \mathscr{D}^{(m)}_{X/S}, \dots$

1.2.3. Sur un ouvert $U \subset X$ possédant des coordonnées locales $t_1, \dots, t_d$, la structure des faisceaux $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$ est fournie par 1.1.4. En posant encore $\tau_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$, $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$ est un $\mathscr{O}_X$-module libre de rang fini, ayant pour base les puissances divisées partielles $\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}$ pour $|\underline{k}| \leqslant n$. On munit alors $\mathscr{D}^{(m)}_{X,n}$ de la base duale, que l'on note $(\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle})_{|\underline{k}|\leqslant n}$, et $\mathscr{D}^{(m)}_X$ de la base formée par les $\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle}$ pour $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$; s'il est nécessaire de préciser le niveau m, on l'indiquera par les notations $\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}_{(m)}}, \underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle_{(m)}}$. Pour expliciter la structure multiplicative de $\mathscr{D}^{(m)}_X$, on est amené à introduire des coefficients binômiaux modifiés (qui interviennent déjà dans les relations analogues à celles de 1.1.1 pour les puissances divisées partielles) : pour $k', k'' \in \mathbb{N}$, $k = k' + k''$, on écrit $k = p^m q + r$, $k' = p^m q' + r'$, $k'' = p^m q'' + r''$, avec $0 \leqslant r, r', r'' < p^m$, et on pose

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\}_{(m)} := \frac{q!}{q'!\, q''!}, \qquad \left\langle \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\rangle_{(m)} := \binom{k}{k'} \left\{ \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\}^{-1}_{(m)}$$

Nous omettrons de préciser le niveau m si aucune confusion n'en résulte. Les coefficients $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k' \end{smallmatrix} \right\}$ sont dans $\mathbb{N}$, et les coefficients $\left\langle \begin{smallmatrix} k \\ k' \end{smallmatrix} \right\rangle$ dans $\mathbb{Z}_{(p)}$ [**5**, 1.1.3]. À partir des relations analogues à celles de 1.1.1 pour les puissances divisées partielles, on obtient alors

$$\underline{\partial}^{\langle\underline{k}'\rangle}\underline{\partial}^{\langle\underline{k}''\rangle} = \left\langle \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\rangle \underline{\partial}^{\langle\underline{k}'+\underline{k}''\rangle} \tag{1.2.3.1}$$

$$\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle}(f) = \sum_{\underline{k}'+\underline{k}''=\underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle\underline{k}'\rangle}(f)\underline{\partial}^{\langle\underline{k}''\rangle} \tag{1.2.3.2}$$

En particulier, on déduit de (1.2.3.1) la relation $(\underline{k}!/\underline{q}!)\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle} = \underline{\partial}^{\underline{k}}$. Lorsque $m = 0$, on a donc simplement $\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle} = \underline{\partial}^{\underline{k}}$.

L'étude des propriétés de divisibilité de ces coefficients binômiaux modifiés [**5**] montre que, si $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$ s'écrit $\underline{k} = p^m \underline{q} + \underline{r}$, avec $0 \leqslant r_i < p^m$, et $r_i = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{i,j} p^j$, avec $0 \leqslant \alpha_{i,j} < p$, alors

$$\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} = u_{\underline{k}} \prod_{i=1}^{d} \Big(\prod_{j=0}^{m-1} (\partial_i^{\langle p^j \rangle})^{a_{i,j}} \Big) (\partial_i^{\langle p^m \rangle})^{q_i}, \tag{1.2.3.3}$$

où $u_{\underline{k}}$ est un élément inversible de $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Rappelons qu'un faisceau d'anneaux $\mathscr{A}$ sur un espace topologique $\mathscr{X}$ est dit *cohérent* si, pour tout ouvert $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$, tout idéal de type fini $\mathscr{I} \subset \mathscr{A}_{|\mathscr{U}}$ de la restriction de $\mathscr{A}$ à $\mathscr{U}$ est de présentation finie [**48**]. Grâce aux relations (1.2.3.3), un argument classique ramenant au gradué associé à la filtration par l'ordre (voir [**15**], [**17**], [**36**], [**40**], [**42**],...) montre que $\mathscr{D}_X^{(m)}$ a de bien meilleures propriétés de finitude que $\mathscr{D}_X$ (dont les anneaux de sections ne sont pas noethériens en général) :

***1.2.4. Proposition* ([5**, 2.2.5 et 3.1.2**]).** — *Supposons S localement noethérien.*

(i) *Si X est affine, l'anneau $\Gamma(X, \mathscr{D}_X^{(m)})$ est noethérien à gauche et à droite.*

(ii) *Le faisceau $\mathscr{D}_X^{(m)}$ est un faisceau d'anneaux cohérent.*

1.2.5. Pour m variable, et n fixé, les faisceaux $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$ forment un système projectif, et les morphismes de transition sont compatibles aux homomorphismes $\delta^{n,n'}_{(m)}$. De plus, $\mathscr{P}^n_X$ s'envoie dans chacun des $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$, de manière compatible aux morphismes de transition, et aux homomorphismes $\delta^{n,n'}$. Il en résulte que les faisceaux $\mathscr{D}_X^{(m)}$ forment un système inductif de faisceaux d'anneaux, muni d'un homomorphisme d'anneaux dans $\mathscr{D}_X$:

$$\mathscr{D}_X^{(0)} \longrightarrow \mathscr{D}_X^{(1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathscr{D}_X^{(m)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathscr{D}_X.$$

Supposons que X soit muni d'un système de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$. Pour $k \in \mathbb{N}$, et tout entier m, posons $k = p^m q_m + r_m$, avec $0 \leqslant r_m < p^m$. L'homomorphisme canonique $\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{D}_X^{(m+1)}$ (resp. $\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{D}_X$) envoie alors $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ sur $(\underline{q}_m ! / \underline{q}_{m+1} !) \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m+1)}}$ (resp. sur $\underline{q}_m ! \underline{\partial}^{[\underline{k}]}$). En particulier, l'image de $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ dans $\mathscr{D}_X$ est égale à $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$ lorsque chacun des k_i est tel que $k_i \leqslant p^m$. Dans ce cas, nous commettrons parfois l'abus de notation consistant à noter $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$ l'élément $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ de $\mathscr{D}_X^{(m)}$. Il en résulte d'autre part que l'homomorphisme canonique

$$\varinjlim_m \mathscr{D}_X^{(m)} \longrightarrow \mathscr{D}_X$$

est un isomorphisme.

On remarquera que, pour $d \geqslant 1$, les homomorphismes $\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{D}_X^{(m+1)}$ et $\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{D}_X$ sont injectifs si et seulement si S est plat sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Par contre, si S est de caractéristique p, on vérifie sans difficulté que ces homomorphismes ont le même noyau, engendré en coordonnées locales par les opérateurs $\delta_i^{\langle p^{m+1} \rangle_{(m)}}$; d'autre part, l'image de $\mathscr{D}_X^{(m)}$ dans $\mathscr{D}_X \subset \mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_X)$ est le sous-anneau des applications $\mathscr{O}_{X^{(m+1)}}$-linéaires

de $\mathscr{O}_X$ dans lui-même, en notant $X^{(m+1)}$ le schéma déduit de X par changement de base par le $(m+1)$-ième itéré de l'endomorphisme de Frobenius de S [**5**, 2.2.7]. En se ramenant à la caractéristique p, un dévissage permet d'en déduire la propriété suivante :

***1.2.6. Proposition* ([9]).** — *Supposons que p soit localement nilpotent sur S. Alors, pour tout m, $\mathscr{D}_X^{(m+1)}$ est de Tor-dimension d à droite et à gauche sur $\mathscr{D}_X^{(m)}$.*

1.3. Stratifications et costratifications. — Les relations (1.2.3.3) montrent que, dans un système de coordonnées locales, la donnée d'une structure de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module sur un $\mathscr{O}_X$-module est déterminée par l'action des opérateurs $\partial_i^{\langle p^j \rangle}$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$. Si $m \geqslant 1$, il n'est pas toujours possible de décrire explicitement cette action, et il n'est pas toujours commode de vérifier directement que la structure qu'elle définit est indépendante du choix des coordonnées. C'est pourquoi on est souvent amené à utiliser l'interprétation cristalline (due à Grothendieck [**26**] dans le cas classique) d'une structure de $\mathscr{D}_X$-module en termes de données de descente infinitésimales, encore appelées *stratifications*. Comme ce formalisme s'applique aussi bien aux $\mathscr{D}_X$-modules qu'aux $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules, nous engloberons dans notre présentation le cas des $\mathscr{D}_X$-modules en posant $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathscr{P}^n_{X,(\infty)} = \mathscr{P}^n_X$, $\mathscr{D}_X^{(\infty)} = \mathscr{D}_X$.

1.3.1. Rappelons d'abord que, si X est un schéma lisse sur une base S quelconque, la donnée d'une connexion intégrable ∇ sur un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{E}$ est équivalente à celle d'une structure de $\mathscr{D}_X^{(0)}$-module à gauche prolongeant sa structure de $\mathscr{O}_X$-module (*cf.* [**2**, 4.1.3 et 4.2.12] ou [**12**, th. 4.8]). Sur un ouvert $U \subset X$ muni de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$, définissant des dérivations $\partial_1, \ldots, \partial_d$, la connexion $\nabla : \mathscr{E} \to \mathscr{E} \otimes \Omega^1_X$ d'un $\mathscr{D}_X^{(0)}$-module $\mathscr{E}$ est caractérisée par

$$\nabla(x) = \sum_{i=1}^{d} \partial_i x \otimes dt_i$$

pour toute section x de $\mathscr{E}$. Inversement, si on se donne une connexion intégrable ∇, cette formule détermine l'action des ∂_i, et ces actions commutent grâce à la condition d'intégrabilité ; on vérifie qu'elles s'étendent en une structure de $\mathscr{D}_X^{(0)}$-module à gauche en utilisant le fait que les puissances usuelles $\underline{\partial^k}$ des ∂_i forment une base de $\mathscr{D}_X^{(0)}$ sur $\mathscr{O}_X$, grâce à 1.2.3.

1.3.2. Soit $m \in \overline{\mathbb{N}}$. On suppose dans ce qui suit que, si $0 < m < \infty$, S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma. Pour tous $\nu, n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \overline{\mathbb{N}}$, nous noterons $X^{\nu+1} = X^{\nu+1}_{/S}$, $\mathscr{I}_\nu$ l'idéal de l'immersion diagonale de X dans $X^{\nu+1}$, $\mathscr{P}_{X,(m)}(\nu)$ l'enveloppe à puissances divisées de niveau m de $\mathscr{I}_\nu$, $\overline{\mathscr{I}}_\nu$ son m-PD-idéal canonique, $\mathscr{P}^n_{X,(m)}(\nu) = \mathscr{P}_{X,(m)}(\nu)/\overline{\mathscr{I}}_\nu^{\{n+1\}}$, $\Delta^n_{X,(m)}(\nu) = \operatorname{Spec}\big(\mathscr{P}^n_{X,(m)}(\nu)\big)$, $p_i : \Delta^n_{X,(m)}(\nu) \to X$, $q_{i,j} : \Delta^n_{X,(m)}(2) \to \Delta^n_{X,(m)}(1)$ les morphismes induits par les projections (pour $0 \leqslant i < j \leqslant \nu$). Pour $\nu = 1$, on notera simplement $\Delta^n_{X,(m)}$ au lieu de $\Delta^n_{X,(m)}(1)$.

Soit $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_X$-module. Une m-PD-stratification sur $\mathscr{E}$ est la donnée d'une famille d'isomorphismes $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$-linéaires

$$\varepsilon_n : p_1^*\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} p_0^*\mathscr{E}$$

sur les $\Delta^n_{X,(m)}$, vérifiant les conditions suivantes :

(i) Pour $n' \leqslant n$, $\varepsilon_{n'}$ est l'isomorphisme induit par ε_n par restriction à $\Delta^{n'}_{X,(m)}$, et $\varepsilon_0 = \mathrm{Id}$.

(ii) Pour tout n, $q_{0,2}^*(\varepsilon_n) = q_{0,1}^*(\varepsilon_n) \circ q_{1,2}^*(\varepsilon_n)$ (condition de cocycle).

La donnée d'une structure de $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module à gauche sur $\mathscr{E}$ prolongeant sa structure de $\mathscr{O}_X$-module est alors équivalente à celle d'une m-PD-stratification sur $\mathscr{E}$. La correspondance s'effectue ainsi :

a) Si l'on suppose donnée une structure de $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module à gauche sur $\mathscr{E}$, la m-PD-stratification correspondante est donnée en coordonnées locales par la formule de Taylor

$$\varepsilon_n(1 \otimes x) = \sum_{|\underline{k}| \leqslant n} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} x \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}. \tag{1.3.2.1}$$

b) Si l'on suppose donnée une m-PD-stratification (ε_n) sur $\mathscr{E}$, la structure de $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module à gauche correspondante est caractérisée par l'action des $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$: pour toute section x de $\mathscr{E}$, on définit les $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} x$ comme étant les composantes de $\varepsilon_n(1 \otimes x)$ dans la décomposition de $p_0^*\mathscr{E}$ comme somme directe de copies de $\mathscr{E}$ fournie par la base $\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}$ de $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$.

1.3.3. On peut donner des $\mathscr{D}^{(m)}_X$-modules à droite une description analogue à celle des $\mathscr{D}^{(m)}_X$-modules à gauche en termes de stratifications. Pour tout morphisme fini localement libre $f : X \to Y$, et tout $\mathscr{O}_Y$-module $\mathscr{F}$, nous noterons $f^\flat\mathscr{F}$ le $\mathscr{O}_X$-module défini par $f^\flat\mathscr{F} = \overline{f}^*\,\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(f_*\mathscr{O}_X, \mathscr{F})$, où $\overline{f}$ désigne le morphisme d'espaces annelés $(X, \mathscr{O}_X) \to (Y, f_*\mathscr{O}_X)$. Une *$m$-PD-costratification* sur un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{M}$ est alors la donnée d'une famille d'isomorphismes $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$-linéaires

$$\varepsilon_n : p_0^\flat\mathscr{M} \xrightarrow{\sim} p_1^\flat\mathscr{M}$$

sur les $\Delta^n_{X,(m)}$, vérifiant les conditions suivantes :

(i) Pour $n' \leqslant n, \varepsilon_{n'}$ est induit par ε_n via les isomorphismes de foncteurs

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{P}^n_{X,(m)}}\left(\mathscr{P}^{n'}_{X,(m)}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{P}^n_{X,(m)}, \mathscr{M})\right) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{P}^{n'}_{X,(m)}, \mathscr{M}),$$

et $\varepsilon_0 = \mathrm{Id}$.

(ii) Pour tout $n, q_{0,2}^\flat(\varepsilon_n) = q_{1,2}^\flat(\varepsilon_n) \circ q_{0,1}^\flat(\varepsilon_n)$.

Comme précédemment, la donnée d'une structure de $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module à droite sur $\mathscr{M}$ prolongeant sa structure de $\mathscr{O}_X$-module est équivalente à celle d'une m-PD-costratification [**8**, 1.1.4] :

a) Les faisceaux $p_0^\flat\mathscr{M}$ et $p_1^\flat\mathscr{M}$ s'identifient respectivement à $\mathscr{M}\otimes\mathscr{D}_X^{(m)}$ et $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(p_{1*}\mathscr{P}^n_{X,(m)},\mathscr{O}_X)\otimes\mathscr{M}$. Si $\mathscr{M}$ est muni d'une structure de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite, et si l'on munit $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(p_{1*}\mathscr{P}^n_{X,(m)},\mathscr{O}_X)$ de la base $(\widetilde{\underline{\partial}}^{\langle\underline{k}\rangle})$ duale de la base $(\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}})$ de $\mathscr{P}^n_{X,(m)}$ (pour la structure droite), la costratification de $\mathscr{M}$ est définie par

$$\varepsilon_n\left(x\otimes\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle}\right)=\sum_{\underline{h}\leqslant\underline{k}}\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{matrix}\right\}\widetilde{\underline{\partial}}^{\langle\underline{h}\rangle}\otimes x\underline{\partial}^{\langle\underline{k}-\underline{h}\rangle}$$

pour toute section x de $\mathscr{M}$ et tout $\underline{k}\in\mathbb{N}^d$.

b) Inversement, cette relation entraîne en particulier que $\varepsilon_n(x\otimes\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle})(1)=x\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle}$, de sorte que la donnée de la costratification détermine l'action des $\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle}$ sur $\mathscr{M}$, et on vérifie que celle-ci se prolonge en une structure de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite.

1.3.4. En caractéristique 0, on sait classiquement définir une action à droite de $\mathscr{D}_X$ sur le faisceau $\omega_X=\Omega_X^d$ des différentielles de degré maximum, donnée en coordonnées locales par l'action par l'opérateur adjoint. L'interprétation d'une structure de $\mathscr{D}_X$-module à droite en termes de costratifications permet d'utiliser la théorie de la dualité de Grothendieck pour les faisceaux cohérents [**27**] pour étendre cette construction sans hypothèse de caractéristique.

Nous supposerons ici pour simplifier que S est localement noethérien, le cas général en résultant par un argument classique de passage à la limite (voir [**8**, 1.2.6]). Reprenant les notations de [**27**], nous noterons $f^!$ le foncteur image inverse extraordinaire pour les complexes de modules quasi-cohérents : lorsque $f:X\to Y$ est un morphisme fini, $f^!$ est le foncteur dérivé du foncteur $f^\flat$ défini plus haut, qu'on note encore $f^\flat$; lorsque f est un morphisme lisse de dimension relative r, $f^!(\mathscr{F})=f^*\mathscr{F}\otimes\omega_{X/Y}[r]$.

Soient $f:X\to S$ le morphisme donné, $p_i:\Delta^n_{X,(\infty)}\to X$ les morphismes induits par les projections de X^2 sur X. L'égalité $f\circ p_0=f\circ p_1$ fournit des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}\varepsilon_n:p_0^\flat\omega_X=p_0^!\omega_X&\simeq p_0^!f^!\left(\mathscr{O}_S[-d]\right)\\ &\simeq p_1^!f^!\left(\mathscr{O}_S[-d]\right)\simeq p_1^!\omega_X=p_1^\flat\omega_X,\end{aligned}\tag{1.3.4.1}$$

qui munissent ω_X d'une costratification. On en tire donc une structure de $\mathscr{D}_X$-module à droite sur ω_X, d'où une structure de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite pour tout m. En explicitant en coordonnées locales les isomorphismes définissant (1.3.4.1), on peut interpréter cette structure au moyen de la notion d'opérateur adjoint :

1.3.5. Théorème **([8**, th. 1.2.3**])**. — *Soient $U\subset X$ un ouvert possédant un système de coordonnées locales $t_1,\dots,t_d$, et $a\in\Gamma(U,\mathscr{O}_X)$. Alors, pour la structure de $\mathscr{D}_X$-module à droite sur ω_X définie en 1.3.4, on a*

$$(a\,dt_1\wedge\cdots\wedge dt_d)\cdot P=({}^tP\cdot a)\,dt_1\wedge\cdots\wedge dt_d,\tag{1.3.5.1}$$

où, pour tout opérateur $P = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]} \in \Gamma(U, \mathscr{D}_X)$, *on définit l'*opérateur adjoint ${}^tP$ *de* P *par*

$$ {}^tP = \sum_{\underline{k}} (-1)^{|\underline{k}|} \underline{\partial}^{[\underline{k}]} a_{\underline{k}}. \tag{1.3.5.2}$$

1.3.6. Soient $m \in \overline{\mathbb{N}}, \mathscr{E}, \mathscr{F}$ deux $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à gauche, $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ deux $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à droite. Les méthodes de 1.3.2 et 1.3.3 permettent de définir des structures de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module sur les produits tensoriels et les faisceaux d'homomorphismes selon les règles habituelles :

(i) Les faisceaux $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}$, $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ et $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{N}, \mathscr{M})$ possèdent une structure naturelle de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche.

(ii) Les faisceaux $\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E}$ et $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{M})$ possèdent une structure naturelle de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite.

Grâce à 1.3.4, on en déduit qu'on dispose toujours pour les $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules de la méthode standard pour transformer un module à droite en module à gauche, et réciproquement :

(iii) Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche, alors $\omega_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E}$ a une structure naturelle de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite ;

(iv) Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite, alors $\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X^{-1}$ a une structure naturelle de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche.

Si l'on trivialise ω_X grâce au choix de la base $dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_d$ associée à un système de coordonnnées locales, ce passage de gauche à droite (resp. de droite à gauche) consiste à faire agir un opérateur différentiel par l'intermédiaire de son adjoint.

2. Opérations cohomologiques modulo p^n

Nous présentons dans ce chapitre un certain nombre de résultats de finitude pour les opérations cohomologiques de base de la théorie des $\mathscr{D}$-modules, dans le cas des anneaux d'opérateurs $\mathscr{D}_X^{(m)}$ introduits au chapitre précédent. Précisons d'abord quelques points :

a) Sur un corps de caractéristique 0, la première condition de finitude importante pour un $\mathscr{D}_X$-module est la cohérence sur $\mathscr{D}_X$. Sur une base S localement noethérienne plus générale, il ne suffit plus d'imposer aux complexes d'être bornés et à cohomologie cohérente, car les anneaux considérés ne sont plus de dimension homologique finie en général : il est facile de voir que $\mathscr{D}_X^{(0)}$ est de dimension homologique finie si et seulement si S est régulier, hypothèse qui ne sera pas satisfaite dans le cas – essentiel ici – où S est plat sur $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, avec $n \geqslant 2$. La généralisation adéquate de la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X)$ est alors la catégorie $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$ des complexes parfaits (voir le point 3) des conventions générales).

b) Dans la définition des opérations cohomologiques sur les $\mathscr{D}$-modules, les notations et les conventions de décalage que nous suivrons ici sont celles de Bernstein et Borel [**17**]. Rappelons qu'elles sont normalisées de telle sorte que, lorsque X est une variété complexe, la correspondance de Riemann-Hilbert covariante, définie par le foncteur de de Rham DR, ait les propriétés suivantes :

(i) Elle associe à un complexe réduit à un $\mathscr{D}_X$-module holonome placé en degré 0 un faisceau pervers (défini topologiquement, voir [**1**], ou [**38**]) ;

(ii) Sur la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hr}}(\mathscr{D}_X)$ des complexes bornés à cohomologie holonome régulière, les opérations cohomologiques correspondent aux opérations de même nom sur la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X^{\mathrm{an}}, \underline{\mathbb{C}}_{X^{\mathrm{an}}})$ des complexes bornés à cohomologie constructible.

c) Pour simplifier l'exposé, nous nous limiterons dans ce qui suit au cas où $m \in \mathbb{N}$, bien que certains des résultats énoncés restent valables sur le faisceau $\mathscr{D}_X$. Rappelons que, lorsque $m > 0$, on suppose que S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma.

d) Signalons que les résultats des sections 2.1, 2.2 et 2.4 sont « de nature cristalline » : si $\mathfrak{a} \subset \mathscr{O}_S$ est un m-PD-idéal quasi-cohérent, et m-PD-nilpotent, il suffit de se donner des morphismes de schémas entre les réductions modulo $\mathfrak{a}$, ou de supposer que les diagrammes considérés sont commutatifs modulo $\mathfrak{a}$. Nous ne développerons pas ce point ici, renvoyant le lecteur à [**8**] et [**10**] pour des énoncés précis.

2.1. Descente par Frobenius. — Outre les homomorphismes de transition définis en 1.2.5, les faisceaux d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}^{(m)}_X$ sont reliés entre eux de manière essentielle par l'action du morphisme de Frobenius. Plus précisément, nous verrons ici que, si X est de caractéristique p, et $F : X \to X'$ le morphisme de Frobenius relatif (ou plus généralement pour tout relèvement de cette situation), le foncteur image inverse F^* induit une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche et celle des $\mathscr{D}^{(m+1)}_X$-modules à gauche. Ce résultat est d'un usage constant, notamment parce qu'il permet de déduire certaines propriétés des $\mathscr{D}^{(m)}_X$-modules du cas des $\mathscr{D}^{(0)}_X$-modules.

2.1.1. À l'origine du théorème de descente par Frobenius exposé ici se trouve le théorème de descente de Cartier, pour les modules munis d'une connexion intégrable à p-courbure nulle ([**20**], [**21**], [**34**]). Soient S un schéma de caractéristique p, X un S-schéma lisse. Rappelons que, si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_X$-module muni d'une connexion intégrable ∇, si $U \subset X$ est un ouvert muni de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$, et si $\partial_1, \ldots, \partial_d$ est la base de dérivations duale de la base (dt_i) de Ω^1_X, ∇ est à p-courbure nulle (sur U) si et seulement si, pour toute section x de $\mathscr{E}$ au-dessus d'un ouvert de U, et tout i, $\partial_i^p x = 0$. Soient $X' = X^{(p/S)}$ l'image inverse de X par le morphisme de Frobenius absolu de S, $F : X \to X'$ le morphisme de Frobenius relatif. Pour tout $\mathscr{O}_{X'}$-module $\mathscr{E}$, $F^*\mathscr{E}$ est muni d'une connexion intégrable canonique à p-courbure nulle, et le théorème de Cartier affirme alors que F^* induit une équivalence de catégories entre la

catégorie des $\mathscr{O}_{X'}$-modules et celle des $\mathscr{O}_X$-modules munis d'une connexion intégrable à p-courbure nulle [**34**, th. 5.1].

Du point de vue des faisceaux d'opérateurs différentiels considérés ici, ce résultat s'interprète de la manière suivante. La donnée d'une connexion intégrable ∇ sur un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{E}$ équivaut à celle d'une structure de $\mathscr{D}_X^{(0)}$-module à gauche. Soient $\mathscr{K}$ l'idéal bilatère noyau de l'homomorphisme canonique $\mathscr{D}_X^{(0)} \to \mathscr{D}_X$, et $\overline{\mathscr{D}}_X^{(0)} = \mathscr{D}_X^{(0)}/\mathscr{K}$. Comme on l'a vu en 1.2.5, $\mathscr{K}$ est engendré localement par les opérateurs $\partial_i^{\langle p\rangle_{(0)}} = \partial_i^p$, de sorte que ∇ est à p-courbure nulle si et seulement si $\mathscr{K}\mathscr{E} = 0$. D'autre part, l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{X\times_S X} \to \mathscr{P}_X^n$ se factorise par $\mathscr{O}_{X\times_{X'} X}$ pour tout n, puisque dans un anneau de caractéristique p tout élément d'un PD-idéal est de puissance p-ième nulle. On obtient alors l'équivalence des conditions suivantes [**8**, 2.6.2] :

(i) La connexion ∇ est à p-courbure nulle ;

(ii) La structure de $\mathscr{D}_X^{(0)}$-module à gauche de $\mathscr{E}$ est induite par une structure de $\overline{\mathscr{D}}_X^{(0)}$-module à gauche ;

(iii) La PD-stratification de $\mathscr{E}$ provient par extension des scalaires d'une donnée de descente de X à X'.

Comme F est un morphisme fini localement libre, toute donnée de descente de X à X' sur un $\mathscr{O}_X$-module est effective, d'où le théorème de Cartier.

2.1.2. Alors que la connexion image inverse par F d'une connexion intégrable ∇' sur un $\mathscr{O}_{X'}$-module $\mathscr{E}'$ est simplement la connexion standard dont est munie canoniquement l'image inverse par F d'un $\mathscr{O}_{X'}$-module quelconque, et en particulier ne contient aucune information sur ∇', l'introduction de la famille de faisceaux d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}_X^{(m)}$ va permettre de reconstruire la structure différentielle de $\mathscr{E}'$ à partir de celle de $F^*\mathscr{E}'$.

Ce principe s'appliquera plus généralement à tout relèvement d'une puissance du morphisme de Frobenius. Nous supposerons dans ce qui suit que S est un schéma annulé par p^N pour N assez grand, muni d'un m-PD-idéal quasi-cohérent $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$ tel que $p \in \mathfrak{a}$. Soient $S_0 \subset S$ le sous-schéma fermé défini par $\mathfrak{a}$, X un S-schéma lisse de réduction X_0 sur S_0, s un entier positif, $X_0^{(s)}$ le S_0-schéma déduit de X_0 par image inverse par le s-ième itéré du morphisme de Frobenius absolu de S_0, $F : X \to X'$ un morphisme de S-schémas lisses relevant le morphisme de Frobenius relatif $F^s_{X_0/S_0}$: $X_0 \to X_0^{(s)}$.

Gardons les notations de 1.3.2. Pour tout entier $\nu \geqslant 1$, le morphisme $F_\nu : X^{\nu+1} \to X'^{\nu+1}$ induit par F fournit un homomorphisme de faisceaux d'anneaux

$$F_\nu^* : \mathscr{O}_{X'^{\nu+1}} \longrightarrow \mathscr{O}_{X^{\nu+1}} \longrightarrow \mathscr{P}_{X,(m+s)}(\nu).$$

Supposons donné un système de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$ sur un ouvert de X, et soient $t'_1, \ldots, t'_d$ des coordonnées locales sur l'ouvert correspondant de X' relevant les coordonnées $1 \otimes t_i \in \mathscr{O}_{X_0^{(s)}}$. Comme F est un relèvement du morphisme de Frobenius

relatif, il existe des sections $a_i \in \mathfrak{a}\mathscr{O}_X$ telles que $F^*(t'_i) = t_i^{p^s} + a_i$. On en déduit [**8**, 2.2.2] que F_ν^* envoie l'idéal $\mathscr{I}'^{(p^m)}_\nu$ de $\mathscr{O}_{X'^{\nu+1}}$ (où $\mathscr{I}'_\nu$ est l'idéal de l'immersion diagonale de X' dans $X'^{\nu+1}$) dans le PD-idéal $\widetilde{\mathscr{I}_\nu} + \mathfrak{b}\overline{\mathscr{I}}_\nu$ de $\mathscr{P}_{X,(m+s)}$. En factorisant F_ν^* grâce à la propriété universelle des enveloppes à puissances divisées, on obtient alors un homomorphisme canonique $\Phi_\nu : \mathscr{P}_{X',(m)}(\nu) \to \mathscr{P}_{X,(m+s)}(\nu)$. On vérifie de plus que, pour tout n, Φ_ν envoie $\overline{\mathscr{I}}^{\{n\}_{(m)}}_\nu$ dans $\overline{\mathscr{I}}^{\{n\}_{(m+s)}}_\nu$, d'où un système projectif d'homomorphismes

$$\Phi_\nu^n : \mathscr{P}^n_{X',(m)}(\nu) \longrightarrow \mathscr{P}^n_{X,(m+s)}(\nu).$$

Si $\mathscr{E}'$ est un $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-module à gauche, les homomorphismes Φ^n_ν permettent de munir $\mathscr{E} = F^*\mathscr{E}'$ d'une $(m+s)$-PD-stratification, déduite par extension des scalaires de la m-PD-stratification de $\mathscr{E}'$. On obtient donc ainsi une structure canonique de $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-module sur $\mathscr{E}$. De même, si $\mathscr{M}'$ est un $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-module à droite, $\mathscr{M} = F^\flat\mathscr{M}'$ est muni d'une structure canonique de $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-module à droite, définie par la $(m+s)$-costratification déduite de la m-costratification de $\mathscr{M}'$ en appliquant les foncteurs $\Phi^{n\flat}_\nu$.

2.1.3. Théorème **([8**, 2.3.6 et 2.4.6]**)**. — *Sous les hypothèses précédentes, le foncteur F^* (resp. $F^\flat$) est une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche (resp. à droite) et la catégorie des $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-modules à gauche (resp. à droite).*

Généralisant la méthode décrite en 2.1.1, le principe de la démonstration pour les modules à gauche consiste à se ramener au théorème de descente fidèlement plate pour F et pour les morphismes induits par les Φ_ν au-dessus des $\Delta^n_{X',(m)}(\nu)$. On redescend ainsi non seulement le $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{E}$ en un $\mathscr{O}_{X'}$-module $\mathscr{E}'$, en observant que la $(m+s)$-stratification de $\mathscr{E}$ induit une donnée de descente de X à X', mais aussi les isomorphismes ε_n formant la $(m+s)$-stratification de $\mathscr{E}$; on vérifie de plus que les isomorphismes ε'_n ainsi obtenus munissent bien $\mathscr{E}'$ d'une m-PD-stratification.

Le cas des modules à droite se déduit de celui des modules à gauche en montrant que les foncteurs F^* et $F^\flat$ sont échangés par le passage de gauche à droite décrit en 1.3.6.

Exemple. — Un cas particulièrement important de descente par Frobenius est celui de $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$ vu comme bimodule sur lui-même. Soit $\mathscr{O}^\vee_X = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{X'}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_{X'})$. Il existe alors un isomorphisme canonique de $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-bimodules

$$\mathscr{D}^{(m+s)}_X \xrightarrow{\sim} F^*\left(\mathscr{D}^{(m)}_{X'} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \mathscr{O}^\vee_X\right) \simeq F^*F^\flat\mathscr{D}^{(m)}_{X'}, \tag{2.1.3.1}$$

où, dans la dernière expression, F^* est appliqué à la structure gauche de $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$, et $F^\flat$ à la structure droite, les deux opérations commutant entre elles.

2.1.4. Il est possible d'expliciter des foncteurs quasi-inverses de F^* et $F^\flat$. Appliquant F^* à la structure gauche de $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$ et $F^\flat$ à la structure droite, on observe que $F^*\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$ possède une structure canonique de $(\mathscr{D}^{(m+s)}_X, \mathscr{D}^{(m)}_{X'})$-bimodule, et $F^\flat\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$ une structure canonique de $(\mathscr{D}^{(m)}_{X'}, \mathscr{D}^{(m+s)}_X)$-bimodule. Les foncteurs

$$\mathscr{E} \longmapsto (F^\flat\mathscr{D}^{(m)}_{X'}) \otimes_{\mathscr{D}^{(m+s)}_X} \mathscr{E}, \qquad \mathscr{M} \longmapsto \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{D}^{(m+s)}_X} F^*\mathscr{D}^{(m)}_{X'},$$

allant de la catégorie des $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-modules à gauche vers celle des $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche, et de la catégorie des $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-modules à droite vers celle des $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-modules à droite, sont alors respectivement quasi-inverses de F^* et $F^\flat$ [**8**, 2.5.6]. Le cas clé est fourni par l'isomorphisme de $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-bimodules

$$(F^\flat\mathscr{D}^{(m)}_{X'}) \otimes_{\mathscr{D}^{(m+s)}_X} F^*\mathscr{D}^{(m)}_{X'} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}^{(m)}_{X'}, \tag{2.1.4.1}$$

qu'on déduit du théorème 2.1.3 et de (2.1.3.1).

On en déduit qu'un $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-module à gauche $\mathscr{E}'$ est plat si et seulement si $F^*\mathscr{E}'$ est plat sur $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$. D'autre part, l'isomorphisme (2.1.3.1) montre aussi que $\mathscr{E}'$ est localement projectif sur $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$ si et seulement si $F^*\mathscr{E}'$ l'est sur $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$. Le corollaire suivant en résulte :

2.1.5. Corollaire. — *Le foncteur F^* induit une équivalence entre les catégories $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X'})$ et $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{(m+s)}_X)$ (resp. D_{tdf}, resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}$ si X est localement noethérien).*

Une première application du théorème de descente est fournie par l'étude de la dimension homologique des anneaux $\mathscr{D}^{(m)}_X$:

2.1.6. Corollaire **([8**, 4.4.3**])**. — *Soient S un schéma affine régulier de caractéristique p, $f : X \to S$ un morphisme affine et lisse, dont les fibres sont de dimension relative d, et posons $r = \sup_{x\in X} \dim \mathscr{O}_{S,f(x)}$. Alors, pour tout $m \geqslant 0$, l'anneau $\Gamma(X, \mathscr{D}^{(m)}_X)$ est de dimension homologique $2d + r$.*

Lorsque $m = 0$, on peut comme en caractéristique 0 (voir par exemple [**15**], [**36**] ou [**40**]) utiliser la filtration par l'ordre pour majorer la dimension homologique de $\Gamma(X, \mathscr{D}^{(0)}_X)$ par celle du gradué associé, qui est un anneau commutatif régulier de dimension $2d+r$. Un exemple classique montre que cette borne supérieure est atteinte. Lorsque $m \geqslant 1$, le gradué associé à la filtration par l'ordre n'est pas régulier, mais le foncteur $F^{m*}_{X/S}$ associé au morphisme de Frobenius relatif fournit une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{D}^{(m)}_X$-modules à gauche et celle des $\mathscr{D}^{(0)}_{X'}$-modules à gauche (en posant ici $X' = X^{(m)}$). Le cas général résulte ainsi du cas $m = 0$.

L'énoncé suivant assure la commutation du foncteur F^* aux extensions de l'anneau d'opérateurs différentiels, et joue un rôle important dans les passages à la limite sur le niveau m :

***2.1.7. Proposition* ([8, 3.1.3]).** — *Soit $m' \geqslant m$. Pour tout $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-module à gauche $\mathscr{E}'$, il existe un isomorphisme canonique de $\mathscr{D}^{(m'+s)}_{X}$-modules*

$$\mathscr{D}^{(m'+s)}_{X} \otimes_{\mathscr{D}^{(m+s)}_{X}} F^*\mathscr{E}' \xrightarrow{\sim} F^*\left(\mathscr{D}^{(m')}_{X'} \otimes_{\mathscr{D}^{(m)}_{X'}} \mathscr{E}'\right). \tag{2.1.7.1}$$

La flèche est définie par extension des scalaires. Pour prouver que c'est un isomorphisme, on se ramène au cas où $\mathscr{E}' = \mathscr{D}^{(m)}_{X'}$, puis au cas où $S = S_0$. Celui-ci se déduit de la description locale de l'homomorphisme canonique $\mathscr{D}^{(m+s)}_{X} \to F^*\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$ (défini par l'image inverse de la section unité) lorsque S est de caractéristique p : il envoie $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m+s)}}$ sur $1 \otimes \underline{\partial}'^{\langle \underline{k}/p^s \rangle_{(m)}}$ si chacun des k_i est divisible par p^s, et sur 0 sinon.

Comme F^* préserve la platitude, on obtient aussi la variante dérivée de (2.1.7.1).

2.2. Image inverse extraordinaire. — La fonctorialité par image inverse (au sens des $\mathscr{O}_X$-modules) de la structure de $\mathscr{D}^{(m)}_{X}$-module donne naissance à deux opérations importantes : l'image inverse extraordinaire $f^!$ et le changement de base. Bien que ce dernier ne joue guère de rôle en caractéristique 0, c'est un ingrédient indispensable de la théorie arithmétique, où il permet notamment de passer du cas algébrique au cas des schémas formels.

2.2.1. Considérons un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & T & \longrightarrow & U\,, \end{array}$$

dans lequel X, Y et Z sont respectivement lisses sur S, T et U. Soit $m \in \mathbb{N}$. Par fonctorialité, f induit pour tout n et tout ν des morphismes $\Delta^n_{X/S,(m)}(\nu) \to \Delta^n_{Y/T,(m)}(\nu)$ commutant aux projections. Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{D}^{(m)}_{Y/T}$-module à gauche, il s'ensuit que $f^*\mathscr{F}$ est muni d'une m-PD-stratification relativement à S, image inverse de la m-PD-stratification de $\mathscr{F}$ relativement à T. On obtient ainsi sur $f^*\mathscr{F}$ une structure canonique de $\mathscr{D}^{(m)}_{X/S}$-module. Il est clair que cette construction est transitive : si $\mathscr{G}$ est un $\mathscr{D}^{(m)}_{Z/U}$-module, l'isomorphisme canonique $(g \circ f)^*\mathscr{G} \simeq f^*(g^*\mathscr{G})$ commute aux m-PD-stratifications, donc est $\mathscr{D}^{(m)}_{X/S}$-linéaire.

Il est commode d'expliciter la structure de $\mathscr{D}^{(m)}_{X/S}$-module de $f^*\mathscr{F}$ au moyen d'un bimodule canoniquement associé à f : reprenant une notation classique, nous poserons

$$\mathscr{D}^{(m)}_{X\to Y} := f^*\mathscr{D}^{(m)}_{Y/T};$$

$\mathscr{D}^{(m)}_{X\to Y}$ est donc muni d'une structure de $(\mathscr{D}^{(m)}_{X/S}, f^{-1}\mathscr{D}^{(m)}_{Y/T})$-bimodule. L'isomorphisme d'associativité

$$\mathscr{D}^{(m)}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathscr{D}^{(m)}_{Y/T}} f^{-1}\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} f^*\mathscr{F} \tag{2.2.1.1}$$

est alors $\mathscr{D}^{(m)}_{X/S}$-linéaire.

Le foncteur f^* possède un dérivé gauche $\mathbb{L}f^* : D^-(\mathscr{D}^{(m)}_{Y/T}) \to D^-(\mathscr{D}^{(m)}_{X/S})$, calculable en prenant des résolutions par des $\mathscr{D}^{(m)}_{Y/T}$-modules plats, ou plus généralement par des $\mathscr{D}^{(m)}_{Y/T}$-modules qui sont plats en tant que $\mathscr{O}_Y$-modules.

2.2.2. Supposons d'abord que $X = S \times_T Y$, de sorte que la situation est celle d'un changement de base. Le morphisme de fonctorialité $\mathscr{D}^{(m)}_{X/S} \to f^*\mathscr{D}^{(m)}_{Y/T}$ est alors un isomorphisme, et on dispose d'un morphisme canonique $f^{-1}\mathscr{D}^{(m)}_{Y/T} \to \mathscr{D}^{(m)}_{X/S}$, qui est un homomorphisme d'anneaux. Le foncteur $\mathbb{L}f^*$ est alors simplement le composé de f^{-1} et du foncteur standard d'extension des scalaires par l'homomorphisme $f^{-1}\mathscr{D}^{(m)}_{Y/T} \to \mathscr{D}^{(m)}_{X/S}$. Par suite, ce foncteur préserve les conditions de finitude telles que la cohérence, la Tor-dimension finie ou la perfection.

Nous commettrons souvent l'abus de notation consistant à noter $\mathscr{O}_S \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_T} \mathscr{F}$ pour $\mathbb{L}f^*\mathscr{F}$, notamment lorsque le morphisme $S \to T$ est une immersion fermée.

2.2.3. Dans le cas général, on peut factoriser f par $Y_S = S \times_T Y$, ce qui ramène par transitivité au cas où $S = T$. Nous omettrons donc désormais de noter le schéma de base S. Du point de vue des six opérations cohomologiques de Grothendieck (normalisées de manière à assurer la correspondance de Riemann-Hilbert comme on l'a indiqué plus haut), le foncteur $\mathbb{L}f^*$ apparaît en général non pas comme le foncteur image inverse pour les $\mathscr{D}^{(m)}_X$-modules, mais simplement comme un intermédiaire dans la construction du foncteur image inverse extraordinaire $f^!$. Ce dernier est défini en posant, pour tout $\mathscr{F} \in D^-(\mathscr{D}^{(m)}_Y)$,

$$f^!\mathscr{F} := \mathbb{L}f^*\mathscr{F}[d_{X/Y}] \simeq \mathscr{D}^{(m)}_{X\to Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathscr{D}^{(m)}_Y} f^{-1}\mathscr{F}[d_{X/Y}],$$

en notant d_X, d_Y les dimensions relatives de X et Y sur S, et $d_{X/Y} = d_X - d_Y$.

On déduit facilement de cette définition les propriétés suivantes :

(i) Si $g : Y \to Z$ est un second morphisme entre S-schémas lisses, il existe pour tout $\mathscr{G} \in D^-(\mathscr{D}^{(m)}_Z)$ un isomorphisme canonique de $D^-(\mathscr{D}^{(m)}_X)$

$$(g \circ f)^!\mathscr{G} \xrightarrow{\sim} f^!g^!\mathscr{G}. \tag{2.2.3.1}$$

(ii) Pour tout morphisme $S' \to S$, il existe dans $D^-(\mathscr{D}^{(m)}_{X'})$ un isomorphisme canonique

$$\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} f^!\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} f'^!(\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}), \tag{2.2.3.2}$$

en notant $f' : X' \to Y'$ le morphisme déduit de f par changement de base.

(iii) Supposons que p soit nilpotent sur S, et que S soit muni d'un m-PD-idéal quasi-cohérent $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$ tel que $p \in \mathfrak{a}$. Soient $f_0 : X_0 \to Y_0$ la réduction de f modulo $\mathfrak{a}$, $F_X : X \to X'$, $F_Y : Y \to Y'$ des morphismes de S-schémas lisses relevant les s-ièmes itérés des morphismes de Frobenius relatifs de X_0 et Y_0, $f' : X' \to Y'$ un relèvement de $f_0^{(s)}$ tel que $f' \circ F_X = F_Y \circ f$. Pour tout $\mathscr{F}' \in D^-(\mathscr{D}^{(m)}_{Y'})$, il existe dans $D^-(\mathscr{D}^{(m+s)}_X)$

un isomorphisme canonique

$$f^{!^{(m+s)}} F_Y^* \mathscr{F}' \xrightarrow{\sim} F_X^* f'^{!^{(m)}} \mathscr{F}', \tag{2.2.3.3}$$

les notations $f'^{!^{(m)}}$ et $f^{!^{(m+s)}}$ indiquant que les foncteurs image inverse extraordinaire sont appliqués respectivement aux niveaux m et $m+s$.

L'énoncé suivant résume les propriétés de finitude du foncteur $f^!$ pour les $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules :

***2.2.4. Théorème* ([10]).** — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de S-schémas lisses.*

(i) *Si $\mathscr{F} \in D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$, alors $f^!\mathscr{F} \in D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$.*

(ii) *Si f est lisse, S localement noethérien, et $\mathscr{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$, alors $f^!\mathscr{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$.*

Supposons maintenant que, si $m \geqslant 1$, p est localement nilpotent sur S. On a de plus :

(iii) *Si $\mathscr{F} \in D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$, alors $f^!\mathscr{F} \in D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$.*

(iv) *Si f est lisse, et si $\mathscr{F} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$, alors $f^!\mathscr{F} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$.*

La démonstration de (i) et (ii) s'effectue comme en caractéristique 0. Par contre, celle de (iii) et (iv) fait appel à la descente par Frobenius pour se ramener au cas $m = 0$.

2.2.5. Remarques

(i) Comme en caractéristique 0, le foncteur $f^!$ ne préserve pas en général la cohérence lorsque f est une immersion fermée.

(ii) Pour m fixé, il n'existe pas pour les $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules de condition de finitude non triviale qui soit préservée à la fois par image directe et par image inverse extraordinaire par un morphisme, même propre, de S-schémas lisses. Supposons en effet que S soit un schéma de caractéristique p, et soit $F : X \to X'$ le morphisme de Frobenius relatif d'un S-schéma lisse X. Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{D}_{X'}^{(m)}$-module, nous avons vu en 2.1.2 que $F^!\mathscr{F} = F^*\mathscr{F}$ est muni d'une structure naturelle de $\mathscr{D}_X^{(m+1)}$-module. Soient $\mathscr{K}_m = \mathrm{Ker}(\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{D}_X^{(m+1)})$, et $\overline{\mathscr{D}}_X^{(m)} = \mathscr{D}_X^{(m)}/\mathscr{K}_m$. L'anneau $\overline{\mathscr{D}}_X^{(m)}$ est alors un $\mathscr{O}_X$-module localement libre de rang fini, de sorte que $F^!\mathscr{F}$ est de type fini sur $\mathscr{D}_X^{(m)}$ si et seulement s'il est de type fini sur $\mathscr{O}_X$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathscr{F}$ est de type fini sur $\mathscr{O}_{X'}$. Mais d'autre part, si $i : Z \hookrightarrow X'$ est une immersion fermée de codimension $\geqslant 1$, l'image directe $\mathscr{F} = i_+\mathscr{E}$ d'un $\mathscr{D}_Z^{(m)}$-module $\mathscr{E}$ n'est pas de type fini sur $\mathscr{O}_{X'}$ si $\mathscr{E} \neq 0$. Ce n'est donc qu'après des passages à la limite tels que ceux que nous effectuerons aux chapitres suivants que l'on peut espérer obtenir un formalisme complet du type des six opérations de Grothendieck.

(iii) Même si f est lisse, le foncteur $f^!$ ne commute pas en général aux extensions des scalaires par les homomorphismes $\mathscr{D}_Y^{(m)} \to \mathscr{D}_Y^{(m')}$ et $\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{D}_X^{(m')}$ pour $m' \geqslant m$. Par exemple, si $Y = S$, et si $\mathscr{F} = \mathscr{O}_Y$, alors $f^{!(m)}\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X[d_X]$ pour tout m. Or l'homomorphisme $\mathscr{D}_X^{(0)} \to \mathscr{O}_X$ défini par la section unité a pour noyau l'idéal à gauche engendré localement par les dérivations ∂_i par rapport aux coordonnées, tandis que

le noyau de $\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{O}_X$ est engendré par les $\partial_i^{[p^j]}$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$, et pas par les seuls opérateurs ∂_i si $m \geqslant 1$. Par suite, l'homomorphisme

$$\mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathscr{D}_X^{(0)}} \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_X$$

n'est pas un isomorphisme en général. Il s'agit ici d'un problème de torsion (voir 3.4.6 plus bas).

2.3. Produit tensoriel externe. — Soient X, Y deux S-schémas lisses, $Z = X \times_S Y$, et $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ les deux projections.

2.3.1. Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{D}_Y^{(m)}$-module, on voit en appliquant 2.2.1 et 1.3.6 que le produit tensoriel externe de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$, défini par

$$\mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F} := f^*\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_Z} g^*\mathscr{F},$$

possède une structure naturelle de $\mathscr{D}_Z^{(m)}$-module.

Lorsque la base n'est pas le spectre d'un corps, le produit tensoriel externe n'est pas en général un bifoncteur exact en l'un ou l'autre de ses arguments. Pour $\mathscr{E} \in D^-(\mathscr{D}_X^{(m)}), \mathscr{F} \in D^-(\mathscr{D}_Y^{(m)})$, on peut définir le produit tensoriel externe dérivé $\mathscr{E} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}$ en remplaçant $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{F}$) par une résolution plate sur $\mathscr{D}_X^{(m)}$ (resp. $\mathscr{D}_Y^{(m)}$), ou plus généralement par une résolution par des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules plats sur $\mathscr{O}_X$ (resp. $\mathscr{D}_Y^{(m)}$, $\mathscr{O}_Y$).

De ces définitions résultent aisément les propriétés suivantes :

(i) Pour tout morphisme $S' \to S$, il existe dans $D^-(\mathscr{D}_Z^{(m)})$ un isomorphisme de changement de base

$$\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} \left(\mathscr{E} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}\right) \xrightarrow{\sim} \left(\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{E}\right) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{O}_{S'}} \left(\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}\right). \tag{2.3.1.1}$$

(ii) Sous les hypothèses de 2.1.2, soient $F_X : X \to X', F_Y : Y \to Y'$ des relèvements de $F^s_{X_0/S_0}, F^s_{Y_0/S_0}$, et $F_Z : Z \to Z' := X' \times_S Y'$ le morphisme produit. Pour $\mathscr{E}' \in D^-(\mathscr{D}_{X'}^{(m)}), \mathscr{F}' \in D^-(\mathscr{D}_{Y'}^{(m)})$, il existe un isomorphisme canonique de $D^-(\mathscr{D}_Z^{(m+s)})$

$$F_X^*\mathscr{E}' \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{O}_S} F_Y^*\mathscr{F}' \xrightarrow{\sim} F_Z^*\left(\mathscr{E}' \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F}'\right). \tag{2.3.1.2}$$

En utilisant les propriétés des faisceaux de parties principales à puissances divisées, et en dualisant, on voit d'autre part qu'il existe un isomorphisme canonique $\mathscr{D}_Z^{(m)}$-linéaire

$$\mathscr{D}_Z^{(m)} \xrightarrow{\sim} f^*\mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_Z} g^*\mathscr{D}_Y^{(m)}.$$

On en déduit en particulier des homomorphismes de faisceaux d'anneaux $f^{-1}\mathscr{D}_X^{(m)} \to \mathscr{D}_Z^{(m)}, g^{-1}\mathscr{D}_Y^{(m)} \to \mathscr{D}_Z^{(m)}$. On obtient alors les propriétés suivantes :

***2.3.2. Théorème* ([10])**. — *Soient X, Y deux S-schémas lisses, $Z = X \times_S Y$.*

(i) *Si $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$ et $\mathscr{F} \in D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$ (resp. $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$, $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$), alors $\mathscr{E} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F} \in D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D}_Z^{(m)})$ (resp. $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_Z^{(m)})$).*

(ii) *Si S est localement noethérien, et si $\mathscr{E} \in D^-_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$, $\mathscr{F} \in D^-_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$, alors $\mathscr{E} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{F} \in D^-_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_Z^{(m)})$.*

2.4. Image directe. — Nous supposons ici que S est noethérien, de dimension de Krull finie. Rappelons que les morphismes de S-schémas lisses considérés sont quasi-compacts et quasi-séparés. Ces hypothèses permettent notamment d'assurer que le foncteur $\mathbb{R}f_*$ soit de dimension cohomologique finie.

2.4.1. Comme en caractéristique 0, on peut associer à f un second bimodule, défini par

$$\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}^{(m)} := f_{\mathrm{d}}^*(\mathscr{D}_Y^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \omega_Y^{-1}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X,$$

où l'indice d indique que le foncteur f^* est ici appliqué pour la structure droite de $\mathscr{O}_Y$-module de $\mathscr{D}_Y^{(m)} \otimes \omega_Y^{-1}$. Grâce à 1.3.6 et 2.2.1, on voit que $\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}^{(m)}$ est muni d'une structure naturelle de $(f^{-1}\mathscr{D}_Y^{(m)}, \mathscr{D}_X^{(m)})$-bimodule. On vérifie qu'il est canoniquement isomorphe au bimodule $\omega_X \otimes_{\mathscr{O}_X} f_{\mathrm{g}}^*(\mathscr{D}_Y^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \omega_Y^{-1})$ obtenu en appliquant f^* à $\mathscr{D}_Y^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \omega_Y^{-1}$ pour sa structure gauche de $\mathscr{O}_Y$-module [**8**, 3.4.1].

Si $\mathscr{E} \in D^-(\mathscr{D}_X^{(m)})$, on définit le foncteur image directe f_+ en posant

$$f_+\mathscr{E} := \mathbb{R}f_*(\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}^{(m)} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X^{(m)}} \mathscr{E}).$$

Le complexe $f_+\mathscr{E}$ appartient alors à $D^-(\mathscr{D}_Y^{(m)})$. Si $m = 0$, ou si p est nilpotent sur S, $\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}^{(m)}$ est de Tor-dimension finie sur $\mathscr{D}_X^{(m)}$, et le foncteur f_+ envoie alors $D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$ dans $D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$.

On voit comme en caractéristique 0 (*cf.* [**16**], [**17**], [**42**]...) que le foncteur f_+ vérifie la formule de transitivité : si $g : Y \to Z$ est un second S-morphisme vérifiant les mêmes hypothèses, il existe pour tout $\mathscr{E} \in D^-(\mathscr{D}_X^{(m)})$ un isomorphisme canonique de $D^-(\mathscr{D}_Z^{(m)})$

$$(g \circ f)_+\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} g_+f_+\mathscr{E}. \tag{2.4.1.1}$$

On dispose d'autre part d'un théorème de changement de base pour le foncteur f_+ :

2.4.2. Proposition. — *Soient $S' \to S$ un morphisme de schémas, $f' : X' \to Y'$ le morphisme déduit de f par changement de base. Pour tout complexe à cohomologie quasi-cohérente $\mathscr{E} \in D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$, le complexe $f_+\mathscr{E}$ appartient à $D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$, et il existe dans $D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{D}_{Y'}^{(m)})$ un isomorphisme canonique*

$$\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} f_+\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} f'_+(\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{E}). \tag{2.4.2.1}$$

La formation des bimodules $\mathscr{D}^{(m)}_{Y\leftarrow X}$ commutant aux changements de base, il est facile de définir la flèche par adjonction. On peut alors utiliser l'existence de résolutions par des $\mathscr{D}^{(m)}_X$-modules induits au sens de M. Saito (c'est-à-dire de la forme $\mathscr{D}^{(m)}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}$, où $\mathscr{L}$ est un $\mathscr{O}_X$-module, *cf.* [**45**] ou [**46**]) pour prouver la quasi-cohérence de $f_+\mathscr{E}$, et montrer que la flèche est un isomorphisme en se ramenant grâce à la platitude de X sur S à un énoncé classique pour la cohomologie des faisceaux quasi-cohérents.

En utilisant encore les résolutions par des $\mathscr{D}^{(m)}_X$-modules induits, on obtient aussi la compatibilité de f_+ aux extensions du faisceau d'opérateurs différentiels, et, lorsque f est propre, la préservation de la cohérence (en reprenant ici un argument classique, voir par exemple [**16**], [**39**] ou [**46**]) :

***2.4.3. Proposition* ([10])**. — *Soit $m' \geqslant m$. Pour tout $\mathscr{E} \in D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{D}^{(m)}_X)$, il existe un isomorphisme canonique de $D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{D}^{(m')}_Y)$*

$$\mathscr{D}^{(m')}_Y \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{(m)}_Y} f_{+^{(m)}}\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} f_{+^{(m')}}(\mathscr{D}^{(m')}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{(m)}_X} \mathscr{E}), \tag{2.4.3.1}$$

en notant $f_{+^{(m)}}$ et $f_{+^{(m')}}$ les foncteurs image directe correspondant aux niveaux m et m'.

2.4.4. Proposition. — *Supposons que f soit propre. Pour tout $\mathscr{E} \in D^-_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{(m)}_X)$, $f_+\mathscr{E}$ appartient à $D^-_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{(m)}_Y)$. Si p est nilpotent sur S, et si $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{(m)}_X)$, alors $f_+\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{(m)}_Y)$.*

Enfin, en prouvant que f_+ préserve la finitude de la Tor-dimension, on obtient le théorème de finitude pour les images directes par un morphisme propre :

***2.4.5. Théorème* ([10])**. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de S-schémas lisses.*

(i) *Pour tout $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{qc,tdf}}(\mathscr{D}^{(m)}_X)$, $f_+\mathscr{E} \in D_{\mathrm{qc,tdf}}(\mathscr{D}^{(m)}_Y)$;*

(ii) *Si f est propre, et si $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{(m)}_X)$, alors $f_+\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{(m)}_Y)$.*

Grâce à la formule de transitivité, il suffit de prouver séparément l'assertion (i) dans le cas où f est lisse et dans celui où f est une immersion fermée. En utilisant la formule de projection, on se ramène dans les deux cas aux propriétés locales de $\mathscr{D}^{(m)}_{Y\leftarrow X}$. L'assertion (ii) est conséquence de (i) et de 2.4.4.

Remarque. — Lorsque S est un schéma de p-torsion, on ne peut pas espérer de théorème de finitude sur $\mathscr{D}^{(m)}_X$ pour les images directes par un morphisme non propre, même lorsque $\mathscr{E}$ est le faisceau $\mathscr{O}_X$. En effet, supposons que S soit un schéma de caractéristique p, et soit $j : X = Y \smallsetminus D \hookrightarrow Y$ l'inclusion du complémentaire X d'un diviseur D de Y. Alors $j_+\mathscr{O}_X = j_*\mathscr{O}_X$. Or $j_*\mathscr{O}_X$ possède une structure canonique de $\mathscr{D}_Y$-module qui induit sa structure de $\mathscr{D}^{(m)}_Y$-module. Par suite, $j_*\mathscr{O}_X$ est annulé par $\mathscr{K}_m = \mathrm{Ker}(\mathscr{D}^{(m)}_Y \to \mathscr{D}_Y)$, et, observant comme en 2.2.5 que $\mathscr{D}^{(m)}_Y/\mathscr{K}_m$ est un $\mathscr{O}_Y$-module de type fini, on voit qu'en général $j_*\mathscr{O}_X$ ne peut pas être de type fini

sur $\mathscr{D}_Y^{(m)}$. Les procédures de passage à la limite développées dans les chapitres suivants nous permettront par contre d'obtenir un énoncé qui constitue un substitut « asymptotique » au défaut de cohérence de $j_+\mathscr{O}_X$ (voir 4.4.7).

Une autre propriété essentielle des images directes est leur compatibilité à l'image inverse par Frobenius, qu'on prouve grâce au théorème de descente par Frobenius et à la construction du foncteur quasi-inverse donnée en 2.1.4 :

2.4.6. Théorème **([8**, 3.4.4**])**. — *Sous les hypothèses de 2.1.2, soient X, Y deux S-schémas lisses de réductions X_0, Y_0 sur S_0, $F_X : X \to X'$, $F_Y : Y \to Y'$ deux morphismes de S-schémas lisses relevant $F^s_{X_0/S_0}$ et $F^s_{Y_0/S_0}$, $f : X \to Y$ un S-morphisme, $f' : X' \to Y'$ un S-morphisme relevant $f_0^{(s)}$. Si $f' \circ F_X = F_Y \circ f$, il existe pour tout $\mathscr{E}' \in D^-(\mathscr{D}^{(m)}_{X'})$ un isomorphisme canonique de $D^-(\mathscr{D}^{(m+s)}_Y)$*

$$f_{+(m+s)}F_X^*\mathscr{E}' \xrightarrow{\sim} F_Y^* f'_{+(m)}\mathscr{E}'. \tag{2.4.6.1}$$

Remarque. — Ce résultat peut être utilisé pour l'étude du fonteur f_+ dans le cas où f est lisse. Soit $\omega_{X/Y} = \omega_X \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} f^{-1}\omega_Y$. On construit d'abord un morphisme canonique de $\mathscr{D}^{(m)}_X$-modules à droite

$$\omega_{X/Y} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}^{(m)}_X \longrightarrow \mathscr{D}^{(m)}_{Y\leftarrow X},$$

qui donne naissance à un morphisme de complexes

$$\Omega^\bullet_{X/Y} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}^{(m)}_X[d_{X/Y}] \longrightarrow \mathscr{D}^{(m)}_{Y\leftarrow X}, \tag{2.4.6.2}$$

où le terme de gauche est le complexe de de Rham de $\mathscr{D}^{(m)}_X$ décalé. Lorsque $m = 0$, c'est un quasi-isomorphisme, et on en déduit un isomorphisme canonique

$$\mathbb{R}f_*(\Omega^\bullet_{X/Y} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E})[d_{X/Y}] \xrightarrow{\sim} f_{+(0)}\mathscr{E}. \tag{2.4.6.3}$$

Lorsque $m \geqslant 1$, il n'est plus vrai en général que le complexe de de Rham de $\mathscr{D}^{(m)}_X$ soit une résolution de $\mathscr{D}^{(m)}_{Y\leftarrow X}$. Le théorème 2.4.6 montre que l'isomorphisme (2.4.6.3) est remplacé par une variante décalée par l'action de Frobenius. Supposons en effet que l'on dispose de relèvements F_X, F_Y et f' comme dans l'énoncé. Il existe d'après le théorème de descente un $\mathscr{D}^{(0)}_{X'}$-module $\mathscr{E}'$ tel que $\mathscr{E} \simeq F^*\mathscr{E}'$, de sorte que l'on obtient un isomorphisme canonique

$$f_{+(m)}\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} F_Y^*\mathbb{R}f'_*(\Omega^\bullet_{X'/Y'} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \mathscr{E}')[d_{X/Y}]. \tag{2.4.6.4}$$

Rappelons que, comme on l'a signalé au point d) de l'introduction de ce chapitre, les conditions d'existence globale de F_X et F_Y (et *a fortiori* la condition de commutation $f' \circ F_X = F_Y \circ f$) ne sont en fait pas nécessaires dans l'énoncé du théorème lorsque $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotent (resp. PD-nilpotent pour obtenir la formule (2.4.6.4)).

2.5. Dualité. — Nous expliquons ici comment les théorèmes de dualité locale et globale s'étendent hors de la caractéristique nulle. Les résultats de cette section sont dûs à Virrion (voir [**49**], [**50**], [**51**], [**52**]).

2.5.1. Soient X un S-schéma lisse de dimension relative d, et $\mathscr{E} \in D^-(\mathscr{D}_X^{(m)})$ un complexe de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à gauche. On définit comme en caractéristique 0 le *dual* de $\mathscr{E}$ en posant

$$\mathbb{D}(\mathscr{E}) := \mathbb{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^{(m)}}(\mathscr{E}, \mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X^{-1}[d]).$$

Le foncteur $\mathscr{H}om$ est pris ici pour la structure naturelle de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche de $\mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X^{-1}[d]$, tandis que $\mathbb{D}(\mathscr{E})$ est vu comme un complexe de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à gauche grâce à l'action sur la droite tordue par 1.3.6. Ces deux structures de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche sur $\mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X^{-1}$ sont d'ailleurs échangées par une involution naturelle β_X du bimodule à gauche $\mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X^{-1}$ [**8**, 1.3.4].

En général, $\mathbb{D}(\mathscr{E})$ n'est pas borné supérieurement, même si $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$. Le cadre qui permet d'obtenir une théorie de la dualité sur une base quelconque est celui des complexes parfaits (voir [**SGA6**, I 7]). On obtient ainsi :

***2.5.2. Proposition* ([52, I 4])**. — *Soit $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$.*

(i) *Le complexe dual $\mathbb{D}(\mathscr{E})$ appartient à $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$.*

(ii) *Pour $m' \geqslant m$, il existe dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m')})$ un isomorphisme canonique*

$$\mathscr{D}_X^{(m')} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X^{(m)}} \mathbb{D}^{(m)}(\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^{(m')}(\mathscr{D}_X^{(m')} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}_X^{(m)}} \mathscr{E}), \tag{2.5.2.1}$$

en notant $\mathbb{D}^{(m)}$ et $\mathbb{D}^{(m')}$ les duaux aux niveaux m et m'.

(iii) *Pour tout changement de base $S' \to S$, il existe dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_{X'}^{(m)})$ un isomorphisme canonique*

$$\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} \mathbb{D}_X(\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{X'}(\mathscr{O}_{S'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{E}), \tag{2.5.2.2}$$

en notant $\mathbb{D}_X$ et $\mathbb{D}_{X'}$ les duaux sur X et sur $X' = S' \times_S X$.

2.5.3. Soit $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$. On dispose du morphisme d'évaluation

$$\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^{(m)},\mathrm{d}}\big(\mathbb{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X^{(m)},\mathrm{g}}(\mathscr{E}, \mathscr{D}_X^{(m)}), \mathscr{D}_X^{(m)}\big),$$

les indices d et g précisant s'il s'agit de modules à droite ou à gauche. En transformant les modules à droite en modules à gauche par 1.3.6, et en utilisant l'involution β_X, on en déduit le morphisme de bidualité

$$\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{D}\big(\mathbb{D}(\mathscr{E})\big). \tag{2.5.3.1}$$

En se ramenant au cas où $\mathscr{E} = \mathscr{D}_X^{(m)}$, on obtient alors le théorème de bidualité locale :

***2.5.4. Proposition* ([52, I (3.6)])**. — *Pour tout $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$, le morphisme de bidualité* (2.5.3.1) *est un isomorphisme.*

2.5.5. Sous les hypothèses de 2.1.2, soient X un S-schéma lisse de réduction X_0 modulo $\mathfrak{a}$, et $F : X \to X'$ un morphisme de S-schémas lisses relevant $F^s_{X_0/S_0}$. On vérifie [**8**, 2.4.4] que, pour tout $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$-module à droite $\mathscr{M}'$, il existe un isomorphisme canonique de $\mathscr{D}^{(m+s)}_X$-modules à gauche

$$F^*(\mathscr{M}' \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1}) \xrightarrow{\sim} F^\flat(\mathscr{M}') \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X^{-1}.$$

En utilisant celui-ci, et le théorème de descente, on obtient alors la commutation du dual à l'image inverse par Frobenius :

2.5.6. Proposition **([52,** II 3**])**. — *Sous les hypothèses précédentes, soit* $\mathscr{E}' \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X'})$.

(i) *Il existe dans* $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{(m+s)}_X)$ *un isomorphisme canonique*

$$F^*\mathbb{D}^{(m)}_{X'}(\mathscr{E}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^{(m+s)}_X(F^*\mathscr{E}'). \tag{2.5.6.1}$$

(ii) *L'isomorphisme de bidualité* (2.5.3.1) *est compatible à l'isomorphisme de commutation à l'image inverse par Frobenius* (2.5.6.1).

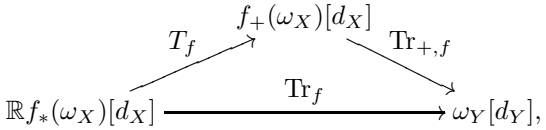
2.5.7. Voyons maintenant comment le théorème de dualité relative pour un morphisme propre s'étend hors de la caractéristique 0. Nous supposerons ici que S est un schéma noethérien régulier, ou lisse sur le spectre d'un quotient d'anneau de valuation discrète, de sorte que $\mathscr{O}_S$ est un complexe dualisant sur S au sens de [**27**]. Soit $m \in \mathbb{N}$; si $m \geqslant 1$, nous supposerons comme d'habitude que S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma.

Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre de S-schémas lisses, d_X, d_Y les dimensions relatives de X et Y sur S. La théorie de la dualité de Grothendieck-Hartshorne fournit alors un morphisme trace $\mathrm{Tr}_f : \mathbb{R}f_*(\omega_X)[d_X] \to \omega_Y[d_Y]$ dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_Y)$. D'autre part, on dispose sur la catégorie dérivée $D^-(\mathscr{D}^{(m)\mathrm{d}}_X)$ du foncteur image directe pour les complexes de $\mathscr{D}^{(m)}_X$-modules à droite, défini par $f_+(\mathscr{M}) = \mathbb{R}f_*(\mathscr{M} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{(m)}_X} \mathscr{D}^{(m)}_{X\to Y})$. La première étape consiste à construire dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{(m)\mathrm{d}}_Y)$ un morphisme trace sur $f_+(\omega_X)$, relié au précédent par l'intermédiaire du morphisme

$$T_f : \mathbb{R}f_*(\omega_X)[d_X] \longrightarrow f_+(\omega_X)[d_X]$$

obtenu en appliquant $\mathbb{R}f_*$ au morphisme $\omega_X \to \omega_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{(m)}_X} \mathscr{D}^{(m)}_{X\to Y}$ déduit du morphisme canonique $\mathscr{D}^{(m)}_X \to \mathscr{D}^{(m)}_{X\to Y}$ et en décalant :

2.5.8. Théorème **([49,** 5.1**], [51])**. — *Sous les hypothèses précédentes, il existe dans* $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{(m)\mathrm{d}}_Y)$ *un morphisme canonique* $\mathrm{Tr}_{+,f} : f_+(\omega_X)[d_X] \to \omega_Y[d_Y]$, *s'insérant dans un triangle commutatif de* $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\mathscr{O}_Y)$

(2.5.8.1)


et vérifiant la condition de transitivité pour le composé de deux S*-morphismes propres.*

En caractéristique 0, la construction de ce morphisme trace fait appel à la résolution gauche de ω_X en tant que $\mathscr{D}_X$-module à droite par le complexe de de Rham de $\mathscr{D}_X$, puis, dans le cas analytique, à la résolution de Dolbeault pour calculer le foncteur f_+ (voir par exemple [**16**], [**46**] ou [**47**]). Sur une base plus générale, on ne dispose de la résolution de de Rham que pour $m = 0$. La méthode de Virrion est basée sur la construction, pour tout $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à droite $\mathscr{M}$, d'une résolution gauche canonique de $\mathscr{M}$ par des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à droite induits, la *résolution de Čech-Alexander* $\check{\mathrm{C}}\mathrm{A}^*(\mathscr{M})$. Cette résolution, de type simplicial, est construite par dualité à partir de la résolution de $\mathscr{O}_X$ par le complexe de Čech-Alexander $\check{\mathrm{C}}\mathrm{A}\big(L(\mathscr{O}_X)\big)$ qui intervient dans le calcul de la cohomologie cristalline de X relativement à S (*cf.* [**2**], [**12**], [**26**], [**32**]). Son terme de degré $-\nu$ est de la forme $\check{\mathrm{C}}\mathrm{A}^*_\nu(\mathscr{M}) = \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{H}_{X,\nu} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$, avec $\mathscr{H}_{X,\nu} = \varinjlim_n \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}\big(\mathscr{P}^n_{X,(m)}(\nu), \mathscr{O}_X\big)$.

On observe alors que le complexe de Cousin $\mathscr{K}_X^\bullet$ de ω_X est une résolution de ω_X par des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules à droite injectifs sur $\mathscr{O}_X$. En lui appliquant la construction précédente, on en déduit que le morphisme T_f est représenté dans $D(\mathscr{D}_Y^{(m)d})$ par le morphisme de complexes

$$f_*(\mathscr{K}_X^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{H}_{X,\bullet} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)})[d_X] \longrightarrow f_*(\mathscr{K}_X^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{H}_{X,\bullet} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}^{(m)}_{X\to Y})[d_X].$$

D'autre part, $\omega_Y[d_Y]$ est représenté par le complexe $\mathscr{K}_Y^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{H}_{Y,\bullet} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{D}_Y^{(m)}$. En remarquant que chacun des complexes $\mathscr{K}_X^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{H}_{X,\nu}$ (resp. $\mathscr{K}_Y^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{H}_{Y,\nu}$) est limite de complexes résiduels sur les voisinages infinitésimaux à puissances divisées $\Delta^n_{X,(m)}(\nu)$ (resp. $\Delta^n_{Y,(m)}(\nu)$), on peut alors utiliser la théorie du morphisme trace pour les complexes résiduels pour construire un morphisme de complexes

$$f_*(\mathscr{K}_X^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{H}_{X,\bullet} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}^{(m)}_{X\to Y})[d_X] \longrightarrow \mathscr{K}_Y^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{H}_{Y,\bullet} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{D}_Y^{(m)}[d_Y]$$

dont la classe dans $D(\mathscr{D}_Y^{(m)\mathrm{d}})$ fournit le morphisme $\mathrm{Tr}_{f,+}$ voulu.

Cette construction permet alors d'établir le théorème de dualité relative :

***2.5.9. Théorème* ([49, 5.4], [51]).** — *Sous les hypothèses de 2.5.7, soit $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)})$. Il existe dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_Y^{(m)})$ un isomorphisme canonique*

$$\chi : f_+\big(\mathbb{D}_X(\mathscr{E})\big) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_Y\big(f_+(\mathscr{E})\big), \tag{2.5.9.1}$$

vérifiant la condition de transitivité pour le composé de deux S-morphismes propres.

Via 1.3.6, on se ramène à l'énoncé analogue pour les complexes de modules à droite. La construction de χ se déduit de l'existence du morphisme trace. Pour prouver que c'est un isomorphisme, on ramène d'abord le cas où S est lisse sur un quotient d'anneau de valuation discrète $\mathscr{V}$ au cas où S est régulier, en utilisant pour la réduction modulo l'idéal maximal de $\mathscr{V}$ la compatibilité du morphisme trace au changement de base. Dans ce cas, les catégories $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}_X^{(m)\mathrm{d}})$ et $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X^{(m)\mathrm{d}})$ coïncident, et on peut utiliser l'existence de résolutions par des modules induits de la forme $\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$, où

$\mathscr{L}$ est $\mathscr{O}_X$-cohérent, pour déduire l'énoncé du théorème de dualité de Grothendieck pour les $\mathscr{O}_X$-modules cohérents, grâce à (2.5.8.1).

3. Passage aux schémas formels

Soient $\mathscr{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégale caractéristique, p sa caractéristique résiduelle, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, k son corps résiduel, K son corps des fractions. Nous noterons $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(\mathscr{V}), S_i = \mathrm{Spec}(\mathscr{V}/\mathfrak{m}^{i+1})$. Si $\mathscr{X}$ est un $\mathscr{V}$-schéma formel, nous noterons $X_i = S_i \times_{\mathscr{S}} \mathscr{X}$ sa réduction modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$.

Nous expliquons ici comment, par passage à la limite projective pour i variable, les résultats du chapitre précédent sur les $\mathscr{D}^{(m)}_{X_i}$-modules peuvent s'étendre à certains complexes de modules sur les complétés p-adiques des faisceaux d'opérateurs différentiels correspondants sur $\mathscr{X}$. Du point de vue cristallin, cela revient à passer de la cohomologie cristalline relativement à $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ à la cohomologie cristalline relativement à $\mathbb{Z}_p$.

3.1. Complétion des faisceaux d'opérateurs différentiels. — Donnons d'abord quelques propriétés algébriques des complétés p-adiques de ces faisceaux d'opérateurs différentiels.

3.1.1. Soient $m \in \mathbb{N}$, et $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse. Les constructions faites en 1.2 gardent un sens sur $\mathscr{X}$, et fournissent un faisceau d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}^{(m)}_{\mathscr{X}}$ dont la structure locale est décrite comme en 1.2.3. Nous noterons

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}} := \varprojlim_i \mathscr{D}^{(m)}_{\mathscr{X}}/\mathfrak{m}^{i+1}\mathscr{D}^{(m)}_{\mathscr{X}} \simeq \varprojlim_i \mathscr{D}^{(m)}_{X_i}$$

son complété p-adique, et nous l'appellerons *faisceau des opérateurs différentiels* (d'ordre infini) *de niveau m sur $\mathscr{X}$*. Si $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ est un ouvert possédant un système de coordonnées locales $t_1, \dots, t_d$, et si $\partial_1, \dots, \partial_d$ sont les dérivations correspondantes, les sections de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$ sur $\mathscr{U}$ sont donc données par

$$\Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}) = \Big\{ \textstyle\sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} \mid a_{\underline{k}} \in \Gamma(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{\mathscr{X}}), \text{ et } a_{\underline{k}} \to 0 \text{ pour } |\underline{k}| \to \infty \Big\}. \tag{3.1.1.1}$$

Si $\mathscr{U}$ est un ouvert affine quelconque, $\Gamma(\mathscr{U}, \mathscr{D}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ est un anneau noethérien. Comme p est un élément du centre de $\Gamma(\mathscr{U}, \mathscr{D}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, on en déduit que le complété p-adique $\Gamma(\mathscr{U}, \mathscr{D}^{(m)}_{\mathscr{X}})\widehat{\ } \simeq \Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ est un anneau noethérien, et que les propriétés usuelles du passage au complété dans le cas commutatif noethérien sont encore valables [**5**, 3.2]. Il s'ensuit que le faisceau $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$ est un faisceau d'anneaux cohérents.

Un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-module $\mathscr{E}$ est donc cohérent si et seulement s'il est localement de présentation finie. Lorsque $\mathscr{X}$ est affine, les techniques habituelles de passage à la limite

projective permettent de montrer facilement les théorèmes A et B pour les $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules cohérents [**5**, 3.3] :

A) Tout $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-module cohérent est engendré par ses sections globales, et le foncteur $\Gamma(\mathscr{X},-)$ induit une équivalence entre la catégorie des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules cohérents et celle des $\Gamma(\mathscr{X},\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$-modules de type fini.

B) Si $\mathscr{E}$ est un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-module cohérent, $H^n(\mathscr{X},\mathscr{E})=0$ pour tout $n\geqslant 1$.

3.1.2. Lorsque $\mathscr{U}$ est quasi-compact, on a $\Gamma(\mathscr{U},E_{\mathbb{Q}})=\Gamma(\mathscr{U},E)_{\mathbb{Q}}$ pour tout faisceau abélien E sur $\mathscr{U}$. Par suite, la description donnée en (3.1.1.1) reste valable pour $\Gamma(\mathscr{U},\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, avec $a_{\underline{k}}\in\Gamma(\mathscr{U},\mathscr{O}_{\mathscr{X}})_{\mathbb{Q}}$.

Le faisceau $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ est encore un faisceau d'anneaux cohérent. D'autre part, $\mathscr{X}$ étant de type fini sur $\mathscr{S}$, la catégorie $\mathrm{Coh}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents est équivalente à la catégorie $\mathrm{Coh}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})_{\mathbb{Q}}$ des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules cohérents à isogénie près [**5**, 3.4.5]. Il en résulte que les théorèmes A et B restent valables pour les $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents.

***3.1.3. Proposition* ([8, 4.4.4]).** — *Soit $\mathscr{X}$ un schéma formel affine et lisse sur $\mathscr{V}$, de dimension relative d.*

(i) *L'anneau $\Gamma(\mathscr{X},\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ est de dimension homologique $2d+1$.*

(ii) *L'anneau $\Gamma(\mathscr{X},\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ est de dimension homologique finie, comprise entre d et $2d$.*

Par un argument classique, on majore la dimension homologique de $\Gamma(\mathscr{X},\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ par celle de son gradué associé pour la filtration p-adique, égale à $2d+1$ grâce à 2.1.6. Que cette borne soit atteinte résulte encore d'un exemple explicite. Il s'ensuit que la dimension homologique de $\Gamma(\mathscr{X},\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ est majorée par $2d+1$. On obtient la majoration par $2d$ en montrant que tout $\Gamma(\mathscr{X},\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$-module de type fini sans torsion possède une résolution projective de longueur $2d$. La minoration par d provient de ce que $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ est de dimension projective d sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$.

Remarques

(i) Il semble raisonable de conjecturer que, comme dans le cas de $\Gamma(X,\mathscr{D}_X)$ lorsque X est un schéma affine et lisse sur $\mathbb{C}$, la dimension homologique de $\Gamma(\mathscr{X},\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ est en fait égale à d.

(ii) Les catégories $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ et $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ et $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$) sont donc égales.

3.1.4. Soit e l'indice de ramification absolu de $\mathscr{V}$. Pour qu'il existe une m-PD-structure sur $\mathfrak{m}$ (nécessairement définie par les puissances divisées naturelles de $\mathfrak{m}^k$ pour un entier k convenable), il faut et suffit que $p^m\geqslant e/(p-1)$ [**5**, 1.3.1]. Supposons m fixé de manière que cette condition soit remplie, et soient $s\geqslant 1$

un entier, $F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ un morphisme de $\mathscr{S}$-schémas formels lisses relevant le morphisme de Frobenius relatif $F^s_{X_0/S_0}$. Le morphisme F est alors fini localement libre. En appliquant 2.1.2 aux morphismes $X_i \to X'_i$ définis par F, on en déduit par passage à la limite projective que $F^*\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$ possède une structure canonique de $(\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'})$-bimodule, et $F^\flat\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$ une structure canonique de $(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}})$-bimodule. Si $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{F}$) est un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-module à gauche (resp. à droite), il en résulte grâce aux isomorphismes canoniques

$$F^*\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}} \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E}, \qquad \mathscr{F} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}} F^\flat\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'} \xrightarrow{\sim} F^\flat\mathscr{F},$$

que $F^*\mathscr{E}$ (resp. $F^\flat\mathscr{F}$) possède une structure naturelle de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}$-module à gauche (resp. à droite).

D'autre part, en passant à la limite projective sur i dans les isomorphismes (2.1.3.1) et (2.1.4.1), on en déduit qu'il existe comme en 2.1.3 et 2.1.4 des isomorphismes canoniques de bimodules

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}} \xrightarrow{\sim} F^*F^\flat\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}, \qquad (F^\flat\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}) \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}} F^*\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}. \tag{3.1.4.1}$$

Par suite, les foncteurs $\mathscr{E}' \mapsto F^*\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E} \mapsto (F^\flat\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}) \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$-modules à gauche et celle des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}$-modules à gauche [**8**, 4.1.3].

Comme dans le cas algébrique, les propriétés de cohérence, de platitude, de Tor-dimension finie et de perfection sont conservées dans cette équivalence.

Ces résultats restent évidemment valables pour les $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules.

3.2. Complexes quasi-cohérents. — Dans le cas des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules, la méthode classique de définition des foncteurs $f^!$ et f_+ au moyen de produits tensoriels avec des bimodules canoniques tels que $\mathscr{D}_{X\to Y}$ et $\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}$ ne conduit pas en général aux propriétés voulues, à cause de problèmes liés à la complétion (voir à cet égard la remarque de 3.4.3 sur la formule de transitivité). Nous introduisons ici une sous-catégorie $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ de la catégorie $D^-(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, formée de complexes vérifiant une condition de complétion au sens des catégories dérivées, qui contient la sous-catégorie $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$. Sur $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, la construction et les propriétés de ces foncteurs se ramèneront aux résultats obtenus précédemment modulo p^i.

On note d la dimension relative de $\mathscr{X}$ sur $\mathscr{S}$; rappelons qu'elle est supposée constante.

3.2.1. Soit $X_\bullet$ le topos des systèmes projectifs de faisceaux $E_\bullet = (E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sur $\mathscr{X}$. Il est muni d'un morphisme de topos $\underset{\leftarrow}{l}_X : X_\bullet \to \mathscr{X}$, défini en posant

$$\underset{\leftarrow}{l}_{X\,*}(E_\bullet) := \varprojlim_i E_i, \qquad \underset{\leftarrow}{l}_X^{-1}(E) := (E_i)_{i\in\mathbb{N}},$$

où $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est le système projectif constant de valeur E. On notera que le foncteur $\underset{\leftarrow}{l}_{X^*}$ est de dimension cohomologique finie sur la catégorie des faisceaux abéliens, de sorte que son dérivé droit $\mathbb{R}\underset{\leftarrow}{l}_{X^*}$ est défini sur la catégorie dérivée toute entière.

Nous considèrerons $X_\bullet$ comme un topos annelé en le munissant du faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{X_\bullet} = (\mathscr{O}_{X_i})_{i\in\mathbb{N}}$, ce qui fait de $\underset{\leftarrow}{l}_X$ un morphisme de topos annelés. Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module, $\underset{\leftarrow}{l}{}^*_X\mathscr{E}$ est donc le système projectif

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{E}/\mathfrak{m}^{i+1}\mathscr{E} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathscr{E}/\mathfrak{m}^2\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}/\mathfrak{m}\mathscr{E}.$$

Pour tout $\mathscr{E} \in D^-(\mathscr{O}_{\mathscr{X}})$, nous noterons $\mathscr{E}_i := \mathscr{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}$. Nous dirons que $\mathscr{E}$ est *quasi-cohérent* s'il vérifie les conditions suivantes [**9**] :

(i) Le complexe $\mathscr{E}_0$ appartient à $D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{O}_{X_0})$;

(ii) Le morphisme canonique

$$\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}\underset{\leftarrow}{l}_{X^*}\mathbb{L}\underset{\leftarrow}{l}{}^*_X\mathscr{E}$$

est un isomorphisme.

Pour tout m, nous munirons également $X_\bullet$ du système projectif d'anneaux $(\mathscr{D}^{(m)}_{X_i})_{i\in\mathbb{N}}$. On peut alors considérer $\underset{\leftarrow}{l}_X : (X_\bullet, \mathscr{D}^{(m)}_{X_\bullet}) \to (\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ comme un morphisme de topos annelés, et définir la notion de complexe quasi-cohérent de $D^-(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ par les conditions analogues à (i) et (ii) obtenues en remplaçant $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}, \mathscr{O}_{X_\bullet}$, par $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}, \mathscr{D}^{(m)}_{X_\bullet}$. Comme le foncteur $\mathbb{L}\underset{\leftarrow}{l}{}^*_X$ au sens des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules induit par restriction des scalaires le foncteur $\mathbb{L}\underset{\leftarrow}{l}{}^*_X$ au sens des $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-modules, il est clair qu'un complexe de $D^-(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ est quasi-cohérent si et seulement s'il est quasi-cohérent en tant que complexe de $D^-(\mathscr{O}_{\mathscr{X}})$.

Nous noterons $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}})$) la sous-catégorie pleine (triangulée) de $D^-(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D^-(\mathscr{O}_{\mathscr{X}})$) dont les objets sont les complexes quasi-cohérents, et $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ la sous-catégorie pleine de $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ dont les objets sont à cohomologie nulle en dehors d'un intervalle borné. On vérifie les propriétés suivantes [**9**] :

a) Si $\mathscr{E} \in D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}})$, alors $\mathscr{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E} \in D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{O}_{X_i})$ pour tout i.

b) S'il existe un entier k tel que $\mathscr{E}$ soit dans l'image de $D^-(\mathscr{O}_{X_k})$, alors $\mathscr{E}$ est quasi-cohérent si et seulement si $\mathscr{E}$ est à cohomologie quasi-cohérente sur $\mathscr{O}_{X_k}$.

c) La sous-catégorie $D^-_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ des complexes à cohomologie $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-cohérente est une sous-catégorie de $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$.

Remarque. — Un contre-exemple de Gabber montre que, si $\mathscr{E} \in D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}})$, ses faisceaux de cohomologie $\mathscr{H}^n(\mathscr{E})$ n'appartiennent pas nécessairement à $D^-_{\mathrm{qc}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}})$.

L'intérêt de cette notion de complexe quasi-cohérent vient de ce que les propriétés d'un complexe quasi-cohérent sur $\mathscr{X}$ se ramènent à celles du complexe $\mathscr{O}_{X_\bullet} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}$

dans la catégorie dérivée des complexes de systèmes projectifs. Tout d'abord, en utilisant les résultats de l'appendice B de [**12**] sur la finitude du foncteur $\mathbb{R}\varprojlim$ sur un anneau noethérien, on obtient la propriété suivante :

3.2.2. Proposition. — *Soit $\mathscr{E}_\bullet \in D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_\bullet})$ un complexe vérifiant les conditions suivantes :*

a) $\mathscr{E}_0 \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_0})$;
b) *Pour tout i, le morphisme canonique*

$$\mathscr{D}^{(m)}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{(m)}_{X_{i+1}}} \mathscr{E}_{i+1} \longrightarrow \mathscr{E}_i$$

est un isomorphisme.

Alors le morphisme canonique

$$\mathbb{L}\underset{\leftarrow}{l}{}^{*}_{X}\mathbb{R}\underset{\leftarrow}{l}_{X*}\mathscr{E}_\bullet \longrightarrow \mathscr{E}_\bullet$$

est un isomorphisme, et le complexe $\mathscr{E} = \mathbb{R}\underset{\leftarrow}{l}_{X*}\mathscr{E}_\bullet$ appartient à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$.

D'autre part, si $\mathscr{E}$ est un complexe de $D^{-}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, la plupart de ses propriétés de finitude se ramènent à celles de $\mathscr{E}_0 := \mathscr{O}_{X_0} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}$: pour que $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{tdf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}), D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$), il faut et suffit que $\mathscr{E}_0 \in D_{\mathrm{tdf}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_0})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_0}), D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_0})$) [**9**]. On obtient alors la caractérisation suivante de ces sous-catégories de $D^{-}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$:

***3.2.3. Théorème* ([9])**. — *Les foncteurs $\mathbb{L}\underset{\leftarrow}{l}{}^{*}_{X}$ et $\mathbb{L}\underset{\leftarrow}{l}_{X^*}$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie $D_{\mathrm{qc,tdf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}), D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$) et la sous-catégorie pleine de la catégorie $D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_\bullet})$ formée des complexes de systèmes projectifs $\mathscr{E}_\bullet$ vérifiant les conditions suivantes :*

a) *Le complexe $\mathscr{E}_0$ appartient à $D_{\mathrm{qc,tdf}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_0})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_0}), D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_0})$) ;*
b) *Pour tout i, le morphisme canonique*

$$\mathscr{D}^{(m)}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{(m)}_{X_{i+1}}} \mathscr{E}_{i+1} \longrightarrow \mathscr{E}_i$$

est un isomorphisme.

Grâce à cette description des catégories $D_{\mathrm{qc,tdf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}), D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}), D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, nous pourrons utiliser les résultats établis au chapitre précédent sur un schéma de p-torsion pour obtenir des résultats analogues pour les complexes de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules.

3.3. Complexes à isogénie près. — Comme certaines des propriétés qu'on souhaite obtenir dans le cadre d'une théorie arithmétique des $\mathscr{D}$-modules ne sont vérifiées qu'après tensorisation par $\mathbb{Q}$, on est amené à étudier les opérations cohomologiques de base sur les $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules. Comme précédemment, la nécessité de tenir compte des propriétés de complétion ne permet pas de travailler avec la catégorie dérivée $D(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ toute entière. De fait, la catégorie que nous utiliserons n'est même pas une sous-catégorie de $D(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$: ce sera la catégorie quotient de la catégorie $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ obtenue en inversant les isogénies. Lorsque $\mathscr{X}$ est quasi-compact et quasi-séparé, nous verrons en effet qu'elle contient une sous-catégorie pleine équivalente à la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, de sorte que, par l'intermédiaire des techniques de la section précédente, cette méthode nous permettra d'étendre aux complexes bornés de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents les résultats établis modulo p^i.

3.3.1. Si $\mathscr{C}$ est une catégorie additive, nous désignerons par $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$, et nous appellerons *catégorie des objets de $\mathscr{C}$ à isogénie près*, la catégorie ayant mêmes objets que $\mathscr{C}$, et telle que l'ensemble des flèches entre deux objets soit donné par

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}}(E,F) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E,F)\otimes\mathbb{Q}.$$

Lorsque $\mathscr{C}$ est une sous-catégorie $D^*(\mathscr{A})$ d'une catégorie dérivée $D(\mathscr{A})$, nous emploierons la notation $D^*_{\mathbb{Q}}(\mathscr{A})$ plutôt que $D^*(\mathscr{A})_{\mathbb{Q}}$.

La catégorie $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ n'est autre que la catégorie localisée de $\mathscr{C}$ par rapport au système multiplicatif des isogénies de $\mathscr{C}$: un morphisme $f : E \to F$ est appelé *isogénie* s'il existe un entier $n \neq 0$ et un morphisme $g : F \to E$ tels que $g\circ f = n\,\mathrm{Id}_E$, $f\circ g = n\,\mathrm{Id}_F$. Lorsque $\mathscr{C}$ est une catégorie triangulée, les isogénies forment un système multiplicatif compatible à la structure triangulée, de sorte que $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ possède une structure naturelle de catégorie triangulée pour laquelle le foncteur de localisation $\mathscr{C} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ est exact.

Si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ est une foncteur additif (resp. exact) entre catégories additives (resp. triangulées), il s'étend de manière unique en un foncteur additif (resp. exact) $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}} \to \mathscr{C}'_{\mathbb{Q}}$ compatible aux foncteurs de localisation.

3.3.2. Soit $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse. Pour tout m, nous noterons $D^-_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$) la sous-catégorie pleine de $D_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ obtenue en localisant $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$) par rapport aux isogénies. La tensorisation par $\mathbb{Q}$ définit un foncteur naturel

$$D_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \longrightarrow D(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}). \tag{3.3.2.1}$$

On prendra garde qu'en général l'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{D_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})}(\mathscr{E},\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})}(\mathscr{E}_{\mathbb{Q}},\mathscr{F}_{\mathbb{Q}})$$

n'est ni injectif, ni surjectif, même si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont dans $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$. Par la suite, c'est avec la catégorie $D^-_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ que nous travaillerons. Néanmoins, le résultat suivant

permet d'identifier la sous-catégorie pleine $D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ de $D^{-}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ à la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ (rappelons que $\mathscr{X}$ est toujours supposé quasi-compact et quasi-séparé) :

***3.3.3. Proposition* ([9])**. — *Le foncteur* (3.3.2.1) *induit une équivalence de catégories*

$$D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \xrightarrow{\approx} D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}). \tag{3.3.3.1}$$

3.4. Produit tensoriel et image inverse extraordinaire. — Les résultats des sections précédentes permettent de définir les opérations cohomologiques de base pour les complexes quasi-cohérents de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules (voir [**10**]). Commençons par discuter les cas du produit tensoriel et de l'image inverse extraordinaire.

3.4.1. Soient $\mathscr{E} \in D^{-}_{\mathrm{qc}}({}^{\mathrm{g}}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, $\mathscr{M} \in D^{-}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)\,\mathrm{d}}_{\mathscr{X}})$ deux complexes de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules, respectivement à gauche et à droite, supposés quasi-cohérents au sens de 3.2.1. On définit leur produit tensoriel complété sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$ en posant

$$\mathscr{M}\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}}\mathscr{E} := \mathbb{R}\underleftarrow{l}_{X\,*}(\mathbb{L}\underleftarrow{l}^{\,*}_{X}\mathscr{M} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{(m)}_{X_\bullet}} \mathbb{L}\underleftarrow{l}^{\,*}_{X}\mathscr{E}).$$

Il existe un morphisme canonique

$$\mathscr{M} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{M}\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}}\mathscr{E},$$

et c'est un isomorphisme lorsque l'un des deux complexes appartient à $D^{-}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$.

Si $\mathscr{M}$ est un $(\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$-bimodule, pour un certain entier m', alors $\mathscr{M}\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}}\mathscr{E}$ est de manière naturelle un complexe de $D^{-}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}})$. Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{M}$ sont bornés, et si $\mathscr{M} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}})$, alors $\mathscr{M}\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}}\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}})$.

On définit de la même manière le produit tensoriel complété sur $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$.

Grâce à la propriété universelle des catégories de fractions, ces produits tensoriels complétés s'étendent aux catégories localisées par rapport aux isogénies définies en 3.3.2. Pour $m' \geqslant m$, et $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, nous commettrons parfois l'abus de notation consistant à désigner par

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}}\mathscr{E}$$

l'image dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}}\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}}\mathscr{E}$.

Exemple. — Plaçons-nous sous les hypothèses de 3.1.4, et soit $m' \geqslant m$. Si $\mathscr{E}' \in D^{-}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'})$, on obtient par passage à la limite projective à partir des isomorphismes (2.1.7.1) un isomorphisme de $D^{-}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X}})$

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X}}\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}}F^{*}\mathscr{E}' \xrightarrow{\sim} F^{*}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}'}\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}}\mathscr{E}') \tag{3.4.1.1}$$

qui s'écrit simplement

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}} F^{*}\mathscr{E}' \xrightarrow{\sim} F^{*}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}} \mathscr{E}') \tag{3.4.1.2}$$

lorsque $\mathscr{E}' \in D^-_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'})$. On dispose aussi des isomorphismes analogues dans $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ (resp. $D^-_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m'+s)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$).

3.4.2. Soient $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ deux $\mathscr{V}$-schémas formels lisses de dimensions relatives $d_{\mathscr{X}}$ et $d_{\mathscr{Y}}, d_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}} = d_{\mathscr{X}} - d_{\mathscr{Y}}, f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un $\mathscr{V}$-morphisme. Pour tout $\mathscr{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$, nous définirons l'image inverse extraordinaire $f^!\mathscr{F}$ en posant

$$f^!\mathscr{F} := \mathbb{R}\underset{\leftarrow}{l}_{X\,*}\big(f^!_\bullet(\mathbb{L}\underset{\leftarrow}{l}^{\,*}_{Y}\mathscr{F})\big), \tag{3.4.2.1}$$

où $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ est le morphisme de topos tel que $f_{\bullet *}$ (resp. $f_\bullet^{-1}$) associe à un système projectif de faisceaux sur $\mathscr{X}$ (resp. sur $\mathscr{Y}$) le système projectif de ses images directes sur $\mathscr{Y}$ (resp. inverses sur $\mathscr{X}$) ; si $\mathscr{D}^{(m)}_{X_\bullet \to Y_\bullet}$ est le système projectif des $\mathscr{D}^{(m)}_{X_i \to Y_i}$, le foncteur $f^!_\bullet$ est alors défini en posant, pour tout complexe $\mathscr{F}_\bullet \in D^-(\mathscr{D}^{(m)}_{Y_\bullet})$,

$$f^!_\bullet\mathscr{F}_\bullet := \mathscr{D}^{(m)}_{X_\bullet \to Y_\bullet} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f_\bullet^{-1}\mathscr{D}^{(m)}_{Y_\bullet}} f^{-1}\mathscr{F}_\bullet[d_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}].$$

Soit $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y}} = \varprojlim_i \mathscr{D}^{(m)}_{X_i \to Y_i}$. Alors $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y}}$ est muni d'une structure naturelle de $(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}, f^{-1}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$-bimodule. Il existe dans $D(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ un morphisme canonique

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}} f^{-1}\mathscr{F}[d_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}] \longrightarrow f^!\mathscr{F}, \tag{3.4.2.2}$$

qui est un isomorphisme si $\mathscr{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$.

Comme dans le cas algébrique, le foncteur $f^!$ vérifie la formule de transitivité :

***3.4.3. Proposition* ([10]).** — *Soient $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}, g : \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ deux morphismes de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses.*

(i) *Pour tout $\mathscr{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$, $f^!\mathscr{F}$ appartient à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$.*

(ii) *Pour tout $\mathscr{G} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z}})$, il existe dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ un isomorphisme canonique*

$$f^!(g^!\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} (g\circ f)^!\mathscr{G}. \tag{3.4.3.1}$$

Ces propriétés résultent de la relation (2.2.3.2) assurant la compatibilité de $f^!$ au changement de base modulo p^i, de 3.2.2, et de la formule de transitivité dans le cas algébrique.

Remarque. — Si l'on avait pris pour définition de $f^!$ le terme de gauche de (3.4.2.2), la formule de transitivité ne serait pas valable en général, même pour $\mathscr{G} = \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z}}$. En effet, si l'on prend $\mathscr{X} = \mathscr{Z} = \mathrm{Spf}\,\mathscr{V}\{t\}, \mathscr{Y} = \mathrm{Spf}\,\mathscr{V}$, et si $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est la projection, $g : \mathscr{Y} \hookrightarrow \mathscr{Z}$ la section nulle, alors $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Z}})$ est l'anneau de séries formelles (commutatives) convergentes en 2 variables $\mathscr{V}\{t,\partial\}$, tandis que $\Gamma(\mathscr{X}, \widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y}} \otimes_{f^{-1}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}} f^{-1}\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{Y}\to\mathscr{Z}})$ est le produit tensoriel non complété $\mathscr{V}\{t\}\otimes_{\mathscr{V}}\mathscr{V}\{\partial\}$. L'homomorphisme canonique

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}} f^{-1}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}\to\mathscr{Z}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Z}}$$

n'est donc pas un isomorphisme en général.

Si l'on suppose par contre que $\mathscr{G} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z}})$, et que de plus $g^!\mathscr{G} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$, alors tous les morphismes du carré

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}} f^{-1}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}\to\mathscr{Z}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{g^{-1}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z}}} g^{-1}\mathscr{G})[d_{\mathscr{X}/\mathscr{Z}}] & \xrightarrow{\sim} & f^!(g^!\mathscr{G}) \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Z}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{(g\circ f)^{-1}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z}}} (g\circ f)^{-1}\mathscr{G}[d_{\mathscr{X}/\mathscr{Z}}] & \xrightarrow{\sim} & (g\circ f)^!\mathscr{G} \end{array}$$

sont des isomorphismes.

3.4.4. Plaçons-nous ici sous les hypothèses de 3.1.4, et supposons donnés des morphismes de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses $F_{\mathscr{X}} : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$, $F_{\mathscr{Y}} : \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}'$ relevant $F^s_{X_0/S_0}$ et $F^s_{Y_0/S_0}$, ainsi qu'un $\mathscr{V}$-morphisme $f' : \mathscr{X}' \to \mathscr{Y}'$ relevant $f_0^{(s)}$. Supposons de plus que $f' \circ F_{\mathscr{X}} = F_{\mathscr{Y}} \circ f$. Comme les morphismes $F_{\mathscr{X}}$ et $F_{\mathscr{Y}}$ sont finis localement libres, on déduit facilement de (2.2.3.3) qu'il existe dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}})$ un isomorphisme canonique

$$f^{!(m+s)} F^*_{\mathscr{Y}} \mathscr{F}' \xrightarrow{\sim} F^*_{\mathscr{X}} f'^{!(m)} \mathscr{F}' \tag{3.4.4.1}$$

pour tout $\mathscr{F}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}'})$.

3.4.5. Le foncteur $f^!$ se factorise de manière naturelle en un foncteur

$$f^! : D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}) \longrightarrow D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$$

qui vérifie la formule de transitivité pour le composé de deux morphismes. Le foncteur composé

$$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\approx} D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}) \hookrightarrow D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}) \xrightarrow{f^!} D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \longrightarrow D^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$$

s'identifie canoniquement au foncteur qui associe à un complexe $\mathscr{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$ le complexe

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}} f^{-1}\mathscr{F}[d_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}].$$

***3.4.6. Proposition* ([10])**

(i) *Le foncteur $f^!$ envoie $D_{\mathrm{qc,tdf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$ dans $D_{\mathrm{qc,tdf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$.*

(ii) *Si f est lisse, le foncteur $f^!$ envoie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$ dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$.*

(iii) *Si f est lisse, le morphisme canonique*

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} f^{!(m)}\mathscr{F} \longrightarrow f^{!(m')}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}} \mathscr{F})$$

est un isomorphisme pour tout $\mathscr{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$.

Les assertions (i) et (ii) résultent des propriétés analogues sur les S_i. Pour prouver l'assertion (iii), on introduit sur $\mathscr{X}$ le complexe de Spencer relatif $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}} \otimes \wedge^{\bullet} \mathscr{T}_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}$, et on montre que le morphisme naturel

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}} \otimes \wedge^{\bullet} \mathscr{T}_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y}}$$

est une isogénie de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$.

3.4.7. Soient $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ deux $\mathscr{V}$-schémas formels lisses, $\mathscr{Z} = \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ le $\mathscr{V}$-schéma formel produit. On étend par la même méthode le produit tensoriel externe en un bifoncteur

$$\widehat{\boxtimes}^{\mathbb{L}}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}} : D^{-}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \times D^{-}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}) \longrightarrow D^{-}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z}}),$$

qui envoie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \times D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$ dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}$). On procède de même pour étendre sa construction en un bifoncteur entre les catégories $D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}$, et entre les catégories $D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}$.

Lorsqu'on dispose de relèvements $F_{\mathscr{X}} : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$, $F_{\mathscr{Y}} : \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}'$ de $F^{s}_{X_0/S_0}$ et $F^{s}_{Y_0/S_0}$, et que l'on définit $F_{\mathscr{Z}} : \mathscr{Z} \to \mathscr{Z}'$ comme étant le produit $F_{\mathscr{X}} \times F_{\mathscr{Y}}$, on obtient pour $\mathscr{E}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'})$ et $\mathscr{F}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}'})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}$) un isomorphisme canonique de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{Z}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}$)

$$F^{*}_{\mathscr{X}}\mathscr{E}' \widehat{\boxtimes}^{\mathbb{L}}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}} F^{*}_{\mathscr{Y}}\mathscr{F}' \xrightarrow{\sim} F^{*}_{\mathscr{Z}}(\mathscr{E}' \widehat{\boxtimes}^{\mathbb{L}}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}} \mathscr{F}'). \tag{3.4.7.1}$$

3.5. Image directe et dualité. — Indiquons maintenant comment s'appliquent les méthodes de 3.2 et 3.3 pour l'étude des images directes, et pour étendre le théorème de dualité relative.

3.5.1. Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses. Pour tout $\mathscr{E} \in D^{-}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, on définit l'image directe de $\mathscr{E}$ en posant

$$f_{+}\mathscr{E} := \mathbb{R}\underset{\leftarrow Y\,*}{l}\big(f_{\bullet +}(\mathbb{L}\underset{\leftarrow X}{l}{}^{*}\mathscr{E})\big), \tag{3.5.1.1}$$

où $f_{\bullet}$ est défini comme en 3.4.2, et, pour $\mathscr{E}_{\bullet} \in D^{-}(\mathscr{D}^{(m)}_{X_{\bullet}})$, $f_{\bullet +}\mathscr{E}_{\bullet}$ est le complexe

$$f_{\bullet +}\mathscr{E}_{\bullet} := \mathbb{R}f_{\bullet *}(\mathscr{D}^{(m)}_{Y_{\bullet}\leftarrow X_{\bullet}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{(m)}_{X_{\bullet}}} \mathscr{E}_{\bullet}).$$

Nous poserons encore $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X}} = \varprojlim_{i} \mathscr{D}^{(m)}_{Y_i\leftarrow X_i}$. On dispose sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X}}$ d'une structure de $(f^{-1}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$-bimodule, et il existe dans $D(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$ un morphisme canonique

$$\mathbb{R}f_{*}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}) \longrightarrow f_{+}\mathscr{E}. \tag{3.5.1.2}$$

On vérifie que c'est un isomorphisme lorsque $\mathscr{E} \in D^{-}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$.

Grâce au théorème de changement de base 2.4.2, les propriétés établies modulo p^i s'étendent sur $\mathscr{X}$. Donnons d'abord un énoncé ne nécessitant que la quasi-cohérence :

3.5.2. Proposition. — *Soient $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, $g : \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ deux morphismes de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses.*

(i) *Pour tout $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, $f_+\mathscr{E}$ appartient à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$.*

(ii) *Pour tout $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, il existe dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z}})$ un isomorphisme canonique*

$$g_+(f_+\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} (g \circ f)_+\mathscr{E}. \tag{3.5.2.1}$$

Lorsque $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, on obtient de même le théorème de finitude pour les images directes par un morphisme propre :

3.5.3. Théorème. — *Supposons que $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ soit un morphisme propre.*

(i) *Pour tout $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, $f_+\mathscr{E}$ appartient à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$.*

(ii) *Pour tout $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, et tout $m' \geqslant m$, il existe un isomorphisme canonique*

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{Y}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}} f_{+^{(m)}}\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} f_{+^{(m')}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}). \tag{3.5.3.1}$$

3.5.4. Par passage à la limite, on obtient également la commutation de f_+ aux images inverses par Frobenius définies en 3.1.4. Supposons en effet qu'on soit sous les hypothèses de 3.4.4. En utilisant la finitude de $F_{\mathscr{X}}$ et $F_{\mathscr{Y}}$ et la quasi-cohérence des images directes, on voit que la commutation de f_+ aux images inverses par Frobenius dans le cas algébrique, vue en 2.4.6, entraîne qu'il existe pour tout $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'})$ un isomorphisme canonique

$$f_{+^{(m+s)}}(F^*_{\mathscr{X}}\mathscr{E}') \xrightarrow{\sim} F^*_{\mathscr{Y}} f'_{+^{(m)}}\mathscr{E}' \tag{3.5.4.1}$$

dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$.

3.5.5. Le foncteur f_+ se factorise en un foncteur encore noté

$$f_+ : D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}),$$

qui vérifie les mêmes propriétés que sur $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$. Compte tenu de ce que le foncteur $\mathbb{R}f_*$ commute à la tensorisation par $\mathbb{Q}$, on voit que le foncteur composé

$$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\approx} D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \hookrightarrow D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \xrightarrow{f_+} D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}) \longrightarrow D^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$$

s'identifie canoniquement au foncteur qui associe à $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ le complexe

$$\mathbb{R}f_*(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X},\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}).$$

Lorsque f est lisse, on dispose par passage à la limite à partir de (2.4.6.2) d'un morphisme de complexes

$$\Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}[d_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}] \longrightarrow \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X}}. \tag{3.5.5.1}$$

C'est un isomorphisme pour $m = 0$, et une isogénie pour tout m. Pour tout $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, on obtient donc dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$ un isomorphisme canonique

$$\mathbb{R}f_*(\Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E})[d_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}] \xrightarrow{\sim} f_+\mathscr{E}. \tag{3.5.5.2}$$

3.5.6. Soit $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}) = D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ un complexe parfait. Comme dans le cas algébrique, on définit le complexe dual en posant [**52**]

$$\mathbb{D}(\mathscr{E}) := \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}}(\mathscr{E}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \omega^{-1}_{\mathscr{X}}[d_{\mathscr{X}}]).$$

Le complexe $\mathbb{D}(\mathscr{E})$ appartient à $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$, donc est quasi-cohérent, et on en déduit des isomorphismes canoniques

$$\mathbb{D}(\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underleftarrow{l}_{X*}\mathbb{L}\underleftarrow{l}^{*}_{X}\mathbb{D}(\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underleftarrow{l}_{X*}\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^{(m)}_{X_\bullet}}\big(\mathbb{L}\underleftarrow{l}^{*}_{X}\mathscr{E}, \mathscr{D}^{(m)}_{X_\bullet} \otimes_{\mathscr{O}_{X_\bullet}} \omega^{-1}_{X_\bullet}[d_{\mathscr{X}}]\big).$$

Supposons maintenant que f soit un morphisme propre. La construction du morphisme trace esquissée en 2.5.8 est suffisamment fonctorielle pour fournir, dans la catégorie dérivée des systèmes projectifs, un morphisme $\mathrm{Tr}_{f_{\bullet,+}} : f_{\bullet,+}\omega_{X_\bullet}[d_{\mathscr{X}}] \to \omega_{Y_\bullet}[d_{\mathscr{Y}}]$. En appliquant $\mathbb{R}\underleftarrow{l}_{X^*}$, on obtient donc dans $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$ un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_{f,+} : f_+(\omega_{\mathscr{X}})[d_{\mathscr{X}}] \longrightarrow \omega_{\mathscr{Y}}[d_{\mathscr{Y}}].$$

La construction du morphisme de dualité relative s'effectue alors comme dans le cas algébrique, et le théorème de dualité relative s'obtient par passage à la limite à partir de 2.5.9 :

***3.5.7. Théorème* ([49, 5.5.3]).** — *Soient $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme propre de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses, $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$). Il existe alors dans $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$ (resp. $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$) un isomorphisme canonique*

$$\chi : f_+\big(\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{E})\big) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathscr{Y}}\big(f_+(\mathscr{E})\big), \tag{3.5.7.1}$$

vérifiant la condition de transitivité pour le composé de deux morphismes propres.

4. Passage à la limite sur le niveau

Nous restons ici sous les hypothèses du chapitre précédent. Si X est un S-schéma lisse au-dessus de $\mathbb{Z}_{(p)}$, nous avons vu en 1.2.5 que le passage à la limite inductive pour m variable dans le système inductif des faisceaux $\mathscr{D}^{(m)}_X$ redonne le faisceau usuel $\mathscr{D}_X$, qui ne joue guère de rôle dans l'étude de la cohomologie de de Rham et de la cohomologie cristalline hors de la caractéristique nulle. Par contre, si $\mathscr{X}$ est un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse, un passage à la limite similaire sur les complétés $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$ permet d'introduire un nouveau faisceau, noté $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$, qui est directement lié à l'étude de la cohomologie rigide de la réduction de $\mathscr{X}$ sur k (voir [**3**]).

4.1. Le faisceau d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. — Nous commençons donc ici l'étude des faisceaux d'opérateurs différentiels obtenus en passant à la limite inductive pour m variable dans les systèmes de faisceaux $(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})_{m\in\mathbb{N}}$ et $(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})_{m\in\mathbb{N}}$.

4.1.1. Soit $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse. On définit un nouveau faisceau d'opérateurs différentiels sur $\mathscr{X}$ en posant

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}} := \varinjlim_{m} \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}.$$

Il sera appelé *faisceau des opérateurs différentiels* (d'ordre infini) *de niveau fini sur* $\mathscr{X}$. Si $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}$ est le complété p-adique du faisceau usuel des opérateurs différentiels sur $\mathscr{X}$, la description des sections des faisceaux $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$ donnée en (3.1.1.1) montre que les morphismes naturels $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}} \to \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}$ sont injectifs. Par suite, $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$ est un sous-faisceau d'anneaux de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}$. Soient $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ un ouvert affine muni de coordonnées locales $t_1,\dots,t_d$, et $\|\text{-}\|$ une norme de Banach sur l'algèbre affinoïde $\Gamma(\mathscr{U},\mathscr{O}_{\mathscr{U}})_{\mathbb{Q}}$ [**18**]. En utilisant la base $(\underline{\partial}^{[\underline{k}]})$ de $\Gamma(\mathscr{U},\mathscr{D}_{\mathscr{X}})$, on peut alors décrire le sous-anneau $\Gamma(\mathscr{U},\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}) \subset \Gamma(\mathscr{U},\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}})$ sous la forme suivante [**5**, 2.4.4] :

$$\Gamma(\mathscr{U},\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}) = \Big\{ \textstyle\sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}}\underline{\partial}^{[\underline{k}]} \mid a_{\underline{k}} \in \Gamma(\mathscr{U},\mathscr{O}_{\mathscr{X}}), \\ \text{et } \exists\, c,\eta\in\mathbb{R},\ \eta<1,\ \text{tels que } \|a_{\underline{k}}\| < c\eta^{|\underline{k}|}\Big\}. \tag{4.1.1.1}$$

Nous reviendrons plus loin (voir 4.4.1) sur les relations entre les conditions de décroissance qui apparaissent ici et celles, complètement analogues, de Monsky-Washnitzer [**44**].

Pour tout i, la réduction de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$ modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$ est égale à $\mathscr{D}_{X_i}$. Par suite, $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$ n'est pas un faisceau d'anneaux noethérien. De plus, $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ n'est pas de présentation finie sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$, puisque $\mathscr{O}_{X_i}$ ne l'est pas sur $\mathscr{D}_{X_i}$. Nous nous intéresserons donc essentiellement dans ce qui suit au faisceau $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$.

En utilisant l'existence d'un morphisme canonique surjectif $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}} \to F^*\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}'}$, où $F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ est un relèvement local du Frobenius de X_0, on voit que $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ n'est pas non plus un faisceau d'anneaux noethériens [**8**, 4.2.3]. Mais on peut néanmoins montrer :

***4.1.2. Théorème* ([5, 3.6.1 (i)]).** — *Le faisceau $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ est cohérent (à gauche et à droite).*

C'est une conséquence formelle du théorème de platitude suivant :

***4.1.3. Théorème* ([5, 3.5.3]).** — *Pour tout $m' \geqslant m$, les homomorphismes $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ sont plats à gauche et à droite.*

Il suffit de prouver que, pour tout ouvert affine $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ sur lequel il existe un système de coordonnées locales, l'homomorphisme induit entre les sections est plat. La méthode de la démonstration consiste à introduire un anneau D' tel que

$$\Gamma(\mathscr{U},\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}) \subset D' \subset \Gamma(\mathscr{U},\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}}),$$

et qui possède les propriétés suivantes :

(i) $\Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) = D'_{\mathbb{Q}}$;

(ii) $\widehat{D}' = \Gamma(\mathscr{U}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X}})$;

(iii) D' est un anneau noethérien.

La condition (iii) entraîne que $\widehat{D}'$ est plat sur D', de sorte que l'énoncé résulte alors des conditions (i) et (ii).

4.1.4. Par passage à la limite inductive, on peut montrer que, lorsque $\mathscr{X}$ est un schéma formel affine, les théorèmes A et B sont vrais pour les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents [**5**, 3.6.4]. Plus précisément :

A) Tout $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent est engendré par ses sections globales, et le foncteur $\Gamma(\mathscr{X}, -)$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, et celle des $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-modules de présentation finie.

B) Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, $H^n(\mathscr{X}, \mathscr{E}) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

À partir de 3.1.3, les résultats précédents fournissent une estimation de la dimension homologique des anneaux $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ lorsque $\mathscr{X}$ est affine :

4.1.5. Corollaire. — *Supposons que $\mathscr{X}$ soit affine, de dimension relative d sur $\mathscr{S}$. Alors :*

(i) *Tout $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-module de présentation finie possède une résolution projective de type fini de longueur $2d$.*

(ii) *L'anneau $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ est de dimension homologique finie, comprise entre d et $2d+1$.*

Comme en 3.1.3, on conjecture que $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ est en fait de dimension homologique d.

4.1.6. Exemples

Mentionnons ici quelques exemples de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents provenant de la cohomologie rigide (voir [**3**]). Nous noterons $\mathscr{X}_K$ la fibre générique de $\mathscr{X}$, qui est un espace analytique rigide sur K, et $\mathrm{sp} : \mathscr{X}_K \to \mathscr{X}$ le morphisme de spécialisation.

(i) Un isocristal convergent sur X_0 s'interprète comme la donnée d'un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$-module localement libre de rang fini E, muni d'une connexion intégrable dont la série de Taylor converge sur le tube de la diagonale de X_0 dans $\mathscr{X}_K \times \mathscr{X}_K$. Le $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{E} = \mathrm{sp}_* E$ est alors localement projectif de rang fini, et la condition de convergence permet de le munir d'une structure canonique de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module, pour laquelle il est cohérent [**3**, 3.1.4]. Le foncteur sp_* définit ainsi une équivalence entre la catégorie des isocristaux convergents sur X_0 et celle des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents qui sont $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-cohérents [**5**, 4.1.4]. Rappelons qu'en particulier tout F-isocristal sur X_0 est convergent (voir [**4**, 2.4.1]).

(ii) Soient $Z \subset X_0$ un fermé, $j : U \hookrightarrow X_0$ l'inclusion du complémentaire de Z, $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ le sous-schéma formel ouvert d'espace sous-jacent U. Pour tout faisceau F sur $\mathscr{X}_K$, on pose $j^\dagger F = \varinjlim_V j_{V*} j_V^{-1} F$, où V parcourt l'ensemble des voisinages stricts du tube $]U[_{\mathscr{X}} = \mathscr{U}_K$ de U dans $\mathscr{X}_K$. Un isocristal sur U surconvergent le long de Z s'interprète comme la donnée d'un $j^\dagger \mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$-module localement libre de rang fini E, muni d'une connexion intégrable dont la série de Taylor est convergente sur un voisinage strict du tube de U dans $\mathscr{X}_K \times \mathscr{X}_K$, dans celui de X_0 dans $\mathscr{X}_K \times \mathscr{X}_K$.

Le complexe $\mathscr{E} = \mathbb{R}\,\mathrm{sp}_* E$ (qui est réduit au seul terme $\mathrm{sp}_* E$ lorsque Z est un diviseur) peut alors être muni d'une structure naturelle de complexe de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules (*cf.* [**3**, 4.1.5], en supposant $\mathscr{X}$ séparé). Il y a lieu d'observer qu'en général ses faisceaux de cohomologie ne sont pas nécessairement cohérents sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, à cause de difficultés provenant des nombres de Liouville p-adiques (voir 5.3.6 plus bas pour une discussion de ce problème).

(iii) Du point de vue de la théorie développée ici, le complexe $\mathbb{R}\,\mathrm{sp}_*\, j^\dagger \mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$ constitue le substitut naturel du complexe $\mathbb{R} j_* \mathscr{O}_{\mathscr{U},\mathbb{Q}}$, qui n'a pas de propriétés de finitude satisfaisantes (même si $\mathscr{X}$ est propre, sa cohomologie de de Rham n'est pas de dimension finie en général). De même, si l'on pose pour tout faisceau abélien F sur $\mathscr{X}_K$

$$\underline{\Gamma}^\dagger_{]Z[}(F) = \mathrm{Ker}(F \to j^\dagger F),$$

le complexe $\mathbb{R}\,\mathrm{sp}_*\, \underline{\Gamma}^\dagger_{]Z[}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K})$ constitue le substitut naturel du complexe $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z(\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Nous verrons en 4.4.9 que ces deux complexes sont à cohomologie $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-cohérente.

4.2. Passage à la limite inductive et localisation dans les catégories dérivées. — Comme pour les $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules et les $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules, on ne peut pas définir des opérations cohomologiques pour les $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules avec une généralité suffisante sans tenir compte de la topologie de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. La méthode que nous emploierons est une extension de celle que nous avons utilisée en 3.3 dans le cas des complexes de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules : nous ne travaillerons pas directement dans la catégorie dérivée $D(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, mais dans une catégorie triangulée convenable, munie d'un foncteur exact à valeurs dans $D(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ qui induise une équivalence entre une sous-catégorie pleine et la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Pour construire cette catégorie, nous partirons de la catégorie des systèmes inductifs de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules pour m variable, puis nous la localiserons en deux étapes : nous inverserons d'abord les ind-isogénies entre systèmes inductifs, puis nous effectuerons une localisation qui constituera une certaine forme de passage à la limite préservant la structure triangulée.

Nous nous limiterons ici aux systèmes inductifs de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules, renvoyant le lecteur à [**9**] pour une étude plus générale.

4.2.1. Nous travaillerons dans le topos $\mathscr{X}^{(\bullet)}$ des systèmes inductifs de faisceaux $(E^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ sur $\mathscr{X}$. On peut le considérer comme annelé par le système inductif de

faisceaux d'anneaux $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)} = (\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$. Un $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}$-module $\mathscr{E}^{(\bullet)}$ est simplement la donnée d'un système inductif de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-modules $\mathscr{E}^{(m)}$, tel que les applications de transition $\alpha^{(m',m)} : \mathscr{E}^{(m)} \to \mathscr{E}^{(m')}$ soient semi-linéaires par rapport aux homomorphismes $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)} \to \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m')}$. S'il n'en résulte pas de confusion, nous noterons simplement $\mathscr{E}$ un tel système, au lieu de $\mathscr{E}^{(\bullet)}$.

Sur la catégorie des systèmes inductifs, la notion d'isogénie considérée en 3.3 n'est plus suffisante, car on souhaite pouvoir considérer des morphismes f pour lesquels l'entier n tel qu'il existe g vérifiant $g \circ f = n$, $f \circ g = n$, puisse varier avec m sans être nécessairement borné. On est ainsi conduit à remplacer cette notion par la notion plus souple de ind-isogénie introduite plus bas. Nous nous limiterons ici au cas des p-isogénies, *i.e.* telles que n soit une puissance de p, en renvoyant à [**9**] pour le cas général.

Soit M l'ensemble des applications croissantes $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, qui est lui même un ensemble ordonné filtrant. On peut associer à tout $\chi \in M$ un foncteur exact χ^* de la catégorie des $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}$-modules dans elle-même en associant à un système inductif $(\mathscr{E}^{(m)}, \alpha^{(m',m)})$ le système inductif obtenu en posant $(\chi^*\mathscr{E})^{(m)} = \mathscr{E}^{(m)}$, et en prenant pour morphismes de transition les morphismes $p^{\chi(m')-\chi(m)}\alpha^{(m',m)} : \mathscr{E}^{(m)} \to \mathscr{E}^{(m')}$, $m \leqslant m'$. On dispose alors d'un morphisme naturel de systèmes inductifs $\theta_{\mathscr{E},\chi} : \mathscr{E} \to \chi^*\mathscr{E}$, défini par la multiplication par $p^{\chi(m)}$ sur $\mathscr{E}^{(m)}$.

Les foncteurs χ^* passent à la catégorie dérivée $D(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$. Nous dirons qu'un morphisme $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ de $D(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$ est une *ind-isogénie* s'il existe $\chi \in M$, et un morphisme $g : \mathscr{F} \to \chi^*\mathscr{E}$ de $D(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$, tels que $g \circ f = \theta_{\mathscr{E},\chi}$ et $\chi^*(f) \circ g = \theta_{\mathscr{F},\chi}$. Les ind-isogénies forment un système multiplicatif Ξ compatible avec la structure triangulée de $D(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$, qui contient les morphismes $\theta_{\mathscr{E},\chi}$. Pour $* \in \{\varnothing, +, -, \mathrm{b}\}$, nous noterons $\underset{\to}{D}{}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$ la catégorie triangulée obtenue en localisant $D^*(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$ par rapport à $\Xi \cap D^*(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$. Si $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ sont deux systèmes inductifs, on a donc

$$\mathrm{Hom}_{\underset{\to}{D}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})}(\mathscr{E}, \mathscr{F}) = \varinjlim_{\chi\in M} \mathrm{Hom}_{D(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})}(\mathscr{E}, \chi^*\mathscr{F}).$$

La catégorie $\underset{\to}{D}{}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$ est une sous-catégorie pleine de $\underset{\to}{D}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)})$, car les foncteurs χ^* commutent à la troncation.

Il existe un foncteur exact naturel $\underset{\to}{D}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}) \to D(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(\bullet)})$ factorisant le foncteur de tensorisation par $\mathbb{Q}$.

Exemple. — Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme lisse. Pour m variable, les morphismes (3.5.5.1) définissent un morphisme $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}$-linéaire à droite

$$\Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}[d_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}] \longrightarrow \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X}}^{(\bullet)}. \tag{4.2.1.1}$$

Ce morphisme est une ind-isogénie [**9**]. En particulier, le morphisme canonique

$$\Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(\bullet)}[d_{\mathscr{X}}] \longrightarrow \omega_{\mathscr{X}(\bullet)},$$

où $\omega_{\mathscr{X}(\bullet)}$ est le système inductif constant de valeur $\omega_{\mathscr{X}}$, est une ind-isogénie.

4.2.2. L'étape suivante consiste à remplacer le passage à la limite inductive par une autre localisation. Soit L l'ensemble des applications $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui sont croissantes, et telles que $\lambda(m) \geqslant m$ pour tout m. C'est de manière naturelle un ensemble ordonné filtrant. Pour tout $\lambda \in L$, et tout $\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}$-module $\mathscr{E}$, nous noterons $\lambda^*\mathscr{E}$ le $\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}$-module tel que $(\lambda^*\mathscr{E})^{(m)} = \mathscr{E}^{(\lambda(m))}$, et que, pour $m' \geqslant m$, le morphisme de transition $(\lambda^*\mathscr{E})^{(m)} \to (\lambda^*\mathscr{E})^{(m')}$ soit le morphisme donné $\mathscr{E}^{(\lambda(m))} \to \mathscr{E}^{(\lambda(m'))}$. On dispose d'un morphisme canonique $\rho_{\mathscr{E},\lambda} : \mathscr{E} \to \lambda^*\mathscr{E}$. Le foncteur λ^* est exact, et s'étend donc en un foncteur exact sur $D(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$. Il est facile de voir que λ^* transforme une ind-isogénie en ind-isogénie, de sorte qu'il s'étend également à la catégorie localisée $\underset{\longrightarrow}{D}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ par rapport à Ξ.

Soit Λ l'ensemble des morphismes $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ de $\underset{\longrightarrow}{D}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ tels qu'il existe $\lambda \in L$, et un morphisme $g : \mathscr{F} \to \lambda^*\mathscr{E}$, tels que $g \circ f = \rho_{\mathscr{E},\lambda}$, et $\lambda^*(f) \circ g = \rho_{\mathscr{F},\lambda}$. L'ensemble Λ est encore un système multiplicatif, compatible à la structure triangulée de $\underset{\longrightarrow}{D}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$. Pour $* \in \{\varnothing, +, -, \mathrm{b}\}$, on note $\underset{\longrightarrow}{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ la catégorie triangulée déduite de $\underset{\longrightarrow}{D}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ par localisation par rapport à $\Lambda \cap \underset{\longrightarrow}{D}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$. La catégorie $\underset{\longrightarrow}{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ est encore une sous-catégorie pleine de $\underset{\longrightarrow}{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$. Si $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ sont deux complexes de $\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}$-modules, on a par construction

$$\mathrm{Hom}_{\underset{\longrightarrow}{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})}(\mathscr{E}, \mathscr{F}) = \varinjlim_{\lambda \in L} \varinjlim_{\chi \in M} \mathrm{Hom}_{D(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})}(\mathscr{E}, \lambda^*\chi^*\mathscr{F}).$$

Le foncteur $\varinjlim$, allant de la catégorie des $\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}$-modules vers celle des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$-modules, est un foncteur exact. Il s'étend en un foncteur exact $D(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \to D(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$. Par composition avec le foncteur de tensorisation par $\mathbb{Q}$, une ind-isogénie est transformée en isomorphisme, ce qui fournit une extension de $\varinjlim$ en un foncteur $\underset{\longrightarrow}{D}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \to D(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Celui-ci transforme tout morphisme de Λ en un isomorphisme, d'où finalement un foncteur

$$\varinjlim : \underset{\longrightarrow}{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \longrightarrow D(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}).$$

Pour $* \in \{+, -, \mathrm{b}\}$, ce foncteur envoie $\underset{\longrightarrow}{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ dans $D^*(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$.

4.2.3. On peut introduire des conditions de finitude sur les objets de $\underset{\longrightarrow}{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$.

(i) Soit $\mathscr{E} \in \underset{\longrightarrow}{LD}^-_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $\underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$). Nous dirons que $\mathscr{E}$ est *quasi-cohérent* s'il est isomorphe dans $\underset{\longrightarrow}{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ à un complexe $\mathscr{E}'$ tel que, pour tout m, le complexe $\mathscr{E}'^{(m)}$ soit dans $D^-_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$). Pour $* \in \{-, \mathrm{b}\}$, la sous-catégorie pleine de $\underset{\longrightarrow}{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ dont les objets sont les complexes quasi-cohérents sera notée $\underset{\longrightarrow}{LD}^*_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$. Il est facile de vérifier que c'est une sous-catégorie triangulée de $\underset{\longrightarrow}{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$.

(ii) Notons d'abord que, si $\lambda \in L$, tout $\lambda^*\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}$-module $\mathscr{F}$ peut être considéré comme un $\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}$-module par l'intermédiaire du morphisme $\rho_{\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}},\lambda} : \widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}} \to \lambda^*\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}$. Pour $* \in \{-, \mathrm{b}\}$, soit $\mathscr{E} \in \underset{\longrightarrow}{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$. Nous dirons que $\mathscr{E}$ est *cohérent* s'il existe $\lambda \in L, \mathscr{E}' \in \underset{\longrightarrow}{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\lambda^*\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, et un isomorphisme $\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}'$ dans $\underset{\longrightarrow}{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, tels que $\mathscr{E}'$ vérifie les conditions suivantes :

a) Pour tout m, $\mathscr{E}'^{(m)} \in D^*_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\lambda(m))}_{\mathscr{X}})$;

b) Pour tous $m \leqslant m'$, le morphisme canonique

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(\lambda(m'))}_{\mathscr{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(\lambda(m))}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}'^{(m)} \longrightarrow \mathscr{E}'^{(m')}$$

est un isomorphisme.

Bien que ce soit moins évident sur la définition, la sous-catégorie pleine de $\underset{\longrightarrow}{LD}^*_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ dont les objets sont les complexes cohérents est aussi une sous-catégorie triangulée de $\underset{\longrightarrow}{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$. Nous la noterons $\underset{\longrightarrow}{LD}^*_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$. C'est une sous-catégorie de $\underset{\longrightarrow}{LD}^*_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$.

Exemple. — Le système constant de valeur $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ est cohérent dans $\underset{\longrightarrow}{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, car le complexe $\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}} \mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ vérifie les conditions a) et b) ci-dessus, et le morphisme canonique

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}} \mathscr{O}_{\mathscr{X}} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathscr{X}}$$

est une ind-isogénie.

L'intérêt de cette notion de cohérence provient du théorème suivant :

***4.2.4. Théorème* ([9])**. — *Le foncteur* $\varinjlim$ *induit une équivalence de catégories*

$$\varinjlim : \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \xrightarrow{\approx} D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}).$$

4.3. Opérations cohomologiques sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. — La méthode générale que nous suivrons consiste à définir des opérations cohomologiques entre les catégories $\underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ (pour $\mathscr{X}$ variable), en factorisant grâce à la propriété universelle des catégories localisées les opérations dont on dispose sur $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ au moyen des constructions antérieures. Ces opérations vérifieront alors automatiquement les mêmes relations que sur les catégories $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$. D'autre part, on s'assure que, lorsqu'on compose avec le foncteur $\varinjlim$, et qu'on identifie la sous-catégorie $\underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ par 4.2.4, on retrouve les définitions classiques de ces opérations.

4.3.1. Considérons d'abord la descente par Frobenius. On reprend ici les hypothèses de 3.1.4. Pour m assez grand, l'idéal maximal de $\mathscr{V}$ possède une m-PD-structure, de sorte que $F^*\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$ possède une structure canonique de $(\widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'})$-bimodule, et $F^\flat\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}$ une structure canonique de $(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}'}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m+s)}_{\mathscr{X}})$-bimodule. Par passage à la limite inductive sur m, il en résulte que $F^*\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$ et $F^\flat\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$ possèdent respectivement une structure canonique de $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}})$-bimodule et de $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-bimodule.

En passant à la limite inductive dans les isomorphismes (3.1.4.1), on en déduit des isomorphismes de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-bimodules et de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$-bimodules

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} F^*F^\flat\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}, \qquad F^\flat\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} F^*\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}.$$

Il en résulte que les foncteurs $\mathscr{E}' \mapsto F^*\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E} \mapsto F^\flat\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}$-modules à gauche et celle des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules à gauche, préservant les conditions de finitude usuelles, et induisant une équivalence entre $D(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}})$ et $D(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$.

De même, les foncteurs $\mathscr{E}' \mapsto F^*\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E} \mapsto F^\flat\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}'} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}$ se factorisent par les catégories localisées construites en 4.2, et induisent des équivalences de catégories quasi-inverses entre les catégories $\underset{\longrightarrow}{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}'})$ et $\underset{\longrightarrow}{LD}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, préservant les sous-catégories $\underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}$ et $\underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}$. Le foncteur $\varinjlim$ commute à ces équivalences.

4.3.2. Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses. En appliquant les foncteurs $\mathbb{L}\underset{\longleftarrow}{l}^*_X$ et $\mathbb{R}\underset{\longleftarrow}{l}_{X^*}$ sur la catégorie des système inductifs, on définit comme en 3.4.2 un foncteur $f^! : D^-(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}}) \to D^-(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$. Sa factorisation par les catégories localisées construites en 4.2 fournit un foncteur $\underset{\longrightarrow}{LD}^-_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}}) \to \underset{\longrightarrow}{LD}^-_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, qui induit un foncteur

$$f^! : \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}}) \longrightarrow \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}). \tag{4.3.2.1}$$

Si $g : \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ est un second morphisme de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses, et si $\mathscr{G} \in \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Z}})$, on dispose alors dans $\underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ de la formule de transitivité

$$f^!(g^!\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} (g \circ f)^!\mathscr{G}.$$

En effet, celle-ci résulte par construction de (3.4.3.1).

Soit d'autre part $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbb{Q}} = \varinjlim_m \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbb{Q}}$; c'est un $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}, f^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$-bimodule. Le foncteur composé

$$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\approx} \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}}) \xrightarrow{f^!} \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \xrightarrow{\varinjlim} D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$$

est alors canoniquement isomorphe au foncteur

$$\mathscr{F} \longmapsto \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}} f^{-1}\mathscr{F}[d_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}]. \tag{4.3.2.2}$$

Lorsque $f^!$ envoie $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}})$ dans $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, nous pourrons ainsi identifier grâce à 4.2.4 le foncteur $f^!$ au foncteur défini par (4.3.2.2), et le considérer comme un foncteur que nous noterons encore généralement $f^! : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Cette situation se produit notamment lorsque f est lisse, grâce à 3.4.6 :

***4.3.3. Théorème* ([10]).** — *Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme lisse de $\mathscr{V}$-schémas formels.*

(i) *Pour tout $\mathscr{F} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}})$, le complexe $f^!\mathscr{F}$ appartient à $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$.*

(ii) *Soit $\mathscr{F}^{(m)} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$. Si l'on considère $f^!$ comme un foncteur de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$ dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ grâce à (i) et 4.2.4, il existe dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ un isomorphisme canonique*

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} f^{!(m)}\mathscr{F}^{(m)} \xrightarrow{\sim} f^!(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}} \mathscr{F}^{(m)}). \tag{4.3.3.1}$$

À partir de 3.4.4, on obtient par ailleurs :

***4.3.4. Proposition*.** — *Sous les hypothèses de 3.4.4, il existe pour tout $\mathscr{F}' \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}'})$ un isomorphisme canonique de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$*

$$f^!F^*_{\mathscr{Y}}\mathscr{F}' \xrightarrow{\sim} F^*_{\mathscr{X}}f'^!\mathscr{F}'. \tag{4.3.4.1}$$

Lorsque f est lisse et $\mathscr{F}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}',\mathbb{Q}})$, cet isomorphisme peut être vu comme un isomorphisme de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ via 4.2.4.

4.3.5. Soient $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ deux $\mathscr{V}$-schémas formels lisses, $\mathscr{Z} = \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Le produit tensoriel externe construit en 3.4.7 s'étend en un bifoncteur

$$\overset{\mathbb{L}\dagger}{\boxtimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}} : \underrightarrow{LD}^{-}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \times \underrightarrow{LD}^{-}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}}) \longrightarrow \underrightarrow{LD}^{-}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Z}}).$$

On vérifie qu'il induit un bifoncteur

$$\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \times \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}}) \longrightarrow \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Z}}),$$

de sorte qu'on peut utiliser 4.2.4 et le considérer comme un bifoncteur

$$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) \times D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}) \longrightarrow D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}).$$

Lorsqu'on dispose de relèvements de Frobenius comme en 3.4.7, on obtient, pour $\mathscr{E}' \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}'})$, $\mathscr{F}' \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}'})$, un isomorphisme canonique

$$F^*_{\mathscr{X}}\mathscr{E}' \overset{\mathbb{L}\dagger}{\boxtimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}} F^*_{\mathscr{Y}}\mathscr{F}' \xrightarrow{\sim} F^*_{\mathscr{Z}}(\mathscr{E}' \overset{\mathbb{L}\dagger}{\boxtimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}} \mathscr{F}'). \tag{4.3.5.1}$$

Lorsque $\mathscr{E}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}), \mathscr{F}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}',\mathbb{Q}})$, on peut encore le considérer comme un isomorphisme de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}})$.

4.3.6. Considérons à nouveau un morphisme $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses. Appliquant la méthode de 3.5.1 au niveau de la catégorie dérivée des systèmes inductifs, on obtient un foncteur $f_+ : D^-(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \to D^-(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}})$. En le factorisant par les catégories $\underset{\longrightarrow}{LD}_{\mathbb{Q}}$, et en utilisant la préservation de la quasi-cohérence vue en 3.5.2, on obtient un foncteur

$$f_+ : \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \longrightarrow \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}}). \tag{4.3.6.1}$$

Si $g : \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ est un second morphisme de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses, et si $\mathscr{E} \in \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, on déduit encore de 3.5.2 l'isomorphisme de transitivité

$$g_+(f_+\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} (g \circ f)_+\mathscr{E} \tag{4.3.6.2}$$

dans $\underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Z}})$.

Supposons que f soit un morphisme lisse. Comme le morphisme (4.2.1.1) est une ind-isogénie, on en déduit pour tout $\mathscr{E} \in \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ un isomorphisme de $\underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\mathscr{O}_{\mathscr{Y}})$

$$\mathbb{R}f_*(\Omega^{\bullet}_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E})[d_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}] \xrightarrow{\sim} f_+\mathscr{E}. \tag{4.3.6.3}$$

4.3.7. On introduit d'autre part le $(f^{-1}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$-bimodule $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X},\mathbb{Q}} = \varinjlim_m \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. Le foncteur composé

$$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\approx} \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \xrightarrow{f_+} \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}}) \xrightarrow{\lim} D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$$

est alors canoniquement isomorphe au foncteur

$$\mathscr{E} \longmapsto \mathbb{R}f_*(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X},\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}). \tag{4.3.7.1}$$

Lorsque f_+ envoie $\underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ dans $\underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}})$, nous utiliserons à nouveau 4.2.4 pour considérer f_+ comme un foncteur encore noté $f_+ : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$.

Grâce au théorème de finitude suivant, dont la démonstration repose sur 3.5.3, cette situation se produit notamment lorsque f est propre :

***4.3.8. Théorème* ([10])**. — *Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme propre de $\mathscr{V}$-schémas formels.*

(i) *Pour tout $\mathscr{E} \in \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, le complexe $f_+\mathscr{E}$ appartient à $\underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}})$.*

(ii) *Soit $\mathscr{E}^{(m)} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Si l'on considère f_+ comme un foncteur de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$ grâce à (i) et 4.2.4, il existe dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$ un isomorphisme canonique*

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}} f_{+^{(m)}}(\mathscr{E}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} f_+(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(m)}). \tag{4.3.8.1}$$

Enfin, on déduit de 3.5.4 la commutation du foncteur f_+ aux images inverses par Frobenius :

4.3.9. Proposition. — *Sous les hypothèses de 3.4.4, il existe pour tout* $\mathscr{E}' \in \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}'})$ *un isomorphisme canonique de* $\underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}})$

$$f_+(F^*_{\mathscr{X}}\mathscr{E}') \xrightarrow{\sim} F^*_{\mathscr{Y}} f'_+\mathscr{E}'. \tag{4.3.9.1}$$

Lorsque f *est propre et* $\mathscr{E}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}})$*, cet isomorphisme peut être considéré comme un isomorphisme de* $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ *via 4.2.4.*

4.3.10. Si $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) = D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, on définit son dual en posant

$$\mathbb{D}(\mathscr{E}) := \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}}(\mathscr{E}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes \omega^{-1}_{\mathscr{X}}[d_{\mathscr{X}}]),$$

qui est lui aussi un complexe de $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. On dispose encore de l'isomorphisme de dualité locale

$$\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}\big(\mathbb{D}(\mathscr{E})\big).$$

Soit $F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ un relèvement de $F^s_{X_0/S_0}$. En procédant comme dans le cas algébrique, on obtient pour $\mathscr{E}' \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}})$ l'isomorphisme de commutation du dual à l'image inverse par Frobenius [**52**]

$$F^*\mathbb{D}_{\mathscr{X}'}(\mathscr{E}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathscr{X}}(F^*\mathscr{E}'). \tag{4.3.10.1}$$

4.3.11. S'il existe un entier m, un complexe $\mathscr{E}^{(m)} \in D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ et un isomorphisme

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E},$$

on en déduit un isomorphisme

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}} \mathbb{D}^{(m)}(\mathscr{E}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathscr{E}).$$

De même, si l'on se limite aux systèmes inductifs indexés par les entiers $m' \geqslant m$ et que l'on pose

$$\mathscr{E}^{(\bullet)} := \widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}} \mathscr{E}^{(m)},$$

on peut définir dans $D(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ un système inductif $\mathbb{D}(\mathscr{E}^{(\bullet)})^{(\bullet)}$, tel que, pour tout $m' \geqslant m$, on ait $\mathbb{D}(\mathscr{E}^{(\bullet)})^{(m')} \simeq \mathbb{D}^{(m')}(\mathscr{E}^{(m')})$. En appliquant le foncteur $\varinjlim : D(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \to D(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}}) \to D(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, on obtient alors l'isomorphisme

$$\varinjlim \mathbb{D}(\mathscr{E}^{(\bullet)})^{(\bullet)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathscr{E}).$$

4.3.12. Supposons que $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ soit un morphisme propre de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses. Pour tout m, on dispose d'après 3.5.6 d'un morphisme trace $\mathrm{Tr}^{(m)}_{f,+} : f^{(m)}_+(\omega_{\mathscr{X}})[d_{\mathscr{X}}] \to \omega_{\mathscr{Y}}[d_{\mathscr{Y}}]$ dans $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)\,\mathrm{d}}_{\mathscr{Y}})$. En utilisant le foncteur $f^{(\bullet)}_+ : D^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)\,\mathrm{d}}_{\mathscr{X}}) \to D^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)\,\mathrm{d}}_{\mathscr{Y}})$ défini pour les modules à droite de manière analogue à 4.3.6, on montre que ces morphismes proviennent d'un morphisme

$$\mathrm{Tr}^{(\bullet)}_{f,+} : f^{(\bullet)}_+(\omega_{\mathscr{X}})[d_{\mathscr{X}}] \to \omega_{\mathscr{Y}}[d_{\mathscr{Y}}]$$

dans la catégorie dérivée $D^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{Y}}^{(\bullet)\,\mathrm{d}})$. En appliquant le foncteur $\varinjlim$, on en déduit un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_{f,+}^{\dagger} : f_+(\omega_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})[d_{\mathscr{X}}] \to \omega_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}[d_{\mathscr{Y}}]$$

dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$, où l'on peut prendre $f_+(\omega_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) = \mathbb{R}f_*(\omega_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$ grâce au théorème de finitude symétrique de 4.3.8 pour les modules à droite.

Comme précédemment, le morphisme trace permet de définir pour tout complexe $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ un morphisme de dualité relative. Par un passage à la limite basé sur 4.3.11, on obtient alors à partir du cas des complexes parfaits de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$-modules le théorème de dualité relative pour les complexes parfaits de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules :

***4.3.13. Théorème* ([49, 5.7.2]).** — *Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme propre de $\mathscr{V}$-schémas formels lisses. Pour tout complexe $\mathscr{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, il existe un isomorphisme canonique*

$$\chi : f_+\big(\mathbb{D}_{\mathscr{X}}(\mathscr{E})\big) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathscr{Y}}\big(f_+(\mathscr{E})\big) \tag{4.3.13.1}$$

dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$.

4.4. Cohérence des faisceaux de fonctions à singularités surconvergentes

Soient $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel propre et lisse, de réduction $X = X_0$ sur k, $Z \subset X$ un diviseur, $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire, $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ le sous-schéma formel ouvert dont l'espace sous-jacent est U. Avec les notations de 4.1.6, le faisceau $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z) := \mathrm{sp}_*\, j^{\dagger}\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$ possède une structure naturelle de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module. D'autre part, la cohomologie rigide de U est, essentiellement par construction [**7**], la cohomologie de de Rham de $\mathscr{X}$ à coefficients dans $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$. Il résulte alors de l'isomorphisme de comparaison (4.3.6.3) et du théorème de finitude 4.3.8 que, si l'on peut montrer que $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$ est cohérent en tant que $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module, les espaces de cohomologie rigide $H^n_{\mathrm{rig}}(U/K)$ sont des K-espaces vectoriels de dimension finie. Bien qu'il existe par ailleurs des démonstrations directes de la finitude de la cohomologie rigide (voir [**7**], [**25**], [**43**]), la cohérence de $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$ sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ est un résultat essentiel pour l'étude de celle-ci, ne serait-ce que parce qu'il permet d'obtenir des théorèmes de finitude plus généraux, utilisant par exemple la cohérence des images directes par un morphisme propre.

Nous expliquons ici, en suivant la méthode présentée dans [**6**], comment les résultats qui précèdent permettent de prouver la cohérence sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ de $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$, et, plus généralement, des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules associés à une sous-variété localement fermée de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$.

4.4.1. On commence par construire (*cf.* [**5**, 4.2]) un système inductif de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-algèbres $\widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X}}(Z)$, p-adiquement séparées et complètes, munies d'une action de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$, qui soient des modèles entiers des algèbres affinoïdes de certains voisinages stricts du tube $\mathscr{U}_K$

de U dans $\mathscr{X}_K$, et telles que l'on ait un isomorphisme $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire

$$\varinjlim_m \widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X}}(Z)\otimes\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*\, j^{\dagger}\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}.$$

Pour cela, on part d'une situation algébrique « universelle ». Fixons un entier $m \in \mathbb{N}$, et soient $\mathbb{A} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}_{(p)}[t]$, $r \in \mathbb{N}$ un entier tel que $p^{m+1}|r$, T une indéterminée. On pose

$$\mathscr{B}(t,r) = \mathscr{O}_{\mathbb{A}}[T]/(t^rT - p).$$

L'algèbre $\mathscr{B}(t,r)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{O}_{\mathbb{A}}[1/t]\otimes\mathbb{Q}$, et on vérifie qu'elle est stable par l'action de $\mathscr{D}^{(m)}_{\mathbb{A}} \subset \mathscr{D}_{\mathbb{A}}\otimes\mathbb{Q}$ [**5**, 4.2.1].

Soient S un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma, X un S-schéma lisse, $f \in \Gamma(X,\mathscr{O}_X)$. La donnée de f définit un unique morphisme $\phi : X \to \mathbb{A}$ tel que $\phi^*(t) = f$. On a alors

$$\phi^*\mathscr{B}(t,r) = \mathscr{O}_X[T]/(f^rT - p),$$

et, d'après 2.2.1, l'algèbre $\mathscr{B}(f,r) := \phi^*\mathscr{B}(t,r)$ est munie d'une structure canonique de $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module. On vérifie que cette structure est compatible à la multiplication sur $\mathscr{B}(f,r)$, *i.e.* donne naissance à des formules du type de la formule de Leibnitz pour décrire l'action des opérateurs $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}$ sur un produit de deux éléments (voir [**5**, 2.3.4]).

Supposons que S soit muni d'un m-PD-idéal quasi-cohérent $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\alpha)$, m-PD-nilpotent. Soient $S_0 \subset S$ le sous-schéma fermé défini par $\mathfrak{a}$, X_0 la réduction de X modulo $\mathfrak{a}$, $Z \subset X_0$ un diviseur. Grâce à l'action de $\mathscr{D}^{(m)}_X$ sur $\mathscr{B}(f,r)$, on peut identifier canoniquement les algèbres $\mathscr{B}(f,r)$ et $\mathscr{B}(g,r)$ associées à des sections de $\mathscr{O}_X$ relevant deux équations locales de Z dans X_0 [**5**, 4.2.2]. Par recollement, on associe ainsi canoniquement au diviseur Z une $\mathscr{O}_X$-algèbre $\mathscr{B}_X(Z,r)$ munie d'une action de $\mathscr{D}^{(m)}_X$ compatible avec sa structure d'algèbre. Nous noterons $\mathscr{B}^{(m)}_X(Z)$ l'algèbre $\mathscr{B}_X(Z,p^{m+1})$. Il résulte de cette construction que, si $g : X' \to X$ est un morphisme de S-schémas lisses, tel que l'image inverse Z' de Z dans X'_0 soit un diviseur, il existe un isomorphisme canonique de $\mathscr{O}_{X'}$-algèbres $g^*\mathscr{B}_X(Z,r) \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}_{X'}(Z',r)$, compatible à l'action de $\mathscr{D}^{(m)}_{X'}$.

Soient maintenant $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse, X_i sa réduction modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$. La donnée du diviseur $Z \subset X_0$ permet de construire, pour tout m assez grand pour que $\mathfrak{m}$ soit muni d'une m-PD-structure m-PD-nilpotente, et tout r tel que $p^{m+1}|r$, une $\mathscr{O}_{X_i}$-algèbre $\mathscr{B}_{X_i}(Z,r)$ munie d'une action de $\mathscr{D}^{(m)}_{X_i}$. En passant à la limite projective pour i variable, on obtient donc une $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-algèbre

$$\widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}(Z,r) := \varprojlim_i \mathscr{B}_{X_i}(Z,r)$$

munie d'une action de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$. Si $\mathscr{X}$ est affine, posons $A = \Gamma(\mathscr{X},\mathscr{O}_{\mathscr{X}})$, $B = \Gamma(\mathscr{X},\widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}(Z,r))$, et supposons que $f \in A$ relève une équation de Z dans X_0. On a alors

$$B = A\{T\}/(f^rT - p),$$

et $B\otimes\mathbb{Q}$ est l'algèbre de l'ouvert affinoïde de $\mathscr{X}_K$ défini par la condition $|f(x)|\geqslant|p|^{1/r}$, qui est un voisinage strict de $\mathscr{U}_K$, lui-même défini par la condition $|f(x)|=1$.

Pour tout m assez grand, nous poserons

$$\widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X}}(Z):=\widehat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}(Z,p^{m+1}),\ \widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z):=\widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X}}(Z)\otimes\mathbb{Q},\ \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^\dagger Z):=\varinjlim_m\widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(Z).$$

D'après sa construction, le faisceau $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^\dagger Z)$ est muni d'une action naturelle de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, et il s'identifie canoniquement à $\mathrm{sp}_*\,j^\dagger\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$. Il sera appelé *faisceau des fonctions à singularités surconvergentes le long de Z*. Il ne dépend que du support du diviseur Z. Lorsque $\mathscr{X}$ est affine, et f comme plus haut, ses sections sur $\mathscr{X}$ s'interprètent aussi comme le complété faible de $\Gamma(\mathscr{X},\mathscr{O}_{\mathscr{X}})[1/f]$ au sens de Monsky-Washnitzer [**44**], tensorisé par $\mathbb{Q}$.

Pour prouver la cohérence de ce faisceau sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, on traite d'abord le cas d'un diviseur à croisements normaux stricts :

4.4.2. Lemme **([3,** 4.3.2**])**. — *Si Z est un diviseur à croisements normaux stricts, le faisceau $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^\dagger Z)$ est cohérent sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$.*

Pour le voir, on peut supposer que $\mathscr{X}$ possède un système de coordonnées locales $t_1,\dots,t_d$ tel que Z soit défini modulo $\mathfrak{m}$ par l'équation $t_1\cdots t_r$, $1\leqslant r\leqslant d$, et on montre alors par un calcul explicite que $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^\dagger Z)$ possède la présentation

$$(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})^d\xrightarrow{\psi}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}\xrightarrow{\phi}\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^\dagger Z)\longrightarrow 0,$$

avec $\phi(P)=P\cdot(1/t_1\cdots t_r)$, et

$$\psi(P_1,\dots,P_d)=\sum_{i=1}^r P_i\partial_i t_i+\sum_{i=r+1}^d P_i\partial_i.$$

4.4.3. Nous aurons à travailler avec une généralisation des faisceaux d'opérateurs différentiels considérés jusqu'ici, obtenue en considérant non seulement des opérateurs à coefficients dans le faisceau structural $\mathscr{O}_X$ (ou $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$), mais plus généralement dans un faisceau d'algèbres muni d'une opération des faisceaux précédents.

Soient m un entier, S un schéma (au-dessus de $\mathbb{Z}_{(p)}$ si $m\geqslant 1$), X un S-schéma lisse, $\mathscr{B}$ une $\mathscr{O}_X$-algèbre munie d'une action de $\mathscr{D}^{(m)}_X$ compatible à sa structure d'algèbre. On peut alors munir le faisceau $\mathscr{B}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{D}^{(m)}_X$ d'une structure naturelle de faisceau d'anneaux, telle que les homomorphismes naturels $\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{B}\otimes\mathscr{D}^{(m)}_X$ et $\mathscr{D}^{(m)}_X\longrightarrow\mathscr{B}\otimes\mathscr{D}^{(m)}_X$ soient des homomorphismes d'anneaux, et que les produits $(1\otimes\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle})(b\otimes 1)$ soient donnés par la formule de Leibnitz [**5**, 2.3.5]. Lorsque $\mathscr{X}$ est un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse, on obtient ainsi pour tout diviseur $Z\subset X_0$ des faisceaux

d'anneaux

$$\widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X}}(Z)\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}} := \varprojlim_i \big(\mathscr{B}^{(m)}_{X_i}(Z)\otimes_{\mathscr{O}_{X_i}}\mathscr{D}^{(m)}_{X_i}\big),$$
$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z) := \varinjlim_m \big(\widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X}}(Z)\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}\big)_{\mathbb{Q}}.$$

Le faisceau $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ sera appelé *faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini* (et d'ordre infini), *à singularités surconvergentes le long de Z*.

Les résultats des chapitres précédents s'étendent directement aux complexes sur des faisceaux d'anneaux de la forme $\mathscr{B}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{D}^{(m)}_X$, $\widehat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X}}(Z)\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}}}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}}$ ou $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$. Pour ne pas alourdir ce texte, nous ne les détaillerons pas ici, et nous les utiliserons librement dans la suite quand cela sera nécessaire (pour des énoncés en forme, le lecteur pourra consulter [**5**], [**8**], [**10**], [**49**], [**52**]...). Il convient seulement de prendre garde que ces anneaux ne sont plus nécessairement de dimension homologique finie, de sorte qu'il y a lieu de travailler systématiquement avec les catégories dérivées de complexes parfaits D_{parf}, plutôt qu'avec les catégories dérivées de complexes bornés à cohomologie cohérente $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}$. Signalons également que le faisceau $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ est plat sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ [**5**, 4.3.1.1].

4.4.4. Un autre outil de la démonstration est la cohomologie locale à support strict dans un sous-schéma fermé de la fibre spéciale.

Soient m un entier, S un schéma sur lequel p est nilpotent, muni d'un m-PD-idéal quasi-cohérent $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\alpha)$, supposé m-PD-nilpotent, S_0 le sous-schéma fermé de S défini par $\mathfrak{a}$, X un S-schéma lisse, Z un sous-schéma fermé de X, défini par un idéal $\mathscr{I}\subset\mathscr{O}_X$. On note $\mathscr{P}^n_{(m),\alpha}(\mathscr{I})$ l'enveloppe à puissances divisées de niveau m et d'ordre n de $\mathscr{I}$, compatible à α (au sens de [**5**, 1.4.2]). L'enveloppe $\mathscr{P}_{(m),\alpha}(\mathscr{I})$ possède une structure canonique de $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module, telle que, pour tous $n,n'\in\mathbb{N}$, tout $P\in\mathscr{D}^{(m)}_{X,n}$ et tout $x\in\overline{\mathscr{I}}^{\{n'\}}$, on ait $Px\in\overline{\mathscr{I}}^{\{n'-n\}}$. Il en résulte que, pour tout $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module $\mathscr{E}$, le faisceau

$$\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathscr{E}) := \varinjlim_n \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}\big(\mathscr{P}^n_{(m),\alpha}(\mathscr{I}),\mathscr{E}\big)$$

possède une structure canonique de $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module.

Les conditions de compatibilité à la m-PD-structure de $\mathfrak{a}$ et de nilpotence entraînent que $\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathscr{E})$ ne dépend que de la réduction de Z modulo $\mathfrak{a}$. Le foncteur dérivé $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z$ joue dans une certaine mesure le rôle de cohomologie locale à support dans Z, et nous noterons son n-ième faisceau de cohomologie $\mathscr{H}^{(m),n}_Z(\mathscr{E})$. Bien que le foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z$ ne vérifie pas en général les propriétés topologiques de la cohomologie à supports dans un fermé (il faut pour cela passer au niveau des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules comme nous le ferons plus loin), il se comporte à certains égards de manière analogue lorsque Z est lisse sur S_0 (ou sur S), et nous l'appellerons *cohomologie locale à support strict dans Z* (*de niveau m*). Ainsi, si r est la codimension de Z dans X, la description locale de la

structure des $\mathscr{P}^n_{(m)}(\mathscr{I})$ donnée en 1.1.4 entraîne alors que, pour tout $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module $\mathscr{E}$, les $\mathscr{H}^{(m),n}_Z(\mathscr{E})$ sont nuls pour $n \notin [0,r]$, et que le foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z$ est défini sur $D^-(\mathscr{D}^{(m)}_X)$, et commute aux changements de base $S' \to S$. Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{D}^{(m)}_X$-module plat, les $\mathscr{H}^{(m),n}_Z(\mathscr{E})$ sont nuls pour $n \neq r$, et leur formation commute donc aussi aux changements de base. Enfin, le foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z$ est alors relié comme en caractéristique nulle [**17**, VI 7.13] au composé de l'image inverse extraordinaire et de l'image directe :

***4.4.5. Proposition* ([6, 1.4])**. — *Soit $u : Z \hookrightarrow X$ une immersion fermée entre deux S-schémas lisses. Pour tout $\mathscr{E} \in D^-(\mathscr{D}^{(m)}_X)$, il existe un isomorphisme canonique*

$$u_{+(m)}u^{!(m)}\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathscr{E}). \tag{4.4.5.1}$$

Supposons maintenant que $\mathscr{X}$ soit un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse, Z un sous-schéma fermé de X_0, et reprenons les notations des sections précédentes. Soit m assez grand pour que $\mathfrak{m}$ possède une m-PD-structure m-PD-nilpotente. On peut définir le foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z$ sur la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ en posant

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathscr{E}) := \mathbb{R}\underset{\leftarrow}{l}_{X\,*}\,\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathbb{L}\underset{\leftarrow}{l}^{\,*}_X\mathscr{E}),$$

où, dans le terme de droite, $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z$ est pris dans la catégorie des systèmes projectifs. On étend ensuite ce foncteur aux systèmes inductifs pour m variable, et on obtient par passage aux catégories localisées un foncteur

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_Z : \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}) \longrightarrow \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}}),$$

que nous appellerons *cohomologie locale à support strict dans Z (surconvergente)*. L'énoncé précédent s'étend alors aux catégories $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $\underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$). En particulier, lorsque $\mathscr{E} \in \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ est tel que $u^{!(m)}\mathscr{E}$ appartienne à $\underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, on obtient ainsi dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ un isomorphisme

$$u_+u^!\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_Z(\mathscr{E}) \tag{4.4.5.2}$$

analogue à (4.4.5.1).

On peut alors utiliser ce résultat pour $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, afin de définir sur $\mathscr{H}^{\dagger,r}_Z(\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) := \mathscr{H}^r\big(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_Z(\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})\big)$ un isomorphisme d'autodualité :

***4.4.6. Lemme* ([6, 2.1])**. — *Soient $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse, $Z \subset X_0$ un sous-schéma fermé lisse sur k de sa fibre spéciale, de codimension r dans X_0. Il existe alors un isomorphisme canonique*

$$\mathbb{D}\big(\mathscr{H}^{\dagger,r}_Z(\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})\big) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^{\dagger,r}_Z(\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}). \tag{4.4.6.1}$$

Indiquons maintenant les grandes lignes de la démonstration du théorème de cohérence :

***4.4.7. Théorème* ([6], [10])**. — *Soient $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel lisse de fibre spéciale X_0, $Z \subset X_0$ un diviseur. Le faisceau $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^\dagger Z)$ des fonctions sur $\mathscr{X}$ à singularités surconvergentes le long de Z est cohérent sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$.*

On peut supposer $\mathscr{X}$ affine et connexe. Grâce au théorème de de Jong sur les altérations de variétés algébriques [**33**], il existe un k-schéma lisse X' et un morphisme $f : X' \to X$ projectif, génériquement fini et étale, tel que $Z' = f^{-1}(Z)$ soit un diviseur à croisements normaux stricts dans X'. On choisit une immersion fermée $u : X' \hookrightarrow Y = \mathbb{P}^r_X$ de X' dans un espace projectif de base X, et on note $\mathscr{Y}$ l'espace projectif formel $\mathbb{P}^r_{\mathscr{X}}$ de base $\mathscr{X}$, $g : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ la projection, $T = g^{-1}(Z)$ l'image inverse de Z dans Y.

On pose $\mathscr{E} = \mathscr{H}^{\dagger,r}_{X'}(\mathscr{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$, $\mathscr{H} = \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}(^\dagger T) \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}$, qui peut être vu comme un complexe de $D_{\mathrm{parf}}\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}(^\dagger T)\big)$. On vérifie d'abord que $\mathscr{H}$ est cohérent sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}$. C'est une question locale sur $\mathscr{Y}$, ce qui permet de supposer u relevé en l'immersion d'un sous-schéma formel lisse $u : \mathscr{X}' \hookrightarrow \mathscr{Y}$. On construit alors un isomorphisme $\mathscr{H} \simeq u_+\big(\mathscr{O}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}, (^\dagger Z')\big)$, de sorte que l'affirmation résulte du lemme 4.4.2 et du théorème de finitude 4.3.8 dans le cas d'une immersion fermée.

Le théorème de finitude 4.3.8 entraîne alors que $g_+(\mathscr{H})$ appartient à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Pour prouver l'énoncé, il suffit donc de montrer que $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}, (^\dagger Z)$ est isomorphe à un facteur direct de $g_+(\mathscr{H})$. Pour cela, on observe que, pour tout i et tout m, on a par construction $g^*\mathscr{B}^{(m)}_{X_i}(Z) \simeq \mathscr{B}^{(m)}_{Y_i}(T)$. Il en résulte que les résultats des sections précédentes s'appliquent aussi au morphisme $\widetilde{g} : \big(\mathscr{Y}, \mathscr{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}(^\dagger T)\big) \to \big(\mathscr{X}, \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^\dagger Z)\big)$. Le foncteur image directe $\widetilde{g}_+$ correspondant envoie $D_{\mathrm{parf}}\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}(^\dagger T)\big)$ dans $D_{\mathrm{parf}}\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^\dagger Z)\big)$, et on dispose d'un morphisme canonique $\widetilde{g}_+\mathscr{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}(^\dagger T)[r] \to \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^\dagger Z)$, déduit du morphisme trace par passage de droite à gauche. Par construction, les foncteurs $R\underline{\Gamma}^{(m)}_{X'}$ sont munis d'un morphisme canonique $R\underline{\Gamma}^{(m)}_{X'} \to \mathrm{Id}$, qui définit par passage à la limite un morphisme $\mathscr{E} \to \mathscr{O}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}[r]$. En tensorisant par $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}(^\dagger T)$ et en appliquant $\widetilde{g}_+$, on en déduit un morphisme

$$\tau : \widetilde{g}_+\mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^\dagger Z)$$

dans $D_{\mathrm{parf}}\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^\dagger Z)\big)$. En prenant le dual sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^\dagger Z)$, et en utilisant le lemme 4.4.6, on obtient un morphisme en sens inverse

$$\tau' : \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^\dagger Z) \longrightarrow \widetilde{g}_+\mathscr{H}.$$

On montre alors que le composé $\tau' \circ \tau$ est égal à la multiplication par le degré générique de X' sur X, et on achève la démonstration en vérifiant que, par restriction des scalaires de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^\dagger Z)$ à $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, le complexe $\widetilde{g}_+\mathscr{H}$ s'identifie à $g_+\mathscr{H}$.

4.4.8. Soient maintenant $Z \subset X_0$ une sous-variété localement fermée quelconque, $\overline{Z}$ son adhérence, $T = \overline{Z} \smallsetminus Z$, $U = X_0 \smallsetminus T$, j l'inclusion de U dans X_0. Sur la fibre générique $\mathscr{X}_K$ de $\mathscr{X}$, on dispose du foncteur $j^\dagger$ des germes de sections surconvergentes

au voisinage du tube $\mathscr{U}_K$ de U, et du foncteur $\underline{\Gamma}^{\dagger}_{]\overline{Z}[}$ des sections à support strictement contenu dans le tube de $\overline{Z}$. Soit $E = j^{\dagger}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{]\overline{Z}[}\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$. Lorsque $\mathscr{X}$ est propre sur $\mathscr{V}$, la cohomologie de de Rham de $\mathscr{X}_K$ à coefficients dans E est par construction la cohomologie rigide de U à supports dans Z, de sorte que, pour la cohomologie rigide, le faisceau E joue le rôle du complexe $\mathbb{R}j_*\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z(\underline{\mathbb{C}}_U)$ dans le cas complexe (en notant $\underline{\mathbb{C}}_U$ le faisceau constant de valeur $\mathbb{C}$ sur U). Cette cohomologie de de Rham s'identifie d'autre part à la cohomologie de de Rham de $\mathscr{X}$ à coefficients dans le complexe $\mathscr{E} = \mathbb{R}\,\mathrm{sp}_*\,E$.

Le complexe $\mathscr{E}$ possède une structure naturelle de complexe de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules (définie par la méthode de [**3**, 4.1]). Par un dévissage basé sur les suites exactes de Čech de [**7**, 1.2], on voit que le théorème précédent implique :

4.4.9. Corollaire. — *Avec les notations précédentes, le complexe* $\mathbb{R}\,\mathrm{sp}_*\,j^{\dagger}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{]\overline{Z}[}\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$ *appartient à* $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ *pour toute sous-variété localement fermée* $Z \subset X_0$.

4.5. Transformation de Fourier. — Les faisceaux $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$ construits en 4.4.1 jouent un rôle important dans l'étude des variétés ouvertes. En effet, comme on l'a vu dans la remarque de 2.4.5, le foncteur image directe usuel j_+ associé à une immersion ouverte ne se comporte pas de manière satisfaisante modulo p^n, et il en est de même sur les schémas formels. Pour cette raison, nous procéderons comme en cohomologie rigide, et nous étudierons les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules associés à une variété quelconque au moyen de compactifications de celle-ci. Le cas le plus simple est celui où $\mathscr{X}$ est un schéma formel propre et lisse sur $\mathscr{V}$, et Z est comme précédemment un diviseur de sa fibre spéciale. En notant encore $j : \mathscr{U} \hookrightarrow \mathscr{X}$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire, le faisceau $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$ joue le rôle d'une « image directe surconvergente » de $\mathscr{O}_{\mathscr{U},\mathbb{Q}}$. En ayant à l'esprit le cas algébrique, où j_* induit une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{O}_U$-modules quasi-cohérents et celle des $j_*\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents, on est amené à remplacer la catégorie des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{U},\mathbb{Q}}$-modules cohérents par celle des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$-modules cohérents, et le foncteur j_* (resp. j^*) par la restriction des scalaires de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$ à $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ (resp. l'extension des scalaires de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ à $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$).

Nous expliquons ici comment cette philosophie peut être mise en œuvre pour développer la transformation de Fourier pour les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, grâce aux résultats de Huyghe (voir [**28**], [**29**], [**30**], [**31**]). Énonçons d'abord un théorème général de Huyghe, qui montre que, lorsque Z est un diviseur ample dans un schéma projectif, les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$-modules cohérents se comportent bien du point de vue cohomologique comme des faisceaux cohérents sur un schéma affine ; on peut voir ce théorème comme un analogue des théorèmes A et B, avec surconvergence à l'infini :

4.5.1. Théorème **([31**, 5.3.3]**)**. — *Soient* $\mathscr{X}$ *un* $\mathscr{V}$*-schéma formel projectif et lisse,* $Z \subset X$ *un diviseur ample de sa fibre spéciale, et posons* $D^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z) = \Gamma\big(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)\big)$. *Alors :*

(i) *L'anneau* $D^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ *est cohérent, et le foncteur* $\Gamma(\mathscr{X},-)$ *induit une équivalence de catégories entre la catégorie des* $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$*-modules cohérents et celle des* $D^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$*-modules cohérents.*

(ii) *Pour tout* $n \geqslant 1$*, et tout* $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$*-module cohérent* $\mathscr{E}$*, on a* $H^n(\mathscr{X},\mathscr{E}) = 0$*.*

Huyghe établit en outre un théorème d'invariance qui montre que la catégorie des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$-modules cohérents ne dépend pas de la compactification lisse $\mathscr{X}$ de $\mathscr{U}$:

***4.5.2. Théorème* ([31, 7.3.3])**. — *Soient* $f : \mathscr{X}' \to \mathscr{X}$ *un morphisme propre de* $\mathscr{V}$*-schémas formels lisses,* $Z \subset X$*,* $Z' \subset X'$ *deux diviseurs des fibres spéciales de* $\mathscr{X}$ *et* $\mathscr{X}'$*,* $\mathscr{U} = \mathscr{X} \smallsetminus Z$*,* $\mathscr{U}' = \mathscr{X}' \smallsetminus Z'$*. On suppose que* f *induit un isomorphisme* $\mathscr{U}' = f^{-1}(\mathscr{U}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{U}$*. Alors les foncteurs* $f^!$ *et* f_+ *induisent des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie des* $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$*-modules cohérents, et celle des* $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z')$*-modules cohérents.*

Soient maintenant N un entier, $\mathscr{X}$ l'espace projectif formel de dimension N sur $\mathscr{V}$, Z l'hyperplan à l'infini de X, et $\mathscr{U} = \mathscr{X} \smallsetminus Z$ l'espace affine formel de dimension N sur $\mathscr{V}$. Nous noterons simplement $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty), \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)$ les faisceaux $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z), \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$. Soient $t_1,\dots,t_N$ les coordonnées canoniques sur l'espace affine, $\partial_1,\dots,\partial_N$ les dérivations correspondantes. La K-algèbre des sections globales de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)$ s'identifie alors à la « complétée faible » de l'algèbre de Weyl :

***4.5.3. Proposition* ([28], [29])**. — *Il existe un isomorphisme canonique de* K*-algèbres*

$$\Gamma\big(\mathscr{X},\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)\big) \xrightarrow{\sim} A_N(K)^{\dagger}, \tag{4.5.3.1}$$

où $A_N(K)^{\dagger}$ *est la* K*-algèbre d'opérateurs différentiels définie par*

$$A_N(K)^{\dagger} := \big\{ \textstyle\sum_{\underline{i},\underline{k}} a_{\underline{i},\underline{k}} \underline{t}^{\underline{i}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]},\ a_{\underline{i},\underline{k}} \in K \mid \exists\, c,\eta < 1 \text{ tels que } \forall\, \underline{i},\underline{k},\ |a_{\underline{i},\underline{k}}| \leqslant c\eta^{|\underline{i}|+|\underline{k}|} \big\}.$$

4.5.4. Supposons maintenant que K contienne un élément π tel que

$$\pi^{p-1} = -p,$$

et fixons un tel élément. On vérifie aisément qu'il existe un unique automorphisme ϕ de la K-algèbre $A_N(K)^{\dagger}$ telle que

$$\phi(\partial_i) = \pi t_i, \qquad \phi(t_i) = -\partial_i/\pi.$$

Pour tout $A_N(K)^{\dagger}$-module E, on obtient donc en faisant agir $A_N(K)^{\dagger}$ sur E par l'intermédiaire de ϕ un nouvel $A_N(K)^{\dagger}$-module, que nous noterons $\phi_* E$, π étant ici fixé une fois pour toutes. Le foncteur qui à E associe $\phi_* E$ est la *transformation de Fourier naïve (définie par* π*).*

Soient $\mathscr{E}$ un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent, et $E = \Gamma(\mathscr{X},\mathscr{E})$. D'après 4.5.3, E est muni d'une structure canonique de $A_N(K)^{\dagger}$-module, pour laquelle il est cohérent d'après 4.5.1. Comme le $A_N(K)^{\dagger}$-module $\phi_* E$ est encore cohérent, il existe, grâce au théorème 4.5.1, un unique $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent $\mathscr{E}^{\phi}$ tel que $\Gamma(\mathscr{X},\mathscr{E}^{\phi}) = \phi_* E$.

Le problème de la *transformation de Fourier géométrique* est de donner une interprétation du foncteur $\mathscr{E} \mapsto \mathscr{E}^{\phi}$ au moyen des opérations cohomologiques de la théorie des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules, de manière analogue à la transformation de Fourier géométrique de Malgrange en caractéristique 0 [**41**], ou à la transformation de Fourier ℓ-adique de Deligne-Katz-Laumon [**35**].

4.5.5. Précisons d'abord comment la donnée de π détermine le noyau $\mathscr{N}_{\pi}$ de la transformation de Fourier géométrique. Soit $\mathscr{P}^1$ (resp. $\mathscr{A}^1$) l'espace projectif (resp. affine) formel de dimension 1 sur $\mathscr{V}$. On note $\mathscr{L}_{\pi} = \mathrm{sp}_* L_{\pi}$ le $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{P}^1,\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent défini par le F-isocristal de Dwork L_{π} associé à π : rappelons que le $\mathscr{O}_{\mathscr{P}^1,\mathbb{Q}}(\infty)$-module sous-jacent à $\mathscr{L}_{\pi}$ est $\mathscr{O}_{\mathscr{P}^1,\mathbb{Q}}(\infty)$, et qu'il est muni de l'unique structure de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-module compatible à celle de $\mathscr{O}_{\mathscr{P}^1,\mathbb{Q}}(\infty)$ pour laquelle $\partial \cdot 1 = -\pi$ (*cf.* [**3**]).

Soit $\mathscr{X}'$ (resp. $\mathscr{U}'$) l'espace projectif (resp. affine) dual, et soit $\mu : \mathscr{U} \times \mathscr{U}' \to \mathscr{A}^1 \subset \mathscr{P}^1$ l'accouplement de dualité. D'après [**28**, 4.1], il existe un schéma formel lisse $\mathscr{Y}$, et un morphisme projectif $f : \mathscr{Y} \to \mathscr{X} \times \mathscr{X}'$, tels que, si l'on note $\mathscr{W} = f^{-1}(\mathscr{U} \times \mathscr{U}')$, le morphisme $\mathscr{W} \to \mathscr{U} \times \mathscr{U}'$ soit un isomorphisme, et que le morphisme composé $\mu \circ f$ se prolonge en un morphisme $\lambda : \mathscr{Y} \to \mathscr{P}^1$. Soit $T = f^{-1}(\infty) \subset Y$. Suivant Katz-Laumon [**35**], on convient de considérer $\mathscr{L}_{\pi}$ comme un complexe réduit à un seul module, placé en degré 1. Si l'on applique le foncteur

$$\lambda^! : D^-_{\mathrm{coh}}\big(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{P}^1,\mathbb{Q}}(\infty)\big) \longrightarrow D^-\big(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)\big)$$

à $\mathscr{L}_{\pi}[-1]$, on vérifie, grâce au fait que $\mathscr{L}_{\pi}$ est défini par un isocristal surconvergent, que $\lambda^!\big(\mathscr{L}_{\pi}[-1]\big)$ se réduit à un seul $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)$-module cohérent, placé en degré $2-2N$. Utilisant l'équivalence du théorème 4.5.2, on l'identifie via f_+ à un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent, placé en degré $2-2N$; nous poserons $\mathscr{N}_{\pi} := f_+\lambda^!\big(\mathscr{L}_{\pi}[-1]\big)$.

Soient p_1, p_2 les projections de $\mathscr{X} \times \mathscr{X}'$ sur $\mathscr{X}$ et $\mathscr{X}'$. La transformation de Fourier géométrique associe alors à un complexe $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}\big(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)\big)$ le complexe

$$\phi_*\mathscr{E} := p_{2+}\big(\mathscr{N}_{\pi} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(\infty)} p_1^!\mathscr{E}[-2N]\big).$$

En explicitant le calcul de ces foncteurs, Huyghe prouve qu'on obtient ainsi une transformation associant à tout $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent (au décalage près), et établit la relation avec la transformation de Fourier naïve sur les sections globales :

***4.5.6. Théorème* ([28], [30])**. — *Avec les notations précédentes, soit $\mathscr{E}$ un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent. Alors :*

(i) *Le complexe $\phi_*\mathscr{E}$ est réduit à un seul $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$-module, cohérent et placé en degré $N-2$.*

(ii) *Il existe un isomorphisme canonique de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$-modules*

$$\Gamma\big(\mathscr{X}', \phi_*\mathscr{E}[2-N]\big) \xrightarrow{\sim} \phi_*\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{E}).$$

Le transformé $\mathscr{E}^{\phi}$ construit en 4.5.4 s'identifie donc au module $\phi_*\mathscr{E}[2-N]$.

4.5.7. Il existe aussi une transformation de Fourier à supports compacts. Pour la définir, on munit $\mathscr{X} \times \mathscr{X}'$ du diviseur $Z' = p_2^{-1}(\infty)$, et on note ρ_* le foncteur de restriction des scalaires de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$ à $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger Z')$. Huyghe montre alors [**28**] que, pour tout $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent $\mathscr{E}$, le complexe $\rho_*\mathbb{D}(\mathscr{N}_\pi \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(\infty)} p_1^!\mathscr{E})$, où le dual $\mathbb{D}$ est pris par rapport à $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$, est à cohomologie cohérente sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger Z')$. On peut alors prendre son dual $\mathbb{D}'$ par rapport à $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger Z')$. Le foncteur $\mathbb{D}'\rho_*\mathbb{D}$ joue ici le rôle d'image directe à supports compacts pour l'immersion ouverte $\mathscr{U}\times\mathscr{U}' \hookrightarrow \mathscr{X}\times\mathscr{U}'$. On définit donc la transformation de Fourier à supports compacts en posant, pour $\mathscr{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)\big)$

$$\phi_!\mathscr{E} := p'_{2+}\Big(\mathbb{D}'\rho_*\mathbb{D}\big(\mathscr{N}_\pi \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(\infty)} p_1^!\mathscr{E}[-2N]\big)\Big),$$

où p'_{2+} est le foncteur image directe relatif aux faisceaux $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger Z')$ et $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$. En utilisant le théorème de dualité relative 4.3.13, on peut alors montrer, comme en caractéristique 0 ou en cohomologie ℓ-adique, l'égalité des transformations de Fourier avec ou sans conditions de supports :

***4.5.8. Théorème* ([28])**. — *Il existe sur* $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)\big)$ *un isomorphisme fonctoriel*

$$\phi_!\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \phi_*\mathscr{E}.$$

5. Variété caractéristique et holonomie

Comme en caractéristique nulle, la cohérence sur l'un quelconque des anneaux d'opérateurs différentiels étudiés ici n'est pas préservée en général par image inverse par une immersion fermée. Dans ce chapitre, nous introduisons, pour les $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents munis d'une action de Frobenius, une condition d'holonomie pour laquelle il paraît raisonnable de conjecturer la stabilité par image inverse par un morphisme quelconque. Cette condition, qui est de nature géométrique, repose sur la construction d'une variété caractéristique dans l'espace cotangent à la réduction de $\mathscr{X}$ modulo $\mathfrak{m}$. Nous montrons que cette variété caractéristique vérifie l'inégalité de Bernstein, et nous expliquons les résultats de Virrion [**52**] montrant que cette caractérisation géométrique de l'holonomie est équivalente à la caractérisation homologique usuelle au moyen du dual. Enfin, suivant la méthode de Laumon [**39**], nous montrons que la formule de Dubson-Kashiwara [**19**] exprimant la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome au moyen du cycle caractéristique reste valable pour les F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes.

5.1. F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents. — La notion de F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module introduite ici, *i.e.* de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module muni d'une action de Frobenius, généralise la notion de F-isocristal comme la notion usuelle de $\mathscr{D}_X$-module en caractéristique 0 généralise celle de fibré à connexion intégrable. La donnée d'une action de Frobenius impose des

conditions de finitude plus fortes que celles que vérifient les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents quelconques : nous verrons en particulier qu'un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent provient de manière canonique d'un $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent par extension des scalaires de $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ à $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. Mais ce qui rend la structure de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module essentielle pour la géométrie algébrique est surtout sa complète stabilité par toutes les opérations cohomologiques. Il en résulte que tout $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module « d'origine géométrique » peut être muni d'une structure de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module.

On suppose ici que k est un corps parfait de caractéristique p, et on se limite pour simplifier au cas où $\mathscr{V}$ est l'anneau $W = W(k)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans k (voir [**8**, 4.5.1] pour une définition plus générale). On note σ l'automorphisme de Frobenius de W, et $X = X_0$ la réduction de $\mathscr{X}$ modulo p.

5.1.1. Définition. — Soient $\mathscr{X}$ un $\mathscr{V}$-schéma formel, $F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ un relèvement σ-linéaire de l'endomorphisme de Frobenius absolu de X. Un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-*module* sur $\mathscr{X}$ est la donnée d'un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{E}$ et d'un isomorphisme $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $\Phi : \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E}$. Les morphismes de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules sont les morphismes $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaires commutant à l'action de Frobenius. De même, nous appellerons F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-*complexe* la donnée d'un complexe $\mathscr{E} \in D(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ (resp. $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$) et d'un isomorphisme $\Phi : \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E}$ dans $D(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ (resp. $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$). Les faisceaux de cohomologie d'un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexe sont naturellement des F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules.

Nous dirons qu'un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module $(\mathscr{E}, \Phi)$ est cohérent si $\mathscr{E}$ est cohérent en tant que $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module.

On peut définir plus généralement une notion analogue en remplaçant l'endomorphisme de Frobenius par sa puissance s-ième, pour un entier s fixé ; nous nous limiterons ici au cas $s = 1$.

Comme pour les isocristaux, le choix du relèvement F ne joue aucun rôle dans cette définition, et, par les arguments de recollement usuels (pour lesquels le lecteur pourra se reporter à [**8**]), il n'est en fait même pas nécessaire de supposer qu'il existe un tel relèvement globalement sur $\mathscr{X}$ pour donner un sens aux notions de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module et de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexe.

Exemples

(i) Le faisceau $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, muni de l'inverse de l'isomorphisme tautologique $F^*\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, est un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. En appliquant 5.1.2, on dispose de procédés systématiques de construction de F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules (éventuellement cohérents).

(ii) Soit $\mathrm{sp} : \mathscr{X}_K \to \mathscr{X}$ le morphisme de spécialisation. Alors sp_* établit une équivalence entre la catégorie des F-isocristaux convergents sur la fibre spéciale X de $\mathscr{X}$, et la catégorie des F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents qui sont $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-cohérents [**8**, 4.6.3].

(iii) Si $Z \subset X$ est un diviseur, si $U = X \smallsetminus Z$, et si E est un F-isocristal sur U surconvergent le long de Z, alors $\mathscr{E} = \mathrm{sp}_* E$ a une structure naturelle de F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module [**8**, 4.6.7]. On conjecture que $\mathscr{E}$ est alors cohérent sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ (et même holonome, voir 5.3.6 plus bas).

(iv) En particulier, les faisceaux $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^\dagger Z)$ étudiés en 4.4.7 sont de manière naturelle des F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents. De même, les complexes $\mathbb{R}\,\mathrm{sp}_*(j^\dagger \underline{\Gamma}^\dagger_{]\overline{Z}[}\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K})$ étudiés en 4.4.9 sont de manière naturelle des F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexes bornés à cohomologie cohérente.

5.1.2. D'après 4.3.4, 4.3.5, 4.3.9 et 4.3.10, les foncteurs F^* commutent aux quatre opérations de base de la théorie des $\mathscr{D}$-modules : $f^!, \boxtimes, f_+$ et $\mathbb{D}$ (auxquelles on pourrait du reste ajouter les foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z$ définis en 4.4.4). Il en résulte que ces foncteurs transforment F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathbb{Q}}$-complexes en F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathbb{Q}}$-complexes. Plus précisément, si $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est un morphisme de W-schémas formels lisses, on obtient :

(i) Si $\mathscr{F}$ est un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}$-complexe de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$), alors $f^!\mathscr{F}$ est un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexe de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ si f est lisse).

(ii) Soit $\mathscr{Z} = \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Si $\mathscr{E}$ est un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexe de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$, et $\mathscr{F}$ un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}$-complexe de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$), alors $\mathscr{E} \overset{\mathbb{L}\dagger}{\boxtimes}_W \mathscr{F}$ est un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}$-complexe de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Z}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}})$).

(iii) Si $\mathscr{E}$ est un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexe de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{X}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$), alors $f_+\mathscr{E}$ est un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexe de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathscr{D}}^{(\bullet)}_{\mathscr{Y}})$ (resp. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$ si f est propre).

(iv) Si $\mathscr{E}$ est un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexe de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, alors $\mathbb{D}(\mathscr{E})$ est un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexe de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$.

La première propriété fondamentale des F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents est l'existence d'un procédé de descente canonique d'un tel module sur le faisceau $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$:

***5.1.3. Théorème* ([8, 4.5.4])**. — *Avec les hypothèses précédentes, la catégorie des F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents $(\mathscr{E}, \Phi)$ est équivalente à la catégorie des couples $(\mathscr{E}^{(0)}, \Phi^{(1)})$ où $\mathscr{E}^{(0)}$ est un $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, et $\Phi^{(1)}$ un isomorphisme $\widehat{\mathscr{D}}^{(1)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire*

$$\Phi^{(1)} : \widehat{\mathscr{D}}^{(1)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(0)} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E}^{(0)}.$$

Décrivons le foncteur qui associe un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $(\mathscr{E}, \Phi)$ à la donnée de $(\mathscr{E}^{(0)}, \Phi^{(1)})$. On pose

$$\mathscr{E} := \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(0)},$$

et on définit Φ comme étant l'isomorphisme composé

$$\mathscr{E} = \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(0)} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(1)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} F^*\mathscr{E}^{(0)} \xrightarrow{\sim} F^*(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E}^{(0)}) = F^*\mathscr{E},$$

où le premier isomorphisme est déduit de $\Phi^{(1)}$ par extension des scalaires de $\widehat{\mathscr{D}}^{(1)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ à $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, et le second provient des isomorphismes (3.4.1.2) par passage à la limite inductive.

Inversement, le raisonnement standard pour les modules de présentation finie permet de redescendre $\mathscr{E}$ en un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent pour m assez grand, et de même pour Φ. Pour passer de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ à $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, on utilise alors le théorème de descente par Frobenius de 3.1.4 et les isomorphismes (3.4.1.2).

Remarques

(i) Pour $p = 2$, l'idéal pW n'est pas PD-nilpotent, et on ne dispose pas des techniques de recollement permettant de définir globalement le foncteur F^* sur la catégorie des $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules. Dans ce cas, il faut donc supposer F donné sur $\mathscr{X}$ pour pouvoir conclure comme dans l'énoncé, ou se contenter de redescendre sur un anneau $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ pour $m \geqslant 1$.

(ii) Il résulte du théorème que la catégorie des F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents est noethérienne (bien que $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ ne soit pas noethérien).

5.2. Variété caractéristique. — Soient $\mathscr{X}$ un W-schéma formel lisse, X sa réduction modulo p. Nous expliquons ici comment associer à tout F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathscr{E}$ une sous-variété réduite de l'espace cotangent T^*X, analogue à la variété caractéristique d'un $\mathscr{D}_X$-module cohérent lorsque X est une variété lisse sur $\mathbb{C}$.

Comme en caractéristique 0 (voir [**13**], [**36**]), cette construction repose sur la notion de bonne filtration (pour la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels). Toutefois, cette notion n'est pas disponible directement pour les modules sur des faisceaux tels que $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ ou $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, qui sont des faisceaux d'opérateurs d'ordre infini et n'ont donc pas de filtration par l'ordre. C'est pourquoi nous procèderons en plusieurs étapes : descente de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ à $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, passage par un modèle entier sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}$, réduction au cas des $\mathscr{D}^{(0)}_{X_i}$-modules cohérents, pour lesquels on dispose de la notion de bonne filtration.

5.2.1. Pour tout m, nous noterons $X^{(m)}$ le k-schéma déduit de X par changement de base par la puissance m-ième de l'automorphisme de Frobenius de k, et $F^m : X \to X^{(m)}$ le morphisme de Frobenius relatif correspondant.

Pour tout m, le faisceau $\mathscr{D}^{(m)}_X$ est muni de la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels, et le gradué associé $\operatorname{gr}\mathscr{D}^{(m)}_X$ est une $\mathscr{O}_X$-algèbre commutative, quasi-cohérente. Nous noterons $T^{(m)*}X$, et nous appellerons *espace cotangent de niveau m* de X, le schéma réduit

$$T^{(m)*}X := (\operatorname{Spec}\operatorname{gr}\mathscr{D}^{(m)}_X)_{\mathrm{red}}.$$

Soit $\mathscr{T}_X$ le faisceau des dérivations sur X. Lorsque $m = 0$, l'isomorphisme $\mathscr{T}_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_1 \mathscr{D}_X^{(0)}$ s'étend comme en caractéristique 0 en un isomorphisme

$$\mathbb{S}(\mathscr{T}_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}\, \mathscr{D}_X^{(0)},$$

de sorte que $T^{(0)*}X$ est le fibré cotangent usuel T^*X. Le lemme suivant donne une interprétation analogue pour $m \geqslant 1$:

***5.2.2. Lemme* ([11])**. — *Pour tout m, il existe un isomorphisme canonique*

$$T^{(m)*}X \xrightarrow{\sim} X \times_{X^{(m)}} T^*X^{(m)}.$$

Comme $T^*X^{(m)}$ est lui-même déduit de T^*X par changement de base par le morphisme de projection $X^{(m)} \to X$, on peut aussi identifier $T^{(m)*}X$ à l'image inverse de T^*X par l'endomorphisme de Frobenius absolu de X. En particulier, on dispose ainsi d'un homéomorphisme

$$|T^{(m)*}X| \xrightarrow{\sim} |T^*X| \tag{5.2.2.1}$$

qui nous permettra d'identifier les parties fermées de $T^{(m)*}X$ et T^*X.

5.2.3. Soient $m \in \mathbb{N}$, S un schéma noethérien (au-dessus de $\mathbb{Z}_{(p)}$ si $m \geqslant 1$), et X un S-schéma lisse. Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module cohérent, une *bonne filtration* sur $\mathscr{E}$ est une filtration croissante par des sous-$\mathscr{O}_X$-modules en vérifiant les conditions suivantes :

a) $\mathscr{E} = \cup_n \mathscr{E}_n$, et il existe n_0 tel que $\mathscr{E}_n = 0$ pour $n < n_0$;

b) Quels que soient n, k, $\mathscr{D}_{X,k}^{(m)} \mathscr{E}_n \subset \mathscr{E}_{n+k}$;

c) Il existe un entier n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, on ait

$$\mathscr{E}_n = \sum_{j=0}^{p^m-1} \mathscr{D}_{X,n-n_1+j}^{(m)} \mathscr{E}_{n_1-j}; \tag{5.2.3.1}$$

d) Chacun des $\mathscr{E}_n$ est cohérent sur $\mathscr{O}_X$.

On remarquera que la condition c) est la condition usuelle lorsque $m = 0$. Lorsque $m \geqslant 1$, $\mathrm{gr}\, \mathscr{D}_X^{(m)}$ n'est pas engendré par ses éléments de degré 1, et on est amené à modifier celle-ci comme en (5.2.3.1) pour assurer que la filtration par l'ordre sur $\mathscr{D}_X^{(m)}$ ait les propriétés voulues.

Comme $\mathrm{gr}\, \mathscr{D}_X^{(m)}$ est un anneau gradué noethérien, les propriétés usuelles des bonnes filtrations restent valables (voir [**16**], [**17**], [**36**], [**40**], [**42**]...). En particulier :

(i) Si $(\mathscr{E}_n), (\mathscr{E}'_n)$ sont deux bonnes filtrations sur $\mathscr{E}$, il existe des entiers k_1 et k_2 tels que

$$\mathscr{E}_{n-k_1} \subset \mathscr{E}'_n \subset \mathscr{E}_{n+k_2}$$

pour tout n.

(ii) Une filtration vérifiant a) et b) est bonne si et seulement si $\mathrm{gr}\, \mathscr{E}$ est un $\mathrm{gr}\, \mathscr{D}_X^{(m)}$-module cohérent.

(iii) Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module cohérent, $(\mathscr{E}_n)$ une bonne filtration sur $\mathscr{E}$, et $\mathscr{E}' \subset \mathscr{E}$ un sous-$\mathscr{D}_X^{(m)}$-module cohérent, la filtration induite $(\mathscr{E}' \cap \mathscr{E}_n)$ sur $\mathscr{E}'$, et la filtration image $\big(\mathscr{E}_n/(\mathscr{E}' \cap \mathscr{E}_n)\big)$ sur $\mathscr{E}/\mathscr{E}'$, sont des bonnes filtrations.

(iv) Tout $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module cohérent $\mathscr{E}$ possède une bonne filtration, car $\mathscr{E}$ peut s'écrire globalement sur X comme quotient d'un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module induit $\mathscr{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}$, où $\mathscr{L}$ est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent.

5.2.4. Soient i un entier fixé, $S_i = \operatorname{Spec} W_i(k)$, X_i un S_i-schéma lisse de réduction X sur k, $\mathscr{E}$ un $\mathscr{D}_{X_i}^{(m)}$-module cohérent, $(\mathscr{E}_n)$ une bonne filtration sur $\mathscr{E}$. Si $\mathscr{I}$ est l'annulateur du $\operatorname{gr}\mathscr{D}_X^{(m)}$-module $\operatorname{gr}\mathscr{E}$, et $\mathscr{J}$ l'idéal racine de $\mathscr{I}$, on voit comme en caractéristique 0 que $\mathscr{J}$ est indépendant de la bonne filtration choisie (*cf.* [**13**], [**36**], [**40**]...). On appellera *variété caractéristique de* $\mathscr{E}$, et on notera $\operatorname{Car}^{(m)}(\mathscr{E})$, le fermé de $T^{(m)*}X$ défini par l'idéal $\mathscr{J}$. On vérifie facilement les propriétés suivantes :

(i) Pour toute suite exacte $0 \to \mathscr{E}' \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}'' \to 0$ de $\mathscr{D}_{X_i}^{(m)}$-modules cohérents, on a

$$\operatorname{Car}^{(m)}(\mathscr{E}) = \operatorname{Car}^{(m)}(\mathscr{E}') \cup \operatorname{Car}^{(m)}(\mathscr{E}'').$$

(ii) Pour tout $i' \leqslant i$, on a

$$\operatorname{Car}^{(m)}(\mathscr{E}/p^{i'+1}\mathscr{E}) = \operatorname{Car}^{(m)}(\mathscr{E}).$$

(iii) Soit $F^m : X_i \to X_i$ un σ^m-morphisme relevant sur S_i la puissance m-ième de l'endomorphisme de Frobenius absolu de X, $\mathscr{E}^{(0)}$ un $\mathscr{D}_{X_i}^{(0)}$-module cohérent, et $\mathscr{E} = F^{m*}\mathscr{E}^{(0)}$, qui est un $\mathscr{D}_{X_i}^{(m)}$-module cohérent. Alors l'identification (5.2.2.1) donne

$$\operatorname{Car}^{(m)}(\mathscr{E}) = \operatorname{Car}^{(0)}(\mathscr{E}^{(0)}).$$

5.2.5. Soient $\mathscr{X}$ un W-schéma formel lisse, X_i sa réduction modulo p^{i+1}. Si $\mathscr{E}$ est un $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-module cohérent, on définit sa variété caractéristique $\operatorname{Car}^{(m)}(\mathscr{E})$ comme étant la variété caractéristique $\operatorname{Car}^{(m)}(\mathscr{E}/p\mathscr{E})$ de sa réduction modulo p.

Soit maintenant $\mathscr{E}$ un $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-module cohérent. Il existe alors un $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-module cohérent $\mathscr{E}'$ sans torsion tel que $\mathscr{E} \simeq \mathscr{E}'_{\mathbb{Q}}$. On peut définir $\operatorname{Car}^{(m)}(\mathscr{E})$ comme étant égale à $\operatorname{Car}^{(m)}(\mathscr{E}')$, grâce au lemme suivant :

***5.2.6. Lemme* ([11])**. — *Soient $\mathscr{E}', \mathscr{E}''$ deux $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-modules cohérents sans p-torsion, tels qu'il existe une isogénie $\phi : \mathscr{E}' \to \mathscr{E}''$. Alors* $\operatorname{Car}^{(m)}(\mathscr{E}') = \operatorname{Car}^{(m)}(\mathscr{E}'')$.

5.2.7. Sous les hypothèses de 5.2.5, soit $\mathscr{E}$ un F-$\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-module cohérent. D'après 5.1.3, il existe un unique couple $(\mathscr{E}^{(0)}, \Phi^{(1)} : \widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(1)} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E})$, où $\mathscr{E}$ est un $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(0)}$-module cohérent, et $\Phi^{(1)}$ un isomorphisme $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(1)}$-linéaire, tel que $(\mathscr{E}, \Phi)$ provienne de $(\mathscr{E}^{(0)}, \Phi^{(1)})$ par extension de l'anneau d'opérateurs de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{(0)}$ à $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$. On peut donc sans ambiguïté définir la variété caractéristique de $\mathscr{E}$ en posant

$$\operatorname{Car}(\mathscr{E}) := \operatorname{Car}^{(0)}(\mathscr{E}^{(0)}).$$

Il convient seulement d'observer que, grâce à 5.2.4 (iii), il est équivalent de redescendre $(\mathscr{E},\Phi)$ en $(\mathscr{E}^{(m)},\Phi^{(m+1)})$ pour un entier m arbitrairement choisi, ce qui permet de donner un sens à cette définition y compris pour $p=2$.

Exemple. — On montre [**11**] que la variété caractéristique d'un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathscr{E}$ est égale à la section nulle de T^*X si et seulement si $\mathscr{E}$ est un F-isocristal convergent (voir 4.1.6 (ii)).

5.3. Inégalité de Bernstein. — En caractéristique 0, la variété caractéristique d'un $\mathscr{D}_X$-module cohérent non nul $\mathscr{E}$ vérifie l'inégalité de Bernstein : $\dim\big(\mathrm{Car}(\mathscr{E})\big)\geqslant \dim(X)$ (*cf.* [**16**], [**36**], [**40**], [**42**]...). Si S est un $\mathbb{Z}/p^n$-schéma, la variété caractéristique construite plus haut ne vérifie pas nécessairement cette inégalité, même lorsque S est le spectre d'un corps. Par exemple, si X est la droite affine sur un corps de caractéristique p, et si $x\in X$ est l'origine, $\mathscr{E}=\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^p$ possède une structure naturelle de $\mathscr{D}^{(0)}_X$-module, et sa variété caractéristique est réduite au point x de la section nulle de T^*X, donc est de dimension $0<\dim(X)$. Si $\mathscr{X}$ est la droite affine formelle sur W, le même exemple, vu comme $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}$-module, montre que cette inégalité n'est pas non plus vérifiée pour les $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}$-modules.

L'inégalité de Bernstein est par contre vérifiée pour les F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents. La méthode de la démonstration est classique : elle consiste à établir cette propriété par récurrence sur la dimension de $\mathscr{X}$, en montrant que, si $u:\mathscr{Z}\hookrightarrow\mathscr{X}$ est l'inclusion d'un sous-schéma formel fermé, lisse sur W, le foncteur u_+ induit une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents à support dans $\mathscr{Z}$ et celle des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}$-modules cohérents (énoncé analogue d'un théorème classique de Kashiwara, *cf.* [**16**], [**17**], [**36**], [**40**], [**42**]...). On notera que cette équivalence est fausse pour les $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules lorsque m est fixé (voir l'exemple donné en 5.3.1).

L'inégalité de Bernstein permet alors de définir les F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes comme étant ceux dont la variété caractéristique est de dimension égale à $\dim(X)$. Le théorème 5.3.10 plus bas, dû à Virrion (*cf.* [**49**], [**52**]), montre que, comme en caractéristique 0, cette définition est équivalente à la caractérisation homologique usuelle au moyen du dual.

5.3.1. Soient $\mathscr{X}$ un W-schéma formel lisse, et $u:\mathscr{Z}\hookrightarrow\mathscr{X}$ l'immersion d'un sous-schéma formel fermé lisse, défini par un idéal cohérent $\mathscr{I}\subset\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$. Précisons d'abord la structure de l'image directe $u_+\mathscr{F}$ d'un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathscr{F}$. L'hypothèse de cohérence, et le fait que u soit un morphisme fini, entraînent que $u_+\mathscr{F}$ est défini par

$$u_+\mathscr{F}=u_*(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\leftarrow\mathscr{Z},\mathbb{Q}}\otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}}\mathscr{F}),$$

et $u^!u_+\mathscr{E}$ par

$$u^!u_+\mathscr{E}=\mathbb{L}u^*\big(u_*(\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\leftarrow\mathscr{Z},\mathbb{Q}}\otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}}\mathscr{E})\big)[d_{\mathscr{Z}/\mathscr{X}}].$$

En utilisant au voisinage d'un point de $\mathscr{X}$ un système de coordonnées locales $t_1, \dots, t_d$ tel que $\mathscr{I} = (t_1, \dots, t_r)$, avec $r \leqslant d$, on voit qu'il existe un isomorphisme naturel de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0 u^! u_+ \mathscr{F} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(t_i : u_+\mathscr{F} \to u_+\mathscr{F}), \tag{5.3.1.1}$$

et que $u_+\mathscr{F}$ est engendré comme $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module par l'image de $\mathscr{F}$, donc possède un système de générateurs annulés par $\mathscr{I}$.

Par contre, si $\mathscr{E}$ est un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent à support dans $\mathscr{Z}$, il n'est pas toujours vrai que $\mathscr{E}$ soit engendré par ses sections annulées par $\mathscr{I}$. Par exemple, si l'on prend pour $\mathscr{X}$ la droite affine formelle, et pour $\mathscr{Z}$ la section nulle, définie par $t = 0$, le $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module

$$\mathscr{E} = \widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} / \widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(t^p - p)$$

est nul sur $\mathscr{X} \smallsetminus \mathscr{Z}$, mais ne possède aucune section non nulle annulée par t. Par suite, $\mathscr{E}$ n'est pas de la forme $u_+\mathscr{F}$, et le foncteur u_+, allant de la catégorie des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}$-modules cohérents vers celle des $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents à support dans $\mathscr{Z}$, n'est pas essentiellement surjectif.

La première étape consiste à prouver que cette surjectivité essentielle est vraie asymptotiquement :

***5.3.2. Théorème* ([11])**. — *Soient $m \in \mathbb{N}$, $u : \mathscr{Z} \hookrightarrow \mathscr{X}$ l'inclusion d'un sous-W-schéma formel fermé lisse, $\mathscr{E}$ un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent à support dans $\mathscr{Z}$. Il existe un entier $m' \geqslant m$, un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathscr{F}^{(m')}$ et un isomorphisme $\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-linéaire*

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} u_+^{(m')} \mathscr{F}^{(m')}. \tag{5.3.2.1}$$

On remarquera que, si m' est fixé, $\mathscr{F}^{(m')}$ est déterminé de manière unique d'après (5.3.1.1). D'autre part, les foncteurs $u_+^{(m')}$ commutent aux extensions du faisceau d'opérateurs différentiels d'après (3.5.3.1), de sorte que, pour tout $m'' \geqslant m'$, on dispose sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(m'')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ d'un isomorphisme analogue à (5.3.2.1), dans lequel $\mathscr{F}^{(m')}$ est remplacé par $\mathscr{F}^{(m'')} := \widehat{\mathscr{D}}^{(m'')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{F}^{(m')}$. Compte tenu des énoncés de commutation de u_+ et $u^!$ à l'image inverse par Frobenius, on obtient ainsi pour les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules et F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents l'analogue du théorème de Kashiwara :

***5.3.3. Théorème* ([11])**. — *Soient $u : \mathscr{Z} \hookrightarrow \mathscr{X}$ l'inclusion d'un sous-schéma formel fermé lisse. Alors les foncteurs u_+ et $u^!$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}$-modules (resp. F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}}$-modules) cohérents, et celle des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules (resp. F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules) cohérents à support dans $\mathscr{Z}$.*

On observe alors que l'équivalence de 5.1.3 commute aux foncteurs $u_+^{(0)}$ et u_+, ce qui entraîne que la variété caractéristique de l'image directe $\mathscr{E} = u_+\mathscr{F}$ se déduit de celle de $\mathscr{F}$ par la même description qu'en caractéristique 0 (voir [**16**], ou [**40**]) : si $Z \hookrightarrow X$ est la réduction de u modulo p, on dispose des applications entre fibrés cotangents

$$T^*Z \xleftarrow{q} Z \times_X T^*X \xhookrightarrow{v} T^*X,$$

et la variété caractéristique de $\mathscr{E}$ est donnée par

$$\mathrm{Car}(\mathscr{E}) = v\Big(q^{-1}\big(\mathrm{Car}(\mathscr{F})\big)\Big).$$

L'argument habituel (voir [**36**], [**40**], [**42**]) permet alors de montrer l'inégalité de Bernstein par récurrence sur la dimension de X :

***5.3.4. Théorème* ([11])**. — *Soit $\mathscr{E}$ un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Pour tout point x du support de $\mathscr{E}$, on a*

$$\dim_x \mathrm{Car}(\mathscr{E}) \geqslant \dim_x X. \tag{5.3.4.1}$$

5.3.5. Soient d la dimension de X, et $\mathscr{E}$ un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Nous appellerons *dimension* de $\mathscr{E}$ en un point x du support de $\mathscr{E}$ la dimension en x de $\mathrm{Car}(\mathscr{E})$, et nous poserons $\dim \mathscr{E} = \sup_x \big(\dim_x \mathrm{Car}(\mathscr{E})\big), \mathrm{codim}\, \mathscr{E} = 2d - \dim \mathscr{E}$. Si X est de dimension d, l'inégalité de Bernstein assure que, si $\mathscr{E} \neq 0$, alors $\dim \mathscr{E} \geqslant d$. Nous dirons que $\mathscr{E}$ est *holonome* si $\mathscr{E} = 0$, ou si $\dim \mathscr{E} = d$.

Si $\mathscr{E} \in D(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ est muni d'une structure de F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexe, nous dirons que $\mathscr{E}$ est *holonome* si ses faisceaux de cohomologie sont des F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes. Nous noterons F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ la catégorie des F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexes holonomes à cohomologie bornée.

Exemples

(i) Tout F-isocristal convergent est un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module holonome, dont la variété caractéristique est réduite à la section nulle de T^*X. Réciproquement, si $\mathscr{E}$ est un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module holonome, il existe un ouvert non vide $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ tel que la restriction de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{U}$ soit un F-isocristal convergent. Si $\mathscr{X}$ est une courbe, et $\mathscr{E}$ un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, $\mathscr{E}$ est holonome si et seulement si la condition précédente est vérifiée.

(ii) Si $0 \to \mathscr{E}' \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}'' \to 0$ est une suite exacte de F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, $\mathscr{E}$ est holonome si et seulement si $\mathscr{E}'$ et$\mathscr{E}''$ le sont.

(iii) Si $u : \mathscr{X} \hookrightarrow \mathscr{Y}$ est une immersion fermée entre W-schémas formels lisses, et si $\mathscr{E}$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, alors $u_+\mathscr{E}$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$ [**11**].

(iv) Si $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est un morphisme lisse de W-schémas formels lisses, et si $\mathscr{F}$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$, alors $f^!\mathscr{F}$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ [**11**].

(v) Si $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ sont deux W-schémas formels lisses, si $\mathscr{Z} = \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, et si $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{F}$) appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ (resp. F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$), alors $\mathscr{E} \boxtimes^{\mathbb{L}}_W \mathscr{F}$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbb{Q}})$ [**11**].

(vi) Si $\mathscr{E}$ appartient à $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, alors $\mathbb{D}(\mathscr{E})$ appartient à $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ [**52**].

(vii) J'ignore s'il existe des $F\text{-}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents non holonomes.

5.3.6. On peut conjecturer que les $F\text{-}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexes holonomes bornés possèdent en un sens convenable toutes les propriétés de stabilité des complexes bornés de $\mathscr{D}_X$-modules à cohomologie holonome sur les variétés lisses sur un corps de caractéristique 0. En particulier, on s'attend à ce que les propriétés suivantes soient vraies, pour un morphisme $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ de W-schémas formels lisses :

A) Si $\mathscr{E}$ appartient à $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ et est à support propre sur $\mathscr{Y}$, alors $f_+\mathscr{E}$ appartient à $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$. Grâce à 5.3.5 (iii) et à la formule de transitivité, il suffirait de le prouver lorsque f est lisse.

B) Si $\mathscr{F}$ appartient à $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}})$, alors $f^!\mathscr{F}$ appartient à $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$. Grâce à 5.3.5 (iv) et à la formule de transitivité, il suffrait de le prouver lorsque f est une immersion fermée.

C) Si Z est un fermé de X, et si $\mathscr{E}$ appartient à $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$, alors $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\mathscr{E})$ appartient à $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$.

On peut montrer que les conjectures B et C sont équivalentes [**11**].

On remarquera que la conjecture C joue le rôle de la stabilité des modules holonomes par image directe par une immersion ouverte lorsque la base est un corps de caractéristique 0. En effet, si $j : U \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte, et $Z = X \smallsetminus U$, on dispose dans ce cas du triangle de localisation

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{Z}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}j_*j^*\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{Z}(\mathscr{E})[1].$$

Il en résulte que, si $\mathscr{E}$ appartient à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_X)$, $\mathbb{R}j_*j^*\mathscr{E}$ appartient à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_X)$ si et seulement si $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{Z}(\mathscr{E})$ appartient à $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_X)$. De plus, les foncteurs $\mathbb{R}j_*$ et j^* sont alors des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_U)$ et la sous-catégorie pleine de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_X)$ formée des complexes $\mathscr{E}$ tels que $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{Z}(\mathscr{E}) = 0$. Dans le cas des W_i-schémas lisses, ou des W-schémas formels lisses, nous avons vu plus haut que la topologie de Zariski est trop grossière pour fournir une bonne notion d'image directe par une immersion ouverte. On peut par contre conjecturer que l'on obtient un formalisme du type des opérations de Grothendieck en considérant les schémas formels $\mathscr{X}$ propres et lisses sur W, et en associant à un ouvert $\mathscr{U}$ d'un tel schéma, de complémentaire Z, la sous-catégorie pleine de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ formée des complexes $\mathscr{E}$ tels que $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\mathscr{E}) = 0$. Le foncteur $\mathbb{R}j_*$ est alors remplacé par l'inclusion de cette sous-catégorie, qui respecte l'holonomie par définition, et le foncteur j^* par le cône du morphisme canonique $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z} \to \mathrm{Id}$, ou plus exactement, pour définir effectivement un foncteur, par le foncteur construit comme en 4.4.4 et 4.4.5 en dérivant sur la catégorie des complexes de $\mathscr{D}^{(m)}_{X_i}$-modules les foncteurs

$$\varinjlim_{n} \mathscr{H}om^{\bullet}_{\mathscr{O}_{X_i}}\left(\mathscr{O}_{X_i} \to \mathscr{P}^{n}_{(m)}(\mathscr{I}_i), -\right),$$

où $\mathscr{I}_i$ est l'idéal de Z dans X_i. La préservation de l'holonomie par le foncteur ainsi obtenu est alors équivalente à la conjecture C.

On notera que, lorsque Z est un diviseur de X, il existe *a priori* un autre substitut au foncteur $\mathbb{R}j_*j^*$, à savoir le composé de l'extension des scalaires de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ à $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$, et de la restriction des scalaires de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$ à $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$, déjà considéré en 4.5. En fait, il existe un isomorphisme canonique entre ces deux foncteurs [**10**]. Une variante de la conjecture C est alors la suivante :

D) Si $\mathscr{E}$ est un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$-module cohérent dont la restriction à $\mathscr{U}$ est holonome, alors $\mathscr{E}$ est un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module holonome.

Cette conjecture entraînerait en particulier que l'algèbre $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$ construite en 4.4.1 est un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module holonome. Plus généralement, on peut montrer que la conjecture D entraîne la conjecture C [**11**].

On remarquera que, même si l'on suppose de plus que $\mathscr{E}$ est de la forme $\mathrm{sp}_* E$, où E est un F-isocristal surconvergent le long de Z, cette assertion n'est plus nécessairement vraie si l'on ne dispose pas de l'action de Frobenius. Par exemple, si $\mathscr{X}$ est la droite projective, si $Z = \{0, \infty\}$, et si $c \in \mathbb{Z}_p$ est un nombre de Liouville p-adique, le $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)$-module $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)/\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(^{\dagger}Z)(t\partial - c)$ correspond à un isocristal sur $\mathbb{G}_m$, surconvergent en 0 et ∞, mais n'est pas cohérent sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. Par contre, l'existence d'une structure de F-isocristal entraîne que les exposants de Christol-Mebkhout sont rationnels [**22**], ce qui exclut toute diffculté liée aux nombres de Liouville.

5.3.7. Précisons pour finir les résultats reliant la condition géométrique d'holonomie introduite en 5.3.5 et la condition homologique usuelle, d'après [**49**], [**50**], [**52**]. On note d la dimension de X.

Si $\mathscr{E}$ est un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, le complexe dual $\mathbb{D}(\mathscr{E})$ est un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-complexe, de sorte que ses faisceaux de cohomologie

$$\mathscr{H}^{i-d}\big(\mathbb{D}(\mathscr{E})\big) = \mathscr{E}xt^{i}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}}(\mathscr{E}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes \omega_{\mathscr{X}}^{-1})$$

sont eux-même des F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, d'après (4.3.10.1). Si $\mathscr{E}^{(0)}$ est le $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent asocié à $\mathscr{E}$ par l'équivalence 5.1.3, les théorèmes de commutation du dual aux extensions de l'anneau d'opérateurs différentiels et à l'image inverse par Frobenius permettent de se ramener à l'étude des faisceaux analogues pour $\mathscr{E}^{(0)}$ sur $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$. En prenant un modèle entier $\mathscr{E}'$ de $\mathscr{E}^{(0)}$, et en utilisant la suite exacte des coefficients universels pour $\mathbb{D}(\mathscr{E}')$, on peut relier les $\mathscr{E}xt^{i}_{\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}}(\mathscr{E}^{(0)}, \widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes \omega_{\mathscr{X}}^{-1})$ aux $\mathscr{E}xt^{i}_{\mathscr{D}^{(0)}_{X}}(\mathscr{E}'/p\mathscr{E}', \mathscr{D}^{(0)}_{X} \otimes \omega_{X}^{-1})$. Comme l'anneau $\mathscr{D}^{(0)}_{X}$ a un gradué régulier, on peut appliquer à l'étude du dual d'un $\mathscr{D}^{(0)}_{X}$-module cohérent les méthodes de Malgrange [**40**]. On obtient ainsi :

***5.3.8. Théorème* ([52]).** — *Soit $\mathscr{E}$ un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent.*

(i) *Pour tout i, $\mathscr{E}xt^{i}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}}(\mathscr{E}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} \otimes \omega_{\mathscr{X}}^{-1})$ est de codimension $\geqslant i$;*

(ii) $\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}}(\mathscr{E},\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}\otimes\omega_{\mathscr{X}}^{-1})=0$ *pour tout* $i<\operatorname{codim}(\mathscr{E})$.

L'inégalité de Bernstein pour les F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules permet alors d'en déduire pour ceux-ci un résultat plus précis que celui que fournit la majoration de 4.1.5 sur la dimension homologique de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$:

5.3.9. Corollaire. — *Tout F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent est de dimension projective locale au plus d.*

Le théorème 5.3.8 entraîne de plus que, si $\mathscr{E}$ est holonome, les $\mathscr{E}xt^i(\mathscr{E},\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}\otimes\omega_{\mathscr{X}}^{-1})$ sont nuls pour $i\neq d$, et $\mathscr{E}xt^d(\mathscr{E},\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}\otimes\omega_{\mathscr{X}}^{-1})$ est lui-même holonome. D'autre part, le théorème de bidualité locale pour les F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents donne naissance à une suite spectrale dont tous les termes sont eux-mêmes des F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents. En étudiant cette suite spectrale par les méthodes de [**40**], on obtient en particulier la réciproque de cette propriété, d'où la caractérisation homologique de l'holonomie :

***5.3.10. Théorème* ([52])**. — *Pour qu'un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent soit holonome, il faut et suffit que $\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}}(\mathscr{E},\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}\otimes\omega_{\mathscr{X}}^{-1})=0$ pour $i\neq d$.*

Comme en caractéristique nulle, le théorème de bidualité locale donne alors un foncteur de dualité interne à la catégorie des F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes, en posant

$$\mathscr{E}^*:=\mathscr{H}^0\big(\mathbb{D}(\mathscr{E})\big)=\mathscr{E}xt^d_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}}(\mathscr{E},\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}\otimes\omega_{\mathscr{X}}^{-1}).$$

5.4. Multiplicités et formule de l'indice. — La méthode utilisée en 5.3 pour construire la variété caractéristique $\operatorname{Car}(\mathscr{E})$ d'un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathscr{E}$ permet également de définir une multiplicité pour chacune des composantes irréductibles de $\operatorname{Car}(\mathscr{E})$, donc un cycle caractéristique à support dans $\operatorname{Car}(\mathscr{E})$. Nous exposons ici cette construction, puis nous montrons que, lorsque X est projectif sur k, on peut appliquer la méthode développée par Laumon dans [**39**], et en déduire pour les F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes une formule de l'indice global analogue à celle de Dubson-Kashiwara [**19**].

5.4.1. Soit $i\geqslant 0$ un entier, et plaçons nous d'abord, comme en 5.2.4, sur un schéma X_i lisse sur $S_i=\operatorname{Spec}W_i(k)$. Supposons donné un $\mathscr{D}^{(0)}_{X_i}$-module cohérent $\mathscr{E}$, muni d'une bonne filtration $(\mathscr{E}_n)$, et soit δ la dimension de $\mathscr{E}$. Soit $\xi\in T^*X$ le point générique d'un fermé irréductible de dimension δ. On définit la *multiplicité* de $\mathscr{E}$ en ξ comme étant la longueur du $\mathscr{O}_{T^*X,\xi}$-module $(\operatorname{gr}\mathscr{E})_\xi$. Un argument classique basé sur la comparaison des bonnes filtrations (voir [**14**], [**15**], [**36**], [**40**]...) montre que cet entier ne dépend pas de la bonne filtration choisie ; nous le noterons $m_\xi(\mathscr{E})$. On définit alors le *cycle caractéristique* de $\mathscr{E}$ par

$$\operatorname{ZCar}(\mathscr{E}):=\sum_{\dim\xi=\delta}m_\xi(\mathscr{E})\overline{\{\xi\}}.$$

Ce cycle est positif par construction.

Les propriétés qui suivent sont classiques :

(i) Si la suite $0 \to \mathscr{E}' \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}'' \to 0$ est exacte, et si $\dim_\xi \operatorname{gr} \mathscr{E}' = \dim_\xi \operatorname{gr} \mathscr{E} = \dim_\xi \operatorname{gr} \mathscr{E}''$, alors $m_\xi(\mathscr{E}) = m_\xi(\mathscr{E}') + m_\xi(\mathscr{E}'')$.

(ii) Si $\mathscr{E}$ est plat sur W_i, alors $m_\xi(\mathscr{E}) = im_\xi(\mathscr{E}/p\mathscr{E})$.

Grâce à celles-ci, on montre le lemme suivant :

***5.4.2. Lemme* ([11])**. — *Soient $\mathscr{E}', \mathscr{E}''$ deux $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}$-modules cohérents sans p-torsion, tels qu'il existe une isogénie $\phi : \mathscr{E}' \to \mathscr{E}''$, et soit δ la dimension de $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}''$. Pour tout point $\xi \in T^*X$ de dimension δ, on a $m_\xi(\mathscr{E}'/p\mathscr{E}') = m_\xi(\mathscr{E}''/p\mathscr{E}'')$.*

Soit $\mathscr{E}$ un $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}$-module cohérent, que l'on suppose sans p-torsion. On définit son cycle caractéristique en posant

$$\mathrm{ZCar}(\mathscr{E}) := \mathrm{ZCar}(\mathscr{E}/p\mathscr{E}).$$

Sous les hypothèses du lemme, on voit donc que si $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}''$ sont isogènes, alors $\mathrm{ZCar}(\mathscr{E}') := \mathrm{ZCar}(\mathscr{E}'')$. Par suite, si l'on suppose maintenant que $\mathscr{E}$ est un $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, on peut définir son cycle caractéristique en choisissant un $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}$-module cohérent sans torsion $\mathscr{E}'$ tel que $\mathscr{E}'_{\mathbb{Q}} \simeq \mathscr{E}$, et en posant $\mathrm{ZCar}(\mathscr{E}) := \mathrm{ZCar}(\mathscr{E}')$.

Enfin, si $\mathscr{E}$ est un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, il lui correspond par l'équivalence de 5.1.3 un unique couple $(\mathscr{E}^{(0)}, \Phi^{(1)})$. Comme $\mathscr{E}^{(0)}$ est un $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, on sait définir son cycle caractéristique d'après ce qui précède, et on pose $\mathrm{ZCar}(\mathscr{E}) := \mathrm{ZCar}\big(\mathscr{E}^{(0)}\big)$.

Remarque. — Pour tout m, on peut aussi définir un cycle caractéristique pour les $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, ce qui permet de donner un sens à la définition précédente lorsque $p = 2$. Nous renvoyons le lecteur à [**11**] pour le détail de cette construction et de ses propriétés.

À partir de l'existence du cycle caractéristique, on obtient classiquement :

***5.4.3. Proposition* ([11])**. — *Soit $\mathscr{X}$ un W-schéma formel lisse.*

(i) *Pour tout suite exacte de F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes $0 \to \mathscr{E}' \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}'' \to 0$, on a*

$$\mathrm{ZCar}(\mathscr{E}) = \mathrm{ZCar}(\mathscr{E}') + \mathrm{ZCar}(\mathscr{E}'').$$

(ii) *La catégorie des F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes est artinienne.*

Une autre application importante de la construction du cycle caractéristique est le théorème de l'indice :

***5.4.4. Théorème* ([11])**. — *Soit $\mathscr{X}$ un W-schéma formel lisse de dimension relative d, dont la réduction X sur k est projective, et $\mathscr{E}$ un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module holonome. On note*

$\mathrm{DR}_{\mathscr{X}}(\mathscr{E})$ *le complexe de de Rham de* $\mathscr{X}$ *à coefficients dans* $\mathscr{E}$*, placé entre les degrés* $-d$ *et* 0*, et*

$$\chi_{\mathrm{DR}}(\mathscr{E}) := \sum_{i=-d}^{d} \dim_K H^i\big(\mathscr{X}, \mathrm{DR}_{\mathscr{X}}(\mathscr{E})\big)$$

sa caractéristique d'Euler-Poincaré. On a alors

$$\chi_{\mathrm{DR}}(\mathscr{E}) = \big(X_{\bullet}\mathrm{ZCar}(\mathscr{E})\big), \tag{5.4.4.1}$$

où le terme de droite est le degré du cycle d'intersection dans T^*X *de la section nulle de* T^*X *et du cycle caractéristique de* $\mathscr{E}$*.*

Soient $(\mathscr{E}^{(0)}, \Phi^{(1)})$ le couple correspondant à $\mathscr{E}$ dans l'équivalence de 5.1.3, $\mathscr{E}'$ un $\widehat{\mathscr{D}}^{(0)}_{\mathscr{X}}$-module cohérent sans torsion tel que $\mathscr{E}'_{\mathbb{Q}} \simeq \mathscr{E}^{(0)}$. On montre successivement les relations suivantes, qui entraînent le théorème :

(i) $\chi_{\mathrm{DR}}(\mathscr{E}) = \chi_{\mathrm{DR}}(\mathscr{E}^{(0)})$;
(ii) $\chi_{\mathrm{DR}}(\mathscr{E}^{(0)}) = \chi_{\mathrm{DR}}(\mathscr{E}'/p\mathscr{E}')$;
(iii) $\chi_{\mathrm{DR}}(\mathscr{E}'/p\mathscr{E}') = \big(X_{\bullet}\mathrm{ZCar}(\mathscr{E}'/p\mathscr{E}')\big)$.

Cette dernière relation n'est que l'application directe de la méthode de Laumon pour prouver [**39**, 6.6.4] : on vérifie en effet que l'hypothèse de caractéristique 0 faite dans [**39**] n'intervient réellement que pour assurer que $\mathscr{D}_X$ soit de dimension homologique finie, et que, lorsque $f : X \to \operatorname{Spec} k$ est le morphisme structural d'un k-schéma lisse, il existe pour tout $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{E}$ un isomorphisme $f_+\mathscr{E} \simeq \mathbb{R}\Gamma\big(X, \mathrm{DR}_{\mathscr{X}}(\mathscr{E})\big)$. Or ces deux propriétés sont vraies pour $\mathscr{D}^{(0)}_X$ sur un corps de caractéristique p. Comme l'ensemble des outils utilisés par Laumon est disponible tel quel pour les $\mathscr{D}^{(0)}_X$-modules, on peut conclure.

Remarque. — Comme le montre Garnier (*cf.* [**23**], [**24**]), cette formule fait apparaître le lien existant, lorsque $\mathscr{X}$ est une courbe, entre les multiplicités du cycle caractéristique d'un F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module holonome, et la théorie de l'irrégularité.

Références

[EGA] A. Grothendieck & J. Dieudonné – *Éléments de Géométrie Algébrique*, Publ. Math. I.H.E.S., **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32**, (1960-67).

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck & J.-L. Verdier – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Math., vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972-73.

[SGA6] P. Berthelot, A. Grothendieck & L. Illusie – *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Lecture Notes in Math., vol. 225, Springer-Verlag, 1971.

[1] A. A. Beilinson, J. Bernstein & P. Deligne – « Faisceaux pervers », *Analyse et topologie sur les espaces singuliers*, Astérisque, vol. 100, Société Mathématique de France, 1982, p. 5–171.

[2] P. Berthelot – *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique* $p > 0$, Lecture Notes in Math., vol. 407, Springer-Verlag, 1974.

[3] ———, « Cohomologie rigide et théorie des $\mathscr{D}$-modules », *p-adic Analysis* (F. Baldassari, S. Bosch & B. Dwork, éds.), Lecture Notes in Math., vol. 1454, Springer-Verlag, 1990, p. 80–124.

[4] ———, « Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre, première partie », Prépublication IRMAR 96 − 03, Université de Rennes, 1996.

[5] ———, « $\mathscr{D}$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,* 4^{e} *série*, **29** (1996), p. 185–272.

[6] ———, « Cohérence différentielle des algèbres de fonctions surconvergentes », *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math.,* **323** (1996), p. 35–40.

[7] ———, « Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide », *Invent. Math.* **128** (1997), p. 329–377, avec un appendice de A.J. de Jong.

[8] ———, *$\mathscr{D}$-modules arithmétiques II. Descente par Frobenius*, Mém. Soc. Math. France (N.S.), vol. 81, Paris, 2000.

[9] ———, « Limites de faisceaux quasi-cohérents et conditions de finitude dans les catégories dérivées », en cours de rédaction.

[10] ———, « $\mathscr{D}$-modules arithmétiques III. Images directes et inverses », en cours de rédaction.

[11] ———, « $\mathscr{D}$-modules arithmétiques IV. Variété caractéristique », en préparation.

[12] P. Berthelot & A. Ogus – *Notes on Crystalline Cohomology*, Math. Notes, vol. 21, Princeton University Press, 1978.

[13] J. Bernstein – « Modules over the ring of differential operators. A study of fundamental solutions to equations with constant coefficients », *Funk. Anal. i Pril.* **5** (1971), p. 1–16.

[14] ———, « The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter », *Funk. Anal. i Pril.* **6** (1972), p. 26–40.

[15] J.-E. Björk – *Rings of differential operators*, North-Holland, 1979.

[16] ———, *Analytic $\mathscr{D}$-modules and applications*, Mathematics and its applications, vol. 247, Kluver, 1993.

[17] A. Borel & al. – *Algebraic $\mathscr{D}$-modules*, Perspectives in Math., vol. 2, Academic Press, 1987.

[18] S. Bosch, U. Güntzer & R. Remmert – *Non-archimedean analysis*, Grundlehren der math. Wissenschaften, vol. 261, Springer-Verlag, 1984.

[19] J.-L. Brylinski, A. Dubson & M. Kashiwara – « Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale », *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math.,* **293** (1981), p. 573–576.

[20] P. Cartier – « Une nouvelle opération sur les formes différentielles », *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math.,* **244** (1957), p. 426–428.

[21] ———, « Dérivations et diviseurs en géométrie algébrique », Thèse, Fac. Sc. Paris, Gauthier-Villars, 1959.

[22] G. Christol & Z. Mebkhout – « Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II », *Ann. of Math.* **146** (1997), p. 345–410.

[23] L. Garnier – « Quelques propriétés des $\mathscr{D}^{\dagger}$-modules holonomes sur une courbe », Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, 1993.

[24] ———, « Cohérence sur $\mathscr{D}^{\dagger}$ et irrégularité des isocristaux surconvergents de rang 1 », *Forum Math.* **9** (1997), p. 569–601.

[25] E. Grosse-Klönne – « de Rham-Kohomologie in der rigiden Analysis », Thèse de doctorat, Universität Münster, 1998.

[26] A. Grothendieck – « Crystals and the de Rham cohomology of schemes », notes by J. Coates and O. Jussila, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland, 1968.

[27] R. Hartshorne – *Residues and duality*, Lectures Notes in Math., vol. 20, Springer-Verlag, 1966.

[28] C. Huyghe – « Construction et étude de la transformation de Fourier pour les $\mathscr{D}$-modules arithmétiques », Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, 1995.

[29] ———, « Interprétation géométrique sur l'espace projectif des $A_N(K)^\dagger$-modules cohérents », *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math.,* **321** (1995), p. 587–590.

[30] ———, « Transformation de Fourier des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-modules », *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math.,* **321** (1995), p. 759–762.

[31] ———, « $\mathscr{D}^\dagger(\infty)$-affinité des schémas projectifs », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **48** (1998), p. 913–956.

[32] L. Illusie – *Complexe cotangent et déformations II*, Lectures Notes in Math., vol. 283, Springer-Verlag, 1972.

[33] A.J. de Jong – « Smoothness, semi-stability and alterations », *Publ. Math. IHES* **83** (1997), p. 51–93.

[34] N. M. Katz – « Nilpotent connections and the monodromy theorem : applications of a result of Turittin », *Publ. Math. IHES* **35** (1971), p. 175–232.

[35] N. M. Katz & G. Laumon – « Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles », *Publ. Math. IHES* **62** (1986), p. 145–202.

[36] M. Kashiwara – *Algebraic study of systems of partial differential equations*, Master's thesis, Tokyo University, 1970, trad. par A. d'Agnolo et J.-P. Schneiders, Mém. Soc. Math. France (N.S.), vol. 63, Paris, 1995.

[37] ———, « On the holonomic systems of linear differential equations II », *Invent. Math.* **49** (1978), p. 121–135.

[38] M. Kashiwara & P. Schapira – *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der math. Wissenschaften, vol. 292, Springer-Verlag, 1990.

[39] G. Laumon – « Sur la catégorie dérivée des $\mathscr{D}$-modules filtrés », *Algebraic Geometry*, Lect. Notes in Math., vol. 1016, Springer-Verlag, 1983, p. 151–237.

[40] M. Lejeune & B. Malgrange – Séminaire « Opérateurs différentiels et pseudo-différentiels », Institut Fourier, Grenoble, 1975-76.

[41] B. Malgrange – « Transformation de Fourier géométrique », *Séminaire Bourbaki (1987-88)*, Astérisque, vol. 161-162, Société Mathématique de France, 1989, Exposé 692, p. 133–150.

[42] Z. Mebkhout – *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathscr{D}$-modules cohérents*, Travaux en cours, vol. 35, Hermann, Paris, 1989.

[43] ———, « Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière », *Amer. J. Math.* **119** (1997), p. 1027–1081.

[44] P. Monsky & G. Washnitzer – « Formal Cohomology I », *Ann. of Math.* **88** (1968), p. 181–217.

[45] M. Saito – « Modules de Hodge polarisables », *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **24** (1988), p. 849–995.

[46] ———, « Induced $\mathscr{D}$-modules and differential complexes », *Bull. Soc. Math. France* **117** (1989), p. 361–387.

[47] P. Schapira & J.-P. Schneiders – « Elliptic Pairs I : Relative Finiteness and Duality », *Index theorem for elliptic pairs*, Astérisque, vol. 224, Société Mathématique de France, 1994, p. 5–60.

[48] J.-P. Serre – « Faisceaux algébriques cohérents », *Ann. of Math.* **61** (1955), p. 197–278.

[49] A. Virrion – « Théorèmes de dualité locale et globale dans la théorie arithmétique des $\mathscr{D}$-modules », Thèse de doctorat, Université de Rennes, 1995.

[50] ———, « Théorème de bidualité et caractérisation des F-$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes », *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math.,* **319** (1994), p. 1283–1286.

[51] ———, « Théorème de dualité relative pour les $\mathscr{D}$-modules arithmétiques », *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math.,* **321** (1995), p. 751–754.

[52] ———, « Dualité locale et holonomie pour les $\mathscr{D}$-modules arithmétique », *Bull. Soc. math. France* **128** (2000), p. 1–68.

P. Berthelot, IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France • *E-mail :* `Pierre.Berthelot@univ-rennes1.fr` • *Url :* `http://www.maths.univ-rennes1.fr/~berthelo`

Astérisque
279, 2002, p. 81–124

TORSION ÉTALE AND CRYSTALLINE COHOMOLOGIES

by

Christophe Breuil & William Messing

"This cohomology should also, most importantly, explain torsion phenomena, and in particular p-torsion"
A. Grothendieck, Crystals and the de Rham cohomology of schemes.

***Abstract.* —** Following our two courses at the Centre Émile Borel of the I.H.P. during the Semestre p-adique of 1997, we present a survey of the Fontaine-Laffaille and Fontaine-Messing theories and (with more details) of their extension by one of us to the semi-stable setting. We also very quickly discuss some ℓ-adic analogues of Nakayama. We take advantage to include a few proofs which are not in the literature and raise several remaining open questions.

1. Introduction

This article is both a resume of our two courses at the Centre Émile Borel of the I.H.P. during the Semestre p-adique and a survey of the papers [**31**], [**32**], [**9**], [**10**]. These courses were, from the outset, coordinated. Indeed, the course of the second author was largely foundational and was viewed as preparatory for the course of the first author, a Cours Peccot, devoted to his generalization to the semi-stable situation, via log-syntomic methods, of some of the results of [**32**]. We concentrate here primarily on [**9**], [**10**], adopting a strictly utilitarian point of view and, hopefully, making then the article more useful to number theorists or algebraic geometers who are not specialists in p-adic theories. Nevertheless, to keep the text to a reasonable length, we have found it necessary to assume the reader has some awareness of crystalline and semi-stable p-adic Galois representations and the corresponding comparison theorems. Certainly, an acquaintance with log-schemes would also be helpful, although we recall their definition.

2000 *Mathematics Subject Classification.* — 11G10, 11G25, 11S20, 14F20, 14F30, 14F40.
***Key words and phrases.* —** Crystalline cohomology, étale cohomology, semi-stable reduction, syntomic site.

© Astérisque 279, SMF 2002

We do not intend to review, even in the most cursory fashion, the history of what has become a somewhat intricate and still evolving complex of theories and techniques all ultimately intended to clarify the relationships between the diverse p-adic objects which are cohomologically associated to appropriate algebraic varieties. These objects are either the cohomology groups or are the "coefficients" which serve as input for or arise as the output from such cohomology groups. We refer the reader to [**30**], [**25**] for discussion of the comparison conjectures and to [**41**], [**71**] for surveys of the comparison theorems in the $\mathbf{Q}_p$-coefficient context. The proofs, with varying degree of detail, are given in [**18**], [**19**], [**22**], [**32**], [**44**], [**46**], [**59**], [**70**].

The case of torsion coefficients has had itself a long gestation. The dictionary relating unramified representations and "unit root F-crystals" goes back to Artin, Hasse and (especially) Witt during the thirties. The extension of classical Dieudonné theory from the case of smooth (commutative) formal groups to finite connected or unipotent group schemes over a perfect field k is due to Gabriel ([**67**]). The analogous results over $W(k)$ are due to Fontaine ([**29**]). Grothendieck stressed both in [**34**] and in [**35**] the geometric importance of understanding p-torsion phenomena in the Picard scheme and also in higher cohomological contexts. Important examples and results were given by Mumford and Raynaud ([**55**], [**56**], [**62**]). To the best of our knowledge it was Grothendieck who, in his Algerian letter to Deligne ([**36**]), first explicitly raised the question of understanding the relation between the torsion invariants in the p-adic étale cohomology (or equivalently the Betti cohomology) of the geometric generic fiber and in the "p-adic cohomology" of the special fiber. Shortly after with the creation of crystalline cohomology ([**35**], [**3**]), it was possible to attach precise meaning to this last term. In fact, the situation is subtle as examples, due to Ekedahl ([**17**]), show that for V a complete discrete valuation ring of unequal characteristic and residue field k and X/V proper and smooth, the π-torsion invariants for $H^*_{\mathrm{dR}}(X/V)$ are not necessarily those of $H^*_{\mathrm{cris}}(X_k/W)\otimes_W V$ (where $W = W(k)$). Even today there remains much to understand concerning torsion in the (very) ramified case.

The approach we discuss in the text for studying torsion phenomena is via the use of log-syntomic methods (section 6). Although he made no application of it, it was Mazur who first discussed the syntomic topology ([**51**]). Fontaine and the second author showed in 1982 that $\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}$ is a sheaf for the syntomic topology and subsequently made systematic use of syntomic methods to establish the crystalline conjecture for $e = 1$ and in degree $< p$. Using Kato's K-theoretic calculations of the nearby cycles they established the equality of the torsion invariants in the same context (see section 3). It is the extension of these results to the semi-stable situation and the log-syntomic generalization of these methods which is the subject of this survey.

In the semi-stable situation, even when working over $K_0 = \mathrm{Frac}(W)$, it is useful to introduce the larger ring $S_{K_0} = S\otimes_W K_0$ where $S = \widehat{W\langle u\rangle}$ is the p-adic completion of the divided power polynomial ring in the variable u. The (ϕ, N)-filtered modules D of

the semi-stable theory do not satisfy Griffiths' transversality, but it is shown in [**8**] that $D \mapsto D \otimes_{K_0} S_{K_0}$ establishes an equivalence with a category of S_{K_0}-modules (equipped with additional structure) whose objects now do satisfy Griffiths' transversality (see section 4). It is the torsion analogue of this last category which generalizes in the semi-stable context the filtered module category of Fontaine and Laffaille ([**31**]). This is discussed in detail in the text. Suffice it here to say that for each r with $0 \leqslant r \leqslant p-2$, we define such a category, $\underline{\mathcal{M}}^r$ (see section 5).

The categories $\underline{\mathcal{M}}^r$ are interesting for two reasons. The first reason is that they allow one to get a handle on new and interesting phenomena in the semi-stable situation which don't arise in the analogous crystalline situation. For instance, irreducible 2-dimensional crystalline representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ with distinct Hodge-Tate weights in $\{0, \ldots, p-2\}$ are all irreducible modulo p whereas this is far from being the case with irreducible 2-dimensional semi-stable representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ with distinct Hodge-Tate weights in $\{0, \ldots, p-2\}$ (and here the reduction modulo p is very interesting to study, see [**9**] and the last section). The second reason is that these categories are related to geometry. Let X/W be proper and semi-stable. Endow it with its canonical log-structure (cf. section 2), denote by X_n its reduction modulo p^n and consider the log-crystalline cohomology of X_n relative to the base $E_n = \mathrm{Spec}(S/p^nS)$. This is also the log-syntomic cohomology of X with coefficients in the sheaf $\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$ (which plays here the role of the classical $\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}$). Then one proves that, for $0 \leqslant i \leqslant r \leqslant p-2$, the corresponding H^i (equipped with its Fil^r, ϕ_r, N) is an object of the category $\underline{\mathcal{M}}^r$ (see section 7) and, using Hyodo-Kato-Tsuji's K-theoretic calculations of the nearby cycles in the semi-stable situation, that the torsion Galois representation associated to it by the generalized Fontaine-Laffaille theory is the étale cohomology of the geometric generic fiber $X_{\overline{K}}$ with coefficients in $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ (see section 8).

We discuss applications of these results and related open questions in the last section. In particular we explain how to recover in the above situation the torsion invariants of the étale cohomology of the geometric generic fiber.

The reader will note that we frequently refer to the literature for the proofs. However we give proofs, or at least sketches of proofs, when a result does not have an otherwise published proof (as for instance in section 6) or when we think that the proof gives insight into the result discussed or into the techniques we use.

Acknowledgements. — We express our gratitude to T. Szamuely whose comments on preliminary versions of this text have been very useful to us.

2. The ℓ-torsion case

We set up the notations which we will keep throughout: p is a prime, k a perfect field of characteristic p, W the Witt vectors $W(k)$, $K_0 = \mathrm{Frac}(W)$, K a finite totally

ramified extension of K_0, $\mathcal{O}_K$ its ring of integers, $\overline{K}$ an algebraic closure of K, $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ its ring of integers, $\overline{k}$ the corresponding algebraic closure of k, and $G_K \subset G_{K_0}$ the Galois groups $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \subset \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_0)$. For any prime ℓ, recall that an ℓ-adic representation of G_K or G_{K_0} is a continuous linear representation in a finite dimensional $\mathbf{Q}_\ell$-vector space and that a (finite) ℓ-torsion representation is a continuous (and hence finite) representation of G_K or G_{K_0} in a finite length $\mathbf{Z}_\ell$-module.

2.1. Good reduction. — Let $\ell \neq p$ be another prime. As is well known, an ℓ-adic or ℓ-torsion representation of G_K that has "good reduction" is just an unramified continuous representation. One of the first and most important results of étale cohomology is certainly:

***Theorem 2.1.1* (SGA$_4$ IX.2.2 + XVI.2.2).** — *Let X be a proper smooth scheme over $\mathcal{O}_K$. For $n \in \mathbf{N}$ and $i \in \mathbf{N}$, the specialization map induces isomorphisms compatible with the action of G_K:*

$$H^i((X \times_{\mathcal{O}_K} \overline{k})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^i((X \times_{\mathcal{O}_K} \overline{K})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}).$$

Notice that we compare something living on the geometric special fiber of X to something living on the geometric generic fiber. In particular, the étale cohomology of the geometric generic fiber is unramified (as a G_K-module). Till the end of this paper, we will keep this philosophy of comparing in various situations (torsion) Galois representations coming from the geometric special fiber to (torsion) Galois representations coming from the geometric generic fiber. In each case, the comparison will yield deep properties of the latter.

2.2. Semi-stable reduction. — We want to consider now the more general situation of a smooth proper K-scheme admitting a proper semi-stable model X over $\mathcal{O}_K$, that is X is regular and its special fiber is a reduced divisor with normal crossings in X. Equivalently, this means there exists an étale covering (U_i) of X such that each U_i is étale over an affine scheme of the form $\mathcal{O}_K[X_1, \dots, X_s]/(X_1X_2 \dots X_r - \pi_K)$ $(1 \leqslant r \leqslant s)$ where π_K is an uniformizer of $\mathcal{O}_K$. We want an analogue of theorem 2.1.1 and consequently have to find a candidate to replace $H^i((X \times_{\mathcal{O}_K} \overline{k})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$ that is still related to $X \times_{\mathcal{O}_K} k$ and that contains enough information to recover the étale cohomology of the generic fiber $X \times_{\mathcal{O}_K} K$. There is little hope the singular scheme $X \times_{\mathcal{O}_K} k$ alone will now be sufficient. What we need is some extra information related to the generic fiber, together with $X \times_{\mathcal{O}_K} k$, that is rich enough to give back the cohomology of the geometric generic fiber. It turns out that this extra information will be the log-structure (defined by Fontaine and Illusie) canonically attached to the model X (see 2.2.1.2 below). The idea is then to replace the étale cohomology of the scheme $X \times_{\mathcal{O}_K} \overline{k}$ by the *log*-étale cohomology of the *log*-scheme $X \times_{\mathcal{O}_K} \overline{k}$.

2.2.1. We rapidly recall some facts concerning log-schemes. The main reference is [**43**]. The monoids that are considered are all commutative with a unit element and will be usually written additively (this turns out to be more convenient in many situations). If M is a monoid, we denote by M^* its group of invertible elements and M^{gp} the group that it generates ([**43**, 1]).

***Definition 2.2.1.1* (Fontaine-Illusie).** — A pre-log-structure on a scheme X is a sheaf of monoids $\mathcal{M}_X$ on $X_{\text{ét}}$ together with a morphism of sheaves of monoids on $X_{\text{ét}}$, $\alpha_X : \mathcal{M}_X \to \mathcal{O}_X$, where $\mathcal{O}_X$ is viewed as a sheaf of multiplicative monoids. A pre-log-structure is a log-structure if $\alpha_X^{-1}(\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X^*$. A scheme endowed with a log-structure is called a log-scheme.

To a pre-log-structure $\mathcal{M}_X$, one can associate in a canonical way a log-structure by taking the push-out of $\mathcal{O}_X^* \leftarrow \alpha_X^{-1}(\mathcal{O}_X^*) \to \mathcal{M}_X$ in the category of sheaves of monoids on $X_{\text{ét}}$. A monoid M is called integral if $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ in M. A log-structure is called integral if it is a sheaf of integral monoids, and fine if locally on $X_{\text{ét}}$ it is associated to a pre-log-structure $\alpha : M \to \mathcal{O}_X$ where M is an integral monoid of finite type viewed as a constant sheaf. All the log-schemes of this paper are integral and most of them are fine. A morphism of log-schemes is a morphism of schemes together with a morphism of sheaves of monoids such that the obvious diagram is commutative [**43**, 1.1]. If $f : X \to Y$ is a morphism of schemes and if $\mathcal{M}_Y$ is a log-structure on Y, by definition the induced log-structure on X is the log-structure associated to $f^{-1}(\mathcal{M}_Y) \to \mathcal{O}_X$. Any scheme has a trivial log-structure (with $\mathcal{M}_X = \mathcal{O}_X^*$) and hence the category of schemes is a full subcategory of the category of log-schemes. If $(X, \mathcal{M}_X)$ is a log-scheme, we will refer to X itself as the underlying scheme. If we consider a log-scheme associated to a pre-log-structure $\alpha : M \to A$ where A is a commutative ring and M an integral monoid (that is, the underlying scheme is $\mathrm{Spec}(A)$), we will just write (A, M) and call this pair a log-ring. With additive notations on M, recall then that $0 \in M$ maps to $1 \in A$.

Example 2.2.1.2. — Let X be a scheme flat over $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$, then:

$$\mathcal{M}_X = \{f \in \mathcal{O}_X \text{ such that } f|_{X \times_{\mathcal{O}_K} K} \in \mathcal{O}^*_{X \times_{\mathcal{O}_K} K}\}$$

is easily checked to be an integral log-structure on X. It is called the *canonical* log-struture associated to X. If $X = \mathcal{O}_K$, one finds $\mathcal{O}_K \smallsetminus \{0\} \to \mathcal{O}_K$ which is also the log-scheme associated to $(\mathbf{N} \to \mathcal{O}_K, 1 \mapsto \pi_K)$ where π_K is any uniformizer of $\mathcal{O}_K$. If X is semi-stable over $\mathcal{O}_K$ (cf. previously), one finds an étale covering (U_i) of X with induced log-structures such that each U_i is étale (with induced log-structure) over a

log-scheme associated to:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N}^r & \longrightarrow & \dfrac{\mathcal{O}_K[X_1,\dots,X_s]}{(X_1X_2\cdots X_r-\pi_K)} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathcal{O}_K \end{array}$$

where $1 \leqslant r \leqslant s$, $\mathbf{N} \to \mathbf{N}^r$ is the diagonal embedding and $(0,\dots,1,\dots,0) \in \mathbf{N}^r$ maps to X_i if 1 is in position i. This semi-stable example is the main reason why one (usually) uses the étale site and not the Zariski site.

We stop here our brief review of log-schemes. In the sequel, we refer without comment to [**43**] or to [**71**, 3] in this volume for the definition of log-étale and log-smooth morphisms, exact morphisms, integral morphisms, closed immersions of log-schemes, ...

2.2.2. The semi-stable ℓ-adic or ℓ-torsion representations of G_K are the continuous representations such that the inertia acts unipotently (and consequently through its tame quotient). Let Σ_K be the log-scheme $\mathcal{O}_K \smallsetminus \{0\} \to \mathcal{O}_K$ and $\Sigma_{\overline{k}}$ the integral (not fine) log-scheme $\mathcal{O}_{\overline{K}} \smallsetminus \{0\} \to \overline{k}$. If X is a fine log-scheme over Σ_K, we denote by $X \times_{\Sigma_K} \Sigma_{\overline{k}}$ the fiber product in the category of integral log-schemes which is also, in this case, the fiber product in the category of all log-schemes (in particular the underlying scheme is just $X \times_{\mathcal{O}_K} \overline{k}$).

***Theorem 2.2.1* ([58, 4.2]).** — *Let X be a proper semi-stable scheme over $\mathcal{O}_K$ and endow it with its canonical log-structure (2.2.1.2). For $n \in \mathbf{N}$ and $i \in \mathbf{N}$, there are isomorphisms compatible with the action of G_K:*

$$H^i((X \times_{\Sigma_K} \Sigma_{\overline{k}})_{\log-\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^i((X \times_{\mathcal{O}_K} \overline{K})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}).$$

Here, the left hand side is the log-étale cohomology of the log-scheme $X \times_{\Sigma_K} \Sigma_{\overline{k}}$ defined by Nakayama ([**57**]) and the map is also induced by a specialization map (see [**58**]). One can show this implies $(g-\mathrm{Id})^{i+1} = 0$ on $H^i((X \times_{\mathcal{O}_K} \overline{K})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$ for g in the inertia subgroup ([**58**, 3.7]), and so the representation $H^i((X \times_{\mathcal{O}_K} \overline{K})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$ is semi-stable. This result was already known in this situation by work of Rapoport-Zink ([**63**]), but the above theorem can be extended to a much more general situation. For details, see [**58**] and Illusie's nice surveys [**39**], [**40**].

In the sequel, we will consider the case $\ell = p$. The theory here becomes more involved and it turns out that it's *not* convenient to describe directly the action of Galois on $H^i((X \times_{\mathcal{O}_K} \overline{K})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. Fortunately, one has instead explicit objects, living in the realm of linear algebra, that can (and will) be used to state comparison theorems between this p-torsion étale cohomology and a cohomology theory related to the special fiber, at least (so far) if one restricts to $K = K_0$ and H^i's with $p > i$. The case of arbitrary K is still under investigation for p-torsion ([**21**], [**11**]), although

there is probably a nice theory if $p > i[K:K_0]$ (see [**11**]). The case $i \geqslant p$ (or even $i[K:K_0] \geqslant p$) is still largely open. For these reasons, we will now assume from § 3 to § 8 that $K = K_0$ and consider only those cohomology groups H^i for i not too big.

3. The p-torsion case: good reduction and Fontaine-Laffaille-Messing theory

Recall that a p-adic representation V of G_{K_0} that has "good reduction" is a crystalline representation i.e. such that $\dim_{K_0}(B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_{K_0}} = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$ ([**25**, 5]). Here B_{cris} is a K_0-algebra that only depends on $\overline{K}/K_0$ and will be defined in (3.1.2). Our aim is to recall briefly the Fontaine-Laffaille theory of [**31**], that basically describes torsion subquotients of some crystalline representations, and the Fontaine-Messing theory [**32**] that applies the work of Fontaine and Laffaille to the study of p-torsion (and so p-adic) étale cohomology of varieties with good reduction over W.

3.1. Review of the Fontaine-Laffaille theory

3.1.1. To any crystalline representation, Fontaine associates in [**25**, 5] a weakly admissible filtered ϕ-module. We explain briefly what this is. A filtered ϕ-module D is a finite dimensional K_0-vector space endowed with a decreasing filtration by sub-K_0-vector spaces $\mathrm{Fil}^i D$ such that $\mathrm{Fil}^i D = D$ if $i \ll 0$, $\mathrm{Fil}^i D = 0$ if $i \gg 0$ and an injective K_0-semi-linear map $\phi : D \to D$ (the "Frobenius"). To such a D, we associate:

$$t_H(D) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} (\dim_{K_0} \mathrm{gr}^i D) i$$

$$t_N(D) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Q}} (\dim_{K_0} D_\alpha) \alpha$$

where $\alpha \in \mathbf{Q}$ and D_α is the sub-K_0-vector space of D of slope α for ϕ (see [**2**] and [**14**, 3.2]). We say D is weakly admissible if $t_H(D) = t_N(D)$ and $t_H(D') \leqslant t_N(D')$ for any sub-K_0-vector space $D' \subset D$ stable under ϕ with $\mathrm{Fil}^i D' = \mathrm{Fil}^i D \cap D'$. By the main result of [**14**], there is an *equivalence of categories* between weakly admissible filtered ϕ-modules and crystalline representations of G_{K_0}. Hence it's natural, if one wants integral or torsion crystalline representations, to look for integral structures first on the filtered module side. The following definition was inspired by the work of Mazur ([**49**], [**50**]) and Berthelot-Ogus [**4**, 8] on the Katz conjecture.

For $r \in \mathbf{N}$, define $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ to be the category of W-modules of finite length M endowed with a decreasing filtration by sub-W-modules $(\mathrm{Fil}^i M)_{i \in \mathbf{Z}}$ such that $\mathrm{Fil}^0 M = M$ and $\mathrm{Fil}^{r+1} M = 0$, and semi-linear maps (with respect to the Frobenius on W) $\phi_i : \mathrm{Fil}^i M \to M$ such that $\phi_i|_{\mathrm{Fil}^{i+1} M} = p\phi_{i+1}$ and $\sum_{i=0}^{r} \phi_i(\mathrm{Fil}^i M) = M$ (in the notation, "f" stands for "finite", since the modules are of finite length). Morphisms are the W-linear maps that send Fil^i to Fil^i and commute with ϕ_i. One thinks of ϕ_i

as "ϕ/p^i". Clearly $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ is a full sub-category of $\underline{MF}^{f,r+1}_{\mathrm{tor}}$. More importantly, one has the surprising result:

Proposition 3.1.1.1. — *Let $f : M \to N$ be a morphism in $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$. Then:*
1) f is strict with respect to the filtration, i.e. for all i, $f(\mathrm{Fil}^i M) = \mathrm{Fil}^i N \cap f(M)$
2) if M' is the kernel of the underlying linear map, $\mathrm{Fil}^i M' = M' \cap \mathrm{Fil}^i M$ and $\phi_i : \mathrm{Fil}^i M' \to M'$ the restriction of $\phi_i : \mathrm{Fil}^i M \to M$, we have $\sum_{i=0}^r \phi_i(\mathrm{Fil}^i M') = M'$.

See [**31**, 1.10, (b)] for the proof of 1) and [**31**, 1.10, (a)] for the proof of 2). Notice also that each $\mathrm{Fil}^i M$ is a direct factor of $\mathrm{Fil}^{i-1} M$: we say the M's are "filtered free" (this terminology is due to Faltings).

Corollary 3.1.1.2. — *The category $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ is abelian. More precisely, if f is as in (3.1.1.1), we have:*

$$\mathrm{Ker}(f) = (M', M' \cap \mathrm{Fil}^i M, \phi_i)$$
$$\mathrm{Coker}(f) = (N/f(M), \mathrm{Fil}^i N/f(\mathrm{Fil}^i M), \phi_i).$$

Since the underlying W-modules have finite length, $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ is also artinian. It is also of interest to consider the "without p-torsion" counterpart:

Definition 3.1.1.3. — A strongly divisible module is a free W-module M of finite type equipped with a decreasing filtration by sub-W-modules $(\mathrm{Fil}^i M)_{i\in\mathbf{Z}}$ such that $\mathrm{Fil}^0 M = M$, $\mathrm{Fil}^i M = 0$ for i big enough, $M/\mathrm{Fil}^i M$ has no p-torsion, and a semi-linear map $\phi : M \to M$ such that $\phi(\mathrm{Fil}^i M) \subset p^i M$ and $\sum_{i\in\mathbf{Z}} \frac{\phi}{p^i}(\mathrm{Fil}^i M) = M$.

If M is a strongly divisible module, $M/p^n M$ is in an obvious way an object of $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ for $r \gg 0$ by defining $\phi_i = \frac{\phi}{p^i}|_{\mathrm{Fil}^i} \bmod p^n$.

3.1.2. Let us recall the cohomological definition of A_{cris} (see also [**32**, I.1.3-1.5] or [**75**, 2.1]). The brutal formula is $A_{\mathrm{cris}} = \varprojlim H^0_{\mathrm{cris}}((\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})/W_n)$. The right hand side naturally appears as one of the components of a Künneth formula (see [**32**, III.1.3]). Either by a de Rham computation as in [**27**, 3.2] or by noticing that the crystalline site $(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})/W_n)_{\mathrm{cris}}$ has a final object as in [**32**, II.1.4], one can prove:

$$H^0_{\mathrm{cris}}((\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})/W_n) \simeq W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})^{\mathrm{DP}}$$

where "DP" means that we take the divided power envelope "compatible with the divided powers on (p) ([**4**, 3.19])" with respect to the kernel of the surjection $\theta_n : W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p) \to \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n$ defined by $\theta_n(a_0, \dots, a_{n-1}) = \widehat{a}_0^{p^n} + p\widehat{a}_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^{n-1}\widehat{a}_{n-1}^{p}$ ($\widehat{a}_i$ = any lifting of a_i in $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n$). So $A_{\mathrm{cris}} \simeq \varprojlim W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p)^{\mathrm{DP}}$, the projective system being taken with respect to the maps $W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p)^{\mathrm{DP}} \to W_{n-1}(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p)^{\mathrm{DP}}$ induced by $(a_0, \dots, a_{n-1}) \mapsto (a_0^p, \dots, a_{n-2}^p)$. Fontaine shows ([**27**, 3.1]) that A_{cris} is p-torsion free and that the projection on $W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p)^{\mathrm{DP}}$ induces an isomorphism $A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}} \simeq W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p)^{\mathrm{DP}}$. Because there is a Frobenius ϕ on the Witt vectors and because $\phi(\mathrm{Ker}(\theta_n)) \subset \mathrm{Ker}(\theta_n) + p(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n)$, the Frobenius extends to A_{cris}. Let

J_n^{cris} be the kernel of the surjection $W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p)^{\mathrm{DP}} \to \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n$ induced by θ_n, $J_n^{\mathrm{cris},[i]}$ its i^{th} divided power ([**4**, 3.24]) and $\mathrm{Fil}^i A_{\mathrm{cris}} = \varprojlim J_n^{\mathrm{cris},[i]}$, then $(\mathrm{Fil}^i A_{\mathrm{cris}})_{i\in\mathbf{N}}$ is a decreasing filtration on A_{cris} such that $\mathrm{Fil}^0 A_{\mathrm{cris}} = A_{\mathrm{cris}}$ and $\phi(\mathrm{Fil}^i A_{\mathrm{cris}}) \subset p^i A_{\mathrm{cris}}$ if $0 \leqslant i \leqslant p-1$ (look at the action of ϕ on J_n^{cris}). For $i \leqslant p-1$ let $\phi_i = \frac{\phi}{p^i}|_{\mathrm{Fil}^i A_{\mathrm{cris}}}$. Since $A_{\mathrm{cris}}/\mathrm{Fil}^i A_{\mathrm{cris}}$ has no p-torsion, $\mathrm{Fil}^i A_{\mathrm{cris}}/p^n \mathrm{Fil}^i A_{\mathrm{cris}}$ injects into $A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}$ and this defines a filtration on $A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}}$ to which we can extend ϕ_i for $0 \leqslant i \leqslant p-1$. Finally there is by functoriality a continuous action of G_{K_0} on A_{cris} that preserves the filtration and commutes with the Frobenius. For completeness, we recall that $B_{\mathrm{cris}} = A_{\mathrm{cris}}[1/\log([\varepsilon])] = A_{\mathrm{cris}}[1/p, 1/\log([\varepsilon])]$ where $\varepsilon = (\varepsilon_n)_n$ is a compatible system of primitive $p^{n^{\mathrm{th}}}$-roots of unity in $\mathcal{O}_{\overline{K}}$, $[\overline{\varepsilon}_n] \in W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p)$ the Teichmüller representative of the reduction modulo p of ε_n, and $[\varepsilon] = ([\overline{\varepsilon}_n])_n$ the corresponding element of A_{cris}.

3.1.3. Let $r \in \{0, \ldots, p-1\}$ and $M \in \underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$. Choose $n \in \mathbf{N}$ such that $p^n M = 0$ and define:

$$T^*_{\mathrm{cris}}(M) = \mathrm{Hom}_{W,\mathrm{Fil}^\cdot,\phi_\cdot}(M, A_{\mathrm{cris}}/p^n A_{\mathrm{cris}})$$

where the subscript means we take the W-linear maps that send Fil^i to Fil^i and commute with ϕ_i. The $\mathbf{Z}_p$-module $T^*_{\mathrm{cris}}(M)$ is independent of the choice of n such that $p^n M = 0$ and is endowed with an action of G_{K_0} given by $g(f)(x) = g(f(x))$ if $x \in M, f \in T^*_{\mathrm{cris}}(M)$. We thus have a functor from $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ to representations of G_{K_0}. The main result of the Fontaine-Laffaille theory is:

Theorem 3.1.3.1. — *For $0 \leqslant r \leqslant p-1$, the functor T^*_{cris} is exact and faithful. For $0 \leqslant r \leqslant p-2$, it is fully faithful.*

The proof reduces by dévissage to the case $pM = 0$ (M in $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$) and the fully faithfulness uses the classification of the simple objects of $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$. There is a nice variant in [**75**, 2] that avoids this classification. Actually, the full faithfulness extends to $r = p-1$ if one restricts to appropriate subcategories of $\underline{MF}^{f,p-1}_{\mathrm{tor}}$ ([**31**, 0.9]). As a corollary of (3.1.3.1), we get that for $0 \leqslant r \leqslant p-1$ the invariant factors of M and $T^*_{\mathrm{cris}}(M)$ coincide and in particular that $T^*_{\mathrm{cris}}(M)$ is a finite representation. The link to crystalline representations is provided by the following theorem, which is proved by a limit argument:

***Theorem 3.1.3.2* ([31, 8.4])**. — *Let M be a strongly divisible module of rank d such that $\mathrm{Fil}^p M = 0$, then $\mathrm{Hom}_{W,\mathrm{Fil}^\cdot,\phi}(M, A_{\mathrm{cris}})$ is a $\mathbf{Z}_p$-lattice in a d-dimensionnal crystalline representation of G_{K_0} with Hodge-Tate weights between 0 and $p-1$.*

Using [**48**, 3.2] this even shows that we get like this all the crystalline representations of G_{K_0} with Hodge-Tate weights between 0 and $p-1$. Define a *torsion* crystalline representation of weight $\leqslant r$ ($r \in \mathbf{N}$) to be any finite representation of G_{K_0} that can be written T/T' where $T' \subset T$ are Galois stable lattices in a crystalline representation of G_{K_0} with Hodge-Tate weights $\in \{0, \ldots, r\}$. Using (3.1.3.1), (3.1.3.2) and [**48**, 3.2]

together with the fact any object of $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ can be lifted as a strongly divisible module (easy), we finally get:

Theorem 3.1.3.3. — *For $0 \leqslant r \leqslant p-2$, the functor T^*_{cris} induces an anti-equivalence of categories between $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ and torsion crystalline representations of G_{K_0} of weight $\leqslant r$.*

Let us end this subsection with the description of the covariant version of T^*_{cris} which turns out to be more convenient for the application to geometry. Let M be in $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ and for simplicity assume $0 \leqslant r \leqslant p-2$ (we will only need that case in the sequel). Define $\mathrm{Fil}^r(A_{\mathrm{cris}} \otimes_W M) = \sum_{i=0}^r \mathrm{Fil}^{r-i} A_{\mathrm{cris}} \otimes_W \mathrm{Fil}^i M$ and $\phi_r = \sum_{i=0}^r \phi_{r-i} \otimes \phi_i$.

Lemma 3.1.3.4. — *With the above hypothesis, there is a canonical isomorphism of G_{K_0}-modules: $\mathrm{Fil}^r(A_{\mathrm{cris}} \otimes_W M)^{\phi_r=1} \xrightarrow{\sim} T^*_{\mathrm{cris}}(M)^\wedge(r)$ where the exponent "$\phi_r = 1$" on the left hand side means "kernel of $\phi_r - \mathrm{Id}$", where "(r)" denotes twisting by the r^{th} power of the cyclotomic character of G_{K_0} and where the exponent $\wedge$ on the right hand side means the Pontryagin dual with respect to $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$.*

For a proof, see for instance [**10**, 3.2.1.7]. In the sequel, we write:

$$T_{\mathrm{cris}}(M) = T^*_{\mathrm{cris}}(M)^\wedge \simeq \mathrm{Fil}^r(A_{\mathrm{cris}} \otimes_W M)^{\phi_r=1}(-r).$$

3.2. Review of the Fontaine-Messing results. — Let X be a proper smooth scheme over $\mathrm{Spec}(W)$. The Fontaine-Messing theory shows the functor T_{cris} above sends the torsion crystalline, or de Rham, cohomology of X to the torsion étale cohomology of $X \times_W \overline{K_0}$. We just give here a brief overview of the results of [**32**], since more details will be given in the sequel in the log-case.

Let $X_n = X \times_W W_n$ and $\sigma_{\geqslant j}\Omega^{\cdot}_{X_n} = 0 \to \cdots \to 0 \to \Omega^j_{X_n} \to \Omega^{j+1}_{X_n} \to \cdots$ the truncated classical de Rham complex. By Berthelot's comparison theorem ([**4**, 7.2]), $H^i(X_n, \sigma_{\geqslant j}\Omega^{\cdot}_{X_n}) \simeq H^i((X_n/W_n)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}^{[j]}_{X_n/W_n})$ where $\mathcal{J}_{X_n/W_n} = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{X_n/W_n} \to \mathcal{O}_{X_n})$ (here $\mathcal{O}_{X_n/W_n}$ is the structure sheaf on $(X_n/W_n)_{\mathrm{cris}}$ and $\mathcal{O}_{X_n}$ the classical structure sheaf on X_n, see [**4**, 5.2] for details). In particular, there is a Frobenius ϕ (the "crystalline Frobenius") on $H^i(X_n, \Omega^{\cdot}_{X_n})$. Working with the syntomic interpretation of the groups $H^i((X_n/W_n)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}^{[j]}_{X_n/W_n})$ ([**32**, II.2.2]), it is also possible to define for $0 \leqslant j \leqslant p-1$ semi-linear maps $\phi_j =$ "ϕ/p^j" : $H^i(X_n, \sigma_{\geqslant j}\Omega^{\cdot}_{X_n}) \to H^i(X_n, \Omega^{\cdot}_{X_n})$ such that $\phi_0 = \phi$.

Theorem 3.2.1 **([32,** II.2.7**])**. — *Let X be a proper smooth scheme over W. For $n \in \mathbf{N}$ and $0 \leqslant i \leqslant r \leqslant p-1$, the data:*

$$\Big(H^i(X_n, \Omega^{\cdot}_{X_n}), (H^i(X_n, \sigma_{\geqslant j}\Omega^{\cdot}_{X_n}))_{0 \leqslant j \leqslant r}, (\phi_j)_{0 \leqslant j \leqslant r}\Big)$$

define an object of the category $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$. That is to say the maps:

$$H^i(X_n, \sigma_{\geqslant j}\Omega^{\cdot}_{X_n}) \longrightarrow H^i(X_n, \Omega^{\cdot}_{X_n})$$

induced by the canonical injection of complexes are injective and $\sum_{j=0}^{r} \mathrm{Im}(\phi_j) = H^i(X_n, \Omega^{\cdot}_{X_n})$.

The main ingredient of the proof is an isomorphism which is now called the Deligne-Illusie isomorphism (because its construction was simplified and generalized in [**16**]).

Remark 3.2.2. — One can also define the Frobenius maps by purely de Rham considerations using local liftings of Frobenius (see [**45**, 1] or [**16**]).

Theorem 3.2.3 **([32**, III.6.4**])**. — *Let* X *be a proper smooth scheme over* W. *For* $n \in \mathbf{N}$ *and* $0 \leqslant i \leqslant r \leqslant p-2$, *there are isomorphisms compatible with the action of* G_{K_0}*:*

$$T_{\mathrm{cris}}\Big(H^i(X_n, \Omega^{\cdot}_{X_n}), (H^i(X_n, \sigma_{\geqslant j}\Omega^{\cdot}_{X_n}))_{0\leqslant j\leqslant r}, (\phi_j)_{0\leqslant j\leqslant r}\Big) \simeq H^i((X\times_W \overline{K_0})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}).$$

It doesn't seem to be known in general whether (3.2.3) extends to $i = r = p-1$. As in the ℓ-torsion case, this theorem compares something living on the special fiber of X with something living on the geometric generic fiber. The strategy to prove (3.2.3) is *first* to define a third Galois representation called the "syntomic" cohomology (this uses the syntomic sheaves $\mathcal{S}_n^r$ of [**32**, III.3] and their cohomology), *secondly* to show this syntomic cohomology maps isomorphically and compatibly with Galois to $H^i((X\times_W \overline{K_0})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})(r)$ (this relies heavily on computations of Bloch-Kato [**6**] and Kato [**45**] on the sheaves of nearby cycles), *thirdly* to show this syntomic cohomology also maps isomorphically and compatibly with Galois to $T_{\mathrm{cris}}(H^i(X_n, \Omega^{\cdot}_{X_n}))(r)$ (this uses (3.2.1) and properties of A_{cris} together with Künneth formulas, see [**32**, III.1-2]). The isomorphism (3.2.3) gives deep information about the action of G_{K_0} on $H^i((X \times_W \overline{K_0})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ for $p-1 > i$. For example, one can give an upper bound for the valuation of the different of the finite extension of K_0 cut out by this finite representation, or a lower bound for the index of the ramification subgroups of G_{K_0} (in the upper numbering) that act trivially on $H^i((X \times_W \overline{K_0})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ (see 9.2.2). Also, one can deduce that the weights of the action of the tame inertia (of G_{K_0}) on the semi-simplification of the reduction modulo p of $H^i((X \times_W \overline{K_0})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ are between 0 and i ([**31**, 5.3]).

Remark 3.2.4. — If one is only interested in the $\mathbf{Q}_p$-version of (3.2.3), there is a way to obtain it without using Kato's computations by first building a map from the syntomic cohomology to $H^i((X \times_W \overline{K_0})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})(r)$ using the so-called "syntomic-étale" site of $X \times_W \mathcal{O}_{\overline{K}}$ and then showing it is an isomorphism after taking the inverse limit and tensoring by $\mathbf{Q}_p$ using Poincaré duality. See [**32**, III.4-III.6]. In [**72**], Tsuji has sketched an extension of this approach using a "log-syntomic-étale" site.

4. Semi-stable reduction: why $W_n\langle u\rangle$ -modules?

The p-adic semi-stable representations are defined similarly to the crystalline representations by using B_{st} instead of B_{cris} (see [**24**], [**25**]; non canonically B_{st} may

be defined as $B_{\mathrm{cris}}[v]$, a polynomial algebra, on which the Galois action extends that on B_{cris} and acts on v via $g(v) = \log[\varepsilon(g)] + v$ where $\varepsilon : G_{K_0} \to \varprojlim \mu_{p^n}(\overline{K})$ is the 1-cocycle associated to a choice of a compatible system of $p^{n^{\mathrm{th}}}$-roots of a uniformizer of K_0; this ring is closely connected to the ring $\widehat{A_{\mathrm{st}}}$ of (5.2.1)). Our aim is to generalize to this situation the previous integral theories. So there are two tasks: the first is to find good categories of torsion objects of linear algebra that can be related to semi-stable representations, the second is to apply this theory to the cohomology of varieties with semi-stable reduction. We start with the first.

4.1. As in the crystalline case, one can associate to a semi-stable representation a weakly admissible filtered (ϕ, N)-module, that is to say a filtered ϕ-module D as in (3.1.1), but endowed with a K_0-linear endomorphism $N : D \to D$ (the "monodromy") satisfying $N\phi = p\phi N$ and such that the previous weakly admissibility conditions hold, except that one considers only those D' which are preserved both by ϕ and N in the second condition (see [**25**, 5]). Thanks to [**14**], one also has an equivalence of categories between weakly admissible filtered (ϕ, N)-modules and semi-stable representations (some cases here were known by work of the first author, see for instance (9.1.1.1)). An important point is that there are no direct relations between N and the filtration other than those coming from the weakly admissibility conditions.

If one wants to mimic the definition of (3.1), one is naturally led to introduce an operator N on the objects of $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ $(0 \leqslant r \leqslant p-2)$. The problem is that the only reasonnable translation of $N\phi = p\phi N$ is $N\phi_i = \phi_{i-1}N$ $(0 \leqslant i \leqslant r)$ since ϕ_i is morally ϕ/p^i. But such a relation would make sense only if $N(\mathrm{Fil}^i) \subset \mathrm{Fil}^{i-1}$ for all $i \in \{0, \dots, r\}$: this is called the "Griffiths transversality condition" (because similar conditions were found by Griffiths for the Gauss-Manin connection and the logarithm of monodromy in the classical case). Nevertheless, one can add this transversality condition and consider objects M of $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ together with a W-linear endomorphism $N : M \to M$ such that $N(\mathrm{Fil}^i M) \subset \mathrm{Fil}^{i-1} M$ and $N\phi_i = \phi_{i-1}N$ for $0 \leqslant i \leqslant r$. One ends up again with an abelian category and it is essentially routine to extend the previous Fontaine-Laffaille theory to this new context (see [**54**, I.3]). The only serious point is that one has to replace A_{cris} by the integral version of B_{st} (with the notation of (5.2.1) below, this is $A_{\mathrm{st}} = A_{\mathrm{cris}}[\log(1 + X_\pi)]$). These modules are called "naive" in [**9**, 5] as they correspond to a naive extension of the Fontaine-Laffaille theory (this terminology is due to Fontaine).

Of course, this approach only gives a small part of the picture of semi-stable representations, since the condition $N(\mathrm{Fil}^i) \subset \mathrm{Fil}^{i-1}$ is not required in general on a weakly admissible module. It is sufficient in some cases, for example $\mathrm{Fil}^2 = 0$. For instance, using such naive modules, one can build (up to twist) the "très ramifiées" local representations of Serre in [**65**, 2.4] (the "peu ramifiées" ones corresponding to $N = 0$ i.e. classical objects of $\underline{MF}^{f,1}_{\mathrm{tor}}$).

4.2. In [**44**, 3], Kato defines a W-algebra $\varprojlim P_n$, which is called $\widehat{A_{\mathrm{st}}}$ in [**9**], by mimicing in the logarithmic context the crystalline construction of B_{cris} of [**27**] and [**32**] (see 5.2.1). This algebra naturally lives over the p-adic completion S of $W\langle u\rangle = \{\sum_{i=0}^{n} w_i u^i/i! \mid w_i \in W, n \in \mathbf{N}\}$ where u is an indeterminate whose image in $\widehat{A_{\mathrm{st}}}$ depends on the choice of an uniformizer in W (other authors have used t or T). More importantly, $\widehat{A_{\mathrm{st}}}$ is endowed with a filtration, a Frobenius, a monodromy operator and the above Griffiths transversality *is satisfied*, whereas it is certainly not the case on A_{st} (viewed in $B_{\mathrm{st}} \subset B_{\mathrm{dR}}$, cf. [**8**, 7]). This suggests working with S-modules instead of W-modules, and imposing on these the Griffiths transversality condition.

Choose an uniformizer π of W and define on S a filtration by $\mathrm{Fil}^i S = p$-adic completion of the ideal generated by $\{(u-\pi)^j/j!,\ j \geqslant i\}$, a (lifting of) Frobenius by $\phi(\sum w_i\, u^i/i!) = \sum \phi(w_i) u^{pi}/i!$ (here $\phi(w_i)$ is the classical Frobenius on the Witt vectors) and a W-linear derivation N by $N(\sum w_i\, u^i/i!) = \sum (-1)^i i w_i\, u^i/i!$ (i.e. $N(u) = -u$: the reason for the minus sign is explained in (6.2.3.3)). Let $S_{K_0} = K_0 \otimes_W S$ and extend in the obvious way these structures to S_{K_0}. Let $\underline{MF}^{+}_{K_0}(\phi, N)$ be the category of filtered (ϕ, N)-modules D of (4.1) such that $\mathrm{Fil}^0 D = D$ (morphisms being the K_0-linear maps that preserve the filtration and commute with the operators). Let $\underline{\mathfrak{MF}}^{+}_{K_0}(\phi, N)$ be the category of finitely generated free S_{K_0}-modules $\mathcal{D}$ equipped with:
(i) a decreasing filtration by sub-S_{K_0}-modules $\mathrm{Fil}^i \mathcal{D}$ such that

$$\mathrm{Fil}^0 \mathcal{D} = \mathcal{D}, \quad \mathrm{Fil}^j S_{K_0} \mathrm{Fil}^i \mathcal{D} \subset \mathrm{Fil}^{j+i} \mathcal{D} \quad \text{and}$$
$$\mathrm{Fil}^i \mathcal{D} = \mathrm{Fil}^1 S_{K_0} \mathrm{Fil}^{i-1} \mathcal{D} + \mathrm{Fil}^i S_{K_0} \mathcal{D} \text{ if } i \gg 0$$

(ii) an S_{K_0}-semi-linear map $\phi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ such that $\det(\phi) \in S_{K_0}^*$ (in one, or equivalently any, basis of $\mathcal{D}$ over S_{K_0})
(iii) a K_0-linear map $N : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ such that $N(sx) = N(s)x + sN(x)$ $(s \in S_{K_0}, x \in \mathcal{D})$, $N\phi = p\phi N$ and $N(\mathrm{Fil}^i \mathcal{D}) \subset \mathrm{Fil}^{i-1} \mathcal{D}$.
The morphisms in this category are the S_{K_0}-linear maps compatible with the structures. Let:

$$f_\pi : S_{K_0} \longrightarrow K_0$$
$$\textstyle\sum w_i\, u^i/i! \longmapsto \sum w_i\, \pi^i/i!.$$

We define a functor $\underline{MF}^{+}_{K_0}(\phi, N) \to \underline{\mathfrak{MF}}^{+}_{K_0}(\phi, N)$ as follows: to D, we associate $\mathcal{D} = S_{K_0} \otimes_{K_0} D$ with $\phi = \phi \otimes \phi$, $N = N \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N$ and $\mathrm{Fil}^i \mathcal{D}$ defined inductively by $\mathrm{Fil}^0 \mathcal{D} = \mathcal{D}$ and $\mathrm{Fil}^i \mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D} \mid N(x) \in \mathrm{Fil}^{i-1} \mathcal{D} \text{ and } f_\pi(x) \in \mathrm{Fil}^i D\}$.

***Theorem 4.2.1* ([8, 6]).** — *The above functor induces an equivalence of categories between $\underline{MF}^{+}_{K_0}(\phi, N)$ and $\underline{\mathfrak{MF}}^{+}_{K_0}(\phi, N)$.*

The proof uses an argument of iteration of Frobenius which goes back to Berthelot-Ogus ([**5**]) (and which was actually rediscovered independently). The last condition in (i) above corresponds to the fact that the filtrations on objects in $\underline{MF}^{+}_{K_0}(\phi, N)$ are

separated. Because of this theorem, we can try to look for integral structures inside the $\mathcal{D}$'s instead of inside the D's. The fact one could try to work with S-modules instead of W-modules had also been noticed independently by Faltings ([**20**]), Tsuzuki ([**73**]), and Quiros (in a related context, see [**60**]).

4.3. First, notice that for $0 \leqslant i \leqslant p-1$, $\phi(\mathrm{Fil}^i S) \subset p^i S$, and define $\phi_i = \frac{\phi}{p^i}|_{\mathrm{Fil}^i S}$. Since $\mathrm{Fil}^i S \cap pS = p\,\mathrm{Fil}^i S$, there is a filtration on S/p^nS defined by $\mathrm{Fil}^i(S/p^nS) = \mathrm{Fil}^i S/p^n\,\mathrm{Fil}^i S$ and we can extend ϕ_i to $\mathrm{Fil}^i(S/p^nS)$ for $0 \leqslant i \leqslant p-1$. Also $\phi_1(u-\pi) = (u^p - \phi(\pi))/p \in S^*$. Starting from a filtered (ϕ, N)-module D, we have now another module where the Griffiths transversality is satisfied. Thinking about the naive case of (4.1), it is then natural to look for torsion S-modules $\mathcal{M}$ which are isomorphic to, say, $\oplus_{i\in I}(S/p^iS)^{d_i}$ where I is a finite set of integers and $d_i \in \mathbf{N}$, and which are endowed with:
(i) a filtration $\mathrm{Fil}^i \mathcal{M}$ such that

$$\mathrm{Fil}^0 \mathcal{M} = \mathcal{M}, \quad \mathrm{Fil}^j S\,\mathrm{Fil}^i \mathcal{M} \subset \mathrm{Fil}^{j+i}\mathcal{M},$$
$$\mathrm{Fil}^i \mathcal{M} = \mathrm{Fil}^1 S\,\mathrm{Fil}^{i-1}\mathcal{M} + \mathrm{Fil}^i S\mathcal{M} \text{ if } i \geqslant r+1 \text{ (for, say, an } r \in \{0,\dots,p-2\})$$

(ii) for $0 \leqslant i \leqslant r$ maps $\phi_i : \mathrm{Fil}^i \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ such that

$$\phi_{j+i}(sx) = \phi_j(s)\phi_i(x)\ (s \in \mathrm{Fil}^j S, x \in \mathrm{Fil}^i \mathcal{M}), \quad \phi_i|_{\mathrm{Fil}^{i+1} S} = p\phi_{i+1} \quad \text{and}$$
$$\textstyle\sum_{i\geqslant 0} \phi_i(\mathrm{Fil}^i \mathcal{M}) \text{ generates } \mathcal{M} \text{ over } S$$

(iii) a W-linear map $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ such that

$$N(sx) = N(s)x + sN(x)\ (s \in S, x \in \mathcal{M}),\ N\phi_i = \phi_{i-1}N \text{ and } N(\mathrm{Fil}^i \mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^{i-1}\mathcal{M}.$$

Moreover, thinking about the objects of $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ (3.1.1), it is tempting at first to consider only those modules which are "filtered free" in the following sense: we assume we can write:

$$\mathcal{M} = \oplus_{j=1}^d S/p^{n_j}Se_j \text{ and } \mathrm{Fil}^i \mathcal{M} = \oplus_{j\geqslant d_i}^d S/p^{n_j}Se_j + \mathrm{Fil}^1 S\,\mathrm{Fil}^{i-1}\mathcal{M} + \mathrm{Fil}^i S\mathcal{M}$$

for some integers $1 = d_0 \leqslant d_1 \leqslant \cdots \leqslant d_{r+1} = d+1$. Remember that our aim is to define an abelian (or even artinian) category of such objects. As in the Fontaine-Laffaille case, this is reasonnable only if the morphisms in this hypothetical category are *strict* with respect to the filtration, i.e. if $f(\mathrm{Fil}^i \mathcal{M}) = \mathrm{Fil}^i \mathcal{N} \cap f(\mathcal{M})$ for any morphism $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ and any i. But consider the following example:

Example 4.3.1. — Consider the filtered free S/pS-modules $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ and $\mathcal{M}''$ defined by: $\mathcal{M} = S/pSe_1 \oplus S/pSe_2$ with

$$\mathrm{Fil}^1 \mathcal{M} = S/pS(e_1 + ue_2) + \mathrm{Fil}^1(S/pS)\mathcal{M},$$
$$\mathrm{Fil}^2 \mathcal{M} = S/pS(e_1 + ue_2) + \mathrm{Fil}^1(S/pS)\,\mathrm{Fil}^1 \mathcal{M} + \mathrm{Fil}^2(S/pS)\mathcal{M},$$
$$\mathrm{Fil}^i \mathcal{M} = \mathrm{Fil}^1(S/pS)\,\mathrm{Fil}^{i-1}\mathcal{M} + \mathrm{Fil}^i(S/pS)\mathcal{M} \text{ if } i \geqslant 3,$$

$\phi_0(e_2) = e_1$, $\phi_2(e_1 + ue_2) = e_2$, $N(e_2) = -\phi_1(u)e_1$, $N(e_1) = 0$.

$\mathcal{M}' = S/pSe_1$ with

$$\begin{aligned}&\mathrm{Fil}^1\,\mathcal{M}' = \mathcal{M}',\\ &\mathrm{Fil}^i\,\mathcal{M}' = \mathrm{Fil}^1(S/pS)\,\mathrm{Fil}^{i-1}\,\mathcal{M}' + \mathrm{Fil}^i(S/pS)\mathcal{M}' \text{ if } i \geqslant 2,\end{aligned}$$

$\phi_1(e_1) = -\phi_1(u)e_1$, $N(e_1) = 0$.

$\mathcal{M}'' = S/pSe_2$ with

$$\begin{aligned}&\mathrm{Fil}^1\,\mathcal{M}'' = \mathcal{M}'',\\ &\mathrm{Fil}^i\,\mathcal{M}'' = \mathrm{Fil}^1(S/pS)\,\mathrm{Fil}^{i-1}\,\mathcal{M}'' + \mathrm{Fil}^i(S/pS)\mathcal{M}'' \text{ if } i \geqslant 2,\end{aligned}$$

$\phi_1(e_2) = \phi_1(u)^{-1}e_2$, $N(e_2) = 0$.

One checks there are morphisms compatible with all the structures $\mathcal{M}' \to \mathcal{M}, e_1 \mapsto e_1$ and $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'', e_1 \mapsto 0, e_2 \mapsto e_2$ and that the sequences of S-modules $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ and $0 \to \mathrm{Fil}^i\,\mathcal{M}' \to \mathrm{Fil}^i\,\mathcal{M} \to \mathrm{Fil}^i\,\mathcal{M}'' \to 0$ for $i \geqslant 2$ are exact. However, the sequence $0 \to \mathrm{Fil}^1\,\mathcal{M}' \to \mathrm{Fil}^1\,\mathcal{M} \to \mathrm{Fil}^1\,\mathcal{M}'' \to 0$ is *not* exact since $e_2 \in \mathrm{Fil}^1\,\mathcal{M}''$ cannot be lifted in $\mathrm{Fil}^1\,\mathcal{M}$. In particular the morphism $\mathcal{M} \to \mathcal{M}''$ is *not* strict.

The above example suggests one should give up the full data of a filtration and keep only the "last step" $\mathrm{Fil}^r\,\mathcal{M}$ (Fil^2 above) in order to get (hopefully) strict morphisms. Moreover, using the fact $\phi_1(u - \pi)$ is a unit, it is possible to give analogues of all the above conditions on an object $\mathcal{M}$ in terms of $\mathrm{Fil}^r\,\mathcal{M}$ only: for instance $\sum_{i\geqslant 0}\phi_i(\mathrm{Fil}^i\,\mathcal{M})$ generates $\mathcal{M}$ over S if and only if $\phi_r(\mathrm{Fil}^r\,\mathcal{M})$ does. Hence working with "just" Fil^r and ϕ_r may not be a bad idea.

We explain in the next section that this idea indeed works, and yields nice artinian categories of torsion S-modules.

5. A generalization of the Fontaine-Laffaille theory

Because the maps ϕ_i on S are only defined for $0 \leqslant i \leqslant p-1$, we have to make at once a restriction on the length of the filtration, contrary to what we did in (3.1.1) with the Fontaine-Laffaille objects. This is not very important since, anyway, these Fontaine-Laffaille objects could only be used in (3.1.3) under this restriction (and are apparently *not* the right objects when the filtration goes further). Moreover, the theory in [**9**] has only been worked out when this length is actually strictly smaller than $p-1$. So in the sequel, we only look at modules with a "filtration" between 0 and r for a fixed integer r between 0 and $p-2$ (although the theory probably extends to $r = p-1$ if one restricts to appropriate subcategories, as in [**31**]). We let $c = \phi_1(u - \pi) \in S^*$.

5.1. Definition of the categories

5.1.1. Recall we have fixed an uniformizer π of W. Define $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$ to be the following category. An object is the data of:
(i) an S-module $\mathcal{M}$ abstractly isomorphic to $\oplus_{i\in I}(S/p^iS)^{d_i}$ where I is a finite set of integers and $d_i \in \mathbf{N}$
(ii) a sub-S-module $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}$ containing $\mathrm{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$
(iii) a map $\phi_r : \mathrm{Fil}^r \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ semi-linear with respect to the Frobenius on S and such that $c^r\phi_r(sx) = \phi_r(s)\phi_r((u-\pi)^r x)$ ($s \in \mathrm{Fil}^r S$, $x \in \mathcal{M}$) and $\phi_r(\mathrm{Fil}^r \mathcal{M})$ generates $\mathcal{M}$ over S
(iv) a map $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ such that

$$N(sx) = N(s)x + sN(x)\ (s \in S,\ x \in \mathcal{M}), \quad (u-\pi)N(\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^r \mathcal{M} \quad \text{and}$$
$$cN \circ \phi_r = \phi_r \circ (u-\pi)N|_{\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}}$$

and morphisms are the S-linear maps that send Fil^r to Fil^r and commute with ϕ_r and N. If $r+1 \leqslant p-2$, there is a fully faithful functor $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r \to \underline{\mathcal{M}}_\pi^{r+1}$ ([**9**, 2.1.2.1]).

Theorem 5.1.1.1. — *Let $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ be a morphism in $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$. Then:*
1) $f(\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}) = \mathrm{Fil}^r \mathcal{N} \cap f(\mathcal{M})$
2) if $\mathcal{M}'$ is the kernel of the underlying S-linear map, $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}' = \mathrm{Fil}^r \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$, $\phi_r : \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}' \to \mathcal{M}'$ the restriction of $\phi_r : \mathrm{Fil}^r \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ and $N : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}'$ the restriction of $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, we have $\mathcal{M}' \simeq \oplus_{i\in I'}(S/p^iS)^{d'_i}$ and $\phi_r(\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}')$ generates $\mathcal{M}'$ over S
3) $\mathcal{N}/f(\mathcal{M}) \simeq \oplus_{i\in I''}(S/p^iS)^{d''_i}$.

The proof is by a dévissage that reduces to the case where $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ are killed by p and then uses (5.1.2.1) below. See [**9**, 2.1.2.2] for details.

Corollary 5.1.1.2. — *The category $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$ is abelian. More precisely, if f is as in (5.1.1.1), we have:*

$$\mathrm{Ker}(f) = (\mathcal{M}', \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}', \phi_r, N)$$
$$\mathrm{Coker}(f) = (\mathcal{N}/f(\mathcal{M}), \mathrm{Fil}^r \mathcal{N}/f(\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}), \phi_r, N).$$

Since all the modules are of the form $\oplus_{i\in I}(S/p^iS)^{d_i}$, $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$ is artinian. There is a natural functor $\mathcal{F}_\pi^r : \underline{MF}_{\mathrm{tor}}^{f,r} \to \underline{\mathcal{M}}_\pi^r$ that associates to M the object $\mathcal{F}_\pi^r(M) = S \otimes_W M$ with $\mathrm{Fil}^r \mathcal{F}^r(M) = \sum_{j=0}^r \mathrm{Fil}^{r-j} S \otimes_W \mathrm{Fil}^j M$, $\phi_r = \sum_{j=0}^r \phi_{r-j} \otimes \phi_j$ and $N = N \otimes \mathrm{Id}$.

Proposition 5.1.1.3 **([9, 2.4])**. — *The functor $\mathcal{F}_\pi^r$ is exact and fully faithful. Via $\mathcal{F}_\pi^r$, the categories $\underline{MF}_{\mathrm{tor}}^{f,r}$ and $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$ have the same simple objects.*

The same statement is true if one replaces $\underline{MF}_{\mathrm{tor}}^{f,r}$ by the "naive" corresponding objects (i.e. adding a N on the objects of $\underline{MF}_{\mathrm{tor}}^{f,r}$, see (4.1)). In fact, for $r \leqslant 1$, there is even an equivalence of categories between $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$ and these naive objects ([**10**, 4.4.1]).

As in the classical case, we can define the "without p-torsion" version of $\underline{\mathcal{M}}_\pi^r$:

Definition 5.1.1.4. — A strongly divisible module of weight $\leqslant r$ is a free S-module $\mathcal{M}$ of finite type equipped with a sub-S-module $\mathrm{Fil}^r\,\mathcal{M}$ containing $\mathrm{Fil}^r\,S\cdot\mathcal{M}$ and such that $\mathcal{M}/\mathrm{Fil}^r\,\mathcal{M}$ has no p-torsion, a semi-linear map $\phi:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ such that $\phi(\mathrm{Fil}^r\,\mathcal{M})\subset p^r\mathcal{M}$ and $\frac{\phi}{p^r}(\mathrm{Fil}^r\,\mathcal{M})$ generates $\mathcal{M}$ over S, and a map $N:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ such that $N(sx)=N(s)x+sN(x)$ $(s\in S, x\in\mathcal{M})$, $N\phi=p\phi N$ and $(u-\pi)N(\mathrm{Fil}^r\,\mathcal{M})\subset\mathrm{Fil}^r\,\mathcal{M}$.

If $\mathcal{M}$ is a strongly divisible module of weight $\leqslant r$, $\mathcal{M}/p^n\mathcal{M}$ is in an obvious way an object of $\underline{\mathcal{M}}^r_\pi$ by defining $\phi_r=\frac{\phi}{p^r}|_{\mathrm{Fil}^r}$ mod p^n and $\mathcal{M}$ is also of weight $\leqslant r+1$ (if $r+1<p-1$). Finally, we claim the categories $\underline{\mathcal{M}}^r_\pi$ (and the categories of strongly divisible modules) do not depend on the choice of π:

Proposition 5.1.1.5. — *For each choice of $w\in W^*$, there is a canonical equivalence of categories $\underline{\mathcal{M}}^r_\pi\xrightarrow{\approx}\underline{\mathcal{M}}^r_{\pi w}$ such that the composite $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}\xrightarrow{\mathcal{F}^r_\pi}\underline{\mathcal{M}}^r_\pi\xrightarrow{\approx}\underline{\mathcal{M}}^r_{\pi w}$ is $\mathcal{F}^r_{\pi w}$.*

Proof. — We give a proof, since it's not in the literature. If $r=0$, this is trivially true since in that case $\mathcal{F}^0_\pi$ above is actually an equivalence of categories and $\underline{MF}^{f,0}_{\mathrm{tor}}$ doesn't depend on any choice. So assume $1\leqslant r\leqslant p-2$ and let $\pi'=\pi w$ with $w\in W^*$. Assume first that $w=[\kappa]$ for a κ in k^* (Teichmüller representative). Then the map $[\kappa^{-1}]:S\to S,\gamma_i(u)\mapsto\gamma_i(u[\kappa^{-1}])$ commutes with ϕ. To any object $\mathcal{M}_\pi\in\underline{\mathcal{M}}^r_\pi$ we associate $\mathcal{M}_{\pi'}=\mathcal{M}_{\pi[\kappa]}=(S\otimes_{[\kappa^{-1}],S}\mathcal{M}_\pi, S\otimes_{[\kappa^{-1}],S}\mathrm{Fil}^r\,\mathcal{M}_\pi,\phi\otimes\phi_r, N\otimes\mathrm{Id}+\mathrm{Id}\otimes N)$: this clearly defines an equivalence of categories $\underline{\mathcal{M}}^r_\pi\xrightarrow{\sim}\underline{\mathcal{M}}^r_{\pi'}$. In general, write $w=[\kappa]\omega$ with $\omega\in1+pW$ and define:

$$\nu:\mathcal{M}_{\pi[\kappa]}\longrightarrow\mathcal{M}_{\pi[\kappa]},\quad x\longmapsto\exp(N(\log(\omega^{-1})))(x)=\sum_{i\geqslant0}\frac{(-\log\omega)^i}{i!}N^i(x)$$

which makes sense since $p\geqslant3$. To $\mathcal{M}_{\pi[\kappa]}$ we associate:

$$\mathcal{M}_{\pi'}=\Big(\mathcal{M}_{\pi[\kappa]},\nu(\mathrm{Fil}^r\,\mathcal{M}_{\pi[\kappa]}),\exp(N(\frac{\log(\phi(\omega^{-1}))}{p}))\circ\phi_r\circ\nu^{-1},N\Big)$$

which also makes sense since $N^i\circ\phi_r(x)\in p^{i-r}\mathcal{M}_{\pi[\kappa]}$ if $i\geqslant r$. One checks the functor $\mathcal{M}_\pi\mapsto\mathcal{M}_{\pi'}$ satisfies the required properties. □

5.1.2. We describe here in more detail the case when $\mathcal{M}$ is killed by p which turns out to be simpler. Denote by $\underline{\mathcal{M}}^r_{k,\pi}$ the full subcategory of $\underline{\mathcal{M}}^r_\pi$ of objects killed by p. For $\mathcal{M}\in\underline{\mathcal{M}}^r_{k,\pi}$, let $\mathrm{Fil}^{r+1}\,\mathcal{M}=u\,\mathrm{Fil}^r\,\mathcal{M}+\mathrm{Fil}^p(S/pS)\mathcal{M}$.

Lemma 5.1.2.1. — *Let $\mathcal{M}$ in $\underline{\mathcal{M}}^r_{k,\pi}$.*
1) $\mathrm{Id}\otimes\phi_r$ induces an isomorphism $S/pS\otimes_{(\phi),k}\mathrm{Fil}^r\,\mathcal{M}/\mathrm{Fil}^{r+1}\,\mathcal{M}\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}$
2) the natural map $S/pS\otimes_k\phi_r(\mathrm{Fil}^r\,\mathcal{M})\to\mathcal{M}$ is an isomorphism.

See [**9**, 2.2.2.2] for the proof of this easy lemma. The isomorphism 1) above is called the Faltings Isomorphism Condition in [**9**] because a variant was already considered in [**20**] (but with different categories). Using 1), it is not difficult to show the category

$\underline{\mathfrak{M}}^r_{k,\pi}$ is abelian. Another advantage of $\underline{\mathfrak{M}}^r_{k,\pi}$ is that it can be described without divided powers:

Let $S_1 = S/pS$, $\widetilde{S}_1 = k[u]/u^p$ and $s : S_1 \to \widetilde{S}_1$ the surjection that sends u^i to u^i and $\gamma_i(u)$ to 0 if $i \geqslant p$. Define $\mathrm{Fil}^i \widetilde{S}_1 = s(\mathrm{Fil}^i S_1) = u^i \widetilde{S}_1$ and $\widetilde{\phi}_i$, $\widetilde{N}$ to be the image of ϕ_i, N. Let $\underline{\widetilde{\mathfrak{M}}}^r_{k,\pi}$ the category of finitely generated free $\widetilde{S}_1$-modules $\widetilde{\mathcal{M}}$ endowed with a sub-$\widetilde{S}_1$-module $\mathrm{Fil}^r \widetilde{\mathcal{M}}$ containing $u^r\widetilde{\mathcal{M}}$, a semi-linear map $\widetilde{\phi}_r : \mathrm{Fil}^r \widetilde{\mathcal{M}} \to \widetilde{\mathcal{M}}$ such that $\widetilde{\phi}_r(\mathrm{Fil}^r \widetilde{\mathcal{M}})$ generates $\widetilde{\mathcal{M}}$ and an additive map $\widetilde{N} : \widetilde{\mathcal{M}} \to \widetilde{\mathcal{M}}$ such that $\widetilde{N}(sx) = \widetilde{N}(s)x + s\widetilde{N}(x)$, $u\widetilde{N}(\mathrm{Fil}^r \widetilde{\mathcal{M}}) \subset \mathrm{Fil}^r \widetilde{\mathcal{M}}$ and $s(c)\widetilde{N} \circ \widetilde{\phi}_r = \widetilde{\phi}_r \circ u\widetilde{N}|_{\mathrm{Fil}^r}$. To $\mathcal{M}$ in $\underline{\mathfrak{M}}^r_{k,\pi}$ we associate $\widetilde{\mathcal{M}} = (\widetilde{S}_1 \otimes_{s,S_1} \mathcal{M}, \widetilde{S}_1 \otimes_{s,S_1} \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}, \widetilde{\phi} \otimes \phi_r, \widetilde{N} \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N)$ (it is easily checked that everything is well defined). This construction is functorial and we have:

Proposition 5.1.2.2 **([9**, 2.2.2]**)**. — *The functor $\underline{\mathfrak{M}}^r_{k,\pi} \to \underline{\widetilde{\mathfrak{M}}}^r_{k,\pi}$ that sends $\mathcal{M}$ to $\widetilde{\mathcal{M}}$ is an equivalence of categories.*

5.2. Definition of T^*_{st} and T_{st}

5.2.1. We now introduce Kato's ring $\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}}$ which was first defined in [**44**, 3] (see also [**8**, 2], [**9**, 3.1.1], [**70**, 1.6] for more details). Let $(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})_{\log}$ (resp. $(\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L)_{\log}$ for any finite extension L of K_0) the log-version of $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ (resp. $\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L$), that is to say the log-scheme associated to $\mathcal{O}_{\overline{K}} \smallsetminus \{0\} \to \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ (resp. $\mathcal{O}_L \smallsetminus \{0\} \to \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L$), and $(S/p^nS)_{\log}$ the log-scheme associated to $(\mathbf{N} \to S/p^nS, 1 \mapsto u)$ (it will be denoted E_n in (6.2.2), following Kato's original notation). We define a morphism of log-schemes $(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})_{\log} \to (S/p^nS)_{\log}$ by sending u to the image of π. Although the log-structure of $(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})_{\log}$ is integral, but not fine, we can still define its log-crystalline site relative to $(S/p^nS)_{\log}$ and a conceptual definition of $\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}}$ is:

$$\begin{aligned}\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}} &= \varprojlim H^0_{\mathrm{cris}}((\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})_{\log}/(S/p^nS)_{\log}) \\ &\simeq \varprojlim \Big(\varinjlim H^0_{\mathrm{cris}}((\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L)_{\log}/(S/p^nS)_{\log}) \Big)\end{aligned}$$

where the inverse limit is over n, the direct limit over all the finite extensions L of K_0 in $\overline{K}$, and where H^0_{cris} is the global sections of log-crystalline cohomology (see [**38**, 2.14] and [**44**, 2.4]; a technical argument shows that the individual H^0_{cris} terms in the first line are canonically isomorphic to the $\varinjlim H^0_{\mathrm{cris}}$ terms in the second). The origin of this definition is essentially the Künneth formula (see for instance 8.2.1). The ring $\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}}$ is an S-algebra and from the above definition, it can be endowed with a filtration, a Frobenius, a monodromy operator and a Galois action. We now make them more explicit. Either by a de Rham computation (see for instance [**70**, 1.6.5]) or by noticing the log-crystalline site of $(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p)_{\log}$ over the base $(S/p^n)_{\log}$ has a final object (see [**44**, prop.3.3] or [**7**, 5.1.1]), one can define a non canonical isomorphism

of S-algebras:

$$H^0_{\mathrm{cris}}((\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}_0})_{\log}/(S/p^nS)_{\log}) \simeq W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})^{\mathrm{DP}}\langle X_\pi\rangle$$
$$= \left\{ \sum_{i=0}^{n} w_i \frac{X_\pi^i}{i!} \mid w_i \in W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}_0}/p)^{\mathrm{DP}}, n \in \mathbf{N} \right\}$$

where $W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})^{\mathrm{DP}}$ is as in (3.1.2), X_π is an indeterminate related to the choice of a $p^{n^{\text{th}}}$-root π_n of π in $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ and $u = [\overline{\pi}_n](1+X_\pi)^{-1}$ (compare with (6.2.2.3, 2)). Choosing a compatible system of such π_n (i.e. $\pi_n^p = \pi_{n-1}$) and denoting by $[\underline{\pi}]$ the corresponding "Teichmüller" element in A_{cris} (see 3.1.2), one can thus identify $\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}}$ with the p-adic completion of $A_{\mathrm{cris}}\langle X_\pi\rangle$ and u with $[\underline{\pi}](1+X_\pi)^{-1}$. The Frobenius ϕ on $\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}}$ extends that on A_{cris}, is continuous, commutes with divided powers and is such that $\phi(X_\pi) = (1+X_\pi)^p - 1$. The filtration is:

$$\mathrm{Fil}^i \widehat{A_{\mathrm{st},\pi}} = \Big\{ \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{X_\pi^j}{j!} \mid a_j \in \mathrm{Fil}^{i-j} A_{\mathrm{cris}}, a_j \to 0 \Big\}.$$

The monodromy operator is the continuous A_{cris}-derivation N determined by $N(X_\pi) = 1 + X_\pi$. The Galois action is continuous, extends the action on A_{cris}, commutes with divided powers and is such that $g(X_\pi) = [\varepsilon(g)]X_\pi + [\varepsilon(g)] - 1$, where $\varepsilon : G_{K_0} \to \varprojlim \mu_{p^n}(\overline{K})$ is the (continuous) 1-cocycle determined by our choice of a compatible system of $p^{n^{\text{th}}}$ roots of π. Note the divided powers on $A_{\mathrm{cris}}\langle X_\pi\rangle$ are automatically compatible with those on $\mathrm{Fil}^1 A_{\mathrm{cris}}$ and $[\varepsilon(g)] - 1$ belongs to this ideal. This action preserves the filtration and commutes with ϕ and N. As for A_{cris}, one has $\phi(\mathrm{Fil}^i \widehat{A_{\mathrm{st},\pi}}) \subset p^i \widehat{A_{\mathrm{st},\pi}}$ if $0 \leqslant i \leqslant p-1$ and one defines $\phi_i = \frac{\phi}{p^i}|_{\mathrm{Fil}^i}$ for such i. All these structures extend obviously to $\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}}/p^n\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}}$ endowed with the filtration $\mathrm{Fil}^i \widehat{A_{\mathrm{st},\pi}}/p^n \mathrm{Fil}^i \widehat{A_{\mathrm{st},\pi}} \hookrightarrow \widehat{A_{\mathrm{st},\pi}}/p^n\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}}$.

5.2.2. Let $\mathcal{M} \in \underline{\mathcal{M}}^r_\pi$. Choose $n \in \mathbf{N}$ such that $p^n\mathcal{M} = 0$ and define:

$$T^*_{\mathrm{st},\pi}(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{S,\mathrm{Fil}^r,\phi_r,N}(\mathcal{M}, \widehat{A_{\mathrm{st},\pi}}/p^n\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}})$$

where the subscript means we take the S-linear maps that send Fil^r to Fil^r and commute with ϕ_r and N. The $\mathbf{Z}_p$-module $T^*_{\mathrm{st},\pi}(M)$ is independent of the choice of n such that $p^n\mathcal{M} = 0$ and of the choice of r such that $\mathcal{M} \in \underline{\mathcal{M}}^r_\pi$ (see 5.1.1). It is endowed with a action of G_{K_0} given by $g(f)(x) = g(f(x))$ if $x \in \mathcal{M}, f \in T^*_{\mathrm{st},\pi}(\mathcal{M})$. We thus have a functor from $\underline{\mathcal{M}}^r_\pi$ to representations of G_{K_0}.

Theorem 5.2.2.1 **([9,** 3.2-3.3**]).** — *For $0 \leqslant r \leqslant p-2$, the functor $T^*_{\mathrm{st},\pi}$ is exact and fully faithful.*

By dévissage, one is reduced to checking this for $\underline{\mathcal{M}}^r_{k,\pi}$ (5.1.2). The exactness and faithfulness are proved by the same techniques as for (3.1.3.1) using (5.1.1.3). The full faithfulness is more subtle (its proof is inspired by the proof of [**20**, 5]).

Corollary 5.2.2.2. — *If* $\mathcal{M} \simeq \oplus_{i\in I}(S/p^iS)^{d_i}$ *as an* S*-module, then* $T^*_{\mathrm{st},\pi}(\mathcal{M}) \simeq \oplus_{i\in I}(\mathbf{Z}/p^i\mathbf{Z})^{d_i}$ *as a* $\mathbf{Z}_p$*-module.*

As in (3.1.1), the link to semi-stable representations is:

Theorem 5.2.2.3 **([9**, 4.1.2.1**])**. — *Let* $\mathcal{M}$ *be a strongly divisible module of weight* $\leqslant r$ *and rank* d*, then* $\mathrm{Hom}_{S,\mathrm{Fil}^r,\phi_r,N}(\mathcal{M}, \widehat{A_{\mathrm{st},\pi}})$ *is a* $\mathbf{Z}_p$*-lattice in a* d*-dimensionnal semi-stable representation of* G_{K_0} *with Hodge-Tate weights between* 0 *and* r*.*

The proof uses (4.2.1). As in the crystalline case, one obtains in this manner all the semi-stable representations of G_{K_0} with Hodge-Tate weights between 0 and $p-2$ (see 9.1.1).

Let us now give the covariant version of $T^*_{\mathrm{st},\pi}$. For $\mathcal{M}$ in $\underline{\mathcal{M}}^r_\pi$, let:

$$\mathrm{Fil}^i \mathcal{M} = \{x \in \mathcal{M} \mid (u-\pi)^{r-i}x \in \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}\} \quad (0 \leqslant i \leqslant r)$$

and:

$$\mathrm{Fil}^r(\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}} \otimes_S \mathcal{M}) = \sum_{i=0}^{r} \mathrm{Fil}^{r-i} \widehat{A_{\mathrm{st},\pi}} \otimes_S \mathrm{Fil}^i \mathcal{M} \subset \widehat{A_{\mathrm{st},\pi}} \otimes_S \mathcal{M}.$$

One can prove that the maps ϕ_i on $\mathrm{Fil}^i \widehat{A_{\mathrm{st},\pi}}$ and ϕ_r on $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}$ give rise to a map $\phi_r : \mathrm{Fil}^r(\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}} \otimes_S \mathcal{M}) \to \widehat{A_{\mathrm{st},\pi}} \otimes_S \mathcal{M}$ (see [**10**, 3.2.1]). The operators N on $\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}}$ and $\mathcal{M}$ give an operator $N = N \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N$ on $\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}} \otimes_S \mathcal{M}$. Let:

$$\mathrm{Fil}^r(\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}} \otimes_S \mathcal{M})^{\phi_r=1}_{N=0} = \{x \in \mathrm{Fil}^r(\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}} \otimes_S \mathcal{M}) \mid N(x) = 0,\ \phi_r(x) = x\}.$$

Proposition 5.2.2.4 **([10**, 3.2.1.7**])**. — *There is a canonical isomorphism of* G_{K_0}*-modules:* $\mathrm{Fil}^r(\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}} \otimes_S \mathcal{M})^{\phi_r=1}_{N=0} \xrightarrow{\sim} T^*_{\mathrm{st},\pi}(\mathcal{M})^\wedge(r)$ *where the exponent* $\wedge$ *means the Pontryagin dual with respect to* $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$*.*

In the sequel, we write:

$$T_{\mathrm{st},\pi}(\mathcal{M}) = T^*_{\mathrm{st},\pi}(\mathcal{M})^\wedge \simeq \mathrm{Fil}^r(\widehat{A_{\mathrm{st},\pi}} \otimes_S \mathcal{M})^{\phi_r=1}_{N=0}(-r).$$

One can check the equivalence $\underline{\mathcal{M}}^r_\pi \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{M}}^r_{\pi'}$ of (5.1.1.5) commutes with the functors $T_{\mathrm{st},\pi}$ and $T_{\mathrm{st},\pi'}$ (or their dual version), that is to say $T_{\mathrm{st},\pi}(\mathcal{M}_\pi) \simeq T_{\mathrm{st},\pi'}(\mathcal{M}_{\pi'})$ if $\mathcal{M}_{\pi'}$ is associated to $\mathcal{M}_\pi$. So ultimately nothing depends on π; we choose in the sequel $\pi = p$ for simplicity and drop the subscript π. We also choose a compatible system of $p^{n^{\mathrm{th}}}$-roots of p in $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ which enables us to write $\widehat{A_{\mathrm{st}}}$ as the p-adic completion of $A_{\mathrm{cris}}\langle X\rangle$ where $X = X_p$ and $u = [\underline{p}](1+X)^{-1}$ (see 5.2.1).

We end this section with an open question. Define a *torsion* semi-stable representation of weight $\leqslant r$ ($r \in \mathbf{N}$) to be any finite representation of G_{K_0} that can be written T/T' where $T' \subset T$ are Galois stable lattices in a semi-stable representation of G_{K_0} with Hodge-Tate weights $\in \{0, \ldots, r\}$. Using (9.1.1.1), one can prove that the functor T^*_{st} establishes an anti-equivalence between a full subcategory of $\underline{\mathcal{M}}^r$ and the category of torsion semi-stable representations of G_{K_0} of weight $\leqslant r$, so it's natural to ask:

Question 5.2.2.5. — For $0 \leqslant r \leqslant p-2$, does the functor T^*_{st} actually induce an anti-equivalence of categories between $\underline{\mathcal{M}}^r$ and torsion semi-stable representations of G_{K_0} of weight $\leqslant r$?

To answer positively this question, it would be enough to prove that any object of $\underline{\mathcal{M}}^r$ can be written $\mathcal{M}/\mathcal{M}'$ where $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ are two strongly divisible modules as in (5.1.1.4) of the same rank (this implies $\mathcal{M}' \otimes_W K_0 \simeq \mathcal{M} \otimes_W K_0$ using (4.2.1)) or equivalently can be written $\mathrm{Ker}(\mathcal{M}' \otimes (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) \to \mathcal{M} \otimes (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p))$ (T^*_{st} being contravariant).

6. Log-syntomic morphisms and topology: a review

Following [**32**], we want to apply the previous theory to the case of a proper smooth K_0-scheme admitting a proper semi-stable model X on W. As in the ℓ-torsion case, one has to find a candidate to replace $H^i_{\mathrm{dR}}(X_n) = H^i_{\mathrm{cris}}(X_n/W_n)$ that is still related to X_n and that contains enough information to recover the étale cohomology of the geometric generic fiber $X \times_W \overline{K}$. Once again, the extra information will be the log-structure canonically attached to X in (2.2.1.2). As we also look for S/p^nS-modules, the idea is then to replace the crystalline cohomology of the scheme X_n with respect to the base W_n by the *log*-crystalline cohomology of the *log*-scheme X_n with respect to the *log*-base $(S/p^nS)_{\log}$ (as for $\widehat{A_{\mathrm{st}}}$: see (5.2.1)). To do this, following the Fontaine-Messing method, we first define log-syntomic morphisms and log-syntomic sites.

6.1. Log-syntomic morphisms

6.1.1. Classical syntomic morphisms were introduced by Grothendieck in (EGA IV, 19.3.6) where they were called flat relative complete intersection morphisms. The terminology "syntomic" itself is due to Mazur ([**51**]), who also noted the syntomic topology had interesting properties. A morphism $X \to \Sigma$ between classical schemes is syntomic if it is flat, locally of finite presentation and if locally on X (for the Zariski or equivalently étale topology), there is a factorization $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y \overset{h}{\longrightarrow} \Sigma$ where h is smooth and i is a regular closed immersion (in the sense of (SGA_6, VII.1.4); since X/Σ is flat this is, by (EGA IV, 11.3.8), equivalent to requiring that the ideal defining i is locally generated by a regular sequence). This definition was generalized by Kato to the log-setting:

Definition 6.1.1.1 **([44**, 2.5**])**. — Let $f : X \to \Sigma$ be a morphism of fine log-schemes. One says f is log-syntomic if it satisfies the following conditions:
(i) it is integral,
(ii) the underlying morphism of schemes is flat and locally of finite presentation,
(iii) étale locally on X, there is a factorization $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y \overset{h}{\longrightarrow} \Sigma$ where h is log-smooth and i is an exact closed immersion which is regular on the underlying schemes (as in the classical case).

We give now the four main properties of log-syntomic morphisms with brief proofs.

Proposition 6.1.1.2. — *If there is another factorization of* $f\colon X \overset{i'}{\hookrightarrow} Y' \overset{h'}{\longrightarrow} \Sigma$ *with* h' *log-smooth and* i' *an exact closed immersion, then* i' *is also regular.*

Proof. — Consider the fiber product $Y \times_\Sigma Y'$ (in the category of fine log-schemes). The closed immersion $X \overset{i\times i'}{\hookrightarrow} Y \times_\Sigma Y'$ is no longer necessarily exact but can be factored, étale locally on X, as $X \overset{i''}{\hookrightarrow} Y'' \overset{g}{\longrightarrow} Y \times_\Sigma Y'$ where i'' is an exact closed immersion and g is log-étale ([**43**, 4.10]). Let $x \in X$, replacing Y'' by an étale neighbourhood around $i''(x)$, one can assume $M_{Y''} \overset{\sim}{\longrightarrow} \pi^* M_Y$ and $M_{Y''} \overset{\sim}{\longrightarrow} \pi'^* M_{Y'}$ where $\pi,\ \pi'$ are the maps $Y'' \overset{\pi}{\longrightarrow} Y$ and $Y'' \overset{\pi'}{\longrightarrow} Y'$ obtained by composing g with the two projections from $Y \times_\Sigma Y'$. Then π and π' are classically smooth ([**43**, 3.8]). One finishes by applying to $Z = Y$ and $Z = Y'$ the following classical fact (cf. SGA_6, VII.1.3): if one has a commutative diagram of (classical) schemes:

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{i''}{\hookrightarrow} & Y'' \\ \| & & \downarrow \pi_Z \\ X & \overset{i_Z}{\hookrightarrow} & Z \end{array}$$

with π_Z smooth and i'', i_Z closed immersions, i'' is regular if and only if i_Z is regular. □

Proposition 6.1.1.3. — *Log-syntomic morphisms are stable by base change.*

Proof. — Let X/Σ be log-syntomic and $\Sigma' \to \Sigma$ be the base change morphism. After étale localization on X and Σ, we may assume we have $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y$ an exact, regular closed immersion where Y/Σ is log-smooth and integral. Denote with a prime the result of base change to Σ' in the category of all log-schemes. As $X \to \Sigma$, $Y \to \Sigma$ are integral, X', Y' are automatically fine, $X' \overset{i'}{\hookrightarrow} Y'$ is an exact closed immersion and Y'/Σ' is log-smooth. It follows from (EGA IV, 19.2.7 (ii)) that i' is regular. □

Proposition 6.1.1.4. — *Log-syntomic morphisms are stable by composition.*

Proof. — If Y/Σ is log-smooth, integral and $\Sigma \hookrightarrow Z$ is an exact closed immersion, one can always find, étale locally on Z and Y, a log-smooth integral morphism $W \to Z$ such that $Y = W \times_Z \Sigma$. (By using the local description of log-smooth morphisms ([**43**, 3.5]), one can always find such a W at least log-smooth over Z. Since the closed immersions are all exact, by localizing on W around Y, one can assume $W \to Z$ to be integral.) Hence on the scheme level, $W \to Z$ is also flat and, if $\Sigma \hookrightarrow Z$ is a regular closed immersion, then so is $Y \hookrightarrow W$ by (EGA IV, 19.1.5 (ii)). Now, let $X \to \Sigma$ and $\Sigma \to T$ be two log-syntomic morphisms and choose factorizations $X \hookrightarrow Y \to \Sigma$, $\Sigma \hookrightarrow Z \to T$ as in (6.1.1.1) but with $Y \to \Sigma$ integral (see the previous proof). By taking W as above, one has $X \overset{i_1}{\hookrightarrow} Y \overset{i_2}{\hookrightarrow} W \overset{h_1}{\longrightarrow} Z \overset{h_2}{\longrightarrow} T$ with i_1, i_2 regular exact

closed immersions and h_1, h_2 log-smooth. So $X \hookrightarrow W \to T$ is a factorization as in (6.1.1.1). □

Proposition 6.1.1.5. — *Let X'/Σ' log-syntomic and $\Sigma' \hookrightarrow \Sigma$ an exact closed immersion. Then étale locally on X', one can find a log-syntomic morphism $X \to \Sigma$ such that $X' = \Sigma' \times_\Sigma X$.*

Proof. — Choose a factorization $X' \hookrightarrow Y' \to \Sigma'$ as in (6.1.1.1) with Y'/Σ' integral log-smooth and, as in the previous proof, choose Y/Σ integral log-smooth such that $Y' = Y \times_\Sigma \Sigma'$. By lifting to $\mathcal{O}_Y$ a transversally regular sequence in $\mathcal{O}_{Y'}$, it is easy to find an exact closed immersion $X \hookrightarrow Y$ such that $X' = X \times_\Sigma \Sigma'$. Moreover, standard arguments (see for instance EGA 0_{IV}, 15.1.16) show that X/Σ is flat and $X \hookrightarrow Y$ transversally regular (with respect to Σ) at each point of X coming from X'. By (EGA IV, 19.2.4), $X \hookrightarrow Y$ is regular in a (Zariski) neighbourhood of such a point. Thus, we get the desired X by localizing for the Zariski topology and taking the induced log-structure. □

6.1.2. In the classical case, a syntomic morphism is described locally as a flat morphism $A \to A[X_1, \ldots, X_s]/(f_1, \ldots, f_t)$ where $f_1, \ldots, f_t$ is a regular sequence. In the log-case, there are several (equivalent) local descriptions due to the fact that there are several ways of writing the charts. We give here a description which turns out to be quite convenient for local computations on the log-syntomic site (see for instance 6.2.2.3). Consider an integral and locally of finite type morphism X/Σ of fine log-schemes. It is easy to see one can find (locally) a chart:

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

where $M \to N$ is an integral morphism of fine monoids. Since N is of finite type, there is an $r \in \mathbf{N}$ and a surjection $M \oplus \mathbf{N}^r \to N$. Denoting by G the kernel of the induced map $M^{\mathrm{gp}} \oplus \mathbf{Z}^r \to N^{\mathrm{gp}}$ and by $(M \oplus \mathbf{N}^r) + G$ the submonoid of $M^{\mathrm{gp}} \oplus \mathbf{Z}^r$ generated by $M \oplus \mathbf{N}^r$ and G, one gets an exact morphism of monoids $(M \oplus \mathbf{N}^r) + G \to N$ by sending G to 0. Notice that $M \to (M \oplus \mathbf{N}^r) + G$ is still integral. One can also find $s \in \mathbf{N}$ and a surjection $A \otimes_{\mathbf{Z}[M]} \mathbf{Z}[(M \oplus \mathbf{N}^r) + G][X_1, \ldots, X_s] \to B$ where $(M \oplus \mathbf{N}^r) + G \to B$ factorizes through N. Hence, we have a factorization:

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & (M \oplus \mathbf{N}^r) + G & \longrightarrow & N \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A \otimes_{\mathbf{Z}[M]} \mathbf{Z}[(M \oplus \mathbf{N}^r) + G][X_1, \ldots, X_s] & \longrightarrow & B \end{array}$$

where the first morphism of (the corresponding) log-schemes is clearly log-smooth and the second is an exact closed immersion. Now, if we start with X/Σ log-syntomic,

(6.1.1.2) tells us that, up to further Zariski localization, the ideal of the closed immersion on the right is generated by a regular sequence. Hence, any log-syntomic morphism can be locally written as:

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & (M\oplus \mathbf{N}^r)/G = N \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & \dfrac{A\otimes_{\mathbf{Z}[M]} \mathbf{Z}[(M\oplus\mathbf{N}^r)+G][X_1,\dots,X_s]}{(f_1,\dots,f_t)} = B \end{array}$$

where G is a subgroup of $M^{\mathrm{gp}}\oplus\mathbf{Z}^r$, $(M\oplus\mathbf{N}^r)/G$ the image of $M\oplus\mathbf{N}^r$ in $(M^{\mathrm{gp}}\oplus\mathbf{Z}^r)/G$, $f_1,\dots,f_t$ a transversally regular sequence with respect to A such that $(f_1,\dots,f_t)$ contains $[g]-1$ for $g\in G$ and where $M\to(M\oplus\mathbf{N}^r)+G$ is injective and integral.

Example 6.1.2.1. — Very important among log-syntomic morphisms are those which correspond to extracting $p^{n^{\mathrm{th}}}$-roots both on the sheaf of monoids and the scheme (classical case $= A\to \frac{A[X_1,\dots,X_s]}{(X_1^{p^n}-a_1,\dots,X_s^{p^n}-a_s)}$). Let $r,s,n\in\mathbf{N}$, $m_1,\dots,m_r\in M$ and $a_1,\dots,a_s\in A$. These morphisms are obtained by taking as G above the subgroup G_n of $M^{\mathrm{gp}}\oplus\mathbf{Z}^r$ generated by $g_i=-m_i\oplus(0,\dots,p^n,\dots 0)$, $1\leqslant i\leqslant r$ (p^n in position i) and $(f_1,\dots,f_t)=([g_1]-1,\dots,[g_r]-1,X_1^{p^n}-a_1,\dots,X_s^{p^n}-a_s)$. In particular, if (A,M) itself is log-syntomic over, let's say, $(\mathbf{N}\to W, 1\mapsto p)$ (a situation we'll have to deal with very soon) then, locally, we can write $M=(\mathbf{N}\oplus\mathbf{N}^{r'})/G$ (= image of $\mathbf{N}\oplus\mathbf{N}^{r'}$ in $(\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}^{r'})/G$) and $A=\frac{W\otimes_{\mathbf{Z}[\mathbf{N}]}\mathbf{Z}[(\mathbf{N}\oplus\mathbf{N}^{r'})+G][X_1,\dots,X_s]}{(f_1,\dots,f_t)}$, and we can take $r=1+r'$, $m_i=$ image of $(0,\dots,1,\dots,0)\in\mathbf{N}\oplus\mathbf{N}^{r'}$ in M (1 in position i, $1\leqslant i\leqslant r$) and $a_j=X_j$ ($1\leqslant j\leqslant s$). We get:

$$\begin{aligned} M_n &= (M\oplus\mathbf{N}^r)/G_n \simeq \Big(\mathbf{N}\frac{1}{p^n}\oplus(\mathbf{N}\frac{1}{p^n})^{r'}\Big)\Big/G \\ A_n &= \frac{A\otimes_{\mathbf{Z}[M]}\mathbf{Z}[(M\oplus\mathbf{N}^r)+G_n][Y_1,\dots,Y_s]}{([g_i]-1,Y_j^{p^n}-X_j)} \\ &\simeq \frac{W\otimes_{\mathbf{Z}[\mathbf{N}]}\mathbf{Z}[(\mathbf{N}\frac{1}{p^n}\oplus(\mathbf{N}\frac{1}{p^n})^{r'})+G][X_1^{p^{-n}},\dots,X_s^{p^{-n}}]}{(f_1,\dots,f_t)} \end{aligned}$$

There are obvious injective morphisms of log-rings $(A_n,M_n)\to(A_{n+1},M_{n+1})$ induced by $X_j^{p^{-n}}\mapsto(X_j^{p^{-(n+1)}})^p$, $(0,\dots,\frac{1}{p^n},\dots,0)\mapsto p(0,\dots,\frac{1}{p^{n+1}},\dots,0)$ and we denote in the sequel $M_\infty=\varinjlim M_n\simeq(\mathbf{N}\frac{1}{p^\infty}\oplus(\mathbf{N}\frac{1}{p^\infty})^{r'})/G$ and $A_\infty=\varinjlim A_n$. The log-ring (A_∞,M_∞) is still integral (but not fine!). Note that the Frobenius on M_∞, i.e. the multiplication by p map, and the Frobenius on A_∞/pA_∞ are both surjective.

6.2. The log-syntomic topology

6.2.1. Let Σ be a fine log-scheme. One defines Σ_{syn} to be the category of all fine log-schemes which are log-syntomic over Σ. This category is endowed with the

Grothendieck topology generated by log-syntomic morphisms which are surjective on the underlying schemes and sheaves are defined in the obvious way. It is frequently useful to consider also the big log-syntomic site Σ_{SYN}. Its underlying category consists of all fine log-schemes over Σ, its topology is defined as for Σ_{syn}. A sheaf $\mathcal{F}$ on Σ_{SYN} has a restriction $\mathcal{F}_{\mathrm{syn}}$ on Σ_{syn} and, if abelian, the cohomology of $\mathcal{F}$ coincides with that of $\mathcal{F}_{\mathrm{syn}}$. An advantage of the big site is that it is functorial in Σ while the small site is not. An important property of the small site is that various sheaves of rings or modules defined on the big site have, when restricted to the small site, good flatness properties (see 6.2.2.4). Technically, this is a key point. An indication that this log-syntomic topology is reasonable is due to:

Lemma 6.2.1.1. — *Let $X \to \Sigma$ be a morphism of fine log-schemes, then the functor $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\Sigma}(Y, X)$ ($Y \in \Sigma_{\mathrm{SYN}}$) is a sheaf for the log-syntomic topology.*

Proof (Sketch). — Let $\pi : Y' \to Y$ be a log-syntomic covering and $Y'' = Y' \times_Y Y'$ with π_1, π_2 the two projections onto Y'. One has to prove:
1) If $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{\Sigma}(Y, X)$ and $f_1 \circ \pi = f_2 \circ \pi$, then $f_1 = f_2$,
2) If $f' : Y' \to X$ is such that $f' \circ \pi_1 = f' \circ \pi_2$, then there is an unique $f : Y \to X$ such that $f' = f \circ \pi$.
Everything is clear if one forgets the log-structures since the covering is flat on the underlying schemes. Using the fact that $Y' \to Y$ is integral, flat and surjective, one can show there exist local charts of π:

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A' \end{array}$$

where $M \to M'$ is an injective, integral and exact morphism of monoids. If $M' \oplus_M M'$ denotes the inductive limit of the diagram $M' \leftarrow M \to M'$, one has an exact sequence $M \hookrightarrow M' \rightrightarrows M' \oplus_M M'$ and it is not difficult to deduce 1) and 2) from this. □

6.2.2. Now let Σ be the log-base ($\mathbf{N} \to W, 1 \mapsto p$). This base is very important since it's the one that naturally arises in geometry (see 2.2.1.2). We will simply write $\mathrm{Spec}(W)$ when considering this scheme as equipped with its trivial log-structure (i.e. $M = W^*$) and E the log-scheme associated to ($\mathbf{N} \to S, 1 \mapsto u$) where S is the ring of (4.2) and (5). One has a commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \hookrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(W) & = & \mathrm{Spec}(W) \end{array}$$

where $\Sigma \hookrightarrow E$ is the DP-thickening obtained by sending u to p and the two vertical maps are the two obvious log-syntomic coverings. Notice that Σ_{syn} is a sub-site of $\mathrm{Spec}(W)_{\mathrm{syn}}$. The following proposition is useful and straightforward:

Proposition 6.2.2.1. — *Let $\mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ be a sequence of abelian sheaves on $\mathrm{Spec}(W)_{\mathrm{syn}}$ or Σ_{syn}. If, for all (A,M) in Σ_{syn} and (A_∞, M_∞) as in (6.1.2.1), one has exact sequences of abelian groups:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(A_\infty, M_\infty) \longrightarrow \mathcal{F}(A_\infty, M_\infty) \longrightarrow \mathcal{F}''(A_\infty, M_\infty) \longrightarrow 0$$

where we set $\mathcal{G}(A_\infty, M_\infty) = \varinjlim \mathcal{G}(A_n, M_n)$ if $\mathcal{G}$ is a sheaf, then $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ is an exact sequence of sheaves on $\mathrm{Spec}(W)_{\mathrm{syn}}$ or Σ_{syn}.

Proof. — The morphisms of log-schemes associated to $(A_n, M_n) \to (A_{n+1}, M_{n+1})$ in (6.1.2.1) are obvious log-syntomic coverings. □

Log-crystalline cohomology was first defined in [**43**] by mimicing the classical theory of Berthelot ([**3**], [**4**]) and we refer to [**43**, 5] or to [**71**, 4] in this volume for its definition and properties. If X is any fine log-scheme over W, we write X_n for the log-scheme $X \times_W W_n$ with the induced log-structure from X. For X a log-scheme in Σ_{syn} and $r \in \mathbf{N}$, define:

$$\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}(X) = H^0((X_n/E_n)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_{X_n/E_n})$$
$$\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}(X) = H^0((X_n/E_n)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}^{[r]}_{X_n/E_n})$$

where $\mathcal{O}_{X_n/E_n}$ is the structure sheaf and $\mathcal{J}_{X_n/E_n} = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{X_n/E_n} \to \mathcal{O}_{X_n})$. Notice that $\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}(X)$ is an S-algebra. For X a log-scheme in $\mathrm{Spec}(W)_{\mathrm{syn}}$ and $r \in \mathbf{N}$, define in the same way:

$$\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(X) = H^0((X_n/\mathrm{Spec}(W_n))_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_{X_n/\mathrm{Spec}(W_n)})$$
$$\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]}(X) = H^0((X_n/\mathrm{Spec}(W_n))_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}^{[r]}_{X_n/\mathrm{Spec}(W_n)})$$

Set $\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]} = \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$ if $r \leqslant 0$ (resp. with "cris"). For X an object of Σ_{syn}, there are morphisms $\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]}(X) \to \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}(X)$ by the functoriality of the log-crystalline topos ([**43**, 5.9]). Using property (6.1.1.5) and the key log-syntomic morphisms (6.1.2.1) together with the de Rham computation of log-crystalline cohomology ([**43**, 6]), it is a standard matter to generalize the results of [**32**, II.1.3] and prove (cf. [**7**], 3.2.3 and 3.3 for the case $r = 0$):

Proposition 6.2.2.2

1) For $r \in \mathbf{Z}$, the presheaves $\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}$ (resp. $\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]}$) are sheaves on Σ_{syn} (resp. $\mathrm{Spec}(W)_{\mathrm{syn}}$).

2) For $r \in \mathbf{Z}$ and $i \in \mathbf{N}$, there are canonical and functorial isomorphisms:

$$H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}) \simeq H^i((X_n/E_n)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}^{[r]}_{X_n/E_n}) \text{ if } X \in \Sigma_{\mathrm{syn}}$$
$$H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]}) \simeq H^i((X_n/\mathrm{Spec}(W_n))_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}^{[r]}_{X_n/\mathrm{Spec}(W_n)}) \text{ if } X \in \mathrm{Spec}(W)_{\mathrm{syn}}.$$

For a general X in Σ_{syn}, one doesn't know explicitly $\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}(X)$ or $\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]}(X)$. However, using (6.2.2.1), one can usually restrict to $\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}(A_\infty, M_\infty)$ (resp. with "cris") which can be described explicitly:

Lemma 6.2.2.3. — *Let (A, M) and (A_∞, M_∞) be as in (6.1.2.1) and $M_\infty + \frac{1}{p^n}G$ be the sub-monoid of M_∞^{gp} generated by M_∞ and the image of $\frac{1}{p^n}G = \{x \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}^{r'} \mid p^n x \in G\}$ (see 6.1.2.1), which maps to A_∞ through the composite $M_\infty + \frac{1}{p^n}G \xrightarrow{p^n} M_\infty \longrightarrow A_\infty$.*
1) There is a canonical isomorphism:

$$\Big(W_n(A_\infty/pA_\infty) \otimes_{\mathbf{Z}[M_\infty]} \mathbf{Z}\big[M_\infty + \frac{1}{p^n}G\big]\Big)^{\mathrm{DP}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A_\infty, M_\infty)$$

where we take the divided power envelope (compatible with the divided powers on (p)) with respect to the kernel of the map to $A_\infty/p^n A_\infty$ that maps $M_\infty + \frac{1}{p^n}G$ as above and $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in W_n(A_\infty/p)$ to $\widehat{a}_0^{p^n} + p\widehat{a}_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^{n-1}\widehat{a}_{n-1}^{p}$ ($\widehat{a}_i$ lifting a_i in A_∞). It induces isomorphisms between $\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]}(A_\infty, M_\infty)$ on the right and the r^{th} divided power of the tautological DP ideal on the left.
2) To each choice of an $h \in M_\infty + \frac{1}{p^n}G$ such that $p^n h = (1, 0, \ldots, 0) \in M_\infty$, there is an element $X_h \in \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}(A_\infty, M_\infty)$ and an isomorphism:

$$\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A_\infty, M_\infty)\langle X_h\rangle \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}(A_\infty, M_\infty)$$

such that $[h](1 + X_h)^{-1} \mapsto u$ which induces isomorphisms:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r-s]}(A_\infty, M_\infty)\frac{X_h^s}{s!} \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}(A_\infty, M_\infty).$$

For more details, see [**10**, appendix D]. Using this description, one can prove for instance ([**10**, 2.1.2]):

Proposition 6.2.2.4
1) The sheaf of S_n-algebras $\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$ is flat over S_n.
2) For $r \in \mathbf{Z}$, the sheaves $\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}$ and $\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]}$ are flat over W_n.
3) For $r \in \mathbf{Z}$ and $* =$ "st" or "cris", there are short exact sequences:

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_m^{*,[r]} \xrightarrow{p^n} \mathcal{J}_{n+m}^{*,[r]} \longrightarrow \mathcal{J}_n^{*,[r]} \longrightarrow 0.$$

6.2.3. We defined in (4.2) operators ϕ_r on $\mathrm{Fil}^r S$ $(0 \leqslant r \leqslant p-1)$ and N on S. We want to extend them to the above sheaves and their cohomology. Because one has a Frobenius on $E_n = \mathrm{Spec}(S_n)$ and $\mathrm{Spec}(W_n)$, one gets the usual crystalline Frobenius on $H^i((X_n/E_n)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_{X_n/E_n})$ and $H^i((X_n/\mathrm{Spec}(W_n))_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_{X_n/\mathrm{Spec}(W_n)})$, so in particular on $\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$, $\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}$ and their cohomology groups. It is formal, if one uses the big log-crystalline and log-syntomic sites instead of the small ones, to check that the isomorphisms in (6.2.2.2) for $r = 0$ are then compatible with the Frobeniuses. Moreover:

Lemma 6.2.3.1. — *For $0 \leqslant r \leqslant p-1$, $\phi(\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}) \subset p^r \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$ and $\phi(\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]}) \subset p^r \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}$.*

Proof. — One easily reduces to the case $r = 1$. Then, the result is just due to the fact that the sheaves of ideals $\mathcal{J}_n^{\mathrm{st}}$ and $\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris}}$ are endowed with divided powers. □

If x is a section of $\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}$ with $0 \leqslant r \leqslant p-1$ and $\widehat{x}$ a local lifting in $\mathcal{J}_{n+r}^{\mathrm{st},[r]}$ (using (6.2.2.4, 3)), then $\phi(\widehat{x}) \in p^r \mathcal{O}_{n+r}^{\mathrm{st}}$ (locally) and because $p^r \mathcal{O}_{n+r}^{\mathrm{st}} \simeq \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$ (still 6.2.2.4), the image of $\phi(\widehat{x})/p^r$ in $\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$ doesn't depend on the lifting. This gives a global map $\phi_r : \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]} \to \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$. The same thing applies to $\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]}$, giving a commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}. \end{array}$$

Using the local description (6.2.2.3, 2), one can check that $\phi_r(X_h^r) = \left(\frac{(1+X_h)^p - 1}{p}\right)^r$.

Using the de Rham computation of log-crystalline cohomology, Hyodo and Kato define in [**38**, 3.6] a W-linear derivation N_{HK} on $\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}(X) = H^0((X_n/E_n)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_{X_n/E_n})$ called the (p-adic) monodromy operator (actually they assume X log-smooth but it is not used in the definition [**38**, 3.6]). We define $N = -N_{HK} : \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}} \to \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$. One thus gets an operator N on $H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})$. In terms of the local description (6.2.2.3, 2), N is the unique $\mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}(A_\infty, M_\infty)$-linear map such that $N(X_h^s/s!) = (1+X_h)X_h^{s-1}/(s-1)!$.

Proposition 6.2.3.2. — *1) For $0 \leqslant r \leqslant p-1$, one has $N\phi_r = \phi_{r-1}N$.*
2) For $r \in \mathbf{Z}$, there are exact sequences of sheaves on Σ_{syn}:

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]} \longrightarrow \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]} \xrightarrow{N} \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r-1]} \longrightarrow 0.$$

Proof. — Straightforward from (6.2.2.1) and (6.2.2.3) with the above expressions of ϕ_r and N. □

Remark 6.2.3.3. — The reason we take $-N_{HK}$ and not N_{HK} is because there is another, purely syntomic, way to define a monodromy operator on $\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$ (see [**7**, 6.1]) and one can show this operator is precisely $-N_{HK}$.

Remark 6.2.3.4. — Hyodo-Kato's definition of N_{HK} also extends to higher cohomology groups $H^i((X_n/E_n)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_{X_n/E_n})$ for $i \geqslant 1$. The authors *do not know* if the isomorphisms in (6.2.2.2) are compatible with the operators N and $-N_{HK}$ for $i \geqslant 1$, although this is probable. This won't be very important in the sequel where we use N only.

7. A generalization of the Deligne-Illusie-Fontaine-Messing isomorphism

7.1. Preliminaries. — From now on, we fix X/Σ log-smooth, proper and such that X_1/Σ_1 is a morphism of Cartier type. This last and somewhat technical condition is explained in [**43**, 4.8] and turns out to be necessary for computations. Let us just say that it is automatically satisfied in the semi-stable case, although the above situation is much more general than the semi-stable one (for instance, the log-structure on X_{K_0} need not be trivial). The aim of this section is to prove that in this general situation and for $0 \leqslant i \leqslant r \leqslant p-2$ and $n \in \mathbf{N}$:

$$\Big(H^i((X_n/E_n)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_{X_n/E_n}), H^i((X_n/E_n)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}^{[r]}_{X_n/E_n}), \phi_r, N\Big)$$

is an object of the category $\underline{\mathcal{M}}^r$ of (5.1.1) (described as $(\mathcal{M}, \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}, \phi_r, N)$). It is easy to see that the only non formal facts to prove are:
1) $H^i((X_n/E_n)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_{X_n/E_n}) \simeq \oplus_{i\in I}(S/p^iS)^{d_i}$ as an S-module (I finite)
2) the map $H^i((X_n/E_n)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}^{[r]}_{X_n/E_n}) \to H^i((X_n/E_n)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_{X_n/E_n})$ induced by the injection $\mathcal{J}^{[r]}_{X_n/E_n} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X_n/E_n}$ is injective
3) the image of ϕ_r generates $H^i((X_n/E_n)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_{X_n/E_n})$ over S.

As we mentioned in (3.2), the main tool to prove the analogous statements in the good reduction case over $\mathrm{Spec}(W)$ was the Deligne-Illusie isomorphism (compare [**32**, II.2.5] and [**16**, 2.1]). So the first task is to find an analogous isomorphism, but involving the two bases Σ and E. We then explain briefly how this result is used to prove the above statements 1)-3) for $n = 1$. The general case is finally deduced by dévissage. We, of course, work over the site Σ_{syn} with the log-syntomic interpretation (6.2.2.2) of the above cohomology groups and, for brevity, we write $H^i(\mathcal{F})$ instead of $H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{F})$ whenever $\mathcal{F}$ is a sheaf on Σ_{syn}.

7.2. Generalization of the DIFM isomorphism. — We saw in (5.1.2.1) that any object $\mathcal{M}$ of $\underline{\mathcal{M}}^r$ ($0 \leqslant r \leqslant p-2$) that is killed by p is such that the map $\mathrm{Id} \otimes \phi_r$ induces an isomorphism:

$$S_1 \otimes_{(\phi),k} \frac{\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}}{\mathrm{Fil}^{r+1} \mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}.$$

where $\mathrm{Fil}^{r+1} \mathcal{M} = \mathrm{Fil}^p S_1 \cdot \mathcal{M} + \mathrm{Fil}^1 S_1 \cdot \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}$. Thus, if $(H^i(\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}), H^i(\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}), \phi_r, N)$ is in $\underline{\mathcal{M}}^r$, we should hopefully have some cohomology group $H^i(?)$, probably related to the sheaf $\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}/\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r+1]}$, with a map $\phi_r : H^i(?) \to H^i(\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}})$ such that $S_1 \otimes_{(\phi),k} H^i(?) \xrightarrow{\sim} H^i(\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}})$. Indeed, on Σ_{syn}, $\phi_r(\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r+1]}) = 0$ (since $r \leqslant p-2$) so there is a map of sheaves:

$$\mathrm{Id} \otimes \phi_r : S_1 \otimes_{(\phi),k} \frac{\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}}{\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r+1]}} \longrightarrow \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$$

but, unfortunately, it is not an isomorphism in general.

Recall that the Frobenius on a log-scheme in characteristic p is just the usual Frobenius on the underlying scheme and the multiplication by p map on the sheaf of monoids (with additive notations). For any (fine) log-scheme Y over $\Sigma_1(\hookrightarrow E_1)$, denote by Y' the pullback of Y by F_{E_1} where F_{E_1} is the Frobenius on E_1. Then the relative Frobenius $F_{Y/E_1} : Y \to Y'$ can be factored in a unique way as: $Y \xrightarrow{F''} Y'' \xrightarrow{F'} Y'$ where F' is log-étale and F'' is exact (see [**43**, 4.9] for all this). One defines a presheaf $\mathcal{O}_1^{\mathrm{car}}$ on Σ_{syn} ("car" for Cartier) by $\mathcal{O}_1^{\mathrm{car}}(U) = \Gamma(U_1'', \mathcal{O}_{U_1''})$ (recall $U_1 = U \times_W k$). It turns out $\mathcal{O}_1^{\mathrm{car}}$ is in fact a sheaf on Σ_{syn} ([**10**, 2.2.1.1]) and that one has a canonical injection $\mathcal{O}_1^{\mathrm{car}} \hookrightarrow \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$. Notice that if there are no log-structures (only classical schemes), $\mathcal{O}_1^{\mathrm{car}}$ is just $S_1 \otimes_{(\phi),k} \mathcal{O}_1$ where $\mathcal{O}_1(U) = \Gamma(U_1, \mathcal{O}_{U_1})$.

Let $r \in \mathbf{N}$ and x a local section of $\mathcal{O}_{r+1}^{\mathrm{st}}$. Following [**32**, II.2.3], whenever $\phi(x) \in p^r \mathcal{O}_{r+1}^{\mathrm{st}}$ (locally), define $f_r(x) \in \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$ such that $\phi(x) = p^r \widehat{f_r(x)}$, where $\widehat{f_r(x)}$ is a (local) lifting of $f_r(x)$. Then f_r is a homomorphism and we denote by $F_r\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$ its image in $\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$. Finally, let $F_r^{\mathrm{car}}\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$ be the image of $\mathcal{O}_1^{\mathrm{car}} \otimes_k F_r\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$ in $\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$.

Theorem 7.2.1. — *For $0 \leqslant r \leqslant p-2$, the map $\mathrm{Id} \otimes \phi_r$ induces isomorphisms of sheaves on Σ_{syn}:*

$$\mathcal{O}_1^{\mathrm{car}} \otimes_{(\phi),k} \frac{\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}}{\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r+1]}} \xrightarrow{\sim} F_r^{\mathrm{car}}\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}.$$

Remark 7.2.2. — The previous map:

$$\mathrm{Id} \otimes \phi_r : S_1 \otimes_{(\phi),k} \frac{\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}}{\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r+1]}} \longrightarrow \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$$

is injective, but not surjective (in general).

As usual, the proof is reduced to the case (A_∞, M_∞) where everything is made explicit: see [**10**, 2.2.2] for details. Now, what we would like (see the previous discussion) are isomorphisms $H^i(F_r^{\mathrm{car}}\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}) \xrightarrow{\sim} H^i(\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}})$ and $S_1 \otimes_{(\phi),k} H^i(\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}/\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r+1]}) \xrightarrow{\sim} H^i(\mathcal{O}_1^{\mathrm{car}} \otimes_{(\phi),k} \mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}/\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r+1]})$. This is certainly false for general X, but if X is log-smooth over Σ with X_1/Σ_1 of Cartier type as we assumed (the properness is not even necessary here) and if α denotes the projection: (sheaves on X_{syn})$\longrightarrow$ (sheaves on $X_{\text{ét}}$) (= small classical étale site with induced log-structures), then:

Theorem 7.2.3 **([10, 2.2.3])**. — *For $0 \leqslant r \leqslant p-2$, there are isomorphisms in the derived category of complexes of sheaves on $X_{\text{ét}}$:*

1) $S_1 \otimes_{(\phi),k} R\alpha_* \dfrac{\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}}{\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r+1]}} \xrightarrow{\sim} R\alpha_*\Big(\mathcal{O}_1^{\mathrm{car}} \otimes_{(\phi),k} \dfrac{\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}}{\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r+1]}}\Big)$

2) $\tau_{\leqslant r} R\alpha_*(F_r^{\mathrm{car}}\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leqslant r} R\alpha_*\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$.

Remark 7.2.4. — Of course, all the above sheaves on $X_{\text{ét}}$ in fact have support contained in the special fiber.

Remark 7.2.5. — The assertion 2) is false in general if one replaces $F_r^{\mathrm{car}}\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$ by $F_r\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$ (compare with [**32**, II.2.5]). This is one of the reasons why one has to deal with the sheaf $\mathcal{O}_1^{\mathrm{car}}$.

Note that by a de Rham computation, $R^i\alpha_*\Big(\dfrac{\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}}{\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r+1]}}\Big) = 0$ if $i \geqslant r+1$. From (7.2.1) and (7.2.3), we get:

Corollary 7.2.6
1) (Generalization of "Deligne-Illusie") For $0 \leqslant r \leqslant p-2$, the map $\mathrm{Id}\otimes\phi_r$ induces isomorphisms in the derived category of complexes of sheaves on $X_{\text{ét}}$:

$$S_1 \otimes_{(\phi),k} R\alpha_* \frac{\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}}{\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r+1]}} \xrightarrow{\sim} \tau_{\leqslant r} R\alpha_* \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}.$$

2) For $0 \leqslant i \leqslant r \leqslant p-2$, the map $\mathrm{Id}\otimes\phi_r$ induces isomorphisms:

$$S_1 \otimes_{(\phi),k} H^i\Big(\frac{\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}}{\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r+1]}}\Big) \xrightarrow{\sim} H^i(\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}).$$

This already implies statement 1) of (7.1) in the case $n = 1$.

Remark 7.2.7. — In a different log-context, Kato gave another generalization of the DIFM-isomorphism (see [**43**, 4.12]).

7.3. Application

7.3.1. Thanks to (7.2.6), the statement 3) in (7.1) is now equivalent to the surjectivity of the map $H^i(\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}) \to H^i(\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}/\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r+1]})$ for $0 \leqslant i \leqslant r \leqslant p-2$. In (5.1.2), we saw that we could easily get rid of the divided powers of S_1 when dealing with objects killed by p. Here is the cohomological counterpart: let $\widetilde{S}_1 = k[u]/u^p$ as in (5.1.2) and define a log-scheme $\widetilde{E}_1 = (\mathbf{N} \to \widetilde{S}_1, 1 \mapsto u)$. There are "stupid" divided powers on $\widetilde{S}_1$ given by $\gamma_i(u) = \frac{u^i}{i!}$ if $0 \leqslant i \leqslant p-1$ and $\gamma_i(u) = 0$ otherwise. The map $\Sigma_1 \hookrightarrow E_1$ factors through DP-thickenings $\Sigma_1 \hookrightarrow \widetilde{E}_1 \hookrightarrow E_1$ and we define presheaves $\widetilde{\mathcal{O}}_1^{\mathrm{st}}$ and $\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r]}$ on Σ_{syn} as before by $\widetilde{\mathcal{O}}_1^{\mathrm{st}}(U) = H^0((U_1/\widetilde{E}_1)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_{U_1/\widetilde{E}_1})$ and $\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r]}(U) = H^0((U_1/\widetilde{E}_1)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}^{[r]}_{U_1/\widetilde{E}_1})$. We write $\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r]} = \widetilde{\mathcal{O}}_1^{\mathrm{st}}$ if $r \leqslant 0$. As in (6.2.2.2), all these are sheaves and we have functorial isomorphisms $H^i(\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r]}) \simeq H^i((X_1/\widetilde{E}_1)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{J}^{[r]}_{X_1/\widetilde{E}_1})$. The advantage of $\widetilde{E}_1$ is that the k-vector spaces $H^i(\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r]})$ are now finite dimensional ([**10**, 2.2.6.1]). The functoriality of the crystalline topos gives natural maps of sheaves for $r \in \mathbf{Z}$: $\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]} \to \widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r]}$ which are surjective and induce isomorphisms for $0 \leqslant r+s \leqslant p$: $\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}/\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r+s]} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r]}/\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r+s]}$ ([**10**, 2.2.4.1]).

Lemma 7.3.1. — *Assume $0 \leqslant i \leqslant r \leqslant p-2$.*
1) The map $H^i(\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}) \to H^i(\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}})$ is injective if and only if the map $H^i(\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r]}) \to H^i(\widetilde{\mathcal{O}}_1^{\mathrm{st}})$ is injective.

2) The map $H^i(\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}) \to H^i(\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}/\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r+1]})$ *is surjective if and only if the map* $H^i(\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r]}) \to H^i(\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r]}/\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r+1]})$ *is surjective.*

Proof. — 1) Diagram chase using the long exact sequences associated to:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_1^{[r]} & \longrightarrow & \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}/\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{J}}_1^{[r]} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{O}}_1^{\mathrm{st}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{O}}_1^{\mathrm{st}}/\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r]} & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

2) Diagram chase using the long exact sequences associated to:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_1^{[r+1]} & \longrightarrow & \mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]} & \longrightarrow & \mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}/\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r+1]} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r+1]} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r]} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r]}/\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r+1]} & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

□

So to prove 2) and 3) in (7.1) for $n = 1$, it remains to prove the above two assertions in the "tilda" case. We won't give details here: the ingredients are a careful study of the long exact sequences associated to the short exact sequences:

$$0 \longrightarrow u^k\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r]} \longrightarrow u^l\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[s]} \longrightarrow u^l\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[s]}/u^k\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r]} \longrightarrow 0$$

where $0 \leqslant l \leqslant k \leqslant p-1$ and $l+s \leqslant k+r$, together with dimension arguments (which make sense now), the de Rham computation of log-crystalline cohomology and suitable variants of (7.2.6). The proofs are a bit technical and not very illuminating; for the details, we refer the reader to [**10**, 2.2.5-2.2.6].

Remark 7.3.2. — One can in fact define an object $\widetilde{\mathcal{M}} = (H^i(\widetilde{\mathcal{O}}_1^{\mathrm{st}}), H^i(\widetilde{\mathcal{J}}_1^{\mathrm{st},[r]}), \widetilde{\phi}_r, \widetilde{N})$ of the category $\underline{\widetilde{\mathcal{M}}}_k^r$ of (5.1.2) and show it corresponds to $\mathcal{M} = (H^i(\mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}), H^i(\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}), \phi_r, N)$ under the equivalence (5.1.2.2).

7.3.2. Finally, we deduce the result for any n from the result for $n = 1$. Using the flatness and the exact sequences of (6.2.2.4), we have long sequences for $i, r \in \mathbf{N}$:

$$\cdots \to H^{i-1}(\mathcal{J}_{n-1}^{\mathrm{st},[r]}) \to H^i(\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}) \to H^i(\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}) \to H^i(\mathcal{J}_{n-1}^{\mathrm{st},[r]}) \to H^{i+1}(\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]}) \to \cdots$$

Assume $0 \leqslant i \leqslant r \leqslant p-2$. By induction on n, we can assume that the data $(H^i(\mathcal{O}_{n-1}^{\mathrm{st}}), H^i(\mathcal{J}_{n-1}^{\mathrm{st},[r]}), \phi_r, N)$ is in $\underline{\mathcal{M}}^r$ (i.e. satisfies 1), 2) and 3) of (7.1)). As $\underline{\mathcal{M}}^r$ is abelian (5.1.1.2), we end up (using the case $n = 1$) with a commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}' & \longrightarrow & H^i(\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}) & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}' & \longrightarrow & H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}) & \longrightarrow & \mathcal{M}'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

where $\mathcal{M}', \mathcal{M}''$ are in $\underline{\mathcal{M}}^r$ and $p\mathcal{M}' = 0$, and where the two vertical maps on the right and on the left are injective (caution: one has to be a bit careful for $i = r$

since this case involves $H^{r+1}(\mathcal{J}_1^{\mathrm{st},[r]})$, see [**10**, 2.3.2]). Thus one has an injection $H^i(\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}) \hookrightarrow H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})$.

Lemma 7.3.3. — *Let $\mathcal{M}$ be an S-module satisfying all the conditions of (5.1.1) EXCEPT perhaps the two conditions "$\mathcal{M} \simeq \oplus_{i\in I}(S/p^iS)^{d_i}$" and "$\phi_r(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M})$ generates $\mathcal{M}$". Assume we have an exact sequence of S-modules: $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$, with $\mathcal{M}', \mathcal{M}'' \in \underline{\mathfrak{M}}^r$, inducing an exact sequence on the Fil^r and commuting with ϕ_r and N. Then $\mathcal{M}$ is in $\underline{\mathfrak{M}}^r$, i.e. the two above conditions are automatically satisfied.*

The first condition is the hardest, see [**10**, 2.3.1.2]. Applying this lemma to $\mathcal{M} = (H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}), H^i(\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}), \phi_r, N))$ and $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}''$ as previously, we finally obtain as a conclusion:

Theorem 7.3.4. — *Let X be a fine and proper log-scheme which is log-smooth over Σ and such that X_1/Σ_1 is of Cartier type. For $n \in \mathbf{N}$ and $0 \leqslant i \leqslant r \leqslant p-2$, the data:*

$$\Big(H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}), H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}), \phi_r, N\Big)$$

define an object of the category $\underline{\mathfrak{M}}^r$.

8. The log-syntomic cohomology

We keep the same notations as in (7) but we now assume X/Σ is semi-stable (and proper) as in (2.2.1.2). In that case, the geometric generic fiber $X \times_W K_0$ has a trivial log-structure and is (classically) smooth over $\mathrm{Spec}(K_0)$. We also fix two integers i, r such that $0 \leqslant i \leqslant r \leqslant p-2$. Now that we know $(H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}), H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}), \phi_r, N)$ is in $\underline{\mathfrak{M}}^r$, we can compute its associated representation of G_{K_0} as in (5.2.2) using T_{st}^*, or rather its dual version T_{st}. Our aim is to prove this representation is isomorphic to $H^i((X \times_W \overline{K})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ as in the smooth case. The main tool for this is an intermediate cohomology called the "log-syntomic" cohomology (a log-analogue of the cohomology mentioned in (3.2)) that we introduce now.

8.1. For $n \in \mathbf{N}$, define $\mathcal{S}_n^r = \mathrm{Ker}(\phi_r - \mathrm{Id} : \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]} \to \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}})$ where Id is the natural injection $\mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]} \hookrightarrow \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}$.

Proposition 8.1.1. — *There are exact sequences of sheaves on $\mathrm{Spec}(W)_{\mathrm{syn}}$:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_n^r \longrightarrow \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]} \xrightarrow{\phi_r - \mathrm{Id}} \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}} \longrightarrow 0.$$

One has to prove the surjectivity. By flatness (6.2.2.4), one is easily reduced to the case $n = 1$, but it should be noticed that here the proof *can't* be reduced to the case (A_∞, M_∞) of (6.1.2.1), i.e. the map $\mathcal{J}_1^{\mathrm{cris},[r]}(A_\infty, M_\infty) \xrightarrow{\phi_r - \mathrm{Id}} \mathcal{O}_1^{\mathrm{cris}}(A_\infty, M_\infty)$ is *not* surjective in general. One has to use other log-syntomic coverings than just those of (6.1.2.1), namely coverings of the form $A \to A[X]/(X^p - aX - b)$ with induced log-structure $(a, b \in A)$. See [**10**, 3.1.4].

For L a finite extension of K_0 in $\overline{K}$, denote by Σ_L the log-scheme $\mathcal{O}_L \smallsetminus \{0\} \to \mathcal{O}_L$ and $X_{\Sigma_L} = X \times_\Sigma \Sigma_L$ (fiber product in the category of fine log-schemes or all log-schemes), one checks $X_{\Sigma_L} \to X$ is log-syntomic, so X_{Σ_L} is in Σ_{syn}.

Definition 8.1.2. — We define the torsion log-syntomic cohomology of X (resp. the absolute torsion log-syntomic cohomology of X) to be the groups $\varinjlim H^i((X_{\Sigma_L})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^r)$ (resp. $H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^r)$) where the direct limit is taken over the finite extensions L of K_0 in $\overline{K}$.

For brevity, we write $H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^r)$ instead of $\varinjlim H^i((X_{\Sigma_L})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^r)$. These last groups are endowed with a natural action of G_{K_0} and all the groups of (8.1.2) can be computed on the étale site of the special fiber just because $H^i((X_{\Sigma_L})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^r) = H^i((X_{\Sigma_L})_{\text{ét}}, R\alpha_* \mathcal{S}_n^r)$ where α_* is as in (7.2). One wants to relate these groups to the étale cohomology of the geometric generic fiber. In the smooth case, this was done in two steps. First, in [**6**], Bloch-Kato(-Gabber) computed the sheaves of nearby cycles $i^* R^q j_* \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}(q)$ for $0 \leqslant q \leqslant p-2$ where $i : X \times_W k \hookrightarrow X$ and $j : X \times_W K_0 \hookrightarrow X$. Secondly, in [**45**] and [**47**], Kato and Kurihara related these computations to the sheaves $\mathcal{S}_n^r$ of [**32**]. The computations of [**6**] have been extended by Hyodo to the semi-stable case ([**37**]) and in [**69**], Tsuji finally used Hyodo's computations to generalize Kato's results to the above $\mathcal{S}_n^r$. All these computations work in fact over any finite extension L of K_0. As a consequence:

Theorem 8.1.3 **([44, 5.5], [69])**. — *Let X be a proper semi-stable scheme over W and endow it with its canonical log-structure (2.2.1.2). For $n \in \mathbf{N}$ and $0 \leqslant i \leqslant r \leqslant p-2$, there are canonical isomorphisms:*

$$H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^r) \xrightarrow{\sim} H^i((X \times_W K_0)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}(r))$$
$$H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^r) \xrightarrow{\sim} H^i((X \times_W \overline{K})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}(r)).$$

The second isomorphism is compatible with the actions of G_{K_0}.

Remark 8.1.4. — Although we won't need the isomorphism for the $H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^r)$ in the sequel, it should be noticed that if the log-structure on X is induced from the one on Σ (i.e. X is proper smooth over W), the groups $H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^r)$ are *not always* equal to the syntomic cohomology groups defined by Fontaine-Messing forgetting the log-structures: compare (8.1.3) with the main theorem of [**47**]. This difference, however, disappears when one looks at $H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^r)$.

8.2. As in (3.2), we have now to relate $H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^r)$ to $T_{\mathrm{st}}(H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}), H^i(\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}), \phi_r, N)$ (recall our notation $H^i(\mathcal{F}) = H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{F})$). As for $\mathcal{S}_n^r$, define for any sheaf $\mathcal{F}$ on Σ_{syn}: $H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{F}) = \varinjlim H^i((X_{\Sigma_L})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{F})$. Recall from (5.2.2) that we have chosen an isomorphism between $\widehat{A}_{\mathrm{st}}$ and the p-adic completion of $A_{\mathrm{cris}}\langle X\rangle$ (do not confuse this X with the log-scheme X!). We first relate $H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]})$ to the groups $H^i(\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[*]})$ by the following Künneth formula (see [**10**, 3.2.2]):

Lemma 8.2.1. — *For $s \in \mathbf{N}$ let $\mathrm{Fil}^s_X \widehat{A_{\mathrm{st}}} = \{\sum_{i=s}^m a_i \frac{X^i}{i!}, a_i \in A_{\mathrm{cris}}, m \in \mathbf{N}\} \subset \mathrm{Fil}^s \widehat{A_{\mathrm{st}}}$. There are short exact sequences:*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{s=1}^{r} \mathrm{Fil}^s_X \widehat{A_{\mathrm{st}}} \otimes_S H^i(\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r+1-s]}) \longrightarrow \bigoplus_{s=0}^{r} \mathrm{Fil}^s_X \widehat{A_{\mathrm{st}}} \otimes_S H^i(\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r-s]}) \longrightarrow H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}) \longrightarrow 0.$$

The reason we use $\mathrm{Fil}^s_X \widehat{A_{\mathrm{st}}}$ is because it is a flat S-module (which is not the case of $\mathrm{Fil}^s \widehat{A_{\mathrm{st}}}$). One should notice that this lemma is *exactly* the place where the ring $\widehat{A_{\mathrm{st}}}$ appears.
Define:

$$\mathrm{Fil}^r_X(\widehat{A_{\mathrm{st}}} \otimes_S H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})) = \sum_{s=0}^{r} \mathrm{Fil}^s_X \widehat{A_{\mathrm{st}}} \otimes_S \mathrm{Im}\Big(H^i(\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r-s]}) \to H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})\Big) \subset \widehat{A_{\mathrm{st}}} \otimes_S H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}).$$

The operators N on $\widehat{A_{\mathrm{st}}}$ and $H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})$ give an operator $N = N \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N$ on $\widehat{A_{\mathrm{st}}} \otimes_S H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})$.

Proposition 8.2.2. — *The short sequences of (8.2.1) induce isomorphisms:*

$$(\widehat{A_{\mathrm{st}}} \otimes_S H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}))_{N=0} \xrightarrow{\sim} H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})_{N=0}$$
$$\mathrm{Fil}^r_X(\widehat{A_{\mathrm{st}}} \otimes_S H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}))_{N=0} \xrightarrow{\sim} H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]})_{N=0}$$

where "$N = 0$" means "kernel of N" (in particular we have that $H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]})_{N=0} \hookrightarrow H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})_{N=0}$).

The first isomorphism is a consequence of (8.2.1) with $r = 0$. The second is derived from a careful study of the action of N on the exact sequences in (8.2.1) together with the fact that the maps $H^i(\mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[s]}) \to H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})$ coming from the natural injections of sheaves are injective for $s = 0$ (trivial) and for $s = r$ (7.3.4). For proofs, see [**10**, 3.2.3.2-3.2.3.4].

Recall that in (5.2.2), we have defined $\mathrm{Fil}^r(\widehat{A_{\mathrm{st}}} \otimes_S \mathcal{M})$ for any object $\mathcal{M}$ of $\underline{\mathfrak{M}}^r$ (and so using only $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}$). Let $\mathrm{Fil}^r(\widehat{A_{\mathrm{st}}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} = \{x \in \mathrm{Fil}^r(\widehat{A_{\mathrm{st}}} \otimes_S \mathcal{M}) \mid N(x) = 0\}$. Fortunately, we have ([**10**, 3.2.1.4 and 3.2.1.2]):

Lemma 8.2.3. — *There are isomorphisms:*

$$\mathrm{Fil}^r_X(\widehat{A_{\mathrm{st}}} \otimes_S H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}))_{N=0} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^r(\widehat{A_{\mathrm{st}}} \otimes_S H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}))_{N=0}$$

where the right hand side is defined by viewing $H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})$ as an object of $\underline{\mathfrak{M}}^r$ (7.3.4).

Now we want to make more explicit the groups:

$$H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})_{N=0} \quad \text{and} \quad H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]})_{N=0}.$$

Recall there is an exact sequence (6.2.3.2):

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]} \longrightarrow \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]} \xrightarrow{N} \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r-1]} \longrightarrow 0.$$

Combining its associated long exact sequences with (8.2.1), (7.3.4) and a dévissage in the category $\underline{\mathcal{M}}^r$, we obtain:

***Lemma 8.2.4* ([10, 3.2.3.1]).** — *The long cohomology sequences associated to the short exact sequence of (6.2.3.2) yield isomorphisms:*

$$H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) \xrightarrow{\sim} H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})_{N=0}$$
$$H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]}) \xrightarrow{\sim} H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]})_{N=0}.$$

Taking the kernel of $\phi_r - \mathrm{Id}$ on both sides of the second isomorphism of (8.2.2) and using (8.2.4) and (8.2.3), we see that what remains to prove, in order to relate $H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^{\mathrm{cris},[r]})$ to $T_{\mathrm{st}}(H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}))$, is:

Proposition 8.2.5. — *The long cohomology sequences associated to the short exact sequence of (8.1.1) yield isomorphisms:* $H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^r) \xrightarrow{\sim} H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{cris},[r]})^{\phi_r=1}$ *where the exponent on the right hand side means "kernel of* $\phi_r - \mathrm{Id}$*".*

Proof. — Take the direct limit over L on the long exact sequences associated to (8.1.1) and use (8.2.4), (8.2.2) and (8.2.3) together with the surjectivity of $\phi_r - \mathrm{Id} : \mathrm{Fil}^r(\widehat{A_{\mathrm{st}}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \to (\widehat{A_{\mathrm{st}}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$ for any object $\mathcal{M}$ of $\underline{\mathcal{M}}^r$. See [**10**, 3.2.4.4] for more details. □

To sum up, the theory of section 5 together with (7.3.4) and the above results finally furnish Galois equivariant isomorphisms:

$$H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^r) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^r(\widehat{A_{\mathrm{st}}} \otimes_S H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}))_{N=0}^{\phi_r=1} = T_{\mathrm{st}}(H^i(\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}))(r).$$

Hyodo-Kato-Tsuji's theory of nearby cycles in the semi-stable reduction case also furnishes Galois equivariant isomorphisms (8.1.3):

$$H^i(\overline{X}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{S}_n^r) \xrightarrow{\sim} H^i((X \times_W \overline{K})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})(r).$$

In conclusion:

Theorem 8.2.6. — *Let X be a proper semi-stable scheme over W and endow it with its canonical log-structure (2.2.1.2). For $n \in \mathbf{N}$ and $0 \leqslant i \leqslant r \leqslant p-2$, there are isomorphisms compatible with the action of G_{K_0}:*

$$T_{\mathrm{st}}(H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}), H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{\mathrm{st},[r]}), \phi_r, N) \simeq H^i((X \times_W \overline{K})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}).$$

9. Applications and open problems

We give four applications and suggest four open questions.

9.1. Applications

9.1.1. If V is a p-adic semi-stable representation of G_{K_0} with negative Hodge-Tate weights, one can show $(\widehat{A_{\rm st}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{G_{K_0}}$ is in a natural way an object of the category $\underline{\mathcal{MF}}^+_{S_{K_0}}(\phi, N)$ of (4.2) and that its associated D given by the equivalence (4.2.1) is a weakly admissible filtered module (4.1). In fact, this D is nothing else than $(B^+_{\rm st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_{K_0}}$ by [**8**, 8.2] (here $B^+_{\rm st} = B^+_{\rm cris}[v]$, cf. introduction of section 4). Fontaine conjectured in [**25**, 5.4.4] that the above functor $V \mapsto D$ is an equivalence of categories between semi-stable representations of G_{K_0} with negative Hodge-Tate weights (or positive if one dualizes) and weakly admissible filtered (ϕ, N)-modules D such that $\mathrm{Fil}^0 D = D$. This conjecture has recently been proven by him and Colmez in [**14**]. However, their result doesn't yield information about the lattices. If D is an object of $\underline{MF}^+_{K_0}(\phi, N)$ such that $\mathrm{Fil}^{p-1} D = 0$ and $\mathcal{D} = S_{K_0} \otimes_{K_0} D$ the corresponding object of $\underline{\mathcal{MF}}^+_{S_{K_0}}(\phi, N)$ given by (4.2.1), define a *strongly divisible lattice* in $\mathcal{D}$ to be any finitely generated free sub-S-module $\mathcal{M}$ of $\mathcal{D}$ stable by ϕ, N such that $\mathcal{M}[1/p] = \mathcal{D}$ and $\phi(\mathcal{M} \cap \mathrm{Fil}^{p-2}\mathcal{D})$ generates $p^{p-2}\mathcal{M}$ over S. The theory of section 5 gives only a small piece of the Colmez-Fontaine theorem, but describes the lattices:

Theorem 9.1.1.1
1) There is an anti-equivalence of categories between weakly admissible filtered (ϕ, N)-modules D such that $\mathrm{Fil}^0 D = D$ and $\mathrm{Fil}^{p-1} D = 0$ and semi-stable representations V of G_{K_0} with Hodge-Tate weights between 0 and $p-2$.
2) There is an anti-equivalence of categories between strongly divisible lattices in $S_{K_0} \otimes_{K_0} D$ for a given D as in 1) and Galois stable lattices in the corresponding V.

See [**11**] for a proof of 1) and [**12**] for a proof of 2).

9.1.2. The second application is of course the recovery, in the situation we consider, of the "usual" comparison theorem with $\mathbf{Q}_p$-coefficients as conjectured by Fontaine-Jannsen ([**44**, 1.1]). We won't insist on this topic because our main interest here is not $\mathbf{Q}_p$-coefficients and because there are now different proofs of this $\mathbf{Q}_p$-comparison theorem in its full generality ([**70**], [**71**], [**22**]). So let us just describe the main steps.
1) Fix X/Σ proper semi-stable and $i \in \{0, \dots, p-2\}$. Let $\mathcal{D} = \mathbf{Q}_p \otimes \varprojlim H^i(X_{\rm syn}, \mathcal{O}^{\rm st}_n)$ and $\mathrm{Fil}^j \mathcal{D} = \mathbf{Q}_p \otimes \varprojlim H^i(X_{\rm syn}, \mathcal{J}^{{\rm st},[j]}_n)$ for $j \in \mathbf{Z}$. Then $(\mathcal{D}, (\mathrm{Fil}^j \mathcal{D})_j, \phi, N)$ is an object of $\underline{\mathcal{MF}}^+_{S_{K_0}}(\phi, N)$ and its associated filtered D given by (4.2.1) can be identified with $H^i_{\rm dR}(X \times_W K_0)$ endowed with the Hodge filtration (cf. [**10**, 4.3.2], an important argument here is due to Kato ([**44**, 6.4.2])).
2) There are canonical Galois equivariant isomorphisms (with obvious notations):
$\mathrm{Fil}^i(\widehat{A_{\rm st}} \otimes_S \mathcal{D})^{\phi=p^i}_{N=0} \simeq \mathbf{Q}_p \otimes \varprojlim T_{\rm st}(H^i(X_{\rm syn}, \mathcal{O}^{\rm st}_n))$ ([**10**, 4.3.2.2] with $r = i$)
$\mathrm{Fil}^i(\widehat{A_{\rm st}} \otimes_S \mathcal{D})^{\phi=p^i}_{N=0} \simeq \mathrm{Fil}^i(B_{\rm st} \otimes_{K_0} H^i_{\rm dR}(X \times_W K_0))^{\phi=p^i}_{N=0}$ ([**8**, 8.1.2]).
3) By (8.2.6), we thus obtain a Galois equivariant isomorphism:

$$\mathrm{Fil}^i(B_{\rm st} \otimes_{K_0} H^i_{\rm dR}(X \times_W K_0))^{\phi=p^i}_{N=0}(-i) \simeq \mathbf{Q}_p \otimes \varprojlim H^i((X \times_W \overline{K})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$$

which we can rewrite $B_{\rm st} \otimes_{K_0} H^i_{\rm dR}(X \times_W K_0) \simeq B_{\rm st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^i_{\text{ét}}(X \times_W \overline{K}, \mathbf{Q}_p)$.

9.1.3. The third application concerns the invariant factors in the torsion of the étale cohomology. Fix X/Σ proper semi-stable and $i \in \{0, \dots, p-2\}$. Let $H^i_{\mathrm{st}}(X) = \varprojlim H^i(X_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}^{\mathrm{st}}_n)$ and $H^i_{\text{ét}}(X \times_W \overline{K}, \mathbf{Z}_p) = \varprojlim H^i((X \times_W \overline{K})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. Using the previous results, one has $H^i_{\mathrm{st}}(X) \simeq S^d \oplus \oplus_{i\in I}(S/p^iS)^{d_i}$ and $H^i_{\text{ét}}(X \times_W \overline{K}, \mathbf{Z}_p) \simeq \mathbf{Z}_p^d \oplus \oplus_{i\in I}(\mathbf{Z}/p^i\mathbf{Z})^{d_i}$ (same d and d_i, see [**10**, 4.1-4.2]). Let Σ^{HK} be the log-scheme associated to $(\mathbf{N} \mapsto W, 1 \mapsto 0)$. Notice that $\Sigma_1 = \Sigma_1^{HK}$ so one has morphisms $X_1 \to \Sigma_1^{HK} \hookrightarrow \Sigma_n^{HK}$ (recall our notation $U_n = U \times_W W_n$ with the induced log-structure). Let $H^i_{HK}(X) = \varprojlim H^i((X_1/\Sigma_n^{HK})_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_{X_1/\Sigma_n^{HK}})$ (HK for Hyodo-Kato: this cohomology is of high importance in [**38**]) and $H^i_{\mathrm{dR}-\log}(X)$ be the de Rham cohomology of X with logarithmic poles at the singular locus ([**37**, 1.5], [**38**, 2.5], it coincides with the classical de Rham cohomology when X/W is smooth), one can show:

$$H^i_{\mathrm{dR}-\log}(X) \simeq \varprojlim H^i_{\mathrm{dR}-\log}(X_n) \simeq \varprojlim H^i((X_n/\Sigma_n)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_{X_n/\Sigma_n})$$

(the first isomorphism is a consequence of (EGA III.3.2.3+4.1.7) and the fact the E^1-terms in the spectral sequence Hodge $\Rightarrow$ de Rham (log version) satisfy in that case the Mittag-Leffler conditions, the second isomorphism is an application of [**43**, 6.4]). Using (7.3.4), one proves ([**10**, 4.3.1.3]):

$$H^i_{\mathrm{st}}(X) \otimes_{S,f_0} W \xrightarrow{\sim} H^i_{HK}(X) \quad \text{and} \quad H^i_{\mathrm{st}}(X) \otimes_{S,f_p} W \xrightarrow{\sim} H^i_{\mathrm{dR}-\log}(X)$$

where $f_0 : S \to W$, $\sum w_i u^i/i! \mapsto w_0$ (i.e. $u \mapsto 0$) and f_p is as in (4.2) (i.e. $u \mapsto p$). We sum up:

Theorem 9.1.3.1 **([10,** 4.3.1.5**])**. — *Let X be a proper semi-stable scheme over W. For $i \in \{0, \dots, p-2\}$, the invariant factors of $H^i_{\text{ét}}(X \times_W \overline{K}, \mathbf{Z}_p)$, $H^i_{HK}(X)$ and $H^i_{\mathrm{dR}-\log}(X)$ coincide.*

9.1.4. Let $h \in \mathbf{N} \smallsetminus \{0\}$, $\pi \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ such that $\pi^{p^h-1} = p$ and $\theta_h : I_{K_0} \to \mu_{p^h-1}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$, $g \mapsto g(\pi)/\pi$ where I_{K_0} is the inertia subgroup of G_{K_0} (θ_h is Serre's fundamental character of level h, see [**64**, 1.7]). As a last application, we get:

Theorem 9.1.4.1 **([10,** 3.2.5.1**])**. — *Let X be a proper semi-stable scheme over W and fix $n \in \mathbf{N}$, $i \in \mathbf{N}$. Let T be either $H^i((X \times_W \overline{K})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ or a G_{K_0}-stable lattice in $H^i_{\text{ét}}(X \times_W \overline{K}, \mathbf{Q}_p)$ and $\widetilde{T}$ the semi-simplification of the G_{K_0}-module T/pT. Then the action of I_{K_0} (through its tame quotient) on $\widetilde{T}$ is given by characters of the form $\theta_h^{-(i_0+pi_1+\cdots+p^{h-1}i_{h-1})}$ with $0 \leqslant i_j \leqslant i$.*

This is essentially derived from [**31**, 5.3], (5.1.1.3) and (8.2.6)+(5.2.2.4) (and is of course automatic if $i \geqslant p-1$). This theorem answers part of a question of Serre ([**64**, 1.13]) and still holds if T is replaced by any Galois stable lattice in any semi-stable representation of G_{K_0} with Hodge-Tate weights between $-i$ and 0 ([**11**, 1.2]).

9.2. Open problems. — As we mentioned at the end of (2.2.2), the first open problem is of course to remove the restrictions $K = K_0$ and $i < p-1$ (and we have already mentioned that there should be a good theory for $i[K : K_0] < p-1$, see appendix of [**11**]). As this doesn't seem to be an easy task in the general case, we only suggest in the sequel questions that we view as interesting even *under* the assumptions $K = K_0$ and $i \leqslant p-2$.

9.2.1. In [**19**], Faltings extended the Fontaine-Laffaille-Messing theory to a much more general situation: he allowed non constant coefficients and treated the case of open varieties over W with smooth normal crossings compactifications (he also treated the relative case). The generalized torsion comparison theorems he obtained could be applied for instance in [**42**] and [**23**] to the study of Galois representations modulo p arising from eigenforms of weight k on $\Gamma_1(N)$ with $(N,p) = 1$ and $p > k$. Following Faltings, is it possible to extend the previous theory to deal with non constant coefficients and open varieties over W with "good" compactifications? This could be useful for the study of Galois representations modulo p arising from eigenforms of weight k on $\Gamma_1(pN)$ with $(N,p) = 1$, $p > k$ and Dirichlet character of conductor dividing N. Of course, if one wants to follow the "syntomic" method, this would also mean extending to these situations the computations of [**69**] (actually, in *loc.cit.*, some categories of non constant coefficients are already considered).

9.2.2. The finite representations of G_{K_0} built in (3.1.3) and (5.2.2) via the categories $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ and $\underline{\mathfrak{M}}^r$ are in general wildly ramified. There are several (related) ways to measure this wild ramification. One is to compute the maximal power of p that divides the different $\mathcal{D}_{F/K_0}$ where F is the finite Galois extension of K_0 cut out by the corresponding finite representation. Another is to determine which higher ramification subgroups of the inertia $I_{K_0} = G^0_{K_0}$ have non trivial image in $\mathrm{Gal}(F/K_0)$. For the objects of $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$, this was done by Abrashkin and Fontaine:

***Theorem 9.2.2.1* ([26], [28], [1])**. — *Let $n \in \mathbf{N}$, $r \in \{0,\dots,p-2\}$, M an object of $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ such that $p^n M = 0$ and F the finite Galois extension of K_0 cut out by the finite representation $T^*_{\mathrm{cris}}(M)$. Then:*
1) $val_p(\mathcal{D}_{F/K_0}) < n + \frac{r}{p-1}$
2) if $\nu > n - 1 + \frac{r}{p-1}$, then $\mathrm{Gal}(F/K_0)^\nu = \{1\}$.

Here val_p is the p-adic valuation normalized by $\mathrm{val}_p(p) = 1$ and $\mathrm{Gal}(F/K_0)^\nu$ is the upper numbering as in [**66**, IV.3]. Using the Fontaine-Messing results of (3.2), this implies $G^\nu_{K_0}$ acts trivially on $H^i((X \times_W \overline{K})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ (and any subquotient killed by p^n of $H^i_{\text{ét}}(X \times_W \overline{K}, \mathbf{Q}_p)$) whenever $\nu > n - 1 + \frac{i}{p-1}$ if X is proper smooth over W and $i \in \{0,\dots,p-2\}$. What is this lower bound if X is only proper semi-stable over W? More generally, what is the bound for the representations coming from $\underline{\mathfrak{M}}^r$? In [**33**], Gross suggests an upper bound for $\mathrm{val}_p(\mathcal{D}_{F/K_0})$ in a special case of some modulo p ordinary representations of $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)$. One can show using (9.2.2.1) that Gross'

bound is actually valid for *naive* objects (see 4.1) killed by p (which do not necessarily correspond to ordinary representations):

***Proposition 9.2.2.2* ([13])**. — *Let $r \in \{0, \dots, p-2\}$ and M an object of $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ killed by p and endowed with a linear endomorphism N such that $N(\mathrm{Fil}^i M) \subset \mathrm{Fil}^{i-1} M$ and $N\phi_i = \phi_{i-1}N$ for any i. Let F be the finite Galois extension of K_0 cut out by the finite representation $T^*_{\mathrm{st}}(S_1 \otimes_k M)$ where $S_1 \otimes_k M$ is viewed as an object of $\underline{\mathfrak{M}}^r$ in the obvious way. Then:*
1) $val_p(\mathcal{D}_{F/K_0}) < 2 + \frac{r}{p(p-1)}$
2) if $\nu > 1 + \frac{1}{p-1}$, then $\mathrm{Gal}(F/K_0)^\nu = \{1\}$.

Of course, the bounds here are not as good as in (9.2.2.1) with $n = 1$ (which corresponds to the case $N = 0$). However, the bound in 2) is optimal as can be easily seen by looking at $F = K_0(\mu_p, p^{1/p})$. What are the bounds that work for any object $\mathcal{M}$ of $\underline{\mathfrak{M}}^r$ such that $p\mathcal{M} = 0$, or more generally such that $p^n\mathcal{M} = 0$?

9.2.3. We assume here $K_0 = \mathbf{Q}_p$. Fix a finite extension of $\mathbf{Q}_p$ with ring of integers $\mathcal{O}$ and residue field $\mathbf{F}$, and a continuous (hence finite) representation:

$$\overline{\rho} : G_{\mathbf{Q}_p} \to GL_2(\mathbf{F})$$

such that $\mathrm{End}_{\mathbf{F}[G_{\mathbf{Q}_p}]}(\overline{\rho}) = \mathbf{F}$. It is known that the continuous deformations $\rho : G_{\mathbf{Q}_p} \to GL_2(A)$ of $\overline{\rho}$ in the sense of Mazur ([**52**, 1.1]) where A is a local noetherian complete $\mathcal{O}$-algebra are parametrized by a local noetherian complete $\mathcal{O}$-algebra $R_{\overline{\rho},\mathcal{O}}$ of residue field $\mathbf{F}$ ([**52**], [**68**]). Suppose that $\overline{\rho}$, viewed as a $\mathbf{F}_p$-representation of $G_{\mathbf{Q}_p}$, is in the essential image of $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ via the functor T^*_{cris} of (3.1.3) for an $r \in \{0, \dots, p-2\}$ and consider only those deformations ρ such that, for each n, $\rho_n : G_{\mathbf{Q}_p} \to GL_2(A) \to GL_2(A/\mathfrak{m}_A^n)$ comes from $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ (via T^*_{cris}) when viewed as a $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$-representation. These deformations are parametrized by a quotient $R_{\overline{\rho},\mathcal{O}}(\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}})$ of $R_{\overline{\rho},\mathcal{O}}$ which turns out to be isomorphic to a power series ring $\mathcal{O}[[T_1, T_2]]$ ([**61**, 5.1]). Since any representation of $G_{\mathbf{Q}_p}$ coming from $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ can be lifted as a (Galois stable) lattice of a crystalline representation of $G_{\mathbf{Q}_p}$ with Hodge-Tate weights in $\{0, \dots, r\}$ (3.1.3.2), and since any such lattice comes from a strongly divisible module (this is an easy consequence of the Fontaine-Laffaille theory, see [**12**, 2.1]), $R_{\overline{\rho},\mathcal{O}}(\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}})$ is also isomorphic to $R_{\overline{\rho},\mathcal{O}}/(\cap\mathfrak{p})$, the intersection being over all prime ideals $\mathfrak{p}$ of $R_{\overline{\rho},\mathcal{O}}$ such that $G_{\mathbf{Q}_p} \to GL_2(R_{\overline{\rho},\mathcal{O}}) \to GL_2(R_{\overline{\rho},\mathcal{O}}/\mathfrak{p})$ is the representation corresponding to a lattice in a crystalline representation of $G_{\mathbf{Q}_p}$ with Hodge-Tate weights $\in \{0, \dots, r\}$.

The question is: what happens if we replace $\underline{MF}^{f,r}_{\mathrm{tor}}$ by $\underline{\mathfrak{M}}^r$ and the word crystalline by the word semi-stable? Of course, in that case, the two analogous quotients of $R_{\overline{\rho},\mathcal{O}}$ are not isomorphic in general since an object of $\underline{\mathfrak{M}}^r$ cannot always be lifted as a strongly divisible module of weight $\leqslant r$. However, since any Galois stable lattice in a semi-stable representation of $G_{\mathbf{Q}_p}$ with Hodge-Tate weights between 0 and r comes from such a strongly divisible module (see 9.1.1.1), one has a canonical surjection $R_{\overline{\rho},\mathcal{O}}(\underline{\mathfrak{M}}^r) \to R_{\overline{\rho},\mathcal{O}}/(\cap\mathfrak{p})$ where $R_{\overline{\rho},\mathcal{O}}(\underline{\mathfrak{M}}^r)$ is the quotient parametrizing all liftings in

$\underline{\mathcal{M}}^r$ and $\mathfrak{p}$ is such that $G_{\mathbf{Q}_p} \to GL_2(R_{\overline{p},\mathcal{O}}/\mathfrak{p})$ is a representation corresponding to a lattice in a semi-stable representation of $G_{\mathbf{Q}_p}$ with Hodge-Tate weights in $\{0,\dots,r\}$. Can one describe these two rings and the kernel of the surjection (which contains the torsion part of $R_{\overline{p},\mathcal{O}}(\underline{\mathcal{M}}^r)$) in terms of generators and relations? For instance, the minimal number of generators of $R_{\overline{p},\mathcal{O}}(\underline{\mathcal{M}}^r)$ should be obtained by computing extension groups (Ext^1) in the abelian category $\underline{\mathcal{M}}^r$ and a possible description of $R_{\overline{p},\mathcal{O}}/(\cap\mathfrak{p})$ (when non zero) could be obtained by looking for suitable families of strongly divisible lattices. This is related to the computations of [**9**, 6] and to the next, and last, question.

9.2.4. Let V be a Hodge-Tate representation of G_{K_0} with Hodge-Tate weights between 0 and $p-2$. By definition, the tame inertia weights on the semi-simplification of the reduction modulo p of V are also between 0 and $p-2$ (see 9.1.4.1). If V is crystalline, by using [**31**, 5.3] together with the fact that the morphisms in $\underline{MF}^{f,p-2}_{\mathrm{tor}}$ are strict with respect to the filtration (3.1.1.1), one gets these two lists of figures are the same. If V is semi-stable, this is not always true anymore, as was first shown by Ribet using an example coming from modular forms (see the correction to [**20**]). In [**9**, 6.1.1.2], using the categories $\underline{\mathcal{M}}^r$, the difference between the two lists is computed for all 2-dimensional (over $\mathbf{Q}_p$) semi-stable representations of G_{K_0} with the above restriction on the Hodge-Tate weights and involves a number $\mathcal{L}(V)$ which only exists when V is semi-stable non crystalline. Is there a general statement which would allow the comparison of the two lists in any dimension? Can one build some kind of polygon out of the tame inertia weights, and compare it with the usual Newton and Hodge polygons (so, in the crystalline case, that polygon would just be the Hodge polygon)? It was noticed by many people (Ulmer, Mazur, Conrad, Diamond, Taylor, ...) that similar phenomena also happen when one deals with (2-dimensional) potentially crystalline (non crystalline) representations of $G_{\mathbf{Q}_p}$ (see [**74**, 1.10] and [**15**, 1.2.1-1.2.3]) and one wonders, with Mazur ([**53**]), what is the general rule behind this.

References

[1] Abrashkin V., *Ramification in étale cohomology*, Inv. Math. 101, 1990, 631-640.

[2] Berthelot P., *Slopes of Frobenius in crystalline cohomology*, Proc. of Symposia in Pure Maths. 29, Americ. Math. Soc., 1975, 315-328.

[3] Berthelot P., *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$*, Lecture Notes in Math. 407, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[4] Berthelot P., Ogus A., *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton, 1978.

[5] Berthelot P., Ogus A., *F-isocristals and de Rham cohomology I*, Inv. Math. 72, 1983, 159-199.

[6] Bloch S., Kato K., *p-adic étale cohomology*, Pub. Math. de l'I.H.E.S. 63, 1986, 107-152.

[7] Breuil C., *Topologie log-syntomique, cohomologie log-cristalline et cohomologie de Čech*, Bull. Soc. math. France 124, 1996, 587-647.

[8] Breuil C., *Représentations p-adiques semi-stables et transversalité de Griffiths*, Math. Annalen 307, 1997, 191-224.

[9] Breuil C., *Construction de représentations p-adiques semi-stables*, Ann. Scient. de l'E.N.S. 31, 1998, 281-327.

[10] Breuil C., *Cohomologie étale de p-torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable*, Duke Math. J. 95, 1998, 523-620.

[11] Breuil C., *Représentations semi-stables et modules fortement divisibles*, Inv. Math. 136, 1999, 89-122.

[12] Breuil C., *Une remarque sur les représentations locales p-adiques et les congruences entre formes modulaires de Hilbert*, Bull. Soc. Math. France 127, 1999, 459-472.

[13] Breuil C., *Letter to Gross*, December 3, 1998.

[14] Colmez P., Fontaine J.-M., *Construction des représentations p-adiques semi-stables*, Inv. Math. 140, 2000, 1-43.

[15] Conrad B., Diamond F., Taylor R., *Modularity of certain potentially crystalline Galois representations*, J. Amer. Math. Soc. 12, 1999, 521-567.

[16] Deligne P., Illusie L., *Relèvement modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham*, Inv. Math. 89, 1987, 247-270.

[17] Ekedahl T., *Diagonal complexes and F-gauges structures*, Travaux en cours, Hermann, Paris, 1986.

[18] Faltings G., *p-adic Hodge theory*, J. Amer. Math. Soc. 1, 1988, 255-299.

[19] Faltings G., *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, Johns Hopkins Univ. Press, 1989, 25-79.

[20] Faltings G., *Crystalline cohomology of semi-stable curves, and p-adic Galois representations*, Journal of Algebraic Geometry 1, 1992, 61-82, correction, 427.

[21] Faltings G., *Integral crystalline cohomology over very ramified valuation rings*, J. Amer. Math. Soc. 12, 1999, 117-144.

[22] Faltings G., *Almost étale extensions*, these proceedings.

[23] Faltings G., Jordan B., *Crystalline cohomology and $GL_2(\mathbf{Q})$*, Isr. J. of Math. 90, 1995, 1-66.

[24] Fontaine J.-M., *Le corps des périodes p-adiques*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 59-111.

[25] Fontaine J.-M., *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 113-184.

[26] Fontaine J.-M., *Schémas propres et lisses sur* $\mathbf{Z}$, Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry, Hindustan Book Agency, 1993, 43-56.

[27] Fontaine J.-M., *Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p-adiques*, Lecture Notes in Maths 1016, 1983, 86-108.

[28] Fontaine J.-M., *Il n'y a pas de variétés abéliennes sur* $\mathbf{Z}$, Inv. Math. 81, 1985, 515-538.

[29] Fontaine J.-M., *Groupes finis commutatifs sur les vecteurs de Witt*, C.R.A.S. 280, 1975, 1423-1425.

[30] Fontaine J.-M., *Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate*, Ann. of Maths 115, 1982, 379-409.

[31] Fontaine J.-M., Laffaille G., *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. de l'E.N.S. 15, 1982, 547-608.

[32] Fontaine J.-M., Messing W., *p-adic periods and p-adic étale cohomology*, Contemporary Math. 67, 1987, 179-207.

[33] Gross B., *Letter to Wintenberger*, December 2, 1997.
[34] Grothendieck A., *Fondements de la Géometrie Algébrique*, extracts from Séminaire Bourbaki 1957-1962.
[35] Grothendieck A., *Crystals and de Rham cohomology of schemes*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland, 1968, 306-358.
[36] Grothendieck A., *Letter to Deligne*, October 10, 1965.
[37] Hyodo O., *A note on p-adic étale cohomology in the semi-stable reduction case*, Inv. Math. 91, 1988, 543-557.
[38] Hyodo O., Kato K., *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 221-268.
[39] Illusie L., *Logarithmic smoothness and vanishing cycles*, preprint, Université Paris-Sud, 1995.
[40] Illusie L., *An overview of the work of K. Fujiwara, K. Kato and C. Nakayama on Logarithmic Etale Cohomology*, these proceedings.
[41] Illusie L., *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique [d'après G. Faltings, J.-M. Fontaine et al.]*, Séminaire Bourbaki 726, 1990.
[42] Jordan B., *Higher weight modular forms and Galois representations*, Contemporary Mathematics 165, 1994, 175-181.
[43] Kato K., *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, John Hopkins University Press, 1989, 191-224.
[44] Kato K., *Semi-stable reduction and p-adic étale cohomology*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 269-293.
[45] Kato K., *On p-adic Vanishing Cycles (Application of ideas of Fontaine-Messing)*, Advanced Studies in Pure Maths. 10, 1987, 207-251.
[46] Kato K., Messing W., *Syntomic cohomology and p-adic étale cohomology*, Tôhoku Math. J. 44, 1992, 1-9.
[47] Kurihara M., *A note on p-adic étale cohomology*, Proc. Japan Acad. 63, 1987, 275-278.
[48] Laffaille G., *Groupes p-divisibles et modules filtrés: le cas peu ramifié*, Bull. Soc. math. France 108, 1980, 187-206.
[49] Mazur B., *Frobenius and the Hodge filtration*, Bull. Amer. Math. Soc. 78, 1972, 653-667.
[50] Mazur B., *Frobenius and the Hodge filtration-estimates*, Ann. of Math. 98, 1973, 58-95.
[51] Mazur B., *Notes on syntomic sites*, typed notes.
[52] Mazur B., *Deforming Galois representations*, in Galois Groups over **Q**, Springer 1989, 385-438.
[53] Mazur B., *Letter to Breuil*, July 26, 1996.
[54] Mokrane A., *Quelques remarques sur l'ordinarité*, J. of Number Theory 73, 1998, 162-181.
[55] Mumford D., *Pathologies of modular algebraic surfaces*, Amer. J. of Math. 83, 1961, 339-342.
[56] Mumford D., *Further pathologies in Algebraic Geometry*, Amer. J. of Math. 84, 1962, 642-648.
[57] Nakayama C., *Logarithmic etale cohomology*, Math. Ann. 308, 1997, 365-404.
[58] Nakayama C., *Nearby cycles for log smooth families*, Comp. Math. 112, 1998, 45-75.
[59] Niziol W., *Crystalline conjecture via K-theory*, Ann. Scient. de l'E.N.S. 31, 1998, 659-681.
[60] Quiros A., *On the divisibility properties of families of filtered F-crystals*, Math. Ann. 288, 1990, 389-412.

[61] Ramakrishna R., *On a variation of Mazur's deformation functor*, Comp. Math. 87, 1993, 269-286.

[62] Raynaud M., *p-torsion du schéma de Picard*, Journées de Géométrie algébrique de Rennes, Astérisque 64, Soc. Math. de France, 1979, 87-148.

[63] Rapoport M., Zink T., *Ueber die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten, Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Characteristik*, Inv. Math. 68, 1982, 21-201.

[64] Serre J.-P., *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Inv. Math. 15, 1972, 259-331.

[65] Serre J.-P., *Sur les représentations modulaires de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Duke Math. J. 54, 1987, 179-230.

[66] Serre J.-P., *Corps locaux*, troisième édition, Hermann, 1968.

[67] Serre J.-P., Séminaire du cours au Collège de France, 1960.

[68] de Smit B., Lenstra H.W., *Explicit construction of universal deformation rings*, Modular forms and Fermat's Last Theorem, Springer, 1997, 313-326.

[69] Tsuji T., *Syntomic complexes and p-adic vanishing cycles*, J. reine angew. Math. 472, 1996, 69-138.

[70] Tsuji T., *p-adic-étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Inv. Math. 137, 1999, 233-411.

[71] Tsuji T., *Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen: a survey*, these proceedings.

[72] Tsuji T., *p-adic Hodge theory in the semi-stable reduction case*, Proceedings of the ICM 1998, Vol. II, 207-216.

[73] Tsuzuki N., *On filtered modules and p-adic representations of finite length over a local field with mixed characteristic*, Master's thesis, Tokyo, 1990.

[74] Ulmer D., *Slopes of modular forms and congruences*, Ann. Inst. Fourier 46, 1996, 1-32.

[75] Wach N., *Représentations cristallines de torsion*, Comp. Math. 108, 1997, 185-240.

C. Breuil, Département de Mathématiques, U.M.R. 8628 du C.N.R.S., Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France • *E-mail :* `breuil@math.u-psud.fr`

W. Messing, School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis MN 55455, U.S.A. *E-mail :* `messing@math.umn.edu`

Astérisque
279, 2002, p. 125–183

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES ET COEFFICIENTS p-ADIQUES SUR LES COURBES

par

Gilles Christol & Zoghman Mebkhout

***Résumé.* —** Soit $\mathcal{R}$ l'anneau des fonctions analytiques au bord du disque $D(0,1)$ d'un corps p-adique et soit $\mathcal{A}$ le sous-anneau des fonctions analytiques dans le disque tout entier. Le but de ce cours est de montrer que, sous certaines conditions de nature arithmétique portant sur la monodromie p-adique, un $\mathcal{R}$-module libre de type fini à connexion contient un $\mathcal{A}$-réseau sur lequel la connexion a pour seule singularité une singularité méromorphe en 0. Ce résultat est motivé par les propriétés de finitude locales et globales dans la théorie des coefficients p-adiques. Sa démonstration utilise tous les résultats connus de la théorie des équations différentielles p-adiques et fournit donc l'occasion de présenter cette dernière.

Table des matières

1. Introduction 126
Chapitre I. Fondements de la théorie des équations différentielles p-adiques 132
2. Notations générales 132
3. Modules différentiels 132
4. Rayon de convergence 135
5. La théorie de Dwork et Robba 137
6. Rayon de convergence et majoration de la dérivation 139
7. Frobenius 143
Chapitre II. Le théorème de décomposition 147
8. $\mathcal{R}$-modules différentiels solubles 147
9. Pentes d'un module différentiel 152
Chapitre III. Modules différentiels de pente nulle 159
10. L'ensemble des exposants 160
11. Exposant d'un module différentiel de Robba 161
12. Structure des modules différentiels de pente nulle 165

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 12H25, 14F30.
***Mots clefs.* —** Coefficients p-adiques.

© Astérisque 279, SMF 2002

Chapitre IV. Théorèmes d'indice 167
13. Opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux 167
14. Indice des $\mathcal{R}$-modules différentiels 169
Chapitre V. Démonstration du théorème d'algébricité 173
15. Réduction au cas irréductible 174
16. Réduction au cas complètement irréductible 175
17. Le cas complètement irréductible 177
Index des notations 180
Index terminologique 181
Références 182

1. Introduction

Dans ce cours, nous avons cherché à donner le maximum d'indications dans le minimum de pages. En particulier, les démonstrations ne sont la plupart du temps qu'esquissées. Pour des démonstrations complètes, nous renvoyons le lecteur aux articles originaux où il trouvera en outre des énoncés plus généraux et des compléments.

La table des matières donne une idée assez précise du contenu. Nous voulons toutefois insister sur les résultats les plus importants.

Soit $p > 0$ un nombre premier, $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques et K un corps complet à valuation discrète qui contient $\mathbb{Q}_p$. Soit $\mathcal{R}$ l'anneau des séries de Laurent en la variable x, à coefficients dans le corps K, qui convergent dans une couronne $1 - \epsilon < |x| < 1$, pour $\epsilon > 0$ non précisé, et soit $\mathcal{A}$ le sous-anneau des fonctions analytiques dans le disque unité.

On dira $\mathcal{R}$-module différentiel pour $\mathcal{R}$-module libre de type fini à connexion.

Au chapitre II, on étudie la structure des $\mathcal{R}$-modules différentiels solubles c'est-à-dire dont la fonction rayon de convergence $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$ tend vers 1 avec ρ (définition 8.7). Les démonstrations complètes sont dans [**13**].

Pour un tel module différentiel $\mathcal{M}$, on peut définir la « partie modérée » $\mathcal{M}^{\leqslant 0}$: c'est le plus grand quotient de $\mathcal{M}$ qui est « de pente nulle » (théorème 9.10 et définition 9.16). Plus précisément, on construit sur $\mathcal{M}$ une filtration décroissante $\mathcal{M}_{>\gamma}$, « la filtration selon les pentes p-adiques », indexée par les nombres réels positifs γ et liée au rayon de convergence des solutions du module différentiel dans les disques génériques et $\mathcal{M}^{\leqslant 0} = \mathcal{M}/\mathcal{M}_{>0}$.

À partir de la filtration selon les pentes p-adiques, on construit un polygone de Newton $\mathrm{New}(\mathcal{M})$ que nous appellerons *polygone de Newton p-adique* de $\mathcal{M}$. Les sommets de ce polygone sont à coordonnées entières, en particulier sa hauteur, notée $\mathrm{Irr}(\mathcal{M}, p)$, est un entier ce qui constitue l'analogue de la propriété de Hasse-Arf

de la théorie ℓ-adique. Ceci est prouvé à la fin du chapitre IV comme conséquence des théorèmes d'indice pour les modules différentiels solubles de pentes strictement positives.

Dans le chapitre III, on étudie les modules différentiels de pente nulle. Les démonstrations originales complètes sont dans [**12**]. À un tel module différentiel $\mathcal{M}$ de rang μ, on associe un « exposant » $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$: c'est une classe d'équivalence de $\mathbb{Z}_p^\mu$ modulo une certaine relation d'équivalence $\overset{\mathfrak{E}}{\sim}$.

On dit qu'un élément de $\mathbb{Z}_p^\mu/\overset{\mathfrak{E}}{\sim}$ a la propriété DNL si les différences des composantes de l'un de ses représentants ne sont pas des nombres de Liouville p-adiques. Sous cette hypothèse, ces composantes sont des éléments de $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ bien définis à l'ordre près. On dit qu'un élément de $\mathbb{Z}_p^\mu/\overset{\mathfrak{E}}{\sim}$ a la propriété NL s'il a la propriété DNL et si les composantes de l'un (et alors de tous) ses représentants ne sont pas des nombres de Liouville.

Le principal résultat dans ce cas est le « théorème de la monodromie p-adique ». Il dit qu'un module différentiel de pente nulle $\mathcal{M}$ dont l'exposant a la propriété DNL s'obtient par extensions successives à partir de modules différentiels de rang un. Un tel module admet alors une filtration « de monodromie » [**12**]. En particulier un module différentiel de pente nulle qui est muni d'une structure de Frobenius est quasi-unipotent : après ramification en x d'ordre première à p il s'obtient par extensions successives de modules triviaux.

On définit l'exposant $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$ d'un module différentiel soluble $\mathcal{M}$ comme l'exposant de sa partie de pente nulle. On dit que $\mathcal{M}$ a la propriété DNL (resp. NL) si son exposant a cette propriété.

Le résultat central de ce cours est l'existence, dans tout $\mathcal{R}$-module différentiel soluble vérifiant des conditions de type NL, d'un $\mathcal{A}$-réseau sur lequel la connexion est méromorphe.

Théorème 1.1. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module libre de rang fini μ à connexion soluble, ayant la propriété* DNL *et tel que* $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}_{>0})$ *a la propriété* NL*. Quitte à faire une extension finie du corps de base K, $\mathcal{M}$ admet un réseau sur $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$-module libre de rang μ) muni d'une connexion prolongeant celle de $\mathcal{M}$ et n'ayant aucune singularité sauf en* 0 *où elle a une singularité méromorphe.*

La démonstration de ce théorème fait l'objet du chapitre V. La preuve complète se trouve dans [**14**].

Pour montrer l'intérêt du Théorème 1.1 nous présentons maintenant l'une de ses applications principales. Il s'agit d'un Théorème d'algébrisation pour une classe de fibrés p-adiques à connexion.

Soit X/V une courbe connexe et lisse sur l'anneau des entiers V de K de corps résiduel k et soit Z/V un fermé de X/V dont le complémentaire est un ouvert affine $j : U/V \hookrightarrow X/V$. On note $\mathcal{X}^\dagger = (X_k, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V})$ le schéma †-adique de Meredith [**30**] associé à la courbe X/V. Sans réellement nuire à la généralité et pour simplifier, le lecteur pourra supposer que X/V est la droite projective $\mathbb{P}^1_V$ sur V.

Dans ce genre de questions, nous trouvons le point de vue, relativement ancien, des schémas de Meredith mieux adapté que celui des schémas formels. En effet, les objets des catégories que l'on considère sont alors des modules sur des faisceaux d'anneaux pour la topologie de Zariski de la variété en caractéristique $p > 0$. L'avantage est de séparer clairement les questions de fondement des questions de nature p-adique.

Soit $\mathcal{D}_{\mathcal{X}^\dagger/V} := \mathit{Diff}_V(\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V})$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini du faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$. Posons $\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K} := \mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/V} \otimes_V K$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{X}^\dagger/K} := \mathcal{D}_{\mathcal{X}^\dagger/V} \otimes_V K$. On considère la catégorie $\mathrm{MLC}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$ des $\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K}$-modules localement libres de rang fini à connexion. C'est une catégorie de $\mathcal{D}_{\mathcal{U}^\dagger/K}$-modules à gauche.

De même sur U/V nous considérons la catégorie $\mathrm{MLC}(\mathcal{O}_{U/K})$ des $\mathcal{O}_{U/K}$-modules localement libres de rang fini à connexion. C'est une catégorie de $\mathcal{D}_{U/K}$-modules à gauche si l'on note $\mathcal{D}_{X/V} := \mathit{Diff}_V(\mathcal{O}_{X/V})$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini du faisceau structural $\mathcal{O}_{X/V}$ et si on pose $\mathcal{D}_{X/K} := \mathcal{D}_{X/V} \otimes_V K$.

On a alors un foncteur exact

$$\mathrm{MLC}(\mathcal{O}_{U/K}) \longrightarrow \mathrm{MLC}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$$

qui a $\mathcal{M}$ associe $\mathcal{M}^\dagger := \mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K} \otimes_{\varepsilon^{-1}\mathcal{O}_{U/K}} \varepsilon^{-1}\mathcal{M}$ où ε est le morphisme naturel d'espaces annelés $(X_k, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/K}) \to (X, \mathcal{O}_{X/K})$.

On note $\mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$ la sous catégorie pleine de $\mathrm{MLC}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$ dont les objets sont solubles au sens de Dwork-Robba c'est-à-dire ont un rayon de convergence maximum au point générique de X. Depuis les travaux de Baldassarri et de Chiarellotto [**2**], on sait que les objets de cette catégorie ne sont autres que ce qu'on appelle le plus souvent isocristaux surconvergents.

Soit $\mathcal{M}^\dagger$ un objet de $\mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$. Pour simplifier, dans cette introduction, on suppose que les points de Z_k sont rationnels sur k. Pour tout point fermé x de Z_k, il définit un $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M}^\dagger_x$. Le théorème de continuité du rayon de convergence montre que $\mathcal{M}^\dagger_x$ est soluble. On note $\mathrm{MLCSNL}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$ la sous-catégorie des modules $\mathcal{M}$ tels que $\mathcal{M}^\dagger_x$ et $\mathrm{End}_{\mathcal{R}_x}(\mathcal{M}^\dagger_{x>0})$ ont la propriété NL en tout point x de Z_k.

On note $\mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{U/K})$ la sous-catégorie de la catégorie $\mathrm{MLC}(\mathcal{O}_{U/K})$ des modules dont l'image par le foncteur précédent est dans la catégorie $\mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$. Par construction on a alors un foncteur exact

$$(\dagger) \ : \ \mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{U/K}) \to \mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K}).$$

Théorème 1.2. — *Supposons que la courbe X/V est propre. Alors tout objet $\mathcal{M}^\dagger$ de la catégorie* $\mathrm{MLCSNL}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$ *est, après éventuellement une extension finie du corps de base K,* dans l'image essentielle *du foncteur* (†).

De plus les K-espaces de cohomologie de de Rham p-adiques

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathcal{U}^\dagger/K}}(U_k;\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K},\mathcal{M}^\dagger)\,,\quad \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_{\mathcal{U}^\dagger/K}}(U_k;\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K},\mathcal{M}^\dagger)$$

sont de dimension finie *et l'on a la formule d'Euler-Poincaré p-adique*

$$\chi\big(U_k, DR(\mathcal{M}^\dagger)\big) = \mu\,\chi(U_k) - \sum_{x\in Z_k} \mathrm{Irr}_x(\mathcal{M},p).$$

Ce théorème est démontré dans [**14**]. Sa première partie est conséquence du théorème 1.1 et de GAGA. La finitude de la cohomologie et la formule d'Euler-Poincaré sont déjà démontrées, pour les modules différentiels algébriques, dans [**10**] comme conséquence du théorème de semi-continuité et sous l'hypothèse fondamentale de l'existence de l'indice local.

La première partie du théorème 1.2 permet de ramener la situation p-adique à la situation algébrique. C'est l'une des motivations essentielles du théorème 1.1. L'autre motivation est la stabilité de la catégorie des coefficients p-adiques par une immersion *ouverte*.

Le foncteur (†) n'est pas pleinement fidèle dans le cas général. Cependant il le devient dans le cas de pente nulle.

Notons $\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$ la sous-catégorie de la catégorie $\mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$ des modules de pente nulle dans les classes résiduelles singulières Z_k. Nous supposons pour simplifier que les points de Z_K sont rationnels sur K. Fixons un sous-groupe G^{NL} de $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ de classes de nombres non Liouville, par exemple le groupe (des classes modulo $\mathbb{Z}$) des entiers p-adiques qui sont algébriques sur $\mathbb{Q}$, et notons $\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K}, G^{\mathrm{NL}})$ la sous-catégorie de la catégorie $\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$ des modules $\mathcal{M}$ tels que, pour tout x dans Z_k, les composantes de l'exposant de $\mathcal{M}_x$ appartiennent à G^{NL}.

Notons de même $\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{U/K})$ la sous-catégorie de la catégorie $\mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{U/K})$ des modules singuliers réguliers aux points de Z_K au sens algébrique et $\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{U/K}, G^{\mathrm{NL}})$ la sous-catégorie de la catégorie $\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{U/K})$ des modules dont les exposants au sens algébrique appartiennent à G^{NL}.

Le théorème suivant est l'analogue p-adique du théorème d'existence de Riemann.

Théorème 1.3. — *Avec les notations précédentes, si on suppose de plus que Z est V-lisse, on a un foncteur exact*

$$\mathfrak{R}:\ \mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{U/K}, G^{\mathrm{NL}}) \to \mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K}, G^{\mathrm{NL}})$$

qui est une équivalence de catégories *abéliennes et les exposants algébriques coïncident avec les exposants p-adiques. De plus, pour tout couple d'objets $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de*

$\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}/K}, G^{\mathrm{NL}})$, *le morphisme de comparaison*

$$\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathcal{U}/K}}(U;\mathcal{N},\mathcal{M}) \to \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathcal{U}^\dagger/K}}(U_k;\mathcal{N}^\dagger,\mathcal{M}^\dagger)$$

est un quasi-isomorphisme de complexes à cohomologie de dimension finie.

L'existence du foncteur $\mathfrak{R}$ dans le théorème précédent est précisément le théorème de transfert pour les singularités régulières [**7**]. L'essentielle surjectivité est une conséquence du théorème de la monodromie p-adique 12.3 dans le cas de pente nulle qui est beaucoup plus profond [**12**].

Le théorème 1.2 montre que la catégorie $\mathrm{MLCSNL}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$ a les invariants et les propriétés de finitude de la catégorie des faisceaux ℓ-adiques lisses. À ce titre elle doit être considérée comme l'analogue p-adique tant recherché de la catégorie des faisceaux ℓ-adiques lisses et permet tous les espoirs. Le théorème 1.3 montre que la catégorie $\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K}, G^{\mathrm{NL}})$ est l'analogue p-adique de la catégorie des faisceaux ℓ-adiques lisses modérément ramifiés.

Fixons un morphisme de Frobenius $\mathbf{F}$ sur l'anneau $\mathcal{R}$, par exemple la ramification d'ordre une puissance de p composée avec un morphisme de Frobenius de K. On peut considérer la catégorie $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$ des $\mathcal{R}$-modules libres à connexion munis d'une structure de Frobenius : un objet $\mathcal{M}$ de $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$ est un $\mathcal{R}$-module libre à connexion muni d'un isomorphisme horizontal $\mathbf{F}^*\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}$. Un tel module est automatiquement soluble. Son exposant $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$ est donc bien défini. On peut montrer que les composantes de cet exposant sont des nombres rationnels. En particulier $\mathcal{M}$ a la propriété NL. De plus, le module des endomorphismes $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ est, lui aussi, muni d'une structure de Frobenius. Par suite le module $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}_{>0})$ a la propriété NL. Autrement dit, $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathrm{MLCSNL}(\mathcal{R})$. Dans cette situation locale, on peut donc appliquer le théorème 1.1. Dans la situation globale avec Frobenius, on pourra de même appliquer les théorèmes 1.2 et 1.3. Par exemple on déduit du théorème précédent que la fonction L d'un fibré p-adique muni d'une structure de Frobenius sur un corps fini est une fraction rationnelle. Cependant nous ferons remarquer au lecteur que nous ne savons ni définir directement l'exposant de la monodromie ni, encore moins, démontrer les théorèmes de base sans sortir de la catégorie $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$. Le Frobenius ne sert qu'à obtenir la rationalité des exposants après que ceux-ci ait été définis et donc à s'assurer que l'obstruction aux propriétés de finitude n'a pas lieu. Dans la catégorie $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$ la connexion est prédominante contrairement à ce qui se passe dans la théorie des représentations p-adiques galoisiennes locales.

Nous profitons de l'occasion pour préciser les rapports entre la catégorie des représentations p-adiques de Fontaine et la catégorie $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$. Pour cela, il est nécessaire d'introduire l'*anneau d'Amice* $\mathcal{E}$ des séries de Laurent $\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j x^j$ à coefficients dans K uniformément bornées et telles que $|a_j| \to 0$ quand j tend vers $-\infty$.

Notons $\mathcal{E}^\dagger$ l'intersection de $\mathcal{R}$ avec $\mathcal{E}$. Comme nous avons supposé la valuation du corps K discrète, les anneaux $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^\dagger$ sont des corps à valuation discrète. Le corps $\mathcal{E}$ est complet et le corps $\mathcal{E}^\dagger$ est henselien. Le couple $\mathcal{E}/\mathcal{E}^\dagger$ est une extension de corps différentiels (dans [**6**] cette extension était notée $W(0)/W^0(0)$).

Dans la théorie de Fontaine [**22**], si l'on fixe un morphisme de Frobenius sur $\mathcal{E}$, on associe a toute représentation p-adique du groupe de Galois absolu du corps $k((x))$ un $\mathcal{E}$-module muni d'une structure de Frobenius qui détermine une $\mathcal{E}$-connexion. Si, de plus, l'image du groupe d'inertie est finie on obtient ainsi un $\mathcal{E}^\dagger$-module muni d'une structure de Frobenius et d'une $\mathcal{E}^\dagger$-connexion. Au sens de la théorie de Dieudonné, ce module est purement de pente nulle (unit root dans la terminologie de Dwork). Cette construction est l'analogue local de la construction globale de N. Katz [**27**].

Inversement, étant donné un $\mathcal{E}^\dagger$-module muni d'une structure de Frobenius et d'une connexion compatibles, on lui associe deux polygones de Newton. Le premier est fourni par la structure de Frobenius et ne dépend que de la structure de $\mathcal{E}$-module muni de la structure de Frobenius induite. Le second, le polygone de Newton p-adique, est donné par la connexion et dépend de la structure de $\mathcal{R}$-module à connexion soluble. Ces deux polygones correspondent à des filtrations qui n'ont, a priori, rien à voir l'une avec l'autre. La décomposition selon les pentes p-adiques se fait dans l'anneau $\mathcal{R}$ alors que la décomposition selon les pentes de la structure de Frobenius se fait dans le complété d'une clôture algébrique du corps $\mathcal{E}$. Il n'y a aucun moyen connu de passer de l'une à l'autre. Cela indique que la théorie des représentations galoisiennes locales p-adiques en égales caractéristiques et la théorie des équations différentielles, telles qu'elles nous apparaissent aujourd'hui, sont deux théories parallèles mais dont les champs d'application sont profondément différents.

La situation dans laquelle les deux filtrations sont distinctes n'est d'ailleurs pas du tout exceptionnelle. Dans [**29**], on introduit des « équations exponentielles » pour étudier p-adiquement la fonction zêta des variétés affines non singulières sur un corps fini. Ces équations différentielles ont servi de catalyseur lors de l'étude de la structure des équations différentielles p-adiques. Par leur origine géométrique, elles sont munies d'une structure de Frobenius qui n'est pratiquement jamais de pente nulle au sens de la théorie de Dieudonné. Elles ne proviennent donc pas, en général, d'une représentation p-adique en égales caractéristiques.

Cela montre qu'une théorie des coefficients p-adiques parallèle à la théorie ℓ-adique est de nature différentielle. Il est très encourageant de constater que le théorème 1.2 fournit des objets ayant les propriétés nécessaires pour la construction d'une telle théorie sur les courbes dont le véritable test sera la démonstration p-adique de la pureté des zéros et des pôles de la fonction zêta d'une variété algébrique sur un corps fini. En dimensions supérieures, il reste beaucoup de travail à faire. Même en dimension un, il subsiste des problèmes fort intéressants (voir [**14**]).

CHAPITRE I
FONDEMENTS DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES

2. Notations générales

Dans tout ce texte, K sera un corps ultramétrique d'inégales caractéristiques *maximalement complet* (par exemple un corps à valuation discrète). L'hypothèse « maximalement complet » sera fondamentale dans les chapitres II, IV et V. Dans [**13**], nous avions fait l'hypothèse plus restrictive « localement compact ». Cette restriction est levée dans [**14**] grâce à l'utilisation de la c-compacité à la place de la compacité.

On notera $|\cdot|$ la valeur absolue sur K, V l'anneau des entiers de K, k son corps des restes et p la caractéristique de k. Remarquons cependant que les résultats de ce cours sont de nature fondamentalement transcendante, le corps résiduel k n'y joue pratiquement aucun rôle.

On note π une solution de l'équation $\pi^{p-1}+p=0$ (le π de Dwork).

Soit I un intervalle contenu dans $[0,\infty]$, on pose

$$\mathcal{A}(I)=\Big\{\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_s\,x^s\,;\ a_s\in K,\ (\forall\rho\in I)\ \lim_{s\to\pm\infty}|a_s|\rho^s=0\Big\}.$$

Lorsque 0 (resp.∞) appartient à I cela signifie que $a_s=0$ pour $s<0$ (resp. $s>0$). Autrement dit, $\mathcal{A}(I)$ est l'ensemble des fonctions analytiques à coefficients dans K qui convergent dans la couronne

$$\mathcal{C}(I)=\big\{|x|\in I\big\}.$$

Plus précisément, nous noterons $\mathcal{C}(I)$ l'espace analytique sur K dont les points à valeur dans un surcorps valué Ω de K sont les nombres x de Ω tels que $|x|$ appartienne à I. C'est un affinoïde si et seulement si l'intervalle I est fermé. Sinon c'est un espace de Stein dont les sections globales du faisceau structural sont les fonctions de $\mathcal{A}(I)$.

On écrira $\mathcal{A}$ pour $\mathcal{A}([0,1[)$.

Pour $0<\varepsilon<1$, on pose $I_\varepsilon=]1-\varepsilon,1[$ et $\mathcal{R}=\bigcup_{\varepsilon>0}\mathcal{A}(I_\varepsilon)$.
Autrement dit, $\mathcal{R}$ est l'ensemble des fonctions analytiques à coefficients dans K qui convergent dans une couronne $\mathcal{C}(I_\varepsilon)$ où ε dépend de la fonction.

S'il y a risque de confusion et pour préciser le corps K, on notera $\mathcal{A}_K(I)$, $\mathcal{A}_K$ ou $\mathcal{R}_K$ pour $\mathcal{A}(I)$, $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{R}$.

3. Modules différentiels

Soit A une K-algèbre commutative (par exemple $\mathcal{A}(I)$ ou $\mathcal{R}$) munie d'une dérivation D (par exemple $D=d/dx$) pour laquelle le corps des constantes est K. On

notera $A[D]$ l'anneau non commutatif des polynômes différentiels à coefficients dans A avec, pour a dans A, la règle $Da = aD + D(a)$.

On posera $\mathcal{D}(I) = \mathcal{A}(I)[D]$ et $\mathcal{D} = \mathcal{R}[D]$.

On notera $\mathrm{MLC}(A)$ la sous catégorie pleine de la catégorie des $A[D]$-modules à gauche dont les objets sont libres de type fini en tant que A-modules. Autrement dit, un objet de $\mathrm{MLC}(A)$ est un A-module *libre de type fini* $\mathcal{M}$ muni d'une action de D vérifiant la relation $D(am) = D(a)m + aD(m)$, pour a dans A et m dans $\mathcal{M}$. Nous dirons que les objets de $\mathrm{MLC}(A)$ sont des *A-modules différentiels*. Le rang d'un A-module différentiel sera son rang en tant que A-module.

Remarque 3.1. — Si I est un intervalle fermé, tout $\mathcal{A}(I)[D]$-module contenu dans un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel est un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel (c'est-à-dire libre de type fini sur $\mathcal{A}(I)$: voir [**5**] § 4 par exemple). En particulier les seuls idéaux de $\mathcal{A}(I)$ stables par D sont 0 et $\mathcal{A}(I)$. Ce n'est plus le cas si l'intervalle I n'est pas fermé comme le montre l'exemple suivant dans lequel $I = [0, 1[$.

Exemple 3.2. — Soit a_n une suite de points de la clôture algébrique $\widehat{K}$ de K telle que $|a_n| < 1$ et $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$. D'après [**28**], il existe une fonction f de $\mathcal{A}$ qui a un zéro d'ordre n en a_n. L'idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ engendré par f et ses dérivées est, par construction, stable par D mais n'est pas égal à $\mathcal{A}$ car, si g appartient à $\mathcal{I}$, alors $g(a_n) = 0$ pour n assez grand.

Soit $\mathfrak{e}$ une base de $\mathcal{M}$ (sur A). L'action de D sur $\mathcal{M}$ est *représentée* dans cette base par une matrice G définie par $D(\mathfrak{e}_i) = \sum G_{ij}\mathfrak{e}_j$. Plus généralement, pour $s \geqslant 0$, l'action de l'opérateur D^s est représentée dans la base $\mathfrak{e}$ par une matrice G_s. Ces matrices satisfont la formule de récurrence

$$G_0 = \boldsymbol{I} \qquad G_{s+1} = D(G_s) + G_s G \tag{1}$$

où $\boldsymbol{I}$ désigne la matrice identité.

Maintenant, si m est un élément de $\mathcal{M}$ et si on note $[m]$ le vecteur colonne de ses composantes dans la base $\mathfrak{e}$, on trouve $D(m) = D\big({}^t[m]\big)\,\mathfrak{e} + {}^t[m]\,G\mathfrak{e}$ c'est-à-dire

$$[D(m)] = D([m]) + {}^tG[m] \tag{2}$$

Par ailleurs, à la base $\mathfrak{e}$, correspond la présentation suivante dans la catégorie des $A[D]$-modules :

$$0 \longrightarrow A[D]^\mu \xrightarrow{\bullet(D-G)} A[D]^\mu \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

où $\bullet(D - G)$ est la multiplication à droite par la matrice $D\,\boldsymbol{I} - G$.

Soit N un $A[D]$-module quelconque. La suite exacte courte (3) donne lieu à la suite exacte longue (de K-espaces vectoriels) :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A[D]}(\mathcal{M}, N) \longrightarrow N^\mu \xrightarrow{(D-G)\bullet} N^\mu \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{A[D]}(\mathcal{M}, N) \longrightarrow 0 \tag{4}$$

où $(D-G)\bullet$ représente l'action à gauche de l'opérateur $D-G$ (l'opérateur D agissant composante par composante). Autrement dit, on a

$$\mathrm{Hom}_{A[D]}(\mathcal{M},N)=\ker(D-G,N^{\mu}) \tag{5}$$

$$\mathrm{Ext}^1_{A[D]}(\mathcal{M},N)=\mathrm{coker}(D-G,N^{\mu}) \tag{6}$$

Remarque 3.3. — Soit B une K-algèbre qui contient A et à laquelle la dérivation D se prolonge et soit N un $B[D]$-module. Une base de $\mathcal{M}$ est aussi une base de $B\otimes_A\mathcal{M}$. On trouve donc que $\mathrm{Ext}^i_{B[D]}(B\otimes_A\mathcal{M},N)=\mathrm{Ext}^i_{A[D]}(\mathcal{M},N)$ pour tout i. En fait ces espaces sont nuls pour $i\geqslant 2$.

Remarque 3.4. — Si le corps des constantes de B est K, on constate que

$$\dim_K\big(\mathrm{Hom}_{A[D]}(\mathcal{M},B)\big)\leqslant \mathrm{rg}_A(\mathcal{M})$$

Lorsque cette inégalité est une égalité, on dit que le A-module différentiel $\mathcal{M}$ est *soluble* dans B.

On dit que $\mathcal{M}$ a un *indice* dans B si $\mathrm{Ext}^1_{A[D]}(\mathcal{M},B)$ est un K-espace vectoriel de dimension finie. Dans ces conditions, on pose :

$$\chi(\mathcal{M},B)=\dim\big(\mathrm{Hom}_{A[D]}(\mathcal{M},B)\big)-\dim\big(\mathrm{Ext}^1_{A[D]}(\mathcal{M},B)\big)$$

Les relations (5) et (6) montrent que

$$\chi(\mathcal{M},B)=\dim\big(\mathrm{coker}(D-G,B^{\mu})\big)-\dim\big(\ker(D-G,B^{\mu})\big)=\chi(D-G,B^{\mu}).$$

Définition 3.5. — Pour deux A-modules différentiels $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$, et pour u dans $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{M},\mathcal{N})$ et m dans $\mathcal{M}$, on pose $D(u)(m)=D(u(m))-u(D(m))$. On munit ainsi le A-module (libre de type fini) $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{M},\mathcal{N})$ d'une structure de $A[D]$-module.

Les applications linéaires u de $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{M},\mathcal{N})$ dont la dérivée $D(u)$ est nulle sont celles qui commutent avec D et donc appartiennent à $\mathrm{Hom}_{A[D]}(\mathcal{M},\mathcal{N})$. Elles sont dites *horizontales*.

Dans la situation précédente, soit $\mathfrak{e}$ (resp. $\mathfrak{f}$) une base de $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$) et notons G (resp. F) la matrice qui représente la dérivation D dans cette base. Si, dans ces bases, l'application linéaire u est représentée par une matrice H (c'est-à-dire $H\cdot\mathfrak{e}=\mathfrak{f}$), alors $D(u)$ est représentée par la matrice $\nabla(H)$ définie par :

$$\nabla(H)=D(H)-G\,H+H\,F. \tag{7}$$

En particulier, l'application linéaire u est horizontale si et seulement si

$$D(H)=G\,H-H\,F. \tag{8}$$

4. Rayon de convergence

La grande différence entre la théorie des équations différentielles complexe et la théorie des équations différentielles p-adiques est qu'une solution p-adique ne converge pas jusqu'à la première singularité contrairement à une solution complexe. C'est là un enrichissement considérable du calcul différentiel comme nous le verrons. Il est naturel d'introduire le rayon de convergence des solutions au voisinage d'un point.

Nous profitons de cette occasion pour faire rapidement le lien entre la notion globale de *point analytique* au sens de Berkovich [**1**], c'est-à-dire, dans le cas affine, de semi-norme multiplicative continue, et la notion locale de *point générique* au sens de Dwork [**18**].

4.1. Rayon de convergence et point analytique. — La première définition du rayon de convergence d'un module différentiel est une variante de la notion de norme spectrale.

Définition 4.1. — Soit $\rho > 0$ un nombre réel et soit E_ρ le (corps) complété de $K(x)$ pour la valeur absolue définie sur les polynômes de $K[x]$ par :

$$\Big| \sum_{i=0}^{d} a_i\, x^i \Big|_\rho = \max_{0 \leqslant i \leqslant d} |a_i|\, \rho^i$$

On considère un anneau A tel que $K[x] \subset A \subset E_\rho$, muni de la valeur absolue $|\cdot|_\rho$ et de la dérivation $D = d/dx$.

Par exemple, pour ρ dans I, on a $K[x] \subset \mathcal{A}(I) \subset E_\rho$. L'anneau $\mathcal{A}(I)$ est ainsi muni de la valeur absolue $|\cdot|_\rho$. L'espace analytique $\mathcal{C}(I)$ contient donc, pour chaque nombre ρ de I, un *point analytique* (au sens de [**1**]) défini par cette (semi)-norme multiplicative.

Les endomorphismes d'un K-espace vectoriel normé E sont munis de la norme $\|u\| = \max_{x \in E - \{0\}}(\|u(x)\|/\|x\|)$. En particulier, si G est une matrice de $\mathrm{Mat}(\mu, E_\rho)$, on pose

$$\|G\|_\rho = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant \mu} |G_{ij}|_\rho$$

C'est la norme de G en tant qu'opérateur sur l'espace E_ρ^μ muni de la norme « sup ». C'est donc une norme d'algèbre.

Nous commençons par calculer la norme spectrale de l'opérateur $D = d/dx$ agissant sur A. Comme

$$\Big| \frac{1}{s!} D^s(x^n) \Big|_\rho = \Big| \binom{n}{s} x^{n-s} \Big|_\rho \leqslant \rho^{-s}\, |x^n|_\rho$$

avec égalité pour $n = s$, on trouve

$$\|D\|_{\mathrm{Sp},\rho} := \lim_{s \to \infty} \|D^s\|_\rho^{1/s} = \lim_{s \to \infty} |s!|^{1/s} \rho^{-1} = |\pi| \rho^{-1}$$

(rappelons que π désigne une racine $(p-1)$-ième de $-p$). Autrement dit, le *rayon* ρ du point $|\cdot|_\rho$ est donné par la formule :

$$\rho = |\pi|/\|D\|_{\mathrm{S}p,\rho}. \tag{9}$$

Soit maintenant $\mathcal{M}$ un A-module différentiel. À toute base $\mathfrak{e} = \{\mathfrak{e}_i\}$ de $\mathcal{M}$, on associe la norme sur $\mathcal{M}$ définie par

$$\|\sum a_i \mathfrak{e}_i\|_{\mathfrak{e},\rho} = \max |a_i|_\rho.$$

On peut alors définir la *norme spectrale* de l'opérateur D agissant sur $\mathcal{M}$:

$$\|D\|_{\mathrm{Sp},\mathfrak{e},\rho} = \lim_{s\to\infty} \|D^s\|_{\mathfrak{e},\rho}^{1/s}.$$

Par analogie avec (9), on pose :

$$\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) = |\pi|/\|D\|_{\mathrm{Sp},\mathfrak{e},\rho}$$

et on dit que $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)$ est le *rayon de convergence* du module différentiel $\mathcal{M}$ (au point analytique $|\cdot|_\rho$).

Si $\mathfrak{e}$ est une base de $\mathcal{M}$ et si on note G (resp. G_s) la matrice de l'opérateur D (resp. D^s) dans la base $\mathfrak{e}$. La proposition suivante n'est pas difficile à démontrer.

Proposition 4.2. — *Le nombre* $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)$ *est indépendant de la base* $\mathfrak{e}$. *On a :*

$$\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) = \min\left(\rho, \liminf_{s\to\infty} \left\|\frac{1}{s!}G_s\right\|_\rho^{-1/s}\right).$$

4.2. Rayon de convergence et point générique. — Le rayon de convergence d'un module différentiel doit son nom au fait qu'il s'interprète comme le rayon de convergence des solutions de ce module différentiel au voisinage du *point générique*.

On choisit un corps valué Ω qui contient la clôture algébrique $\widehat{K}$ de K, dont le groupe des valeurs absolues est $\mathbb{R}^+$ et dont le corps des restes est transcendant sur celui de $\widehat{K}$. Pour a dans Ω et $r>0$, on pose $D(a,r) = \{x\in\Omega;\ |x-a|<r\}$. La fonction $\sum_{s=0}^\infty a_s(x-a)^s$ est dite *analytique* (resp. *bornée*) dans le disque $D(a,r)$ si $\liminf_{s\to\infty}|a_s|^{-1/s} = r$ (resp. si les $|a_s|$ sont bornés).

Définition 4.3. — Soit $\rho>0$ un réel. Un *point générique* (au bord du disque $D(0,\rho)$) est un élément t_ρ de Ω tel que $|t_\rho|=\rho$ et dont la distance à $\widehat{K}$ est égale à ρ. Autrement dit, le disque $D(t_\rho,\rho)$ ne contient pas de point de $\widehat{K}$.

À isomorphisme continu de Ω/K près, il n'y a qu'un seul point générique au bord du disque $D(0,\rho)$.

Pour $0<r<\rho$, on note $\mathcal{A}_\rho(r)$ (resp. $\mathcal{B}_\rho(r)$) l'anneau des fonctions analytiques (resp. bornées) dans le disque $D(t_\rho,r)$.

Par construction, une fraction rationnelle f de $K(x)$ n'a ni pôle ni zéro dans le disque $D(t_\rho,\rho)$ donc $|f|_\rho = |f(t_\rho)| = \max_{x\in D(t_\rho,\rho)}|f(x)|$. Par suite $K(x)\subset\mathcal{B}_\rho(\rho)$ et $E_\rho\subset\mathcal{B}_\rho(\rho)\subset\mathcal{A}_\rho(\rho)$. Donc $\mathcal{A}_\rho(\rho)$ est un $E_\rho[D]$-module (et en particulier un $A[D]$-module).

Pour étudier les solutions dans le disque générique, nous introduisons la *résolvante* du système différentiel $D(X) = GX$. C'est la fonction de deux variables

$$Y_G(x,y) = \sum_{s=0}^{\infty} G_s(y)\frac{(x-y)^s}{s!}. \tag{10}$$

où les matrices G_s sont définies par la récurrence (1) Si on a $|G_s(y)| \leqslant \|G_s\|_\rho$, par exemple parce que y appartient à $D(t_\rho,\rho)$, elle est définie pour $|x-y| < \mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)$. En particulier, lorsque $A = \mathcal{A}(I)$, c'est une fonction analytique sur le domaine

$$\Delta_{\mathcal{M}} = \{(|x|,|y|) \in I^2\,;\ |x-y| < \mathrm{Ray}(\mathcal{M},|x|)\}.$$

Lorsque la fonction Y_G est définie aux points (x,y) et (x,z) elle vérifie les relations

$$\begin{aligned} Y_G(x,y)\,Y_G(y,z) &= Y_G(x,z)\\ Y_G(x,x) &= \boldsymbol{I}\\ \frac{\partial}{\partial x}Y_G(x,y) &= G(x)\,Y_G(x,y)\\ \frac{\partial}{\partial y}Y_G(x,y) &= -Y_G(x,y)\,G(y) \end{aligned}$$

Soit G une matrice de $\mathrm{Mat}(\mu,E_\rho)$. Notons X_{t_ρ} la matrice, analytique au voisinage du point générique t_ρ, telle que $D(X_{t_\rho}) = G\,X_{t_\rho}$ et $X_{t_\rho}(t_\rho) = \boldsymbol{I}$. On a $X_{t_\rho}(x) = Y_G(x,t_\rho)$. Les matrices G_s appartiennent à $\mathrm{Mat}(\mu,E_\rho)$ et, par suite, la matrice X_{t_ρ} appartient à $\mathrm{Gl}\Big(\mu,\mathcal{A}_\rho\big(\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)\big)\Big)$. Comme les colonnes de la matrice X_{t_ρ} forment une base des solutions analytiques au voisinage de t_ρ de l'équation $(D-G)X = 0$, on en déduit une nouvelle interprétation du rayon de convergence (voir (5)).

Proposition 4.4. — *Le nombre* $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)$ *est le plus grand des nombres réels pour lesquels on a*

$$\dim_K\Big(\mathrm{Hom}_{A[D]}\big(\mathcal{M},\mathcal{A}_\rho(r)\big)\Big) = \dim_A(\mathcal{M}).$$

En utilisant cette interprétation du rayon de convergence d'un module différentiel et en remarquant que la primitive d'une fonction analytique au voisinage du point t_ρ a le même rayon de convergence que la fonction, la méthode de variation de la constante permet de démontrer la proposition suivante.

Proposition 4.5. — *Soit* $0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$ *une suite exacte de* $\mathrm{MLC}(A)$. *On a* $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) = \min\big(\mathrm{Ray}(\mathcal{N},\rho),\mathrm{Ray}(\mathcal{Q},\rho)\big)$.

5. La théorie de Dwork et Robba

Nous présentons les principaux résultats obtenus par Dwork et Robba concernant la catégorie $\mathrm{MLC}(E_\rho)$. Afin de pouvoir appliquer ces résultats à la catégorie $\mathrm{MLC}\big(\mathcal{A}(I)\big)$, nous travaillons avec un anneau A tel que $K[x] \subset A \subset E_\rho$, mais ceci n'est pas une réelle généralisation.

On note Ω le corps des constantes de l'anneau A.

5.1. Décompositions liées au rayon de convergence. — Le premier résultat remarquable montre qu'un E_ρ-module différentiel dont les solutions au voisinage du point générique n'ont pas toutes le même rayon de convergence n'est pas irréductible.

Pour cela, pour $0 < r \leqslant \rho$, on munit l'anneau $E_\rho[D]$ de la norme

$$\Big|\sum_i a_i(x)D^i\Big|_{\rho,r} := \sup_i |i!\, a_i|_\rho\, r^{-k}.$$

C'est la norme d'opérateur sur l'espace $\mathcal{B}_\rho(r)$ des fonctions analytiques bornées dans le disque $D(t_\rho, r)$.

Soit $\mathcal{M}$ un E_ρ-module différentiel. C'est un quotient de l'anneau $E_\rho[D]$ en vertu du lemme du vecteur cyclique. La topologie quotient sur l'espace $\mathcal{M}$ n'est en général pas séparée. L'adhérence de zéro $\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M})$ pour cette topologie est un E_ρ-sous-module différentiel de $\mathcal{M}$ (le fait que E_ρ soit un corps est ici essentiel). Le résultat suivant repose sur le fait que E_ρ est complet.

***Théorème 5.1* ([18], [31])**. — *Soit $\mathcal{M}$ un E_ρ-module différentiel. L'injection*

$$\mathrm{Hom}_{E_\rho[D]}\big(\mathcal{M}/\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M}), \mathcal{B}_\rho(r)\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E_\rho[D]}\big(\mathcal{M}, \mathcal{B}_\rho(r)\big)$$

est un isomorphisme et $\mathrm{Ray}\big(\mathcal{M}/\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M}), \rho\big) \geqslant r$.

De plus, si $\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ alors $\mathrm{Hom}_{E_\rho[D]}\big(\mathcal{M}, \mathcal{A}_\rho(r)\big) = 0$.

En général, le module différentiel $\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M})$ a encore des solutions non nulles dans $\mathcal{B}_\rho(r)$. En itérant le processus, on construit une filtration décroissante dans $\mathcal{M}$ dont les quotients successifs sont entièrement solubles dans $\mathcal{B}_\rho(r)$ et on obtient le résultat suivant.

Corollaire 5.2. — *Soit $\mathcal{M}$ un E_ρ-module différentiel. Pour $0 < r \leqslant \rho$, il existe un sous-module différentiel $\mathcal{N}_r$ de $\mathcal{M}$ tel que toute application horizontale de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{A}_\rho(r)$ s'annule sur $\mathcal{N}_r$ et tel que*

$$\mathrm{Ray}(\mathcal{M}/\mathcal{N}_r) \geqslant r \text{ et } \dim_{E_\rho}(\mathcal{M}/\mathcal{N}_r) = \dim_K\Big(\mathrm{Hom}_{E_\rho[D]}\big(\mathcal{M}, \mathcal{A}_\rho(r)\big)\Big).$$

Autrement dit cette décomposition sépare les solutions de rayon de convergence $\geqslant r$ de celles des solutions de rayon $< r$.

Exemple 5.3. — Soit a un nombre de $\mathbb{Z}_p$. Monsky a proposé l'opérateur suivant :

$$M_a := p(1-x)\,D^2 - x\,D - a.$$

Un calcul explicite montre que cet opérateur admet une solution dans $\mathcal{E}^\dagger$. C'est en particulier une solution dans $\mathcal{B}_1(1)$. Les autres solutions de l'opérateur M_a au voisinage du point générique t_1 ont un rayon de convergence égal à $|\pi|$.

Cet exemple montre que, même pour un $K(x)$-module différentiel, la décomposition du corollaire 5.2 n'a pas lieu dans $K(x)$.

Notons $E_\rho^\dagger$ le sous-corps de E_ρ formé des éléments analytiques *superadmissibles* c'est-à-dire prolongeables dans une couronne $\mathcal{C}(]\rho-\varepsilon,\rho[)$ pour $\varepsilon>0$ non précisé. L'exemple de Monsky suggère, et Dwork et Robba ont montré, que la décomposition du corollaire 5.2 a toujours lieu dans le corps $E_\rho^\dagger$. Ce second théorème est beaucoup plus difficile à démontrer que le précédent. Ce résultat profond a ouvert une fausse piste dans l'étude de la structure des modules différentiels. En effet, contrairement à ce que pensait, entre autres, Robba (voir [**36**]), la démonstration du théorème 9.10 ci-dessous n'utilise pas le théorème 5.4 mais apparaît plutôt comme une variante « en famille » de celle du théorème 5.2.

***Théorème 5.4* ([20])**. — *Si, dans le corollaire 5.2, on part d'un $E_\rho^\dagger$-module différentiel, alors le sous module différentiel $\mathcal{N}_r$ est, lui aussi, un $E_\rho^\dagger$-module différentiel.*

5.2. Foncteur « solutions dans le disque générique ». — En s'inspirant des méthodes utilisées dans le cas complexe, Robba a montré que l'action d'un opérateur différentiel de $E_\rho[D]$ sur $\mathcal{A}_\rho(r)$ est surjective. Ceci est remarquable car, en général, un tel opérateur n'est pas trivialisable sur cet anneau.

***Théorème 5.5* ([31])**. — *Soit G une matrice de $\mathrm{Mat}(E_\rho)$ et soit r un réel tel que $0<r\leqslant\rho$. Si l'opérateur $D-G$, agissant à gauche sur $\mathcal{A}_\rho(r)^\mu$, est injectif, il est surjectif.*

Corollaire 5.6. — *Soit A un anneau tel que $K[x]\subset A\subset E_\rho$, soit $\mathcal{M}$ un A-module différentiel et soit r un réel tel que $0<r\leqslant\rho$. On a $\mathrm{Ext}^1_{A[D]}\big(\mathcal{M},\mathcal{A}_\rho(r)\big)=0$.*

Preuve. — Notons G la matrice de la dérivation D dans une base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{M}$.

Si $\mathrm{Hom}_{A[D]}\big(\mathcal{M},\mathcal{A}_\rho(r)\big)=0$, la relation (5) montre que l'opérateur $D-G$ est injectif dans $\mathcal{A}_\rho(r)^\mu$. D'après le théorème 5.5, il est surjectif et d'après la relation (6), on a $\mathrm{Ext}^1_{A[D]}\big(\mathcal{M},\mathcal{A}_\rho(r)\big)=0$.

Le cas où $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)\geqslant r$ est une conséquence immédiate de la méthode de variation des constantes.

Dans le cas général, d'après le théorème 5.2, il existe, dans la catégorie $\mathrm{MLC}(E_\rho)$, une suite exacte $0\longrightarrow\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{Q}\longrightarrow 0$ dans laquelle $\mathrm{Hom}_{E_\rho[D]}\big(\mathcal{N},\mathcal{A}_\rho(r)\big)=0$ et $\mathrm{Ray}(\mathcal{Q},\rho)\geqslant r$. Donc $\mathrm{Ext}^1_{E_\rho[D]}\big(\mathcal{N},\mathcal{A}_\rho(r)\big)=\mathrm{Ext}^1_{E_\rho[D]}\big(\mathcal{Q},\mathcal{A}_\rho(r)\big)=0$ ce qui entraîne $\mathrm{Ext}^1_{E_\rho[D]}\big(\mathcal{M},\mathcal{A}_\rho(r)\big)=0$ et, d'après la remarque 3.3, $\mathrm{Ext}^1_{A[D]}\big(\mathcal{M},\mathcal{A}_\rho(r)\big)=0$. □

Corollaire 5.7. — *Le foncteur $\mathcal{M}\to\mathrm{Hom}_{A[D]}(\mathcal{M},\mathcal{A}_\rho(r))$ de la catégorie $\mathrm{MLC}(A)$ dans la catégorie des Ω-espaces vectoriels (de dimension finie) est exact.*

6. Rayon de convergence et majoration de la dérivation

Le calcul du rayon de convergence d'un module différentiel est en général difficile. Il y a cependant un cas favorable. C'est celui où le module différentiel possède une base « cyclique ». En effet, s'il n'est pas trop grand, le rayon de convergence est

alors directement donné par la norme de la matrice qui représente la dérivation dans cette base (théorème 6.2). Pour exploiter cette propriété remarquable, on utilise d'une part l'élimination des singularités apparentes (pour se ramener au cas d'une base cyclique) et d'autre part le Frobenius (pour se ramener au cas d'un « petit » rayon de convergence).

6.1. Bases cycliques. — L'existence de bases cycliques est affirmée par le théorème du vecteur cyclique. Malheureusement celui-ci n'est vrai que si l'on travaille sur un corps. Nous sommes donc amenés à introduire le corps F des fractions de l'anneau A. Il est évidemment contenu dans le corps E_ρ. L'énoncé suivant précise que l'on peut trouver une *base cyclique* d'un F-module différentiel « proche » d'une base donnée.

***Théorème 6.1* (du vecteur cyclique).** — *Soit $\mathcal{M}$ un A-module différentiel de rang μ. Le F-espace vectoriel $F\otimes_A\mathcal{M}$ a une base $\mathfrak{m}$ de la forme $\{m, D(m),\dots,D^{\mu-1}(m)\}$.*

Plus précisément, étant donnés $\varepsilon>0$ et une base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{M}$, on peut choisir le vecteur cyclique *m de telle sorte que la matrice H de passage de la base $\mathfrak{e}$ à la base $\mathfrak{m}$ vérifie*

$$\|H\|_\rho\|H^{-1}\|_\rho\leqslant(1+\varepsilon)\max(1,\rho\|G\|_\rho^{2\mu-1})/|(\mu-1)!|$$

où G désigne la matrice de la dérivation dans la base $\mathfrak{e}$.

Si $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)>|\pi|\rho$, on peut même le choisir de telle sorte que

$$\|H\|_\rho\|H^{-1}\|_\rho\leqslant(1+\varepsilon)\max(1,\rho\|G\|_\rho^{\mu-1})/\Big|(\mu-1)!\prod_{j=1}^{\mu-1}\tbinom{\mu}{j}\Big|.$$

Principe de la démonstration [**8**]. — Elle suit d'assez près celle de Deligne dans [**17**] en cherchant à minimiser le wronskien de l'élément cyclique m. □

6.2. Majoration de la dérivation dans une base cyclique. — Le résultat suivant a eu de nombreux avatars ([**33**], [**3**], [**37**], [**9**],...) depuis son apparition dans la démonstration de Katz du théorème de Turrittin [**26**]. Nous en donnons la version p-adique.

Théorème 6.2. — *Soient $\mathcal{M}$ un A-module différentiel de rang μ et m un vecteur cyclique de $F\otimes_A\mathcal{M}$. Si, dans la décomposition $D^\mu(m)=a_{\mu-1}D^{\mu-1}(m)+\cdots+a_0m$, l'un des coefficients a_i $(0\leqslant i<\mu)$ vérifie $|a_i|_\rho>\rho^{i-\mu}$ alors*

$$\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)=|\pi|\min_{0\leqslant i<\mu}|a_i|_\rho^{-1/(\mu-i)}<|\pi|\rho$$

Preuve. — Prenons un élément α dans une extension K' du corps K tel que $|\alpha|=\max_{0\leqslant i<\mu}|a_i|_\rho^{1/(\mu-i)}>\rho^{-1}$. Puisque $K'\otimes_K\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ ont même rayon de convergence, on peut supposer que $K'=K$. La dérivation D est représentée dans la base

$m, \alpha D(m), \dots, \alpha^{1-\mu} D^{\mu-1}(m)$ par la matrice :

$$G = \alpha G' \ , \qquad G' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \\ b_0 & \dots & & & b_{\mu-1} \end{pmatrix}$$

avec $b_i = \alpha^{i-\mu} a_i$ de telle sorte que $\|G'\|_\rho = \max |b_i|_\rho = 1$. Il en résulte que la matrice $\overline{G'}$, image de G' dans le corps des restes pour la norme $\|\cdot\|_\rho$, n'est pas nilpotente. Donc $\|G'^s\|_\rho = \|G'\|_\rho^s$ pour tout entier s. Par ailleurs, on a $\|D\|_\rho = \rho^{-1} < |\alpha| = \|G\|_\rho$ et on en déduit facilement que $\|G_s\| = \|G^s\| = |\alpha|^s$ c'est-à-dire $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}) = |\pi||\alpha|^{-1}$. □

Corollaire 6.3. — *Soit $\mathcal{M}$ un A-module différentiel de rang μ. Si $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) < |\pi|\rho$, il existe une extension K' de K et une base $\mathfrak{e}$ de $K' \otimes_K F \otimes_A \mathcal{M}$ telle que $\|D\|_{\mathfrak{e},\rho} = |\pi| / \mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) > \rho^{-1}$.*

Corollaire 6.4. — *Soit $\mathcal{M}$ un A-module différentiel de rang μ. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) \geqslant |\pi|\rho$,

2) *Pour tout vecteur cyclique m de $F \otimes_A \mathcal{M}$, on a $D^\mu(m) = a_{\mu-1} D^{\mu-1}(m) + \cdots + a_0 m$ avec $|a_i|_\rho \leqslant \rho^{i-\mu}$.*

3) *Dans une (et alors dans toute) base cyclique $\mathfrak{m}$ de $F \otimes_A \mathcal{M}$, on a $\|D\|_{\mathfrak{m},\rho} \leqslant 1/\rho$ (et par suite $\|x^s D^s\|_{\mathfrak{m},\rho} \leqslant 1$ pour tout $s \geqslant 0$).*

4) *Dans une (et alors dans toute) base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{M}$, $\|D^s\|_{\mathfrak{e},\rho} = \mathrm{O}(\rho^{-s})$.*

6.3. Élimination des singularités apparentes. — Notons $\mathcal{F}(I)$ le corps des fractions de $\mathcal{A}(I)$. Une base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{F}(I) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$, même si elle est contenue dans $\mathcal{M}$, n'est pas forcément une base de $\mathcal{M}$. La matrice de la dérivation dans la base $\mathfrak{e}$ peut présenter des *singularités apparentes*. Les diverses variantes du théorème de Birkhoff montrent comment les faire disparaître [(1)] tout en conservant certaines propriétés de la matrice de dérivation. Par exemple, les constructions du paragraphe précédent donnent des bases (cycliques) de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$ dont la matrice de la dérivation est « petite ». En supprimant les singularités apparentes, on obtient des bases du $\mathcal{A}(I)$-module différentiel initial ayant la même propriété.

Théorème 6.5* (Birkhoff p-adique)**. — ***1) *Soit $I \subset]0, \infty[$ un intervalle fermé borné, soit ρ dans $|K^*|$ et soit H une matrice de $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{F}(I))$. Il existe une matrice L de $\mathrm{Gl}(\mu, K(x))$ et une matrice M de $\mathrm{Gl}\big(\mu, \mathcal{A}(I)\big)$ telles que $\|L\|_\rho = \|L^{-1}\|_\rho = 1$ et $H = LM$.*

[(1)] Plus précisément, profitant du fait que la droite projective est de genre 0, on déplace toutes les singularités apparentes vers le même point (en général 0 ou l'infini).

2) *Soit $I=(\alpha,\beta)$, $0<\alpha\leqslant\beta<\infty$, un intervalle, soit ρ dans $I\cap|K^*|$ et soit H une matrice de $\mathrm{Gl}\big(\mu,\mathcal{A}(I)\big)$. Il existe une matrice L de $\mathrm{Gl}\Big(\mu,\mathcal{A}\big(]0,\beta)\big)\Big)$, une matrice M de $\mathrm{Gl}\Big(\mu,\mathcal{A}\big((\alpha,\infty]\big)\Big)$ telles que $\|L\|_\rho=\|L^{-1}\|_\rho=1$ et $H=LM$.*

Plus précisément, dans les deux cas, les matrices L et M ainsi qu'une matrice diagonale N à coefficients dans $\mathbb{Z}$ sont uniques si on impose les conditions supplémentaires $|L_{ij}|_\rho<1$ pour $i<j$ et x^NL tend vers $\boldsymbol{I}$ quand x tend vers 0.

Principe de la démonstration. — La démonstration du point 1) est purement algébrique et repose sur le fait que, lorsque l'intervalle I est fermé, les éléments de $\mathcal{A}(I)$ n'ont qu'un nombre fini de zéros. Elle utilise la fonction $\lambda/(x-a)$ ($|\lambda|=\max(\rho,|a|)$) qui a un unique pôle en a et un unique zéro à l'infini et vérifie $|\lambda/(x-a)|_\rho=1$.

Le point 2) est nettement plus difficile. Il se démontre à partir du point 1) avec $I=[\rho]$ en faisant un passage à la limite pour la norme $|\cdot|_\rho$. Pour cela l'unicité de la décomposition obtenue en 1) est fondamentale. C'est en fait un cas particulier d'un résultat un peu plus général dans lequel on travaille sur le corps E_ρ des *éléments analytiques* au lieu du corps $\mathcal{F}(I)$ [**4**]. □

Corollaire 6.6. — *Soit $I\subset[0,\infty[$ un intervalle, soit ρ dans $I\cap|K^*|$ et soit H une matrice de $\mathrm{Gl}(\mu,\mathcal{F}(I))$. Il existe une matrice T de $\mathrm{Gl}(\mu,\mathcal{F}(I))$ et une matrice S de $\mathrm{Gl}\big(\mu,\mathcal{A}([0,\infty[)\big)$ telles que $\|T\|_\rho=\|T^{-1}\|_\rho=1$ et $H=TS$.*

Preuve. — Soit $H=LM$ la première décomposition de Birkhoff de la matrice H vue comme élément de $\mathrm{Gl}(\mu,\mathcal{F}([\rho]))$: la matrice M appartient à $\mathrm{Gl}(\mu,\mathcal{A}[\rho])$, la matrice L appartient à $\mathrm{Gl}(\mu,K(x))\subset\mathrm{Gl}(\mu,\mathcal{F}([\rho]))$ et $\|L\|_\rho=\|L^{-1}\|_\rho=1$.

La deuxième décomposition de Birkhoff pour la matrice M s'écrit $M=PQ$ avec P dans $\mathrm{Gl}(\mu,\mathcal{A}(]0,\rho]))$, Q dans $\mathrm{Gl}(\mu,\mathcal{A}([\rho,\infty]))$ et $\|P\|_\rho=\|P^{-1}\|_\rho=1$.

La deuxième décomposition de Birkhoff pour la matrice $Q(1/x)$, l'intervalle $]0,1/\rho]$ et la norme $\|\cdot\|_{1/\rho}$ donne $Q=RS$ avec R dans $\mathrm{Gl}(\mu,\mathcal{A}([\rho,\infty[))$, $\|R\|_\rho=\|R^{-1}\|_\rho=1$ et S dans $\mathrm{Gl}(\mu,\mathcal{A}([0,\infty[))$.

On pose $T=LPR$. A priori, T appartient à $\mathrm{Gl}(\mu,\mathcal{F}([\rho]))$ et vérifie $\|T\|_\rho=\|T^{-1}\|_\rho=1$. Mais comme $T=HS^{-1}$ et comme $\mathcal{A}([0,\infty[)\subset\mathcal{F}(I)$, la matrice T appartient en fait à $\mathrm{Gl}(\mu,\mathcal{F}(I))$. □

On peut en fait choisir S dans $\mathrm{Gl}(\mu,K[x])$ mais en général pas dans $\mathrm{Gl}(\mu,K)$.

6.4. Bases dans lesquelles la dérivation est petite. — Nous pouvons maintenant donner la traduction du théorème 6.2 dans le cas des $\mathcal{A}(I)$-modules différentiels.

Corollaire 6.7. — *Soit $I=(\alpha,\beta)$, $0<\alpha\leqslant\beta<\infty$ un intervalle, soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel et soit ρ dans I.*

1) *Si $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)\geqslant|\pi|\rho$, il existe une base de $\mathcal{M}$ dans laquelle la dérivation est représentée par une matrice G vérifiant $\|G\|_\rho\leqslant1/\rho$.*

2) *Si* $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) < |\pi|\rho$ *, il existe une extension* K' *de* K *et une base de* $K'\otimes_K \mathcal{M}$ *dans laquelle la dérivation est représentée par une matrice* G *vérifiant* $\|G\|_\rho = |\pi|/\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)$.

Preuve. — Montrons le résultat 1). D'après le théorème du vecteur cyclique, il existe une base cyclique $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{F}(I)\otimes_{\mathcal{A}(I)}\mathcal{M}$. D'après le corollaire 6.4, la matrice $G_\mathfrak{m}$ qui représente la dérivation dans la base $\mathfrak{m}$ vérifie $\|G_\mathfrak{m}\|_\rho \leqslant 1/\rho$.

Soit $\mathfrak{e}$ une base de $\mathcal{M}$ et soit H la matrice de $\mathrm{Gl}(\mathcal{F}(I))$ telle que $\mathfrak{m} = H\mathfrak{e}$ et soit $H = TS$ la décomposition donnée dans le corollaire 6.6. Comme S appartient à $\mathrm{Gl}(\mu,\mathcal{A}([0,\infty[)) \subset \mathrm{Gl}(\mathcal{A}(I))$, la famille $\mathfrak{f} = T^{-1}\mathfrak{m} = S\mathfrak{e}$ est une base de $\mathcal{M}$. La matrice représentant la dérivation dans la base $\mathfrak{f}$ vaut $G_\mathfrak{f} = (S'+S\,G_\mathfrak{e})S^{-1} = T^{-1}(-T'+G_\mathfrak{m}T)$. Ses coefficients, comme ceux de S, S^{-1} et $G_\mathfrak{e}$, appartiennent à $\mathcal{A}(I)$. Par ailleurs, comme $\|T\|_\rho = \|T^{-1}\|_\rho = 1$, on a $\|G_\mathfrak{f}\|_\rho \leqslant \max(\|G_\mathfrak{m}\|_\rho, \|T'\|_\rho) \leqslant 1/\rho$.

Le résultat 2) se démontre de manière analogue en remplaçant le corollaire 6.4 par le corollaire 6.3. □

7. Frobenius

Dans ce paragraphe, nous étudions comment se transforment les modules différentiels par la ramification $x \mapsto \varphi(x)$ où $\varphi(x)$ est un relèvement de x^p. Le cas des $\mathcal{A}([0,\rho[)$-modules différentiels (on parle alors de *point ordinaire*) est relativement simple et traité dans [**5**]. Le cas où l'on autorise une *singularité régulière* en 0 est déjà plus difficile (voir [**7**]). Le cas général de MLC $\big(\mathcal{A}(I)\big)$ est démontré dans [**9**].

7.1. Indépendance par rapport au relèvement. — Étant donné un intervalle I, nous posons $I^p = \{\rho^p\,;\ \rho \in I\}$. Soit maintenant φ un élément de $\mathcal{A}(I)$ tel que $|\varphi(x)-x^p|_\rho < \rho^p$ pour tout ρ dans I. L'application φ^* définie par $\varphi^*(f) = f\circ\varphi$ est une injection de $\mathcal{A}(I^p)$ dans $\mathcal{A}(I)$. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}(I^p)$-module différentiel, on note $\varphi^*(\mathcal{M})$ le $\mathcal{A}(I)$-module différentiel obtenu par transport de structure. Plus précisément, si $\mathfrak{e}$ est une base de $\mathcal{M}$ dans laquelle la dérivation est représentée par la matrice G, alors $\varphi^*(\mathcal{M})$ a une base $\varphi^*(\mathfrak{e})$ dans laquelle la dérivation est représentée par la matrice $\varphi'\varphi^*(G)$. Il est facile de vérifier que φ^* est un foncteur exact.

Proposition 7.1. — *Soient* φ *et* ψ *deux éléments de* $\mathcal{A}(I^p)$ *tels que* $|\varphi(x)-x^p|_\rho < \rho^p$ *et* $|\psi(x)-x^p|_\rho < \rho^p$ *pour* ρ *dans* I^p*. Soit* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{A}(I^p)$*-module différentiel tel que* $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho^p) > |\varphi-\psi|_\rho$ *pour tout* ρ *dans* I^p*. Les* $\mathcal{A}(I)$*-modules différentiels* $\varphi^*(\mathcal{M})$ *et* $\psi^*(\mathcal{M})$ *sont isomorphes.*

Preuve. — Choisissons une base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{M}$ et notons G_s la matrice de D^s dans la base $\mathfrak{e}$. En utilisant les propriétés de la résolvante (3), on vérifie que la matrice

$$H = \sum_{s=0}^{\infty} \psi^*(G_s)\,\frac{(\varphi-\psi)^s}{s!}$$

appartient à $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I))$ car elle a pour inverse la matrice

$$H^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^*(G_s)\, \frac{(\psi-\varphi)^s}{s!}.$$

Elle réalise donc un morphisme horizontal entre $\varphi^*(\mathcal{M})$ muni de la base $\varphi^*(\mathfrak{e})$ et $\psi^*(\mathcal{M})$ muni de la base $\psi^*(\mathfrak{e})$. □

D'après cette proposition, on peut supposer que $\varphi(x) = x^p$ sans nuire à la généralité. C'est ce que nous ferons dans la suite.

7.2. Frobenius et rayon de convergence. — Nous calculons le rayon de convergence de l'image par Frobenius d'un module différentiel.

Proposition 7.2. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I^p)$-module différentiel et soit ρ dans I.*

1) $\mathrm{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}),\rho) \geqslant \min\Big(\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho^p)^{1/p}, p\rho^{1-p}\,\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho^p)\Big)$.

2) *Si* $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho^p) > |\pi|^p\rho^p$ *alors* $\mathrm{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}),\rho) = \mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho^p)^{1/p}$.

Preuve. — Soit t_ρ un point générique tel que $|t_\rho| = \rho$ et soit $\mathfrak{e}$ une base de $\mathcal{M}$. Notons G_s (resp. F_s) la matrice représentant l'opérateur D^s dans la base $\mathfrak{e}$ (resp. $\varphi^*(\mathfrak{e})$). Notons X la solution au voisinage du point (générique) t_ρ^p du système $D(X) = G\,X$ telle que $X(t_\rho^p) = \boldsymbol{I}$. La matrice $Y(x) = X(x^p)$ vérifie $D(Y) = px^{p-1}G(x^p)\,Y = F\,Y$ et $Y(t_\rho) = \boldsymbol{I}$. On en déduit

$$X(x^p) = \sum_{s=0}^{\infty} G_s(t_\rho^p)\frac{(x^p-t_\rho^p)^s}{s!} = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(t_\rho)\frac{(x-t_\rho)^i}{i!} = Y(x)$$

Le rayon de convergence de X est $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho^p)$ et le rayon de convergence de Y est $\mathrm{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}),\,\rho)$.

On a $|x^p - t_\rho^p| = \max(|x-t_\rho|^p, |p||x-t_\rho|\rho^{p-1})$ d'où la minoration 1).

Pour $|x-t_\rho| > |\pi|\rho$, on a $|x^p-t_\rho^p| = |x-t_\rho|^p$. On en déduit que, pour $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho^p) > |\pi|^p\rho^p$, on a $\mathrm{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}),\rho) \geqslant \mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho^p)^{1/p}$. Pour obtenir l'inégalité dans l'autre sens, on définit les nombres α_i par la relation

$$(x^p-1)^s = (x-1)^{ps} + \sum_{i=s}^{ps-1}\alpha_i(x-1)^i,$$

on vérifie que $|\alpha_i| \leqslant |\pi|^{ps-i}$ et on en déduit qu'il n'y a pas de compensation quand on développe les termes de la série définissant $X(x^p)$ en puissance de $(x-t_\rho^p)$. □

Exemple 7.3. — L'hypothèse $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho^p) > |\pi|^p\rho^p$ est cruciale dans 2). Ainsi, pour $\mathcal{M} = x^{1/p}\mathcal{A}(I^p)$ on a $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho^p) = \rho|\pi|^p$ mais $\varphi^*(\mathcal{M}) = \mathcal{A}(I)$ et $\mathrm{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}),\rho) = \rho$.

7.3. Unicité de l'antécédent

Théorème 7.4. — *Soit I un intervalle et soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{A}(I^p)$-modules différentiels tels que $\varphi^*(\mathcal{M})$ et $\varphi^*(\mathcal{N})$ sont isomorphes. S'il existe ρ dans I tel que $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho^p) > |\pi|^p\rho^p$ et $\mathrm{Ray}(\mathcal{N},\rho^p) > |\pi|^p\rho^p$, alors $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont isomorphes.*

Preuve. — D'après le corollaire 6.7, il existe une base $\mathfrak{e}$ (resp. $\mathfrak{f}$) de $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$) dans laquelle la dérivation est représentée par une matrice G (resp. F) telle que $\|G\|_{\rho^p} \leqslant 1/\rho^p$ (resp. $\|F\|_{\rho^p} \leqslant 1/\rho^p$). L'isomorphisme entre $\varphi^*(\mathcal{M})$ et $\varphi^*(\mathcal{N})$ est représenté dans les bases $\varphi^*(\mathfrak{e})$ et $\varphi^*(\mathfrak{f})$ par une matrice H de $\mathrm{Gl}(\mu,\mathcal{A}(I))$. On l'écrit $H = \sum_{i=0}^{p-1} x^i\varphi^*(H_i)$ où H_i est une matrice à coefficients dans $\mathcal{A}(I^p)$. La relation (8) s'écrit $iH_i + px\,D(H_i) = px(FH_i - H_iG)$. En calculant la norme $\|\cdot\|_{\rho^p}$ des deux membres, on en déduit que $H_i = 0$ pour $i \neq 0$. Donc $H = \varphi^*(H_0)$ et la matrice H_0 représente l'isomorphisme cherché dans les bases $\mathfrak{e}$ et $\mathfrak{f}$. □

7.4. Existence de l'antécédent

Théorème 7.5. — *Soit I un intervalle et soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel.*

1) *Si $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) > |p|^{1/p}\rho$ pour tout ρ dans I, il existe un (unique) $\mathcal{A}(I^p)$-module différentiel $\mathcal{N}$ tel que $\mathcal{M}{=}\varphi^*(\mathcal{N})$ et $\mathrm{Ray}(\mathcal{N},\rho^p) = \mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)^p$.*

2) *Si $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) > |\pi|\rho$ pour tout ρ dans I, il existe un (unique) $\mathcal{F}(I^p)$-module différentiel $\mathcal{N}$ tel que $\mathcal{M}{=}\varphi^*(\mathcal{N})$ et $\mathrm{Ray}(\mathcal{N},\rho^p) = \mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)^p$.*

Remarque 7.6. — On conjecture que l'hypothèse faible ($\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) > |\pi|\rho$) suffit pour obtenir la conclusion forte ($\mathcal{N}$ est un $\mathcal{A}(I^p)$-module différentiel).

Principe de la démonstration [**9**]. — On veut construire une base de $\mathcal{M}$ dans laquelle la matrice de dérivation est de la forme $px^{p-1}\varphi^*(F)$. Pour cela, si l'opérateur D^s est représenté par la matrice G_s dans une base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{M}$ et si Y_G est définie par la formule (10), on considère la matrice :

$$H = \frac{1}{p}\sum_{\xi^p=1} Y_G(\xi x, x) = \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s x^s G_s(x)\ , \qquad \gamma_s = \frac{1}{p}\sum_{\xi^p=1}\frac{(\xi-1)^s}{s!}. \tag{11}$$

Les nombres γ_s sont rationnels et dans $\mathbb{Z}_p$ ce qui est facile à vérifier à partir de la relation bien connue $|\xi - 1| \leqslant |\pi|$ pour toute racine p-ième de l'unité ξ. Par ailleurs, les coefficients des matrices G_s sont dans $\mathcal{A}(I)$ et, pour ρ dans I, la suite $\|x^sG_s\|_\rho$ tend vers 0 car $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) > |\pi|\rho$. On en conclut que les coefficients de la matrice H sont dans $\mathcal{A}(I)$.

Maintenant, pour f dans $\mathcal{A}(I)$, la « trace » $\sum_{\xi^p=1} f(\xi x)$ appartient à $\varphi^*\big(\mathcal{A}(I^p)\big)$. À partir des propriétés de la matrice Y_G, on trouve :

$$D(H) = \frac{1}{p}\sum_{\xi^p=1}\xi G(\xi)\,H - H\,G = px^{p-1}\varphi^*(F)\,H - H\,G$$

pour une matrice F à coefficients dans $\mathcal{A}(I^p)$. La relation (8) montre que la matrice H représente un morphisme horizontal de $\mathcal{M}$ dans un module différentiel de la forme $\varphi^*(\mathcal{N})$ pour un $\mathcal{A}(I^p)$-module différentiel $\mathcal{N}$. Si la matrice H est inversible, ce morphisme est un isomorphisme.

La difficulté est donc de choisir la base $\mathfrak{e}$ de telle sorte que la matrice H soit inversible. Pour cela, on travaille avec un base cyclique ce qui oblige à passer au corps des quotients $\mathcal{F}(I)$, donc à introduire des singularités apparentes qu'il faudra supprimer à l'aide du théorème de Birkhoff.

Supposons donc que la base $\mathfrak{e}$ soit cyclique et choisissons un nombre ρ dans I. Le corollaire 6.4 et sa variante x-adique (théorème de Turrittin) montrent d'une part que $\|x^s G_s\|_\rho \leqslant 1$ pour tout s et d'autre part que $xG = C + L$ où C est une matrice constante telle que $\|C\| \leqslant 1$ et $\|L\|_\rho < 1$. De plus, la matrice $\overline{C}$, image de C par passage au corps des restes, a des valeurs propres entières. En faisant des transformations de cisaillement, on se ramène à la situation $xG = C_0 + xC_1 + \cdots + x^\nu C_\nu + F$ avec $\|C_i\| \leqslant 1$, C_0 nilpotente et $\|F\|_\rho < 1$.

En s'inspirant de la formule (11) et en utilisant le fait que $\log(\xi) = 0$, on montre que

$$\sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s C_0(C_0-1)\cdots(C_0-s+1) = \frac{1}{p}\sum_{\xi^p=1}(\xi x)^C = \boldsymbol{I}\,.$$

Il en résulte que

$$H = \boldsymbol{I} + xP(x) + S, \qquad \|S\|_\rho < 1, \qquad P \in \mathrm{Mat}(\mu, K[x]) \quad \|P\|_\rho \leqslant 1$$

Si ρ n'est pas la borne inférieure de I, on constate qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $|\det(H) - 1|_r < 1$ pour $\rho - \varepsilon < r < \rho$. Il en résulte que la matrice H appartient à $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{A}(]\rho-\varepsilon, \rho[))$.

Une application du théorème de Birkhoff permet de supprimer les singularités apparentes sur le cercle $|x| = \rho$. On peut ainsi se ramener au cas où H appartient à $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{A}(]\rho-\varepsilon, \rho]))$ (pour des raisons apparemment techniques, pour pouvoir conclure, il faut supposer que $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) > |p|^{1/p}\rho$).

L'unicité de l'antécédent montre que si l'on connaît un antécédent sur deux intervalles J_1 et J_2 d'intersection non vide alors on connaît un antécédent sur la réunion $J_1 \cup J_2$. Ceci permet d'obtenir un antécédent sur toute la couronne en recollant les antécédents construits sur les « petits » intervalles de la forme $]\rho-\varepsilon, \rho]$ et $[\rho, \rho+\varepsilon[$, (obtenu par changement de x en $1/x$). Plus précisément, on considère l'ensemble des triplets $(J, \mathcal{N}, \mathfrak{i})$ où J est un intervalle contenu dans I, $\mathcal{N}$ un $\mathcal{A}(J)$-module différentiel et $\mathfrak{i}$ un isomorphisme de $\varphi^*(\mathcal{N})$ dans $\mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$. Cet ensemble est non vide (nous venons de construire un module différentiel $\mathcal{N}$ associé à un intervalle de la forme $]\rho-\varepsilon, \rho]$). On vérifie facilement qu'il est inductif et qu'un élément maximal est forcément défini sur I. □

Remarque 7.7. — Si le rayon de convergence de $\mathcal{M}$ est suffisamment grand, plus précisément si $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) > |p|^{p^{-h}}\rho$ pour tout ρ de I, on peut itérer le procédé. À partir d'un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel $\mathcal{N}_0 = \mathcal{M}$ on construit ainsi une suite $\{\mathcal{N}_i\}_{0\leqslant i\leqslant h}$ telle que $\mathcal{N}_i$ soit un $\mathcal{A}(I^{p^i})$-module différentiel vérifiant $\varphi^*(\mathcal{N}_{i+1}) = \mathcal{N}_i$ pour $0 \leqslant i < h$. Une telle construction est traditionnellement appelée *structure de Frobenius faible* de $\mathcal{M}$. Au prix de quelques difficultés techniques, elle permet, par exemple, de ramener l'étude du rayon de convergence d'un module différentiel $\mathcal{M}$ tel que $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) < \rho$ à celle d'un module différentiel $\mathcal{N}_h$ vérifiant $\mathrm{Ray}(\mathcal{N}_h,\rho) \leqslant |\pi|\rho$ pour lequel, d'après le théorème 6.2, on sait calculer le rayon de convergence à partir des coefficients de la matrice représentant la dérivation dans une base cyclique.

CHAPITRE II
LE THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION

C'est le théorème de décomposition qui montre le rôle fondamental de l'anneau $\mathcal{R}$ pour les équations différentielles p-adiques. Comme on peut le voir sur l'exemple 8.3 ci-dessous, on ne peut espérer avoir un résultat analogue au Théorème 9.10 sur le corps des éléments analytiques au bord $E_1^\dagger$ ni même sur le corps $\mathcal{E}^\dagger$. On constate donc que le théorème 9.10 est indépendant du résultat de Dwork-Robba 5.4 aussi bien pour son contenu que pour sa démonstration. C'est bien entendu là un point de structure essentiel.

8. $\mathcal{R}$-modules différentiels solubles

Par définition de $\mathcal{R}$, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{R}$-module différentiel, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe un $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$-module différentiel $\mathcal{M}_\varepsilon$ tel que

$$\mathcal{M} = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{A}(I_\varepsilon)} \mathcal{M}_\varepsilon. \tag{12}$$

Deux modules différentiels $\mathcal{M}_\varepsilon$ vérifiant la relation (12) deviennent isomorphes après diminution éventuelle de ε. Nous ferons donc comme si $\mathcal{M}_\varepsilon$ était unique.

De même, tout morphisme $\mathcal{N} \xrightarrow{u} \mathcal{M}$ de $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$ provient d'un morphisme $\mathcal{N}_\varepsilon \xrightarrow{u_\varepsilon} \mathcal{M}_\varepsilon$ de $\mathrm{MLC}\big(\mathcal{A}(I_\varepsilon)\big)$ pour ε suffisamment petit.

8.1. La catégorie $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$**.** — Les anneaux $\mathcal{A}(I)$, pour I ouvert, et $\mathcal{R}$ ne sont ni principaux ni même noethériens. Cependant la proposition suivante montre qu'ils sont cohérents et que tout module sans torsion sur ces anneaux est plat.

Proposition 8.1. — *Tout idéal de type fini de $\mathcal{A}(I)$ (resp. $\mathcal{R}$) est principal et tout sous-module de type fini d'un $\mathcal{A}(I)$-module (resp. $\mathcal{R}$-module) libre de type fini est libre.*

Preuve. — Pour $\mathcal{A}(I)$, comme le corps K est maximalement complet, ceci résulte d'un théorème de Lazard [**28**]. Le cas de $\mathcal{R}$ s'en déduit. □

Théorème 8.2. — *Les catégories* $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$ *et* $\mathrm{MLC}\big(\mathcal{A}(I)\big)$ *sont abéliennes.*

Preuve. — Le cas de $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$ se ramène facilement à celui de $\mathrm{MLC}\big(\mathcal{A}(I)\big)$.

Soit $\mathcal{N} \xrightarrow{u} \mathcal{M}$ un morphisme de $\mathcal{A}(I)$-modules libres. Le noyau de u est cohérent donc de type fini et libre d'après la proposition 8.1. En général, il n'en est pas de même du conoyau.

Par contre, lorsque u est un morphisme de $\mathrm{MLC}\big(\mathcal{A}(I)\big)$ nous allons voir que la connexion force le conoyau de u à être libre.

Si l'intervalle I est fermé, l'anneau $\mathcal{A}(I)$ est principal et le résultat est classique (par exemple [**5**]).

Le cas général se ramène par localisation au précédent : les couronnes $\mathcal{C}(J)$, pour J fermé, forment un recouvrement admissible de la couronne $\mathcal{C}(I)$ et le faisceau conoyau de $\widetilde{\mathcal{N}} \xrightarrow{\widetilde{u}} \widetilde{\mathcal{M}}$ est localement libre de rang fini et localement facteur direct de $\widetilde{\mathcal{M}}$. Comme $\mathcal{C}(I)$ est une variété de Stein, le théorème B de Cartan montre que le module $\mathrm{coker}(u)$ des sections globales de $\mathrm{coker}(\widetilde{u})$ est un facteur direct de type fini de $\mathcal{M}$. On conclut à l'aide de la proposition 8.1. □

Exemple 8.3. — C'est l'exemple fondamental qui a suggéré la forme du théorème de décomposition.

Considérons la série $f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \pi^{-s} s!\, x^s$. L'encadrement classique

$$|\pi|^{s-1} \leqslant |s!| \leqslant |\pi|^s (s+1)$$

avec égalité respectivement pour $s = p^h$ et $s = p^h - 1$, montre que la fonction f est analytique non bornée dans le disque $|x| < 1$. Par ailleurs elle satisfait l'équation inhomogène $x(f + xf') = \pi(f-1)$ et donc l'équation différentielle homogène $L(f) = 0$ avec $L = D(x^2 D + x - \pi) = x^2 D + (3x - \pi)D + 1$.

Il est facile de vérifier que les solutions dans $\mathcal{R}$ de l'équation $L(f) = 0$ sont de la forme λf. Formellement, cela se traduit par le fait que L est divisible à droite par $D - f'/f$. La difficulté vient de ce que la fonction f, n'étant pas bornée, a une infinité de zéros dans toute couronne $\mathcal{C}(I_\varepsilon)$; la différentielle logarithmique f'/f n'appartient donc pas à $\mathcal{R}$. Nous considérons le morphisme de $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$:

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot L \xrightarrow{u} \mathcal{R}, \qquad P \mapsto P(f).$$

Le théorème 8.2 affirme alors que l'image et le noyau de u sont des $\mathcal{R}$-modules libres ce que l'on peut vérifier directement : les zéros de f sont simples si bien que

$$\mathrm{Im}(u) = \mathcal{R}\, f + \mathcal{R}\, f' = \mathcal{R} \quad \text{et} \quad \ker(u) = \mathcal{R}(fD - f').$$

Exemple 8.4. — Les équations $M_{f,n,m}$ étudiées dans [**29**] fournissent de nombreux exemples analogues au précédent : leur avantage est que, par construction, ils ont une

structure de Frobenius alors que, dans l'exemple 8.3, l'existence de cette structure de Frobenius n'est pas évidente.

Considérons l'opérateur différentiel d'ordre deux

$$L := x^2(D + \frac{1}{3})(D + \frac{5}{3}) + \frac{8\pi}{27}D.$$

C'est l'équation $M_{x^2,1,3}$ de [**29**]. Cet opérateur admet la solution

$$f(x) = 1 + \sum_{k \geqslant 1} a_k x^{2k} \quad \text{avec} \quad a_k = -\frac{27(2k+1/3)(2k+5/3)}{16\pi k} a_{k-1}.$$

Si le corps K contient π et si $p > 5$, c'est une fonction non bornée de $\mathcal{A}$. Comme dans l'exemple 8.3, l'opérateur L admet une factorisation sur le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{R}$ et non sur le corps des éléments analytiques au bord comme l'espérait Robba.

En vertu de ([**29**], 4.1.1), le module différentiel $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot L$ est, pour $p \neq 3$, muni d'une structure de Frobenius (définie en fait sur l'anneau $\mathcal{A}\big(]1-\epsilon, 1+\epsilon[\big)$ pour un certain $\epsilon > 0$). En particulier il est soluble.

8.2. Fonction rayon de convergence. — Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel. Pour chaque nombre ρ de $I \cap]0, \infty[$, on a défini le rayon de convergence $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$. Nous nous proposons d'étudier la manière dont celui-ci dépend de ρ.

Définition 8.5. — On dit qu'une fonction f a *logarithmiquement* une propriété sur l'intervalle I de $\mathbb{R}^+$ si la fonction $g(x) = \log(f(e^x))$ a cette propriété sur l'intervalle $\log(I)$.

Proposition 8.6. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel de rang μ. La fonction $\rho \mapsto \mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$ est continue, logarithmiquement concave et logarithmiquement affine par morceaux (avec éventuellement une infinité de « morceaux ») sur l'intervalle I.*

Plus précisément, il existe une partition $I = \bigcup I_i$, des nombres réels positifs α_i et des nombres β_i rationnels de dénominateur inférieur ou égal à μ tels que, pour ρ dans I_i, on ait $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = \alpha_i \rho^{\beta_i}$.

Preuve. — La concavité est une conséquence facile de la convexité logarithmique de la fonction $\rho \to |f|_\rho$. La continuité sur l'intérieur de l'intervalle I s'en déduit immédiatement. La continuité aux extrémités éventuelles de l'intervalle I nécessite l'utilisation du théorème de majoration explicite de Dwork-Robba [**21**].

Lorsque la condition (*) : $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) < |\pi|\rho$ est satisfaite pour tout nombre ρ de l'intervalle I, l'affinité par morceaux et le résultat sur la pente de chaque morceau est une conséquence facile de la proposition 6.2.

Le cas général se ramène à ce cas particulier : localement, à l'aide du théorème 7.5 on construit un antécédent de Frobenius qui satisfait la majoration (*). Ceci montre que la fonction rayon de convergence a localement les propriétés voulues. En fait la

démonstration complète comporte des difficultés techniques que nous n'aborderons pas ici. □

8.3. Plus grande pente d'un module différentiel soluble. — Soit maintenant $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel et soit $\mathcal{M}_\varepsilon$ un $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$-module différentiel qui vérifie la relation (12). Le germe en 1 de la fonction $\rho \mapsto \mathrm{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho)$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{M}_\varepsilon$. Par abus de notation, pour ρ suffisamment proche de 1, nous écrirons $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$ au lieu de $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho)$.

La concavité montre que la limite $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, 1^-) := \lim_{\rho \to 1^-} \mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$ existe. Par construction $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, 1^-) \leqslant 1$.

Définition 8.7. — Nous dirons que $\mathcal{M}$ est *soluble* si $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, 1^-) = 1$.

On note $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$ la catégorie des $\mathcal{R}$-modules différentiels solubles.

Proposition 8.8. — *La catégorie* $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$ *est abélienne.*

Preuve. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 4.5 et du théorème 8.2. □

***Théorème 8.9* (Existence de la plus grande pente)**. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble de rang μ. Il existe un nombre rationnel $\beta \geqslant 0$, de dénominateur inférieur ou égal à μ, tel que, pour ρ proche de* 1, *on ait* $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = \rho^{\beta+1}$.

Preuve. — Ce résultat s'obtient facilement à partir de la proposition 8.6 : d'une part les pentes des « morceaux » d'une fonction concave affine par morceaux forment une suite décroissante et, d'autre part, une suite minorée (par 0) et décroissante de nombres rationnels de dénominateurs bornés est stationnaire. □

Définition 8.10. — Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble. Le nombre rationnel β défini dans le théorème précédent s'appelle la *plus grande pente* de $\mathcal{M}$ et se note $\mathrm{pt}(\mathcal{M})$.

8.4. La catégorie $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$**.** — Les résultats sur le foncteur de Frobenius agissant sur la catégorie $\mathrm{MLC}\big(\mathcal{A}(I)\big)$ se traduisent facilement dans la catégorie $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$.

Soit φ un élément de $\mathcal{R}$ tel que $\lim_{\rho \to 1} |\varphi(x) - x^p|_\rho < 1$. On définit, par composition, un morphisme de Frobenius d'anneaux $\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ et, par image inverse, un foncteur exact de la catégorie $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$ dans elle-même :

$$\varphi^*(\mathcal{M}) := \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{M}$$

Corollaire 8.11. — *Soient φ et ψ des éléments de $\mathcal{R}$ tels que* $\lim_{\rho \to 1} |\varphi(x) - x^p|_\rho < 1$ *et* $\lim_{\rho \to 1} |_\rho \psi(x) - x^p| < 1$ *et soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble. Les $\mathcal{R}$-modules différentiels $\varphi^*(\mathcal{M})$ et $\psi^*(\mathcal{M})$ sont isomorphes.*

Preuve. — Voir proposition 7.1. □

D'après ce corollaire, si on ne s'intéresse qu'aux modules différentiels solubles, on peut se limiter au cas $\varphi(x) = x^p$.

Corollaire 8.12. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble. Alors $\varphi^*(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble et* $\operatorname{pt}\big(\varphi^*(\mathcal{M})\big) = \operatorname{pt}(\mathcal{M})$.

Preuve. — Voir proposition 7.2-2. □

Remarque 8.13. — Si d est un entier premier à p, le module différentiel soluble $\varphi_d^*(\mathcal{M})$ obtenu à partir de la ramification $x \mapsto x^d$ vérifie $\operatorname{pt}\big(\varphi_d^*(\mathcal{M})\big) = d\,\operatorname{pt}(\mathcal{M})$. Le comportement du foncteur de Frobenius vis à vis des pentes est donc tout à fait singulier. En particulier, comme les modules différentiels de rang un ont une pente entière, un module différentiel dont l'une des pentes a un dénominateur divisible par p ne peut pas, même après ramification, être obtenu par extensions successives de modules différentiels de rang un.

Corollaire 8.14. — *Le foncteur φ^* de la catégorie* $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$ *dans elle même est une équivalence de catégorie.*

Preuve. — C'est une conséquence des théorèmes 7.5 et 7.4. □

Fixons un morphisme de Frobenius.

Définition 8.15. — On dit qu'un $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M}$ a une *structure de Frobenius* s'il existe un entier $h \geqslant 1$ pour lequel $\varphi^{*\,h}(\mathcal{M})$ est isomorphe à $\mathcal{M}$ (dans $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$).

On note $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$ dont les objets sont les $\mathcal{R}$-modules différentiels ayant une structure de Frobenius.

Proposition 8.16. — $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$ *est une sous-catégorie de* $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$.

Preuve. — Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$. Pour simplifier la démonstration nous supposons que la structure de Frobenius est d'ordre $h = 1$, c'est-à-dire que $\varphi^*(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Le cas général se traite de manière analogue.

Soit $\mathcal{M}_\varepsilon$ un $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$-module différentiel vérifiant (12). D'après la proposition 7.2-1, pour ε suffisamment petit et ρ^p dans I_ε, on a :

$$\begin{aligned} 1 \geqslant \rho^{-1}\operatorname{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon,\rho) &= \rho^{-1}\operatorname{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}_\varepsilon),\rho) \\ &\geqslant \rho^{-1}\min\big(\operatorname{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon,\rho^p)^{1/p}, p\rho^{1-p}\operatorname{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon,\rho^p)\big) \\ &\geqslant \rho^{-p}\operatorname{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon,\rho^p). \end{aligned}$$

Il en résulte que, pour ρ dans I_ε, la suite $u_h = \rho^{-p^{-h}}\operatorname{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon,\rho^{p^{-h}})$ est croissante et converge vers une limite ℓ qui vérifie $1 \geqslant \ell \geqslant \min(\ell^{1/p}, p\ell)$ c'est-à-dire $\ell = 1$. □

Remarque 8.17. — Il est d'usage de dire que les objets de MLCF($\mathcal{R}$) ont une *structure de Frobenius forte*. Toutefois, à bien des égards, cette structure forte donne moins d'informations que la structure de Frobenius faible. En effet l'*antécédent fort* du module différentiel $\mathcal{M}_\varepsilon$ est $\mathcal{M}_\varepsilon$ lui-même, donc défini dans la même couronne $\mathcal{C}(I_\varepsilon)$ alors que l'antécédent faible de $\mathcal{M}_\varepsilon$ est défini dans la couronne $\mathcal{C}(I_\varepsilon^p)$ qui est strictement plus grande.

9. Pentes d'un module différentiel

9.1. Topologies. — L'anneau $\mathcal{A}(I)$ est muni de la topologie localement convexe définie par la famille des valeurs absolues $|\cdot|_\rho$ pour ρ dans I. Cette topologie est celle de la convergence uniforme sur les sous-couronnes fermées de $\mathcal{C}(I)$. Elle fait de $\mathcal{A}(I)$ un espace de Fréchet c'est-à-dire métrique complet.

Définition 9.1. — Soit $\lambda \geqslant 0$ un nombre réel et soit ρ dans I. On définit une norme sur $\mathcal{D}(I)$ en posant :

$$\Big\| \sum a_i \ \frac{1}{i!}\, D^i \Big\|_{\lambda,\rho} = \max |a_i|_\rho \, \rho^{-i(1+\lambda)}.$$

Ce sont les normes des polynômes différentiels de $\mathcal{D}(I)$ vus comme opérateurs sur les espaces $\mathcal{B}_\rho(\rho^{\lambda+1})$.

Définition 9.2. — Pour $\lambda \geqslant 0$, on note $\mathcal{T}_\lambda$ la topologie définie sur $\mathcal{D}(I)$ par la famille de normes $\|\cdot\|_{\lambda,\rho}$ pour ρ dans I.

Remarque 9.3. — Lorsque l'intervalle I est ouvert, l'espace $\mathcal{D}(I)$, muni de la topologie $\mathcal{T}_\lambda$, est un espace métrique séparé mais n'est pas complet. Ce n'est même pas une limite inductive de Fréchet.

Dans ce cas, et contrairement à ce qui se passe dans le théorème 5.2, les hypothèses du théorème des homomorphismes, même le plus général ([**23**], Chap. IV théorème 2), ne sont pas satisfaites. Ceci montre les limites des méthodes de l'analyse fonctionnelle et nous devrons utiliser des méthodes spécifiques aux équations différentielles p-adiques.

Définition 9.4. — Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}(I)$-module différentiel. On le munit de la topologie quotient $\mathcal{T}_{\lambda,Q}$ donnée par une présentation

$$\mathcal{D}(I)^\mu \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Cette topologie est indépendante de la présentation choisie. Elle n'est pas séparée en général. Le point de départ de la démonstration du théorème de décomposition est d'étudier l'adhérence de 0 pour cette topologie ainsi que le séparé associé.

Le résultat suivant est fondamental. À cause des idéaux différentiels non triviaux dans le cas d'un intervalle ouvert (exemple 3.2), il ne peut pas être démontré par voie purement algébrique.

Théorème 9.5. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel de rang μ et soit $\lambda \geqslant 0$. L'adhérence $\overline{O}_\lambda(\mathcal{M})$ de zéro dans $\mathcal{M}$ pour la topologie $\mathcal{T}_{\lambda,Q}$ est un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel.*

Preuve. — Soit J un intervalle fermé contenu dans I. On munit $\mathcal{M}_J = \mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$ de la topologie quotient induite par la norme $\max_{\rho \in J} \| \cdot \|_{\lambda,\rho}$ sur $\mathcal{D}(I)$ et on note $\mathcal{N}_J$ l'adhérence de 0 dans cet espace. Par définition de la topologie quotient, on a

$$\overline{O}_\lambda(\mathcal{M}) = \bigcap_{J \text{ fermé de } I} \mathcal{N}_J.$$

Comme $\mathcal{N}_J$ est un module différentiel sur l'anneau principal $\mathcal{A}(J)$, c'est un module libre de type fini. On constate que le rang de $\mathcal{N}_J$ est une fonction décroissante de J. Il en résulte que, pour J assez grand, les $\mathcal{N}_J$ sont les sections locales d'un faisceau $\widetilde{\mathcal{N}}$ localement libre sur la couronne $\mathcal{C}(I)$. On en déduit que $\overline{O}_\lambda(\mathcal{M}) = \Gamma\big(\mathcal{C}(I), \widetilde{\mathcal{N}}\big)$ est un module libre de type fini. □

La catégorie MLC $\big(\mathcal{A}(I)\big)$ étant abélienne, on a aussi :

Corollaire 9.6. — *Sous les hypothèses du théorème, le séparé associé $\mathcal{M}/\overline{O}_\lambda(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel.*

Proposition 9.7. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel et soit $\lambda \geqslant 0$. Si l'adhérence de 0 pour la topologie $\mathcal{T}_{\lambda,Q}$ est $\mathcal{M}$ tout entier, alors, pour tout ρ dans I, on a* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(I)}\big(\mathcal{M}, \mathcal{A}_\rho(\rho^{\lambda+1})\big) = 0$.

Preuve. — La démonstration reprend des idées déjà utilisées par Dwork [**18**] et Robba [**31**].

On considère une présentation

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(I)^\mu \xrightarrow{u} \mathcal{D}(I)^\mu \xrightarrow{v} \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Par hypothèse, tout élément $m = v(P)$ de $\mathcal{M}$ appartient à l'adhérence de 0. Il existe donc une suite Q_n dans $\mathcal{D}(I)^\mu$ telle que, pour tout ρ dans I, la suite $\|u(Q_n) - P\|_{\lambda,\rho}$ tende vers 0. Mais la norme $\| \cdot \|_{\lambda,\rho}$ est la norme d'opérateur sur $\mathcal{B}_\rho(\rho^{\lambda+1})$; si g est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(I)}\Big(\mathcal{M}, \mathcal{B}_\rho(\rho^{\lambda+1})\Big)$, on a :

$$|g(m)|_\rho = |g \circ v(P)|_\rho = |g \circ v(P - u(Q_n))|_\rho \leqslant \|u(Q_n) - P\|_{\lambda,\rho} \max_{1 \leqslant i \leqslant \mu} |g \circ v(e_i)|_\rho$$

où $\{e_i\}$ désigne la base canonique de $\mathcal{D}(I)^\mu$. En faisant tendre n vers l'infini, on trouve $g(m) = 0$ c'est-à-dire $g = 0$. Pour terminer, on utilise un résultat de Dwork [**18**] disant que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(I)}\Big(\mathcal{M}, \mathcal{B}_\rho(\rho^{\lambda+1})\Big) = 0$ entraîne $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(I)}\Big(\mathcal{M}, \mathcal{A}_\rho(\rho^{\lambda+1})\Big) = 0$. □

9.2. Le théorème de décomposition. — Le but de ce paragraphe est d'énoncer et de donner une idée de la démonstration du théorème de base sur les modules différentiels solubles. Pour les détails techniques, bien sûr essentiels, nous renvoyons le lecteur à [**13**].

La démonstration du théorème de décomposition utilise le théorème 9.5 et la proposition 9.7. Il repose aussi de manière essentielle sur le théorème 9.8. Les majorations et minorations explicites qui interviennent dans ce dernier sont des résultats fins de la théorie des équations différentielles p-adiques.

Théorème 9.8. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble. Si* $\mathrm{pt}(\mathcal{M}) > \lambda \geqslant 0$*, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la topologie $\mathcal{T}_{\lambda,Q}$ sur $\mathcal{M}_\varepsilon$ n'est pas séparée.*

Esquisse de preuve. — Posons $\mathrm{pt}(\mathcal{M}) = \beta > \lambda$. Pour ε assez petit et ρ dans I_ε, on a $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = \rho^{\beta+1}$. On choisit une base de $\mathcal{M}_\varepsilon$ et on note G_s la matrice de l'opérateur D^s dans cette base.

Pour ρ fixé dans I_ε, on cherche l'antécédent de Frobenius de $\mathcal{M}$ d'ordre maximum et on prend une base cyclique de celui-ci. La majoration obtenue dans le théorème 6.2 et le fait qu'il existe une base cyclique pas trop éloignée de la base de départ (théorème 6.1) permettent de montrer les majoration et minoration suivantes dans lesquelles c_1 et c_2 sont des fonctions définies sur I_ε avec c_1 logarithmiquement convexe

$$\left\| x^s \frac{1}{s!} G_s \right\|_\rho \leqslant c_2(\rho)\, \rho^{-\beta s} \qquad (\forall s \geqslant 0)$$

$$\max_{0 \leqslant s \leqslant p^h} \left\| x^s \frac{1}{s!} G_s \right\|_\rho \geqslant c_1(\rho)\, \rho^{-\beta p^h} \qquad (\forall h \geqslant 0)$$

Par des arguments de convexité, on en déduit qu'il existe des coefficients $\alpha_{h,s}$ ($0 \leqslant s \leqslant p^h$) égaux à 0 ou 1 tels que, pour tout $h \geqslant 0$, on ait :

$$0 < c_1(\rho)\, \rho^{-\beta p^h} \leqslant \Big\| \sum_{s=0}^{p^h} \alpha_{h,s}\, x^s \frac{1}{s!} G_s \Big\|_\rho \leqslant c_2(\rho)\, \rho^{-\beta p^h} \tag{13}$$

On pose alors $L_h = \displaystyle\sum_{s=0}^{p^h} \alpha_{h,s}\, x^{s+[\beta p^h]} \tfrac{1}{s!} D^s$ où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α. Comme $\rho < 1$, on a $\|L_h\|_{\lambda,\rho} \leqslant \max_{0 \leqslant s \leqslant p^h} \rho^{s+[\beta p^h]}\, \rho^{-s(\lambda+1)} \leqslant \rho^{(\beta-\lambda)p^h - 1}$. Comme $\beta > \lambda$, la suite L_h tend vers 0 dans $\mathcal{D}(I_\varepsilon)$ pour la topologie localement convexe des normes $\|\cdot\|_{\lambda,\rho}$ ($\rho \in I$). La minoration (13) montre que l'image dans $\mathcal{M}$ de la suite L_h ne tend pas vers 0 pour la topologie quotient (la majoration (13) montre qu'elle est bornée).

Un argument de compacité, ou plutôt de c-compacité si le corps K est sphériquement complet mais pas localement compact, permet d'extraire (resp. de c-extraire) de l'image de la suite L_h dans $\mathcal{M}_\varepsilon$ une suite qui converge vers un élément non nul. Cet élément appartient par construction à l'adhérence de 0. □

Définition 9.9. — Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble et soit $\lambda \geqslant 0$.

1) On dit que $\mathcal{M}$ a des *pentes supérieures*[(2)] *à* λ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour ρ dans I_ε, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(I_\varepsilon)}\left(\mathcal{M}_\varepsilon, \mathcal{A}_\rho(\rho^{\lambda+1})\right) = 0$.

2) Si $\mathcal{M}$ est non nul, on dit qu'il est *purement de pente* β si $\mathrm{pt}(\mathcal{M}) = \beta$ et si $\mathcal{M}$ a des pentes supérieures à λ pour tout $\lambda < \beta$.

***Théorème 9.10* (de décomposition)**. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble non nul et soit $\lambda \geqslant 0$ un réel. Il existe un (unique) sous-module différentiel $\mathcal{M}_{>\lambda}$ de $\mathcal{M}$ qui a des pentes supérieures à λ et tel que* $\mathrm{pt}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda}) \leqslant \lambda$.

Si, de plus, $0 \leqslant \lambda < \mathrm{pt}(\mathcal{M})$, alors $\mathcal{M}_{>\lambda}$ est non nul.

Preuve. — Posons $\beta = \mathrm{pt}(\mathcal{M})$. On prend ε suffisamment petit pour que $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho) = \rho^{\beta+1}$ pour ρ dans I_ε.

Pour $\lambda \geqslant \mathrm{pt}(\mathcal{M})$, on prend $\mathcal{M}_{>\lambda} = 0$.

Supposons donc $\mathrm{pt}(\mathcal{M}) > \lambda$ et notons $\mathcal{N}_\varepsilon$ l'adhérence de zéro dans $\mathcal{M}_\varepsilon$ pour la topologie $\mathcal{T}_{\lambda,Q}$. Le théorème 9.8 dit que $\mathcal{N}_\varepsilon \neq 0$ pour ε assez petit. Maintenant, pour $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, l'injection $\mathcal{M}_\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{M}_{\varepsilon'}$ est continue donc $\mathcal{N}_\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{N}_{\varepsilon'}$. D'après le théorème 9.5, il en résulte que les $\mathcal{R} \otimes_{\mathcal{A}(I_\varepsilon)} \mathcal{N}_\varepsilon$ forment une suite croissante de sous-$\mathcal{R}$-modules différentiels de $\mathcal{M}$. Cette suite est nécessairement stationnaire. On note $\mathcal{M}_{>\lambda,0}$ sa limite ; c'est un $\mathcal{R}$-module différentiel (comme sous-module différentiel de $\mathcal{M}$) non nul d'après le théorème 9.8. La catégorie $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$ étant abélienne, $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda,0}$ est aussi un objet de $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$.

La topologie sur $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda,0}$ est quotient de celle de $\mathcal{M}$ (une présentation de $\mathcal{M}$ fournit une présentation de $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda,0}$). Par construction, $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda,0}$ est donc séparé, et, d'après le théorème 9.8, $\mathrm{pt}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda,0}) \leqslant \lambda$. Comme $\mathrm{pt}(\mathcal{M}) > \lambda$, on a $\mathrm{pt}(\mathcal{M}_{>\lambda,0}) = \mathrm{pt}(\mathcal{M}) > \lambda$.

Par contre, il n'y a aucune raison pour que la topologie sur $\mathcal{M}_{>\lambda,0}$ soit la topologie induite par celle de $\mathcal{M}$. On itère donc le procédé en construisant, à partir des adhérences de zéro, un sous-module différentiel $\mathcal{M}_{>\lambda,i+1}$ de $\mathcal{M}_{>\lambda,i}$ tel que $\mathrm{pt}(\mathcal{M}_{>\lambda,i}/\mathcal{M}_{>\lambda,i+1}) \leqslant \lambda$ et $\mathrm{pt}(\mathcal{M}_{>\lambda,i+1}) = \mathrm{pt}(\mathcal{M}_{>\lambda,i}) = \mathrm{pt}(\mathcal{M}) > \lambda$.

La suite des $\mathcal{M}_{>\lambda,i}$ étant décroissante et $\mathcal{M}_{>\lambda,i}$ ne pouvant être nul d'après le théorème 9.8, le processus s'arrête lorsque $\mathcal{M}_{>\lambda,\nu+1} = \mathcal{M}_{>\lambda,\nu}$ ce qui signifie, d'après la proposition 9.7, que toutes les pentes de $\mathcal{M}_{>\lambda,\nu}$ sont supérieures à λ. Le module $\mathcal{M}_{>\lambda} := \mathcal{M}_{>\lambda,\nu}$ a toutes les propriétés demandées. □

Exemple 9.11. — Reprenons l'exemple 8.3 ou l'exemple 8.4 avec $p > 5$. L'opérateur L a un point singulier régulier à l'infini et un point singulier irrégulier en zéro. En utilisant le théorème de transfert [**7**], on montre que le module différentiel $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot L$ est de pente strictement positive (sinon les solutions à l'infini convergeraient plus loin qu'elles ne le font). Par ailleurs, la solution f fournit une solution dans $\mathcal{A}_\rho(\rho)$ pour ρ

(2) Plus la pente est grande plus les rayons de convergence de $\mathcal{M}$ sont petits.

assez proche de 1. Donc, $\mathcal{M}_{>\lambda}$ et $\mathcal{M}^{\leqslant\lambda}$ sont tous deux non nuls donc de rang un. Il résulte alors du théorème de décomposition, mais on peut le vérifier directement, que l'adhérence de l'idéal (L) de $\mathcal{D}(I_\varepsilon)$ pour la topologie $\mathcal{T}_0$ est égale à l'idéal $\big(L, f\,D - f'\big)$.

Corollaire 9.12. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel tel que toutes les pentes du module différentiel dual $\mathcal{M}^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R})$ sont supérieures à 0. Étant donné une base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{M}$ et un nombre ε suffisamment petit, il existe, pour tout intervalle fermé J contenu dans I_ε, un nombre réel M_J tel que, pour tout m dans $\mathcal{M}$, on ait $\|m\|_{\mathfrak{e},\rho} \leqslant M_J \, \|D(m)\|_{\mathfrak{e},\rho}$.*

Preuve. — Si la dérivation est représentée dans la base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{M}$ par la matrice G, elle est représentée dans la base duale $\mathfrak{e}^*$ de $\mathcal{M}^*$ par la matrice $-{}^tG$. Comme toute les pentes de $\mathcal{M}^*$ sont supérieures à 0, on a $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^*_{>0}$ et 0 est dense dans $\mathcal{M}^*$ pour la topologie quotient associée à la pente 0. Ceci signifie que, pour tout ε suffisamment petit, tout intervalle fermé J contenu dans I_ε et tout $\eta > 0$, il existe une matrice $Q_{J,\eta}$ de $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{D}(I_\varepsilon)\big)$ telle que, pour tout ρ de J,

$$\big\| Q_{J,\eta} \big(D\ \boldsymbol{I} - (-{}^tG)\big) - \boldsymbol{I} \big\|_{0,\rho} < \eta.$$

Soit maintenant m un élément de $\mathcal{M}_\varepsilon$ et notons $[m]$ le vecteur colonne de ses composantes dans la base $\mathfrak{e}$. Par définition de la norme $\|\cdot\|_{0,\rho}$, on a pour ρ dans J

$$\big\| Q_{J,1} \big(D([m]) + {}^tG[m]\big) - [m] \big\|_\rho < \big\| [m] \big\|_\rho$$

c'est-à-dire , en posant $M_J = \max_{\rho\in J} \|Q_{J,1}\|_{0,\rho}$ et en utilisant la formule (2),

$$\|m\|_{\mathfrak{e},\rho} = \big\|[m]\big\|_\rho = \big\|Q_{J,1}\,[D(m)]\big\|_\rho \leqslant M_J \, \big\|[D(m)]\big\|_\rho = M_J \, \|D(m)\|_{\mathfrak{e},\rho}. \qquad \square$$

9.3. Fonctorialité. — Pour simplifier les notations, étant donné un objet $\mathcal{M}$ de $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$, on pose, pour ε suffisamment petit et ρ dans I_ε :

$$\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(I_\varepsilon)} \big(\mathcal{M}_\varepsilon, \mathcal{A}_\rho(\rho^{\lambda+1})\big)$$

Autrement dit, d'une part, $\mathcal{M}$ a toutes ses pentes supérieures à λ si et seulement si $\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho) = 0$ pour ρ suffisamment proche de 1 et, d'autre part, $\mathrm{pt}(\mathcal{M}) \leqslant \lambda$ si et seulement si $\dim_K \big(\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho)\big) = \dim_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ pour ρ suffisamment proche de 1.

Lemme 9.13. — *Soit $0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$ une suite exacte de* $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$ *et soit $\lambda \geqslant 0$ un réel.*

1) *On a $\mathrm{pt}(\mathcal{M}) = \max\Big(\mathrm{pt}(\mathcal{N}), \mathrm{pt}(\mathcal{Q})\Big)$.*

2) *Si toutes les pentes de $\mathcal{M}$ sont supérieures à λ, il en est de même des pentes de $\mathcal{N}$ et des pentes de $\mathcal{Q}$.*

3) *Si toutes les pentes de $\mathcal{N}$ sont supérieures à λ, alors $\mathcal{N}$ est contenu dans $\mathcal{M}_{>\lambda}$.*

Preuve. — 1) C'est une conséquence immédiate de la proposition 4.5.

2) Supposons ε suffisamment petit et ρ dans I_ε. On a d'après le corollaire 5.7 :

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{Q}, \rho) \longrightarrow \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho) \longrightarrow \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{N}, \rho) \longrightarrow 0 \tag{14}$$

Comme, par hypothèse, $\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho) = 0$, on trouve $\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{N}, \rho) = \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{Q}, \rho) = 0$.

3) Par hypothèse, pour ε suffisamment petit et ρ dans I_ε, on a

$$\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{N}\oplus\mathcal{M}_{>\lambda},\rho)=\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{N},\rho)\oplus\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}_{>\lambda},\rho)=0.$$

Or $\mathcal{N}+\mathcal{M}_{>\lambda}$ est un quotient de $\mathcal{N}\oplus\mathcal{M}_{>\lambda}$ donc, d'après 2), $\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{N}+\mathcal{M}_{>\lambda},\rho)=0$. Maintenant, la suite exacte (14) montre que :

$$\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}/(\mathcal{N}+\mathcal{M}_{>\lambda}),\rho)=\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M},\rho)=\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda},\rho).$$

Par ailleurs, comme $\mathrm{pt}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda})\leqslant\lambda$, on obtient (cf. remarque 3.4) :

$$\begin{aligned}\dim_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda})&=\dim_K\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda},\rho)\\&=\dim_K\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}/(\mathcal{N}+\mathcal{M}_{>\lambda}),\rho)\\&\leqslant\dim_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}/(\mathcal{N}+\mathcal{M}_{>\lambda}))\end{aligned}$$

d'où il résulte que $\mathcal{N}+\mathcal{M}_{>\lambda}=\mathcal{M}_{>\lambda}$. □

Lemme 9.14. — *Soit $\mathcal{N}\xrightarrow{u}\mathcal{M}$ un morphisme de* MLCS($\mathcal{R}$). *On a $u(\mathcal{N}_{>\lambda})\subset\mathcal{M}_{>\lambda}$.*

Preuve. — Comme $u(\mathcal{N}_{>\lambda})$ est un quotient de $\mathcal{N}_{>\lambda}$, d'après le lemme 9.13-2, toutes ses pentes sont supérieures à λ. D'après le lemme 9.13-3, il est contenu dans $\mathcal{M}_{>\lambda}$. □

Lemme 9.15. — *Si* $\mathrm{pt}(\mathcal{M})\leqslant\lambda$ *et si $\mathcal{M}$ a toutes ses pentes supérieures à λ, alors $\mathcal{M}=0$.*

Preuve. — En effet, pour ε suffisamment petit et pour ρ dans I_ε, on a :

$$0=\dim_K\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M},\rho)=\dim_{\mathcal{R}}\mathcal{M}.$$ □

Définition 9.16. — On pose $\mathcal{M}^{\leqslant\lambda}=\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda}$.

Théorème 9.17. — *Les modules différentiels $\mathcal{M}_{>\lambda}$ et $\mathcal{M}^{\leqslant\lambda}$ dépendent fonctoriellement de $\mathcal{M}$. Les foncteurs ainsi définis de la catégorie* MLCS($\mathcal{R}$) *dans elle-même sont exacts.*

Preuve. — D'après le lemme 9.14 un morphisme $\mathcal{N}\xrightarrow{u}\mathcal{M}$ de la catégorie MLCS($\mathcal{R}$) définit par restriction un morphisme $\mathcal{N}_{>\lambda}\xrightarrow{u_\lambda}\mathcal{M}_{>\lambda}$. Par passage au quotient, on en déduit un morphisme $\mathcal{N}^{\leqslant\lambda}\xrightarrow{u^\lambda}\mathcal{M}^{\leqslant\lambda}$.

Considérons maintenant une suite exacte de MLCS($\mathcal{R}$) :

$$0\longrightarrow\mathcal{N}\xrightarrow{u}\mathcal{M}\xrightarrow{v}\mathcal{Q}\longrightarrow 0.$$

On lui associe la suite exacte de complexes :

$$\begin{array}{ccccccccc}0&\longrightarrow&\mathcal{N}_{>\lambda}&\longrightarrow&\mathcal{N}&\longrightarrow&\mathcal{N}^{\leqslant\lambda}&\longrightarrow&0\\&&\downarrow{\scriptstyle u_\lambda}&&\downarrow{\scriptstyle u}&&\downarrow{\scriptstyle u^\lambda}&&\\0&\longrightarrow&\mathcal{M}_{>\lambda}&\longrightarrow&\mathcal{M}&\longrightarrow&\mathcal{M}^{\leqslant\lambda}&\longrightarrow&0\\&&\downarrow{\scriptstyle v_\lambda}&&\downarrow{\scriptstyle v}&&\downarrow{\scriptstyle v^\lambda}&&\\0&\longrightarrow&\mathcal{Q}_{>\lambda}&\longrightarrow&\mathcal{Q}&\longrightarrow&\mathcal{Q}^{\leqslant\lambda}&\longrightarrow&0\end{array}$$

Par hypothèse, le complexe $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q}$ a une cohomologie nulle. D'après le lemme 9.13-2 (resp. 9.13-1) les espaces de cohomologie du complexe $\mathcal{N}_{>\lambda} \longrightarrow \mathcal{M}_{>\lambda} \longrightarrow \mathcal{Q}_{>\lambda}$ (resp. $\mathcal{N}^{\leqslant\lambda} \longrightarrow \mathcal{M}^{\leqslant\lambda} \longrightarrow \mathcal{Q}^{\leqslant\lambda}$) ont toutes leurs pentes supérieures à λ (resp. sont de pente inférieure à λ). La suite exacte longue de cohomologie montre que ces espaces sont isomorphes donc nuls d'après le lemme 9.15. □

9.4. Images inverses. — Le comportement du foncteur $\mathcal{M} \to \mathcal{M}_{>\lambda}$ par images inverses est délicat ([**13**], 6.3) : pour $d \geqslant 2$ on note φ_d la ramification d'ordre d.

Théorème 9.18. — *Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble, $d \geqslant 2$ un entier et λ un réel. On suppose que $0 \leqslant \lambda < pt(\mathcal{M})$. Alors*
1) *l'image inverse $\varphi_d^*(\mathcal{M})$ est soluble,*
2) *on a une injection $\varphi_d^*(\mathcal{M})_{>d\lambda} \to \varphi_d^*(\mathcal{M}_{>\lambda})$,*
3) *cette injection est une bijection si d est premier avec p.*

À l'aide du corollaire 8.12, on en déduit le corollaire :

Corollaire 9.19. — *La catégorie* $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$ *est stable par les foncteurs $\mathcal{M} \to \mathcal{M}_{>\lambda}$ et $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^{\leqslant\lambda}$.*

9.5. Polygone de Newton. — Le théorème de décomposition permet de définir les pentes d'un module différentiel soluble.

***Corollaire 9.20* (décomposition suivant les pentes)**. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble. Il y a une filtration décroissante de $\mathcal{M}$ par des sous-modules différentiels $\mathcal{M}_{>\lambda}$ ($\lambda \in \mathbb{R}^+$) dont le gradué associé $\mathrm{Gr}_\lambda \mathcal{M} = \left(\bigcap_{\nu<\lambda} \mathcal{M}_{>\nu}\right)/\mathcal{M}_{>\lambda}$ est nul ou purement de pente λ.*

Preuve. — Par construction, $\mathcal{M}_{>\lambda}$ est le plus grand sous-module différentiel de $\mathcal{M}$ dont toutes les pentes sont supérieures à λ. Pour $\nu \geqslant \lambda$, $\mathcal{M}_\nu$, qui a des pentes supérieures à $\nu \geqslant \lambda$, est contenu dans $\mathcal{M}_{>\lambda}$.

La suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{M}_{>\lambda} \longrightarrow \bigcap_{\nu<\lambda} \mathcal{M}_\nu \longrightarrow \mathrm{Gr}_\lambda \mathcal{M} \longrightarrow 0$ montre que, s'il est non nul, $\mathrm{Gr}_\lambda \mathcal{M}$ a des pentes supérieures à ν pour tout $\nu < \lambda$. Par ailleurs, le lemme du serpent fournit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gr}_\lambda \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{\leqslant\lambda} \longrightarrow \bigcup_{\nu<\lambda} \mathcal{M}^{\leqslant\nu} \longrightarrow 0$$

qui montre que $\mathrm{pt}(\mathrm{Gr}_\lambda \mathcal{M}) \leqslant \lambda$. □

Définition 9.21. — On appelle *pentes* du module différentiel soluble $\mathcal{M}$ les nombres réels λ pour lesquels $\mathrm{Gr}_\lambda(\mathcal{M}) \neq \{0\}$.

Définition 9.22. — Le *polygone de Newton* d'un module différentiel soluble $\mathcal{M}$ est le polygone convexe commençant au point $(0,0)$ et qui a, pour chaque pente λ de $\mathcal{M}$, un coté de pente λ dont la projection sur l'axe des abscisses a pour longueur le rang de $\mathrm{Gr}_\lambda \mathcal{M}$. Nous le noterons $\mathrm{New}(\mathcal{M})$.

Le corollaire 14.12 dit que les sommets du polygone de Newton ont des coordonnées entières. En particulier, cela implique que les pentes d'un module différentiel soluble de rang μ sont des nombres rationnels dont le dénominateur est inférieur ou égal à μ.

CHAPITRE III
MODULES DIFFÉRENTIELS DE PENTE NULLE

De nombreux problèmes dans la théorie de la cohomologie p-adique des variétés algébriques sur les corps finis se réduisent à étudier l'indice d'un opérateur différentiel $P(x, D)$ de $K[x, D]$ opérant sur un espace de fonctions analytiques.

Le théorème de décomposition du chapitre II permet de décomposer le module différentiel $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ en sa partie de pentes strictement positives $\mathcal{M}_{>0}$ et sa partie modérée $\mathcal{M}^{\leqslant 0}$.

Le premier théorème d'indice de P. Robba [**31**] montre que l'obstruction à l'existence de l'indice pour l'opérateur P ne provient pas de la partie de pentes strictement positives. L'exemple de l'opérateur $xD-\alpha$ avec α nombre de Liouville a montré depuis longtemps [**15**] qu'il n'en est pas de même pour la partie modérée.

Un point clef de la théorie est donc de savoir associer à chaque module différentiel de pente nulle un « exposant » sur lequel on puisse lire l'obstruction à l'existence de l'indice. Dans le cas complexe, le problème ne se pose pas car il n'y a pas de nombre de Liouville. De plus, l'action de la monodromie fournit une définition facile des exposants.

Dans le cas p-adique, il faut trouver un succédané à la monodromie. On pourra voir dans [**36**] les difficultés conceptuelles auxquelles une approche « naïve » conduit. En effet, si l'exposant d'un opérateur d'ordre un se lit directement sur ses coefficients, cela n'est plus du tout vrai pour un opérateur d'ordre $\geqslant 2$ (on passe d'une situation abélienne à une situation non abélienne). Même si cela n'est pas évident dans la présentation adoptée ici, c'est finalement la structure de Frobenius faible qui va fournir la solution.

Dans ce chapitre nous allons définir la notion « d'exposant » pour les modules de pente nulle et démontrer le théorème de monodromie locale p-adique selon lequel, si l'exposant d'un module différentiel de pente nulle « a des différences non Liouville », il s'obtient par extensions successives de modules de rang un définis par $xD - \alpha$ où α parcourt les composantes de l'exposant. Ce sont ces nombres α qui représentent l'obstruction à l'existence de l'indice.

Nous parlons de l'exposant (au singulier) alors que, dans le cas complexe il y a *des* exposants (définis modulo $\mathbb{Z}$ et à l'ordre près). Cette terminologie inhabituelle est

due au fait que, dans la situation p-adique, on ne peut, en général, associer à un module différentiel de Robba qu'un exposant global appartenant à un ensemble quotient compliqué. Ce n'est que lorsque cet exposant a « des différences non Liouville », qu'on peut le considérer comme une famille non ordonnée de nombres de $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$. Dans ce cas, ces nombres (les composantes de l'exposant) jouent le rôle des exposants complexes.

10. L'ensemble des exposants

Nous commençons par définir l'ensemble dans lequel se trouvent les exposants des modules différentiels.

Dans ce paragraphe, on note $|\alpha|_\infty = \pm\alpha$ la valeur absolue ordinaire de l'entier α pour la distinguer de sa valeur absolue p-adique qui est notée $|\alpha|$.

Définition 10.1. — Pour α dans $\mathbb{Z}_p$ on note $\alpha^{(h)}$ le représentant entier de α modulo p^h qui se trouve dans l'intervalle $[(1-p^h)/2, (1+p^h)/2[$.

Définition 10.2. — Un élément α de $\mathbb{Z}_p$ est dit Liouville s'il n'appartient pas à $\mathbb{Z}$ et si l'une au moins des séries $\displaystyle\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha - s}\, x^s$ ou $\displaystyle\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha + s}\, x^s$ a un rayon de convergence strictement inférieur à 1.

Le résultat suivant est facile à vérifier.

Proposition 10.3. — *Un nombre α est Liouville si et seulement s'il n'appartient pas à $\mathbb{Z}$ et si la suite $|\alpha^{(h)}|_\infty/h$ a une limite inférieure finie.*

Soit μ un entier, $\Delta = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu\}$ un élément de $\mathbb{Z}_p^\mu$ et σ une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, \mu\}$. On pose $\sigma(\Delta) = \{\Delta_{\sigma(1)}, \ldots, \Delta_{\sigma(\mu)}\}$, $\Delta^{(h)} = \{\Delta_1^{(h)}, \ldots, \Delta_\mu^{(h)}\}$ et, si Δ appartient à $\mathbb{Z}^\mu$, $\|\Delta\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant\mu} |\Delta_i|_\infty$.

Définition 10.4. — On dit que deux éléments Δ et Δ' de $\mathbb{Z}_p^\mu$ sont équivalents, et on note $\Delta \overset{\mathfrak{e}}{\sim} \Delta'$, s'il existe une suite σ_h de permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, \mu\}$ telles que la suite $\|\Delta'^{(h)} - \sigma_h(\Delta)^{(h)}\|_\infty$ soit un $\mathrm{O}(h)$.

Proposition 10.5. — *Soient Δ et Δ' deux éléments équivalents de $\mathbb{Z}_p^\mu$. Si aucune des différences $\Delta_i - \Delta_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant \mu)$ n'est de Liouville, il existe une permutation σ telle que $\Delta - \sigma(\Delta')$ appartienne à $\mathbb{Z}^\mu$. En particulier les différences $\Delta'_i - \Delta'_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant \mu)$ ne sont pas Liouville.*

Preuve. — Comme, pour $i \neq j$, les différences $\Delta_i - \Delta_j$ sont non Liouville, pour h assez grand, les nombres $\Delta_i^{(h)}$ et $\Delta_j^{(h)}$ sont distincts modulo n'importe quelle suite qui est un $\mathrm{O}(h)$. On en déduit que l'on peut choisir la suite de permutations $\{\sigma_h\}$ de telle sorte qu'elle soit constante à partir d'un certain rang. □

Exemple 10.6. — Posons $\alpha = \sum_{h=0}^{\infty} p^{f(2h)}$ et $\beta = \sum_{h=0}^{\infty} p^{f(2h+1)}$ où f est une fonction qui croit suffisamment vite vers l'infini. On montre que $\Delta = (\alpha, -\beta)$ et $\Delta' = (\alpha - \beta, 0)$ sont équivalents dans $\mathbb{Z}_p^2$ alors que $\Delta - \sigma(\Delta')$ n'appartient à $\mathbb{Z}^2$ pour aucune permutation σ.

Définition 10.7. — On note $\mathfrak{E}_\mu$ l'ensemble quotient $\mathbb{Z}_p^\mu / \overset{\mathfrak{E}}{\sim}$.

Définition 10.8. — On dit qu'un élément $\widetilde{\Delta}$ de $\mathfrak{E}_\mu$ *a des différences non Liouville* si l'un de ses représentants vérifie la condition de la proposition 10.5 (tous ses représentants vérifient alors cette condition).

Définition 10.9. — On dit qu'un élément $\widetilde{\Delta}$ de $\mathfrak{E}_\mu$ est *non Liouville* s'il a des différences non Liouville, et si, pour l'un de ses représentants Δ, les nombres Δ_i $(1 \leqslant i \leqslant \mu)$ ne sont pas Liouville (tous ses représentants vérifient alors cette condition).

11. Exposant d'un module différentiel de Robba

Nous suivons ici la méthode utilisée par Dwork dans [**19**]. Celle-ci est plus directe que la présentation originale de [**12**] car elle revient à travailler directement sur le h-ième antécédent de Frobenius au lieu de procéder pas à pas. Cela rend les démonstrations un peu moins techniques mais, évidemment, ne supprime aucune des difficultés profondes liées à l'existence de nombres de Liouville.

11.1. Modules différentiels de Robba. — Soit $\mathcal{M}$ un $K(x)$-module différentiel soluble *régulier* (c'est-à-dire n'ayant, dans le disque unité, qu'une singularité régulière en 0). Il résulte du théorème de transfert [**7**] que, si les exposants de $\mathcal{M}$ en 0 ont des différences qui ne sont pas des nombres de Liouville, alors $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = \rho$ pour tout $\rho < 1$. Suivant l'idée de Robba [**36**], nous considérons les $\mathcal{R}$-modules différentiels ayant cette dernière propriété pour ρ proche de 1. Nous verrons que, si leur exposant a des différences non Liouville, ils s'obtiennent, en tensorisant par $\mathcal{R}$, à partir des $K(x)$-modules différentiels solubles réguliers.

Définition 11.1. — Soit I un intervalle et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel. On dit que $\mathcal{M}$ est *de Robba* si $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = \rho$ pour tout ρ dans I.

Définition 11.2. — Un $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M}$ sera dit *de pente nulle* s'il est (purement) de pente 0. Cela signifie que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$-module différentiel $\mathcal{M}_\varepsilon$ est de Robba.

On notera $\mathrm{Rob}\big(\mathcal{A}(I)\big)$ (resp. $\mathrm{Rob}(\mathcal{R})$) la sous-catégorie pleine de $\mathrm{MLC}\big(\mathcal{A}(I)\big)$ (resp. $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$) dont les objets sont les modules différentiels de Robba (resp. de pente nulle). Il résulte du théorème 8.2 et de la proposition 4.5 que les catégories $\mathrm{Rob}(\mathcal{A}(I))$ et $\mathrm{Rob}(\mathcal{R})$ sont abéliennes.

11.2. Cas d'une couronne fermée. — On note Γ_h le groupe des racines p^h-ièmes de l'unité dans une clôture algébrique $\widehat{K}$ de K. Pour ζ dans Γ_h et δ dans $\mathbb{Z}_p$, le nombre ζ^δ est bien défini.

Si Δ appartient à $\mathbb{Z}_p^\mu$, on note ζ^Δ la matrice diagonale dont le i-ième terme de la diagonale vaut ζ^{Δ_i}.

***Théorème 11.3* (définition de l'exposant).** — *Soit $I \subset]0,\infty[$ un intervalle fermé, soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel de Robba de rang μ, soit $\mathfrak{e}$ une base de $\mathcal{M}$ et soit $Y_\mathfrak{e}$ la résolvante associée (voir formule 10).*

L'ensemble des éléments Δ de $\mathbb{Z}_p^\mu$ pour lesquels il existe une suite $\big(S_h\big)$ dans $\mathrm{Mat}\,\big(\mu, \mathcal{A}_{\widehat{K}}(I)\big)$ et deux constantes c_1, $c_2 > 0$ qui vérifient, pour tout entier $h > 0$, les conditions suivantes :

1) *$\zeta^\Delta\, S_h(x) = S_h(\zeta x)\, Y_\mathfrak{e}(\zeta x, x)$ pour tout ζ dans Γ_h,*

2) *$\|S_h\|_\rho \leqslant c_1^h$ pour tout ρ dans I,*

3) *Il existe ρ_0 dans I pour lequel $|\det(S_h)|_{\rho_0} \geqslant c_2$,*

est non vide, indépendant de la base $\mathfrak{e}$ et contenu dans une classe d'équivalence pour la relation $\overset{\mathfrak{e}}{\sim}$ (voir 10.4).

Preuve. — Elle se fait en plusieurs étapes

11.2.1. Existence. — Comme $\mathcal{M}$ est de Robba, la matrice $Y_\mathfrak{e}(x,y)$ est définie pour $|x|$ dans I et $|x-y| < |x|$. En particulier elle est définie pour $y = \zeta x$ et ζ dans Γ_h. On pose :

$$S_{h,\Delta}(x) = p^{-h} \sum_{\zeta \in \Gamma_h} \zeta^{-\Delta}\, Y_\mathfrak{e}(\zeta x, x)$$

La condition 1) se déduit facilement des relations $Y_\mathfrak{e}(\xi x, \zeta x) Y_\mathfrak{e}(\zeta x, x) = Y_\mathfrak{e}(\xi x, x)$ et $(\zeta\xi)^\Delta = \zeta^\Delta \xi^\Delta$ pour ζ et ξ dans Γ_h.

Puisque $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}) = \rho$, pour tout ρ dans I, les majorations explicites de Dwork-Robba [**21**] s'écrivent :

$$\| \frac{1}{s!}\, G_s\|_\rho \leqslant c(\rho)\, s^{\mu-1}\, \rho^{-s}$$

avec $c(\rho)$ donné explicitement à partir des $\|G_s\|_\rho$ pour $s < \mu$. En particulier, c est une fonction continue de ρ sur I. La condition 2) s'en déduit facilement avec $c_1 = p^\mu \max_{\rho \in I} c(\rho)$ (remarquer que $|\zeta - 1| < |\pi|^{p^{1-h}}$ pour ζ dans Γ_h).

Pour démontrer la troisième relation, on vérifie que la i-ième ligne de la matrice $S_{h,\Delta}$ ne dépend en fait que de Δ_i et est la somme, pour α dans $\{0,1,\ldots,p-1\}$, des i-ièmes lignes des matrices $S_{h+1,\Delta+\alpha \boldsymbol{I}}$. On en déduit que, pour Δ dans $\mathbb{Z}^\mu$, on a

$$\det(S_{h,\Delta}) = \sum_{v \in \mathfrak{D}} \det(S_{h+1,\Delta+p^h v})$$

où $\mathfrak{D}$ désigne l'ensemble des matrices diagonales à coefficients dans $\{0,1,\ldots,p-1\}$. Pour ρ_0 fixé dans I, ceci permet de construire, par récurrence, une suite Δ_h de $\mathbb{Z}^\mu$

telle que :

$$|\det(S_{h+1,\Delta_{h+1}})|_{\rho_0} \geqslant |\det(S_{h,\Delta_h})|_{\rho_0} \geqslant |\det(S_{0,0})|_{\rho_0} = 1.$$

Cette suite converge, dans $\mathbb{Z}_p^\mu$ vers un élément Δ qui vérifie les conditions 1) et 3).

11.2.2. Indépendance par rapport à la base. — Un changement de bases, de $\mathfrak{e}$ à $\mathfrak{f}$, dans $\mathcal{M}$ est représenté par une matrice H de $\mathrm{Gl}\big(\mu, \mathcal{A}(I)\big)$. Les résolvantes correspondant à ces bases sont alors reliées par la relation $Y_\mathfrak{f}(x,y) = H(x)\, Y_\mathfrak{e}(x,y)\, H^{-1}(y)$. Supposons que la suite S_h vérifie les conditions 1), 2) et 3) pour le μ-uplet Δ et la matrice $Y_\mathfrak{e}$. On constate que la suite $S_h\, H^{-1}$ vérifie ces mêmes conditions pour Δ et la matrice $Y_\mathfrak{f}$.

11.2.3. Équivalence. — D'après la condition 2), on a $|\det(S_h)|_\rho \leqslant c_1^{\mu h}$ pour tout ρ dans I.

La convexité logarithmique de la fonction $\rho \mapsto |\det(S_h)|_\rho$ sur I et la condition 3) impliquent qu'il existe une constante $c_3 > 0$ telle que $|\det(S_h)|_\rho \geqslant c_3^h$ pour tout ρ dans I. Après multiplication de chaque matrice S_h par une constante (dépendant de h) et après changement de la constante c_1, on se ramène au cas où l'on peut supposer que la suite $\{S_h\}$ vérifie la condition plus forte :

3') $|\det(S_h)|_\rho \geqslant 1$ pour tout ρ dans I.

Nous supposerons désormais que la suite S_h (resp. S'_h) vérifie les conditions 1), 2) et 3') pour le μ-uplet Δ (resp. Δ') et la constante c_1 (resp. c'_1).

Posons $Q_h = S'_h\, S_h^{-1}$. La condition 1) donne

$$\zeta^{\Delta'} Q_h(x)\, \zeta^{-\Delta} = Q_h(\zeta x) \text{ pour tout } \zeta \text{ dans } \Gamma_h. \tag{15}$$

En particulier, si la fonction $\det(Q_h)$ s'annule en x alors elle s'annule aux p^h points ζx pour ζ dans Γ_h. La pente logarithmique de la fonction $\rho \mapsto |\det(Q_h)|_\rho$ augmente donc de p^h au point $\rho = |x|$. Maintenant, les conditions 2) et 3') pour les suites S_h et S'_h donnent, avec $c_4 = c'_1\, c_1^{\mu-1}$ et pour tout ρ dans I :

$$\|Q_h\|_\rho \leqslant c_4^h \qquad c_1^{-\mu h} \leqslant |\det(Q_h)|_\rho. \tag{16}$$

Un argument de convexité montre alors que $|\det(S_h)|_\rho$ ne peut pas s'annuler sur la couronne $\mathcal{C}(I_h)$ où I_h est une suite croissante d'intervalles dont la réunion est l'intérieur de I.

Considérons maintenant la décomposition $Q_h(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} q_s\, x^s$ où les q_s sont des matrices constantes, et posons :

$$c_5 = \max\Big(\min_{\rho\in I}\big(\frac{\rho}{\rho_0}\big), \min_{\rho\in I}\big(\frac{\rho_0}{\rho}\big)\Big) < 1.$$

La majoration (16) s'écrit :

$$\|q_s\| \leqslant c_4^h \min_{\rho\in I}(\rho^{-s}) = c_4^h\, c_5^{|s|_\infty}\, \rho_0^{-s}.$$

Par ailleurs, la condition (15) s'écrit :

$$\zeta^{\Delta'_i-\Delta_j}(q_s)_{ij} = \zeta^s(q_s)_{ij} \qquad (\forall \zeta \in \Gamma_h)\ (1 \leqslant i,j \leqslant \mu)$$

et montre que le coefficient $(q_s)_{ij}$ est nul si s n'est pas congru à $\Delta'_i - \Delta_j$ modulo p^h. Donc, si $(q_s)_{ij} \neq 0$, alors $|s|_\infty \geqslant |\Delta'^{(h)}_i - \Delta^{(h)}_j|_\infty$. Il en résulte que :

$$|(Q_h)_{ij}|_{\rho_0} = \max_{s\in\mathbb{Z}} (|(q_s)_{ij}|\rho_0^s) \leqslant c_4^h\, c_5^{|\Delta'^{(h)}_i-\Delta^{(h)}_j|_\infty}. \tag{17}$$

Finalement, la minoration (9) montre qu'il existe, pour chaque valeur de h, une permutation σ_h telle que

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant\mu} |(Q_h)_{i\sigma_h(i)}|_{\rho_0} \geqslant c_1^{-\mu h}.$$

En combinant ces deux informations, on en déduit que

$$|\Delta'^{(h)}_i - \Delta^{(h)}_{\sigma_h(i)}|_\infty \leqslant h\,\frac{\log(c_1^\mu\, c_4)}{-\log(c_5)}.$$

Autrement dit, les μ-uplets Δ et Δ' sont équivalents. □

Définition 11.4. — On appelle exposant de $\mathcal{M}$ et on note $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$ la classe d'équivalence de $\mathfrak{E}_\mu$ définie dans le théorème 11.3.

11.3. Cas général. — Soient $I \supset J$ deux intervalles fermés et $\mathcal{M}$ un objet de $\mathrm{Rob}(\mathcal{A}(I))$. Un $\mu-$uplet Δ et une suite $\{S_h\}$ vérifiant les conditions 1), 2) et 3) du théorème 11.3 sur l'intervalle I vérifient ces mêmes conditions sur l'intervalle J. On en déduit que l'exposant du module $\mathcal{A}(J)\otimes_{\mathcal{A}(I)}\mathcal{M}$ est le même que celui de $\mathcal{M}$. Ceci justifie les définitions suivantes.

Définition 11.5. — Soit I un intervalle et $\mathcal{M}$ un objet de $\mathrm{Rob}\,\mathcal{A}(I)$. On appelle exposant de $\mathcal{M}$ l'exposant du module $\mathcal{A}(J)\otimes_{\mathcal{A}(I)}\mathcal{M}$ où J est un intervalle fermé non réduit à un point contenu dans I.

Définition 11.6. — Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel de pente nulle. Les $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$-modules différentiels $\mathcal{M}_\varepsilon$ qui sont de Robba ont tous le même exposant. Celui-ci est appelé exposant de $\mathcal{M}$.

11.4. Propriétés des exposants. — Pour $0<\nu<\mu$, la bijection canonique $\mathbb{Z}_p^\nu \times \mathbb{Z}_p^{\mu-\nu} \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\mu$ définit, par passage au quotient, une application surjective $(\widetilde{\Delta},\widetilde{\Delta'}) \mapsto \widetilde{\Delta}\oplus\widetilde{\Delta}'$ de $\mathfrak{E}_\nu \times \mathfrak{E}_{\mu-\nu}$ sur $\mathfrak{E}_\mu$. Si $\mu \geqslant 2$, cette application n'est pas bijective.

Soit $\widetilde{\Delta}$ (resp. $\widetilde{\Delta'}$) un élément de $\mathfrak{E}_\nu$ (resp. $\mathfrak{E}_{\mu-\nu}$). Si $\widetilde{\Delta}\oplus\widetilde{\Delta'}$ a des différences non Liouville (resp. est non Liouville), il en est de même de $\widetilde{\Delta}$ et $\widetilde{\Delta'}$. La réciproque est fausse ($\widetilde{\Delta}$ et $\widetilde{\Delta'}$ peuvent avoir des différences non Liouville alors que certaines différences de $\widetilde{\Delta}\oplus\widetilde{\Delta'}$ sont Liouville).

Proposition 11.7. — *Soit I un intervalle et soit $0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$ une suite exacte de* $\mathrm{Rob}(\mathcal{A}(I))$. *On a $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M}) = \mathfrak{Exp}(\mathcal{N}) \oplus \mathfrak{Exp}(\mathcal{Q})$. En particulier, si $\mathcal{M}$ a un exposant non Liouville (resp. dont les différences sont non Liouville), il en est de même de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{Q}$.*

Preuve. — On complète une base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{N}$ en une base $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ de $\mathcal{M}$. Le μ-uplet Δ et la suite $\{S_{h,\Delta}\}$ construite dans le théorème 11.3 pour satisfaire les conditions 1), 2) et 3) dans la base $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$, fournissent par restriction (resp. passage au quotient) un ν-uplet $(\Delta_1, \ldots, \Delta_\nu)$ (resp. $(\mu-\nu)$-uplet $(\Delta_{\nu+1}, \ldots, \Delta_\mu)$) et une suite de matrices satisfaisant ces mêmes conditions dans la base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{N}$ (resp. $\overline{\mathfrak{f}}$ de $\mathcal{Q}$). □

La multiplication par p des éléments de $\mathbb{Z}_p^\mu$ composante par composante définit par passage au quotient une bijection de $\mathfrak{E}_\mu$ dans lui-même que nous noterons p.

Proposition 11.8. — *Soit I un intervalle et $\mathcal{M}$ un objet de* $\mathrm{Rob}(\mathcal{A}(I))$. *Pour $\varphi(x) = x^p$, le module $\varphi^*(\mathcal{M})$ est de Robba et on a $\mathfrak{Exp}(\varphi^*(\mathcal{M})) = p\ \mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$.*

Preuve. — Le fait que $\varphi^*(\mathcal{M})$ soit de Robba est une conséquence immédiate de la proposition 7.2. Si $Y_{\mathfrak{e}}(x, y)$ est la résolvante pour $\mathcal{M}$ dans une base $\mathfrak{e}$, alors la résolvante pour $\varphi^*(\mathcal{M})$ dans la base $\varphi^*(\mathfrak{e})$ est $Y_{\mathfrak{e}}(x^p, y^p)$. Soit Δ un μ-uplet et $\{S_h\}$ une suite satisfaisant les conditions 1), 2) et 3) du théorème 11.3 dans la base $\mathfrak{e}$, on constate que $p\Delta$ et $\{\varphi^*(S_h)\}$ vérifient ces mêmes conditions dans la base $\varphi^*(\mathfrak{e})$ de $\varphi^*(\mathcal{M})$. □

Corollaire 11.9. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel de pente nulle ayant une structure de Frobenius forte (c'est-à-dire tel que $\varphi^{*\,h}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ pour un entier $h > 1$). Alors l'exposant de $\mathcal{M}$ est rationnel (c'est un μ-uplet de nombres de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ à permutation près).*

Preuve. — Si Δ est un représentant de l'exposant de $\mathcal{M}$, il existe une puissance q de p telle que $\Delta \overset{\mathfrak{E}}{\sim} q\Delta$ (proposition 11.8). Autrement dit, pour tout entier h, il existe une permutation σ_h telle que $\|\Delta^{(h)} - q\,\sigma_h(\Delta^{(h)})\|_\infty = \mathrm{O}(h)$. Maintenant, comme l'ordre de σ_h divise $\mu!$, on trouve $\|\Delta^{(h)} - q^{\mu!}\,\Delta^{(h)}\|_\infty = \mathrm{O}(h)$ et on en déduit que $\Delta - q^{\mu!}\Delta$ appartient à $\mathbb{Z}^\mu$. □

12. Structure des modules différentiels de pente nulle

Théorème 12.1. — *Soit I un intervalle ouvert. Tout $\mathcal{A}(I)$-module différentiel $\mathcal{M}$ de Robba dont l'exposant $\widetilde{\Delta}$ a des différences non Liouville s'obtient par extensions successives à partir des modules de rang un $x^{\Delta_i}\mathcal{A}(I)$ $(1 \leqslant i \leqslant \mu)$.*

Remarque 12.2. — Comme les différences de $\widetilde{\Delta}$ ne sont pas Liouville, les composantes Δ_i sont définies modulo $\mathbb{Z}$ à ordre près si bien que les modules $x^{\Delta_i}\mathcal{A}(I)$ ne dépendent pas, à ordre près, du représentant Δ choisi.

Preuve. — On choisit un représentant Δ de $\widetilde{\Delta}$ dont les différences ne soient pas dans $\mathbb{Z}-\{0\}$. Par définition, si J est un intervalle fermé contenu dans I, il existe une suite $\{S_h\}$ vérifiant les conditions 1), 2) et 3) du théorème 11.3. On peut même supposer qu'elle vérifie la condition 3'). On pose alors

$$Q_h = S_{h+1}\, S_h^{-1}.$$

Quitte à changer c_1 en c_1^2, la suite $\{S_{h+1}\}$ vérifient les conditions 1), 2) et 3'). La matrice Q_h vérifie donc les relations (15) et (16) et le coefficient $(Q_h)_{ij}$ ne contient que des puissances de x congrues à $\Delta_i - \Delta_j$ modulo p^h.

On note R_h la matrice obtenue, à partir de la matrice Q_h, en ne gardant, dans le coefficient $(Q_h)_{ij}$, que le terme de degré $(\Delta_i-\Delta_j)^{(h)}$. Par construction, la matrice R_h commute avec la matrice ζ^Δ et un calcul analogue à celui qui justifiait (17) donne, pour ρ dans l'intérieur de I :

$$\|Q_h - R_h\|_\rho \leqslant c_4^h\, c_5(\rho)^{p^h} \tag{18}$$

avec $c_5(\rho) < 1$. On en déduit que, quelque soit l'intervalle fermé $\widetilde{J}$ contenu dans J, pour h assez grand, disons $h \geqslant h_0$, R_h appartient à $\mathrm{Gl}\left(\mu, \mathcal{A}(\widetilde{J})\right)$ et, d'après les conditions (16), que $\max(\|R_h\|, \|R_h^{-1}\|) \leqslant c_6^h$.

On considère alors la suite C_h $(h \geqslant h_0)$ de matrices inversibles définies par la récurrence

$$C_{h+1} = R_h\, C_h \qquad\qquad C_{h_0} = \boldsymbol{I}$$

et l'on vérifie facilement qu'il existe une constante c_7 telle que

$$\|C_{h+1}^{-1} Q_h\, C_h - \boldsymbol{I}\,\|_\rho \leqslant c_7^{h^2}\, c_5(\rho)^{p^h}$$

pour tout ρ dans $\widetilde{J}$. On en déduit que la suite :

$$C_h^{-1}\, S_h = C_h^{-1} Q_{h-1} C_{h-1}\; C_{h-1}^{-1} Q_{h-2} C_{h-2}\; \cdots\; C_{h_0+1}^{-1} Q_{h_0}\; S_{h_0}$$

converge dans $\mathrm{Mat}(\mathcal{A}(\widetilde{J}))$. Notons S sa limite.

Par passage à la limite, la condition 1) donne

$$\zeta^\Delta\, S(x) = S(\zeta x)\, Y_{\mathfrak{e}}(\zeta x, x) \qquad (\forall \zeta \in \bigcup_{h\in\mathbb{N}} \Gamma_h).$$

En particulier, si le déterminant de $S(x)$ s'annulait en un point x, il s'annulerait en tous les points ζx ce qui est impossible pour une fonction analytique. Donc S appartient à $\mathrm{Gl}\left(\mu, \mathcal{A}(\widetilde{J})\right)$.

Le changement de base associé à la matrice S fournit une base $S\mathfrak{e}$ de $\mathcal{A}(\widetilde{J}) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$ dans laquelle la résolvante $Y_{S\mathfrak{e}}$ satisfait la condition $Y_{S\mathfrak{e}}(\zeta x, x) = \zeta^\Delta$ d'où, en dérivant par rapport à x, on déduit que la matrice $G_{S\mathfrak{e}}$ représentant la dérivation vérifie la relation :

$$\zeta\, G_{S\mathfrak{e}}(\zeta x)\, \zeta^\Delta = \zeta^\Delta\, G_{S\mathfrak{e}}(x)$$

Puisque les différences $\Delta_i - \Delta_j$ ne sont pas des entiers non nuls, cette relation montre que $G_{S\mathfrak{e}}(x) = A\, x^{-1}$ où A est une matrice constante. On en déduit que $Y_{S\mathfrak{e}}(x, y) =$

$(x/y)^A = \left(1 + \frac{x-y}{y}\right)^A$ ce qui donne $\zeta^\Delta = Y_{S\mathfrak{e}}(\zeta x, x) = \zeta^A$ et montre que la partie semi-simple de la matrice A est la matrice diagonale de diagonale Δ.

Pour terminer la démonstration, il suffit de « recoller » les solutions obtenues pour les différents intervalles $\widetilde{J}$. □

***Corollaire 12.3* (théorème de la monodromie p-adique).** — *Tout $\mathcal{R}$-module différentiel de pente nulle dont l'exposant $\widetilde{\Delta}$ a des différences non Liouville s'obtient par des extensions successives à partir des modules différentiels (de rang un) $x^{\Delta_i}\mathcal{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant \mu)$.*

Comme on l'a dit dans l'introduction, le théorème d'existence de Riemann 1.3 est une conséquence facile de ce corollaire.

CHAPITRE IV
THÉORÈMES D'INDICE

Il y a deux théorèmes d'indice de natures différentes.

Le premier concerne les polynômes différentiels. Il s'obtient assez facilement à partir des résultats des chapitres précédents. Il dit que les $K(x)$-modules différentiels dont l'exposant est non Liouville ont une cohomologie p-adique finie. C'est lui qui intervient dans la démonstration de la finitude de la cohomologie p-adique des modules exponentiels [**29**]. À ce titre, c'est l'un des ingrédients clefs dans la démonstration de la finitude des nombres de Betti p-adiques d'une variété affine non singulière sur un corps fini.

Le deuxième théorème d'indice dit que les $\mathcal{R}$-modules différentiels solubles dont l'exposant est non Liouville ont un indice nul sur $\mathcal{R}$. Pour l'obtenir, les résultats des chapitres précédents sont insuffisants. Sa démonstration nécessite l'introduction de la notion d'indice généralisé.

13. Opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux

13.1. Exposant

Définition 13.1. — On appelle exposant du $\mathcal{R}$-module différentiel soluble $\mathcal{M}$, et on note $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$, l'exposant de sa partie de pente nulle $\mathcal{M}^{\leqslant 0}$. C'est donc un élément de $\mathfrak{E}_\nu$ pour $\nu = \mathrm{rg}(\mathcal{M}^{\leqslant 0}) \leqslant \mathrm{rg}(\mathcal{M})$.

Dans ce paragraphe, nous considérons un opérateur différentiel $L = \sum_{i=0}^{\mu-1} a_i D^i$ de l'algèbre de Weyl $K[x][D]$.

Rappelons que $E_1^\dagger = E_1 \cap \mathcal{R}$ désigne le corps des éléments analytiques superadmissibles c'est-à-dire prolongeables dans une couronne $\mathcal{C}(I_\varepsilon)$. Par ailleurs, on pose

$\mathcal{H}^\dagger = \frac{1}{x}\bigcup_{\varepsilon>0}\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\infty])$, de telle sorte que l'on a $\mathcal{R} = \mathcal{A}\oplus\mathcal{H}^\dagger$. Les sous-anneaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}^\dagger$ sont duals topologiques l'un de l'autre.

À L on associe le $E_1^\dagger$-module différentiel $M = E_1^\dagger[D]/E_1^\dagger[D]\cdot L$ et le $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M} = \mathcal{R}\otimes_{E_1^\dagger} M = \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot L$. Le théorème 5.4 fournit une décomposition

$$0\longrightarrow M^{\mathrm{inj}}\longrightarrow M\longrightarrow M^{\mathrm{sol}}\longrightarrow 0$$

dans $\mathrm{MLC}(E_1^\dagger)$ avec $\mathrm{Ray}(M^{\mathrm{sol}},1)=1$ et $\mathrm{Hom}_{E_1^\dagger[D]}\big(M^{\mathrm{inj}},\mathcal{A}_1(1)\big)=0$

En vertu du théorème de continuité du rayon de convergence, le $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M}^{\mathrm{sol}} = \mathcal{R}\otimes_{E_1^\dagger} M^{\mathrm{sol}}$ est soluble. On définit l'exposant de L comme l'exposant de $\mathcal{M}^{\mathrm{sol}}$. On le note $\mathfrak{Exp}(L)$.

13.2. Indice d'un polynôme différentiel

***Théorème 13.2* (conjecture de Robba).** — *Soit L un opérateur de l'algèbre de Weyl $K[x][D]$. Si son exposant $\mathfrak{Exp}(L)$ est non Liouville alors il a un indice dans les espaces $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}^\dagger$.*

De plus on a : $\chi(L,\mathcal{R}) = \chi(L,\mathcal{A}) + \chi(L,\mathcal{H}^\dagger) = 0$.

Preuve. — Nous reprenons les notations précédentes

1) La propriété d'être « injectif » est vraie sur un intervalle ouvert. Pour ρ suffisamment proche de 1, on a $\mathrm{Hom}_{E_\rho[D]}\big(M^{\mathrm{inj}},\mathcal{A}_\rho(\rho)\big)=0$. Le théorème de l'indice de Robba [**31**] montre que, pour $\varepsilon>0$ suffisamment petit et ρ dans I_ε, M^{inj} a un indice nul dans $\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\rho[)$.

2) Le corollaire 12.3 dit que la partie modérée $\mathcal{M}^{\mathrm{sol}\leqslant 0}$ de $\mathcal{M}^{\mathrm{sol}}$ s'obtient par extensions successives de modules différentiels de la forme $x^\alpha\,\mathcal{R}$ avec α composante de l'exposant de L c'est-à-dire , par hypothèse, nombre non Liouville de $\mathbb{Z}_p$. Un calcul direct montre que, pour ρ dans I_ε, $x^\alpha\,\mathcal{A}(I_\varepsilon)$ a un indice nul dans $\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\rho[)$. On en déduit que, pour ε assez petit, $\big(\mathcal{M}^{\mathrm{sol}\leqslant 0}\big)_\varepsilon$ a un indice nul dans $\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\rho[)$.

3) Par définition de la partie de pentes positives, pour $\varepsilon>0$ suffisamment petit et ρ dans I_ε, on a $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}^{\mathrm{sol}}_{>0},\rho)<\rho$. Le théorème de l'indice de Robba [**31**] montre que $\Big(\mathcal{M}^{\mathrm{sol}}_{>0}\Big)_\varepsilon$ a un indice nul dans $\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\rho[)$.

Les résultats 2) et 3) montrent que $\big(\mathcal{M}^{\mathrm{sol}}\big)_\varepsilon$ a un indice nul dans $\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\rho[)$. Il en est alors de même de M^{sol}.

Si on ajoute le résultat 1), on en déduit que M lui-même a un indice nul dans $\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\rho[)$ c'est-à-dire que l'opérateur L a un indice nul dans $\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\rho[)$.

En utilisant la dualité entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}^\dagger$, on montre alors un théorème de continuité de l'indice pour les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux ([**11**] ou [**10**] 4.5.3). D'après celui-ci, L a un indice dans $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$ et

$$\chi(L,\mathcal{R}) = \chi\big(L,\mathcal{A}(I_\varepsilon)\big) = \lim_{\rho\to 1}\chi\big(L,\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\rho[)\big) = 0.$$

La décomposition en somme directe $\mathcal{R}=\mathcal{A}\oplus\mathcal{H}^\dagger$ donne une suite exacte « longue » : $\ker(L,\mathcal{H}^\dagger)\longrightarrow\mathrm{coker}(L,\mathcal{A})\longrightarrow\mathrm{coker}(L,\mathcal{R})$. Le noyau de l'opérateur différentiel L est

un espace vectoriel de dimension finie sur K. On vient de voir que le conoyau $\operatorname{coker}(L,\mathcal{R})$ est également de dimension finie. Il en résulte que $\operatorname{coker}(L,\mathcal{A})$ est de dimension finie. L'opérateur L a donc un indice sur $\mathcal{A}$. Pour conclure, on utilise la propriété d'additivité des indices. □

Remarque 13.3. — Le théorème de continuité de l'indice qui a constitué un point clef de la démonstration précédente est vrai pour les $K(x)$-modules différentiels mais pas en général pour les $\mathcal{R}$-modules différentiels.

Définition 13.4. — On dit qu'un polynôme différentiel L à coefficients dans $K[x]$ a une *structure de Frobenius en* 0 si le $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot L$ a une structure de Frobenius.

Corollaire 13.5. — *Soit L un polynôme différentiel à coefficients dans $K[x]$ qui a une structure de Frobenius en* 0*. Alors L a un indice dans $\mathcal{A}$, $\mathcal{H}^\dagger$ et $\mathcal{R}$ et on a les égalités* $\chi(L,\mathcal{R}) = \chi(L,\mathcal{A}) + \chi(L,\mathcal{H}^\dagger) = 0$.

Preuve. — D'après le théorème 8.16, le module différentiel $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot L$ est soluble. Autrement dit, $\mathcal{M}^{\mathrm{inj}} = 0$. Le théorème de décomposition de Dwork-Robba n'est pas nécessaire dans cette situation.

Par définition $\mathcal{M}$ a une structure de Frobenius. D'après le corollaire 9.19, il en est de même de $\mathcal{M}^{\leqslant 0}$. D'après le corollaire 11.9 l'exposant $\mathfrak{Exp}(L) := \mathfrak{Exp}(\mathcal{M}^{\leqslant 0})$ a des composantes rationnelles donc est non Liouville. On peut appliquer le théorème 13.2. □

14. Indice des $\mathcal{R}$-modules différentiels

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble de pente nulle dont l'exposant est non Liouville, d'après le théorème de la monodromie p-adique, son indice sur $\mathcal{R}$ est nul car somme des indices $\chi(x\,D-\alpha,\mathcal{R})$ avec α non-Liouville.

Pour un $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M}$ dont toutes les pentes sont strictement positives, le théorème de l'indice de Robba affirme que, pour ε suffisamment petit et ρ dans I_ε, on a $\chi\big(\mathcal{M}_\varepsilon, \mathcal{A}(]1-\varepsilon,\rho[)\big) = 0$. Mais, contrairement au cas des polynômes différentiels, on ne sait pas passer à la limite lorsque ρ tend vers 1 pour en déduire que $\chi(\mathcal{M},\mathcal{R}) = 0$. C'est là une différence profonde entre la situation rationnelle et la situation analytique. Le résultat est cependant vrai (théorème 14.13) mais sa démonstration nécessite l'introduction de la notion d'indice généralisé.

14.1. Indices généralisés sur une couronne. — L'anneau $\mathcal{R}$ n'est pas contenu dans $\mathcal{A}$. On ne peut donc pas parler, en général, de l'indice dans $\mathcal{A}$ d'un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathcal{R}$ (resp. d'un $\mathcal{R}$-module différentiel). On contourne toutefois cette difficulté en introduisant la notion d'indice généralisé.

Posons $\mathcal{H}_\varepsilon = \frac{1}{x}\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\infty])$ de telle sorte que $\mathcal{A}(I_\varepsilon) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{H}_\varepsilon$. Notons γ^+ (resp. γ^-) la projection de $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$ sur $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{H}_\varepsilon$) : elle consiste à annuler les coefficients des puissances négatives (resp. positives) de x.

Par abus de notation, si μ est un entier, nous noterons encore γ^+ (resp. γ^-) la projection de $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$ sur $\mathcal{A}^\mu$ (resp. $\mathcal{H}_\varepsilon^\mu$) composante par composante et, si L est un opérateur sur $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$, nous noterons encore L sa restriction à $\mathcal{A}^\mu$ ou $\mathcal{H}_\varepsilon^\mu$.

Définition 14.1. — On dit qu'un opérateur u de $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$ a un *indice généralisé* dans $\mathcal{A}^\mu$ (resp. $\mathcal{H}_\varepsilon^\mu$) si l'opérateur $\gamma^+ \circ u$ (resp. $\gamma^- \circ u$) a un indice dans $\mathcal{A}^\mu$ (resp. $\mathcal{H}_\varepsilon^\mu$). Dans ces conditions, on pose :

$$\widetilde{\chi}(u, \mathcal{A}^\mu) := \chi(\gamma^+ \circ u, \mathcal{A}^\mu) \qquad \text{resp. } \widetilde{\chi}(u, \mathcal{H}_\varepsilon^\mu) := \chi(\gamma^- \circ u, \mathcal{H}_\varepsilon^\mu).$$

L'indice généralisé possède des propriétés voisines de celles d'un indice. Pour les démontrer, on a besoin d'un théorème d'analyse p-adique.

Définition 14.2. — Une partie U d'un espace vectoriel topologique localement convexe sur le corps maximalement complet K est dite *c-compacte* si toute intersection dénombrable de fermés de U convexes non vides emboîtés est non vide.

On dit qu'une application linéaire u entre deux K-espaces vectoriels topologiques localement convexes E et F séparés, est *c-compacte* si elle transforme un voisinage convenable de zéro dans E en une partie relativement c-compacte de F.

En s'inspirant de la démonstration du théorème classique de la perturbation compacte ([**23**], Chap. V), on démontre un théorème de perturbation c-compacte (on trouve dans [**16**] les principaux ingrédients nécessaires à cette démonstration).

Théorème 14.3. — *Soit u et v deux applications linéaires continues entre deux K-espaces vectoriels topologiques de type $\mathcal{LF}$ (limite inductive de Fréchet). Si v a un indice et si u est c-compacte, alors $v+u$ est à indice et l'on a $\chi(u+v) = \chi(v)$.*

Soit u une matrice de $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{D}(I_\varepsilon)\big)$. Nous noterons encore u l'opérateur $X \mapsto u \cdot X$ sur $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$.

Proposition 14.4. — *Soit u et v deux matrices de $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{D}(I_\varepsilon)\big)$. Si deux des trois opérateurs u, v et $u \circ v$ ont un indice généralisé sur $\mathcal{A}^\mu$ (resp. $\mathcal{H}_\varepsilon^\mu$), il en est de même du troisième et on a*

$$\widetilde{\chi}(u \circ v, \mathcal{A}^\mu) = \widetilde{\chi}(u, \mathcal{A}^\mu) + \widetilde{\chi}(v, \mathcal{A}^\mu) \qquad \text{resp. } \widetilde{\chi}(u \circ v, \mathcal{H}_\varepsilon^\mu) = \widetilde{\chi}(u, \mathcal{H}_\varepsilon^\mu) + \widetilde{\chi}(v, \mathcal{H}_\varepsilon^\mu).$$

Preuve. — Donnons la démonstration dans le cas de $\mathcal{A}$.

On reprend une idée de Robba [**35**] en écrivant :

$$\gamma^+ \circ u \circ v = \gamma^+ \circ u \circ \gamma^+ \circ v + \gamma^+ \circ u \circ \gamma^- \circ v = (\gamma^+ \circ u) \circ (\gamma^- \circ v) + \gamma^+ \circ u \circ \gamma^- \circ v$$

Il suffit de vérifier que la « perturbation » $\gamma^+ \circ u \circ \gamma^- \circ v$ est c-compacte pour pouvoir conclure en utilisant le théorème 14.3. Pour cela on utilise le lemme ci-dessous et on

remarque que le produit de l'opérateur c-compact $\gamma^+ \circ u \circ \gamma^-$ par l'opérateur continu v est c-compact. □

Lemme 14.5. — *Soit u une matrice de* $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{D}(I_\varepsilon)\big)$. *L'application $\gamma^+ \circ u \circ \gamma^-$, de $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$ dans lui-même, est c-compacte.*

Preuve. — Pour n entier, notons u_n la matrice à coefficients dans $K[x, 1/x][D]$ obtenue en ne gardant dans les coefficients de u que les termes dont la puissance de x est comprise entre $-n$ et n. On constate facilement que l'opérateur $\gamma^+ \circ u_n \circ \gamma^-$ est de rang fini. Plus précisément, pour ρ et r dans I_ε et pour f dans $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$ on trouve :

$$\|\gamma^+ \circ u \circ \gamma^-(f)\|_\rho \leqslant \max\big(\|u\|_{0,r}, \|u\|_{0,\rho}\big)\, \|f\|_r \tag{19}$$

Si on note $\mathcal{B}$ la boule unité de $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$ muni de la norme $\|\cdot\|_r$. Par définition de la topologie, c'est un ouvert de $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$. La formule (19) montre que, quelque soit le voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$, pour n assez grand, $\gamma^+ \circ (u - u_n) \circ \gamma^-(\mathcal{B})$ est contenu dans $\mathcal{U}$. Le lemme en résulte. □

Proposition 14.6. — *Une matrice u de* $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{D}(I_\varepsilon)\big)$ *a un indice sur $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$ si et seulement si elle a un indice généralisé sur $\mathcal{A}^\mu$ et sur $\mathcal{H}^\mu_\varepsilon$. On a alors $\chi\big(u, \mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu\big) = \widetilde{\chi}(u, \mathcal{A}^\mu) + \widetilde{\chi}(u, \mathcal{H}^\mu_\varepsilon)$.*

Preuve. — Posons $\widetilde{u} = u - \gamma^+ \circ u \circ \gamma^- - \gamma^- \circ u \circ \gamma^+$. D'une part l'opérateur $\gamma^+ \circ u \circ \gamma^- - \gamma^- \circ u \circ \gamma^+$ est c-compact d'après le lemme 14.5 et d'autre part la restriction de $\widetilde{u}$ à $\mathcal{A}^\mu$ (resp. $\mathcal{H}^\mu_\varepsilon$) vaut $\gamma^+ \circ u$ (resp. $\gamma^- \circ u$). On en déduit :

$$\begin{aligned}\chi\big(u, \mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu\big) &= \chi\big(\widetilde{u}, \mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu\big) = \chi(\widetilde{u}, \mathcal{A}^\mu) + \chi(\widetilde{u}, \mathcal{H}^\mu_\varepsilon) \\ &= \chi(\gamma^+ \circ u, \mathcal{A}^\mu) + \chi(\gamma^- \circ u, \mathcal{H}^\mu_\varepsilon) = \widetilde{\chi}(u, \mathcal{A}^\mu) + \widetilde{\chi}(u, \mathcal{H}^\mu_\epsilon).\end{aligned}$$

□

Définition 14.7. — Soit g une fonction de $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$ qui ne s'annule pas dans la couronne $\mathcal{C}(I_\varepsilon)$. On note $\mathrm{ord}(g)$ la pente logarithmique de la fonction $\rho \mapsto |g|_\rho$ sur l'intervalle I_ε. Lorsque la fonction g appartient à $\mathcal{A}$, cette pente est en effet égale au nombre de zéros de la fonction g dans le disque $D(0, 1)$. Remarquons en outre que $\mathrm{ord}(g)$ est toujours un entier.

Proposition 14.8. — *Toute matrice u de* $\mathrm{Gl}\big(\mu, \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big)$ *a un indice généralisé sur $\mathcal{A}^\mu$ et sur $\mathcal{H}^\mu_\varepsilon$. On a $\widetilde{\chi}(u, \mathcal{A}^\mu) = -\widetilde{\chi}(u, \mathcal{H}^\mu_\varepsilon) = \mathrm{ord}\big(\det(u)\big)$.*

Preuve. — D'après le théorème de Birkhoff, on a $u = x^N L\, M$ avec N matrice diagonale à coefficients dans $\mathbb{Z}$, L dans $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{A})$ et M dans $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{H}_\varepsilon)$. En utilisant la proposition 14.6, on voit que L (resp. M), ayant un indice nul sur $\mathcal{A}^\mu$ (resp. $\mathcal{H}^\mu_\varepsilon$) et sur $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$, a un indice généralisé nul sur $\mathcal{H}^\mu_\varepsilon$ (resp. $\mathcal{A}^\mu$). La proposition 14.4 montre que $L\, M$ a des indices généralisés nuls sur $\mathcal{A}^\mu$ et sur $\mathcal{H}^\mu_\varepsilon$. On est ramené au cas $u = x^N$ qui est facile à traiter. □

14.2. Indices dans $\mathcal{R}$. — Il est naturel de noter encore γ^+ (resp. γ^-) la projection de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{H}^\dagger$). Si u est un opérateur sur $\mathcal{R}^\mu$, son indice généralisé sur $\mathcal{A}^\mu$ (resp. $\mathcal{H}^{\dagger\mu}$) sera l'indice de l'opérateur $\gamma^+ \circ L$ (resp. $\gamma^- \circ L$) sur $\mathcal{A}^\mu$ (resp. $\mathcal{H}^{\dagger\mu}$).

***Corollaire 14.9* (définition de l'indice généralisé).** — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel de rang μ et soit $\mathfrak{e}$ une base de $\mathcal{M}$ dans laquelle la dérivation est représentée par la matrice G. L'indice généralisé $\widetilde{\chi}\big(x(D-G), \mathcal{A}^\mu\big)$ (resp. $\widetilde{\chi}\big(x(D-G), \mathcal{H}^{\dagger\mu}\big)$) est indépendant de la base $\mathfrak{e}$. On l'appelle* indice généralisé *de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{H}^\dagger$) et on le note $\widetilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ (resp. $\widetilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{H}^\dagger)$).*

Preuve. — C'est une conséquence facile des propositions 14.4 et 14.8. □

Proposition 14.10. — *Soit $0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$ une suite exacte de* $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$. *Si $\mathcal{N}$ et $\mathcal{Q}$ ont un indice généralisé sur $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{H}^\dagger$) alors $\mathcal{M}$ a un indice généralisé dans $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{H}^\dagger$) qui est la somme de ceux de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{Q}$.*

Preuve. — On complète une base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{N}$ en une base $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ de $\mathcal{M}$. L'additivité de l'indice généralisé se ramène immédiatement à celle de de l'indice ordinaire. □

***Théorème 14.11* (existence de l'indice généralisé).** — *Si un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble $\mathcal{M}$ a un exposant non Liouville, alors il a un indice généralisé dans $\mathcal{A}$ et dans $\mathcal{H}^\dagger$.*

Pour ε assez petit, si la dérivation D est représentée dans une base par la matrice G, on a

$$\widetilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) := \widetilde{\chi}\big(x(D-G), \mathcal{A}^\mu\big) = -\widetilde{\chi}\big(x(D-G), \mathcal{H}^\mu_\varepsilon\big) = -\widetilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{H}^\dagger)$$

et ce nombre est la hauteur (c'est-à-dire l'ordonnée du dernier sommet) du polygone de Newton $\mathrm{New}(\mathcal{M})$.

Preuve. — Grâce à la proposition 14.10, on se ramène au cas où $\mathcal{M}$ est irréductible.

Si $\mathcal{M}$ est de pente nulle, le théorème 12.1 dit que $\mathcal{M} = x^\alpha \mathcal{R}$ avec α nombre non Liouville de $\mathbb{Z}_p$. Dans ce cas, un calcul direct permet de conclure.

Supposons donc que $\mathcal{M}$ n'est pas de pente nulle et donc purement de pente $\lambda > 0$. On a $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho) < \rho$ pour $1 - \varepsilon \leqslant \rho < 1$. En utilisant le théorème 7.5, on trouve un antécédent de Frobenius $\mathcal{N}_\rho$ de $\mathcal{M}_\varepsilon$ au voisinage de ρ tel $\mathrm{Ray}(\mathcal{N}_\rho, \rho) < |\pi|\rho$. Le théorème 6.2 et le fait que l'indice d'un opérateur inversible ne change pas par « petite perturbation » ramène le calcul de l'indice généralisé $\widetilde{\chi}\big(\mathcal{N}_\rho, \mathcal{A}([0, \rho[)\big)$ à celui de l'indice généralisé de la multiplication par un élément non nul a_0 de $\mathcal{A}(]1-\varepsilon, \rho[)$. Celui-ci est donné par la proposition 14.8.

On conclut par un passage à la limite quand ρ tend vers 1 en utilisant la propriété de Mittag-Leffler pour les systèmes projectifs d'espaces métriques à image dense (EGA III, chap. 0, 13.2.4). □

Corollaire 14.12. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble. Les sommets du polygone de Newton de $\mathcal{M}$ sont à coordonnées entières.*

Preuve. — Pour $\lambda > 0$, le module différentiel $\mathrm{Gr}_\lambda(\mathcal{M})$ est purement de pente $\lambda > 0$ donc a un exposant vide et en particulier non Liouville ! Maintenant, la hauteur du coté de pente λ du polygone de Newton de $\mathcal{M}$ s'interprète comme l'indice généralisé dans $\mathcal{A}$ du module différentiel $\mathrm{Gr}_\lambda(\mathcal{M})$. □

Théorème 14.13. — *Si un $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M}$ soluble a un exposant non Liouville, alors il a un indice sur $\mathcal{R}$ et, pour ε suffisamment petit, on a $\chi(\mathcal{M},\mathcal{R}) = \chi\big(\mathcal{M}_\varepsilon, \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big) = 0$.*

Preuve. — D'après la proposition 14.6 et le théorème 14.11, on a, en notant G la matrice qui représente la dérivation D dans une base :

$$\chi\big(x(D-G), \mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu\big) = \widetilde{\chi}\big(x(D-G), \mathcal{A}^\mu\big) + \widetilde{\chi}\big(x(D-G), \mathcal{H}_\varepsilon^\mu\big) = 0. \qquad \square$$

CHAPITRE V
DÉMONSTRATION DU THÉORÈME D'ALGÉBRICITÉ

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{R}$-module différentiel, on munit $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M},\mathcal{M})$ de la structure de $\mathcal{R}$-module différentiel définie en 3.5. Rappelons l'énoncé que nous voulons démontrer

Théorème 1.1. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module libre de rang fini μ à connexion soluble, ayant la propriété* DNL *et tel que* $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}_{>0})$ *a la propriété* NL*. Quitte à faire une extension finie du corps de base K, $\mathcal{M}$ admet un réseau sur $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$-module libre de rang μ) muni d'une connexion prolongeant celle de $\mathcal{M}$ et n'ayant aucune singularité sauf en* 0 *où elle a une singularité méromorphe.*

Pour simplifier l'exposé nous introduisons deux définitions.

Définition 14.14. — On note $\mathrm{MLCSNL}(\mathcal{R})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$ dont les objets vérifient les deux conditions suivantes :

1) L'exposant de $\mathcal{M}$ a des différences non Liouville,

2) L'exposant de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ est non Liouville.

Définition 14.15. — Un $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M}$ est dit *algébrisable* s'il existe une extension finie K' de K et un $\mathcal{A}_{K'}[1/x]$-module différentiel $\mathcal{M}^{\mathrm{alg}}$ tel que $K' \otimes_K \mathcal{M} = \mathcal{R}_{K'} \otimes_{\mathcal{A}_{K'}[1/x]} \mathcal{M}^{\mathrm{alg}}$.

de telle sorte que le le théorème 1.1 se réécrit :

Théorème 1.1-bis. — *Tout objet de* $\mathrm{MLCSNL}(\mathcal{R})$ *est algébrisable.*

15. Réduction au cas irréductible

Nous procédons en plusieurs étapes. La première, qui est l'objet de ce paragraphe, consiste à vérifier que, dans la démonstration du théorème 1.1, on peut supposer que le module différentiel $\mathcal{M}$ satisfait l'hypothèse supplémentaire suivante :

(H) Pour toute extension finie K' de K, $K' \otimes_K \mathcal{M}$ est irréductible dans $\mathrm{MLC}(\mathcal{R}_{K'})$.

Par récurrence sur le rang μ de $\mathcal{M}$, cela résultera du corollaire 15.3 et du lemme 15.4.

Lemme 15.1. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble dont l'exposant a des différences non Liouville. On a $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{>0} \oplus \mathcal{M}^{\leqslant 0}$.*

Preuve. — Il faut montrer que l'extension $0 \longrightarrow \mathcal{M}_{>0} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{\leqslant 0} \longrightarrow 0$ est triviale. Par définition, l'exposant de $\mathcal{M}$ est l'exposant de $\mathcal{M}^{\leqslant 0}$. Celui-ci, qui est de pente nulle, a donc des différences non Liouville. D'après le théorème 12.1, il s'obtient par extensions successives de modules différentiels de la forme $x^\alpha \mathcal{R}$. Par ailleurs, les pentes de $\mathcal{M}_{>0}$ sont strictement positives. Il suffit donc de prouver que toute extension $0 \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow x^\alpha \mathcal{R} \longrightarrow 0$ avec α entier p-adique et $\mathcal{P}$ de pentes supérieures à 0 est triviale. Pour cela, on va montrer que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(x^\alpha \mathcal{R}, \mathcal{P}) = 0$.

Posons $\mathcal{P}^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}, \mathcal{R})$. Les solutions du module différentiel $\mathcal{P}^* \otimes_{\mathcal{R}} x^\alpha \mathcal{R}$ se déduisent facilement de celles de $\mathcal{P}$. On constate en particulier que, pour ρ suffisamment proche de 1, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{P}^* \otimes_{\mathcal{R}} x^\alpha \mathcal{R}, \mathcal{A}_\rho(\rho)) = 0$$

et, a fortiori :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{P}^* \otimes_{\mathcal{R}} x^\alpha \mathcal{R}, \mathcal{R}) = 0.$$

D'autre part, d'après le théorème 14.13, on a :

$$0 = \chi(\mathcal{P}^* \otimes_{\mathcal{R}} x^\alpha \mathcal{R}, \mathcal{R}) = \dim\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{P}^* \otimes_{\mathcal{R}} x^\alpha \mathcal{R}, \mathcal{R})\big) - \dim\big(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{P}^* \otimes_{\mathcal{R}} x^\alpha \mathcal{R}, \mathcal{R})\big).$$

Donc, finalement, comme $\mathcal{P}$ est libre de rang fini sur $\mathcal{R}$:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(x^\alpha \mathcal{R}, \mathcal{P}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{P}^* \otimes_{\mathcal{R}} x^\alpha \mathcal{R}, \mathcal{R}) = 0. \qquad \square$$

Lemme 15.2. — *Soit $0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$ une suite exacte de* $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$. *Si l'exposant de $\mathcal{M}$ a des différences non Liouville (resp. est non Liouville), il en est de même des exposants de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{Q}$.*

Preuve. — Par définition, l'exposant de $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$, $\mathcal{Q}$) est celui de $\mathcal{M}_{>0}$ (resp. $\mathcal{N}_{>0}$, $\mathcal{Q}_{>0}$). Maintenant, la suite $0 \longrightarrow \mathcal{N}_{>0} \longrightarrow \mathcal{M}_{>0} \longrightarrow \mathcal{Q}_{>0} \longrightarrow 0$ est exacte d'après le théorème 9.17. Le lemme est donc une conséquence immédiate de la proposition 11.7. $\square$

Corollaire 15.3. — *Soit $0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$ une suite exacte de* $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$. *Si $\mathcal{M}$ est un objet de* $\mathrm{MLCSNL}(\mathcal{R})$, *il en est de même de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{Q}$.*

Preuve. — Le lemme 15.2 montre que les exposants de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{Q}$ ont des différences non Liouville. Par ailleurs, les modules différentiels $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{N})$ et $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q})$ sont des sous-quotients de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$, le même lemme montre qu'ils ont des exposants non Liouville. $\square$

Lemme 15.4. — *Soit* $0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$ *une suite exacte de* MLCSNL($\mathcal{R}$). *Si* $\mathcal{N}$ *et* $\mathcal{Q}$ *sont algébrisables, il en est de même de* $\mathcal{M}$.

Preuve. — Par définition, quitte à remplacer K par une extension finie, il existe des $\mathcal{A}[1/x]$-modules différentiels $\mathcal{N}'$ et $\mathcal{Q}'$ tels que $\mathcal{N} = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{A}[1/x]} \mathcal{N}'$ et $\mathcal{Q} = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{A}[1/x]} \mathcal{Q}'$.

Toute suite exacte de MLC($\mathcal{A}[1/x]$) donnant, après tensorisation par $\mathcal{R}$, une suite exacte de MLC($\mathcal{R}$), on a un morphisme canonique :

$$\theta : \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}[1/x][D]}(\mathcal{Q}', \mathcal{N}') \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N}). \tag{20}$$

Le lemme dit que cette application est surjective.

Comme $\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N})$ est un sous-objet de $\operatorname{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$, son exposant est non Liouville. En particulier, d'après le théorème 14.13,

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N}) = \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{N}^*, \mathcal{R}) = \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N}), \mathcal{R})$$

est un K-espace vectoriel de dimension finie.

Maintenant, θ est le morphisme en degré 1 donné par le morphisme des complexes associés à une présentation de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}[1/x]}(\mathcal{Q}', \mathcal{N}')$ et de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N})$ (voir (4))

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}[1/x]^\mu & \longrightarrow & \mathcal{A}[1/x]^\mu & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{R}^\mu & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{R}^\mu & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Le morphisme δ est continu pour la topologie de type $\mathcal{LF}$ de $\mathcal{R}^\mu$. Son conoyau est de dimension finie. D'après le théorème des homomorphismes pour les espaces de type $\mathcal{LF}$ de Grothendieck [**23**], son image est un sous-espace fermé. Autrement dit, la topologie qu'il induit sur son conoyau $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N}), \mathcal{R})$ est séparée. Par ailleurs, $\mathcal{A}[1/x]$ est, pour tout $\varepsilon > 0$, dense dans $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$ donc dense dans $\mathcal{R}$. Il en résulte que l'image de θ est un sous-espace partout dense de l'espace vectoriel de dimension finie séparé $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N}), \mathcal{R})$. C'est donc l'espace tout entier. □

16. Réduction au cas complètement irréductible

Cette réduction ne présente pas de réelles difficultés

Nous commençons par préciser quelle est la partie de pente nulle du module différentiel des endomorphismes.

Proposition 16.1. — *Soit* $\mathcal{M}$ *un module différentiel de* MLCSNL($\mathcal{R}$) *de rang* μ *satisfaisant l'hypothèse* ***(H)***.
1) *On a* $\operatorname{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}) = K\ \mathrm{Id}$.
2) *Il existe un entier* d *premier à* p *et qui divise* μ *pour lequel* $\{0, \frac{1}{d}, \frac{2}{d}, \ldots, \frac{d-1}{d}\}$ *est un représentant de l'exposant de* $\operatorname{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$. *De plus, on a* $\operatorname{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leqslant 0} = \mathcal{R}[u]$ *où* u *est un* $\mathcal{R}$*-automorphisme de* $\mathcal{M}$ *tel que* $xD(u) = \frac{1}{d}u$ *et* $u^d = cx\,\mathrm{Id}$ *avec* $c \neq 0$ *dans* K.

Preuve. — Considérons un élément non nul u de $\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$. Son polynôme unitaire minimal est à coefficients dans K. Soit λ une racine de P dans une extension finie de K. Comme $u - \lambda\,\mathrm{Id}$ est, par construction, non inversible, il en résulte que $u = \lambda\,\mathrm{Id}$. Le point 1) est bien démontré.

Par hypothèse, l'exposant de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ a des différences non Liouville. D'après le lemme 15.1, on peut considérer $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leqslant 0}$ comme un sous module différentiel de $\mathcal{M}$. D'après le théorème 12.1, un nombre α est composante de l'exposant si et seulement s'il existe u non nul dans $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ tel que $x\,D(u) = \alpha\,u$.

On vérifie que les multiplicités des composantes de l'exposant sont égale à un puis que ces composantes forment un sous-groupe fini de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On en déduit que $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leqslant 0}$ possède une base de la forme $\{\mathrm{Id}, u, u^2, \ldots, u^{d-1}\}$ où $u := u_{1/d}$ est un endomorphisme inversible tel que $xD(u) = \frac{1}{d}\,u$.

En particulier on a $xD(u^d) = u^d$. On en déduit $u^d = cx\,\mathrm{Id}$ (avec $c \neq 0$) puis $\det(u)^d = c^\mu x^\mu$. Mais, $\det(u)$ appartenant à $\mathcal{R}$, ceci implique que d divise μ. □

Dans le théorème d'algébrisation, on doit autoriser une extension du corps des constantes mais il n'y a pas besoin de « ramifier » la variable. Cela va résulter du lemme 16.4 ci-dessous.

Définition 16.2. — Un module différentiel $\mathcal{M}$ de $\mathrm{MLCSNL}(\mathcal{R})$, est dit *complètement irréductible* si la composante de pente nulle $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leqslant 0}$ de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ est de rang 1.

Si $\mathcal{M}$ est décomposable, $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leqslant 0}$ contient les projections sur les sous-modules stables par dérivation. Il en résulte qu'un module différentiel complètement irréductible est irréductible.

Soit d un entier. Nous considérons l'extension $\mathcal{R}[y]$ où $y^d = x$. C'est une K-algèbre que l'on munit de la dérivation D, prolongeant celle de $\mathcal{R}$, définie par $D(y) = \frac{1}{d}\,y^{1-d}$. On obtient ainsi un plongement de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}[y] = \mathcal{R}[y][D]$. On peut aussi voir $\mathcal{R}[y]$ comme un $\mathcal{R}$-module différentiel de rang d, de base $1, y, \ldots, y^{d-1}$.

Pour un $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M}$, on note $\theta^*(\mathcal{M})$ le $\mathcal{R}[y]$-module différentiel obtenu par extension des scalaires de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}[y]$. En tant que $\mathcal{R}[y]$-module, on a $\theta^*(\mathcal{M}) = \mathcal{R}[y] \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{M}$. En particulier le rang de $\theta^*(\mathcal{M})$ est celui de $\mathcal{M}$.

Inversement, à un $\mathcal{R}[y]$-module différentiel $\mathcal{N}$, nous associons le $\mathcal{R}$-module différentiel $\theta_*(\mathcal{N})$ obtenu par restriction des scalaires de $\mathcal{D}[y]$ à $\mathcal{D}$. Le rang de $\theta_*(\mathcal{N})$ est d fois celui de $\mathcal{N}$. On a $\theta_*\theta^*(\mathcal{M}) = \mathcal{R}[y] \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{M} = \mathcal{M} \oplus x^{1/d}\mathcal{M} \oplus \cdots \oplus x^{(d-1)/d}\mathcal{M}$.

Lemme 16.3. — *Les notations sont celles de la proposition 16.1. Quitte éventuellement à faire une extension finie du corps K, il existe dans $\theta^*(\mathcal{M})$ un sous $\mathcal{R}[y]$-module différentiel $\mathcal{N}$, de rang μ/d, complètement irréductible tel que $\mathcal{M} = \theta_*(\mathcal{N})$. En particulier, si $\mathcal{N}$ est algébrisable, il en est de même de $\mathcal{M}$.*

Preuve. — Le polynôme minimal de u sur $\mathcal{F}$ est $u^d - c\,x$. Supposons que K soit suffisamment gros pour que $c = \gamma^d$ avec γ dans K. Les valeurs propres de u sont

donc les $\zeta\gamma\, y$ pour $\zeta^d = 1$. Elles ont toutes le même ordre μ/d (elles s'échangent par l'automorphisme $y \mapsto \zeta y$). L'endomorphisme $u - \gamma y$ a un noyau $\mathcal{N}$ de rang μ/d qui est un sous $\mathcal{R}[y]$-module différentiel de $\theta^*(\mathcal{M})$.

On vérifie que u réalise un morphisme de $\mathcal{M}$ dans $x^{1/d}\mathcal{M}$ d'où il résulte que $\theta_*\theta^*(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^d$. Mais $\theta_*(\mathcal{N})$ est un sous module différentiel de rang μ de $\theta_*\theta^*(\mathcal{M})$. Comme $\mathcal{M}$ est irréductible, l'unicité de la décomposition de Jordan-Hölder montre que $\theta_*(\mathcal{N}) = \mathcal{M}$. Par ailleurs, si $\mathcal{N}$ était réductible, il en serait de même de $\theta_*(\mathcal{N})$ (la réciproque est fausse). Donc $\mathcal{N}$ est irréductible.

Quitte à changer la dérivation $D = d/dx$ en $d\, y^{d-1}\, D = d/dy$, $\mathcal{R}[y]$ est isomorphe à $\mathcal{R}$. D'après la définition même de l'exposant 11.3, pour un module différentiel $\mathcal{Q}$ de pente nulle, l'exposant de $\theta^*(\mathcal{Q})$, vu comme $\mathcal{R}$-module différentiel par l'isomorphisme précédent, est d fois celui de $\mathcal{Q}$. L'exposant de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}[y]}\big(\theta^*(\mathcal{M})\big)$ est donc $\{0, \dots, 0\}$ (0 répété d fois). Comme $\mathrm{End}_{\mathcal{R}[y]}(\mathcal{N})$ est un sous quotient de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}[y]}\big(\theta^*(\mathcal{M})\big)$, son exposant ne comprend que des 0. La proposition 16.1 montre que $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{R}$-module différentiel complètement irréductible.

Si le module différentiel $\mathcal{N}$ est algébrisable, il possède une base $\mathfrak{e}$ dans laquelle la dérivation est représentée par une matrice G de $\mathrm{Mat}(\frac{\mu}{d}, \mathcal{A}[\frac{1}{x}, y])$. En considérant la base $\{y^i\mathfrak{e}\}_{0\leqslant i<d}$ de $\theta_*(\mathcal{N})$, on constate que $\mathcal{M} = \theta_*(\mathcal{N})$ est algébrisable. □

Corollaire 16.4. — *Pour démontrer le théorème d'algébrisation, il suffit de vérifier que tout module différentiel complètement irréductible dans* $\mathrm{MLCSNL}\big(\mathcal{R}\big)$ *est algébrisable.*

Preuve. — C'est une conséquence immédiate des lemmes 16.3 et 15.4. Notons que, l'identité étant toujours dans la composante de pente nulle de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$, un module complètement irréductible est irréductible. □

17. Le cas complètement irréductible

Contrairement à ce qui se passe dans le cas complexe (théorème de Turrittin), les modules différentiels p-adiques complètement irréductibles (c'est-à-dire qui le restent après ramification de la variable) ne sont pas, en général, de rang un. Les techniques que nous utilisons pour les étudier ont des analogues dans le cas complexe mais sont alors sans objet.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel complètement irréductible, $\mathfrak{e}$ une base de $\mathcal{M}$ et G la matrice représentant la dérivation D dans cette base. La base $\mathfrak{e}$ fournit une base « canonique » de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$, c'est-à-dire un isomorphisme i de $\mathcal{R}$-modules différentiels entre $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ muni de la dérivation D et $\mathrm{Mat}(\mu, \mathcal{R})$ muni de la dérivation ∇ définie par $\nabla(X) = D(X) - G\,X + X\,G$.

Nous aurons besoin de trois lemmes. Le premier précise les matrices qui ont une « primitive », le deuxième donne une majoration de cette primitive et le troisième contient la partie combinatoire de la démonstration.

Lemme 17.1. — *Soit ε suffisamment petit. Pour toute matrice X de $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big)$ dont le résidu de la trace est nul, il existe une matrice Y de $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big)$ telle que $\nabla(Y) = X$.*

Preuve. — On a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}), \mathcal{R}\big) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leqslant 0}, \mathcal{R}\big) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{R}, \mathcal{R}\big) = K$$

D'après le théorème 14.13, l'indice de $\mathrm{End}_{\mathcal{A}(I_\varepsilon)}(\mathcal{M}_\varepsilon)$ est nul pour ε suffisamment petit. On a donc :

$$\dim_K \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}(\mathcal{I}_\varepsilon)}\big(\mathrm{End}_{\mathcal{A}(I_\varepsilon)}(\mathcal{M}_\varepsilon), \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big) = \dim_K \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(I_\varepsilon)}\big(\mathrm{End}_{\mathcal{A}(I_\varepsilon)}(\mathcal{M}_\varepsilon), \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big) = 1$$

Comme le résidu de la trace d'une matrice de la forme $\nabla(Y) = D(Y) - GY + YG$ est évidemment nul, l'image de l'opérateur ∇, qui est de codimension 1 dans $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big)$ d'après le calcul précédent, est exactement l'ensemble des matrices dont le résidu de la trace est nul. □

Lemme 17.2. — *Pour ε suffisamment petit et pour tout intervalle fermé J contenu dans I_ε, il existe un nombre réel M_J tel que, pour toute matrice X de $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big)$ de trace nulle, on ait $\|X\|_J \leqslant M_J \|\nabla(X)\|_J$.*

Preuve. — On remarque tout d'abord que $\mathrm{tr}\big(\nabla(X)\big) = \mathrm{tr}\big(D(X)\big) = D\big(\mathrm{tr}(X)\big)$. Autrement dit, l'application $\mathrm{tr} \circ i$ de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{R}$ est horizontale. Comme $\mathcal{R}$ est évidemment un $\mathcal{R}$-module différentiel de pente nulle, on a $\mathcal{R}_{>0} = 0$. Par suite, $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})_{>0}$ est contenu dans le noyau de $\mathrm{tr} \circ i$. Par hypothèse, $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leqslant 0}$ est de rang 1 donc $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})_{>0}$ est de rang $\mu^2 - 1$ comme $\ker(\mathrm{tr} \circ i)$. Ces deux $\mathcal{R}$-modules différentiels sont donc égaux.

Maintenant, $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ est son propre dual et il en est de même pour $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})_{>0}$. Le lemme est alors une conséquence du corollaire 9.12. □

Lemme 17.3. — *Soit A une $\mathbb{Q}$-algèbre non commutative unitaire contenant des éléments x_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ et un élément C. On suppose que l'algèbre A est munie d'une $\mathbb{Q}$-dérivation ∇ et d'une norme d'algèbre ultramétrique $\|\cdot\|$ vérifiant, pour $1 \leqslant i \leqslant k$:*

$$\nabla(x_i) = x_{i-1}\, C \qquad \|i!\, x_i\| \leqslant c^i$$

pour une constante c et $x_0 = 1$. Alors, il existe un élément P_k dans la sous-algèbre engendrée par les x_i et un élément R_k dans la sous-algèbre engendrée par les commutateurs tels que :

$$x_k\, C = \nabla(P_k) + R_k \qquad \|(k+1)!\, P_k\| \leqslant c^{k+1} \qquad \|(k+1)!\, R_k\| \leqslant c^k\, \|C\|$$

Preuve. — Si l'algèbre A est commutative, on constate que $x_i = x_1^i + Q_i(x_1)$ où Q_i est un polynôme de degré au plus $i-2$ sur l'anneau des constantes de A. Il suffit de prendre $P_k = x_1^{k+1} + Q_{k+1}(x_1)$ avec $Q'_{k+1} = Q_k$ (et bien sur $R_k = 0$). Le passage au cas non commutatif est essentiellement un exercice de combinatoire sur les mots en

les x_i. Les majorations reposent sur le fait bien connu que, pour tous entiers s et n, $(ns)!$ est divisible par $s(n!)^s$. □

Fin de la preuve du théorème. — Pour N entier, on définit la projection γ_N de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{A}[1/x]$ par :

$$\gamma_N(x^s) = \begin{cases} 0 & \text{si } |s|_\infty > N \\ x^s & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme le résidu de la matrice $C = G - \gamma_N(G)$ est nul, d'après le lemme 17.1, il existe une matrice X_1 dans $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big)$ telle que $\Delta(X_1) = C$. On a $C = w\, \boldsymbol{I} + C_0$ où C_0 est une matrice de trace nulle si bien que $X_1 = W\, \boldsymbol{I} + \Delta^{-1}(C_0)$ où W est une primitive de w. On en déduit que $\|X_1\|_J$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

On choisit $N > 1$ suffisamment grand pour que

$$\|G - \gamma_N(G)\|_J < |\pi|\, \frac{1}{M_J} \qquad \|X_1\|_J < |\pi|.$$

Le lemme 17.3, appliqué à l'algèbre $A = \mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big)$ munie de la norme $\|\cdot\|_J$ et au nombre $c = \max\{M_J\, \|C\|_J, \|X_1\|_J\} < |\pi|$, permet de construire par récurrence, une suite de matrices X_k vérifiant :

$$X_0 = \boldsymbol{I} \qquad \nabla(X_k) = X_{k-1}\, C.$$

Avec les notations de ce lemme, puisque la matrice R_k est de trace nulle, on trouve en utilisant le lemme 17.2 :

$$\begin{aligned} \|X_{k+1}\|_J = \|P_k + \nabla^{-1}(R_k)\|_J &\leqslant \max\big(\|P_k\|_J, M_J \|(R_k)\|_J\big) \\ &\leqslant \frac{1}{|(k+1)!|} \max\big(c^{k+1}, M_J\, c^k \|C\|_J\big) \leqslant \frac{1}{|(k+1)!|} c^{k+1} \leqslant \left(\frac{c}{|\pi|}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

En particulier, la suite X_k tend vers 0 uniformément sur J et $\|X_k\|_J < 1$ pour $k > 0$. Donc la matrice

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} X_k$$

converge dans $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}(J)\big)$ et, vérifiant $\|H - \boldsymbol{I}\,\|_J < 1$, appartient à $\mathrm{Gl}\big(\mu, \mathcal{A}(J)\big)$. On trouve :

$$\nabla(H) = \sum_{k=0}^{\infty} \nabla(X_k) = \sum_{k=0}^{\infty} X_{k-1}\, C = H\, C.$$

Il vient :

$$D(H) = \nabla(H) + GH - HG = H\,(G - \gamma_N(G)) + GH - HG = G\,H - H\,\gamma_N(G)$$

On utilise alors le théorème de Birkhoff 6.5-2) : si $J = [\alpha, \beta]$ il existe une matrice L de $\mathrm{Gl}\big(\mu, \mathcal{A}([\alpha, \infty[)\big)$ et une matrice M de $\mathrm{Gl}\big(\mu, \mathcal{A}([0, \beta])\big)$ telles que $H = LM$. Comme les coefficients de la matrice $\gamma_N(G)$ appartiennent à $K[x, 1/x] \subset \mathcal{A}([0, \beta])[1/x]$ et ceux de la matrice G à $\mathcal{A}(I_\varepsilon) \subset \mathcal{A}([\alpha, 1[)$.

Dans la base $\mathfrak{f} = L\,\mathfrak{e}$ de $\mathcal{M}$, la dérivation est représentée par la matrice

$$F = -L^{-1}\big(D(L) - GL\big) = \big(D(M) + M\gamma_N(G)\big)\, M^{-1}$$

qui appartient à $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}([\alpha, 1[)\big) \cap \mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}([0, \beta])[1/x]\big) = \mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}[1/x]\big)$.

Index des notations

$A[D]$, 133
$\mathcal{A}$, 132
$\mathcal{A}(I)$, 132
$\mathcal{A}_\rho(r)$, 136
$\mathcal{B}_\rho(r)$, 136
$\mathcal{C}(I)$, 132, 135
$D(a,r)$, 136
$D = d/dx$, 132, 135
$\mathcal{D}(I) = \mathcal{A}(I)[D]$, 133
$\mathcal{D} = \mathcal{R}[D]$, 133
$\mathcal{D}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$, 128
$E_1^\dagger$, 167
$E_\rho^\dagger$, 139
E_ρ, 135
$\mathfrak{Exp}(L)$, 168
$\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$, 164, 167
$\mathcal{E}$, 130
$\mathcal{E}^\dagger$, 130
$\mathfrak{E}_\mu$, 161
F, 140
$\mathcal{F}(I)$, 141
G, 136
G_s, 133, 136
$\mathrm{Hom}_A(\mathcal{M},\mathcal{N})$, 134
$\mathcal{H}^\dagger$, 168
$\mathcal{H}_\varepsilon$, 170
I, 132
$I_\varepsilon =]1-\varepsilon, 1[$, 132
$\boldsymbol{I}$ (matrice identité), 133
$\mathrm{Irr}(\mathcal{M}, p)$, 126
K, 132
$\widehat{K}$, 136
k, 132
MLC, 133
$\mathrm{MLC}(\mathcal{O}_{U/K})$, 128
$\mathrm{MLC}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$, 128
$\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$, 130, 151
$\mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{U/K})$, 128
$\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$, 150
$\mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$, 128
$\mathrm{MLCSNL}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$, 128
$\mathrm{MLCSNL}(\mathcal{R})$, 173
$\mathcal{M}_x^\dagger$, 128
$\mathcal{M}^{\leqslant\lambda}$, 157
$\mathcal{M}_\varepsilon$, 147
$\mathcal{M}_{>\lambda}$, 155
$\mathrm{New}(\mathcal{M})$, 158
$\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K}$, 128
$\mathrm{ord}(g)$, 171
$\mathrm{pt}(\mathcal{M})$, 150
p, 132
$\mathbb{Q}_p$, 126
$\mathfrak{R}$, 129
$\mathcal{R}$, 132
$\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)$, 136, 150
$\mathrm{Ray}(\mathcal{M},1^-)$, 150
$\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{U/K})$, 129
$\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{U/K}, G^{\mathrm{NL}})$, 129
$\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$, 129
$\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K}, G^{\mathrm{NL}})$, 129
$\mathrm{Rob}(\mathcal{R})$, 161
$\mathrm{Rob}\big(\mathcal{A}(I)\big)$, 161
$\mathcal{T}_\lambda$, 152
$\mathcal{T}_{\lambda,Q}$, 152
V, 132
$\mathcal{X}^\dagger$, 128
$Y_G(x,y)$, 137
$\alpha^{(h)}$, 160
$\widetilde{\Delta} \oplus \widetilde{\Delta}'$, 164
Γ_h, 162
π, 132, 136
Ω, 136
$\chi(\mathcal{M}, B)$, 134
$\widetilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, 172
$\widetilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{H}^\dagger)$, 172
$\widetilde{\chi}(u, \mathcal{A}^\mu)$, 170
$\widetilde{\chi}(u, \mathcal{H}_\varepsilon^\mu)$, 170
ζ^Δ, 162
$|\cdot|$, 132, 160
$|\cdot|_\infty$, 160
$|\cdot|_{\rho,r}$, 138
$|\cdot|_\rho$, 135
$\|\cdot\|$, 135
$\|\cdot\|_{\lambda,\rho}$, 152
$\|\cdot\|_{\mathfrak{e},\rho}$, 136
$\|\cdot\|_{\mathrm{Sp},\mathfrak{e},\rho}$, 136
$\|\cdot\|_{\mathrm{Sp},\rho}$, 135
$\overset{\mathfrak{E}}{\sim}$, 160

Index terminologique

Anneau d'Amice, 130
Antécédent
  faible, 152
  fort, 152
Application horizontale, 134
Base cyclique, 140
c-compact (espace topologique), 170
c-compacte (application), 170
Dwork-Robba
  majorations explicites, 162
  théorème de décomposition, 138
    cas superadmissible, 139
Élément analytique, 142
  superadmissible, 139
Exposant
  à différences non Liouville, 161
  d'un module différentiel quotient, 165
  d'un sous-module différentiel, 165
  ensemble des —s, 160
  non Liouville, 161
  rationalité de l'—, 165
  d'un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel
    I fermé, 164
    I ouvert, 164
  d'un $\mathcal{R}$-module différentiel
    de pente nulle, 164
    soluble, 167
  d'un opérateur différentiel de $K[x][D]$, 168
Fonction analytique, 136
  bornée, 136
Frobenius (structure de), 130, 147, 149, 151, 152
Indice
  d'un opérateur différentiel injectif, 139
  d'un polynôme différentiel, 168
  d'un module différentiel, 134, 172
Indice généralisé
  d'un opérateur différentiel, 170
  d'un module différentiel, 172
Liouville
  exposant à différences non —, 161
  exposant non —, 161
  nombre de, 160
logarithmiquement (avoir — une propriété), 149
Majorations explicites de Dwork-Robba, 162
Matrice représentant la dérivation, 133
Module différentiel, 133
  algébrisable, 173
  complètement irréductible, 176
  de pente nulle, 161
  de pentes supérieures à λ, 155
  de Robba, 161
  pentes d'un —, 158
  purement de pente β, 155
  régulier, 161
  soluble, 134, 150
Monodromie p-adique, 167
Newton (polygône de), 126
Nombre de Liouville, 160
Norme spectrale, 136
Pente
  plus grande —, 150
  purement de — β, 155
  supérieure à λ, 155
Pentes d'un module différentiel, 158
Point
  analytique, 135
  générique, 135, 136
  ordinaire, 143
Polygône de Newton, 158
  p-adique, 126
Résolvante, 137
Rayon d'un point analytique, 136
Rayon de convergence, 136
  fonction —, 149
Robba
  module différentiel de, 161
  théorème de l'indice de, 139, 159, 168, 169
Singularité
  apparente, 141
  régulière, 143
soluble (Module différentiel), 134
Structure de Frobenius, 130, 151
  en 0, 169
  faible, 147
  forte, 152
Vecteur cyclique, 140

Références

[1] V.G. Berkovich.– *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields.* Mathematical surveys and monographs, 33, A.M.S. Providence, Rodhe Island (1990)

[2] F. Baldassarri, B. Chiarellotto.– Algebraic versus rigid cohomology with logarithmic coefficients. *Barsotti Memorial Symposium* Perspectives in Math. 15, Academic Press (1994) 11-50.

[3] E. Bombieri, S. Sperber.– On the p-adic analycity of solutions of linear differential equations. *Illinois J. of Math.* 26 (1982) 10-18.

[4] G. Christol.– Décomposition des matrices en facteurs singuliers. Application aux équations différentielles. *Groupe d'étude d'analyse ultramétrique* 7-8 (1979/81) n°5, 17p.

[5] G. Christol.– Systèmes différentiels linéaires p-adiques : structure de Frobenius faible. *Bull. de la S.M.F.* 109 (1981) 83-122.

[6] G. Christol.– *Modules Différentiels et Équations Différentielles $p-$adiques*. Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics n°66 Kingston (1983).

[7] G. Christol.– Un théorème de transfert pour les disques singuliers réguliers. *Astérisque* n°119/120 (*Cohomologie p-adique*) (1984) 151-168.

[8] G. Christol, B. Dwork.– Effective p-adic bounds at regular singular points. *Duke Math. J.* 62 (1991) 689-720.

[9] G. Christol, B. Dwork.– Modules différentiels sur des couronnes. *Ann. Inst. Fourier* 44 (1994) 663-701.

[10] G. Christol, Z. Mebkhout.– Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques I. *Ann. Inst. Fourier* 43 (1993) 1545-1574.

[11] G. Christol, Z. Mebkhout.– Topological vector spaces and index theory. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 2 (1995) 93-98.

[12] G. Christol, Z. Mebkhout.– Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II. *Annals of Math.* 146 (1997) 345-410.

[13] G. Christol, Z. Mebkhout.– Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques III. *Annals of Math.* 151 (2000) 385-457.

[14] G. Christol, Z. Mebkhout.– Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques IV. *Invent. Math.* 143 (2001) 629-672.

[15] D. Clark.– A note on the p-adic convergence of solution of linear differential equation. *Proc. Amer. Math. Soc.* 17 (1966) 262-267.

[16] N. De Grande-De Kimpe, J. Martinez-Maurica.– Fredholm Theory for p-adic locally convex spaces. *Ann. Math. pura et applicata* 160 (1991) 223-234.

[17] P. Deligne.– *Equations différentielles à points singuliers réguliers*. Lecture note in Math. 163 (1970).

[18] B. Dwork.– On p-adic differential equation II. *Annals of Math.* 98 (1973) 366-376.

[19] B. Dwork.– On exponents of p-adic differential modules. *J. reine angew. Math.* 484 (1997) 85-126.

[20] B. Dwork, P. Robba.– On ordinary linear differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 231 (1977) 1-46.

[21] B. Dwork, P. Robba.– Effective p-adic bounds for solutions of homogeneous linear differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 259 (1980) 559-577.

[22] M. Fontaine.– Représentations p-adiques des corps locaux. *Grothendieck Feschrift II*, Progress in Math. 87 (1990) 249-309.

[23] A. Grothendieck.– *Espaces vectoriels topologiques*, Sao Paulo (1954).

[24] A. Grothendieck .– Crystals and De Rham Cohomology of schemes. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland Company (1968) 306-358.

[25] A. Grothendieck .– Groupes de Barsotti-Tate et Cristaux *Actes, Congrès Inter. Math.* Tome 1 (1970) 431-436, Gauthiers-Villards, Paris 1971.

[26] N. Katz.– Nilpotent connexions and the monodromy theorem : applications of a result of Turrittin, *Publ. Math. I.H.E.S.* 39 (1970) 175-232.

[27] N. Katz.– Travaux de Dwork, *Sém. Bourbaki.* 24 (1971/72) n°409 34p.

[28] M. Lazard.– Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet. *Publ. Math. I.H.E.S.* 14 (1962) 47-75.

[29] Z. Mebkhout.– Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière. *Am. J. Math.* 119 (1997) 1027-1081.

[30] D. Meredith.– Weak formal schemes, *Nagoya Math. J.* 45 (1972), 1-38.

[31] P. Robba.– On the index of p-adic differential operators I. *Annals of Math.* 101 (1975) 280-316.

[32] P. Robba.– On the index of p-adic differential operators II. *Duke Math. J.* 43 (1976) 19-31.

[33] P. Robba.– Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels. Application à la réduction formelle des équations différentielles. *L'enseignement mathématiques,* 26 (1980) 279-311.

[34] P. Robba.– On the index of p-adic differential operators III, applications to twisted exponential sums. *Astérisque* 119-120 (1984) 191-266.

[35] P. Robba.– Indice d'un opérateur différentiel p-adique IV : Cas des systèmes. Mesure de l'irrégularité dans un disque. *Ann. Inst. Fourier* 35 (1985) 13-55.

[36] P. Robba.– Conjectures sur les équations différentielles p-adiques linéaires. *Groupe d'Étude d'Analyse Ultramétrique.* 12ème année (1984-85) n°2, 8p.

[37] P. T. Young.– Radii of convergence and index for p-adic differential operators. *Trans. Amer. Math. Soc.* 333 (1992) 769-785.

G. Christol, Université Paris 6, case 247, 4 place Jussieu, 75252 Paris cedex 05
E-mail : christol@math.jussieu.fr • *Url :* http://riemann.math.jussieu.fr/~christol/
Z. Mebkhout, Université Paris 7, 2 place Jussieu, 75251 Paris cedex 05
E-mail : mebkhout@math.jussieu.fr • *Url :* http://riemann.math.jussieu.fr/~mebkhout/

Astérisque
279, 2002, p. 185–270

ALMOST ÉTALE EXTENSIONS

by

Gerd Faltings

***Abstract.* —** The theory of almost étale coverings allows to compare crystalline and p-adic étale cohomology, for schemes over a p-adic discrete valuation ring. Using Frobenius the main technical result (a purity theorem) is reproved and extended to all toroidal singularities. As a consequence one obtains Tsuji's comparison theorem for schemes with such type of singularities, even for cohomology with coefficients in suitable local systems. On the way we have to establish some basic results on finiteness of crystalline cohomology with such coefficients.

0. Introduction

The theory of almost étale coverings goes back to Tate for the case of discrete valuation rings. The higher dimensional theory has been invented by the author, and used to prove conjectures about Hodge-Tate and crystalline structures on the étale cohomology of varieties over p-adic fields. The main purpose of these notes is to extend the theory to cover toroidal singularities, especially all schemes with semistable reduction. This is possible because we have found a new method of proof for the main technical result, the purity theorem. This new method makes heavy use of Frobenius and of toroidal geometry. After starting and proving the new purity theorem we study duality, first local and then global. For the globalization we need a topos $\mathcal{X}$ which (X a scheme or an algebraic space over a p-adic discrete valuation ring V, X_K its generic fibre) is an étale localization (in X) of the topos of locally constant sheaves on X_K. Thus its cohomology (or better the direct images to the étale topos of X) is Galois-cohomology. Our previous local theory applies to "coherent sheaves" on this topos, and they satisfy finiteness, Künneth and Poincaré-duality like any decent theory. However for this we have to work in the almost category, that is we divide by the subcategory of sheaves annihilated by any positive (fractional) power of p. A

2000 *Mathematics Subject Classification.* — 14F30.
***Key words and phrases.* —** Crystalline cohomology, p-adic étale cohomology.

© Astérisque 279, SMF 2002

more systematic study of almost mathematics can be found in the recent preprint [GR] by O. Gabber and L. Ramero.

It is quite remarkable that one can still apply the Artin-Schreier exact sequence to derive from the results for "discrete" coefficients, like $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$. Namely for these coefficients one cannot use the almost category. However at one key turn almost invariants under Frobenius coincides with real invariants. Let us also mention that we make again heavy use of Frobenius (now on the coefficients) and Fontaine's construction of rings $A_{\mathrm{inf}}(R)$. Finally we show that the theory with discrete coefficients gives étale cohomology of the generic fibre X_K. For this we have to compare characteristic classes or better Gysin maps. For regular embeddings one reduces to codimension one and an explicit calculation of local direct images. The latter replaces a more global (and less transparent) argument in [Fa 3]. In general one uses toroidal modifications to make embeddings regular. That is possible for the diagonal was a great surprise for the author.

At the end we explain how to derive comparison maps to crystalline cohomology. However this is only sketched as all these ideas have already been presented in a number of papers ([Fa 3], [Fa 5], [Fa 6], [Fa 7], so that everybody interested in the matter can learn it there. We also add some (a little bit) incomplete results about cohomology of isocrystals, which we could not find in the literature.

All in all this suffices to prove the C_{st}-conjecture of Fontaine-Jansen. This had been done previously by T. Tsuji ([Ts]). However we can also treat the case of non-constant coefficients where some new phenomena occur. Anyway the author profited from his participation in the p-adic year at Institut Poincaré in Paris, first by giving lectures on a preliminary version and then by learning about T. Tsuji's technique. I have to thank the referee who found many mistakes and made an enormous number of suggestions for improvements.

1. Almost-Mathematics

Let $\overline{V}$ denote a (commutative with unit) ring together with a sequence of principal ideals $\mathfrak{m}_\alpha \subseteq \overline{V}$ parametrized by positive elements $\alpha \in \Lambda^+$, where $\Lambda \subseteq \mathbb{Q}$ denotes a subgroup dense in $\mathbb{R}$. Denote by π a generator of $\mathfrak{m}_1$, and π^α a generator of $\mathfrak{m}_\alpha$. Assume furthermore that $\pi^\alpha\pi^\beta = \text{unit} \cdot \pi^{\alpha+\beta}$, and that π^α is not a zero-divisor.

Examples

a) $\overline{V} = \mathbb{Z}_p =$ integral closure of $\mathbb{Z}_p$ in $\overline{\mathbb{Q}}_p$, $\mathfrak{m}_\alpha =$ elements of valuation $\geqslant \alpha$, $\pi = p$ ($\Lambda = \mathbb{Q}$).

b) Consider $R = \varprojlim(\overline{\mathbb{Z}}_p/p\overline{\mathbb{Z}}_p, \mathrm{Frobenius})$, $\overline{V} = W(R)$,

$$\pi = [\underline{p}, 0, \ldots, 0] \in W(R),$$

$\underline{p} = \varprojlim p^{1/p^n} \in R$, $\Lambda = \mathbb{Z}[1/p]$, $\pi^\alpha =$ the obvious element.

If $\mathfrak{m} = \bigcup_{\alpha>0} \mathfrak{m}_\alpha$, then a $\overline{V}$-module is almost zero if it is annihilated by $\mathfrak{m}$. Denote this by $M \approx 0$. Assume R is a $\overline{V}$-algebra and M an R-module.

1. Definition. — M is almost projective if $\mathrm{Ext}^i_R(M,N) \approx 0$, all R-modules N and all $i > 0$ (or only $i = 1$)
M is almost flat if $\mathrm{Tor}^R_i(M,N) \approx 0$, all R-modules N and all $i > 0$ (or only $i = 1$)
M is almost finitely generated if for each $\alpha > 0, \alpha \in \Lambda$, there exists a finitely generated R-module N and a π^α-isomorphism $\psi_\alpha : N \to M$ (i.e., there exists $\phi_\alpha : M \to N$ with $\phi_\alpha \circ \psi_\alpha = \pi^\alpha \cdot \mathrm{id}_N$, $\psi_\alpha \circ \phi_\alpha = \pi^{\alpha_0} \circ \mathrm{id}_M$).
M is almost finitely presented: dito with N finitely presented.

2. Remarks

a) P almost projective
$\Leftrightarrow$ for all surjections $f : M \to N$ and maps $g : P \to N$, $\pi^\alpha \cdot g$ factors through f ($\alpha > 0$, $\alpha \in \Lambda$)
$\Leftrightarrow$ all $\alpha > 0$, $\alpha \in \Lambda$, there exists a free R-module L and maps $L \xrightarrow{g} P \xrightarrow{f} L$ with $g \circ f = \pi^\alpha \cdot \mathrm{id}_p$.

b) If P is almost projective and almost finitely generated, then P is almost finitely presented. Then also $P^* = \mathrm{Hom}_R(P,R), P \otimes_R P, \Lambda^i P$ etc. are almost finitely generated projective. Furthermore there is an almost isomorphism $P \otimes_R P^* \approx \mathrm{End}_R(P)$, and thus a trace-map $\mathrm{tr} : \mathfrak{m} \otimes_R \mathrm{End}_R(P) \to R$, or equivalently $\mathrm{End}_R(P) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}, R)$. Thus for $f \in \mathrm{End}_R(P)$ we can define a power-series

$$\det(1 + Tf) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{tr}(\Lambda^i f) \cdot T^i \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}, R)[[T]].$$

One checks that $\mathrm{Hom}(\mathfrak{m}, R)$ is a ring

$$f \circ g(\pi^{\alpha+\beta}) = f(\pi^\alpha) \cdot g(\pi^\beta))$$

and that

$$\det(1 + Tf)\det(1 + Tg) = \det(1 + T(f + g + Tfg))(= \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{tr}(\Lambda^i(f + g + Tfg)) \cdot T^i$$

We say that P has rank $\leqslant r$ if $\Lambda^{r+1} P \approx 0$. Then letting $e \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}, R)$ denote the coefficient of T^r in $\det(1 + T \cdot \mathrm{id}_p)$, one checks that $e = e^2$ is an idempotent, and thus $R \approx R_1 \times R_2$ factors (up to almost isomorphism). Also $P \approx (P \otimes_R R_1) \times (P \otimes_R R_2)$.

Over one of the factors (say R_1) $e = 1$. One then checks that after base-change to R_1, $L = \Lambda^r P$ satisfies $L \otimes_R L^* \approx R$, i.e. L behaves like a line-bundle: There are the maps

$$\mathrm{tr} : \mathrm{End}_R(L) \approx L \otimes_R L^* \longrightarrow R$$

and the identity: $R \to \mathrm{End}_R(L)$. We have $\mathrm{tr}(\mathrm{id}_p) = e = 1$. In fact for two $f, g \in \mathrm{End}_R(P)$ we have

$$\mathrm{tr}(\Lambda^r f) \cdot \mathrm{tr}(\Lambda^r g) = \mathrm{tr}(\Lambda^r(fg)) = \text{coefficient of } T^{2r} \text{ in } \det((1+Tf)(1+Tg)).$$

Apply this to f and g of the form

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(x)\mu_i, \quad \lambda_i \in P^*,\ \mu_i \in P$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{r} \nu_i(x)\phi_i$$

to get $\mathrm{tr}(\Lambda^r f) \cdot \det(\nu_i(\phi_j)) = \det(\nu_i(f(\phi_j)))$, i.e.

$$\mathrm{tr}(\lambda^r f)(\nu_1 \wedge \cdots \wedge \nu_r \mid \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_r) = (\nu_1 \wedge \cdots \wedge \nu_r \mid \Lambda^r f(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_r)).$$

Varying ν's and ϕ's gives $\Lambda^r f = \mathrm{tr}(\Lambda^r f)$ is a scalar. As the $\Lambda^r f$ (given by $x \mapsto \langle \lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_r \mid x(\mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_r)\rangle$ generate $\mathrm{End}_R(L)$, everything follows. The same argument gives:
If $e = 0$, then $\mathrm{tr}(\Lambda^r f) = 0$ and $\Lambda^r f = 0$, and then $\Lambda^r P = 0$. Thus by induction we get an almost isomorphism

$$R \approx R_0 \times \cdots \times R_r,$$

such that over R_i $\quad \Lambda^i P$ is invertible, $\Lambda^{i+1} P = 0$. Also over R_i we have a determinant-function

$$\det(f) = \mathrm{tr}(\Lambda^i f) : \mathrm{End}_R(P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}, R_i)$$

homogeneous of degree i with $\det(fg) = \det(f)\det(g), \det(1) = 1$.

3. Remark. — I do not know whether for arbitrary finitely generated projective P's we have a decomposition $R \approx \prod_{i=0}^{\infty} R_i$ with $P \otimes_R R_i$ of rank i.

2. Almost étale coverings

1. Definition. — A ring homomorphism $A \to B$ is called an almost étale covering if

i) B is almost finitely generated projective as an A-module, of finite rank
ii) B is almost finitely generated projective as a $B \otimes_A B$-module

2. Remarks

a) There exists an idempotent $e_{B/A} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}, B \otimes_A B)$ measuring where B has rank 1 as $B \otimes_A B$-module. $e_{B/A}$ is annihilated by $(b \otimes_A 1 - 1 \otimes_A b)$ and maps to $1 \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}, B)$ under multiplication.

b) Replacing A by $\mathrm{Hom}(\mathfrak{m}, A)$ we may reduce (in many cases) to the case where $\mathrm{rank}_A B = r$ is constant. Then there exists an almost faithfully flat base-change $A \to A'$ (A' is almost flat, and $M \otimes_A A' \approx 0$ implies $M \approx 0$) with $B' = B \otimes_A A' \approx A'^r$.

Proof. — If $r \geqslant 1, A \to B$ is almost faithfully flat: If $\mathfrak{a} \subseteq A$ is an ideal with $\mathfrak{a}B \approx B$, then $\mathfrak{m}A \subseteq \mathrm{Norm}_{B/A}(\mathfrak{a}B) \subseteq \mathfrak{a}\,\mathrm{Hom}(\mathfrak{m}, A)$. Furthermore after base-change to B we may split of one factor B from $B \otimes_A B$, thus reducing r to $r-1$.

c) $A \to B$ is called a G-covering if a finite group G acts on B such that after almost faithfully flat base-change $A \to A'$ we have $B' = B \otimes_A A' \approx A'^G$. If B has constant rank r, there exists $A \to B \to C$ with C/A a G-covering with $G = S_r$ (symm. group in r letters) C/B is an H-covering with $H = S_{r-1} \subseteq G$ ($C \subseteq B^{\otimes r}$ is an almost direct factor given by the idempotent $\prod_{i<j} \lambda_{ij}(1 - e_{B/A}), \lambda_{ij} : B^{\otimes 2} \to B^{\otimes r}$ the canonical maps).

2a. Hochschild-Cohomology and Lifting. — Recall that for an A-algebra B (with unit) we can form a complex of B-bimodules ($B \otimes B^{\mathrm{op}}$-modules)

$$C(B/A) : B \otimes_A B \leftarrow B \otimes_A B \otimes_A B \leftarrow B \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A B \leftarrow,$$

with differential

$$d_n : C_n(B/A) = B^{\otimes n+2} \longrightarrow C_{n-1}(B/A) = B^{\otimes n+1}$$

$$d_n(b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_0 \otimes \cdots \otimes b_i \cdot b_{i+1} \otimes \cdots \otimes b_{n+1}$$

This complex has an augmentation $C_0(B/A) \to B$ and is (with B in degree -1) nullhomotopic as complex of left respectively right B-modules. For a B-bimodule M define

$$H^*(B/A, M) = (\mathrm{Hom}_{B \otimes B^{\mathrm{op}}}(C_*(B/A), M))$$

Thus $H^0(B/A, M) = M^B = \{m \in M \mid bm = mb\,(\mathrm{all}\, b \in B)\}$
$H^1(B/A, M) = \{\text{biderivations } B \to M\}/\{\text{inner derivations } b \to [b, m] = bm - mb\}$
etc.
For any B-module N the bimodule $M = \mathrm{Hom}_A(B, N)$ has

$$H^i(B/A, M) = \begin{cases} 0, & i > 0 \\ N, & i = 0 \end{cases}$$

For example if B is a projective $B \otimes_A B$-module then for any bimodule M we have that $M = \mathrm{Hom}_B(B, M)$ (using say left B-module structures) is a direct summand in

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A B, M) = \mathrm{Hom}_A(B, M),$$

and thus its Hochschild-cohomology vanishes in positive degrees. By the same argument B almost $B \otimes_A B$-projective gives $H^i(B/A, M) \approx 0$ for $i > 0$.

Now suppose that $I \subseteq A$ is an ideal with square zero: $I^2 = 0$.

If B is an A-algebra which is almost unramified (B is an almost projective $B \otimes_A B$-module), C an A-algebra, $\overline{f} : B \to \overline{C} = C/IC$ an A-algebra morphism (or almost morphism), then there is at most one way to lift $\overline{f}$ to $f : B \to C$ (up to almost equality):

For two lifts f_1, f_2 the difference is an almost derivation $\overline{B} \to I \cdot C$, thus almost zero as $H^1(\overline{B}/\overline{A}, I \cdot C) \approx 0$.

If B is also an almost projective A-module, then in fact an almost lifting exists:

For each $\alpha > 0$, $\pi^\alpha \overline{f}$ lifts to an A-linear map $f_\alpha : B \to C$. Consider

$$g_\alpha(x, y) = \pi^{2\alpha} f_\alpha(xy) - \pi^\alpha f_\alpha(x) f_\alpha(y) \in I \cdot C.$$

Then g_α defines a cochain in

$$\mathrm{Hom}_{B \otimes_A B}(C_2(\overline{B}/\overline{A}, I \cdot C)).$$

We claim that it is a cocycle. To check that compute the boundary

$$dg_\alpha(x, y, z) = x g_\alpha(y, z) - g_\alpha(xy, z) + g_\alpha(x, yz) - g_\alpha(x, y) z$$

Using that multiplication by $f_\alpha(u)$ coincides with multiplication by $\pi^\alpha u$ in IC, this is:

$$\begin{aligned} f_\alpha(x)(\pi^\alpha f_\alpha(yz) - f_\alpha(y) f_\alpha(z)) - \pi^{2\alpha} f_\alpha(xyz) + \pi^\alpha f_\alpha(xy) f_\alpha(z) \\ + \pi^{2\alpha} f_\alpha(xyz) - \pi^\alpha f_\alpha(x) f_\alpha(yz) - (\pi^\alpha f_\alpha(xy) - f_\alpha(x) f_\alpha(y)) f_\alpha(z) = 0. \end{aligned}$$

Thus $\pi^\alpha g_\alpha$ is a coboundary,

$$\pi^\alpha g_\alpha(x, y) = x h_\alpha(y) - h_\alpha(xy) + h_\alpha(x) y,$$

and $\widetilde{f_\alpha} = \pi^{3\alpha} f_\alpha + h_\alpha$ lifts $\pi^{4\alpha} \cdot \overline{f}$ and satisfies

$$\pi^{4\alpha} \cdot \widetilde{f_\alpha}(xy) = \widetilde{f_\alpha}(x) \widetilde{f_\alpha}(y)$$

Furthermore for $0 < \alpha \leqslant \beta/2 < \beta$

$$g_{\beta,\alpha} = \pi^{4\beta} f_\beta - \pi^{(\beta - 4\alpha)} f_\alpha$$

satisfies

$$\begin{aligned} g_{\beta,\alpha}(xy) &= f_\beta(x) f_\beta(y) - \pi^{8\beta - 8\alpha} f_\alpha(x) f_\alpha(y) \\ &= f_\beta(x)(f_\beta(y) - \pi^{4\beta - 4\alpha} f_\alpha(y)) + (f_\beta(x) - \pi^{4\beta - 4\alpha} f_\alpha(x)) \pi^{4\beta - 4\alpha} f_\alpha(y) \end{aligned}$$

(using the terms in brackets are in IC)

$$\begin{aligned} &= \pi^{4\beta} x (f_\beta(g) - \pi^{4\beta - 4\alpha} f_\alpha(y)) + (f_\beta(x) - \pi^{4\beta - 4\alpha} f_\alpha(x)) \pi^{4\beta} y \\ &= x\, g_{\beta,\alpha}(y) + g_{\beta,\alpha}(x) y. \end{aligned}$$

Thus $g_{\beta,\alpha}$ is an almost derivation, hence almost zero. Multiplying by π^β gives

$$\pi^{5\beta} \cdot f_\beta = \pi^{9(\beta - \alpha)} \pi^{5\alpha} \cdot f_\alpha$$

Hence considering the $\pi^{5\alpha} \cdot f_\alpha$ as multiplicative maps from $\pi^{9\alpha} \cdot V \otimes_V B$ to C (lifting $\overline{f}$), they glue to a map

$$f : \mathfrak{m} \otimes_V B = \varinjlim (\pi^{9\alpha} \cdot V) \otimes_V B \longrightarrow C$$

Also $f(1) \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}, C)$ is an idempotent lifting 1, thus $f(1) = 1$.

Finally we lift almost étale coverings. First we treat the underlying projective module: Let $\overline{P}$ be an almost projective $\overline{A} = A/I$-module. For any $\alpha > 0$ choose a free $\overline{A}$-module $\overline{L}$ and maps $\overline{f}_\alpha : \overline{L}_\alpha \to P$, $\overline{g}_\alpha : P \to \overline{L}_\alpha$ with $\overline{f}_\alpha \circ \overline{g}_\alpha = \pi^\alpha \cdot \mathrm{id}$. Let $\overline{e}_\alpha \in \mathrm{End}(\overline{L}_\alpha)$ denote $\overline{g}_\alpha \circ \overline{f}_\alpha$, so $\overline{e}_\alpha^2 = \pi^\alpha \cdot \overline{e}_\alpha$.

Lift $\overline{e}_\alpha$ to an endomorphism f_α of L. Thus $f_\alpha^2 - \pi^\alpha f_\alpha$ takes values in $I \cdot L$, hence $(f_\alpha^2 - \pi^\alpha f_\alpha)^2 = 0$. If $e_\alpha = 3\pi^\alpha f_\alpha^2 - 2f_\alpha^3$, then e_α lifts $\pi^{2\alpha} e_\alpha$ and satisfies $e_\alpha^2 = \pi^{3\alpha} e_\alpha$. Hence $P_\alpha = L_\alpha/(\pi^{3\alpha} - e_\alpha)L_\alpha$ is "projective up to $\pi^{3\alpha}$", i.e. $\pi^{3\alpha}$ annihilates all higher $\mathrm{Ext}^i_A(P_\alpha, ?)$. Also $\overline{f}_\alpha$ and $\overline{g}_\alpha$ induce maps

$$\overline{P}_\alpha \xrightarrow{\overline{f}'_\alpha} \overline{P} \xrightarrow{\overline{g}'_\alpha} \overline{P}_\alpha$$

with

$$\overline{f}'_\alpha \circ \overline{g}'_\alpha = \pi^\alpha \cdot \mathrm{id}_{\overline{P}}, \pi^{2\alpha} \circ \overline{g}'_\alpha = \pi^{3\alpha} \cdot \mathrm{id}_{\overline{P}_\alpha}$$

For $\alpha \leqslant \beta/2 < \beta$,

$$\pi^{3\alpha+4\alpha-8\beta} \circ \overline{g}'_\beta \circ \overline{f}'_\alpha : P_\alpha \longrightarrow \overline{P}_\alpha \longrightarrow \overline{P} \longrightarrow \overline{P}_\beta$$

lifts to a map $g_{\alpha,\beta} : P_\alpha \to P_\beta$ with $\overline{f}'_\beta \circ \overline{g_{\alpha,\beta}} = \pi^{7\alpha-7\beta} \circ \overline{f}'_\alpha$. Considering $g_{\alpha,\beta}$ as a map from $\pi^{7\alpha}V \otimes_V P_\alpha$ to $\pi^{7\beta}V \otimes_V P_\beta$, we form $P = \varinjlim_\alpha \pi^{7\alpha}V \otimes_V P_\alpha$, for a suitable sequence $\alpha = \alpha_n$, $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n/2$. Then the $\overline{f}_\alpha$ define an almost isomorphism $P \otimes_A A/I \approx \overline{P}$. As $\mathrm{coker}\, \overline{g}_{\alpha,\beta}$ is annihilated by $\pi^{7\alpha-7\beta+\alpha+3\beta}$ and hence by $\pi^{8\alpha}$, $\mathrm{coker}\, g_{\alpha,\beta}$ is annihilated by $\pi^{16\alpha}$, and $\pi^{7\alpha}V \otimes_V P_\alpha \to P$ is an isomorphism up to $\pi^{16\alpha}$. Thus P is almost projective and lifts $\overline{P}$.

Remark. — If $\overline{P}$ has rank $\leqslant r$, so has P.

Now assume $\overline{B}/\overline{A}$ is an almost étale covering, that $\overline{B}$ is almost projective over $\overline{A}$ as well as over $\overline{B} \otimes_{\overline{A}} \overline{B}$. We claim that there is an almost étale covering B/A with $B \otimes_A A/I \approx \overline{B}$:
We give a sketch, as the method follows the previous but the constants become more complicated. First lift $\overline{B}$ to an almost projective A-module B. Then for all $\alpha > 0$ the multiplication

$$\overline{m} : \overline{B} \otimes_A \overline{B} \longrightarrow \overline{B}$$

lifts after multiplication by π^α to

$$m_\alpha^0 : B \otimes_A B \longrightarrow B.$$

Then $\pi^{c\alpha}(m_\alpha^0(m_0^\alpha(a,b),c) = m_\alpha^0(a, m_0^\alpha(b,c)))$ (c = suitable constant) defines a class in $H^3(\overline{B}/\overline{A}, I \cdot B) \approx 0$. After modifying m_α we can make it associative. Then the commutator with a fixed element defines a derivation, thus $\pi^{c\alpha} \cdot m_\alpha$ (c suitable) is commutative, and similarly $1 \in \overline{B}$ lifts to an idempotent which is a unit. For $\alpha \leqslant \beta/2 < \beta$ a suitable multiple $\pi^{c\alpha} \cdot \mathrm{id}_{\overline{B}}$ lifts to a multiplicative map

$$(\pi^{c\alpha}V \otimes_V B, m_\alpha) \longrightarrow (\pi^{c\beta}V \otimes_V B, m_\beta).$$

Then $B = \varinjlim \pi^{c\alpha}V \otimes_V B$ with $\varinjlim m_\alpha$ does the job.

We have shown

3. Theorem. — *The functor sending B to $\overline{B} = B \otimes_A \overline{A}$ is an equivalence of categories (almost étale coverings of A) $\xrightarrow{\sim}$ (almost étale coverings of $\overline{A}$).*

2b. The Purity Theorem. — The previous theory is applied to the study of universal étale coverings. This was first done by Tate ([Ta]): Assume V is a p-adic discrete valuation-ring, with residue field $k = V/\pi V$ perfect of characteristic $p > 0$ (π a uniformiser) and fraction field K of characteristic zero. Assume furthermore that K_∞ is a totally ramified $\mathbb{Z}_p$-extension of $K, V_\infty \subseteq K_\infty$ the normalization of V. Then for any finite extension L_∞ of K_∞, the normal W_∞ of V_∞ in L_∞ is an almost étale covering of V_∞. This was generalised to non-perfect residue fields as follows: (see [F2], Theorem 1.2) Assume $[k : k^p] = p^d < \infty$. Assume given a tower $K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_\infty = \bigcup_{n \geqslant 0} K_n$. Let V_n = normalization of V in $K_n, \Omega_{V_n/V}$ the universal differential module. It is known that $\Omega_{V_n/V}$ can be generated by $\leqslant d+1$ elements, and that its length is the different of V_n/V. Now assume that for any $m \geqslant 0$ there exists an n such that $\Omega_{V_n/V}$ has as quotient $(V_n/\pi^m V_n)^{d+1}$. Then again for any finite $L_\infty \supseteq K_\infty$, W_∞ = normalization of V_∞ is an almost étale covering of V_∞.

Now suppose that over V we have an affine normal torus-embedding $T \cong \mathbb{G}_m^{d+1} \subseteq \overline{T}$ ([KKMS], § 1) If $L = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$ denotes the characters of T, we furthermore assume given a rational convex polyhedron $\sigma \subseteq L_{\mathbb{R}}$ not containing any line, such that $\overline{T} = \mathrm{Spec}(V[L^* \cap \sigma^\vee])$. Finally we assume given an element $\lambda \in L^* \cap \sigma^\vee$ such that $\sigma \cap \ker(\lambda)$ is a simplex, i.e. consists of the positive linear combinations of elements $\rho_1, \ldots, \rho_r \in L \cap \sigma$ which are linearly independant over $\mathbb{Z}$. This hypotheses will later assure that the divisors at infinity in the generic fibres have normal crossings.

Let $\overline{T}_\lambda \subseteq \overline{T}$ denote the closed subscheme defined by the vanishing of $(\pi - \lambda)$. Assume given a noetherian ring R and a map $f : \mathrm{Spec}(R) \to \overline{T}_\lambda$ which is flat, has geometrically regular fibres and is formally étale in charateristic p, i.e. for a prime $\mathfrak{p} \subseteq R (p \in \mathfrak{p})$ with image $x \in \overline{T}$ is $R_\mathfrak{p}$ formally étale over $O_{\overline{T}_{\lambda,x}}$. This is equivalent to the fact that Frobenius induces an isomorphism $(\widehat{R}_\mathfrak{p}/p\widehat{R}_\mathfrak{p}) \otimes O_{\overline{T}_{\lambda,x}} \xrightarrow{\sim} \widehat{R}_\mathfrak{p}/p\widehat{R}_\mathfrak{p}$. ($\widehat{\ }$= completion in $\mathfrak{p}$-adic topology). Also for each residue-field κ of $\overline{\mathcal{O}}_{T_\lambda}$ the fibre $R \otimes \kappa$ has dimension $\leqslant \log_p[\kappa : \kappa^p] \leqslant d$. Denote by $\overline{T}_n \to \overline{T}$ the covering induced by multiplication by $n!$, $\mathrm{Spec}(R_n) \to \mathrm{Spec}(R)$ its pullback via $\mathrm{Spec}(R) \to \overline{T}_\lambda \subseteq \overline{T}$ (then R_n is a module over $V_n = V[\pi^{1/n!}]$ because of the relation $\lambda = \pi$). If $R_\infty = \bigcup_{n>0} R_n$, and if $R_\infty \to S_\infty$ is the normalization of R_∞ in a finite étale covering of the preimage of $T \subseteq \overline{T}$ in $R_\infty[1/\pi]$, we claim that S_∞ is an almost étale covering of R_∞.

4. Theorem. — *S_∞/R_∞ is almost étale.*

Proof. Reduction-steps

i) Instead of the $\overline{T}_n$ we may choose $\mathrm{Spec}\, V[L_n^* \cap \sigma^\vee]$, where the $L_n \subseteq L$ form a decreasing sequence of sublattices such that for any integer $m, L_n \subseteq m \cdot L$ for $n \gg 0$.

ii) We may start with a fixed L_n (instead of L) right away. Especially we may assume that S_∞ is defined by an R-algebra S such that $S[1/\pi]$ is finite étale over $R[1/\pi]$ over the preimage of $T \subseteq \overline{T}$.

iii) For a suitable choice of L_n we can achieve that

$$\overline{T}_{\lambda,n} = \mathrm{Spec}(V[L_n^* \cap \sigma^\vee]/(\lambda - \pi)) \supseteq T_{\lambda,n} = \mathrm{Spec}(V[L_n^*]/(\lambda - \pi))$$

is over $\mathrm{Spec}(K)$ an embedding of the complement of a simple normal crossings divisor (use the properties of λ), and especially $\overline{T}_{\lambda,n} \otimes_V K$ is regular. By Abhyankhar's lemma we then may assume that $S[1/\pi]$ is finite étale over $R[1/\pi]$.

iv) From now on it will be sufficient to work with a sequence of lattices L_n cofinal with $p^n L$. The more general result then follows by base-extension (once we have that $S_\infty[1/\pi]$ extends to an almost étale covering, this covering must be the normalization of R_∞, and this remains true after base-change).

v) Next we consider what happens in the generic points in characteristic p. Suppose Z is an irreducible component $\overline{T}_\lambda \otimes_V k = \mathrm{Spec}(k[L \cap \sigma^\vee]/(\lambda))$. Then σ corresponds to an extremal ray (halfline) in σ. If it is generated by an indivisible element $\rho \in L$, and if $\lambda(\rho) = e$, then in a neighbourhood of the generic point z of Z the torus-embedding $\overline{T}$ is isomorphic to $T' \times \mathbb{A}^1, T' \cong \mathbb{G}_m^d$, and $\overline{T}_\lambda$ has as local ring there

$$\overline{T}_{\lambda,z} \cong V'[t]/(t^e - u\pi) \cong V'[\sqrt[e]{u\pi}]$$

where V' is the lcoal ring corresponding to $T', u \in V'$ is a unit. As $u\pi$ is a uniformiser of V' it follows that $\overline{T}_{\lambda,z}$ is a discrete valuation-ring. It follows that $\overline{T}_\lambda$ satisfies R_1. As it is Cohen-Maccaulay ($\overline{T}$ is as all torus-embeddings are [KKMS], § 3), $\overline{T}_\lambda$ is even normal. Also R and R_n are normal and Cohen-Macaulay.

After that interlude let us pass to the sublattices L_n, and choose a projective system of points $z_n \in \overline{T}_{\lambda,n}$ lifting z. We claim that the local rings $\mathcal{O}_{\overline{T}_{\lambda,n,z_n}}$ satisfy the ramification-conditions of [Fa2], Th. 1.2:

That is for given r there exists n such that the relative differentials $\Omega_{\overline{T}_{\lambda,n,z}/\overline{T}_\lambda}$ have a quotient $(\mathcal{O}_{\overline{T}_{\lambda,n,z_n}}/p^r)^{d+1}$ (the integer d in [Fa 2] coincides with our d here). If we compute relative logarithmic differentials we obtain $L_n^*/L^* \otimes \mathcal{O}_{\overline{T}_{\lambda,n,z_n}}$. The usual differentials map into these, with cokernel annihilated by $\prod_{i=0}^{d+1} \mu_i$, if the $\mu_i \in \sigma^\vee \cap L_n^*$ form a basis of L_n^*. Now for $L_n = p^n L$ the valuation of this product decreases like $c \cdot p^{-n}$, and the claim follows for those L_n and thus also for any sequence.

By formal étaleness the same applies to the sequence $(R_n, \mathfrak{p}_n)$, where $\mathfrak{p}_n \subseteq R_n$ is a projective system of primes above a fixed $\mathfrak{p} \subseteq R$ which is a minimal prime divisor of pR or πR. It follows that $S_{\infty,\mathfrak{p}}$ is almost étale over $R_{\infty,\mathfrak{p}}$.

vi) It now suffices to prove that S_∞ is almost flat over R_∞: There exists an idempotent $e_{S_\infty/R_\infty} \in S_\infty \otimes_{R_\infty} S_\infty[1/\pi]$ defining the diagonal (the direct summand $S_\infty[1/\pi]$). For each $\alpha > 0$ its product with π^α then lies in

$$\bigcap_{\mathfrak{p}} (S_\infty \otimes_{R_\infty} S_\infty)_{\mathfrak{p}} \cap S_\infty \otimes_{R_\infty} S_\infty[1/\pi] \approx S_\infty \otimes_{R_\infty} S_\infty$$

($\mathfrak{p}$ runs over all minimal prime-divisors of πR). Thus S_∞ is an almost direct summand in $S_\infty \otimes_{R_\infty} S_\infty$. Furthermore if

$$\pi^\alpha e_{S_\infty/R_\infty} = \sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i \quad (x_i, y_i \in S_\infty),$$

then

$$\pi^\alpha x = \sum_{i=1}^{r} x_i \cdot Tr_{S_\infty/R_\infty}(y_i x)$$

for all $x \in S_\infty$, which exhibits S_∞ as an up to π^α direct summand in R_∞^r. Then S_∞ is almost projective over R_∞.

By localization we may thus assume that R is local with maximal ideal $\mathfrak{m}$, and that S_∞ is almost flat over R_∞ on the punctured spectrum $\mathrm{Spec}(R) - \{\mathfrak{m}\}$. It also follows that $S_\infty \otimes_R \widehat{R}$ ($\widehat{R} = \mathfrak{m}$-adic completion) is almost equal to the normalization of $R_\infty \otimes_R \widehat{R}$, using that $\widehat{R}$ is normal (f is formally smooth) and that the two can only differ almost by $\mathfrak{m}$-torsion.

vii) Assume now that $\dim(R) = 2$: Let $z \in \overline{T}_\lambda$ denote the image of $\{\mathfrak{m}\}$, $z_n \in \overline{T}_{\lambda,n}$ a projective system of liftings. We claim that for a suitable choice of the lattices L_n the local rings of $\overline{T}_{\lambda,n}$ in z_n are regular. The same is then true for R_n. As S_n is normal of dimension two it is Cohen-Macaulay, and thus flat over R_n (depth + projective dimension = 2). Thus S_∞ is flat over R_∞.

To show the claim we may assume that $\pi \in \mathfrak{m}$. Thus $z \in \overline{T}_\lambda \otimes_N k \subseteq \overline{T} \otimes_V k$ corresponds two a codimension-two-point in $\overline{T} \otimes_V k$. If it is not the generic point of a codimension-two stratum each $\overline{T}_{\lambda,n,z_n}$ is already regular by the previous. If it is such a generic point then near z $\overline{T}_n$ looks like the product of a $\mathbb{G}_m^{d-1}$ with a torus-embedding of rank 2. This torus-embedding is given by a 2-dimensional convex polyhedral cone which must be a simplex. For suitable choice of the L_n this simplex is spanned by two basis-vectors of L_n, and $\overline{T}_n$ is smooth over V in z_n. It then follows easily that $\overline{T}_{\lambda,n}$ is still regular in z_n. (The singularity looks like $V_n[T_1, T_2]/(T_1^e T_2^f - \pi_n)$).

So finally now $\dim(R) \geqslant 3$. The Frobenius-mapping is surjective on R_∞/pR_∞ (or $R_\infty/\pi R_\infty$):

This holds for $\mathcal{O}_{\overline{T}_\infty}$, and S_∞ is generated by $\mathcal{O}_{\overline{T}_\infty}$ and R^p.

Following Fontaine we form the projective limit $\mathcal{R} = \varprojlim(R_\infty/pR_\infty)$ (transition-maps are Frobenius) and $A_{\mathrm{inf}}(R) = W(\mathcal{R})$. Then $A_{\mathrm{inf}}(R)/p \cdot A_{\mathrm{inf}}(R) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}$, $A_{\mathrm{inf}}(R)$ admits a Frobenius-automorphism ϕ, and there is a surjection $A_{\mathrm{inf}}(R) \twoheadrightarrow \widehat{R}_\infty$ (ρ-adic completion) with kernel generated by a single element $\xi = p - [p]$. Here $[p] = [p, 0, \ldots, 0]$ with $p = \varprojlim(p^{1/p^n}) \in \mathcal{R}$ a compatible system of p-power roots of p. Note that

$$\phi(\xi) = p - [\underline{p}]^p = p - (p - \xi)^p = \pm\xi^p + p \cdot (\text{unit}).$$

The elements p and ξ form a regular sequence in $A_{\mathrm{inf}}(R)$, and $A_{\mathrm{inf}}(R)$ is complete in the ξ-adic topology. However this topology is not ϕ-invariant. We thus consider

the finer topology where a fundamental system of neighbourhoods of zero is given by the ideals generated by finite products ($m_n \geqslant 0$, almost all zero) $\prod_{n\in\mathbb{Z}}(\phi^n(\xi))^{m_n}$. Note that any product $\prod_{n>0}\phi^n(\xi)^{m_n}$ with positive ϕ-powers forms together with ξ a regular sequence in $A_{\inf}(R)$, and that the ideal generated by those two elements defines the same topology as (p,ξ). Thus $A_{\inf}(R)$ with the topology defined by $\prod_{n=0}^{N}\phi^n(\xi)$ is the fibred product of $(A,\xi$-adic topology) with $(A,\prod_{n=1}^{N}\phi^n(\xi)$-adic topology), over $(A,(p,\xi)$-adic topology).

Now S_∞ defines an almost étale covering V_∞ of $U_\infty = \mathrm{Spec}(R_\infty) - \mathrm{Spec}(R_\infty/\mathfrak{m}R_\infty)$. It obviously has finite rank $[L_\infty : K_\infty]$. Furthermore if we reduce modulo p it is almost invariant under Frobenius, i.e. Frobenius on $\mathcal{O}_{V_\infty}/p\mathcal{O}_{V_\infty}$ induces an almost isomorphism

$$\mathcal{O}_{V_\infty}/p\mathcal{O}_{V_\infty} \otimes_{\mathcal{O}_{U_\infty}/p\mathcal{O}_{U_\infty}} \mathcal{O}_{U_\infty}/p\mathcal{O}_{U_\infty} \approx \mathcal{O}_{V_\infty}/p\mathcal{O}_{V_\infty} :$$

Reduce to the split case.

Let $\mathfrak{m}_0 \subseteq A_{\inf}(R)$ denote the ideal generated by p and suitable lifts of generators of $\mathfrak{m}$. Then we can lift V_∞ first to an almost étale covering of $\mathrm{Spec}(A_{\inf}(R)/\xi^m) - \{\mathfrak{m}_0\}$, all m, which by transport of structure induces almost étale coverings on $\mathrm{Spec}(A_{\inf}(R)/\phi^n(\xi)^m) - \{\mathfrak{m}_0\} (n \in \mathbb{Z})$. These are all isomorphic modulo p because of Frobenius-invariance, and thus by induction (and gluing, that is taking fibred products with almost surjective maps) we obtain almost étale coverings of

$$\mathrm{Spec}\left(A_{\inf}(R)\Big/\Big(\prod_{n=0}^{N}\phi^n(\xi)\Big)^m\right) - \{\mathfrak{m}_0\}$$

and by applying ϕ of

$$\mathrm{Spec}\left(A_{\inf}(R)/\prod_{n\in\mathbb{Z}}\phi^n(\xi)^{m_n}\right) - \{\mathfrak{m}_0\}.$$

That is if we consider the ind-scheme defined by quotients $A_{\inf}(R)/\prod_{n\in\mathbb{Z}}\phi^n(\xi)^{m_n}$, then we have defined a ϕ-invariant almost étale covering of its punctured spectrum.

Notations

$$X_{\inf} = \text{“}\varinjlim\text{”}\ \mathrm{Spec}\left(A_{\inf}(R)\Big/\prod_{n\in\mathbb{Z}}\phi^n(\xi)^{m_n}\right)$$

$$U_{\inf} = X_{\inf} - \{\mathfrak{m}_0\}$$

$V_{\inf} \longrightarrow U_{\inf}$: the almost étale covering derived from S_∞.

Also “almost” should now be defined with respect to the sequence of ideals generated by $\underline{p}^{1/p^n} = \varphi^{-n}(\underline{p})$. Define the cohomology $H^*(V_{\inf}, \mathcal{O}_{V_{\inf}})$ as Čech-cohomology of the affine covering defined by a system of generators of $\mathfrak{m}$. This is easily seen to be independant of the choice of the covering, and one has long exact cohomology-sequences from short (topologically) exact sequences. I conjecture but have not checked that it

coincides with the cohomology of the ind-scheme $V_{\inf}$. It certainly admits a Frobenius-automorphism (almost) ϕ.

For $i > 0$ the cohomology

$$H^i(V_{\inf}, \mathcal{O}_{V_{\inf}}/\xi \cdot \mathcal{O}_{V_{\inf}}) \cong H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(\widehat{S_\infty}),$$

is equal to the local cohomology. It satisfies a certain finiteness condition (SGA2, Exp. VIII, Th. 2.1):

Firstly for any n the cohomology $H^2_{\mathfrak{m}}(S_n)$ is a finitely generated S_n-module and thus of finite length, as for any prime $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ $\operatorname{depth}(S_{n,\mathfrak{p}}) + \dim(S_{n/\mathfrak{p}}) \geqslant 3$. Furthermore there are maps

$$H^2_{\mathfrak{m}}(S_n) \otimes_{R_n} R_\infty = H^2_{\mathfrak{m}}(S_n) \otimes_{R_n} \widehat{R_\infty} \longrightarrow H^2_{\mathfrak{m}}(S_n \otimes_{R_n} \widehat{R_\infty}) \longrightarrow H^2_{\mathfrak{m}}(\widehat{S_\infty}).$$

For any positive $\alpha > 0$ the kernels and cokernels of both maps are annihilated by p^α, for n big enough:

If R_∞ where flat over R_n the first map would be an isomorphism. This is not true in general, but in the appendix 2 it is shown that for a sequence α_n with $\alpha_n \to 0$, p^{α_n} annihilates all $\operatorname{Tor}_i^{R_n}(R_m, M), (i > 0)$ ($m \geqslant n$ and M any R_n-module). The same then holds with R_n replaced by R_∞ or its p-adic completion. This implies the assertion for the first map.

For the second one studies $S_n \otimes_{R_n} R_\infty \to S_\infty$. Its kernel consists of p-torsion and is annihilated by the p^{α_n} from above. For the cokernel use that for each height-one prime $\mathfrak{p}$ the trace-form on $S_{n,\mathfrak{p}}$ has discriminant p^{β_n} with $\beta_n \to 0$. Thus

$$p^{\beta_n} \cdot S_{\infty,\mathfrak{p}} \subseteq \bigcap (S_n \otimes_{R_n} R_\infty)_{\mathfrak{p}}$$

and (using annihilation of $\operatorname{Tor}'_1 s$)

$$p^{\alpha_n+\beta_n} \cdot S_\infty \subseteq (\bigcap\nolimits_{\mathfrak{p}} S_{n,\mathfrak{p}}) \otimes_{R_n} R_\infty = S_n \otimes_{R_n} R_\infty.$$

Again we may pass to p-adic completions. It follows that for each $\alpha > 0$, $p^\alpha \cdot H^2_{\mathfrak{m}}(\widehat{S_\infty})$ is contained in a finitely generated $\mathfrak{m}$-torsion S_∞-module. In the appendix 2 it is also shown how to define an invariant (the normalized length)

$$\lambda(p^\alpha \cdot H^2_{\mathfrak{m}}(\widehat{S_\infty})) \in \mathbb{R}.$$

λ is $\geqslant 0$, is additive in short exact sequences, invariant under almost isomorphisms, and for an $\mathfrak{m}$-torsion module which is a submodule of a finitely presented $\mathfrak{m}$-torsion S_∞-module, λ vanishes only if the module is zero. Also if M is annihilated by $p^{1/p}$, then

$$\lambda(M \otimes_{R_\varphi} R/pR) = p^{d+1}\lambda(M).$$

Now consider

$$M = H^1(V_{\inf}, \mathcal{O}_{\inf}).$$

Then $M/\xi M$ injects into $H^1(V_\infty, \mathcal{O}_{V_\infty}) = H^2_{\mathfrak{m}}(\widehat{S_\infty})$. Thus for any $\alpha > 0$, $p^\alpha(M/\xi M)$ as well as $p^\alpha(M/(\xi, p)M)$ have finite λ-invariant. Furthermore Frobenius induces an

almost isomorphism

$$M/(\phi^{-1}(\xi), p^{1/p})M \otimes_{R_\varphi} R/pR \approx M/(\xi, p)M$$

Thus

$$p^{d+1} \cdot \lambda(p^\alpha M/(\phi^{-1}(\xi), p^{1/p})M) \leqslant \lambda(p^{p\alpha} M/(\xi, p)M)$$

Choose $0 < \alpha < 1/p^2$. Then $p^{p\alpha-\beta}M/(\xi, p)M$ has a filtration of length $p+1$ by submodules

$$p^{\alpha_i} \cdot M/(\phi^{-1}(\xi), p)M, \quad \alpha_i = \alpha + i\frac{1-\alpha}{p+1} \quad (0 \leqslant i \leqslant p),$$

and each consecutive subquotient is a quotient of $p^\alpha M/(\phi^{-1}(\xi), p^{1/p})M$. Furthermore $p^{p\alpha}M/(\xi, p)M$ is contained in

$$\sum_{j=0}^{p-1} p^{(p-j)\alpha}\phi^{-1}(\xi)^j M/(\xi, p)M \quad (\xi \equiv \phi^{-1}(\xi)^p \bmod p),$$

which has a filtration of length p with consecutive subquotients of $p^\alpha M/(\phi^{-1}(\xi), p)M$. Thus

$$\lambda(p^{p\alpha} M/(\xi, p)M) \leqslant p(p+1) \cdot \lambda(p^\alpha M/(\phi^{-1}(\xi), p^{1/p})M).$$

As $p^{d+1} \geqslant p^3 > p(p+1)$, we see that both sides vanish, so $\lambda(p^\alpha \cdot M/(\xi, p)M) = 0$ (all $\alpha > 0$) and $\lambda(p^\alpha \cdot M/\xi M) = 0$ (p is nilpotent in $M/\xi M$). Now for $n \gg 0$ there is a map

$$M/\xi M \longrightarrow H^2_{\mathfrak{m}}(S_n) \otimes_{R_n} R_\infty$$

with kernel annihilated by p^α. As $\lambda(p^\alpha \cdot \text{image}) = 0$ it follows that $p^\alpha \cdot image = 0$, thus $p^{2\alpha}$ annihilates $M/\xi M$. As α was arbitrary, $M/\xi M \approx 0$, and by induction also any quotient $M/\prod_{n\in\mathbb{Z}} \phi^n(\xi)^{m_n} \cdot M \approx 0$ vanishes almost.

It follows that the map $\Gamma(V_{\text{inf}}, \mathcal{O}_{V_{\text{inf}}}) \to \widehat{S_\infty} = \Gamma(V_\infty, \mathcal{O}_{V_\infty})$ is almost surjective: Order the finite products $\prod_{n\in\mathbb{Z}} \phi^n(\xi)^{m_n}$ in a countable sequence

$$g_1 = \xi, g_2, g_3, \ldots,$$

with

$$g_{n+1}/g_n = \text{ a } \phi\text{-power of } \xi.$$

Then

$$H^1(V_{\text{inf}}, g_n \cdot \mathcal{O}_{V_{\text{inf}}}/g_{n+1} \cdot \mathcal{O}_{V_{\text{inf}}}) \approx 0,$$

as this ϕ-power induces an almost isomorphism with M. For $\alpha > 0$ choose a strictly increasing sequence

$$\alpha_1 = 0 < \alpha_n < \alpha_{n+1} < \cdots < \alpha.$$

For

$$f_1 \in \widehat{S_\infty} = \Gamma(V_{\text{inf}}, \mathcal{O}_{V_{\text{inf}}}/g_1 \cdot \mathcal{O}_{V_{\text{inf}}})$$

construct inductively $f_n \in \Gamma(V_{\text{inf}}, \mathcal{O}_{V_{\text{inf}}}/g_n \cdot \mathcal{O}_{V_{\text{inf}}})$ with f_{n+1} lifting $\underline{p}^{\alpha_{n+1}-\alpha_n} \cdot f_n$. This is possible because $\underline{p}^{\alpha_{n+1}-\alpha_n}$ annihilates the obstruction to lift f_n. Then the $p^{\alpha-\alpha_n} \cdot f_n$ form a compatible system of lifts of $\underline{p}^\alpha \cdot f_1 = p^\alpha \cdot f_1$. Thus finally $S_{\text{inf}} = \Gamma(V_{\text{inf}}, \mathcal{O}_{V_{\text{inf}}})$

is an $A_{\inf}(R)$-algebra with $S_{\inf}/\xi \cdot S_{\inf} \approx \widehat{S_\infty}$. Furthermore Frobenius induces an almost automorphism of $S_{\inf}$.

Next consider the cokernel M of the map

$$S_{\inf} \otimes_{A_{\inf}(R)} S_{\inf} \longrightarrow \Gamma(V_{\inf}, \mathcal{O}_{V_{\inf}} \otimes_{A_{\inf}(R)} \mathcal{O}_{V_{\inf}}) :$$

On it Frobenius is an almost isomorphism. On the other hand $M/\xi \cdot M$ (almost) injects into the cokernel of

$$S_\infty \widehat{\otimes_{R_\infty}} S_\infty \longrightarrow \Gamma(V_\infty, \mathcal{O}_{V_\infty} \otimes_{R_\infty} \mathcal{O}_{V_\infty}),$$

that is into $H^1_{\mathfrak{m}}(S_\infty \widehat{\otimes_{R_\infty}} S_\infty)$.

By the same reasoning as before $H^1_{\mathfrak{m}}(S_\infty \widehat{\otimes_{R_\infty}} S_\infty)$ is for each $\alpha > 0$ p^α-isomorphic to a finitely presented torsion-module, thus $\lambda(p^\alpha \cdot M/\xi M) < \infty$ (all $\alpha > 0$) and $M/\xi M \approx 0$. Finally the canonical idempotent defining the diagonal defines an almost section of $\mathcal{O}_{V_{\inf}} \otimes_{A_{\inf}(R)} \mathcal{O}_{V_{\inf}}$ lifting the corresponding idempotent e_{S_∞/R_∞}. It is thus at least modulo ξ in the image of $S_{\inf} \otimes_{A_{\inf}(R)} S_{\inf}$, and e_{S_∞/R_∞} lies almost in the image of $S_\infty \otimes_{R_\infty} S_\infty$.

Appendix 1. Some toroidal geometry. — Assume $\mathrm{Spec}(R) \to \overline{T}_\lambda$ is formally étale in characteristic p. We assume that R is local with maximal ideal containing π. We want to study how much of this parametrization is canonical.

Obviously we can replace σ by its face parametrizing the stratum of $\overline{T}$ which contains the image of the closed point of $\mathrm{Spec}(R)$. Let $L' \subseteq L$ denote the lattice spanned by σ. Then we have a formally smooth map

$$\mathrm{Spec}(R) \longrightarrow \overline{T}'_\lambda \subseteq \overline{T}',$$

into the torus-embedding defined by (L', σ). Thus change notation and assume $L = L'$, but the map only formally smooth (i.e. flat with geometrically regular fibres).

4. Proposition. — *R is normal. The complement of the open stratum in* $\mathrm{Spec}(R)$ *is the union of irreducible divisors E. They correspond one to one to the extremal rays of σ. If $\rho \in L^\vee \cap \sigma^\vee$ is the indivisible generator of such a ray, then for any $\mu \in L$ the function $m \in R$ has valuation $\mu(\rho)$ in the generic point of the correspodning divisor.*

Furthermore $L^\vee \cap \sigma^\vee =$ invertible ideals $I \subset R$ with support in the complement of the open stratum, via $\mu \mapsto R \cdot \mu$.

Proof. — Choose a $\rho \in L$ which lies in the interior of σ. Then define a decreasing filtration on $V[L^\vee \cap \sigma^\vee]$ by $F^b(V[L^\vee \cap \sigma^\vee]) = \oplus_{\mu(\varphi) \geqslant n} V \cdot \mu$. It induces a quotient filtration on $V[L^\vee \cap \sigma^\vee]/(\pi - \lambda)$ with

$$\mathrm{gr}^\circ_{F_\rho}(V[L^\vee \cap \sigma^\vee]/(\pi - \lambda)) \cong k[L^\vee \cap \sigma^\vee],$$

and by pushout a filtration F°_ρ on R with $\mathrm{gr}_{F_\rho}(R) \cong \kappa[L^\vee \cap \sigma^\vee]$, $\kappa =$ residue-field of R. Furthermore this filtration defines the $\mathfrak{m}$-adic topology on R. As the associated graded is normal, so is R.

For each extremal ρ we obtain a divisor in $\overline{T}$ isomorphic to the torus-embedding defined by $(L/\langle\rho\rangle$, projection of $\sigma)$, and the valuation of $\mu \in L^\vee$ along this divisor is $\mu(\rho)$. The intersection with $\overline{T}_\lambda$ is as follows: If $\lambda(\rho) = 0$, it is $\overline{T}'_\lambda$ with T' corresponding to $L/\langle\rho\rangle$. Its preimage in $\mathrm{Spec}(R)$ is normal and thus irreducible. If $\lambda(\rho) = n > 0$, then the intersection does not meet the generic fibre of $\overline{T}_\lambda$. In the special fibre

$$\overline{T}_\lambda \otimes_V k = \mathrm{Spec}(k[L^\vee \cap \sigma^\vee](\lambda))$$

the intersection is the boundary component of $\mathrm{Spec}(k[L^\vee \cap \sigma^\vee])$ defined by ρ. Its preimage in $\mathrm{Spec}(R)$ is irreducible for the same reasons as before, and also the valuation of μ is as required (the intersection with $\overline{T}_\lambda$ is transverse). As the complement of the open stratum in $\mathrm{Spec}(R)$ is the union of the divisors, we have shown the second assertion.

Finally assume $I = R \cdot f \subseteq R$ is an invertible ideal. For any $\rho \in L^\vee \cap \sigma^\vee$ we can as before define filtrations F_ρ on

$$V[L^\vee \cap \sigma^\vee], \quad V[L^\vee \cap \sigma^\vee]/(\pi - \lambda)$$

and R. Now $\mathrm{gr}^0_{F_\rho}(R)$ is formally smooth over

$$\mathrm{gr}^0_{F_\rho}(V[L^\vee \cap \sigma^\vee]/(\pi - \lambda)) = k[L^\vee \cap \sigma^\vee \cap \rho^\perp],$$

and $\mathrm{gr}_{F_\rho}(R)$ is an integral domain (as this holds for $\overline{T}_\lambda$).

Now the conditions on I mean that f divides some $\mu_0 \in L^\vee \cap \sigma_j^\vee$, $\mu_0 = f \cdot g$. First choose $\rho \in \overset{\circ}{\sigma}$. Then if a and b are maximal with $f \in F^a_\rho(R)$, $g \in F^b_\rho(R)$, it follows by compution in $\mathrm{gr}_{F_\rho}(R) = \kappa[L^\vee \cap \sigma^\vee]$ that $a + b = \mu_0(\rho)$, and after multiplication by units that there is a decomposition $\mu_0 = \mu - \nu$ with $f - \mu \in F^{a+1}_\rho(R)$, $g - \nu \in F^{b+1}_\rho(R)$. μ and ν do not change if we vary slightly the ray $\mathbb{R}_+ \cdot \rho$. As σ^0 is convex they are thus independant of ρ.

Next choose ρ generating an extremal ray of σ. It corresponds to an irreducible divisor E. We show that for the corresponding valuation $v_E(f) \leqslant v_E(\mu) = \mu(\rho)$. If this holds for all E then f divides μ (by normality) and g divides ν (by symmetry). But then $I = R \cdot \mu$. Next assume that $v_E(f) > \mu(\rho) = n$. Thus $f \in F^{n+1}_\rho(R)$, which is generated by finitely many $\chi \in L^\vee \cap \sigma^\vee$ with $\chi(\rho) \geqslant n + 1$. Choose a ray in the interior $\overset{\circ}{\sigma}$ sufficiently close to ρ. It is generated by a $\widetilde{\rho}$ such that $\frac{n \cdot \widetilde{\rho}}{\mu(\widetilde{\rho})}$ is very close to ρ. Especially we can achieve that each of the κ's has values $> n$ on it. Thus if $\widetilde{n} = \mu(\widetilde{\rho})$, then $f \in F^{\widetilde{n}+1}_{\widetilde{\rho}}$, which cannot happen. Hence we have shown surjectivity of the map.

Injectivity follows because we already know how to recover μ from I_μ. Conversely once we have identified $\sigma^\vee$ with the semigroup of effective Cartier-divisors supported in the boundary, we obtain $L^\vee$ as the group of all such divisors, and then also L and σ. Also λ corresponds to π. Now extend λ to a basis of $L^\vee$, and choose equations for the remaining basis-elements. This defines a map $\mathrm{Spec}(R) \to \overline{R}_\lambda$ which differs from the given one by the action of T via a point z of $T(R)$. Passing to the $\mathfrak{m}$-adic

completion $\widehat{R}$ the two maps differ by an automorphism of $\widehat{R}$, which is the identity on $\kappa = R/\mathfrak{m}$ and multiplies $\mu \in L^\vee \cap \sigma^\vee$ by $\mu(z)$.

All in all (L, σ) is essentially unique up to automorphism once given $\mathrm{Spec}(R)$ and its open stratum.

5. Remark. — One might ask whether the fibre $R \otimes_V k$ is reduced. This happens if and only if this holds for $\overline{T}_\lambda$, i.e. if $k[L^\vee \cap \sigma^\vee]/(\lambda)$ is reduced, that is if $\lambda(\rho) \in \{0, 1\}$ for all extremal rays ρ of σ. We can always achieve this by replacing L by $\widetilde{L} = \lambda^{-1}(e\mathbb{Z})$ with e sufficiently divisible, and λ by λ/e. Choose e such that $\lambda(\rho)$ divides e if $\lambda(\rho) \neq 0$. Then ρ changes to $\widetilde{\rho} = \frac{e}{\lambda(\rho)} \cdot \rho$, and $\lambda/e(\widetilde{\rho}) = 1$. This operation amounts to adjoining $\sqrt[e]{\pi}$ to V. We shall usually assume that this has been done. Then $R \otimes_V A$ is normal for any flat normal V-algebra A. Especially $R \otimes_V \overline{V}$ is normal.

There is also an intimate relation to log-structures as defined by Fontaine-Illusie-Kato: Namely on $X = \mathrm{Spec}(R)^{\text{ét}}$ consider the sheaf of monoids $P = j_*(\mathcal{O}^*_{X^0}) \cap \mathcal{O}_X$ ($j : X^0 \hookrightarrow X$ inclusion). Its fibre at $x \in \tau-$ stratum is an extension $0 \to \mathcal{O}^*_{x,x} \to P_x \to \tau^\vee \to 0$, with $\mathcal{O}^*_{x,x}$ acting freely on P_x. Thus P defines a fine log-structure, log-smooth over $\mathrm{Spec}(V)$ with the log-structure defined by $V - \{0\}$. Conversely if $X^0 \subseteq X$ is such that $P = j_*(\mathcal{O}^*_{X^0}) \cap \mathcal{O}_X$ defines a fine log-structure log-smooth over $\mathrm{Spec}(V)$ with $V - \{0\}$, then for each $x \in X$, $P_x(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x})^*$ injects into the group of Weil-divisors supported on the complement of the open stratum in $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x})$. If $L^\vee_x = \langle P_x/(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{x,x})^* \rangle^{\mathrm{group}}$, $L = (L^\vee)^\vee$, then the valuations at irreducible components of the boundary induce maps $L^\vee \to \mathbb{Z}$ and thus elements $\rho \in L$, which span a polyhedral cone $\sigma \subseteq L_{\mathbb{R}}$ with $P_x/(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{x,x})^* = L^\vee \cap \sigma^\vee$. Furthermore elements of P_x lifting a basis of L contained in $\sigma^\vee$ define a formally smooth map $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{x,x}) \to \overline{T}_\lambda$, where $\lambda \in L^\vee$ corresponds to π. $\lambda \in L^\vee$ may not be indivisible (it is only indivisible by p), but assume that it is. Hence our toroidal description can be translated into log-structures. However as all the important tools we need from the theory have been formulated and proved in toroidal geometry long before the advent of log-structures, we use the toroidal language.

Appendix 2: Length computations. — Let us start with the torus-embedding

$$T = \mathbb{G}_m^{d+1} \subseteq X = \mathrm{Spec}(V[L^\vee \cap \sigma^\vee]) = \mathrm{Spec}(R).$$

For a sublattice $L' \subseteq L$ let $X' = \mathrm{Spec}(R') = \mathrm{Spec}(V[L'^\vee \cap \sigma^\vee])$. As an R-module

$$R' = \bigoplus_{\mu \in L'^\vee/L^\vee} V[(\mu + L^\vee) \cap \sigma^\vee] = \bigoplus_\mu R'_\mu,$$

where the isomorphism-class of R'_μ as R-module depends only on the integral parts $[\mu(l)], l \in L$ the generator of an extremal ray of σ. Namely for $\kappa \in L^\vee$ $(\mu + \kappa)$ lies in $\sigma^\vee$ if any only if $\kappa(l) \geqslant -[\mu(l)]$ for all such l. As μ can be chosen in a compact set (representatives for $L^\vee_{\mathbb{R}}/L^\vee$) the numbers $[\mu(l)]$ are bounded. One derives that there are onyl finitely many isomorphism classes of R'_μ's, independant of the choice

of L'. Furthermore, if for some integer N, $L' \subseteq N \cdot L$, then the multiplicity of a given isomorphism-class of R_μ's is $[L : L'] \cdot (\text{constant} + O(1/N))$. Also the constant is strictly positive for the multiplicity of the trivial R-module $R_\mu \cong R$.

Now firstly if $\lambda \in L^\vee$ is such that $\sigma \cap \ker(\lambda)$ is a simplex spanned by a partial basis of L, then R_λ is regular and R'_λ is flat over R_λ (being finite and Cohen-Macaulay). Thus if $P_\bullet \to P'$ is a resolution of R by finitely generated projective R-modules there exists on N such that λ^N is nullhomotopic on P_1, i.e. $\lambda^N \cdot \mathrm{id} = d \circ s + s \circ d$ for suitable $s : P_1 \to P_2, P_0 \to P_1$.

Thus λ^N annihilates $\mathrm{Tor}_1^R(R', M)$ for all R-modules M, and also all higher Tor's. It now follows that N can be chosen independantly from L'. The same holds after flat pushout. This already shows one of our claims:

If we let $L' = L_n$ (with L_n as before) and if $\sigma \cap \ker(\lambda)$ is a simplex, then for a suitable choice we obtain first on the level of torus-embeddings and then for $R \subseteq R_n \subseteq R_\infty$, that

$$p^\alpha \cdot \mathrm{Tor}_1^{R_n}(R_\infty, \text{any } R_n\text{-module}) = 0 \text{ for } n \gg 0.$$

Now for the definition of $\lambda()$: We assume that for a cofinal sequence of L_n's $L_n = N \cdot L$ with $N \to \infty$. Let $d_n = [L : L_n]$ denote its index. Then after pushout we obtain that for all n (in our cofinal sequence)

$$R_{n+m} = \bigoplus_{\mu \in L_{n+m}^\vee / L_n^\vee} R_{n+m,\mu}$$

where only finitely many isomorphism types of direct summands occur, and the relative frequency of each summand converges (for $m \to \infty$) to a constant, which is non-zero for the type $R_{n+m,\mu} \cong R$. Moreover this summand occurs with multiplicity $\geqslant c \cdot (d_{n+m}/d_m)$, $c > 0$ a constant independant of n and m.

Now assume M_∞ is a finitely presented R_∞-module which is $\mathfrak{m}$-torsion. ($\mathfrak{m}$ = maximal ideal of R). Then $M_\infty = M_n \otimes_{R_n} R_\infty$ for a finitely presented R_n-module M_n which is also $\mathfrak{m}$-torsion and thus of finite length. Define

$$\lambda(M_\infty) = \lim_{m \to \infty} \frac{d_n}{d_{n+m}} \mathrm{length}_R(M_n \otimes_{R_n} R_{n+m})$$

The limit exists because the relative multiplicities of the $R_{n+m,\mu}$ converge. Furthermore

$$\mathrm{length}_R(M_n \otimes_{R_n} R_{n+m}) \geqslant c \cdot d_{n+m} \cdot \lambda(M_\infty) \text{ for all } m.$$

Especially M_∞ vanishes if $\lambda(M_\infty) = 0$. In more generality we have:

Let $M_n \twoheadrightarrow \widetilde{M}_n$ denote a surjection, inducing $M_\infty \twoheadrightarrow \widetilde{M}_\infty$. Then for all m

$$\mathrm{length}(\mathrm{kernel}(M_n \otimes_{R_n} R_{n+m} \to \widetilde{M}_n \otimes_{R_n} R_{n+m}) \geqslant c \cdot d_{n+m} \cdot (\lambda(M_\infty) - \lambda(\widetilde{M}_\infty))$$

Next assume M_∞ is only finitely generated but still $\mathfrak{m}$-torsion. Choose a finite set of generators and denote by M_n the R_n-submodule generated by them. Then M_{n+m} is a quotient of $M_n \otimes_{R_n} R_{n+m}$, and the sequence $\lambda(M_n \otimes_{R_n} R_\infty)$ is decreasing.

6. Claim

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d_n}\mathrm{length}_R(M_n) = \lim_{n\to\infty}\lambda(M_n\otimes_{R_n}R_\infty)$$

Define this limit as $\lambda(M_\infty)$.

Proof of claim. — For $\varepsilon > 0$ choose n such that $\lambda(M_n\otimes_{R_n}R_\infty)\leqslant\lambda(M_\infty)+\varepsilon$. Then if $N_{n+m} = \ker(M_n\otimes_{R_n}R_{n+m}\to M_{n+m})$, we have that for $l\geqslant 0$

$$\begin{aligned}\mathrm{length}_R\ker(M_n\otimes_{R_n}R_{n+m+l}\to M_{n+m}\otimes_{R_{n+m}}R_{n+m+l})&\\ \geqslant c\cdot(d_{n+m+l}/d_{n+m})\cdot\mathrm{length}_R(N_{n+m})&\end{aligned}$$

Passing to the limit $l\to\infty$ we obtain

$$\begin{aligned}\mathrm{length}_R(N_{n+m}) &\leqslant \frac{d_{n+m}}{c}(\lambda(M_n\otimes_{R_n}R_\infty)-\lambda(M_{n+m}\otimes_{R_{n+m}}R_\infty))\\ &\leqslant \frac{d_{n+m}\cdot\varepsilon}{c}\end{aligned}$$

Thus $0\leqslant\frac{1}{d_{n+m}}(\mathrm{length}_R(M_n\otimes_{R_n}R_{n+m})-\mathrm{length}_R(M_{n+m}))\leqslant\varepsilon/c$, which implies the claim.

Next for an arbitrary $\mathfrak{m}$-torsion R_∞-module M define

$$\lambda(M) = \sup\{\lambda(M')\mid M'\subseteq M\text{ finitely generated submodule}\},$$

so $0\leqslant\lambda(M)\leqslant\infty$.

7. Lemma (additivity). — Suppose $0\to M'\to M\to M''\to 0$ is an exact sequence of $\mathfrak{m}$-torsion R_∞-modules. Then

$$\lambda(M) = \lambda(M')+\lambda(M'')$$

Proof. — We easily reduce to M and M'' finitely generated. For a finite system of generators of M let M_n denote the R_n-module generated by them, M''_n its image in M'', and M'_n its intersection with M'. Then we have

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d_n}\mathrm{length}_R(M'_n) = \lambda(M)-\lambda(M'').$$

For any finite set of elements of M' the R_n-module $\widetilde{M'_n}$ generated by them is for big n contained in M'_n, and has length $\leqslant\mathrm{length}_R(M'_n)$. It follows that

$$\lambda(M')\leqslant\lambda(M)-\lambda(M'').$$

On the other hand for $\varepsilon>0$ choose n such that

$$\lambda(M'')\geqslant\lambda(M''_n\otimes_{R_n}R_\infty)-\varepsilon.$$

Then for $m \geqslant 0$ the kernel of $M''_n \otimes_{R_n} R_{n+m} \to M''_{n+m}$ has length bounded by $\frac{\varepsilon}{c} \cdot d_{n+m}$, by the previous arguments. From the commutative diagram with exact rows

$$\begin{array}{ccccccccc} & & M'_n \otimes_{R_n} R_{n+m} & \longrightarrow & M_n \otimes_{R_n} R_{n+m} & \longrightarrow & M''_n \otimes_{R_n} R_{n+m} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M'_{n+m} & \longrightarrow & M_{n+m} & \longrightarrow & M''_{n+m} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

we obtain a surjection

$$\ker(M''_n \otimes_{R_n} R_{n+m} \to M''_{n+m}) \twoheadrightarrow M'_{n+m}/R_{n+m} \cdot M'_n$$

Thus

$$\operatorname{length}_R(M'_{n+m}) \leqslant \operatorname{length}_R(R_{n+m} \cdot M'_n) + \frac{\varepsilon}{c} \cdot d_{n+m}$$

and in the limit $m \to \infty$

$$\lambda(M) - \lambda(M'') \leqslant \lambda(R_\infty \cdot M'_n) + \frac{\varepsilon}{c} \leqslant \lambda(M') + \frac{\varepsilon}{c} \leqslant \lambda(M') + \frac{\varepsilon}{c}.$$

As ε was arbitrary we derive the lemma.

Finally if M is finitely presented and annihilated by $\pi^{1/p}$, then $\lambda(M \otimes_{R_\infty \varphi} R_\infty) = p^{d+1} \cdot \lambda(M)$:

This follows because first on the level of torus-embeddings pushout be Frobenius induces an isomorphism

$$k[L_n^\vee \cap \sigma^\vee]/(\lambda^{1/p}) \xrightarrow{\sim} k[pL_n^\vee \cap \sigma^\vee]/(\lambda)$$

Thus for modules annihilated by $\pi^{1/p}$ or $\lambda^{1/p}$ pushout by Frobenius replaces L_n by $\frac{1}{p}L_n$, hence d_n by $p^{-(d+1)}d_n$, and the assertion follows. It then also holds for finitely generated M by passage to the limit from $M_n \otimes_{R_n} R_\infty$.

Finally if M' is submodule of a finitely presented M_1 and $\lambda(M') = 0$, then $M'' = M/M'$ is also finitely presented, with $\lambda(M) = \lambda(M'')$. Then

$$\operatorname{length}_R(\ker(M_n \to M''_n)) \leqslant \frac{1}{c}(\lambda(M) - \lambda(M'')) = 0,$$

hence $M' = (0)$.

Remark. — There exist finitely generated $M \neq (0)$ with $\lambda(M) = 0$, for example the residue field of R_∞.

In fact $\lambda(M)$ vanishes if M is almost zero, that is annihilated by any positive p-power p^α :

We may assume that M is finitely generated. It suffices to show that for any finite $\mathfrak{m}$-torsion R_0-module M_0 and any sequence $\alpha_n \to 0$ the limit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d_n} \operatorname{length}_R(M \otimes_R R_n/\pi^{\alpha_n} \cdot R_n) = 0.$$

This follows from toroidal geometry. Namely in the decomposition

$$R' = \bigoplus_{\mu \in L'^{\vee}/L^{\vee}} V[(\mu + L^{\vee}) \cap \sigma^{\vee}] = \bigoplus_{\mu} R'_{\mu}$$

the summand R'_μ lies in the ideal generated by λ^α (if $\alpha \cdot \lambda \in L'^{\vee}$) if $\mu(\ell)$ and $(\mu + \alpha\lambda)(\ell)$ have the same integral parts, $\ell \in L$ running though generators of extremal rays of σ. For $\alpha \to 0$ the fraction of μ's for which this does not happen is bounded asymptotically (as $L' \subseteq p^n \cdot L$ with $n \to \infty$) by constant $\cdot\, \alpha$. As the others disappear modulo π^{α_n} (after basechange) the assertion follows. By additivity we derive that λ is invariant under almost isomorphisms.

2c. Galois cohomology. — Suppose G is a finite group, A a commutative ring (with unit), B an A-algebra with G-action. Assume furthermore that for $b \in B$ $\mathrm{tr}(b) = \sum_{g \in G} g(b)$ lies in the image of A in B. If M is a B-module with semilinear G-action, we may compute the cohomology $H^*(G, M)$ using a G-acyclic resolution by such $B - G$-modules. If $b \in B$ has image $a = \mathrm{tr}(b) \in A$, then a annihilates all higher cohomology:

For $m \in M$ we have $\mathrm{tr}(b \cdot m) = \sum_{g \in G} g(b \cdot m) \in M^G$, and if $m \in M^G$ then $\mathrm{tr}(b \cdot m) = a \cdot m$. Applying this to a resolution of M the claim follows.

If we also assume that there exist elements $b_i, c_i \in B$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ such that $b \in B$

$$a = \sum_{i=1}^{r} b_i \cdot c_i$$

$$0 = \sum_{i=1}^{r} b_i \cdot g(c_i)$$

for $g \in G$, $g \neq 1$, we can define a map

$$M \longrightarrow B \otimes_A M^G$$

$$m \longmapsto \sum_{i=1}^{r} b_i \otimes_A \mathrm{tr}(c_i \cdot m)$$

The composition either way of this map with the natural

$$B \otimes_A M^G \longrightarrow M$$

will be a. For example if $A \subseteq B$ is an almost étale Galois-covering with group G, then we apply this to $a = \pi^\alpha$ (any $\alpha > 0$), $\sum_{i=1}^{r} b_i \otimes c_i = \pi^\alpha \cdot e_{B/A}$, and obtain that

$$H^i(G, M) \approx 0 \quad (i > 0)$$

$$M \approx B \otimes_A M^G$$

Passing to the limit this will also hold if B is an inductive limit of almost étale coverings and G the corresponding profinite group, i.e. for the extensions $R_\infty \subseteq \overline{R}$. Here $\overline{R}$ denotes the normalization of R in the maximal étale covering of the preimage of $T \subseteq \overline{T}$ in $\mathrm{Spec}(R)$, that is the union of all finite extensions $R \subseteq S$ with S normal

and $S[1/\pi]/R[1/\pi]$ ramified only along the divisor "at infinity". For simplicity we assume that R is an integral domain (otherwise we would take everywhere products of integral domains). If $\overline{V}$ denotes the integral closure of V in $\overline{K}$, $\overline{R}$ contains as subring the normalization of the image of $R \otimes_V \overline{V} \to \overline{R}$. If $\lambda = n \cdot \lambda_0$ with λ_0 indivisible in L then firstly R contains the subring $V' = V[\sqrt[n]{\pi}]$. Replacing V by V' we then may assume that $\lambda = \lambda_0$. In this case the normalization of V in R is unramified over V. Thus if the residue field k is algebraically closed it coincides with V_j and $R \otimes_V \overline{V}$ is an integral domain. In any case we denote by Δ the Galois-group of $\overline{R}$ over the normalization of the image of $R \otimes_V \overline{V}$. If $R \otimes_V \overline{V}$ is an integral domain this is $\Delta = \pi_1(\mathrm{Spec}(R \otimes_V \overline{K})^0)$. The coverings defined by the R_n give a map

$$\Delta \longrightarrow L \otimes \widehat{\mathbb{Z}}(1) = \widehat{L}(1) \text{ (profinite completion).}$$

Let Δ_∞ denote its image and $\Delta_0 \subseteq \Delta$ its kernel. As R is formally étale over $\overline{T}_\lambda$ and the R_n are totally ramified over R at all generic characteristic p-points if $[L : L_n]$ is a p-power, there is a surjection $\Delta_\infty \twoheadrightarrow L \otimes \mathbb{Z}_p(1)$, with kernel of order prime to p. For most arguments we can in fact replace Δ_∞ by $L \otimes \mathbb{Z}_p(1)$.

Now suppose $\overline{M}$ is a p-torsion $\overline{R}$-module with a semilinear continuous Δ-action. To study the cohomology $H^*(\Delta, M)$ we use the spectral sequence

$$E_2^{a,b} = H^a(\Delta_\infty, H^b(\Delta_0, M)) \Longrightarrow H^{a+b}(\Delta, M).$$

The extension governed by Δ_0 is a composition of almost étale extensions. Thus all higher Δ_0-cohomology almost vanishes,

$$M \approx (M^{\Delta_0}) \otimes \overline{R},$$

and $H^*(\Delta, M) \approx H^*(\Delta_\infty, M^{\Delta_0})$. As Δ_∞ has cohomological dimension d this vanishes in degree $> d$. Also after choice of topological generators $\delta_1, \ldots, \delta_d$ of Δ_∞ the cohomology is represented by the Koszul-complex of $\delta_1 - 1, \ldots, \delta_d - 1$ acting on M^{Δ_0}. This commutes with formally étale base change $R \to R'$.

For example we can study the cohomology of quotients $\overline{R}/p^s \cdot \overline{R}$. By the above we may (up to almost isomorphism) replace R by the affine ring of the torus-embedding $\overline{T}_\lambda$, and have to study the cohomology of $\mathbb{Z}_p(1)^d$ acting on

$$V[\sigma^\vee \cap L^\vee[1/p]]/(\lambda - \pi) \otimes_V \overline{V}/p^s\overline{V}$$

This module is free over $\overline{V}/p^s\overline{V}$, where a basis can be obtained as follows: λ acts freely on the monoid $\sigma^\vee \cap L^\vee[1/p]$. For each orbit $\{\mu, \mu + \lambda, \mu + 2\lambda \ldots\}$ choose the minimal representative μ. Then these μ form a basis.

All the basis-elements μ are eigenvectors for $\mathbb{Z}_p(1)^d$, with character $e^\mu : \mathbb{Z}_p(1)^d \to \mu_{p^\infty}$. If this character has order p^t the corresponding cohomology is annihilated by $\zeta_{p^t} - 1$, ζ_{p^t} a primitive p^t-th root of unity. Thus up to terms annihilated by $\zeta_p - 1$ only the eigenspaces with trivial e^μ contribute to cohomology. e^μ is trivial if and only if $\mu \mid \ker(\lambda)$ is in $\ker(\lambda)^\vee$. Then there exists a unique $\alpha \in \mathbb{Z}[1/p]$, $0 \leqslant \alpha < 1$, with $\mu - \alpha\lambda \in L^\vee$ integral. Let $\mathcal{R} = \bigoplus_{\alpha,\mu} V\pi^\alpha \cdot \mu$ (sum over such α, μ). Then

$\mathcal{R} = R_\infty \cap R \otimes_V K_\infty$ is the normalization of $R \otimes_{\boldsymbol{V}} V_\infty$, and $\pi\mathcal{R} \subseteq R \otimes_V \overline{V}$. Furthermore (as $H^*(\mathbb{Z}_p(1)^d, V) = \Lambda^\bullet(V(-1)^d)$)

$$H^*(\Delta, \overline{R}/p^s\overline{R}) \approx \mathcal{R} \otimes \Lambda^\bullet(\mathrm{Hom}(\Delta_\infty, \overline{V}/p^s\overline{V})) \oplus (\text{terms annihilated by } \zeta_p - 1).$$

Especially we get compatible almost maps

$$\mathrm{tr} : H^d(\Delta, \overline{R}/p^s\overline{R}) \longrightarrow \mathcal{R} \otimes_{V_\infty} \overline{V}/p^s\overline{V}(-d).$$

(Compatibility forces them to vanish on the second direct summand). The target can be more canonically identified with $\Omega^{d,\log}_{R/V} \otimes_R \mathcal{R} \otimes_{V_\infty} \overline{V}/p^s\overline{V}(-d)$. Here $\Omega^{\log}_{R/V}$ denotes the logarithmic module of differentials, for the log-structures on $\overline{T}_\lambda$ and $\mathrm{Spec}(V)$ given by $\sigma^\vee \cap L^\vee$ and $\mathbb{N}$ ($\mu \in \sigma^\vee \cap L^\vee$ maps to μ, and $1 \in \mathbb{N}$ to π). By étaleness

$$\Omega^{\log}_{R/V} \otimes V/p^sV \cong \ker(\lambda)^\vee \otimes R$$

Of course $\Omega^{d,\log}_{R/V}$ is the d'-th exterior power. At least modulo p^s it is free of rank one. Checking all the identification we get almost maps

$$\mathrm{tr} : H^d(\Delta, \overline{R}/p^s\overline{R}) \longrightarrow \Omega^{d,\log}_{R/V} \otimes_R \mathcal{R} \otimes_{V_\infty} \overline{V}/p^s\overline{V}(-d)$$

which are independant of the choice of generators $\delta_1, \ldots, \delta_d$. In fact they only depend on R (with its log-structure) and not on the formally étale map $\mathrm{Spec}(R) \to \overline{T}_\lambda$. This follows (as in [F2], Sect. I, 4) from the following facts, which can be checked by direct calculation for $\overline{T}_\lambda$ and then also hold for R by formal étaleness and almost étaleness:

i) The sequence

$$0 \longrightarrow \Omega^{\log}_{\overline{V}/V} \otimes_{\overline{V}} \overline{R} \longrightarrow \Omega^{\log}_{\overline{R}/R} \longrightarrow \Omega^{\log}_{\overline{R}/R\otimes\overline{V}} \longrightarrow 0$$

is almost exact

ii)

$$\Omega^{\log}_{\overline{V}/V} \cong \overline{V}[1/p]/\rho^{-1}\overline{V}(1)$$

for an element $\rho \in \overline{V}, \rho \neq 0$. The isomorphism is induced from

$$d\log : \mu_{p^\infty} \longrightarrow \Omega^{\log}_{\overline{V}/V}.$$

iii) Consider the exact sequence

$$\Omega^{\log}_{R/V} \otimes_R \overline{R} \longrightarrow \Omega^{\log}_{\overline{R}/\overline{V}} \longrightarrow \Omega^{\log}_{\overline{R}/R\otimes_V\overline{V}} \longrightarrow 0$$

Then the kernel of the first map is almost contained in $\bigcap_{s\geqslant 0} p^s \cdot (\Omega^{\log}_{R/V} \otimes_R \overline{R})$. Furthermore the induced map

$$\mathrm{Hom}(\tfrac{1}{p^s}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}, \Omega^{\log}_{\overline{R}/R\otimes_V\overline{V}}) \longrightarrow \Omega^{\log}_{R/V} \otimes_R \overline{R}/p^s\overline{R}$$

is an almost isomorphism.

iv) Applying $\mathrm{Hom}(\frac{1}{p^s}\mathbb{Z}/\mathbb{Z},)$ to the exact sequence in i) gives an almost exact sequence

$$0 \longrightarrow \rho^{-1}(\overline{R}/p^s\overline{R}(1)) \longrightarrow \text{middle term} \longrightarrow \Omega^{\log}_{R/V} \otimes_R \overline{R}/p^s\overline{R} \longrightarrow 0,$$

thus a map

$$\Omega^{\log}_{R/V} \longrightarrow H^1(\Delta, (\overline{R}/p^s\overline{R})(1))$$

By skew-commutativity of the cup-product we obtain

$$\Omega^{d,\log}_{R/V} \otimes_V \overline{V}/p^s\overline{V}(-d) \longrightarrow H^d(\Delta, \overline{R}/p^s\overline{R})$$

which is $\rho^d \cdot d!$-times the map constructed before.

v) As $\rho^d \cdot d!$-times our maps are canonical, compatibility for varying s implies the assertion.

Remark. — So from now on we assume that $\mathcal{R} = R \otimes_V \overline{V}$, equivalent to the cone-condition above ($(\mathbb{Q}^+ \cdot \lambda + L^\vee) \cap \sigma^\vee = \mathbb{Q}^+ \cdot \lambda + (L^\vee \cap \sigma^\vee)$). Other equivalences:
if $\mu + \alpha\lambda (\mu \in L^\vee, \alpha \in \mathbb{Q}, 0 \leqslant \alpha < 1)$ lies in $\sigma^\vee$, then so does μ.
Also: The special fibre $\overline{T}_\lambda \otimes_V k$ is reduced.

Before we start to treat duality we have to introduce coefficients. Suppose $\mathbb{L}$ is a finite $\mathbb{Z}_p$-module with a continuous action of Δ. We denote by $\mathbb{L}^t = \mathrm{Hom}(\mathbb{L}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ its dual. Next recall that $\sigma \cap \ker(\lambda)$ was supposed to be a simplex spanned by a partial basis $\rho_1, \ldots, \rho_r$ of L. On the generic fibre of $\overline{T}_\lambda$ these define normal crossings divisors $D_1, \ldots, D_r$, which are cut out by a (partial) dual basis of $L^\vee$. Choose a subset I of $\{1, \ldots, r\}$ and denote by D_I the union of the $\{D_i \mid i \in I\}$. Then for each n the preimage of D_I in $\overline{T}_{\lambda,n} \otimes_V K$ is a divisor. Let $J_{I,n} \subseteq V[L_n^\vee \cap \sigma^\vee]/(\lambda - \pi)$ denote the ideal of its reduced closure. That is $J_{I,n}$ is spanned by all $\mu \in L_n^\vee \cap \sigma^\vee$ with $\mu(\rho_i) > 0$ for $i \in I$. Finally $J_{I,\infty} \subseteq \Gamma(\overline{T}_{\lambda,\infty}, \mathcal{O})$ denotes the union of the $J_{I,n}$. One checks that for any $\mu \in L^\vee \cap \sigma^\vee$ with $\mu(\rho_i) > 0$ for $i \in I$, $\mu(\rho_i) = 0$ for $i \notin I$, $J_{I,\infty}$ is almost generated by the fractional powers μ^{1/p^n}. (Use that any μ' vanishing on $\sigma \cap \ker(\lambda)$ divides a power of π). Thus $J_{I,\infty}$ is almost a union of principal ideals and almost flat.

Finally we apply pushout to R. If we assume π is contained in the Jacobsen radical of R (for example if R is π-adically complete) then R is normal, and $R[1/\pi]$ is regular with the pullback of the D_i defining a normal crossings divisor. Then one checks that the ideal $J_{I,\infty} \otimes \overline{R}[1/\pi]$ defines the reduced pullback-divisor and thus only depends on the pullback of D_I to $\mathrm{Spec}(R[1/\pi])$, not on the particular representation $\mathrm{Spec}(R) \to \overline{T}_\lambda$. Finally be almost étaleness of $\overline{R}$ over $\Gamma(\overline{T}_{\lambda,\infty}, \mathcal{O})$ the ideal $J_{I,\infty} \cdot \overline{R}$ is almost equal to the ideal defining the closure, thus also as canonical as the divisor D_I. Call it $\overline{J}_I$.

Now our aim is to study the cohomology of Δ with coefficients $\mathbb{L} \otimes \overline{J}_I$. This depends only on the image of $\overline{J}_I$ in the π-adic completion of R, so that everything is canonical even if π should not lie in the Jacobsen radical of R.

Next comes finiteness. As $R\otimes_V \overline{V}$ is the inductive limit of noetherian rings ($R\otimes_V V'$, V' a finite extension of V) with flat transition-maps, it is coherent. That is any finitely presented $R\otimes_V \overline{V}$-module has a projective resolution by finitely generated free $R\otimes_V \overline{V}$-modules, and the finitely presented $R\otimes_V \overline{V}$-modules form an abelian subcategory of all $R\otimes_V \overline{V}$-modules.

We say that an $R\otimes_V \overline{V}$-module M is almost finitely presented if for each $\alpha > 0$ there exists a finitely presented M_α and a π^α-isomorphism $f : M_\alpha \to M$ i.e. kernel and cokernel of f are annihilated by π^α. The almost finitely presented $R\otimes_V \overline{V}$-modules also form an abelian subcategory. Now suppose $\mathbb{L}$ is a finite $\mathbb{Z}_p$-module with a continuous Δ-action.

8. Proposition. — *The cohomology-groups $H^i(\Delta, \mathbb{L}\otimes \overline{J}_I)$ are almost finitely presented over $R\otimes_V \overline{V}$.*

Proof. — By devissage we may assume that $p\cdot\mathbb{L} = (0)$. We also may replace R by its p-adic completion, so $\mathrm{Spec}(R)$ is formally étale over $\overline{T}_\lambda$. Especially we have that $R\otimes_V K$ is regular, and the complement of $T \subseteq \overline{T}$ defines a normal crossing divisor. Replacing L by a sublattice $L' \subseteq L$ we may assume that $\mathbb{L}$ is unramified over $\mathrm{Spec}(R\otimes_V \overline{K})$. (If Δ' is the group corresponding to L', use the Hochschild spectral sequence for $0 \to \Delta' \to \Delta \to \Delta/\Delta' \to 0$). Next by almost faithfully flat descent (for $\overline{R}/R_\infty$) $(\mathbb{L}\otimes\overline{R})^{\Delta_\infty}$ is almost finitely presented. Thus for each $\alpha > 0$ there exists an integer n, a finitely presented R_n-module M_α action, and a π^α-isomorphism

$$M_\alpha \otimes_{R_n} R_\infty \longrightarrow (\mathbb{L}\otimes\overline{R})^{\mathrm{Gal}(\overline{R}/R_\infty\otimes_V\overline{K})}$$

By increasing n we make this $\mathrm{Gal}(R_\infty/R_n\otimes_V\overline{V})$-linear (trivial operation on M_α). It suffices if the images of generators of M_α are fixed.

Again by the Hochschild spectral sequence we may replace R by R_n, i.e. study $H^*(\Delta_\infty, M\otimes_R J_{\infty,I})$. Now for each n, $J_{\infty,I}$ is the direct sum of a finitely presented $R_n\otimes_V\overline{V}$-module and modules on which a generator δ of Δ_∞ acts like ζ_{p^n}, ζ_{p^n} a primitive p^n-th root of unity. (There are generated by μ's, μ such that $\ker(\lambda)$ not integral on $p^{n-1}L$.) For these the cohomology is annihilated by $\zeta_{p^n}-1$, while the first direct summand has finitely presented cohomology. (The p-adic valuation of $\zeta_{p^n}-1$ is $1/(p-1)p^{n-1}$ and converges to zero.)

Finally we come to duality. Recall ([H], Ch. V, § 2) that a dualizing complex D^* over a noetherian ring A is a complex with coherent cohomology which has an injective resolution in which each indecomposable injective appears precisely once. Equivalently for each prime $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ there exists an integer $d(\mathfrak{p})$ (related to the codimension) with $\mathrm{Ext}^i_{A_\mathfrak{p}}(K(\mathfrak{p}), D^*_\mathfrak{p}) = \kappa(\mathfrak{p})$ for $i = d(\mathfrak{p})$, and 0 else. Then $K^* \to \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}(K^*, D^*)$ defines a perfect duality on the derived category of finite complexes with finitely generated cohomology. If A is Cohen-Macaulay D^* has only one non-trivial cohomology group, the dualizing module ω_A. For example for the

torus-embedding $\overline{T}$ a dualizing module is given by $\omega_{\overline{T}} = J \otimes \Omega^{d+1,\log}$, where J is the ideal generated by all $\mu \in L^\vee$ which are strictly positive on $\sigma - \{0\}$. This follows because on the smooth locus the dualizing module coincides with the differentials, and in general it is the reflexive extension of its restriction to the smooth locus. Also for $\overline{T}_\lambda$ the dualizing module is $\mathrm{Ext}^1_{O_{\overline{T}}}(O_{\overline{T}_\lambda}, \omega_{\overline{T}}) \cong J \otimes O_{\overline{T}_\lambda}$.

It is the ideal in $\mathcal{O}_{\overline{T}_\lambda}$ (or better in $\Omega^{d,\log}_{\overline{T}_\lambda}$) generated by all $\mu \in L^\vee$ which are strictly positive on $\sigma - \{0\}$. Finally if π is contained in the Jacobson-radical of R the map $\mathcal{O}_{\overline{T}_\lambda} \to R$ is flat with Gorenstein-fibres. Thus $\omega_{\overline{T}_\lambda} \otimes_{\overline{T}_\lambda} R = \omega_R$ is a dualizing module on R. It is isomorphic to J. Similarly the dualizing modules on R_n are isomorphic to J_n. By the general theory $\omega_{R_n} \cong \mathrm{Hom}_R(R_n, \omega_R)$. This isomorphism is determined by the evaluation at $1 \in R_n$, which defines a trace-map

$$\mathrm{tr} : \omega_{R_n} \longrightarrow \omega_R.$$

It is obtained by pushout from the trace-map on $O_{\overline{T}}$ or $O_{\overline{T}_\lambda}$. The latter sends to character $\mu \in L_n^\vee$ to itself if $\mu \in L^\vee$, and to zero else. Similarly we can define a dualizing module $\omega_{R \otimes_V \overline{V}} = \omega_R \otimes_V \overline{V}$.

By passing to the limit over finite extensions of V,

$$K^* \longrightarrow D(K^*) = \mathbb{R}\ \mathrm{Hom}_{R \otimes_V \overline{V}}(K^*, \omega_R \otimes_V \overline{V})$$

still defines a perfect duality for finite complexes with finitely presented (= coherent) cohomology, or an almost perfect duality for finite complexes with almost finitely presented cohomology. Again $\omega_{R \otimes_V \overline{V}} \subseteq R \otimes_V \overline{V}$ is the ideal J generated by all $\mu \in L^\vee$ which are strictly positive on $\sigma - \{0\}$. Similarly $\omega_{R_n \otimes_{V_n} \overline{V}} \cong J_n \subseteq R_n \otimes_{V_n} \overline{V}$ is the ideal generated by $\mu \in L_n^\vee$ strictly positive on $\sigma - \{0\}$, and we have the union $J_\infty \subseteq R_\infty \otimes_{V_\infty} \overline{V}$. It coincides almost with the ideal generated by $\mu \in \sigma^\vee$ which are strictly positive on $\sigma \cap \ker(\lambda)) - \{0\}$:

For such a μ $\quad \mu + \alpha \cdot \lambda$ is strictly positive on $\sigma - \{0\}$, for each $\alpha > 0$.

That is J_∞ almost coincides with the ideal previously named by the same symbol. Finally the trace-map becomes more complicated:

As $V_n = V[\sqrt[e]{\pi}] = V[\pi_n]$ (for some e)

$$\frac{1}{e} \cdot \mathrm{tr}_{V_n/V} : \tfrac{\pi_n}{\pi} \cdot V_n \longrightarrow V$$

defines an isomorphism

$$\tfrac{\pi_n}{\pi} V_n \cong \mathrm{Hom}_V(V_n, V).$$

Thus our old trace defines a new trace from J_n to $J \otimes_V (\frac{\pi_n}{\pi} V_n)$ and by $\otimes_{V_n} \overline{V}$ a trace-map

$$\mathrm{tr} : J_n \otimes_{V_n} \overline{V} \longrightarrow J \otimes_V (\tfrac{\pi_n}{\pi} \overline{V}) = \tfrac{\pi_n}{\pi} \otimes (J \otimes_V \overline{V})$$

It sends a $\mu \in L_n^\vee$ strictly positive on $\sigma - \{0\}$ to itself or zero, depending on whether $\mu \in \ker(\lambda)^\vee + \mathbb{Q} \cdot \lambda$ or not. Obviously these combine to define

$$\mathrm{tr} : R_\infty \otimes_{V_\infty} \overline{V} \longrightarrow \tfrac{1}{\pi}(J \otimes_V \overline{V})$$

As on finite levels we obtain isomorphisms

$$J_n \otimes_V \overline{V} \cong \mathrm{Hom}_{R\otimes_V \overline{V}}(R_n \otimes_V \overline{V}, \tfrac{\pi_n}{\pi} \cdot (J \otimes_V \overline{V})),$$

we have in the limit for each $\mu \in \ker(\lambda)^\vee \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ an almost isomorphism of μ-components

$$(J_\infty \otimes_V \overline{V})_\mu \approx \mathrm{Hom}_{R\otimes_V \overline{V}}(R_\infty \otimes_V \overline{V}, \tfrac{1}{\pi}(J \otimes_V \overline{V}))_\mu$$

Of course the map

$$J_\infty \otimes_V \overline{V} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\otimes_V \overline{V}}(R_\infty \otimes_V \overline{V}, \tfrac{1}{\pi} J \otimes_V \overline{V})$$

cannot be an almost-isomorphism because of the difference between direct sum and product (over all μ-components).

However this difficulty disappears if we take Δ_∞-cohomology: If μ has denominator p^n the cohomology of the μ-component is annihilated by $\zeta_{p^n} - 1$. It thus follows that we obtain almost-isomorphisms on cohomology. The same holds after tensoring with $(\mathbb{L} \otimes \overline{R})^{\mathrm{Gal}(\overline{R}/R_\infty \otimes_V \overline{V})}$ (π^α-isomorphic to $M_\alpha \otimes_{R_n} R_\infty$ as before). Thus (using almost étaleness).

9. Proposition. — tr *induces almost isomorphisms*

$$H^i(\Delta, \mathbb{L} \otimes \overline{R}) \approx H^i(\Delta, \mathbb{L} \otimes \mathrm{Hom}_{\overline{R}\otimes_V \overline{V}}(\overline{R}, \tfrac{1}{\pi} J \otimes_V \overline{V}))$$

Finally cohomology can be (almost) computed by taking invariants under

$$\mathrm{Gal}(\overline{R}/R_\infty \otimes_V \overline{V})$$

(an almost exact operation) and then applying the Koszul-complex with

$$(\delta_1 - 1), \ldots, (\delta_d - 1),$$

δ_i topological generators of $\Delta_\infty \cong \mathbb{Z}_p(1)^d$. However the dual of the Koszul-complex is again a Koszul-complex shifted by d. We thus obtain:

10. Theorem. — *Assume $\overline{T}_\lambda \otimes_V k$ reduced and that $\mathbb{L}$ is annihilated by p^s, and let $\mathbb{L}^t = \mathrm{Hom}(\mathbb{L}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$ denote the dual. Then*

i) $\mathbb{R}\Gamma(\Delta, \mathbb{L} \otimes \overline{R})$ *is almost isomorphic to a finite complex of $R \otimes_V \overline{V}$-modules concentrated in degrees $[0, d]$ with almost finitely presented cohomology ($\mathbb{R}\Gamma(\Delta, \cdot)$ denotes one of the canonical complexes computing group-cohomology)*

ii) *The previously defined trace-maps* tr : $H^d(\Delta, \overline{R}/p^s\overline{R}) \to \mathcal{R}/p^s\mathcal{R}$ *induce maps* tr : $H^d(\Delta, \overline{J}/p^s\overline{J}) \to \frac{1}{\pi}\omega_R \otimes \overline{V}/p^s\overline{V}$ *($\mathcal{R}$ is contained in $\frac{1}{\pi}R \otimes_V \overline{V}$)*

iii) tr *defines an almost isomorphism*

$$\mathbb{R}\Gamma(\Delta, \mathbb{L} \otimes \overline{J})(d)[d] \approx \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{R\otimes_V \overline{V}/p^s\overline{V}}(\mathbb{R}\Gamma(\Delta, \mathbb{L}^\vee \otimes \overline{R}), \tfrac{1}{\pi}\omega_R \otimes \overline{V}/p^s\overline{V})$$

Proof. — Only some minor details need to be checked: Firstly our trace map (from duality) $J_\infty/(\delta_i - 1) \to J \otimes_V \frac{1}{\pi}\overline{V}$ induces on cohomology the previously defined trace, (obviously direct checking), and secondly we may replace R by its π-adic completion so that the duality-theory works.

Variant. — We may also use coefficients $\overline{J}_I; I \subseteq \{1,\dots,r\}$ a subset. The ideals $J_I \subseteq R$ and $J_{I,n} \subseteq R_n$ are Cohen-Macaulay:

Reduce to the torus-embedding $\overline{T}$. If (say) $\delta_1 \in I$, let $\widetilde{L}$ denote the torus-embedding defined by $\widetilde{L} = L/\mathbb{Z}\cdot\delta_1$ and the image $\widetilde{\sigma}$ of σ in $\widetilde{L}_{\mathbb{R}}$. Then $\widetilde{\sigma}$ has extremal rays generated by $\delta_2,\dots,\delta_s$. Let $\widetilde{I} = I \cap \{\delta_2,\dots,\delta_r\}$. Then there is an exact sequence

$$0 \longrightarrow J_I \longrightarrow J_{I-\{1\}} \longrightarrow \widetilde{J}_{\widetilde{I}} \longrightarrow 0.$$

If the other two terms are Cohen-Macaulay (of relative dimension $d+1$ respectively d), then J_I also is.

Now duality holds between $J_{I,n}$ and $\mathrm{Hom}_R(J_{I,n},\omega_R) = \mathrm{Hom}_{R_n}(J_{I,n},\omega_{R_n})$, and similarly between $J_{I,n}\otimes_{V_n}\overline{V}$ and $\mathrm{Hom}_{R\otimes_V\overline{V}}(J_{I,n}\otimes_V\overline{V},\omega_R\otimes_V\overline{V})$. However one checks that the union

$$\bigcup_n \mathrm{Hom}_{R\otimes_V\overline{V}}(J_{I,n}\otimes_V\overline{V},\omega_R\otimes_V\overline{V}) \approx J_{I^c,\infty}$$

is almost $J^c_{I,\infty}, I^c \subseteq \{1,\dots,r\}$ the complement of I:

The product $J_{I,\infty}\times J_{I^c,\infty}\to J_\infty$ shows that the union contains $J_{I^c,\infty}$. On the other hand it is contained in R_∞, and any character μ in it must be strictly positive on $\delta_i \in I^c$ (choose $\nu \in L^\vee\cap\sigma^\vee$ which is strictly positive on I but vanishes on δ_i. Then $\nu\in J_I$, and $\mu+\nu$ must be strictly positive on δ_i too). However these μ's are almost in $J_{I^c,\infty}$. With the same proofs as before we then have

10'. Theorem

$$\mathbb{R}\Gamma(\Delta,\mathbb{L}\otimes\overline{J}_{I^c})(d)[d] \approx \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{R\otimes_V\overline{V}/p^s\overline{V}}(\mathbb{R}\Gamma(\Delta,\mathbb{L}^\vee\otimes\overline{R}),\tfrac{1}{\pi}\omega_R\otimes\overline{V}/p^s\overline{V}).$$

Last we need a local Künneth-formula. Suppose we have given two lattices L', L'' with cones $\sigma'\subseteq L'_{\mathbb{R}}$, $\sigma''\subseteq L''_{\mathbb{R}}$ and elements $\lambda'\in L'^\vee$, $\lambda''\in L''^\vee$. Then in general the fibered product $\overline{T}_{\lambda'}\otimes_V\overline{T}_{\lambda''}$ will not be normal. However we can achieve this by adjoining roots of π. Namely pass to $V[\sqrt[e]{\pi}]$ (replacing L' by $\lambda'^{-1}(e\mathbb{Z})$, L'' by $\lambda''^{-1}(e\mathbb{Z})$) such that $\mathcal{R}' = R'\otimes_V\overline{V}$, $\mathcal{R}'' = R''\otimes_V\overline{V}$. That means for any linear combination $\mu'+\alpha\lambda'\in\sigma'^\vee$ ($\mu'\in L'$, $0\leqslant\alpha<1$) we have $\mu'\in\sigma'^\vee$, and similarly for $\mu''+\alpha\lambda''$.

11. Lemma. — *Under the conditions $\overline{T}_{\lambda'}\otimes_V\overline{T}'_{\lambda''}$ is normal, and equal to $\overline{T}_\lambda$ where the torus-embedding $\overline{T}$ is defined by $L = \ker(\lambda', -\lambda'')\subseteq L'\times L''$, $\sigma = L_{\mathbb{R}}\cap\sigma'\times\sigma''$, $\lambda = (\lambda',0)|L = (0,\lambda'')|L$. Also the special fibre is reduced.*

Proof. — There is a map

$$\overline{T}_\lambda \longrightarrow \overline{T}'_{\lambda'}\otimes_V\overline{T}'_{\lambda''}$$

induced from the tensor-product

$$V[\sigma'\cap L'^\vee]\otimes_V V[\sigma''\cap L''^\vee]\longrightarrow V[\sigma\cap L^\vee],$$

by dividing by $(\pi-\lambda',\pi-\lambda'')$. The rest follows from remark 5.

Now assume that this condition holds. Suppose R is formally étale over $R'_1 \otimes_V R''$. Furthermore assume given representations $\mathbb{L}'$ of Δ', L'' of Δ'', and let $\mathbb{L} = \mathbb{L}' \otimes \mathbb{L}''$. We assume that $\mathbb{L}'$ and $\mathbb{L}''$ are free $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$-modules (to avoid using derived tensor-products). Furthermore choose finite subsets $I' \subseteq \{1, \dots, r\}$, $I'' \subseteq \{1, \dots, r''\}$. As $\sigma \cap \ker(\lambda) = (\sigma' \cap \ker(\lambda') \times (\sigma'' \cap \ker(\lambda''))$, $I = I' \times I''$ identifies with a subset of the vertices of $\sigma \cap \ker(\lambda)$. Then pullback and cup-product define a map

$$\mathbb{R}\Gamma(\Delta', \overline{J}_{I'} \otimes \mathbb{L}') \otimes^{\mathbb{L}}_{\overline{V}/p^s\overline{V}} \mathbb{R}\Gamma(\Delta'', \overline{J}_{I''} \otimes \mathbb{L}'') \otimes^{\mathbb{L}}_{R_1 \otimes_V R_2} R \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(\Delta, \overline{J}_I \otimes \mathbb{L})$$

12. Theorem. — *This induces almost isomorphisms on cohomology.*

Proof. — Reduce to $\Delta'_\infty, \Delta''_\infty, \Delta_\infty = \Delta'_\infty \times \Delta''_\infty$ acting on $R'_\infty, R''_\infty, R_\infty$, and apply the obvious isomorphism on the level of Koszul-complexes.

3. Global Cohomology

Assume $X \to \mathrm{Spec}(V)$ is a proper and flat algebraic space. For most purposes it suffices to consider schemes, but at one point (modification to regularise the diagonal embedding) we shall need algebraic spaces. Unfortunately the references on finiteness, traces, and duality only mention schemes and not algebraic spaces, so we have to indicate how to extend them. However if we start with a scheme the auxiliary algebraic spaces will be modifications of schemes and will have the same cohomology, so for them the scheme-theory suffices.

There exists a dualizing complex D_X on X, such that $D_X(K) = \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, D_X)$ defines a perfect duality on bounded complexes with coherent cohomology. Furthermore (if X has say pure relative dimension d)

$$\mathbb{R}\Gamma(X, D_X(M)) \cong \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_V(\mathbb{R}\Gamma(M, R), V)[d],$$

induced from a trace-map

$$\mathrm{tr} : \mathbb{R}\Gamma(X, D_X) \longrightarrow V[-d]$$

(see [H], Ch. VII, Th. 3.3).

The theory of residual complexes and trace maps extends to algebraic spaces $f : X \to S$ over a scheme S. Namely if we choose an étale covering $Y \twoheadrightarrow X$ with Y a scheme, and I^* denotes a residual complex on S. Then the residual complex $f_Y^\triangle(I^*)$ (The Cousin-complex to $f_Y^!(I^*)$) descends to X, as for étale maps $f^\triangle = f^! = f^*$. To define a trace map

$$\mathrm{tr}_{X/S} : f_*(f^\triangle(I^*) \longrightarrow I^*$$

form $Y_2 = Y \times_X Y$ and use the exact sequence (the maps are not maps of complexes)

$$f_{Y_2,*}(f_{Y_2}^\triangle(I^*)) \longrightarrow f_{Y,*}(f_Y^\triangle(I^*)) \longrightarrow f_*(f^\triangle(I^*)) \longrightarrow 0.$$

That it is exact and that $\mathrm{tr}_{Y/S}$ factors over the quotient can be shown by étale descent on X. That $\mathrm{tr}_{X/S}$ is a map of complexes for proper maps follows from [H], as curves

over Artinian rings are schemes. Finally to show that $\mathrm{tr}_{X/S}$ defines a perfect duality use devissage and Chow's lemma.

By base-extension $\otimes_V \overline{V}$ this extends to $X \otimes_V \overline{V}$, $D_X \otimes_V \overline{V}$, and bounded complexes with coherent cohomology. ($\mathcal{O}_{X\otimes_V \overline{V}}$ is still coherent). Only slightly less trivial is the extension to complexes $M^\bullet$ such that for any $\alpha > 0$ there exists a bounded complex $M_\alpha^\bullet$ with coherent cohomology, and maps $M_\alpha^\bullet \xrightarrow{\beta_\alpha} M^\bullet \xrightarrow{\lambda_\alpha} M_\alpha^\bullet$ with $\beta_\alpha \circ \lambda_\alpha = \pi^\alpha \cdot \mathrm{id}$, $\lambda_\alpha \circ \beta_\alpha = \pi^\alpha \cdot \mathrm{id}$. There duality holds up to almost quasi-isomorphisms (the induced maps on cohomology are almost isomorphic).

1. Lemma. — *A complex $M^\bullet$ with bounded cohomology satisfies these conditions (i.e. $\underline{M}^\bullet$ is π^α-isomorphic to a coherent $M_\alpha^\bullet$, for each $\alpha > 0$) if and only if the direct sum $\oplus \underline{H}^i(M^\bullet)$ is almost quasicoherent and locally (over each affine* $\mathrm{Spec}(R)$*) almost finitely presented.*

Proof. — The non-trivial direction is local $\Rightarrow$ global. Assume first that $M^\bullet$ is given by an almost quasicoherent sheaf M. Replacing M by $\mathfrak{m}M/\mathfrak{m}$-torsion we can assume that M is an honest quasicoherent sheaf. Then M is the filtering inductive limit of coherent sheaves $M_i, M = \varinjlim M_i$. For given $\alpha > 0$ and i big enough the cokernel of $M_i \to M$ is annihilated by π^α. We thus may replace M by the image of M_i, as this also satisfies the local condition (the coherent $R \otimes_V \overline{V}$-modules form an abelian category, and so do the almost finitely presented modules). Also the kernel N of $M_i \to M$ satisfies the local condition. Applying the same argument we may assume that it is also annihilated by π^α. Then $M_i \to M$ is an $\pi^{2\alpha}$-isomorphism.

For general M choose i minimal with $H^i(M) \neq (0)$. Then M is an extension (i.e. one has an exact triangle)

$$0 \longrightarrow H^i(M)[-i] \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow 0,$$

which up to isomorphism is determined by a class $c \in H^1(\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}(M', H^i(M))[-i])$. Choose a π^α-approximation $M'_\alpha \xrightarrow{\beta'_\alpha} M' \xrightarrow{\lambda'_\alpha} M'_\alpha$ (by induction). By pullback with β'_α we get a class

$$c_\alpha \in H^1(\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}(M'_\alpha, N))(N = H^i(M)[-i]),$$

defining

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M_\alpha \longrightarrow M'_\alpha \longrightarrow 0$$

and a map $M_\alpha \to M$. Further pullback (via λ'_α) to $H^1(\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}(M', N))$ gives $\pi^\alpha \cdot c$, which also can be obtained from c via pushforward on N by $\pi^\alpha \cdot \mathrm{id}$. We thus obtain a map $M \to M_\alpha$ inducing λ'_α on M' and $\pi^\alpha \cdot \mathrm{id}$ on N. The two compositions of

$$M \longrightarrow M_\alpha \longrightarrow M$$

differ from $\pi^\alpha \cdot \mathrm{id}$ by maps $M' \to N$ or $M'_\alpha \to N$ (respectively), which are nullhomotopic for degree-reasons. Thus M'_α approximates M up to π^α. With the same type of argument we can replace N by an approximation N_α.

We want to apply this theory to complexes made up from $\mathbb{R}\Gamma(\Delta, \mathbb{L}\otimes\overline{R})'s$. For this we first have to define an appropriate topos.

For a scheme or algebraic space X we denote by $X^{\text{ét}}$ the étale topos. Furthermore $X^{\text{ét,lc}}$ denotes the topos defined by finite étale covers of X. If X is connected and x a geometric point, $X^{\text{ét,lc}}$ is equivalent to the topos of sets with continuous action of $\pi_1(X,x)$ (SGAI). In any case for noetherian X, $X^{\text{ét,lc}}$ is isomorphic to the topos of étale sheaves which are inductive limits of locally constant sheaves. Also there is a continuous $\rho_X : X^{\text{ét}} \to X^{\text{ét,lc}}$ with $\rho_{X,*}(\mathcal{F}) =$ restriction of $\mathcal{F}$ to finite étale covers, $\rho_X^*(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$, for $\mathbb{L}$ locally constant on X.

Next assume given $X \to \text{Spec}(V)$, and an open subset $X^0 \subseteq X \otimes_V K$. Define a site whose objects consists of pairs (U, V), where $U \to X$ is étale and

$$V \longrightarrow (U \cap X^0) \otimes_K \overline{K}$$

is a finite étale covering. As maps we use compatible pairs of maps, and coverings are just pairs of surjective maps. Let $\mathfrak{X}^0_{\overline{K}}$ denote the corresponding topos. Its sheaves consist of ind-locally constant sheaves $\mathbb{L}_U$ on $(U \cap X^0) \otimes_K \overline{K}$, for each U as above, together with transition maps (for $U' \to U$) satisfying the usual cocycle condition. Furthermore for surjective $f : U' \twoheadrightarrow U$ $\mathbb{L}_U$ has to be the universial ind-locally constant sheaf mapping to the equaliser of

$$f_*\mathbb{L}_U \rightrightarrows f_*(\mathbb{L}_{U'\times_U U'}).$$

Equivalently sections $\mathbb{L}_U(V)$ can be glued for étale coverings of V induced from U. There exist a continuous

$$u_X : (X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}} \longrightarrow \mathfrak{X}^0_{\overline{K}},$$

with

$$u_{X,*}(\mathcal{F})_U = \rho_{U,*}(\mathcal{F} \mid (U \cap X^0) \otimes_V \overline{K}).$$

The topos $\mathfrak{X}^0_{\overline{K}}$ has enough points. Namely for any geometric point x of X evaluation on the universal cover of an irreducible component of $\text{Spec}(\mathcal{O}^{\text{sh}}_{X,x} \otimes_V \overline{K})$ is the fibre functor for such a point, and all of them are of this type. This is easily checked, starting with the fact that each point maps to a point in $X^{\text{ét}}$. However we only need that the points above form a faithful family of fibre functors. Also as affines are quasicompact cohomology will commute with filtering inductive limits.

Finally assume that $X \otimes_V K = \coprod X_\alpha$ is stratified, étale locally like by a simple normal crossings-divisor. The open strata X_α are smooth, and we define $c(\alpha)$ as the codimension of X_α. Also the normalization $\overline{X}_\alpha^{\text{norm}}$ of the the closure $\overline{X}_\alpha$ is smooth over K.

On this normalization there exists a locally constant étale (orientation) sheaf $\mathbb{O}_\alpha$, with stalks isomorphic to $\mathbb{Z}$, and structure-group $\{\pm 1\}$. If locally étale X_α is the intersection of $c(\alpha)$ divisors, each total ordering of these divisors defines a generator of $\mathbb{O}_\alpha$. Two such orderings differ by a permutation, and the two corresponding local

generators of $\mathbb{O}_\alpha$ by the sign of this permutation. The sheaf $\mathbb{O}_\alpha$ is canonically trivial if $c(\alpha) = 1$, or if the closure $\overline{X}_\alpha$ is globally the transverse intersection of smooth divisors (which are strata). For example this holds if our stratification has simple normal crossings.

Define an order on indices by

$$\overline{X}_\alpha - X_\alpha = \coprod_{\beta > \alpha} X_\beta.$$

If $j_\alpha : X_\alpha \to X$ denotes the inclusion, it is known that for $\mathbb{L}_\alpha$ locally constant on X_α and $\beta > \alpha$, the restrictions $j_\beta^* \mathbb{R}^\nu j_{\alpha,*} \mathbb{L}_\alpha$ are locally constant on X_β. This follows from Abhyankhar's lemma (and characteristic zero). Furthermore, if $\beta > \alpha$ and $c(\beta) - c(\alpha) = 1$, on the preimage of $\overline{X}_\beta$ the sheaves $\mathbb{O}_\alpha$ and the pullback of $\mathbb{O}_\beta$ are canonically isomorphic. Namely locally one adds an extra equation, which can be put in front of all others in an étale local ordering. It follows that in this case

$$j_\beta^* j_{\alpha,*}(\mathbb{O}_\alpha \otimes \mathbb{L}_\alpha) = \mathbb{O}_\beta \otimes j_\beta^* j_{\alpha,*}(\mathbb{L}_\alpha),$$

for any locally constant $\mathbb{L}_\alpha$ on X_α.

Now define a topos $\mathcal{X}_{\overline{K}}$ as follows:

Sheaves in $\mathcal{X}_{\overline{K}}$ associate to each U locally constant sheaves $\mathbb{L}_{U,\alpha}$ on $U_\alpha \otimes_K \overline{K}$, with pullback-maps (for $U' \to U$) as before and maps $\mathbb{L}_{U,\beta} \to j_\beta^* j_{\alpha,*} \mathbb{L}_{U,\alpha}$ for $\beta > \alpha$ satisfying transitivity for $\gamma > \beta > \alpha$ ($j_\gamma^* \circ j_{\alpha,*} = j_\gamma^* \circ j_{\beta,*} \circ j_\beta^* \circ j_{\alpha,*}$, by local calculation) and compatibility with pullbacks. Finally for fixed α the $\mathbb{L}_{U,\alpha}$ have to satisfy the previous gluing-condition for coverings $U' \twoheadrightarrow U$.

There are continuous maps of topoi

$$J_\alpha : \mathcal{X}^0_{\alpha,\overline{K}} \longrightarrow \mathcal{X}_{\overline{K}},$$

with inverse image J_α^* defined by chosing the α-component. The direct image $J_{\alpha,*}\mathbb{L}_\alpha$ has β-component $j_\beta^* j_{\alpha,*}(\mathbb{L}_\alpha)$.

Also we have a continuous $u_X : (X \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}} \to \mathcal{X}_{\overline{K}}$, with direct image $u_{X,*}(\mathcal{F})$ defined as follows: For minimal $\alpha, u_{X,*}(\mathcal{F})_{U,\alpha}$ is the restriction of $\mathcal{F}$ to finite étale covers of $U_\alpha \otimes_K \overline{K}$. If $u_{X,*}(\mathcal{F})_{U,\alpha}$ is already defined for all $\alpha < \beta$, then $u_{X,*}(\mathcal{F})_{U,\beta}$ is the universal (inductive limit of) locally constant sheaves fitting into a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} u_{X,*}(\mathcal{F})_{U,\beta} & \longrightarrow & \mathcal{F} \mid U_\beta \otimes_V \overline{K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod'_{\alpha<\beta} j_\beta^* j_{\alpha,*}(u_{X,*}(\mathcal{F})_{U,\alpha}) & \longrightarrow & \prod_{\alpha<\beta} j_\beta^* j_{\alpha,*}(\mathcal{F} \mid U_\alpha \otimes_V \overline{K}) \end{array}$$

(That is form the fibred product as sheaves and apply $\rho_{\mathcal{U}_\beta,*}$) Here in the lower-keft corner $\prod'_{\alpha<\beta}$ denotes the subset of the product consisting of compatible families (for

$\widetilde{\alpha} < \alpha < \beta$ the α-components maps to the $\widetilde{\alpha}$-component via

$$j_\beta^* j_{\alpha,*}(u_{X,*}(\mathcal{F})_{U,\alpha}) \longrightarrow j_\beta^* j_{\alpha,*} j_\alpha^* j_{\widetilde{\alpha},*}(u_{X,*}(\mathcal{F})_{U,\widetilde{\alpha}}) = j_\beta^* j_{\widetilde{\alpha},*}(u_{X,*}(\mathcal{F})_{U,\widetilde{\alpha}})$$

One checks without much difficulty that this defines indeed a map of topoi. Also if $\mathcal{F}$ is such that all restrictions $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F} \mid X_\alpha \otimes_K \overline{K}$ are locally constant, then $u_{X,*}(\mathcal{F})_{U,\alpha} = \mathcal{F} \mid U_\alpha \otimes_K \overline{K}$. Finally there is an obvious commutative diagram of maps

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}} & \longrightarrow & \mathfrak{X}_{\overline{K}} \\ & \searrow & \downarrow v_X \\ & & X^{\text{ét}} \end{array}$$

The direct image for the vertical map sends a collection $(\mathbb{L}_{U,\alpha})$ to the sheaf which associates to an étale $U \to X$ compatible families of sections in $\prod_\alpha \Gamma(U_\alpha, \mathbb{L}_{U,\alpha})$. The idea behind this definition of $\mathfrak{X}_{\overline{K}}$ is to consider the topos of étale sheaves on $X_{\overline{K}}$ which are (ind-) locally constant on each stratum, and add étale localization in X (to be able to reduce to étale local calculations). In principle we need such a construction to define cohomology with compact support, because it uses the extension by zero. However purists will note that this topos could be avoided by slight modification of the next construction.

We shall need another model for extensions by zero. For $\alpha < \beta$ define a functor $\Psi_{\alpha,\beta}$ on sheaves on $\mathfrak{X}^0_{\alpha,\overline{K}}$ (and taking values in them) by

$$\Psi_{\alpha,\beta}(\mathbb{L})_U(V) = \Gamma(\overline{V}_\beta, \mathbb{O}_\beta \otimes j_\beta^* j_{\alpha,*}(\mathbb{O}_\alpha^\vee \otimes \mathbb{L}_U \mid V)$$

Here $\overline{V}$ denotes the normalization of $U \otimes_V \overline{K}$ in $V \to U_\alpha \otimes_V \overline{K}$, $\overline{V}_\beta$ its β-stratum (the preimage of U_β) and $\mathbb{L}_U \mid V$ the pullback of $\mathbb{L}_U$ to V). One checks without difficulty that this satisfies the sheaf property with respect to étale coverings of U. Also for $\alpha > \beta > \gamma$ there are transition maps

$$\Psi_{\alpha,\beta}(\mathbb{L}) \longrightarrow \Psi_{\alpha,\gamma}(\mathbb{L})$$

satisfying the obvious commutativity for $\alpha < \beta < \gamma_1, \gamma_2 < \delta$.

To proceed further we need a number of local assumptions.

Local Conditions LC. — Let $R = \mathcal{O}^{\text{sh}}_{X,x}$ denote the strict henselization of X in a point x. We assume:

a) The closures of the strata on $\text{Spec}(R \otimes_V \overline{K})$ are normal subvarieties of $\text{Spec}(R \otimes_V \overline{V})$, defining a stratification (again indexed by $\alpha, \beta, \dots$)

b) For each α, the inclusion of the α-stratum admits a retraction

$$r_\alpha : \text{Spec}(R \otimes_V \overline{V}) \longrightarrow \overline{\text{Spec}(R \otimes_V \overline{V})_\alpha},$$

sending any β-stratum with $\beta < \alpha$ into the (open) α-stratum

c) There exists $l_1, \dots, l_r \in R$ such that the stratification on $\text{Spec}(R \otimes_V \overline{K})$ is defined by the ideals generated by subsets of $\{l_1, \dots, l_r\}$

2. Lemma. — *Suppose LC holds. Then*

i) *The $\Psi_{\alpha,\beta}$ are exact*

ii) *If $\mathbb{L}$ is an injective sheaf on $\mathcal{X}^0_{\alpha,\overline{K}}$, then all $\Psi_{\alpha,\beta}(\mathbb{L})$ are acyclic for the direct image $v_{X^0,*}$ (to $X^{\text{ét}}$). Also all $j^*_\beta j_{\alpha,*}(\mathbb{L})$ are acyclic for $v_{X_\beta} : \mathcal{X}^0_\beta \otimes_V \overline{K} \to X^{\text{ét}}$, and the direct images $R^\nu J_{\alpha,*}\mathbb{L}$ are defined by the functors $j^*_\beta R^\nu j_{\alpha,*}$.*

Proof. — The assertions are local in $X^{\text{ét}}$. By an inductive limit argument we may replace $\mathcal{X}$ by $\text{Spec}(R), R = O^{\text{sh}}_{X,x}$ as before. Then $R \otimes_V \overline{V}$ is a finite product of strictly henselian local rings. We thus may assume that it is local (eventually replace K by a finite extension). Then by a) $\text{Spec}(R \otimes_V \overline{V})$ is stratified with all closed strata normal and thus irreducible. Let Δ_α denote the fundamental group of the α-stratum. For each $\beta > \alpha$ we obtain subgroups $I_\beta \subseteq D_\beta \subseteq \Delta_\alpha$, well-determined up to conjugation, namely the inertia and decomposition-group of the β-stratum. If this is defined by (say) $l_1 = \cdots = l_t = 0$, then $I_\beta \cong \widehat{\mathbb{Z}}(1)^t$, via the coverings obtained by adjoining roots of l_i. Furthermore there is a canonical map $\Delta_\beta \to D_\beta/I_\beta$ (Δ_β- fundamental group of β-stratum) which is an isomorphism by b). Now any locally constant sheaf $\mathbb{L}$ on the generic stratum corresponds to a continuous representation of Δ. Then one checks that $\Psi_{0,\beta}(\mathbb{L})$ is defined by

$$\text{Ind}^\Delta_{D_\beta}(\mathbb{L}) = \text{continuous } D_\beta\text{-linear maps } \Delta \to \mathbb{L}.$$

This is an exact functor and implies the first assertion (over proper subsets $U \subsetneqq \text{Spec}(R)$ one has to localize further).

For ii) we need to compute direct images for $v_{X_\alpha} : \mathcal{X}_\alpha \otimes_V \overline{K} \to X^{\text{ét}}$. Again the fibre in $x \in X$ is the cohomology of $\text{Spec}(R \otimes_V \overline{V})$, that is the cohomology of the topos of locally constant sheaves on the α-stratum. (This topos is a retract of the full topos and has the same cohomology). This coincides with the group-cohomology $H^*(\Delta, \dots)$. However (using inclusions $\Delta_\alpha \supseteq D_{\alpha,\beta} \supseteq I_{\alpha,\beta} \cong \widehat{\mathbb{Z}}(1)^t$)

$$H^*(\Delta_\alpha, \text{Ind}^{\Delta_\alpha}_{D_{\alpha,\beta}} \mathbb{L}) = H^*(D_{\alpha,\beta}, \mathbb{L})$$

vanishes in positive degrees for injective $\mathbb{L}'s$. Similar for the cohomology of $j^*_\beta j_{\alpha,*}\mathbb{L}$, which corresponds to $\mathbb{L}^{I_\beta}$.

Now we come to one of the main results. For a sheaf $\mathbb{L}$ on $\mathcal{X}^0_{\overline{K}}$ define a complex $\Psi(\mathbb{L})$ (of sheaves on $\mathcal{X}^0_{\overline{K}}$)

$$\Psi(\mathbb{L}) : 0 \longrightarrow \mathbb{L} \longrightarrow \bigoplus_{c(\beta)=1} \Psi_{0,\beta}(\mathbb{L}) \longrightarrow \bigoplus_{c(\beta)=2} \Psi_{0,\beta}(\mathbb{L}) \longrightarrow \dots$$

the maps being induced from local isomorphisms on $\mathbb{O}'_\beta s$. Étale locally all $\mathbb{O}_\beta$ can be trivialised, and they become sums of restrictions with $\pm$ signs.

On the other hand we have a sheaf $j_{0,!}\mathbb{L}$ on $\mathcal{X}_{\overline{K}}$, which is $\mathbb{L}$ on $\mathcal{X}^0_{\overline{K}}$ and trivial on all other strata.

3. Proposition. — $\mathbb{R}v_{X,*}(\Psi(\mathbb{L})) \cong \mathbb{R}v_{X,*}(j_{0,!}\mathbb{L})$ *canonically in the category of étale sheaves on* X.

Proof. — There exists a canonical map, thus the assertion becomes (étale) local, and we may assume that all $\mathbb{O}_\beta$ are trivial. Choose an injective resolution $\mathbb{L} \to I^\bullet$ in $\mathfrak{X}^0_{\overline{K}}$. Then $\Psi(I^\bullet)$ is $v_{X^0,*}$-acyclic, thus $\mathbb{R}v_{X^0,*}(\Psi(\mathbb{L}))$ is represented by $v_{X^0,*}(\Psi(I^\bullet))$. This associated to $U \to X$ étale the complex of global sections

$$\Gamma((U \cap X_0) \otimes_V \overline{K}, \Psi(I^\bullet)),$$

i.e. the double complex made up from

$$\bigoplus_{c(\beta)=a} \Gamma((U \cap X_0) \otimes_V \overline{K}, \Psi_{0,\beta}(I^b)) = \bigoplus_{c(\beta)=a} \Gamma((U \cap X_\beta) \otimes_V \overline{K}, \mathbb{O}_\beta \otimes j_\beta^* j_{0,*}(I^b))$$

This is the direct image of the total complex associated to a double complex on $\mathfrak{X} \otimes_V \overline{K}$ with components

$$\bigoplus_{c(\beta)=a} J_{\beta,*}(\mathbb{O}_\beta \otimes j_\beta^* j_{0,*}(I^b)).$$

The summands represent the derived direct image and are acyclic for $v_{X,*}$, as the sheaves $j_\beta^* j_{0,*}(I^b)$ are acyclic for J_β and v_{X_β}.

On the 0-stratum it is quasiisomorphic to $\mathbb{L}$. We claim that it is acyclic on all other strata:

This is a local assertion, thus we can trivialise all $\mathbb{O}'_\beta s$. Then on the α-stratum its components are

$$\bigoplus_{\substack{\beta \leqslant \alpha \\ c(\beta)=a}} j_\alpha^* j_{\beta,*} j_\beta^* j_0(I^b) = \bigoplus_{\substack{\beta \leqslant \alpha \\ c(\beta)=a}} j_\alpha^* j_{0,*}(I^b)$$

By one of the standard calculations in homological algebra it then follows that for $\operatorname{codim}(\alpha) > 0$ this forms an acyclic complex. Thus our complex represents $j_{0,!}(\mathbb{L})$ and its direct image represents $v_{X,*}(j_{0,!}(\mathbb{L}))$. As the resolution $I^\bullet$ is unique up to homotopy, this construction is also canonical (in the derived category) and functorial.

We leave it to the reader to formulate a variant where one extends $\mathbb{L}$ by zero along some of the codimension-one strata and by $\mathbb{R}_{j_0,*}(\mathbb{L})$ along the others. Of course one then uses only $\Psi'_{0,\beta} s$ with the β-stratum an intersection of the codimension-one strata of the first type.

Finally we apply our theory to the previous case of schemes formally étale over the torus-embedding $\overline{T}_\lambda \subseteq \overline{T}$. We have to check the local conditions (LC): By assumption $\sigma \cap \ker(\lambda)$ is spanned by a partial basis $\{\rho_1, \dots, \rho_t\}$ of the lattice L. The strata are indexed by subsets $I \subseteq \{1, \dots, t\}$, and the ideal of the I-stratum is spanned by those $\mu \in L^\vee \cap \sigma^\vee$ which are strictly positive on some $\rho_i, i \in I$. If L_I denotes the quotient-lattice $L_I = l/\langle \rho_i \mid i \in I \rangle$ and $\sigma_I \subseteq L_{I,\mathbb{R}}$ the image of σ, then σ_I defines a torus-embedding $T_I \subseteq \overline{T}_I$. Furthermore there is a projection $\overline{T} \to \overline{T}_I$ which has partial inverse given by an isomorphism $\overline{T}_I \xrightarrow{\sim} I\text{-stratum} \subseteq \overline{T}$. The latter map is given on affine rings by sending $\mu \in L^\vee \cap \sigma^\vee$ to either $\mu \in L_I^\vee \cap \sigma^\vee$ or to zero (if

$\mu \notin L_I^\vee$, that is $\mu(\rho_i) > 0$ for some $i \in I$). This picture persists after base change to $\overline{T}_\lambda$ (dividing rings by the ideal $(\pi - \lambda)$), and also to the strictly henselian local ring R. Furthermore by ajoining a suitable root $\pi^{1/e}$ we can achieve that all strata in $X \otimes_V \overline{V}$ are normal. Thus we have conditions a) and b).

Next we define a sheaf $\overline{\mathcal{O}}$ on $\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}$ as follows: To U and $V \to U_{\overline{K}}$ finite étale associate the global sections of the normalization $\mathcal{O}_V^{\mathrm{norm}}$ of $\mathcal{O}_U$ in V. We also want to define a sheaf $A_{\mathrm{inf}}(\overline{\mathcal{O}}_V)$, but for this we need that the Frobenius is surjective on $\overline{\mathcal{O}}/p \cdot \overline{\mathcal{O}}$. In fact we have a slightly stronger statement.

4. Lemma. — *Suppose $U = \mathrm{Spec}(R) \to \overline{T}_\lambda$ is étale over $\overline{T}_\lambda$. Then Frobenius is surjective on $\overline{R}/p \cdot \overline{R}$.*

Proof. — Frobenius is surjective on the affine ring of the curve $\overline{T}_{\lambda,\infty}$, and thus also on $R_\infty/p \cdot R_\infty$ by étaleness. Then for any almost étale cover S of R_∞ it is almost surjective on S/pS (by Frobenius-invariance of almost étale coverings) and thus also almost surjective on $\overline{R}/p \cdot \overline{R}$. Thus if $x \in \overline{R}$ there is a y with $p^{\frac{1}{2}} \cdot x \equiv y^p \mod p$. Then y is divisible by $p^{\frac{1}{2p}}$ and x is a p-th power modn $p^{1/2}$. Repeating we see that it is a p-th power mod p.

A little bit more involved is

5. Lemma. — *Suppose $a \in \overline{V}$ divides p^α for $\alpha < 1$. Then the map $z \mapsto z^p - az$ is surjective on $\overline{\mathcal{O}}/p \cdot \overline{\mathcal{O}}$.*

Proof. — It suffices to check local rings. So let $R = \mathcal{O}_{X,x}^{\mathrm{sh}} \subseteq \overline{R}$. Obviously we may assume that p lies in the maximal ideal of R and thus also in the Jacobson-radical of $\overline{R}$. For $y \in \overline{R}$ consider

$$S = \overline{R}[z]/(z^p - az - y).$$

It suffices to show that $S[1/p]$ is étale over $\overline{R}[1/p]$, or that $z^p - az - y$ and $pz^{p-1} - a$ have no common zero in any extension-field L of $\overline{R}[1/p]$. But if not, then

$$z = \sqrt[p-1]{a/p}, y = \sqrt[p-1]{a/p}\,\big(\frac{a}{p} - a\big).$$

Thus

$$y^{p-1}(p/a)^p = (1 - pa)^p$$
$$0 = (1 - pa)^p - y^{p-1}(p/a)^p$$

However the right hand side lies in $\overline{R}$ and is $\equiv 1 \mod p^\alpha$ (some $\alpha > 0$), thus is a unit.

We also need to consider the kernel of the endomorphism $z^p - az$ of $\overline{R}/p\overline{R}$. Assume now that $a = b^{p-1}$ with b^p dividing p^α, $\alpha < 1$. Then

$$z^p - b^{p-1}z \in p\overline{R}$$

if and only if

$$\big(\frac{z}{b}\big)^p - \big(\frac{z}{b}\big) \in \frac{p}{b^p} \cdot \overline{R}$$

This happens if and only if locally in the Zariski — or étale topology

$$z \in \mathbb{Z}_p \cdot b + b \cdot \frac{p}{b^p} \cdot \overline{R}$$

Thus

$$\ker(z^p - b^{p-1}z) = \mathbb{F}_p \cdot b \oplus \big(\frac{p}{b^{p-1}}\big)\overline{R}/p\overline{R} \text{ (as sheaves).}$$

We also need cohomology with values in the projective limit $\mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}) = \varprojlim \overline{\mathcal{O}}/p\overline{\mathcal{O}}$ (transition maps are Frobenius). This is a "topological" sheaf. However we do not need continuous cohomology. Projective system $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0 \leftarrow \mathcal{F}_1 \leftarrow \mathcal{F}_2 \leftarrow \ldots\}$ indexed by integers form a new topos. The functor of global sections maps this to a projective system of abelian groups, whose projective limit is $H^0(\mathcal{F})$. Deriving this functor gives higher cohomology. The derived functor of (projective systems $\mathcal{F}_n$) $\rightarrow$ (projective systems of abelian groups) can be computed termwise. Finally the derived functors of $\varprojlim_{\mathbb{N}}$ are wellknown: There is only a non-zero $\varprojlim^{(1)}_{\mathbb{N}}$, which vanishes if the projective system satisfies a Mittag-Leffler-condition. By Leray we have short exact sequences

$$0 \longrightarrow \varprojlim{}^{(1)} H^{i-1}(\mathcal{F}_n) \longrightarrow H^i(\mathcal{F}) \longrightarrow \varprojlim H^i(\mathcal{F}_n) \longrightarrow 0.$$

Thus we have defined the cohomology of $\mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}) = \varprojlim \overline{\mathcal{O}}/p \cdot \overline{\mathcal{O}}$ as well as direct images $R^a v_{X,*}(\mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}))$ (which are projective systems on $X^{\text{ét}}$). Also choose any $a \in \mathcal{R}(\overline{V})$, $a \neq 0$. Then a can be represented by a system of elements $a_n \in \widehat{\overline{V}}$, $a_n = a_{n+1}^p$. Also $a = b^{p-1}$ for some b. Then for n big enough the $a'_n s$ and $b'_n s$ satisfy the condition in Lemma. Thus the sequence

$$0 \longrightarrow (\mathbb{F}_p)_s \oplus \big(\frac{p}{b_n^{p-1}}\overline{\mathcal{O}}\big)/p\overline{\mathcal{O}} \longrightarrow \overline{\mathcal{O}}/p\overline{\mathcal{O}} \xrightarrow{\Phi - a} \overline{\mathcal{O}}/p\overline{\mathcal{O}} \longrightarrow 0$$

(Φ = Frobenius) is exact.

Passing to the limit we obtain a sequence

$$0 \longrightarrow (\mathbb{F}_p)_s \longrightarrow \mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}) \xrightarrow{\Phi - a} \mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}) \longrightarrow 0$$

whose cohomology has trivial transition-maps for $n \gg 0$, and thus will disappear if we take cohomology. Here $(\mathbb{F}_p)_s$ stands for the restriction of the sheaf $\mathbb{F}_p$ to the special fibre. Namely its fibre at a geometric point is trivial in characteristic zero, and coincides with $\mathbb{F}_p$ in characteristic p. Here recall that geometric points are given by choice of a geometric point x of X, and then evaluation on the maximal étale cover of $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x} \otimes_V K)^0$. Equivalently the "generic fibre" defines an open subtopos of $\mathcal{X}^0_{\overline{K}}$ (the corresponding site consists of objects with trivial special fibre), and $(\mathbb{F}_p)_s$ is the restriction of $\mathbb{F}_p$ to the complement. Also for any sheaf $\mathbb{L}$ on $\mathcal{X}^0_{\overline{K}}$ the direct images under the map v_X to the étale topos of X commute with restriction to the special fibre:

This follows by computing stalks in geometric points of X. Namely if Δ_x denotes the fundamental group of an irreducible component of $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x} \otimes_V \overline{K})^0$, the stalks in

x of these direct images are (inductive limits of direct sums of copies of) the profinite group-cohomology of Δ_x, with values in the stalk upstairs.

As by the proper base-change theorem the cohomology of any torsion-sheaf on $X^{\text{ét}}$ is equal to that of its special fibre, it follows that also the cohomology of $\mathbb{L}$ and $(\mathbb{L})_s$ coincide.

In the same vein we can pass to $A_{\text{inf}}(\overline{\mathcal{O}}) = W(\mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}))$, which a priori is a double projective limit but can be written as a single projective limit. However we really only need the $A_{\text{inf}}(\overline{\mathcal{O}})/p^s A_{\text{inf}}(\overline{\mathcal{O}}) = W_s(\mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}))$. They fit into a sequence

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})_s \longrightarrow W_s(\mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}})) \xrightarrow{\Phi-[a]} W_s(\mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}})) \longrightarrow 0$$

with again essentially trivial cohomology. Finally we tensor with $u_{X,*}(\mathbb{L})$, $\mathbb{L}$ a locally constant $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$-sheaf on $(X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}$, to obtain

$$0 \longrightarrow u_{X,*}(\mathbb{L})_s \longrightarrow u_{X,*}(\mathbb{L}) \otimes A_{\text{inf}}(\overline{\mathcal{O}}) \xrightarrow{\Phi-[a]} u_{X,*}(\mathbb{L}) \otimes A_{\text{inf}}(\overline{\mathcal{O}}) \longrightarrow 0.$$

As a consequence we obtain exact sequences

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{coker}(\Phi - [a] \mid H^{i-1}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, u_X^*(\mathbb{L}) \otimes A_{\text{inf}}(\overline{\mathcal{O}})) &\longrightarrow H^i(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}) \\ &\longrightarrow \ker(\Phi - [a] \mid H^i(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, u_{X,*}(\mathbb{L}) \otimes A_{\text{inf}}(\overline{\mathcal{O}}))) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

We also need a variant for cohomology with compact support. For each stratum α we have sheaves $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$ on $\mathcal{X}^0_\alpha \otimes_V \overline{K}$ as before. For $\alpha < \beta$ we define a sheaf $\widetilde{\psi}_{\alpha,\beta}(\overline{\mathcal{O}}_\alpha)$ on $\mathcal{X}^0_\alpha \otimes_V \overline{K}$ as follows:

Suppose we have $U \to X$ étale and $V \to U_\alpha \otimes_V \overline{K}$ finite étale, with normalization $V^{\text{norm}} \to \overline{U}_\alpha \otimes_V \overline{K}$. It is stratified with reduced strata obtained by taking closures of generic fibres. We define $\widetilde{\psi}_{\alpha,\beta}(\overline{\mathcal{O}}_\alpha)$ as the normalization of $\mathcal{O}_U$ in V^{norm}_β, except that we have to twist as before with $\mathbb{O}_{alpha}$ and $\mathbb{O}_\beta$. This twisting goes as follows:

First $\mathbb{O}_\alpha$ defines a covering (of degree two) of $U_\alpha \otimes_V K$) and by pullback of V, which in turn extends to a ramified cover of V^{norm}. On its β-stratum we repeat this construction with $\mathbb{O}_\beta$ and obtain a new covering, with action by two copies of the group $\{\pm 1\}$. We now perform the previous normalization, and our global sections are the (-,-)-eigenspace under the group-action.

If $U = \operatorname{Spec}(R)$ is affine, all $\mathbb{O}_\alpha$ are trivial, and $S =$ normalization of R in V, then there are finitely many primes $\mathfrak{p}_\nu \subseteq S$ corresponding to the irreducible components of V^{norm}_β. $\widetilde{\psi}_{\alpha,\beta}(\overline{\mathcal{O}}_\alpha)$ is then the direct sum of the normalizations of $(S/\mathfrak{p}_\nu)$. $(S/\mathfrak{p}_\nu[1/\pi]$ is already normal).

Also for $\beta < \gamma$ there are morphisms

$$\widetilde{\psi}_{\alpha,\beta}(\overline{\mathcal{O}}_\alpha) \longrightarrow \widetilde{\psi}_{\alpha,\gamma}(\overline{\mathcal{O}}_\alpha)$$

satisfying some transitivity for $\alpha < \beta < \gamma_1, \gamma_2 < \delta$.

6. Lemma

i) *Frobenius* Φ *is surjective on* $\widetilde{\psi}_{\alpha,\beta}(\overline{\mathcal{O}}_\alpha)/p \cdot \widetilde{\psi}_{\alpha,\beta}(\overline{\mathcal{O}}_\alpha)$

ii) *For $b \in \overline{V}$ with b^p dividing p^α, $\alpha < 1$, $\Phi - b$ is surjective on*

$$\widetilde{\psi}_{\alpha,\beta}(\overline{\mathcal{O}}_\alpha)/p \cdot \widetilde{\psi}_{\alpha,\beta}(\overline{\mathcal{O}}_\alpha).$$

Proof. — It suffices to check these over $\mathrm{Spec}(R)$, $R = \mathcal{O}_{X,x}^{\mathrm{sh}}$. We may assume $\alpha = 0$. Then $\widetilde{\psi}_{\alpha,\beta}(\overline{R})$ the subset of the product $\prod(\overline{R}/\mathfrak{p}_\nu)^{\mathrm{norm}}$ where

$$\Delta = \pi_1(\mathrm{Spec}(R \otimes_V \overline{K}))$$

acts continuously. The product is over all minimal primes of the β-stratum. Equivalently it is the induced module (via $D_\beta \subseteq \Delta$) from one $(\overline{R}/\mathfrak{p}_\nu)^{\mathrm{norm}}$, which by LC coincides with the version of $\overline{R}$ for the β-stratum. There assertions i) and ii) are already known. In fact for i) we can prove surjectivity of Frobenius on global section over sufficiently small affines, reducing to R_∞ and checking there directly. We now have the obvious complexes

$$\widetilde{\psi}(\overline{\mathcal{O}}_\alpha) : \overline{\mathcal{O}}_\alpha \longrightarrow \oplus_{c(\beta)=1}\widetilde{\psi}_{\alpha,\beta}(\overline{\mathcal{O}}_\alpha) \longrightarrow \oplus_{c(\beta)=2}\widetilde{\psi}_{\alpha,\beta}\ (\overline{\mathcal{O}}_\alpha) \longrightarrow \cdots$$

$\mathcal{R}(\widetilde{\psi}(\overline{\mathcal{O}}_\alpha))$ and $A_{\mathrm{inf}}(\overline{\psi}(\overline{\mathcal{O}}_\alpha))$. For any $\mathbb{L}$ locally constant $\mathbb{L}$ on $(X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}$, annihilated by p^s, we obtain a complex of projective systems

$$0 \longrightarrow \psi(u_{X,*}(\mathbb{L}))_s \longrightarrow u_{X,*}(\mathbb{L}) \otimes A_{\mathrm{inf}}(\widetilde{\psi}(\overline{\mathcal{O}})) \xrightarrow{\Phi-[a]} u_{X,*}(\mathbb{L}) \otimes A_{\mathrm{inf}}(\widetilde{\psi}(\overline{\mathcal{O}}))) \longrightarrow 0$$

with irrelevant cohomology, and thus short exact sequences

$$0 \longrightarrow \mathrm{coker}(\Phi - [a] \mid H^{i-1}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, u_{X,*}(\mathbb{L}) \otimes A_{\mathrm{inf}}(\widetilde{\psi}(\overline{\mathcal{O}}))) \longrightarrow H^i_!(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L})$$
$$\longrightarrow \ker(\Phi - [a] \mid H^i(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, u_{X,*}(\mathbb{L}) \otimes A_{\mathrm{inf}}(\widetilde{\psi}(\overline{\mathcal{O}}))) \longrightarrow 0$$

There are variants with partial compact support at infinity, with obvious formulations and proofs.

Finally we get back to "almost mathematics". There is also a subsheaf $\overline{\mathcal{J}} \subseteq \overline{\mathcal{O}}$, $\overline{\mathcal{J}} = \ker(\overline{\mathcal{O}} \to \bigoplus_{\mathrm{codim}\,\beta=1} \widetilde{\psi}_{0,\beta}\ (\overline{\mathcal{O}}))$.

7. Lemma. — *$\overline{\mathcal{J}} \approx \widetilde{\psi}(\overline{\mathcal{O}})$ is an almost isomorphism.*

Proof. — Again we may work with $R = O_{X,x}^{\mathrm{sh}}, \mathrm{Spec}(R) \to \overline{T}_\lambda$. The assertion holds for $J_\infty \subseteq R_\infty$:

Here each stratum is irreducible, with ideal generated by the $\mu \in \bigcup_n L_n^\vee$ with $\mu(\rho_i) > 0$ for some $i \in I =$ index-set of the stratum. For a given μ the μ-eigenspace in the complex $\widetilde{\psi}(R_\infty)$ is a Čech-complex over the free module generated by those ρ_i with $\lambda(\rho_i) = \mu(\rho_i) = 0$. By direct calculation we have an isomorphism.

After that $\overline{R} \supseteq R_\infty$ is the limit of almost étale coverings. Assume we have such a covering $S \supseteq R_\infty$ with group G. Then if $\mathfrak{q}_\alpha \subseteq S$ is the prime ideal giving an irreducible component of the α-stratum, $D_\alpha \subseteq G$ its decomposition-group, and $\mathfrak{p}_\alpha = \mathfrak{q}_\alpha \cap R_\infty \subseteq R_\infty$, we have a map

$$R_\infty/\mathfrak{p}_\alpha \otimes_{R_\infty} S \longrightarrow \mathrm{Ind}_D^G((S/\mathfrak{q}_\alpha)^{\mathrm{norm}}),$$

which is an isomorphism after inverting π. As the left side is almost étale over $R_\infty/\mathfrak{p}_\alpha$ and thus has non-degenerate trace-form, the map must be an almost isomorphism. Passing to the limit over all S we obtain that $\widetilde{\psi}(\overline{R})$ is almost isomorphic to $\overline{J}_\infty \otimes_{R_\infty} \overline{R} \approx \overline{J}$.

If we define

$$\mathcal{R}(\overline{\mathcal{J}}) = \varprojlim \overline{\mathcal{J}}/p\overline{\mathcal{J}} = \ker(\mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}) \longrightarrow \mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}/\overline{\mathcal{J}}))$$

and similarly $A_{\inf}(\overline{\mathcal{J}}) = W(\mathcal{R}(\overline{\mathcal{J}}))$, we get almost isomorphisms

$$H^*(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes A_{\inf}(\overline{\mathcal{J}})) \approx H^*(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes A_{\inf}(\widetilde{\psi}(\overline{\mathcal{O}}))).$$

Next consider the direct images $R^\nu q_{X,*}(\overline{\mathcal{J}}/p^s\overline{\mathcal{J}})$ which are sheaves on $X^{\text{ét}}$. By Th. 2.10.i) there are almost zero unless $0 \leqslant \nu \leqslant d$, are almost quasi-isomorphic to bounded complexes of quasicoherent sheaves, and there is a canonical almost map

$$R^d q_{X,*}(\overline{\mathcal{J}}/p^s\overline{\mathcal{J}}) \longrightarrow \omega_X \otimes \overline{V}/p^s\overline{V},$$

inducing almost quasi-isomorphisms

$$\mathbb{R}q_{X,*}(\mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{J}}) \approx \mathbb{R}\operatorname{Hom}_{O_X \otimes \overline{V}/p^s\overline{V}}(\mathbb{R}q_{X,*}(\mathbb{L}^\vee \otimes \overline{\mathcal{O}}), \omega_X \otimes \overline{V}/p^s\overline{V})[-d]$$

for $\mathbb{L}$ locally constant annihilated by p^s. Furthermore there is a canonical trace-map

$$H^d(X^{\text{ét}}, \omega_X) = H^d(X, \omega_X) \longrightarrow V$$

inducing global duality for coherent sheaves on X. As the direct images $\mathbb{R}q_{X,*}(\mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{J}})$ etc. are almost coherent these combine to produce almost quasi-isomorphisms

$$\mathbb{R}\Gamma(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{J}}) \approx \mathbb{R}\operatorname{Hom}_{\overline{V}/p^s\overline{V}}(\mathbb{R}\Gamma(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}), \overline{V}/p^s\overline{V})[-2d]$$

Remark. — Previously we always worked with $\frac{1}{\pi}\omega_X$ instead of ω_X. This is because in the torus-embedding we identified the dualizing complex for the quotient $V[L^\vee \cap \sigma^\vee]/(\lambda - \pi)$ as the tensor-product of that for $V[L^\vee \cap \sigma^\vee]$ with the quotient, instead of the Ext^1. Then we used the trace-map for $V[L^\vee \cap \sigma^\vee]$. This differs from the trace-map used in relative duality by a factor π. That this is so can be seen easily for the affine torus-embedding $V[\lambda]$, and follows in the general case by functoriality $V[\lambda] \subseteq V[L^\vee \cap \sigma^\vee]$. It is also related to the fact that we have tacitly identified $\Lambda^{d+1}L^\vee$ and $\Lambda^d \ker(\lambda)^\vee$.

The structure of $H^i(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes A_{\inf}(\overline{\mathcal{O}}))$ is surprisingly simple. Assume for the moment that $\mathbb{L}$ is annihilated by p. Then this cohomology is a module over $\mathcal{R}(\overline{V})$.

8. Theorem. — *For each i, $H^i(\mathcal{X}^0 \otimes_V, \overline{K}, \mathbb{L} \otimes \mathcal{R}(\overline{J}_I))$ is almost isomorphic to a finitely generated free $\mathcal{R}(\overline{V})$-module, namely to $H^i_{(!)}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}) \otimes \mathcal{R}(\overline{V})$ (support-condition given by I).*

Proof. — Let $M = H^i(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes \mathcal{R}(\overline{J}_I))$. Then for $\xi = \underline{p} \in \mathcal{R}(\overline{V})$,

$$M/\xi M \subseteq H^i(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes \overline{J}_I),$$

which is almost finitely presented over $\mathcal{R}(\overline{V})/\xi\cdot\mathcal{R}(\overline{V}) = \overline{V}/p\overline{V}$. Also Frobenius Φ induces an isomorphism on M. Now for torsion $\overline{V}$-modules N we can define a normalised length $\lambda(N)$ similarly as before: Write $V = \cup V_\alpha$ with V_α finite over V. Then for $N = \overline{V}\otimes_{V_\alpha} N_\alpha$

$$\lambda(N) = \frac{1}{[V_\alpha : V]}\mathrm{length}_V(N_\alpha),$$

which defines $\lambda(N)$ for N finitely presented. For N only finitely generated, $N = \overline{V}\cdot N_\alpha$, we have

$$\lambda(N) = \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{[V_\beta : V]}\mathrm{length}_V(V_\beta\cdot N_\alpha),$$

and for arbitrary N

$$\lambda(N) = \sup\{\lambda(N') \mid N'\subseteq N \text{ finitely generated}\}.$$

Also $\lambda(\overline{V}/\mathfrak{a}) = \inf\{v(x) \mid x\in\mathfrak{a}\}$, where v is the valuation normalised such that $v(\pi) = 1$. Finally for a submodule N of a finitely presented $\overline{V}$-module, $\lambda(N) = 0$ implies $N = (0)$.

By additivity we extend λ to ξ-torsion $\mathcal{R}(\overline{V})$-modules. Pushout by Frobenius multiplies λ by p. Next for each $\alpha > 0$

$$\xi^\alpha\cdot H^i(\mathcal{X}^0\otimes_V\overline{K}, \mathbb{L}\otimes\overline{\mathcal{J}}_I)$$

has finite λ-invariant, and by devissage this holds for $\xi^\alpha\cdot H^i(\mathcal{X}^0\otimes_V\overline{K}, \mathbb{L}\otimes\mathcal{R}(\overline{\mathcal{J}}_I)/\xi^n)$, all n. Applying Frobenius-pushout to this module multiplies λ by p, and produces

$$\xi^{p\alpha}H^i(\mathcal{X}^0\otimes_V\overline{K}, \mathbb{L}\otimes\mathcal{R}(\overline{\mathcal{J}}_I)/\xi^{np}).$$

On the other hand filter $\mathbb{L}\otimes\mathcal{R}(\overline{\mathcal{J}}_I)/\xi^{np}$ by submodules $\xi^{in}(\mathbb{L}\otimes\mathcal{R}(\overline{\mathcal{J}}_I))/\xi^{np}$, apply the exact cohomology-sequences and use that for an exact sequence

$$N_1\longrightarrow N_2\longrightarrow N_3$$

we have

$$\lambda(\xi^{\alpha+\beta}N_2)\leqslant\lambda(\xi^\alpha N_1)+\lambda(\xi^\beta N_3),$$

with equality for all $\alpha,\beta > 0$ only possible if

$$\lambda(\xi^\alpha\cdot\ker(N_1\to N_2)) = \lambda(\xi^\beta\cdot\mathrm{coker}(N_2\to N_3)) = 0,\quad \text{all}\quad \alpha,\beta > 0.$$

It then follows that for $m\geqslant 0$ the exact sequences

$$H^i(\mathcal{X}^0\otimes_V\overline{K}, \mathbb{L}\otimes\mathcal{R}(\overline{\mathcal{J}}_I)/\xi)\longrightarrow H^i(\mathcal{X}^0\otimes_V\overline{K}, \mathbb{L}\otimes\mathcal{R}(\overline{\mathcal{J}}_I)/\xi^{m+1})\longrightarrow H^i(\mathcal{X}^0\otimes_V\overline{K}, \mathbb{L}\otimes\mathcal{R}(\overline{\mathcal{J}}_I)/\xi^m)$$

satisfy this condition. If (say) N denotes the kernel of the first map, for each $\alpha,\beta > 0$ multiplication by ξ^β on $\xi^\alpha N$ factors as $\xi^\alpha N\twoheadrightarrow N_1\to\xi^\alpha N$ with N_1 submodule of a finitely presented $\overline{V}/p\overline{V}$-module. As

$$\lambda(N_1)\leqslant\lambda(\xi^\alpha\cdot N) = 0,$$

we have $N_1 = (0)$, and $N \approx 0$. Quite similarly (or from the long exact sequence in cohomology) the cokernel is almost zero. Especially the projective system of $H^i(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes \mathcal{R}(\overline{\mathcal{J}}_I)/\xi^m)$ has almost surjective transition-maps, and $\lim^{(1)}$ of it is almost zero. Also if

$$M^i = H^i(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes \mathcal{R}(\overline{\mathcal{J}}_I)),$$

then

$$H^i(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes \mathcal{R}(\overline{\mathcal{J}}_I)/\xi^m) \approx M^i/\xi^m \cdot M^i,$$

and $M = \varprojlim_m M/\xi^m M$:

If

$$z \in H^i(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes \mathcal{R}(\overline{\mathcal{J}}_I)/\xi^m),$$

we show that for each $\alpha > 0$ $\xi^\alpha \cdot z$ lifts to M. For this choose a strictly decreasing sequence

$$\{\alpha_n, n \geqslant m\}, \quad 0 < \alpha_{n+1} < \alpha_n < \alpha = \alpha_m.$$

Then choose

$$z_n \in H^i(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes \mathcal{R}(\overline{J}_I)(\xi^n)$$

with $z_m = z$, z_{n+1} lifting $\xi^{\alpha_n - \alpha_{n+1}} \cdot z_n$. Then $\xi^\alpha \cdot z$ is lifted by $\varprojlim(\xi^{\alpha_n} \cdot z_n)$.

Also it follows that multiplication by ξ defines an almost isomorphism

$$\xi^n M^i/\xi^{n+1} M^i \approx \xi^{n+1} M^i/\xi^{n+2} M^i,$$

so ξ is almost injective on M^i. Next if $M^i/\xi M^i$ is not almost zero, choose an element $m \in M^i$. m is not almost zero in $M^i/\xi M^i$. Multiplication by m defines a map

$$\xi \cdot \mathcal{R}(\overline{V}) \cong \mathcal{R}(\overline{V}) \longrightarrow M^i,$$

injective as m is not ξ^l-torsion for any l. Consider α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, such that this map extends to $\xi^\alpha \cdot \mathcal{R}(\overline{V})$ (this is not possible for $\alpha < 0$, as $m \notin \xi \cdot M^i$). Such an extension is almost unique. Thus if $\underline{\alpha}$ is the infimum of these α's, the map extends uniquely to the union

$$\mathfrak{a}(\underline{\alpha}) = \bigcup_{\alpha < \underline{\alpha}} \xi^\alpha \cdot \mathcal{R}(\overline{V}).$$

Hence we get an injection $\mathfrak{a}(\underline{\alpha}) \subseteq M^i$, with quotient $\widetilde{M}^i = M^i/\mathfrak{a}(\underline{\alpha})$ again almost without ξ-torsion. If $\widetilde{M}^i$ is not almost zero we can repeat the construction to obtain an increasing sequences of submodules of M^i, with subquotients $\mathfrak{a}(\underline{\alpha}_\nu)$, and almost ξ-torsion-free quotients. Especially

$$\lambda(\xi \cdot M/\xi^2 \cdot M) \geqslant \sum_\nu \lambda(\xi \cdot \mathfrak{a}(\underline{\alpha}_\nu)/\xi^2 \cdot \mathfrak{a}(\underline{\alpha}_\nu)) = \text{number of } \underline{\alpha}_\nu\text{'s},$$

so the process must stop. Hence we have found a finite filtration

$$(0) = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M = M^i,$$

with $M_n/M_{n-1} \approx \mathfrak{a}(\underline{\alpha}_n)$.

It then follows easily that for each $\alpha > 0$ there exists a free submodule $\mathcal{R}(\overline{V})^r \subseteq M$ with quotient annihilated by ξ^α. Especially M is almost projective of finite rank r over $\mathcal{R}(\overline{V})$. Next define an $\mathcal{R}(\overline{V})$-algebra

$$\mathcal{A} = S[M]/(\Phi(m) - m^p)$$

(symmetric algebra divided by the relations displayed). Obviously $\mathcal{A}[\xi^{-1}]$ is finite flat over $\mathcal{R}(\overline{V})[\xi^{-1}]$ of rank p^r, generated by monomials with exponents $< p$ in a basis of $M[\xi^{-1}] = \mathcal{R}(\overline{V})[\xi^{-1}]^r$. Also as the free submodules $N \cong \mathcal{R}(\overline{V})^r \subseteq M$ form a filtering inductive system with union almost M, we obtain (taking such monomials in a basis of N) a filtering inductive system of free submodules of $\mathcal{A}$ (of rank p^r) with union almost $\mathcal{A}$. Thus $\mathcal{A}$ is almost projective of finite rank p^r over $\mathcal{R}(\overline{V})$, and almost finitely generated. Also assume given such a free submodule with basis $\{m_1, \dots, m_r\}$, quotient annihilated by ξ^α, and let

$$\xi^\alpha \cdot \Phi(m_i) = \sum_j a_{ij} \cdot m_j$$

with $a_{ij} \in \mathcal{R}(\overline{V})$. Then the matrix (a_{ij}) has an inverse up to ξ^β for any $\beta > (p+1)\alpha$, as $\xi^\beta \cdot m_i \in \xi^\alpha \cdot \Phi(\xi^\alpha \cdot M)$. Also all monomials with exponents $< p$ in the $\xi^{\alpha/p-1} \cdot m_i = T_i$ form an subalgebra $\mathcal{A}_\alpha$ isomorphic to

$$\mathcal{R}(\overline{V})[T_1, \dots, T_r]/(T_i^p - \sum_j a_{ij} \cdot T_j).$$

From ramification-theory it follows that the trace-form identifies the dual of $\mathcal{A}_\alpha$ with $\det(a_{ij})^{-1} \cdot \mathcal{A}_\alpha$. Especially $\mathcal{A}[1/\xi] = \mathcal{A}_\alpha[1/\xi]$ is étale over $\mathcal{R}(\overline{V})[1/\xi]$, and the corresponding canonical idempotent $e \in \mathcal{A}_\alpha \otimes_{\mathcal{R}(\overline{V})} \mathcal{A}_\alpha[1/\xi]$ has denominator $\det(a_{ij})$ which divides $\xi^{r\beta}$ for any $\beta > (r+1)\alpha$. Letting $\alpha \to 0$ we see that the canonical idempotent in $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}(\overline{V})} \mathcal{A}[1/\xi]$ is almost integral, thus $\mathcal{A}$ is almost étale over $\mathcal{R}(\overline{V})$.

Hence we can almost lift $\mathcal{A}$ to an almost étale cover of $\mathcal{A}_{\inf}(\overline{V})$ and its quotient $\widehat{\overline{V}}$. However $\widehat{\overline{V}}[1/p]$ is algebraically closed, so this cover is almost trivial. It follows that $\mathcal{A} \approx \mathcal{R}(\overline{V})^{p^r}$. We thus obtain p^r different (almost) homomorphisms of $\mathcal{A}$ into $\mathcal{R}(\overline{V})$, corresponding to (almost) maps $M \to \mathcal{R}(\overline{V})$ which are Frobenius linear. These maps almost span the (module) dual of $\mathcal{A}$ and thus also of M (check with free submodules). Now the $\mathbb{F}_p$-vectorspace $\mathrm{Hom}^{\mathrm{almost}}_{\Phi,\mathcal{R}(\overline{V})}(M, \mathcal{R}(\overline{V}))$ has p^r elements and thus dimension r. A basis of it defines an almost map $M \to \mathcal{R}(\overline{V})^r$ inducing an almost surjection on duals, and thus an almost isomorphism. Also the canonical $\mathbb{F}_p$-structure on $\mathcal{R}(\overline{V})^r$ can be recovered as the space of Φ-invariants.

Next replace M by

$$H^i(\mathfrak{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes \widetilde{\psi}(\mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}))) = \widetilde{M}^i,$$

which is almost the same. Then we have the exact sequences ($b \in \mathcal{R}(\overline{V})$ as before)

$$0 \longrightarrow \mathrm{coker}(\Phi - b^{p-1} \mid \widetilde{M}^{i-1}) \longrightarrow H^i_{(!)}(\mathfrak{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}) \longrightarrow \ker(\Phi - b^{p-1} \mid \widetilde{M}_i) \longrightarrow 0.$$

But $\widetilde{M}^i \approx \mathcal{R}(\overline{V})^{r_i}$ (Φ-linear). Thus $\Phi - b^{p-1}$ is almost surjective on $\widetilde{M}^{i-1}$. Now the above sequence comes (with tensor-products etc.) from the first line in

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{F}_p & \xrightarrow{b\cdot} & \mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}) & \xrightarrow{\Phi - b^{p-1}} & \mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle b'} & & \downarrow{\scriptstyle b'^p} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{F}_p & \xrightarrow{b\cdot b'} & \mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}) & \xrightarrow{\Phi - (bb')^{p-1}} & \mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Extend this as shown with $b' \in \mathcal{R}(\overline{V}), b' \neq 0$, unit, to get

$$\begin{array}{ccccccc} \operatorname{coker}(\Phi - b^{p-1})/\widetilde{M}^{i-1}) & \longrightarrow & H^i_{(!)}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}) & \longrightarrow & \ker(\Phi - b^{p-1}/\widetilde{M}^i) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle b'^p\,\cdot} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle b'} & & \\ \operatorname{coker}(\Phi - (bb')^{p-1}/\widetilde{M}^{i-1}) & \longrightarrow & H^i_{(!)}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}) & \longrightarrow & \ker(\phi - (bb')^{p-1}/\widetilde{M}^i) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

The first vertical arrow is zero, thus $H^i_{(!)}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L})$ injects into $\widetilde{M}_i$ for all b (we may vary b, b'). Also multiplication by b respectively b' applied to $\widetilde{M} \approx \mathcal{R}(\overline{V})^{r_i}$ induces maps

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_p^{r_i} = \Phi\text{-invariants in } & \mathcal{R}(\overline{V})^{r_i} \\ & \longrightarrow \ker(\Phi - b^{p-1}/\widetilde{M}^i) \\ & \longrightarrow \ker(\Phi - (bb')^{p-1}/\mathcal{R}(\overline{V})^{r_i}) = b \cdot \mathbb{F}_p^{r_i}, \end{aligned}$$

and one derives that indeed

$$\widetilde{M}^i \approx H^i_{(!)}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}) \otimes \mathcal{R}(\overline{V}).$$

Corollary 1. — *For any $\mathbb{L}$ (only annihilated by p^s)*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\Gamma(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes A_{\inf}(\overline{\mathcal{J}}_I)) &\approx \mathbb{R}\Gamma_{(!)}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}) \otimes A_{\inf}(\overline{V}) \\ \mathbb{R}\Gamma(\mathcal{X}^0 \otimes \overline{K}, \mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{J}}_I) &\approx \mathbb{R}\Gamma_{(!)}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, L) \otimes \overline{V} \end{aligned}$$

Proof. — Dévissage in $\mathbb{L}$.

Corollary 2. — $\mathbb{R}\Gamma_{(!)}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L})$ *satisfies Künneth.*

Proof. — Descente from $\mathbb{R}\Gamma(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{J}}_I)$ (for $\overline{V}\otimes$ (a $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$-module), "almost zero" implies zero).

Also the map $u_X : (X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}} \to \mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}$ and its variants induce a map

$$\mathbb{R}\Gamma_{(!)}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{(!)}((X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{L}).$$

Especially the trace-form on $H^{2d}_!((X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(d))$ (if X has pure relative dimension d) induces a trace-form $\operatorname{tr}^{\text{ét}}$ on $H^{2d}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(d))$. We shall show later that it coincides with the restriction of the trace-form on $H^{2d}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \overline{\mathcal{J}}/p^s\overline{\mathcal{J}}(d))$. Hence it induces by descente a perfect duality.

Corollary 3. — *The étale trace induces a perfect duality*

$$\mathbb{R}\Gamma_{(!)}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}) \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\Gamma_{(!^c)}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}^\vee)(d)[2d] \longrightarrow \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}.$$

4. Chern-classes and Gysin-maps

Suppose $\mathcal{L}$ is a line-bundle on X. We define its first Chern-Class $c_1(\mathcal{L})$ in $H^2(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(1))$ as follows: $\mathcal{L}$ is given by a class in

$$H^1(X, O_X^*) = H^1(X^{\text{ét}}, \mathcal{O}_X^*).$$

Pullback via $v_X^*\mathcal{O}_X^* \to \overline{\mathcal{O}}^*$ gives a class in $H^1(\mathcal{X} \otimes_V \overline{K}, \overline{\mathcal{O}}^*)$, and via the Kummer-sequence

$$0 \longrightarrow \mu_{p^s} \longrightarrow \overline{\mathcal{O}}^* \longrightarrow \overline{\mathcal{O}}^* \longrightarrow 0$$

we obtain a class in $H^2(\mathcal{X} \otimes_V \overline{K}, \mu_{p^s})$. It is clear that pullback to $H^2((X \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mu_{p^s})$ maps it to the étale first Chern-class of $\mathcal{L} \mid X \otimes_V \overline{K}$.

Next we consider a closed immersion $i : Z \to X$ such that locally in the étale topology

$$X \cong X_1 \times \mathbb{A}^1, Z \cong X_1 \times \{0\},$$

with X_1 having toroidal singularities, stratifications etc. as before. We intend to give a geometric description of the Gysin-map i_*. We define a new stratification on X by adding Z as well as its intersections with X_α's to the strata, and call the new topos $\widetilde{X}$. Thus $\widetilde{X}^0 = X^0 - Z^0$. Next there are maps of topoi

$$j : (\widetilde{\mathcal{X}})^0 \otimes_V \overline{K} \longrightarrow \mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}$$
$$w : \widetilde{\mathcal{X}} \otimes_V \overline{K} \longrightarrow \mathcal{X} \otimes_V \overline{K}$$
$$i : \mathcal{Z} \otimes_V \overline{K} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{X}} \otimes_V \overline{K}$$

Also there are variants $i^{\text{ét}}, j^{\text{ét}}$ for the étale topos on the generic fibre. Now a sheaf $\mathcal{F}$ on $(X \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}$ which is locally constant on all strata induces $\mathbb{L} = u_{X,*}(\mathcal{F})$ on $\mathcal{X} \otimes_V \overline{K}$ and $\widetilde{\mathbb{L}} = w^*(\mathbb{L})$ on $\widetilde{\mathcal{X}} \otimes_V \overline{K}$. Furthermore on $(X \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}$ there is an exact sequence (or better an exact triangle)

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}j_*^{\text{ét}} j^{\text{ét},*}\mathcal{F} \longrightarrow i_*^{\text{ét}}(\mathcal{F}/Z)(-1)[-1] \longrightarrow 0,$$

whose $\mathbb{R}u_{X,*}$ receives a map from

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathbb{L}} \longrightarrow \mathbb{R}j_*j^*\widetilde{\mathbb{L}} \longrightarrow \tau_{\geqslant 1}\mathbb{R}j_*j^*\widetilde{\mathbb{L}} \longrightarrow 0.$$

Furthermore there exists a canonical map (inertia at Z)

$$\mathbb{R}^1 j_*j^*\widetilde{\mathbb{L}} \longrightarrow i_*(\widetilde{\mathbb{L}}|Z)(-1)$$

which we shall show to be an isomorphism. Finally the higher direct images $\mathbb{R}^n j_*j^*\widetilde{\mathbb{L}}$ vanish for $n \geqslant 2$. This also applies to higher ($n \geqslant 1$) direct images $\mathbb{R}^n i_*(\widetilde{\mathbb{L}}|Z)$: The stalks are given by cohomology of profinite groups, and i induces an injection on local fundamental groups because it has étale local sections.

Hence by pullback we obtain an exact triangle

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathbb{L}} \longrightarrow \mathbb{R}j_*j^*\widetilde{\mathbb{L}} \longrightarrow i_*(\widetilde{\mathbb{L}}|Z)(-1)[-1] \longrightarrow 0$$

mapping to the two previous ones.

This is useful because it is wellknown that the Gysin-homomorphism in étale topology is defined by the connecting map

$$\mathbb{R}\Gamma((Z^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathcal{F}(1))[-2] \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma((X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathcal{F})$$

from the first triangle, and similar for variants with (partial) compact support.

Sketch. — Taking cup-product with classes in $\mathbb{R}\Gamma_!((X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathcal{F}^\vee)$ we reduce to constant coefficients and cohomology in highest degrees. Then the assertion follows from the explicit description of the cohomology-class of a point in Z^0.

Hence the second triangle defines the Gysin-homomorphism for $i : \mathcal{Z} \otimes_V \overline{K} \to \widetilde{\mathcal{X}} \otimes_V \overline{K}$, and allows us to compare it to the first.

Finally we come to the analogous results with coefficients $\mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}$. In fact we prove them first, and derive from them the assertion about discrete coefficients.

1. Proposition. — *Suppose I denotes support-conditions (at divisors transversal to the embedding i). Then on $\mathcal{X}^0_{\overline{K}}$ there is an almost exact sequence (better triangle)*

$$0 \longrightarrow \mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{J}}_{I,X} \longrightarrow \mathbb{R}j_*(\mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{J}}_{I,\widetilde{X}}) \longrightarrow i_*(\mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{J}}_{I,Z})(-1)[-1] \longrightarrow 0.$$

Explanation of maps, and beginning of proof. — The maps can be described as follows:

i) The first is induced from

$$\overline{\mathcal{J}}_{I,X}/p^s \cdot \overline{\mathcal{J}}_{I,X} \longrightarrow j_*\overline{\mathcal{J}}_{I,\widetilde{X}}/p^s\overline{\mathcal{J}}_{I,\widetilde{X}}.$$

We claim that this is an almost isomorphism. Tensoring with $\mathbb{L}$ then gives an almost isomorphism of H^0's.

ii) Let ι denote the stratum Z in $\widetilde{\mathcal{X}}$. Then there is a map

$$\mathbb{R}j_*(\mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{J}}_{I,\widetilde{X}})[1] \longrightarrow \mathbb{R}^1j_*(\mathbb{L} \otimes \widetilde{\psi}_{0\iota}(\overline{\mathcal{J}}_{I,\widetilde{X}}))$$

Furthermore we claim that

$$j_*\widetilde{\psi}_{0,\iota}(\overline{\mathcal{J}}_{I,\widetilde{X}}) = i_*(\overline{\mathcal{J}}_{I,Z})$$

$$\mathbb{R}^1j_*\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(1) = i_*(\widetilde{\mathbb{L}}/Z),$$

and that the cup-product with negative of the special class in $\mathbb{R}^1j_*\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(1)$ defined by p-power roots of a local equation for Z gives an almost isomorphism

$$j_*\widetilde{\psi}_{0,\iota}(\overline{\mathcal{J}}_{I,\widetilde{X}})(-1) \longrightarrow \mathbb{R}^1j_*(\overline{\mathcal{J}}_{I,Y}/p^s\overline{\mathcal{J}}_{I,Y})$$

Again this persists after tensoring with $\mathbb{L}$. The negative sign is related to the fact that the characteristic class of Z is the first Chern class of the line bundle $\mathcal{O}(Z)$ which is locally generated by the inverse of a local equation for Z.

iii) The higher direct images

$$\mathbb{R}^\nu j_* \overline{\mathcal{J}}_{I,\widetilde{X}} / p^s \overline{\mathcal{J}}_{I,\widetilde{X}} \approx 0 \text{ for } \nu \geqslant 2,$$

and also after tensoring with $\mathbb{L}$.

The assertions in i), ii), iii) imply almost exactness of the sequence in the proposition. From that we shall derive

iv) In addition

$$\mathbb{R}^1 j_* \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(1) = i_*(\widetilde{\mathbb{L}}/Z)(-1),$$

and all higher cohomology vanishes.

Thus we can construct the exact sequences from the beginning and obtain compatability of Gysin-maps.

Now to the required assertions. They are easily reduced to constant coefficients, as $\mathbb{L}$ becomes constant over $\overline{\mathcal{O}}$. That $j_*(\widetilde{\psi}_{0,\iota}(\overline{\mathcal{J}}_{I,\widetilde{X}})) = i_*(\mathcal{J}_{I,Z})$ follows from the definitions:

To evaluate the left hand side on a finite étale covering

$$V \longrightarrow \mathcal{U}^0 \otimes_V \overline{K} \quad (\mathcal{U} \subseteq X$$

étale) we first restrict to the preimage of $X \smallsetminus Z$, then extend by normalization to recover V, next restrict to the preimage of $Z \otimes_V \overline{K}$, and then form global sections of the normalization. But this gives the right hand side.

For the remaining assertions it suffices to check them on stalks

$$\mathrm{Spec}(R),\ R = \mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}.$$

Let $T \in R$ define the stratum Y. Extending V we may assume that $R \otimes_V \overline{V}$ is local and normal. Consider the normalizations $\overline{R}$ and $\overline{\widetilde{R}}$ of R in the maximal étale cover of $\mathrm{Spec}(R)^0 \otimes_V \overline{K}$ respectively of the complement of Z in it. By the theory of almost étale extension $\overline{R}$ and $\overline{\widetilde{R}}$ are limits of almost étale covers of R_∞ respectively $\widetilde{R}_\infty$, which in turn are induced by toroidal coverings. As locally in the étale topology $X \cong X_1 \times \mathbb{A}^1$ we may use for $\widetilde{R}_\infty$ the toroidal covering induced from toroidal coverings of X_1 and from adjoining roots of T, and for R_∞ we use the toroidal covering induced from X_1 as well as from p-power roots of a suitable unit, say of $1+T$. Especially $\overline{\widetilde{R}}$ is almost étale over the subextension obtained by adjoining to $\overline{R}$ all roots of T (and normalizing the result). Now it Δ and $\widetilde{\Delta}$ denote the relevant fundamental groups, and $\underset{\sim}{\Delta} \subseteq \widetilde{\Delta}$ the kernel of the surjection to Δ, we have (say without support conditions) to compute the cohomology $H^*(\underset{\sim}{\Delta}, \overline{\widetilde{R}}/p^s\overline{\widetilde{R}})$: For the first three assertions we need that

i) $H^0(\underset{\sim}{\Delta}, \overline{\widetilde{R}}/p^s\overline{\widetilde{R}}) \approx \overline{R}/p^s\overline{R}$

ii) $H^1(\underset{\sim}{\Delta}, \overline{\widetilde{R}}/p^s\overline{\widetilde{R}}) \approx (\overline{R}/T\overline{R})^{\mathrm{norm}} \otimes \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(-1)$

iii) $H^\nu(\underset{\sim}{\Delta}, \overline{\widetilde{R}}/p^s\overline{\widetilde{R}}) \approx (0)$ for $\nu \geqslant 2$.

By the theory of almost étale extensions we may first replace $\overline{R}$ by R_∞ and $\overline{\widetilde{R}}$ by the subextension corresponding to the quotient $\underset{\sim}{\Delta} \to \widehat{\mathbb{Z}}(1)$, i.e. where we adjoin roots of T. By Künneth it suffices to treat $d = 1$ (no factor X_1). At this stage also the support-condition disappears. Furthermore as groups of order prime to p have trivial cohomology, we reduce to the quotient $\underset{\sim}{\Delta} \to \mathbb{Z}_p(1)$. Let $S_\infty \subseteq \overline{\widetilde{R}}$ denote the corresponding normalization,

$$S_\infty/\overline{\widetilde{J}}_\infty \approx (R_\infty/T \cdot R_\infty)^{\mathrm{norm}} \cong \mathrm{Hom}_{cont}(\mathbb{Z}_p(1), \overline{V})$$

The assertions we have to show are

i) $H^0(\widehat{\mathbb{Z}}(1), S_\infty/p^s \cdot S_\infty) \approx R_\infty/p^s \cdot R_\infty$
ii) $H^1(\widehat{\mathbb{Z}}(1), S_\infty/p^s \cdot S_\infty) \approx (R_\infty/TR_\infty)^{\mathrm{norm}} \otimes \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(-1)$
iii) $H^\nu(\widehat{\mathbb{Z}}(1), S_\infty/p^s \cdot S_\infty) = 0$ for $\nu > 1$.

Here iii) is clear because if cohomological dimension one. Also we may replace $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$ by the quotient $\mathbb{Z}_p(1)$, as the kernel $\prod_{l \neq p} \mathbb{Z}_l(1)$ has trivial cohomology. This amounts to changing S_∞ and $\widetilde{R}_\infty$ by adjoining only p-power roots of T. We do this, but retain the notation for simplicity. Now write $S_\infty = \bigcup_n S_n$, with

$$S_n = R_\infty[T^{1/p^n}]^{\mathrm{norm}}$$

Note that $S_n[1/T]$ is almost étale over $R_\infty[1/T]$, by the purity theorem. Also R_∞ is the inductive limit of regular rings

$$R_m = V_m[(1+T)^{p^{-n}}]^{\mathrm{sh}},$$

and thus $S_n = \bigcup_m S_{n,m}$ with

$$S_{n,m} = R_m[T^{p^{-n}}]^{\mathrm{norm}}$$

a free R_n-module of rank $q = p^n$. The group $\Delta_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1)$ operates on $S_{n,m}$. We have $H^0(\Delta_n, S_{n,m}) = R_m$. For the higher cohomology consider the infinite complex

$$K^\bullet_{n,m} : \cdots \longrightarrow S_{n,m} \xrightarrow{(\sigma-1)} S_{n,m} \xrightarrow{\mathrm{tr}} S_{n,m} \xrightarrow{(\sigma-1)} S_{n,m} \xrightarrow{\mathrm{tr}} S_{n,m} \longrightarrow \cdots$$

where $\mathrm{tr} = \sum_{i=0}^{q-1} \sigma^i$.

Its cohomology $H^i(K_{n,m}) = \widetilde{H}^i(\Delta_n, S_{n,m})$ is called the Tate-cohomology ($i \in \mathbb{Z}$). It coincides for $i > 0$ with $H^i(\Delta_n, S_{n,m})$, while

$$\widetilde{H}^0(\Delta_n, S_{n,m}) = R_m/\,\mathrm{tr}(S_{n,m}).$$

Obviously $\widetilde{H}^i$ is periodic with period two. If $S^\vee_{n,m} = \mathrm{Hom}_{R_m}(S_{n,m}, R_m)$, we can similarly compute $\widetilde{H}^i(\Delta_n, S^\vee_{n,m})$ from the version of $K_{n,m}$ where $S_{n,m}$ is replaced by duals. However this is isomorphic to $(K^\bullet_{n,m})^\vee[1]$. As R_m has finite cohomological dimension two we thus obtain a spectral sequence

$$E_2^{a,b} = \mathrm{Ext}^a_{R_m}(\widetilde{H}^{-b}(\Delta_n, S^\vee_{n,m}), R_m) \Rightarrow \widetilde{H}^{a+b+1}(\Delta_n, S_{n,m})$$

with $E_2^{a,b} = 0$ unless $0 \leqslant a \leqslant 2$.

Now we pass to the limit $m \to \infty$. The trace-form defines embeddings $S_{n,m} \hookrightarrow S_{n,m}^\vee$. If we localise at height one primes $\mathfrak{p}$ of R_m these are determined by the different of the extension. It is a unit except if $\mathfrak{p}$ divides p or T. However at the prime-divisors of P the p-valuation of the different converges to zero because $S_n[1/T]$ is almost étale over $R_\infty[1/T]$. For $\mathfrak{p}$ dividing T the different is generated by $T^{(q-1)/q}$. It thus follows that

$$T^{(q-1)/q} \cdot S_{n,m} \subset S_{n,m}^\vee,$$

with the quotient annihilated by p^{α_m}, $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_m = 0$. It also follows that p^{α_m} annihilates $S_n/S_{n,m} \otimes_{R_m} R_\infty$. Hence we obtain:

a) S_n is almost projective finitely generated $/R_\infty$

b) The trace map factors

$$\mathrm{tr} : J_n = T^{1/q} \cdot S_n \longrightarrow T \cdot R_\infty,$$

and $\frac{1}{T} \cdot \mathrm{tr}$ induces an almost isomorphism

$$J_n \approx \mathrm{Hom}_{R_\infty}(S_n, R_\infty)$$

Especially $\mathrm{tr}(J_n) \approx T \cdot R_\infty$.

c) The $\widetilde{H}^i(\Delta_n, S_n)$ are almost finitely presented. There is a spectral sequence (up to almost zero modules)

$$E_2^{a,b} = \mathrm{Ext}^a_{R_\infty}(\widetilde{H}^{-b}(\Delta_n, J_n), R_\infty) \Rightarrow \widetilde{H}^{a+b+1}(\Delta_n, S_n)$$

with $E_2^{a.b} \approx 0$ unless $0 \leqslant a \leqslant 2$.

((c) follows because $S_{n,m} \otimes_{R_m} R_\infty \to S_n$ is a p^{α_n}-isomorphismus).

Now $\widetilde{H}^*(\Delta_n, J_n)$ is annihilated by p^n as well as by $\mathrm{tr}(S_n)$ which almost contains T. As (p^n, T) form a regular sequence in R_∞, $\mathrm{Ext}^a_{R_\infty}(M, R_\infty) = (0)$ for $a \leqslant 1$ if M is annihilated by p^n and T. Thus the spectral sequence almost degenerates to give (using period two)

$$\widetilde{H}^{a+1}(\Delta_n, S_n) \approx \mathrm{Ext}^2_{R_\infty}(\widetilde{H}^a(\Delta_n, J_n), R_\infty)$$

However

$$\widetilde{H}^0(\Delta_n, J_n) = (J_n \cap R_\infty)/\mathrm{tr}(J_n) \approx T \cdot R_\infty / T \cdot R_\infty \approx 0,$$

and thus

$$\widetilde{H}^{\mathrm{even}}(\Delta_n, J_n) \approx \widetilde{H}^{\mathrm{odd}}(\Delta_n, S_n) \approx (0).$$

Passing to the limit $n \to \infty$ implies

$$H^i(\Delta_\infty, J_\infty) = (0), \quad i > 0 \text{ even}$$
$$H^i(\Delta_\infty, S_\infty) = (0), \quad i > 0 \text{ odd}$$
$$H^0(\Delta_\infty, J_\infty) \approx T \cdot R_\infty$$
$$H^0(\Delta_\infty, S_\infty) \approx R_\infty$$

Also all cohomology vanishes in degree > 1 for p-torsion modules).

Finally we compute

$$H^*(\Delta_\infty, S_\infty/J_\infty) \approx H^*(\mathbb{Z}_p(1), (R_\infty/TR_\infty)^{\mathrm{norm}}).$$

Here the action of $\mathbb{Z}_p(1)$ on $(R_\infty/TR_\infty)^{\mathrm{norm}}$ is trivial. Thus the module coincides with H^0. Also H^1 are the continuous homomorphisms $\mathbb{Z}_p(1) \to (R_\infty/T \cdot R_\infty)^{\mathrm{norm}}$. As the target has no torsion these vanish. Finally H^2 can be computed by tensoring with $0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to 0$. The result:

$$H^0(\Delta_\infty, (R_\infty/T \cdot R_\infty)^{\mathrm{norm}}) = (R_\infty/T \cdot R_\infty)^{\mathrm{norm}}$$
$$H^1(\Delta_\infty, (R_\infty/T \cdot R_\infty)^{\mathrm{norm}}) = (0)$$
$$H^2(\Delta_\infty, (R_\infty/T \cdot R_\infty)^{\mathrm{norm}}) = (R_\infty/T \cdot R_\infty)^{\mathrm{norm}} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-1)$$

Next using $0 \to J_\infty \to S_\infty \to S_\infty/J_\infty \to 0$ we compute

$$H^0(\Delta_\infty, S_\infty) = R_\infty$$
$$H^1(\Delta_\infty, S_\infty) \approx (0)$$
$$H^2(\Delta_\infty, S_\infty) \approx (R_\infty/T \cdot R_\infty)^{\mathrm{norm}} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-1)$$

Finally $0 \to p^s \cdot S_\infty \to S_\infty \to S_\infty/p^s \cdot S_\infty \to 0$ gives

$$H^0(\Delta_\infty, S_\infty/p^s \cdot S_\infty) \approx R_\infty/p^s \cdot R_\infty$$
$$H^1(\Delta_\infty, S_\infty/p^s \cdot S_\infty) \approx (R_\infty/T \cdot R_\infty)^{\mathrm{norm}} \otimes \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(-1)$$

Thus we have shown the first three claims (the maps are easily seen to be a described there). For the last assertion iv) it is easily checked if the residue field of x has characteristic zero. Thus assume that its characteristic is p. What we have to do is compute the first cohomology of the complement of the preimage of Y in $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x} \otimes_V \overline{K})^0$, with coefficients $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(1)$. Its irreducible components correspond to classes of Δ_x modulo the decomposition-group D of Y, and inertia at these components defines an injective map from our H^1 to the induced module $\mathrm{Ind}_D^\Delta(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$, which defines $i_*(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$. It remains to show that the map is also surjective. This uses the sheaf $\mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}})$ on the topos $(\widetilde{X}^0 \otimes_V \overline{K})$. The assertions i),ii),iii), and projective limits, imply that the zero'th cohomology of $\mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}_{\widetilde{X}})$ is almost equal to $\mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}_X)$, and its first cohomology to $\mathrm{Ind}_D^\Delta(\mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}_Y))(-1)$. Higher cohomology is almost zero. Computing almost invariants under Frobenius we get the assertion with coefficients $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, and extending modulo p^s follows by by devissage.

After this hard work apply $\mathbb{R}q_{X,*}$ to the almost exact sequence

$$0 \longrightarrow \overline{\mathcal{O}}_X/p^s \cdot \overline{\mathcal{O}}_X \longrightarrow \mathbb{R}j_*\overline{\mathcal{O}}_{\widetilde{X}}/p^s \cdot \overline{\mathcal{O}}_{\widetilde{X}} \longrightarrow i_*(\overline{\mathcal{O}}_Y/p^s \cdot \overline{\mathcal{O}}_Y)[-1](-1) \longrightarrow 0$$

to obtain in highest degree

$$\mathbb{R}^d q_{X,*}(\overline{\mathcal{O}}_X/p^s\overline{\mathcal{O}}_X) \longrightarrow \mathbb{R}^d q_{\widetilde{X},*}(\overline{\mathcal{O}}_{\widetilde{X}}/p^s\overline{\mathcal{O}}_{\widetilde{X}}) \longrightarrow \mathbb{R}^{d-1} q_{Y,*}(\overline{\mathcal{O}}_Y/p^s \cdot \overline{\mathcal{O}}_Y)(-1) \longrightarrow 0$$

on $X^{\text{ét}}$. These map to the exact sequence

$$0 \longrightarrow \omega_X(-d) \longrightarrow \omega_X(Y)(-d) = \omega_{\widetilde{X}}(-d) \longrightarrow i_*\omega_Y(-d) \longrightarrow 0$$

with the resulting two squares commutative:

This is an easy local calculation. The first square commutes on $X \setminus Z$ which is dense. For the second choose a local equation T for Z and extend to local parameter $X_1 = T, X_2, \ldots, X_d$. Then we obtain a $\mathbb{Z}_p(1)^d = \Delta$-extension of $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ by adjoining p-power roots of the X_i. Then the trace-map sends the generator of $H^d(\Delta, \mathbb{Z}_p(d)) \cong \mathbb{Z}_p$ to $d\log X_1 \wedge \cdots \wedge d\log X_d$. When mapping to the "$Z$-terms" the first goes to the canonical generator of $H^{d-1}(\Delta_Y, \mathbb{Z}_p(d-1)) = \mathbb{Z}_p$, where $\Delta_Y \cong \mathbb{Z}_p(1)^{d-1}$ corresponds to adjoining p-power roots of $X_2, \ldots, X_d$. In turn this goes to $d\log X_2 \wedge \cdots \wedge d\log X_d$, which is the residue of $d\log X_1 \wedge \cdots \wedge d\log X_d$. However the direct image in coherent cohomology is defined by the exact sequence of ω's.

By taking cup-products with classes of complementary degree it follows that the Gysin-map

$$i_* : \mathbb{R}\Gamma_{(!)}(\mathcal{Z}, \mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}_Y)(-1)[-2] \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{(!)}(\mathcal{X}, \mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}_X)$$

is the connecting map from the exact sequence (triangle)

$$0 \longrightarrow \mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}_X \longrightarrow \mathbb{R}j_*(\mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}_{\widetilde{X}}) \longrightarrow i_*(\mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}_Z)(-1)[-1] \longrightarrow 0$$

and its variants with support-conditions.

Also we have constructed an exact triangle

$$0 \longrightarrow \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{R}j_*j^*\mathbb{L} \longrightarrow i_*(\mathbb{L})(-1)[-1] \longrightarrow 0$$

mapping to the previous one (onto the almost invariants of Frobenius). For support-conditions one applies the functors $\Psi(\mathbb{L})$ and $\mathbb{R}v_{X,*}$, and obtains such a triangle on $X^{\text{ét}}$, with $\mathbb{R}v_{X,*}$ applied to all terms. It then induces an "adjoint"

$$\mathbb{R}\Gamma_{(!)}(\mathcal{Z}, \mathbb{L})(-1)[-2] \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{(!)}(\mathcal{X}, \mathbb{L})$$

for the trace-maps induced from cohomology with values in $\overline{\mathcal{O}}$. If we know that these trace-maps take values in $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$ we could use them to define a Poincaré-duality and i_* would be the adjoint to i^*. In any case u_X^* maps our exact sequence to its pendant in $(X \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}$, which defines the direct image in étale cohomology. Thus one checks that our triangle defines an adjoint i_* for the inner product defined by $\text{tr}^{\text{étale}}$.

The upshot of this discussion:

There exists an adjoint i_* for the $\text{tr}^{\text{étale}}$-theory inducing the adjoint in $\overline{\mathcal{O}}$-cohomology.

Next let us compute in some examples that the comparison-maps

$$H^i(\mathcal{X} \otimes_V \overline{K}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i((X \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$$

tend to be isomorphisms:

Example 1. — Let

$$X = \mathbb{P}^n, \quad X^0 = \mathbb{G}_m^d = \mathbb{P}^d \setminus \cup_{i=0}^d H_i,$$

H_i the standard-hyperplanes $\{T_i = 0\}$. Then X can be covered by standard affines $\mathbb{A}^n$ with fundamental group $\pi_1(\mathbb{G}_m^d \otimes_V \overline{K}) = \widehat{\mathbb{Z}}^d$ corresponding to n-power coverings

$\mathbb{P}^d \to \mathbb{P}^d$. Hence

$$H^*(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \overline{\mathcal{O}}/p^s\overline{\mathcal{O}}) = \mathbb{R}\Gamma(\widehat{\mathbb{Z}}(+1)^d, \varinjlim \mathbb{R}\Gamma(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}/p^s\mathcal{O}) \otimes_V \overline{V})$$
$$= (\text{exterior algebra in } \mathbb{Z}_p(-1)^d) \otimes \overline{V}/p^s\overline{V}.$$

Taking Frobenius-invariants

$$H^*(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) = \text{exterior algebra in} \quad \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(-1)^d$$
$$= H^*((X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$$

By using the fundamental triangle for the embeddings $H_i \hookrightarrow \mathbb{P}^d \hookleftarrow \mathbb{P}^d - H_i$ one obtains by induction that

$$H^*(\mathcal{X} \otimes_V \overline{K}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) = H^*\Big((X \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=0}^{d} \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} \cdot \xi^i, \xi = c_1(\mathcal{O}(1))\Big).$$

Example 1*. — Let $\mathcal{E}$ denote a vectorbundle on X of rank $r+1$, $Y = \mathbb{P}_X(\mathcal{E}) \xrightarrow{\text{pr}} X$. Then

$$H^*(\mathcal{Y}^0 \otimes_V \overline{K}, \text{pr}^*(\mathbb{L}) \otimes \overline{\mathcal{O}}_Y) = \bigoplus_{i=0}^{r} H^{*-2i}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}_X) \cdot \xi^i$$

with

$$\xi = c_1(O(1)), \quad \text{pr}^*(\mathcal{E}) \longrightarrow O(1)$$

the universal quotient. Also

$$H^*(\mathcal{Y}^0 \otimes_V \overline{K}, \text{pr}^*\,\mathbb{L}) = \bigoplus_{i=0}^{r} H^{*-2i}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}) \circ \xi^i.$$

Proof. — Both assertions are equivalent. We prove the corresponding equality for the derived image $\mathbb{R}\,\text{pr}_* \circ \mathbb{R}q_{X,*}$, that is étale locally in $X^{\text{ét}}$. But over some $\text{Spec}(O_{X,x}^{\text{sh}})$, Y is a product $X \times \mathbb{P}^r$, and the result follows from Künneth.

In example 1 the

$$\text{tr} : H^{2d}(\mathbb{P}^d, \overline{\mathcal{O}}/p^s\overline{\mathcal{O}}(d)) \longrightarrow \overline{V}/p^s\overline{V}$$

sends $c_1(\mathcal{O}(1))^d$ to 1: This follows by induction from (i = inclusion $H_0 \hookrightarrow \mathbb{P}^d$)

$$i_* c_1(\mathcal{O}(1))^{d-1} = c_1(\mathcal{O}(1))^d.$$

The formula holds in étale cohomology, and we already know that both versions of i_* are compatible.

By checking fibrewise we derive that in example 1* $\text{pr}_*(\xi^r) = 1$. Also one defines the Chern-classes

$$c_i(\mathcal{E}) \in H^{2i}(\mathcal{X} \otimes_V \overline{K}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(i))$$

by the usual formula

$$\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i c_i(\mathcal{E}) \cdot \xi^{r-i} = 0.$$

They map to the corresponding Chern-classes in étale cohomology.

Example 2. — Let $\widetilde{X} \to \mathbb{P}^d = X$ denote the blow-up in the point $Y = (1 : 0 \dots)$. Then $\widetilde{X}$ is a $\mathbb{P}^1$-bundle over $\mathbb{P}^{d-1}$, with exceptional divisor $E \cong \mathbb{P}^{d-1}$. Using example 1^* one checks that for each i the sequence

$$0 \longrightarrow H^i_{(!)}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i_{(!)}(\widetilde{\mathcal{X}}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \oplus H^i_{()}(\mathcal{Y}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i_{(!)}(\mathcal{E}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

is exact.

Example 2*. — Let $Z \subseteq X$ denote a closed subvariety such that locally in the étale topology

$$(X, Z) \cong X_1 \times (\mathbb{A}^t, 0),$$

with X_1 toroidal etc. Let $\widetilde{X}$ denote the blow-up of X in $Z, E \subseteq \widetilde{X}$ the exceptional divisor, $E \cong \mathbb{P}_Z(J_Z/J_Z^2)$. Then for each i the sequence

$$0 \longrightarrow H^i_{(!)}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}) \longrightarrow H^i_{(!)}(\widetilde{\mathcal{X}}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}) \oplus H^i_{(!)}(\mathcal{Z}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}) \longrightarrow H^i_{(!)}(\mathcal{E}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}) \longrightarrow 0$$

is exact.

Proof. — As in example 1^* one checks this by a localization in $X^{\text{ét}}$. This would give a priori a long exact sequence in cohomology, but for example the pullback

$$p_X^* : H^i_{(!)}(X^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}) \longrightarrow H^i_{(!)}(\widetilde{\mathcal{X}}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L})$$

is injective, with left-inverse $p_{X,*}$.

Thus consider a product $X_1 \times \mathbb{A}^t = X$ and the blow-up $\widetilde{X}$ in $X_1 \times \{0\}$. $\mathbb{A}^t$ as well as its blow-up in zero obtain the structure of a torus-embedding from $\mathbb{G}_m^t \subseteq \mathbb{A}^t$. On $\mathbb{A}^t$ the codimension one strata are the coordinate hyperplanes, while on the blow-up we have their proper transforms as well as the exceptional divisor ($\cong \mathbb{P}^{t-1}$).

Now the blow-up induces an almost isomorphism on the cohomology of the stratum $X_1 \times \mathbb{G}_m^t$, using that we retain the same fundamental group and the theory of toroidal embeddings. Also the other strata can be treated by induction.

Remark. — For constant coefficients we also could have used local Künneth. The above procedure also works if $\mathbb{L}$ is not induced from the factor X_1 in $X_1 \times \mathbb{A}^t$.

Finally we need the self-intersection formula:

2. Lemma. — *For the inclusion $i : Z \hookrightarrow X$ of a divisor $i^* i_*(z) = -z \cup c_1(J_Z/J_Z^2) = z \cup c_1(\mathcal{N}_Z)$.*

Proof. — This amounts to computing the extension class of the pullback by i^* of the exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}j_*\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} \longrightarrow i_*\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(-1)[-1] \longrightarrow 0$$

Cover X by affines U_ν on which Z has a local equation f_ν. Then the p^s-th roots of f_ν form a μ_{p^s}-torsor on $\mathcal{U}_\nu \cap (X \smallsetminus Z)$, hence give a class in $\Gamma(\mathcal{U}_\nu \otimes_V \overline{K}, \mathbb{R}^1 j_* \mu_{p^s})$ which maps to $-1 \in i_*(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$. Thus the restriction to $\mathcal{U}_\nu \cap Z$ trivializes the extension there. The trivialization is not global. Namely one intersections $\mathcal{U}_\nu \cap \mathcal{U}_\mu$ we get a difference given by the μ_{p^s}-torsor of roots of $u_{\nu\mu} = (f_\nu/f_\mu) \mid Y$. However this defines $c_1(J_Z/J_Z^2)$.

Finally we treat immersions of higher codimensions. Let $Z \subseteq X$ be a closed immersion such that locally in the étale topology $(X, Z) \cong X_1 \times (\mathbb{A}^t, 0)$. Let $\widetilde{X} =$ blow-up of X in Z, $E =$ exceptional divisor $= \mathbb{P}_Z(J_Z/J_Z^2)$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xhookrightarrow{\widetilde{i}} & \widetilde{X} \\ {\scriptstyle P_Z}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P_X} \\ Z & \xhookrightarrow{i} & X \end{array}$$

On E we have the vectorbundle $\mathcal{F} = \mathrm{pr}_Y^*(J_Z/J_Z^2)^*/\mathcal{O}(-1)$. $\mathcal{F}$ has rank $t-1$, and from the usual formulas one computes that

$$c_{t-1}(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{t-1} c_{r-1}(\mathrm{pr}_Z^*(J_Z/J_Z^2)^*) \cup \xi^i.$$

Especially $p_{Z,*}(c_{t-1}(\mathcal{F})) = 1$ (in all cohomology-theories).

3. Proposition. — *$p_X^* \circ i_*(z) = \widetilde{i}_*(c_{t-1}(\mathcal{F}) \cup p_Z^*(z))$ for $z \in H^*(\mathcal{Z}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L})$.*

Proof. — The right-hand side lies in the image of pr_X^*: To check this it suffices to check the restriction to E. By the self-intersection formula this is

$$c_1(\mathcal{O}(-1)) \cup c_{t-1}(\mathcal{F}) \cup p_Z^*(z) = \mathrm{pr}_Z^*(c_t(J_Z/J_Z^2) \cup z)$$

and indeed induced from Z. It now suffices to apply $p_{X,*}$:

$$\begin{aligned} p_{X,*}(\widetilde{i}_*(c_{t-1}(\mathcal{F}) \cup p_Z^*(z)) &= i_* \circ p_{Z,*}(c_{t-1}(\mathcal{F}) \cup p_Z^*(z)) \\ &= i_*(z). \end{aligned}$$

Remark. — The proof actually shows the formula in the derived category.

4. Corollary. — *The transformation*

$$\mathbb{R}\Gamma(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma((X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{L})$$

commutes with i_*.

Proof. — It commutes with everything else in the formula.

5. Corollary. — *The two trace-maps (induced from $\overline{\mathcal{O}}/p^s \cdot \overline{\mathcal{O}}$ respectively from étale cohomology of the generic fibre) on $H_!^{2d}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(d))$ coincide.*

Proof. — We may assume that the generic fibre $X \otimes_V \overline{K}$ is irreducible (extend K if necessary). As the special fibre $X \otimes_V k$ is generically reduced, there exists (after perhaps again extending K) a section $i : Z = \mathrm{Spec}(V) \hookrightarrow X$ with image in the smooth locus. Then both traces are characterised by the fact that they take the value 1 on $i_*(1)$.

We intend to apply this theory to the diagonal embedding

$$\delta : X \hookrightarrow X \times_V X.$$

As this does not satisfy the conditions on the nose, we shall modify it to

$$\widetilde{\delta} : \widetilde{X} \longrightarrow (X \times_V X)^{\sim}.$$

This modification is done using toroidal geometry. We assume given a finite number of convex polyhedral cones $\{\sigma_\nu\}$, $\sigma_\nu \subseteq L_{\mathbb{R}}$, $L = \mathbb{Z}^{d+1}$, and also an indivisible $\lambda \in L^\vee$. We assume that each face of a σ_ν also appears among them, and that $\sigma_\nu \cap \ker(\lambda)$ is a simplex spanned by a partial basis of L.

Furthermore we assume given an étale covering of X by $X(\sigma_\nu)$'s, and étale maps $X(\sigma_\nu) \to \overline{T}_{\lambda,\sigma_\nu}$ (the torus-embedding defined by σ_ν). Also for τ a face of $\sigma, X(\tau)$ should be equal to the preimage of the open $\overline{T}_{\lambda,\{\tau\}} \subseteq \overline{T}_{\lambda,\{\sigma_\nu\}}$, with the induced map. Each $X(\sigma)$ is stratified, with strata indexed by faces τ of σ. If $x_1 \in X(\sigma_1)$ and $x_2 \in X(\sigma_2)$ lie over the same point $x \in X$, and in the closed σ_1-stratum respectively σ_2-stratum, then there exists an automorphism ($\langle\sigma_i\rangle \subseteq L$, the sublattice spanned by σ_i) $(\langle\sigma_1\rangle, \sigma_1, \lambda) \cong (\langle\sigma_2\rangle, \sigma_2, \lambda)$, such that the two induced isomorphisms between $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x} = \mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{X(\sigma_1),x_1} = \mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{X(\sigma_2),x_2}$ and the strict henselizations of $\overline{T}_{\lambda,\{\sigma_1\}}$ respectively $\overline{T}_{\lambda,\{\sigma_2\}}$ differ by the induced automorphism and the action of an element of T.

We construct for each σ_ν a finite collection $M(\sigma_\nu)$ of T-invariant ideals I of $V[L^\vee \cap \sigma_\nu^\vee]$, as follows: First, for any integer n, consider the set of elements $\mu \in L^\vee \cap \sigma_\nu^\vee$ such that

i) $\mu(\rho) \leqslant n$ for each generator ρ of an extremal ray of σ_ν

ii) If $\lambda(\rho) = 0$ for such a ρ, then $\mu(\rho) = 0$ except for at most one such ρ, for which $\mu(\rho) = 1$.

Choose n so big that the elements generate the dual of the subgroup $\langle\sigma_\nu\rangle \subseteq L$ generated by σ_ν, for all ν. Then define $M_0(\sigma_\nu)$ as the (finite) set of principal ideals $V[L^\vee \cap \sigma_\nu^\vee] \cdot \mu$ generated by such μ. If τ is a face of σ then each ideal in $M_0(\sigma)$ generates an ideal in $M_0(\tau)$ in $V[L^\vee \cap \tau^\vee] \supseteq V[L^\vee \cap \sigma^\vee]$. Also the set of ideals $M_0(\sigma)$ is stable under isomorphisms $(\langle\sigma_1\rangle, \sigma_1, \lambda) \cong (\langle\sigma_2\rangle, \sigma_2, \lambda)$. We define $M(\sigma)$ as the set of all ideals of the form

$$\ker : V[L^\vee \cap \sigma^\vee] \longrightarrow V[L^\vee \cap \tau^\vee]/I,$$

with $I \in M_0(\tau), \tau$ a face of σ. Then:

i) $M(\sigma)$ is stable under isomorphisms of $(\langle\sigma\rangle, \sigma, \lambda)$.

ii) For τ a face of σ, the map $I \mapsto I \cdot V[L^\vee \cap \tau^\vee]$ induces a surjection $M(\sigma) \twoheadrightarrow M(\tau)$.

iii) If $\sigma \subseteq \ker(\lambda)$, then $M(\sigma)$ consists of the unit ideals and the ideals defining the irreducible components of the boundary-divisor

iv) $M(\sigma)$ contains principal ideals generated by μ, for μ a system of generators of $\langle\sigma\rangle^\vee$.

Now define new torus-embeddings $T \subseteq \overset{\approx}{T}, \overset{\approx}{T}_\lambda$ by normalised blow-up of all ideals $I_1 + I_2$, for $I_1, I_2 \in M(\sigma)$. By ii) this commutes with open immersions defined by faces $\tau \subseteq \sigma$, and by i) the induced modifications of $X(\sigma)$ descend to a proper map of algebraic spaces $f : \widetilde{X} \to X$ inducing $\widetilde{X}^0 \xrightarrow{\sim} X^0$. We call such an f a toroidal modification. By iii) on the generic fibre

$$\widetilde{X} \otimes_V K \longrightarrow X \otimes_V K$$

is common blow-up of all intersections of pairs of boundary-divisors. Locally in the étale topology of X f is a normalised blowup, thus quasiprojective, but I do not know whether this remains true globally, or whether $\widetilde{X}$ is always a scheme.

Similarly on $X \times_V X$ we blow-up (and normalise) all ideals

$$\mathrm{pr}_1^*(I_1) + \mathrm{pr}_1^*(I_2), \mathrm{pr}_1^*(I_1) + \mathrm{pr}_2^*(I_2), \mathrm{pr}_2^*(I_1) + \mathrm{pr}_2^*(I_2)$$

with $I_1 \in M(\sigma_1), I_2 \in M(\sigma_2)$ (over $X(\sigma_1) \times X(\sigma_2)$). Then the diagonal extends to $\widetilde{\Delta} : \widetilde{X} \to \widetilde{X \times_V X}$. Note that normalised blow-up has the following toroidal description: Each $I \in M(\sigma)$ defines a convex piecewise linear function ψ_I on σ by

$$\psi_I(\rho) = \min\{\mu(\rho) \mid \mu \in I \cap \sigma^\vee\}.$$

Then the normalised blow-up amounts to subdividing σ (in a minimal way) such that ψ_I becomes linear on each stratum.

Especially on $X \times_V X$ (defined locally by

$$L^{(2)} = \ker(\lambda, -\lambda) \subseteq L \times L, \sigma^{(2)} = \sigma \times \sigma \cap L^{(2)}_{\mathbb{R}}),$$

the functions $\min(\mu(x), \mu(y))$ are linear on the strata of the subdivision, for μ in a system of generators of $\langle\sigma\rangle^\vee$ (condition iv)). It follows that on each open stratum meeting the diagonal we have $\mu(x) = \mu(y)$, and thus this stratum is totally contained in the diagonal. Also on the diagonal we obtain the subdivision defining $\widetilde{X}$. Thus the diagonal embedding $\overline{T} \hookrightarrow \overline{T} \times_V \overline{T}$ extends to an open immersion

$$(T \times 1) \times \overset{\approx}{T} \subseteq (\overline{T} \times_V \overline{T})^\sim.$$

Hence locally in the étale cohomology

$$(\widetilde{X \times_V X}, \widetilde{X}) \cong X_1 \times (\mathbb{A}^d, 0).$$

Next consider support-conditions at infinity for a toroidally defined $\widetilde{X} \to X$. If $J = J_I \subseteq \mathcal{O}_X$ partially defines the boundary, there are two canonical choices for an ideal $\widetilde{J} \subseteq \mathcal{O}_{\widetilde{X}}, \widetilde{J} \supseteq f^*(J)$. Either $\widetilde{J}$ defines the total preimage of $V(J)$ (the minimal choice), or the union of boundary divisors $\widetilde{D}$ not projecting onto irreducible components outside $V(J)$.

6. Lemma

i) $\widetilde{X} \otimes_V K$ *has normal crossings singularities*
ii) *For either choice of* $\widetilde{J}$ $\quad \mathbb{R}f_*\widetilde{J} = J$.

Proof

i) On the generic fibre we have to treat the torus-embedding defined by $\sigma \cap \ker(\lambda)$, which up to a torus-factor is $\mathbb{G}_m^d \subseteq \mathbb{A}^d$. Then $\widetilde{X}$ is the union of $d!$ embeddings $\mathbb{G}_m^d \subseteq \mathbb{A}^d$. One of them maps to X via $(X_1, X_1 \cdot X_2, \ldots, X_1 \cdot \cdots \cdot X_d)$, the others by permuting variables.
ii) If $\rho_1, \ldots, \rho_r$ are the extremal rays for σ, those for the cones of $\widetilde{\sigma}$ are sums $\rho_S = \sum_{i \in S} \rho_i$ for non-empty subsets $S \subseteq \{1, \ldots, d\}$. These lie in a common simplex if and only if the S's form a chain. Assume J is defined by $\{1, \ldots, a\}$. Then the bigger transform $\widetilde{J}$ corresponds to $S \subseteq \{1, \ldots, a\}$, while the total transform to $S \cap \{1, \ldots a\} \neq \phi$.

By [KKMS], § 3, Th. 12 for any $\mu \in L^\vee$ the μ-component in $H^i(\widetilde{\widetilde{T}}; \widetilde{J})$ is $H^i_A(\sigma, k)$ for a certain closed subset $A \subseteq \mid \tau \mid$, namely the union of all faces τ with $\mu \in \Gamma$ (τ-open, $\widetilde{J}$). This is also equal to the relative cohomology $H^i(\sigma, \sigma - A; k)$. First choose $\widetilde{J}$ minimal. Now $\mu \notin \Gamma(\tau\text{-open}, \widetilde{J})$ if either not $\mu \in \tau^\vee$, or $\mu \in \tau^\vee$ and $\mu(\rho_S) = 0$.

For some ρ_S belonging to $\widetilde{J}$ with $\rho_S \in \tau$, i.e. $S \cap \{1, \ldots, a\} \neq \phi$. Choose a $\delta\mu \in L^\vee$ with $\delta\mu(\rho_i) < 0$ for $i = 1, \ldots, a, \delta_\mu(\rho_j) = 0$ for $j = a+1, \ldots, r, \delta\mu(\rho) \geqslant 0$ for any extremal ρ of a face τ with $\lambda(\rho) > 0$. Then for $N \gg 0$

$$\mu \in \Gamma(\tau\text{-open}, \widetilde{J}) \Longleftrightarrow N\mu + \delta\mu \in \tau^\vee,$$

thus the μ-component becomes the $(N\mu + \delta\mu)$ component in $H^i(\widetilde{\widetilde{T}}, \mathcal{O})$ which is known to be 0 unless $i = 0$ and $N\mu + \delta\mu \in \sigma^\vee$, which means $\mu \in J$. For the maximal $\widetilde{J}$ choose $\delta\mu$ as before except that

$$\delta\mu(\rho_j) > -a \cdot \min\{\partial\mu(\rho_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant a\}$$

for $a + 1 \leqslant j \leqslant r$. This proves the assertion ii) for $\widetilde{\widetilde{T}} \to \overline{T}$, and by basechange also for $\widetilde{X} \to X$.

As an application let as before R_∞ denote the normalization of $R \otimes_V \overline{V}$ in the extension defined by adjoining all p-power roots of $\mu \in L^\vee, \widetilde{X}_\infty \to \widetilde{X}$ the corresponding normalised pullback to $f : \widetilde{X} \to X = \mathrm{Spec}(R)$, with Galois-group $\Delta_\infty = \mathbb{Z}_p(1)^d$. If M_∞ denotes an R_∞-module with continuous semilinear Δ_∞-action, and $J_\infty \subset R_\infty$ a support-ideal extending (in two possible ways) to $\widetilde{J}_\infty \subset \mathcal{O}_{\widetilde{X}_\infty}$, then

$$\mathbb{R}f_{\infty,*}(M_\infty \otimes^{\mathbb{L}} \widetilde{J}_\infty) = M_\infty \otimes^{\mathbb{L}} J_\infty$$

(by basechange), and this equality persists after applying $\mathbb{R}\Gamma(\Delta_\infty, \quad)$. However by the almost-étale theory these are cohomologies of $\mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}$, if $M = (\overline{R} \otimes \mathbb{L})^{\mathrm{Gal}(\overline{R}/R_\infty)}$ for a locally constant p-torsion sheaf $\mathbb{L}$ on $\mathrm{Spec}(R)^0 \otimes_V \overline{K}$. That is we know that for

the map $q_X : \mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K} \to X^{\text{ét}}\ Rq_{X,*}(\mathbb{L} \otimes \overline{J})$ is almost isomorphic to a complex of quasicoherent sheaves, and the above assertion means that the map

$$\mathbb{R}q_{X,*}(\mathbb{L} \otimes \overline{J}) \longrightarrow \mathbb{R}f_* \circ \mathbb{R}q_{\widetilde{X},*}(\mathbb{L} \otimes \widetilde{\overline{J}})$$

is an almost isomorphism. Thus:

7. Corollary. — $\mathbb{R}\Gamma(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes \overline{J}) \approx \mathbb{R}\Gamma(\widetilde{\mathcal{X}}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes \widetilde{\overline{J}})$

$$\mathbb{R}\Gamma_{(!)}(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L}) = \mathbb{R}\Gamma_{(!)}(\widetilde{\mathcal{X}}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L})$$

In the second equation (!) *always denotes the relevant support-condition at infinity. The second assertion follows from the first by descente. Also the corresponding étale analogue holds:*

8. Lemma. — $\mathbb{R}\Gamma_{(!)}((X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{L}) = \mathbb{R}\Gamma_{(!)}((\widetilde{X}^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{L})$

Proof. — Let $X - X^0 = A \cup B$ denote the decomposition of the boundary in union of irreducible components, such that we have compact support along B. Similarly $\widetilde{X} - \widetilde{X}^0 = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$, with either $\widetilde{A} = f^{-1}(A)$ or $\widetilde{B} = f^{-1}(B)$. As Poincaré-duality exchanges A and B (and $\widetilde{A}, \widetilde{B}$) we may assume that $\widetilde{A} = f^{-1}(A)$. Now with $j_A : X - A \hookrightarrow X$ denoting the inclusion, we have $\mathbb{R}f_* \circ \mathbb{R}j_{\widetilde{A}} = \mathbb{R}j_A \circ \mathbb{R}f_*$. Thus it suffices if

$$\mathbb{R}f_* \circ \mathbb{R}j_{\widetilde{B},!}(\mathbb{L}) = \mathbb{R}j_{B,!} \circ \mathbb{R}f_*(\mathbb{L}) \quad \text{on} \quad X - A.$$

This assertion is local in $X - A$. We thus reduce to $X^0 = \mathbb{G}_m^d \subset X = \mathbb{A}^d$, $A = \phi$, $B = X - X^0$ and thus $\widetilde{B} = \widetilde{X} - \widetilde{X}^0$. As f is proper $\mathbb{R}f_*$ commutes with duality which exchanges $j_{B,!}$ and $\mathbb{R}j_{B,*}$, and similar for $\widetilde{B}$. This reduces us again to $A = X - X^0$, $B = \phi$, and then to $A = B = \phi$.

Now the main application: The diagonal-embedding

$$\delta : X \hookrightarrow X \times X$$

induces

$$\widetilde{\delta} : \widetilde{X} \hookrightarrow (\widetilde{X \times X}).$$

This embedding is such that locally in the étale topology

$$((\widetilde{X \times_V X}), \widetilde{X}) \cong X_1 \times (\mathbb{A}^d, 0).$$

Now choose a decomposition of the boundary

$$X - X^0 = A \cup B,$$

and extend to $\widetilde{X} - \widetilde{X}^0 = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ with $\widetilde{A}$ = full preimage of A. Then define $\mathbb{R}\Gamma_{A,B}((X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{L})$ as cohomology with compact support along B, and similarly for the other cohomology-theories or for $\widetilde{X}$. On $X \times_V X$ we consider the pair

$$(A^{(2)}, B^{(2)}) = (A \times_V X \cup X \times_V B, B \times_V X \cup X \times_V A),$$

and similarly $\widetilde{A}^{(2)}$ = full preimage of $A^{(2)}$ in $(\widetilde{X\times_V X})$, etc. Assume first that $\mathbb{L}$ is annihilated by p. We then have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}\Gamma((\widetilde{X}^0\otimes_V\overline{K})^{\text{ét}},\mathrm{End}(\mathbb{L})) & \xrightarrow{\widetilde{\delta}_*} & \mathbb{R}\Gamma_{\widetilde{A}^{(2)},\widetilde{B}^{(2)}}(((\widetilde{X\times_V X})^0\otimes_V\overline{K})^{\text{ét}},\mathbb{L}\otimes\mathbb{L}^\vee)(-d)[-2d] \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathbb{R}\Gamma(\widetilde{\mathcal{X}}^0\otimes_V\overline{K},\mathrm{End}(\mathbb{L})) & \xrightarrow{\widetilde{\delta}_*} & \mathbb{R}\Gamma_{\widetilde{A}^{(2)},\widetilde{B}^{(2)}}((\widetilde{\mathcal{X}\times_V\mathcal{X}})^0\otimes_V\overline{K},\mathbb{L}\otimes\mathbb{L}^\vee)(-d)[-2d]
\end{array}$$

which can be identified with

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}\Gamma((X^0\otimes_V\overline{K})^{\text{ét}},\mathrm{End}(\mathbb{L})) & \xrightarrow{\delta_*} & \mathbb{R}\Gamma_{A^{(2)},B^{(2)}}((X\times_V X)^0\otimes_V\overline{K})^{\text{ét}},\mathbb{L}\otimes\mathbb{L}^V)(-d)[-2d] \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathbb{R}\Gamma(\mathcal{X}^0\otimes_V\overline{K},\mathrm{End}(\mathbb{L})) & \xrightarrow{\delta_*} & \mathbb{R}\Gamma_{A^{(2)},B^{(2)}}((\mathcal{X}\times_V\mathcal{X}_0)^0\otimes_V\overline{K},\mathbb{L}\otimes\mathbb{L}^V)(-d)[-2d]
\end{array}$$

Apply this to the canonical class $1\in H^0(X^0\otimes_V\overline{K})^{\text{ét}},\mathrm{End}(\mathbb{L}))$ or its variants. Its image in

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}\Gamma_{A^{(2)},B^{(2)}}(((X\times_V X)^0\otimes_V\overline{K})^{\text{ét}},\mathbb{L}\otimes\mathbb{L}^\vee)(-d)[-2d] \\
&\qquad\cong\mathbb{R}\Gamma_{A,B}((X\otimes_V\overline{K})^{\text{ét}},\mathbb{L})\otimes\mathbb{R}\Gamma_{B,A}((X\otimes_V\overline{K})^{\text{ét}},\mathbb{L}^\vee)(-d)[-2d]
\end{aligned}$$

corresponds via Poincaré-duality to the identity, and similarly for $\mathbb{R}\Gamma(\mathcal{X}^0\otimes_V\overline{K},\dots)$. As the comparison-map

$$\mathbb{R}\Gamma_{A,B}(X^0\otimes_V\overline{K},\mathbb{L})\longrightarrow\mathbb{R}\Gamma_{A,B}((X^0\otimes_V\overline{K})^{\text{ét}},\mathbb{L})$$

respects the trace and cup-product it induces an isometry on cohomology, and thus an injection. That it also preserves $\delta_*(1)$ means that its adjoint also preserves products, thus is also an injection. Hence the comparison-map is a quasi-isomorphism. By devissage this also holds for general p-torsion $\mathbb{L}$'s.

9. Theorem. — $H^i_{A,B}(\mathcal{X}^0\otimes_V,\mathbb{L})=H^i_{A,B}((X^0\otimes_V\overline{K})^{\text{ét}},\mathbb{L})$.

Remark. — We have given a "global" proof. In many cases one can also proceed "locally": Namely if for each $x\in X$ all strata in $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{\text{sh}}_{X,x}\otimes_V\overline{K})$ are $K(\pi,1)$'s in the étale topology, then the stalks of $\mathbb{R}q_{X,*}\mathbb{L}$ coincide for

$$q_X:\mathcal{X}^0\otimes_V\overline{K}\longrightarrow X^{\text{ét}}$$

respectively

$$(X^0\otimes_V\overline{K})^{\text{ét}}\longrightarrow X^{\text{ét}}.$$

5. Crystalline Cohomology

Let $X \to \mathrm{Spec}(V)$ be as before. That is X is a proper scheme or algebraic space over V with a log structure defined by an étale covering $\coprod X(\sigma) \twoheadrightarrow X$, étale $X(\sigma) \to \overline{T}_{\sigma,\lambda}$, gluing conditions, $L^\vee/\mathbb{Z}\lambda$ torsion free, etc. We also assume that the special fiber of X is reduced, which is equivalent to saying that $\rho(\lambda) = 0$ or 1 for the generator ρ of each extremal ray of σ. We can always achieve this by adjoining a root $\pi^{1/e}$. For most results it suffices that X is a fine and saturated log scheme smooth over V, proper and with reduced special fibre. The last condition is also equivalent to saying that the special fibre of X is of Cartier type, and it is used when we prove that the Frobenius endomorphism of crystalline cohomology is an isogeny and crystalline cohomology satisfies Poincaré duality. However I do not know how to regularise the diagonal embedding in this more general setting. Still I shall use the language of logarithmic structures as it now has become standard, restricting ourselves to such structures which are "toroidal" as above.

Choose a uniformiser π of V. Let $V_0 = W(k) \subseteq V$ denote the maximal unramified subring of Witt-vectors over k. Then

$$V = V_0[\pi] = V_0[t]/(f(t)),$$

where $f(t) = t^e + a_{e-1} \cdot t^{e-1} + \cdots + a_0$ is an Eisenstein polynomial: All a_i are divisible by p, and a_0/p is a unit in V_0. $D_{(f(t))}(V_0[t])$ denotes the divided power envelope of $(f(t))$, obtained by adjoining divided powers $f(t)^n/n!$ or $t^{en}/n!$, and R_V denotes its p-adic completion. $R_V \subset K_0[[t]]$ consists of power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ with ([ ] denotes Gauss-brackets)

$$[n/e]! \cdot a_n \in V_0 \quad (\text{all } n), \quad \lim_{n\to\infty} ([n/e]! \cdot a_n) \longrightarrow 0$$

It has the PD-filtration $F^n(R_V) = p$-adic closure of the ideal generated by divided powers $f^m/m!$, $m \geqslant n$. $R_V/F^1(R_V) = V$. We give R_V the logarithmic structure defined by the prelog structure $\mathbb{N} \to R_V$ which sends 1 to t. We want to study the logarithmic crystalline topos of X/R_V. For lack of suitable reference we first tensor with a fixed $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$. So let $X_s = X \otimes_V V/p^sV$. Then the logarithmic crystalline site ([B], [K]) $(X_s/R_{V,s})_{\mathrm{crys}}$ consists of PD-embeddings (PD-structure compatible with that on $pR_{V,s} + F^1(R_{V,s})$)

$$U \hookrightarrow \mathcal{U}$$

where $U, \mathcal{U}$ are schemes/ $R_{V,s}, U \to X_s$ is étale and $\mathcal{U}$ has a logarithmic structure such that our embedding becomes fine. This means that $\mathcal{U}$ obtains a "toroidal structure" as follows:

The covering by $X(\sigma) \to X$ induces an étale covering by $U(\sigma) \to U$, with $U(\sigma) \to \overline{T}_{\lambda,\sigma} \subseteq \overline{T}_\sigma$. $\overline{T}_\sigma$ is a scheme over $V_0[t]$ with t corresponding to λ. As the ideal of U in $\mathcal{U}$ is nilpotent $U(\sigma)$ extends canonically to $\mathcal{U}(\sigma) \to \mathcal{U}$ étale, with $U(\sigma) \hookrightarrow \mathcal{U}(\sigma)$. Then the "toroidal structure" on $\mathcal{U}$ is an étale local extension of $U(\sigma) \to \overline{T}_\sigma$ to $\mathcal{U}(\sigma) \to \overline{T}_\sigma$

(as schemes over $V_0[t]$), unique up to homomorphisms

$$\mathcal{U}(\sigma) \longrightarrow T_\lambda = \ker(\lambda : T \to \mathbb{G}_m)$$

which is trivial on $U(\sigma)$. That is the extensions exist on an étale cover $\mathcal{U}'(\sigma) \twoheadrightarrow \mathcal{U}(\sigma)$ and the two pullbacks to $\mathcal{U}''(\sigma) = \mathcal{U}'(\sigma) \times_{\mathcal{U}(\sigma)} \mathcal{U}'(\sigma)$ differ by a map to $\mathcal{U}''(\sigma) \to T_\lambda$ satisfying the cocycle condition. In fact to construct $\mathcal{U}'(\sigma)$ it suffices to trivialise a class in the first cohomology of $1 + PD$-ideal, so any affine covering suffices. Also there are compatabilities for faces $\tau \subset \sigma$.

Maps

$$f : (U_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_1) \longrightarrow (U_2 \to \mathcal{U}_2)$$

are pairs of log-maps $f_U : U_1 \to U_2, f_\mathcal{U} : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ with the usual commutation rule. Being log-maps implies that locally in $\mathcal{U}(\sigma)$ we have $\rho : \mathcal{U}_1(\sigma) \to T_\lambda$, trivial on $U_1(\sigma)$, such that

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_1(\sigma) & \longrightarrow & \mathcal{U}_2(\sigma) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \overline{T}_\sigma \end{array}$$

commutes up to the action of ρ. (Composition is obvious) Coverings in the site are induced by étale covers of U. A crystal (of quasicoherent sheaves) on $(X_s/R_{V,s})_{\text{crys}}$ is a sheaf $\mathcal{E}$ such that for $U \hookrightarrow \mathcal{U}, \mathcal{E}_\mathcal{U}$ is a quasicoherent sheaf on $\mathcal{U}$. Also for any map $(U_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_1) \to (U_2 \hookrightarrow \mathcal{U}_2), \mathcal{E}_{\mathcal{U}_1}$ should be isomorphic to the pullback of $\mathcal{E}_{\mathcal{U}_2}$, via the pullback map. A filtered crystal is an $\mathcal{E}$ as above together with a decreasing sequence of subsheaves $F^n(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}$ (indexed by $n \in \mathbb{Z}$) such that on each $U \hookrightarrow \mathcal{U}$, the $F^n(\mathcal{E})_\mathcal{U}$ are quasicoherent subsheaves with $F^a(\mathcal{O}_\mathcal{U}) \cdot F^b(\mathcal{E})_\mathcal{U} \subseteq F^{a+b}(\mathcal{E})_\mathcal{U}$ ($F^a(\mathcal{O}_\mathcal{U}) : PD$-filtration defined by the ideal of $U \hookrightarrow \mathcal{U}$), and for

$$f : (U_1, \mathcal{U}_1) \longrightarrow (U_2, \mathcal{U}_2)$$

$F^n(\mathcal{E})_{\mathcal{U}_1} \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{U}_1}$ is the subsheaf generated

$$\sum_{a+b \geqslant n} F^a(\mathcal{O}_{\mathcal{U}_1}) \cdot f_V^*(F^b(\mathcal{E})_{\mathcal{U}_2}).$$

Obviously any (unfiltered) $\mathcal{E}$ can be filtered by the $F^n(O_\mathcal{U}) \cdot \mathcal{E}_\mathcal{U}$. An example of a filtered crystal is $\mathcal{O}_X^{\text{crys}}\{a\}$, with underlying sheaf $\mathcal{E}_\mathcal{U} = \mathcal{O}_\mathcal{U}$ and $F^n(\mathcal{E})_\mathcal{U} = F^{a+m}(\mathcal{O}_\mathcal{U})$. A filtered crystal of vectorbundles $(\mathcal{E}, F^\bullet)$ is called locally filtered free if for any $U \hookrightarrow \mathcal{U}$ $(\mathcal{E}_\mathcal{U}, F^\bullet(\mathcal{E}_\mathcal{U}))$ is locally isomorphic to a direct sum of $\mathcal{O}_{\text{crys}}\{a\}$'s (no compatibility with pullbacks is required).

Now choose an étale covering of X by $X(\sigma)$'s, with étale maps $X(\sigma) \to \overline{T}_{\sigma,\lambda}$. These lift to étale maps of formal schemes (with adic topology defined by $\pi - \lambda$) $\widehat{X(\sigma)} \to \widehat{\overline{T}_\sigma}$ = formal completion of $\overline{T}_\sigma$ along $\overline{T}_{\sigma,\lambda}$. Thus we can find an étale covering $Y \twoheadrightarrow X$ and a lift to an étale scheme $\widehat{Y}$ locally étale (and with the induced log structure) over $\widehat{\overline{T}_\sigma}$, namely for example $Y = \amalg X(\sigma)$. We assume that Y is

affine. We need the exactified logarithmic products (better inductive limits of log-n-th infinitesimal neighbourhoods) $\widehat{Y}^{n+1,\log}$. These will be formal schemes with underlying topological space

$$Y \times_X Y \times \cdots \times_X Y \quad (n+1\text{-times}),$$

defined by étale glueing from the following: For $\overline{T}_\sigma$ the $(n+1)$-fold log-product is the formal completion of $\overline{T}_\sigma \times_{V_0} T_\lambda^n$ along $(\overline{T}_\sigma \times \{1,\ldots,1\})$. Its projections to $\overline{T}_\sigma$ are given by $\mathrm{pr}_0(z,g_1,\ldots,g_n) = z$, $\mathrm{pr}_i(z,g_1,\ldots,g_n) = g_i \cdot z$. But locally in the étale topology

$$Y \cong X \cong \overline{T}_{\sigma,\lambda}, \widehat{Y} \cong \widehat{\overline{T}_\sigma},$$

and we use pullback. It follows that via any of the projections pr_i $\widehat{Y}^{n+1,\log}$ is étale locally isomorphic to a product of formal schemes

$$\widehat{Y}^{n+1,\log} \cong \widehat{Y} \times \widehat{T}^n_{\sigma,\lambda}$$

($\widehat{T}_{\sigma,\lambda}$: formal completion along origine). The $\widehat{Y}^{n+1,\log}$ form a simplicial formal scheme.

Next if we reduce modulo some fixed p^s we can form the PD-hulls of the embeddings

$$Y \times_X Y \cdots \times_X Y \hookrightarrow \widehat{Y}^{n+1,\log}$$

and obtain schemes (not just formal) schemes over R_V/p^sR_V, or (again) formal simplicial schemes over R_V, with the p-adic topology:

$$Y^\bullet_X \hookrightarrow D(\widehat{Y}^{\bullet,\log}).$$

These are the log-PD-envelopes of [K]. Any crystal $\mathcal{E}$ on $(X_s/R_{V,s})_{\mathrm{crys}}$ can be evaluated on

$$D(\widehat{Y}^{\bullet;\log}) \otimes_{R_V} R_V/p^sR_V,$$

so gives $\mathcal{E}_n$ on each

$$D(\widehat{Y}^{\bullet;\log})_n \otimes_{R_V} R_V/p^sR_V$$

with pullback-maps which are all isomorphisms. As usual giving a crystal $\mathcal{E}$ is equivalent to giving $\mathcal{E}_0$ on

$$D(\widehat{Y}^{\bullet;\log})_0 \otimes_{R_V} R_V/p^sR_V$$

together with an isomorphism of the two pullbacks to

$$D(\widehat{Y}^{\bullet;\log})_1 \otimes_{R_V} R_V/p^sR_V,$$

satisfying a cocycle condition on

$$D(\widehat{Y}^{\bullet;\log})_2 \otimes_{R_V} R_V/p^sR_V,$$

or giving $\mathcal{E}_0$ with an integrable quasi-nilpotent log-connection

$$\bigtriangledown : \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{E}_0 \otimes \Omega^1_{\widehat{Y},\log},$$

where $\Omega^1_{\widehat{Y},\log}$ is the sheaf of the logarithmic differential forms, pullback of dual to the Lie-algebra of T_λ (any character χ of T defines a closed differential form $d\chi/\chi$ on T_σ).

The relation is given by Taylor's formula. Its logarithmic version is mentioned in [K], 6.7.1.

With this connection we define the de Rham complex

$$\mathrm{DR}(\mathcal{E}) = (\mathcal{E} \otimes \Omega^{\bullet}_{\widehat{Y}^{\bullet,\log},\log}, \bigtriangledown + d)$$

on $D(\widehat{Y}^{\bullet,\log})_{\bullet}$. On $D(\widehat{Y}^{\bullet,\log})_n$ its underlying sheaves are $\mathrm{pr}_0^*(\mathcal{E}) \otimes \wedge^{\bullet}(\bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{pr}_i^*((\Omega^1_{\widehat{Y},\log}))$, with

$$(\bigtriangledown + d)(\mathrm{pr}_0^*(e) \otimes \alpha) = \mathrm{pr}_0^*(\bigtriangledown e) \cdot \alpha + e \otimes d\alpha.$$

For any PD-thickening $U \hookrightarrow \mathcal{U}$ of $U \to X$ étale we find étale locally a map $(U,\mathcal{U}) \xrightarrow{f} (Y,\widehat{Y})$. Thus $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ is determined by pullback. In fact one can form the log-product $(\mathcal{U} \times \widehat{Y}_{\bullet})^{\log}$, a formal simplicial scheme with same underlying topological space as $U \times_X Y_X^{\bullet}$. Etale locally it is isomorphic to $\mathcal{U} \times \overline{T}_{\sigma,\lambda}$. As usual modulo p^s the divided power hull of this is a scheme or algebraic space, and we obtain a diagram

$$(U,\mathcal{U}) \xleftarrow{\mathrm{pr}_1} D((\mathcal{U} \times \widehat{Y}^{\bullet})^{\log}) \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} D(\widehat{Y}^{\bullet})$$

Then it is known that

$$\mathbb{R}\,\mathrm{pr}_{1,*}\,\mathrm{pr}_2^*(\mathrm{DR}(\mathcal{E}))$$

is a resolution of $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$, and globalises to an u_X-acyclic resolution of $\mathcal{E}$ on the crystalline topos (One can drop the $\mathbb{R}$ because Y is affine). That it is a resolution follows as in [B] from the Poincaré-lemma, as locally $\mathcal{U} \times^{\log} \widehat{Y}^{n+1,\log}$ is isomorphic to the (usual) product $\mathcal{U} \times T_{\lambda}^{n+1}$. Also one uses cohomological descent (Y covers X).

That the resolution is acyclic follows from general category theory. Namely crystalline cohomology is the derived projective limit of étale cohomology of small thickenings. Here a thickening $U \hookrightarrow \mathcal{U}$ is called small if it is affine and maps to $D(\widehat{Y})$, and the derived projective limit is over the category of small thickenings. As this category has products and every object maps to $D(\widehat{Y})$, and the derived projective limit is the cohomology of the simplicial scheme $D(\widehat{Y}^{\bullet,\log})$. Also étale cohomology of quasicoherent sheaves on affines vanishes in higher degrees. As Y is affine we can represent the derived direct image by the usual direct image of quasicoherent sheaves. Thus $\mathbb{R}u_{X,*}(\mathcal{E})$ on $X^{\text{ét}}$ is representable by the direct image of the de Rham complex $\mathrm{DR}(\mathcal{E})$ on $D(\widehat{Y}^{\bullet})$. One can check directly that the result is independant of the choice of a covering Y and its lift $\widehat{Y}$, up to canonical quasi-isomorphism in the derived category. Namely for two such choices Y_1, Y_2 and $\widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2$ there are such comparison maps from the de Rham complex formed from $\widehat{Y}_1 \amalg \widehat{Y}_2$.

The same holds in the filtered context, that is for $\mathcal{E}$ filtered the de Rham complexes give filtered resolutions. In local coordinates $D((Y \times \widehat{Y}^{\cdot})^{\log})_n$ corresponds to a free PD-algebra $\mathcal{O}_V\{t_\nu\}$ in $(n+1) \cdot d$ variables t_ν (= local coordinates near 1 in T_{λ}^{n+1}), and the de Rham complex is the tensor product of $\mathcal{E}_V$ and the de Rham complex in the $\{t_\nu\}$, with its product filtration.

Basically we are interested in the cohomology of crystals of vectorbundles. However we also need boundary conditions. Recall that $X \otimes_V k$ is reduced, or equivalently that $X \otimes_V \overline{V}$ is normal. Then étale locally on X there exists an étale morphism $X \to \overline{T}_{\sigma,\lambda}$, for some $\sigma \subset L_{\mathbb{R}}$ such that the extremal rays of σ are generated by ρ_i with $\lambda(\rho_i) \in \{0,1\}$. Any subset I of them defines a reduced divisor with support in the boundary (which includes the special fibre), and thus an ideal $J_I \subseteq \mathcal{O}_X$. For $I = \{\rho \mid \lambda(\rho) = 1\}$ we have $J_I = \pi \cdot \mathcal{O}_X$. Now restrict to subsets I with $\lambda(\rho) = 0$ for $\rho \in I$, and let I^c denote the complement of I in the set of all such ρ's, which defines the ideal $J \subseteq \mathcal{O}_X$. Then $J \cdot \Omega^{d,\log}_{X/V}$ is the relative dualizing complex (as in chapter 2 explanations proceeding proposition 9), $J_{I_c} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(J_I, J)$. This is also equal to the derived Hom as J_I is Cohen-Macaulay (again chapter 2, explanations proceeding theorem 10'). Globally we assume given an ideal J_I which locally is of the type above. For example this is always possible for $\mathcal{O}_X$ or J. Also if J_I is defined so is J_{I^c}.

The ideals J_I extend naturally to $\overline{T}$ and thus to any object (U,V) of the log-crystalline topos, and form crystals of ideals. We are interested in the cohomologies $\mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E} \otimes J_I), \mathcal{E}$ a (filtered) crystal of vectorbundles on X^{crys}. As it stands this is defined for crystals modulo a fixed power p^s, and then can be represented (in the filtered derived category) by the hypercohomology of $\mathrm{DR}(\mathcal{E} \otimes J_I)$ on $D(\widehat{Y}^{\bullet,\log})$. Strictly speaking we still have to prove that because J_I is not itself a crystal of vectorbundles. However the same proof as before applies. As Y is affine so is each

$$(Y^{\bullet}_X)_n = \mathrm{Spec}(S_n), D((\widehat{Y}^{\bullet,\log})_n) = \mathrm{Spec}(D(S_n)),$$

and the de Rham complexes

$$(\mathcal{E} \otimes J_I)(D((\widehat{Y}^{\bullet,\log})_n) \otimes \Omega^{\cdot}_{S_n,\log}$$

form (modulo p^s) a double complex whose associated total complex represents the crystalline cohomology. It is in fact easily seen (comparing two coverings) that this is (up to canonical isomorphism in the filtered derived category) independent of choices. Also if we have a compatible system $\mathcal{E}$ of filtered crystals of vectorbundles $\mathcal{E}_s$ modulo each p^s, we may form the projective limit (for $s \to \infty$) of the corresponding complexes to get the cohomology of $\mathcal{E}$ (in the same spirit as earlier the cohomology of $A_{\mathrm{inf}}(\overline{\mathcal{O}})$). As the sheaves J_I are modulo each p^s flat over $R_{V,s} = R_V/p^s R_V$, the proof in [Fa7] can be modified to show that $\mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E} \otimes J_I)$ can be represented by a finite complex of filtered free R_V-modules if $\mathcal{E}$ is locally filtered free:

In [Fa7] it was shown that it suffices to verify the assertion modulo the PD-ideal and modulp p. Modulo the PD-ideal we have the cohomology of the relative de Rham complex, and everything is fine. Modulo p [Fa7] assumed that X is smooth, to guarantee that the relative Frobenius is flat. However this is not necessary. Namely in general the crystalline direct image under Frobenius is representable by a finite complex of quasicoherent sheaves on $X \otimes_V (R_V/p \cdot R_V)$, where the tensor product involves Frobenius. This complex is locally (in X) representable by a complex (bounded above) of finitely generated free modules, that is it is strictly pseudocoherent ([SGA6]). Namely

one chooses a local smooth lift of X and its de Rham complex, and uses that relative Frobenius is strictly pseudocoherent because it is basechange from a noetherian situation. Thus it suffices to use the following result in the style of [SGA6]:

Lemma.1. — *Suppose $f : X \to S$ is a proper flat map of algebraic spaces, of finite presentation. Assume $\mathcal{K}^\bullet$ is a pseudocoherent complex on X. Then $\mathbb{R}f_*(\mathcal{K}^\bullet)$ is also strictly pseudocherent. If in addition $\mathcal{K}^\bullet$ has finite Tor-dimension over S, the derived direct $\mathbb{R}f_*(\mathcal{K}^\bullet)$ is perfect.*

Proof. — The assertion is local in S, so we may assume that $S = \mathrm{Spec}(R)$ is affine. Writing R is filtering union of noetherian subrings R_α we know that X is is already defined over some R_α, that is is basechange from a proper flat X_α/R_α. Now for a bounded above quasicoherent complex $\mathcal{K}^\bullet_\alpha$ on X_α we shall show below that it is quasi-isomorphic to such a complex of flat quasicoherent sheaves. Thus we can define the derived tensor product $\mathcal{K}^\bullet_\alpha \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_\alpha}} \mathcal{O}_X$. As every quasicoherent sheaf $\mathcal{F}$ on X is the filtering inductive limit of sheaves $\mathcal{F}_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_{X_\alpha}} \mathcal{O}_X$ with $\mathcal{F}_\alpha$ coherent on X_α, it follows easily that for any integer N

$$\tau_{\geqslant -N}\mathcal{K}^\bullet = \tau_{\geqslant -N}(\mathcal{K}^\bullet_\alpha \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_\alpha}} \mathcal{O}_X)$$

for a coherent complex $\mathcal{K}^\bullet_\alpha$ on X_α, if α is big enough. So finally (d = cohomological dimension of $\mathbb{R}f_*$)

$$\tau_{\geqslant d-N}\mathbb{R}f_*(\mathcal{K}^\bullet) = \tau_{\geqslant d-N}\mathbb{R}f_{\alpha,*}(\mathcal{K}^\bullet_\alpha) \otimes^{\mathbb{L}}_{R_\alpha} R$$

is pseudocoherent in degrees $\geqslant d - N$, and we are done (N being arbitrary). If in addition $\mathcal{K}^\bullet$ has finite Tor-dimension over the base, the same holds for $\mathbb{R}f_*\mathcal{K}^\bullet$, and it is perfect.

It remains to show the assertion about flat resolutions. Choose an affine étale cover $Y \to X$, and denote by Y_n the open and closed subscheme of the n-fold product (over X) Y^n where all projections are different. Then Y_n is affine, and empty for big n. Also it admits a free action of the symmetric group S_n. Now over a ring any bounded above complex of modules has a functorial (even for change of rings) flat resolution. For example for a single module M write M as quotient of the free module with basis M, and continue with the kernel. Thus for a bounded above quasicoherent complex $\mathcal{K}^\bullet$ on X we choose such resolutions on each Y_n, form the anti-invariants under S_n, and their direct images form a double complex whose associated total complex is the desired resolution. The new maps are alternating sums of pullbacks via projections.

It is also shown in [Fa7] (the proof extends) that Berthelot's construction from [B] gives a trace-form

$$H^{2d}(X^{\mathrm{crys}}/R_V, J) \longrightarrow R_V\{-d\},$$

which induces a perfect duality (of complexes of filtered free R_V-modules)

$$\mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E}^\vee \otimes J_{I^c}) \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{R_V}(\mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E} \otimes J_I), R_V\{-d\}[-2d])$$

Also there is a Künneth-formula. In short all the usual formalism is again available.

For the reader's convenience we recall the main steps in Berthelot's proof, and why our more exotic base, as well as the fact that X may be only an algebraic space, does not cause problems:

First of all it suffices to construct traces modulo any positive p-power p^s, that is work over quotients $R_{V,s}$. The filtration by dimension of support (a closed subset of the special fibre of X) defines a spectral sequence converging to cohomology. Its $E_1^{a,b}$-terms is a filtering union indexed by closed reduced subspaces Z of the special fibre, of codimension a, of the degree-$(a+b)$ crystalline cohomology of J with support in the generic points Z° of Z. This local cohomology is computed by the hypercohomology (with support in Z°) of the de Rham complex of a (flat) local lift of X near Z°. If $J \otimes \Omega_X^{\mathrm{lift},\cdot}$ denotes this complex, we need for each Z of dimension 0 a local trace

$$\mathrm{tr}_x : H^d_{\{Z\}}(J \otimes \Omega_X^{\mathrm{lift},d}) \longrightarrow R_{V,s}.$$

Furthermore these local traces must vanish in the image of $H^d_{\{Z^\circ\}}(J \otimes \Omega_X^{\mathrm{lift},d-1})$, and for Z of dimension 1 we need a reciprocity law, stating that for elements of $H^{d-1}_{\{Z^\circ\}}(J \otimes \Omega_X^{\mathrm{lift},d})$ the sum of traces of boundaries vanishes. Note that all these cohomologies live in the highest possible degree, so that they form a right exact functor. Now the local lifting can be already done over $V_0[[t]]$, or better its quotient under the ideal (p^s, t^N), with N so big that this ring still maps to $R_{V,s}$. This quotient is artinian and Gorenstein, and Berthelot's method gives local trace-maps first over $V_0[[t]]/(p^s, t^N)$ and then by tensor product over $R_{V,s}$. In fact they are defined by local duality theory. That they vanish on the image of d and that the reciprocity law holds then can be checked over $V_0[[t]]/(p^s, t^N)$. For the first we can compute directly as in [B], or choose a local projection to affine space. For the latter one glues as in [B] infinitesimal neighbourhoods of the closure Z, Z a closed subspace of dimension 1. Note that these are schemes.

For a closed immersion of a divisor $i : Z \hookrightarrow X$ transversal to all strata (i.e. étale locally $(X, Z) = X_1 \times (\mathbb{A}^1, 0)$) there is an exact sequence (triangle) with $\widetilde{X}$ corresponding to the new toroidal structure with open stratum $X^0 - Z^0$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E} \otimes J_I) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(\widetilde{X}^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E} \otimes J_I) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(Z^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E} \otimes J_I)\{-1\}[-1] \longrightarrow 0$$

(see [Fa3]) and the connecting map represents i_*:

The exact sequence is obtained from de Rham complexes on $D(\widehat{Y}^\bullet)$. The usual de Rham complex maps to the one with logarithmic poles along the preimage of Z, and that in turn via the residue map to the de Rham complex of this preimage. To see that it represents i_* it suffices (as our exact sequences are compatible with cup-products) that the trace on $H^{2d-2}(Z^{\mathrm{crys}}/R_V, J)$ is equal to the composite of the connecting map with the trace on $H^{2d}(X^{\mathrm{crys}}/R_V, J)$. But the trace is characterised by its values

on local cohomology

$$H^{2d-2}_{\{z\}}(Z^{\mathrm{crys}}/R_V, J) \quad (z \in Z \otimes_V k \quad \text{a closed point}).$$

This can be computed by locally lifting to

$$\mathcal{Z} = \mathcal{X}^* \times \{0\} \hookrightarrow \mathcal{X} = \mathcal{X}^* \times \mathbb{A}^1,$$

with $\mathcal{X}^*$ étale over some torus-embedding $\overline{T}^*$. The exact sequence reduces to the tensor-product of $J \circ \Omega^{\bullet,\log}_{\mathcal{X}^*}$ with

$$0 \longrightarrow \Omega^{\bullet}_{\mathbb{A}^1} \longrightarrow \Omega^{\bullet}_{\mathbb{A}^1}(d\log 0) \xrightarrow{\text{Residue}} \mathcal{O}_{\{0\}}\{-1\}[-1] \longrightarrow 0,$$

and the assertion is wellknown.

Equivalently we may project locally to affine space, which reduces us to smooth schemes. It then suffices to verify the claim in one global example, as the inclusion of a hyperplane in projective space.

Finally for a line-bundle $\mathcal{L}$ on X the first Chern-class $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(X^{\mathrm{crys}}/R_V, F^1(\mathcal{O}))$ is defined via the connecting map

$$\mathrm{Pic}(X) = H^1(X^{\mathrm{crys}}/R_V, (\mathcal{O}/F^1(\mathcal{O}))^*) \longrightarrow$$
$$H^2(X^{\mathrm{crys}}/R_V, (1 + F^1(\mathcal{O}))) \xrightarrow{\log} H^2(X^{\mathrm{crys}}/R_V, F^1(\mathcal{O})).$$

As usual this defines higher Chern classes, the selfintersection formula holds, and also (for immersions $Z \hookrightarrow X$ with locally $(X, Z) \cong X^* \times (\mathbb{A}^t, 0)$) the formula ($\widetilde{X}$ = blow-up of Z, E = exceptional divisor, $\mathcal{F}$ = normal bundle to Z)

$$\mathrm{pr}_X^* \circ i_* = \widetilde{i}_*(c_{t-1}(\mathcal{F}) \cup \mathrm{pr}_Z^*(\,))$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\widetilde{i}} & \widetilde{X} \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_Z}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_X} \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

So far the review.

Next relations to étale cohomology. For a ring R with $\mathrm{Spec}(R)$ étale over $\overline{T}_\lambda$ we have defined $A_{\mathrm{inf}}(\overline{R})$, with an isomorphism $A_{\mathrm{inf}}(\overline{R})/\xi \cdot A_{\mathrm{inf}}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\overline{R}}$ (p-adic completion). We define $A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$ as the p-adically completed divided power hull of $\xi \cdot A_{\mathrm{inf}}(\overline{R})$. It is filtered by the PD-filtration. For varying R the $A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})/p^s \cdot A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$ form an almost sheaf of rings on $\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}$, not just a prosheaf (like $A_{\mathrm{inf}}(\overline{R})$). This is so because the action of $\mathrm{Gal}(\overline{R}/R)$ on $A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})/p^s \cdot A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$ (with discrete topology) is continuous. We denote these almost sheaves by $A_{\mathrm{crys}}(\overline{\mathcal{O}})/p^s \cdot A_{\mathrm{crys}}(\overline{\mathcal{O}})$, and by $A_{\mathrm{crys}}(\overline{\mathcal{O}})$ the prosheaf they define. Thus we may form the cohomology $\mathbb{R}\Gamma(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{\mathcal{O}}))$, which however turns out to be almost equal to $\mathbb{R}\Gamma((X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{L}) \otimes^{\mathbb{L}} A_{\mathrm{crys}}(\overline{V})$, as

$$A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})/p^s \cdot A_{\mathrm{crys}}(\overline{R}) \cong A_{\mathrm{inf}}(\overline{R})/p^s \cdot A_{\mathrm{inf}}(\overline{R}) \otimes_{A_{\mathrm{inf}}(\overline{V})} A_{\mathrm{crys}}(\overline{V}).$$

Namely use theorem 8 in chapter 3 and theorem 9 in chapter 4, as well as the fact that $A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})/p^sA_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$ is the quotient of the free "PD-polynomial ring" $(A_{\mathrm{inf}}(\overline{R})/p^sA_{\mathrm{inf}}(\overline{R}))\{u\}$ under the ideal generated by one regular element $u-\xi$. The same argument also applies to $F^i(A_{\mathrm{inf}}(\overline{\mathcal{O}})$. Similarly let $(A_{\mathrm{crys}}(\overline{R}/\overline{J}_I)$ is defined as is $A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$, replacing $\overline{R}$ by $\overline{R}/\overline{J}_I$)

$$A_{\mathrm{crys}}(\overline{J}_I) = \ker(A_{\mathrm{crys}}(\overline{R}) \longrightarrow A_{\mathrm{crys}}(\overline{R}/\overline{J}_I))$$

$=$ p-adic completion of $A_{\mathrm{inf}}(\overline{J}_I) \otimes_{A_{\mathrm{inf}}(\overline{V})} A_{\mathrm{crys}}(\overline{V})$, and then

$$\mathbb{R}\Gamma_{(!)}((X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{L}) \otimes^{\mathbb{L}} A_{\mathrm{crys}}(\overline{V}) \approx \mathbb{R}\Gamma(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{J}_I)).$$

Also $A_{\mathrm{inf}}(\overline{R})$ and $A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$ get toroidal structures by choosing for each μ in a basis of $L^\vee$ a compatible system of p-power roots of μ, defining $\underline{\mu} = [\mu] \in A_{\mathrm{inf}}(\overline{R})$. Finally $A_{\mathrm{crys}}(\overline{V})$ becomes an R_V-algebra by mapping t to $\underline{\pi}$ which is defined by chosing a compatible system of p-power roots of the uniformiser π of V. This also makes each $A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$ into a logarithmic R_V-algebra.

Next the preimage $A^0_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$ of R in $A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$ defines a PD-thickening. Thus if $\mathcal{E}$ is a crystal modulo p^s on X^{crys}/R_V, we can evaluate it on $A^0_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$ to get a module with an action of $\mathrm{Gal}(\overline{R}/R \otimes_V \overline{V})$. This is functorial in R, thus defines a presheaf (in fact almost a sheaf for small enough $\mathrm{Spec}(R)$) on $\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}$.

Now assume given a locally constant sheaf $\mathbb{L}$ (annihilated by p^s) on $(X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}$, and a functorial map

$$\mathcal{E}\,(A^0_{\mathrm{crys}}(\overline{R})) \longrightarrow \mathbb{L} \otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{R}),$$

linear over $A^0_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$ and commuting with the Galois-action. An example is $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$ and $\mathbb{L} = \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$. Then the de Rham resolution of $\mathcal{E}$ on the crystalline topos defines by evaluation a resolution of the presheaf $\mathcal{E}$ on $\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}$, which maps to an injective resolution of $\mathbb{L} \otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$. Hence we obtain a transformation

$$v_X : \mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{\mathcal{O}})) \approx \mathbb{R}\Gamma((X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{L}) \otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{V}).$$

If $\mathcal{E}$ is filtered and the basic maps to $\mathbb{L} \otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$ preserve filtrations, we obtain a transformation in the filtered derived category. Recall how to construct a good filtered injective resolution of a filtered object $\mathcal{E}, F^p(\mathcal{E})$ in a topos: We first inject each $\mathcal{E}/F^p(\mathcal{E})$ into an injective I^p, as well as $\mathcal{E}$ into I, and inject $\mathcal{E} \to I \times \prod I^p$, filtered by

$$F^p(I \times \textstyle\prod I^q) = I \times \prod_{q>p} I^q.$$

Finally continue with the quotient.

Also there is the obvious variant

$$v_X : \mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E} \otimes J_I) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{J}_I)) \approx \mathbb{R}\Gamma_{(!)}((X^0) \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{L}) \otimes^{\mathbb{L}} A_{\mathrm{crys}}(\overline{V}).$$

Next we check how much the map commutes with Chern-classes and direct images. Recall that there is a canonical map

$$\beta : \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow F^1(A_{\mathrm{crys}}(\overline{V})).$$

If $t \in \mathbb{Z}_p(1)$ is a generator, corresponding to a compatible sequence of primitive roots $\zeta_n \in \boldsymbol{\mu}_{p^n}(\overline{V}), \underline{1} = \varprojlim \zeta_n$ defines $[\underline{1}] \in A_{\mathrm{inf}}(\overline{V})$. Then $\beta(t) = \log \underline{1}$.

2. Theorem

i) *For a vectorbundle $\mathcal{E}$ on X, $c_i^{\mathrm{cr}}(\mathcal{E}) \in F^i H^{2i}(X^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{O}_X)$ maps to*

$$v_X(c_i^{\mathrm{cr}}(\mathcal{E})) = \beta^{\otimes i} \cdot c_i^{\text{ét}}(\mathcal{E}) \in H^{2i}((X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \otimes F^i A_{\mathrm{crys}}(\overline{V}).$$

ii) *Assume $i : Z \hookrightarrow X$ is a closed immersion, such that locally in the étale topology $(X, Z) = X^* \times (\mathbb{A}^t, O)$. Then $v_X \circ i_*^{\mathrm{cr}} = \beta^{\otimes t} \cdot i_*^{\text{ét}} \circ v_Z$, as transformations (in the almost category)*

$$\mathbb{R}\Gamma(Z^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E} \otimes J_I) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma((\mathfrak{X}^0 \otimes_V \overline{K}, \mathbb{L} \otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{\mathcal{J}_I}))\{t\}[2t]$$

Proof. — For i) using example 1* of section 4 it suffices to treat $c_1(\mathcal{L})$ for line-bundles $\mathcal{L}$. Both Chern-classes are boundaries of the class of $\mathcal{L}$ in $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, with respect to either

$$0 \longrightarrow 1 + F^1(\mathcal{O}_X^{\mathrm{crys}}) \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\mathrm{crys},*} \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

(and composing with $1 + F^1(\mathcal{O}_X^{\mathrm{crys}}) \xrightarrow{\log} F^1(\mathcal{O}_X^{\mathrm{crys}})$), respectively

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow \mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}})^* \longrightarrow \widehat{\overline{\mathcal{O}}}^* \longrightarrow 0$$

However evaluated on $A_{\mathrm{crys}}(\overline{\mathcal{O}})$ the second sequence maps to the first via the composition (the first map is the Teichmüller-representative)

$$\mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}})^* \longrightarrow A_{\mathrm{inf}}(\overline{\mathcal{O}})^* \longrightarrow A_{\mathrm{crys}}(\overline{\mathcal{O}})^*,$$

hence the assertion.

Similarly by blow-up and the fundamental formula

$$\mathrm{pr}_X^* \circ i_* = \widetilde{i}_*(c_{t-1}(\mathcal{F}) \cup \mathrm{pr}_Z^*())$$

ii) is reduced to the case of a divisor, that is $t = 1$. As before we denote by $\widetilde{X}$ X with the modified toroidal structure where Z is added to the boundary. There exists an étale covering of X by affines $\mathrm{Spec}(R)$ such that either $\mathrm{Spec}(R)$ lies over $X \smallsetminus Z$ and has an étale toric parametrization $\mathrm{Spec}(R) \to \overline{T}_{\lambda,\sigma}$, or $\mathrm{Spec}(R) \to \overline{T}_{1,\lambda,\sigma} \times \mathbb{A}^1$ is an étale parametrization for the two possible toric structures (depending on whether $\{0\} \subseteq \mathbb{A}^1$ is added to the boundary). In the second case (that is Z not part of the boundary) we also assume that R has enough units to define a good R_∞. For example $\mathrm{Spec}(R)$ could lie above $\overline{T}_{1,\lambda} \times (\mathbb{A}^1 - \{1\})$. Let

$$Y_0 = \widetilde{Y}_0 = \amalg \mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(S_0)$$

denote the corresponding affine cover of X,

$$\widetilde{Y}_n = \mathrm{Spec}(\widetilde{S}_n) \longrightarrow Y_n = \mathrm{Spec}(S_n)$$

the $(n+1)$-fold logarithmic fibre-products (in the two different log-structures),

$$\widehat{\widetilde{Y}}_n = Spf(\widetilde{S}'_n), \widehat{Y}_n = Spf(S'_n)$$

affine schemes locally étale over $\widehat{\overline{T}}^{n+1,\log}$ (respectively $(\overline{T}_1 \times \mathbb{A}^1)^{\wedge,n+1,\log}$, and denote by $Spf(D(\widetilde{S}'_n)), Spf(D(S'_n))$ the divided power envelopes. The crystalline cohomology $\mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E} \otimes J_I)$ can be represented by the total complex associated to the de Rham complexes $(\mathcal{E} \otimes J_I)(D(S'_n)) \otimes \Omega^{\bullet,\log}_{S'_n/R_V}$, and similarly for $\widetilde{X}$. However the $\widehat{\widetilde{Y}}'_n$ are also log-smooth in the log-structure of X, i.e. without adding Z to the boundary (the logarithmic product $(\mathbb{A}^1, \{0\}^{n+1,\log} = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m^n$ is smooth). Thus they may also be used to compute the crystalline cohomology of X. That is there are the subcomplexes

$$(\mathcal{E} \otimes J_I)(D(\widetilde{S}'_n)) \otimes \underset{\sim \widetilde{S}'_n/R_V}{\Omega^{\bullet,\log}} \subseteq (\mathcal{E} \otimes J_I)(D(\widetilde{S}'_n)) \otimes_{\widetilde{S}'_n} \Omega^{\bullet,\log}_{\widetilde{S}'_n/R_V}$$

whose associated total complex represents

$$\mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E} \otimes J_I).$$

The quotient represents $\mathbb{R}\Gamma(Z^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E} \otimes J_{Z,I})\{-1\}[-1]$, with connecting map i_*^{crys}.

Also the local parametrizations give an equation $f_0 \in S'_0$ for the Z-stratum. By definition of the logarithmic product $f_1 = \mathrm{pr}_0^*(f_0)/\mathrm{pr}_1^*(f_0) \in \widetilde{S}'^{,*}_1$ is a unit. $d\log f_0$ is a 1-cochain with residue 1 in the de Rham complex $D(\widetilde{S}'_0) \otimes \Omega^{\bullet,\log}_{\widetilde{S}'_0/R_V}$. Also the de Rham complex for Z can be identified with the quotient of the

$$(\mathcal{E} \otimes J_I)(D(\widetilde{S}'_n)) \otimes \underset{\sim \widetilde{S}'_n/R_V}{\Omega^{\bullet,\log}}$$

obtained by setting

$$\mathrm{pr}_0^*(f_0) = d\log(\mathrm{pr}_0^*(f_0)) = 0.$$

Thus to compute $i_*^{\mathrm{crys}}(z)$ for a class $z \in H^m(Z^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E} \otimes J_{Z,I})$, represent z by an m-cocycle $\overline{\lambda}$ in this quotient complex, lift to an m-cochain λ in the complex for X, form the product (in the de Rham complex for $\widetilde{X}$)

$$(d\log \mathrm{pr}_0^*(f_0), 0) \cup \lambda$$

and apply to it the differential to get a class in $H^{m+2}(X^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E} \otimes J_I)$ representing $i_*^{\mathrm{crys}}(z)$. For example to lift 1 we can use the cochain ψ represented by $(df_0/f_0, 0)$.

Now let us map to étale cohomology. There is a diagram of topoi

$$\widetilde{\mathcal{X}}^0 \otimes_V \overline{K} \overset{j}{\longleftarrow} \mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K} \overset{i}{\longleftarrow} \mathcal{Z}^0 \otimes_V \overline{K}.$$

We know that

$$j_*(\mathbb{L}\otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{J}_{\widetilde{X},I}))\approx \mathbb{L}\otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{J}_I)$$
$$\mathbb{R}^1 j_*(\mathbb{L}\otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{J}_{\widetilde{X},I}))\approx i_*(\mathbb{L}\otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{J}_{Z,I}))(-1),$$

and higher direct images

$$\mathbb{R}^\nu j_*(\mathbb{L}\otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{J}_{\widetilde{X},I}))\quad(\nu\geqslant 2)\quad\text{or}\quad \mathbb{R}^\nu i_*(\mathbb{L}\otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{J}_{Z,I}))\quad(\nu\geqslant 1)$$

are almost zero. For $\overline{J}_{\widetilde{X},I}$ this has been shown in proposition 1 of chapter 4, and this implies the result for $\mathcal{R}(\overline{J}_{\widetilde{X},I}), A_{\mathrm{inf}}(\overline{J}_{\widetilde{X},I}), A_{\mathrm{crys}}(\overline{J}_{\widetilde{X},I})$.

Next our de Rham resolutions define complexes $L_X(\mathcal{E}\otimes J_I)$ or shorter L_X on $\mathcal{X}^0\otimes_V\overline{K}, L_{\widetilde{X}}$ on $\widetilde{\mathcal{X}}^0\otimes_V\overline{K}$ and L_Z on $\mathcal{Z}^0\otimes_V\overline{K}$, acyclic in degrees $\neq 0$, with an injection $L_X\hookrightarrow j_*L_{\widetilde{X}}$.

For general $\mathcal{E}$ and J_I we need cup-products. The de Rham and Čech complexes admit strictly associative differential products (in the Čech-setting, $(f\cup g)=\mathrm{pr}^*_{0,\dots,a}(f)\cup\mathrm{pr}^*_{a,\dots,a+b}(g)$ for f in degree a, g in degree b). This defines such products on $L_X(\mathcal{O}_X), L_{\widetilde{X}}(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}), L_Z(\mathcal{O}_Z)$, and makes $L_X(\mathcal{E}\otimes J_I)$ etc. to differentially graded modules over them. Furthermore the elements $\mathrm{pr}_0^* f_0\in\widetilde{S}'_n$ generate an invertible ideal $\langle f_0\rangle$ invariant under all simplicial maps, and thus a differential ideal $\langle f_0, df_0\rangle\subseteq L_X(\mathcal{O})$. The quotient $L_X(\mathcal{O}_X)/\langle f_0,df_0\rangle$ naturally maps to $i_*L_Z(\mathcal{O}_X)$ induced from $A_{\mathrm{crys}}(\overline{\mathcal{O}}_X)\to i_*A_{\mathrm{crys}}(\overline{\mathcal{O}}_Z)$. Next we have defined a class

$$\psi\in\Gamma(\mathcal{X}^0\otimes_V\overline{K}, j_*L^1_{\widetilde{X}}(\mathcal{O}_{\widetilde{X}})/L^1_X(\mathcal{O}_X)),$$

the image of $(\frac{df_0}{f_0},0)$. Under the multiplication of $L_X(\mathcal{O}_X)$ on $j_*L_{\widetilde{X}}(\mathcal{O}_{\widetilde{X}})/L_X(\mathcal{O}_X)$ this class is annihilated by $\langle f_0,df_0\rangle$. Thus cup-product defines a map

$$\cup\psi: L_X(\mathcal{E}\otimes J_I)/\langle f_0,df_0\rangle\longrightarrow j_*L_{\widetilde{X}}(\mathcal{E}\otimes J_I)/L_X(\mathcal{E}\otimes J_I)[+1]$$

We claim that

$$\begin{array}{ccc}
L_X(\mathcal{E}\otimes J_I)/\langle f_0,df_0\rangle & \xrightarrow{\cup\psi} & j_*L_{\widetilde{X}}(\mathcal{E}\otimes J_I)/L_X(\mathcal{E}\otimes J_I)[+1]\\
\downarrow & & \downarrow\\
i_*L_Z(\mathcal{E}\otimes J_I) & & \mathbb{R}j_*(\mathbb{L}\otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{J}_{\widetilde{X},I}))/\mathbb{L}\otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{J}_{X,I})[+1]\\
\downarrow & & \downarrow\\
i_*(\mathbb{L}\otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{J}_{Z,I})) & \xrightarrow{\circ\beta} & i_*(\mathbb{L}\otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{J}_{Z,I})(-1)
\end{array}$$

commutes in the derived category:

We will check that the domain (the upper left corner) has trivial higher cohomology. It then suffices to verify the assertion for the induced map on H^0, and the assertion becomes local in $\mathcal{X}\otimes\overline{K}$. Hence we can work over a strictly henselian ring $R=\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}$. Also the assertion does not depend on the choice of the covering Y, so we may assume that $S_0=R$. Then $L_X(\mathcal{E}\otimes J_I)$ becomes the tensor product of $\mathcal{E}\otimes J_I(A_{\mathrm{crys}})$,

a free divided power algebra in certain variables t_μ, and the de Rham complex in the derivatives dt_μ. One of these say t_1, can be chosen as $t_1 = f_0 - h_0$, h_0 an element of $A_{\mathrm{crys}}(R)$ lifting f_0. It is (as it should be) a resolution of $\mathcal{E} \otimes J_I(A_{\mathrm{crys}})$. If we divide by f_0 and df_0 the cohomology is still concentrated in degree 0, but now is quotient of $\mathcal{E} \otimes J_I(A_{\mathrm{crys}})\langle t_1\rangle$ (tensor product with free DP-algebra in t_1) under the regular element $t_1 + h_0$ (multiplication by it is regular because this holds for multiplication by h_0 on $A_{\mathrm{crys}}(R)/p^s$). By an obvious compatability with cup-products (by $\mathcal{E} \otimes J_I(A_{\mathrm{crys}})$) we may reduce to constant coefficients, that is $\mathcal{E} = \mathcal{O}/p^s$, $\mathbb{L} = \mathbb{Z}/p^s$, $J_I = \mathcal{O}$. Furthermore it suffices to check commutativity for the image of the unit 1:

Namely from the description above for any class in $H^0(L_X(\mathcal{O}/p^s)/\langle f_0, df_0\rangle)$ we can find a p-power p^t such that first of all our class lifts to $H^0(L_X(\mathcal{O}/p^{s+t})/\langle f_0, df_0\rangle)$, and secondly becomes a multiple of 1 after multiplying it by p^t. If the required equality holds for 1 it holds in $A_{\mathrm{crys}}(R_Z)/p^{s+t}$ (the H^0 of the target) up to p^t-torsion, and everything follows.

Thus we check what happens to 1. As usual we have fundamental-groups $\Delta, \widetilde{\Delta}$, and $\underset{\sim}{\Delta} = \ker(\widetilde{\Delta} \to \Delta)$. Let $D \subseteq \Delta$ and $\widetilde{D} \subseteq \widetilde{\Delta}$ denote the decomposition groups of Z, that is for compatible extensions of the prime ideal defining Z. Then $\widetilde{D}$ projects onto D, with kernel $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$.

We have to compare two elements in

$$H^1(\underset{\sim}{\Delta}, A_{\mathrm{crys}}(\widetilde{\overline{R}})/p^s) \approx \mathrm{Ind}_D^{\Delta}(H^1(\widehat{\mathbb{Z}}(1), A_{\mathrm{crys}}(\overline{R}_Z)/p^s).$$

It suffices to compare evaluations on compatible lifts of the prime dividing Z. Also we assumed $S_0 = R$. Especially f_0 now restricts to an element of R. Choosing compatible p-power roots of this restriction of f_0 defines an element $\underline{f}_0 \in \mathcal{R}(\widetilde{\overline{R}})$ and its Teichmüller lift $[\underline{f}_0]$ in $A_{\mathrm{inf}}(\widetilde{\overline{R}})$ and $A_{\mathrm{crys}}(\widetilde{\overline{R}})$. The quotient $g_0 = 1 \otimes f_0/[\underline{f}_0] \otimes 1$ is a 1-unit in the log-product used for $L_{\widetilde{X}}$, that is it is equal to one modulo the PD-ideal. Thus we may form its logarithm $\log(g_0)$, and the coboundary of the product $e \cup \log(g_0)$ is $e \cup (df_0/f_0, \log(f_1)$ (f_1 has turned into a 1-unit as well). Hence modulo this coboundary our chain $e \cup \psi$ lies in L_X. However this does not mean that we obtain the trivial class because g_0 and $\log(g_0)$ are not invariant under $\widetilde{\Delta}$, so they define only local and not global sections of $A_{\mathrm{crys}}(\overline{\mathcal{O}})/p^s$ over $\widetilde{X}^0 \otimes \overline{K}$. Namely the action of $\widetilde{\Delta}$ is described by the character

$$\chi : \widetilde{\Delta} \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1)$$

defined by adjoining p-power roots of f_0, and

$$\delta(\log(g_0)) = \log(g_0) - \beta(\chi(\delta)).$$

Especially the obstruction to $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$-invariance is given by β ($-\chi$ corresponds to 1).

Now i_*^{crys} is defined by the connecting map for

$$0 \longrightarrow \mathrm{DR}_X(\mathcal{E} \otimes J_I) \longrightarrow \mathrm{DR}_{\widetilde{X}}(\mathcal{E} \otimes J_I) \longrightarrow \mathrm{DR}_Y(\mathcal{E} \otimes J_I)[-1] \longrightarrow 0.$$

This maps to global sections in the exact sequence

$$0 \longrightarrow L_X(\mathcal{E}\otimes J_I) \longrightarrow L_{\widetilde{X}}(\mathcal{E}\otimes J_I) \longrightarrow j_*L_{\widetilde{X}}(\mathcal{E}\otimes J_I)/L_X(\mathcal{E}\otimes J_I) \longrightarrow 0$$

or also

$$0 \longrightarrow L_X(\mathcal{E}\otimes J_I) \longrightarrow L^*_{\widetilde{X}}(\mathcal{E}\otimes J_I) \longrightarrow L_X(\mathcal{E}\otimes J_I)/\langle f_0, df_0\rangle[-1] \longrightarrow 0,$$

the pullback via

$$\cup\psi : L_X(\mathcal{E}\otimes J_I)/\langle f_0, df_0\rangle[-1] \longrightarrow j_*L_{\widetilde{X}}(\mathcal{E}\otimes J_I)/L_X(\mathcal{E}\otimes J_I),$$

which in turn maps to

$$0 \longrightarrow \mathbb{L}\otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{J}_{X,I}) \longrightarrow \mathbb{R}j_*(\mathbb{L}\otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{J}_{\widetilde{X},I})) \longrightarrow i_*(\mathbb{L}\otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{J}_{Z,I}))[-1](-1) \longrightarrow 0,$$

where the maps on the first two terms are the canonical comparison maps, while on the third we have the comparison-map multiplied by β. However as this last sequence defines $i_*^{\text{ét}}$, we get indeed $v_Y \circ i_*^{\mathrm{crys}} = \beta \cdot i_*^{\text{ét}} \circ v_X$. Thus the theorem is shown.

3. Corollary. — *For the trace-forms on $H^{2d}(X/R_V, J_X)$ respectively $H^{2d}_!((X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{Z}_p)$ we have*

$$\mathrm{tr}^{\text{ét}} \circ v_X = \beta^d \cdot \mathrm{tr}^{\mathrm{crys}}$$

Proof. — Check on the class of a smooth point.

Also toric blow-ups $\widetilde{X} \to X$ induce isomorphisms on crystalline cohomology. This is true on de Rham cohomology, thus modulo $F^1(R_V) \subseteq R_V$, and follows in general because $F^1(R_V)$ consists of topologically nilpotent elements. Hence:

4. Corollary. — *Assume we are given functorial transformations*

$$v_{\mathcal{E}} : \mathcal{E}(A^0_{\mathrm{crys}}(\overline{R})) \longrightarrow \mathbb{L}\otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$$
$$v_{\mathcal{E}^\vee} : \mathcal{E}^\vee(A^0_{\mathrm{crys}}(\overline{R})) \longrightarrow \mathbb{L}^\vee\otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$$
$$(\mathcal{E}^\vee = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X/p^s\mathcal{O}_X), \mathbb{L}^\vee = \mathrm{Hom}(\mathbb{L}, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})),$$

with $\langle v_{\mathcal{E}}(e), v_{\mathcal{E}^\vee}(e^\vee)\rangle = \beta^{\otimes m}\cdot v\langle e, e^\vee\rangle$ for some fixed m.

Then

$$v_X : \mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E}\otimes J)\otimes_{R_V} A_{\mathrm{crys}}(\overline{V}) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{(!)}((X^0\otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{L})\otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{V})$$

has an inverse up to $\beta^{\otimes(d+m)}$, that is composition either way is multiplication by $\beta^{\otimes(d+m)}$

Proof. — The "inverse" is the adjoint of the map v_X for $\mathcal{E}^\vee$. One has to compare the classes of the diagonals, passing to $\widetilde{\Delta} : \widetilde{X} \to (\widetilde{X\times X})$. (The class of the diagonal $c_\delta \in H^{2d}_{(!)}(\widetilde{X\times X}, \mathbb{R}\underline{Hom}(\mathrm{pr}_2^*\mathcal{E}, \mathrm{pr}_1^*\mathcal{E}))$ is the image of a class in $H^{2d}_{(!)}(\widetilde{X\times X}, \underline{Hom}(\mathrm{pr}_2^*\mathcal{E}, \mathrm{pr}_1^*\mathcal{E}))$, the direct image of the identity map on $\mathcal{E}$).

Remarks

1) If $\mathcal{E}$ is in fact a crystal in the crystalline topos of X relative to V_0 (that is one has integrable connections

$$\bigtriangledown : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \Omega^{1,\log}_{R'/V_0} = \mathcal{E} \otimes \mathrm{Lie}(T)^\vee),$$

the crystalline cohomology $\mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E})$ inherits a logarithmic connection (as a perfect complex). Especially all cohomology-groups have such a connection. Also the Galois-group $\mathrm{Gal}(\overline{R}/R)$ acts on

$$\mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E} \otimes J_I) \otimes_{R_V} A_{\mathrm{crys}}(\overline{V}),$$

although the map $R_V \to A_{\mathrm{crys}}(\overline{V})$ is not Galois-linear. It suffices that this holds modulo $F^1(A_{\mathrm{crys}}(\overline{V}))$. Finally if $\mathbb{L}$ is defined over $K, \mathrm{Gal}(\overline{R}/R)$ also operates on $\mathbb{R}\Gamma_{(!)}((X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{L})$. And if the local comparison-maps

$$\mathcal{E}(A^0_{\mathrm{crys}}(\overline{R})) \longrightarrow \mathbb{L} \otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$$

also respect the action of $\mathrm{Gal}(\overline{R}/R)$ the comparison-map v_X is $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-linear.

2) Everything works in the filtered context: If $\mathcal{E}$ is a filtered crystal, and the comparison

$$\mathcal{E}(A^0_{\mathrm{cr}}(\overline{R})) \longrightarrow \mathbb{L} \otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$$

preserves filtrations, that is it sends $F^i(\mathcal{E}(A^0_{\mathrm{crys}}(\overline{R})))$ to $\mathbb{L} \otimes F^i(A_{\mathrm{crys}}(\overline{R}))$, the comparison-map

$$\mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E} \otimes J_I) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{(!)}((X^0 \otimes_K \overline{V})^{\text{ét}}, \mathbb{L}) \otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{V})$$

exists in the filtered derived catgeory, and similarly for inverese "up to $\beta^{\otimes(d+m)}$".

3) If $\mathcal{E}$ is a Frobenius-crystal (in the log-sense) then $\mathcal{E}(A^0_{\mathrm{crys}}(\overline{R})) \otimes_{A^0_{\mathrm{crys}}(\overline{R})} A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$ has a Frobenius-action ϕ. Namely $A_{\mathrm{inf}}(\overline{R})$ has a canonical Frobenius-lift (which is logarithmic: $\phi([\underline{\mu}]) = [\underline{\mu}]^p$, for $\mu \in \sigma^\vee \cap L^\vee$), which induces a Frobenius-lift on the preimage in $A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$ of $R/pR \subset \overline{R}/p\overline{R}$. Also this preimage is a PD-thickening of R/pR, so $\mathcal{E}$ can be evaluated on it, and this evaluation admits a semilinear Frobenius. Finally because $\mathcal{E}$ is a crystal in the tensor product above we may replace $A^0_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$ by this preimage. It then makes sense to require that the comparison-map to $\mathbb{L} \otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})$ is Frobenius-linear. In this case

$$v_X : \mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_V, \mathcal{E} \otimes J_I) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{(!)}((X^0 \otimes_K \overline{V})^{\text{ét}}, \mathbb{L}) \otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{V})$$

will also preserve Frobenius (note that $\mathrm{Frob}^*(J_I) \subseteq J_I$, as J_I is locally generated by elements $\mu \in \sigma^\vee \cap L^\vee$ with $\mathrm{Frob}(\mu) = \mu^p \cdot$ unit). Here the "Frobenius" on R_V is Frobenius on V_0, and sends t to t^p.

4) Combining 2) and 3) one can often recover the étale cohomology of $\mathbb{L}$ from the crystalline cohomology of $\mathcal{E}$. This uses Fontaine's functors which involve invariants under Frobenius. At this stage we descend from almost maps to "real" maps, just as we did earlier (in chapter 3) when forming almost invariants under Frobenius. Another possibility is to use Frobenius invariance for the comparison maps (this has

been proposed (in a 1999 preprint) by M. Kisin, who had overlooked this and thought it necessary to fill a "gap"). At this point we note for later use that for the ring $B^+_{\mathrm{DR}}(\overline{R})$ almost elements are "real" elements (reduce to $\widehat{\overline{R}}$).

5) In many cases (for example constant coefficients) one can pass to $s \to \infty$ to obtain a $\mathbb{Z}_p$-theory and then also a $\mathbb{Q}_p$-theory. In more generality this is done in the context of convergent isocrystals (see [BO], [O]):

Our base will be the "closed unit disk": That is consider the algebra $R_{V,0} = (V_0[t])^\wedge$, where $\wedge = p$-adic completion. It has a toroidal or log structure generated by t. An affine logarithmic enlargement (we do not need others) is given by an $R_{V,0}$-algebra A with a log-structure (étale locally $\mathrm{Spec}(A) \to \overline{T}_\sigma, R_{V,0}$-linear), a p-adically closed ideal $I \subset A$ such that A is p-adically complete and such that some power of I is contained in pA, and an $R_{V,0}$-linear log-map $\mathrm{Spec}(A/I) \to X$. The definition of maps is the obvious one. A convergent (logarithmic) isocrystal associates to any enlargement A a finitely generated projective $A[1/p]$-module $\mathcal{E}(A)$, with $\mathcal{E}(B) = B \otimes_A \mathcal{E}(A)$ for maps $A \to B$. Similarly filtered convergent isocrystals associate filtered modules, $A[1/p]$ itself being filtered by powers of I.

For example for each $\varepsilon = 1/n$ consider the algebra $R_{V,\varepsilon} = V_0[t, t^{ne}/p]^\wedge$. For $n \geqslant e$, $R_{V,\varepsilon}$ with the ideal $I = (f(t))$ defines an enlargement of $\mathrm{Spec}(V)$. We define enlargements over $R_{V,\varepsilon}$ as enlargements (A, I) together with A an algebra over $R_{V,\varepsilon}$, and the obvious commutative diagram of log-maps. In the usual way (compare [Fa3], IV.e.) one defines the cohomology $\mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_{V,\varepsilon}, \mathcal{E} \otimes J)$. I do not know whether this is in general representable by a perfect complex over $R_{V,\varepsilon}[1/p]$, satisfying Poincaré-duality. However for Frobenius-crystals ($\Phi^*\mathcal{E} \cong \mathcal{E}$) one can at least show that the special fibre at $t = 0$ is representable by a perfect complex $\mathbb{K}_0$ (i.e. has finite-dimensional cohomology) on which Frobenius acts by isomorphisms, and that there are Φ-linear and horizontal (in case of an absolute crstal $\mathcal{E}$) comparison-maps

$$(H^i(X^{\mathrm{crys}} \otimes_V k/V_0, \mathcal{E} \otimes J) \otimes_{K_0} R_\varepsilon[1/p], d + N) \longrightarrow (H^i(X^{\mathrm{crys}}/R_{V,\varepsilon}, \mathcal{E} \otimes J), \bigtriangledown),$$

where $N = \mathrm{Res}(t\frac{d}{dt})$ is the endomorphism defined by the logarithmic connection, satisfying $\Phi \circ N = pN \circ \Phi$ (and thus N is nilpotent):

For the finite-dimensionality one constructs integral lattices and proceeds as in [Fa7]. The comparison-map is constructed as in [Fa4]: Start with any lift of the identity mod t. Then transform it by powers of Frobenius and pass to the limit. Also modulo t we have Poincaré-duality, characteristic classes, Gysin-maps etc.

I expect the comparison-map to be isomorphisms, but do not know how to prove this.

Define $A_{\mathrm{crys},\varepsilon}(\overline{R}) = p$-adic completion of $A_{\mathrm{inf}}(\overline{R})[\xi^n/p]$ (as before, $\varepsilon = 1/n$). This is an enlargement of R over $R_{V,\varepsilon}$, which maps to it sending t to $[\underline{\pi}]$. Thus $\mathcal{E}(A_{\mathrm{crys},\varepsilon}(\overline{R}))$ is defined. If we are given a smooth $\mathbb{Q}_p$-adic sheaf $\mathbb{L}$ on $(X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}$ and functorial (almost) maps

$$\mathcal{E}(A_{\mathrm{crys},\varepsilon}(\overline{R})) \longrightarrow \mathbb{L} \otimes A_{\mathrm{crys},\varepsilon}(\overline{R})$$

respecting Galois-actions and compatible for varying ε's) we obtain a map

$$v_X : \mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_{V,\varepsilon}, \mathcal{E}\otimes J)\otimes_{R_{V,\varepsilon}} A_{\mathrm{crys},\varepsilon}(\overline{V}) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{(!)}((X^0\otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}; \mathbb{L})\otimes A_{\mathrm{crys},\varepsilon}(\overline{V}),$$

with the usual properties concerning duality, characteristic classes, and action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. This also holds for filtrations if we assume that $\mathcal{E}$ is filtered and the maps $\mathcal{E}(A_{\mathrm{crys},\varepsilon}) \to \mathbb{L}\otimes A_{\mathrm{crys},\varepsilon}$ respect filtrations.

In this case we may also form the ring $B^+_{\mathrm{DR}}(\overline{V})$ as the completion in the filtration topology of $A_{\mathrm{crys},\varepsilon}(\overline{V})[1/p]$. For each quotient $B^+_{\mathrm{DR}}(\overline{V})/F^n$ one can find p-adically complete subrings S_n which are enlargements of $V/R_{V,\varepsilon}$. Also we may assume that S_n is big enough so that the natural map $V \to B^+_{\mathrm{DR}}(\overline{V})/F^n$ factors through it as log map (that is $([\underline{\pi}]/\pi)^{\pm 1} \in S_n$). Note that we have two different morphisms (of enlargements) from $R_{V,\varepsilon}$ to S_n, namely once mapping through $A_{\mathrm{crys},\varepsilon}(\overline{V})$ and once through evaluation at V. If we could show a reasonable base-change theorem it would follows that the pushforwards to S_n of $\mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_{V,\varepsilon}, \mathcal{E}\otimes J)$ will coincide with the cohomology relative S_n. In fact to get a canonical filtered isomorphism between the two pushforwards to B^+_{DR}/F^n and (in the limit) B^+_{DR} it suffices to have an integrable connection satisfying Griffiths-duality on either $\mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_{V,\varepsilon}, \mathcal{E}\otimes J)$ or whatever else one wishes to push forward. This fact is necessary because in Fontaine's comparison machinery one uses the second push forward, while our maps naturally respect filtrations if one uses the first.

Also for a Frobenius-crystal we can compose with the comparison-maps to obtain (with $B^+_{\mathrm{crys}} = A_{\mathrm{crys}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$)

$$v_X : \mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}\otimes_V k/V_0, \mathcal{E}\otimes J)\otimes_{K_0} B^+_{\mathrm{crys},\varepsilon}(\overline{V}) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{(!)}((X^0\otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}, \mathbb{L})\otimes B^+_{\mathrm{crys},\varepsilon}(\overline{V})$$

This will respect Galois-actions as the other maps do, where however on the left hand side the Galois-action is not just via the second factor but has to be twisted, because of the connection $d+N$. There is a 1-cocycle $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \mathbb{Z}_p(1)$

$$\sigma \longmapsto \overline{\sigma}$$

describing the action on all p-power roots of π, or equivalently on $[\underline{\pi}] \in A_{\mathrm{inf}}(\overline{V})$. Then the Galois-action of σ on

$$H^i(X^{\mathrm{crys}}\otimes_V k/V_0, \mathcal{E}\otimes J_I)\otimes A_{\mathrm{crys},\varepsilon}(\overline{V})$$

is defined as

$$\sigma \longmapsto \exp(\beta(\overline{\sigma})N)\otimes\sigma$$

This corresponds to Fontaine's description: If ϵ is small enough $A_{\mathrm{crys},\epsilon}$ maps to the usual A_{crys} defined using the PD-hull, which in turn maps to B^+_{crys} and B_{crys}. If $B_{\mathrm{st}} = B_{\mathrm{cr}}[u]$ with $Nu = 1 (u = \text{“}\log([\underline{\pi}]/\pi)\text{”})$ then ($E_0 = H^i(X^{\mathrm{crys}}\otimes_V k/V_0, \mathcal{E}\otimes J)$)

$$E_0\otimes B_{\mathrm{cr}} \cong \ker(N\otimes 1 + 1\otimes N \mid E_0\otimes B_{\mathrm{st}})$$

via $\exp(-N\otimes u)$, and as $\sigma(u) = u + \beta(\overline{\sigma})$ this intertwines Galois-actions.

In the appendix it is shown how to endow $\mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}} \otimes_V k/V_0, \mathcal{E} \otimes J_I) \otimes^{\mathbb{L}}_{V_0} R_{V,\epsilon}$ with a filtration such that it can take the place of $\mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_{V,\epsilon}, \mathcal{E} \otimes J_I)$. With it all the theory works, and we get comparison maps as needed in Fontaine's theory of crystalline representations.

5*. Appendix: Cohomology of Frobenius-isocrystals

As before X is étale locally étale over some $\overline{T}_\lambda$. The cohomology of convergent isocrystals can be defined via de Rham complexes on smooth local lifts, as it is done in crystalline cohomology. However one has to replace PD-envelopes by open "$>\varepsilon$"-neighbourhoods, as follows:

Denote for $\epsilon = a/b$ by $R_{V,\epsilon}$ the p-adic completion of the normalization of $V_0[[t]][t^b/p^a]$. Then

$$R_{K,\varepsilon} = R_{V,\varepsilon} \otimes_{V_0} K_0$$

is the rings of formal powerseries convergent in the closed disk of radius p^ε, that is formal powerseries $f = \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n$ with ($v_p = p$-adic valuation).

$$a_n \in K_0, \lim_{n\to\infty} (v_p(a_n) + n\epsilon) = \infty.$$

We need the following variant of the Poincaré-lemma:

Consider the de Rham complex

$$R_{K,\varepsilon} \xrightarrow{d} R_{K,\varepsilon} \cdot dt.$$

Obviously the constants K_0 lie in the kernel of d. If we divide by them and map to the corresponding complex with ϵ replaced by $\delta > \epsilon$, the induced map (from "ϵ" to "δ") on cohomology vanishes.

Thus the projective system of de Rham complexes, for all ϵ bigger than a fixed $\delta \geqslant 0$, forms an acyclic pro-object resolving the constants. It is called the "de Rham complex of the open δ-tube".

Next to define and compute cohomology we consider elements δ, ε smaller than the valuation of π. If X embeds into a p-adic affine formal scheme Y smooth over $\overline{T}_\sigma \otimes_{V_0[t]} V_0[[t]]$, respecting toroidal structures, let $J_X \subseteq \mathcal{O}_Y$ denote the ideal of $X \times_V k$. For $\delta = c/d \leqslant \epsilon$ define the closed (δ, ϵ)-tube of X in Y as the affine Y-scheme with algebra

$$((\mathcal{O}_Y[J_X^d/p^c]) \otimes_{V_0[[t]][t^d/p^c]} R_{V,\epsilon})^\wedge.$$

Call it $D_{X,\delta,\epsilon}(Y)$. Define (for $\delta < \epsilon$) the open (δ, ϵ)-tube as the *ind*-scheme

$$\text{“} \varinjlim_{\delta < \delta' \leqslant \epsilon} \text{”} D_{X,\delta',\epsilon}(Y) = D_{X,>\delta,\epsilon}(Y).$$

As each $D_{X,\delta',\epsilon}(Y)$ is an enlargement of X over $R_{V,0}$ we can evaluate $\mathcal{E}$ on it, and form the de Rham complex $\mathcal{E}(D_{X,\delta',\epsilon}(Y)) \otimes \Omega^{\bullet,\log}_{Y/V_0[[t]]}$. Then define $\mathbb{R}\Gamma_{>\delta}(X/R_{V,\varepsilon}, \mathcal{E})$ as represented by the derived projective limit ($\delta' \to \delta+$) of the de Rham complexes. Up to quasi-isomorphism it is independant of the choice of δ. Similarly we define

$\mathbb{R}\Gamma(X/R_{V,\varepsilon}, \mathcal{E}\otimes J)$, and if X cannot be embedded globally we use local embeddings and hypercoverings. One checks that the result is independant of all choices, the key being the Poincaré-lemma which allows to compare two local smooth embeddings (and there we unfortunately need open tubes).

In general we know little about finiteness or base change for these cohomologies. However for Frobenius-isocrystals the situation is much better. We define a semilinear "Frobenius" ϕ on $R_{V,\varepsilon}$ by $\phi(t) = t^p$. Then Frobenius operates on enlargements of $X \otimes_V k/V_0[[t]]$, and a Frobenius-isocrystal is an isocrystal $\mathcal{E}$ together with an isomorphism $\mathrm{Frob}^*(\mathcal{E}) \cong \mathcal{E}$. We first claim that for a Frobenius-isocrystal the cohomology modulo t is wellbehaved.

For this choose an affine étale covering $X' \to X \otimes_V k$ and lift to a toroidal or log-smooth $\widehat{X'}$ over $V_0 = V_0[[t]]/(t)$. Also choose a Frobenius-lift Φ on $\widehat{X'}$. This induces a Frobenius Φ on all fibered products $\widehat{X'}^{\log,n+1}$ and $D(\widehat{X'}^{\log,n+1})$, where $D()$ stands for the p-adic completion of the (log) divided power envelopes of $(X'/X\otimes_V k)^{n+1}$. We denote its affine ring by $\widehat{R}'_n$. These are affine enlargements of $X\otimes_V k$, and thus by pullback we can evaluate $\mathcal{E}$ on them. We claim that there exists a crystal $\mathcal{E}^0$ of coherent sheaves on $(X\otimes_V k)^{\mathrm{crys}}/V_0$, flat over V_0, with

$$\mathcal{E}(D(\widehat{X'}^{\log,n+1})) = \mathcal{E}^0(D(\widehat{X'}^{\log,n+1}))\otimes_{V_0} K_0,$$

functorially:

Choose a finitely generated $\widehat{R}'$-submodule $M_0 \subset \mathcal{E}(\widehat{R}'_0)$ spanning $\mathcal{E}(\widehat{R}'_0)$, and stable under $p^N\cdot\Phi$ (some fixed N) and $\bigtriangledown$ (replace M_0 by its transform under some big Frobenius-power, if necessary). Then $\mathrm{pr}_1^*(M_0) \subseteq p^{-N}\cdot \mathrm{pr}_0^*(M_0)$ in $\mathcal{E}(\widehat{R}'_1)$, after (if necessary) enlarging N. If we define

$$\mathcal{E}^0(\widehat{R}'_0) = \{e\in M_0 : \mathrm{pr}_1^*(e)\in \mathrm{pr}_0^*(M_0)\}$$

then $p^N\cdot M_0 \subseteq \mathcal{E}^0(\widehat{R}'_0)\subseteq M_0$, $\mathcal{E}^0(\widehat{R}'_0)$ is stable under $p^N\cdot\Phi$ and $\bigtriangledown$, and

$$\mathrm{pr}_1^*(\mathcal{E}^0(\widehat{R}')) = \mathrm{pr}_0^*(\mathcal{E}^0(\widehat{R}'))\subseteq \mathcal{E}(\widehat{R}'_1).$$

This last identity is checked locally in $\widehat{X'}_1$. We thus may assume that

$$\widehat{X'}_n = \widehat{X'}\times D(\hat{\overline{T}}_\lambda)^n.$$

Note that $\mathrm{pr}_0^*(M_0)$ is always a submodule of $\mathcal{E}(\widehat{R}'_n)$ as $\widehat{R}'_0$ is noetherian pr_0 is flat. Now start with the exact sequence

$$0\longrightarrow \mathcal{E}_0(\widehat{R}')/p^N\cdot M_0 \longrightarrow M_0/p^N\cdot M_0 \xrightarrow{\mathrm{pr}_1^*} p^{-N}\cdot \mathrm{pr}_0^*(M_0)/\mathrm{pr}_0^*(M_0),$$

tensor with $\widehat{R}'_1/p^N$ which is flat over $\widehat{R}'_0/p^N$ via pr_0^*, and use simplicial identities computing in the subquotient $p^{-N}\cdot\mathrm{pr}_0^*(M_0)/\mathrm{pr}_0^*(M_0)$ of $\mathcal{E}(\widehat{R}'_2)$). It then follows that

$$\mathrm{pr}_1^*(\mathcal{E}^0(\widehat{R}')\subseteq \mathrm{pr}_0^*(\mathcal{E}^0(\widehat{R}')$$

and vice-versa. Thus $\mathcal{E}^0(\widehat{R}')$ defines a crystal.

By the methods of [Fa7] (most difficulties disappear because V_0 is noetherian) it follows that for each $s > 0$

$$\mathbb{R}\Gamma((X \otimes_V k)^{\mathrm{crys}}/V_0, J_I \cdot \mathcal{E}^0/p^s)$$

is representable by a perfect complex over V_0/p^s, and we may form the projective limit to represent

$$\mathbb{R}\Gamma((X \otimes_V k)^{\mathrm{crys}}/V_0, J_I \cdot \mathcal{E}^0)$$

by a perfect complex over V_0. Also the perfect K_0-complex

$$\mathbb{R}\Gamma((X \otimes_V k)^{\mathrm{crys}}/V_0, J_I \cdot \mathcal{E}^0) \otimes_{V_0} K_0$$

is independant of all choices, and Φ^* induces an isomorphism on cohomology: It suffices to show that Frobenius has a left-inverse (the cohomology has finite dimension). To construct this use that local Frobenius-lifts are finite, and that duality theory defines a trace-map from the de Rham complex of $\Phi^*(\mathcal{E})$ to that of $\mathcal{E}$. Namely the trace without coefficients satisfies $\mathrm{tr}(\Phi^*(\alpha) \wedge \beta) = \alpha \wedge \mathrm{tr}(\beta)$, and it extends to coefficients in $\mathcal{E}$ by the rule $\mathrm{tr}(\Phi^*(e) \otimes \alpha) = e \otimes \alpha$. This applies to all the open tubes in the definition of cohomology, except that the radius of convergence decreases: The ϵ-tube is replaced by the $p\epsilon$-tube (for Frobenius it is the converse). Also the trace respects coefficients J_I, by a local calculation. If we divide it by the relative rank of Frobenius (that is $p^{\dim}$) it even commutes with all simplicial pullbacks. The induced map on cohomology is our left-inverse.

Next we study relations between $\mathbb{R}\Gamma((X \otimes_V k)^{\mathrm{crys}}/V_0, J_I \cdot \mathcal{E}^0) \otimes_{V_0} K_0$ and

$$\mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_{V,\epsilon}, \mathcal{E} \otimes J_I).$$

For this use the morphism $R_{V,\epsilon} \to V_0$ which sends t to 0. It induces an isomorphism $R_{K,\epsilon}/tR_{K,\epsilon} \cong K_0$. By an easy variant of base-change the derived product $\mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_{V,\epsilon}, \mathcal{E} \otimes J_I) \otimes^{\mathbb{L}}_{R_{K,\epsilon}} K_0$ is equal the cohomology of the corresponding isocrystal over V_0, which is defined by de Rham complexes on open δ-tubes, for any $\delta > 0$. The δ-tubes involve the cosimplicial ring $\widehat{R}'_\bullet$. Now if $\delta \geqslant \frac{1}{p-1}$ the PD-envelope maps to the projective system of affine rings which define the open tube, and the induced map on de Rham complexes gives a comparison

$$\mathbb{R}\Gamma((X \otimes_V k)^{\mathrm{crys}}/V_0, J_I \cdot \mathcal{E}^0) \otimes_{V_0} K_0 \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_{V,\epsilon}, \mathcal{E} \otimes J_I) \otimes^{\mathbb{L}}_{R_{V,\epsilon}} K_0.$$

We claim that it is a quasi-isomorphism.

This can be checked on the level of de Rham complexes on each $\widehat{R}'_n$. However as the special fibre lifts to a toroidal or log-smooth scheme over V_0, the de Rham complexes is quasi-isomorphic to that of such a lift, which involves neither PD-hulls nor δ-tubes.

Next we try to lift to a Frobenius-linear

$$\mathbb{R}\Gamma((X \otimes_V k)^{\mathrm{crys}}/V_0, J_I \cdot \mathcal{E}^0) \otimes_{V_0} K_0 \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_{V,\epsilon}, \mathcal{E} \otimes J_I).$$

Namely let L^* denote the de Rham complex representing the cohomology of the closed tube $D_{X,\delta,\epsilon}$ for some $\delta < \epsilon$. It is a complex of p-adic Banach-modules over

$R_{V,\epsilon}$, Frobenius on it is a bounded operator. Also for $\delta_1 < \delta$ we may map

$$\text{open } \delta\text{-tube} \subset \text{closed } \delta\text{-tube} \subset \text{open } \delta_1\text{-tube},$$

thus factoring the identity on the cohomology of the isocrstal over $R_{V,\epsilon}$. Choose a split complex M_0^* of finite dimensional K_0-vectorspaces representing

$$\mathbb{R}\Gamma(X^{\text{crys}} \otimes_V k/V_0, \mathcal{E} \otimes J_I).$$

Then Frobenius acts by automorphisms on the M_0^i, and thus $N^* = \text{Hom}_{K_0}^*(M_0^*, L^*)$ is also a complex of $R_{V,\epsilon}$-Banach-modules with bounded Frobenius. Mapping via an open δ_1-tube we obtain a Frobenius-invariant element of $H^0(N^*/tN^*)$ which we want to lift. Thus chose some lift $\widetilde{\alpha} \in N^0$. Then

$$\Phi(\widetilde{\alpha}) - \widetilde{\alpha} = t \cdot \beta + d(\gamma)$$

with

$$\beta \in N^0, \gamma \in N^{-1}.$$

Define $\alpha = \widetilde{\alpha} + \sum_{m=0}^{\infty} \Phi^m(t \cdot \beta)$. This sum converges in N^0 as

$$\Phi^m(t \cdot \beta) = t^{p^m} \cdot \Phi^m(\beta),$$

and the t-power in front has norm p to the power $-p^m\epsilon$, while all other norms grow at most exponentially in m. Then

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha) - \alpha &= d(\gamma), \\
d(\alpha) &= d(\widetilde{\alpha}) + \sum_{m=0}^{\infty} \Phi^m \circ d(t \cdot \beta) \\
&= d(\widetilde{\alpha}) + \sum_{m=0}^{\infty} \Phi^m \circ d \circ \Phi(\widetilde{\alpha}) - d \circ \Phi^m(\widetilde{\alpha}) \\
&= d(\widetilde{\alpha}) + \lim_{m \to \infty} \Phi^{m+1} \circ d(\widetilde{\alpha}) - d(\widetilde{\alpha}) \\
&= \lim_{m \to \infty} \Phi^{m+1} \circ d(\widetilde{\alpha}) = 0,
\end{aligned}$$

by the same reasoning, as $d(\widetilde{\alpha}) \in t \cdot N^{i+1}$. Hence

5. Proposition. — *There exists a lift*

$$\alpha : \mathbb{R}\Gamma((X \otimes_V k)^{\text{crys}}/V_0, J_I \cdot \mathcal{E}^0) \otimes_{V_0}^{\mathbb{L}} R_{V,\epsilon} \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(X^{\text{crys}}/R_{V,\epsilon}, \mathcal{E} \otimes J),$$

Frobenius-linear up to homotopy. It is called the Hyodo-Kato map.

How unique is that lift? We claim that for any finite complex M_0^* of finite dimensional K_0-vectorspaces with Frobenius automorphism, a Frobenius invariant cohomology class in $\text{Hom}^*(M_0^*, \Gamma(X^{\text{crys}}/R_{V,\epsilon}, \mathcal{E} \otimes J_I)$ vanishes if it vanishes modulo t:

Namely using the Hyodo-Kato map our class comes from a Frobenius-invariant class in the homomorphisms of M_0^* into $t \cdot \Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_{V,\epsilon}, \mathcal{E} \otimes J)$. Mapping again via closed tubes we obtain in some $N^i = \mathrm{Hom}^i(M_0^*, L^*)$ a class $t \cdot \alpha$ with

$$t \cdot \alpha - \Phi(t \cdot \alpha) = d(t \cdot \gamma).$$

But then

$$t \cdot \alpha = d\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \Phi^m(t \cdot \gamma) \Big)$$

is exact.

Also it may happen that $\mathcal{E}$ is actually a crystal over V_0, that is in the absolute sense. We show that in this case the Hyodo-Kato map is horizontal for the Gauss-Manin connection. Namely in this case we may repeat all our constructions using de Rham complexes relative V_0, with trivial log structure. These are extensions of the previous de Rham complexes, say

$$0 \longrightarrow \mathrm{DR}(\mathcal{E}/R_{V,\epsilon})\{-1\}[-1] \longrightarrow \mathrm{DR}(\mathcal{E}/V_0) \longrightarrow \mathrm{DR}(\mathcal{E}/R_{V,\epsilon}) \longrightarrow 0.$$

The shifts come from multiplication by dt/t.

If we reduce modulo t we get complexes over K_0 with finite dimensional cohomology. As before denote by M_0^* a split complex representing the relative cohomology of $\mathcal{E} \otimes J_I$. Then the connecting map of the above sequence defines a Frobenius invariant map $N : M_0^* \to M_0^*\{-1\}$. By linear algebra one checks that the extension is then quasi-isomorphic to that given by the mapping cone $C^*(N)$:

$$0 \longrightarrow M_0^*\{-1\}[-1] \longrightarrow C^*(N) \longrightarrow M_0^* \longrightarrow 0.$$

The quasi-isomorphism between the two extensions is not unique up to homotopy, but two choices differ by an automorphism of the extension above, that is by an element of $H^{-1}(\mathrm{End}^*(M_0)\{-1\})$. Also the natural Frobenius on the cone has to be modified by such an element to make the quasi-isomorphism Frobenius-linear, up to homotopy. (This modification defines an invariant of cohomology which I have not found in the literature.)

Next our lifting works as before and defines a Hyodo-Kato map

$$C^*(N) \otimes_{K_0} R_{K,\epsilon} \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(X^{\mathrm{crys}}/R_{V,\epsilon}/V_0, \mathcal{E} \otimes J_I).$$

It is compatible with the previous ones, and from its existence it follows that these respect Gauss-Manin connections.

Finally mapping $R_{\geqslant \varepsilon} \to K$ (or $R_V \to V$) we know that the pushout is de Rham cohomology of $\mathcal{E}(\widehat{X})$ over V. This also satisfies Poincaré-duality. By the usual calculation with characteristic of diagonals the induced maps

$$H^i(X \otimes_V k/V_0, \mathcal{E} \otimes J_I) \otimes_{K_0} K \longrightarrow H^i_{\mathrm{DR}}(X, \mathcal{E} \otimes J_I)$$

are isomorphisms (the Hyodo-Kato isomorphisms). To check that characteristic classes etc. are respected represent them by short exact sequences. It then follows

that the Hyodo-Kato map modulo t as well as the pushout induced from $R_{V,\epsilon}$ respect them. But then this also follows for the Hyodo-Kato map itself, because of uniqueness of lifts for Frobenius-invariant maps.

Finally if $\mathcal{E}$ is filtered we can define a pullback-filtration on

$$\mathbb{R}\Gamma((X \otimes_V k)^{\mathrm{crys}}/V_0, J_I \cdot \mathcal{E}^0) \otimes^{\mathbb{L}}_{V_0} R_{V,\epsilon}$$

by the following general construction:

Construction. — Suppose $\alpha : A^* \to B^*$ is a morphism of complexes, with B^* filtered by subcomplexes $F^n(B^*)$. Then identify A^* with the mapping cone of $(\alpha, -\mathrm{id}) : A^* \oplus B^* \to B^*$ and filter this cone by the subcomplexes which are mapping cones of $A^* \oplus F^n(B^*) \to B^*$.

This makes (trivially) the Hyodo-Kato map filtered. Also if $\mathcal{E}$ is absolute filtered this construction gives a filtration satisfying Griffith's transversality. That is $\bigtriangledown(t \cdot \partial/\partial t)$ lifts naturally to a (nonlinear) derived endomorphism of filtration-degree -1. Finally the pushout to B^+_{DR} defines an isomorphism on cohomology of gr_F, thus becomes a filtered quasi-isomorphism.

Remarks. — Pragmatically one could replace $H^i(X/R_{\geqslant\varepsilon}, \mathcal{E} \otimes J_I)$ by

$$H^i(X \otimes_V k/V_0, \mathcal{E} \otimes J_I) \otimes_{K_0} R_{\geqslant\varepsilon}$$

and then have all the desired properties. However philosophically this looks a little bit like cheating.

6. Complements: Relative case, Fontaine-Lafaille theory

As in [Fa3] one can generalise to the case of proper maps $f : X \to Y$ with $f(X^0) \subseteq Y^0$. For a reasonable theory one needs some local conditions on f. We assume that étale locally f is isomorphic to a map of torus-embeddings $\overline{S}_\lambda \to \overline{T}_\lambda$, where $\overline{S}_\lambda \subseteq \overline{S}$, $\overline{T}_\lambda \subseteq \overline{T}$, $\overline{S}$ corresponds to a lattice L and a cone $\sigma \subseteq L_{\mathbb{R}}$, $\overline{T}$ to a lattice M and a cone $\tau \subseteq M_{\mathbb{R}}$, and the map f to a homomorphism $L \to M$ which sends σ into τ such that each face of σ maps onto a face of τ. We assume that the cokernel of $L \to M$ is torsion free. Also $\lambda \in M^\vee$ maps to the corresponding element $\lambda \in L^\vee$. Finally σ and τ should satisfy our usual assumptions, namely that $\sigma \cap \ker(\lambda)$ and $\tau \cap \ker(\lambda)$ are spanned by partial basis of L, respectively M. This implies that $f_K : X \otimes_V K \to Y \otimes_V K$ sends each open stratum of X smoothly onto an open stratum of Y. Also for each locally constant torsion-sheaf $\mathbb{L}$ on $X^0 \otimes_V \overline{K}$, the direct images $\mathbb{R}^\nu f_* \mathbb{L}$ on $Y^0 \otimes_V \overline{K}$ are again locally constant. Furthermore f induces a map of topoi $f : \mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K} \to \mathcal{Y}^0 \otimes_V \overline{K}$:

For $U \to Y$ étale, $V \to U^0 \otimes_V \overline{K}$ an étale covering, the pullbacks to X are in the situs defining $\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}$. This defines f^* on sites, etc. We intend to sketch the proof of the following

6. Theorem. — *Suppose* $\mathbb{L}$ *is locally constant torsion on* $(X^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}$*, defining such a sheaf* $\mathbb{L}$ *on* $\mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K}$*. Then the direct images* $\mathbb{R}^\nu f_* \mathbb{L}$ *under*

$$f : (X^0 \otimes \overline{K})^{\text{ét}} \longrightarrow (Y^0 \otimes_V \overline{K})^{\text{ét}}$$

and

$$f : \mathcal{X}^0 \otimes_V \overline{K} \longrightarrow \mathcal{Y}^0 \otimes_V \overline{K}$$

correspond. Furthermore

$$R^\nu f_*(\mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}_X) \approx R^\nu f_* \mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}_Y,$$

and similarly for $A_{\text{inf}}(\overline{\mathcal{O}})$*, or direct images with compact support (along boundary strata of* X *mapping to* Y^0*).*

Proof. — This is done as in the absolute case, replacing $\overline{V}$ by $\overline{R}$, for $\text{Spec}(R) \to Y$ étale and also $\text{Spec}(R)$ étale over $\overline{S}_\lambda, R$ strictly henselian. As usual we can for many purposes replace $\overline{R}$ by R_∞. First we have to study Poincaré-duality for the direct images $\mathbb{R}f_*(\mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}_X)$. There is an (almost defined) trace-map

$$\mathbb{R}^{2\delta} f_*(\overline{J}_X / p^s \overline{J}_X)(\delta) \longrightarrow \overline{J}_Y / p^s \overline{J}_Y$$

(δ = relative dimension) inducing an almost quasi-isomorphism

$$\mathbb{R}f_*(\mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}_X)[2\delta](\delta) \approx \mathbb{R}\,\text{Hom}_{\overline{R}}(\mathbb{R}f_*(\mathbb{L}^\vee \otimes \overline{J}_X), \overline{J}_Y p^s \overline{J}_Y)$$

(and similarly for cohomology with compact support at infinity). The proofs are easy generalizations of the previous ones.

Secondly $\mathbb{R}f_*(\mathbb{L})$ is given by the "almost Frobenius-invariants" on $\mathbb{R}f_*(\mathbb{L} \otimes A_{\text{inf}}(\overline{\mathcal{O}}_X))$. We claim that (if R is strictly henselian)

$$R^\nu f_*(\mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}_X) \approx R^\nu f_*(\mathbb{L}) \otimes \overline{R}$$

(and similarly with coefficients $A_{\text{inf}}(\overline{R})$):

Reduce to $\mathbb{L}$ annihilated by $p, s = 1$. Then choose the highest index ν for which $\mathcal{M} = R^\nu f_*(\mathbb{L} \otimes \mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}}_X))$ is not almost isomorphic to (almost Φ-invariants in M) $\otimes$ $\mathcal{R}(\overline{R})$. Then $M = \mathcal{M}/\xi\mathcal{M}$ is almost finitely presented over $\overline{R}/p\overline{R}$, and Frobenius is an almost isomorphism on $\mathcal{M}$. Equivalently $\mathcal{M} = \varprojlim(M, \Phi)$, and Frobenius induces an isomorphism $M/p^{1/p} \cdot M \approx M$. Thus everything can be formulated in terms of M. Furthermore we can replace $\overline{R}$ by R_∞ and M by $M_\infty = \text{Gal}(\overline{R}/R_\infty)$-invariants, as $M \approx M_\infty \otimes_{R_\infty} \overline{R}$. M_∞ is an almost finitely presented R_∞/pR_∞-module with Frobenius $\Phi : M_\infty/p^{1/p} M_\infty \approx M_\infty$. In the appendix it is shown that for some almost étale covering $\overline{A}$ of R_∞/pR_∞

$$M_\infty \otimes_{R_\infty} \overline{A} \approx (\text{almost } \Phi\text{-invariants}) \otimes A.$$

Thus be descending induction over ν we can find such an A almost étale over $\overline{R}/p\overline{R}$ with

$$\mathbb{R}^\nu f_*(\mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}_X) \otimes_{\overline{R}} \overline{A} \approx M_0^\nu \otimes_{\mathbb{F}_p} \overline{A}$$

for certain $\mathbb{F}_p$-vectorspaces M_0^ν. $\overline{A}$ lifts to an almost étale covering $\widehat{A}$ of $\widehat{\overline{R}}$, the p-adic completion of $\overline{R}$. Temporarily working over $\widehat{A}$ we see that the M_0^ν are the direct images of $\mathbb{L}$ on the topos $\mathcal{X}^0 \otimes_{\mathcal{Y}} \widehat{A}$, the analogue of the topos $\mathcal{X}^0$ with the base $\overline{V}$ replaced by $\widehat{A}$. These map to the étale images, and these maps are isomorphisms (by duality, or basechange to discrete valuation rings). If we replace $\widehat{A}$ by a Galois-covering the Galois-group $\mathrm{Gal}(\widehat{A}/\widehat{\overline{R}})$ then operates trivially on the M_0^ν, as it operates trivially on étale direct images. Hence by taking invariants

$$R^\nu f_*(\mathbb{L} \otimes \overline{\mathcal{O}}) \cong M_0^\nu \otimes \overline{R},$$

and comparison is shown.

Obviously there are consequences for comparison to crystalline direct images. Finally the Fontaine-Lafaille theory from [Fa3] carries over without much change: Consider a filtered Frobenius-crystal $(\mathcal{E}, F^i(\mathcal{E}))$ which locally is the direct sum of shifted filtered modules $\mathcal{O}_X/p^s\mathcal{O}_X\{e_i\}$, with shifts $0 \leqslant e_i \leqslant p-2$. Assume that Frobenius Φ on F^i is divisible by p^i, that is there exist (assuming we evaluate on a PD-thickening with Frobenius-lift) $\Phi_i : F^i(\mathcal{E}) \otimes_\rho \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}$ with $\Phi_{i-1} \mid F^i = p \cdot \Phi^i$. Furthermore assume that for a local filtered basis m_i, of degree e_i, the $\Phi^{e_i}(m_i)$ also form a basis. Then

$$\mathbb{L} = \mathrm{Hom}_{F,\Phi}(\mathcal{E} \otimes A_{\mathrm{crys}}(\overline{R})), A_{\mathrm{crys}}(\overline{R}) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

defines a locally constant étale sheaf on $X \otimes_V \overline{K}$. This is shown as in [Fa3] (and uses in fact little of the structure of $\overline{R}$). Finally sometimes such crystals can be constructed as crystalline direct images under $f : X \to Y$. However for this one at least needs more stringent restrictions on f ("of relative Cartier-type" in Kato's terminology, see also [Fa3]), and also criteria under which the derived direct image splits into the direct sum of its cohomology groups.

6*. Appendix: Some more almost mathematics

The ring $R_\infty = \varinjlim_{n\to\infty} R_n$ is the increasing union of noetherian rings R_n, such that for a sequence $\varepsilon_n \to 0$ we have

$$p^{\varepsilon_n} \cdot \mathrm{Tor}^{R_n}(R_{n+m}, \text{ any } R_n\text{-module}) \quad = 0.$$

If M is any almost finitely presented R_∞-module, then for each $\alpha > 0, M$ is p^α-isomorphic to $M_n \otimes_{R_n} R_\infty$ for some finitely presented R_n-module. Resolve M_n by finitely generated free R_n-module, to get by base extension a complex of finitely generated free R_∞-modules which up to $p^{\alpha+\varepsilon_n}$ resolves M. Similarly for a map $M \to N$ of such modules. With these methods one sees easily that the almost finitely presented R_∞-modules form an abelian subcategory of all R_∞-modules, which is closed under forming $\mathrm{Tor}_i^{R_\infty}(M,N)$ or $\mathrm{Ext}_i^{R_\infty}(M,N)$. The same holds for R_∞/pR_∞

(and by the way all this remains true for $\overline{R}$). From now on assume that R is strictly henselian.

We now show that for an almost finitely presented R_∞/pR_∞-module M with a Frobenius-linear almost isomorphism $\Phi : M/p^{1/p}M \approx M$, for an almost faithfully flat almost étale covering A of R_∞/pR_∞,

$$M \otimes_{R_\infty} A \approx M_0 \otimes_{\mathbb{F}_p} A$$

with

$$M_0 = \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}; M)^\Phi$$

the almost invariants under Frobenius.

We proceed by induction over $\dim(R)$ and may assume that the assertion already holds for the strict localization in any prime $\mathfrak{p} \subseteq R, \mathfrak{p} \neq \mathcal{M}$. By descent it follows that the localizations $M_\mathfrak{p}$ are almost projective on $(R_\infty/pR_\infty)_\mathfrak{p}$. Also the assertion has already been shown for $d = 0$(R a discrete valuation ring), so we may assume that $\dim(R) \geqslant 2$. Replace M by $\mathrm{Hom}(\mathcal{M}, M)$. Then $M_0 = M^\Phi$, Frobenius is surjective on M, and M has no $\mathcal{M}$-torsion. If $\mathcal{M} = \varprojlim(M, \Phi)$, then $\mathcal{M}$ has no ξ-torsion, $\mathcal{M}/\xi\mathcal{M} \cong M$, and Frobenius is bijective in the $\mathcal{R}_\infty$-module $\mathcal{M}$. Next consider $\mathcal{N} = \mathrm{Ext}^1_{R_\infty}(\mathcal{M}, R_\infty)$. Then Frobenius is also bijective on $\mathcal{N}$, and $\mathcal{N}/\xi\mathcal{N}$ injects into

$$\mathrm{Ext}^1_{R_\infty}(\mathcal{M}, R_\infty/pR_\infty) = \mathrm{Ext}^1_{R_\infty}/pR_\infty(M, R_\infty/pR_\infty),$$

which is almost finitely presented and almost $\mathcal{M}$-torsion. By a previously used argument (using $d > 0$ and $\lambda(\xi^\alpha\mathcal{N}/\xi\mathcal{N})$), $\mathcal{N}/\xi\mathcal{N} \approx 0$, and it then follows that the maps any map $\mathcal{M} \to \mathcal{R}_\infty/\xi^n \cdot \mathcal{R}_\infty$ almost lifts to $\mathcal{R}_\infty/\xi^{n+1} \cdot \mathcal{R}_\infty$, and thus in the limit to $\mathcal{R}_\infty$.

Next consider the cokernel $\mathcal{N}$ of

$$\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{R}_\infty} \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_\infty}(\mathcal{M}, \mathcal{R}_\infty) \longrightarrow \mathrm{End}_{R_\infty}(\mathcal{M}).$$

Then Frobenius is almost isomorphic on $\mathcal{N}$. Also $\mathcal{N}/\xi \cdot \mathcal{N}$ almost injects into the cokernel of

$$M \otimes_{R_\infty} \mathrm{Hom}_{R_\infty}(M, R_\infty/pR_\infty) \longrightarrow \mathrm{End}_{R_\infty}(M).$$

This cokernel is almost finitely presented and almost $\mathcal{M}$-torsion. By the usual argument $\mathcal{N}/\xi \cdot \mathcal{N}$ almost vanishes, and so does $\mathcal{N}$ (lifting modulo ξ^n step by step). Hence for each $\alpha > 0$, $\xi^\alpha \cdot \mathrm{id}_\mathcal{N}$ lies in the image, thus is of the form $\sum x_i \otimes y_i$ with $x_i \in \mathcal{M}, y_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_\infty}(\mathcal{M}, \mathcal{R}_\infty)$. Thus $\xi^d \cdot z = \sum y_i(z) \cdot x_i$ for each $z \in \mathcal{M}$, and $\mathcal{M}$ is almost projective.

Each localization $M_\mathfrak{p}$ has finite rank, for $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$. If r denotes the maximum of these ranks for $\mathfrak{p}$ a minimal prime divisor of pR, then M and $\mathfrak{m}$ have rank $\leqslant r$. For $n > r(p-1)$ consider the cokernel $\mathcal{N}$ of the map

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} \otimes S^{n-p}(\mathfrak{n}) &\longrightarrow S^n(\mathfrak{n}) \\ m \otimes m' &\longmapsto m^p \cdot m! \end{aligned}$$

Then $\mathcal{N}/\xi\mathcal{N}$ injects into the corresponding cokernel for M, which is $\mathcal{M}$-torsion and almost finitely presented. Also Frobenius is an isomorphism on $\mathcal{N}$, hence as usual $\mathcal{N}/\xi N \approx 0$, and the map above is almost surjective ($\mathcal{N} \approx 0$). Thus

$$\mathcal{A} = S^\bullet(\mathcal{N})/\langle m^p - \Phi(m)\rangle$$

is almost generated by symmetric powers $S^n(\mathcal{N})$ ($n \leqslant r(p-1)$), hence almost finitely presented. Also Frobenius is almost isomorphic on $\mathcal{A}$, thus $\mathcal{A}$ itself is almost projective (same argument as for $\mathcal{N}$). Finally $\mathcal{A}$ defines an almost étale covering of $A_{\mathrm{inf}}(R_\infty)$ which is almost faithfully flat ($A_{\mathrm{inf}}(R_\infty)$ is a direct summand). The universal map $\mathcal{N} \to \mathcal{A}$ is Φ invariant. Passing to a Galois-hull of $\mathcal{A}$ we obtain the desired A.

References

[B] P. Berthelot – *Cohomologie Cristalline des Schémas de Caractéristique $p > 0$*, Springer Lecture Notes, vol. 407, 1974.

[BO] P. Berthelot & A. Ogus – F-Isocrystals and de Rham Cohomology I, *Invent. math.* **72** (1983), p. 159–199.

[Fa1] G. Faltings – Hodge-Tate Structures and Modular Forms, *Math. Annalen* **278** (1987), p. 133–149.

[Fa2] ———, p-adic Hodge theory, *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), p. 255–288.

[Fa3] ———, Crystalline Cohomology and p-adic Galois representations, *Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory* (J. Igusa, ed.), John Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1989, p. 25–80.

[Fa4] ———, F-isocrystals on open varieties, Results and conjectures, *Grothendieck's 60th Birthday Festschrift*, vol. II, Birkhäuser, Boston, 1990, p. 219–248.

[Fa5] ———, Crystalline cohomology of semistable curves, and p-adic Galois representations, *J. Alg. Geom.* **1** (1992), p. 61–81.

[Fa6] ———, Crystalline cohomology of semistable curves, the $\mathbb{Q}_p$-theory, *J. Alg. Geom.* **6** (1997), p. 1–18.

[Fa7] ———, Integral crystalline cohomology over very ramifed valuation rings, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), p. 117–144.

[Fo] J.-M. Fontaine (ed.) – *Périodes p-adiques*, Astérisque, vol. 223, 1994.

[FL] J.-M. Fontaine & G. Lafaille – Construction de répresentations p-adiques, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* **15** (1982), p. 547–608.

[GR] O. Gabber & L. Ramero – Almost ring theory, preprint, 1999.

[H] R. Hartshorne – *Residues and Duality*, Springer Lecture Notes, vol. 20, 1966.

[K] K. Kato – Logarithmic Structures of Fontaine-Illusie, *Algebraic Analysis, Geometry, and Number Theory (J.I. Igusa, ed.)*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989, p. 191–224.

[KKMS] G. Kempf, F. Knudson, D. Mumford & B. Saint-Donat – *Toroidal embeddings I*, Springer Lecture Notes, vol. 339, 1973.

[O] A. Ogus – F-isocrystals and de Rham cohomology II - convergent isocrystals, *Duke Math. J.* **51** (1984), p. 765–850.

[Ta] J. Tate – p-divisible groups, *Driebergen Conference on Local Fields* (T.A. Springer, ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1967, p. 158–183.

[Ts] T. Tsuji – p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case, *Invent. math.* **137** (1999), p. 233–411.

G. Faltings, Max-Planck Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany

Astérisque
279, 2002, p. 271–322

AN OVERVIEW OF THE WORK OF K. FUJIWARA, K. KATO, AND C. NAKAYAMA ON LOGARITHMIC ÉTALE COHOMOLOGY

by

Luc Illusie

***Abstract.* —** This paper is a report on the work of K. Fujiwara, K. Kato and C. Nakayama on log étale cohomology of log schemes. After recalling basic terminology and facts on log schemes we define and study a class of log étale morphisms of log schemes, called Kummer étale morphisms, which generalize the tamely ramified morphisms of classical algebraic geometry. We discuss the associated topology and cohomology. The main results are comparison theorems with classical étale cohomology and log Betti cohomology, a theorem of invariance of Kummer étale cohomology under log blow-ups (for which we provide a complete proof) and a local acyclicity theorem for log smooth log schemes over the spectrum of a henselian discrete valuation ring, which implies tameness for the corresponding classical nearby cycles. In the last section we state results of K. Kato on log étale cohomology, where localization by Kummer étale morphisms is replaced by localization by all log étale morphisms.

These notes are a slightly expanded version of lectures given at the Centre Émile Borel of the Institut Henri Poincaré in June, 1997. Their purpose is to present a survey of the theory of log (= logarithmic) étale cohomology developed by Fujiwara, Kato, and Nakayama in the past few years. Though the results obtained in this field are not of the same magnitude as those pertaining to log crystalline cohomology and the p-adic comparison theorems, reported on at other places of these proceedings ([**Tsu**], [**Br-M**]), they shed a new light on classical questions of étale cohomology, such as the tameness of nearby cycles. The log techniques provide more natural proofs to known theorems as well as interesting generalizations and refinements. In order to give a flavor of these, let us fix some notations. Let $S = \operatorname{Spec} A$ be a henselian trait, with generic point $\eta = \operatorname{Spec} K$ and closed point $s = \operatorname{Spec} k$. Let p be the

2000 *Mathematics Subject Classification.* — 14A99, 14D05, 14D06, 14D10, 14E05, 14E20, 14E22, 14F20, 14F35, 14G20.
***Key words and phrases.* —** Logarithmic geometry, monoid, log structure, log scheme, Kummer, log étale, log smooth, divisor with normal crossings, semistable reduction, covering, fundamental group, Betti cohomology, étale cohomology, ℓ-adic cohomology, tame, log blow-up, toric variety, acyclicity, nearby cycles, vanishing cycles, monodromy, weights, regular, purity, base change.

© Astérisque 279, SMF 2002

characteristic exponent of s and let $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ where n is an integer invertible on S. Fix a geometric point $\overline{\eta} = \operatorname{Spec} \overline{K}$ above η and let I (resp. P) denote the inertia (resp. wild inertia) subgroup of $G = \operatorname{Gal}(\overline{K}/K)$. Let X be a scheme over S. By a theorem of Rapoport-Zink [**R-Z**], it is known that if X is regular, the generic fiber X_η is smooth and the special fiber X_s is a divisor with simple normal crossings and multiplicities m_i's prime to p, then P acts trivially on the sheaves of nearby cycles $R^q\Psi\Lambda$. As a consequence of the theory of logarithmic étale cohomology, Nakayama [**Na 2**] shows that this conclusion still holds in cases where some of the m_i's are divisible by p but X underlies a log smooth and vertical log scheme over S (1.5, 8.3). Another striking corollary is that under the same assumption the complex of nearby cycles $R\Psi\Lambda$, as an object of the derived category of Λ-modules on the geometric special fiber with continuous action of G, depends only on the special fiber X_s endowed with its natural log structure, and in particular, when X has semistable reduction, depends only on the first infinitesimal neighborhood of X_s in X. In this latter case, this implies the degeneration at E_2 of the weight spectral sequences of Raporport-Zink [**R-Z**] and Steenbrink ([**Ste 1**], [**Ste 2**]).

The paper is organized as follows. For the convenience of the reader we have collected in section 1 some basic terminology on log schemes, whose language we will use freely. The basic reference for this is [**Ka 1**] (see also [**I1**]). The definition and main properties of the Kummer étale topology, which replaces, on fs log schemes, the classical étale topology on schemes, are discussed in section 2. The theory of the corresponding log fundamental group is sketched in sections 3 and 4. In section 5 we begin the study of Kummer log étale cohomology. We compare it both to classical étale cohomology and, in the case of log schemes over $\mathbb{C}$, to the "log Betti" cohomology developed by Kato-Nakayama [**K-N**]. Section 6, the longest of this paper, is devoted to a fundamental result of Fujiwara-Kato [**F-K**], namely the invariance of Kummer étale cohomology under log blow-up. Because of the key role this result plays in the applications to nearby cycles — and also because [**F-K**] as it stands is still unpublished — we give the proof in detail, with a simplification due to Ekedahl, who suggested it to us during the lectures. Nakayama's results on nearby cycles mentioned above are discussed in section 8, after some premiminaries on (log) cohomological purity in section 7. One drawback of Kummer étale cohomology is that unlike classical étale cohomology it lacks good finiteness and base change theorems, as Nakayama pointed out in [**Na 1**]. In section 9 we present an attempt of Kato to remedy this by working with a finer topology, in which localization by any log étale map is permitted, and discuss some open problems in this direction.

1. Log schemes

1.1. All monoids are assumed to be commutative with units and maps of monoids to carry the unit to the unit. The group envelope of a monoid P is denoted P^{gp}. A

monoid P is called *integral* if the canonical map $P \to P^{\mathrm{gp}}$ is injective, and *saturated* if it is integral and for any $a \in P^{\mathrm{gp}}$, a is in P if and only if there exists $n \geqslant 1$ such that $a^n \in P$. If P is a monoid, we denote by P^* the subgroup of its invertible elements and we set $\overline{P} = P/P^*$; thus $\overline{P}^{\mathrm{gp}} = \mathrm{Coker}(P^* \to P^{\mathrm{gp}})$. We say P is *sharp* if $P^* = \{1\}$.

1.2. A *pre-log structure* on a scheme X is a pair (M, α) where M is a sheaf of monoids on the étale site of X and α is a homomorphism from M to the multiplicative monoid $\mathcal{O}_X$. A pre-log structure (M, α) is called a *log structure* if α induces an isomorphism from $\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*)$ to $\mathcal{O}_X^*$. The log structure defined by the inclusion $\mathcal{O}_X^* \subset \mathcal{O}_X$ is called the *trivial log structure*. A *log scheme* is a triple (X, M, α), usually simply denoted X, consisting of a scheme X and a log structure (M, α) on X. The sheaf of monoids of a log scheme X is generally denoted by M_X, and the sheaf $\mathcal{O}_X^*$ is considered as a subsheaf of M_X by means of α. To avoid confusion, it is sometimes convenient to denote the underlying scheme by $\mathring{X}$. For any pre-log structure (M, α) on a scheme X there is defined a log structure (M^a, α^a) and a map $M \to M^a$ (compatible with α and α^a) which is universal in the obvious sense; this log structure is called the *associated log structure*. A map of log schemes $f : (X, M, \alpha) \to (Y, N, \beta)$ is a map of schemes $f : X \to Y$ together with a map of sheaves of monoids $f^{-1}N \to M$ compatible in the natural way with α and β. If $Y = (Y, N, \beta)$ is a log scheme and $f : X \to \mathring{Y}$ is just a map of schemes, then the log structure on X associated to $(f^{-1}N, f^{-1}\beta)$ is called the *inverse image log structure* and denoted f^*N. A map of log schemes $f : X = (X, M, \alpha) \to Y = (Y, N, \beta)$ is called *strict* if the natural map from f^*N to M is an isomorphism.

1.3. If P is a monoid, the inclusion $P \subset \mathbb{Z}[P]$ defines a pre-log structure on $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[P]$, whose associated log structure is called the *canonical* log structure. A (global) *chart*, *modeled on* P, of a log scheme X is a strict map of log schemes $X \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[P]$ for some monoid P, where $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[P]$ is endowed with its canonical log structure. Giving such a chart is the same as giving a monoid P and a homomorphism from the constant sheaf of monoids P_X on X to M_X inducing an isomorphism on the associated log structures. A log scheme X is called *integral* if the stalk of M_X at each geometric point of X is integral, *fine* (resp. *fine and saturated*, or fs for short) if in addition, locally for the étale topology it admits a chart modeled on a finitely generated and integral (resp. finitely generated and saturated) monoid. Any fs log scheme admits (étale locally) a chart modeled on a torsionfree, fs (*i.e.* finitely generated and saturated) monoid (such monoids are the basic stones of the theory of toric varieties). A *log point* is an fs log scheme whose underlying scheme is the spectrum of a field k. It is called *trivial* if its log structure is trivial, *standard* if its log structure is associated to $(\mathbb{N} \to k, 1 \mapsto 0)$. If $f : X \to Y$ is a map of fine log schemes, a *chart* of f is a triple (a, b, u) where $a : X \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[P]$ and $b : Y \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[Q]$ are charts of X and Y and $u : Q \to P$ is a map of monoids such that the corresponding square of log

schemes commutes; a chart of f exists étale locally (and P and Q can be chosen to be fs if X and Y are fs). It turns out that fs log schemes are the most useful objects of log geometry. The category of fs log schemes admits finite inverse and direct limits; in particular one can perform base change in this category (the result being slightly different from that in the category of fine or arbitrary log schemes).

1.4. If X is an fs log scheme, there is a largest open Zariski subset of X (possibly empty) on which the log structure is trivial, *i.e.* $\alpha : M \to \mathcal{O}^*$ is an isomorphism. It is called the *open subset of triviality* of the log structure of X and is sometimes denoted X_{triv}. This is the first basic geometric invariant of X. For example, if X is the toric scheme $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[P]$ (with P a torsionfree, fs monoid), endowed with its canonical log structure, X_{triv} is the torus $T = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[P^{\mathrm{gp}}]$ canonically embedded in X. Finer invariants are obtained by considering $\overline{M}^{\mathrm{gp}} = M^{\mathrm{gp}}/\mathcal{O}^*$, which is a constructible sheaf of torsionfree abelian groups, and the stratification

$$X = X_0 \supset \cdots \supset X_i \supset \cdots$$

where X_i is the *closed* (Zariski) subset of X where $\operatorname{rk}\overline{M}^{\mathrm{gp}} \geqslant i$; in particular, $X_{\mathrm{triv}} = X_0 - X_1$: in the toric case above, this is just the stratification by the closures of orbits of the action of T on X.

1.5. $f : X \to Y$ be a map of fine log schemes. One says that f is *log smooth* (resp. *log étale*) if étale locally (on X and Y) f admits a chart $c = (a, b, u : Q \to P)$ such that the kernel and the torsion part of the cokernel (resp. the kernel and the cokernel) of u^{gp} are finite groups of order invertible on X and the map from X to $X \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[P]} \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[Q]$ deduced from c is a smooth (resp. étale) map on the underlying schemes. (For an intrinsic definition, in terms of local infinitesimal liftings such as in the classical case, see [**Ka 1**].) Log smooth (resp. log étale) maps are stable under composition and arbitrary base change (either in the category of fine or fs log schemes). If X and Y are log étale log schemes over a log scheme S, any S-morphism from X to Y is log étale. if $f : X \to Y$ is a map of schemes, viewed as a map of log schemes with trivial log structures, then f is log smooth (resp. log étale) iff f is classically smooth (resp. étale).

1.6. A map $h : Q \to P$ of fs monoids is said to be *Kummer* if h is injective and for all $a \in P$ there exists $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, such that $na \in h(Q)$ (the monoid laws written additively). A map $f : X \to Y$ of fs log schemes is said to be *Kummer* if for all geometric point $\overline{x}$ of X with image $\overline{y}$ in Y, the natural map $\overline{M}_{\overline{y}} \to \overline{M}_{\overline{x}}$ is Kummer. A map $f : X \to Y$ of fs log schemes is said to be *Kummer étale* if it is both log étale and Kummer. If f is log étale, then f is Kummer if and only if f is *exact*, which means that $f^*M_Y \to M_X$ is exact at each stalk (a map $h : Q \to P$ of integral monoids is called *exact* if $Q = (h^{\mathrm{gp}})^{-1}(P)$ in Q^{gp}) ([**Na 1**], 2.1.2). One can also show that f is Kummer étale if and only if f is étale locally deduced by strict base change and étale

localization from a map $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[h] : \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[P] \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[Q]$, where $h : Q \to P$ is a Kummer map such that $nP \subset h(Q)$ for some integer n invertible on X ([**Vi 1**], 1.2).

Log blow-ups provide other examples of log étale maps, see 6.1.

1.7. Let X be a locally noetherian regular scheme and let $D \subset X$ be a divisor with normal crossings. Let $j : U = X - D \hookrightarrow X$ be the corresponding open immersion. Then the inclusion $M_X = \mathcal{O}_X \cap j_*\mathcal{O}_U^* \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ is an fs log structure on X, which is said to be *defined by* $X - D$ (or, sometimes, by D); in the case the pair (X, D) is that of a trait and its closed point, this log structure is called the *canonical log structure*. Étale locally X has a chart modeled on $\mathbb{N}^r$ (if $\prod_{1\leqslant i\leqslant r} t_i^{a_i}$ is a local equation of D where $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ is part of a system of local parameters on X, $\mathbb{N}^r \to \mathcal{O}_X$, $(n_i) \mapsto \prod t_i^{n_i}$ is a local chart).

Let $S = \operatorname{Spec} A$ be a trait endowed with the canonical log structure and let X be an fs S-log scheme locally of finite type. Then X is log smooth over S if and only if étale locally X is strict (1.2) and smooth over $T = \operatorname{Spec} A[P]/(x - \pi)$, where π is a uniformizing parameter of A, P is an fs monoid, x is an element of P such that the order of the torsion part of $P^{\mathrm{gp}}/\langle x\rangle$ is invertible on X and the log structure of T is associated to the canonical map $P \to A[P]/(x - \pi)$. It follows from the theory of resolution of singularities for toric varieties (*cf.* [**Ka 4**] and [**Na 2**]) that after some log blow up (see 6.1) we may obtain a local model as above with $P = \mathbb{N}^r$ (which model is then regular, generically smooth, with reduced special fiber a divisor with normal crossings). The case of *semistable reduction* corresponds to $P = \mathbb{N}^r$ and $x = (1, \ldots, 1)$.

2. Kummer étale topology

2.1. Let X be an fs log scheme. The *Kummer étale site* of X, denoted

$$X_{\mathrm{ket}}$$

is defined as follows. The objects of X_{ket} are the $X - fs$ log schemes which are Kummer étale (1.6). If T, T' are objects of X_{ket}, a morphism from T to T' is an X-map $T \to T'$; any such map is again Kummer étale ([**Vi 1**], 1.5). The category X_{ket} admits finite inverse limits. The *Kummer étale topology* is the topology on X_{ket} generated by the covering families $(u_i : T_i \to T)_{i\in I}$ of maps of X_{ket} such that T is set theoretically the union of the images of the u_i; the Kummer étale site of X is the category X_{ket} equipped with the Kummer étale topology; the *Kummer étale topos* of X, denoted $\operatorname{Top}(X_{\mathrm{ket}})$ (or simply X_{ket} again when no confusion can arise) is the category of sheaves on X_{ket} (we shall not use the more standard notation $\widetilde{X}_{\mathrm{ket}}$ for we will later need the tilda to denote some other object); here and in the sequel we neglect questions of universes, which should be treated as in the classical case of étale topology (*cf.* [**SGA 4**] VII 1), see [**Na 1**].

The datum for each object T of X_{ket} of the set of covering families of T as above defines a *pretopology* on X_{ket} in the sense of ([**SGA 4**] II 1.3), and as a result (loc. cit.) the Kummer étale topology is simple to describe (the sieves generated by the covering families are cofinal in the set of covering sieves of T). In the verification of the axioms of a pretopology the only nontrivial point is to check the stability of covering families under base change, in other words, since "Kummer étale" is stable under fs change, to check the *universal surjectivity* of covering families. This follows from Nakayama's "fourth point lemma" :

***Lemma 2.2* ([Na 1], 2.2.2).** — *Let*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{h} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \tag{2.2.1}$$

be a cartesian square of fs log schemes, and let $y' \in Y'$, $s \in X$ such that $g(y') = f(x)$. Assume that f or g is exact (1.6)*. Then there exists $x' \in X'$ such that $h(x') = x$ and $f'(x') = y'$.*

See (loc. cit.) for the proof.

2.3. Let $f : X \to Y$ be a morphism of fs log schemes. Base-changing by f in the category of fs log schemes defines an inverse image functor

$$f^{-1}Y_{\mathrm{ket}} \longrightarrow X_{\mathrm{ket}},$$

which commutes with finite inverse limits, and by 2.2 is continuous (*i.e.* transforms covering families into covering families). Therefore by ([**SGA 4**] IV 4.9.2) f^{-1} defines a morphism of topoi

$$f_{\mathrm{ket}} : \mathrm{Top}(X_{\mathrm{ket}}) \longrightarrow \mathrm{Top}(X_{\mathrm{ket}})$$

(also denoted simply f) such that $f_*(E)(T) = E(f^{-1}T)$ for any sheaf E on X_{ket} and any object T of Y_{ket}. If $g : Y \to Z$ is a second morphism of fs log schemes, we have as usual canonical isomorphisms $(g \circ f)^{-1} \cong f^{-1} \circ g^{-1}$, $(g \circ f)_{\mathrm{ket}} \cong g_{\mathrm{ket}} \circ f_{\mathrm{ket}}$.

2.4. Let X be a scheme. Let us endow X with the trivial log structure. If $u : T \to X$ is an object of X_{ket}, then u is strict, the log structure of T is trivial and u is étale in the classical sense. It follows that the Kummer étale site X_{ket} can be identified with the classical étale site X_{et} of X, an identification which we will do in the sequel.

Let now X be an fs log scheme, and let $\mathring{X}$ denote the underlying scheme equipped with the trivial log structure. We have a natural map of log schemes

$$\varepsilon : X \longrightarrow \mathring{X} \ ,$$

which, by 2.3, defines a map of sites (resp. topoi)

$$\varepsilon : X_{\mathrm{ket}} \longrightarrow \overset{\circ}{X}_{\mathrm{et}} .$$

We shall sometimes call $\overset{\circ}{X}_{\mathrm{et}}$ the *classical étale site* (resp. *topos*) of X and denote it by X_{cl}. If F is a sheaf on the classical étale site of X, $\varepsilon^{-1}F$ induces on the classical étale site of any Kummer étale $u : Y \to X$ the classical inverse image $u^{-1}F$. As we shall see later 5.2, ε cohomologically behaves as a constructible fibration in tori.

2.5. Let X be an fs log scheme. Denote by fs/X the category of fs log schemes over X. We define the *Kummer étale topology* on fs/X as the topology generated by the covering families which are surjective families of Kummer étale maps $T_i \to T$ (as before such families define a pretopology on fs/X). The corresponding site (resp. topos), denoted

$$(fs/X)_{\mathrm{ket}}$$

is called the *big Kummer étale site* (resp. *topos*) of X, in contrast with X_{ket} sometimes called the *small* Kummer étale site (resp. topos). Similar to 2.4 we have a natural "forgetful" map of topoi

$$\varepsilon : (fs/X)_{\mathrm{ket}} \longrightarrow (fs/X)_{\mathrm{et}} .$$

The relations between the big and small sites (resp. topoi) are as good as in the case of the classical étale topology ([**SGA 4**] VII 2, 4). This is due to the following theorem of Kato:

***Theorem 2.6* ([Ka 3], 3).** — *Let X be an fs log scheme. The Kummer étale topology on fs/X is coarser than the canonical topology.*

This means that representable functors on fs/X are sheaves for the Kummer étale topology, namely, if Y is an fs log scheme over X, the functor $T \mapsto \mathrm{Hom}_X(T, Y)$ on fs/X is a sheaf for the Kummer étale topology. Kato in fact shows that this functor is a sheaf for a finer topology on fs/X, the *log flat topology*, which we will not consider in these notes.

2.7. . Let X be an fs log scheme. By 2.6 any fs log scheme Y over X defines a sheaf $\mathrm{Hom}_X(-, Y)$ on $(fs/X)_{\mathrm{ket}}$, hence on X_{et} by restriction. Here are some important examples.

(a) *The sheaf $\mathcal{O}$.* Let Y be the affine line $\mathbb{A}^1_X$ endowed with the inverse image log structure by the canonical projection onto X. The sheaf on $(fs/X)_{\mathrm{ket}}$ (resp. X_{ket}) corresponding to Y is just the structural sheaf $\mathcal{O}$. Indeed, for any fs log scheme T over X, we have

$$\mathrm{Hom}_X(T, Y) = \mathrm{Hom}_{\overset{\circ}{X}}(\overset{\circ}{T}, \overset{\circ}{Y}) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T).$$

More generally, let $\mathcal{E}$ be a quasi-coherent sheaf on $\overset{\circ}{X}$, and let $Y = \mathbb{V}(\mathcal{E})$ ($:= \operatorname{Spec}\operatorname{Sym}(\mathcal{E})$), endowed with the inverse image log structure of X. Then the sheaf corresponding to Y is $(u : T \to X) \mapsto \Gamma(T, u^*\mathcal{E})$.

(b) *The sheaf M.* Let Y be the affine line $\mathbb{A}^1_X$ endowed with the log structure obtained by fs pull-back by $X \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ from that of $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\mathbb{N}]$ endowed with the canonical log structure; in other words, $\mathbb{A}^1_X$ is the product $X \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\mathbb{N}]$ in the category of fs log schemes over $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ with trivial log structure. Then the sheaf corresponding to Y is the structural sheaf of monoids M. Indeed, for any fs log scheme T over X, we have

$$\operatorname{Hom}_X(T, Y) = \operatorname{Hom}(T, \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\mathbb{N}]) = \Gamma(T, M_T).$$

(Actually (a) and (b) are the key cases to which Kato reduces the proof of 2.6.)

(c) *The sheaf M^{gp}.* Consider the functor $T \mapsto \Gamma(T, M_T^{\mathrm{gp}})$ on fs/X. Though one can show that this functor is *not* representable (as soon as X is nonempty), it is easy to deduce from (b) that it is still a sheaf for the Kummer étale topology (*cf.* [**Ka 3**], 3.6, [**Ka 2**], 2.1.3).

(d) *The Kummer exact sequence.* Let n be an integer inversible on X. Let $\mathbb{Z}/n(1) = \mu_n$ denote the sheaf on $(fs/X)_{\mathrm{ket}}$ induced by the sheaf of n-th roots of unity on the classical big étale site of X, *i.e.* $T \mapsto \{z \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T); z^n = 1\}$. Then the following sequence of sheaves on $(fs/X)_{\mathrm{ket}}$ (resp. X_{ket}) is exact (*Kummer exact sequence*)

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/n(1) \longrightarrow M^{\mathrm{gp}} \xrightarrow{n} M^{\mathrm{gp}} \longrightarrow 0$$

([**K-N**], 2.3): one is reduced to showing that a section $a \in \Gamma(X, M)$ is Kummer étale locally an n-th power, but such a section corresponds to a map $a : X \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ (*cf.* (b)) and the map $X' \to X$ deduced from the n-th power endomorphism of $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ by base change by a is a surjective Kummer étale map which makes a an n-th power.

Let $f : X \to Y$ be a morphism of schemes. If f is a *universal homeomorphism*, which means that f is a homeomorphism on the underlying spaces and remains so after any base change $Y' \to Y$, or equivalently ([**EGA IV**] 18.12.11) is radicial, integral and surjective, then the inverse image functor $f^{-1} : Y_{\mathrm{et}} \to X_{\mathrm{et}}$ is an equivalence ([**SGA 4**] VIII 1.1). This result (*topological invariance of the étale site*) plays a key role in the foundations of étale cohomology. The following analogue and generalization in the Kummer étale context has been established by I. Vidal :

***Theorem 2.8* ([Vi 1], 4.2, [Vi 4]).** — *Let $f : X \to Y$ be a morphism of fs log schemes. Assume that f is Kummer* (1.6)*, is a homeomorphism on the underlying spaces and remains so after any fs base change $Y' \to Y$. Then the inverse image functor $f^{-1} : Y_{\mathrm{ket}} \to X_{\mathrm{ket}}$ is an equivalence.*

2.9. We shall say that a morphism $f : X \to Y$ of fs log schemes is a *universal Kummer homeomorphism* if it satisfies the hypotheses of 2.8. Here are some examples.

(a) Assume that f is strict and induces a universal homeomorphism on the underlying schemes. Then since fs base change by strict maps commutes with taking the underlying schemes, f is a universal Kummer homeomorphism. An important particular case is that of a *thickening* [**Ka 1**]. In this case, the conclusion of 2.8 is a consequence of the existence and uniqueness of infinitesimal liftings of log étale maps (loc. cit.).

(b) Assume that Y is an $\mathbb{F}_p$-log scheme, and that f is purely inseparable in the sense of Kato ([**Ka 1**], 4.9) and induces a universal homeomorphism on the underlying schemes. Then f is a universal Kummer homeomorphism ([**Vi 1**], 2.10). Basic examples are *absolute Frobenius* and *exact relative Frobenius* maps ([**Ka 1**], 4.12).

3. Finite Kummer étale covers

Definition 3.1. — Let X be an fs log scheme. A (finite) Kummer étale cover of X is an fs log scheme Y over X such that the sheaf it defines on X_{ket} (2.6) is finite locally constant, *i.e.* there exists a Kummer étale covering family $(X_i \to X)_{i\in I}$ of X such that for each $i \in I$ the log scheme Y_i over X_i deduced by base change is a finite sum of copies of X_i. If G is a finite étale group scheme over X (in the classical sense), a *Kummer étale Galois cover of X of group G* is a Kummer étale cover Y of X endowed with an action of G by X-automorphisms such that Y is a G-torsor on X.

When X has the trivial log structure, a Kummer étale cover of X is an étale cover of X in the classical sense, with the trivial log structure. We shall sometimes say "cover" instead of "Kummer étale cover", when no confusion can arise. If a finite étale group scheme G acts on a cover Y of X, for Y to be Galois of group G means that Y is, locally for the Kummer étale topology on X, isomorphic to G (with the log structure inverse image of that of X), G acting on itself by left translations; this is equivalent to saying that the map $G \times_X Y \to Y \times_X Y$, $(g, y) \mapsto (y, gy)$ is an isomorphism (where fiber products are taken in the fs sense). In this case, X is a sheaf-theoretic quotient of Y, *i.e.* the sequence $Y \times_X Y \rightrightarrows Y \to X$ is exact as a sequence of sheaves on Y_{ket}.

Here is a basic example ([**Ka 3**], 2.5).

Proposition 3.2. — *Let X be an fs log scheme, endowed with a global chart $X \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[P]$, where P is an fs monoid. Let $u : P \to Q$ be a Kummer map of fs monoids* (1.6)*, such that $Q^{\mathrm{gp}}/u(P^{\mathrm{gp}})$ is annihilated by an integer n invertible on X. Let $Y = X \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[P]} \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[Q]$. Then the natural projection $f : Y \to X$ is a Kummer étale Galois cover of group the (classical) étale diagonalizable group $G = D(Q^{\mathrm{gp}}/u(P^{\mathrm{gp}}))_X = \operatorname{Spec}\mathcal{O}_X[Q^{\mathrm{gp}}/u(P^{\mathrm{gp}})]$. Moreover, f is open, finite and surjective on the underlying schemes, and remains so after any fs base change $X' \to X$.*

The key point is the following elementary lemma (*cf.* [**Vi 1**], 1.8]):

Lemma 3.3. — *Let $u : P \to Q$ be a map of fs monoids, such that $\Gamma := Q^{\mathrm{gp}}/u(P^{\mathrm{gp}})$ is annihilated by an integer $n \geqslant 1$. Then the natural map*

$$(Q \oplus_P Q)^{\mathrm{fs}} \longrightarrow \Gamma \oplus Q,\ (a,b) \longmapsto (\overline{b}, a+b) \tag{3.3.1}$$

is an isomorphism, where the left hand side denotes the amalgamated sum in the category of fs monoids and $(^-)$ the class in Γ of an element of Q^{gp}.

For the convenience of the reader we insert a proof of 3.3. We have natural maps

$$Q \oplus_P Q \longrightarrow (Q \oplus_P Q)^{\mathrm{int}} \longrightarrow (Q \oplus_P Q)^{\mathrm{fs}}$$

where $M := (Q \oplus_P Q)^{\mathrm{int}}$ is the amalgamated sum in the category of fine monoids and $(Q \oplus_P Q)^{\mathrm{fs}}$ is the saturation M^{sat} of M. We know that M is the image of $Q \oplus Q$ in $(Q \oplus_P Q)^{\mathrm{gp}} = Q^{\mathrm{gp}} \oplus_{P^{\mathrm{gp}}} Q^{\mathrm{gp}}$ and that $M^{\mathrm{gp}} = Q^{\mathrm{gp}} \oplus_{P^{\mathrm{gp}}} Q^{\mathrm{gp}}$. Now the homomorphism

$$Q^{\mathrm{gp}} \oplus Q^{\mathrm{gp}} \longrightarrow \Gamma \oplus Q^{\mathrm{gp}},\ (a,b) \longmapsto (\overline{b}, a+b)$$

induces an isomorphism

$$Q^{\mathrm{gp}} \oplus_{P^{\mathrm{gp}}} Q^{\mathrm{gp}} \xrightarrow{\sim} \Gamma \oplus Q^{\mathrm{gp}}, \tag{$*$}$$

as is shown by the commutative diagram with exact rows

$$\begin{array}{ccccccc}
P^{\mathrm{gp}} & \xrightarrow{(-u,u)} & Q^{\mathrm{gp}} \oplus Q^{\mathrm{gp}} & \longrightarrow & Q^{\mathrm{gp}} \oplus_{P^{\mathrm{gp}}} Q^{\mathrm{gp}} & \longrightarrow & 0 \\
\mathrm{Id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (a,b)\mapsto(b,a+b)} & & \downarrow & & \\
P^{\mathrm{gp}} & \xrightarrow{(u,0)} & Q^{\mathrm{gp}} \oplus Q^{\mathrm{gp}} & \longrightarrow & \Gamma \oplus Q^{\mathrm{gp}} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

We shall identify the two sides by $(*)$. Thus M is the submonoid of $\Gamma \oplus Q^{\mathrm{gp}}$ consisting of pairs (x,y) of the form $(\overline{b}, a+b)$ for $a,\ b \in Q$. Hence we have $M^{\mathrm{sat}} \subset \Gamma \oplus Q$. Conversely, let $(x,y) \in \Gamma \oplus Q$. Let $n \geqslant 1$ such that $nQ^{\mathrm{gp}} \subset u(P^{\mathrm{gp}})$. Then $n(x,y) = (0,ny) \in M$, so $(x,y) \in M^{\mathrm{sat}}$ and $M^{\mathrm{sat}} = \Gamma \oplus Q$.

Remark 3.4

(a) Following Kato ([**Ka 2**], 3.4.1), let us call *small* a morphism $u : P \to Q$ of integral monoids such that $\mathrm{Coker}\, u^{\mathrm{gp}}$ is torsion. When Q is fine (a fortiori, fs), this is equivalent to saying that $\mathrm{Coker}\, u^{\mathrm{gp}}$ is annihilated by a positive integer. Here are examples of small morphisms : (i) a *Kummer morphism* of fs monoids; (ii) a "*partial blow-up*" (*cf.* 6.1) : let P be an fs monoid, $I \subset P$ a nonempty ideal, $a \in I$, Q the saturation of the submonoid of P^{gp} generated by P and the elements $b-a$ for $b \in I$; then the inclusion $P \hookrightarrow Q$ is small: $P^{\mathrm{gp}} \to Q^{\mathrm{gp}}$ is an isomorphism.

(b) Lemma 3.3 shows the interest of working in the category of fs monoids, for the analogous statement with the push-out taken in the category of fine monoids would not hold. For example, for $P = Q = \mathbb{N}$, u the multiplication by $n > 1$, the amalgamated sum $Q \oplus_P Q$ is an integral monoid strictly contained in $\mathbb{N} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(c) The map

$$Q \oplus Q \longrightarrow Q \oplus Q\ ,\ (a,b) \longmapsto (b, a+b)$$

corresponds to the map

$$D(Q) \times D(Q) \longrightarrow D(Q) \times D(Q)\ ,\ (g,x) \longmapsto (x,gx)$$

on the associated diagonalizable monoid schemes. The map (3.3.1) deduced by passing to the quotients corresponds to the induced map

$$D(\Gamma) \times D(Q) \longrightarrow D(Q) \times_{D(P)} D(Q)\ ,\ (g,x) \longmapsto (x,gx),$$

which is an isomorphism (the fibered product on the right hand side being taken in the category of fs log schemes).

Let us prove 3.2. By construction, $f : Y \to X$ is Kummer, and since $\operatorname{Coker} u^{\mathrm{gp}}$ is killed by n invertible on X, f is log étale. By 3.4 (c), the action of $D(\Gamma)$ on $D(Q)$ induces, by base change by $X \to D(P)$, an action of G on Y such that $G \times_X Y \to Y \times_X Y$, $(g,y) \mapsto (x,gy)$ is an isomorphism. So Y is a Kummer étale Galois cover of X of group G. As for the last assertions, it is enough to prove that f is finite, open and surjective. Since base change by a strict map commutes with taking the underlying schemes, we may replace X by $D(P)$, which we shall denote by X again. We follow the argument of Kato ([**Ka 3**], 2.5). Since $\operatorname{Coker} u^{\mathrm{gp}}$ is killed by n, $Y := D(Q)$ is finite over X, and since u is injective, the projection $f : Y \to X$ is surjective. Thus X has the quotient topology of Y. Let U be an open subset of Y. To show that $f(U)$ is open, we have to show that $f^{-1}(f(U))$ is open. But by Nakayama's fourth point lemma (2.2), $f^{-1}(f(U)) = pr_2(pr_1^{-1}(U))$, where $pr_1,\ pr_2 : Y \times_X Y \to Y$ are the two canonical projections from the fs fibered product. Composition with the isomorphism $G \times_X Y \to Y \times_X Y$, $(g,y) \mapsto (y,gy)$ (where $G := D(\operatorname{Coker} u^{\mathrm{gp}})_X$ transforms pr_2 into the action of G on Y. Since $G \times_X Y = D(\Gamma) \times Y$ (the product on the right hand side being taken over $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$), $f^{-1}f(U)$ is therefore the image of U by the action of $D(\Gamma)$ on Y, $\rho : D(\Gamma) \times Y \to Y$, $(g,y) \mapsto gy$. But the map

$$D(\Gamma) \times Y \to D(\Gamma) \times Y\ ,\ (g,y) \longmapsto (g,gy)$$

is an isomorphism, which transforms $pr_2 : D(\Gamma) \times Y \to Y$ into ρ. Now, since $D(\Gamma)$ is fppf over $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, pr_2 is fppf, too, and in particular, open, so $f^{-1}f(U)$ is open, which concludes the proof.

Definition 3.5. — Let X be an fs log scheme. By a standard Kummer Galois cover of X, we shall mean a Kummer cover $Y \to X$ of the type defined in 3.3.

The existence, locally for the classical étale topology, of charts of Kummer étale maps $X \to Y$ subordinate to Kummer maps $u : P \to Q$ with $\operatorname{Coker} u^{\mathrm{gp}}$ annihilated by an integer invertible on X, combined with 3.3, shows:

Corollary 3.6. — *Let X be an fs log scheme. The Kummer étale topology on X is generated by the surjective classical étale families and the standard Kummer Galois covers.*

Corollary 3.7. — *Let $f : X' \to X$ be a Kummer étale map of fs log schemes. Then the induced map $\overset{\circ}{f}$ on the underlying schemes is open.*

The property of being open being local for the classical étale topology, we may assume that f is a standard Kummer Galois cover. Then the conclusion follows from 3.2.

3.8. Let S be a locally noetherian fs log scheme. Denote by

$$fs'/S$$

the full subcategory of fs/S consisting of fs log schemes over S which are locally of finite type over S as schemes. Consider a property $\mathcal{P}$ of morphisms $f : X \to Y$ in fs'/S. We shall say that $\mathcal{P}$ is *local for the Kummer étale topology* if the following conditions are satisfied:

(i) if $f : X \to Y$ satisfies $\mathcal{P}$, then so does the morphism $f' : X' \to Y'$ deduced from f by any Kummer étale base change $S' \to S$;

(ii) if $(S_i \to S)_{i\in I}$ is a covering family for X_{ket} (2.1), and if $f_i : X_i \to Y_i$ deduced from f by the base change $S_i \to S$ satisfies $\mathcal{P}$ for every i, then so does f.

When (i) is fulfilled, to check (ii) it is enough, in view of 3.6, to check the following: (a) $\mathcal{P}$ is local for the classical étale topology (b) if f_V is deduced from f by a classical étale base change $V \to S$, and if after base change by a standard Kummer Galois cover $V' \to V$, $f_{V'} = f \times_V V'$ satisfies $\mathcal{P}$, then f_V satisfies $\mathcal{P}$.

Here is an example:

Proposition 3.9. — *Let S be a locally noetherian fs log scheme. The property for a map f in fs'/S of inducing a separated (resp. proper, resp. finite) map on the underlying schemes is local for the Kummer étale topology.*

Since the property of being separated (resp. proper, resp. finite) on the underlying schemes is local for the classical étale topology ([**SGA 1**] IX 2.4), it suffices to show the following. Let $f : X \to Y$ be a map of fs log schemes, with Y locally noetherian and f locally of finite type, and let $g : Y' \to Y$ be a *standard* Kummer étale Galois cover of Y. Then f is closed (resp. quasi-finite) on the underlying schemes if and only if f' deduced by fs base change by g is so. But this follows from Nakayama's fourth point lemma 2.2 and the fact that g makes Y' a quotient topological space of Y.

In particular:

Corollary 3.10. — *Let Y be a locally noetherian fs log scheme, and let $f : X \to Y$ be a Kummer étale cover* 3.1. *Then f is finite and surjective.*

Remark 3.11. — One can show ([**Ka 3**] 10.2, [**Vi 2**] 1.2, [**Vi 2**]) that conversely, if $f : X \to Y$ is a Kummer étale map of locally noetherian fs log schemes which induces a finite map on the underlying schemes, then f is a Kummer étale cover (in the sense of 3.1).

Here are some other examples of properties which are local for the Kummer étale topology:

Proposition 3.12. — *Let S be a locally noetherian fs log scheme. The property for a morphism in fs'/S of being log smooth (resp. log étale, resp. Kummer étale) is local for the Kummer étale topology* (2.8).

See [**Vi 2**] for a proof.

Moreover, the following descent result, stated in ([**Ka 3**] 10.2), holds (see [**Vi 2**] for a proof):

Proposition 3.13. — *Let S be a locally noetherian fs log scheme. Let* $\mathrm{Kcov}(S)$ *(resp.* $\mathrm{Lcf}(S_{\mathrm{ket}})$*) denote the category of Kummer étale covers of S (resp. the category of sheaves on S_{ket} which are locally constant with finite fibers). Then the natural functor* $\mathrm{Kcov}(S) \to \mathrm{Lcf}(S)$ *is an equivalence of categories.*

4. Log geometric points and fundamental groups

Definition 4.1

(a) A *log geometric point* is a log scheme s which is the spectrum of a separably closed field k such that M_s is saturated and for every integer $n \geqslant 1$ prime to the characteristic of k, the multiplication by n on $\overline{M}_s$ $(= M_s/k^*)$ is bijective.

(b) Let X be an fs log scheme. A *log geometric point* of X is a map of log schemes $x : s \to X$, where s is a log geometric point. If $x : s \to X$ is a log geometric point, a *Kummer étale neighborhood* of x is a map of X-log schemes $s \to U$ where $U \to X$ is Kummer étale.

A log geometric point $x : s \to X$ defines a (classical) geometric point $\mathring{x} : \mathring{s} \to \mathring{X}$ of the underlying scheme, and a point $\mathring{x}(\mathring{s})$ of $\mathring{X}$. We say that x is *over* or *localized at* $\mathring{x}(\mathring{s})$. As in the classical case, we will often make the abuse of notation consisting in denoting by the same letter the log geometric point x and its source. Also, when y is a point of X, we will often denote by $\widetilde{y}$ a log geometric point over y and $\overline{y}$ the corresponding (classical) geometric point.

4.2. Let X be an fs log scheme, given with a global chart

$$X \longrightarrow \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[P]$$

where P is an fs monoid. Let $\mathcal{N} = \mathcal{N}_X$ be the set of integers $\geqslant 1$ which are invertible on X, ordered by divisibility. For $n \in \mathcal{N}$ denote by P_n a copy of P, and for $m \leqslant n$ let u_{mn} be the multiplication by n/m. Write P for P_1 and u_n for u_{1n} = multiplication by n: $P \to P_n$. Let

$$X_n := X \times_{\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[P]} \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[P_n]$$

(with $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[P_n] \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[P]$ given by u_n). The (P_n, u_{mn}) form an inductive system indexed by $\mathcal{N}$ and correspondingly the $(X_n, v_{mn} = X \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[P]} \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[u_{mn}])$ a projective system indexed by $\mathcal{N}$. Each transition map

$$v_{mn} : X_n \longrightarrow X_m$$

is a standard Kummer cover of group $D(P^{\mathrm{gp}} \otimes \mathbb{Z}/d\mathbb{Z})_X = \operatorname{Hom}(P^{\mathrm{gp}}, (\mu_d)_X)$ (3.5) where $d = n/m$. In particular, X_n is a standard Kummer cover of X of group $\operatorname{Hom}(P^{\mathrm{gp}}, (\mu_n)_X)$.

These projective systems can be used to construct log geometric points. Let $s = \operatorname{Spec} k$ be an fs log point, where k is separably closed of characteristic p, and let $s \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[P]$ be a chart modeled on the sharp fs monoid $P := \overline{M}_s$, associated to a chosen splitting $M_s = k^* \oplus P$, so that the log structure of s is associated to $P \to k$, $a \mapsto 0$ if $a \neq 0$. Let $\widetilde{P}$ be the limit of the inductive system P_n as above, indexed by $\mathcal{N} = \mathcal{N}_s$, and let $\widetilde{s} : (s \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[P]} \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\widetilde{P}])_{\mathrm{red}}$, with its natural log structure. Then $M_{\widetilde{s}} = k^* \oplus \widetilde{P}$ is saturated, the log structure of $\widetilde{s}$ is associated to $\widetilde{P} \to k$, $a \mapsto 0$ if $a \neq 0$, and multiplication by n in $\mathcal{N}$ on $\widetilde{P} = \overline{M}_{\widetilde{s}}$ is invertible, so that the natural map $\widetilde{s} \to s$ is a log geometric point over s (which is the identity on the underlying schemes).

Definition 4.3. — Let $\widetilde{x}$ be a log geometric point of the fs log scheme X, and let $\mathcal{F}$ be a sheaf on X_{ket}. The set

$$\mathcal{F}_{\widetilde{x}} := \operatorname{ind.lim} \mathcal{F}(U),$$

where U runs through the category of Kummer étale neighborhoods (4.1) of $\widetilde{x}$ (where maps are pointed maps), is called the *stalk* of $\mathcal{F}$ at $\widetilde{x}$.

Proposition 4.4

(a) *Let $\widetilde{x}$ be a log geometric point of the fs log scheme X. The functor $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\widetilde{x}}$ is a fibre functor (or point) (*[**SGA 4**] IV 6.1, 6.2*) of the topos X_{ket}.*

(b) *Every fibre function on X_{ket} is isomorphic to one of the form described in* (a).

(c) *The fibre functors of the form described in* (a) *make a conservative system.*

Let $\mathcal{V}(\widetilde{x})$ be the category of Kummer étale neighborhoods of $\widetilde{x}$. Using 2.2 one checks that $\mathcal{V}(\widetilde{x})^o$ is filtering, whence (a). We have seen in 4.2 that for any classical geometric point $\overline{x}$ of X there is a log geometric point $\widetilde{x}$ over $\overline{x}$. This implies (c). By the known description of the points of the classical étale topos ([**SGA 4**] VIII 7.9), to check (b) we are reduced to the case where the underlying scheme of X is the spectrum of a separably closed field. The proof is then similar to that of (loc. cit.).

Remark 4.4.1. — If $\widetilde{s} \to s$ is the log geometric point constructed in 4.2, then the $s_m \to s$ for $m \in \mathcal{N}$ form a cofinal system of Kummer étale neighborhoods of $\widetilde{s}$. Therefore for a sheaf $\mathcal{F}$ on s_{ket} we have

$$\mathcal{F}_{\widetilde{s}} = \operatorname{ind.lim} \Gamma((s_m)_{\mathrm{ket}}, \mathcal{F}).$$

4.5. As in the classical case, one can consider log strictly local log schemes, log strict localizations, specializations of fibre functors associated to log geometric points, and eventually get a stronger statement than 4.4 (b), in the form of an equivalence similar to that of ([**SGA 4**] VIII 7.9). Here is a brief sketch. Details are left to the reader.

A log scheme S is called *log strictly local* if S is saturated, the underlying scheme $\mathring{S}$ is strictly local (in the classical sense), and for every integer $n \geqslant 1$ invertible on S, multiplication by n on $\overline{M}_s$ (where s is the closed point) is bijective. If $\widetilde{s}$ is a log geometric point of the fs log scheme X, the *log strict localization* of X at $\widetilde{x}$ is defined as the inverse limit, in the category of saturated log schemes, of the Kummer étale neighborhoods of $\widetilde{x}$. It is usually denoted by $X(\widetilde{x})$ or $X_{(\widetilde{x})}$. It is a log strictly local log scheme over X. Let x, y be points of $\mathring{X}$ such that x is a specialization of y, *i.e.* $x \in \{y\}^-$, and let $\widetilde{x}$ (resp. $\widetilde{y}$) be a log geometric point over x (resp. y). Then a *specialization map* $s : \widetilde{y} \to \widetilde{x}$ is defined as an X-map $X(\widetilde{y}) \to X(\widetilde{x})$, or equivalently an X-map $\widetilde{y} \to X(\widetilde{x})$. Given $\widetilde{x}$ and y there exists at least one specialization map $s : \widetilde{y} \to \widetilde{x}$ with $\widetilde{y}$ a log geometric point over y. To such a specialization map s is associated a map of the corresponding fibre functors

$$s^* : (-)_{\widetilde{x}} \longrightarrow (-)_{\widetilde{y}} \ ,$$

given by "inverse image by s": $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_{\widetilde{y}}$ for U a log étale neighborhood of $\widetilde{x}$. We obtain in this way a category $\mathrm{Pt}(X)$ of log geometric points of X and a functor from $\mathrm{Pt}(X)$ to the category $\mathrm{Pt}(X_{\mathrm{ket}})$ of points of the topos X_{ket}, which turns out to be an equivalence, as in ([**SGA 4**] VIII 7.9).

4.6. Let S be a locally noetherian, connected, fs log scheme and let $\widetilde{s}$ be a log geometric point of X. Using 3.13 it is easy to see ([**Vi 2**]) that the pair formed by $\mathrm{Kcov}(S)$ (3.13) and the fiber functor

$$F : \mathrm{Kcov}(S) \longrightarrow fsets, \quad X \longmapsto F(X) := X_{\widetilde{s}}$$

(where $fsets$ denotes the category of finite sets) satisfies the axioms (G1) to (G6) of ([**SGA 1**] V 4). Therefore, by (loc. cit.) the functor F is pro-representable by a pro-object $\mathcal{S}$ of $\mathrm{Kcov}(S)$ and if

$$\pi_1^{\log}(S, \widetilde{s})$$

denotes the profinite group $Aut(F)$ (opposite to $\mathrm{Aut}(\mathcal{S})$), then F induces an equivalence

$$\mathrm{Kcov}(S) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\log}(S, \widetilde{s}) - fsets \ ,$$

where the right hand side denotes the category of finite sets on which $\pi_1^{\log}(S, \widetilde{s})$ acts continuously. The group $\pi_1^{\log}(S, \widetilde{s})$ is called the *log fundamental group* of S at $\widetilde{s}$, and $\mathcal{S}$ a *log universal cover* of S. As in the classical case (loc. cit.), for X in $\mathrm{Kcov}(S)$, *i.e.* a Kummer étale cover of S, its connected components are again Kummer étale covers of S; X is connected if and only if $\pi_1^{\log}(S, \widetilde{s})$ acts transitively on the stalk $X_{\widetilde{s}}$. If G is a finite group, Kummer Galois covers of S of group G are pushed-out from $\mathcal{S}$ by

(continuous) homomorphisms $\pi_1^{\log}(S,\widetilde{s}) \to G$; surjective homomorphisms correspond to connected covers. The log fundamental group is functorial with respect to pointed maps (and as usual, the definition – and the functoriality – can be extended to non necessarily connected, pointed log schemes). If $\widetilde{s} \to \widetilde{t}$ is a specialization map between log geometric points of S (4.5), the corresponding map $\pi_1^{\log}(S,\widetilde{s}) \to \pi_1^{\log}(S,\widetilde{t})$ is an isomorphism. If $\overline{s}$ is the (classical) geometric point defined by $\overline{s}$, the map $\varepsilon : S \to \mathring{S}$ induces a *surjective* homomorphism

$$\pi_1^{\log}(S,\widetilde{s}) \longrightarrow \pi_1(S,\overline{s}),$$

called the *forgetful homomorphism*.

Examples 4.7

(a) Let $s = \operatorname{Spec} k$ be an fs log point (1.3), and let $\widetilde{s} = \operatorname{Spec} \overline{k}$ be a log geometric point over s. Then the forgetful homomorphism defines an exact sequence

$$1 \longrightarrow I^{\log}(s,\widetilde{s}) \longrightarrow \pi_1^{\log}(s,\widetilde{s}) \longrightarrow \pi_1(s,\widetilde{s}) \longrightarrow 1\ , \tag{4.7.1}$$

where $I = I^{\log}(s,\widetilde{s})$ is called the *log inertia group* of s. Moreover, there is a natural isomorphism

$$I^{\log}(s,\widetilde{s}) \cong \operatorname{Hom}(\overline{M}_{\overline{s}}^{\mathrm{gp}}, \widehat{\mathbb{Z}}'(1)(\overline{k})) \tag{$*$}$$

and hence a noncanonical isomorphism

$$I^{\log}(s,\widetilde{s}) \cong \widehat{\mathbb{Z}}'(1)(\widetilde{k})^r,$$

where $r = \operatorname{rk} \overline{M}_{\overline{s}}^{\mathrm{gp}}$ and $\widehat{\mathbb{Z}}'(1)$ denotes the product of $\mathbb{Z}_\ell(1)$ for ℓ different from the characteristic exponent p of k; the isomorphism $(*)$ is given by the "tame character" pairing

$$I^{\log}(s,\widetilde{s}) \times M_{\overline{s}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}'(1)(\overline{k})$$

associating to $\sigma \in I^{\log}(s,\widetilde{s})$ and $a \in M_{\overline{s}}$ the projective system $(\sigma(a^{1/n})/a^{1/n})_n \in \widehat{\mathbb{Z}}'(1)(\overline{k})$ where $(a^{1/n})_n$ is a compatible system of n-th roots of a in $M_{\widetilde{s}}$ (written multiplicatively), n running through the integers $\geqslant 1$ and prime to p. This follows from 4.2 and 4.4 (b).

The fiber functor $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\widetilde{x}}$ defines an equivalence of categories

$$\operatorname{Top}(s_{\mathrm{ket}}) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\log}(s,\widetilde{s}) - sets$$

where the right hand side denotes the category of sets endowed with a continuous action of $\pi_1^{\log}(s,\widetilde{s})$. For ℓ prime, we get an equivalence

$$\{\overline{\mathbb{Q}}_\ell - \text{sheaves on } s_{\mathrm{ket}}\} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi),$$

where the right hand side denotes the category of continuous finite dimensional $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-representations of $\pi = \pi_1^{\log}(s,\widetilde{s})$, and $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-sheaves on the Kummer étale site of s are defined as in the classical case (see below). For $\ell \neq p$, k "not too big" (*i.e.* no finite extension of k contains all the roots of unity of order a power of ℓ), and $\overline{M}_s^{\mathrm{gp}}$ of rank 1, the argument of Grothendieck ([**S-T**] Appendix) applied to the sequence

(4.7.1) shows that any V in $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi)$ is quasi-unipotent, *i.e.* an open subgroup of $I^{\log}(s,\widetilde{s})$ acts on V by quasi-unipotent automorphisms, and in this way V gives rise to a representation of a Weil-Deligne group associated to π (*cf.* [**Vi 3**] for details and further developments).

(b) Let $S = \operatorname{Spec} A$ be an henselian trait, with closed point $s = \operatorname{Spec} k$ and generic point $\eta = \operatorname{Spec} K$. Fix an algebraic closure $\overline{K}$ of K and denote by $\overline{A}$ the normalization of A in $\overline{k}$, a valuation ring whose residue field $\overline{k}$ is an algebraic closure of k. We put $\overline{S} = \operatorname{Spec}\overline{A}$, $\overline{s} = \operatorname{Spec}\overline{k}$, $\overline{\eta} = \operatorname{Spec}\overline{K}$. Endow S (resp. $\overline{S}$) with the natural log structure associated to the inclusion $A - \{0\} \to A$ (resp. $\overline{A} - \{0\} \to \overline{A}$), and denote by S (resp. $\widetilde{S}$) the resulting log scheme. While S is an fs log scheme, $\widetilde{S}$ is not, but is an integral and saturated log scheme, log strictly local 4.5, which is the inverse limit of the fs log schemes S_i associated to the normalizations of A in the finite extensions K_i of K. With the induced log structure s (resp. $\overline{s}$) is a discrete valuative log point (resp. a log geometric point above s), which we will denote by s (resp. $\widetilde{s}$). The maps of log schemes

$$\eta \longrightarrow S \longrightarrow S^{\mathrm{cl}}$$

pointed by the log geometric point $\overline{\eta}$ induce surjections

$$G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) = \pi_1(\eta) \longrightarrow G^t := \pi_1^{\log}(S) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) = \pi_1(S^{\mathrm{cl}}) = \pi_1(s^{\mathrm{cl}})$$

(we omit the base point $\overline{\eta}$ for brevity), with kernels

$$P = \mathrm{Ker}(G \to G^t), \quad I = \mathrm{Ker}(G \to \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)), \quad I^t = \mathrm{Ker}(G^t \to \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)) \cong \widehat{\mathbb{Z}}'(1),$$

the wild inertia, the inertia and the tame inertia respectively. The identification of G^t with the tame quotient G/P (P the pro-p-Sylow) comes from the calculation in (a) together with the following two facts: (i) the specialization map $\overline{\eta} \to \widetilde{s}$ induces an isomorphism

$$G^t = \pi_1^{\log}(S,\overline{\eta}) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\log}(S,\widetilde{s}),$$

(ii) the pointed map $(s,\widetilde{s}) \to (S,\widetilde{s})$ induces an isomorphism

$$\pi_1^{\log}(s,\widetilde{s}) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\log}(S,\widetilde{s}).$$

In other words, restriction from S to η defines an equivalence between Kummer étale covers of S and tame extensions of K, while restriction from S to s defines an equivalence between Kummer étale covers of S and Kummer étale covers of s.

(c) More generally, let X be a locally noetherian, regular scheme and let $D \subset X$ be a divisor with normal crossings, and $U := X - D$. Endow X with the log structure defined by D. Let $\widetilde{x}$ be a log geometric point of X above $x \in D$, with image $\overline{x}$ as a geometric point of D. Then one can show that there is a natural isomorphism

$$\pi_1^{\log}(X,\widetilde{x}) \cong \pi_1^t(U,\overline{x}),$$

where the right hand side is the tame fundamental group of Grothendieck-Murre [**G-M**], classifying the finite Galois covers of U tamely ramified along D ([**Ka 3**], 10.3) (see 7.6 for a generalization).

(d) The isomorphism in (b) (ii) holds without assuming S to be a trait. More precisely, let S be the spectrum of a local henselian ring with closed point s and let $\widetilde{s}$ be a log geometric point over s. Then the pointed map $(s,\widetilde{s}) \to (S,\widetilde{s})$ induces an isomorphism

$$\pi_1^{\log}(s,\widetilde{s}) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\log}(S,\widetilde{s}),$$

compatible with the classical isomorphism $\pi_1(s,\overline{s}) \to \pi_1(S,\overline{s})$ (and therefore an isomorphism on the corresponding log inertia groups). It is indeed easily seen, by reducing to the strictly local case and taking a chart $S \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[P]$ with $P = \overline{M}_s$, that the Kummer covers $S_n \to S$ constructed in 4.2 form a cofinal system ([**Vi 1**], A 3.2). One checks moreover that when S is *classically* strictly local, for any sheaf $\mathcal{F}$ on S_{ket} the stalk map $\Gamma(S_{\mathrm{ket}},\mathcal{F}) \to \mathcal{F}_{\widetilde{s}}$ induces an isomorphism $\Gamma(S_{\mathrm{ket}},\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}_{\widetilde{s}})^I$, where $I = \pi_1^{\log}(S,\widetilde{s})$ is the log inertia group.

(e) Grothendieck's specialization theorem and calculation of the prime to p fundamental group of a proper and smooth curve over an algebraically closed field ([**SGA 1**], X 3.10) can be revisited at the light of log fundamental groups: see Fujiwara [**F**], where this calculation is reduced to that of the prime to p fundamental group of the projective line minus three points, thanks to a log Van Kampen theorem and the fact that the prime to p log fundamental groups of the (log) geometric fibers of a semistable family of curves form, in a suitable sense, a locally constant family.

4.8. Let Λ be a noetherian ring. Let X be a locally noetherian fs log scheme and let $\mathcal{F}$ be a sheaf of Λ-modules on X_{ket}. One says that $\mathcal{F}$ is *constructible* if locally for the Zariski topology X is set theoretically a finite disjoint union of strict log subschemes Y_i over which $\mathcal{F}$ is locally constant and of finite type for the Kummer étale topology. (Note that in view of Vidal's result 2.8, the suscheme structure of the $\overset{\circ}{Y}_i$'s does not matter.) Constructible sheaves of Λ-modules form a full subcategory of the abelian category of all Λ-modules, which is stable under kernel, cokernel, extension, tensor product and inverse images (see ([**Na 1**], 3.1). They don't enjoy, however, the nice stability properties of the classical constructible sheaves with respect to the usual operations of homological algebra, e.g. they are not in general stable under $R^q f_*$ for f *proper*, even for $q = 0$, *cf.* ([**Na 1**], B 3 (i)). This defect can be partially corrected by either making further hypotheses on f ([**Na 1**], 5.5.2) or working with the *full* log étale site (see 9 below).

A formalism of $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-sheaves and L-functions on fs log schemes can be developed similar to the classical one, see [**Vi 3**].

5. Comparison theorems

(A) Kummer étale *vs* classical étale cohomology

Fix an integer $n \geqslant 1$ and let $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

5.1. Let X be an fs log scheme. Consider the canonical map

$$\varepsilon : X_{\mathrm{ket}} \longrightarrow X_{\mathrm{cl}}$$

from the Kummer étale site to the classical étale site of X (2.4). Assume that n is *invertible* on X. Recall that we then have the Kummer exact sequence of abelian sheaves on X_{ket} (2.7 (d))

$$0 \longrightarrow \Lambda(1) \longrightarrow M^{\mathrm{gp}} \xrightarrow{n} M^{\mathrm{gp}} \longrightarrow 0 \ , \tag{5.1.1}$$

where M^{gp} (resp. $\Lambda(1) = \mu_n$) is the sheaf on X_{ket} defined by $Y \mapsto \Gamma(Y, M^{\mathrm{gp}})$ (resp. $\Gamma(Y, \mu_n)$). Consider the composite map of abelian sheaves on X_{cl}:

$$c : M^{\mathrm{gp}} \longrightarrow \varepsilon_* M^{\mathrm{gp}} \longrightarrow R^1\varepsilon_*\Lambda(1) \ ,$$

where the first map is the adjunction map and the second one is the boundary map coming from (5.1.1). It is the sheafification of the map $M^{\mathrm{gp}}(U) \to H^1(U_{\mathrm{ket}}, \Lambda(1))$ associating to a section s of M^{gp} over an object U of X_{cl} the $\Lambda(n)$-Kummer étale torsor $s^{1/n}$ of its n^{th}-roots (M^{gp} written multiplicatively). When s is a section of $\mathcal{O}^*$, $s^{1/n}$ comes from a classical étale torsor, and hence c vanishes on $\mathcal{O}^*$, thus inducing a map of sheaves of Λ-modules, still denoted

$$c : \overline{M}^{\mathrm{gp}} \otimes \Lambda(-1) \longrightarrow R^1\varepsilon_*\Lambda \ .$$

By cup-product, we get maps

$$c : (\otimes^q \overline{M}^{\mathrm{gp}}) \otimes \Lambda(-q) \longrightarrow R^q\varepsilon_*\Lambda \tag{5.1.2}$$

for all integers $q \geqslant 0$. The following basic result, due to Kato-Nakayama ([**K-N**] 2.4), is easy:

Theorem 5.2. — *The maps c (5.1.2) induce isomorphisms*

$$c : (\Lambda^q \overline{M}^{\mathrm{gp}}) \otimes \Lambda(-q) \xrightarrow{\sim} R^q\varepsilon_*\Lambda \ .$$

Lemma 5.3. — *Let S be an fs log scheme whose underlying scheme is strictly local. Let $\widetilde{s}$ be a log geometric point over the closed point s, and $I = \pi_1^{\log}(S, \widetilde{s})$ the corresponding log inertia group. Then the stalk map induces an isomorphism*

$$R\Gamma(S_{\mathrm{ket}}, E) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(I, E_{\widetilde{s}})$$

for E in $D^+(S_{\mathrm{ket}}, \Lambda)$ ($E \mapsto E_{\widetilde{s}}$ being viewed as a functor from $D^+(S, \Lambda)$ to $D^+(\Lambda[I])$ (derived category of Λ-modules endowed with a continuous action of I)).

This follows from 4.7 (d).

Let us prove 5.2. The assertions that c (5.1.2) factors through Λ^q and that the factored map is an isomorphism can both be checked on the stalks. So we may assume $X = S$ is classically strictly local. With the notations of 5.3 we then have

$$(R^q\varepsilon_*\Lambda)_s = H^q(S_{\mathrm{ket}}, \Lambda) = H^q(I, \Lambda).$$

By 4.7 (d) we have $I = \pi_1^{\log}(s, \widetilde{s})$, and by 4.7 (a) we have

$$I = \mathrm{Hom}(\overline{M}_s^{\mathrm{gp}}, \widehat{\mathbb{Z}}'(1)) \cong \widehat{\mathbb{Z}}'(1)^r,\ r = \mathrm{rk}\,\overline{M}_s^{\mathrm{gp}}.$$

Therefore the cup-product $H^1(I, \Lambda)^{\otimes q} \to H^q(I, \Lambda)$ factors through an isomorphism $\Lambda^q H^1(I, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^q(I, \Lambda)$ and

$$H^1(I, \Lambda) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\overline{M}_s^{\mathrm{gp}}, \widehat{\mathbb{Z}}'(1)), \Lambda) = \overline{M}_s^{\mathrm{gp}} \otimes \Lambda(-1).$$

It only remains to check that this last canonical isomorphism corresponds to c, which follows from its description in 4.7 (a) in terms of the tame character pairing.

5.4. For $E \in D^+(X_{\mathrm{cl}}, \Lambda)$ we have, by the projection formula,

$$E \overset{L}{\otimes} R\varepsilon_*\Lambda \cong R\varepsilon_*\varepsilon^* E$$

(note that by 5.2 $R\varepsilon_*\Lambda$ is stalkwise perfect), hence for E concentrated in degre 0, we have a natural isomorphism

$$(\Lambda^q\ \overline{M}^{\mathrm{gp}}) \otimes E(-q) \longrightarrow R^q\varepsilon_*\varepsilon^* E\ .$$

Intuitively, X_{ket} over X_{cl} behaves like a (constructible) fibration in tori with fiber $(\mathbb{G}_m)^{r(x)}$ over $\overline{x}$ with $r(x) = \mathrm{rk}(\overline{M}^{\mathrm{gp}})_{\overline{x}}$.

(B) Kummer étale *vs* log Betti cohomology

5.5. Let X be an fs log scheme locally of finite type over $\mathbb{C}$. Kato and Nakayama [**K-N**] associate to X a *topological space* $X^{\log}$ together with a continuous map

$$\tau : X^{\log} \longrightarrow X_{\mathrm{an}}$$

where $X_{\mathrm{an}} = X(\mathbb{C})$ is the analytic space associated to X (in the case of normal crossing varieties a similar construction had been done independently by Kawamata and Namikawa [**Kaw-Nam**]). As a set of points, $X^{\log}$ is the set of maps of log spaces $(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}, \pi) \to X_{\mathrm{an}}$, where π is the *polar* log structure $\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times S^1 \to \mathbb{C}$, $(r, z) \mapsto rz$); the map τ is given by forgetting the log structures. A point x of $X^{\log}$ can be viewed as a pair $x = (y, h)$ where $y \in X_{\mathrm{an}}$ and h is a homomorphism $h : M_y^{\mathrm{gp}} \to S^1$ extending the "angle" homomorphism $f \mapsto f(y)/|f(y)|$ on $\mathcal{O}_y^*$.

When P is an fs monoid, and $X = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[P]$, with the canonical log structure, $X^{\log} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{monoids}}(P, \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times S^1)$, and for $x \in X^{\log}$, $\tau(x) \in X$ is the point $\pi \circ x : P \to \mathbb{C}$ of X with value in $\mathbb{C}$; thus $X^{\log}$ has a natural topology of locally compact space (it's even a C^∞ manifold with corners), and τ is proper, with fiber $\tau^{-1}(y)$ at $y \in X$ a product of $r(y)$ copies of S^1, where $r(y)$ is the rank of $(P/P_y)^{\mathrm{gp}} = \overline{M}_y^{\mathrm{gp}}$,

$P_y = y^{-1}(\mathbb{C}^*) \subset P$ being the face associated to y: $P \to \mathbb{C}$. In general, using charts, one defines a topology on $X^{\log}$ which is functorial in X, and is characterized by the following properties: (i) for $X = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[P]$ it is given by the above; (ii) for a strict map $X \to Y$, the square (with vertical maps τ)

$$\begin{array}{ccc} X^{\log} & \longrightarrow & Y^{\log} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\mathrm{an}} & \longrightarrow & Y_{\mathrm{an}} \end{array}$$

is a cartesian square of topological spaces. In particular, $\tau : X^{\log} \to X_{\mathrm{an}}$ is proper, and for $x \in X_{\mathrm{an}}$, $\tau^{-1}(x)$ is a product of $r(x)$ copies of S^1, where $r(x) = \operatorname{rk} \overline{M}_x^{\mathrm{gp}}$.

5.6. One can view $\tau : X^{\log} \to X_{\mathrm{an}}$ as an analogue of the map $\varepsilon : X_{\mathrm{ket}} \to X_{\mathrm{cl}}$ discussed in (A). Kato-Nakayama prove for τ a result similar to 5.2.

Consider the exponential sequence on $X^{\log}$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}(1) \longrightarrow \tau^{-1}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{an}}}) \xrightarrow{\exp} \tau^{-1}(\mathcal{O}^*_{X_{\mathrm{an}}}) \longrightarrow 0 \ ,$$

with the usual notation $\mathbb{Z}(n) = (2\pi i)^n \mathbb{Z}$. Kato-Nakayama embed it in a larger one

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}(1) & \longrightarrow & \tau^{-1}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{an}}}) & \xrightarrow{\exp} & \tau^{-1}(\mathcal{O}^*_{X_{\mathrm{an}}}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \mathrm{Id} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}(1) & \longrightarrow & \mathcal{L} & \xrightarrow{\exp} & \tau^{-1}((M^{\mathrm{gp}})_{X_{\mathrm{an}}}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{5.6.1}$$

Here X_{an} is endowed with the log structure naturally induced by that of X, and $\mathcal{L}$ is a certain sheaf of "logarithms" of local sections of $\tau^{-1}(M^{\mathrm{gp}})$ consisting of pairs $(i\theta, s)$ where θ is a local continuous $\mathbb{R}$-valued function on $X^{\log}$ and s a local section of $\tau^{-1}(M^{\mathrm{gp}})$ such that $\exp(i\theta) = h(s)$, in the notation of 5.5. The middle vertical map in the diagram above is given by $f \mapsto (iIm(f), \exp(f))$, and $\exp : \mathcal{L} \to \tau^{-1}(M^{\mathrm{gp}})$ is given by the second coordinate.

Using that for any sheaf $\mathcal{F}$ on X_{an} the adjunction map $\mathcal{F} \to \tau_* \tau^* \mathcal{F}$ is an isomorphism, one deduces from the bottom exact sequence of (5.6.1) a map $c : \overline{M}^{\mathrm{gp}} \otimes \mathbb{Z}(-1) \to R^1 \tau_* \mathbb{Z}$ of abelian sheaves on X_{an}, hence by cup-product a map

$$c : (\otimes^q \overline{M}^{\mathrm{gp}})(-q) \longrightarrow R^q \tau_* \mathbb{Z} \tag{5.6.2}$$

for all $q \geqslant 0$. Since τ is proper with fibers products of S^1, one obtains the following analogue of 5.2:

***Theorem 5.7* ([K-N], 1.5).** — *The maps c* (5.6.2) *induce isomorphisms*

$$c : (\Lambda^q \overline{M}^{\mathrm{gp}})(-q) \xrightarrow{\sim} R^q \tau_* \mathbb{Z} \ .$$

Corollaries similar to 5.4 hold.

5.8. Let X be a scheme locally of finite type over $\mathbb{C}$. Because an étale map $U \to X$ induces a local analytic isomorphism $U_{\mathrm{an}} \to X_{\mathrm{an}}$, we get a map of ringed sites (or topoi)

$$\eta : X_{\mathrm{an}} \longrightarrow X_{\mathrm{et}},$$

such that $(\eta_* \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(U_{\mathrm{an}})$ for any sheaf $\mathcal{F}$ on X_{an} and U étale over X. Let n be an integer $\geqslant 1$ and $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. The basic comparison theorem of Artin-Grothendieck ([**SGA 4**] XVI 4.1) asserts that for $\mathcal{G} \in D_c^+(X_{\mathrm{et}}, \Lambda)$ (the full subcategory of $D^+(X_{\mathrm{et}}, \Lambda)$ consisting of complexes with bounded below, constructible cohomology), the adjunction map

$$\alpha : \mathcal{G} \longrightarrow R\eta_* \eta^* \mathcal{G}$$

is an isomorphism, and consequently the natural map

$$H^q(X_{\mathrm{et}}, \mathcal{G}) \longrightarrow H^q(X_{\mathrm{an}}, \eta^* \mathcal{G})$$

from étale to Betti cohomology is an isomorphism.

Kato and Nakayama establish a similar comparison theorem between *Kummer étale cohomology* and *log Betti cohomology* (by the latter we mean cohomology of the spaces $X^{\log}$). As in 5.5, let now X be an fs log scheme locally of finite type over $\mathbb{C}$. The fact that the m^{th} power map on S^1 is a local homeomorphism implies, by taking charts, that any Kummer étale map $U \to X$ induces a local homeomorphism $U^{\log} \to X^{\log}$. Therefore we get a map of ringed sites (or topoi)

$$\eta : X^{\log} \longrightarrow X_{\mathrm{ket}}$$

such that $(\eta_* \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(U^{\log})$ for any sheaf $\mathcal{F}$ on $X^{\log}$. When the log structure of X is trivial this is but the map defined above.

***Theorem 5.9* ([K-N], 2.6).** — *With X and $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ as above, for any $\mathcal{G} \in D_c^+(X_{\mathrm{ket}}, \Lambda)$ (the full subcategory of $D_c^+(X_{\mathrm{ket}}, \Lambda)$ consisting of complexes with bounded below, constructible cohomology* (4.8)*), the adjunction map*

$$\alpha : \mathcal{G} \longrightarrow R\eta_* \eta^* \mathcal{G}$$

is an isomorphism (and consequently the natural map

$$H^q(X_{\mathrm{ket}}, \mathcal{G}) \longrightarrow H^q(X^{\log}, \eta^* \mathcal{G})$$

is an isomorphism).

The proof is formal from 5.2, 5.7 and Artin-Grothendieck's comparison theorem quoted above. Here's a sketch of the main steps.

(a) By looking at the stalks at a log geometric point of X, one sees that it is enough to prove that the map deduced from α by applying $R\varepsilon_*$ is an isomorphism.

(b) One may assume that $\mathcal{G}$ is a single constructible sheaf and even further that $\mathcal{G}$ is of form $\varepsilon^* \mathcal{F}$ with $\mathcal{F}$ constructible on X_{cl} (this follows from general facts on Kummer

étale constructible sheaves, namely that any such sheaf is Zariski locally the cokernel of a map $\Lambda_{U,X} \to \Lambda_{V,X}$ with U and V Kummer étale of finite presentation over X).

(c) Applying Artin-Grothendieck's comparison theorem $K \xrightarrow{\sim} R\eta_*\eta^*K$ to $K = R\varepsilon_*\varepsilon^*\mathcal{F}$, the statement that $R\varepsilon_*(\alpha)$ is an isomorphism boils down to the fact that the base change map

$$\eta^* R\varepsilon_*\mathcal{G} \longrightarrow R\tau_*\eta^*\mathcal{G}$$

for $\mathcal{G} = \varepsilon^*\mathcal{F}$, associated to the commutative square

$$\begin{array}{ccc} X^{\log} & \xrightarrow{\eta} & X_{\text{ket}} \\ \tau \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ X_{\text{an}} & \xrightarrow{\eta} & X_{\text{cl}}, \end{array}$$

is an isomorphism. By the projection formula one is reduced to the case $\mathcal{G} = \Lambda$, *i.e.* to showing that

$$\eta^* R^q\varepsilon_*\Lambda \longrightarrow R^q\tau_*\Lambda$$

is an isomorphism for all q. By 5.2 and 5.7 it is enough to check it for $q = 1$, and this follows from the compatibility between the classes c defined by the Kummer and exponential sequences: for any integer $n \geqslant 1$, $\eta^{-1}(M^{\text{gp}}_{X_{\text{ket}}})$ (resp. $\mathcal{L}$) is n-divisible (resp. uniquely n-divisible) and one has a morphism of exact sequences

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}(1) & \longrightarrow & \mathcal{L} & \xrightarrow{\exp} & \tau^{-1}(M^{\text{gp}}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & \eta^{-1}(M^{\text{gp}}_{X_{\text{ket}}}) & \xrightarrow{n} & \eta^{-1}(M^{\text{gp}}_{X_{\text{ket}}}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{5.9.1}$$

where $M^{\text{gp}}_{X_{\text{ket}}}$ is the sheaf M^{gp} on the Kummer étale site of X (4.1) and the middle vertical map is $s \mapsto$ image of $\exp(s/n)$.

6. Acyclicity of log blow-ups

6.1. Let X be an fs log scheme endowed with a global chart $X \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[P]$, with P fs, P^{gp} torsionfree, and let I be an ideal of P (*i.e.* a subset of P such that $PI \subset I$. The *log blow-up*

$$f : X_I \longrightarrow X$$

of X along I is the map of fs log schemes defined as follows. Let $X' := \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[P]$ and $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X'}$ the ideal generated by I. Let $Y' := \operatorname{Proj}(\oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{I}^n) \to X'$ be the blow-up of the scheme X' along $\mathcal{I}$. The scheme Y' is covered by affine open pieces U_a indexed by $a \in I$,

$$U_a = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[P_a],$$

where P_a is the submonoid of P^{gp} generated by P and the set of b/a for $b \in I$. Endow Y' with the unique log structure inducing the canonical one on each U_a. Note that

this structure is not necessarily saturated. Let Y'^{sat} be the saturation of Y', which is an fs log scheme over X'. Finally, define $Y = X_I$ to be the fs pull-back of Y'^{sat} by $X \to X'$ and let $f : Y \to X$ be the resulting map. This map is *log étale* (1.5) since each U_a and hence each $(U_a)^{\mathrm{sat}}$ is so over X'. The ideal $\mathcal{J} = IM_Y \subset M_Y$ generated by I is *invertible* (*i.e.* locally monogenous), and one can show ([**Ni**]) that this property characterizes Y among the fs log schemes over X, namely for any map $g : T \to X$ such that IM_T is invertible, there exists a unique morphisme $h : T \to Y$ such that $fh = g$.

More generally, if X is any fs log scheme, a sheaf of ideals $\mathcal{J} \subset M_X$ is said to be *coherent* if étale locally it is of the form IM_X, where $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[P]$ is a global chart as above and I an ideal of P. One defines the *log blow-up of X along $\mathcal{J}$*, by patching the local constructions above, using for example the universal property, *cf.* [**F-K**], [**Ni**].

Fujiwara-Kato prove the following striking result:

***Theorem 6.2* ([F-K], 2.7).** — *As in* 6.1*, let $f : Y \to X$ be the log blow-up of X along a coherent sheaf of ideals $\mathcal{J}$ of M_X whose geometric stalks $\mathcal{J}_{\overline{x}}$ are nonempty. Let $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, where n is an integer $\geqslant 1$ (not necessarily invertible on X). Then, for any $\mathcal{F} \in D^+(X_{\mathrm{ket}}, \Lambda)$, the adjunction map*

$$\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow Rf_* f^* \mathcal{F}$$

is an isomorphism.

The statement with X_{ket} replaced by X_{cl} is of course false, as the blow-up of the origin in the standard affine space $\mathbb{A}^r$ already shows.

For the proof of 6.2 we need a few preliminaries. First we need the following base change result:

Proposition 6.3. — *Let Λ be as in* 6.2*, and let*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{h} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

be an fs cartesian square of fs log schemes, where $\overset{\circ}{f}$ is proper *and g is* strict*. Then for $\mathcal{F} \in D^+(X_{\mathrm{ket}}, \Lambda)$, the base change map*

$$g^* Rf_* \mathcal{F} \longrightarrow Rf'_* h^* \mathcal{F}$$

is an isomorphism.

By looking at the stalks at a log geometric point of Y', one is reduced to the case where the log structures of Y and Y' are trivial. Factoring f into $f = f_{\mathrm{cl}} \circ \varepsilon$ and

using the classical proper base change theorem ([**SGA 4**] XII 5.1) one may assume further that $f = \varepsilon$, in which case the conclusion follows from 5.2.

Nakayama ([**Na 1**], 5.1) shows that for f proper the conclusion holds under a weaker hypothesis than the strictness of g, which is satisfied for example if f or g is *exact*. However, under the sole assumption of properness of f, the conclusion can fail (loc. cit. B4), but holds again provided that one replaces the Kummer étale sites by the *full* log étale sites, as Kato has shown (see 9.5).

6.4. Next, we need to recall the (well known) structure of the (classical) étale cohomology of tori. Fix an algebraically closed field k of characteristic exponent p, and let $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ where n is assumed to be prime to p.

Let $\mathbb{A}^1$ and $\mathbb{G}_m$ be respectively the affine line and the multiplicative group over k, and let $j : \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ be the canonical inclusion. We have

$$R^q j_*\Lambda = \begin{cases} \Lambda \text{ if } q = 0 \\ \Lambda(-1)_{\{0\}} \text{ if } q = 1 \\ 0 \text{ if } q > 1, \end{cases}$$

where $\{0\}$ is the origin in $\mathbb{A}^1$ and the canonical isomorphism for $q = 1$ comes from the Kummer sequence $0 \to \Lambda(1) \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{O}^* \to 0$ on $\mathbb{G}_m$, by sending $1 \in \Lambda$ to $\delta(t)$ where $t \in (j_*\mathcal{O}^*)_{\{0\}}$ is the image of the standard coordinate on $\mathbb{A}^1$ and δ is the coboundary map. Since $H^q(\mathbb{G}_m, \Lambda) = H^0(\mathbb{A}^1, R^q j_*\Lambda)$, we get

$$H^q(\mathbb{G}_m, \Lambda = \begin{cases} \Lambda \text{ if } q = 0 \\ \Lambda(-1) \text{ if } q = 1 \\ 0 \text{ if } q > 1. \end{cases}$$

Let now T/k ($\cong \mathbb{G}_m^r$) be a torus, let $L = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ ($\cong \mathbb{Z}^r$) be its character group and $L^\vee = \mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$ be its cocharacter group. We have $T = \mathrm{Spec}\, k[L]$. The pairing

$$\begin{aligned} H^1(T, \Lambda) \times L^\vee &\longrightarrow \Lambda(-1) \\ (x, f) &\longmapsto f^*(x) \in H^1(\mathbb{G}_m, \Lambda) = \Lambda(-1) \end{aligned}$$

defines an isomorphism

$$(*) \qquad H^1(T, \Lambda) \xrightarrow{\sim} L \otimes \Lambda(-1),$$

By Künneth ([**SGA 4 1/2**], Th. finitude, 1.11), the cup-product $\otimes^q H^1(T, \Lambda) \to H^q(T, \Lambda)$ factors through an isomorphism $\Lambda^q H^1(T, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^q(T, \Lambda)$, so that from $(*)$ we get an isomorphism

$$(6.4.1) \qquad H^q(T, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \Lambda^q L \otimes \Lambda(-q)$$

for all $q \geqslant 0$. This isomorphism is functorial with respect to group-scheme homomorphisms $T' \to T$. In particular, multiplication by d on T induces multiplication by d^q on $H^q(T, \Lambda)$.

As in 4.2, let $\mathcal{N}$ be the set of prime to p integers $\geqslant 1$ ordered by divisibility, and let

$$\mathcal{T} := \text{inv.}\lim T_m$$

where m runs through $\mathcal{N}$, T_m is a copy of T and for $m \mid m'$, the transition map $T_{m'} \to T_m$ is the multiplication by $d = m'/m$, a classical Kummer étale cover of group $L^\vee \otimes \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ (1). The scheme $\mathcal{T}$ over T is a prime to p universal cover of T, with group the prime to p fundamental group of T,

$$\pi_1^t(T) = L^\vee \otimes \widehat{\mathbb{Z}}'(1). \tag{6.4.2}$$

The (descent) spectral sequence

$$E_2^{ij} = H^i(\pi, H^j(\mathcal{T}, \Lambda)) \Longrightarrow H^{i+j}(T, \Lambda),$$

where $\pi = \pi_1^t(T)$, yields an isomorphism

$$H^q(T, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^q(\pi, \Lambda). \tag{6.4.3}$$

Indeed we have

$$H^q(\mathcal{T}, \Lambda) = \text{inv.}\lim H^q(T_m, \Lambda),$$

with transition map from m to dm given by multiplication by d^q, hence

$$H^q(\mathcal{I}, \Lambda) = \begin{cases} \Lambda \text{ for } q = 0 \\ 0 \text{ for } q \geqslant 1, \end{cases} \tag{6.4.4}$$

since the inductive system is essentially zero for $q \geqslant 1$. The isomorphism (6.4.3), combined with (6.4.2), gives an alternate way to derive (6.4.1).

As Ekedahl observed, the vanishing (6.4.4) is easily extended to toric varieties. This leads to a (slight) simplification of Fujiwara-Kato's original proof of 6.2. His observation is based on the following result:

***Lemma 6.5* (Ekedahl).** — *Let k and Λ be as in* 6.4*, let P be an fs monoid such that P^{gp} is torsionfree, and let $X = \operatorname{Spec} k[P]$, $X^* = \operatorname{Spec} k[P^*]$. Then the map $X \to X^*$ defined by the inclusion $P^* \subset P$ induces an isomorphism*

$$H^q(X^*, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^q(X, \Lambda)$$

for all q.

First recall the well-known homotopy lemma (*cf.* [**SGA 7**] XV 2.1.3) :

Lemma 6.6. — *Let S be a connected k-scheme of finite type, let s_0, s_1 be two rational points of S, let Y, Z be k-schemes of finite type and let $f : S \times Y \to Z$ be a k-map. Let $f_i := f \circ (s_i \times \mathrm{Id}_Y) : Y \to Z$. Then*

$$f_0^* = f_1^* : H^q(Z, \Lambda) \longrightarrow H^q(Y, \Lambda)$$

for all q.

By Künneth we have

$$H^*(S \times Y, \Lambda) = H^*(S, \Lambda) \otimes H^*(Y, \Lambda).$$

Since S is connected,

$$s_0^* = s_1^* : H^0(S, \Lambda)\ (= \Lambda) \longrightarrow H^0(\operatorname{Spec} k, \Lambda)\ (= \Lambda),$$

from which the conclusion follows.

Let us prove 6.5. Since P^{gp} is torsionfree, a splitting of the extension $0 \to P^* \to P^{\mathrm{gp}} \to \overline{P}^{\mathrm{gp}} \to 0$ gives a decomposition

$$P = P^* \times Q,$$

with Q fs, Q^{gp} torsionfree and $Q^* = \{1\}$. Therefore, by Künneth we may assume P to be *sharp*, *i.e.* $P^* = \{1\}$. We have then to prove that $H^q(X, \Lambda) = \Lambda$ for $q = 0$ and zero otherwise. To do this we apply 6.6 to $S = Y = Z = X$ (which is connected, being integral) and the *product* map $f : X \times X \to X$, corresponding to the comultiplciation $P \to k[P] \otimes k[P]$, $a \mapsto a \otimes a$. As rational points $s_i \in X(k)$, we take s_1 to be unit element $\{1\}$ in X, *i.e.* the point corresponding to the homomorphism $P \to k$ sending any element a to 1, and s_0 the vertex $\{0\}$ corresponding to the homomorphism $P \to k$ sending a to 0 for $a \neq 1$ and 1 for $a = 1$ (this map is well defined because P is sharp). Then (with the notations of 6.6) $f_1 = \mathrm{Id}_X$ while $f_0 : X \to X$ sends X to $\{0\}$, and $f_0^* = f_1^*$ implies the conclusion.

When $k = \mathbb{C}$, by Artin-Grothendieck's comparison theorem, 6.5 follows from the well known stronger fact that the topological space underlying $(\operatorname{Spec} \mathbb{C}[P])_{\mathrm{an}}$ is contractible when P is sharp ([**Fu**], 3.2).

6.7. In order to state Edehdahl's generalization of (6.4.4) we need to review some standard definitions (*cf.* ([**Fu**], 1.4, [**Od**], 1.2, [**KKMS**], I). Let k be as in 6.4 and let T be a torus over k, with character group L. A *fan* in $L^\vee$ is a finite set Δ of rational strongly convex polyhedral cones σ in $L^\vee \otimes \mathbb{R}$ such that for any σ in Δ, every face of σ belongs to Δ, and for any pair (σ, σ') of elements of Δ, $\sigma \cap \sigma'$ is a face of both σ and σ'. Then for $\sigma \in \Delta$, $P_\sigma := \sigma^\vee \cap L$ is an fs submonoid of L with $P_\sigma^{\mathrm{gp}} = L$, and if τ is a face of σ, $P_\sigma \subset P_\tau$ is a *localization* map, defined by inverting a face of P_σ, namely $(P_\tau)^* \cap P_\sigma$; if $U_\sigma := \operatorname{Spec} k[P_\sigma]$, U_τ is open in U_σ, and the torus $T = U_{\{0\}}$ is equivariantly embedded in each U_σ. The *toric variety* $X(\Delta)$ associated to Δ is the union of the schemes U_σ, U_σ and $U_{\sigma'}$ being glued along $U_\sigma \cap U_{\sigma'} = U_{\sigma \cap \sigma'}$. A *toric variety* over k, with torus T, is a scheme X/k of the form $X(\Delta)$. Such a scheme X is of finite type over k, separated, integral, and normal; the torus T acts on X and equivariantly embeds into X as a dense open orbit. The fan Δ can be recovered from the action of T on X, namely, $\sigma \mapsto U_\sigma$ is a bijection from Δ to the set of open affine equivariant subschemes of X ([**KKMS**], I, th. 6), the equivariant embedding $T \subset U_\sigma$ determines P_σ and in turn $\sigma = (P_\sigma)^\vee \otimes \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Conversely, if X is a separated, integral, normal scheme of finite type over k endowed with an action of T and an

equivariant embedding of T into X as an open orbit, then $X \cong X(\Delta)$ for a unique fan Δ ([**KKMS**], loc. cit.), [**Od**], 1.5).

Let X/k be a toric variety with torus T, associated to a fan Δ. Let d be an integer $\geqslant 1$. For each $\sigma \in \Delta$, multiplication by d on the monoid P_σ induces an endomorphism of U_σ. When σ runs through Δ, these endomorphisms glue to an endomorphism of X, still denoted d. Now let $\mathcal{N}$ be as in 4.2 and similar to the construction in 6.4 define

$$\mathcal{X} := \text{inv.}\lim X_m \ ,$$

where m runs through $\mathcal{N}$, X_m is a copy of X and for $m \mid m'$, the transition map $X_{m'} \to X_m$ is the multiplication by $d = m'/m$. Ekedahl's generalization of (6.4.4) is the following formula, where $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, n prime to p:

$$H^q(\mathcal{X}, \Lambda) = \begin{cases} \Lambda \text{ for } q = 0 \\ 0 \text{ for } q \geqslant 1. \end{cases} \tag{6.7.1}$$

Let us prove (6.7.1). We have

$$H^q(\mathcal{X}, \Lambda) = \text{ind.}\lim H^q(X_m, \Lambda),$$

where m runs through $\mathcal{N}$ and the transition map from m to $m' = dm$ is $d^* : H^q(X, \Lambda) \to H^q(X, \Lambda)$. Let $\mathcal{U}$ be the open cover of X by the U_σ, $\sigma \in \Delta$. Consider the Leray spectral sequence of $\mathcal{U}$:

$$E_1^{ij} = \oplus H^j(U_{\sigma_0 \cap \cdots \cap \sigma_i}, \Lambda) \Longrightarrow H^{i+j}(X, \Lambda), \tag{6.7.2}$$

where $U_{\sigma_0 \cap \cdots \cap \sigma_i} = U_{\sigma_0} \cap \cdots \cap U_{\sigma_i}$ and $(\sigma_0, \ldots, \sigma_i)$ runs through Δ^{i+1}. For $X = X_m$, these spectral sequences form an inductive system indexed by $\mathcal{N}$. Its limit is a spectral sequence

$$E_1^{ij}(\mathcal{X}) := \text{inv.}\lim E_1^{ij}(X_m) \Longrightarrow H^{i+j}(\mathcal{X}, \Lambda). \tag{6.7.3}$$

By 6.5 the natural map

$$H^j(U^*_{\sigma_0 \cap \cdots \cap \sigma_i}, \Lambda) \longrightarrow H^j(U_{\sigma_0 \cap \cdots \cap \sigma_i}, \Lambda)$$

is an isomorphism. When X runs through X_m these isomorphisms are compatible with the transition maps d^*. Passing to the limit and applying (6.4.4), we get

$$E_1^{ij}(\mathcal{X}) = \begin{cases} \oplus_{(\sigma_0, \ldots, \sigma_i) \in \Delta^{i+1}} \Lambda \text{ for } j = 0 \\ 0 \text{ for } j > 0 \ . \end{cases}$$

Therefore (6.7.3) degenerates at E_2 and gives

$$H^q(\mathcal{X}, \Lambda) = H^q(E_1^{\cdot 0}(\mathcal{X})) = H^q(C^\cdot(\Delta, \Lambda)),$$

where $C^\cdot(\Delta, \Lambda)$ is the Čech complex, with coefficients in Λ, of the open cover, by the complements of its vertices, of the standard simplex S spanned by Δ. Thus (6.7.1) follows from the contractibility of S.

6.8. Let X/k be a toric variety as above, with associated fan Δ and torus T. There is a unique log structure on X inducing the canonical one on each U_σ, $\sigma \in \Delta$. The resulting log scheme, still denoted X, is fs and log smooth over k. The open subset of triviality of the log structure is the torus T, and by ([**Ka 4**], 11.6), $M_X = \mathcal{O}_X \cap j_* \mathcal{O}_T^*$, where $j : T \hookrightarrow X$ is the inclusion. The key ingredient in the proof of 6.2 is the following result (which is in fact a special case of a general purity result stemming out of 6.2, see 7.5):

Proposition 6.8.1. — *For $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, n prime to p, the restriction map*

$$j^* : H^q(X_{\mathrm{ket}}, \Lambda) \longrightarrow H^q(T_{\mathrm{ket}}, \Lambda) = H^q(T_{\mathrm{cl}}, \Lambda)$$

is an isomorphism for all q.

Let L be the character group of T. By 3.2, for $d \in \mathcal{N}$, multiplication by $d : X \to X$ is a (log) Kummer étale cover of group $L^\vee \otimes \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ (1). Denote by $\mathcal{X}_{\mathrm{ket}}$ the 2-inverse limit (in the sense of ([**SGA 4**] VI) of the topoi $(X_m)_{\mathrm{ket}}$, where (X_m) is the inverse system considered in 6.7. Then $\mathcal{X}_{\mathrm{ket}}/X_{\mathrm{ket}}$ plays the role of a prime to p universal (log) Kummer cover of X, with group the prime to p log fundamental group $\pi = L^\vee \otimes \mathbb{Z}'(1)$ of X, the same as that of T (6.4.2). We have again a descent spectral sequence

$$E_2^{ij} = H^i(\pi, H^j(\mathcal{X}_{\mathrm{ket}}, \Lambda)) \Longrightarrow H^{i+j}(X_{\mathrm{ket}}, \Lambda), \tag{6.8.2}$$

with

$$H^q(\mathcal{X}_{\mathrm{ket}}, \Lambda) = \mathrm{ind.lim}\, H^q((X_m)_{\mathrm{ket}}, \Lambda), \tag{6.8.3}$$

with transition map from m to dm given by the endomorphism d^* of $H^q(X_{\mathrm{ket}}, \Lambda)$. It turns out that this limit is actually the same as that obtained by working with the classical étale topology instead of the Kummer étale one:

Lemma 6.8.4. — *The restriction maps $H^q((X_m)_{\mathrm{cl}}, \Lambda) \longrightarrow H^q((X_m)_{\mathrm{ket}}, \Lambda)$ define an isomorphism*

$$\mathrm{ind.lim}\, H^q((X_m)_{\mathrm{cl}}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind.lim}\, H^q((X_m)_{\mathrm{ket}}, \Lambda).$$

In fact, a stronger statement holds: the natural map $\mathcal{X}_{\mathrm{ket}} \to \mathcal{X}_{\mathrm{cl}}$ is an equivalence of topoi. Indeed, any Kummer étale map $U \to X$ of finite type becomes classically étale after an fs base change by multiplication by $d : X \to X$, for a suitable $d \in \mathcal{N}$. Hence the classical étale maps $U \to X_m$ generate the topology of $\mathcal{X}_{\mathrm{ket}}$ defined in the standard way from those of the $(X_m)_{\mathrm{ket}}{}'s$.

From 6.8.4 and 6.7.1 we get

$$H^q(\mathcal{X}_{\mathrm{ket}}, \Lambda) = \begin{cases} \Lambda \text{ for } q = 0 \\ \\ 0 \text{ for } q \geqslant 1 \ . \end{cases} \tag{6.8.5}$$

Thus the spectral sequence (6.8.2) yields an isomorphism

$$H^q(X_{\mathrm{ket}},\Lambda)\longrightarrow H^q(\pi,\Lambda). \tag{6.8.6}$$

By construction this isomorphism is compatible with (6.4.3), *i.e.* we have a commutative square

$$\begin{array}{ccc} H^q(X_{\mathrm{ket}},\Lambda) & \xrightarrow{\sim} & H^q(\pi,\Lambda) \\ {\scriptstyle j^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} \\ H^q(T_{\mathrm{cl}},\Lambda) & \xrightarrow{\sim} & H^q(\pi,\Lambda), \end{array}$$

with horizontal maps given by (6.8.6) and (6.8.3), which proves 6.8.1.

6.9. Let us – at last – turn to Fujiwara-Kato's proof of 6.2. We have to show that for any log geometric point $\widetilde{x}$ of X, the following holds:

$$\alpha_{\widetilde{x}} : \mathcal{F}_{\widetilde{x}} \longrightarrow (Rf_*f^*\mathcal{F})_{\widetilde{x}} \tag{$*$}_{\widetilde{x}}$$

is an isomorphism. We prove $(*)_{\widetilde{x}}$ by induction on

$$r(x) = \mathrm{rk}(\overline{M}^{\mathrm{gp}})_{\overline{x}}$$

(where x (resp. $\overline{x}$) is the point (resp. geometric point) of X image of $\widetilde{x}$). Let $r\in\mathbb{N}$. Assume $(*)_{\widetilde{x}}$ holds for all $(X,\mathcal{J},\widetilde{x})$ such that $r(x)<r$, and let us prove it for $r(x)=r$. Applying 6.3 to the base change by the strict map $\overline{x}\to X$, we may assume that the underlying scheme of $X=x$ is $\operatorname{Spec} k$, with k an algebraically closed field of characteristic exponent p, and that X is equipped with a chart $X\to\operatorname{Spec} k[P]$, with P fs, sharp (*i.e.* $P^*=\{0\}$ (the monoid law written additively)), $P^{\mathrm{gp}}\cong\mathbb{Z}^r$ and $\mathcal{J}=IM_X$. By dévissage on $\mathcal{F}$ we reduce to the case $\mathcal{F}=\Lambda$. Now let X be the affine toric variety $\operatorname{Spec} k[P]$, with vertex $\{0\}$ corresponding to the map $P\to k$ sending a to 0 for $a\neq 0$ and 0 to 1, and torus $T=\operatorname{Spec} k[P^{\mathrm{gp}}]$, of rank r. Endow X with its canonical log structure and let $f:Y\to X$ be the log blow-up of X along I. Applying again 6.3, this time to the base change by the strict map $x\to X$ sending x to $\{0\}$, we are reduced to showing that the stalk of $\alpha:\Lambda\to Rf_*\Lambda$ at a log geometric point $\{0\}^\sim$ above $\{0\}$ is an isomorphism. Let $K\in D^+(X_{\mathrm{ket}},\Lambda)$ be the cone of α, defined by the exact triangle

$$\Lambda\xrightarrow{\alpha} Rf_*\Lambda\longrightarrow K\longrightarrow\Lambda[1].$$

We have to show

$$K_{\{0\}^\sim}=0\ . \tag{6.9.1}$$

By the induction hypothesis we know that

$$K_{\widetilde{x}}=0 \tag{6.9.2}$$

for all log geometric points $\widetilde{x}$ over a point x of X distinct of $\{0\}$, since $r(x)<r$ for such a point. Consider again the inverse system $(X_m)_{m\in\mathcal{N}}$ used in 6.7 and 6.8, and

the inverse system $(\{0\}_m)$ it induces on $\{0\}$ endowed with the induced log structure. By 4.4.1, we have

$$H^i(K_{\{0\}^\sim}) = \text{ind. lim } H^i((\{0\}_m)_{\text{ket}}, K).$$

Therefore, to prove (6.9.1) it suffices to prove that

$$R\Gamma(\{0\}_{\text{ket}}, K) = 0 \ .$$

But by (6.9.2) we have

$$R\Gamma(\{0\}_{\text{ket}}, K) = R\Gamma(X_{\text{ket}}, K) \ .$$

Hence it suffices to show that the inverse image map

$$f^* : H^q(X_{\text{ket}}, \Lambda) \longrightarrow H^q(Y_{\text{ket}}, \Lambda)$$

is an isomorphism for all q.

Suppose first that n is prime to p ($\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). The log-blow up Y of X along I is a toric variety, with torus T, covered by the open affine equivariant subschemes $(U_a)^{\text{sat}} = \text{Spec}\, k[(P_a)^{\text{sat}}]$ considered in 6.1. The projection $f : Y \to X$ is T-equivariant and induces an isomorphism on T. That f^* is an isomorphism then follows from 6.8.1.

That concludes the proof of 6.2 in the case n prime to p. In the general case the proof proceeds in the same way, except that to dispose of the case where n is a power of p, it is necessary to replace the affine toric variety $X = \text{Spec}\, k[P]$ by a T-equivariant compactification $\overline{X}$, that is a toric variety with torus T, containing X as an equivariant dense open subset, and which is *proper* over k. It is a standard fact that such compactifications exist: if Δ is the fan of X (the set of faces of $P^\vee$), it suffices to choose a complete fan $\overline{\Delta}$ containing Δ, and $X(\overline{\Delta})$ is a T-equivariant compactification of X ([**Od**], 1.12). If Z is the closed subscheme of X defined by I, the schematic closure $\overline{Z}$ of Z in $\overline{X}$ is defined by a T-equivariant sheaf of ideals $\mathcal{I}$ of $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ and even by a coherent sheaf of ideals $\mathcal{J}$ of $M_{\overline{X}}$. Let $\overline{f} : \overline{Y} \to \overline{X}$ be the log blow-up of $\overline{X}$ along $\mathcal{J}$. Then $\overline{Y}$ is a toric variety with torus T, and $\overline{f}$ is equivariant and induces an isomorphism on T. Again, one has to show (6.9.1), where K is the cone of $\alpha : \Lambda \to R\overline{f}_*\Lambda$. This time, the induction hypothesis only gives us that there exists a finite number of closed points x_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ of $\overline{X}$ (including $\{0\}$) such that

$$K_{\widetilde{x}} = 0 \tag{6.9.3}$$

for all log geometric points $\widetilde{x}$ over a point x of X not belonging to the set of $x_i's$. As above, we have

$$\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant N} H^q(K_{(\widetilde{x}_i)}) = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant N} \text{ind. lim}\, H^q(((x_i)_m)_{\text{ket}}, \Lambda),$$

and by (6.9.3),

$$\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant N} R\Gamma((x_i)_{\text{ket}}, K) = R\Gamma(\overline{X}_{\text{ket}}, K),$$

so that again it is enough to show that

$$f^* : H^q(\overline{X}_{\text{ket}}, \Lambda) \longrightarrow H^q(\overline{Y}_{\text{ket}}, \Lambda)$$

is an isomorphism for all q. Writing $\Lambda = \mathbb{Z}/p^h\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n'\mathbb{Z}$ with n' prime to p, and using the case treated above, we may assume $\Lambda = \mathbb{Z}/p^h\mathbb{Z}$. The result is then a consequence of the following lemma:

Lemma 6.9.4. — *Let X/k be a* proper *toric variety, with k algebraically closed of characteristic $p > 0$, and let $\Lambda = \mathbb{Z}/p^h\mathbb{Z}$, $h \geqslant 1$. Then we have*

$$H^q(X_{\mathrm{ket}}, \Lambda) = \begin{cases} \Lambda \text{ if } q = 0 \\ 0 \text{ if } q > 0 \ . \end{cases}$$

By dévissage we reduce to $\Lambda = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Since X is proper we have

$$H^q(X, \mathcal{O}_X) = \begin{cases} k \text{ for } q = 0 \\ 0 \text{ for } q > 0 \ . \end{cases}$$

(([**KKMS**], p. 44) or ([**Od**], 2.8) in the case $k = \mathbb{C}$). Hence, by Artin-Schreier,

$$H^q(X_{\mathrm{cl}}, \Lambda) = \begin{cases} \Lambda \text{ if } q = 0 \\ 0 \text{ if } q > 0 \ . \end{cases}$$

By 6.8.4 (where n needs not be assumed to be prime to p), we get again (6.8.5) and (6.8.6), and since π is of pro-order prime to p, the conclusion follows. This concludes Fujiwara-Kato's proof of 6.2.

Fujiwara-Kato ([**F-K**] 2.4) also prove a noncommutative variant of 6.2 :

Theorem 6.10. — *Let $f : Y \to X$ be a log blow-up as in* 6.2. *Then for any log geometric point $\widetilde{y}$ of Y, with image $\widetilde{x}$ by f, the natural map*

$$\pi_1^{\log}(Y, \widetilde{y}) \longrightarrow \pi_1^{\log}(X, \widetilde{x})$$

is an isomorphism.

We will not attempt to explain their proof. Let us just say that the key point is to replace 6.8.1 by a Zariski-Nagata type purity result, namely that in the situation of 6.8.1, restriction to T defines an isomorphism between $\pi_1^{\log}(X)$ and the quotient of $\pi_1(T)$ classifying the étale covers tamely ramified at the generic points of $X - T$.

7. Purity

Recall Grothendieck's absolute purity conjecture (([**SGA 4**] XVI 3.10 b), ([**SGA 5**] I 3.1.4)), now a theorem of Gabber [**Ga**]:

Theorem 7.1. — *Let d be a positive integer, X a regular locally noetherian scheme, $i : Y \to X$ a regular closed subscheme, everywhere of codimension d, and $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ with n invertible on X. Then*

$$R^q i^!(\Lambda) = 0 \text{ for } q \neq 2d \ ,$$

and the cohomology class of Y ([**SGA 4 1/2**], Cycle 2.2) *defines an isomorphism*

$$R^{2d}i^!(\Lambda) \cong \Lambda(-d) \ .$$

This statement implies – and in fact is equivalent to – the following one:

Theorem 7.2. — *Let* X *be a regular locally noetherian scheme and let* $D = \sum_{1\leqslant m\leqslant N} D_m$ *be a divisor with normal crossings on* X*, with* D_m *regular for all* i*. Let* $j_m : U_m = X - D_m \hookrightarrow X$*,* $j : U = X - D \hookrightarrow X$ *be the inclusions, and let* $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *with* n *invertible on* X*. Then:*

(a) $R^q j_{m*}\Lambda = 0$ *for* $q > 1$*,* $j_{m*}\Lambda = \Lambda$*, and the Kummer sequence defines an isomorphism* $R^1 j_{m*}\Lambda \cong \Lambda_{D_m}(-1)$*;*

(b) *the natural map*

$$\overset{L}{\bigotimes_{1\leqslant m\leqslant n}} Rj_{m*}\Lambda \longrightarrow Rj_*\Lambda$$

is an isomorphism, which is equivalent to the conjunction of (i) and (ii):

(i) *the restriction map*

$$\bigoplus_{1\leqslant m\leqslant n} R^1 j_{m*}\Lambda \longrightarrow R^1 j_*\Lambda$$

is an isomorphism;

(ii) *for all* $q \geqslant 0$*, the cup-product map* $\otimes^q R^1 j_*\Lambda \to R^q j_*\Lambda$ *factors through an isomorphism*

$$\Lambda^q R^1 j_*\Lambda \xrightarrow{\sim} R^q j_*\Lambda \ .$$

To see that 7.1 and 7.2 are equivalent one can argue as follows: from 7.1 one gets 7.2 by induction on N; conversely, one can assume X strictly local, one can factor i into $i_1 \cdots i_d$, where $i_m : Y_m \to Y_{m-1}$ is of codimension 1, Y_m is regular, $Y_d = Y$, $Y_0 = X$; it then suffices to apply 6.2 repeatedly to the regular divisors ${i_m}'s$.

7.3. Using 6.2, Fujiwara-Kato prove a Kummer étale variant (and generalization) of 7.2 for log regular log schemes.

Let X be an fs log scheme. One says that X is *log regular* (*cf.* ([**Ka 4**], 2.1) if the underlying scheme $\mathring{X}$ is locally noetherian and the following condition holds:

(7.3.1) for any (classical) geometric point $\overline{x}$ of X above x, if $J_{\overline{x}}$ is the ideal of $\mathcal{O}_{X,\overline{x}}$ generated by the image of $M_{X,\overline{x}} - \mathcal{O}^*_{X,\overline{x}}$ by α, $\mathcal{O}_{X,\overline{x}}/J_{\overline{x}}$ is regular and

$$\dim \mathcal{O}_{X,\overline{x}}/J_{\overline{x}} + \operatorname{rk} \overline{M}^{\mathrm{gp}}_{X,\overline{x}} = \dim \mathcal{O}_{X,\overline{x}}.$$

Log regularity was first defined by Kato ([**Ka 4**], 2.1) for schemes equipped with log structures defined for the Zariski topology and satisfying "condition (S)" (similar to fs). The definition we make here is adapted to the context in which we are working. For the links between the two notions, see [**Ni**].

Here are some examples and properties which follow easily from ([**Ka 4**], 2.1).

(a) If X has the trivial log structure, X is log regular if and only if $\overset{\circ}{X}$ is regular.

(b) If $\overset{\circ}{X}$ is regular and X has the canonical log structure given by a divisor with normal crossings $D \subset X$, then X is log regular. In this case, $\overline{M}_{X,\overline{x}} \cong \mathbb{N}^{r(x)}$ at all geometric points $\overline{x}$, where $r(x) = \operatorname{rk} \overline{M}^{\mathrm{gp}}_{X,\overline{x}}$. Conversely, if X is log regular and if at some geometric point $\overline{x}$, $\overline{M}_{X,\overline{x}} \cong \mathbb{N}^{r(x)}$, then étale locally around $\overline{x}$, $\overset{\circ}{X}$ is regular and the log structure of X is given by a normal crossings divisor (this can be seen by taking a chart $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\mathbb{N}^{r(x)}]$ around $\overline{x}$, and using (7.3.1) together with ([**EGA IV**] 17.1.7).

(c) If Y is log smooth over X and X is log regular, then Y is log regular. If X is an fs log scheme separated and of finite type over the spectrum of a perfect field k endowed with the trivial log structure, then X is log regular if and only if X is log smooth over k.

(d) If X is log regular and $j : U \hookrightarrow X$ is the open subset of triviality of the log structure, then U is dense and the log structure of X is the direct image of that of U, *i.e.* $M_X = \mathcal{O}_X \cap j_* \mathcal{O}^*_U$ ([**Ka 4**], 11.6).

(e) If X is log regular, $\overset{\circ}{X}$ is Cohen-Macaulay and normal.

***Theorem 7.4* ([F-K], 3.1).** — *Let X be a log regular fs log scheme, let $j : U \hookrightarrow X$ be the open subset of triviality of the log structure, and $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ with n invertible on X. Then the adjunction map*

$$\Lambda \longrightarrow Rj_{\mathrm{ket}*}\Lambda$$

is an isomorphism.

First we treat the case where $\overset{\circ}{X}$ is regular and the log structure of X is given by a normal crossings divisor D. We may assume that D has simple normal crossings, *i.e.* $D = \sum_{1 \leqslant m \leqslant N} D_m$, with the D_m regular. The proof exploits the analogy between the formulas for $R^q \varepsilon_* \Lambda$ (5.2) and $R^q j_* \Lambda$ (7.2). More precisely, consider the commutative square

$$\begin{array}{ccc} U_{\mathrm{ket}} & \xrightarrow{j_{\mathrm{ket}}} & X_{\mathrm{ket}} \\ {\scriptstyle \varepsilon}\downarrow & \wr & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \\ U_{\mathrm{cl}} & \xrightarrow{j_{\mathrm{cl}}} & X_{\mathrm{cl}} \ . \end{array}$$

In the same way as in step (a) of the proof of 5.9 we see by looking at the stalks at log geometric points that to prove that the adjunction map $\alpha : \Lambda \to Rj_{\mathrm{ket}*}\Lambda$ is an isomorphism, it is enough to prove that the map

$$\beta = R\varepsilon_*(\alpha) : R\varepsilon_*\Lambda \longrightarrow Rj_{cl*}\Lambda$$

is an isomorphism (we have identified U_{ket} to U_{cl} by ε). Since $U = X - D$ and $M = M_X = \mathcal{O}_X \cap j_*\mathcal{O}_U^*$, we have

$$\overline{M}^{\mathrm{gp}} = \bigoplus_{1 \leqslant m \leqslant N} \mathbb{Z}_{D_m} \ .$$

Consider the square

$$\begin{array}{ccc} \overline{M}^{\mathrm{gp}} \otimes \Lambda(-1) & \xrightarrow{\sim} & R^1\varepsilon_*\Lambda \\ \Big\downarrow \mathrm{Id} & & \Big\downarrow \beta \\ \bigoplus_{1 \leqslant m \leqslant N} \Lambda_{D_m}(-1) & \xrightarrow{\sim} & R^1 j_{cl*}\Lambda \ , \end{array}$$

where the top horizontal map is the isomorphism given by 5.2, and the bottom one is the isomorphism given by 7.2 (a), (b) (i). This square commutes because both horizontal maps are given by a Kummer sequence. Therefore

$$\beta : R^q\varepsilon_*\Lambda \longrightarrow R^q j_{cl*}\Lambda$$

is an isomorphism for $q = 1$, hence for all q by 5.2 and 7.2 (b) (ii).

In the general case, working classically étale locally on X, we may assume, thanks to Kato's resolution of toric singularities ([**Ka 4**], 10.4), that there exists a log blow-up $f : Y \to X$ of X along some coherent sheaf of ideals of M_X such that $\overline{M}_{Y,\overline{y}} \cong \mathbb{N}^{r(y)}$ for all geometric points $\overline{y}$ of Y. Since f is log étale, Y is log regular (7.3 (c)), hence by 7.3 (b) $\overset{\circ}{Y}$ is regular and the log structure of Y is given by a divisor D with normal crossings. Moreover f induces an isomorphism from the open subset of triviality $V = Y - D$ for the log structure of Y to U. Let $h : V \to Y$ be the inclusion. By the particular case treated above the adjunction map $\Lambda \to Rh_{\mathrm{ket}*}\Lambda$ is an isomorphism. Applying $Rf_{\mathrm{ket}*}$ and taking into account that the adjunction map $\Lambda \to Rf_{\mathrm{ket}*}\Lambda$ is an isomorphism by Fujiwara-Kato's basic theorem 6.2, we get the conclusion.

Corollary 7.5. — *Under the assumptions of* 7.4*, the restriction map*

$$\beta : R\varepsilon_*\Lambda \longrightarrow Rj_{cl*}\Lambda$$

(deduced from the adjunction map of 7.4 *by application of* $R\varepsilon_*$*) is an isomorphism, and consequently the restriction map*

$$H^q(X^{\mathrm{ket}}, \Lambda) \longrightarrow H^q(U_{\mathrm{cl}}, \Lambda)$$

is an isomorphism for all q*.*

Fujiwara-Kato also establish a noncommutative, Zariski-Nagata type variant of 7.4, which is a generalization of the key lemma used in their proof of 6.10, namely:

***Theorem 7.6* ([F-K], 3.1)**. — *Let* X *be a log regular fs log scheme, and let* $U \subset X$ *be the open subset of triviality of the log structure. Then the functor*

$$\mathrm{Kcov}(X) \longrightarrow \mathrm{Etcov}(U), \ Y \longrightarrow Y \times_X U$$

from the category of finite Kummer étale covers of X (3.1) *to the category of finite classical étale covers of U induces an equivalence between* $\mathrm{Kcov}(X)$ *and the full subcategory of* $\mathrm{Etcov}(U)$ *consisting of covers $V \to U$ which are tamely ramified along $X - U$,* i.e. *such that if Z is the normalization of X in V, at all points $x \in X - U$ with* $\dim \mathcal{O}_{X,x} = 1$*, the restriction of Z to* $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{X,x}$ *is tamely ramified.*

There are analogues of 7.4 and 7.6 for log Betti cohomology. The main result is the following one, whose proof is elementary:

***Theorem 7.7* ([Og], 5.12, [K-N], 1.5.1).** — *Let X be a log smooth, fs log scheme over $\mathbb{C}$, let $j : U \hookrightarrow X$ be the open subset of triviality of the log structure, and $j^{\log} : U_{\mathrm{an}} = U^{\log} \hookrightarrow X^{\log}$ be the corresponding inclusion* (5.5)*. Then any point $x \in X^{\log}$ has a fundamental system of neighborhoods V such that $V \cap U_{\mathrm{an}}$ is contractible. In particular:*

(a) *the adjunction map $\mathbb{Z} \to Rj_*^{\log}\mathbb{Z}$ is an isomorphism;*

(b) *the restriction to $U_{\mathrm{an}} = U^{\log}$ defines an equivalence between the category of locally constant sheaves on $X^{\log}$ and the corresponding category on U_{an}.*

8. Nearby cycles

8.1. Let $S = \mathrm{Spec}\,A$, where A is a henselian discrete valuation ring with fraction field K and residue field k with characteristic exponent p. Let $s = \mathrm{Spec}\,k$, $\eta = \mathrm{Spec}\,K$. We fix an algebraic closure $\overline{K}$ of K and denote by $\overline{A}$ the normalization of A in $\overline{K}$, a valuation ring whose residue field $\overline{k}$ is an algebraic closure of k. We put $\overline{S} = \mathrm{Spec}\,\overline{A}$, $\overline{s} = \mathrm{Spec}\,\overline{k}$, $\overline{\eta} = \mathrm{Spec}\,\overline{K}$.

As in 4.7 (b), we endow S (resp. $\overline{S}$) with the natural log structure associated to the inclusion $A - \{0\} \to A$ (resp. $\overline{A} - \{0\} \to \overline{A}$). We denote by S (resp. $\widetilde{S}$) the resulting log scheme, and similarly by s (resp. $\widetilde{s}$) the point s (resp. $\overline{s}$) with the induced log structure. We will keep the notations of 4.7 (b) for the various fundamental groups associated to these data. In particular, the full Galois group $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ acts on $\widetilde{S}$ and $\widetilde{s}$ (by transportation of structure). A basic fact is that G *acts on $\widetilde{s}$ through its tame quotient*

$$G^t = \pi_1^{\log}(S, \widetilde{s}) = \pi_1^{\log}(s, \widetilde{s}) = G/P\ .$$

In order to see this it is convenient to consider the log scheme $S^t = \mathrm{Spec}(A^t)$ (with the log structure associated to the inclusion $A^t - \{0\} \to A^t$), where A^t is the union of the normalizations of A in the tamely ramified extensions of K contained in $\overline{K}$. Let s^t be the closed point of S^t with its induced log structure. Then $S^t \to S$ (resp. $s^t \to s$) is a log universal cover of S (resp. s), with (opposite) automorphism group G^t. On the other hand, the canonical projection $\widetilde{s} \to s^t$ is a limit of fs universal Kummer homeomorphisms (*cf.* 2.8), and therefore s-automorphisms of s^t extend uniquely to

s-automorphisms of $\widetilde{s}$ ([**Vi 1**], A4), ([**Na 1**], 3.1.3)). The tame inertia

$$I^t = I^{\log}(s, \widetilde{s}) \subset G^t$$

acts on s^t (hence on $\widetilde{s}$) through the tame character

$$t : I^t \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{Z}}'(1)(\overline{k})$$

as explained in 4.7 (a).

8.2. Let $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, with n prime to p. Let X be an fs log scheme over S. We define $\widetilde{X}$ and $X_{\widetilde{s}}$ by the fibered products in the category of integral and saturated log schemes:

$$\widetilde{X} = X \times_S \widetilde{S},\ X_{\widetilde{s}} = \widetilde{X} \times_{\widetilde{S}} \widetilde{s} = X_s \times_s \widetilde{s}\ .$$

Note that though by definition $\overline{S}$ and $\widetilde{S}$ have the same underlying schemes, the underlying scheme of $\widetilde{X}$ is in general different from the pull-back $\overline{X}$ of X by $\overline{S} \to S$ in the category of schemes. A similar remark applies to $X_{\overline{s}}$ and $X_{\widetilde{s}}$. We have cartesian squares (in the category of integral and saturated log schemes)

$$\begin{array}{ccccc} X_{\widetilde{s}} & \xrightarrow{\widetilde{i}} & \widetilde{X} & \xleftarrow{\widetilde{j}} & X_{\overline{\eta}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{s} & \longrightarrow & \widetilde{S} & \longleftarrow & \overline{\eta}\ . \end{array}$$

For $\mathcal{L} \in D^+(X_\eta^{\mathrm{ket}}, \Lambda)$ we define the complex of *log nearby cycles* $R\Psi^{\log}\mathcal{L}$ by

$$R\Psi^{\log}(\mathcal{L}) = \widetilde{i}^{\mathrm{ket}*} R\widetilde{j}^{\mathrm{ket}}_*(\mathcal{L}|X_{\overline{\eta}}) \tag{8.2.1}$$

where the superscript "ket" means that the inverse and direct images are taken with respect to the Kummer étale topologies (defined as limits since $\widetilde{X}$ is an inverse limit of fs log schemes). The functor $R\Psi^{\log}$ *a priori* goes from $D^+(X_\eta^{\mathrm{ket}}, \Lambda)$ to $D^+(X_{\widetilde{s}}^{\mathrm{ket}}, \Lambda)$, but as usual, with a little more care, one can define it as going from $D^+(X_\eta^{\mathrm{ket}}, \Lambda)$ to $D^+(X_s^{\mathrm{ket}} \times_s \eta, \Lambda)$, where, using Deligne's notation in ([**SGA 7**] XIII), $X_s^{\mathrm{ket}} \times_s \eta$ denotes the topos of (Kummer étale) sheaves on $X_{\widetilde{s}}$ endowed with a continuous action of G compatible with that of G on $X_{\widetilde{s}}$.

Log nearby cycles are related to the classical ones as follows. Let $\overline{i}$, $\overline{j}$ be defined by the cartesian squares of schemes

$$\begin{array}{ccccc} X_{\overline{s}} & \xrightarrow{\overline{i}} & \overline{X} & \xleftarrow{\overline{j}} & X_{\overline{\eta}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{s} & \longrightarrow & \overline{S} & \longleftarrow & \overline{\eta}\ . \end{array}$$

Denote by $R\Psi^{\mathrm{cl}}$ the classical nearby cycles functor ([**SGA 7**] XIII), defined by

$$R\Psi^{\mathrm{cl}}(\mathcal{F}) = \overline{i}^* R\overline{j}_*(\mathcal{F}|X_{\overline{\eta}}) \tag{8.2.2}$$

for $\mathcal{F} \in D^+(X_\eta, \Lambda)$ (this is a functor from $D^+(X_\eta, \Lambda)$ to $D^+(X_s \times_s \eta, \Lambda)$). Consider the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} X_{\widetilde{s}}^{\mathrm{ket}} & \xrightarrow{\widetilde{i}} & \widetilde{X}^{\mathrm{ket}} & \xleftarrow{\widetilde{j}} & X_{\overline{\eta}}^{\mathrm{ket}} \\ \widetilde{\varepsilon}\downarrow & & \widetilde{\varepsilon}\downarrow & & \varepsilon\downarrow \\ X_{\overline{s}}^{\mathrm{cl}} & \xrightarrow{\overline{i}} & \overline{X}^{\mathrm{cl}} & \xleftarrow{\overline{j}} & X_{\overline{\eta}}\ , \end{array}$$

where for brevity we write $X_{\overline{s}}^{\mathrm{cl}}$ for $X_s \times_s \eta$, etc. and the middle (resp. left) vertical map is the canonical projection, *i.e.* the composition

$$\widetilde{X}^{\mathrm{ket}} \xrightarrow{\varepsilon} \widetilde{X}^{\mathrm{cl}} \longrightarrow \overline{X}^{\mathrm{cl}}$$

(resp. $X_{\widetilde{s}}^{\mathrm{ket}} \xrightarrow{\varepsilon} X_{\widetilde{s}}^{\mathrm{cl}} \to X_{\overline{s}}^{\mathrm{cl}}$). By 6.3 applied to the left square (strict base change by $\overline{i}$) and a standard limit argument we have, for $\mathcal{L} \in D^+(X_\eta^{\log}, \Lambda)$,

$$\overline{i}^* R\widetilde{\varepsilon}_*(R\overline{j}_*^{\mathrm{ket}}(\mathcal{L}|X_{\overline{\eta}})) = R\widetilde{\varepsilon}_*\widetilde{i}^*(R\overline{j}_*^{\mathrm{ket}}(\mathcal{L}|X_{\overline{\eta}})),$$

and therefore,

$$R\Psi^{\mathrm{cl}} R\varepsilon_*\mathcal{L} \cong R\widetilde{\varepsilon}_* R\Psi^{\log}\mathcal{L}\ . \tag{8.2.3}$$

In particular, when the log structure of X is *vertical*, by which we mean that the log structure of X_η is trivial (*i.e.* X_η coincides with the open subset of triviality of the log structure of X), we have $X_\eta^{\mathrm{cl}} = X_\eta^{\mathrm{ket}}$ and

$$R\Psi^{\mathrm{cl}}\mathcal{L} \cong R\widetilde{\varepsilon}_* R\Psi^{\log}\mathcal{L}\ .$$

By analogy with the classical case, for $\mathcal{L} \in D^+(X^{\log}, \Lambda)$, one can also define the complex of *vanishing cycles* $R\Phi^{\log}\mathcal{L} \in D^+(X_s^{\mathrm{ket}} \times_s \eta, \Lambda)$, which sits in an exact triangle (of $D^+(X_s^{\mathrm{ket}} \times_s \eta, \Lambda)$)

$$i^*\mathcal{L} \longrightarrow R\Psi^{\log}\mathcal{L} \longrightarrow R\Phi^{\log}\mathcal{L} \xrightarrow{+1} \tag{8.2.4}$$

and is related to the classical one by

$$R\Phi^{\mathrm{cl}} R\varepsilon_*\mathcal{L} \cong R\widetilde{\varepsilon}_* R\Phi^{\log}\mathcal{L}\ . \tag{8.2.5}$$

When $\overset{\circ}{X}$ is *proper* over S, then by 6.3 applied to the strict base change by $\widetilde{s} \to \widetilde{S}$, we get, for $\mathcal{F} \in D^+(X_\eta^{\mathrm{ket}}, \Lambda)$, a canonical isomorphism

$$R\Gamma(X_{\widetilde{s}}^{\mathrm{ket}}, R\Psi^{\log}\mathcal{F}) \cong R\Gamma(X_{\overline{\eta}}^{\mathrm{ket}}, \mathcal{F}), \tag{8.2.6}$$

from which by (8.2.4) we derive, for $\mathcal{L} \in D^+(X^{\mathrm{ket}}, \Lambda)$, a *specialization map*

$$\mathrm{sp} : R\Gamma(X_{\widetilde{s}}^{\mathrm{ket}}, \overline{i}^*\mathcal{L}) \longrightarrow R\Gamma(X_{\overline{\eta}}^{\mathrm{ket}}, \overline{j}^*\mathcal{L}), \tag{8.2.7}$$

which is an isomorphism if and only if $R\Gamma(X_{\widetilde{s}}^{\mathrm{ket}}, R\Phi^{\log}\mathcal{L}) = 0$.

Concerning $R\Psi^{\log}$, the main result so far is the following theorem of Nakayama:

***Theorem 8.3* ([Na 2], 3.2).** — *Let X be a log smooth fs log scheme over S. Then*

$$R\Phi^{\log}\Lambda = 0 \ .$$

This is a simple application of the purity theorem 7.4. Indeed, let $u : U \hookrightarrow X_\eta$ be the open subset of triviality of the log structure of X_η (which is also that of X). Let S' be the normalization of S in a finite extension K' of K contained in $\overline{K}$, s' its closed point, and put the standard log structures on S' (resp. s'). Let

$$X_{s'} \xrightarrow{i'} X' \xleftarrow{j'} X_{K'} \xleftarrow{u'} U'$$

be the diagram deduced by fs base change by $S' \to S$ from the given diagram

$$X_s \xrightarrow{i} X \xleftarrow{j} X_K \xleftarrow{u} U \ .$$

Because U' is the open subset of triviality of the log structures of both $X_{K'}$ and X', we have, by 7.4,

$$R(j'u')^{\mathrm{ket}}_*\Lambda = \Lambda_{X'} \ , \ Ru'^{\,\mathrm{ket}}_*\Lambda = \Lambda_{X_{K'}},$$

hence

$$(*) \qquad Rj'^{\,\mathrm{ket}}_*\Lambda = \Lambda_{X'},$$

and therefore

$$i'^{\mathrm{ket}*}Rj'^{\,\mathrm{ket}}_*\Lambda = \Lambda_{X_{s'}}.$$

By definition we have

$$R^q\Psi^{\log}(\Lambda) = \mathrm{ind.\,lim}\, i'^{\mathrm{ket}*}R^q j'^{\,\mathrm{ket}}_*\Lambda \ ,$$

where K' runs through the finite extensions of K contained in $\overline{K}$, and the conclusion follows.

In [**Na 2**] Nakayama gave a proof of $(*)$ independent of Gabber's purity theorem (which is the key ingredient in 7.4). Kato gave an alternate proof as a corollary of a log smooth base change theorem (see 9.6).

***Corollary 8.4*.** — *Let X be a log smooth fs log scheme over S. Then we have a canonical isomorphism in $D^+(S_s \times_s \eta, \Lambda)$:*

$$(8.4.1) \qquad R\Psi^{\mathrm{cl}}(R\varepsilon_*\Lambda) = R\widetilde{\varepsilon}_*(\Lambda|X_{\tilde{s}}),$$

and in particular, if the log structure of X is vertical (8.2.3)*,*

$$R\Psi^{\mathrm{cl}}\Lambda = R\widetilde{\varepsilon}_*(\Lambda|X_{\tilde{s}}).$$

A striking consequence of 8.4 is that, when X is log smooth over S (resp. log smooth and vertical over S), $R\Psi^{\mathrm{cl}}R\varepsilon_*\Lambda$ (resp. $R\Psi^{\mathrm{cl}}\Lambda$), *as an object of* $D^+(X_s \times_s \eta, \Lambda)$, *depends only on X_s endowed with its log structure.* It has been shown by Kisin [**Ki 2**] (and independently by Vidal) that if the log structure of X is vertical, the log structure of X_s depends only on some infinitesimal neighbourhood of $\overset{\circ}{X}_s$ in $\overset{\circ}{X}$, in the following sense: if X_1, X_2 are fs log schemes over S which are log smooth and vertical, there

exists an integer $m \geqslant 1$ such that if $\overset{\circ}{X}_1 \otimes A/\pi^{m+1}$ and $\overset{\circ}{X}_2 \otimes A/\pi^{m+1}$ are isomorphic (as schemes over A/π^{m+1}) then so are $(X_1)_s$ and $(X_2)_s$ (as log schemes over s); here π is a uniformizing parameter of A. In the case of semistable reduction, $m = 1$ suffices (*cf.* ([**Na 2**], A4)).

Since the wild inertia P acts trivially on $X_{\overline{s}}$ (8.1), it also acts trivially on $R\Psi^{\mathrm{cl}}(R\varepsilon_*\Lambda) = R\widetilde{\varepsilon}_*(\Lambda|X_{\overline{s}})$ (resp. $R\Psi^{\mathrm{cl}}(\Lambda)$), so we have

$$\begin{aligned} R\Psi^{\mathrm{cl}}(R\varepsilon_*\Lambda) &= R\Gamma(P, R\Psi^{\mathrm{cl}}(R\varepsilon_*\Lambda)), \\ R^q\Psi^{\mathrm{cl}}(R\varepsilon_*\Lambda) &= \Gamma(P, R^q\Psi^{\mathrm{cl}}(R\varepsilon_*\Lambda)) \end{aligned} \tag{8.4.2}$$

(note $\Gamma(P, -)$ is exact on the category of $\Lambda[P]$-modules on $X_{\overline{s}}$). Therefore, when the log structure of X is vertical, we have

$$\begin{aligned} R\Psi^{\mathrm{cl}}(\Lambda) &= R\Gamma(P, R\Psi^{\mathrm{cl}}(\Lambda)) \\ R^q\Psi^{\mathrm{cl}}(\Lambda) &= \Gamma(P, R^q\Psi^{\mathrm{cl}}(\Lambda)). \end{aligned}$$

The tameness of the $R^q\Psi\Lambda$ had been proven by Rapoport-Zink [**R-Z**] in the case X is étale locally of the form $S[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} - \pi)$, with π a prime element in A and a_i prime to p for all i. By (8.4.1), this tameness holds even if some a_i are divisible by p but $\gcd(a_1, \ldots, a_r, p) = 1$. When $a_1 = \cdots = a_r = 1$ – the case of semistable reduction – the whole inertia I acts trivially on the $R^q\Psi\Lambda$ (loc. cit.), a result which also follows from 8.4 as we shall see later.

Combining (8.4.2) with (8.2.6) and 7.5 we get:

Corollary 8.4.3. — *Let X be a proper and log smooth fs log scheme over S, and let $U \hookrightarrow X_\eta \hookrightarrow X$ be the open subset of triviality of the log structure of X. Then the wild inertia P acts trivially on $H^q(U^{\mathrm{cl}}_{\overline{\eta}}, \Lambda)$ and the specialization map* (8.2.7)

$$\mathrm{sp} : H^q(X^{\mathrm{cl}}_{\overline{s}}, R\widetilde{\varepsilon}_*\Lambda) \longrightarrow H^q(U^{\mathrm{cl}}_{\overline{\eta}}, \Lambda)$$

is a (Galois equivariant) isomorphism for all q.

Unraveling (8.4.1) yields the following description of the sheaves of nearby cycles $R^q\Psi^{\mathrm{cl}}(R\varepsilon_*\Lambda)$ ($= R^q\Psi^{\mathrm{cl}}\Lambda$ when X is vertical):

***Corollary 8.4.4* ([Na 2], 3.5)**. — *Let $f : X \to S$ be a log smooth fs log scheme over S, and let $\mathcal{F} := R\varepsilon_*\Lambda = Rj^{\mathrm{cl}}_*\Lambda \in D^+(X_\eta, \Lambda)$ (where $j : U \hookrightarrow X_\eta \hookrightarrow X$ is the open subset of triviality of the log structure of X). Let C be the (classically) locally constant sheaf of finitely generated abelian groups on X_s defined by*

$$C := \mathrm{Coker}(f^*(\overline{M}_s^{\mathrm{gp}}) \xrightarrow{\phi} (\overline{M}_{X_s}^{\mathrm{gp}}))/\mathrm{torsion},$$

where φ is the canonical map. Then:

(a) *There is a natural, Galois equivariant isomorphism*

$$R^0\Psi^{\mathrm{cl}}\mathcal{F} \otimes \Lambda^q(C_{\overline{s}} \otimes \Lambda(-1)) \longrightarrow R^q\Psi^{\mathrm{cl}}\mathcal{F}$$

for all $q > 0$.

(b) *The stalk of* $R^0\Psi^{\mathrm{cl}}\mathcal{F}$ *at a (classical) geometric point* $\overline{x}$ *over* $\overline{s}$ *is (noncanonically) isomorphic to* $\Lambda[E_{\overline{x}}]$*, where* $E_{\overline{x}} := \operatorname{Coker} f_* : I^{\log}_{\overline{x}} \to I^{\log}_{\overline{s}}$ *(a finite abelian group, isomorphic to* $\operatorname{Coker}\operatorname{Hom}(\Phi_{\overline{x}}, \widehat{\mathbb{Z}}'(1))$ *with* ϕ *as above). The tame inertia* $I^t \cong \widehat{\mathbb{Z}}'(1))$ *acts on* $(R^0\Psi^{\mathrm{cl}}\mathcal{F})_{\overline{x}}$ *by the regular representation,* i.e. *through the composite map* $I^t \cong I^{\log}_{\overline{s}} \hookrightarrow \Lambda[I^{\log}_{\overline{s}}] \to \Lambda[E_{\overline{x}}]$.

When X has semistable reduction over S with special fiber $X_s = D$ a divisor with simple normal crossings ΣD_i, then $U = X_\eta$, $\mathcal{F} = \Lambda_X$, $C = \operatorname{Coker}\mathbb{Z}_D \to \oplus\mathbb{Z}_{D_i}$, $R^0\Psi^{\mathrm{cl}}\Lambda = \Lambda$, and one recovers the classical global formula for $R^q\Psi\Lambda$ (*cf.* [**Na 2**] and [**I2**]). The *global* structure of the constructible sheaf $R^0\Psi^{\mathrm{cl}}\mathcal{F}$ is controlled by the projection

$$\alpha : \overset{\circ}{X}_{\widetilde{s}} \longrightarrow \overset{\circ}{X}_{\overline{s}} ;$$

it can be proved that α is a *finite* map, which is the composition of a closed surjective immersion with a finite map with separable residual extensions, such that $R^0\Psi^{\mathrm{cl}}\mathcal{F}$ is just the direct image by α of the constant sheaf Λ (see [**Ka 7**], [**Vi 3**]). In particular, with the notation above, if we set $d_x = \operatorname{card} E_{\overline{x}}$, then $d_x = \sum_{\alpha(y)=x}[k(y) : k(x)]$. If $N = \sup d_x$, then $T^N = 1$ on $R^q\Psi^{\mathrm{cl}}\mathcal{F}$ for any $T \in I$, and therefore, in the situation of 8.4.3

$$(T^N - 1)^{q'} | H^q(U^{\mathrm{cl}}_{\overline{\eta}}, \Lambda) = 0 \tag{8.4.4.1}$$

where q' is the minimum of $q+1$ and the rank of $\overline{M}^{\mathrm{gp}}_X$ $(= \sup \mathrm{rk}(\overline{M}^{\mathrm{gp}}_X)_{\overline{x}}$, $\overline{x}$ running through the geometric points of $X)$.

The proof of 8.4.4 from (8.4.1) is an application of 5.2, using either one of the two factorizations of $\widetilde{\varepsilon} : X^{\mathrm{ket}}_{\widetilde{s}} \to X^{\mathrm{cl}}_{\overline{s}}$ in 8.2 as $\widetilde{\varepsilon} = \alpha \circ \varepsilon = \varepsilon \circ \beta$:

$$\begin{array}{ccc} X^{\mathrm{ket}}_{\overline{s}} & \xleftarrow{\ \beta\ } & X^{\mathrm{ket}}_{\widetilde{s}} \\ {\scriptstyle\varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} \\ X^{\mathrm{cl}}_{\overline{s}} & \xleftarrow{\ \alpha\ } & X^{\mathrm{ket}}_{\widetilde{s}} \end{array}$$

(see([**Na 2**], 3.5) and [**Vi 3**]).

8.5. Let X be a scheme over S, which is proper and has semistable reduction with special fiber $X_s = D$ a divisor with simple normal crossings $D = \sum D_i$. Then there is defined the *Rapoport-Zink-Steenbrink double complex* realization $A^{\cdot\cdot}$ of $R\Psi^{\mathrm{cl}}\Lambda$ and its associated *weight spectral sequence* [**R-Z**]

$$E_1^{-r,n+r} \Longrightarrow H^n(X_{\overline{\eta}}, \Lambda), \tag{8.5.1}$$

where

$$E_1^{-r,n+r} = \bigoplus_{\substack{q \geqslant 0 \\ r+q \geqslant 0}} H^{n-r-2q}(D^{(r+1+2q)} \otimes \overline{k}, \Lambda)(-r-q)$$

and $D^{(r+1+2q)}$ is the disjoint sum of the intersections $r+1+2q$ by $r+1+2q$ of the components D_i of the divisor D.

It follows from (8.4.1) that these can be constructed purely in terms of X_s as a log scheme with the log structure induced from the canonical one on X (associated to D). Indeed the whole construction stems out from the choice of a complex of $\Lambda[I^t]$-modules on $X_{\overline{s}}$ with nonnegative degrees, representing $R\Psi^{\mathrm{cl}}\Lambda$; the point is that the inertia acts trivially on the cohomology sheaves $R^q\Psi^{\mathrm{cl}}\Lambda$.

By letting $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}$, ℓ prime invertible on S, taking the inverse limit when ν varies, and tensoring with $\mathbb{Q}$, one deduces from (8.5.1) a spectral sequence

$$E_1^{-r,n+r} \Longrightarrow H^n(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) \tag{8.5.2}$$

where

$$E_1^{-r,n+r} = \bigoplus_{\substack{q\geqslant 0\\ r+q\geqslant 0}} H^{n-r-2q}(D^{(r+1+2q)}\otimes\overline{k}, \mathbb{Q}_\ell)(-r-q).$$

When k is a finite field, the Weil conjecture [**D1**] implies that the initial term of (8.5.2) is pure of weight r, and consequently (8.5.2) degenerates at E_2. This degeneration holds even if k is not finite. Indeed, because (8.5.1) can be defined purely in termes of the log scheme X_s, a specialization argument due to Nakayama [**Na 3**] enables one to reduce to the finite field case. When $k=\mathbb{C}$, using the standard comparison theorems between Betti and classical étale cohomology, one recovers the degeneration results of Steenbrink ([**Ste 1**], [**Ste 2**]).

8.6. In the situation of 8.5, the complex $R\Psi^{\mathrm{cl}}\mathbb{Q}_\ell[d]$, where $d=\dim X/S$, is a perverse sheaf, of which the *logarithm of the monodromy* $N = \log T\otimes\check{T}$ (where T is a topological generator of $\mathbb{Z}_\ell(1)$) is a nilpotent endomorphism. Up to a shift, the weight spectral sequence (8.5.2) is associated to the monodromy filtration of this perverse sheaf (*cf.* [**I2**]). It is conjectured that if X_s is projective, then the abutment filtration of (8.5.2) coincides with the monodromy filtration. This is the so-called *monodromy-weight conjecture*. This has been proven by Deligne in equal characteristic $p>0$ (more precisely, for S equal to the henselization at a closed point of a smooth curve over a finite field), and by Rapoport-Zink in mixed characteristic for $d\leqslant 2$.

8.7. The perversity of $R\Psi^{\mathrm{cl}}\mathbb{Q}_\ell[d]$ holds for any scheme X flat over S, generically smooth, of pure relative dimension d. As Gabber observed, it is not hard to show, using de Jong's theorem over a discrete valuation ring ([**dJ**], 6.5), that the monodromy of this perverse sheaf is quasi-unipotent, so that one can define its logarithm N and the corresponding spectral sequence of monodromy filtration associated to N. Again, for X/S proper, because of Gabber's results (see [**Bry**] and [**I2**]) one expects its degeneration at E_2, and for X_s projective, the coincidence of the abutment filtration with the monodromy filtration. As for the construction of the spectral sequence and its degeneration at E_2, one can hope that the case where X underlies a vertical, log

smooth log scheme over S is within reach. At least, the problem can be reduced to one over a standard log point (1.3). The monodromy-weight conjecture in the same case for X/S projective and in equal characteristic $p > 0$ should also be accessible, though not being a trivial consequence of Deligne's results in Weil II [**D1**] (the problem is to pass from the henselization at a closed point of a smooth curve over a finite field to an arbitrary henselian trait of char. p).

8.8. There is a more or less classical relation between the monodromy-weight conjecture and the *local invariant cycle* problem. Let X be a proper, flat scheme over S, of relative dimension d, generically smooth, with special fiber X_s projective over s. Assume that the quasi-unipotence of the monodromy of the perverse sheaf $\Psi := R\Psi^{\mathrm{cl}}\mathbb{Q}_\ell[d]$ has been established. Consider its logarithm N and the corresponding *kernel filtration* $K_i = \operatorname{Ker} N^{i+1} : \Psi \to \Psi$. This filtration defines a quasi-filtration of Ψ in $D^b(X_{\overline{s}}, \mathbb{Q}_\ell)$, in the sense of ([**Sa**], 5.2.17), and hence a spectral sequence ((loc. cit.), see also ([**D2**], Appendice)):

$$E_1^{ij} = H^{i+j}(X_{\overline{s}}, \operatorname{gr}_K^i \Psi) \Longrightarrow H^{i+j}(X_{\overline{s}}, \Psi) = H^{i+j+d}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell). \tag{8.8.1}$$

Assume furthermore that X satisfies the monodromy-weight conjecture (8.6). Then, by analogy with Saito-Zucker's results over $\mathbb{C}$ ([**Sa-Z**], 0.4), one can expect that (8.8.1) degenerates at E_2 and that its abutment filtration is the kernel filtration $K_i = \operatorname{Ker} N^{i+1}$ on $H^*(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$. By an elementary lemma of homological algebra ([**Sa-Z**], 1.4.1), it would indeed be enough for this to establish the degeneration at E_2 of an auxiliary spectral sequence, namely the spectral sequence of hypercohomology of $X_{\overline{s}}$ with coefficients in $\operatorname{gr}_K \Psi$, filtered by the filtration M induced by the monodromy filtration of Ψ:

$$E_1^{ij} = H^{i+j}(X_s, \operatorname{gr}_M^i \operatorname{gr}_K \Psi) \Longrightarrow H^{i+j}(X_{\overline{s}}, \operatorname{gr}_K \Psi). \tag{8.8.2}$$

If the expectation above about (8.8.1) is fulfilled, then we get an exact sequence

$$H^m(X_{\overline{s}}, \operatorname{gr}_0^K \Psi[-d]) \longrightarrow H^m(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^m(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell). \tag{8.8.3}$$

This exact sequence is to be compared with the *local invariant cycle property*, which asserts that the *specialization map*

$$\mathrm{sp} : H^m(X_{\overline{s}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^m(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)^I \tag{8.8.4}$$

is *surjective*. Assume that X has strict semistable reduction (*i.e.* semistable reduction and X_s is a divisor with strict normal crossings in X). Then the Rapoport-Zink calculation of Ψ by a Steenbrink-type double complex [**R-Z**] (see also ([**I2**], 3.11) shows that the kernel filtration on $\Psi[-d]$ coincides with the *canonical* filtration defined by the canonical truncations $\tau_{\leqslant i}$, so that (8.8.1), after a suitable shift and renumbering, coincides with the usual *spectral sequence of vanishing cycles*

$$E_2^{ij} = H^i(X_{\overline{s}}, R^j \Psi \mathbb{Q}_\ell) \Longrightarrow H^{i+j}(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell). \tag{8.8.5}$$

Moreover, at least when s is the spectrum of a finite field, it follows from Rapoport-Zink's description of Ψ and of the Weil conjectures [**D1**] that (8.8.2) degenerates at E_2. Therefore when the monodromy-weight conjecture holds, (8.8.5) degenerates at E_3 and has the kernel filtration as abutment filtration, (8.8.3) holds and can be rewritten

$$H^m(X_{\overline{s}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^m(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{N} H^m(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell). \tag{8.8.6}$$

Finally, since I acts unipotently on $H^m(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ in this case, we have

$$\mathrm{Ker}(N : H^m(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^m(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)) = H^m(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)^I, \tag{8.8.7}$$

and (8.8.6) is but the local invariant cycle property (8.8.4). One can perhaps expect that the results of this discussion still hold when X underlies a vertical, log smooth log scheme over S instead of having strict semistable reduction. In general, however, (8.8.7) does not hold, the kernel filtration on Ψ is not the canonical filtration, and the local invariant cycle property may be true while the exactness of (8.8.6) fails. To illustrate this, consider the following example, which was communicated to me by Gabber.

Let k be an algebraically closed field of characteristic exponent p, let d be an integer $\geqslant 3$, prime to p, let S be the henselization at the origin of the affine line over k, with local parameter t, and let $X \subset \mathbb{P}^2_S$ be the hypersurface defined by the equation

$$tx_0^d + x_1^d + x_2^d = 0 \ ,$$

where (x_0, x_1, x_2) are homogeneous coordinates on $\mathbb{P}^2$. Then X is smooth over k, and is a relative (twisted) Fermat curve over S. After base change by $t \mapsto t^d$, X becomes constant over η, so the inertia I acts on $H^1(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ through μ_d (by the standard action of μ_d on the Fermat curve $x_0^d + x_1^d + x_2^d = 0$ given by $a(x_0, x_1, x_2) = (ax_0, x_1, x_2)$). Hence (as is well known and elementary)

$$H^1(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)^I = 0 \ .$$

On the other hand, the special fiber X_s consists of the bunch of lines $x_1^d + x_2^d = 0$, and in particular is reduced; since X/S is flat, we thus have $R^0\Psi\mathbb{Q}_\ell = \mathbb{Q}_\ell$, hence

$$H^1(X_s, R^0\Psi\mathbb{Q}_\ell) = H^1(X_s, \mathbb{Q}_\ell) = 0 \ .$$

Therefore we cannot have the degeneration of (8.8.5) at E_3 with kernel filtration as abutment, since (8.8.6) fails, N being zero, and $H^1(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ of dimension $(d-1)(d-2) > 0$. However, the local invariant cycle property holds, which agrees with Deligne's general result ([**D1**], Weil II, 3.6.11). Note that X, equipped with the log structure given by the special fiber is *not log smooth* over S; indeed X is not log regular, since the rank of $\overline{M}^{\mathrm{gp}}$ at the singular point of X_s is $d \geqslant 3$.

8.9. Let X/S and U be as in 8.4.3 and assume $X_{\overline{\eta}}$ connected. Let $\pi_1^{(p')}(U_{\overline{\eta}})$ denote the maximal prime to p quotient of the fundamental group of $U_{\overline{\eta}}$ (relative to some geometric base point). Then $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ acts on $\pi_1^{(p')}(U_{\overline{\eta}})$ by outer automorphisms: we have a representation

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Out}(\pi_1^{(p')}(U_{\overline{\eta}})).$$

Using Fujiwara-Kato's purity result 7.6, Kisin has proven the following theorem, which complements 8.4.3:

***Theorem 8.10* ([Ki 1], 1.16).** — *The homomorphism ρ above factors through the tame quotient G/P, and depends only on the log scheme X_s (with log structure induced by that of X).*

9. Full log étale topology and cohomology

9.1. Let X be an fs log scheme. The *(full) log étale site* of X

$$X_{\mathrm{loget}}$$

(abbreviated to X_{et} when no confusion can arise) is defined as follows. The objects of X_{loget} are log étale maps of fs log schemes $T \to X$ (1.5). Morphisms are X-maps $T' \to T$ (such a map is automatically log étale (1.5)). Covering families are maps $f : T' \to T$ of X_{loget} such that f is *universally surjective*, which means that after any base change by a map $S \to T$ of fs log schemes, the underlying map of schemes $\overset{\circ}{f}{}'$ of $f' = f \times_T S$ (base change taken in the category of fs log schemes) is surjective. These covering families form a pretopology whose associated topology, called the *log étale topology*, defines the log étale site of X.

Here are two typical examples of covering families:

(i) a Kummer log étale map $f : T' \to T$ (1.6) such that $\overset{\circ}{f}$ is surjective (then f is necessarily universally surjective, as observed in 2.1);

(ii) a log blow-up $f : T_I \to T$ (6.1); note that a Zariski open subset U of T_I can surject to T but, since $f \times_T T_I : T_I \times_T T_I \to T_I$ is an isomorphism by 3.3, it universally surjects to T if and only if $U = T_I$.

Actually it is not hard to show (Nakayama) that coverings of type (i) and (ii) generate the log étale topology: if $f : T' \to T$ is a log étale map such that T admits a chart $T \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[P]$ and $\overset{\circ}{T}{}'$ is quasi-compact, then there exists an ideal I in P such that $f \times_T T_I$ is Kummer.

Because log blow-ups are covering families, it may happen, in contrast with 2.6, that, for a map $Y \to X$ of fs log schemes, the functor $\mathrm{Hom}_X(-, Y)$ on X_{loget} is not a sheaf. For this functor to be a sheaf it is necessary and sufficient that $Y(U) \xrightarrow{\sim} Y(U_I)$ for any log blow-up $U_I \to U$ with U log étale over X.

Nakayama shows that the topos associated to X_{et} admits enough points: as a conservative family, one can take the functors $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x := \mathrm{ind.lim}\, \mathcal{F}(X')$, where x is a log geometric point of X (4.1 (b)) such that $\overline{M}_x$ is *valuative* and X' runs through the log étale, x-pointed fs log schemes X' over X (a monoid P is called valuative if it is saturated and for any $a \in P^{\mathrm{gp}}$, either a or a^{-1} is in P; Kato has developed a vast theory of valuative log schemes, see [**Ka 2**] (and [**I1**] for a survey)). Another way – perhaps more conceptual but essentially equivalent – of constructing points of X_{et} is the following. For x a geometric point of X, choose a chart $U \to \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[P]$ of X in a (classical) étale neighborhood of x. For each finitely generated and nonempty ideal I of P, let U_I be the log blow-up of U along I (6.1). These U_I form an inverse system indexed by the set $\mathcal{I}(P)$ of finitely generated and nonempty ideals I, partially ordered by divisibility. Choose a compatible system $(x(\cdot) = (x(I))$ of log geometric points $x(I)$ of U_I above x. If $\mathcal{F}$ is a sheaf on X_{et}, define $\mathcal{F}_{x(\cdot)} = \mathrm{ind.lim}\, \mathcal{F}_{x(I)}$ where I runs through $\mathcal{I}(P)$ and $\mathcal{F}_{x(I)}$ is defined as in 4.3. Then $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{x(I)}$ is a point of X_{et}, and such points form a conservative system.

9.2. Let $f : X \to Y$ be a map of fs log schemes. As in 2.3, base-changing by f in the category of fs log schemes defines an inverse image functor

$$f^{-1} : Y_{\mathrm{et}} \longrightarrow X_{\mathrm{et}},$$

which is continuous and commutes with finite inverse limits, hence defines a morphism of sites (resp. topoi)

$$f_{\mathrm{et}} : X_{\mathrm{et}} \longrightarrow Y_{\mathrm{et}}.$$

These morphisms satisfy the usual transitivity isomorphism for a composition.

9.3. Let X be an fs log scheme. As the log étale topology is finer than the Kummer étale one, we have a natural map of sites (resp. topoi)

$$\kappa : X_{\mathrm{et}} \longrightarrow X_{\mathrm{ket}}.$$

When the log structure of X has the property that $\overline{M}^{\mathrm{gp}}$ is of rank $\leqslant 1$ at each geometric point of X, then κ is an equivalence. This is the case in particular when X is a trait (with its canonical log structure) or a standard log point (1.3).

Since the full log étale topology is obtained from the Kummer one by adding the log blow-ups, the cohomological properties of κ are controlled by Fujiwara-Kato's theorems 6.2, 6.10. As Nakayama showed (private communication), it is easy to derive from them the following results:

Theorem 9.4. — *Let X be an fs log scheme, and let $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$.*

(a) *The inverse image functor κ^** (9.3) *induces an equivalence from the category of finite locally constant sheaves on X_{ket} to the category of finite locally constant sheaves on X_{et}.*

(b) *For any* $\mathcal{F} \in D^+(X_{\mathrm{ket}}, \Lambda)$*, the adjunction map*

$$\mathcal{F} \longrightarrow R\kappa_* \kappa^* \mathcal{F}$$

is an isomorphism (and therefore the inverse image map

$$\kappa^* : H^q(X_{\mathrm{ket}}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X_{\mathrm{et}}, \kappa^* \mathcal{F})$$

is an isomorphism for all q*).*

Part (a) of 9.4 can be reformulated by saying that for every valuative log geometric point x of X_{et} (9.1), if one defines the fundamental group $\pi_1(X_{\mathrm{et}}, x)$ of X_{et} at x, in the usual way, as the (profinite) automorphism group of the fiber functor $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x$ on the category of finite locally constant sheaves on X_{et}, then the natural map (4.6)

$$\pi_1(X_{\mathrm{et}}, x) \longrightarrow \pi_1(X_{\mathrm{ket}}, x) = \pi_1^{\log}(X, x)$$

is an isomorphism. It is not known whether the statement analogous to (a) with "finite" removed holds.

As we mentioned after 6.3, proper base change for the Kummer étale cohomology requires extra assumptions on the morphisms. These restrictions can be removed if one works with the full log étale cohomology, as was shown by Kato:

***Theorem 9.5* ([Ka 5])**. — *Let* Λ *be as in* 9.4*. Let*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{h} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \tag{9.5.1}$$

be an fs cartesian square of fs log schemes, where $\mathring{f}$ *is proper. Then for* $\mathcal{F} \in D^+(X_{\mathrm{et}}, \Lambda)$*, the base change map*

$$g^* R f_* \mathcal{F} \longrightarrow R f'_* h^* \mathcal{F}$$

is an isomorphism.

The proof consists of a rather long reduction to the proper base change theorem for classical étale cohomology ([**SGA 4**] XII 5.1), using 9.4 (b) as a key ingredient.

Nakayama's result on vanishing cycles 8.3 is a *local acyclicity* statement for a log smooth map over a trait. In classical étale cohomology any smooth map is locally acyclic and this in turn implies a smooth base change theorem and (combined with the finiteness theorem) a specialization theorem for proper smooth maps ([**SGA 4**], XV, XVI). Unfortunately, no such generalizations hold for Kummer étale cohomology ([**Na 2**], 4.3, B1). In this respect, however, the full log étale cohomology behaves much better. Indeed, Kato proved the following log smooth base change theorem:

***Theorem 9.6* ([Ka 5])**. — *Consider a cartesian square* (9.5.1)*, where g is log smooth and $\overset{\circ}{f}$ is quasi-compact and quasi-separated. Let $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ with n invertible on Y. Then for $\mathcal{F} \in D^+(X_{\mathrm{et}}, \Lambda)$, the base change map*

$$g^* Rf_* \mathcal{F} \longrightarrow Rf'_* h^* \mathcal{F}$$

is an isomorphism.

The crucial case to which Kato reduces the proof of 9.6 is the case where g is the affine line over Y, with its standard log structure. This requires a delicate global argument inspired from Nakayama's proof of 8.3 in [**Na 2**].

Note that 8.3 is an immediate corollary of 9.6. Indeed, thanks to 9.4 (b), 9.6 reduces the verification of 8.3 to the trivial case where $X = S$.

9.7. A map $f : X \to Y$ of fs log schemes is said to be *compactifiable* if $\overset{\circ}{Y}$ is quasi-compact and quasi-separated and f can be factored into $f = g \circ i$ where $\overset{\circ}{g}$ is proper and $\overset{\circ}{i}$ is an open immersion (in other words, if $\overset{\circ}{f}$ is $\overset{\circ}{Y}$-compactifiable in the sense of ([**SGA 4**] XVII 3.2). By the proper base change theorem (9.5), the composition $Rg_* \circ i_! : D^+(X_{\mathrm{et}}, \Lambda) \to D^+(Y_{\mathrm{et}}, \Lambda)$ does not depend, up to a transitive system of isomorphisms, on the factorization $f = g \circ i$ (here $i_!$ is defined as $i''_! Ri'_*$ when i is factored as $i''i'$ where i'' is a strict open immersion and $\overset{\circ}{i'}$ is the identity). As usual, one defines

$$Rf_! : D^+(X_{\mathrm{et}}, \Lambda) \longrightarrow D^+(Y_{\mathrm{et}}, \Lambda) \tag{9.7.1}$$

as the corresponding limit. The proper base change theorem then implies that $Rf_!$ commutes with any base change.

A theory of $Rf_!$ was first developed by Nakayama in the Kummer étale framework [**Na 1**]. Working with the full log étale sites has great advantages as regard to *finiteness theorems*. For $f : X \to Y$ proper and n invertible on X, it is not true that if $\mathcal{F}$ is a constructible sheaf of Λ-modules on X, $R^i f_* \mathcal{F}$ is constructible, unless f satisfies the additional hypothesis of being *log injective* (*i.e.* for all geometric point $\overline{x}$ of X with image $\overline{y}$ in Y, $\overline{M}_{\overline{y}} \to \overline{M}_{\overline{x}}$ is injective) ([**Na 1**], 5.5.2, B3 (i)). This restriction can be lifted in the context of full log étale cohomology. Namely, we have the following theorem of Kato:

***Theorem 9.8* ([Ka 6])**. — *Let $f : X \to Y$ be a compactifiable* (9.7) *map of fs log schemes, with Y locally noetherian, and let Λ be as in* 9.4*. Then for $\mathcal{F} \in D_c^+(X_{\mathrm{et}}, \Lambda)$, we have $Rf_! \mathcal{F} \in D_c^+(Y_{\mathrm{et}}, \Lambda)$, where $Rf_!$ is the functor defined in* (9.7.1)*.*

Here a sheaf $\mathcal{G}$ of Λ-modules on X_{et} is called *constructible* if, locally for the log étale topology on X, there exists a finite decomposition of X into locally closed subsets X_i such that the restriction of $\mathcal{G}$ to X_i is locally constant with fibers of finite type over Λ, and $D_c^+(-\Lambda)$ denotes the full subcategory of $D^+(-, \Lambda)$ consisting of complexes $\mathcal{F}$ such that $\mathcal{H}^i(\mathcal{F})$ is constructible for all i.

The key point in the proof of 9.8 is that f may be rendered exact (1.6) by log étale localization on Y. Standard dévissages using the proper base change theorem then reduce to the case where f is exact, $\overset{\circ}{f}$ is the identity, $\mathcal{F}$ consists of a constant and constructible sheaf, and $n = \ell^\nu$, with ℓ prime, either invertible or zero on X. This case is treated by a direct argument using the comparison theorems 5.2 and 9.4 (b).

As in the case of classical étale cohomology ([**SGA 4**] XIV), combining the smooth base change theorem 9.6 with the finiteness theorem 9.8, one gets a specialization (or proper smooth base change) theorem:

Theorem 9.9. — *Let $f : X \to Y$ be a proper and log smooth map of fs log schemes, with Y locally noetherian. Let $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ with n invertible on Y. Let $\mathcal{F}$ be a locally constant and constructible sheaf of Λ-modules on X_{et}. Then $R^q f_* \mathcal{F}$ is locally constant and constructible for all q.*

In view of 9.4, 9.9 implies the same result for X_{et} replaced by X_{ket} (a particular case of this consequence had been previously proven by Nakayama ([**Na 2**], 4.3).

Proceeding as in ([**SGA 4**] XVII), one can define a partial right adjoint $Rf^!$ to $Rf_!$, giving rise to a global duality formula of the form $Rf_* R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{K}, Rf^! \mathcal{L}) \cong R\underline{\mathrm{Hom}}(Rf_! \mathcal{K}, \mathcal{L})$ (see [**Na 1**] in the Kummer étale case). The problem, however, is to calculate $Rf^!$. Some cases have been treated by Nakayama. For example, we have the following result, reminiscent of the classical Poincaré duality theorem ([**SGA 4**] XVIII 3.2.5):

Theorem 9.10 **(Nakayama)**. — *Let $f : X \to S$ be a compactifiable, log smooth, vertical* (8.2.3) *map, with S as in* 8.3, *and let $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ with n invertible on S. Then*

$$Rf^! \Lambda_{S_{\mathrm{ket}}} = \Lambda_{X_{\mathrm{ket}}}(d)[2d],$$

where d is the relative dimension of f.

A similar result holds with S replaced by a trivial or standard log point (1.3). See ([**Na 1**], 7.5), ([**Na 2**], 4.4) for more general statements.

9.11. Unfortunately, if $f : X \to Y$ is a map of fs log schemes over a trivial log point s (1.3), with $\overset{\circ}{X}$ and $\overset{\circ}{Y}$ separated and of finite type over s, and $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, n invertible on s, it is not true in general that Rf_* carries $D_c^+(X_{\mathrm{et}}, \Lambda)$ into $D_c^+(Y_{\mathrm{et}}, \Lambda)$, as one would expect, by analogy with Deligne's finiteness theorem in ([**SGA 4 1/2**], Th. finitude). Nakayama gives the following counterexample: let S be a standard log point over s (1.3), $Y = \mathbb{A}^1_S = S \times_s \mathbb{A}^1_s$ the affine line over S, with the log structure pulled back from the standard log structure of $\mathbb{A}^1_s$, and $f : X \to Y$ the inclusion (a strict open immersion) of the complement of the zero section. Then $f_*\Lambda$ is not constructible: there is no log blow-up Y' of Y at the origin over which $f_*\Lambda$ becomes classically (or Kummer) constructible; indeed, taking again one blow-up Y'' of Y' and a point y of Y_{et} above the origin in Y', but factoring through a geometric point of the

exceptional divisor of Y'' distinct from the origin (see the construction of points of the log étale topos at the end of 9.1), we would find that the stalk of $f_*\Lambda$ at y is zero, while the stalk of $f_*\Lambda$ at the trivial point of Y_{et} located at the origin (corresponding to a constant inverse system of log points, in the language of loc. cit.) is Λ.

Finding a more flexible definition of constructibility giving rise to a formalism of six operations à la Grothendieck $(\overset{L}{\otimes}, R\underline{\mathrm{Hom}}, Rf_*, f^*, Rf_!, Rf^!)$ in suitable categories $D^b_c((-)_{\mathrm{et}}, \Lambda)$ on fs log schemes separated and of finite type over a trivial log point (or a standard log point, or a trait with its canonical log structure) looks like a difficult – perhaps intractable – problem.

Log étale cohomology is still largely an unknown territory. Transposing into it standard topics of classical étale cohomology such as cycles classes, perverse sheaves, trace and Euler-Poincaré formulas raises more or less difficult questions, which have not yet been taken up. Their study should hopefully cast a new light onto old problems, as the results in section 8 have already illustrated.

Acknowledgements. — I wish to thank K. Kato and C. Nakayama for helpful observations on an earlier draft of [**I3**], which was a starting basis for these notes. I am indebted to T. Ekedahl for his argument in the proof of Fujiwara-Kato's theorem in section 6 as well as for many useful discussions. I am grateful to the listeners of the lectures for their stimulating questions and especially to O. Gabber for several illuminating comments. I thank I. Vidal for her assistance in the understanding of delicate points of Kummer étale topology. I heartily thank O. Gabber and the referee for their careful reading of the manuscript and their suggestions for modifications and corrections. Finally, I wish to thank Mme Bonnardel for her neat typing of the manuscript.

References

[Br-M] C. Breuil and W. Messing, *Torsion étale cohomology and semi-stable reduction*, these Proceedings.

[Bry] J.-L. Brylinski, *Cohomologie d'intersection et faisceaux pervers*, Séminaire Bourbaki 1981/82, n° 585, 129-157, Astérisque 92-93, 1982.

[D1] P. Deligne, *La conjecture de Weil, I*, Publ. Math. IHES 43 (1974), 273-308; *La conjecture de Weil, II*, Publ. Math. IHES 52 (1980), 137-252.

[D2] P. Deligne, *Décompositions dans la catégorie dérivée*, Proc. of Symposia in Pure Math. 55 (1994), Part I, 115-128, AMS 1994.

[dJ] A. J. de Jong, *Smoothness, Semi-stability and Alterations*, Pub. Math. IHES 83 (1996), 51-93.

[F] K. Fujiwara, *Etale topology and the philosophy of log*, Algebraic Geometry Symposium (Kinosaki), 1990, 116-123 (in Japanese).

[F-K] K. Fujiwara and K. Kato, *Logarithmic étale topology theory*, (incomplete) preprint, 1995.

[Fu] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Studies 131, Princeton Univ. Press, 1993.

[Ga] O. Gabber, *Approaches to absolute cohomological purity*, lecture in Toulouse, July 1, 1994.

[G-M] A. Grothendieck and J. P. Murre, *The tame fundamental group of a formal neighborhood of a divisor with normal crossings on a scheme*, SLN 208, Springer-Verlag, 1971.

[I1] L. Illusie, *Logarithmic spaces (according to K. Kato)*, in Barsotti Symposium in Algebraic Geometry (V. Cristante and W. Messing, Eds.), Perspectives in Math. 15, 183-203, Academic Press, 1994.

[I2] L. Illusie, *Autour du théorème de monodromie locale*, in Périodes p-adiques, Séminaire de Bures, 1988 (Ed. J.-M. Fontaine), 9-57, Astérisque 223, 1994.

[I3] L. Illusie, *Logarithmic smoothness and vanishing cycles*, Prépublication univ. Paris-Sud 95-83, 1995.

[Ka 1] K. Kato, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, in Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins University Press (1989), 191-224.

[Ka 2] K. Kato, *Logarithmic degeneration and Dieudonné theory*, preprint, 1989.

[Ka 3] K. Kato, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie* II, *Logarithmic flat topology*, (incomplete) preprint, 1991.

[Ka 4] K. Kato, *Toric singularities*, Amer. J. Math. 116 (1994), 1073-1099.

[Ka 5] K. Kato, *Log proper base change theorem and log smooth base change theorem*, preliminary notes, 1995.

[Ka 6] K. Kato, *Constructibility, proper smooth base change*, preliminary notes, 1995.

[Ka 7] K. Kato, *Description of* $R\Psi$, preliminary notes, 1995.

[KKMS] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings* I, SLN 339, Springer-Verlag, 1973.

[K-N] K. Kato and C. Nakayama, *Log Betti cohomology, log étale cohomology, and log de Rham cohomology of log schemes over* $\mathbb{C}$, Kodai Math. J. 22 (1999), 161-186.

[Kaw-Nam] Y. Kawamata and Y. Namikawa, *Logarithmic deformations of normal crossing varieties and smoothing of degenerate Calabi-Yau varieties*, Inv. Math. 118 (1994), 395-409.

[Ki 1] M. Kisin, *Prime to p fundamental groups and tame Galois actions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 50, 4 (2000), 1099-1126.

[Ki 2] M. Kisin, *Endomorphisms of logarithmic schemes*, preprint, 1999.

[Na 1] C. Nakayama, *Logarithmic étale cohomology*, Math. Ann. 308 (1997), 365-404.

[Na 2] C. Nakayama, *Nearby cycles for log smooth families*, Comp. Math. 112 (1998), 45-75.

[Na 3] C. Nakayama, *Degeneration of ℓ-adic weight spectral sequences*, Amer. J. Math. 122 (2000), 721-733.

[Ni] W. Niziol, *Toric singularities, log blow-ups and global resolutions*, preprint, 1999.

[Od] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry, An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Erg. der Math. Bd 15, Springer-Verlag, 1988.

[Og] A. Ogus, *Logarithmic de Rham cohomology*, preprint, 1997.

[R-Z] M. Rapoport and T. Zink, *Ueber die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten, Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik*, Inv. Math. 68 (1982), 21-101.

[Sa] M. Saito, *Modules de Hodge polarisables*, Pub. RIMS, Kyoto Univ. 24 (1988), 849-995.

[Sa-Z] M. Saito and S. Zucker, *The kernel spectral sequence of vanishing cycles*, Duke Math. J. 61 (1990), 329-339.

[S-T] J.-P. Serre and J. Tate, *Good reduction of abelian varieties*, Ann. of Math. 88 (1968), 492-517.

[Ste 1] J. Steenbrink, *Limits of Hodge structures*, Inv. Math. 31 (1976), 229-257.

[Ste 2] J. Steenbrink, *Logarithmic embeddings of varieties with normal crossings and mixed Hodge structures*, Math. Ann. 301 (1995), 105-118.

[Tsu] T. Tsuji, *Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen: a survey*, these Proceedings.

[Vi 1] I. Vidal, *Morphismes log étales et descente par homéomorphismes universels*, preprint, 1999.

[Vi 2] I. Vidal, *Descente de Kummer log étale, log régularité et groupe fondamental logarithmique*, preliminary notes, 1999.

[Vi 3] I. Vidal, *On the local monodromy and zeta functions of log schemes*, work in preparation.

[Vi 4] I. Vidal, *Morphismes log étales et descente par homéomorphismes universels*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, 239-244, 2001.

[EGA IV] A. Grothendieck (avec la collaboration de J. Dieudonné), *Éléments de géométrie algébrique*, IV Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Pub. Math. IHÉS 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967).

[SGA 1] *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960-61, dirigé par A. Grothendieck, SLN 224, Springer-Verlag, 1971.

[SGA 4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963-64, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, SLN 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972, 1973.

[SGA 5] *Cohomologie ℓ-adique et fonctions L*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1965-66, dirigé par A. Grothendieck, SLN 589, Springer-Verlag, 1977.

[SGA 7] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1967-69, I, dirigé par A. Grothendieck, II par P. Deligne et N. Katz, SLN 288, 340, Springer-Verlag, 1972, 1973.

[SGA 4 1/2] *Cohomologie étale*, par P. Deligne, SLN 569, Springer-Verlag, 1977.

L. Illusie, Université de Paris-Sud, Mathématique, Bât. 425, UMR 8628 du CNRS, 91405 Orsay Cédex, France • *E-mail :* Luc.Illusie@math.u-psud.fr

Astérisque
279, 2002, p. 323–370

SEMI-STABLE CONJECTURE OF FONTAINE-JANNSEN: A SURVEY

by

Takeshi Tsuji

***Abstract.* —** We give an outline of the proof of the semi-stable conjecture of J.-M. Fontaine and U. Jannsen by O. Hyodo, K. Kato and the author. This conjecture compares the two p-adic cohomologies: p-adic étale cohomology and de Rham cohomology associated to a proper smooth variety over a p-adic field with semi-stable reduction; it especially asserts that these two cohomologies with their additional structures can be reconstructed from each other. Our proof uses syntomic cohomology, which was introduced by J.-M. Fontaine and W. Messing, as a bridge between the two cohomologies. In the appendix, we also show that the semi-stable conjecture implies the de Rham conjecture thanks to the alteration of de Jong.

1. Introduction

In these notes, we will give an outline of the proof in [**HK94**], [**Kat94a**] and [**Tsu99**] of the conjecture of J.-M. Fontaine and U. Jannsen ([**Jan89**] p. 347, [**Fon94b**] § 6) on the p-adic étale cohomology of a proper smooth variety over a p-adic field with semi-stable reduction. Here we note that two other proofs were given by G. Faltings [**Fal**] and then by W. Niziol [**Niz98b**] afterwards. (See after Theorem 1.1 below for more details.) For the history of the p-adic Hodge theory, we refer the readers to the introduction of [**FI93**] and [**Ill90**]. Besides the proof of C_{st}, a theory for p-torsion étale cohomology in the semi-stable reduction case was developed by G. Faltings and C. Breuil ([**Fal92**], [**Bre98a**] and [**Bre98b**]) after [**FI93**] and [**Ill90**] were written. See [**BM**] for a survey.

Let us recall the conjecture of Fontaine-Jannsen. Let K be a complete discrete valuation field of characteristic 0 with perfect residue field k of characteristic $p > 0$ and let O_K denote the ring of integers of K. Let W be the ring of Witt-vectors with

2000 ***Mathematics Subject Classification.* —** 14F30, 14F40.
***Key words and phrases.* —** Crystalline cohomology, etale cohomology, p-adic representation, semi-stable reduction.

© Astérisque 279, SMF 2002

coefficients in k and let K_0 denote the field of fractions of W. We choose and fix a uniformizer π of K. Let $\overline{K}$ be an algebraic closure of K and set $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. We consider a proper scheme X over O_K with semi-stable reduction, that is, a regular scheme X proper and flat over O_K whose special fiber $Y := X \otimes_{O_K} k$ is a reduced divisor with normal crossings on X.

The conjecture of Fontaine-Jannsen, which is also called the semi-stable conjecture or C_{st} for short, compares the p-adic étale cohomology $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ of the geometric generic fiber $X_{\overline{K}} := X \otimes_{O_K} \overline{K}$ of X, which is a finite dimensional vector space over $\mathbb{Q}_p$ naturally endowed with a continuous linear action of G_K, with the log crystalline cohomology $H^m_{\text{log-crys}}(X)$, which is a finite dimensional vector space over K_0 endowed with a semi-linear automorphism φ (called the Frobenius), a linear endomorphism N (called the monodromy operator) satisfying $N\varphi = p\varphi N$ and a descending filtration after $\otimes_{K_0} K$. The log crystalline cohomology with its first two structures φ and N does not depend on the choice of π, but the filtration depends on it. More precisely, the filtration on $H^m_{\text{log-crys}}(X) \otimes_{K_0} K$ is induced by the Hodge filtration on $H^m_{\mathrm{dR}}(X_K/K)$ through the isomorphism ([**HK94**] Theorem (5.1)):

$$\rho_\pi \colon H^m_{\text{log-crys}}(X) \otimes_{K_0} K \xrightarrow{\sim} H^m_{\mathrm{dR}}(X_K/K)$$

depending on the choice of π. If X has a good reduction, $H^m_{\text{log-crys}}(X)$ coincides with the usual crystalline cohomology ([**Ber74**], [**BO78**]) of the special fiber tensored with K_0 over W, the monodromy operator vanishes, and ρ_π (in this case the isomorphism was proven by Berthelot and Ogus [**BO83**]) does not depend on the choice of π. Strictly speaking, when the conjecture was made, the log crystalline cohomology was conjectural and it was constructed afterwards by Hyodo and Kato [**Hyo91**], [**HK94**].

***Theorem 1.1* (Conjecture of Fontaine-Jannsen, C_{st}).** — *With the notations and the assumptions as above, $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ is a semi-stable representation of G_K and there exist natural isomorphisms in $MF_K(\varphi, N)$:*

$$D_{\mathrm{st}}(H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)) \cong H^m_{\text{log-crys}}(X) \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

See § 2.2 *for semi-stable p-adic representations and the filtered φ-N modules in $MF_K(\varphi, N)$ associated to them. Furthermore these isomorphisms are functorial on X and compatible with the product structures and with the Chern classes in $H^m_{\text{ét}}$ and H^m_{dR} of a vector bundle on X_K.*

Since the functor D_{st} is fully faithful (§ 2.2), the theorem implies that the two cohomology groups with their additional structures can be reconstructed from each other.

This conjecture was studied by many mathematicians [**FM87**], [**Fal89**], [**KM92**], [**HK94**], [**Kat94a**], ... and completely solved by the author in [**Tsu99**]. See Theorem A2 of these notes for the compatibility with the Chern classes. Afterwards, alternative proofs were given by G. Faltings [**Fal**] and then by W. Niziol [**Niz98a**], [**Niz98b**]. In

fact, as an easy corollary of the proof of Theorem A1 of these notes, which uses the alteration of de Jong, we further see that the K_0-structure $H^m_{\text{log-crys}}(X)$ with φ and N on $H^m_{\text{dR}}(X_K/K)$ and the isomorphism in Theorem 1.1 are independent of the choice of a semi-stable model X of X_K.

We will explain the ideas of the three proofs of the conjecture. Every proof uses a certain intermediate cohomology or a K-group. Set $V^m := H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$, $D^m := H^m_{\text{log-crys}}(X)$ and $D^m_K := K \otimes_{K_0} D^m$ to simplify the notation.

I) *The method of syntomic cohomology and p-adic vanishing cycles*

The syntomic cohomology for X/O_K smooth was first introduced by J.-M. Fontaine and W. Messing [**FM87**] to prove the conjecture in the good reduction case. (See the beginning of § 5 for the idea of the definition of the syntomic cohomology.) To prove the conjecture in general, we use a log version ([**Kat94a**], [**Tsu99**]) $H^m_{\text{log-syn}}(\overline{X}, S^r_{\mathbb{Q}_p})$ $(r, m \geqslant 0)$, from which there are maps to both étale and crystalline cohomologies:

$$V^m(r) \xleftarrow{(A)} H^m_{\text{log-syn}}(\overline{X}, S^r_{\mathbb{Q}_p}) \xrightarrow{(B)} \text{Fil}^r(B_{\text{dR}} \otimes_K D^m_K) \cap (B_{\text{st}} \otimes_{K_0} D^m)^{N=0, \varphi=p^r}.$$

(cf. The proof of Corollary 2.2.9 for the last term).

Theorem 1.2 **([Kur87], [Kat94a] Corollary (5.5), [Tsu99] Theorem 3.3.4)**
The homomorphism (A) *above is an isomorphism if* $0 \leqslant m \leqslant r$.

By Theorem 1.2, we can invert the homomorphism (A) and obtain Theorem 1.1 using the fact $\dim_{\mathbb{Q}_p} V^m = \dim_{K_0} D^m$ and Poincaré duality for the two cohomology groups. The proof of Theorem 1.2 is based on the description of the p-adic vanishing cycles:

$$i^*_{\text{ét}} R^q j_{\text{ét}*} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(q) \quad (Y := X \otimes_{O_K} k \xrightarrow{i} X \xleftarrow{j} X_K)$$

in terms of the logarithmic differential modules of the special fiber Y (endowed with a natural log structure) by Bloch-Kato and Hyodo [**BK86**], [**Hyo88**]. In the case $r \leqslant p-2$, we have a good integral version of the syntomic cohomology and we can reduce the proof of Theorem 1.2 to the mod p case and use the above description. This was done by K. Kato and M. Kurihara in [**Kur87**], [**Kat94a**], and C_{st} was proved by K. Kato in the case $\dim X_K \leqslant (p-2)/2$. However, in the general case, we don't have a good integral theory so far and the proof of Theorem 1.2 involves much complicated and technical analysis of two kinds of adhoc syntomic complexes, which is the main part of [**Tsu99**].

II) *The method of almost étale extensions*

Associated to a sufficiently small affine open formal subscheme $\mathfrak{U} = \text{Spf}(A)$ of the formal completion $\widehat{X}$ of X along the special fiber, we have a ring B_{crys} with an action of $\pi_1(\text{Spec}(A_K))$. G. Faltings defined an intermediate cohomology $H^m(\mathfrak{X}_{\overline{K}}, B_{\text{crys}})$ by gluing the Galois cohomology $H^m(\pi_1(\text{Spec}(A_{\overline{K}})), B_{\text{crys}})$, to which there are canonical

homomorphisms from the two p-adic cohomology groups as follows:

$$B_{\mathrm{crys}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V^m \xrightarrow{(C)} H^m(\mathcal{X}_{\overline{K}}, B_{\mathrm{crys}}) \xleftarrow{(D)} (B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D^m)^{N=0}.$$

***Theorem 1.3* ([Fal] § 3 8. Theorem, § 4 9. Theorem).** — *The homomorphism (C) above is an almost isomorphism.*

Roughly speaking, G. Faltings proved that the ramification along the special fiber of any étale extension of $A_{\overline{K}}$ is "almost" killed by adjoining to $A_{\overline{K}}$ all p-power roots of a coordinate ([**Fal88**] I 3.1. Theorem, [**Fal**] § 2B). This allowed him to reduce the calculation of some Galois cohomology of $\pi_1(\mathrm{Spec}(A_{\overline{K}}))$ to some Galois cohomology of a simple group $\mathbb{Z}_p(1)^d$ ($d = \dim X_K$), and to prove Theorem 1.3.

III) *The method via K-theory*

There are regulator maps from a K-group to the two p-adic cohomology groups as follows:

$$V^m(r) \xleftarrow{(E)} \mathbb{Q} \otimes \varprojlim_n \text{“}F^r_\gamma/F^{r+1}_\gamma K_{2r-m}(\overline{X}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})\text{”} \xrightarrow{(F)} \mathrm{Fil}^r(B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D^m_K) \cap (B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D^m)^{N=0,\varphi=p^r}.$$

The homomorphism (F) is defined as the composite of a regulator map to the syntomic cohomology and the homomorphism (B) above.

***Theorem 1.4* ([Niz98b]).** — *The homomorphism (E) is surjective and the kernel of (F) contains the kernel of (E) if r is large enough.*

The proof is based on the comparison theorem of Thomason between algebraic K-theory and étale K-theory.

This paper is organized as follows: In § 2, we review the definition of Hodge-Tate, de Rham, semi-stable and crystalline p-adic representations including the definition and some properties of the rings B_{crys}, B_{st} and B_{dR}. In § 3, we review the theory of log structures in the sense of Fontaine-Illusie. § 4 is devoted to explaining how the usual crystalline cohomology and the comparison theorem of Berthelot-Ogus with de Rham cohomology are extended to the semi-stable reduction case. § 5 and § 6 correspond to the main part of [**Tsu99**]; We survey the proof of the key comparison theorem between syntomic and étale cohomologies. In § 7, we explain how we derive the conjecture of Fontaine-Jannsen from the above key comparison theorem. In the Appendix, we give an argument to derive C_{dR} from C_{st} using the alteration of de Jong. The main references to each section are as follows: § 2 [**Fon82**], [**Fon94a**], [**Fon94b**]. § 3 [**Kat89**]. § 4 [**HK94**]. § 5 and § 6 [**FM87**], [**Kat87**], [**Kur87**], [**Kat94a**], [**Tsu99**], [**BK86**], [**Hyo88**]. § 7 [**FM87**], [**KM92**], [**Kat94a**], [**Tsu99**].

Notation. — Throughout these notes, we fix a complete discrete valuation field of characteristic 0 with perfect residue field k of characteristic $p > 0$ and let O_K denote the ring of integers of K. We choose and fix a uniformizer π of K. We denote by

(S, N) the scheme $\mathrm{Spec}(O_K)$ endowed with the log structure defined by the closed point and by (s, N_s) its reduction mod π (see Example 3.1.1). Let W denote the ring of Witt-vectors with coefficients in k and let K_0 denote the field of fractions of W. We denote by σ the Frobenius of k, W and K_0. Let $\overline{K}$ be an algebraic closure of K, and let $\overline{k}$ be the residue field of $\overline{K}$, which is an algebraic closure of k. We set $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Let C be the completion of $\overline{K}$ with respect to its valuation and let O_C denote its ring of integers. G_K acts continuously on C and O_C. We denote by the subscript n the reduction mod p^n of schemes, log schemes etc.

2. The rings B_{crys}, B_{st}, B_{dR} and p-adic representations

Let l be a prime. An l-adic representation of G_K is a finite dimensional $\mathbb{Q}_l$-vector space V with a continuous and linear action of G_K. Recall $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. It is well-known that $l(\neq p)$-adic representations and p-adic ones have completely different natures. For $l \neq p$, if we assume $[K : \mathbb{Q}_p] < \infty$, every l-adic representation of G_K is quasi-unipotent, that is, after restricting to the Galois group of a suitable finite extension K' of K, it becomes tame and the action of the inertia group becomes unipotent. It is still true without the assumption $[K : \mathbb{Q}_p] < \infty$, if the representation is the l-adic étale cohomology of an algebraic variety over K [**Gro72**]. However a p-adic representation does not have such a simple structure in general; The image of the wild part of the inertia group can have a large image in $\mathrm{GL}(V)$. Furthermore, there are p-adic representations of a type completely different from those realized as p-adic étale cohomology, for instance, ψ^a $(a \in \mathbb{Z}_p \smallsetminus \mathbb{Z})$, where ψ denotes the composite of the cyclotomic character $G_K \to \mathbb{Z}_p^*$ with the projection $\mathbb{Z}_p^* = \mu_{p-1} \times (1 + p\mathbb{Z}_p) \to 1 + p\mathbb{Z}_p$.

Let $\mathrm{Rep}(G_K)$ denote the category of p-adic representations of G_K. In this section, we will briefly review the notions of Hodge-Tate, de Rham, semi-stable and crystalline p-adic representations, whose categories we denote by $\mathrm{Rep}_\bullet(G_K)$ with $\bullet = \mathrm{HT}$, dR, st and crys respectively. The latter implies the former, that is, we have

$$\mathrm{Rep}(G_K) \supset \mathrm{Rep}_{\mathrm{HT}}(G_K) \supset \mathrm{Rep}_{\mathrm{dR}}(G_K) \supset \mathrm{Rep}_{\mathrm{st}}(G_K) \supset \mathrm{Rep}_{\mathrm{crys}}(G_K).$$

The de Rham, semi-stable and crystalline representations were defined by J.-M. Fontaine by introducing the rings B_{dR}, B_{st} and B_{crys}, and they correspond to all, unipotent and unramified representations respectively in the $l(\neq p)$-adic case. We note that the representations ψ^a $(a \in \mathbb{Z}_p \smallsetminus \mathbb{Z})$ mentioned above are not Hodge-Tate. Furthermore, to these kinds of representations, one can also associate K or K_0-vector spaces with some linear or semi-linear structures, from which one can extract some information on the representations.

2.1. The rings B_{crys}, B_{st} and B_{dR}; their structures and properties

In this section, we will list structures and properties of the rings B_{crys}, B_{st} and B_{dR} defined by J.-M. Fontaine [**Fon82**], [**Fon94a**]. We will postpone a construction of them to § 2.3.

$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$

$(0)_{\mathrm{dR}}$ The ring B_{dR} is a complete discrete valuation field whose residue field is C. We denote by B_{dR}^{+} its valuation ring and define a descending filtration on B_{dR} by $\mathrm{Fil}^{i} B_{\mathrm{dR}} := \{x \in B_{\mathrm{dR}} \mid v(x) \geqslant i\}$ $(i \in \mathbb{Z})$, where v denotes the discrete valuation of B_{dR} normalized by $v_{\mathrm{dR}}(B_{\mathrm{dR}}^{*}) = \mathbb{Z}$.

$(1)_{\mathrm{dR}}$ The ring B_{dR} is endowed with an action of G_K compatible with the ring structure and the filtration such that the canonical homomorphism $B_{\mathrm{dR}}^{+} \to B_{\mathrm{dR}}^{+}/\mathrm{Fil}^{1} B_{\mathrm{dR}} = C$ is G_K-equivariant.

$(2)_{\mathrm{dR}}$ There exists a canonical G_K-equivariant ring homomorphism $\overline{K} \to B_{\mathrm{dR}}^{+}$ whose composite with $B_{\mathrm{dR}}^{+} \to B_{\mathrm{dR}}^{+}/\mathrm{Fil}^{1} B_{\mathrm{dR}} = C$ is the natural embedding. We regard $\overline{K}$ as a subfield of B_{dR}^{+} in the following. (See Remark 2.1.2).

$(3)_{\mathrm{dR}}$ There exists a $\mathbb{Q}_p$-linear canonical G_K-equivariant injective homomorphism $\mathbb{Q}_p(1) \hookrightarrow \mathrm{Fil}^{1} B_{\mathrm{dR}}$ such that the image of a non-zero element is a uniformizer. Using the field structure of B_{dR}, we obtain injective homomorphisms

$(3.1)_{\mathrm{dR}}$ $\quad \mathbb{Q}_p(r) \hookrightarrow \mathrm{Fil}^{r} B_{\mathrm{dR}} \quad (r \in \mathbb{Z})$

and isomorphisms

$(3.2)_{\mathrm{dR}}$ $\quad \mathrm{gr}^{i} B_{\mathrm{dR}} \xleftarrow{\sim} \mathbb{Q}_p(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{gr}^{0} B_{\mathrm{dR}} = C(i) \quad (i \in \mathbb{Z})$.

For $r \in \mathbb{Z}$, we regard $\mathbb{Q}_p(r)$ as a submodule of $\mathrm{Fil}^{r} B_{\mathrm{dR}}$ in the following.

Using $(3.2)_{\mathrm{dR}}$ and the following well-known theorem of Tate, we obtain

$(4)_{\mathrm{dR}}$ $B_{\mathrm{dR}}^{G_K} = \overline{K}^{G_K} = K$.

***Theorem 2.1.1* ([Tat67] (3.3) Theorems 1, 2).** — *$H^{0}(G_K, C(i)) = K$ (if $i = 0$), 0 (otherwise).*

Remark 2.1.2. — We don't have a G_K-equivariant section of $B_{\mathrm{dR}}^{+} \to B_{\mathrm{dR}}^{+}/\mathrm{Fil}^{1} B_{\mathrm{dR}} = C$, that is, $B_{\mathrm{dR}} \ncong C[[t]][t^{-1}]$ $(t \in \mathbb{Q}_p(1), t \neq 0)$.

$\mathbf{B}_{\mathrm{crys}}$

$(0)_{\mathrm{crys}}$ The ring B_{crys} is a G_K-stable subring of B_{dR} containing $\mathbb{Q}_p(r)$ $(r \in \mathbb{Z})$ and $P_0 = \mathrm{Frac}(W(\overline{k}))$.

$(1)_{\mathrm{crys}}$ The ring B_{crys} is endowed with a P_0-semilinear injective endomorphism (called the Frobenius) $\varphi\colon B_{\mathrm{crys}} \to B_{\mathrm{crys}}$ such that

$(1.1)_{\mathrm{crys}}$ $\varphi \circ g = g \circ \varphi$ for all $g \in G_K$

$(1.2)_{\mathrm{crys}}$ $\varphi(t) = p \cdot t$ for $t \in \mathbb{Q}_p(1) \subset B_{\mathrm{crys}} \cap \mathrm{Fil}^{1} B_{\mathrm{dR}}$

$(1.3)_{\mathrm{crys}}$ $\mathrm{Fil}^{0} B_{\mathrm{dR}} \cap B_{\mathrm{crys}}^{\varphi=1} = \mathbb{Q}_p$.

$(2)_{\mathrm{crys}}$ The canonical homomorphism $K \otimes_{K_0} B_{\mathrm{crys}} \to B_{\mathrm{dR}}$ is injective.

We obtain the following $(3)_{\mathrm{crys}}$ from $(2)_{\mathrm{crys}}$ and $(4)_{\mathrm{dR}}$.

$(3)_{\mathrm{crys}}$ $B_{\mathrm{crys}}^{G_K} = P_0^{G_K} = K_0$.

$(4)_{\mathrm{crys}}$ For a non-zero element $b \in B_{\mathrm{crys}}$ if $\mathbb{Q}_p \cdot b$ $(\subset B_{\mathrm{crys}})$ is G_K-stable, then $b \in P_0 \cdot t^{i}$ for some $i \in \mathbb{Z}$.

$\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$

The rings B_{dR} and B_{crys} do not depend on the choice of a uniformizer π of K, but B_{st} (with their structures) does. See Remark 2.1.3 (2).

$(0)_{\mathrm{st}}$ The ring B_{st} is a B_{crys}-algebra contained in B_{dR} stable under the action of G_K.

$(1)_{\mathrm{st}}$ For each compatible system $s = (s_n)_{n\geqslant 0}$ of p^n-th roots of π in $O_{\overline{K}}$, there is a canonically defined element u_s of B_{st} such that:

$(1.1)_{\mathrm{st}}$ The element u_s is transcendental over B_{crys} and $B_{\mathrm{st}} = B_{\mathrm{crys}}[u_s]$.

$(1.2)_{\mathrm{st}}$ $g(u_s) = u_{g(s)}$ for $g \in G_K$.

$(1.3)_{\mathrm{st}}$ For two systems s and s', if we set $t = (s'_n s_n^{-1})_n \in \mathbb{Z}_p(1)(O_{\overline{K}}) \subset B_{\mathrm{crys}}$, we have $u_{s'} = u_s + t$.

$(2)_{\mathrm{st}}$ The ring B_{st} is endowed with an endomorphism (called the Frobenius) $\varphi\colon B_{\mathrm{st}} \to B_{\mathrm{st}}$ extending the Frobenius on B_{crys} and characterized by

$(2.1)_{\mathrm{st}}$ $\varphi(u_s) = p \cdot u_s$ for every s.

By $(1.1)_{\mathrm{crys}}$ and $(1.2)_{\mathrm{st}}$, we have

$(2.2)_{\mathrm{st}}$ $\varphi \circ g = g \circ \varphi$ for all $g \in G_K$.

$(3)_{\mathrm{st}}$ The ring B_{st} is endowed with a B_{crys}-derivation $N\colon B_{\mathrm{st}} \to B_{\mathrm{st}}$ (called the monodromy operator) characterized by (see Remark 2.1.3 (1)):

$(3.1)_{\mathrm{st}}$ $N(u_s) = -1$ for every s.

By definition, it satisfies

$(3.2)_{\mathrm{st}}$ $N\varphi = p\varphi N$.

By $(1.2)_{\mathrm{st}}$, we have

$(3.3)_{\mathrm{st}}$ $N \circ g = g \circ N$ for all $g \in G_K$.

We obtain the following $(4)_{\mathrm{st}}$ from $(1.3)_{\mathrm{crys}}$ and the definition of N above.

$(4)_{\mathrm{st}}$ $B_{\mathrm{st}}^{N=0} = B_{\mathrm{crys}}$ and $\mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}} \cap B_{\mathrm{st}}^{\varphi=1,N=0} = \mathbb{Q}_p$.

$(5)_{\mathrm{st}}$ The canonical homomorphism $K \otimes_{K_0} B_{\mathrm{st}} \to B_{\mathrm{dR}}$ is injective.

From $(4)_{\mathrm{dR}}$ and $(5)_{\mathrm{st}}$, we obtain

$(6)_{\mathrm{st}}$ $B_{\mathrm{st}}^{G_K} = P_0^{G_K} = K_0$.

$(7)_{\mathrm{st}}$ For a non-zero element b of B_{st}, if $\mathbb{Q}_p \cdot b$ ($\subset B_{\mathrm{st}}$) is G_K-stable, then $b \in P_0 \cdot t^i$ ($\subset B_{\mathrm{crys}}$) for some $i \in \mathbb{Z}$.

Remark 2.1.3

(1) In [**Fon94a**], the monodromy operator of B_{st} is defined by $N(u_s) = 1$, but we change the sign here to make it compatible with the monodromy operator coming from its log crystalline interpretation. (See Proposition 4.4.1.)

(2) The B_{crys}-algebra B_{st} with an action of G_K, φ and N is independent of the choice of π up to canonical isomorphisms. If we choose another uniformizer π', the two embeddings $\iota_\pi, \iota_{\pi'} : B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} K \hookrightarrow B_{\mathrm{dR}}$ corresponding to π and π' are related by the formula:

$$\iota_{\pi'} = \iota_\pi \circ \exp(\log(\pi'\pi^{-1}) \cdot (N \otimes 1_K)).$$

2.2. Hodge-Tate, de Rham, semi-stable and crystalline representations

Let V be a p-adic representation of G_K, that is, a finite dimensional $\mathbb{Q}_p$-vector space endowed with a continuous and linear action of G_K. We define K-vector spaces $D^i_{\mathrm{HT}}(V)$ $(i \in \mathbb{Z})$ by

$$D^i_{\mathrm{HT}}(V) := (C(i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$$

and $D_\bullet(V)$ $(\bullet = \mathrm{dR}, \mathrm{st}, \mathrm{crys})$ by

$$D_\bullet(V) := (B_\bullet \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}.$$

$D_{\mathrm{dR}}(V)$ is a K-vector space and $D_{\mathrm{st}}(V)$ and $D_{\mathrm{crys}}(V)$ are K_0-vector spaces.

By $(5)_{\mathrm{st}}$, we have canonical injective homomorphisms

$$D_{\mathrm{crys}}(V) \longhookrightarrow D_{\mathrm{st}}(V), \tag{2.2.1}$$

$$D_{\mathrm{st}}(V) \otimes_{K_0} K \longhookrightarrow D_{\mathrm{dR}}(V). \tag{2.2.2}$$

We define the filtration on $D_{\mathrm{dR}}(V)$ by $(\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ $(i \in \mathbb{Z})$. Then, by $(3.2)_{\mathrm{dR}}$, we have canonical injective homomorphisms

$$\mathrm{gr}^i D_{\mathrm{dR}}(V) \longrightarrow D^i_{\mathrm{HT}}(V) \quad (i \in \mathbb{Z}). \tag{2.2.3}$$

From these facts and Proposition 2.2.6 below (which follows from Theorem 2.1.1 without much difficulty), we obtain

$$\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V) = 0 \quad (i \gg 0), \quad \mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V) = D_{\mathrm{dR}}(V) \quad (i \ll 0) \tag{2.2.4}$$

(2.2.5)

$$\dim_{K_0} D_{\mathrm{crys}}(V) \leqslant \dim_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V) \leqslant \dim_K D_{\mathrm{dR}}(V) \leqslant \dim_K D_{\mathrm{HT}}(V) \leqslant \dim_{\mathbb{Q}_p}(V),$$

where $D_{\mathrm{HT}}(V)$ denotes the graded module $\oplus_{i\in\mathbb{Z}} D^i_{\mathrm{HT}}(V)$.

***Proposition 2.2.6* ([Ser67] § 2 Proposition 4).** — *The canonical homomorphism*

$$\alpha_{\mathrm{HT}} \colon \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C(-i) \otimes_K D^i_{\mathrm{HT}}(V) \longrightarrow C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

is injective.

Definition 2.2.7. — With the notation above, we say that V is *Hodge-Tate* if $\dim_K D_{\mathrm{HT}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$. We define *de Rham*, *semi-stable* and *crystalline representations* similarly using $D_{\mathrm{dR}}(V)$, $D_{\mathrm{st}}(V)$ and $D_{\mathrm{crys}}(V)$ respectively instead of $D_{\mathrm{HT}}(V)$.

We define the categories MG_K, MF_K, $MF_K(\varphi, N)$ and $MF_K(\varphi)$, an object of which will be associated to a Hodge-Tate, de Rham, semi-stable and crystalline representation of G_K:

MG_K: The category of finite dimensional K-vector spaces D graded by K-subspaces D^i $(i \in \mathbb{Z})$.

MF_K: The category of finite dimensional K-vector spaces D endowed with exhaustive and separated descending filtrations $\mathrm{Fil}^i D$ $(i \in \mathbb{Z})$ by K-subspaces.

$MF_K(\varphi, N)$: The category of finite dimensional K_0-vector spaces D endowed with K_0-semilinear automorphisms φ, K_0-linear endomorphisms N such that $N\varphi = p\varphi N$, and exhaustive and separated descending filtrations $\mathrm{Fil}^i D_K$ ($i \in \mathbb{Z}$) on $D_K := K \otimes_{K_0} D$ by K-subspaces.

$MF_K(\varphi)$: The full subcategory of $MF_K(\varphi, N)$ consisting of the objects such that $N = 0$.

We have the following commutative diagram of categories and functors.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Rep}_{\mathrm{HT}}(G_K) & \xrightarrow{D_{\mathrm{HT}}} & MG_K \\
\cup & & \uparrow \mathrm{gr} \\
\mathrm{Rep}_{\mathrm{dR}}(G_K) & \xrightarrow{D_{\mathrm{dR}}} & MF_K \\
\cup & & \uparrow \\
\mathrm{Rep}_{\mathrm{st}}(G_K) & \xrightarrow{D_{\mathrm{st}}} & MF_K(\varphi, N) \\
\cup & & \cup \\
\mathrm{Rep}_{\mathrm{crys}}(G_K) & \xrightarrow{D_{\mathrm{crys}}} & MF_K(\varphi)
\end{array}$$

Proposition 2.2.8. — *Let V be a p-adic representation of G_K. Then:*

(1) *If V is de Rham, the canonical homomorphism*

$$\alpha_{\mathrm{dR}} \colon B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_{\mathrm{dR}}(V) \longrightarrow B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

is a filtered isomorphism, where we define the filtration on the LHS (resp. the RHS) by $\mathrm{Fil}^i = \sum_{i=i_0+i_1} \mathrm{Fil}^{i_0} \otimes \mathrm{Fil}^{i_1}$ (*resp.* $\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$).

(2) *If V is semi-stable, the canonical homomorphism*

$$\alpha_{\mathrm{st}} \colon B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V) \longrightarrow B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

is an isomorphism.

Proof

(1) By Proposition 2.2.6, α_{dR} is injective and strict with respect to the filtrations. Since B_{dR} is a field and $\dim_K D_{\mathrm{dR}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$, α_{dR} is a filtered isomorphism.

(2) By (1), $(5)_{\mathrm{st}}$ and (2.2.2), the homomorphism α_{st} is injective. Choose bases $\{d_i\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$ and $\{v_i\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$ of $D_{\mathrm{st}}(V)$ and V respectively and set

$$\alpha_{\mathrm{st}}(1 \otimes d_i) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} b_{ji} \cdot (1 \otimes v_j) \quad (b_{ji} \in B_{\mathrm{st}}).$$

By (1), $\det(b_{ij}) \neq 0$. On the other hand $\mathbb{Q}_p \cdot \det(b_{ij})$ is stable under G_K. Hence, by $(7)_{\mathrm{st}}$, $\det(b_{ij}) \in B_{\mathrm{st}}^*$. □

Corollary 2.2.9. — *The functor $D_{\mathrm{st}} \colon \mathrm{Rep}_{\mathrm{st}}(G_K) \to MF_K(\varphi, N)$ is fully-faithful.*

Proof. — For a semi-stable representation V, by Proposition 2.2.8 and $(4)_{\mathrm{st}}$, α_{st} and α_{dR} induces a G_K-equivariant isomorphism

$$(B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V))^{\varphi \otimes \varphi = 1, 1 \otimes N + N \otimes 1 = 0} \cap \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_{\mathrm{dR}}(V)) \xrightarrow{\sim} V. \qquad \square$$

Corollary 2.2.10. — *For a p-adic representation V of G_K and $D \in MF_K(\varphi, N)$, to prove that V is semi-stable and to give an isomorphism $D_{\mathrm{st}}(V) \cong D$ are equivalent to giving a G_K-equivariant B_{st}-linear isomorphism $B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \xrightarrow{\sim} B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D$ preserving the action of G_K, φ, N and the filtration after tensoring with B_{dR} over B_{st}. Here the action of $g \in G_K$ on the LHS (resp. RHS) is $g \otimes g$ (resp. $g \otimes 1$), φ on the LHS (resp. RHS) is $\varphi \otimes 1$ (resp. $\varphi \otimes \varphi$), N on the LHS (resp. RHS) is $N \otimes 1$ (resp. $1 \otimes N + N \otimes 1$); the filtration on $B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ is $\mathrm{Fil}^{\cdot} B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, and the filtration on $B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K$ is the tensor product of the filtrations on B_{dR} and D_K.*

See [**FI93**] 2.3 for some examples of these kinds of p-adic representations. We will give some in the end of § 2.3.

2.3. The rings B_{crys}, B_{st} and B_{dR}; their construction. — We define the ring R to be the projective limit of

$$O_{\overline{K}}/pO_{\overline{K}} \xleftarrow{\mathrm{Frob}} O_{\overline{K}}/pO_{\overline{K}} \xleftarrow{\mathrm{Frob}} O_{\overline{K}}/pO_{\overline{K}} \xleftarrow{\mathrm{Frob}} \cdots$$

The element of R is a system of elements $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ of $O_{\overline{K}}/pO_{\overline{K}}$ such that $a_{n+1}^p = a_n$. The absolute Frobenius of R is bijective. Choose a compatible system $s = (s_n)_{n \geqslant 0}$ of p^n-th roots of π in $O_{\overline{K}}$ and define the element $\underline{\pi}$ of R to be $(s_n \mod p)_{n \geqslant 0}$. We have a canonical injective multiplicative homomorphism:

$$\mathbb{Z}_p(1)(O_{\overline{K}}) = \varprojlim_n \mu_{p^n}(O_{\overline{K}}) \hookrightarrow R^{\times};\ \varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geqslant 0} \longmapsto \underline{\varepsilon} := (\varepsilon_n \mod p)_{n \geqslant 0}.$$

Roughly speaking, the rings B_{crys}, B_{st} and B_{dR} are constructed as certain modifications of the ring $W(R)$ of Witt-vectors with coefficients in R. We have a canonical surjective ring homomorphism

$$\theta \colon W(R) \longrightarrow O_C$$

characterized by $\theta([a]) = \lim_{n \to \infty} \widetilde{a_n}^{p^n}$, where $a = (a_0, a_1, \dots) \in R$, $\widetilde{a_n}$ denotes a lifting of a_n in $O_{\overline{K}}$ and $[a]$ denotes the Teichmüller representative $(a, 0, 0, \dots) \in W(R)$. We have $\theta([\underline{\pi}]) = \lim_{n \to \infty} s_n^{p^n} = \pi$ and $\theta([\underline{\varepsilon}]) = \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n^{p^n} = 1$ for $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p(1)(O_{\overline{K}})$. We denote by θ_{O_K} (resp. θ_K) the O_K-linear (resp. K-linear) extension of $\theta \colon O_K \otimes_W W(R) \to O_C$ (resp. $K \otimes_W W(R) \to C$). We have $\theta(1 \otimes [\underline{\pi}] - \pi \otimes 1) = 0$.

Proposition 2.3.1 **([Fon82] 2.4. Proposition)**. — *The element $1 \otimes [\underline{\pi}] - \pi \otimes 1$ is a non-zero divisor in $O_K \otimes_W W(R)$ and generates* $\mathrm{Ker}\,(\theta_{O_K})$.

Proof. — Since $O_K \otimes_W W(R)$ and O_C are p-adically complete and separated and p-torsion free, it suffices to prove that the reduction mod π of the sequence

$$0 \longrightarrow O_K \otimes_W W(R) \xrightarrow{1 \otimes [\underline{\pi}] - \pi \otimes 1} O_K \otimes_W W(R) \xrightarrow{\theta_{O_K}} O_C \longrightarrow 0$$

is exact, that is,

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\underline{\pi}} R \xrightarrow{\overline{\theta_{O_K}}} O_C/\pi O_C \longrightarrow 0$$

is exact, where $\overline{\theta_{O_K}}$ is the projection to the first component mod π. This is easy to see. □

We define the ring $B^+_{\mathrm{dR},K}$ by

$$B^+_{\mathrm{dR},K} := \varprojlim_r (K \otimes_W W(R))/(\mathrm{Ker}(\theta_K))^r,$$

which is a complete discrete valuation ring with residue field C by Proposition 2.3.1. We define $B_{\mathrm{dR},K}$ to be the field of fractions of $B^+_{\mathrm{dR},K}$. Since $\theta([\underline{\varepsilon}]) = 1$, for $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p(1)(O_{\overline{K}})$, $\log([\underline{\varepsilon}]) = \sum_{i\geqslant 1}(-1)^{i-1}([\underline{\varepsilon}]-1)^i/i$ converges in B^+_{dR} and we obtain a canonical additive injective homomorphism

$$\mathbb{Z}_p(1) \hookrightarrow \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR},K}; \quad \varepsilon \longmapsto \log([\underline{\varepsilon}]).$$

We can prove that the image of a non-zero element of $\mathbb{Z}_p(1)$ is a uniformizer ([**Fon82**] 2.17. Proposition) and hence, for a finite extension K' of K contained in $\overline{K}$, the canonical homomorphism $B^+_{\mathrm{dR},K'} \to B^+_{\mathrm{dR},K}$ is an isomorphism since these two complete discrete valuation rings have the same residue field and a common uniformizer. This implies $B_{\mathrm{dR},K} \cong B_{\mathrm{dR},K'}$ and we simply write B_{dR} for $B_{\mathrm{dR},K}$ in the following. We have $\overline{K} \subset B_{\mathrm{dR}}$.

We define the ring A_{crys} to be the p-adic completion of

$$W(R)[\xi^n/n!\ (n \geqslant 1)] \subset W(R)[1/p],$$

where $\xi = [\underline{p}] - p \in \mathrm{Ker}(\theta)$. Note that ξ is a generator of $\mathrm{Ker}(\theta)$ (Proposition 2.3.1). For the Frobenius φ on $W(R)$, we have

$$\varphi(\xi) = [\underline{p}]^p - p = (\xi + p)^p - p \in pW(R)[\xi^n/n!\ (n \geqslant 1)].$$

Hence, using $p^n/n! \in p\mathbb{Z}_p$ $(n \geqslant 1)$, we see that the Frobenius φ on $W(R)$ extends to the Frobenius φ on A_{crys}. We see easily that $t = \log([\underline{\varepsilon}])$ converges in A_{crys} for $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p(1)(O_{\overline{K}})$, $\varepsilon \neq 0$, and $\varphi(t) = \log([\underline{\varepsilon}]^p) = p \cdot t$. Note $[\underline{\varepsilon}] - 1 \in \mathrm{Ker}(\theta) = \xi \cdot W(R)$. We define B^+_{crys} and B_{crys} to be $A_{\mathrm{crys}}[p^{-1}]$ and $A_{\mathrm{crys}}[t^{-1}, p^{-1}]$. The rings B^+_{st} and B_{st} are defined to be the subrings $B^+_{\mathrm{crys}}[u_s]$ and $B_{\mathrm{crys}}[u_s]$ of B^+_{dR} and B_{dR} respectively, where $u_s = \log((1 \otimes [\underline{\pi}]) \cdot (\pi \otimes 1)^{-1})$. Note $\theta_K((1 \otimes [\underline{\pi}]) \cdot (\pi \otimes 1)^{-1}) = 1$ and hence $\log((1 \otimes [\underline{\pi}]) \cdot (\pi \otimes 1)^{-1})$ converges in B^+_{dR}. For the proof of $(1.3)_{\mathrm{crys}}$, $(2)_{\mathrm{crys}}$, $(7)_{\mathrm{st}}(\Rightarrow (4)_{\mathrm{crys}})$, $(1.1)_{\mathrm{st}}$ and $(5)_{\mathrm{st}}$, see [**Fon82**] 4.12 Théorème (or [**Fon94a**] 5.3.7 Théorème), [**Fon82**] 4.7, [**Fon94b**] 5.1.3 Lemme, [**Fon94a**] 3.1.6 and [**Fon94a**] 4.2.4 Théorème.

Example 2.3.2. — Let $q \in K^*$ and consider an extension $0 \to \mathbb{Q}_p(1) \to V \to \mathbb{Q}_p \to 0$ defined by the image of q in $(\varprojlim_n (K^*/(K^*)^{p^n})) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \cong H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$. Choose a compatible system $\{q_n\}_{n\geqslant 0}$ of p^n-th roots of q in $\overline{K}$ and define $\tau\colon G_K \to \mathbb{Z}_p(1)$ by $g(q_n) = \tau(g)_n \cdot q_n$, where $\tau(g)_n := \tau(g) \mod p^n \in \mu_{p^n}(\overline{K})$. Then $V = \mathbb{Q}_p(1) \oplus \mathbb{Q}_p$ with the action of G_K: $g(x, y) = (g(x) + y \cdot \tau(g), y)$ $(g \in G_K, x \in \mathbb{Q}_p(1), y \in \mathbb{Q}_p)$.

(1) If $q \in O_K^*$, then V is crystalline: We may assume $q \in 1 + \pi \cdot O_K$. Set $\underline{q} := (q_n \mod p)_n \in R$. Then, for $[\underline{q}] \in W(R)$, $\log([\underline{q}])$ converges in B^+_{crys} and $D :=$

$D_{\mathrm{crys}}(V) = (B_{\mathrm{crys}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ is a K_0-vector space with a base $e_1 = (t^{-1} \otimes t, 0)$, $e_2 = (-\log([\underline{q}])t^{-1} \otimes t, 1 \otimes 1)$ $(0 \neq t \in \mathbb{Q}_p(1))$. Its filtered φ-module structure is given by $\varphi(e_1) = p^{-1}e_1$, $\varphi(e_2) = e_2$, $\mathrm{Fil}^{-1} D_K = D_K$, $\mathrm{Fil}^{0} D_K = K \cdot (\log(q)e_1 + e_2)$, $\mathrm{Fil}^{1} D_K = 0$.

(2) If $q = \pi^m \cdot u$ for $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ and $u \in O_K^*$, then V is not crystalline but semi-stable: We may assume $u \in 1+\pi O_K$. Choose compatible systems $\{s_n\}$ and $\{u_n\}$ of p^n-th roots of π and u in $O_{\overline{K}}$ and choose $\{s_n^m \cdot u_n\}$ as $\{q_n\}$ above. Set $\underline{u} := (u_n \mod p)_n \in R$ and let u_s be as in the definition of B_{st}. Then $D := D_{\mathrm{st}}(V) = (B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ is a K_0-vector space with a base $e_1 = (t^{-1} \otimes t, 0)$, $e_2 := m^{-1}((-\log([\underline{u}]) - mu_s)t^{-1} \otimes t, 1 \otimes 1)$ $(0 \neq t \in \mathbb{Q}_p(1))$. Its φ-N filtered module structure is given by $\varphi(e_1) = p^{-1}e_1$, $\varphi(e_2) = e_2$, $N(e_1) = 0$, $N(e_2) = e_1$, $\mathrm{Fil}^{-1} D_K = D_K$, $\mathrm{Fil}^{0} D_K = K \cdot (m^{-1}\log(u)e_1 + e_2)$, $\mathrm{Fil}^{1} D_K = 0$.

3. Logarithmic structures

The theory of logarithmic structures in the sense of Fontaine-Illusie on schemes was established by K. Kato in [**Kat89**] based on an idea of Fontaine and Illusie and it is a useful tool when one wants to generalize a theory concerning smooth schemes to semi-stable schemes or normal crossing varieties. See Example 3.1.1 (2), (3) and Example 3.2.4 (2), (3). We review the theory briefly. See [**Kat89**] for details.

3.1. Definition. — We assume that a monoid is always commutative and has 1 (the unit), and a morphism of monoids preserves 1. We regard $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ as a monoid by its addition (0 is the unit in this case). For a scheme X, we regard $\mathcal{O}_X$ as a monoid by its multiplication.

A *pre-log structure* on X is a pair (M, α) of a sheaf of monoids M on the étale site $X_{\text{ét}}$ and a morphism of sheaves of monoids $\alpha\colon M \to \mathcal{O}_X$. It is a *log structure* if the canonical homomorphism $\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X^*$ is an isomorphism. We define the *log structure* $(M, \alpha)^a$ *associated to a pre-log structure* (M, α) to be the push out of the diagram of sheaves of monoids: $\mathcal{O}_X^* \xleftarrow{\alpha} \alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*) \hookrightarrow M$. A *log scheme* (X, M, α) is a scheme X endowed with a log structure (M, α). We often omit α in the notation of a log structure and a log scheme in the following. We define a morphism of log schemes as a pair of a morphism of schemes and a morphism between the sheaves of monoids compatible with α's in the obvious sense. The monoid $\mathcal{O}_X^*$ with the inclusion into $\mathcal{O}_X$ is a log structure and it is called the *trivial log structure*. The functor from the category of schemes to the category of log schemes which associates $(X, \mathcal{O}_X^*)$ to X is fully faithful. For a morphism of schemes $f\colon Y \to X$ and a log structure M on X, we define the *inverse image* f^*M to be the log structure associated to the pre-log structure $f^{-1}(M) \to f^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$.

We say that a monoid P is *integral* if $ac = bc$ implies $a = b$ for $a, b, c \in P$. We say that a log structure M is *fine*, if étale locally on X, M is isomorphic to the log

structure associated to a pre-log structure of the form (P_X, β) where P is a finitely generated integral monoid and P_X is the constant sheaf of monoids associated to P. Fiber products are representable in the category of log schemes and also in the category of fine log schemes. We note that in the latter category fiber products are not compatible with fiber products in underlying schemes in general.

For a morphism of log schemes $f\colon (X, M) \to (Y, N)$, we define the *relative differential module* $\Omega^1_{X/Y}(\log(M/N))$ to be the quotient of $\Omega^1_{X/Y} \oplus (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} M^{\mathrm{gp}})$ by the $\mathcal{O}_X$-submodule generated by $(d(\alpha(x)), 0) - (0, \alpha(x) \otimes x)$ $(x \in M)$ and $(0, 1 \otimes x)$ $(x \in$ the image of $f^{-1}(N^{\mathrm{gp}}) \to M^{\mathrm{gp}})$. We denote by $d\log(x)$ the class of $(0, 1 \otimes x)$ for $x \in M^{\mathrm{gp}}$. If M and N are fine, then the differential module is quasi-coherent. We can define the de Rham complex $\Omega^{\cdot}_{X/S}(\log(M/N))$ by setting $d(d\log(x)) = 0$ $(x \in M^{\mathrm{gp}})$.

Example 3.1.1

(1) Let X be a regular scheme and D be a reduced divisor with normal crossings on D. Then $M := \mathcal{O}_X \cap j_*\mathcal{O}^*_U \to \mathcal{O}_X$ is a fine log structure, where $U = X \smallsetminus D$ and j denotes $U \hookrightarrow X$. Étale locally on X, we have a decomposition $D = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} D_i$ such that D_i is regular and $D_i = \{\pi_i = 0\}$ for $\pi_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, and M is isomorphic to the log structure associated to $(\mathbb{N}^r)_X \to \mathcal{O}_X; (n_i) \mapsto \prod \pi_i^{n_i}$.

(2) Let A be a discrete valuation ring and let $X \to \mathrm{Spec}(A) = S$ be a morphism of finite type such that étale locally on X, there exists an étale morphism of S-schemes $u\colon X \to \mathrm{Spec}(A[T_1, \ldots, T_d]/(T_1 \cdots T_r - \pi))$ for some integers $1 \leqslant r \leqslant d$. Then as in (1), we can define the fine log structures M on X and N on S by the special fiber Y and the closed point s respectively. We have a natural morphism $f\colon (X, M) \to (S, N)$ of log schemes. The relative differential $\Omega^1_{X/S}(\log(M/N))$ is locally free and locally of finite rank. If we have a morphism u as above, we have

$$\Omega^1_{X/S}(\log(M/N)) = (\oplus_{1 \leqslant i \leqslant r} \mathcal{O}_X \cdot d\log(\pi_i))/\mathcal{O}_X \cdot d\log(f^{-1}(\pi)) \bigoplus (\oplus_{r+1 \leqslant i \leqslant d} \mathcal{O}_X \cdot d\pi_i),$$

where $\pi_i = u^*(T_i)$. Note $d\log(f^{-1}(\pi)) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} d\log(\pi_i)$.

(3) Keep the notation of (2). We denote by M_Y (resp. N_s) the inverse image of M on Y (resp. N on s). We have a natural morphism $g\colon (Y, M_Y) \to (s, N_s)$. If we have a morphism u as in (2) and denote by $\overline{\pi_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ the image of $\pi_i \in M \subset \mathcal{O}_X$ in M_Y, then, for $y \in Y$, we have $M_{Y,\overline{y}} = \mathcal{O}^*_{Y,\overline{y}} \times \prod_{\pi_i \notin \mathcal{O}^*_{X,\overline{x}}} \overline{\pi_i}^{\mathbb{N}}$ and the morphism $M_{Y,\overline{y}} \to \mathcal{O}_{Y,\overline{y}}$ sends $\overline{\pi_i}$ to the image of $\pi_i \in \mathcal{O}_X$ in $\mathcal{O}_{Y,\overline{y}}$. We have $\Omega^1_{Y/s}(\log(M_Y/N_s)) \cong \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_{X/S}(\log(M/N))$.

3.2. Log étale and log smooth morphisms. — Étale morphisms and smooth morphisms of fine log schemes are defined similarly as schemes as follows.

***Definition 3.2.1* ([Kat89] (3.1))**. — We say that a morphism of fine log schemes $i\colon (X, M) \hookrightarrow (Y, N)$ is a *closed immersion* (resp. an *exact closed immersion*) if it is a closed immersion in the underlying schemes and the morphism $i^*N \to M$ is surjective (resp. an isomorphism).

***Definition 3.2.2* ([Kat89] (3.3))**. — We say that a morphism of fine log schemes $f\colon (X,M)\to(Y,N)$ is *étale* (resp. *smooth*) if it is locally of finite presentation in the underlying schemes and, for every commutative diagram of fine log schemes

$$\begin{array}{ccc} (X,M) & \xleftarrow{s} & (T,M_T) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ (Y,N) & \xleftarrow{t} & (T',M_{T'}) \end{array}$$

such that i is an exact closed immersion and $I^2=0$ for the ideal I of $\mathcal{O}_{T'}$ defining T, there exists a unique morphism (resp. a morphism étale locally on T') $g\colon (T',M_{T'})\to(X,M)$ such that $g\circ i=s$ and $f\circ g=t$.

If $f\colon (X,M)\to(Y,N)$ is étale (resp. smooth), its relative differential module vanishes (resp. is locally free and locally of finite rank) ([**Kat89**] Proposition (3.10)).

A morphism of schemes $f\colon X\to Y$ is smooth if and only if étale locally on X, there exists an étale morphism of Y-schemes $X\to Y[T_1,\dots,T_d]$ for some integer d. We have the following analogue for log schemes.

***Theorem 3.2.3* ([Kat89] Theorem (3.5))**. — *Let $f\colon (X,M)\to(Y,N)$ be a morphism of fine log schemes. Then, f is étale (resp. smooth) if and only if étale locally on X, there exist isomorphisms $N\cong Q_Y^a$, $M\cong P_X^a$, where (Q_Y,β), (P_X,α) are pre-log structures with P, Q finitely generated and integral monoids, and an injective morphism of monoids $h\colon P\to Q$ compatible with f such that the canonical morphism $X\to Y\times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[Q])}\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ induced by α, β and h, is étale and the cokernel (resp. the torsion part of the cokernel) of h^{gp} is a finite group of order invertible on X.*

If we have $N\cong Q_Y^a$, $M\cong P_X^a$ and h as in the theorem, there is an isomorphism $\Omega^1_{X/Y}(\log(M/N))\cong\mathcal{O}_X\otimes_{\mathbb{Z}}P^{\mathrm{gp}}/h^{\mathrm{gp}}(Q^{\mathrm{gp}})$.

Example 3.2.4

(1) For a finite extension $A\to A'$ of discrete valuation rings, if we endow $S=\mathrm{Spec}(A)$, $S'=\mathrm{Spec}(A')$ with the log structures M, M' defined by the closed point (Example 3.1.1 (1)), then $(S',M')\to(S,M)$ is étale if and only if A' is tamely ramified over A.

(2) The morphism f in Example 3.1.1 (2) is smooth.

(3) The morphism g in Example 3.1.1 (3) is smooth.

(4) If X is a smooth scheme over a field k with a reduced divisor D with normal crossings relative to k, then (X,M) defined as in Example 3.1.1 (1) is smooth over $\mathrm{Spec}(k)$ endowed with the trivial log structure.

4. Log crystalline cohomology

Let K, k and O_K be as in the Notation in the end of § 1. The étale cohomology of a variety over a field k with coefficients $\mathbb{Z}_l$ or $\mathbb{Q}_l$ (the so called l-adic cohomology) for a prime $l \neq p$ is an analogue of the singular cohomology of a topological space and satisfies good properties such as Poincaré duality. However, if $l = p$, the étale cohomology becomes smaller. For a proper smooth variety Y over k, the crystalline cohomology $H^*_{\mathrm{crys}}(Y/W)$ supplies this lack; It is a finitely generated W-module endowed with a semi-linear automorphism (called the Frobenius).

In these notes, we are especially interested in the case that Y is the special fiber of a proper smooth scheme X over O_K. In this case, the crystalline cohomology tensored with K over W is canonically isomorphic to the de Rham cohomology $H^*_{\mathrm{dR}}(X_K/K)$ of the generic fiber X_K (Berthelot-Ogus [**BO83**]) and it makes $H^*_{\mathrm{dR}}(X_K/K)$ an object of $MF_K(\varphi)$ (§ 2.2).

In this section, we will survey the generalization of the above theory to a proper semi-stable scheme over O_K by O. Hyodo and K. Kato [**HK94**]. In the semi-stable reduction case, the following new phenomena occur: In addition to the Frobenius automorphism, the crystalline cohomology is naturally endowed with a linear endomorphism N called the monodromy operator, which vanishes if X/O_K is smooth. The isomorphism between the crystalline and the de Rham cohomologies depends on the choice of a uniformizer of K.

In the last subsection, we also review a crystalline interpretation of the rings B_{crys}, B_{st} and B_{dR}.

4.1. Log crystalline site. — We assume that the readers are familiar with the usual crystalline site ([**BO78**], [**Ber74**]) and we explain how it is extended to log schemes. In 4.1, S denotes a general scheme and is different from S in the Notation in § 1. Recall that a divided power (or PD for short) structure on an ideal I of a sheaf of rings $\mathcal{A}$ is a set of maps $\{\gamma_m \colon I \to \mathcal{A}\}_{m\in\mathbb{N}}$ indexed by $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ satisfying the same properties as the operation $x \mapsto x^m/m!$ in characteristic 0 such as $\gamma_m(I) \subset I$ $(m \geqslant 1)$, $\gamma_m(x+y) = \sum_{0\leqslant i\leqslant m} \gamma_i(x)\gamma_{m-i}(y)$. We often write $x^{[m]}$ for $\gamma_m(x)$. By a *PD-thickening of fine log schemes*, we mean an exact closed immersion $(X, M) \hookrightarrow (Y, N)$ of fine log schemes endowed with a PD structure δ on the ideal of $\mathcal{O}_Y$ defining X. We have the following generalization of PD-envelopes.

***Proposition and Definition 4.1.1* ([Kat89] Proposition (5.3))**. — *Let (S, I, γ) be a scheme S endowed with a quasi-coherent PD-ideal (I, γ). Then, for any S-closed immersion $i \colon (X, M) \hookrightarrow (Y, N)$ of fine log schemes over S such that γ extends to X, there exist a PD-thickening $i_D \colon (X, M) \hookrightarrow (D, M_D)$ over S compatible with γ and an S-morphism $p_D \colon (D, M_D) \to (Y, N)$ satisfying $p_D \circ i_D = i$ and the following universal property: For any PD-thickening $i' \colon (X', M') \hookrightarrow (D', M_{D'})$ over S compatible with γ and any S-morphisms $u \colon (X', M') \to (X, M)$, $v \colon (D', M_{D'}) \to (Y, N)$ satisfying*

$v \circ i' = i \circ u$, there exists a unique S-PD-morphism $v_D \colon (D', M_{D'}) \to (D, M_D)$ such that $p_D \circ v_D = v$ and $v_D \circ i' = i_D \circ u$. We call (D, M_D) the PD-envelope of i compatible with γ.

If i admits a factorization $(X, M) \xrightarrow{j} (Y', N') \xrightarrow{k} (Y, N)$ with j an exact closed immersion and k étale, then the PD-envelope of i is the PD-envelope of $X \hookrightarrow Y'$ endowed with the inverse image of N'. In the general case, we take such a factorization étale locally on Y and glue using the universal property.

***Definition 4.1.2* ([Kat89] (5.2))**. — Let (S, L, I, γ) be a fine log scheme (S, L) with a quasi-coherent PD-ideal (I, γ) such that $n \cdot \mathcal{O}_S = 0$ for a positive integer n and let (X, M) be a fine log scheme over (S, L) such that γ extends to X. We define the *crystalline site* $((X, M)/(S, L, I, \gamma))_{\mathrm{crys}}$ (or $(X/S)^{\log}_{\mathrm{crys}}$ for short) as follows: The objects of the underlying category are (S, L)-PD-thickenings $(i \colon (U, M|_U) \hookrightarrow (T, M_T), \delta)$ compatible with γ of étale X-schemes U endowed with $M|_U$, which we often abbreviate to $((T, M_T), \delta)$ or (T, M_T). A morphism in the category is a pair of an X-morphism $u \colon U' \to U$ and an (S, L)-PD-morphism $v \colon (T', M_{T'}) \to (T, M_T)$ compatible with i's. We say that a morphism (u, v) is strict étale if v is étale in the underlying scheme, $M_{T'} \cong v^* M_T$ and $U' \xrightarrow{\sim} U \times_T T'$. We say that a family of morphisms $\{(u_\lambda, v_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ is a strict étale covering if each (u_λ, v_λ) is strict étale and $\cup_\lambda u_\lambda(T_\lambda) = T$. We give the above category the topology associated to the pre-topology defined by strict étale coverings.

We define the structure sheaf $\mathcal{O}_{(X,M)/(S,L)}$ by $\Gamma((T, M_T), \mathcal{O}_{(X,M)/(S,L)}) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ and the PD-ideal $J_{(X,M)/(S,L)}$ by $\Gamma((T, M_T), J_{(X,M)/(S,L)}) = \Gamma(T, J_T)$, where J_T denotes the PD-ideal of $\mathcal{O}_T$ defining U.

As in the scheme case, the crystalline topos $(X/S)^{\log}_{\mathrm{crys}}$ is functorial on both (X, M) and (S, L, I, γ). We have a canonical morphism of topos

$$u^{\log}_{X/S} \colon (X/S)^{\log \sim}_{\mathrm{crys}} \longrightarrow X^{\sim}_{\text{ét}}$$

defined by $\Gamma(U, u^{\log}_{X/S *} \mathcal{F}) = \Gamma((U/S)^{\log}_{\mathrm{crys}}, \mathcal{F}|_{(U/S)^{\log}_{\mathrm{crys}}})$.

Suppose that there exists a closed immersion $i \colon (X, M) \hookrightarrow (Y, N)$ over (S, L) with $(Y, N)/(S, L)$ smooth and let (D, M_D) be the PD-envelope of i compatible with γ. Let J_D denote the PD-ideal of $\mathcal{O}_D$ defining X. Then, as in the scheme case, we have:

***Theorem 4.1.3* ([Kat89] Theorem (6.4))**. — *There exist canonical isomorphisms in $D^+(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z})$:*

$$Ru^{\log}_{X/S *} \mathcal{O}_{X/S} \cong \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^{\cdot}_{Y/S}(\log(N/L))$$
$$Ru^{\log}_{X/S *} J^{[r]}_{X/S} \cong J^{[r-\cdot]}_D \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^{\cdot}_{Y/S}(\log(N/L)) \quad (r \in \mathbb{Z}),$$

Here, for a PD-ideal (J, δ) of a sheaf of rings $\mathcal{A}$, we denote by $J^{[r]}$ $(r \in \mathbb{Z},\ r \geqslant 1)$ the r-th divided power of J, that is, the ideal generated by $\delta_{m_1}(x_1) \cdots \delta_{m_s}(x_s)$,

$(x_1, \ldots, x_s \in J,\ m_1, \ldots, m_s > 0,\ m_1 + \cdots + m_s \geqslant r)$. We set $J^{[r]} = \mathcal{A}$ for $r \in \mathbb{Z}$, $r \leqslant 0$.

We also have the following invariance property.

***Theorem 4.1.4* (cf. [Ber74] III Théorème 2.3.4).** — *With the notation in Definition* 4.1.2*, let J be a PD-subideal of I (i.e. $\gamma_m(J) \subset J$ for all $m \geqslant 1$) and let (X', M') be the reduction mod J of (X, M). Then the natural homomorphism*

$$H^m((X/S)^{\log}_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{X/S}) \longrightarrow H^m((X'/S)^{\log}_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{X'/S})$$

is an isomorphism for any integer $m \geqslant 0$.

4.2. Log crystalline cohomology. — Let K, O_K, k, (S, N) and (s, N_s) be as in the Notation in the end of § 1. We will define a crystalline cohomology of a smooth fine log scheme (Y, M_Y) over (s, N_s) whose underlying scheme Y is proper over s. See [**HK94**] § 3 and [**Tsu99**] § 4.2, § 4.3, § 4.4 for details.

Let N_n^0 denote the log structure on $\mathrm{Spec}(W_n)$ associated to the pre-log structure $\Gamma(s, N_s) \to k \xrightarrow{[\,]} W_n$, where $[\,]$ denotes the Teichmüller representative. Note that if we denote by $\overline{\pi}$ the image of $\pi \in \Gamma(S, N)$ in $\Gamma(s, N_s)$, we have $\Gamma(s, N_s) = k^* \times \overline{\pi}^{\mathbb{N}}$ and the image of $\overline{\pi}$ in k is 0. We have $N_s = N_1^0$ and $\Gamma(\mathrm{Spec}(W_n), N_n^0) = W_n^* \times \overline{\pi}^{\mathbb{N}}$. The multiplication by p on $\Gamma(s, N_s)$ and the Frobenius σ of W_n induce a lifting of Frobenius F on $(\mathrm{Spec}(W_n), N_n^0)$. (The absolute Frobenius $F_{(X,M)}$ of a log scheme (X, M) over $\mathbb{F}_p$ is the absolute Frobenius F_X of X with $F_X^{-1}(M) \cong M \xrightarrow{p} M$).

***Remark 4.2.1*.** — If we endow $\mathrm{Spec}(W)$ with the log structure defined by its closed point, then its reduction mod p^n $(n \geqslant 2)$ does not have a lifting of Frobenius because $\sigma(p) = p$ but p should be sent to $p^p \cdot u$ $(u \in 1 + pW_n)$ in the log structure.

Let γ be the PD-structure on pW_n defined by $\gamma_m(a \mod p^n) = a^m/m! \mod p^n$ $(a \in W)$. Then, for (Y, M_Y) as above, the crystalline cohomology

$$M_n^m := H^m(((Y, M_Y)/(W_n, N_n^0, pW_n, \gamma))_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{(Y,M_Y)/(W_n,N_n^0)})$$

is a finitely generated W_n-module endowed with a semi-linear endomorphism φ induced by the absolute Frobenius of (Y, M_Y) and the lifting of Frobenius F on $(\mathrm{Spec}(W_n), N_n^0)$. We set

$$M_\infty^m := \varprojlim_n M_n^m \quad \text{and} \quad D^m := K_0 \otimes_W M_\infty^m.$$

Then M_∞^m and D^m are finitely generated over W and K_0 respectively. If (Y, M_Y) is of Cartier type ([**Kat89**] Definition (4.8)) over (s, N_s), φ on D^m is bijective ([**HK94**] § 3). (The condition "of Cartier type" is necessary for the Cartier isomorphism $\mathcal{H}^q(\Omega^{\cdot}_{Y/s}(\log(M_Y/N_s)) \cong \Omega^q_{Y/s}(\log(M_Y/N_s))$ [**Kat89**] Theorem (4.12) (1).)

M_n^m is endowed with a kind of HPD-stratification with respect to

$$(\mathrm{Spec}(W_n), N_n^0)/W_n$$

as follows: Let (D_n, M_{D_n}) be the PD-envelope of $(\mathrm{Spec}(W_n), N_n^0)$ in the fiber product of two copies of $(\mathrm{Spec}(W_n), N_n^0)$ over W_n, let p_1, p_2 denote the two projections $(D_n, M_{D_n}) \rightrightarrows (\mathrm{Spec}(W_n), N_n^0)$, and let v be the unique element of $\Gamma(D_n, 1 + J_{D_n})$ such that $v \cdot p_2^*(\overline{\pi}) = p_1^*(\overline{\pi})$ in $\Gamma(D_n, M_{D_n})$. Then $\Gamma(D_n, \mathcal{O}_{D_n})$ is a PD-polynomial ring over W_n with its indeterminate $v-1$, and M_n^m has an "HPD-stratification ":

$$\varepsilon\colon p_1^* M_n^m \xrightarrow{\sim} M_n^m(1) \xleftarrow{\sim} p_2^* M_n^m (= \oplus_{i \geqslant 0} M_n^m \cdot (v-1)^{[i]}),$$

where $M_n^m(1) = H^m((Y, M_Y)/(D_n, M_{D_n}, \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{D_n} \to k), [\,]), \mathcal{O}_{(Y,M_Y)/(D_n,M_{D_n})})$.

We define the monodromy operator $N\colon M_n^m \to M_n^m$ by $N(x) =$ the coefficient of $(v-1)$ in $\varepsilon(p_1^*(x))$. The lifting of Frobenius on $(\mathrm{Spec}(W_n), N_n^0)$ induces that on (D_n, M_{D_n}) and ε becomes compatible with the Frobenius endomorphisms. Hence, from $\varphi(v-1) = v^p - 1 = p(v-1) +$(a term of degree $\geqslant 2$ in $(v-1)$), we obtain

$$N\varphi = p\varphi N.$$

4.3. Comparison with de Rham cohomology. — In § 4.3, we consider a smooth fine log scheme (X, M) over (S, N) whose underlying scheme is proper over S. Let (Y, M_Y) be the special fiber $(X, M) \times_{(S,N)} (s, N_s)$. We assume that (Y, M_Y) is of Cartier type over (s, N_s) ([**Kat89**] Definition (4.8)). A proper scheme X over S with semi-stable reduction endowed with the log structure defined by the special fiber (Example 3.1.1) satisfies this condition (Example 3.2.4, [**Kat89**] Remark after Definition (4.8)).

We define the crystalline cohomology $H^m_{\mathrm{crys}}((X, M))$ of (X, M) to be the crystalline cohomology D^m of (Y, M_Y) defined in § 4.2, which is a K_0-vector space of finite dimension endowed with a σ-semilinear automorphism φ and a K_0-linear endomorphism N satisfying $N\varphi = p\varphi N$.

We define the de Rham cohomology $H^m_{\mathrm{dR}}((X_K, M_K)/K)$ of the generic fiber $(X_K, M_K) := (X, M) \times_{(S,N)} \mathrm{Spec}(K)$ to be

$$\begin{aligned} &H^m(X_K, \Omega^{\cdot}_{X_K/K}(\log(M_K))) \\ &\qquad \cong \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim_n H^m(((X_n, M_n)/(S_n, N_n, p\mathcal{O}_{S_n}, \gamma))_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{(X_n,M_n)/(S_n,N_n)}), \end{aligned}$$

which is a K-vector space of finite dimension. We write D^m_{dR} for $H^m_{\mathrm{dR}}((X_K, M_K)/K)$ to simplify the notation in the following.

Theorem 4.3.1 **([HK94] Theorem (5.1), cf. [Tsu99] § 4.4)**. — *There exists a canonical isomorphism depending on the choice of the uniformizer π of K:*

$$\rho_\pi\colon K \otimes_{K_0} D^m \xrightarrow{\sim} D^m_{\mathrm{dR}}$$

functorial on X and compatible with the cup products. For another choice of the uniformizer π', we have

$$\rho_{\pi'} = \rho_\pi \circ \exp(\log(\pi'\pi^{-1}) \cdot (1_K \otimes N)).$$

In the rest of § 4.3, we will explain how to construct the map ρ_π. We introduce an intermediate crystalline cohomology $\mathcal{D}^m$ as follows.

Let $\mathcal{L}(T)$ denote the log structure on $\mathrm{Spec}(W_n[T])$ defined by the divisor $\{T=0\}$ and let $i_{E_n,\pi}\colon (S_n,N_n)\hookrightarrow(E_n,M_{E_n})$ be the PD-envelope compatible with (pW_n,γ) (see § 4.1) of the exact closed immersion $(S_n,N_n)\hookrightarrow(\mathrm{Spec}(W_n[T]),\mathcal{L}(T))$ defined by $T\mapsto\pi$. The scheme E_n is explicitly written as

$$\mathrm{Spec}(W[T,T^{me}/m!\ (m\geqslant 1)]\otimes_W W_n)$$

where $e=[K:K_0]$. We have another exact closed immersion

$$i_{E_n,0}\colon (\mathrm{Spec}(W_n),N_n^0)\longhookrightarrow(E_n,M_{E_n})$$

defined by $T^{me}/m!\mapsto 0$ $(m\geqslant 1)$ and $T\mapsto\overline{\pi}$ in the log structure. The liftings of Frobenius on $(\mathrm{Spec}(W_n[T]),\mathcal{L}(T))$ defined by $T\mapsto T^p$ and $\sigma\colon W_n\xrightarrow{\sim}W_n$ induces the lifting of Frobenius F_{E_n} on (E_n,M_{E_n}) compatible with the canonical PD-structure $\overline{\delta}$ on $\overline{J}_{E_n}:=\mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{E_n}\to\mathcal{O}_{S_1})$. The exact closed immersion $i_{E_n,0}$ is compatible with the liftings of Frobenius.

We define the intermediate cohomology $\mathcal{D}^m$ by

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n^m&:=H^m(((X_n,M_n)/(E_n,M_{E_n},\overline{J}_{E_n},\overline{\delta}))_{\mathrm{crys}},\mathcal{O}_{X_n/E_n})\\&\cong H^m(((X_1,M_1)/(E_n,M_{E_n},\overline{J}_{E_n},\overline{\delta}))_{\mathrm{crys}},\mathcal{O}_{X_1/E_n}),\\\mathcal{D}^m&:=\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\varprojlim_n\mathcal{M}_n^m.\end{aligned}$$

By the base changes $i_{E_n,0}$ and $i_{E_n,\pi}$, we obtain two homomorphisms

$$D^m\xleftarrow{\mathrm{pr}_0}\mathcal{D}^m\xrightarrow{\mathrm{pr}_\pi}D^m_{\mathrm{dR}}.$$

The absolute Frobenius of (X_1,M_1) and F_{E_n} induces an endomorphism φ on $\mathcal{D}^m$ and pr_0 is compatible with φ.

$\mathcal{M}_n^m$ is endowed with an HPD-stratification with respect to $(S_n,N_n)\hookrightarrow(\mathrm{Spec}(W_n[T]),\mathcal{L}(T))/W_n$ as follows: Let $(E_n(1),M_{E_n(1)})$ be the PD-envelope of (S_n,N_n) in the fiber product of two copies of $(\mathrm{Spec}(W_n[T]),\mathcal{L}(T))$ over W_n, let p_1, p_2 denote the two projections $(E_n(1),M_{E_n(1)})\rightrightarrows(E_n,M_{E_n})$, and let u denote the unique element of $\Gamma(E_n(1),1+J_{E_n(1)})$ such that $u\cdot p_2^*(T)=p_1^*(T)$ in $\Gamma(E_n(1),M_{E_n(1)})$. Then $\Gamma(E_n(1),\mathcal{O}_{E_n(1)})$ is a PD-polynomial ring over $\Gamma(E_n,\mathcal{O}_{E_n})$ with its indeterminate $u-1$ for either of the two $\Gamma(E_n,\mathcal{O}_{E_n})$-algebra structures, and $\mathcal{M}_n^m$ has an HPD-stratification:

$$\varepsilon\colon p_1^*\mathcal{M}_n^m\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}_n^m(1)\xleftarrow{\sim}p_2^*\mathcal{M}_n^m(=\oplus_{i\geqslant 0}\mathcal{M}_n^m\cdot(u-1)^{[i]}),$$

where $\mathcal{M}_n^m(1)=H^m((X_n,M_n)/(E_n(1),M_{E_n(1)},\overline{J}_{E_n},\overline{\delta}),\mathcal{O}_{X_n/E_n(1)})$.

We define the monodromy operator N on $\mathcal{M}_n^m$ by $N(x)=$ the coefficient of $(u-1)$ in $\varepsilon(p_1^*(x))$. As in the case of M_n^m, we see $N\varphi=p\varphi N$ on $\mathcal{M}_n^m$. The projection pr_0 is compatible with N, that is, $\mathrm{pr}_0N=N\mathrm{pr}_0$.

***Proposition 4.3.2* ([HK94] Lemma (5.2), [Tsu99] Propositions 4.4.6, 4.4.9)**

There exists a unique K_0-linear section s of pr_0 compatible with φ. The section s is functorial on X and compatible with N and the cup products. It also induces an isomorphism

$$R_E \otimes_W D^m \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^m,$$

where $R_E = \varprojlim_n \Gamma(E_n, \mathcal{O}_{E_n})$.

The isomorphism ρ_π is the K-linearization of $\mathrm{pr}_\pi \circ s$.

4.4. Crystalline interpretation of B_{crys}, B_{st} and B_{dR}. — We will give a crystalline interpretation of the rings B_{crys}, B_{st} and B_{dR}. We define $H^m((\overline{S},\overline{N})/W, J^{[r]})$ $(m \geqslant 0, r \geqslant 0)$ to be

$$\varprojlim_n \Big(\varinjlim_{K'} H^m(((S'_n, N'_n)/(W_n, pW_n, \gamma))_{\mathrm{crys}}, J^{[r]}_{(S'_n,N'_n)/W_n})\Big),$$

where W_n is endowed with the trivial log structure, K' ranges over all finite extensions of K contained in $\overline{K}$ and (S', N') denotes the scheme $\mathrm{Spec}(O_{K'})$ endowed with the log structure defined by the closed point. The crystalline cohomology over the base (S, N) or (E, M_E) appearing below is defined similarly. See § 4.3 for the definition of (E_n, M_{E_n}).

By functoriality, the absolute Frobenius of (S'_1, N'_1) and the Frobenii of W_n and (E_n, M_{E_n}) induce the Frobenius endomorphisms φ on $H^m((\overline{S},\overline{N})/W)$ and $H^m((\overline{S},\overline{N})/(E, M_E))$. $H^m((\overline{S},\overline{N})/(E, M_E))$ is naturally endowed with a monodromy operator N satisfying $N\varphi = p\varphi N$ in the same way as $H^m((X_n, M_n)/(E_n, M_{E_n}))$ in § 4.3 ([**Tsu99**] § 4.3). We will denote by the operation $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p}$ by the subscript $\mathbb{Q}_p$.

***Proposition 4.4.1* ([Fon83] § 3, [Kat94a] § 3, [Tsu99] § 1.6, § 4.6)**

(1) *There exist canonical G_K-equivariant isomorphisms:*

$$\begin{aligned}
B^+_{\mathrm{crys}} &\cong H^0((\overline{S},\overline{N})/W)_{\mathbb{Q}_p},\\
B^+_{\mathrm{st}} &\cong (H^0((\overline{S},\overline{N})/(E, M_E))_{\mathbb{Q}_p})^{N\text{-}nilp},\\
B^+_{\mathrm{dR}} &\cong \varprojlim_s (H^0((\overline{S},\overline{N})/(S, N), \mathcal{O}/J^{[s]})_{\mathbb{Q}_p})\\
\cup & \qquad\qquad \cup\\
\mathrm{Fil}^r B_{\mathrm{dR}} &\cong \varprojlim_s (H^0((\overline{S},\overline{N})/(S, N), J^{[r]}/J^{[s]})_{\mathbb{Q}_p}) \quad (r \in \mathbb{Z}, r \geqslant 0),
\end{aligned}$$

where B^+_{crys} and B^+_{st} are as in § 2.3 and N-nilp denotes the part where N is nilpotent. The first (resp. the last) isomorphism is compatible with φ (resp. φ and N). Furthermore the pull-backs by $(E_n, M_{E_n}) \to \mathrm{Spec}(W_n)$ and $i_{E_n,\pi}\colon (S_n, N_n) \hookrightarrow (E_n, M_{E_n})$ in the RHS correspond to the injections $B^+_{\mathrm{crys}} \hookrightarrow B^+_{\mathrm{st}}$ and $\iota_\pi\colon B^+_{\mathrm{st}} \hookrightarrow B^+_{\mathrm{dR}}$ associated to π (see § 2.3 and Remark 2.1.3 (2)).

(2) *The cohomologies $H^m((\overline{S},\overline{N})/W)$, $H^m((\overline{S},\overline{N})/(S, N), J^{[r]}/J^{[s]})$ $(s \geqslant r \geqslant 0)$ and $H^m((\overline{S},\overline{N})/(E, M_E))$ vanish if $m > 0$.*

5. Syntomic complex

In this section, we will survey the definition of the syntomic complexes and their properties proven in [**Tsu99**] § 2.

Syntomic cohomology was first introduced by J.-M. Fontaine and W. Messing as an intermediate cohomology in their proof of C_{crys} (=C_{st} in the good reduction case) in [**FM87**]. We will explain their idea briefly. Assume $K = K_0$, let X be a proper smooth scheme over W, and suppose that C_{crys} is true for X. Then we have the following exact sequence for $r \geqslant m$ ([**FM87**] III 2.4. Proposition and the following remark):

$$0 \longrightarrow H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p(r)) \longrightarrow \mathrm{Fil}^r(B^+_{\mathrm{crys}} \otimes_W H^m_{\mathrm{crys}}(X/W)) \xrightarrow{1-\varphi/p^r} B^+_{\mathrm{crys}} \otimes_W H^m_{\mathrm{crys}}(X/W) \longrightarrow 0.$$

See § 2.3 for the definition of B^+_{crys}. Furthermore, the right two terms are isomorphic to $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^m_{\mathrm{crys}}(\overline{X}/W, J^{[r]})$ and $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^m_{\mathrm{crys}}(\overline{X}/W)$ respectively (Künneth formula [**FM87**] III 1.5. Proposition. cf. the crystalline interpretation of B^+_{crys} in Proposition 4.4.1), where $\overline{X} = X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}$. Hence we have a quasi-isomorphism:

$$H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)(r) \xrightarrow{\sim} [\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^m_{\mathrm{crys}}(\overline{X}/W, J^{[r]}) \xrightarrow{1-\varphi/p^r} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^m_{\mathrm{crys}}(\overline{X}/W)] \tag{5.0.1}$$

Fontaine and Messing considered the RHS of (5.0.1) syntomic (= flat and locally complete intersection) locally on $\overline{X}$ and constructed sheaves S^r_n ($n \geqslant 1, r \geqslant 0$) on the syntomic site of $\overline{X}_s := \overline{X} \otimes \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$ ($s \geqslant n+r$), which we can regard as an analogue of $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)$ in characteristic p. The syntomic cohomology $H^m(\overline{X}, S^r_n)$ is defined to be $H^m(\overline{X}_{s,\mathrm{syn}}, S^r_n)$ ($s \geqslant n+r$). Then Fontaine and Messing constructed canonical maps

$$H^m(\overline{X}, S^r_n) \longrightarrow H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)) \tag{5.0.2}$$

and proved C_{crys} in the case $\dim(X_K) < p$ and $K = K_0$ (see the beginning of § 7).

In [**Kat87**], [**Kur87**], K. Kato and M. Kurihara proved that the above maps are isomorphisms if $m \leqslant r \leqslant p-2$ without assuming $K = K_0$, from which K. Kato and W. Messing derived C_{crys} in the case $\dim(X_K) \leqslant (p-2)/2$ ([**KM92**], see the beginning of § 7). In [**Kat94a**], K. Kato extended these results to the semi-stable reduction case. In their proof, Kato and Kurihara used an étale localization of the RHS of (5.0.1): syntomic complexes (not sheaves) $\mathcal{S}_n(r)$ ($s^{\log}_n(r)$ in the semi-stable reduction case) ($r \leqslant p-1$) whose étale cohomology gives the syntomic cohomology; it is defined explicitly in terms of certain de Rham complexes (see § 5.2). They compared syntomic complexes with p-adic nearby cycles based on the calculation of the latter by Bloch-Kato [**BK86**] (in the good reduction case) and O. Hyodo [**Hyo88**] (in the semi-stable reduction case).

If $r \geqslant p-1$, unfortunately, the homomorphism (5.0.2) with $m \leqslant r$ does not seem to be an isomorphism in general. In fact, the sheaves S^r_n for $r \geqslant p$ are defined in an adhoc manner compared to the case $r \leqslant p-1$. However, if we allow kernels

and cokernels with exponents bounded when n varies, we can remove the restriction $r \leqslant p-2$ ([**Tsu99**] § 2, § 3). We will survey it in § 5 and § 6. We will introduce two complexes of étale sheaves $\mathcal{S}_n^{\sim}(r)$ and $\mathcal{S}'_n(r)$. The first one is canonical but different from $s_n^{\log}(r)$ (defined by K. Kato) when $r \leqslant p-1$. The second one coincides with $s_n^{\log}(r)$ when $r \leqslant p-1$ but depends on some choices when $r \geqslant p$. There is a canonical morphism $\mathcal{S}_n^{\sim}(r) \to \mathcal{S}'_n(r)$ quasi-isomorphic "up to bounded torsion". The complex $\mathcal{S}_n^{\sim}(r)$ is used to prove an invariance (up to bounded torsion) of $\mathcal{H}^q(\mathcal{S}_n^{\sim}(r))$ $(q \leqslant r)$ under Tate twists (§ 5.2) and the complex $\mathcal{S}'_n(r)$ is used to compare $\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_n(q))$ with the corresponding p-adic vanishing cycles (§ 5.4, § 6.1, § 6.3). We can also define the syntomic cohomology and the morphism (5.0.2) in the semi-stable reduction case by generalizing the method of Fontaine-Messing [**FM87**] (see [**Bre98b**], [**Tsu98**], [**BM**]), but we won't treat that approach in these notes.

5.1. The complexes $\mathcal{S}_n^{\sim}(r)$. — Let (X, M) be a fine log scheme over W whose underlying scheme X is of finite type over W and let (X_n, M_n) denote $(X, M) \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. For $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 0$, we will define the object $\mathcal{S}_n^{\sim}(r)_{(X,M)}$ of $D^+((X_1)_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ such that there exists a canonical distinguished triangle

$$\to \mathcal{S}_n^{\sim}(r)_{(X,M)} \longrightarrow Ru_{(X_n,M_n)/W_n *} J^{[r]}_{(X_n,M_n)/W_n} \xrightarrow{p^r-\varphi} Ru_{(X_n,M_n)/W_n *}\mathcal{O}_{(X_n,M_n)/W_n}.$$

Here $u_{(X_n,M_n)/W_n}$ denotes the morphism of topos

$$u_{(X_n,M_n)/W_n} : ((X_n, M_n)/(W_n, pW_n, \gamma))^{\sim}_{\text{crys}} \longrightarrow (X_n)^{\sim}_{\text{ét}} = (X_1)^{\sim}_{\text{ét}}$$

and $\mathrm{Spec}(W_n)$ is endowed with the trivial log structure. Note that we cannot take the mapping fiber in a derived category.

First assume that there is a closed immersion i of (X, M) into a smooth fine log scheme (Z, M_Z) over W endowed with a compatible system of liftings of Frobenius $\{F_{Z_n}\}_{n\geqslant 1}$ on $(Z_n, M_{Z_n}) := (Z, M_Z) \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ (which exists if Z is affine). Set $\omega^q_{Z_n} := \Omega^q_{Z_n/W_n}(\log(M_{Z_n}))$ $(q \geqslant 0)$ to simplify the notation. In this case, noting Theorem 4.1.3, we define the syntomic complex $\mathcal{S}_n^{\sim}(r)_{(X,M),(Z,M_Z)}$ to be the mapping fiber of

$$J^{[r-\cdot]}_{D_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \omega^{\cdot}_{Z_n} \xrightarrow{p^r-\varphi} \mathcal{O}_{D_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \omega^{\cdot}_{Z_n},$$

where (D_n, M_{D_n}) denotes the PD-envelope of $i \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ compatible with γ and J_{D_n} is the PD-ideal $\mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{D_n} \to \mathcal{O}_{X_n})$. Its degree q-part is

$$(J^{[r-q]}_{D_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \omega^q_{Z_n}) \oplus (\mathcal{O}_{D_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \omega^{q-1}_{Z_n})$$

and its differential map is given by

$$d(x, y) = (dx, (p^r - \varphi)(x) - dy)$$

for $x \in J^{[r-q]}_{D_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \omega^q_{Z_n}$ and $y \in \mathcal{O}_{D_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \omega^{q-1}_{Z_n}$. We define a product

$$\mathcal{S}_n^{\sim}(r)_{(X,M),(Z,M_Z)} \otimes \mathcal{S}_n^{\sim}(r')_{(X,M),(Z,M_Z)} \longrightarrow \mathcal{S}_n^{\sim}(r+r')_{(X,M),(Z,M_Z)} \tag{5.1.1}$$

by

$$(x,y)\otimes(x',y')\longmapsto(x\wedge x',(-1)^q p^r x\wedge y'+y\wedge\varphi(x'))$$
$$(x^{(\prime)},y^{(\prime)})\in(J_{D_n}^{[r^{(\prime)}-q^{(\prime)}]}\otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}}\omega_{Z_n}^{q^{(\prime)}})\oplus(\mathcal{O}_{D_n}\otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}}\omega_{Z_n}^{q^{(\prime)}-1})$$

and a symbol map

$$M_n^{\mathrm{gp}}\longrightarrow\mathcal{S}_n^{\sim}(1)_{(X,M),(Z,M_Z)}[1] \tag{5.1.2}$$

in $D^+((X_1)_{\text{ét}},\mathbb{Z})$ by

$$M_n^{\mathrm{gp}}[-1]\xleftarrow{\sim}[1+J_{D_n}\longrightarrow M_{D_n}^{\mathrm{gp}}]\longrightarrow\mathcal{S}_n^{\sim}(1)_{(X,M),(Z,M_Z)},$$

where the first quasi-isomorphism is induced by $M_{D_n}^{\mathrm{gp}}/(1+J_{D_n})\xrightarrow{\sim}M_n^{\mathrm{gp}}$ and the second morphism is defined by $\log\colon 1+J_{D_n}\to J_{D_n}$ and

$$\begin{aligned}M_{D_n}^{\mathrm{gp}}&\longrightarrow(\mathcal{O}_{D_n}\otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}}\omega_{Z_n}^1)\oplus\mathcal{O}_{D_n}\\ a&\longmapsto\quad(d\log(a),\log(a^p\varphi_{D_n}(a)^{-1})).\end{aligned}$$

We can also define a homomorphism

$$\mu_{p^n}(\mathcal{O}_{X_n})\longrightarrow\mathcal{H}^0(\mathcal{S}_n^{\sim}(1)_{(X,M),(Z,M_Z)}) \tag{5.1.3}$$

by $\varepsilon\mapsto\log(\widetilde{\varepsilon}^{p^n})$, where $\widetilde{\varepsilon}$ denotes a lifting of ε in $\mathcal{O}_{D_n}^*$. Note $\widetilde{\varepsilon}^{p^n}\in 1+J_{D_n}$ since $\varepsilon^{p^n}=1$.

We define $\mathcal{S}_n^{\sim}(r)_{(X,M)}$ to be the image of $\mathcal{S}_n^{\sim}(r)_{(X,M),(Z,M_Z)}$ in $D^+((X_1)_{\text{ét}},\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, which is independent of the choice of i and $\{F_{Z_n}\}$ up to canonical isomorphisms ([**Tsu99**] § 2.1).

In the general case, we take an étale hypercovering $X^{\cdot}$ of X and a closed immersion of $(X^{\cdot},M|_{X^{\cdot}})$ into a smooth fine simplicial log scheme $(Z^{\cdot},M_{Z^{\cdot}})$ over W with a compatible system of liftings of Frobenius $\{F_{Z_n^{\cdot}}\}$ and "glue" the above complex associated to each component of the simplicial log schemes using cohomological descent. They still have a product structure and a symbol map. See [**Tsu99**] § 2.1 for details.

Let (X,M) be a fine log scheme over (S,N) whose underlying scheme is of finite type over O_K and let $\overline{Y}$ denote $X\otimes_{O_K}\overline{k}$. For $r\in\mathbb{Z}$, $r\geqslant 0$, we define $\mathcal{S}_n^{\sim}(r)_{(\overline{X},\overline{M})}\in D^+(\overline{Y}_{\text{ét}},\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ to be the "inductive limit" of $\mathcal{S}_n^{\sim}(r)_{(X',M')}|_{\overline{Y}_{\text{ét}}}$, where K' ranges over all finite extensions of K contained in $\overline{K}$, (S',N') is the scheme $\mathrm{Spec}(O_{K'})$ with the log structure defined by the closed point, and $(X',M')=(X,M)\times_{(S,N)}(S',N')$. Precisely speaking, since we cannot take the inductive limit in the derived category, we choose a compatible system $\{(S',N')\hookrightarrow(V',M_{V'}),\{F_{V_n'}\}\}_{K'}$ of a closed immersion of (S',N') into a smooth fine log scheme $(V',M_{V'})$ over W with liftings of Frobenius $\{F_{V_n'}\}$ of its reduction mod p^n, and use the compatible system

$$\{(X^{\cdot},M|_{X^{\cdot}})\times_{(S,N)}(S',N')\hookrightarrow(Z^{\cdot},M_{Z^{\cdot}})\times_W(V',M_{V'}),\{F_{Z_n^{\cdot}}\times F_{V_n'}\}\}_{K'}$$

to describe $\mathcal{S}_n^{\sim}(r)_{(X',M')}$ as explicit complexes. Here $X^{\cdot}$ and $(Z^{\cdot},M_{Z^{\cdot}})$ is the same as in the above definition of $\mathcal{S}_n^{\sim}(r)_{(X,M)}$ in the general case. See [**Tsu99**] § 2.1 for

details. We define the syntomic cohomology $H^m((\overline{X},\overline{M}),S^r_{\mathbb{Q}_p})$ to be

$$\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\varprojlim_n H^m_{\text{ét}}(\overline{Y},\mathcal{S}^{\sim}_n(r)_{(\overline{X},\overline{M})}).$$

5.2. The complexes $\mathcal{S}'_n(r)$. — Next let us define another complex $\mathcal{S}'_n(r)$ ($r\in\mathbb{Z}$, $r\geqslant 0$). Roughly speaking, we replace $p^r-\varphi$ by $1-$ "φ/p^r" in the definition of $\mathcal{S}^{\sim}_n(r)$.

Let (X,M) be a fine log scheme over W whose underlying scheme X is of finite type over W. We assume that X is flat over W and that there exists an exact closed immersion i of (X,M) into a smooth fine log scheme (Z,M_Z) over W endowed with a compatible system of liftings of Frobenius $\{F_{Z_n}\}$ of (Z_n,M_{Z_n}) satisfying the following conditions: i is a regular closed immersion in the underlying scheme (EGA IV Définition (16.9.2)) and there exist global sections $T_1,\dots,T_d$ of M_Z such that $F_{Z_n}(T_i)=T_i^p$ ($1\leqslant i\leqslant d$) and $d\log(T_i)$ ($1\leqslant i\leqslant d$) form a basis of $\omega^1_Z:=\Omega^1_Z(\log M_Z)$. (Any smooth fine log scheme (X,M) over (S,N) satisfies this assumption étale locally on X. See after the statement of Theorem 5.3.2.) Choose such i and $\{F_{Z_n}\}$. Let (D_n,M_{D_n}) be the PD-envelope of $i\otimes\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ compatible with (pW_n,γ) and J_{D_n} be the PD-ideal $\mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{D_n}\to\mathcal{O}_{X_n})$. Then, using the assumptions, we can verify:

***Lemma 5.2.1* (cf. [Kat87] I Lemma (1.3))**. — *The sheaves $\mathcal{O}_{D_n}$ and $J^{[r]}_{D_n}$ ($r\in\mathbb{Z}$) are flat over $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ and the canonical homomorphisms $\mathcal{O}_{D_{n+1}}\otimes\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\to\mathcal{O}_{D_n}$ and $J^{[r]}_{D_{n+1}}\otimes\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\to J^{[r]}_{D_n}$ are isomorphisms.*

On the other hand, we have

***Lemma 5.2.2* (cf. [Kat87] I Lemma (1.3))**. — *For any integer $0\leqslant r\leqslant p-1$, we have $\varphi(J^{[r]}_{D_n})\subset p^r\mathcal{O}_{D_n}$.*

Proof. — For any $x\in J_{D_n}$, $\varphi(x)$ is described as $x^p+p\cdot y$ ($y\in\mathcal{O}_{D_n}$) and $\varphi(x^{[s]})=p^{[s]}\cdot((p-1)!x^{[p]}+y)^s$ for $s\geqslant 1$. Hence the lemma follows from $p^{[s]}(=p^s/s!)\in p^{\inf\{s,p-1\}}\mathbb{Z}_p$ ($s\geqslant 1$). □

Hence, for $0\leqslant r\leqslant p-1$, we can define $\varphi_r: J^{[r]}_{D_n}\to\mathcal{O}_{D_n}$ by $\varphi_r(x)=y \mod p^n$, where $\widetilde{x}$ is a lifting of x in $J^{[r]}_{D_{n+r}}$ and $\varphi(\widetilde{x})=p^r y$, $y\in\mathcal{O}_{D_{n+r}}$. For $r\geqslant p$, $\varphi(J^{[r]}_{D_n})\not\subseteq p^r\mathcal{O}_{D_n}$ in general and we use the modification

$$J^{[r]\prime}_{D_n}:=\{J^{[r]}_{D_{n+r}}\mid\varphi(x)\in p^r\mathcal{O}_{D_{n+r}}\}/p^n\quad(r\in\mathbb{Z},r\geqslant 0).$$

Note $J^{[r]\prime}_{D_n}=J^{[r]}_{D_n}$ ($0\leqslant r\leqslant p-1$). Using Lemma 5.2.1, we can verify that $J^{[r]\prime}_{D_n}$ is flat over $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ and $J^{[r]\prime}_{D_{n+1}}\otimes\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\xrightarrow{\sim}J^{[r]\prime}_{D_n}$ ([**Tsu99**] § 2.1). Hence, we can define $\varphi_r: J^{[r]\prime}_{D_n}\to\mathcal{O}_{D_n}$ similarly as above. For $r\leqslant 0$, we set $\varphi_r=p^{-r}\varphi$.

Since $\varphi(\omega^1_{Z_n})\subset p\cdot\omega^1_{Z_n}$ (because $\varphi(\omega^1_{Z_1})=0$ by $\varphi(d\log(b))=d\log(b^p)=p\cdot d\log(b)=0, b\in M_{Z_1}$) and $\omega^q_{Z_n}$ is flat over $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, we can define the Frobenius "divided by p^q": $\varphi_q:\omega^q_{Z_n}\to\omega^q_{Z_n}$ similarly.

We define $\mathcal{S}'_n(r)_{(X,M),(Z,M_Z)}$ to be the mapping fiber of

$$1-\varphi_r\colon J_{D_n}^{[r-\cdot]\prime}\otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}}\omega^{\cdot}_{Z_n}\longrightarrow\mathcal{O}_{D_n}\otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}}\omega^{\cdot}_{Z_n},$$

where $\varphi_r=\varphi_{r-q}\otimes\varphi_q$ in degree q. The existence of $T_1,\dots,T_d$ in the assumptions is used here to make $J_{D_n}^{[r-q]\prime}\otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}}\omega^q_{Z_n}$ $(q\geqslant 0)$ a complex. (For $x\in J^{[r]}_{D_{n+r}}$, if we set $\nabla(x)=\sum_{1\leqslant i\leqslant d}x_i d\log(T_i)$ $(x_i\in J^{[r-1]}_{D_{n+r}})$, then we have $\nabla(\varphi(x))=\varphi(\nabla(x))=\sum_{1\leqslant i\leqslant d}\varphi(x_i)\cdot p d\log(T_i)$. Hence $\varphi(x)\in p^r\mathcal{O}_{D_{n+r}}$ implies $p\varphi(x_i)\in p^r\mathcal{O}_{D_{n+r}}$ i.e. $\varphi(x_i)\in p^{r-1}\mathcal{O}_{D_{n+r}}$.)

The "multiplication by p^r"

$$\text{“}p^r\text{”}\colon J_{D_n}^{[r-\cdot]\prime}\otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}}\omega^{\cdot}_{Z_n}\longrightarrow J_{D_n}^{[r-\cdot]}\otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}}\omega^{\cdot}_{Z_n}$$

and the identity on $\mathcal{O}_{D_n}\otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}}\omega^{\cdot}_{Z_n}$ defines a morphism of complexes

$$\mathcal{S}^{\sim}_n(r)_{(X,M),(Z,M_Z)}\longrightarrow\mathcal{S}'_n(r)_{(X,M),(Z,M_Z)} \tag{5.2.3}$$

whose kernel and cokernel are killed by p^r.

We can define a product $\mathcal{S}'_n(r)\otimes\mathcal{S}'_n(r')\longrightarrow\mathcal{S}'_n(r+r')$ and a symbol map $M^{\mathrm{gp}}_{n+1}\to\mathcal{S}'_n(1)[1]$ similarly as $\mathcal{S}^{\sim}_n(r)$ in such a way that the following diagrams commute ([**Tsu99**] § 2.1).

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{S}^{\sim}_n(r)\otimes\mathcal{S}^{\sim}_n(r') & \longrightarrow & \mathcal{S}^{\sim}_n(r+r')\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathcal{S}'_n(r)\otimes\mathcal{S}'_n(r') & \longrightarrow & \mathcal{S}'_n(r+r'),\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}M^{\mathrm{gp}}_n & \xrightarrow{\text{symbol}} & \mathcal{S}^{\sim}_n(1)[1]\\ \uparrow & & \downarrow\\ M^{\mathrm{gp}}_{n+1} & \xrightarrow{p\cdot\text{symbol}} & \mathcal{S}'_n(1)[1].\end{array}$$

5.3. Invariance of $\mathcal{H}^q(\mathcal{S}^{\sim}_n(r)_{(\overline{X},\overline{M})})$ $(q\leqslant r)$ under Tate twists. — Let (X,M) be a smooth fine log scheme over (S,N) whose special fiber $(Y,M_Y):=(X,M)\times_{(S,N)}(s,N_s)$ is of Cartier type over (s,N_s). Choose a generator $t=(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbb{Z}_p(1)(O_{\overline{K}})=\varprojlim_n\mu_{p^n}(O_{\overline{K}})$. Let t_n denote the image of t under $\mathbb{Z}_p(1)(O_{\overline{K}})\to\mu_{p^n}(O_{\overline{K}})\to H^0(\overline{X},\mathcal{S}^{\sim}_n(1))$. See (5.1.3) for the second homomorphism. Then from the product structure of $\mathcal{S}^{\sim}_n(r)_{(\overline{X},\overline{M})}$, we obtain a homomorphism

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{S}^{\sim}_n(q)_{(\overline{X},\overline{M})})\longrightarrow\mathcal{H}^q(\mathcal{S}^{\sim}_n(r)_{(\overline{X},\overline{M})});\quad a\longmapsto t_n^{r-q}\cdot a \tag{5.3.1}$$

for $0\leqslant q\leqslant r$.

***Theorem 5.3.2* ([Tsu99] Theorem 2.3.2).** — *For any integers r and q such that $0\leqslant q\leqslant r$, there exists a positive integer N depending only on p, r and q such that the kernel and the cokernel of the homomorphism* (5.3.1) *are killed by p^N for every $n\geqslant 1$.*

We will explain an outline of the proof of Theorem 5.3.2. Let $\mathcal{L}(T)$ denote the log structure on $\mathrm{Spec}(W[T])$ defined by the divisor $\{T=0\}$ and let i_S denote the exact closed immersion of (S,N) into $(\mathrm{Spec}(W[T]),\mathcal{L}(T))$ defined by $T\mapsto\pi$. Recall that the PD-envelope of the reduction mod p^n of i_S is denoted by (E_n,M_{E_n}) in § 4.2. $(\mathrm{Spec}(W[T]),\mathcal{L}(T))$ and hence (E_n,M_{E_n}) have liftings of Frobenius defined by

$T \mapsto T^p$ and $\sigma\colon W \to W$. Since the question is étale local on X, we may assume that there exist a Cartesian diagram

$$\begin{array}{ccc} (X, M) & \xrightarrow{i} & (Z, M_Z) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ (S, N) & \xrightarrow{i_S} & (\mathrm{Spec}(W[T]), \mathcal{L}(T)) \end{array}$$

such that g is smooth, a compatible system of liftings of Frobenius $\{F_{Z_n}\}$ of (Z_n, M_{Z_n}) compatible with the lifting of Frobenius of $(\mathrm{Spec}(W[T]), \mathcal{L}(T))$, and $T_1, \ldots, T_d \in \Gamma(Z, M_Z)$ such that $F_{Z_n}^*(T_i) = T_i^p$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ and $d\log(T_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ form a basis of $\Omega^1_{Z/W[T]}(\log(M_Z/\mathcal{L}(T)))$ (use Theorem 3.2.3). Choose such a diagram, $\{F_{Z_n}\}$ and T_i.

Choose a compatible system $s = (s_n)_{n\geqslant 0}$ of p^n-th roots of π in $O_{\overline{K}}$ and we regard A_{crys} as a $W[T]$-algebra by the homomorphism $\rho\colon W[T] \to A_{\mathrm{crys}}$; $T \mapsto [(s_n \mod p)_{n\geqslant 0}]$. Note that ρ is not Galois invariant. Set $\omega^{\cdot}_{Z_n/W_n[T]} := \Omega^{\cdot}_{Z_n/W_n[T]}(\log(M_{Z_n}/\mathcal{L}(T)))$ to simplify the notation.

***Proposition 5.3.3* ([Tsu99] Lemma 2.3.4).** — *With the above notation, there exists an isomorphism in $D^+(\overline{Y}_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$:*

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_n^{\sim}(r)_{(\overline{X},\overline{M})} \\ &\quad \cong \mathit{fiber}(p^r - \varphi\otimes\varphi\colon \mathrm{Fil}^{r-\cdot} A_{\mathrm{crys}} \otimes_{W[T]} \omega^{\cdot}_{Z_n/W_n[T]} \to A_{\mathrm{crys}} \otimes_{W[T]} \omega^{\cdot}_{Z_n/W_n[T]}) \end{aligned}$$

depending on the choice of T_i $(1 \leqslant i \leqslant d)$ and $(s_n)_{n\geqslant 0}$, which is not G_K-equivariant. Furthermore the multiplication by t_n on the LHS corresponds to the multiplication by $t \in \mathbb{Z}_p(1)(O_{\overline{K}}) \subset \mathrm{Fil}^1 A_{\mathrm{crys}}$ on the RHS.

Idea of a proof. — First there is a canonical distinguished triangle in $D^+(\overline{Y}_{\text{ét}}, W_n)$:

$$\longrightarrow Ru^{\log}_{\overline{X}_n/W_n *}\mathcal{O}_{\overline{X}_n/W_n} \longrightarrow Ru^{\log}_{\overline{X}_n/E_n *}\mathcal{O}_{\overline{X}_n/E_n} \xrightarrow{N} Ru^{\log}_{\overline{X}_n/E_n *}\mathcal{O}_{\overline{X}_n/E_n}.$$

Set $P_n := H^0_{\text{log-crys}}(\overline{S}_n/E_n, \mathcal{O}_{\overline{S}_n/E_n})(\cong R\Gamma_{\text{log-crys}}(\overline{S}_n/E_n, \mathcal{O}_{\overline{S}_n/E_n}))$. This is an $R_{E_n}(:= \Gamma(E_n, \mathcal{O}_{E_n}))$-PD-algebra endowed with a monodromy operator $N_{P_n}\colon P_n \to P_n$ (cf. § 4.4). Then we have a Künneth formula

$$Ru^{\log}_{\overline{X}_n/E_n *}\mathcal{O}_{\overline{X}_n/E_n} \cong P_n \otimes^{\mathbb{L}}_{R_{E_n}} Ru^{\log}_{X_n/E_n *}\mathcal{O}_{X_n/E_n} \cong P_n \otimes_{W_n[T]} \omega^{\cdot}_{Z_n/W_n[T]}.$$

Using T_i $(1 \leqslant i \leqslant d)$, we can define a monodromy operator $N\colon \omega^{\cdot}_{Z_n/W_n[T]} \to \omega^{\cdot}_{Z_n/W_n[T]}$ as $W_n[T]$-modules in such a way that the endomorphism N in the above distinguished triangle is realized as the morphism of complexes $N_{P_n} \otimes 1 + 1 \otimes N$. Using the monodromy operator N on $\omega^{\cdot}_{Z_n/W_n[T]}$ and the PD-structure on P_n, we can change the natural $W_n[T]$-algebra structure of P_n to $\alpha\colon W_n[T] \xrightarrow{\rho} A_{\mathrm{crys}}/p^n =$

$H^0_{\text{log-crys}}(\overline{S}_n/W_n) \to P_n$. Then the monodromy operator $N_{P_n} \otimes 1 + 1 \otimes N$ is replaced by $N_{P_n} \otimes 1$ because $\alpha(W_n[T]) \subset P_n^{N=0}$. Hence, from the exact sequence

$$0 \longrightarrow A_{\text{crys}}/p^n A_{\text{crys}} \longrightarrow P_n \xrightarrow{N} P_n \longrightarrow 0$$

(compare with the above distinguished triangle) and the above distinguished triangle, we obtain

$$(*) \qquad Ru^{\log}_{\overline{X}/W_n *}\mathcal{O}_{\overline{X}_n/W_n} \cong (A_{\text{crys}}/p^n) \otimes_{W_n[T]} \omega^{\cdot}_{Z_n/W_n[T]}.$$

Strictly speaking, we need to describe $Ru^{\log}_{\overline{X}_n/W_n *}\mathcal{O}_{\overline{X}_n/W_n}$ etc. as explicit complexes and construct the relevant maps (especially $(*)$) as morphisms of complexes. Of course, we also need the filtered version. □

We define the filtration $\operatorname{Fil}^r_p A_{\text{crys}}$ $(r \in \mathbb{Z})$ on A_{crys} by

$$\operatorname{Fil}^r_p A_{\text{crys}} := \{a \in \operatorname{Fil}^r A_{\text{crys}} \mid \varphi(a) \in p^r A_{\text{crys}}\}$$

for $r \geqslant 0$ and $\operatorname{Fil}^r_p A_{\text{crys}} = A_{\text{crys}}$ $(r \leqslant 0)$ (cf. § 5.2). We have $\operatorname{Fil}^r_p A_{\text{crys}} = \operatorname{Fil}^r A_{\text{crys}}$ if $r \leqslant p-1$ and $p^r(\operatorname{Fil}^r A_{\text{crys}}/\operatorname{Fil}^r_p A_{\text{crys}}) = 0$ $(r \geqslant 0)$. Hence we may study the mapping fiber of

$$1 - \varphi_r \colon \operatorname{Fil}^{r-\cdot}_p A_{\text{crys}} \otimes_{W[T]} \omega^{\cdot}_{Z_n/W_n[T]} \longrightarrow A_{\text{crys}} \otimes_{W[T]} \omega^{\cdot}_{Z_n/W_n[T]},$$

which we denote by $C_n(r)$, instead of the RHS of the isomorphism in Proposition 5.3.3. Here $\varphi_r = \frac{\varphi}{p^{r-q}} \otimes \frac{\varphi}{p^q}$ in degree q.

We define the filtration $I^{[s]}A_{\text{crys}}$ on A_{crys} by

$$I^{[s]}A_{\text{crys}} := \{x \in A_{\text{crys}} \mid \varphi^n(x) \in \operatorname{Fil}^s A_{\text{crys}} \text{ for all } n \geqslant 0\}.$$

We also denote by $I^{[\cdot]}$ the induced filtration on $\operatorname{Fil}^r_p A_{\text{crys}}$.

***Lemma 5.3.4* ([Fon94a] § 5.2, cf. [Tsu99] Corollary A3.2).** — $t^{\,p-1} \in pA_{\text{crys}}$.

For an integer $n \geqslant 0$, we set $t^{\{n\}} = t^b(t^{p-1}/p)^{[a]}(= t^n/(p^a a!)) \in A_{\text{crys}}$ where $n = (p-1)a + b$ $(a, b \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant b < p-1)$. We verify easily $t^{\{r\}} \in I^{[r]}A_{\text{crys}}$. Let R and $\theta \colon W(R) \to O_C$ be as in § 2.3 and let ξ be a generator of $\operatorname{Ker}(\theta)$ (cf. Proposition 2.3.1). We see easily $\xi^{r-s} \cdot t^{\{s\}} \in I^{[s]}(\operatorname{Fil}^r_p A_{\text{crys}})$ $(0 \leqslant s \leqslant r)$. Set $\pi_\varepsilon := [(\varepsilon_n \bmod p)_{n \geqslant 0}] - 1 \in W(R)$, where $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 0}$ is as in the beginning of this subsection.

***Proposition 5.3.5* ([Fon94a] 5.3.1 Proposition, 5.3.6 Proposition ii), [Tsu99] § 1.2, A3)**

(1) *For any integer $r \geqslant 0$, we have*

$$I^{[r]}A_{\text{crys}} = \Big\{ \sum_{n \geqslant r} a_n t^{\{n\}} \;\Big|\; a_n \in W(R), a_n \text{ converges } p\text{-adically to } 0 \Big\}.$$

(2) *For any integer $s \geqslant 0$, there exists an isomorphism:*

$$W(R)/\pi_\varepsilon W(R) \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}^s_I A_{\text{crys}}; x \mapsto x \cdot t^{\{s\}}.$$

(3) *For any integers* $0 \leqslant s < r$,

$$W(R)/\varphi^{-1}(\pi_\varepsilon)W(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^s_I(\mathrm{Fil}^r_p A_{\mathrm{crys}}); x \mapsto x \cdot \xi^{r-s} \cdot t^{\{s\}}$$

and for any integers $s \geqslant r \geqslant 0$, $I^{[s]}A_{\mathrm{crys}} = I^{[s]}(\mathrm{Fil}^r_p A_{\mathrm{crys}})$.

Let $I^{[\cdot]}C_n(r)$ be the filtration on $C_n(r)$ induced by the filtration $I^{[\cdot]}$ on $\mathrm{Fil}^{r-q}_p A_{\mathrm{crys}}$ and A_{crys}. Then, by Proposition 5.3.5 (2), (3), we see that, for any integers s and r, the complexes $\mathrm{gr}^s_I C_n(r)$ and $\mathrm{gr}^{s+r'}_I C_n(r+r')$ $(r' \geqslant 0)$ become isomorphic to the same complex and the multiplication by $t^{\{r'\}}$ from the former to the latter is given by the multiplication by $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ defined by $t^{\{s\}} \cdot t^{\{r'\}} = \alpha \cdot t^{\{s+r'\}}$. Hence it suffices to prove:

***Lemma 5.3.6* ([Tsu99] Lemma 2.3.19)**
(1) $\mathcal{H}^q(I^{[s]}C_n(r)) = 0$ $(s > r - q + 1)$.
(2) $\mathcal{H}^q(\mathrm{gr}^s_I C_n(r)) = 0$ *if* $s < r - q$.

Sketch of a proof. — We are reduced to the case $n = 1$ easily. Then the morphism

$$1 - \varphi_r \colon I^{[s]}(\mathrm{Fil}^{r-\cdot} A_{\mathrm{crys}} \otimes_{W[T]} \omega^{\cdot}_{Z_1/k[T]}) \longrightarrow I^{[s]}(A_{\mathrm{crys}} \otimes_{W[T]} \omega^{\cdot}_{Z_1/k[T]})$$

becomes the identity maps in degree $q \geqslant r - s + 1$, which implies (1). Next consider gr^s_I of the above morphism. Then, in degree $q \leqslant r - s - 1$, the LHS is isomorphic to $(W(R)/\varphi^{-1}(\pi_\varepsilon)W(R)) \otimes_{W[T]} \omega^q_{Z_1/k[T]}$ with zero differentials, the RHS is isomorphic to $(W(R)/\pi_\varepsilon W(R)) \otimes_{W[T]} \omega^{\cdot}_{Z_1/k[T]}$ and the morphism becomes $\varphi \otimes \varphi/p^q$. Hence, using the Cartier isomorphism (here we use the assumption that (Y, M_Y) is of Cartier type over (s, N_s)), we see that gr^s_I of $1 - \varphi_r$ induces an isomorphism (resp. injective homomorphism) between $\mathcal{H}^q$ if $q \leqslant r-s-2$ (resp. $q = r-s-1$), which implies (2). □

5.4. Calculation of $\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q))$. — Let (X, M) be a smooth fine log scheme over (S, N) whose special fiber $(Y, M_Y) := (X, M) \times_{(S,N)} (s, N_s)$ is of Cartier type over (s, N_s). We assume that there exist a Cartesian diagram and $\{F_{Z_n}\}$ as after the statement of Theorem 5.3.2 and we choose such a diagram and $\{F_{Z_n}\}$. Set $\mathcal{S}'_n(q) := \mathcal{S}'_n(q)_{(X,M),(Z,M_Z)}$ to simplify the notation. We will define a filtration on the sheaf $\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q))$ and give an explicit description of the associated graded quotients.

Define the filtrations $U^{\cdot}$ and $V^{\cdot}$ on $(M_2^{\mathrm{gp}})^{\otimes q}$ $(q \geqslant 0)$ by

$$U^0(M_2^{\mathrm{gp}})^{\otimes 0} := (M_2^{\mathrm{gp}})^{\otimes 0}, \quad U^{m+1}(M_2^{\mathrm{gp}})^{\otimes 0} := V^m(M_2^{\mathrm{gp}})^{\otimes 0} := 0 \ (m \geqslant 0),$$

if $q = 0$,

$$U^0 M_2^{\mathrm{gp}} := M_2^{\mathrm{gp}}, \quad U^m M_2^{\mathrm{gp}} := 1 + \pi^m \mathcal{O}_{X_2} \ (m \geqslant 1),$$
$$V^0 M_2^{\mathrm{gp}} := (1 + \pi\mathcal{O}_{X_2}) \cdot \langle \pi \rangle, \quad V^m M_2^{\mathrm{gp}} := U^{m+1} M_2^{\mathrm{gp}} \ (m \geqslant 1)$$

if $q = 1$, and

$$U^m(M_2^{\mathrm{gp}})^{\otimes q} := \text{the image of } U^m M_2^{\mathrm{gp}} \otimes (M_2^{\mathrm{gp}})^{\otimes (q-1)},$$
$$V^m(M_2^{\mathrm{gp}})^{\otimes q} := \text{the image of } U^m M_2^{\mathrm{gp}} \otimes (M_2^{\mathrm{gp}})^{\otimes (q-2)} \otimes \langle \pi \rangle + U^{m+1}(M_2^{\mathrm{gp}})^{\otimes q}$$

if $q \geqslant 2$. (See [**Hyo88**](1.4).) Here and hereafter we denote by the same letter π the image of $\pi \in \Gamma(S,N) = O_K \smallsetminus \{0\}$ under the map $\Gamma(S,N) \to \Gamma(X,M)$ and its images in $\Gamma(X_n, M_n)$ $(n \geqslant 1)$.

From the product structure and the symbol map, we obtain a morphism $(M_2^{\mathrm{gp}})^{\otimes q} \to \mathcal{S}'_1(q)[q]$ and then $(M_2^{\mathrm{gp}})^{\otimes q} \to \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q))$ by taking $\mathcal{H}^0$ of both sides. We also call this homomorphism the symbol map. We denote by $\{a_1, \ldots, a_q\}$ the image of $a_1 \otimes \cdots \otimes a_q$ $(a_i \in M_2^{\mathrm{gp}})$ by this map.

We define the filtrations $U^{\cdot}$ and $V^{\cdot}$ on $\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q))$ $(q \geqslant 0)$ to be the images of those on $(M_2^{\mathrm{gp}})^{\otimes q}$ defined above under the symbol map. We define gr_0^m and gr_1^m of $\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q))$ by U^m/V^m and V^m/U^{m+1} respectively.

Put $\omega_Y^q := \Omega^q_{Y/s}(\log(M_Y/N_s))$ and define the subsheaves B_Y^q (resp. Z_Y^q) of ω_Y^q to be the image of $d\colon \omega_Y^{q-1} \longrightarrow \omega_Y^q$ (resp. the kernel of $d\colon \omega_Y^q \longrightarrow \omega_Y^{q+1}$). Let $\omega^q_{Y,\,\log}$ be the subsheaf of abelian groups of ω_Y^q generated by local sections of the form $d\log a_1 \wedge d\log a_2 \wedge \cdots \wedge d\log a_q$, where $a_1, a_2, \cdots, a_q \in M_Y$.

Proposition 5.4.1 **([Tsu99] Proposition 2.4.1, cf. [Kur87] Proposition (4.3))**

If $p = 2$, assume $\sqrt{-1} \in K_{\mathrm{nr}}$, where K_{nr} is the maximal unramified extension of K. Let e be the absolute ramification index of K. Then the sheaf $\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q))$ has the following structure :

(1) $U^0\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q)) = \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q))$.

(2) *If $m = 0$,*

$$\mathrm{gr}_0^0\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q)) \cong \omega^q_{Y,\,\log};\ \{a_1, \cdots, a_q\} \mapsto d\log\overline{a_1} \wedge \cdots \wedge d\log\overline{a_q}$$

$$\mathrm{gr}_1^0\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q)) \cong \omega^{q-1}_{Y,\,\log};\ \{a_1, \cdots, a_{q-1}, \pi\} \mapsto d\log\overline{a_1} \wedge \cdots \wedge d\log\overline{a_{q-1}}$$

(3) *If $0 < m < pe/(p-1)$ and $p \nmid m$,*

$$\mathrm{gr}_0^m\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q)) \cong \frac{\omega_Y^{q-1}}{B_Y^{q-1}};\ \{1 + \pi^m x, a_1, \cdots, a_{q-1}\} \mapsto \overline{x}d\log\overline{a_1} \wedge \cdots \wedge d\log\overline{a_{q-1}}$$

$$\mathrm{gr}_1^m\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q)) \cong \frac{\omega_Y^{q-2}}{Z_Y^{q-2}};\ \{1 + \pi^m x, a_1, \cdots, a_{q-2}, \pi\} \mapsto \overline{x}d\log\overline{a_1} \wedge \cdots \wedge d\log\overline{a_{q-2}}$$

(4) *If $0 < m < pe/(p-1)$ and $p \mid m$,*

$$\mathrm{gr}_0^m\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q)) \cong \frac{\omega_Y^{q-1}}{Z_Y^{q-1}};\ \{1 + \pi^m x, a_1, \cdots, a_{q-1}\} \mapsto \overline{x}d\log\overline{a_1} \wedge \cdots \wedge d\log\overline{a_{q-1}}$$

$$\mathrm{gr}_1^m\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q)) \cong \frac{\omega_Y^{q-2}}{Z_Y^{q-2}};\ \{1 + \pi^m x, a_1, \cdots, a_{q-2}, \pi\} \mapsto \overline{x}d\log\overline{a_1} \wedge \cdots \wedge d\log\overline{a_{q-2}}$$

(5) *If $m \geqslant pe/(p-1)$, $U^m\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_1(q)) = 0$.*

Here $a_1, \ldots, a_q \in M_2^{\mathrm{gp}}$, $x \in \mathcal{O}_{X_2}$, $\overline{a_i}$ are the images of a_i in M_Y^{gp}, and $\overline{x}$ is the image of x in $\mathcal{O}_Y$.

Furthermore, (1), (2), (5), *and* (3) *and* (4) *for $0 < m < e$ are still true when $p = 2$ and $\sqrt{-1} \notin K_{\mathrm{nr}}$.*

In degree $\geqslant q-p+2$, $J_{D_1}^{[r]\prime}$ for $r \geqslant p-1$ does not appear in the complex $\mathcal{S}'_1(q)$ and we can prove Proposition 5.4.1 by the same method as [**Kur87**] if $p \geqslant 3$. If $p=2$, we need to introduce a new and more complicated method.

6. Syntomic complexes and p-adic nearby cycles

Let X be a scheme of finite type with semi-stable reduction, that is, X is a regular scheme flat over O_K and its special fiber Y is a reduced divisor with normal crossings on X. We endow X with the log structure M defined by the special fiber (see Example 3.1.1). Then (X, M) is smooth over (S, N) and its special fiber (Y, M_Y) is of Cartier type over (s, N_s) ([**Kat89**] Definition (4.8)). Set $\overline{X} := X \otimes_{O_K} O_{\overline{K}}$, $\overline{Y} := X \otimes_{O_K} \overline{k}$, $X_{\overline{K}} := X \otimes_{O_K} \overline{K}$, and let $\overline{i}$ and $\overline{j}$ denote the canonical morphisms $\overline{i}\colon \overline{Y} \to \overline{X}$ and $\overline{j}\colon X_{\overline{K}} \to \overline{X}$ respectively. For $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 0$, let $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)'$ denote $(\frac{1}{p^a a!}\mathbb{Z}_p(r)) \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, where $r = (p-1)a + b$ $(a, b \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant b \leqslant p-2)$. There are natural products $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)' \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(s)' \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r+s)'$ $(r, s \geqslant 0)$. We will explain an outline of the proof of the following theorem.

Theorem 6.0.1 **([Tsu99] § 3)**

(1) *There exists a canonical G_K-equivariant morphism*

$$\mathcal{S}_n^{\sim}(r)_{(\overline{X},\overline{M})} \longrightarrow \overline{i}^*_{\text{ét}} R\overline{j}_{\text{ét}*}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)'$$

in $D^+(\overline{Y}_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ compatible with the product structures.

(2) *For any integers q, r such that $0 \leqslant q \leqslant r$, there exists $N \geqslant 0$ which depends only on p, q and r such that the kernel and the cokernel of the homomorphism:*

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{S}_n^{\sim}(r)_{(\overline{X},\overline{M})}) \longrightarrow \overline{i}^*_{\text{ét}} R^q\overline{j}_{\text{ét}*}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)'$$

induced by the morphism in (1) *are killed by p^N for every $n \geqslant 1$.*

By the proper base change theorem for étale cohomology, we obtain the following corollary.

Corollary 6.0.2. — *Suppose that X is proper over O_K. Then, there exists a canonical G_K-equivariant isomorphisms*

$$H^m((\overline{X}, \overline{M}), \mathcal{S}^r_{\mathbb{Q}_p}) \xrightarrow{\sim} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p(r))$$

for $0 \leqslant m \leqslant r$ compatible with the product structures.

6.1. Construction of the maps. — First we consider a smooth fine and saturated log scheme (X, M) over (S, N). (Here a monoid P is called *saturated* if it is integral and if, for any $a \in P^{\text{gp}}$, $a^n \in P$ for some $n \geqslant 1$ implies $a \in P$, and a log structure L on a scheme S is called *saturated* if $L_{\overline{s}}$ are saturated for all $s \in S$ or equivalently if $\Gamma(U, L)$ are saturated for all étale S-schemes U.) We further assume that we are given a closed immersion $(X, M) \hookrightarrow (Z, M_Z)$ and liftings of Frobenius $\{F_{Z_n}\}$ as in the definition of $\mathcal{S}'_n(r)_{(X,M),(Z,M_Z)}$ in § 5.2. (Such a closed immersion and $\{F_{Z_n}\}$ always

exist étale locally on X). Let X_{triv} ($\subset X_K := X \otimes_{O_K} K$) denote the locus where the log structure M on X is trivial, which is open dense in X. If X has semi-stable reduction and M is defined by its special fiber, then X_{triv} is precisely the generic fiber. Let i and j denote the morphisms $Y := X \otimes_{O_K} k \to X$ and $X_{\mathrm{triv}} \to X$ respectively. Then we can construct canonical morphisms:

$$\mathcal{S}'_n(r)_{(X,M),(Z,M_Z)} \longrightarrow i^*_{\text{ét}} R j_{\text{ét}*} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)' \quad (r \in \mathbb{Z}, r \geqslant 0) \tag{6.1.1}$$

in the following way. See [**Tsu99**] § 3.1 for details.

For an affine scheme $U = \mathrm{Spec}(A)$ étale over X whose special fiber is connected and non-empty, let A^h denote the p-adic henselization of A, which is a normal domain, choose an algebraic closure $\overline{\mathrm{Frac}(A^h)}$ of the field of fractions $\mathrm{Frac}(A^h)$ of A^h, and let $\overline{A^h}$ denote the integral closure of A^h in the maximal unramified extension of A^h_{triv} in $\overline{\mathrm{Frac}(A^h)}$, where $U^h_{\mathrm{triv}} = \mathrm{Spec}(A^h_{\mathrm{triv}})$ ($\subset \mathrm{Spec}(A^h[1/p])$) denotes the locus where the inverse image of M on $U^h := \mathrm{Spec}(A^h)$ is trivial. We have $\mathrm{Gal}(\mathrm{Frac}(\overline{A^h})/\mathrm{Frac}(A^h)) \cong \pi_1(U^h_{\mathrm{triv}})$ where we use the base point defined by $\overline{\mathrm{Frac}(A^h)}$ in the RHS. Replacing $O_{\overline{K}}$, O_C and R in the definition of A_{crys} (§ 2.3) with $\overline{A^h}$, $\widehat{\overline{A^h}}$ (the p-adic completion of $\overline{A^h}$) and $R_{\overline{A^h}} := \varprojlim_{\mathrm{Frob}} \overline{A^h}/p\overline{A^h}$, we obtain a ring $A_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})$ endowed with an action of $\pi_1(U^h_{\mathrm{triv}})$, a lifting of Frobenius φ and a filtration $\mathrm{Fil}^{\cdot} A_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})$. If we define $\mathrm{Fil}^r_p A_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})$ ($r \in \mathbb{Z}$) in the same way as after the proof of Proposition 5.3.3, then we have the following exact sequences of $\pi_1(U^h_{\mathrm{triv}})$-modules ([**Fon94a**] 5.3.6, [**Tsu99**] § 1.2):

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p(r)' \longrightarrow \mathrm{Fil}^r_p A_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h}) \xrightarrow{1-\varphi/p^r} A_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h}) \longrightarrow 0 \quad (r \in \mathbb{Z},\ r \geqslant 0).$$

Next, for a sufficiently small U, we construct canonical resolutions

$$\mathrm{Fil}^r_p A_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})/p^n \longrightarrow \mathrm{Fil}^{r-\cdot}_p \mathcal{A}_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})/p^n \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \omega^{\cdot}_{Z_n} \quad (r \in \mathbb{Z})$$

compatible with the actions of $\pi_1(U^h_{\mathrm{triv}})$ and the Frobenii (divided by p^r) such that there are canonical morphisms:

$$\Gamma(U \otimes_{O_K} k, J^{[r-\cdot]\prime}_{D_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \omega^{\cdot}_{Z_n}) \longrightarrow (RHS)^{\pi_1(U^h_{\mathrm{triv}})}$$

compatible with the Frobenii (divided by p^r). Let $\overline{\mathcal{S}'_n}(r)_{U,(Z,M_Z)}$ denote the mapping fiber of

$$1 - \frac{\varphi}{p^r} \colon \mathrm{Fil}^{r-\cdot}_p \mathcal{A}_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})/p^n \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \omega^{\cdot}_{Z_n} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})/p^n \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n}} \omega^{\cdot}_{Z_n}.$$

Then, regarding discrete $\pi_1(U^h_{\mathrm{triv}})$-modules as étale sheaves on U^h_{triv}, we obtain a series of morphisms in $D^+(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{ét}}(U\otimes_{O_K}k,\mathcal{S}'_n(r)_{(X,M),(Z,M_Z)}) &\longrightarrow \Gamma_{\text{ét}}(U^h_{\mathrm{triv}},\overline{\mathcal{S}'_n}(r)_{U,(Z,M_Z)})\\ &\longrightarrow R\Gamma_{\text{ét}}(U^h_{\mathrm{triv}},\overline{\mathcal{S}'_n}(r)_{U,(Z,M_Z)})\\ &\xleftarrow{\sim} R\Gamma_{\text{ét}}(U^h_{\mathrm{triv}},\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)')\\ &\longrightarrow R\Gamma_{\text{ét}}(U^h,i^h_{\text{ét}*}i^{h*}_{\text{ét}}Rj^h_{\text{ét}*}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)')\\ &\cong R\Gamma_{\text{ét}}(U,i_{\text{ét}*}i^*_{\text{ét}}Rj_{\text{ét}*}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)'),\end{aligned}$$

where i^h and j^h denote the canonical morphisms $U^h\otimes_{O_K}k\ (=U\otimes_{O_K}k)\to U^h$ and $U^h_{\mathrm{triv}}\to U^h$. Describing the above morphisms as morphisms of explicit complexes (using the Godement resolutions) and varying U, we obtain (6.1.1).

Remark. — For an algebraic closure L of $\mathrm{Frac}(A^h)$, let G_L denote the fundamental group of U^h_{triv} with the base point $\mathrm{Spec}(L)\to U^h_{\mathrm{triv}}$. Suppose that we are given the following data: for every algebraic closure L of $\mathrm{Frac}(A^h)$, a discrete G_L-module M_L and, for every isomorphism $s\colon L_1\xrightarrow{\sim}L_2$ over $\mathrm{Frac}(A^h)$, an isomorphism $\iota_s\colon M_{L_1}\xrightarrow{\sim}M_{L_2}$ compatible with the isomorphism $G_{L_1}\xrightarrow{\sim}G_{L_2}$ induced by s, such that $\iota_{s_1\circ s_2}=\iota_{s_1}\circ\iota_{s_2}$ for any composable s_1, s_2 and, for $s\in\mathrm{Gal}(L/\mathrm{Frac}(A^h))$, ι_s is the action of the image of s under the canonical surjection $\mathrm{Gal}(L/\mathrm{Frac}(A^h))\to G_L$. Then, if we denote by $\mathcal{F}_L$ the sheaf on $(U^h_{\mathrm{triv}})_{\text{ét}}$ associated to M_L, then the isomorphism $\mathcal{F}_{L_1}\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}_{L_2}$ induced by ι_s for an $s\colon L_1\xrightarrow{\sim}L_2$ is independent of s, and hence, up to canonical isomorphisms, $\mathcal{F}_L$ is independent of the choice of L.

The resolution of $\mathrm{Fil}^r_p A_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})/p^n$ above is constructed as follows. Let $\widetilde{\overline{A^h}}$ be the image of $\theta\colon W(R_{\overline{A^h}})\to\widehat{\overline{A^h}}$ and set $\overline{U}:=\mathrm{Spec}(\widetilde{\overline{A^h}})$. Then

$$\widetilde{\overline{A^h}}\cong A_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})/\mathrm{Fil}^1 A_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})$$

and hence we have a PD-thickening $\overline{U}\hookrightarrow\overline{D}:=\mathrm{Spec}(A_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h}))$. If U is sufficiently small, the image of A in $\widehat{\overline{A^h}}$ is contained in $\widetilde{\overline{A^h}}$ and hence there exists a canonical morphism $\overline{U}\to U$ ([**Tsu99**] Lemma 1.5.4). Furthermore, if we denote by $M_{\overline{U}}$ the inverse image of M on $\overline{U}$, $M_{\overline{U}}$ lifts to a log structure $M_{\overline{D}}$ on $\overline{D}$ in a canonical way ([**Tsu99**] § 1.4). Thus we obtain a PD-thickening $(\overline{U},M_{\overline{U}})\hookrightarrow(\overline{D},M_{\overline{D}})$ endowed with an action of $\pi_1(U^h_{\mathrm{triv}})$. Let $(\overline{E}_n,M_{\overline{E}_n})$ be the PD-envelope of $(\overline{U}_n,M_{\overline{U}_n})$ in $(\overline{Z}_n,M_{\overline{Z}_n}):=(\overline{D}_n,M_{\overline{D}_n})\times_{W_n}(Z_n,M_{Z_n})$ and set $J_{\overline{E}_n}:=\mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{\overline{E}_n}\to\mathcal{O}_{\overline{U}_n})$. We define $\mathcal{A}_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})$ to be $\varprojlim_n\Gamma(\overline{E}_n,\mathcal{O}_{\overline{E}_n})$ and $\mathrm{Fil}^r\mathcal{A}_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})$ to be $\varprojlim_n(\overline{E}_n,J^{[r]}_{\overline{E}_n})$. We define $\mathrm{Fil}^r_p\mathcal{A}_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})$ in the same way as $\mathrm{Fil}^r_p A_{\mathrm{crys}}$ to obtain $\varphi/p^r\colon\mathrm{Fil}^r_p\mathcal{A}_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})\to\mathcal{A}_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})$. $\mathcal{A}_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})$ is naturally endowed with a connection $\nabla\colon\mathcal{A}_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})\to\mathcal{A}_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})\otimes_{\mathcal{O}_{\overline{Z}}}\omega^1_{\overline{Z}/\overline{D}}$ satisfying the Griffiths transversality: $\nabla(\mathrm{Fil}^r\mathcal{A}_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h}))\subset\mathrm{Fil}^{r-1}\mathcal{A}_{\mathrm{crys}}(\overline{A^h})\otimes_{\mathcal{O}_{\overline{Z}_n}}\omega^1_{\overline{Z}/\overline{D}}$. Note $\omega^1_{\overline{Z}/\overline{D}}=\mathcal{O}_{\overline{Z}}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega^1_Z$.

Next we will discuss the compatibility with the symbol maps. From the Kummer sequence $0 \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1) \to \mathcal{O}^*_{X_{\mathrm{triv}}} \xrightarrow{p^n} \mathcal{O}^*_{X_{\mathrm{triv}}} \to 0$, we obtain a symbol map

$$i^*_{\text{ét}} j_{\text{ét}*} \mathcal{O}^*_{X_{\mathrm{triv}}} \longrightarrow i^*_{\text{ét}} R j_{\text{ét}*} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1)[1] \tag{6.1.2}$$

and, then, using the cup products, symbol maps

$$(i^*_{\text{ét}} j_{\text{ét}*} \mathcal{O}^*_{X_{\mathrm{triv}}})^{\otimes q} \longrightarrow i^*_{\text{ét}} R^q j_{\text{ét}*} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(q) \quad (q \in \mathbb{Z}, q \geqslant 0). \tag{6.1.3}$$

By the assumption that M is saturated, we see $j_{\text{ét}*}\mathcal{O}^*_{X_{\mathrm{triv}}} = M^{\mathrm{gp}}$ ([**Kat94b**] Theorem (11.6), [**Tsu99**] Proposition 3.2.1) and hence there is a canonical surjective homomorphism $i^*_{\text{ét}} j_{\text{ét}*} \mathcal{O}^*_{X_{\mathrm{triv}}} \to M^{\mathrm{gp}}_{n+1}$.

***Proposition 6.1.4* ([Tsu99] Proposition 3.2.4).** — *The morphisms* (6.1.1) *is compatible with the product structures and the following diagrams commute:*

$$\begin{array}{ccc}
M^{\mathrm{gp}}_{n+1} & \xrightarrow{symbol} & \mathcal{S}'_n(1)_{(X,M),(Z,M_Z)}[1] \\
\uparrow & & \downarrow (6.1.1) \\
i^*_{\text{ét}} j_{\text{ét}*} \mathcal{O}^*_{X_{\mathrm{triv}}} & \xrightarrow{(6.1.2)} & i^*_{\text{ét}} R j_{\text{ét}*} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1)'[1], \\
(M^{\mathrm{gp}}_{n+1})^{\otimes q} & \xrightarrow{symbol} & \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_n(q)_{(X,M),(Z,M_Z)}) \\
\uparrow & & \downarrow \mathcal{H}^q((6.1.1)) \\
(i^*_{\text{ét}} j_{\text{ét}*} \mathcal{O}^*_{X_{\mathrm{triv}}})^{\otimes q} & \xrightarrow{(6.1.3)} & i^*_{\text{ét}} R^q j_{\text{ét}*} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(q)'.
\end{array}$$

Here note that there is a canonical homomorphism $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r) \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(r)'$ for $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 0$.

Let us return to the special situation in the beginning of this section 6. We define the morphism in Theorem 6.0.1 (1) by "gluing" the composite of (6.1.1) with the canonical map $\mathcal{S}^{\sim}_n(r)_{(X,M),(Z,M_Z)} \to \mathcal{S}'_n(r)_{(X,M),(Z,M_Z)}$ (§ 5.2) and taking the "inductive limit" with respect to finite extensions of K contained in $\overline{K}$. When X is proper over O_K, we define the homomorphisms

$$H^m((\overline{X}, \overline{M}), S^r_{\mathbb{Q}_p}) \longrightarrow H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p(r)) \quad (r, m \geqslant 0) \tag{6.1.5}$$

by multiplying p^{-r} to the homomorphisms induced by the morphism in Theorem 6.0.1 (1) in order to make them compatible with the symbol maps (cf. the diagram in the end of § 5.2).

6.2. Calculation of p-adic vanishing cycles. — We will review the calculation of p-adic vanishing cycles by Bloch-Kato [**BK86**] (in the good reduction case) and by Hyodo [**Hyo88**] (in the semi-stable reduction case).

Keep the notations and assumptions in the beginning of § 6. Let K' be any finite extension of K contained in $\overline{K}$, let $S' := \mathrm{Spec}(O_{K'})$, let N' denote the log structure on S' defined by the closed point and set $(X', M') := (X, M) \times_{(S,N)} (S', N')$. Then (X', M') is smooth over (S', N'), M' is saturated and the special fiber is of Cartier

type. Note that M' is trivial on the generic fiber and hence $X'_{\mathrm{triv}} = X'_{K'}$. Let i' and j' denote the morphisms $Y' := X' \otimes_{O_{K'}} k' \to X'$ and $X_{K'} := X' \otimes_{O_{K'}} K' \to X'$. We define the filtrations $U^{\cdot}$ and $V^{\cdot}$ on $(i'^{*}_{\text{ét}} M'^{\mathrm{gp}})^{\otimes q} = (i'^{*}_{\text{ét}} j'_{\text{ét}*} \mathcal{O}^{*}_{X_{K'}})^{\otimes q}$ (cf. § 6.1) and $U^{\cdot}$, $V^{\cdot}$, gr^m_0 and gr^m_1 of $i'^{*}_{\text{ét}} R^q j'_{\text{ét}*} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(q)$ in the same way as in § 5.4 using the symbol maps (6.1.3).

***Theorem 6.2.1* (Bloch-Kato-Hyodo).** — *With the notation above, we have*

$$U^0 i'^{*}_{\text{ét}} R^q j'_{\text{ét}*} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(q) = i'^{*}_{\text{ét}} R^q j'_{\text{ét}*} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(q)$$

and gr^m_0, gr^m_1 *of* $i'^{*}_{\text{ét}} R^q j'_{\text{ét}*} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(q)$ *have the same description as Proposition* 5.4.1 *without assuming* $\sqrt{-1} \in K'_{\mathrm{nr}}$ *in the case* $p = 2$.

Historically, Theorem 6.2.1 was proven earlier than Proposition 5.4.1.

6.3. Proof of Theorem 6.0.1 (2). — We keep the notation of § 6.2. Comparing Theorem 6.2.1 with Proposition 5.4.1, we will prove the following theorem, from which we can deduce Theorem 6.0.1 (2) easily because the kernel and cokernel of $\mathcal{S}^{\sim}_n(r)_{(X,M),(Z,M_Z)} \to \mathcal{S}'_n(r)_{(X,M),(Z,M_Z)}$ are killed by p^r and $\mathcal{H}^q(\mathcal{S}^{\sim}_n(r)_{(\overline{X},\overline{M})})$ $(q \leqslant r)$ are invariant under Tate twists up to bounded torsions (Theorem 5.3.2). We replace (S, N) by (S', N') and omit the prime $'$ from the notation (X', M'), i' etc.

***Theorem 6.3.1* ([Tsu99] Theorem 3.3.2).** — *Let* q *be a non-negative integer and put* $m = v_p(a!p^a)$, *where* a *is the biggest integer which is less than or equal to* $q/(p-1)$. *Let* $n > m$ *and assume that the primitive* p^n*-th roots of unity are contained in* K. *Assume that there exist a diagram and* $\{F_{Z_n}\}$ *as after the statement of Theorem* 5.3.2 *and choose such a diagram and* $\{F_{Z_n}\}$. *Set* $\mathcal{S}'_n(q) := \mathcal{S}'_n(q)_{(X,M),(Z,M_Z)}$ *to simplify the notation. Then the sequence*

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_n(q)) \xrightarrow{p^{n-m}} \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_n(q)) \longrightarrow \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_{n-m}(q)) \longrightarrow 0$$

is exact, the natural homomorphism

$$i^{*}_{\text{ét}} R^q j_{\text{ét}*} \mathbb{Z}/p^{n-m}\mathbb{Z}(q) \longrightarrow i^{*}_{\text{ét}} R^q j_{\text{ét}*} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(q)'$$

is injective, and the homomorphism

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_n(q)) \longrightarrow i^{*}_{\text{ét}} R^q j_{\text{ét}*} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(q)'$$

induced by (6.1.1) *has a unique factorization*

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_n(q)) \longrightarrow \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_{n-m}(q)) \longrightarrow i^{*}_{\text{ét}} R^q j_{\text{ét}*} \mathbb{Z}/p^{n-m}\mathbb{Z}(q) \longrightarrow i^{*}_{\text{ét}} R^q j_{\text{ét}*} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(q)'.$$

Furthermore the middle homomorphism in this factorization is an isomorphism.

Proof. — By Proposition 5.4.1 (1) and the exact sequence $0 \to \mathcal{S}'_N(q) \xrightarrow{p^M} \mathcal{S}'_{N+M}(q) \to \mathcal{S}'_M(q) \to 0$, we see that the symbol maps $(M^{\mathrm{gp}}_{N+1})^{\otimes q} \to \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_N(q))$ $(N \geqslant 1)$ are surjective and the first claim holds. Similarly, by the assumption on K and by Theorem 6.2.1, we see that $i^{*}_{\text{ét}} R^{q-1} j_{\text{ét}*} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(q) \to i^{*}_{\text{ét}} R^{q-1} j_{\text{ét}*} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}(q)$

is surjective and the second claim is true. Now by the surjectivity of the symbol maps $(M_{N+1}^{\mathrm{gp}})^{\otimes q} \to \mathcal{H}^q(\mathcal{S}'_N(q))$ and Proposition 6.1.4, we obtain the factorization in the last claim and the middle homomorphism becomes compatible with the symbol maps. For the last claim, we are reduced easily to the case $n = 1$, in which case, it follows from Theorem 6.2.1 and Proposition 5.4.1. □

7. Proof of C_{st}

We will first explain the idea of Fontaine, Messing and Kato to prove C_{crys} for a proper smooth scheme X over O_K. In the case $\dim X_K \leqslant p-1$ and $K = K_0$, using the theory of Fontaine and Laffaille on p-torsion crystalline representations, Fontaine and Messing proved that the de Rham cohomology $H^m_{\mathrm{dR}}(X_K/K)$ with its filtered φ-module structure is admissible ([**FM87**] II 2.8 Remark), that is, associated to a crystalline p-adic representation $\widetilde{V}^m$ and that there exist isomorphisms ([**FM87**] III 1.6 Corollary, 2.4 Proposition)

(7.0.1)
$$\begin{aligned} H^m(\overline{X}, S^r_{\mathbb{Q}_p}) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(\mathrm{Fil}^r(B^+_{\mathrm{crys}} \otimes_K H^m_{\mathrm{dR}}(X_K/K)) \xrightarrow{p^r-\varphi} B^+_{\mathrm{crys}} \otimes_K H^m_{\mathrm{dR}}(X_K/K)) \\ &\xleftarrow{\sim} \widetilde{V}^m(r) \end{aligned}$$

for $0 \leqslant m \leqslant r$ (cf. the beginning of § 5). Combining this with

$$H^m(\overline{X}, S^r_{\mathbb{Q}_p}) \longrightarrow H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p(r)) \tag{7.0.2}$$

induced by (5.0.2) and using Poincaré duality, they proved $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \cong \widetilde{V}^m$. In the ramified case $K \neq K_0$, we don't have a good integral theory of p-torsion crystalline representations unless $[K : K_0] \times (\text{length of filtration}) \leqslant p-2$. Kato and Messing constructed only a homomorphism ([**KM92**]):

$$H^m(\overline{X}, S^r_{\mathbb{Q}_p}) \longrightarrow (B^+_{\mathrm{crys}} \otimes_{K_0} H^m_{\mathrm{crys}}(X))^{\varphi=p^r} \cap \mathrm{Fil}^r(B^+_{\mathrm{dR}} \otimes_K H^m_{\mathrm{dR}}(X_K/K)). \tag{7.0.3}$$

To prove C_{crys} for $\dim X_K \leqslant (p-2)/2$, they needed the strong result of Kato and Kurihara for the étale cohomology side: that (7.0.2) is an isomorphism for $0 \leqslant m \leqslant r \leqslant p-2$ ([**Kat87**],[**Kur87**]).

In [**Kat94a**], K. Kato generalized the latter argument to the semi-stable case, which we will survey below. Now we have the isomorphisms without the restriction $r \leqslant p-2$ (Corollary 6.0.2) and hence we can remove the restriction $\dim X_K \leqslant (p-2)/2$ in [**Kat94a**].

7.1. Syntomic cohomology and étale cohomology. — Let (X, M) be a smooth fine log scheme over (S, N) such that X is proper over S and the special fiber (Y, M_Y) is of Cartier type over (s, N_s). We further assume that M_K is saturated. We construct

a canonical G_K-equivariant homomorphisms functorial on X and compatible with the product structures (the semi-stable version of (7.0.3)):

$$(7.1.1)\quad H^m((\overline{X},\overline{M}),S^r_{\mathbb{Q}_p}) \longrightarrow (B^+_{\mathrm{st}}\otimes_{K_0} H^m_{\mathrm{crys}}((X,M)))^{N=0,\varphi=p^r}\cap \mathrm{Fil}^r(B^+_{\mathrm{dR}}\otimes_K H^m_{\mathrm{dR}}((X_K,M_K)/K))$$

for integers $r,m\geqslant 0$ as follows.

First recall that we have the following commutative diagram (§ 4.3):

$$\begin{array}{ccccc}(S_n,N_n) & \xrightarrow{i_{E_n,\pi}} & (E_n,M_{E_n}) & \xleftarrow{i_{E_n,0}} & (\mathrm{Spec}(W_n),N_n^0)\\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & \mathrm{Spec}(W_n) & & \end{array}$$

We define $H^m((\overline{X},\overline{M})/W,J^{[r]})$ to be

$$\varprojlim_n\Big(\varinjlim_{K'} H^m_{\mathrm{crys}}(((X'_n,M'_n)/(W_n,pW_n,\gamma))_{\mathrm{crys}},J^{[r]}_{(X'_n,M'_n)/W_n})\Big),$$

where K' ranges over all finite extensions of K contained in $\overline{K}$, (S',N') denotes $\mathrm{Spec}(O_{K'})$ with the log structure defined by the closed point and $(X',M')=(X,M)\times_{(S,N)}(S',N')$. $H^m((\overline{X},\overline{M})/W)$ is naturally endowed with a Frobenius endomorphism φ and there is a natural map:

$$(7.1.2)\quad H^m((\overline{X},\overline{M}),S^r_{\mathbb{Q}_p})\longrightarrow \mathrm{Ker}(H^m((\overline{X},\overline{M})/W,J^{[r]})_{\mathbb{Q}_p}\xrightarrow{p^r-\varphi} H^m((\overline{X},\overline{M})/W)_{\mathbb{Q}_p})$$

for $r,m\geqslant 0$. Here and hereafter, we denote the operation $\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}$ simply by the subscript $\mathbb{Q}_p$. We define $H^m((\overline{X},\overline{M})/(S,N),J^{[r]}/J^{[s]})$ and $H^m((\overline{X},\overline{M})/(E,M_E))$ similarly using the base (S_n,N_n) and (E_n,M_{E_n}) respectively. The latter cohomology naturally endowed with φ and N satisfying $N\varphi=p\varphi N$ (cf. § 4.3, § 4.4). We have the following Künneth formulas:

Proposition 7.1.3

(1) ([**Tsu99**] Proposition 4.5.4, cf. [**Kat94a**] the proof of Lemma (4.2)). *The natural homomorphism:*

$$H^0((\overline{S}_n,\overline{N}_n)/(E_n,M_{E_n}))\otimes_{R_{E_n}} H^m((X_n,M_n)/(E_n,M_{E_n}))\longrightarrow H^m((\overline{X}_n,\overline{M}_n)/(E_n,M_{E_n}))$$

is an isomorphism for $m\geqslant 0$.

(2) ([**Tsu99**] § 4.7, cf. [**KM92**] Proposition (1.3)). *The natural homomorphism obtained from Proposition* 4.4.1*:*

$$B^+_{\mathrm{dR}}\otimes_K H^m_{\mathrm{dR}}((X_K,M_K)/K)\longrightarrow \varprojlim_s H^m((\overline{X},\overline{M})/(S,N),\mathcal{O}/J^{[s]})_{\mathbb{Q}_p}$$

is an isomorphism for $m \geqslant 0$ and it induces an isomorphism for $r \geqslant 0$:

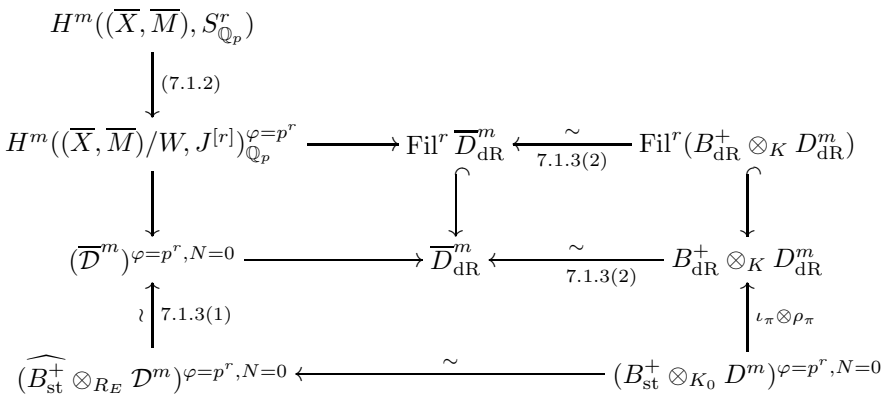
$$\mathrm{Fil}^r(B^+_{\mathrm{dR}} \otimes_K H^m_{\mathrm{dR}}((X_K, M_K)/K)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_s H^m((\overline{X}, \overline{M})/(S, N), J^{[r]}/J^{[s]})_{\mathbb{Q}_p}.$$

To prove (2), we need the degeneration of the Hodge spectral sequence for $(X_K, M_K)/K$, where we use the assumption that M_K is saturated. I don't know whether the degeneration holds without this assumption.

To simplify the notation, we set

$$\begin{aligned}
D^m &:= H^m_{\mathrm{crys}}((X, M)), \quad D^m_{\mathrm{dR}} := H^m_{\mathrm{dR}}((X_K, M_K)/K)\\
\mathcal{D}^m &:= H^m((X, M)/(E, M_E))_{\mathbb{Q}_p}\\
\widehat{B^+_{\mathrm{st}}} &:= H^0((\overline{S}, \overline{N})/(E, M_E))_{\mathbb{Q}_p} \quad \text{(the notation of C. Breuil)}\\
\overline{\mathcal{D}}^m &:= H^m((\overline{X}, \overline{M})/(E, M_E))_{\mathbb{Q}_p}\\
\overline{D}^m_{\mathrm{dR}} &:= \varprojlim_s H^m((\overline{X}, \overline{M})/(S, N), \mathcal{O}/J^{[s]})_{\mathbb{Q}_p}\\
\mathrm{Fil}^r \overline{D}^m_{\mathrm{dR}} &:= \varprojlim_s H^m((\overline{X}, \overline{M})/(S, N), J^{[r]}/J^{[s]})_{\mathbb{Q}_p}
\end{aligned}$$

Then, from Proposition 4.3.2, Proposition 4.4.1 (1) and Proposition 7.1.3, we obtain the following commutative diagram:



Here the bottom left arrow is obtained from Proposition 4.4.1 (1) and Proposition 4.3.2. Thus we obtain the required homomorphism (7.1.1).

For a line bundle $\mathcal{L}$ on X, we define the syntomic first Chern class $c^1_{\mathrm{syn}}(\mathcal{L})$ to be the image of the class of $\mathcal{L}$ in $\mathrm{Pic}(X) = H^1_{\text{ét}}(X, \mathcal{O}^*_X)$ under the homomorphism $H^1_{\text{ét}}(X, \mathcal{O}^*_X) \to H^1_{\text{ét}}(X, M^{\mathrm{gp}}) \to H^2((\overline{X}, \overline{M}), S^1_{\mathbb{Q}_p})$ induced by the symbol map. For a line bundle $\mathcal{L}$ on X_K, we define the de Rham first Chern class $c^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{L})$ similarly using $H^1_{\text{ét}}(X_K, M^{\mathrm{gp}}_K) \to H^1_{\mathrm{dR}}((X_K, M_K)/K)$ induced by $d\log\colon M^{\mathrm{gp}}_K \to \Omega^{\cdot}_{X_K/K}(\log(M_K))[1]$.

***Proposition 7.1.4* ([Tsu99] Lemma 4.8.9).** — *For any line bundle $\mathcal{L}$ on X, the homomorphism* (7.1.1) *with $m = 2$, $r = 1$ sends $c^1_{\mathrm{syn}}(\mathcal{L})$ to $1 \otimes c^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}|_{X_K})$.*

Proof. — We are easily reduced to proving the diagram:

$$\begin{array}{ccc} H^1_{\text{ét}}(X_n, M_n^{\mathrm{gp}}) & \longrightarrow & H^1_{\text{ét}}(X_n, M_n^{\mathrm{gp}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2_{\text{ét}}(Y, \mathcal{S}_n^{\sim}(1)_{(X,M)}) & \longrightarrow & H^2_{\mathrm{dR}}((X_n, M_n)/(S_n, N_n)) \end{array}$$

is commutative. This follows from its local analogue:

$$\begin{array}{ccc} M_n^{\mathrm{gp}} & \longrightarrow & M_n^{\mathrm{gp}} \\ \downarrow{\scriptstyle \text{symbol}} & & \downarrow \\ \mathcal{S}_n^{\sim}(1)_{(X,M),(Z,M_Z)} & \longrightarrow & \Omega^{\cdot}_{X_n/S_n}(\log(M_n/N_n))[1] \end{array}$$

trivial by definition. □

7.2. Proof of C_{st}. — Let (X, M) be as in the beginning of § 6. Then, from Corollary 6.0.2 and (7.1.1), we obtain a G_K-equivariant homomorphism:

(7.2.1)
$$H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p(r)) \longrightarrow (B^+_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} H^m_{\mathrm{crys}}((X, M)))^{N=0, \varphi=p^r} \cap \mathrm{Fil}^r(B^+_{\mathrm{dR}} \otimes_K H^m_{\mathrm{dR}}(X_K/K))$$

for $0 \leqslant m \leqslant r$ compatible with the product structures and functorial on X. By tensoring $\mathbb{Q}_p(-r) = B_{\mathrm{st}}^{\varphi=p^{-r}, N=0} \cap \mathrm{Fil}^{-r} B_{\mathrm{dR}}$, we obtain a G_K-equivariant homomorphism:

$$B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \longrightarrow B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} H^m_{\mathrm{crys}}((X, M)) \tag{7.2.2}$$

preserving φ, N and the filtrations after $B_{\mathrm{dR}} \otimes_{B_{\mathrm{st}}}$. We can verify that (7.2.1) for $m = 0$ is induced by $\mathbb{Q}_p(r) = \mathrm{Fil}^r B^+_{\mathrm{dR}} \cap (B^+_{\mathrm{st}})^{\varphi=p^r, N=0}$ and it implies that (7.2.2) is independent of the choice of $r(\geqslant m)$. Combining with Proposition 7.1.4 and Proposition 6.1.4, it also implies:

***Proposition 7.2.3*.** — *For any line bundle $\mathcal{L}$ on X, the homomorphism* (7.2.2) *with $m = 1$ sends $t \otimes (c^1_{\text{ét}}(\mathcal{L}|_{X_K}) \otimes t^{-1})$ to $1 \otimes c^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{L}|_{X_K})$, where t denotes a non-zero element of $\mathbb{Q}_p(1)$.*

Now we will prove that (7.2.2) is a filtered isomorphism, which implies Theorem 1.1 by Corollary 2.2.10. Since the special fiber Y is reduced and X is smooth in a neighborhood of a codimension 0 point of the special fiber, by replacing K with a suitable finite unramified extension, we may assume that X_K is geometrically connected (SGA1 X Proposition 1.2) and has a section $s : S \to X$ whose image is contained in a smooth locus. Set $d := \dim X_K$. We have $\dim_{\mathbb{Q}_p} H^{2d}_{\text{ét}} = \dim_K H^{2d}_{\mathrm{dR}} = \dim_{K_0} H^{2d}_{\mathrm{crys}} = 1$.

***Proposition 7.2.4* ([Tsu99] Lemma 4.10.3).** — *The homomorphism* (7.2.2) *for $m = 2d$ is a filtered isomorphism.*

Proof. — (The argument of Fontaine-Messing [**FM87**] III 6.3.) We take the blow up $\widetilde{X}$ of X along s and prove the proposition for $\widetilde{X}$ instead of X. Let P be the exceptional divisor, which is isomorphic to $\mathbb{P}_S^{d-1}$. Then, for a hyperplane $H \subset P$, we have $j^*([P_K]) = -[H_K]$ in $CH^1(P_K)$ where j denotes $P_K \hookrightarrow X_K$ and hence $[P_K]^d = (-1)^{d-1} j_*([H_K]^{d-1})$ in $CH^d(\widetilde{X}_K)$. This implies that the class of a rational point is $(-1)^{d-1} c^1(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(P)|_{\widetilde{X}_K})^d$ in $H^{2d}_{\text{ét}}$ and H^{2d}_{dR}. Hence the proposition for $\widetilde{X}$ follows from Proposition 7.2.3. □

By Proposition 7.2.4 and Poincaré duality, we see that the image of (7.2.2) is a direct factor of the RHS as B_{st}-modules and since $\dim_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}} = \dim_K H^m_{\text{dR}} (= \dim_{K_0} H^m_{\text{crys}})$ (by the Lefschetz principle and the equality over $\mathbb{C}$), it implies the bijectivity. For the isomorphism of the filtrations, we take gr of $B_{\text{dR}} \otimes_{B_{\text{st}}}$ (7.2.2) and prove that it is injective using Poincaré duality for étale cohomology and Serre duality.

Appendix. C_{st} implies C_{dR}

In this appendix, we will give an argument to derive C_{dR}: the theorem of G. Faltings ([**Fal89**] VIII) from C_{st} by using the alteration of de Jong ([**dJ96**]). As in the Notation in § 1, let K be a complete discrete valuation ring of mixed characteristic $(0, p)$ with perfect residue field and let $\overline{K}$ be an algebraic closure of K. We will prove the following theorem.

Theorem A1 **(C_{dR})**. — *For each finite extension L of K contained in $\overline{K}$ and each proper smooth scheme X over L, there exist* $\text{Gal}(\overline{K}/L)$*-equivariant B_{dR}-linear canonical isomorphisms:*

$$c_X : B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\cong} B_{\text{dR}} \otimes_L H^m_{\text{dR}}(X/L) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

preserving the filtrations and satisfying the properties below. Here $X_{\overline{K}} := X \otimes_L \overline{K}$, the action of $g \in \text{Gal}(\overline{K}/L)$ on the LHS (resp. RHS) is $g \otimes g$ (resp. $g \otimes 1$) and the filtration on the LHS (resp. RHS) is $\text{Fil}^{\cdot} B_{\text{dR}} \otimes H^m_{\text{ét}}$ *(resp. the tensor product of the filtrations on B_{dR} and H^m_{dR}). Let t denote any generator of $\mathbb{Z}_p(1) (\subset \text{Fil}^1 B_{\text{dR}})$.*

(A1.1) *Functoriality : For other L' and X' such that $L \subset L'$ and a morphism $f : X' \to X$ compatible with* $\text{Spec}(L') \to \text{Spec}(L)$*, the following diagram is commutative:*

$$\begin{array}{ccc} B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) & \xrightarrow[\cong]{c_X} & B_{\text{dR}} \otimes_L H^m_{\text{dR}}(X/L) \\ {\scriptstyle 1\otimes f^*}\downarrow & & {\scriptstyle 1\otimes f^*}\downarrow \\ B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X'_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) & \xrightarrow[\cong]{c_{X'}} & B_{\text{dR}} \otimes_{L'} H^m_{\text{dR}}(X'/L'). \end{array}$$

(A1.2) *Compatibility with cup products.*

(A1.3) *Compatibility with cycle classes: For any algebraic cycle Y on X of codimension r,*

$$c_X(1 \otimes (\text{cl}^{\text{ét}}_{X_{\overline{K}}}(Y_{\overline{K}}) \otimes t^{-r})) = t^{-r} \otimes \text{cl}^{\text{dR}}_X(Y).$$

(A1.4) *Compatibility with Chern classes: For any vector bundle E on X,*

$$c_X(1 \otimes (c_r^{\text{ét}}(E) \otimes t^{-r})) = t^{-r} \otimes c_r^{\text{dR}}(E).$$

(A1.5) *Compatibility with trace maps: If X is of equidimension d, then the following diagram commutes:*

$$\begin{array}{ccc} B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^{2d}_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) & \xrightarrow[\cong]{c_X} & B_{\text{dR}} \otimes_L H^{2d}_{\text{dR}}(X/L) \\ {\scriptstyle 1\otimes(t^d\cdot \text{Tr})}\downarrow & & {\scriptstyle t^d\otimes \text{Tr}}\downarrow \\ B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{\cong} & B_{\text{dR}} \otimes_L L. \end{array}$$

(A1.6) *Compatibility with direct images: Under the same assumption as* (A1.1)*, if $L' = L$, X is of equidimension d and X' is of equidimension e, then the following diagram commutes:*

$$\begin{array}{ccc} B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^{m}_{\text{ét}}(X'_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) & \xrightarrow[\cong]{c_{X'}} & B_{\text{dR}} \otimes_L H^{m}_{\text{dR}}(X'/L) \\ {\scriptstyle 1\otimes(t^{e-d}\cdot f_*)}\downarrow & & {\scriptstyle t^{e-d}\otimes f_*}\downarrow \\ B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^{m+2(d-e)}_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) & \xrightarrow[\cong]{c_X} & B_{\text{dR}} \otimes_L H^{m+2(d-e)}_{\text{dR}}(X/L). \end{array}$$

First one can derive the following weaker theorem easily from the results of [**Tsu99**].

Theorem A2. — *For each finite extension L of K contained in $\overline{K}$ and each proper smooth scheme X over L with semi-stable reduction, associated to each semi-stable model $\mathcal{X}$, there exist $\text{Gal}(\overline{K}/L)$-equivariant B_{dR}-linear isomorphisms:*

$$c_{\mathcal{X}} \colon B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\cong} B_{\text{dR}} \otimes_L H^m_{\text{dR}}(X/L)$$

preserving the filtrations and satisfying the following properties, where t denotes a generator of $\mathbb{Z}_p(1)(\subset \text{Fil}^1 B_{\text{dR}})$.

(A2.1) *Functoriality I: For other L', X' and $\mathcal{X}'$ such that $L \subset L'$ and a morphism $f \colon \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ compatible with $\text{Spec}(O_{L'}) \to \text{Spec}(O_L)$, the same diagram as in* (A1.1) *with c_X and $c_{X'}$ replaced by $c_{\mathcal{X}}$ and $c_{\mathcal{X}'}$ is commutative* ([**Tsu99**] *Proposition* 4.10.4).

(A2.2) *Compatibility with cup products.*

(A2.3) *Compatibility with cycle classes: For any algebraic cycle Y on X of codimension r,*

$$c_{\mathcal{X}}(1 \otimes (\text{cl}^{\text{ét}}_{X_{\overline{K}}}(Y_{\overline{K}}) \otimes t^{-r})) = t^{-r} \otimes \text{cl}^{\text{dR}}_X(Y).$$

(A2.4) *Compatibility with Chern classes: For any vector bundle E on X,*

$$c_{\mathcal{X}}(1 \otimes (c_r^{\text{ét}}(E) \otimes t^{-r})) = t^{-r} \otimes c_r^{\text{dR}}(E).$$

(A2.5) *Compatibility with trace maps: If X is of equidimension d, then the same diagram as in* (A1.5) *with c_X replaced by $c_{\mathcal{X}}$ is commutative.*

(A2.6) *Compatibility with direct images: Under the same assumption as* (A2.1)*, if $L' = L$, X is of equidimension d and X' is of equidimension e, then the same diagram as in* (A1.6) *with c_X and $c_{X'}$ replaced by $c_{\mathcal{X}}$ and $c_{\mathcal{X}'}$ is commutative.*

(A2.7) *Functoriality II: For any* $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$*, if we denote by* X^σ*,* $\mathcal{X}^\sigma$ *the base change of* X*,* $\mathcal{X}$ *by* $\mathrm{Spec}(\sigma)\colon \mathrm{Spec}(O_{\sigma(L)}) \to \mathrm{Spec}(O_L)$*, then the following diagram commutes:*

$$\begin{array}{ccc} B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) & \xrightarrow[\cong]{c_{\mathcal{X}}} & B_{\mathrm{dR}} \otimes_L H^m_{\mathrm{dR}}(X/L) \\ {\scriptstyle \sigma\otimes\sigma^*}\downarrow\wr & & {\scriptstyle \sigma\otimes\sigma^*}\downarrow\wr \\ B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X^\sigma_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) & \xrightarrow[\cong]{c_{\mathcal{X}^\sigma}} & B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\sigma(L)} H^m_{\mathrm{dR}}(X^\sigma/\sigma(L)). \end{array}$$

Here σ^* *denote the isomorphisms induced by the following cartesian diagrams:*

$$\begin{array}{ccc} X^\sigma & \xrightarrow{\sim} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\sigma(L)) & \xrightarrow[\mathrm{Spec}(\sigma)]{\sim} & \mathrm{Spec}(L), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X^\sigma_{\overline{K}} & \xrightarrow{\sim} & X_{\overline{K}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\overline{K}) & \xrightarrow[\mathrm{Spec}(\sigma)]{\sim} & \mathrm{Spec}(\overline{K}). \end{array}$$

Proof. — The isomorphism $c_{\mathcal{X}}$ compatible with the cup products (A2.2) is constructed in [**Tsu99**] § 4.10, (A2.1) is proven in [**Tsu99**] Proposition 4.10.4 and (A2.7) is trivial by the construction of $c_{\mathcal{X}}$. We will prove the remaining properties.

(A2.3) (I learned the following argument from W. Messing.) Since $c_{\mathcal{X}}$ is compatible with the Chern classes of a line bundle on $\mathcal{X}$ (not on X!) ([**Tsu99**] Proposition 4.10.1) and $c_{\mathcal{X}}$ is functorial on $\mathcal{X}$ (A2.1), we see that $c_{\mathcal{X}}$ is compatible with the Chern classes of a vector bundle on $\mathcal{X}$ by the splitting principle. Here note that the flag variety associated to a vector bundle on $\mathcal{X}$ is proper smooth over $\mathcal{X}$. For any integral closed subscheme Y of X, if we denote by $\mathcal{Y}$ the closure of Y in $\mathcal{X}$, then $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ has a resolution of finite length by locally free sheaves of finite rank (because $\mathcal{X}$ is regular) and the cycle classes of Y in $H^*_{\text{ét}}$ and H^*_{dR} can be described in the same way in terms of the Chern classes of the locally free sheaves appearing in the resolution. Hence $c_{\mathcal{X}}$ is also compatible with cycle classes.

(A2.4) Choose a coherent $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module $\mathcal{E}$ such that $\mathcal{E}|_X \cong E$ (EGA I (9.4.8)). Then $\mathcal{E}$ has a resolution of finite length by locally free sheaves of finite rank. The rest is the same as the proof of (A2.3) above.

(A2.5) By (A2.1), $c_{\mathcal{X}}$ decomposes into the sum of $c_{\mathcal{X}'}$ for each irreducible component $\mathcal{X}'$ of $\mathcal{X}$. Hence, by (A2.1) again, we can replace L by a suitable finite unramified extension contained in $\overline{K}$ and assume that X is geometrically irreducible and has an L-rational point. In this case, H^{2d} are both one dimensional and (A2.5) follows from the compatibility with cycle classes of a point (A2.3).

(A2.6) follows from (A2.1), (A2.2) and (A2.5). □

In the rest of this appendix, we will derive Theorem A1 from Theorem A2 using the alteration of de Jong [**dJ96**]. First let us recall a result of de Jong. In this appendix, we say that a morphism $f\colon X \to Y$ between reduced noetherian schemes is an *étale alteration* if it is proper surjective and, for each $x \in X$ of codimension 0, f is étale in

a neighborhood of x. If f is proper and surjective, the latter condition is equivalent to the following: For each $y \in Y$ of codimension 0, there exists an open neighborhood $V \subset Y$ of y such that $f^{-1}(V) \to V$ is étale and, for each $x \in X$ of codimension 0, $f(x)$ is also of codimension 0 in Y. Let L be a finite extension of K. For a scheme $\mathcal{X}$ of finite type over O_L, we say that $\mathcal{X}$ is *strictly semi-stable* over O_L if $\mathcal{X}$ is regular, the special fiber of $\mathcal{X}$ is a reduced divisor with normal crossings on $\mathcal{X}$, and the irreducible components of the special fiber and their intersections are smooth over the residue field of L.

***Theorem A3* (de Jong [dJ96])**. — *For a proper flat reduced scheme $\mathcal{X}$ over O_L, there exist a finite extension M of L, a proper strictly semi-stable scheme $\mathcal{Y}$ over O_M and a morphism $f\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ compatible with $\mathrm{Spec}(O_M) \to \mathrm{Spec}(O_L)$ such that the morphism $\mathcal{Y} \to \mathcal{X} \otimes_{O_L} O_M$ induced by f is an étale alteration.*

We will also need the following fact.

Proposition A4. — *For a proper strictly semi-stable scheme $\mathcal{X}$ over O_L, there exist a proper strictly semi-stable scheme $\mathcal{Z}$ over O_L and a proper surjective morphism $\mathcal{Z} \to \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}(O_L)} \mathcal{X}$ over O_L which is an isomorphism on the generic fiber.*

Now let us construct the isomorphism c_X.

Proposition A5. — *Let L be a finite extension of K contained in $\overline{K}$, let X be a proper smooth scheme over L and let $\mathcal{X}$ be a proper flat model of X. (Such a model always exists by the compactification theorem of Nagata). Suppose that we are given a proper strictly semi-table scheme $\mathcal{Y}$ over O_L and an étale alteration $f\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ over O_L. Then the homomorphism*

$$f^* : H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \longrightarrow H^m_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$$

is injective, the homomorphism

$$f^* : H^m_{\mathrm{dR}}(X/L) \longrightarrow H^m_{\mathrm{dR}}(Y/L)$$

is injective and strictly compatible with the Hodge filtrations and $c_{\mathcal{Y}}$ in Theorem A2 *induces a $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$-equivariant B_{dR}-linear isomorphism*

$$B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} f^*(H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)) \cong B_{\mathrm{dR}} \otimes_L f^*(H^m_{\mathrm{dR}}(X/L))$$

preserving the filtrations.

Proof. — (I learned this argument from T. Saito). By (A2.1), we may assume that X and $Y := \mathcal{Y} \otimes_{O_L} L$ is irreducible. (Note that $\mathcal{Y}$ and X are disjoint union of irreducible components but $\mathcal{X}$ is not in general. We replace $\mathcal{X}$ by the disjoint union of the irreducible components of $\mathcal{X}$ with the reduced induced closed subscheme structures.) Let g be the correspondence defined by the transpose $\Gamma_f^t = (f, \mathrm{id}_Y)\colon Y \hookrightarrow X \times Y$ of the graph $\Gamma_f := (\mathrm{id}_Y, f)\colon Y \hookrightarrow Y \times X$ of f. Then the composite $f \circ g$ is $n \cdot \mathrm{id}_X$. Here

n denotes the degree of $Y \to X$ at the generic point of X. Indeed, we see easily that the commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{(\mathrm{id}_Y, f)} & Y \times X \\ {\scriptstyle (f,\mathrm{id}_Y)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_f^t \times \mathrm{id}_X} \\ X \times Y & \xrightarrow{\mathrm{id}_X \times \Gamma_f} & X \times Y \times X \end{array}$$

is cartesian, and the direct image of the cycle $(f, \mathrm{id}_Y, f) : Y \subset X \times Y \times X$ in $X \times X$ is $n \cdot \Delta_X$. Here Δ_X denotes the diagonal of $X \times X$. Hence for the two cohomology groups in question, we have $g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = n$ and hence f^* are injective. By applying the same argument to the Hodge cohomology $\oplus_i H^{m-i}(Z, \Omega^i_{Z/L}) \cong \oplus_i \mathrm{gr}^i H^m_{\mathrm{dR}}(Z/L)$, we see that the gr of f^* for de Rham cohomology is injective and hence f^* is strictly compatible with the Hodge filtrations. From the above argument, it also follows that g^* is surjective and hence the image of f^* coincides with the image of $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$. Set $H^m(Z)(r) = H^m_{\text{ét}}(Z_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)(r)$ or $H^m_{\mathrm{dR}}(Z/L)$ (here we ignore the Hodge filtration) and denote by c the class in $H^{2d}(Y \times Y)(d)$ ($d = \dim X = \dim Y$) defined by the correspondence $g \circ f$. Then the composite $f^* \circ g^*$ is given by

$$H^m(Y) \xrightarrow{p_1^*} H^m(Y \times Y) \xrightarrow{-\cup c} H^{m+2d}(Y \times Y)(d) \xrightarrow{p_{2*}(d)} H^m(Y)$$

Now from Proposition A4, (A2.3), (A2.1), (A2.2) and (A2.6), we obtain the isomorphism in the proposition. The compatibility with the filtrations follows from the strict compatibility of f^* with the Hodge filtrations. □

Let L be a finite extension of K contained in $\overline{K}$ and let X be a proper smooth scheme over L. Choose a proper flat model $\mathcal{X}$ of X. Then by Theorem A3, there exist a finite extension M of L contained in $\overline{K}$, a proper strictly semi-stable scheme $\mathcal{Y}$ over O_M and a morphism $f\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ compatible with $\mathrm{Spec}(O_M) \to \mathrm{Spec}(O_L)$ such that the induced morphism $f'\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \otimes_{O_L} O_M$ is an étale alteration. Choose such M, $\mathcal{Y}$ and f. Applying Proposition A5 to f', we obtain an isomorphism

$$c_{\mathcal{X},\mathcal{Y},f}\colon B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\cong} B_{\mathrm{dR}} \otimes_L H^m_{\mathrm{dR}}(X/L)$$

which makes the following diagram commutative:

$$\begin{array}{ccc} B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) & \xrightarrow[\cong]{c_{\mathcal{X},\mathcal{Y},f}} & B_{\mathrm{dR}} \otimes_L H^m_{\mathrm{dR}}(X/L) \\ {\scriptstyle 1\otimes f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes f^*} \\ B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) & \xrightarrow[\cong]{c_{\mathcal{Y}}} & B_{\mathrm{dR}} \otimes_M H^m_{\mathrm{dR}}(Y/M). \end{array}$$

Here the two vertical homomorphisms are injective and the homomorphism $c_{\mathcal{X},\mathcal{Y},f}$ is compatible with the actions of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/M)$ and with the filtrations.

Proposition A6. — *Under the notations and assumptions as above, the homomorphism $c_{\mathcal{X},\mathcal{Y},f}$ is independent of the choice of $\mathcal{X}$, M, $\mathcal{Y}$ and f.*

Proof. — Choose other $\mathcal{X}_1$, M_1, $\mathcal{Y}_1$ and f_1. Let $\mathcal{X}_2$ be the scheme theoretic closure of the diagonal Δ_X of $X \times X$ in $\mathcal{X} \times \mathcal{X}_1$. Then $\mathcal{X}_2$ is a proper flat model of X from which there are maps to $\mathcal{X}$ and $\mathcal{X}_1$. Let $M_2' := M \cdot M_1$, Let $\mathcal{X}_2'$ be the base change of $\mathcal{X}_2$ by $O_L \subset O_{M_2'}$ and let $\mathcal{Y}'$ (resp. $\mathcal{Y}_1'$) be the base change of the closed subscheme of $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}_2$ (resp. $\mathcal{Y}_1 \times_{\mathcal{X}_1} \mathcal{X}_2$) defined by the ideal consisting of all torsion elements by $M \subset M_2'$ (resp. $M_1 \subset M_2'$). Then we have natural étale alterations over $O_{M_2'}$ $\mathcal{Y}' \to \mathcal{X}_2'$ and $\mathcal{Y}_1' \to \mathcal{X}_2'$. Let $\mathcal{Y}_2'$ be the closure in $\mathcal{Y}' \times_{\mathcal{X}_2'} \mathcal{Y}_1'$ of the inverse images of all points of codimension 0 on $\mathcal{X}_2'$ (or equivalently X_2') endowed with the reduced closed subscheme structure. Note that, in general, the generic fiber of $\mathcal{Y}_2'$ is smooth over M_2' only in a neighborhood of the points of codimension 0. Then, by Theorem A3, there exist a finite extension M_2 of M_2' contained in $\overline{K}$, a proper strictly semi-stable scheme $\mathcal{Y}_2$ over O_{M_2}, and a morphism $\mathcal{Y}_2 \to \mathcal{Y}_2'$ compatible with $\mathrm{Spec}(O_{M_2}) \to \mathrm{Spec}(O_{M_2'})$ such that the induced morphism $\mathcal{Y}_2 \to \mathcal{Y}_2' \otimes_{O_{M_2'}} O_{M_2}$ is an étale alteration. Thus we obtain a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X} & \longleftarrow & \mathcal{X}_2 & \longrightarrow & \mathcal{X}_1 \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & {\scriptstyle f_2}\uparrow & & {\scriptstyle f_1}\uparrow \\ \mathcal{Y} & \longleftarrow & \mathcal{Y}_2 & \longrightarrow & \mathcal{Y}_1 \end{array}$$

over the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spec}(O_L) & = & \mathrm{Spec}(O_L) & = & \mathrm{Spec}(O_L) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Spec}(O_M) & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(O_{M_2}) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(O_{M_1}). \end{array}$$

Here the middle vertical morphism induces an étale alteration $\mathcal{Y}_2 \to \mathcal{X}_2 \otimes_{O_L} O_{M_2}$. Now, from the functoriality (A2.1), we obtain $c_{\mathcal{X},\mathcal{Y},f} = c_{\mathcal{X}_2,\mathcal{Y}_2,f_2} = c_{\mathcal{X}_1,\mathcal{Y}_1,f_1}$. □

We set $c_X = c_{\mathcal{X},\mathcal{Y},f}$.

Proposition A7. — *Under the notations and assumptions above, c_X is compatible with the actions of* $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$.

Proof. — Choose $\mathcal{X}$, M, $\mathcal{Y}$ and f as above. Then c_X is compatible with the actions of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/M)$. Let σ be an arbitrary element of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$, let Y^σ, $\mathcal{Y}^\sigma$ be the base change of Y, $\mathcal{Y}$ by $\mathrm{Spec}(\sigma)\colon \mathrm{Spec}(\sigma(O_M)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(O_M)$, and let f^σ be the composite $\mathcal{Y}^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{Y} \xrightarrow{f} \mathcal{X}$. Since the action of σ on L is trivial, f^σ is compatible with the embedding $L \hookrightarrow \sigma(M)$. By the definition of $c_{\mathcal{X},\mathcal{Y},f}$ and the functoriality (A2.7), we

obtain the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc}
B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) & \xrightarrow[\cong]{c_X = c_{X,\mathcal{Y},f}} & B_{\mathrm{dR}} \otimes_L H^m_{\mathrm{dR}}(X/L) \\
{\scriptstyle 1\otimes f^*}\downarrow \cap & & {\scriptstyle 1\otimes f^*}\downarrow \cap \\
B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) & \xrightarrow[\cong]{c_{\mathcal{Y}}} & B_{\mathrm{dR}} \otimes_M H^m_{\mathrm{dR}}(Y/M) \\
{\scriptstyle \sigma\otimes\sigma^*}\downarrow \wr & & {\scriptstyle \sigma\otimes\sigma^*}\downarrow \wr \\
B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(Y^{\sigma}_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) & \xrightarrow[\cong]{c_{\mathcal{Y}^\sigma}} & B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\sigma(M)} H^m_{\mathrm{dR}}(Y^\sigma/\sigma(M)) \\
{\scriptstyle 1\otimes (f^\sigma)^*}\uparrow \cup & & {\scriptstyle 1\otimes (f^\sigma)^*}\uparrow \cup \\
B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) & \xrightarrow[\cong]{c_X = c_{X,\mathcal{Y}^\sigma,f^\sigma}} & B_{\mathrm{dR}} \otimes_L H^m_{\mathrm{dR}}(X/L).
\end{array}$$

Here the morphisms f^*, σ^* and $(f^\sigma)^*$ between étale and de Rham cohomology groups are induced by the following commutative diagrams respectively:

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xleftarrow{f} & Y & Y & \xleftarrow{\sim} & Y^\sigma \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Spec}(L) & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(M) & \mathrm{Spec}(M) & \xleftarrow[\sim]{\mathrm{Spec}(\sigma)} & \mathrm{Spec}(\sigma(M)) \\
\uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{Spec}(\overline{K}) & \xleftarrow[\sim]{\mathrm{id}} & \mathrm{Spec}(\overline{K}), & \mathrm{Spec}(\overline{K}) & \xleftarrow[\sim]{\mathrm{Spec}(\sigma)} & \mathrm{Spec}(\overline{K})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
X & \xleftarrow{f^\sigma} & Y^\sigma \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Spec}(L) & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(\sigma(M)) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{Spec}(\overline{K}) & \xleftarrow[\sim]{\mathrm{id}} & \mathrm{Spec}(\overline{K})
\end{array}$$

If we denote by φ_σ the morphism between the two cohomology groups induced by the diagram

$$\begin{array}{ccc}
X & \xleftarrow[\sim]{\mathrm{id}} & X \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Spec}(L) & \xleftarrow[\sim]{\mathrm{id}} & \mathrm{Spec}(L) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{Spec}(\overline{K}) & \xleftarrow[\sim]{\mathrm{Spec}(\sigma)} & \mathrm{Spec}(\overline{K}),
\end{array}$$

then we have $\sigma^* \circ f^* = (f^\sigma)^* \circ \varphi_\sigma$. On the other hand, φ_σ is nothing but the action of σ for the étale cohomology and the identity for the de Rham cohomology. Hence the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) & \xrightarrow[\cong]{c_X} & B_{\mathrm{dR}} \otimes_L H^m_{\mathrm{dR}}(X/L) \\ {\scriptstyle \sigma\otimes\sigma}\downarrow\wr & & {\scriptstyle \sigma\otimes\mathrm{id}}\downarrow\wr \\ B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) & \xrightarrow[\cong]{c_X} & B_{\mathrm{dR}} \otimes_L H^m_{\mathrm{dR}}(X/L). \end{array}$$

□

Finally, we will prove that c_X satisfies the properties (A1.1)-(A1.6). First let us prove the functoriality (A1.1). We can verify that c_X and c_{X_1} are compatible for any finite extension L_1 of L contained in $\overline{K}$ and the base change X_1 of X to L_1. (Choose a proper flat model $\mathcal{X}$ of X, choose M, $\mathcal{Y}$ and f for the base change $\mathcal{X}_1$ of $\mathcal{X}$ to L_1, and use the same M and $\mathcal{Y}$ to define c_X and c_{X_1}.) If we denote by X_i, $i \in I$ the irreducible components of X, then we see easily $c_X = \oplus_{i\in I} c_{X_i}$. Hence, we may assume $L = L'$ and that X and X' are geometrically irreducible. We may further assume that there are a proper flat model $\mathcal{X}$ of X, a proper strictly semi-stable scheme $\mathcal{Y}$ over O_L and an étale alteration $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ over O_L. Choose a proper flat model $\mathcal{X}'_1$ of X and let $\mathcal{X}'$ be the scheme theoretic image of $(\mathrm{id}_{X'}, f) : X' \hookrightarrow X' \times X$ in $\mathcal{X}'_1 \times \mathcal{X}$. Then $\mathcal{X}'$ is a proper flat model of X' and the morphism f extends to a morphism $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$. Choose a closed point of the fiber of $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \to \mathcal{X}'$ over the unique generic point of $\mathcal{X}'$ and let $\widetilde{\mathcal{X}}'$ be its closure in $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'$ endowed with the reduced induced closed subscheme structure. Then $\widetilde{\mathcal{X}}' \to \mathcal{X}'$ is an étale alteration. By Theorem A3, there is a finite extension M of L contained in $\overline{K}$, a proper strictly semi-stable scheme $\mathcal{Y}'$ over O_M and a morphism $\mathcal{Y}' \to \widetilde{\mathcal{X}}'$ compatible with $\mathrm{Spec}(O_M) \to \mathrm{Spec}(O_L)$ such that the induced morphism $\mathcal{Y}' \to \widetilde{\mathcal{X}}' \otimes_{O_L} O_M$ is an étale alteration. Define c_X and c_Y using $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}' \to \widetilde{\mathcal{X}}' \to \mathcal{X}'$. Then (A1.1) follows from (A2.1).

The compatibility with the cup products (A1.2) follows easily from (A2.2). The compatibility with cycle classes (A1.3) follows from (A2.3) and the compatibility of the pull-back maps with cycle classes for étale and de Rham cohomologies. Similar for the compatibility with Chern classes (A1.4). For the compatibility with trace maps (A1.5), by replacing L by a finite extension of L contained in $\overline{K}$, we are reduced to the case that X is geometrically irreducible and has an L-rational point. Here we use the compatibility of c_X with base changes and with the decomposition of X into its irreducible components. Then (A1.5) follows from the compatibility of c_X with the cycle classes of a point (A1.3). Finally the compatibility with direct images (A1.6) follows from (A1.1), (A1.2) and (A1.5).

References

[Ber74] P. Berthelot – *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$*, Lecture Notes in Math. 407, Springer, 1974.

[BK86] S. Bloch & K. Kato – p-adic etale cohomology, *Publ. Math. IHES.* **63** (1986), p. 107–152.

[BM] C. Breuil & W. Messing – Torsion etale and crystalline cohomologies, these proceedings.

[BO78] P. Berthelot & A. Ogus – *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, 1978.

[BO83] ———, F-isocrystals and de Rham cohomology I, *Invent. math.* **72** (1983), p. 159–199.

[Bre96] C. Breuil – Topologie log-syntomique, cohomologie log-cristalline et cohomologie de Čech, *Bull. Soc. math. France* **124** (1996), p. 587–647.

[Bre98a] ———, Construction de représentations p-adiques semi-stables, *Ann. Scient. E. N. S.* **31** (1998), p. 281–327.

[Bre98b] ———, Cohomologie étale de p-torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable, *Duke Math. J.* **95** (1998), p. 523–620.

[dJ96] A. J. de Jong – Smoothness, semi-stability and alterations, *Publ. Math. IHES* **83** (1996), p. 51–93.

[Fal88] G. Faltings – p-adic Hodge theory, *Journal of the AMS* **1** (1988), p. 255–299.

[Fal89] ———, Crystalline cohomology and p-adic Galois representations, *Algebraic analysis, geometry, and number theory*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989, p. 25–80.

[Fal92] ———, Crystalline cohomology of semi-stable curves, and p-adic Galois representations, *Journal of Algebraic Geometry* **1** (1992), p. 61–82.

[Fal] ———, Almost étale extensions, these proceedings.

[FI93] J.-M. Fontaine & L. Illusie – p-adic periods: a survey, *Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry (Bombay, 1989)*, Hindustan Book Agency, Delhi, 1993, p. 57–93.

[FL82] J.-M. Fontaine & G. Laffaille – Constructions de représentations p-adiques, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* **15** (1982), p. 547–608.

[FM87] J.-M. Fontaine & W. Messing – p-adic periods and p-adic étale cohomology, Contemporary Math. 67, 1987, p. 179–207.

[Fon82] J.-M. Fontaine – Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, *Ann. of Math.* **115** (1982), p. 529–577.

[Fon83] ———, Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p-adiques, *Algebraic Geometry*, Lecture Notes in Math. 1016, Springer, 1983, p. 86–108.

[Fon94a] ———, Le corps des périodes p-adiques, *Périodes p-adiques, Séminaire de Bures, 1988*, Astérisque 223, 1994, p. 59–111.

[Fon94b] ———, Représentations p-adiques semi-stables, *Périodes p-adiques, Séminaire de Bures, 1988*, Astérisque 223, 1994, p. 113–183.

[Gro72] A. Grothendieck – *Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA7) I*, Lecture Notes in Math. 288, Springer, 1972.

[HK94] O. Hyodo & K. Kato – Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles, *Périodes p-adiques, Séminaire de Bures, 1988*, Astérisque 223, 1994, p. 221–268.

[Hyo88] O. Hyodo – A note on p-adic etale cohomology in the semi-stable reduction case, *Invent. math.* **91** (1988), p. 543–557.

[Hyo91] ———, On the de Rham-Witt complex attached to a semi-stable family, *Compositio Mathematica* **78** (1991), p. 241–260.

[Ill90] L. Illusie – Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique, *Séminaire Bourbaki 1989/90, Exp. 726*, Astérisque 189–190, 1990, p. 325–374.

[Jan89] U. Jannsen – On the l-adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology, *Galois groups over* $\mathbb{Q}$, Springer, 1989, p. 315–360.

[Kat87] K. Kato – On p-adic vanishing cycles (Application of ideas of Fontaine-Messing), Advanced Studies in Pure Math. 10, 1987, p. 207–251.

[Kat89] ———, Logarithmic structures of Fontaine-Illusie, *Algebraic analysis, geometry, and number theory*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989, p. 191–224.

[Kat94a] ———, Semi-stable reduction and p-adic etale cohomology, *Périodes p-adiques, Séminaire de Bures, 1988*, Astérisque 223, 1994, p. 269–293.

[Kat94b] ———, Toric singularities, *Amer. J. Math.* **116** (1994), p. 1073–1099.

[KM92] K. Kato & W. Messing – Syntomic cohomology and p-adic étale cohomology, *Tôhoku Math. J.* **44** (1992), p. 1–9.

[Kur87] M. Kurihara – A note on p-adic etale cohomology, *Proc. Japan. Academy* **63** (1987), p. 275–278.

[Niz98a] W. Niziol – Crystalline conjecture via K-theory, *Ann. Scient. E. N. S.* **31** (1998), p. 659–681.

[Niz98b] ———, *Semi-stable conjecture for vertical log-smooth families*, 1998, preprint.

[Ser67] J.-P. Serre – Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles, *Proc. of a Conf. on local fields, Driebergen 1966*, Springer, 1967, p. 118–131.

[Tat67] J. Tate – p-divisible groups, *Proc. of a Conf. on local fields, Driebergen 1966*, Springer, 1967, p. 158–183.

[Tsu96] T. Tsuji – Syntomic complexes and p-adic vanishing cycles, *J. reine angew. Math.* **472** (1996), p. 69–138.

[Tsu98] T. Tsuji – p-adic Hodge theory in the semi-stable reduction case, *Proceedings of the ICM, Vol. II (Berlin, 1998)*, Doc. Math., 1998, p. 207–216.

[Tsu99] T. Tsuji – p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case, *Invent. math* **137** (1999), p. 233–411.

T. Tsuji, Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro, Tokyo 153-8914, Japan • *E-mail :* t-tsuji@ms.u-tokyo.ac.jp

TABLE DES MATIÈRES GÉNÉRALE

Volume I
- Introduction
- Shinichi Mochizuki — *An Introduction to p-adic Teichmüller Theory*
- Peter Schneider & Jeremy Teitelbaum — *p-adic boundary values*
- Thomas Zink — *The Display of a Formal p-Divisible Group*

Volume II
- Introduction
- Pierre Berthelot — *Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules*
- Christophe Breuil & William Messing — *Torsion étale and crystalline cohomologies*
- Gilles Christol & Zoghman Mebkhout — *Équations différentielles p-adiques et coefficients p-adiques sur les courbes*
- Gerd Faltings — *Almost Étale Extensions*
- Luc Illusie — *An Overview of the Work of K. Fujiwara, K. Kato, and C. Nakayama on Logarithmic Étale Cohomology*
- Takeshi Tsuji — *Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen : a survey*

Volume III
- Jean-Marc Fontaine — *Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques*
- Kazuya Kato — *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*

ASTÉRISQUE

2002

279. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (II), P. BERTHELOT, J.-M. FONTAINE, L. ILLUSIE, K. KATO, M. RAPOPORT, éditeurs
278. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (I), P. BERTHELOT, J.-M. FONTAINE, L. ILLUSIE, K. KATO, M. RAPOPORT, éditeurs
277. B. RÉMY – *Groupes de Kac-Moody déployés et presque déployés*
276. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1999/2000, exposés 865-879

2001

275. J.-M. BISMUT, S. GOETTE – *Families torsion and Morse functions*
274. A. BONNET, G. DAVID – *Cracktip is a global Mumford-Shah minimizer*
273. K. NISHIYAMA, H. OCHIAI, K. TANIGUCHI, H. YAMASHITA, S. KATO – *Nilpotent orbits, associated cycles and Whittaker models for highest weight representations*
272. M. BOILEAU, J. PORTI – *Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type (avec la collaboration de M. HEUSENER)*
271. M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA – *Ind-Sheaves*
270. M. BONK, J. HEINONEN, P. KOSKELA – *Uniformizing Gromov hyperbolic spaces*
269. J.-L. WALDSPURGER – *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*

2000

268. J. FRANCHETEAU, G. MÉTIVIER – *Existence de chocs faibles pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels*
267. R. CERF – *Large Deviations for three Dimensional Supercritical Percolation*
266. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1998/1999, exposés 850-864
265. O. BIQUARD – *Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques*
264. L. LIPSHITZ, Z. ROBINSON – *Rings of Separated Power Series and Quasi-Affinoid Geometry*
263. C. SABBAH – *Équations différentielles à points singuliers irréguliers et phénomène de Stokes en dimension 2*
262. A. VASY – *Propagation of singularities in three-body scattering*
261. Géométrie complexe et systèmes dynamiques, colloque en l'honneur d'Adrien Douady, Orsay 1995, M. FLEXOR, P. SENTENAC et J.-C. YOCCOZ, éditeurs

1999

260. S. D. CUTKOSKY – *Local monomialization and factorization of morphisms*
259. R. KRIKORIAN – *Réductibilité des systèmes produits-croisés à valeurs dans des groupes compacts*
258. Structure Theory of Set Addition, J.-M. DESHOUILLERS, B. LANDREAU and A.A. YUDIN, editors
257. J.-P. LABESSE – *Cohomologie, stabilisation et changement de base (avec la collaboration de L. BREEN et L. CLOZEL)*
256. F. MOREL – *Théorie homotopique des schémas*
255. R.E. KOTTWITZ, D. SHELSTAD – *Foundations of twisted endoscopy*
254. C.J. BUSHNELL, G. HENNIART – *Local tame lifting for $\mathrm{GL}(n)$ II : wildly ramified supercuspidals*
253. B. MAGNERON – *Involutions complexes et vecteurs sphériques associés pour les groupes de Lie nilpotents réels*

1998

252. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1997/1998, exposés 835-849
251. Nombre et répartition de points de hauteur bornée, E. PEYRE, éditeur
250. C. BONATTI, R. LANGEVIN – *Difféomorphismes de Smale des surfaces (avec la collaboration de E. JEANDENANS)*
249. P. AUSCHER, P. TCHAMITCHIAN – *Square root problem for divergence operators and related topics*
248. P. COLMEZ – *Intégration sur les variétés p-adiques*
247. G. PISIER – *Non-commutative vector valued L_p-spaces and completely p-summing maps*

1997

246. V. TARASOV, A. VARCHENKO – *Geometry of q-hypergeometric functions, quantum affine algebras and elliptic quantum groups*
245. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1996/1997, exposés 820-834
244. J.-M. BISMUT – *Holomorphic families of immersions and higher analytic torsion forms*
243. L. LAFFORGUE – *Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson*
242. N. BURQ – *Pôles de diffusion engendrés par un coin*
241. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1995/1996, exposés 805-819

1996

240. A. SÀ BARETTO, R. B. MELROSE, M. ZWORSKI – *Semilinear diffraction of conormal waves*
239. J.-L. VERDIER – *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*
238. A. BROISE, F. DAL'BO, M. PEIGNÉ – *Méthodes des opérateurs de transfert : transformations dilatantes de l'intervalle et dénombrement de géodésiques fermées*
237. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1994/1995, exposés 790-804
236. Hommage à P. A. MEYER et J. NEVEU
235. J.-P. OTAL – *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*
234. A. GENESTIER – *Espaces symétriques de Drinfeld*

1995

233. I. KRIZ, J.P. MAY – *Operads, algebras modules and motives*
232. Recent advances in operator algebras (Orléans, 1992)
231. J.-C. YOCCOZ – *Petits diviseurs en dimension 1*
230. J.-Y. CHEMIN – *Fluides parfaits incompressibles*
229. B. PERRIN-RIOU – *Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques*
228. Columbia University number theory seminar (New-York, 1992)
227. SÉMINAIRE BOURBAKI, volume 1993/1994, exposés 775-789

1994

226. K-theory (Strasbourg, 1992)
225. L. BREEN – *On the classification of 2-gerbes and 2-stacks*
224. P. SCHAPIRA, J.-P. SCHNEIDERS – *Index theorem for elliptic pairs*
223. Périodes p-adiques (séminaire de Bures, 1988)
222. Complex analytic methods in dynamical systems (IMPA, janvier 1992)
221. A. OGUS – *F-Crystals, Griffiths transversality, and the Hodge decomposition*
220. H.H. ANDERSEN, J.C. JANTZEN, W. SOERGEL – *Représentations of quantum groups at a p-th root of unity and of semisimple groups in characteristic p : independence of p*
219. H. RUBENTHALER – *Les paires duales dans les algèbres de Lie réductives*